RODET, LÉON

L'algèbre d'Al-Khârizmi et les méthodes indienne et grecque

PDF created at Gallica, downloaded from Wilbourhall.org

Imprimerie nationale

***Paris* 1878**

A-II-b,,
72

L'ALGÈBRE D'AL-KHARIZMI

ET

LES MÉTHODES INDIENNE ET GRECQUE,

PAR

M. LÉON RODET,

INGÉNIEUR DES MANUFACTURES DE L'ÉTAT.



PARIS,

IMPRIMERIE NATIONALE.

M DCCC LXXVIII.

A 2 t
72

L'ALGÈBRE D'AL-KHÂRIZMI

ET

LES MÉTHODES INDIENNE ET GRECQUE.

ERNEST LEROUX, ÉDITEUR,

LIBRAIRE DE LA SOCIÉTÉ ASIATIQUE,
DE L'ÉCOLE DES LANGUES ORIENTALES VIVANTES, ETC.

Rue Bonaparte, 28.

MARS 1961

L'ALGÈBRE D'AL-KHÂRIZMI

ET

LES MÉTHODES INDIENNE ET GRECQUE,

PAR

M. LÉON RODET,

INGÉNIEUR DES MANUFACTURES DE L'ÉTAT.

EXTRAIT DU JOURNAL ASIATIQUE.



PARIS.

IMPRIMERIE NATIONALE.

M DCCC LXXVIII.

L'ALGÈBRE D'AL-KHÂRIZMI

ET

LES MÉTHODES INDIENNE ET GRECQUE.

Il est admis à peu près universellement parmi les historiens des mathématiques que Mohammed ben Mouça Al-Khârizmi, chargé par le khalife Al-Mâmoun d'initier les Arabes à la science mathématique telle que la possédaient les Hindous, a fidèlement rempli sa mission et consigné dans ses écrits les principes et les méthodes de cette science, et c'est persuadés de la légitimité de cette croyance que les savants qui se sont le plus occupés de l'histoire du développement des mathématiques sous l'influence des Orientaux, Woepcke, Sédillot, MM. Cantor, Th. Henri Martin et autres[1], se sont crus autorisés à

[1] Je ne nomme point ici M. Chasles, bien que ses travaux sur l'histoire des mathématiques soient sans conteste les plus justement estimés, parce que, comme il ne possède pas les langues orientales, ni même quelques-unes des langues modernes de l'Europe

apprécier les méthodes indiennes d'après les ouvrages d'Al-Khârizmi qui sont parvenus jusqu'à nous.

Ces savants, du reste, avaient été confirmés dans leur opinion par les notes dont Rosen a accompagné son édition, faite à Londres en 1831, de l'*Algèbre* de Mohammed ben Mouça. Dans ces notes en effet, il cite parfois, en sanscrit, des passages empruntés à l'Âtchârya[1] Bhâskara, lesquels sont assez bien d'accord, ou du moins paraissent l'être[2], avec les doctrines et les procédés de l'auteur arabe. Ils ont cru sans doute, en voyant ces citations faites dans le langage original par Rosen, celui-ci au courant du système des Indiens, et ils ont accepté de confiance toutes ses assertions, qui se trouvaient d'accord, du reste, avec la tradition musulmane.

Il n'eût pourtant pas été difficile aux écrivains dont je parle de se faire une idée exacte des méthodes indiennes en se reportant tout simplement

dans lesquelles ont été écrits plusieurs ouvrages contenant les documents originaux de la question, il a dû s'en rapporter au témoignage d'autrui, et les reproches que j'adresse à ses conseillers ne sauraient lui être adressés personnellement.

[1] On nomme habituellement cet auteur *Bhâskarâtchârya*, et c'est ainsi que Colebrooke le désigne dans son *Algebra of the Hindoos*. Mais *âchârya* आचार्य n'est qu'un titre honorifique qui signifie quelque chose comme « docteur », et il convient de débarrasser de cette finale encombrante le nom de notre personnage, qui devient bien plus coulant sous sa forme simple भास्कर *Bhâskara*.

[2] Je reprends plus loin une des citations de Rosen, celle qui concerne la résolution de l'équation trinôme du second degré, et je fais voir que, même dans le texte dont il s'agit, l'auteur emploie certaines expressions qui sont purement indiennes, nullement arabes.

au bel ouvrage de Colebrooke : *Indian Algebra with mensuration*, où se trouvent traduits avec une très-grande exactitude scientifique, et expliqués au moyen d'emprunts fort judicieux faits aux commentateurs indigènes, les traités authentiques de Bhâskara (XII^e^ siècle) et de Brahmagoupta (VIII^e^ siècle), ce dernier un peu antérieur par conséquent à Al-Khârizmi. Ils n'auraient pu manquer de reconnaître, comme je l'ai fait moi-même, que les citations de Rosen, et en particulier celle qui concerne la résolution de l'équation trinôme du second degré, sont empruntées non pas au Traité d'Algèbre (*Vija-gaṇita*) de Bhâskara, mais à la *Lîlâvati*, c'est-à-dire au Traité d'Arithmétique *dédié à une femme*[1] par cet auteur, traité qui ne devait, par conséquent, fournir qu'un procédé rapide, empirique, mécanique même si l'on veut, pour atteindre rapidement, *arithmétiquement*, à la solution de problèmes dont l'énoncé donnait lui-même l'équation à résoudre[2]. Dans le *Vija-gaṇita* ils auraient rencontré, expliqués dans le plus grand détail, des procédés de préparation et de résolution de l'équation du second degré *entièrement différents* des procédés suivis par les

[1] *Lîlâvatî*, qui sert de titre au traité d'arithmétique de Bhâskara, veut dire « charmante ». Les énoncés de problèmes donnés dans cet ouvrage sont adressés tous à une femme à qui l'auteur prodigue les plus gracieuses épithètes dont le vocabulaire de la galanterie orientale est si riche.

[2] Tout ceci sera démontré plus loin lorsque j'étudierai ce procédé de résolution, afin de faire ressortir les notions d'une généralité étonnante que possédaient les mathématiciens indiens.

Arabes et particulièrement par Al-Khârizmi, leur maître à tous; et en voyant ces mêmes procédés et les méthodes qui y conduisent se retrouver au moins en germe (le laconisme du texte ne permet pas d'y voir davantage, mais ce germe porte bien déjà tous les caractères spécifiques propres à le faire reconnaître) chez Brahmagoupta, ils auraient, je n'en doute pas, été convaincus comme moi que Mohammed ben Mouça Al-Khârizmi n'a nullement consigné dans son Traité d'algèbre le principe de la science mathématique telle que la possédaient ses contemporains de l'Inde, et nous pouvons même ajouter ses prédécesseurs, aujourd'hui que la publication par M. Kern d'un ouvrage d'Âryabhaṭa (VI^e^ siècle)[1] nous donne le moyen de vérifier que

[1] Nous connaissons aujourd'hui très-exactement l'âge d'Âryabhaṭa par le distique suivant inséré au chapitre III de l'*Âryabhaṭîyam*.

षष्यब्दानां षष्टिर्यदा व्यतीतास्त्रयश्च युगपादाः ।
त्र्यधिका विंशतिरब्दास्तदेह मम जन्मनो ऽतीताः ॥ १० ॥

Shaṣṭy-abdânâm shaṣṭir yadâ vyatîtâs
trayaç ca yuga-pâdâs,
Try-adhikâ vinçatir abdâs, tadâ-iha
mama janmano 'tîtâs.

Quand soixante fois soixante ans
Et trois yougas ont sonné, sans doutance
J'ai pu compter vingt et trois ans
De ma propre existence.

L'auteur était donc né en l'an 3600 — 23 = 3577 du kali-youga. Or l'ère actuelle des Indiens, qui répond à l'an 78 de notre ère, a commencé, suivant Brahmagoupta cité par Colebrooke (*Intro-*

déjà ce patriarche des mathématiciens indiens possédait les mêmes notions, et sur bien des points pratiquait les mêmes procédés que nous voyons développés et expliqués de plus en plus clairement par ses successeurs et disciples.

Je me propose, dans les pages qui vont suivre, d'établir ce fait d'une façon irréfutable en ce qui concerne les principes de l'*algèbre*. J'aborderai peut-être un jour une démonstration analogue pour l'*arithmétique*, et particulièrement le *calcul des fractions;* mais je n'ai point encore entre les mains les documents nécessaires, entre autres le Traité *Algorismi de numero Yndorum* qui contient, dit-on, la doctrine de Mohammed ben Mouça sur cette science. Pour le Traité d'algèbre, nous possédons le texte arabe, en une édition assez imparfaite, il est vrai[1], mais enfin que nous pouvons regarder comme suffisamment authentique pour en conclure les méthodes et les notions scientifiques de l'auteur. Aussi ai-je

duction, p. xliij), en l'an 3179 du kali-youga, dont la première année tombe donc en 3101 ou 3102 avant J.C.; par suite, Âryabhaṭa est né en 3577 — 3102 ou 475 de notre ère, et a pu commencer à écrire à partir de l'an 500. Le journal de l'École polytechnique contiendra, dans son prochain numéro, un essai de traduction du chapitre II de l'*Âryabhaṭṭya* où sont exposés les principes d'arithmétique, de géométrie et d'algèbre rédigés par cet antique auteur.

[1] On sait que cette édition a été faite par Rosen d'après *un seul* manuscrit tellement peu soigné qu'il ne portait même pas les points diacritiques, c'est-à-dire (j'ajoute ceci pour la satisfaction des lecteurs qui ne connaissent point l'écriture arabe) les points à l'aide desquels on distingue, par exemple, un *b* d'un *t*, d'un *th*, d'un *n* ou d'un *y*, un *r* d'un *z*, un *f* d'un *q*, etc. J'aurai plus loin à tirer argument de cette imperfection du texte.

choisi ce traité pour en faire l'objet de ma première étude critique.

Je passerai successivement en revue les points suivants :

1° Manière de considérer et de traiter les termes affectés des signes + et — qui entrent dans les expressions algébriques;

2° Moyens employés pour passer de l'équation primitive d'un problème, c'est-à-dire de l'énoncé traduit en langage algébrique, à l'équation finale, celle d'où, par un procédé quasi mécanique, le même pour tous les problèmes, on tire la valeur de l'inconnue;

3° Mode particulier de résolution de l'équation complète du second degré;

4° Interprétation de la double solution de cette équation dans le cas où elle en a deux positives.

Je ne m'occuperai que des problèmes à une seule inconnue, puisque Al-Khârizmi n'a pas abordé dans son livre de questions où il en entre plusieurs.

J'exposerai d'abord les doctrines de Mohammed ben Mouça sur chacun de ces points, en citant toujours à l'appui le texte original, et discutant, toutes les fois que la chose me paraîtra nécessaire, la valeur des termes dont il fait usage. Ceci me paraît d'une grande importance : les expressions choisies par un écrivain créateur, comme Al-Khârizmi, d'un vocabulaire scientifique, permettent souvent d'apercevoir quelle est au fond l'idée qui l'a conduit au choix de ces expressions, et, par conséquent, de se rendre

compte, jusque dans les plus intimes détails, de ses notions scientifiques. Je démontrerai ensuite, par des citations empruntées à Bhâskara, que l'École indienne avait, sur les points en question, des manières de voir et des pratiques entièrement opposées à celles de l'auteur arabe. Je montrerai que ces manières de voir et ces pratiques existaient déjà dans l'école du temps de Brahmagoupta, et même d'Âryabhaṭa, et par conséquent qu'Al-Khârizmi eût pu, s'il en avait pris la peine, s'assimiler ces notions. Pour les extraits de Bhâskara et d'Âryabhaṭa, je pourrai donner également le texte original : j'aurais bien désiré, pour les motifs exposés plus haut, pouvoir en faire autant à l'égard de Brahmagoupta; mais par malheur le seul manuscrit renfermant l'ouvrage de cet auteur (le *Brahma-Siddhânta*) que nous possédions à Paris s'arrête à la fin de la seizième section, et c'est dans la dix-huitième seulement que se trouve le Traité d'algèbre. J'ai donc dû me borner à faire mes citations d'après la version anglaise de Colebrooke, dont l'exactitude n'est pas douteuse, ainsi que j'ai pu m'en convaincre d'après les parties dont je possède le texte original, c'est-à-dire tout l'ouvrage de Bhâskara et les chapitres de Brahmagoupta lui-même relatifs à l'arithmétique et à la géométrie. Seulement, comme l'anglais de Colebrooke n'est pas l'œuvre même de l'écrivain indien, je me bornerai à en donner tout de suite la traduction française.

Je dois avertir aussi que dans mes citations d'Al-Khârizmi je me permettrai souvent, pour raccourcir

son texte un peu trop prolixe, d'employer la notation des nombres en chiffres, et de faire usage des signes algébriques retrouvés par Woepcke dans deux manuscrits de l'auteur espagnol Al-Qalçâdi, sur lesquels il a publié une notice étendue dans le *Journal asiatique* en 1854. Je m'en servirai uniquement parce que ces signes sont adaptés à l'écriture arabe au milieu de laquelle ils ne jurent pas, et qu'ils me fournissent le moyen, je le répète, d'avoir un texte plus court et plus facile à lire.

La comparaison que j'établirai, comme il vient d'être dit, entre les notions scientifiques d'Al-Khârizmi et celles de l'école indienne démontrera sans peine qu'il n'appartient pas à cette dernière. Mais ce n'est pas là la seule chose que je prétends prouver : je veux faire voir encore qu'il est purement et simplement disciple de l'école grecque; et à cet effet, à la suite de chacune des questions énumérées ci-dessus, je citerai également des textes empruntés à Diophante, et se rapportant aux mêmes sujets. L'identité absolue des manières de voir et des méthodes de l'algébriste alexandrin et de celles de l'auteur arabe démontrera, je l'espère, la vérité du second côté de la question que je désire établir.

Et à ce propos, qu'on me permette d'exposer ici ma profession de foi sur deux points de l'histoire de la propagation des mathématiques :

1° L'influence des Grecs sur la civilisation indienne postérieure à notre ère est un fait historique tellement bien établi qu'il n'est plus possible de le

nier aujourd'hui, et, dans l'état actuel de nos connaissances, on doit penser que des notions importées de la Grèce ont servi de base aux mathématiques comme à l'astronomie telle que nous la voyons traitée par les auteurs indiens dont les ouvrages sont arrivés jusqu'à nous. Mais tandis que les Grecs étaient en géométrie d'une force qui nous étonne tous les jours, et en calcul les ignares que l'on sait, pour qui une simple multiplication était une tâche des plus pénibles, les Indiens, au contraire, ont été peu habiles géomètres, même après les leçons qu'ils ont pu recevoir des Grecs, tandis qu'ils ont eu pour le calcul une disposition naturelle toute particulière, ainsi qu'il ressort des exemples bien connus de calculs compliqués effectués par eux à des époques qui remontent jusqu'à une antiquité quasi légendaire. Les premières notions de l'algèbre leur ont été également, je l'admets jusqu'à plus ample informé, apportées de la Grèce, et je pense en avoir retrouvé un indice dans l'emploi de quelques termes techniques que je relèverai plus loin. Mais tandis que les Grecs ne faisaient rien, même en algèbre, sans le secours de la géométrie, et qu'en particulier ils n'étaient arrivés à la résolution de l'équation du second degré que géométriquement, les Indiens au contraire ont donné, et de très-bonne heure, au côté purement spéculatif et abstrait du calcul un développement des plus remarquable; il s'est formé une véritable *École indienne* qui a perfectionné et simplifié les opérations de l'arithmétique, et introduit en al-

gèbre des conceptions d'une généralité et d'une élévation que nous sommes tout étonnés de trouver chez eux à une époque où l'Occident tout entier se traînait encore dans des considérations étroites et absolument terre à terre. Ces idées leur seraient-elles venues, soit directement, soit par l'intermédiaire des Perses, de Babylone où les découvertes modernes, d'accord avec la tradition historique, nous font entrevoir que les connaissances mathématiques avaient atteint déjà un degré de perfectionnement assez remarquable? La chose est possible; mais en tout cas les Indiens auraient su s'assimiler ces connaissances et nous les conserver, ce qui constituerait à soi seul un assez beau titre de gloire pour l'école indienne.

2° On a fait valoir en faveur de l'origine indienne de l'algèbre d'Al-Khârizmi ce fait que Diophante, le seul auteur grec à nous connu qui ait écrit sur cette science, n'a été traduit en arabe que postérieurement à Mohammed ben Mouça. Mais d'abord, de ce que Diophante n'était pas traduit en arabe, il n'en résulte pas d'une manière absolue qu'il n'ait point été connu dans l'empire des Khalifes, et notre auteur aurait pu lire ce traité soit en syriaque, soit peut-être en pehlevi, soit même en grec. Puis, d'un autre côté, il est bien établi aujourd'hui que Diophante n'est pas l'*inventeur* de l'algèbre : son livre n'est pas un traité didactique d'un art nouveau, mais simplement une application de cet art à la solution de certains problèmes de la *théorie des nombres*, et les *éléments d'algèbre* qui se trouvent dans son introduction ne sont

et ne peuvent être qu'un de ces résumés, de ces *rappels de la méthode* que tous les auteurs, même de nos jours, sont dans l'usage de faire figurer en tête de leur livre pour venir en aide à la mémoire du lecteur. Il n'est donc pas impossible que les principes de l'algèbre grecque aient été connus des Arabes, et surtout des Persans bactriens au milieu desquels était né, comme son surnom l'indique, Mohammed ben Mouça Al-Khârizmi. Quoi qu'il en soit, sa méthode est purement grecque : c'est un fait qui s'impose avec toute la brutalité ordinaire d'un fait.

Ces préliminaires établis, j'aborde l'étude des différentes questions que j'ai énumérées plus haut.

I.

MANIÈRE DE CONSIDÉRER ET DE TRAITER LES TERMES AFFECTÉS DES SIGNES + ET —.

Mohammed ben Mouça, on l'a déjà remarqué bien des fois, ne donne pas de règle générale pour établir l'équation d'un problème et en dégager la valeur de l'inconnue; mais nous allons voir, par l'étude des exemples que je vais citer, qu'il suivait exactement la règle formulée plus tard par ses successeurs, règle dont je donnerai en son lieu l'énoncé d'après Behâ ed-Dîn, et qui se retrouve chez d'autres auteurs cités par Woepcke dans ses travaux. Mais après avoir exposé la manière d'effectuer les quatre opérations fondamentales (énumérées dans l'ordre suivant : multiplication, addition et soustraction, division) sur des

expressions contenant des inconnues ou des radicaux, il passe à la définition des « six problèmes » المسائل الست ou des « six cas » الابواب الستة, savoir :

$ax^2 = bx$	$ax^2 + bx = c$
$ax^2 = c$	$ax^2 + c = bx$
$bx = c$	$bx + c = ax^2$

et à la démonstration *géométrique* (une démonstration spéciale pour chaque cas) de la manière d'en dégager la valeur de l'inconnue.

