APOLLONII PERGÆI CONICORUM

LIBRI TRES POSTERIORES

(*Sc.* V^{tus}. VI^{tus}. & VII^{mus}.)

EX

ARABICO SERMONE

IN

LATINUM CONVERSI,

CUM

PAPPI ALEXANDRINI

LEMMATIS.

SUBJICITUR

LIBER CONICORUM OCTAVUS

RESTITUTUS.

Opera & ſtudio EDMUNDI HALLEII apud *Oxonienſes*
Geometriæ Profeſſoris *Saviliani*.

MAXIME REVERENDO

IN CHRISTO PATRI AC DOMINO

D. *NARCISSO MARSH*,

ARCHIEPISCOPO *ARMACHANO*

ET

TOTIUS *HIBERNIÆ* PRIMATI,

ARTIUM MATHEMATICARUM

FAUTORI SUMMO,

SUIQUE ORDINIS PROPE UNICO,

HANC

QUINTI, SEXTI ET SEPTIMI LIBRI

CONICORUM APOLLONII

VERSIONEM,

E CODICE SUO ARABICO PRÆSTANTISSIMO

ADORNATAM,

Ea qua par eſt reverentia & obſervantia

Humillime offert

EDM. HALLEIUS.

LECTORI S.

P*Ræstantissimus ille Codex* Armachanus, *ex quo sequentem Versionem adornavimus, in orâ libri charactere majusculo hunc titulum præ se fert.*

كتب المخروطات لنصير الدين الطوسي

" *Liber Conicorum juxta* Nasir-eddîn Tusæum. " *Et tam in principio quam fine libb.* V^{ti}. VI^{ti}. & VII^{mi}. *occurrunt hæc verba.*

كتب ابلونيوس في المخروطات اخرج ثابت بن قرة واصلاح بني موسى

" *Liber* Apollonii *de Conicis Traduxit* Thebit ben Corah, *emendavit vero* Beni " Moses *In calce autem legitur Epiloge, quæ quasi Historiola est, quâ manu, quo loco & tempore descriptus fuit ille Codex: atque hoc modo se habet, Interprete* D^{no} Sike LL D. *viro omnigenâ literaturâ perpolito, Linguarum Orientalium peritissimo, &* Hebraicæ *apud* Cantabrigienses *Professore dignissimo*

' *Hæc est narratio, quam in fine hujus libri scripsit* Muley *maximus* Nasir-eddîn' (*hic dictus* نصير الحق والدين). " *Absolvit scriptor harum linearum* Mohammed " Ebn Mohammed Ebn Al-Hasan Tusæus *complere hunc librum & corrigere hoc* " *exemplar, auxilio Dei & optimo adjutorio ejus, die 21 mensis* Dhi lhajje *anni 645,* " (*anno Chr. 1248. Mart. 9.*) *Inceperat eo describendo occupari die 12mo mensis* Rabiae " *prioris ejusdem anni,* (*Chr. 1247. Aug 16*) *nec tamen ei vacavit amplius quam duas* " *tertias partes ejus intervalli Absolvit autem scribere Scholia in hoc exemplar, ac dispo-* " *nere & corrigere figuras ejus,* Achmed Ebn Aly Abu'lfaraj Mohammed, *qui cogno-* " *minatur* Ebno lbawwâb Bagdadensis (*Deus fortunet statum ejus*) *mense* Moharram " *anni 662* (*Chr. 1263. Octob.*) *laudans Deum pro beneficiis ejus, & orans pro propheta* " *ejus electo* Mohammede *& familia ejus. Laus Deo, & pax super servis ejus electis:* " *fiducia nostra est Deus & optimus protector.*

" *Absolutum est exemplar hoc, in urbe* Marága, *feria secunda, die decimo mensis* Shaa- " bân *anno 702,* (*Chr. 1303. Mart. 30*) *mensis* Persici Choidâd *die* Asmôn.

Ad marginem autem paginæ ultimæ ascribuntur hæc verba,

وجدت مكتوبا على اخر نسخة التي نسخت منه هذه النسخة واما المقالة

hoc est, الثامنة من الكتاب لم ينقل الى العربي فلم توجد في اليوناني

" *Scriptum legitur in calce exemplaris unde descriptum est hoc exemplar. Partem octa-* " *vam hujus libri in* Arabicum *non traductam fuisse, quia etiam in* Græco *non reperta* " *est* " *Adeo ut de octavo libro recuperando vix ulla spes sit*

Porro urbs Marága, *in qua ante quadringentos annos nobile hoc Conicorum exemplar scriptum dicitur, est in confiniis* Mediæ & Assyriæ, *sub Long.* 82^{gr}. *& Lat* 37$\frac{1}{3}$^{gr}. *Urbs autem* Tûs, *unde ortus* Nasir-eddîn, *in eadem fere Latitudine ac* Marága *sita, Longitudinem habet* 92$\frac{1}{3}$^{gr}. *civitate* Bagdâd *habente* 80^{gr}. *juxta Tabulas* Persicas *Geographicas* à Gravio *nostro editas*

Benigne igitur velim accipias hoc quicquid est operis, ab oriente ad nos advectum & hoc unico (quod scimus) exemplari feliciter conservatum, & nostris quæso in eo interpretando & luce donando conatibus faveas. Errata quæ operarum incuriâ irrepserunt, aut nobis forsan quandoque minus perspicacibus exciderunt, ne ægre feras hoc modo corrigere

Pag 4 lin 13 *lege*, pro ΓΖ, ΓΣ *p* 14. *l* 48 pro ΓΣΠ, ΓΞΠ *p.* 16 *l* 13 pro *quadratum igitur ex* ΞΛ, *leg* Excessus igitur quadrati ex ΓΔ supra quadratum ex ΞΔ *Prop* 25. in Schem Hyperb. fiat Α pro Λ *p* 24 *l* 4 pro ΒΖ, ΒΕ *p* 42 *l* 12 pro 11am, 10am *p* 66 *l* 38 pro ΛΖ, ΛΣ *p* 77 *l* 7 pro ΜΞ, ΜΧ *p* 91 *l* 5 pro ΗΖΚ, ΖΗΚ *p* 92 *l.* 13 pro *quadr ex* ΓΛΑ, rectangulum ΓΛΑ *p* 97 *l* 13 pro *majorem,* minorem *p.* 100 *l* 17 pro 12am, 21am *p* 108 *l* 38 pro *latus ejus rectum,* latere ejus recto. *p* 113 *l* 4 pro ΑΒ, ΑΓ *p* 123 *l* penult pro *recti datur* ab, *leg.* recti: datur ab *p.* 126. *l* 43 pro *major,* minor.

ΠΑΠΠΟΥ

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΛΗΜΜΑΤΑ
ΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟ ΠΕΜΠΤΟΝ
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA
IN QUINTUM LIBRUM CONICORUM
APOLLONII PERGÆI

ΛΗΜΜΑ α'.

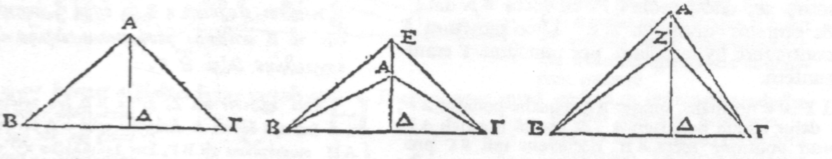
Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ. Λέγω ὅτι εἰ μὲν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΒΔΓ τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ, γίνεται ὀρθὴ ἡ Α γωνία· εἰ δὲ μεῖζον, ἀμβλεῖα· εἰ δὲ ἔλασσον, ὀξεῖα.

ΕΣΤΩ πρότερον ἴσον, ἀνάλογον ἄρα καὶ περὶ ἴσας γωνίας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ ὥστε ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Α γωνία. ἀλλὰ ἔστω μεῖζον, καὶ αὐτῷ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΔΕ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ. ἔσται ἄρα ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία, καὶ αὐτῆς μείζων ἡ Α γωνία. ἀλλὰ ἔστω πάλιν ἔλασσον καὶ αὐτῷ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΓ ἔσται δὴ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνία, καὶ αὐτῆς ἐλάσσων ἡ πρὸς τῷ Α γωνία ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία

LEMMA I.

Sit ΑΒΓ triangulum, ac ducatur cathetus ΑΔ. Dico quod si rectangulum ΒΔΓ æquale sit quadrato ex ΑΔ, erit angulus ad Α rectus, si majus fuerit eo, obtusus, sin minus, acutus.

PRIMO sit æquale, ac ΒΔ erit ad ΑΔ sicut ΑΔ ad ΔΓ, & sunt circa æquales angulos, quare angulus ad Α æqualis est angulo ad Δ ac propterea angulus ad Α rectus est Sed sit majus, eique æquale fiat quadratum ex ΔΕ, & jungantur ΒΕ, ΕΓ, erit igitur angulus ΒΕΓ rectus, adeoque



angulus ad Α obtusus sive recto major est Si vero minus fuerit, ipsi æquale ponatur quadratum ex ΔΖ, & jungantur ΒΖ, ΖΓ, ac angulus ΒΖΓ rectus erit, eoque minor est angulus ad Α ac proinde angulus ad Α acutus Q. E D

ΛΗΜΜΑ β

Θέσει δοθεισῶν [πρὸς ὀρθὰς] δύο εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ σημείου δοθέντος τοῦ Δ· γράψαι διὰ τοῦ Δ ὑπερβολὴν περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒ, ΒΓ.

ΓΕγονέτω κέντρον ἄρα αὐτῆς ἐστὶ τὸ Β ἐπεζεύχθω οὖν ἡ ΔΒ καὶ ἐκβεβλήσθω, διάμετρος ἄρα ἐστί κείσθω τῇ ΔΒ ἴση ἡ ΒΕ. δοθεῖσα ἄρα ἐστί, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ Ε καὶ πέρας τῆς διαμέτρου ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΔΖ δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ καὶ κείσθω τῇ ΒΖ ἴση ἡ ΖΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Γ καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Α θέσει ἄρα ἐστίν θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒ, δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ δοθέν, δέδοται ἄρα ἡ ΑΓ τῷ μεγέθει, καὶ ἔσται ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, διὰ τὸ καὶ τὴν ΒΖ τῇ ΖΓ ἴσην εἶναι. ἔστω δὴ ὀρθία τῆς πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους ἡ ΔΗ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ, ΔΓ δύναται ἐστὶ τὸ τέταρτον τοῦ ὑπὸ ΕΔΗ;

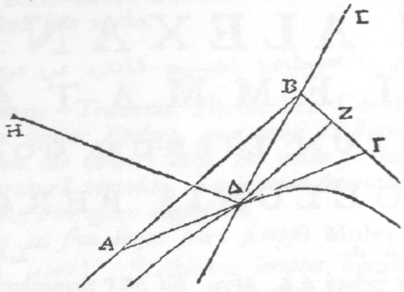
LEMMA II

Duabus rectis ΑΒ, ΒΓ invicem normalibus positione datis, ac dato puncto Δ, describere per Δ hyperbolam circa asymptotos ΑΒ, ΒΓ

PUta factum ac centrum ejus erit Β Jungatur igitur recta ΒΔ producaturque, quæ proinde diameter erit Ponatur ΒΕ ipsi ΒΔ æqualis, quare data est, unde & datum punctum Ε diametri terminus est De Δ super rectam ΒΓ demittatur cathetus ΔΖ, ac fiat ΖΓ ipsi ΒΖ æqualis, ac datum erit punctum Γ junctâ autem & productâ rectâ ΓΔ ad punctum Α, recta ΓΑ data erit positione, ac recta ΑΒ datur positione, quare punctum Α datur Datur etiam punctum Γ, adeoque recta ΑΓ datur magnitudine erit quoque ΑΔ ipsi ΔΓ æqualis, ob ΒΖ ipsi ΖΓ æqualem Sit jam ΔΗ latus rectum figuræ diametri ΔΕ; poterit igitur utraque ΑΔ, ΔΓ quartam partem rectanguli

anguli Ε Δ Η sed & eædem possunt quartam partem quadrati ex Α Γ, quare rectangulum sub Ε Δ Η æquale est quadrato ex Α Γ Datum autem est quadratum ex Α Γ, datum igitur rectangulum Ε Δ Η, unde datâ rectâ Ε Δ data quoque est Η Δ, ac punctum Η datum [a] datis autem positione duabus rectis Ε Δ, Δ Η in eodem plano ad angulos rectos inter se constitutis, per datum punctum Δ & sub angulo Α Δ Β fit hyperbola, cujus diameter est Ε Δ, vertex vero Δ, ordinatim autem applicatæ ducuntur sub angulo dato Α Δ Β, ac possunt spatia ipsi Δ Η adjacentia, latitudinesque habentia eas quas puncto Δ conterminas ipsæ ordinatim applicatæ e diametro productâ abscindunt, excedentia vero figuris similibus figuræ Ε Δ Η data est igitur positione sectio hyperbolica

ἀλλὰ καὶ τῷ ἀπὸ Α Γ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ Ε Δ Η τῷ ἀπὸ Α Γ τετραγώνῳ δοθὲν δὲ τὸ ἀπὸ Α Γ τετράγωνον, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ Ε Δ Η καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ Ε Δ, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Η Δ, ὥστε δοθὲν τὸ Η [a] ἐπεὶ οὖν θέσει δεδομένων δύο εὐθειῶν ἐν ἐπιπέδῳ τῶν Ε Δ, Δ Η ὀρθῶν ἀλλήλαις κειμένων, καὶ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Δ ὑπὸ τῆς Α Δ Β γωνίας γίνεται ὑπερβολή, ἧς διάμετρος μὲν ἡ Ε Δ, κορυφὴ δὲ τὸ Δ, αἱ δὲ καταγόμεναι κατάγονται ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ Α Δ Β, δυνάμεναι τὰ παρὰ τὴν Δ Η παρακείμενα, πλάτη ἔχοντα ἃ αὗται ἀφαιροῦσιν ἀπὸ τῆς ἐπ' εὐθείας τῇ διαμέτρῳ πρὸς τὸ Δ, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ Ε Δ Η θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ τομή



[b] Componetur autem problema hoc modo Sint duæ rectæ positione datæ Α Β, Β Γ, punctum autem datum Δ, ac juncta Β Δ producatur ad Ε, ipsique Β Δ æqualis fiat Β Ε, & demittatur normalis Δ Ζ, ac fiat Γ Ζ ipsi Β Ζ æqualis jungatur Γ Δ & producatur ad Α, ipsique Δ Ε aptetur Δ Η, ita ut quadratum ex Α Γ æquale sit rectangulo Ε Δ Η, & diametro Δ Ε describatur hyperbola, modo in analysi dicto Dico hanc sectionem problema efficere Quoniam enim Β Ζ ipsi Ζ Γ æqualis est, erunt etiam Α Δ, Δ Γ æquales utraque igitur Α Δ, Δ Γ, potens quartam partem quadrati ex Α Γ, poterit quartam partem rectanguli Ε Δ Η, nempe figuræ super diametrum Δ Ε factæ Hoc autem ita se habente, demonstratum, est in secundo libro Conicorum, hyperbolæ asymptotos esse rectas Α Β, Β Γ.

[b] Συντεθήσεται δὲ τὸ πρόβλημα οὕτως Ἔστωσαν αἱ τῇ θέσει δύο εὐθεῖαι αἱ Α Β, Β Γ, τὸ δὲ δοθὲν τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Β Δ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ αὐτῇ ἴση κείσθω ἡ Β Ε καὶ ἤχθω κάθετος ἡ Δ Ζ, καὶ τῇ Β Ζ ἴση κείσθω ἡ Ζ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ Δ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Α καὶ τῇ Δ Ε παραβεβλήσθω ἡ Δ Η, καὶ τῷ ἀπὸ Α Γ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ Ε Δ Η καὶ γεγράφθω, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει λέγομεν, περὶ διάμετρον Δ Ε ὑπερβολή λέγω ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ Β Ζ τῇ Ζ Γ, ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ Α Δ τῇ Δ Γ ἑκατέρα ἄρα τῶν ἀπὸ Α Δ, Δ Γ δυνάμει τὸ τέταρτόν ἐστιν τοῦ ἀπὸ τῆς Α Γ τετραγώνου, καὶ ἔστι τοῦ ὑπὸ Ε Δ Η, τουτέστι τοῦ πρὸς τῇ Ε Δ διαμέτρῳ εἴδους Ἐὰν δὲ ᾖ τοῦτο, [c] δέδεικται ἐν τῷ δευτέρῳ ὅτι ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ Α Β, Β Γ τῆς ὑπερβολῆς

LEMMA III

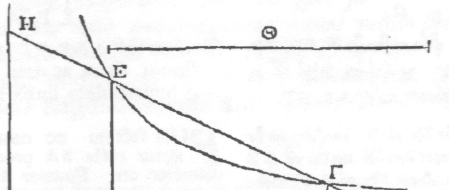
Sit recta Α Β positione data, ac punctum Γ datum, ac, ductâ rectâ Β Γ, sit recta Β Δ data & erigatur normalis Δ Ε Dico punctum Ε contingere hyperbolam per punctum Γ transeuntem.

SIT Γ Ζ normalis, ipsique Β Δ æqualis ponatur Ζ Α, datur itaque punctum Α & erectâ normali Α Η, dabitur positione recta Α Η, occurrens ipsi Β Γ productæ ad punctum Η datis igitur positione rectis Α Β, Α Η, hyperbola, per datum punctum Γ asymptotis Α Β, Α Η descripta, transibit per punctum Ε, quia Ε Η ipsi Β Γ æqualis est, ob totam Β Ε toti Η Γ æqualem Hoc autem ex præcedente manifestum est.

ΛΗΜΜΑ γ'.

Θέσει εὐθεῖα ἡ Α Β, καὶ δοθὲν τὸ Γ διήχθω ἡ Β Γ, καὶ κείσθω δοθεῖσα ἡ Β Δ, ὀρθὴ δὲ ἀνήχθω ἡ Δ Ε. ὅτι τὸ Ε ἅπτεται θέσει κώνου τομῆς ὑπερβολῆς ἐρχομένης διὰ τοῦ Γ.

Ἤχθω κάθετος ἡ Γ Ζ, καὶ τῇ Β Δ ἴση κείσθω ἡ Ζ Α δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Α ἀνήχθω ὀρθὴ ἡ Α Η θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Α Η συμπίπτουσα τῇ Β Γ, ἥτις ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ Η καὶ θέσει δοθεισῶν τῶν Β Α, Α Η, καὶ σημείου δοθέντος τοῦ Γ, ὑπερβολὴ περὶ ἀσυμπτώτους Η Α, Α Β ἐλεύσεται ἄρα καὶ διὰ τοῦ Ε, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν Β Γ τῇ Ε Η, ἐπεὶ καὶ ὅλη Β Ε τῇ Η Γ. καὶ ἔσται διὰ τὸ προγεγραμμένον



Componetur autem hoc modo Sit Α Β recta positione data, & punctum datum Γ, sitque Β Γ recta ducta, data autem recta sit Θ demissâ normali Γ Ζ, ipsi Θ æqualis fiat Ζ Α, & ad angulos rectos erigatur Α Η occurrens rectæ Β Γ productæ in Η dein asymptotis Η Α, Α Β, per punctum Γ intra datum, describatur hyperbola Dico eam problemati satisfacere, hoc est, si demittatur cathetus aliqua Ε Δ, semper fiet Β Δ ipsi Θ æqualis Hoc autem manifestum est propter asymptotos, æquales enim sunt Ε Η, Γ Β, adeoque Α Δ ipsi Ζ Β æqualis tota igitur Α Ζ, hoc est recta Θ, æqualis est toti Β Δ

Συντεθήσεται δὴ οὕτως Ἔστω ἡ μὲν τῇ θέσει δεδομένη εὐθεῖα ἡ Α Β, τὸ δοθὲν τὸ Γ, ἡ δὲ διηγμένη ἡ Β Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα ἡ Θ καὶ αὐτῇ ἴση ἔστω, καθέτου ἀχθείσης τῆς Γ Ζ, ἡ Ζ Α καὶ ὀρθὴ ἀνήχθω ἡ Α Η συμπιπτέτω δὲ τῇ Β Γ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Η καὶ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς Η Α, Α Β διὰ δοθέντος τοῦ Γ γεγράφθω ὑπερβολή λέγω ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα, τουτέστιν ὁποία ἂν κάθετος ἀχθῇ ἡ Ε Δ, ἴση γίνεται ἡ Β Δ τῇ Θ. τοῦτο δὲ φανερὸν διὰ τὰς ἀσυμπτώτους, ἴση γὰρ ἡ Ε Η τῇ Γ Β, ὥστε καὶ ἡ Α Δ τῇ Ζ Β καὶ ὅλη ἄρα ἡ Α Ζ, τουτέστιν ἡ Θ, ἴση ἐστὶ τῇ Β Δ

a Vide Prop LIII Lib. primi   b Vide Prop IV Lib secundi   c Vide Prop. I Lib secundi

ΛΗΜΜΑ δ'.

PAPPI LEMMATA

ΛΗΜΜΑ δ'.

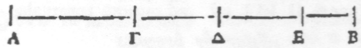
Ἐστω ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ. ὅτι τῶν ΒΑ, ΑΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΑΔ.

Κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ. κατὰ διαίρεσιν ἄρα γίνεται ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΓΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΕΒ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΓΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΕΒ τῷ ἀπὸ ΔΕ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΓΔΕ. ἀνάλογον καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΓ· ὅλη ἄρα πρὸς ὅλην ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΓ· ὥστε τῶν ΒΑ, ΑΓ μέση ἀνάλογόν ἐστι ἡ ΑΔ.

LEMMA IV.

Sit ut BA ad AΓ ita quadratum ex BΔ ad quadratum ex ΔΓ Dico AΔ mediam esse proportionalem inter BA & AΓ

Fiat ΔE ipsi ΓΔ æqualis, ac dividendo erit ut BΓ ad ΓA, hoc est, ut rectangulum ΓBE ad rectangulum sub AΓ, EB ita (per sextam II Elem.) rectangulum ΓBE ad quadratum ex EΔ quare rectangulum sub AΓ, EB æquale est quadrato ex ΔE, hoc est rectangulo ΓΔE ob proportionales igitur & componendo, erit ut BΔ ad ΔE sive ΔΓ, ita ΔA ad AΓ quapropter tota BA ad totam AΔ erit in eadem ratione AΔ ad AΓ, ita ut AΔ media proportionalis sit inter BA, AΓ



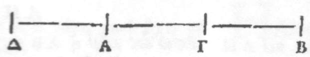
ΛΗΜΜΑ ε'

Ἐστω τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον τῷ δὶς ἀπὸ ΑΓ. ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ

Κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ· ἔσται ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΓΑ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΒΓ καὶ παρὰ τὴν αὐτήν· ἴση ἄρα ἐστὶ ἡ ΔΑ, τουτέστιν ἡ ΑΓ, τῇ ΓΒ

LEMMA V

Sit rectangulum ABΓ duplum quadrati ex AΓ. Dico AΓ ipsi ΓB æqualem esse.