Une semblable distinction ne se rencontre nulle part chez les auteurs indiens, et *ne peut pas* s'y rencontrer, ceci pour deux raisons :

1° Les trois premiers cas ne sauraient exister sous cette forme pour les algébristes indiens, à cause de la façon même dont ils écrivent leurs équations. Voici en effet la règle que donne à ce sujet Bhâskara :

यावत्तावत्कल्पं अव्यक्तराशेर्मानं
तस्मिन्कुर्वतां यथोद्दिष्टमेव।
तुल्यौ पक्षौ साधनीयौ प्रयत्नात्
क्षिप्त्वा पत्त्वा वापि सङ्गुण्य भक्त्वा ॥१००॥[1]

Yâvattâvat kalpam avyakta-râçer mânam
tasmin kurvatâm yathâ-uddiṣṭam eva ;
Tulyau pakṣau sâdhanîyau prayatnât
kṣiptvâ, pattvâ vâpi saṅgunya, bhaktvâ.

[1] Les numéros que j'ajoute aux distiques de l'auteur correspond à ceux de la traduction de Colebrooke.

Appelant x la mesure de la quantité inconnue, on fera à l'aide de ce [symbole] ce qui est prescrit [par l'énoncé]; puis on préparera adroitement *deux membres en équilibre*, en ajoutant, retranchant, multipliant ou divisant [1].

L'adjectif *tulya*, par lequel l'auteur de ce distique[2] caractérise le genre d'égalité des *paxau*, des « deux membres » de l'équation, dérive de *tulâ* « balance » : voilà pourquoi je l'ai traduit par « en équilibre », terme qu'il faut prendre ici dans son sens primitif, et pour ainsi dire matériel, *æqua libra;* or, la *tulâ*, la « balance », ne peut s'établir qu'entre quantités de même espèce: il faut donc que les deux membres de l'équation renferment des quantités de même espèce, c'est-à-dire les mêmes puissances de l'inconnue (y compris la puissance *zéro* ou le nombre absolu *rûpa*), sauf à donner le coefficient o à celle de ces puissances qui ne figure pas en réalité dans le problème. En un mot, pour les Indiens, les deux membres de l'équation doivent être *homogènes*. Les trois premiers cas d'Al-Khârizmi, pour lesquels cet auteur donne les exemples numériques suivants :

٥ ل ١٠	٩ ل ١٠٠ درام ٢٥	٥ ل ٢٠
$5x = 10$	$\frac{25}{9}x^2 = 100$	$5x^2 = 40x$

[1] Je donnerai plus tard, en son lieu, la suite de la règle.

[2] J'emploie ici cette expression vague parce qu'il semblerait souvent que la partie en vers du *Vîja-ganita* ne soit pas l'œuvre de Bhâskara, mais nous donne des formules courantes dans l'École, qu'il recueille et commente ensuite en prose. Si ce fait pouvait être cons-

s'écrivaient donc chez eux

PREMIER CAS.

यावत ५ या० रू० }
यावत० या ४० रू० } $5x^2+0x+0=0x^2+40x+0$

DEUXIÈME CAS.

यावत $\frac{२५}{१}$ या० रू० }
यावत० या० रू १०० } $\frac{25}{9}x^2+0x+0=0x^2+0x+100$

TROISIÈME CAS.

यावत ५ रू० }
यावत० रू १० } $5x+0=0x+10$

Les deux premiers cas rentrent ainsi dans la formule générale du second degré; le troisième constitue l'équation du premier degré, *dont les Indiens font comme nous une famille à part*, qu'ils étudient tout spécialement avant d'aborder les équations de degré supérieur, et à laquelle ils ramènent ces dernières, ainsi que nous le verrons plus tard pour les équations du second degré. La résolution de celles-ci porte en effet chez eux, et dès l'époque de Brahmagoupta, le nom de मध्यमाहरणं *madhyama-âharaṇam*, « ablation du [terme] moyen », c'est-à-dire

taté, il donnerait aux règles ainsi formulées en vers une importance plus grande encore pour le point qui nous occupe.

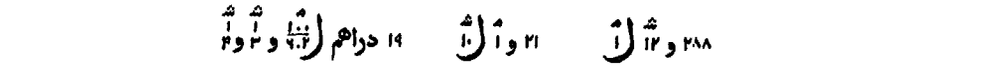
« réduction du trinôme (du second degré) à un binôme (du premier) ».

2° La distinction des trois autres cas par les Arabes est due à cette raison toute spéciale qu'ils tiennent à n'avoir, dans une équation définitive, *que des termes tous positifs;* en conséquence, dans la formule générale

$$ax^2 \pm bx \pm c = 0$$

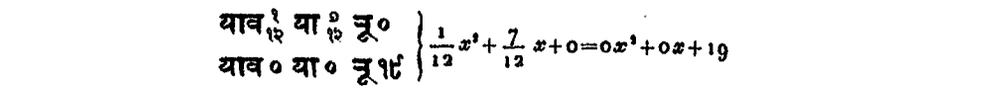
ils changent de membre tout terme affecté du signe —, d'où les trois cas énoncés et étudiés à part par Al-Khârizmi.

Les Indiens n'éprouvent pas le même besoin et ne sont pas gênés par un terme négatif, parce que, pour eux qui ont, comme nous, la notion du *nombre négatif*, le signe — porte, non pas sur le *terme*, mais sur le *coefficient numérique* de ce terme : les trois cas en question, ou plutôt les exemples numériques que Mohammed ben Mouça en donne, savoir :



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}x^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x=19 \qquad 10x=x^2+21 \qquad x^2=12x+288$$

s'écrivaient dans l'Inde, comme résultat définitif auquel il n'y avait plus à retoucher,



$$\frac{1}{12}x^2+\frac{7}{12}x+0=0x^2+0x+19$$

यावत्तावत् १ या १० रू ० } $x^2+\overline{10}x+0=0x^2+0x+\overline{21}$
यावत्तावत् ० या ० रू २१ }

यावत्तावत् १ या १२ रू ० } $x^2+\overline{12}x+0=0x^2+0x+288$
यावत्तावत् ० या ० रू २८८ }

J'ai placé ici le signe — *au-dessus* des coefficients (comme on le fait pour les logarithmes à caractéristique seule négative), afin de suivre plus fidèlement l'exemple de la notation indienne qui place également son point, signe du négatif, au-dessus du coefficient et non au-dessus du terme entier.

Et qu'on ne croie pas que j'invente ces formules à plaisir : outre les exemples sans nombre que l'on en rencontre dans Bhâskara, et dont je citerai quelques-uns plus tard, on verra, par exemple, Brahmagoupta (problème n° 49, question 16 dans Colebrooke) partir de l'équation primitive

यावत्तावत् ० या १० रू ८ } $10x-8=x^2+1$
यावत्तावत् १ या ० रू १ }

pour en déduire

यावत्तावत् ० या ० रू ९ } $-9=x^2-10x$
यावत्तावत् १ या १० रू ० }

avec *deux termes négatifs*, qu'il résout, comme nous le verrons plus loin, sans se préoccuper aucunement de cette particularité.

Ceci tient, je l'ai dit, à ce que les mathématiciens de l'Inde ont, comme nous aujourd'hui, la notion du *nombre négatif* et de son interprétation comme symbole en géométrie et en physique. Ce fait est tellement important pour l'histoire de la science que je crois nécessaire de rapporter ici quelques textes sur lesquels il s'appuie.

Le premier Livre du *Vîja-gaṇita*, le « Traité d'algèbre » de Bhâskara, porte pour titre général षट्त्रिंशत्परिकर्माणि *shaṭ-trimçat pari-karmâṇi*, « les 36 opérations ». Il se subdivise en cinq chapitres comptant pour six comme suit :

1 et 2	धनर्ण-षट्कं	*dhana-ṛṇa*	*shaḍvidham* Les 6 opérations sur	plus et moins.
3	ख-०	*kha*		zéro.
4	अव्यक्त-०	*avyakta*		l'inconnue.
5	अनेकवर्ण-०	*aneka-varṇa*		plusieurs inconnues.
6	करणी-०	*karaṇî*		les irrationnels ou radicaux.

Bhâskara compte *six* opérations, parce que, comme quelques mathématiciens ont récemment proposé de le faire, il joint à nos *quatre* opérations ordinaires *l'élévation aux puissances* et *l'extraction des racines*.

Or, le premier de ces chapitres est conçu dans les termes suivants : je supprime, bien entendu, les exemples, et ne donne que les règles, les *sûtras*, comme disent les Indiens :

योगे युतिः स्यात् क्षययोः स्वयोर्वा।
धनर्णयोरन्तरमेव योगः॥
संशोध्यमानं स्वमृणत्वमेति।
स्वत्वं क्षयस्तद्युतिरुक्तवच्च॥
स्वयोःस्वयोः स्वं बधः। स्वर्णघाते क्षयः।
भागहारेणा ऽपि चैव निरुक्तं॥
कृतिः स्वर्णयोः स्वं। स्वमूले धनर्णे।
न मूलं क्षयस्यास्ति तस्याकृतित्वात्॥

1. *Yôge yutis sydt xayayos svayor-vâ;*
dhana-rṇayor antaram eva yogas.
2. *Sançodhyamânam: svam ṛṇatvam eti,*
svatvam xayas tad-yutir uktavac ca.
3. *Svayor asvayos svam badhas; sva-rṇa-ghate xayas,*
bhâgahareṇa api caiva niruktam.
4. *Kṛtis sva-rṇayos svam; sva-mûle, dhana rṇe*
na mûlam xayasya asti tasya akṛtivât.

1. Dans l'addition, on ajoute deux *pertes* ou deux *fortunes*; la différence entre un *gain* et une *dette* est leur somme.

2. Pour la soustraction, le *bien* passe à l'état de *dette*, à l'état de *bien* la *perte;* puis on fait l'addition comme il est dit.

3. Le produit de deux *biens* ou de deux *non-biens* est un *bien;* de celui d'un *bien* par une *dette* résulte une *perte.* — Le même principe s'applique à la division.

4. Le carré d'un *bien* ou d'une *dette* est un *bien;* le *bien* a deux racines, une en *gain*, l'autre en *dette*. La racine d'une *perte* n'existe pas, parce que celle-ci n'est pas un carré.

Je me suis attaché à traduire ce passage aussi litté-

rulement que possible, afin de bien faire ressortir les termes mêmes dont les mathématiciens indiens se sont servis pour désigner les deux espèces de quantités en question. Les vrais noms, usités en prose à l'exclusion de tous autres, sont, pour les quantités positives, धनं *dhanam* « un bien, une propriété, une richesse, un profit », pour les négatives, ऋणं *ṛṇam*, « une dette »; et le seul fait du choix de cette dernière expression prouve que les Indiens concevaient l'existence de ces sortes de quantités par elles-mêmes, indépendamment de tout nombre dont elles pouvaient être soustraites: car il n'arrive que trop souvent, et dans l'Inde comme ailleurs, que certains individus sont criblés de dettes sans posséder le moindre capital où puiser pour les payer. Le synonyme qu'on donne en vers à ce mot, à savoir क्षय: *xayas*, « perte, déchet », confirme encore cette manière de voir. Puisque nous parlons de synonymes, celui de *dhanam*, स्वं *svam*, signifie littéralement *suum*, *proprium*. Ce qui prouve encore que par les mots en question les Indiens entendaient bien représenter des choses distinctes, existantes, réelles, c'est qu'ils ont pu former, ainsi qu'on le voit à la règle de la soustraction, les *noms d'état* ऋणत्वं *ṛṇatvam*, « l'état de dette », स्वत्वं *svatvam*, « l'état de propriété », comme un peu plus loin अकृतित्वं *akṛtitvam*, « la qualité de n'être pas un carré ». La phrase स्वं ऋणत्वं एति स्वत्वं क्षय: pourrait à la rigueur se rendre en latin par :

suum in debitatutem it, in suitutem amissum, en créant les mots *debitatūs*, *suitūs*, de *debitum* et *suum*, sur le même modèle que *senectūs* et *juventūs*, de *senex* et *juvenis*.

Enfin, et j'insiste encore sur ce point capital, *Bhâskara connaissait le double signe du radical du second degré*, puisqu'il dit en propres termes au n° 4 des règles précédentes : **स्वमूले धनर्णे** « *plus* a deux racines, une positive et une négative ». Nous verrons plus loin qu'il en fait usage dans la résolution des équations du second degré.

Un autre détail important à signaler est celui-ci, qui forme la première règle du **खषट्किं** *kha-shaḍvidham*, « les opérations sur zéro » :

खयोगे वियोगे धनर्णं तथैव च्युते
शून्यतस्तद्विपर्ययमेति ॥१२॥

Kha-yoge viyoge dhanarṇam tathâ-eva cyute
çûnyatas tad viparyayam eti.

Augmenté ou diminué de zéro, *bien* ou *dette* reste le même; retranché de zéro, il devient l'inverse.

De là à dire que la quantité négative n'est autre chose qu'une quantité positive comptée *au-dessous* ou *en arrière* de zéro, il n'y a qu'un pas, et nous verrons tout à l'heure que ce pas était franchi depuis longtemps pour l'école indienne.

Brahmagoupta s'exprime à peu près dans les mêmes termes :

« § 19. La somme de deux *biens* est un *bien;* celle « de deux *dettes* une *dette;* d'un *bien* et d'une *dette*, « leur différence, ou, si elles sont égales, zéro. La « somme de zéro et d'une *dette* est une *dette;* d'un *bien* « et de zéro est un *bien;* de deux zéros est zéro.

« § 20-21. Règle pour la soustraction. Le moindre « se retranche du plus grand, *bien* de *bien*, *dette* de « *dette;* mais si l'on soustrait le plus grand du plus « petit, l'excès est changé [de signe]. *Dette* retranchée « de zéro devient un *bien*, et *bien* devient une *dette*. « *Dette* moins zéro reste *dette*, *bien* reste *bien*. Si l'on « doit retrancher un *bien* d'une *dette* ou une *dette* « d'un *bien*, on en fait la somme. »

Ce passage est suffisant pour démontrer d'une façon indubitable que Brahmagoupta avait déjà, sur les quantités négatives, les notions générales que son successeur Bhâskara.

Âryabhaṭa faisait usage, lui aussi, des termes *dhanam* ou *svam*, *rnam* ou *kṣaya* dans le sens que nous venons de voir: ainsi dans son chapitre III, où il expose le mouvement des planètes, à propos de la correction à l'aide de laquelle on passe de la position fictive sur l'orbite, en vertu du mouvement moyen, à la position réelle, il dit :

ऋणधनधनक्षयास्युर्मन्दोच्चात्
व्यत्येन शीघ्रोच्चात्। ॥२२॥

Ṛṇa-dhana, dhana xayâs syur mandoccâd,
vyatyena çighroccât.

Que [ces corrections, sc.: celle de la vitesse et celle de la

position] soient *négative* et *positive*, ou *positive* et *négative*, à partir du sommet de lenteur, elles sont l'opposé à partir du sommet de vitesse [1].

Et il continue à indiquer quelles sont celles des planètes qui, à partir du « sommet de lenteur », ont ces corrections ou équations *ṛṇa-dhanam*, quelles sont celles qui les ont *dhanarṇam* ou *dhana-ṡayas*.

[1] Il est indispensable, pour l'intelligence de ce *sûtra*, de rappeler brièvement la façon dont les astronomes indiens calculent la position vraie स्फुटस्थितिं *sphuṭa-sthitim* d'un astre sur son orbite. Je la résume des notes de Burgess au *Sûrya-Siddhânta*. Ils supposent, pour les planètes supérieures, un astre fictif parcourant l'orbite d'un mouvement uniforme moyen entre la vitesse *maxima* à l'aphélie, ou, comme ils disent, au « sommet de rapidité » शीघ्रोच्चे *ṡighra-ucce*, et la vitesse *minima* au « sommet de lenteur » मन्दोच्चे *manda-ucce*. Ils obtiennent ainsi à chaque instant une « position moyenne » मध्यमं *madhyamam*, qu'il s'agit de rectifier au moyen de deux *corrections* ou équations, l'une relative à la position, l'autre à la vitesse. Si l'on part, comme notre auteur, du « sommet de lenteur » où les deux astres, le fictif et le réel, coïncident, l'astre réel, marchant moins vite que la vitesse moyenne, est constamment en arrière de l'astre fictif ou de la position moyenne, et l'*équation de position* est NÉGATIVE ऋणं *ṛṇam*; la vitesse, au contraire, va en croissant, et l'*équation de vitesse* est POSITIVE धनं *dhanam*. Le contraire a lieu évidemment après le passage au « sommet de rapidité ». — Je dois dire toutefois que, d'après le commentateur, cette distinction de + et — des corrections s'appliquerait à la distance comptée sur l'orbite à partir de deux points diamétralement opposés du zodiaque. — Pour les planètes inférieures, on prend pour मध्यमं *madhyamam*, « position moyenne », le lieu du Soleil, pour situation de la planète, le lieu de son nœud ascendant, ce qui change les signes des deux corrections. C'est à cause de cela qu'Âryabhaṭa dit dans le distique cité : « si les corrections sont *négative* et *positive* ou bien *positive* et *négative* en partant du sommet de lenteur », la première hypothèse s'appliquant aux planètes supérieures, la seconde aux inférieures.

Mais là ne se bornaient pas ses connaissances : il nous fournit, dans son chapitre II, la preuve qu'il savait *interpréter* comme nous le faisons aujourd'hui les *solutions négatives des problèmes*.

Voici le cas : il s'agit du fameux problème des courriers : on sait que si d désigne l'intervalle qui les sépare, v et v' leurs vitesses respectives, la distance x qu'ils parcourent encore avant de se rencontrer est donnée par la formule

$$x = \frac{v\,d}{v \pm v'}$$

Le signe + au dénominateur se rapportant au cas où, marchant en sens contraire, ils vont au-devant l'un de l'autre, le signe — au cas où l'un fuit et l'autre le poursuit. Dans ce dernier cas, si v', la vitesse de celui qui est le plus loin, est $> v$, vitesse du plus rapproché de l'observateur, la valeur de x est négative, et son signe — indique à l'algébriste moderne que la distance x doit être comptée *en arrière* du point d'observation : la rencontre a déjà eu lieu.

Ces principes rappelés sommairement, voici la solution d'Âryabhaṭa, qui la donne sans aucun calcul préliminaire; mais on peut s'en passer assurément.

भक्ते विलोमविवरे गतियोगेनानुलोमविवरे द्वे।
गत्यन्तरेण लब्धौ द्वियोगकालावतीतैष्यौ ॥३२॥

Bhakté vilóma vivaré gati-yógéna, anulóma-vivaré dvé
Gaty-antaréṇa labdhau dvi-yóga-kálâv, atîta-éshyau.

(Çloka 32 du livre II.)

Je traduis absolument mot à mot :

Si l'on divise l'intervalle en course opposée par la somme des vitesses, l'intervalle en course de même sens par la différence des vitesses, les deux quotients sont les temps de la jonction des deux, *au passé ou dans l'avenir.*

Deux points essentiels à noter :

1° Cet énoncé n'est autre chose que la lecture, en langage ordinaire, de la formule

$$\frac{x}{v} = \frac{d}{v \pm v'}$$

donc Âryabhaṭa avait sous les yeux quelque chose d'analogue à cette formule [1].