Fiat AΔ ipsi AΓ æqualis erit itaque rectangulum ΓΔA æquale rectangulo ABΓ & applicato utroque ad eandem rectam AΓ, erit AΔ ipsi AI æqualis etiam recta ΓB æqualis

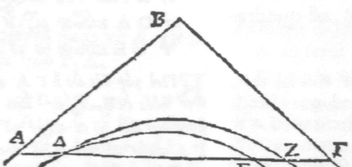
ΛΗΜΜΑ ϛ'

Περὶ τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒ, ΒΓ ὑπερβολαὶ γεγράφθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ· λέγω ὅτι οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις.

Εἰ γὰρ δυνατὸν συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω εἰς τομὰς εὐθεῖα ἡ ΑΔΕΖΓ· ἔσται δή, διὰ μὲν τὴν ΔΖ τομήν, ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΖΓ, διὰ δὲ τὴν ΔΕ τομήν, ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΕΓ· ὥστε ἡ ΓΖ τῇ ΓΕ ἴση ἐστίν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα συμβάλλουσιν αἱ τομαὶ ἀλλήλαις

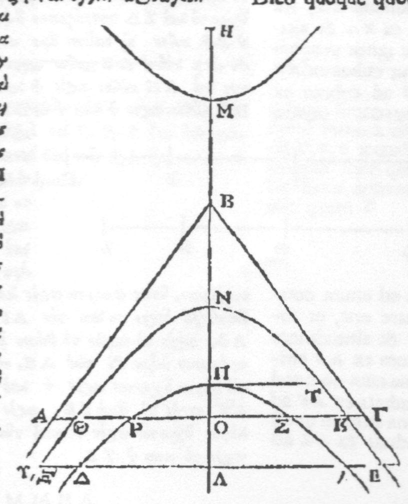
LEMMA VI.

Circa easdem asymptotos AB, BΓ describantur hyperbolæ ΔE, ΔZ Dico eas non occurrere invicem



Nam si fieri possit, conveniant in puncto Δ, & per Δ ducatur ad sectiones recta AΔEZΓ, erit igitur, propter sectionem ΔZ, recta AΔ ipsi ZΓ æqualis verum, propter sectionem ΔE, eadem AΔ ipsi EΓ æqualis erit, adeoque ΓZ ipsi ΓE æqualis quod impossibile est hæ sectiones igitur non concurrunt inter se

Λέγω δὲ ὅτι καὶ εἰς ἄπειρον αὐξόμεναι ἔγγιον προσάγουσιν ἑαυταῖς, καὶ εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα. ἤχθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΘΝΚ, καὶ ἔστω ἡ διάμετρος ΜΝ, ἧς πέρας τὸ Μ [ἔστω καὶ τῆς ΔΠΖ διάμετρος ἡ ΠΗ] ἔσται ἄρα ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΗΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΡ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· ὥστε ἐστὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ οὕτω τὸ ὑπὸ ΗΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΡ, καὶ ἐναλλάξ· μεῖζον δὲ ἐστι τὸ ὑπὸ ΜΛΝ τοῦ ὑπὸ ΗΟΠ, * μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΞ τῆς ΟΣ· καὶ διὰ τὰς τομάς, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΞΔ τῷ ὑπὸ ΣΘΡ, [ἑκάτερον γὰρ τῷ ἀπὸ ΠΤ ἴσον] ἐλάσσων ἄρα ἐστὶ ἡ ΞΔ τῆς ΘΡ· ὥστε ἀεὶ εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα· ἀλλὰ καὶ παράκεινται, εἰ γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν ταῖς ἀσυμπτώτοις ἔγγιον προσάγει, δηλονότι καὶ ἑαυταῖς.



Dico quoque quod eædem in infinitum productæ semper invicem propiores fiunt, & ad minorem procedunt distantiam Ducatur enim alia hyperbola ΘNK, sitque diameter ejus MN, cujus terminus M, ac sit HΠ diameter hyperbolæ ΔΠZ erit igitur rectangulum MΛN ad quadratum ex ΛΞ, ut diameter transversa ad latus rectum, & ut rectangulum HOΠ ad quadratum ex OP ita diameter transversa ad latus rectum quare rectangulum MΛN est ad quadratum ex ΛΞ ut rectangulum HOΠ ad quadratum ex OP, ac permutando sed rectangulum MΛN majus est rectangulo HOΠ, * quare ZΞ major est quam ΘΣ ac propter sectiones, rectangulum ZΞΔ rectangulo ΣΘP æquale est [utrumque enim quadrato ex ΠT æquale] quapropter ΞΔ minor est quam ΘP semper igitur sectiones accedunt invicem ad minora intervalla, sibique adjacent nam si utraque earum asymptotis semper propius accedit, manifestum est & sibi ipsis semper appropinquare

*

* *Manca*

* *Manca est hæc demonstratio placuit igitur aliam hic subjicere, ab antiquâ & integrâ* Pappi, *ut ex vestigiis ejus conjicere licet, non multum diversam*

Quoniam enim sectiones sunt circa easdem asymptotos, erit ut rectangulum ΜΑΝ ad quadratum ex ΑΞ ita rectangulum ΗΑΠ ad quadratum ex ΑΔ pariterque ut rectangulum ΜΟΝ ad quadratum ex ΟΘ ita rectangulum ΗΟΠ ad quadratum ex ΟΡ, sunt enim omnia in ratione lateris transversi ad latus rectum reliquum igitur ad reliquum erit in eadem ratione quare ut latus transversum ad rectum ita differentia rectangulorum ΜΑΝ, ΗΑΠ ad differentiam quadratorum ex ΑΞ, ΑΔ, hoc est [per 6 II El] ad rectangulum ΖΞΔ, & ita differentia rectangulorum ΜΟΝ, ΗΟΠ ad differentiam quadratorum ex ΟΘ, ΟΡ, sive rectangulum ΣΘΡ Sed differentia rectangulorum ΜΑΝ, ΗΑΠ æqualis est differentiæ rectangulorum ΜΟΝ, ΗΟΠ, semper enim [per *Pappi* Lem 4 in Lib III.] æqualis est rectangulo ΜΠΝ est igitur rectangulum ΖΞΔ æquale rectangulo ΣΘΡ Verum ΖΞ major est quam ΣΘ, adeoque ΞΔ minor est quam ΘΡ Quapropter hæ sectiones semper accedunt invicem ad minora intervalla

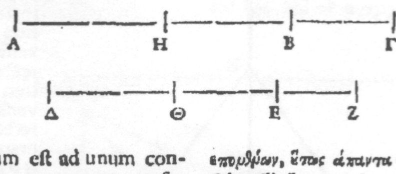
Aliter & brevius

Propter Hyperbolas, ΑΡ æqualis est ipsi ΣΓ [per 8 II huj] ac ΑΘ ipsi ΚΓ, ac proinde reliqua ΘΡ reliquæ ΣΚ æqualis est, quocunque modo duxeris rectam ΑΓ Est autem [per 10 II huj] rectangulum ΣΑΡ semper æquale rectangulo ΖΥΔ, ac rectangula ΚΑΘ, ΕΥΞ sunt ubique æqualia, quare & eorundem differentiæ semper æquales sunt Sed [per *Pappi* Lem 4 in III huj] differentia rectangulorum ΣΑΡ, ΚΑΘ æqualis est rectangulo ΣΘΡ, & differentia rectangulorum ΖΥΔ, ΕΥΞ æqualis est rectangulo ΖΞΔ, adeoque rectangula ΣΘΡ, ΖΞΔ sunt ubique æqualia unde patet ΞΔ minorem esse quam ΘΡ. Ac manifestum est hyperbolam ΔΠΖ ubique intra hyperbolam ΞΝΕ constitui, quia rectangulum ΑΘΓ ubique minus est rectangulo ΑΡΓ

LEMMA VII.

Sit ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, & ut ΒΑ ad ΑΗ ita ΕΔ ad ΔΘ Dico ut solidum basin habens quadratum ex ΑΓ, altitudinem vero ΑΒ, ad solidum basin habens quadratum ex ΔΖ altitudinemque ΔΕ, ita cubus ex ΑΗ una cum eo quod est ad cubum ex ΗΒ in ratione quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ, ad cubum ex ΔΘ una cum eo quod est ad cubum ex ΘΕ in ratione quadrati ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΕ

Quoniam enim ut ΓΑ est ad ΑΒ ita ΖΔ ad ΔΕ, erit etiam ut quadratum ex ΓΑ ad quadratum ex ΑΒ ita quadratum ex ΖΔ ad quadratum ex ΔΕ sed ut quadratum ex ΓΑ est ad quadratum ex ΑΒ, sumptâ communi altitudine ΑΒ, ita solidum basin habens quadratum ex ΑΓ & altitudinem ΑΒ ad cubum ex ΑΒ ut autem quadratum ex ΖΔ ad quadratum ex ΔΕ, ob communem altitudinem ΔΕ, ita erit solidum basin habens quadratum ex ΖΔ & altitudinem ΔΕ ad cubum ex ΔΕ Hæc igitur proportionalia sunt, ac permutando Sed ut cubus ex ΑΒ est ad cubum ex ΔΕ ita cubus ex ΑΗ ad cubum ex ΔΘ, & ita cubus ex ΗΒ ad cubum ex ΘΕ verum ut cubus ex ΗΒ ad cubum ex ΘΕ ita solidum quod est ad cubum ex ΗΒ in ratione quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ, ad solidum quod est ad cubum ex ΘΕ in ratione quadrati ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΕ ut vero unus antecedentium est ad unum consequentium ita omnes ad omnes, quare erit, ut solidum basin habens quadratum ex ΑΓ & altitudinem ΑΒ, ad solidum basin habens quadratum ex ΔΖ altitudinemque ΔΕ, ita cubus ex ΑΗ una cum eo quod ad cubum ex ΗΒ rationem habet quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ, ad cubum ex ΔΘ una cum eo quod ad cubum ex ΘΕ rationem habet quadrati ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΕ Q E D



ΛΗΜΜΑ ζʹ

Εστω ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως η ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ οὕτως η ΕΔ πρὸς τὴν ΔΘ ὅτι γίνεται ως τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον το ἀπὸ ΔΖ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΑΗ κύβος μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς το ἀπὸ ΓΒ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΟΔ κύβον μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ως ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ ἀλλ᾽ ὡς μὲν το ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, κοινὸν ὕψος ἡ ΑΒ, οὕτως τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβον ως δὲ τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, κοινὸν ὕψος ἡ ΔΕ, οὕτω το στερεον τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΖΔ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΕ κύβον καὶ ταῦτα ἄρα ἀνάλογον καὶ εναλλάξ ἐστιν ἔστι δὲ ὡς ο ἀπὸ τῆς ΑΒ κυβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΕ κυβον, οὕτως ο τε ἀπὸ ΑΗ κύβος πρὸς τὸν ἀπο τῆς ΔΘ κυβον, καὶ ο ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπο τῆς ΘΕ κυβον ἀλλ᾽ ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ΗΒ κυβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κυβον, οὕτω τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν το ἀπὸ ΑΓ πρὸς το ἀπὸ ΓΒ, πρὸς τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν το ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς εν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα ἔστιν ἄρα ως το στερεὸν βάσιν μὲν ἔχον το ἀπο τῆς ΑΓ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, οὕτως ο ἀπὸ τῆς ΑΗ κυβος μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, πρὸς τὸν ἀπὸ ΔΘ κυβον μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κυβον ὃν το ἀπο ΔΖ πρὸς τὸ απο τῆς ΖΕ

LEMMA VIII.