[1] Ce n'est pas le seul cas où Âryabhaṭa *lit des formules* que nous croyons avoir découvertes depuis peu : on sait que dans une progression arithmétique de raison r, le nombre n de termes que l'on a pris pour arriver à une somme S est donné par la formule :

$$n = \frac{r - 2a \pm \sqrt{(r-2a)^2 + 8rS}}{2r}$$

qu'on peut écrire encore

$$n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{-2a \pm \sqrt{(r-2a)^2 + 8rS}}{r}\right)$$

Or, voici la règle donnée par Âryabhaṭa pour ce cas :

गच्छो ऽष्टोत्तरगुणितादूद्विगुणाद्युत्तरविशेषवर्गयुतात् ॥
मूलं द्विगुणाद्यूनं स्वोत्तरभाजितं सदृग्दार्धं ॥१०॥

« Le nombre de termes est : la somme multipliée par 8 fois la raison,

2° L'instant de la rencontre *au passé ou dans l'avenir* (अतीत *atîta*, participe passé de *ati* + *i*; एष्य *eshya*, participe futur de *i*).

S'il est vrai, comme on veut le soutenir, que les Indiens aient tout emprunté aux Grecs, je demanderai quel est l'auteur grec qui a donné une pareille solution du problème des courriers, avec le double signe au dénominateur et le *double signe interprété de la solution !*

Puisque j'en suis à revendiquer pour les Indiens l'honneur d'avoir eu quelques idées en mathématiques, qu'on me permette une petite digression, qui n'a rien à voir avec notre sujet, mais qui ne nuira pas à la cause.

Brahmagoupta avait déjà dit, quelques stances plus loin que les règles que j'ai rapportées ci-dessus, et en continuant à enseigner la manière d'effectuer les « six opérations » sur *dhana-rṇa-kham*, « bien, dette et zéro »:

« Un *bien* ou une *dette*, divisé par zéro, est खच्छेदं *khacchédam*[1], la quantité qui a zéro pour dénominateur. »

ajoutée au carré de l'excès de deux fois le premier terme sur la raison; on en prend la racine carrée, qu'on diminue de deux fois le premier terme; on divise par la raison, on ajoute *un* et l'on prend la moitié.

On voit qu'Âryabhaṭa *lit* notre formule avec une exactitude scrupuleuse.

[1] Je me permets ici de corriger ce mot, que Colebrooke a lu तच्छेदं *tac-chédam*, « ce qui a *cela* pour dénominateur », m'appuyant

Il en faisait donc une quantité d'une espèce particulière.

Bhâskara, reprenant la question dans son chapitre खषट्विधं *kha-shaḍvidham*, « les six opérations sur zéro », s'exprime en ces termes.

न्यासः भाज्यः ३। भाजकः ०। भागे ज्ञातं $\frac{३}{०}$॥
अयमनन्तो राशिः खहर उच्यते॥ अस्मिन्न विकारः॥
खहरे न तु राशौ प्रतिसृष्टेषु विसृष्टेषु बहुष्वेव।
स्यान्नवसृष्टिः काले ऽनन्ते ऽच्युते भूतगणेषु हि यद्वत्॥

Nyasas: bhâjyas 3; bhâjakas 0; bhâgê jâtam $\frac{३}{०}$. *Ayam ananto râçis kha-hara ucyate. Asmin na vikâras:*
Kha-hare na tu râçâu pratisṛṣṭeshu visṛṣṭeshu bahushv eva
Syâl lava-sṛṣṭis, kâlé 'nante 'cyuto bhûta-gaṇeshu hi yadvat.

Exemple: dividende 3; diviseur 0; résultat de la division $\frac{३}{०}$ cette quantité qui est infinie s'appelle quotient par 0. Elle n'éprouve pas de changements.

A la quantité appelée « quotient par zéro », ni addition ni soustraction si grande qu'elle soit ne peut faire éprouver perte ou accroissement, pas plus qu'au temps sans fin et sans déclin des séries d'existences.

Et ceci a été écrit au commencement du XII[e]

sur l'autorité de Bhâskara qui, comme on va le voir, l'appelle खहर: *kha-haras*, « quotient par zéro ». Je n'hésite pas à attribuer la lecture de Colebrooke à une faute de copiste, bien que, je dois l'avouer, les lettres त *ta* et ख *kha*, dans aucune des écritures de l'Inde que je connaisse, ne se ressemblent assez pour expliquer cette confusion.

siècle! Je demanderai encore qu'on me fasse voir ces idées chez un écrivain grec.

Ainsi, il est bien établi que, dès le VI^e^ siècle de notre ère, les Indiens ont eu la notion du nombre négatif et de son interprétation dans la solution des problèmes; que, pour eux comme pour nous, le signe — placé devant un nombre indique que l'on doit, dans l'addition, soustraire les unités dont se compose ce nombre, les ajouter dans la soustraction; que, dans la multiplication ou la division, le résultat obtenu avec deux nombres de même signe est positif, avec deux nombres de signe contraire est négatif; que par suite le carré d'un nombre négatif est positif, et qu'un nombre positif a deux racines carrées, une positive, une négative; qu'un nombre négatif, produit de deux quantités, l'une positive, l'autre négative, n'est pas un carré (fin des règles de Bhâskara) et ne saurait avoir de racine carrée.

Dès lors, pourquoi se seraient-ils préoccupés d'avoir dans leurs équations, au moment de les résoudre, des termes tous positifs? Voilà pourquoi, comme je l'avançais en commençant cette digression peut-être un peu longue, la distinction des « trois formes » de l'équation complète du second degré, comme la faisaient les Arabes, n'a pas eu lieu d'exister dans l'Inde.

Mohammed bèn Mouça a-t-il su rapporter de l'Inde au moins un souvenir de ces notions? Il n'y paraît guère. Le mot dont il se sert pour désigner

les termes d'une équation affectés du signe — est ناقص *nâqis*, qui signifie, comme on le sait, « manquant de, privé de » : un amputé, par exemple, est *nâqis* de son bras ou de sa jambe; c'est donc très-improprement qu'Al-Khârizmi emploie cette expression pour désigner « la partie enlevée ». Aussi le mot en question n'a-t-il plus été employé par ses successeurs, et Behâ ed-Dîn qui, au moment d'exposer la *règle des signes* dans la multiplication algébrique, avait dit : وان كان استثناء يسمّى المستثنى منه زائدا والمستثنى ناقصا « s'il y a soustraction, on appelle ce dont on soustrait [1] *zâ'id* (additif), et ce que l'on soustrait *nâqis* (manquant de) », ne nomme plus dans la suite les termes négatifs que الاستثناء « les séparés, mis à part, retranchés ».

D'où vient ce mot ناقص? Il répond, si l'on veut, au sanscrit ऊन: *ûnas* ou au préfixe वि° *vi-*, au moyen desquels on indique la soustraction : व्येक: *vyékas* ou एकोन: *élikonas* veut dire « dont on a retranché 1 »; mais l'adjectif *ûnas* se rapporte ici au مستثنى منه « ce dont on a retranché », de Behâ ed-Dîn, et non à la quantité retranchée. Or, le grec possède et emploie en langage algébrique une expression tout à fait analogue, c'est l'adjectif ἐλλιπής, dont Diophante se sert, par exemple, pour définir le signe de la soustraction ↑ : ψ ἐλλιπές κατὰ νεῦον « un ψ incomplet incliné vers le bas ». L'arabe, j'en prends à témoin tous

[1] J'appellerai, en passant, l'attention du lecteur sur cette manière peu satisfaisante de définir l'additif.

les arabisants, traduirait ἐλλιπές par الناقص *en-nâqis*. Dans l'indication des opérations algébriques, Diophante lit, à la place de son signe ψ, ἐν λείψει : *μονάδες* $\bar{\text{ϵ}}$ *ἐν λείψει ἀριθμοῦ ἑνός*, dit-il ; mot à mot : « 2 unités manquant d'une inconnue » pour exprimer $2 - x$. Donc, s'il est possible qu'Al-Khârizmi ait emprunté, sauf l'emploi qu'il en fait, son ناقص au sanscrit ऊन, il pourrait tout aussi bien se faire qu'il l'eût pris au grec ἐν λείψει. Un autre indice va, je crois, faire pencher la balance du côté de cette seconde hypothèse.

L'auteur arabe énonce en ces termes la *Règle des signes* :

فاذا كانت عقود ومعها احاد او مستثنيا منها احدا فلا بد من ضربها اربع مرات ، العقود فى العقود ، والاحاد فى العقود ، والعقود فى الاحاد ، والاحاد فى الاحاد * فاذا كانت الاحد التى مع العقود زايدة [1] جميعا فالضرب الربع زايد ايضا * واذا كان احدهما زايدا والاخر ناقصا فالضرب الربع ناقص ۞

S'il y a des *8uqûd*, et, ajoutées ou retranchées à ceux-ci des unités, il n'y a pas moins de quatre produits à faire : 1° les *8uqûd* par les *8uqûd;* 2° les unités par les *8uqûd;* 3° les *8uqûd* par les unités, et 4° les unités par les unités. Et si les

[1] Le texte est évidemment ici très-défectueux ; il y manque la mention la plus intéressante, celle du cas où les deux termes sont tous deux négatifs, et où leur produit est positif ; il est certain, toutefois, et par les exemples qui suivent, et par la présence de l'adverbe ايضا « également », que ce membre de phrase devait exister. Au reste, cette faute et bien d'autres sont très-explicables pour cette édition, qui a été faite, je l'ai déjà dit, d'après un *seul manuscrit*, fort peu soigné, et qui *ne contenait même pas les points diacritiques*.

unités qui accompagnent les *ʿuqûd* sont additives toutes deux, alors le quatrième produit est [additif, et si elles sont toutes deux négatives, le quatrième produit est] additif également; mais si elles sont l'une additive, l'autre déficiente, alors le quatrième produit est déficient.

Je passe sur ce que cet énoncé, qui ne parle que du « quatrième produit », a d'incomplet; j'en ai donné en note l'explication, l'excuse probable; je ne veux m'attacher qu'à l'entrée en matière. Qu'est-ce que l'auteur a entendu par ces *ʿuqûd* opposés aux *unités*? Il n'est pas besoin d'être beaucoup versé dans l'histoire des mathématiques pour reconnaître ici une distinction très-familière aux écrivains du moyen âge, distinction que l'on retrouve dans Behâ ed-Dîn, établissant comme suit les divers cas de la multiplication en arithmétique : والاول اما آحاد فی آحاد او آحاد فی غیرها او غیرها فی غیرها « le premier cas, c'est quand on a à multiplier des unités par des unités, ou des unités par *ce qui n'en est pas*, ou *ce qui n'en est pas* par *ce qui n'en est pas* », que l'on retrouve plus nettement encore chez Aben-ʿEzra, qui, expliquant la manière d'écrire les nombres à l'indienne, nous dit :

והנה לעולם אם יש מספרם אחדים בתחלה וכללים שתם
עשרות, יכתוב בתחלה מספר האחדים ואחר כן מספר הכלל

Or toujours, si leur nombre est composé d'unités en commençant et d'un *nombre rond* (ce sont les dizaines), on écrira en commençant le nombre des unités, et ensuite le *nombre rond*.

Et plus loin :

ואם הכלל שלו מן מאות ועשרות

Et si son *nombre rond* se compose de centaines et de dizaines.....

La distinction en question est celle des *digiti* et *articuli* de Boèce et de son école.

Or, il n'est pas difficile de faire voir que non-seulement Al-Khârizmi a eu en vue cette distinction, mais que, bien plus, le terme de *8aqâd* pourrait bien n'être que la traduction de *articuli*. En effet, عُقُود *8uqûd*, est, suivant les lexiques arabes, le pluriel de عِقْد *8iqd*, qui signifie « guirlande, collier, nœud », ce qui justifie Woepcke, lorsqu'il a rencontré ce mot dans les auteurs arabes, de l'avoir rendu par « les *nœuds* des dizaines, etc. »; n'est-il pas permis, vu le mauvais état du seul manuscrit d'après lequel a été faite l'édition d'Al-Khârizmi, d'admettre ici une erreur, soit du copiste arabe, soit de l'éditeur anglais, et de lire عَقَد *8uqâd*? On aurait ainsi le pluriel régulier de عُقْدَة *8uqdat* « articulation, jointure », et la traduction littérale, comme je l'ai annoncé, de l'*articuli* de Boèce, qui n'était lui-même, comme on l'a déjà dit, que l'écho d'une dénomination analogue usitée chez les Grecs.

L'adoption par notre auteur de cette idée exclusivement occidentale nous autorise aussi à admettre que l'expression ناقص est copiée, non sur le sanscrit *ûna*, mais sur le grec ἐλλιπής ou ἐν λείψει, comme je l'avançais tout à l'heure.

Résumons, car il en est temps, cette digression peut-être un peu trop longue, et revenons à notre sujet.

Les Indiens, établissant une distinction de nature entre les nombres positifs et les nombres négatifs, et ayant défini, une fois pour toutes, la manière d'effectuer les opérations de l'arithmétique sur les uns et sur les autres, n'ont plus eu besoin de se préoccuper si les termes de leurs opérations étaient positifs ou négatifs, et *n'ont jamais eu lieu de faire la distinction des six problèmes* qu'Al-Khârizmi et son école prennent pour base de toute leur algèbre.

Mais, dira-t-on, les Grecs non plus n'ont pas fait cette distinction des six cas. Qu'en sait-on? Diophante ne la formule pas, il est vrai; mais, encore une fois, Diophante n'a pas écrit un *Traité d'algèbre;* il suppose connus de ses lecteurs une foule de principes essentiels; et comme, *en fait*, il ramène toujours ses équations à l'un des « six cas » des Arabes [1], on est en droit de supposer tout légitimement que quelque auteur antérieur, traitant des méthodes algébriques théoriquement, l'aura établie, et qu'elle sera passée de là au père de l'algèbre musulmane.

[1] On peut ici, je crois, s'en rapporter au témoignage de Nesselmann, qui consacre tout un chapitre de son *Algebra der Griechen* à retrouver dans Diophante les exemples de ces six cas.

II.

MANIÈRE D'ARRIVER À L'ÉQUATON DÉFINITIVE.

Je passe maintenant à l'examen de la manière dont Mohammed ben Mouça traitait les problèmes d'algèbre, et à la comparaison que j'ai promise entre sa méthode et celle qui a été suivie par les Indiens d'une part, par Diophante de l'autre.

Premier exemple.

فان قال عشرة قسمتها قسمين فضربت كل قسم فى نفسه ثم القيت الاقل من الاكثر فبقى اربعين قياسه ان تضرب عشرة الا شيء فى مثلها فيكون ماية ومالا الا عشرين اشياء وتضرب شيئًا فى شيء فيكون مالا فتنقصه من المايه ومال الا عشرين اشياء فيبقى مايه الا عشرين اشياء يعدل اربعين درهمًا، فاجبر المايه بالعشرين الشيء فزدها على الاربعين فيكون مايه يعدل عشرين اشياء واربعين درهمًا فالق الاربعين من المايه فيبقى ستين درهمًا يعدل عشرين اشياء، فالشيء الواحد يعدل ثلثة وهو احد القسمين ۞

Si l'on dit : soit 10, partage-le en deux parts, multiplie chaque part par elle-même, puis diminue le plus grand du plus petit, il restera 40. La solution est que tu multiplies $10 - x$ [1] par lui-même, ce qui donne $100 + x^2 - 20x$, puis x par x, ce qui donne x^2, que tu déduiras de $100 + x^2 - 20x$; il restera $100 - 20x = 40$.

[1] L'auteur a déjà traité plusieurs problèmes du même genre, et appris à ses lecteurs que les deux portions sont x et $10 - x$.

Enrichis les 100 *des* $20x$ que tu ajouteras aux 40, il viendra $100 = 20x + 40$; enlève les 40 des 100, il restera $60 = 20x$, d'où un seul x égale 3; c'est une des deux parts.

Ce qui nous intéresse dans cette solution, c'est uniquement le procédé suivi par Al-Khârizmi pour dégager de l'équation

$$100 - 20x = 40$$

la valeur de l'inconnue. Il commence par faire disparaître le terme négatif $— 20x$, en *enrichissant*, comme il dit [1], les 100 unités du *déficit* que leur a causé la soustraction des $20x$. Pour compenser cet *enrichissement*, il doit naturellement ajouter $20x$ dans le second membre de l'équation; il arrive ainsi à l'équation *à termes tous positifs*,

$$100 = 40 + 20x$$

de laquelle, retranchant 40 aux deux membres, il arrive définitivement à

$$60 = 20x$$

N'ai-je pas eu raison d'annoncer plus haut que cette manière d'opérer était absolument celle que Behâ ed-Din a formulée en règle de la façon suivante?

والطرف ذو الاستثناء يكمل ويزاد مثل ذلك على الاخر، وهو الجبر * والاجناس المتجانسة المتساوية في الطرفين تسقط منهما،

[1] D'après Freytag, جبر *jabara*, construit *cum accusativo personæ et* ب *rei*, signifie *post paupertatem ditavit* (amicum).

وهو المقابلة ... ثم المعادلة امّا بين جنس وجنس وفي عدد بعدل اشياء ، فاقسمه على عددها يخرج الشيء المجهول ۞

Le côté qui renferme un déficient est *complété* et on ajoute l'égal de ceci à l'autre [côté] : c'est là *Al-jebr*. — Puis les espèces semblables et égales des deux côtés se retranchent : et c'est là *El-muqâbalat*..... Et alors, si l'équation existe entre espèce et espèce, et que ce soient des nombres égaux à des x, divise par le nombre [de ces derniers], et tu auras la valeur de la chose inconnue.

Règle qui, de son côté, semble être la traduction littérale de celle que nous lisons dans Diophante :

Ἐὰν ἀπὸ προβλήματός τινος γενήσεταί τινα εἴδη τισὶ ἴσα εἴδεσι τοῖς αὐτοῖς, μὴ ὁμοπληθῆ δέ, ἀπὸ ἑκατέρων τῶν μερῶν δεήσει ἀφαιρεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον γένηται· ἐὰν δέ πως ἐν ὁποτέρῳ ὑπάρχῃ ἢ ἐν ἀμφοτέροις ἐν λείψει τινὰ εἴδη, δεήσει προσθεῖναι τὰ λείποντα εἴδη ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μερέσιν, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν τὰ εἴδη ὑπάρχοντα γένηται· καὶ πάλιν ἀφελεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος καταλειφθῇ [1].

Si d'un problème quelconque il résulte que certaines espèces (il s'agit des différentes puissances de l'inconnue ou du nombre connu) soient égales aux mêmes espèces, mais en nombre différent, de l'un et de l'autre côté, il faudra enlever les semblables des semblables, jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une espèce égale à une autre espèce. Et si, de l'un des

[1] J'établis le texte de Diophante, dans ce passage et dans ceux qui vont suivre, non d'après l'édition de Bachet de Méziriac que j'ai lieu de croire imparfaite, mais d'après les manuscrits que possède la Bibliothèque nationale, au nombre desquels se trouvent les deux qui ont servi à Bachet lui-même.

côtés, ou dans tous les deux, se trouvent quelques espèces *en déchet, en manquant* (soustraites), il faudra ajouter à l'un et l'autre membre les espèces soustraites, jusqu'à ce que, dans les deux membres, les espèces soient additives; puis alors retrancher les semblables des semblables, jusqu'à ce que, dans chacun des deux membres, il ne reste plus qu'une espèce [1].