Si sint Α & Β simul æqualia ipsis Γ & Δ simul. Dico Α excedere Γ eodem excessu quo Δ majus est quam Β.

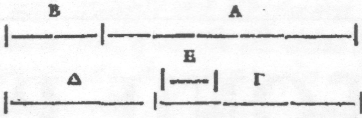
ΛΗΜΜΑ ηʹ.

Εστω τὸ Α μετὰ τοῦ Β ἴσον τῷ Γ μετὰ τοῦ Δ ὅτι ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ Δ τοῦ Β.

PAPPA LEMMATA IN V. LIB. CONIC.

ΕΣΤΩ γὰρ ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ τὸ Ε, τὸ ἄρα Α ἴσον ἐστὶ τοῖς Γ, Ε κοινὸν προσκείσθω τὸ Β τὰ Α, Β ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς Γ, Ε, Β. ἀλλὰ τὰ Α, Β τοῖς Γ, Δ ἴσα ὑπόκειται καὶ τὰ Γ, Δ ἄρα τοῖς Γ, Ε, Β ἴσα κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ Γ, λοιπὸν ἄρα τὸ Δ ἴσον τοῖς Β, Ε ὥστε τὸ Δ τοῦ Β ὑπερέχει τῷ Ε ᾧ ἄρα ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ Δ τοῦ Β ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἐὰν ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ Δ τοῦ Β, ὅτι τὰ Α, Β ἴσα ἐστὶ τοῖς Γ, Δ

SIT E excessus quo A majus est quam Γ, A igitur æquale est utrisque Γ, E commune adjiciatur B, & A, B simul æqualia erunt ipsis, Γ, E, B simul sed ex hypothesi A, B simul æqualia sunt ipsis Γ, Δ simul, quare Γ, Δ ipsis Γ, E, B æquantur commune auferatur Γ, ac reliquum Δ reliquis B, E æquale erit, ac Δ majus erit quam B excessu ipsius E quo igitur excessu A superat Γ eodem & Δ superabit B Pari modo demonstrari potest, quod si A superat Γ eodem excessu quo Δ superat B, utraque A, B simul utrisque Γ, Δ simul æqualia esse.



ΛΗΜΜΑ θ'

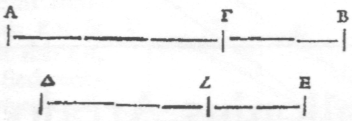
Ἔστω δύο μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΒ. ὅτι ἐὰν ὑπερέχει τὸ ΑΒ τοῦ ΑΓ, ὑπερέχει καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτὸν, τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ΓΒ τὸν αὐτόν

ΕΣΤΩ γὰρ τὸ μὲν πρὸς τὸ ΑΒ λόγον τινὰ ἔχον τὸ ΔΕ, τόδε πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχον τὸ ΔΖ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΖ πρὸς τὸ ΒΓ λόγον ἔχει τὸν αὐτόν καὶ ἔστι τὸ ΕΖ ὑπεροχὴ ἡ ὑπερέχει τὸ ΔΕ τοῦ ΔΖ, τουτέστι τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτὸν

LEMMA IX

Sint duæ magnitudines AB, ΓB Dico quod si majus fuerit AB quam AΓ, illud quod ad AB rationem aliquam habet superabit quod ad AΓ eandem habet rationem, excessu qui eandem ipsam rationem ad ΓB habebit.

HAbeat enim ΔE rationem aliquam ad AB, & sit ΔZ ad AΓ in eadem ratione, reliquum itaque EZ eandem ipsam rationem habebit ad BΓ est autem EZ excessus quo ΔE superat ΔZ, sive quo id quod ad AB rationem habet excedit illud quod ad AΓ eandem habet rationem



ΛΗΜΜΑ ι'

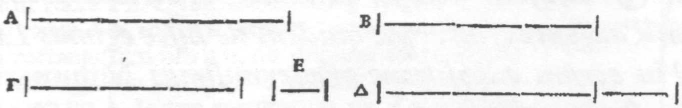
Τὸ Α τοῦ Γ ἐλάσσονι ὑπερεχέτω ἤπερ τὸ Δ τοῦ Β ὅτι τὰ Α, Β ἐλάσσονά ἐστι τῶν Γ, Δ.

ΕΣΤΩ δὴ ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ τὸ Ε, τὰ Α, Β ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς Γ, Ε, Β ἐπεὶ δὲ τὸ Α τοῦ Γ ἐλάσσονι ὑπερέχει ἤπερ τὸ Δ τοῦ Β· τόδε Α τοῦ Γ ὑπερέχει τῷ Ε, τὸ Ε ἄρα ἔλασσόν ἐστι τῆς τῶν Δ, Β ὑπεροχῆς ὥστε τὰ Ε, Β ἐλάσσονά ἐστι τοῦ Δ κοινὸν προσκείσθω τὸ Γ, τὰ Γ, Ε, Β ἄρα ἐλάσσονά ἐστι τοῖς Γ, Δ ἀλλὰ τὰ Γ, Ε, Β ἴσα ἐδείχθη τοῖς Α, Β τὰ Α, Β ἄρα ἐλάσσονά ἐστι τοῖς Γ, Δ ὁμοίως καὶ τὸ ἀναστρόφιον καὶ τὰ τῆς ἐλλείψεως ὁμοίως

LEMMA X

Excedat A ipsum Γ minore differentia quam qua Δ superat B. Dico A, B simul minora esse quam Γ, Δ simul sumpta.

SIT enim E excessus ipsius A supra Γ, unde A, B simul ipsis Γ, E, B simul sumptis æqualia erunt superat autem A ipsum Γ minore quam quo Δ superat B est autem E excessus quo A superat Γ igitur E minor est differentia ipsarum Δ, B, adeoque E, B minora sunt quam Δ commune addatur Γ, ac Γ, E, B simul minora erunt quam Γ, Δ Sed demonstratum est Γ, E, B æqualia esse ipsis A, B simul quare A, B minora sunt quam Γ, Δ simul Pari modo constabit hujus conversa, & quid accidat ubi A minus fuerit quam Γ



APOL-

APOLLONII PERGÆI CONICORUM

LIBER QUINTUS.

Apollonius Attalo S. P.

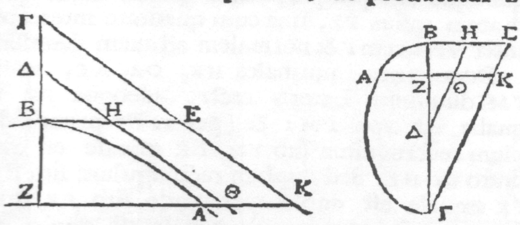
—— *Conscriptæ à nobis sunt hoc Libro quinto propositiones de* Maximis *&* Minimis. *Sciendum autem eos qui vel ante nos vel nostro tempore vixerunt,* Minimarum *doctrinam leviter tantum attigisse: ideoque demonstrarunt tantum quænam Rectæ contingant Sectiones, & vicissim, nempe quidnam iis accidat propterea quod Sectionum Tangentes sint. Ac quidem de hisce egimus Libro primo, nisi quod in eorum expositione prætermisimus* Minimarum *doctrinam. Constitueramus autem eum in his quoque demonstrandis servare ordinem, quem in præmissis trium Sectionum Elementis sequuti sumus, relatione habitâ ad quamlibet Sectionum diametrum: quoniam vero innumera sunt quæ hisce accidunt, id solum in præsentia conati sumus, ut ostenderemus quomodo se res habeat respectu Axium sive diametrorum principalium. Has autem Propositiones de* Minimis *accurate admodum divisimus & distinximus in suas Classes: iisque adjunximus illas quæ ad præfatam* Maximarum *doctrinam spectant. Id namque scientiæ hujus studiosis in primis necessarium est, tum ad Divisiones & διορισμοὺς Problematum, tum ad eorundem Compositiones: præterquam quod hæc ipsa res de earum numero sit, quæ per se contemplatione non indignæ videantur.* Vale.

PROPOSITIO I.

SI in Hyperbola vel Ellipsi ad Verticem principalem Sectionis erigatur Axi normalis, quæ sit dimidio Lateris recti æqualis; & ab ejus extremitate ducatur recta ad centrum sectionis, ut & à quovis in sectione puncto Axi ordinatim applicata: poterit ea duplum quadrilateri sub rectis hoc modo ductis & lateris recti dimidio contenti.

Sit ΑΒ Hyperbola vel Ellipsis, cujus Axis ΒΓ ac centrum Δ: & sit latus rectum Sectionis ΒΕ, ipsiusque ΒΕ dimidium sit ΒΗ. Jungatur ΔΗ, & ducatur ordinatim applicata quævis ΑΖ, quæ parallela erit ipsi ΒΕ, & producatur ad Θ. Dico quadratum ex ΑΖ duplum esse quadrilateri ΒΖΗΘ.

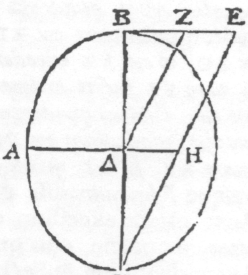
Ducatur è puncto Ε recta ΕΓ, quæ parallela erit ipsi ΔΗ, ac producatur ΖΘ ad Κ: erit igitur ΘΚ parallela & æqualis ipsi ΗΕ, hoc est ipsi ΒΗ. Adjiciatur communis ΖΘ, ac ΖΚ æqualis erit utrisque ΒΗ, ΖΘ simul sumptis; adeoque quod fit sub ΖΚ & ΒΖ æquale erit ei quod fit sub ΒΗ, ΖΘ simul sumptis & ΒΖ. Sed rectangulum sub ΖΚ, ΒΖ æquale est quadrato ipsius ΑΖ: (per 12am & 13am 1mi.) Igitur rectangulum sub ΒΗ, ΖΘ simul sumptis & ΒΖ æquale est quadrato ex ΑΖ. Verum rectangulum sub utrisque ΖΘ, ΒΗ & ΒΖ duplum est quadrilateri ΒΖΗΘ. Quocirca quadratum ex ΑΖ duplum est quadrilateri ΒΖΗΘ. Q. E. D.



PROPOSITIO II.

CAdat autem ordinatim applicata super centrum Ellipseos Δ; fiat ΒΖ dimidium ipsius ΒΕ· ac jungatur ΔΖ. Dico quadratum ex ΑΔ duplum esse trianguli ΒΖΔ.