L'application que l'auteur grec fait de cette règle à la solution des problèmes va naturellement nous faire assister à un procédé tout à fait analogue à celui de Mohammed ben Mouça, par exemple :

Livre I^er^, problème 10.

Δυσὶ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς τῷ μὲν ἐλάσσονι αὐτῶν προσθεῖναι, ἀπὸ δὲ τοῦ μείζονος ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὸν γενόμενον πρὸς τὸν λοιπὸν λόγον ἔχειν δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω τῷ μὲν $\overline{\kappa}$ προσθεῖναι, ἀπὸ δὲ τοῦ $\overline{\rho}$ ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων

[1] On remarquera que cette règle ne s'applique qu'aux trois premiers cas des Arabes, savoir :

$$bx = c \qquad ax^2 = c \qquad ax^2 = bx$$

et non point aux trois autres cas où

$$ax^2 + bx = c \qquad ax^2 = bx + c \qquad bx = ax^2 + c$$

Diophante en avait promis la solution, car il dit deux lignes plus loin : *ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἐνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται.* Cette explication ne se trouve nulle part dans ce qui nous reste de Diophante, bien que dans les trois derniers livres existants il résolve des problèmes qui conduisent à des équations complètes, comme Nesselmann l'a fait voir; c'est ce qui a conduit l'écrivain allemand à supposer que l'ouvrage de l'algébriste grec ne nous était parvenu qu'incomplet.

τετραπλάσια. Τετάχθω ὁ προσλιθέμενος καὶ ἀφαιρούμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ, ϛ ἑνός· κἂν μὲν τῷ κ προσλεθῇ, γίνεται ϛ α μονὰδ κ. ἐὰν δὲ τοῦ ρ ἀφαιρεθῇ, γίνεται μονάδων ρ λείψει ἀριθμοῦ ἑνός· καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι τετραπλάσια. Τετράκις ἄρα τὰ ἐλάσσονα γίνεται μονάδες υ. λείψει ἀριθμῶν δ· ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι κ. — Κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὁμοια, λοιποὶ ἀριθμοὶ ε ἴσοι μονάσιν τπ· καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων οϛ. Ἐπὶ τὰς ὑποσλάσεις, ἐταξα τὸν προσλιθέμενον καὶ ἀφαιρούμενον ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ϛ ἑνὰ· ἔσλαι μ οϛ. Κἂν μὲν τῷ κ μονάδες οϛ προσλεθῶσι, γίνονται μ ϙϛ· ἐὰν δὲ τοῦ ρ ἀφαιρεθῶσι, λοιπαὶ μονάδες κδ· καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων ὄντα τετραπλάσια.

Deux nombres étant donnés, au plus petit ajouter, du plus grand retrancher le même nombre, et faire que le résultat [de l'addition] soit au reste [de la soustraction] dans un rapport donné [1].

[1] J'aurais bien aimé pouvoir donner comme exemple résolu par Diophante le même problème que j'ai cité tout à l'heure, d'après Al-Khârizmi, mais ce problème (32 du ms. de Joseph Auria; le numérotage de Bachet diffère de un ou deux numéros seulement) est traité un peu différemment par Diophante; il appelle $2x$ la différence des deux parts, qui sont alors $5+x$ et $5-x$; leurs carrés sont $25+10x+x^2$ et $25-10x+x^2$, dont la différence est $20x$, ce qui conduit du premier coup à l'équation $20x = 40$, à laquelle il n'y a pas de transformation à faire subir; voici, du reste, le texte même de l'écrivain d'Alexandrie :

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν □, ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ, τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας ρ. Τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ϛ β, ἔσλαι ὁ μὲν μείζων ϛ α μ ι, ὁ δὲ ἐλάσσων μ ι

Supposons qu'il faille de 20 retrancher, à 100 ajouter, le même nombre, et faire en sorte que le plus grand [des deux résultats] soit le quadruple du plus petit. Appelons le nombre à ajouter et à retrancher x; si nous l'ajoutons à 20, il viendra $x + 20$, et si nous le retranchons de 100, il viendra $100 - x$, et il faudra que le plus grand soit quadruple du plus petit. Or, quatre fois le plus petit sera $400 - 4x$, et ceci égale $x + 20$. *Restituons en commun le manquant*, et *enlevons les semblables des semblables*, il restera $5x = 380$, d'où l'on tire pour x, 76. En revenant aux données, j'ai établi que le nombre à ajouter et à retrancher des deux [données] était x; ce sera donc 76; et si nous ajoutons à 20 unités 76, il viendra 96; si nous le retranchons de 100, il restera 24, et le plus grand est quadruple du plus petit.

Ce calcul est accompagné, dans les manuscrits, du tableau suivant, que Bachet n'a point reproduit [1] :

λείψει ϛ̅ α̅, καὶ μένει πάλιν τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν μ̅α̅ κ̅, ἡ δὲ ὑπεροχὴ ϛ̅ϛ̅ ϙ̅· λοιπόν ἐστι καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν □̂ ποιεῖν μονάδας π̅. Ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶν ἀριθμῶν μ̅· ταῦτα ἴσα μ̅α̅ π̅. καὶ συνάγεται πάλιν ὁ μὲν μείζων μ̅α̅ιϛ̅, ὁ δὲ ἐλάττων μονάδων ῆ· καὶ ποιοῦσι τὸ προβλημα.

Avec le tableau résumé suivant :

		$\overline{\text{K}}$		$\overline{\text{Π}}$
ἔκθεσις		ϛ̅ α̅ μ̅ι̅		μ̅ι̅ ϛ̅ α̅
τετράγωνος		δ̅Δ̅ α̅ ϛ̅ϛ̅ κ̅ μ̅ρ̅		δ̅Δ̅ α̅ μ̅ρ̅ ϛ̅ ϛ̅ϛ̅ κ̅
ὑπεροχὴ		ϛ̅ϛ̅ μ̅	*ἰ*	μ̅α̅ π̅
μερισμὸς		ϛ̅ α	*ἰ*	μ̅α̅ ϙ̅
ὕπαρξις	Ψ	μ̅α̅ιϛ̅	ϛ̅χ̅	μ̅α̅ η̅

[1] C'est pour ce seul motif que personne n'a parlé de ces tableaux, car on s'en est toujours rapporté à l'édition de Bachet dans tout ce qui a été écrit sur Diophante depuis deux siècles.

ou, en notation moderne :

$$
\begin{aligned}
& x \\
& x + 20 && 100 - x \\
& x + 20 && = 400 - 4x \\
& 5x + 20 && = 400 \\
& 5x && = 380 \\
& x && = 76
\end{aligned}
$$

le plus grand, 96; le plus petit, 24.

Où l'on voit que, comme notre auteur arabe, les Grecs faisaient successivement, l'une après l'autre, les opérations que Diophante indique par les mots *κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις* et *ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια*.

Tout autre est le procédé des Indiens que nous allons étudier d'abord chez Bhâskara : voici, pour commencer, sa règle, qui fait suite au çloka que j'ai donné plus haut (p. 16 et 17).

एकाव्यक्तं शोधयेदन्यपक्षाद्
रूपाण्यन्यानीतमात्मीयपक्षात् ।

शेषाव्यक्तानोद्धरेद्रूपशेषं
व्यक्तं मानञ्जायते ऽव्यक्तशेषः ॥ २ ॥

Ekâvyaktam çôdhayed anyapaxâd,
rûpâny anyâni itarasmâc ca paxât;
Çeshâvyaktena uddhared rûpa-çesham:
vyaktam mânañ jâyate 'vyaktaçeṣas.

Les inconnues du premier membre se retranchent de celles du second, les espèces [sonnantes [1]] du second de celles du premier; par la différence [des coefficients] des inconnues, on divise la différence des nombres : on connaîtra ainsi la valeur fixe de la quantité inconnue.

Ce qu'il développe ensuite en prose dans les termes suivants :

पृच्छकेन पृष्टे सत्युद्धारूपणे यो ऽव्यक्तो राशिस्तस्य मानं यावत्तावद्रूपं द्वाद्दि वा प्रकल्प्य तस्मिन्नव्यक्तराशा उद्देशकालापवर्तुणेन भजनत्रैराशिकपंचराशिकशेषं क्षेत्रादिसर्वगणकेन कार्य्यं। तथा कुर्व्वतां द्वौ पक्षौ प्रयत्नेन समौ कार्य्यौ। यथालापे पक्षौ समौ न स्यातां तदा एकतरपक्षे किञ्चित्प्रक्षिप्य ततस्त्यक्त्वा वा केनचित्संगुण्य भक्त्वा वा (Ici le manuscrit a passé quelque chose.)

[1] D'après le dictionnaire de Böhtlingk et Roth, रूप *rûpam*, mot par lequel les mathématiciens indiens désignent l'unité numérique, est souvent synonyme de रूपीय *rûpîya*, « monnaie à effigie » (de *rûpa*, « figure »). C'est, je crois bien, le sens qu'il faut lui donner ici. Le terme de درهم *dirhem*, que les mathématiciens arabes emploient dans le même sens, serait alors la traduction exacte du *rûpam* indien.

समीकृत्य यूपाणीतरपक्षयूपेभ्यः शोध्यानि । यदि कणिकाः सन्ति तदा अपि शोध्याः ॥ ततो ऽव्यक्तशेषेण यूपशेषे विभक्ते यल्लभ्यते तदेकस्याव्यक्तराशेर्मानं व्यक्तं जायते । .....

Le questionneur ayant formulé son problème, la quantité inconnue est posée égale à x, une fois, deux fois, etc. et là-dessus on effectue les opérations prescrites par l'énoncé, multiplication, division, règle de trois ou de cinq, différence, somme, etc., toutes les opérations [prescrites]. Alors on forme adroitement deux membres égaux. Si l'égalité des deux membres ne résulte pas [immédiatement] de l'énoncé lui-même, on les amène à être égaux en ajoutant à l'un ou à l'autre quelque chose, ou en en retranchant, multipliant ou divisant[1]. [Alors les inconnues de l'un des membres doivent être retranchées des inconnues de l'autre, et de la même façon les carrés ou autres puissances des inconnues.] On retranche de même les nombres connus du second membre des nombres connus du premier; s'il y a des radicaux (des *sourdes* comme on dit en anglais), on en fait de même la soustraction. Alors par la différence [des nombres] d'inconnues divisant la différence des nombres connus, le quotient fait connaître la valeur déterminée[2] de la quantité inconnue.

Il n'est pas question de *compléter les soustraits*, *προσθεῖναι τὴν λεῖψιν*, *d'enrichir un nombre des choses qu'on lui a retranchées*, تجبر الدناهر بالاشياء الناقصات,

[1] Je complète la lacune d'après Colebrooke, en enfermant ce que je lui emprunte entre crochets.

[2] Remarquons cette expression : *avyakta-rāçer mānam vyaktam*, dont le mot à mot est « valeur fixe de la quantité variable ». Les Indiens désignaient en réalité l'inconnue d'un problème par le nom de « variable, indéterminée », *a-vyaktā*, comme nous le faisons en Analyse.

comme nous le lisions tout à l'heure. Nous allons voir dans l'application, du reste, que ce n'était pas ainsi qu'on opérait. Je prends pour exemple le premier problème de Bhâskara:

एकस्य रूपत्रिंशती षडश्वा
अश्वा दशान्यस्य तुल्यमूल्याः।
ऋणं तदाश्वूलशतं च तस्य।
तौ तुल्यवित्तौ ब्रूहि म अश्वमूल्यं॥

Ekasya rûpatriñçatî shaḍ açvâ;
açvâ daça anyasya tulyamûlyâs,
Ṛṇam tadâ ûçulaçatam ca tasya:
tau tulya-jritau: brûhi ma açvamûlyam.

Un homme a six chevaux et trois cents pièces d'or;
Son voisin, pris de jalousie,
Fait entrer dans son écurie
Dix chevaux tout pareils : hélas! il doit encor
Sur leur valeur cent pièces d'or;
Ils possèdent pourtant le même capital.
Quel est donc le prix d'un cheval?

Je laisse ici parler encore l'auteur indien dont je reproduis l'explication :

अत्राश्वमूल्यमज्ञातं तस्य मानं यावत्तावद्वर्णं कल्पितं। ततस्त्रैराशिकं यद्येकाश्वस्य यावत्तावद्वर्णं मूल्यं तदा षण्णां किमिति न्यासः। १। या १। ६। फलमिच्छागुणं प्रमाणभक्तं लब्धं षण्णामश्वानां मूल्यं। या ६॥ तत्र

ऊनशतत्रये क्षिप्ते ज्ञातमाद्यस्य धनं । या ६ रू ३०० ॥ एवं द्वयोरप्यानां मूल्यं । या १० । तत्रोनशते ऋणगते प्रक्षिप्ते ज्ञातं द्वितीयस्य धनं । या १० रू १०० ॥ एतौ समधनाविति पक्षौ ततः स्वत एव समौ ज्ञातौ।

समशोधनार्थमनयोर्न्यासः

या ६ रू ३००

या १० रू १००

अथैकाव्यक्तं शोधयेदन्यपक्षादिति आद्यपक्षाव्यक्ते द्वितीयपक्षाच्छोधिते शेषं या ४ द्वितीयपक्षे रूपेभ्य आद्यपक्षरूपेभ्यः शोधितेषु शेषं रू ४०० ।

अव्यक्तशेषेण रूपशेषे हृते लब्धमेकस्य यावत्तावतो मानं व्यक्तं १०० ॥ यद्येकस्य यावत्तावत इदं षण्णां किमिति त्रैराशिकेन लब्धे षण्णां मूल्ये ऊनशतत्रययुते ज्ञातमाद्यस्य धनं ६०० ॥ अथ द्वितीयस्याप्येवमेव ज्ञातं ६०० ॥

Ici le prix d'un cheval étant inconnu, posons-le égal à x; alors par la règle de trois : « si la valeur d'un cheval est x, quelle est celle de six chevaux. »—Tableau : $1 : x :: 6 :$, le revenu multiplié par la demande et divisé par le type[1] donne pour

[1] Il est à peine nécessaire d'expliquer les expressions par lesquelles Bhâskara désigne les termes connus d'une proportion : dans $a : m :: b : x$, a, la première quantité donnée est la « quantité type » (*pramâna*),

quotient la valeur des 6 chevaux, $6x$. Alors ajoutant à ceci 300 pièces d'or, on connaît la richesse du premier, savoir : $6x + 300$. De même la valeur de 10 chevaux sera $10x$; à quoi ajoutant (*sic*) 100 pièces prises négativement (ou passées en dettes *ṛṇagate*) on connaîtra la fortune du second, savoir : $10x - 100$. Tous les deux étant, dit-on, également riches, les deux membres (*pakṣau*) sont par eux-mêmes égaux.

Tableau des deux [membres] préparés pour la soustraction des quantités de même espèce [1] :

$$6x + 300$$
$$10x - 100$$

Or « que l'on retranche les inconnues du premier de celles du second », est-il dit : retranchant les inconnues du premier membre de celles du second, la différence est $4x$, et en retranchant les nombres connus du second membre de ceux du premier, la différence est 400. Divisant par la différence des inconnues la différence des nombres, le quotient détermine la valeur de un x, soit 100. « Si telle est la valeur de 1 x, quelle est celle de $6x$? » dira-t-on : le quotient, par la règle de trois, valeur de $6x$, ajouté à 300 pièces d'or, fera connaître la fortune du premier, savoir : 900; en procédant de même, on connaîtra la fortune du second, savoir : 900.

Ainsi Bhâskara ne traite pas le terme — 100 de son second membre autrement que les termes posi-

ayant rapporté le « revenu » ou plus littéralement le « fruit » (*phalam*) m : dans les questions d'intérêts, m serait le « taux de l'intérêt », a la « valeur nominale » ou le « cours » de la rente m. Le terme b est la quantité « pour laquelle on demande » le revenu x, par abrégé « la demande » (*icchâ*).

[1] Voyez ci-après pourquoi je traduis ici *sama-çôdhanam* par « soustraction des quantités de même espèce » et non par « equal subtraction » comme Colebrooke.

tifs de son équation : il le *retranche*, suivant la règle générale, de 300, et appelle le résultat obtenu 400 (= 300 + 100) « la différence » *çesham* entre 300 et — 100. Les deux « différences » $4x$ et 400 sont obtenues par une même opération, que tous les algébristes indiens appellent *sama-çôdhanam*.

Qu'on me permette une digression à l'occasion de ce mot, que Colebrooke traduit par « equal subtraction ». Je suis disposé à croire que le savant anglais n'a pas bien rendu l'idée des Indiens, et qu'il faudrait dire « soustraction des choses semblables, des quantités de même espèce ». *Sama-çôdhanam* serait alors la traduction exacte de l'expression grecque *ἀπὸ ὁμοίων ὁμοια*. Je dis *traduction*, car j'admets parfaitement que les Indiens ont reçu de la Grèce les premières notions des mathématiques aussi bien que de l'astronomie, avec une foule d'autres connaissances intellectuelles. Ce que je crois, c'est que ces notions premières, ils ont su les développer à leur manière, faisant faire des progrès immenses à la partie abstraite de la science, aux calculs et aux considérations théoriques de l'algèbre, mais restant fort en arrière sur leurs maîtres dans la partie pour ainsi dire visible, dans la géométrie.

Ce qu'il y a de curieux, c'est que les Arabes, disciples fidèles, et je dirais presque serviles des Grecs, n'ont rien conservé qui traduise exactement le *ἀπὸ ὁμοίων ὁμοια*, tandis que nous le retrouvons dans le *sama-çôdhanam* dont font usage tous les algébristes de l'Inde.

Pour en revenir à l'explication du problème de Bhâskara, je ferai remarquer encore la façon originale dont il indique la manière d'évaluer la fortune de son second personnage : après avoir établi que les 10 chevaux valent 10x, il dit : *tatra rûpaçate ṇagate praxipte*, « à cela 100 roupies[1] *devenues négatives* étant ajoutées ». C'est une *addition d'un nombre négatif* qu'il effectue.

Ces mêmes procédés que nous venons de voir appliquer aux équations du premier degré servent également à transformer les équations du second, pour les amener à la forme toujours trinôme, dans l'Inde, tantôt binôme et tantôt trinôme, suivant les problèmes, pour les Grecs et les Arabes, ces derniers distinguant, nous l'avons vu, cinq cas (six avec celui du premier degré) de ces équations définitives. Ainsi Al-Khârizmi expose comme suit son exemple type du cinquième cas[1].

والمسئلة الخامسة عشرة قسمتها قسمين ثم ضربت كل قسم
في نفسه وجمعتهما فكانت ٥٨ درهما قياسه ان تجعل احد
القسمين شيئا والآخر ١٠ الا ش فاضرب ١٠ الا ش في مثلها فيكون
١٠٠ و ش الا ٢٠ ش ثم تضرب شيئا في شيء فيكون مالا ثم تجمعهما
فيكون ذلك

١٠٠ و ٢ ش الا ٢٠ ش ل ٥٨ درهما

[1] Voir à la note p. 44 pourquoi je traduis ici *rûpa* par « roupies », ainsi que dans l'énoncé par « pièces d'or ».