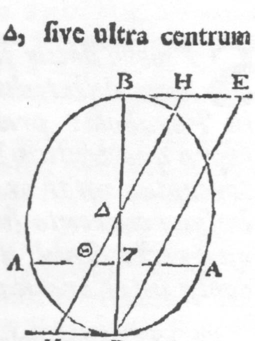
Connectatur recta ΓΕ. Quoniam enim ΒΖ ipsi ΖΕ æqualis est, atque etiam ΖΕ ipsi ΔΗ æqualis, quæ parallela est ipsi ΒΕ, ideo rectangulum sub ΔΗ, ΔΒ duplum est trianguli ΔΖΒ. Sed rectangulum sub ΔΗ, ΒΔ æquale est quadrato ex ΑΔ (per 13am 1mi.) Igitur quadratum ex ΑΔ duplum est trianguli ΔΖΒ. Q. E. D.



PROPOSITIO III.

CAdat jam ordinatim applicata ab altera parte puncti Δ, sive ultra centrum Ellipseos, ut ΑΖ; ac fiat ΒΗ dimidium lateris recti ΒΕ, ac jungatur ΗΔ quæ producatur in directum. Per punctum Ζ ipsi ΒΕ parallela, ad occursum ipsius ΗΔ, ducatur ΖΘ. Dico quadratum ex ΑΖ duplum esse differentiæ triangulorum ΒΔΗ, ΖΔΘ.

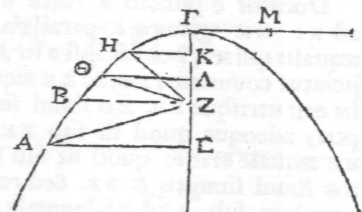
Per punctum Γ ducatur ΓΚ ipsi ΒΕ parallela, quæ occurrat ipsi ΗΔ in puncto Κ: ac completâ Sectione ΑΒ, producatur ΑΖ ad Λ. erit igitur (per primam hujus) quadratum ex ΖΛ duplum plani ΓΚΘΖ. Est autem ΖΛ ipsi ΖΑ æqualis, adeoque quadratum ex ΑΖ æquale est quadrilatero ΓΚΘΖ. Planum autem hoc ΓΚΘΖ æquale est differentiæ triangulorum ΓΔΚ, ΖΔΘ; quorum triangulum ΓΔΚ æquale est triangulo ΒΔΗ, ob ΒΔ ipsi ΔΓ æqualem. Quadratum igitur ex ΑΖ duplum est differentiæ triangulorum ΒΔΗ, ΖΔΘ. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO IV.

Si capiatur in Axe Parabolæ punctum cujus distantia à Vertice Sectionis æquetur dimidio Lateris recti, & ab eo ducantur rectæ quælibet ad Sectionem; earundem Minima *erit ea quæ ad Verticem Sectionis ducitur, atque huic propiores minores erunt remotioribus: cujuscunque vero alterius ductæ quadratum superabit quadratum hujus, excessu quadrato interceptæ inter verticem & normalem ad axem ab extremitate ejus demissam æquali.*

Sit Axis Parabolæ ΓΕ, in quo sit ΓΖ æqualis dimidio lateris recti, & è puncto Ζ educantur ad Sectionem ΑΒΓ rectæ ΑΖ, ΒΖ, ΘΖ, ΗΖ, *quarum* ΒΖ *sit Axi normalis.* Dico quod ΓΖ, quæ ad verticem Sectionis de puncto Ζ ducitur, minor est quâvis aliâ ad Sectionem ΑΒΓ ductâ; eidemque propiores minores sunt remotioribus: quodque unaquæque earum potest simul quadratum ipsius ΓΖ, una cum quadrato interceptæ inter Verticem Γ & normalem ad axem demissam.



Demittantur normales ΗΚ, ΘΛ, ΑΕ, ac sit ΓΜ dimidium Lateris recti, adeoque ΓΖ æqualis est ipsi ΓΜ: & (per 11^{mam} primi) duplum rectangulum sub ΓΜ, ΓΚ æquale est quadrato ex ΗΚ. Sed duplum rectangulum sub ΓΜ, ΓΚ æquale est duplo rectangulo sub ΓΖ, ΓΚ, igitur quadratum ex ΗΚ æquale est duplo rectangulo sub ΓΖ, ΓΚ. ac duplum rectangulum sub ΓΖ, ΓΚ una cum quadrato ex ΚΖ æquale erit quadratis ex ΗΚ & ΚΖ simul, hoc est, quadrato ex ΗΖ. Quoniam vero duplum rectangulum sub ΖΓ, ΓΚ una cum quadrato ex ΖΚ (*per 7. II^{di} Elem.*) æquale est *quadratis ex* ΓΖ, ΓΚ *simul; æqualia erunt quadrata ex* ΓΖ, ΓΚ quadrato ex ΖΗ. Quadratum igitur ex ΖΗ excedit quadratum ex ΖΓ quadrato ipsius ΓΚ. *Ac pari argumento probabitur quadratum ex* ΖΘ, *& ex* ΑΖ *excedere quadratum ex* ΓΖ *quadratis interceptarum* ΓΛ, ΓΕ, *respectivè. Si vero* ΒΖ *fuerit ordinatim applicata ad Axem* ΓΖ, *erit duplum rectangulum* ΓΜ *in* ΓΖ, *hoc est, duplum quadratum ex* ΓΖ, *æquale quadrato ex* ΒΖ, *adeoque quadratum ex* ΒΖ *excedit quadratum ex* ΓΖ *ipso quadrato ex* ΓΖ. Hinc manifestum est ΑΖ *majorem esse quam* ΒΖ, *&* ΒΖ *quam* ΘΖ, & ΘΖ quam ΗΖ, ac ΗΖ majorem esse quam ΓΖ, omniumque *Minimam* esse ΓΖ: rectasque eidem propiores minores esse remotioribus. Patet etiam excessum quadrati cujuscunque alterius ductæ supra quadratum *Minimæ*, æqualem esse quadrato interceptæ inter normalem ab extremitate ejus ad Axem demissam & Sectionis Verticem. Q. E. D.

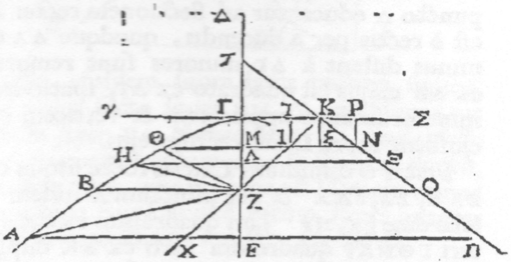
PROPOSITIO V.

Si vero detur in Axe Hyperbolæ punctum, quod à Vertice Sectionis distet dimidio Lateris recti; eadem evenient in hâc quæ in Parabolâ: præterquam quod excessus quadratorum ductarum supra quadratum Minimæ *æquales erunt rectangulis factis super interceptas inter ordinatim applicatas & Sectionis Verticem, similibusque contento sub Axe transverso & eodem Axe unâ cum latere ejus recto simul, ita ut in singulis Axi transverso respondeat intercepta inter ordinatim applicatam & Sectionis Verticem.*

Sit ΑΒΓ Hyperbola, cujus Axis ΔΓΕ; ac fiat ΓΖ æqualis dimidio lateris recti: & è puncto Ζ educantur ad sectionem rectæ quotcunque ΖΑ, ΖΒ, ΖΗ, ΖΘ. Dico quod recta ΓΖ minor est quavis aliâ de Ζ ad sectionem ducendâ, eidemque propior minor est remotiore: quodque ductæ cujuslibet ΖΑ, ΖΒ, ΖΗ, ΖΘ quadratum excedit

dit quadratum ex ΓΖ rectangulo facto ſuper interceptam inter Verticem Γ & normalem in Axem, ſimili vero rectangulo contento ſub Axe tranſverſo Sectionis ΔΓ & rectâ utriſque Axi & lateri ejus recto ſimul ſumptis æquali.

Fiat ΓΖ æqualis lateri recto, cujus dimidium ſit ΓΚ, ac ſit centrum Sectionis Τ: *ductiſque & productis rectis* ΤΚ, ΚΖ, *occurrant iis* ordinatim ad Axem ΓΕ applicatæ, ut ΘΜΙΝ, ΗΛΞ, ΑΧΕΠ. & producatur normalis ΒΖ ad Ο. Ducantur etiam ipſi ΓΜ parallelæ ΡΝ, Κξ, ΤΙ. Jam quadratum ex ΘΜ duplum eſt quadrilateri ΓΚΜΝ (per primam hujus) & quadratum ex ΖΜ duplum eſt trianguli ΖΜΙ; quia ΖΜ æqualis eſt ipſi ΜΙ, ob ΓΖ ipſi ΓΚ æqualem. Eſt igitur quadratum ex ΘΖ duplum triangulorum ΓΚΖ, ΙΚΝ, quia æquale eſt quadratis ex ΘΜ & ΜΖ ſimul Quadratum vero ex ΓΖ æquale eſt duplo trianguli ΓΚΖ, ob æquales ΓΖ, ΓΚ, ut & rectangulum ΡΝΙΤ duplum eſt trianguli ΙΚΝ Quocirca quadratum ex ΓΖ minus eſt quadrato ex ΘΖ rectangulo ΡΝΙΤ. Eſt autem ΔΓ ad ΓΖ ut ΤΓ ad ΓΚ, & ut ΤΓ ad ΓΚ ita Κξ ad ξΝ. Sed Κξ æqualis eſt ipſi ξΙ, ob ΙΜ, ΜΖ æquales. Ut igitur ΔΓ ad ΓΣ, hoc eſt ut Axis tranſverſus ad Latus rectum, ita ξΙ ad ξΝ & invertendo ut ΓΣ ad ΔΓ ita ξΝ ad Ιξ dein componendo, erunt ΔΓ, ΓΣ ſimul ſumptæ ad ΔΓ ut ΙΝ ad ξΙ. Verum ξΙ, ΤΙ æquales ſunt, quare ΤΙ eſt ad ΝΙ ut ΔΓ ad ΔΓ, ΓΣ ſimul Producatur itaque ΓΣ ad γ, ita ut Γγ æqualis ſit Axi ΔΓ, & erit ΤΙ ad ΙΝ ſicut ΓΔ ad γΣ Hæc igitur latera, cum proportionalia ſint & ſub æqualibus angulis, continebunt ſpatia ſimilia, nempe rectangula ſub ΤΙ, ΙΝ & ſub ΓΔ, γΣ ac recta ΤΙ, quæ ipſi ΓΜ æqualis eſt, reſpondet lateri ΓΔ. Quocirca rectangulum ſuper ΓΜ factum, quod ſimile ſit rectangulo ſub ΓΔ & ΓΔ una cum latere recto ſimul, erit rectangulum ΡΝΙΤ. Quadratum igitur ex ΟΖ excedit quadratum ex ΓΖ rectangulo facto ſuper ΓΜ, ſimili rectangulo contento ſub Axe ΓΔ & utriſque ΓΔ & latere ejus recto ſimul ſumptis. Pari modo demonſtrabitur quadratum ex ΗΖ excedere quadratum ex ΓΖ rectangulo facto ſuper ΓΛ, ſimilique deſcripto.