فاجبر المائة والمالين بالعشرين الشيء الناقصة وزدها على الثمانية والخمسين فيكون

١٠٠ و ٢ ل ٥٨ و ٢٠ ش

فاردد ذلك الى مال واحد وهو ان تاخذ نصف ما معك فيكون

٥٠ و ١ ل ٢٩ و ١٠ ش

فقابل به وذلك انك تلقى من الخمسين تسعة عشرين فيبقى

٢١ و ١ ل ١٠ ش

Cinquième cas : 10, partage-le en deux parts, multiplie chaque part par elle-même, ajoute [les produits] et il viendra 58 dirhems. — *Solution.* Pose l'une des deux parts x, l'autre $10 - x$: multiplie celle-ci par elle-même, il viendra $100 + x^2 - 20x$, puis multiplie x par x, il vient x^2 ; ajoute-les et il viendra

$$100 + 2x^2 - 20x = 58 \text{ dirhems.}$$

Enrichis les $100 + 2x^2$ des $20x$ déficients, que tu ajouteras aux 58, il viendra

$$100 + 2x^2 = 58 + 20x$$

Ramène ceci à un seul x^2, ce que tu feras en prenant la moitié de tout ce que tu as, il viendra

$$50 + x^2 = 29 + 10x$$

Fais la balance là-dedans, c'est-à-dire enlève des 50 les 29, il restera

$$21 + x^2 = 10x$$

etc.

Diophante agit de même, témoin son problème 8 du second livre.

Τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν .ις. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. Καὶ τετάχθω ὁ α̈ˢ. δυνάμεως μιᾶς, δεήσει ἄρα μονάδας .ις., λείψει δυνάμεως ᾱ. ἴσας εἶναι □ᵒ′. Πλάσσω τὸν □ᵒ′, ἀπ' ἀριθμῶν ὅσων δή ποτε, λείψει τοσαύτων μονάδων ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν ις μονάδων πλευρά· ἔστω β̈ˢ̈ μ̈ᾱ δ′. Αὐτὸς ἄρα ὁ □ᵒ′ ἔσται δυνάμεων δ̄. μ̈ᾱ .ις. ϙ′ ϛ̈ˢ̈ ις. Ταῦτα ἴσα μονάσι ις λείψει δυνάμεως μιᾶς. — Κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὁμοῖα· δυνάμεις ἄρα ε̄ ἴσαι ἀριθμοῖς ις. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις πέμπλων...

ἔκθεσις	$\Delta^{\text{ς}}_{\text{ι}}$ ᾱ		μ̈ᾱ ις ϙ. δῑ ᾱ
πολλαπλασιασμός	$\Delta^{\text{ς}}_{\text{ι}}$ δ̄ μ̈ᾱ ις ϙ′ ϛ̈ˢ̈ ις	ι	μ̈ᾱ ις ϙ. δ̈ψ̈ ᾱ
℔ [1]	$\Delta^{\text{ς}}_{\text{ι}}$ ε̄ μ̈ᾱ ις	ι	μ̈ᾱ ις ϛϛ ις
ἄφεσις	$\Delta^{\text{ς}}_{\text{ι}}$ ε̄	ι	ϛ̈ϛ̈ ις
	ϛϛ ε̄	ι	μ̈ᾱ ις
μερισμός	ϛ ᾱ	ι	μ̈ᾱ ις′

Étant donné un carré, le partager en deux carrés.

Soit par exemple 16 à partager en deux carrés. Je pose pour le premier x^2 : il faudra alors que $16 - x^2$ soit égal à un carré. Je forme ce carré au moyen d'un certain nombre de fois x moins autant d'unités qu'il y en a dans le côté des 16 unités données; par exemple, $2x - 4$: le carré lui-même sera donc $4x^2 + 16 - 16x$. Tout cela est égal à $16 - x^2$. — Rajoutons le déficit commun et enlevons les semblables

[1] Je n'ai pas su reconnaître quel mot représente la sigle ℔, qui indique, dans ces tableaux, le résultat de la compensation des termes négatifs, le *jebr* des Arabes.

des semblables : $5x^2$ sera égal à $16x$, et x vaudra 16 cinquièmes.

TABLEAU.

Hypothèses	x^2		$16 - x^2$
Carrés	$4x^2 + 16 - 16x$	=	$16 - x^2$
Restauration	$5x^2 + 16$	=	$16 + 16x$
Ablation	$5x^2$	=	$16x$
	$5x$	=	16
Division		x =	$\frac{16}{5}$

Nos auteurs indiens, de leur côté, appliquent encore ici leur règle sans se préoccuper des signes des termes contenant les diverses puissances : voici par exemple le premier problème du second degré traité par Bhâskara :

अलिकुलदलमूलं मालतीं यातमष्टौ
निखिलनवमभागावालिनी भृंगमेकं
निशि परिमललुब्धं पद्ममध्ये निरुद्धं
प्रति रणति रणन्तं ब्रूहि कान्ते ऽलिसंख्यां॥

Alikula-dala-mûlam mâlatîm yâtam, aṣṭau
nikhila-navama bhâgâç ca; alinî bhṛgam ekam
Niçi parimala-lubdham padma-madhye niruddham
prati raṇati raṇantam. Brûhi, kânte, 'li-sankhyâm.

D'un essaim de mouches à miel
Prends la moitié, puis la racine :
Dans un champ de jasmins cette troupe butine ;
Huit neuvièmes du tout [voltigent dans le ciel] ;
Une abeille solitaire

Entend dans un lotus son mâle bourdonner:
Attiré par l'odeur, pendant la nuit dernière
Il s'était fait emprisonner.
De combien est l'essaim, le saurais-tu, ma chère [1] ?

[1] Ce problème a déjà figuré dans la *Lîlâvatî* ou « Traité d'arithmétique »: voilà pourquoi l'auteur s'adresse « à sa chère élève ». Il a été résolu là au moyen de la règle empirique citée par Rosen dans sa Préface à Mohammed ben Mouça:

गुणघ्नमूलोनयुतस्य राशेर्दृष्टस्य युक्तस्य गुणार्द्धकृत्या ।
मूलं गुणार्द्धेन युतं विहीनं वर्गीकृतं प्रष्टुरभीष्टराशिः ॥ ३६ ॥

Guṇaghna mûla-ûnayutasya râśer
dṛṣṭasya yuktasya guṇârddha-kṛtyâ,
Mûlam guṇârddhena yutam vihînam
vargîkṛtam praṣṭur abhîṣṭa-râśiḥ.

(36 dans l'édition de Calcutta, 1832, 62, dans Colebrooke.)

Mot à mot :

Une quantité étant augmentée ou diminuée de sa racine multipliée par un coefficient [et la somme ou la différence égale à un nombre donné], du nombre donné augmenté du carré de la moitié du coefficient, la racine plus ou moins la moitié du coefficient élevée au carré est la valeur demandée par l'auteur de la question.

Énoncé dans lequel on reconnaît et l'équation

$$x \pm p\sqrt{x} = q$$

et la formule

$$x = \left[\pm\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right]^2$$

Cet énoncé, ce que n'a pas fait remarquer Rosen, diffère de la méthode arabe, dont nous parlerons tout à l'heure, par le *double signe du coefficient.*

Rosen n'a cité que ce premier çloka: la règle de Bhâskara en comprend deux, car l'auteur dit: .

अथ गुणाकर्म्म । तत्र दृष्टमूलज्ञातौ करणसूत्रं वृत्तद्वयम् ।

Atha guṇa-karmma: tatra dṛiṣṭa-mûla-jâtau; karaṇa-sûtram vṛtta-dvayam.

अत्रालिकुलप्रमानं याव २। एतद्वर्गस्य मूलं या १।

Voici l'opération du coefficient : là on connaît [la valeur d'une quantité et de sa] racine ; la règle de l'opération se compose de deux [distiques] *vṛtta*.

Or le second distique, qui est traduit par Colebrooke, chez qui on eût pu le voir, est le suivant :

यदा लवैश्चोनयुतस् स राशिस्तेन भागोनयुतेन भक्तः।

दृश्यं तथा मूलगुणाढ्य ताभ्यां साध्यस् ततः प्रोक्तवदू एव राशिः॥ ३७॥

Yadâ lavaiç ca-ûna-yutas sa-râçir, ekena bhâga-ûnayutena bhaktvâ,
Dṛṣyam tathâ mûlaguṇâḍhya eva; tâbhyâm sâdhyas tatas proktavad eva râçiḥ.

(37 éd. Calc., 63 Colebr.)

Si la quantité a des fractions (d'elle-même) retranchées ou ajoutées, on divise par un plus ou moins la fraction et l'on a la quantité donnée et le coefficient de la racine, au moyen desquels on obtient la valeur de la quantité.

Or dans le cas présent, l'essaim $2x^2$ moins ses $\frac{8}{9}\left(\frac{8}{9}2x^2\right)$ qui voltigent, moins la racine de sa moitié (x) qui butine, est réduit au couple isolé,

$$2x^2-\frac{8}{9}2x^2-x=2 \quad \text{ou} \quad \left(1-\frac{8}{9}\right)2x^2-x=2$$

alors, dit notre auteur, on divise par $\left(1-\frac{8}{9}\right)2$ ou $\frac{2}{9}$, et l'on a

$$x^2-\frac{9}{2}x=9,$$

d'où l'on prend le coefficient $-\frac{9}{2}$ et le terme connu 9 pour les reporter dans la formule, et

$$x=\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{9\cdot 9+16\cdot 9}{16}}=\frac{9}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{25}$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{15}{4}=6 \qquad 2x^2=72$$

निश्चिलनवमभागा अष्टौ याव $\frac{16}{9}$। अलियुगसंयुतस्य मूलस्यास्य याव २। सममिति

याव २ या ० रू ०

याव $\frac{16}{9}$ या १ रू २

पक्षौ समच्छेदीकृत्य छेदगमे

याव १८ या ० रू ०

याव १६ या ९ रू १८

शोधने च कृते ज्ञाती पक्षौ

याव २ या ९ रू ०

याव ० या ० रू १८

Ici [il faut poser] la valeur de l'essaim d'abeilles $2x^2$; la racine de sa moitié est x; les huit neuvièmes du tout font $\frac{16}{9}x^2$; augmentés du couple d'abeilles et de la racine, ils sont égaux à $2x^2$: donc

$$2x^2 + 0x + 0 = \frac{16}{9}x^2 + x + 2$$

Ramenant les deux membres à un dénominateur commun, et chassant ce dénominateur

$$18x^2 + 0x + 0 = 16x^2 + 9x + 18$$

Et en faisant la soustraction [des quantités semblables], on trouve pour les deux membres

$$2x^2 - 9x + 0 = 0x^2 + 0x + 18$$

ou

$$2x^2 - 9x = 18$$

L'exemple que j'ai cité plus haut de Brahmagoupta est traité exactement de la même façon.

Donc, dans la préparation des équations, les Indiens ne se préoccupaient aucunement du *signe* des termes, et ils retranchaient les *semblables des semblables* sans avoir préalablement *comblé les manquants*.

Mais il est encore un autre détail de la préparation des équations sur lequel je demande au lecteur la permission de l'arrêter un instant. L'équation à laquelle parvient notre auteur est

$$2x^2 = \frac{16}{9}x^2 + x + 2$$

Or, il nous dit : *paxau samachedî-krtya, chedagame* « ayant ramené les deux membres à un dénominateur commun, et ce dénominateur parti, [il vient] :

$$18x^2 = 16x^2 + 9x + 18$$

Les Indiens, ou tout au moins Bhâskara et ses successeurs (car, sur les procédés de ses prédécesseurs, les documents positifs nous font défaut), *ne manquent jamais* de chasser, comme nous, au préalable, les dénominateurs qui peuvent se trouver dans l'équation du problème; et je ferai remarquer l'analogie des expressions sanscrite छेदगमे *chéda-game*, « le dénominateur parti, en allé », et française : « chassant le dénominateur ».

Or tout le monde sait que Diophante ne prend jamais cette précaution, et qu'il ne craint pas d'embarrasser ses calculs de fractions enchevêtrées les unes

dans les autres. Quant aux Arabes, nous allons voir tout à l'heure qu'ils ont bien garde de pratiquer eux non plus cette opération.

III.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION TRINÔME DU SECOND DEGRÉ.

J'aborde maintenant l'étude des procédés spéciaux de résolution de l'équation complète du second degré, lorsqu'elle a été ramenée, pour les Grecs et pour les Arabes, à l'une des trois formes

$$ax^2 + bx = c \qquad ax^2 + c = bx \qquad ax^2 = bx + c$$

et pour les Indiens à la seule et unique forme

$$ax^2 \pm bx = \pm c$$

Cette étude comparative n'est pas moins intéressante que celles auxquelles nous nous sommes livrés jusqu'ici : nous allons même trouver les Arabes en retard, il me semble du moins, sur Diophante lui-même. Quant aux Indiens, ils vont nous présenter encore ici une supériorité marquée sur leurs collègues de l'Occident. En effet, tandis que Arabes et Grecs faisaient usage d'une formule

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

chez les premiers,

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{a}$$

chez les seconds, formule à laquelle ils étaient parvenus, nous en avons la preuve convaincante dans tout un chapitre d'Al-Khârizmi, par un raisonnement purement géométrique, les Indiens, procédant uniquement par l'algèbre, avaient inventé un procédé des plus élégants qui se trouve exposé en détail chez Bhâskara, sommairement et brièvement chez Brahmagoupta; mais comme le calcul que fait celui-ci est entièrement conforme à une règle additionnelle attribuée par Bhâskara à un ancien Âtchârya nommé Çrîdhara, lequel, par conséquent, est antérieur à Brahmagoupta lui-même, il est à présumer que le mode de résolution en question était connu dans l'Inde avant le VIII^e^ siècle, et que, si Mohammed ben Mouça ne l'a pas fait connaître à ses disciples, c'est qu'ici, comme partout, ou il ne s'est pas donné la peine d'étudier la question, ou il ne l'a pas comprise; en tout cas, il n'a pas reproduit fidèlement la théorie qu'il était censé aller chercher.

Ainsi que l'a déjà fait remarquer Nesselmann, ce qui nous reste de l'ouvrage de Diophante ne donne nulle part la règle promise par lui (*ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται*, Def. XI) pour enseigner à tirer la valeur de l'inconnue d'une équation complète du second degré: nulle part non plus dans aucun des problèmes qui l'amènent à une semblable équation, il ne décrit en détail la manière dont il arrive à la résoudre. Mais nous pouvons cependant tirer argument de la façon dont il discute certaines équations et *iné-*

galités du second degré ; donnons-en quelques exemples d'abord, en nous guidant sur le relevé bien consciencieux qu'en fait Nesselmann.

Livre VI, problème 6.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ προσλαβὼν τὸν ἕνα τῶν ⊥ ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς $\overline{\mu\iota}\,\overline{\zeta}$· τετάχθω πάλιν ὁ τρίγωνος δεδόμενος τῷ εἴδει $\overline{\overline{\gamma}}$, $\overline{\overline{\delta}}$, $\overline{\overline{\varepsilon}}$, καὶ γίνονται $\delta^{\chi}\,\overline{\varsigma}$, $\overline{\overline{\gamma}}$ ἴσαι $\overline{\mu\iota}\,\overline{\zeta}$.

Trouver un triangle rectangle, tel que la surface, augmentée de l'une des cathètes (écrit ⊥ dans les manuscrits), fasse un nombre donné.

Soit le nombre 7 : supposons de nouveau le triangle donné de figure $3x$, $4x$, $5x$. [Les conditions du problème] deviennent $6x^2 + 3x = 7$.

Or il continue :

Καὶ δεῖ τῶν $\overline{\overline{\varsigma\varsigma}}$ τῷ ἡμίσει ἐφ' ἑαυτὸ προσθεῖναι τὰς δυνάμεις [ἐπλάκις γενομένας], καὶ ποιεῖν $\overline{\square}^{\iota\nu}$· οὐ ποιεῖται δέ.

Or, il faut qu'en ajoutant au carré de la moitié du nombre des x le nombre des x^2 [multiplié par 7][1] on trouve un carré ; il ne se fait pas.

[1] Les mots ἐπλάκις γενομένας entre crochets n'existent pas dans les manuscrits, mais ils se trouvent dans la suite : ὥστε δεήσει εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως μιᾶς τῶν ⊥ προσλαβὼν τὸν $\overline{\zeta}$ τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ $\overline{\square}^{\iota\nu}$. « De sorte qu'il faudra trouver un triangle rectangle tel que le carré de la moitié d'une des cathètes augmenté de sept fois la surface fasse un carré. »

L'auteur veut donc extraire

$$\sqrt{\frac{9}{4}+6.7} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{b^2}{4}-ac}$$

Il ne commence donc pas par diviser par a.

Dans le courant du problème 45 (liv. IV), il arrive à cette condition à remplir.

ϟϟ″ϛ̄ μ̄ῑ ιϛ̄ ἐλάσσονές εἰσι δ^ϡ ϛ̄ φ̄ μ̄ῑ′ ϛ̄· καὶ κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ μ̄ῑ′ ϛ̄· ἄρα σϟ″ ϛ μ̄ῑ ιη̄ ἐλάσσονες ῑε̄. Ὅταν δὲ τοιαύτην ἰσωσιν ἰσώσωμεν, ποιῶμεν τῶν σϟ τὸ ⊿ ἐφ' ἑαυτό· γίνεται ϡ̄′. Καὶ τὰς δ^ϡ ϛ̄ ἐπὶ τὰς μ̄ῑ ιη̄ γίνονται λϛ̄· προσθὲς τοῖς ϡ̄, γίνεται μ̄ε̄, ὧν πλευρὰ οὐκ ἐλάττων ἐστὶ μ̄ῑ ξ̄. προσθὲς τὸ ἡμίσευμα τῶν ῑϛ̄ παράβαλε παρὰ τὸ πλῆθος τῶν δ^ϡ, γίνεται οὐκ ἔλαττον μ̄ῑ ε̄.

$6x + 12 < 2x^2 - 6$: ajoutons en commun les 6 unités; donc, $6x + 18 < 2x^2$. Pour résoudre cette équation, faisons le carré de la moitié du nombre des x : c'est 9; le produit du nombre des x^2, 2, par celui des unités, 18, fait 36; ajouté aux 9 [de tout à l'heure], il vient 45, dont la racine n'est pas moindre que 7 (c'est-à-dire comprise entre 6 et 7, mais 6 serait trop faible). Ajoutez la moitié du nombre des x [il vient 10] et divisez par le nombre des x^2, le résultat (valeur de x) n'est pas moindre que 5.

Ici donc, Diophante calcule, en extrayant la racine à moins d'une unité près, par excès,

$$x = \frac{3+\sqrt{9+2\times 18}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-ac}}{a}$$

Pareillement, dans V, 13, nous lisons :

Ἔστω ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ϛ̅ α̅, καὶ ζητῶ κατὰ τὸν προδιορισμὸν ϛ̅α̅ ϙ̅. ἐν μορίῳ δυνάμεως α̅ μονάδος α̅ μείζονα μὲν εἶναι ι̅ζ̅, ἐλάσσονα δὲ ι̅θ̅ ..... ὥστε δὴ ϛ̅α̅ ϙ̅ πρὸς δ̅χ̅ α̅ μ̅ α̅ μείζονα λόγον ἔχειν ἤπερ ι̅ζ̅ πρὸς ι̅θ̅ ..... τουτέστιν ϛ̅α̅ ϙ̅ οθ̅ ὀφείλουσι μείζονες εἶναι δ̅χ̅ ι̅ζ̅ μ̅ ι̅ζ̅. Τῶν ϛ̅α̅ τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται σοζ̅ϙ̅. ἄφελε τὰς δ̅χ̅ ἐπὶ τὰς μ̅, τουτέστι σπθ̅, λοιπὰ ἄρα ρζ̅· τούτων πλευρὰ οὐ μείζον λα̅. πρόσθες τὸ ἥμισυ τῶν ϛ̅α̅, γίνεται οὐ μείζον ξζ̅. παράβαλε παρὰ τὸ πλῆθος τῶν δυνάμεων γίνεται οὐ μείζον ξζ̅ιζ̅.

... Soit donc le nombre cherché x, je cherche, d'après les délimitations préliminaires, à ce que $\frac{6x}{x^2+1}$ soit plus grand que $\frac{17}{12}$ et plus petit que $\frac{19}{12}$... ou que le rapport de $6x$ à x^2+1 soit plus grand que celui de 17 à 12 ($6x : x^2+1 > 17 : 12$), c'est-à-dire que $72x$ doivent être plus grands que $17x^2+17$ ($72x > 17x^2+17$). La moitié du nombre des x élevé au carré fait 1296; retranchez-en le nombre des x^2 par celui des unités, c'est-à-dire 289, il reste 1007, dont la racine ne surpasse pas 31; ajoutez la moitié des x, il vient < 67; divisez par le nombre des x^2, il vient $< \frac{67}{17}$.

Encore ici, Diophante calcule :

$$x = \frac{36 + \sqrt{36^2 - 17 \times 17}}{17} = \frac{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{a}$$

Il est inutile de multiplier davantage les exemples; ceux-ci nous suffisent bien pour nous faire voir que Diophante

1° Ne divisait pas par le coefficient de x^2.

2° Employait, non pas notre formule

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

mais, et dans tous les cas, celle dont nous faisons usage seulement quand b est un nombre pair :

$$x = \frac{\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{a}$$

Je passe maintenant à l'étude de la méthode arabe, et je vais citer pour cela quelques exemples pris dans Al-Khârizmi. Je ne m'occupe pas, bien entendu, de la distinction des trois cas dont il a été question plus haut : la chose est jugée; je chercherai seulement le procédé général suivi pour la solution de l'équation.

I. — Dans un de ses problèmes, où il cherche à diviser 10 en deux portions telles que l'une d'elles multipliée par 5 et divisée par la seconde, puis la moitié du quotient augmentée de 5 fois la première part, on obtienne 50, l'auteur arrive à l'équation :

٢ ½ على ١٠ الا ١ ل ٥٠ الا ٥

c'est-à-dire

$$\frac{\left(2 + \frac{1}{2}\right)x}{10 - x} = 50 - 5x$$

puis il ajoute :

وقد علمت انك متى ضربت ما خرج لك من القسم فى المقسوم عليه عاد المال ، ومالك ٢ ½ فاضرب ١٠ الا أ فى ٥٠ الا ٥ فيكون ذلك

٥٠٠ درهم و ٥ الا ١٠٠ ل ٢ ½

فاردد ذلك الى مال واحد فيكون ذلك

١٠٠ درهم و أ الا ٢٠ ل ½ شىء

فاجبر ذلك المائة ومالا وزد العشرين اشياء على نصف الشىء فيصير معك

١٠٠ و أ ل ٢٠ ½

فنصف الاشياء واضربها فى مثلها وانقص منها المائة وخذ جذر ما بقى وانقصه من نصف الاجذار وهو ١٠ ½ فيبقى ٨ وهو احد القسمين ⓐ

Tu sais déjà que si tu multiplies le quotient, ou ce qui résulte d'une division, par le diviseur, tu obtiens la quantité primitive. Or, ici, ta quantité primitive est $2\frac{1}{2}x$: multiplie alors $10-x$ par $50-5x$, et il viendra

$$500+5x^2-100x=2\frac{1}{2}x.$$

Ramène ceci à un seul x^2, il viendra

$$100+x^2-20x=\frac{1}{2}x.$$

Rétablis à l'intégrité les $100 + x^2$, et ajoute-les $20x$ au $\frac{1}{2}x$, il te restera

$$100 + x^2 = 20\frac{1}{2}x.$$

Prends alors la moitié du nombre des x $\left(10 + \frac{1}{4}\right)$, multiplie-la par elle-même $\left(105 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}\right)$, retranche-s-en les 100 $\left(5 + \frac{1}{16}\right)$, prends la racine du reste $\left(\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}\right)$, retranche-la de la moitié des racines $\left(10 + \frac{1}{4} - 2 - \frac{1}{4} = 8\right)$, il restera 8, qui est une des parts.

Donc, Al-Khârizmi non-seulement conserve le coefficient fractionnaire $2 + \frac{1}{2}$ de la première puissance de l'inconnue dans son équation primitive, mais il le divise encore par 5, le coefficient de x^2, « pour ramener, dit-il, l'équation à n'avoir qu'un seul x^2 ». Par bonheur, ici $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, et la division par 5 ne complique pas beaucoup ce coefficient; mais l'auteur arabe n'en aurait cure et n'en a réellement cure, puisque le coefficient réel est $20 + \frac{1}{2} = \frac{41}{2}$.

C'est donc l'équation à coefficients fractionnaires

$$x^2 - \frac{41}{2}x + 100 = 0$$

qu'il résout en se tenant rigoureusement à la formule réduite

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

II. Un autre problème l'amène à l'équation...

مٌ و مٌ ل ا

$$2x^2 + 2x = 1 + \frac{1}{2}$$

et il dit encore :

فرددها الى مال واحد وهو ان تاخذ من كل ما معك نصفه فتقول مٌ و مٌ ل ا دزهم فقابل به على نحو ما صفت لك فى صدر الكتاب ۞

Réduis-les à un seul x^2, ce qui se fera en prenant la moitié de tout ce que tu as, et tu diras $x^2 + x = \frac{3}{4}$; puis tu résoudras comme je te l'ai enseigné au commencement du livre.

Or, dans cette solution, non-seulement le terme tout connu $\frac{3}{4}$ mais le demi-coefficient de x seront fractionnaires.

Je dois dire, pour être juste, que ce sont les deux seuls exemples où le coefficient de x^2 soit un nombre entier; dans les autres cas, il est fractionnaire, et souvent même, en faisant disparaître cette fraction, on rend tous les coefficients entiers. Mais, encore une fois, telle n'est pas la préoccupation d'Al-Khârizmi, et voici un exemple qui va nous prouver qu'il ne cherche nullement à éviter les complications qui peuvent résulter du maniement de fractions parfois fort peu simples.

فان قال مال عدلت ثلثه وربعه و ۴ دراهم وضربت ما بقى فى

مثله فعاد المال وزيادة ١٢ درهما، فقياسه انك تاخذ شيئا فتعزل $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ فيبقى ٥ اجزاء من ١٢ من شيء، فتعزل منها ٤ دراهم فيبقى ٥ اجزاء من ١٢ من شيء الا ٤ دراهم فتضربها في مثلها فيكون الاجزاء الخمسة على اجزاء خمسة خمسة وعشرين جزءا فتضرب الـ١٢ في مثلها فيكون ١٤٤ فذلك ٢٥ من ١٤٤ من مال، ثم تضرب الاربعة الدراهم في الخمسة اجزاء من ١٢ من شيء مرتين فيكون ٤٠ جزءا كل ١٢ منها شيء، والاربعة الدراهم في الاربعة الدراهم ١٦ درهما زايدة، فتصير الاربعون الجزء ٣ اجذار و $\frac{2}{3}$ ناقص فيحصل معك ٢٥ جزءا من ١٤٤ جزءا من مال و ١٦ درهما الا $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ يعدل المال الاول وهو $\frac{1}{1}$ و ١٢ درهما، فاجبره وزد الـ$\frac{2}{3}$ على الـ $\frac{1}{1}$ و ١٢ فقابل به والق ١٢ من ١٦ يبقى ٤ دراهم و $\frac{25}{144}$ من مال $\frac{2}{3}$، فيحتاج ان تكمل مالك واكمالك اياه ان تضرب بجميع ما معك في ٥ وتسعة عشر جزءا من اجزاء ٢٥ فتضرب $\frac{25}{144}$ في ٥ و $\frac{19}{25}$ فيكون مالا وتضرب الاربعة الدراهم في ٥ $\frac{19}{25}$ فيكون ٢٣ درهما وجزءا من ٢٥ وتضرب $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ في ٥ $\frac{19}{25}$ فيكون $\frac{23}{1}$ و $\frac{23}{25}$ من جذر،

Arrêtons-nous d'abord ici, afin de ne pas nous perdre.

Si l'on dit : [soit] un nombre; retranche son tiers et son quart et 4 unités, et multiplie ce qui restera par soi-même,

et il viendra le nombre [demandé] et une augmentation de 12 unités. — Voici le calcul :

Prends x [pour le nombre demandé], prends-en un tiers, puis un quart $\left(\text{ou } \frac{7}{12}\right)$, et il restera 5 parts sur 12 dans x $\left(\text{c'est-à-dire } \frac{5}{12}x\right)$. Retranche-s-en quatre unités, il restera $\frac{5}{12}x - 4$, que tu multiplieras par soi-même; il viendra : 5 parties par 5 parties font 25 parties, et en multipliant 12 par lui-même, il vient 144; ce qui fait 25 parts sur 144 dans x^2. $\left(\frac{25}{144}x^2\right)$; puis tu multiplieras les 4 unités par 5 parties sur 12 de x deux fois $\left(2.4.\frac{5}{12}x\right)$, et il viendra 40 parties dont en tout 12 dans x $\left(\frac{40}{12}x\right.$: l'auteur ne simplifie même pas sa fraction, qui eût pu se réduire à $\left.\frac{10}{3}x\right)$; enfin, les 4 unités par 4 unités font 16 positifs. Puis, tu réduiras les 40 parties [de x] en $3x + \frac{1}{3}x$ négatifs, et il te restera en définitive $\frac{25}{144}x^2 + 16 - \left(3x + \frac{1}{3}x\right)$ égaux à la quantité primitive qui est x plus 12 unités $\left(\frac{25}{144}x^2 + 16 - \frac{10}{3}x = x + 12\right)$. Restitue [les manquants] en ajoutant les $3x + \frac{1}{3}x$ à x [du second membre] + 12, puis fais la balance, en retranchant 12 de 16, et il restera $4 + \frac{25}{144}x^2 = 4\frac{1}{3}x$. Il faut maintenant que tu complètes tes x^2, ce que tu obtiendras en multipliant tout ce que tu as par 5 plus 19 parties sur 25 [à l'unité] $\left(\text{car } \frac{144}{25} = \frac{125}{25} + \frac{19}{25} = 5 + \frac{19}{25}\right)$; si tu multiplies $\frac{25}{144}x^2$ par $5\frac{19}{25}$, il viendra x^2, et en multipliant les 4 unités par $5\frac{19}{25}$,

il viendra $23\frac{1}{25}\left(4.\left[5+\frac{19}{25}\right]=20+\frac{76}{25}=23+\frac{1}{25}\right)$; et si tu multiplies $4x+\frac{1}{3}x$ par $5\frac{19}{25}$, il viendra $24x+\frac{24}{25}x$.

Donc, l'équation est ramenée à l'expression peu simple

$$x^2+23\tfrac{1}{25}=24\tfrac{24}{25}x.$$

C'est sur cette équation que l'auteur continue:

فنصف الاجذار فيكون ١٢ جذرا و$\frac{١٢}{٢٥}$ من جذر واضربها في مثلها فيكون ١٥٥ درهما و$\frac{٣٦٩}{٦٢٥}$، فالق منها لدراهم الشلثة والعشرين والجزء من الخمسة والعشرين الذى كان مع المال فتبقى ١٣٢ $\frac{٤٤٤}{٦٢٥}$، فتاخذ جذر ذلك وهو ١١ درهما و$\frac{١٣}{٢٥}$ فتزيده على نصف الاجذار التى هى ١٢ درهما و$\frac{١٢}{٢٥}$ فيكون ذلك ٢٣ وهو المال المطلوب ۞

Maintenant, prends la moitié [du nombre] des x, qui est $12x+\frac{12}{25}x$ (sic), et multiplie-la par elle-même: il viendra $155+\frac{469}{625}$; retranche-s-en les $23\frac{1}{25}$ unités qui sont avec x^2, il reste $132+\frac{444}{625}$; prends la racine, qui fait $11+\frac{13}{25}$, et ajoute-la à la moitié des x, qui est $12+\frac{12}{25}$; cela devient 24 qui est le nombre demandé.

On voit, comme je le disais plus haut, que notre auteur ne redoute pas de s'embarquer dans les cal-

culs les plus compliqués des nombres fractionnaires; et pourtant, avec quelle lourdeur il s'en tire!

Arrivons à la méthode élégante des Indiens dont j'ai parlé déjà plus haut; nous l'étudierons, comme toujours, dans Bhâskara, qui, ayant donné plus de développement à son exposé, nous permet de mieux juger du véritable esprit des méthodes de son école. Nous remonterons ensuite, pour faire voir que son procédé de résolution était connu déjà de ses prédécesseurs.

Voici la règle qu'il donne sous ce titre :

अथाव्यक्तवर्गादिसमीकरणं। तच्च मध्यमहरणमिति॥

Voici l'équation contenant l'inconnue, son carré, etc.; et cela s'appelle *madhyama-haraṇam*, « l'ablation du terme moyen ».

Nous allons voir d'où vient cette dénomination.

अव्यक्तवर्गादि यदा ऽवशेषं पक्षौ
तद्दृष्टेन निहत्य किञ्चित्।
क्षेप्यं तयोर्येन पदप्रदः स्याद्
अव्यक्तपक्षो ऽस्य पदेन भूयः॥ १२८॥
व्यक्तस्य मूलं समीक्रियैवं
अव्यक्तमानं खलु लभ्यते तत्।

Avyakta-varga-adi yadâ 'vaçesham, paxau
tadâ-iṣṭena nihatya, kiñcit

Xepyam tayor yena padapradas syâd
avyakta-paxo; 'sya padena hâyas
Vyaktasya mûlam samihriyâ evam
avyakta-mânam khalu labhyate tat.

Si l'on a les restes des carrés de l'inconnue, etc. [dans un des membres], on multipliera les deux membres par un facteur arbitraire, et l'on ajoutera ce qu'il faut pour que le membre des inconnues ait une racine; égalant ensuite cette racine à celle des nombres connus, on obtiendra la valeur de l'inconnue.

अत्रश्रीधराचार्यसूत्रं ।

चतुराहतवर्गसमै रूपैः पक्षद्वयं गुणयेत् ।
पूर्वाव्यक्तस्य कृतेः समरूपाणि क्षिप्येत्तयोरेव ॥ १३१ ॥

Atra Çridhara-âcârya sûtram:
Catur-âhata-varga-samai rûpais paxadvayam guṇayet,
Pûrva-avyaktasya kṛtes samarûpâṇi xipyet tayor eva.

Et ici, une règle du docteur Çridhara :
C'est par des unités égales à quatre fois [le nombre des] carrés qu'il faut multiplier les deux membres; et des unités égales au carré [du nombre primitif] des inconnues simples qu'il faut leur ajouter.

Cette dernière règle revient à ceci : étant donnée l'équation

$$ax^2 + bx = c$$

multipliez par $4a$ et ajoutez b^2, ce qui la change en

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac$$

Ce qu'il développe en prose de la façon suivante :

अत्र तुल्यपक्षयोः समशोधने कृते सति एकस्मिन्पक्षे ऽव्यक्तवर्गादिकं स्याद् अन्यपक्षे रूपाणि एव। तत्र द्वावपि पक्षौ केनचिद्येनेष्टेन तथा गुण्यौ भाज्यौ वा तथा तयोः किंचित्समं क्षेप्यं शोध्यं वा यथा ऽव्यक्तपक्षो मूलदः स्यात्। तस्मिन्मूलदे व्यक्तपक्षेणावश्यं मूलदेन भवितव्यं॥ यतः समौ पक्षौ समयाः समशोधने समयोगाद्यौ समतो वेति॥ अतस्तत्पक्षयोः पुनः समीकरणेनाव्यक्तमानमितिः स्यात्॥

Or, la soustraction des semblables (nous avons vu ce qu'il entend par ces mots) étant faite entre les deux membres égaux, les inconnues au carré, etc. réunies dans un des membres, les quantités connues dans l'autre, puis les deux membres multipliés ou divisés par un facteur arbitraire (ici se placent et la suppression des facteurs communs, et la disparition des dénominateurs, et une multiplication par un facteur particulier que nous verrons plus loin) ; alors on ajoute ou l'on retranche aux deux membres une même quantité telle que le membre des inconnues devienne un carré parfait (mot à mot « soit susceptible de donner une racine », *mûla-das*, de *dâ*, « donner ») ; par ce même fait, le membre tout connu devient nécessairement aussi un carré parfait ; car les deux membres sont égaux, provenant de deux membres égaux par soustraction de semblables, et soustraction ou addition de quantités égales[1]. On prend alors la racine de l'un et de

[1] Ce raisonnement n'est pas mal pour un écrivain indien du XII^e^ siècle, nous ne dirions pas autrement aujourd'hui.

l'autre, puis égalant ces racines (ce qui donne une équation du premier degré), on en tire la valeur de l'inconnue.

Voyons maintenant l'application qu'il en fait dans la pratique.

On se rappelle que le problème que j'ai cité plus haut, p. 57, nous a amenés à l'équation

$$2x^2 - 9x = 18$$

dans laquelle, comme le dit Bhâskara « les inconnues, au carré, etc. sont réunies dans le premier membre, et les quantités connues dans le second. » Suivons l'explication qu'il donne de l'opération :

एतौ [पक्षौ] अष्टभिः संगुण्य तयोरेकाशीति रूपाणि प्रक्षिप्य मूले गृहीत्वा पुनर्मूलयोः साम्यकरणार्थं न्यासः

या ४ रू ९

या ० रू १५

लब्धं यावत्तावन्मानं ६। अस्य वर्गेणोत्थापने कृते ज्ञातालिसंख्या ७२ ॥

Multipliant les deux membres par 8 (ce qui donne $16x^2 - 72x = 144$) et ajoutant 81 ($16x^2 - 72x + 81 = 225$ et les deux membres sont bien des carrés), prenant les racines et égalant à nouveau ces racines, on obtient $4x - 9 = 15$ d'où l'on tire pour valeur de $x = 6$. En l'élevant au carré et doublant, on obtient le nombre des abeilles 72.

Donc le procédé suivi par notre auteur consiste à :

1° rendre le terme en x^2 un carré parfait;

2° compléter le carré dans le premier membre;

3° abaisser le degré de l'équation en extrayant la racine des deux membres;

4° résoudre à la façon ordinaire l'équation du premier degré qui en résulte.

Et ce procédé s'appelle à bon droit « ablation du terme moyen, » puisque d'un *trinôme* du second degré

$$ax^2 + bx + c$$

il fait un *binôme* du premier degré commençant par $2ax$ (ou même par ax si b est un nombre pair) d'où, par conséquent, la trace du terme bx a disparu.