Dico quoque quadratum ex ΒΖ excedere quadratum ex ΓΖ rectangulo etiam ſimili prædictis Quoniam enim quadratum ex ΒΖ æquale eſt duplo quadrilatero ΓΚΟΖ (per primam hujus) ac quadratum ex ΓΖ duplum eſt trianguli ΓΚΖ. ideo quadratum ex ΒΖ excedit quadratum ex ΓΖ duplo trianguli ΖΚΟ. Manifeſtum autem eſt rectangulum, trianguli ΖΚΟ duplum, fieri ſuper rectam ΓΖ, ac ſimile eſſe rectangulo modo deſcripto. Quadratum itaque ex ΒΖ excedit quadratum ex ΓΖ rectangulo ſuper ΓΖ facto & rectangulo dicto ſimili. Dico quoque quadratum ex ΑΖ eodem modo ſe habere Quoniam enim quadratum ex ΑΕ duplum eſt quadrilateri ΓΚΠΕ (per primam hujus) & quadratum ex ΖΕ duplum eſt trianguli ΧΖΕ, igitur quadratum ex ΑΖ duplum eſt triangulorum ΧΚΠ, ΓΚΖ, ob quadratum ex ΑΖ quadratis ex ΑΕ, ΕΖ æquale. Duplum autem trianguli ΓΚΖ eſt quadratum ex ΓΖ, differentia igitur quadratorum ex ΑΖ & ΓΖ duplum eſt trianguli ΧΚΠ. unde pari modo demonſtrabitur, rectangulum, trianguli ΧΚΠ duplum, fieri ſuper rectam ΓΕ, ac ſimile eſſe deſcripto.

Quoniam vero exceſſus quadratorum harum rectarum, quibus ſuperant quadratum ex ΓΖ, ſunt rectangula ſuper rectas ΓΓ, ΓΖ, ΓΛ, ΓΜ facta, quæ proinde perpetuo variantur, & quod fit ſuper ΓΕ majus eſt facto ſuper ΓΖ, & quod fit ſuper ΓΖ majus eo ſuper ΓΛ, & quod ſuper ΓΛ majus facto ſuper ΓΜ: erit igitur ΓΖ omnium ductarum *Minima* reliquarum vero quæ propiores ſunt eidem minores erunt remotioribus. Poteſt autem omnis recta ſic ducta quadratum *Minimæ*, una cum rectangulo ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & Verticem Γ facto, quod ſimile ſit rectangulo contento ſub Axe ΓΔ & utriſque ΓΔ & latere ejus recto ſimul ſumptis. Q. E. D.

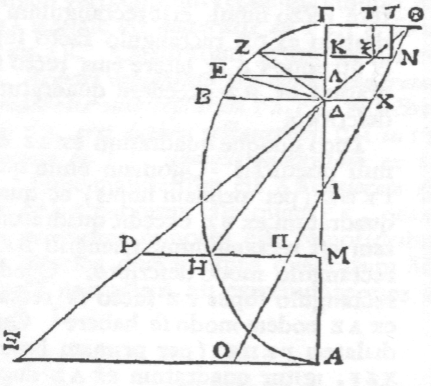
PROPO-

PROPOSITIO VI.

Iisdem positis quæ prius, nisi quod jam Sectio sit Ellipsis, & Axis sit Axis major ejus; erit Minima *omnium de puncto dato ductarum, ea quæ æqualis est semilateri recto;* Maxima *vero residua pars Axis; è reliquis vero, quæ propiores* Minimæ *sunt minores erunt remotioribus ab eâ: Quadratum autem cujuscunque alterius ductæ excedet quadratum* Minimæ *rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatam & Sectionis Verticem, quod simile sit contento sub Axe transverso & excessu ejusdem Axis supra Latus ejus rectum, ita ut Axis transversus respondeat interceptæ inter ordinatim applicatam & Sectionis Verticem.*

Sit ΑΒΓ Ellipsis, & Axis ejus major ΑΓ; sitque ΓΔ æqualis semilateri recto: & è puncto Δ educantur ad Sectionem rectæ ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ, ΔΗ. Dico quod ΔΓ Minima est è rectis per Δ ducendis, quodque ΔΑ earundem Maxima est; quodque eæ quæ minus distant à ΔΓ minores sunt remotioribus ab eâdem quodque quadratum ex ΔΖ majus est quadrato ex ΔΓ, spatio æquali rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatam & verticem Γ, simili contento sub Axe ΓΑ & excessu ejusdem supra Latus rectum ejus.

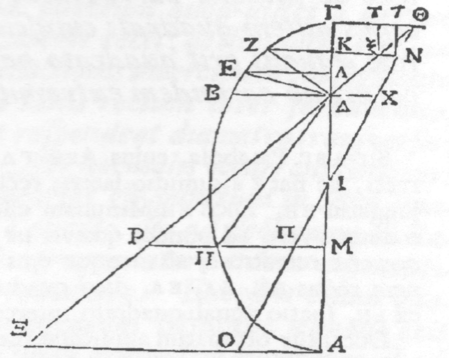
Fiat ΓΘ dimidium Lateris recti, sitque centrum Ι, & ducantur normales ad Axem ΖΚΝ, ΕΛ, ΒΔΧ & per punctum Α iisdem parallela sit recta ΑΞ, Axique ΓΑ parallelæ duæ ξΤ, ΝΤ Jam quadratum ex ΖΚ (per primam hujus) duplum est quadrilateri ΓΘΝΚ; quadratum vero ex ΔΚ duplum est trianguli ΚΔξ, quia ΚΔ ipsi Κξ æqualis est, ob æqualitatem ipsarum ΔΓ, ΓΘ. Quadratum igitur ex ΔΖ duplum est triangulorum ΔΓΘ, ΘξΝ. Sed quadratum ex ΔΓ duplum est trianguli ΔΓΘ, & rectangulum ξΝΤΤ duplum est trianguli ξΘΝ: quadratum itaque ex ΔΖ excedit quadratum ex ΔΓ rectangulo ξΝΤΤ. Est autem ΙΓ ad ΓΔ sive ΓΘ sicut ΑΓ ad Latus rectum, & ΝΤ est ad ΤΘ in eadem ratione, quare ΝΤ est ad ΤΘ sicut ΑΓ ad Latus rectum. Sed ΝΤ ipsi ΘΤ æqualis est, unde ΑΓ est ad Latus rectum sicut ΘΤ ad ΤΘ, ac per conversionem rationis ΓΑ erit ad excessum ejus supra Latus rectum ut ΘΤ est ad ΤΤ. Sed ΘΤ ipsi ξΤ æqualis est, ob æquales ΓΔ, ΓΘ, adeoque Τξ est ad ΤΤ sive ξΝ sicut ΑΓ ad excessum ejusdem supra Latus rectum: Axi vero ΑΓ respondet ipsa Τξ, quæ æqualis est interceptæ ΓΚ: rectangulum igitur ξΝΤΤ æquale est facto super ΚΓ, quod simile sit contento sub ΑΓ & excessu ejusdem supra Latus rectum. Quadratum igitur ex ΔΖ excedit quadratum ex ΔΓ spatio æquali rectangulo facto super ΓΚ similique rectangulo dicto. *Eodem modo constabit quadratum ex ΕΔ excedere quadratum ex ΔΓ rectangulo simili super interceptam ΓΛ facto.*



Dico quoque quadratum ex ΔΒ eodem modo se habere. Quadratum enim ex ΔΒ duplum est quadrilateri ΓΔΧΘ, quadratum vero ex ΓΔ duplum est trianguli ΓΔΘ: igitur differentia inter quadratum ex ΔΒ & ex ΔΓ æquale est duplo trianguli ΔΘΧ. Sed rectangulum factum super ΔΓ jam descripto simile, duplum est trianguli ΔΘΧ; quare differentia inter quadrata ex ΒΔ & ΔΓ æqualis est rectangulo facto super ΔΓ, quod descripto simile sit. Dico etiam quadratum ex ΔΗ majus esse quam quadratum ex ΓΔ rectangulo facto super ΜΓ similique præmonstrato. Est enim quadratum ex ΗΜ (per primam hujus) duplum quadrilateri ΜΑΟΠ: quadratum vero ex ΜΔ duplum est trianguli ΛΜΡ, quia ΔΜ ipsi ΜΡ æqualis est, ob æquales ΔΓ, ΓΟ. Quadratum igitur ex ΔΗ duplum est utriusque, trianguli ΑΙΟ & trapezii ΙΔΡΠ simul.

 Tri-

Triangulum autem ΑΙΟ æquale eſt triangulo ΙΘΓ, quare quadratum ex ΔΗ duplum eſt trianguli ΓΘΙ & ſpatii ΙΔΡΠ; hoc eſt, duplum triangulorum ΔΓΘ & ΡΘΠ. Sed quadratum ex ΓΔ duplum eſt trianguli ΔΓΟ: igitur differentia quadratorum ex ΔΓ & ΔΗ duplum eſt trianguli ΡΘΠ. Sed rectangulum factum ſuper ΓΜ deſcripto ſimile duplum eſt trianguli ΡΘΠ: quare exceſſus quadrati ex ΔΗ ſupra quadratum ex ΔΓ æqualis eſt rectangulo præmonſtratis ſimili ſuper ΓΜ facto.

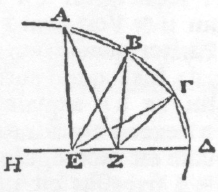


Similiter quadratum ex ΔΑ duplum eſt trianguli ΞΑΔ, triangulum autem ΟΙΑ æquale eſt triangulo ΘΙΓ: igitur quadratum ex ΑΔ duplum eſt triangulorum ΞΘΟ, ΔΓΘ. Sed quadratum ex ΓΔ duplum eſt trianguli ΔΓΘ, differentia igitur quadratorum ex ΑΔ & ΔΓ duplum eſt trianguli ΞΘΟ. Rectangulum autem ſuper ΑΓ factum deſcriptoque ſimile eſt etiam duplum trianguli ΞΘΟ Quocirca quadratum ex ΑΔ excedit quadratum ex ΔΓ rectangulo contento ſub ΑΓ & exceſſu ejuſdem ſupra latus rectum figuræ. Eſt autem rectangulum factum ſuper ΓΑ majus facto ſuper ΓΜ, & quod ſuper ΓΜ majus facto ſuper ΓΔ, *& quod ſuper* ΓΔ *facto ſuper* ΓΛ, *& quod ſuper* ΓΛ *majus facto ſuper* ΓΚ. Recta igitur ΓΔ *Minima* eſt e rectis per punctum Δ ad Sectionem ductis, & ΔΑ eſt earundem *Maxima*. Quoad cæteras vero, quæ propior eſt Minimæ minor eſt remotiore ab eadem Exceſſus vero quadrati cujuſcunque earum ſupra quadratum Minimæ rectangulum eſt rectangulo præmonſtrato ſimile. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

SI ſumatur punctum in Minimâ *jam deſcriptâ, in quavis è tribus Sectionibus, à quo ducantur rectæ quælibet ad Sectionem. Earundem* Minima *erit recta jungens punctum illud & Sectionis Verticem. Cæterarum vero ad idem Axis latus ductarum, quæ propior eſt* Minimæ *minor erit remotiore.*

Sit ΑΒΓΔ ſectio Conica, cujus Axis ΔΗ, ac in eo recta *Minima* ΔΕ: inter Δ & Ε capiatur punctum aliquod ut Ζ, à quo ducantur ad Sectionem rectæ quælibet ΖΓ, ΖΒ, ΖΑ Dico quod ΔΖ earundem Minima eſt, quodque huic propior minor eſt remotiore.



Jungatur enim ΓΕ, quæ proinde major erit quam ΔΕ, unde angulus ΓΔΕ major erit angulo ΔΓΕ, ac angulus ΖΔΓ multo major erit angulo ΔΓΖ; adeoque ΓΖ major erit quam ΖΔ. Pariter quoniam ΒΕ major eſt quam ΓΕ, angulus ΒΓΕ major erit angulo ΓΒΕ, unde & multo major eſt angulus ΒΓΖ angulo ΖΒΓ. quare ΒΖ major eſt quam ΖΓ. Eodemque modo demonſtrabitur ΑΖ majorem eſſe quam ΒΖ. Ipſa igitur ΔΖ Minima eſt rectarum de puncto Ζ ad Sectionem ductarum: e cæteris vero quæ eidem ΔΖ propior eſt minor erit remotiore. Q. E. D.

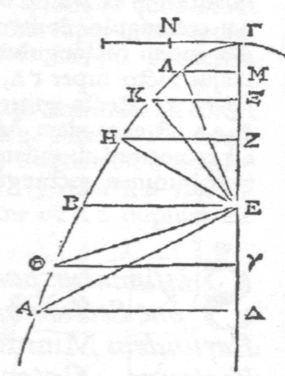
PROPOSITIO VIII.

SI capiatur in Axe Parabolæ punctum, quod à vertice Sectionis plus diſtet dimidio Lateris recti; & à puncto illo verſus Sectionis Verticem ponatur Axis ſegmentum æquale dimidio lateris recti; à cujus extremitate erigatur Axi normalis ad occurſum Sectionis

*   onis

onis producenda & ducatur recta jungens punctum hujus occursus & punctum prius datum. Hæc recta Minima *erit omnium de puncto illo in Axe dato ad sectionem ducendarum. E reliquis vero quæ ab utrâque parte eidem propior est minor erit remotiore Excessus autem quadrati cujuscunque ductæ supra quadratum* Minimæ *æqualis erit quadrato partis interceptæ inter ordinatim applicatas, ab earundem extremitatibus ad Axem demissas.*

Sit ΑΒΓ Parabola, cujus Axis ΓΔ; in quo capiatur ΓΕ major dimidio Lateris recti, ac fiat ΖΕ dimidio lateris recti æqualis, ipsique ΓΕ normalis ducatur ΖΗ, & jungatur ΕΗ. Dico ΕΗ Minimam esse e rectis per punctum Ε ad Sectionem ductis: e cæteris vero ad puncta quævis ut Α, Β, Γ ductis, quæ eidem ΕΗ propior est minor erit remotiore, ab utroque ejus latere. Eductis etiam è puncto Ε ad Sectionem rectis ΕΚ, ΕΛ, ΕΑ, dico quadratum cujuscunque earum excedere quadratum ex ΕΗ, spatio æquali quadrato interceptæ inter ordinatim applicatam & punctum Ζ.



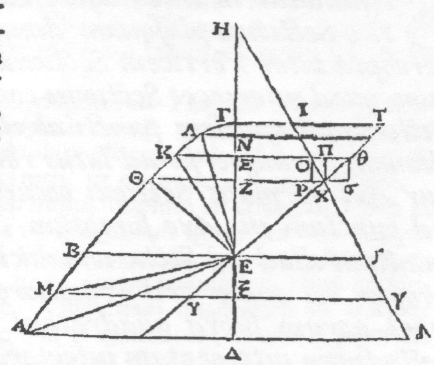
Ducantur ordinatim applicatæ, sitque ΒΕ Axi normalis, ac fiat ΓΝ dimidium Lateris recti. Erit igitur (per 11^{mum} primi) duplum rectangulum sub ΓΝ, ΓΞ æquale quadrato ex ΚΞ, eidemque æquale est duplum rectangulum sub ΕΖ, ΓΞ. Duplum autem rectangulum sub ΓΖ, ΖΞ, una cum quadratis ex ΕΖ & ΖΞ simul, æquale est quadrato ex ΕΞ, quare duplum rectangulum sub ΕΖ & utraque ΓΞ, ΖΞ simul sumptâ, una cum quadratis ex ΕΖ, ΖΞ simul, æquale est quadratis ex ΚΞ & ΞΕ, hoc est quadrato ex ΚΕ. Sed duplum rectangulum sub ΕΖ & utraque ΓΞ, ΖΞ simul duplum est rectanguli sub ΕΖ, ΖΓ. Quadratum igitur ex ΚΕ æquale est duplo rectangulo sub ΕΖ, ΖΓ una cum quadratis ex ΖΞ, ΕΖ. Quod autem fit sub ΕΖ, ΖΓ bis, æquale est quadrato ex ΖΗ, ob ΖΕ ipsi ΓΝ æqualem quare quadrata ex ΖΗ, ΖΕ & ΖΞ simul sumpta æqualia sunt quadrato ex ΕΚ. Sed quadrata ex ΖΗ, ΖΓ æquantur quadrato ex ΕΗ, unde quadratum ex ΕΚ æquale est quadratis ex ΕΗ, ΖΞ; adeoque excessus quadrati ex ΕΚ supra quadratum ex ΕΗ æqualis est quadrato ex ΖΞ. Eodem modo demonstrabitur quadratum ex ΕΛ excedere quadratum ex ΕΗ quadrato ipsius ΖΜ Quoniam vero duplum rectanguli sub ΓΖ, ΖΕ æquale est quadrato ex ΖΗ, ob ΖΕ ipsi ΓΝ æqualem. erit etiam excessus quadrati ex ΓΕ supra quadratum ex ΕΗ æqualis quadrato ex ΓΖ. Est autem ΖΞ minor quam ΖΜ, & ΖΜ quam ΖΓ. recta igitur ΕΗ minor est quavis recta per Ε ad Sectionem ductâ inter punctum Η & Verticem Γ

Pariter quadratum ex ΒΕ æquale est duplo rectangulo sub ΓΝ, ΓΕ, hoc est sub ΕΖ, ΓΕ bis: quod autem fit sub ΓΖ, ΖΕ bis æquale est quadrato ex ΖΗ. quadratum igitur ex ΒΕ æquale est quadratis ex ΕΗ & ΕΖ simul sumptis. Unde quadratum ex ΒΕ excedit quadratum ex ΕΗ quadrato ipsius ΕΖ. Quinetiam quadratum ex γΘ æquale est rectangulo sub Γγ, ΖΕ bis, ob ΖΕ ipsi ΓΝ æqualem. Quadratum autem ex γΕ excessus est quadratorum ex utraque γΖ, ΖΕ supra duplum rectangulum sub γΖ, ΖΕ; quapropter rectangulum ΓΖ in ΖΕ bis, una cum quadratis ex γΖ, ΖΕ simul æquantur quadrato ex ΘΕ. Sed ΓΖ in ΖΕ bis una cum quadrato ex ΖΕ, æquale est quadrato ex ΕΗ: excessus igitur quadrati ex ΘΕ supra quadratum ex ΕΗ æquale est quadrato ex γΖ. Simili argumento differentia quadratorum ex ΑΕ & ΕΗ æqualis erit quadrato ex ΔΖ Est autem ΔΖ major quam γΖ, & γΖ quam ΖΕ. Recta igitur ΕΗ minor est quavis recta per punctum Ε ad Sectionem ducta, & quæ illi propior est minor est remotiore & excessus quadrati alterius cujusvis supra quadratum ejus æqualis est quadrato interceptæ inter ordinatim applicatam & punctum Ζ. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

SI capiatur in Axe Hyperbolæ punctum quod distet à Vertice Sectionis plus quam dimidio Lateris recti; ac dividatur ea, quæ inter punctum datum & Centrum Sectionis intercipitur, in segmenta rationem diametri transversæ ad latus rectum inter se habentia, ita ut pars illa quæ centro adjacet respondeat diametro transversæ; & ad punctum divisionis erigatur Axi normalis occurrens Sectioni: Ductâ rectâ jungente punctum occursûs & punctum in Axe sumptum, erit hæc rectarum omnium à puncto illo ad Sectionem ductarum Minima. *E cæteris vero ab utroque latere eidem adjacentibus, quæ propior est minor erit remotiore. Excessus etiam quadrati cujuscunque ductæ supra quadratum* Minimæ *æqualis erit rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatas ab iisdem demissas, simili vero contento sub diametro transversâ & utrisque diametro transversâ & Latere recto simul sumptis; ita ut diameter transversa respondeat interceptæ.*

Sit ΑΒΓ Hyperbola, cujus Axis ΔΓ centrumque Η, sitque ΓΕ major dimidio Lateris recti: ac fiat ΗΖ ad ΖΕ ut diameter transversa ad Latus rectum, cadente puncto Ζ inter puncta Γ, Ε Ad Ζ erigatur normalis super Axem ut ΖΘ, ac jungatur ΘΕ. Dico ΘΕ Minimam esse è rectis de puncto Ε ad sectionem ductis; illique ab utroque latere propiorem minorem esse remotiore· Excessum etiam quadrati cujuscunque earum supra quadratum Minimæ æquari rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatas, quod simile sit rectangulo contento sub diametro transversâ & utrisque diametro transversâ & Latere recto simul sumptis, ita ut diameter transversa respondeat interceptæ inter ordinatim applicatas.



Fiat ΓΙ dimidium Lateris recti, ac juncta ΗΙ producatur ad δ, ipsique Ηδ occurrat ordinatim applicata ΖΘ producta in Χ· ac jungatur & utrinque producatur ΕΧ. Ducantur etiam normales ΛΝ, ΚΞ, cæteræque ad occursum ipsarum Ηδ, ΕΧ continuandæ. Jam quoniam ΗΓ est ad ΓΙ ut diameter transversa ad Latus rectum, sive (*per constructionem*) ut ΗΖ ad ΖΕ, ac ΗΓ est ad ΓΙ ut ΗΖ ad ΖΧ: ΖΧ itaque ipsi ΖΕ æqualis erit. Quadratum autem ex ΖΘ duplum est quadrilateri ΓΙΖΧ (per primam hujus) & quadratum ex ΖΕ duplum est trianguli ΕΖΧ: quadratum igitur ex ΘΕ duplum est quadrilateri ΓΙΕΧ. Pariter quadratum ex ΚΞ duplum est plani ΓΙΞΟ (per eandem primam) & quadratum ex ΕΞ duplum est trianguli ΕΞθ, adeoque quadratum ex ΕΚ duplum est utriusque, quadrilateri ΓΙΓΧ & trianguli ΟΧθ simul sumpti Demonstravimus autem quadratum ex ΘΕ duplum esse Trapezii ΓΙΕΧ; excessus igitur quadrati ex ΕΚ supra quadratum ex ΕΘ duplum est trianguli ΟΧθ. Ducantur rectæ ΟΡ, ΧΠ, θσ Axi ΓΔ parallelæ & erit ut ΗΓ ad ΓΙ ita θΠ ad ΠΟ, ob θΠ ipsi ΧΠ æqualem; adeoque θΠ est ad ΠΟ ut diameter transversa ad latus rectum, componendo autem θΠ erit ad θΟ ut diameter transversa ad rectam compositam ex diametro transversa & Latere recto. Sed θΠ æqualis est ipsi θσ· igitur rectangulum ΡΟθσ simile erit contento sub diametro transversâ & compositâ ex utraque, diametro transversâ & latere recto. Rectangulum autem ΡΟθσ duplum est trianguli ΟΧθ, quo excessu quadratum ex ΕΚ superat quadratum ex ΕΟ: & ΡΟ æqualis est interceptæ

ceptæ ZΞ. Quapropter differentia inter quadrata ex ΓΘ & ΓK æqualis est rectangulo facto super ZΞ, similique rectangulo descripto, ita ut ZΞ respondeat diametro transversæ. Pari modo demonstrabitur quadratum ex EΛ excedere quadratum ex EΘ rectangulo facto super ZN, similique prædicto, ita ut diameter transversa interceptæ ZN respondeat. Quinetiam quadratum ex ΓE duplum est trianguli ΓET, & quadratum ex ΓΘ duplum est quadrilateri ΓEIX, adeoque excessus quadrati ex ΓE supra quadratum ex EO duplum est trianguli IXT quod æquale est rectangulo super ΓZ facto & prædescripto simili. Excessus igitur quadrati ex ΓE supra quadratum ex EΘ æqualis est rectangulo facto super ΓZ similique prædicto. Sed ZΞ minor est quam ZN, & ZN quam ZΓ; adeoque recta EΘ minor est quam EK, & EK minor est quam EΛ, & EΛ quam EΓ. Recta igitur EΘ minor est quavis rectâ per punctum E inter Θ & Verticem Γ ad Sectionem ductâ.