Bhâskara qui, comme nous le verrons plus loin, savait appliquer ce procédé à certaines équations de degré supérieur au second, ajoute, pour compléter son second distique :

न निर्वहेच्चेद्घनवर्गवर्गेष्वेवं तदा ज्ञेयमिदं स्वबुद्ध्या ॥ १२६ ॥

Na nirvahec ced ghana, vargavargeshv evam,
tadâ jñeyam idam sva-buddhyâ.

Si la chose ne réussit pas ainsi, pour les cubes ou les carrés de carrés, on cherchera la solution par sa propre intelligence.

Et en prose :

अथ यद्येवं कृते घनवर्गवर्गादिषु सत्सु कथञ्चिदपि व्यक्तापत्तस्य मूलाभावात् क्रिया न निवर्तति तदा बुद्धैवाव्यक्तमानं ज्ञेयं। यतो बुद्धिरेव पारमार्थिकं बीजं॥

Ou si ayant opéré comme il est dit, lorsqu'il y a des cubes, des carrés carrés, etc., quelle que soit la structure de la racine du membre connu, la chose ne réussit pas, il faut alors chercher la valeur de l'inconnue par sa propre intelligence : car l'intelligence est la meilleure des algèbres.

Voici maintenant la règle de Brahmagoupta :

« Mets le nombre connu dans le côté opposé à celui où sont les restes de la soustraction de l'inconnue et de son carré. Au nombre connu, multiplié par quatre fois le nombre des x^2 ajoute le carré du [coefficient du] terme moyen; la racine de ceci, moins le [coefficient du] terme moyen, étant divisée par deux fois le nombre des carrés est la valeur de x. »

Et appliquant cette règle sur l'équation

$$\left.\begin{array}{l} \text{याव ० या ० रू ९} \\ \text{याव १ या १० रू ०} \end{array}\right\} \text{ ou } -9 = x^2 - 10x$$

voy. (p. 20), il dit :

Du nombre connu (— 9) multiplié par quatre fois le nombre des x^2 ($4.1 \times (-9) = -36$) et augmenté du carré du [coefficient du] terme moyen ($-36 + 100 = 64$) extrayant la racine (8), on retranche le coefficient (— 10) du terme moyen ($8 - [-10] = 18$); le reste (*sic*) 18 divisé par deux fois le nombre des carrés donne pour valeur de $x = 9$.

Brahmagoupta ajoute ensuite un second énoncé pour le cas où b est pair : il multiplie simplement par a et ajoute $\frac{1}{4}b^2$.

J'avoue qu'en lisant cette règle et en étudiant l'exemple à l'appui j'ai longtemps cru que Brahma-

goupta avait ignoré le procédé élégant et purement algébrique par lequel Bhâskara abaisse le degré de son équation. Mais en considérant que :

1° La préparation de la quantité à soumettre au radical indique nettement que notre auteur multiplie son équation par $4a$ et ajoute b^2 aux deux membres, c'est-à-dire se conforme à la règle de *Çrîdhara*, énoncée par Bhâskara comme corollaire à la préparation du carré du premier membre;

2° Il appelle, au témoignage de Colebrooke, l'opération मध्यमाहरणं *madhyama-âharaṇam* [1] « ablation du terme moyen », tout comme Bhâskara; et nous avons vu que cette expression désigne la réduction d'un *trinôme* du second degré à un *binôme* du premier;

J'ai acquis la conviction que Brahmagoupta avait aussi recours à l'abaissement du degré de son équation.

En tout cas, ce qui est certain, c'est qu'il ne divisait pas, comme les Arabes, par le coefficient de x^2, et que son énoncé répond à notre formule

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Âryabhaṭa n'ayant point traité, dans son chapitre relatif au calcul, les équations du second degré, nous

[1] Bhâskara dit *madhyama-haraṇam*, Brahmagoupta, d'après Colebrooke, *madhyama-âharaṇam* : la seule différence consiste dans l'emploi par ce dernier de la préposition préfixe *â* qui n'ajoute qu'une nuance insignifiante au sens du verbe *har*, « prendre, enlever ».

ne pouvons savoir quelle règle il suivait dans ce cas; toutefois, la formule dont nous avons parlé plus haut (note à la p. 28) et qui donne le nombre n des termes d'une progression arithmétique qui a fourni une somme S,

$$n = \frac{r - 2a \pm \sqrt{(r-2a)^2 + 8rS}}{2r}$$

n'est autre chose que l'inconnue de l'équation

$$rn^2 - (r-2a)n - 2S = 0$$

qu'on obtient en ordonnant par rapport aux puissances de n la formule connue donnant S. On voit ici que la solution est absolument conforme à la nôtre et de la forme

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Donc Âryabhaṭa non plus ne divisait pas par le coefficient de x^2.

J'ai dit tout à l'heure que Brahmagoupta, dans un second distique, modifiait sa solution pour le cas où b est pair, en multipliant simplement par a, et ajoutant $\frac{b^2}{4}$: Bhâskara, bien qu'il n'énonce pas cette dérogation à la règle de Çrîdhara, ne la met pas moins en pratique : ainsi, dans un problème, ayant à résoudre

याव ८ या ५४ रू०
 याव ० या ० रू १४ } ou $8x^2 - 54x = 14$

il dit simplement :

एतयोरष्टगुणयोः सप्तविंशतिवर्ग ७२९ युतयोर्मूले गृहीत्वा न्यासः

या ८ रू २७
या ० रू २९

Multipliant les deux membres par 8, ajoutant le carré de 27 [soit] 729, et prenant les racines, il vient

$$8x - 27 = 29.$$

Bien mieux, dans le problème suivant, il arrive à l'équation

याव ९ या १२ रू ०	$9x^2 + 12x = 60$
याव ० या ० रू ६०	

Comme ici le premier terme est un carré, et b est pair, il dit seulement :

पक्षेभ्यां चत्वारि रूपाणि प्रक्षिप्य मूले गृहीत्वा पुनः

या ३ रू २
या ० रू ८

Ajoutant aux deux membres 4 unités, et prenant les racines, on a de nouveau $3x + 2 = 8$.

Assurément, il avait trouvé toutes ces simplifications dans sa स्वबुद्धि *svabuddhi*.

J'ai préjugé également, d'après la première res-

triction à sa règle, qu'il savait appliquer le même procédé purement analytique à quelques équations de degré supérieur : je ne puis résister à l'envie d'en citer quelques exemples.

Troisième degré : il se propose de chercher un nombre tel que multiplié par 12 et ajouté à son propre cube, il donne une somme égale à six fois son carré augmenté de 35; en d'autres termes, il cherche à résoudre

$$\left.\begin{array}{l}\text{याव १ याव ० या १२ रू ०}\\ \text{याव ० याव ६ या ० रू ३५}\end{array}\right\} x^3+12x=6x^2+35$$

समशोधने कृते ज्ञातमाद्यपक्षे याव १ याव ६ या १२। अन्यपक्षे रू ३५। अनयो रूपाष्टकं विशोध्य (Var. de Colebrooke ऋणगं प्रक्षिप्य) घनमूले

$$\begin{array}{l}\text{या १ रू २}\\ \text{या ० रू ३}\end{array}$$

Ayant fait la soustraction des semblables, il vient dans le premier membre x^3-6x^2+12x, dans le second 35; retranchant de ces deux membres (d'après Colebrooke : ajoutant négativement) 8 unités, et extrayant les racines, il vient $x-2=3$.

Quatrième degré : l'équation à résoudre est

$$\left.\begin{array}{l}\text{यावव १ याव २ या ४०० रू ०}\\ \text{यावव ० याव ० या ० रू ९९९९}\end{array}\right\} x^4-2x^2-400x=9999$$

ici Bhâskara va nous faire voir ce qu'il entend par la *svabuddhi*,

अत्र किलाद्यपक्षे यावत्तावच्चतुःशतीं रूपाधिकां प्रक्षिप्य मूलं लभ्यते याव १ तृ १। पां तावतिक्षिप्तेनान्यपक्षस्य या ४०० तू १०००० मूलं नास्ति। एवं क्रिया न निर्वहति। अतो ऽत्र स्वबुद्धिः ॥ इह पक्षयोर्यावत्तावद्वर्गचतुष्टयं यावत्तावच्चतुःशतीयुतं रूपं च प्रक्षिप्य पक्षयोर्मूले ग्राह्ये। तथथा अद्यपक्षे क्षिप्तं जातं याव१ याव २ रू १। इतरपक्षे तु याव ४ या ४०० रू १०००० । अनयोर्मूले

याव १ रू १

या २ रू १००

अनयोः समशोधने कृते जातौ पक्षौ

याव १ या २ रू ०

याव ० या ० रू ९९

पुनरनयो रूपं प्रक्षिप्य मूले

या १ रू १

या ० रू १०

पुनरेतयोः समीकरणेन प्राग्वल्लब्धं यावत्तावन्मानं ११। इत्यादि बोधव्यं ॥

Ici il est vrai que si l'on ajoute au premier membre $400x + 1$ ce premier membre a pour racine $x^2 - 1$; mais le second membre augmenté de la même quantité, $400x + 10000$, n'a pas de racine : la chose ne réussit pas ainsi, et il faut avoir recours à un artifice. Ici, en ajoutant aux deux membres $4x^2 + 400x + 1$ les deux membres ont chacun une racine : si l'on ajoute cette quantité au premier membre, il devient $x^4 + 2x^2 + 1$; au second membre, $4x^2 + 400x + 10000$, dont les racines sont $x^2 + 1$ et $2x + 100$; faisant sur ces deux expressions la soustraction des semblables, les deux membres deviennent $x^2 - 2x$ et 99; en les égalant, ajoutant 1 de part et d'autre les racines sont $x - 1$ et 10; égalant à nouveau on en tire $x = 11$. *Ita excogitandum est !*

Je ne puis m'empêcher de revenir encore sur l'étonnement que me fait éprouver la rencontre de raisonnements si clairs, si coulants, si purement algébriques, si bien et facilement exposés, lorsque je songe que leur auteur vivait dans l'Inde au XII^e^ siècle de notre ère, à une époque où ses contemporains de l'école grecque agonisante, de l'école arabe alors au *summum* de sa prospérité, de l'école italienne naissante à peine, pataugeaient (qu'on me pardonne ce mot d'argot) dans des raisonnements lourds et pâteux, recourant à tout instant à des démonstrations géométriques dont ils ne savaient plus tirer parti, et n'étaient pas même arrivés, depuis bientôt deux mille ans que leurs maîtres et eux faisaient des mathématiques, à la notion si simple que les termes négatifs d'une expression algébrique ne diffèrent des positifs que par un simple signe, et peuvent et doivent dès lors être traités de la même façon : et il

y avait six siècles déjà que dans l'Inde, pays réputé barbare et quasi sauvage, cette notion était devenue vulgaire et avait porté les fruits que l'on vient de voir.

IV.

DOUBLE RACINE DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ.

Encore un petit détail intéressant pour terminer.

Bhâskara ajoute à sa règle pour la solution de l'équation du second degré un troisième distique.

अव्यक्तमूलर्णगरूपतो ऽल्पं
व्यक्तस्य पक्षस्य पदं यदि स्यात् ।
ऋणं धनं तच्च विधाय साध्यं
अव्यक्तमानं द्विविधं क्वचित् ॥ १३० ॥

Avyakta-mûla-ṛṇaga-rûpato 'lpam
vyaktasya paxasya padam yadi syât,
Ṛṇam dhanam tacca vidhâya, sâdhyam
avyaktamânam dvividham kvacit.

Si la racine du membre connu est plus petite que le nombre négatif qui figure dans la racine du [membre] inconnu, en prenant cette [racine] négative ou positive, on obtiendra dans certains cas une double valeur de l'inconnue.

अथ यथव्यक्तपक्षमूले यानि ऋणरूपाणि तेभ्यो ऽल्पानि व्यक्तपक्षमूलनूपाणि स्युस्तदा तानि धनर्णानि वा कृत्वा अव्यक्तमितिः साध्या सा चैवं द्विविधा भवति ॥

Or si les unités qui se trouvent dans la racine du membre des inconnues sont négatives et telles que soient moindres qu'elles les unités provenant de la racine du membre connu, en faisant celles-ci positives ou négatives, on obtient [toujours] la valeur de l'inconnue, et elle est double.

Ce qu'il appuie sur les exemples suivants :

वनान्तराले प्लवगाष्टभागः
संवर्गितो वल्गति जातिरागः ॥
भ्रूत्कारनादप्रतिनादहृष्टाः
दृष्टाः गिरौ द्वादश ते कियन्तः ॥ १३९ ॥

Vana-antarâle plavaga-aṣṭa-bhâgas
samvargito valgati jâtirâgas :
Brât-kara-nâda-pratinâda hṛṣṭâs
dṛṣṭâs girau dvâdaça. Te kiyantas?

Des singes s'amusaient : de la troupe bruyante
Un huitième au carré gambadait dans le bois.
Douze criaient tous à la fois
Au haut de la colline verdoyante.
Combien étaient-ils au total ?

अत्र कपियूथं या १। अस्याष्टांशवर्गो द्वादशयुतो यूथसमः इति। पक्षौ

याव $\frac{1}{8}$ या ० रू १२
याव ० या १ रू ०

अनयोः समच्छेदीकृत्य छेदगमे शोधने च कृते ज्ञाती पक्षौ

याव १ या ६४ रू ०

याव ० या ० रू ७६८

अनयोः द्वात्रिंशद्रूपयुतयोर्मूले

या १ रू ३२

या ० रू १६

अत्र व्यक्तपक्षमूलार्णरूपेभ्यो ऽल्पानि व्यक्तपक्षमूलरूपाणि धनं ऋणं च कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानं द्विविधं ४८ । १६ ॥

Ici [posons] la troupe de singes $= x$: le carré de son huitième augmenté de 12 fait la troupe entière, dit-on : les deux membres sont

$$\frac{x^2}{64} + 0x + 12 = 0x^2 + x + 0.$$

Réduisant les deux membres au même dénominateur, chassant celui-ci, les deux membres deviennent

$$x^2 - 64x = -768$$

ajoutant de part et d'autre le carré de 32, et extrayant les racines, il vient

$$x - 32 = 16.$$

Ici les unités négatives de la racine du premier membre sont telles que les unités de la racine du second sont plus petites qu'elles : on peut donc prendre ces dernières positives ou négatives, et l'on a une double valeur de x, 48 et 16.

का कर्णत्रिलवेनोना द्वादशाङ्गुलशंकुभा।
चतुर्दशाङ्गुला जाता गणक ब्रूहि तां क्षिप्रं ॥ १४१ ॥

Kâ karṇa-trilavêna-ûnâ dvâdaça-aṅgula-çaṅku-bhâ
Caturdaça-aṅgulâ jâtâ: gaṇaka, brûhi tâm çighram.

De l'ombre d'un gnomon de douze doigts de haut,
On retranche le tiers de son hypoténuse;
Restent quatorze doigts, si point je ne m'abuse.
Calculateur qu'on n'a jamais pris en défaut,
Dis-moi la longueur de cette ombre.

अत्र भा या १। इयं किल कर्णत्र्यंशोना चतुर्दशाङ्गुला जाता। अतो वै परीत्येनास्याश्चतुर्दश विशोध्य शेषं कर्णत्र्यंशः या १ रू १४। तत्त्रिगुणितं कर्णः स्यादिति जातः कर्णः या ३ रू ४२। अस्य वर्गं याव ९ या २८२ रू १७६४। कर्णवर्गेणानेन याव १ रू १४४ समीकृत्य शोधने च कृते पक्षौ

याव ८ या २८२ रू ०
याव ० या ० रू १६२०

द्विगुणीकृत्य ऋणत्रिषष्टि रूपवर्गं प्रक्षिप्य मूले

या ४ रू ६३
या ० रू २७

अनयोः समीकरणेन प्राग्वल्लब्धं यावत्तावन्मानं द्विक्षिप्तं तच्छाया मानं $\frac{45}{8}$। ३॥ इह द्वितीया छाया चतुर्दशभ्यो

न्यूना अतो ऽनुपपन्नत्वान्न ग्राह्या । अत उक्तं द्विविधं क्वचित् ॥ अत्र पद्मनाभबीजे

व्यक्तपक्षस्य चेन्मूलमन्यपक्षर्णान्यूनतः ।
अल्पं धनर्णगं कृत्वा द्विविधोत्पद्यते मितिः॥ इति

यत्परिभाषितं तस्य व्यभिचारो ऽयं ॥

Soit ici l'ombre x : celle-ci diminuée du tiers de l'hypoténuse est égale à 14 doigts : donc, réciproquement, si l'on en retranche 14, le reste est le tiers de l'hypoténuse $x - 14$, ceci multiplié par 3 est l'hypoténuse elle-même, $3x - 42$; le carré de cette expression $9x^2 - 252x + 1764$ est égal au carré de l'hypoténuse $x^2 + 144$; égalant ces valeurs et faisant la soustraction on a l'équation

$$8x^2 - 252x = -1620$$

multipliant par 2, ajoutant le carré de — 63 unités, et prenant les racines

$$4x - 63 = 27$$

Égalant celles-ci et prenant le quotient, on obtient une double valeur de x, c'est-à-dire de l'ombre, savoir $\frac{45}{2}$ et $\frac{9}{1}$. Ici la seconde ombre, étant moindre que 14, ne doit pas être prise pour cause d'impropriété. Voilà pourquoi on a dit : une double valeur *quelquefois*. Donc ce qui est enseigné dans l'algèbre de Padmanâbha :

« Si la racine du côté connu est moindre que les unités « négatives de l'autre membre, en la prenant positive ou né« gative on a une double valeur, »

Le cas présent le met en défaut.

Que résulte-t-il de cette règle et des exemples à

l'appui? Bhâskara (et, on le voit, ses prédécesseurs également) est amené, par une règle antérieure et que nous avons citée déjà, **स्वमूले धनर्णे** *sva-mûle, dhanarṇe* «*plus* a deux racines, une positive et une négative», à donner le double signe à la racine du nombre connu qui se trouve former le second membre de son équation. Il s'en abstient toutes les fois qu'il serait conduit ainsi à une solution négative, parce que, dit-il à la fin d'un autre problème que je n'ai pas cité, **व्यक्ते ऋणगते लोकस्य प्रतीपं** *vyakte ṛṇagate lokasya pratîpam* «il y a dans un nombre déterminé négatif quelque chose qui choque les gens (c'est-à-dire le sens commun, le bon sens)». C'est ce qui arrive dans le cas où «le nombre contenu dans la racine du membre aux inconnues» est positif, parce que, passé dans le second membre, il devient négatif: c'est ce qui arrive également quand ce nombre, quoique négatif, est plus petit que la racine du second membre. Mais quand le nombre en question, négatif dans le premier membre, donc positif dans le second, est plus grand que la racine du second membre, quel que soit le signe de cette dernière, la solution sera toujours positive et l'école indienne, représentée pour Bhâskara par Padmanâbha, admet une double solution de l'équation. C'est par l'algèbre pure, sans intervention d'autres considérations, que les Indiens sont arrivés à cette conclusion. Bhâskara y ajoute, de son propre fonds, la *discussion* de ces valeurs, et le choix de celle qui, lorsqu'elles sont positives toutes deux, convient au problème posé, et

il rejette la solution impropre en se basant uniquement sur des raisons arithmétiques ou algébriques.

Nous avons vu plus haut qu'Âryabhaṭa savait interpréter les valeurs négatives de certains problèmes du premier degré : ce souvenir ne s'était pas perdu dans l'école, et si Bhâskara ne prend que la solution positive de ces problèmes, c'est que seule elle répond au problème posé ; mais nous avons, chez un de ses commentateurs cité par Colebrooke, Krichna-Bhaṭṭa, un exemple curieux d'une interprétation du même genre. Il s'agit, dans un problème de Bhâskara d'une troupe de singes dont *un cinquième moins trois* au carré s'est caché dans une caverne, un seul singe restant à gambader dans le bois : le problème conduit à l'équation $x^2 - 55x = -250$, et aux deux solutions

$$x' = 50 \qquad x'' = 5.$$

Bhâskara rejette cette dernière, parce que $\frac{1}{5}5 - 3$ serait négatif. Krichna-Bhaṭṭa dit alors : « Si l'énoncé eût été *le cinquième de la troupe retranché de trois*, c'est la seconde solution, 5, qui eût été la bonne, et non 50 ; car le cinquième de ce nombre ne peut se retrancher de 3. »

Voyons un peu maintenant comment l'école grecque, ou son unique représentant pour nous, Diophante, et le fondateur de l'école arabe, Al-Khârizmi, ont traité ce cas d'une double solution possible de l'équation du second degré.

On lit dans Nesselmann (*Algebra der Griechen*, p. 320) le passage suivant :

« Diophante ne considère qu'*une seule* racine de l'équation quadratique, ne paraissant pas connaître la valeur négative du radical. Cette omission ne saurait nous étonner quand une des deux racines est négative, c'est-à-dire dans le cas des équations de la forme $x^2 \pm px = +q$; mais le fait est surprenant dans le troisième cas, $x^2 - px = -q$, où les deux racines, lorsqu'elles sont réelles, sont positives : dans ce cas les Arabes, aussi bien que les vieux Italiens (il cite en note Léonard de Pise), considèrent les deux racines. »

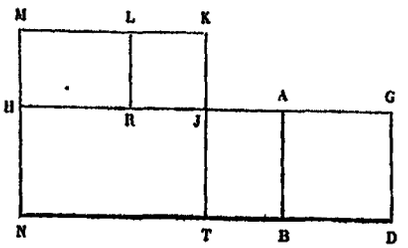
Il est vrai, Diophante ne parle nulle part de cette double valeur; mais encore une fois il n'écrivait pas un Traité d'algèbre, mais résolvait par l'algèbre une certaine série de problèmes de la théorie des nombres, et il s'est trouvé que dans ceux de ces problèmes qui conduisaient à une équation susceptible de deux solutions positives, l'une d'elles était rejetée *a priori*. Ainsi, par exemple, dans le problème V, 13 dont j'ai cité un fragment plus haut (p. 62), l'inégalité résolue dans ce passage, $72x > 17x^2 + 17$ conduit bien à deux valeurs positives pour x, $x' < \frac{67}{17}$ $x'' < \frac{5}{17}$; mais il y a une autre inégalité à résoudre, $72x < 19x^2 + 19$, laquelle amène aux deux autres solutions $x' > \frac{66}{19}$ $x'' > \frac{6}{19}$; or comme $\frac{5}{17} < \frac{6}{19}$, il n'est pas possible de trouver une valeur de x qui, inférieure à la première, soit supérieure à la seconde, et le groupe des racines à radical négatif doit être

rejeté. Diophante n'en parle pas, et nous n'en parlerions certainement pas plus que lui.

« Les Arabes, nous dit Nesselmann, tenaient compte de cette double solution. » Ceci est vrai jusqu'à un certain point, que je vais éclaircir par quelques citations. D'abord, ils en admettaient la possibilité en principe, et s'appuyaient pour cela sur une démonstration géométrique que je vais rapporter tout au long d'après Al-Khârizmi, parce qu'on y reconnaîtra encore tous les caractères des procédés géométriques des Grecs : je supprime seulement le texte, pour ne pas allonger inutilement cet article.

« Démonstration du cas $x^2 + 21 = 10x$:

« Nous représenterons x^2 par un carré de côté inconnu AD. Nous y joindrons un parallélogramme



dont la largeur soit égale au côté du carré AD, soit HN, et soit le parallélogramme HB : la longueur des deux figures prises ensemble étant GH. Or nous savons que cette longueur vaut 10 en nombres : car toute figure carrée a ses angles et ses côtés égaux, et

l'un quelconque de ses côtés multiplié par 1 est une racine du carré, par 2, deux racines, etc. Or il a été dit que $x^2 + 21$ est égal à 10 racines de x^2; nous savons donc que la longueur du côté GH vaut 10 en nombres, puisque GD représente x. Partageons maintenant GH en deux parties égales en J, et alors la ligne HJ est égale à la ligne JG; il est également évident que JT = GD. Maintenant ajoutons à la ligne JT, dans la même direction, quelque chose qui soit égal à l'excès de GJ sur JT, afin de faire de la figure un carré : alors la ligne TK devient égale à la ligne KM, et nous avons un quadrilatère équilatéral et équiangle, à savoir MT. Nous savons déjà que la ligne TK vaut 5 : telle est aussi la valeur des autres côtés, et la figure vaut 25 : or c'est ce qu'on obtient en multipliant la moitié [du nombre] des racines par elle-même, car cette moitié est 5 et $5 \times 5 = 25$. Nous avons déjà dit que le quadrilatère HB représente les 21 unités ajoutées à x^2; nous avons tranché le quadrilatère HB par la ligne TK (qui est l'un des côtés du carré MT) de sorte qu'il n'en reste plus que TA. Maintenant nous prendrons sur la ligne KM une ligne KL égale à JK, et il est évident que TJ = ML; or la portion LK de la ligne MK est égale à KJ, par suite la figure MR est égale à la figure TA, et il est évident que le rectangle HT augmenté du rectangle MR est égal au rectangle HB, qui représente 21. Mais le carré MT tout entier a été démontré égal à 25. Si nous retranchons de ce carré MT les rectangles HT et MR dont la somme

vaut 21, il nous restera une petite figure RK, qui représente la différence entre 25 et 21. Or il vaut 4 et la racine, la ligne RJ, qui est égale à JA, vaut 2. Si nous retranchons cette ligne de GJ qui représente la moitié [du nombre] des racines, il restera la ligne AG, valant 3, qui est la racine de x^2. Et si nous ajoutons cette ligne (RJ) à GJ, qui est la moitié [du nombre] des racines, la somme est 7, représentée par RG, qui est la racine d'un carré plus grand que x^2: cependant si tu ajoutes à ce carré 21, la somme sera égale à 10 de ses racines. »

En lisant attentivement cette démonstration peu élégante, on l'avouera, on reconnaîtra aisément deux points capitaux :

1° Al-Khârizmi enseigne qu'il faut prendre régulièrement la valeur négative du radical $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ qui seule conduit à trouver pour l'inconnue du problème la racine du premier terme x^2 représenté par le carré AD dans sa figure.

2° Il accepte *par ouï-dire* que la valeur positive peut aussi fournir une solution de l'équation proposée, *mais il s'embrouille dans sa démonstration* parce que RG, qui représente cette solution, est plus grand que AG qu'il a tout d'abord choisi pour représenter x, et que AG n'est le côté d'aucun carré tracé sur la figure.

Et en effet, dans les exemples qu'il cite plus loin et qui conduisent à des équations rentrant dans le cas en question, *c'est toujours la solution correspondant*

au radical négatif qu'il admet, alors même (et cela arrive presque toujours) que la seconde solution répond également au problème. Exemples :

I. Lorsqu'il arrive plus loin à résoudre algébriquement cette équation $21 + x^2 = 10x$ sur laquelle il a fait sa démonstration géométrique, après avoir trouvé que la valeur du radical est 2 ($\sqrt{25 - 21} = \sqrt{4} = 2$), il ajoute simplement : فانقصه من نصف الاخذار التي هي خمسة فبقي ٣ وهو احد القسمين والاخر ٧ ۞ « retranche ceci de la moitié des racines qui est 5, il restera 3 qui est l'une des parts (de 10) et l'autre est 7. » Or il eût eu cette seconde valeur 7 en *ajoutant* son radical 2 à $\frac{p}{2}$ qui est 5.

II. Plus loin encore il divise de nouveau 10 en deux parties dont les propriétés écrites algébriquement l'amènent à l'équation

$$24 + x^2 = 10x$$

ici $\frac{p}{2} = 5$, $q = 24$, $\sqrt{25 - 24} = 1$, et il dit encore « retranche ceci de la moitié des racines qui est 5, il restera 4 qui est l'une des parts. » Et encore ici l'autre part, qui est 6, n'est autre chose que $5 + 1$.

Donc Mohammed ben Mouça admet bien *en théorie* que l'équation qu'il écrit $x^2 + q = px$ a deux solutions, mais *en pratique* il n'en emploie jamais qu'une, alors même que la seconde répond au problème posé. Il est remarquable, du reste, que la seule solution

dont il fasse usage est celle qui répond au signe — du radical, contrairement à ce que nous avons vu chez Diophante qui, lui, ne fait jamais usage que du radical avec le signe +. Nous sommes loin, on l'avouera, du procédé net et précis de Bhâskara, qui même pour la forme d'équation en question prévoit le cas où le radical serait imaginaire pour le mettre de côté, et lorsqu'il est réel, forme les deux solutions positives et en discute la convenance et l'accord avec l'énoncé du problème.

CONCLUSION.

Les nombreux exemples que je viens de citer auront amené, j'en ai l'espoir, le lecteur qui aura eu la patience de les suivre, à se convaincre de l'exactitude des faits que j'énonçais en commençant et que je résume ici à nouveau :

1° Il a existé dans l'Inde, à partir de la fin du v^e^ siècle au moins, une école de mathématiciens algébristes qui avaient fait faire à cette branche de la science des progrès surprenants. Cette école, inspirée peut-être par un premier fonds d'enseignement venu de la Grèce, peut-être aussi en possession de notions scientifiques empruntées à une autre source qui pourrait être la Chaldée, est infiniment supérieure à l'école grecque pour les idées générales et pour l'élégance du calcul.

2° Les Arabes, qui sont censés, sur leur propre assertion, avoir importé en Occident la science in-

dienne, ne l'ont point fait : leur maître à tous, Mohammed ben Mouça Al-Khârizmi, soit qu'il ait eu la malechance de tomber sur de mauvais maîtres qui ne l'ont pas bien enseigné, soit qu'il n'ait pas compris l'enseignement, généralement peu intelligible, des Pandits indiens, n'a consigné dans son Traité d'algèbre *rien* qui rappelle les doctrines ni de son prédécesseur de près d'un siècle Brahmagoupta, ni même d'Âryabhaṭa, qui lui était pourtant antérieur de trois cents ans. Ses idées, sa méthode, ses procédés de calcul sont *purement grecs*, et dans bien des cas absolument identiques à ce que nous voyons mis en pratique dans l'ouvrage de Diophante.

Ces deux faits, dont, je le répète, je crois avoir démontré surabondamment la réalité, sont d'une importance capitale pour l'histoire des mathématiques d'une part, de l'autre pour celle du développement de l'esprit humain chez nos frères d'origine, les Âryas de l'Inde. Le premier d'entre eux prouve d'une manière irréfutable que tout, dans le domaine de la science, n'a point été inventé par les Grecs. Il démontrera aux personnes qui trouvent quelque intérêt à savoir où, par qui, comment et à quelle époque tel ou tel progrès scientifique a été réalisé, qu'il leur faut de toute nécessité donner place dans leurs recherches aux œuvres des vrais savants qu'a produits la vallée du Gange ou la côte occidentale de la péninsule hindoue. Les indianistes sont tout prêts, si on le leur demande, à fournir les matériaux nécessaires à ces recherches, à continuer les

études des Colebrooke, des Burgess, des Kern, à publier et à traduire les documents sans nombre que renferment nos bibliothèques et celles de l'Inde, documents qui fourniront certainement des renseignements précieux sur ce qu'a pensé et enseigné ce peuple éminemment intelligent et naturellement porté vers les considérations spéculatives et abstraites dans lesquelles rentre ce qu'on appelle en mathématiques l'*Analyse*.

Je viens de faire voir que les Arabes ne nous ont donné aucune idée de la façon dont les Indiens avaient compris et pratiqué le calcul algébrique : j'ai tout lieu de croire, comme j'en ai dit un mot plus haut, que sur plus d'une question un peu difficile de l'arithmétique pratique ils ne nous ont pas mieux renseignés. La géométrie de l'école indienne n'a jamais encore été étudiée : plusieurs traités de cette science existent en manuscrit dans nos bibliothèques, que l'on a laissés de côté sans les examiner parce qu'ils sont dits traduits des Éléments d'Euclide; mais il serait au moins curieux de savoir comment cette traduction est faite, si elle reproduit plus ou moins fidèlement l'original grec, ou si elle y a introduit quelques changements, ne serait-ce que de détail. Tout du reste, dans la géométrie des Indiens, n'est pas d'origine hellénique : j'ai fait voir dans ma traduction du chap. II de l'*Âryabhaṭîyam* que l'auteur de ce traité, qui connaît déjà pour π la valeur si exacte $\frac{62832}{20000} = 3,1416$, donne pour expression du

volume de la pyramide « le produit de la base par *la moitié* de la hauteur », et pour celui de la sphère « la puissance $\frac{3}{2}$ d'un grand cercle ». Bhâskara lui-même donne, dans sa *Lîlâvatî*, pour évaluation du volume d'un tas de blé supposé conique « le sixième de la circonférence de la base, élevé au carré et multiplié par la hauteur » ou $\frac{h}{3}\frac{\pi}{3}\pi R^2$. Ces formules fausses n'ont jamais été enseignées par les Grecs. L'astronomie des Indiens ne me paraît pas non plus avoir dit son dernier mot à l'histoire : jusqu'ici l'on n'a étudié à fond que le système du *Sûrya-Siddhânta*[1], ouvrage qui, bien qu'on en ait dit, m'a paru, rapproché de l'*Âryabhaṭîyam*, porter les traces évidentes d'une rédaction relativement moderne. En parcourant les chapitres consacrés à l'astronomie dans l'œuvre d'Âryabhaṭa que je viens de nommer, j'ai aperçu plusieurs énoncés qui, au premier abord, et sauf examen plus approfondi, m'ont semblé différer notablement de l'enseignement du *Sûrya-Siddhânta*, et avoir été, pour ce motif, mal interprétés par le commentateur.

En somme, ce que l'on enseigne actuellement en Europe sur les doctrines mathématiques et astronomiques dans l'Inde me paraît entièrement à refaire.

Quel champ d'études plein d'intérêt s'ouvre ainsi pour la pépinière de jeunes savants que nous prépare

[1] Il faut excepter peut-être de ce que je dis ici la publication et la traduction de l'œuvre de Varâha-mihira par M. Kern, que je n'ai point encore eu occasion de lire.

en ce moment notre École des Hautes études! Ceux d'entre eux que leur disposition d'esprit ne porterait point vers la littérature pure ou vers les idées abstruses de la philosophie hindoue, et qui d'autre part auraient acquis dans leurs études classiques une connaissance suffisante des premiers éléments des mathématiques, connaissance qu'il leur sera facile d'ailleurs de rendre plus parfaite au besoin, trouveront là des sujets intéressants et relativement faciles à aborder, et l'occasion de produire quelques travaux qui seront pour sûr bien accueillis d'une certaine catégorie d'hommes de science parfois trop disposés, jusqu'ici, à n'accorder aucune valeur aux travaux des linguistes, parce que ces travaux ne traitent, en général, que des sujets qu'ils ne connaissent pas. Ils en retireront le double avantage de s'acquérir un renom bien mérité, et de rendre service à la science philologique que l'on accuse un peu trop encore de n'aboutir à rien de pratique et d'utile.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

Pages.

But du mémoire..... 5
Âge d'Âryabhaṭa (note)..... 8

I. — MANIÈRE DE CONSIDÉRER LES TERMES AFFECTÉS DES SIGNES + ET —.

Des six cas des Arabes..... 16
Règle indienne pour la mise en équation..... *Ibid.*
Forme des six cas arabes dans l'Inde..... 18
Notion du nombre négatif chez les Indiens..... 21
Le problème des courriers résolu par Âryabhaṭa..... 27
Formule compliquée lue par Âryabhaṭa (note)..... 28
Quotient d'un nombre par zéro chez les Indiens..... 29
Noms des termes négatifs en arabe..... 32
Traduction arabe du latin *articuli* et origine occidentale de cette dénomination..... 34

II. — MANIÈRE D'ARRIVER À L'ÉQUATION DÉFINITIVE.

Transformation de l'équation sur un exemple d'Al-Khârizmi.. 37
Règles de Behâ ed-Dîn et de Diophante..... 39
Exemples empruntés à Diophante..... 42
Tableaux résumés du calcul chez le même..... 43
Règle de Bhâskara pour la transformation de l'équation..... *Ibid.*
Préparation des équations du second degré par Al-Khârizmi... 50
Préparation par Diophante..... 52

Pages.
Préparation par Bhâskara..... 53
Les Indiens chassaient les dénominateurs de leurs équations.. 57

III. — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION TRINÔME DU SECOND DEGRÉ.

Observations générales..... 58
Exemples de Diophante..... 60
Exemples d'Al-Khârizmi..... 63
Calculs fractionnaires compliqués chez les Arabes..... 66
Règle de Bhâskara pour la résolution de l'équation du second degré et exemples..... 70
Exemple de Brahmagoupta..... 75
Exemple d'Âryabhaṭa..... 76
Équations de degré supérieur au second résolues par Bhâskara. *Ibid.*

IV. — DOUBLE RACINE DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ.

Règle et exemples de Bhâskara..... 82
Discussion des valeurs par le même..... 86
Absence des doubles solutions chez Diophante; à quoi elle doit être attribuée..... 89
Doubles valeurs d'après Al-Khârizmi..... 90
Conclusion..... 94

ERNEST LEROUX, ÉDITEUR,

LIBRAIRE DE LA SOCIÉTÉ ASIATIQUE,

DE L'ÉCOLE DES LANGUES ORIENTALES VIVANTES, ETC.

RUE BONAPARTE, 28.

Publications du même auteur :

GRAMMAIRE ABRÉGÉE DE LA LANGUE SANSCRITE. 1 vol. in-8°... 5 fr.

PREMIERS ÉLÉMENTS DE LA LANGUE ANGLO-SAXONNE. In-8° (autographié) ..... 1 fr. 50

REMARQUES SUR QUELQUES DIALECTES PARLÉS DANS L'EUROPE OCCIDENTALE. In-8°..... 1 fr. 50

ÉTUDES SUR LA LITTÉRATURE JAVANAISE..... 3 fr. 50

SUR LE DÉCHIFFREMENT DES INSCRIPTIONS PRÉTENDUES ANARIENNES DE L'ÎLE DE CHYPRE. In-8°..... 2 fr. 50

LE TOURAN ET LES TOURANIENS, suivant la tradition persane. 1 vol. in-8°..... 2 fr. 50

Sous presse :

PREMIERS ÉLÉMENTS DE LA LANGUE SANSCRITE. 1 vol. in-8°.