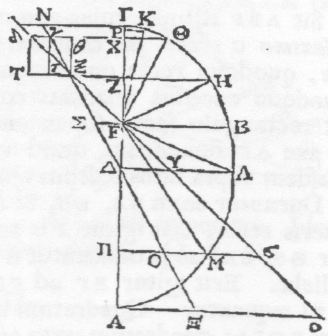
Verum etiam quadratum ex BE æquale est duplo quadrilateri ΓEIT, unde excessus quadrati ex EB supra quadratum ex EΘ erit duplum trianguli EXT: duplum autem hujus trianguli rectangulum est super ZB factum, simileque rectangulo jam dicto. Est quoque quadratum ex Mξ (per primam hujus) duplum quadrilateri ΓIξγ, & quadratum ex Eξ duplum trianguli Eξr: quadratum igitur ex ME duplum est trianguli TXγ & quadrilateri ΓEIX simul sumpti. Sed demonstratum est quadratum ex ΘE duplum esse quadrilateri ΓEIX: quocirca rectangulum super Zξ factum & prædicto simile, cum scilicet duplum sit trianguli TXγ, excessus est quo quadratum ex EM superat quadratum ex EO. Pari modo constabit quadratum ex EA excedere quadratum ex ΘE rectangulo super ZΔ facto prædictisque simili. Jam EZ minor est quam Zξ, & Zξ quam ZΔ quare ΘE minor est quam EB, & EB quam EM, & EM quam ΓA. Est igitur recta EΘ Minima omnium per punctum E ad Sectionem ductarum, & quæ ab utraque parte ipsi OE propior est minor est remotiore: & excessus quadrati cujuscunque earum supra quadratum ipsius ΘE æqualis est rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatas & præmonstrato rectangulo simili. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

Si sumatur in Axe majore Ellipseos punctum quod distet à Vertice Sectionis plusquam dimidio lateris recti; ac dividatur intercepta inter Verticem Sectionis & punctum illud, ita ut segmentum, quod interjacet Sectionis centrum & punctum divisionis, sit ad distantiam ejusdem puncti ab illo in Axe prius sumpto in ratione diametri transversæ ad latus rectum; & à puncto divisionis erigatur Axi normalis Sectioni occurrens; & ab occursu ducatur recta ad punctum in Axe sumptum erit hæc Minima *è rectis quæ per punctum illud ad Sectionem duci poterunt; & è cæteris quæ eidem propior est minor erit remotiore: excessus autem quadrati cujuslibet earum supra quadratum* Minimæ *æqualis erit rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatas ab iisdem demissas, simili vero contento sub diametro transversa & excessu diametri transversæ supra latus rectum.*

Sit ABΓ Ellipsis cujus Axis major AΓ, & centrum Δ, ac sit EΓ major dimidio lateris recti, & fiat ΔZ ad ZE ut AΓ ad Latus rectum. Ad punctum Z erigatur normalis ZH quæ producatur, ac jungatur EH. Dico EH Minimam esse è rectis ad Sectionem per punctum E ducendis, eidemque propiorem minorem esse remotiore ab eadem: excessum etiam, quo quadratum alterius cujuscunque ductæ superat quadratum ejus, æqualem esse rectangulo facto super interceptam inter punctum Z & ordinatim applicatam, quod simile sit contento sub Axe AΓ & excessu quo Axis ille superat latus rectum, ita ut Axi AΓ respondeat intercepta inter ordinatam & punctum Z.

Ducantur normales ut in Schemate, sitque ΒΕ ad angulos rectos ipsi ΑΓ; ac fiat ΓΝ dimidium Lateris recti: jungaturque ΝΔ, quæ occurrat ipsi ΗΖ productæ in ξ; ductaque recta Εξ producatur utrinque. Quoniam vero ΔΓ est ad ΓΝ ut diameter transversa ad Latus rectum ac ΔΖ est ad ΖΕ in eadem ratione diametri transversæ ad Latus rectum: erit igitur ΔΖ ad ΖΕ ut ΔΓ ad ΓΝ, hoc est, ut ΔΖ ad Ζξ: quare eadem est ratio ΔΖ ad ΖΕ ac ad Ζξ, adeoque ipsæ ΖΕ, Ζξ sunt æquales. Ducantur etiam Axi ΑΓ parallelæ ξθ, γτ, Τδ Jam quadratum ex ΖΕ duplum est trianguli ΖΕξ, ac quadratum ex ΖΗ (per primam hujus) duplum est quadrilateri ΓΝΖξ, quadratum itaque ex ΕΗ duplum est Trapezii ΓΝΕξ Quadratum quoque ex ΘΧ (per eandem) duplum est quadrilateri ΓΝΧγ, & quadratum ex ΕΧ duplum est trianguli ΧδΕ; unde quadratum ex ΘΕ duplum est Trapezii ΓΝΕξ & trianguli γξδ simul sumpti. Sed quadratum ex ΕΗ duplum est Trapezii ΓΝΕξ excedit igitur quadratum ex ΕΘ illud ex ΕΗ duplo trianguli γξδ. Duplum autem hujus trianguli æquale est rectangulo sub Τδ, δγ. Cum vero ΔΖ est ad Ζξ ut ξθ ad θγ, ac ΕΖ æqualis est ipsi Ζξ unde recta θξ æqualis est ipsi θδ. ξθ erit ad θγ ut ΔΓ ad ΓΝ, id est, θδ erit ad θγ ut ΔΓ ad ΓΝ. Sed ΔΓ est ad ΓΝ ut axis transversus ad latus rectum igitur θδ est ad θγ ut axis transversus ad latus rectum, ac per conversionem rationis θδ erit ad δγ ut axis transversus ad excessum ejusdem supra latus rectum. Est autem θδ ipsi Τδ æqualis, quare rectangulum sub Τδ, δγ simile erit rectangulo sub axe transverso & excessu ejusdem supra latus rectum. Ac Τδ æqualis est ipsi ΖΧ, adeoque differentia quadratorum ex ΕΘ & ΕΗ æqualis est rectangulo super ΖΧ facto, quod simile sit rectangulo jam descripto, ita ut ΖΧ Axi transverso respondeat. Pari modo demonstrabitur, differentiam inter quadrata ex ΕΚ & ΕΗ æqualem esse rectangulo facto super ΖΡ similique prædicto. similiterque quadratum ex ΕΓ excedere quadratum ex ΕΗ rectangulo super ΖΓ facto, eisdemque simili. Recta autem ΖΧ minor est quam ΖΡ, & ΖΡ quam ΖΓ, quare recta ΕΗ minor est quam ΕΘ, & ΕΘ quam ΕΚ, & ΕΚ quam ΕΓ.



Porro quadratum ex ΒΕ (per primam hujus) duplum est Trapezii ΓΝΕΣ. Ostendimus autem quadratum ex ΕΗ duplum est Trapezii ΓΝΕξ, quare excessus, quo quadratum ex ΒΕ superat quadratum ex ΕΗ, duplum est trianguli ΕξΣ, quod æquale est rectangulo facto super ΕΖ similique descripto, ut ex nuper allatis constabit.

Quadratum quoque ex ΔΛ (per secundam hujus) duplum est trianguli ΓΔΝ, & quadratum ex ΛΕ duplum est trianguli ΛΕΥ, quadratum igitur ex ΛΕ duplum est trianguli ΔΥξ & Trapezii ΓΝΕξ simul sumpti excedit igitur quadratum ex ΛΕ quadratum ex ΕΗ duplo trianguli ΔΥξ: hujus autem trianguli duplum rectangulum est factum super ΔΖ descripto simile. Quinetiam quadratum ex ΜΠ (per tertiam hujus) duplum est quadrilateri ΞΟΠΑ, & quadratum ex ΠΕ duplum est trianguli ΠΕσ, quapropter quadratum ex ΜΕ duplum est trianguli ΞΔΑ & quadrilateri ΕΔΟσ simul sumpti. Sed triangulum ΞΔΑ æquale est triangulo ΓΔΝ quare quadratum ex ΜΕ duplum est Trapezii ΓΝΕξ & trianguli Οξσ simul sumpti. Hujus igitur trianguli duplum excessus est quo quadratum ex ΜΕ excedit quadratum ex ΕΗ Duplum autem trianguli Οξσ rectangulum est super ΖΠ factum, simileque rectangulo descripto. Denique quadratum ex ΑΕ duplum est trianguli ΟξΞ & Trapezii ΓΝΕξ simul sumpti, excessus itaque quadrati ex ΑΕ supra quadratum ex ΕΗ duplum est trianguli ΟξΞ, cujus trianguli duplum æquale est rectangulo super ΖΑ formato similique descripto Jam vero ΕΖ minor est quam ΔΖ, ac ΔΖ minor quam ΠΖ, ac ΠΖ quam ΑΖ quocirca ΒΕ minor est quam ΕΛ, ac ΕΛ quam ΕΜ, & ΕΜ quam ΕΑ Recta igitur ΕΗ minima est è rectis per punctum Ε ad Sectionem ΑΒΓ ducendis. Reliquarum vero quæ eidem ab utroque latere propior est minor est remotiore, & excessus quadratorum earundem supra quadratum ex ΕΗ

 æquales

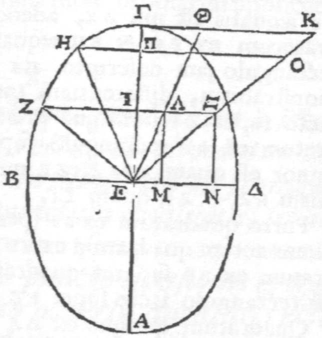
æquales sunt rectangulis super interceptas inter ordinatim applicatas factis, descriptoque similibus. Q. E. D.

PROPOSITIO XI.

Minima *rectarum de centro Ellipseos ad Sectionem ductarum dimidium est Axis minoris*; Maxima *vero dimidium est axis majoris*; Maximæque *propior major est remotiore. Excessus autem quadrati cujuscunque ductæ supra quadratum* Minimæ *æqualis est rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatam & Sectionis centrum, simili vero contento sub diametro transversâ & excessu ejusdem supra latus rectum.*

Sit ΑΒΓ Ellipsis, cujus axis major ΑΓ, & minor ΒΔ; centrumque Ε. Dico quod *Maxima* e rectis per centrum Ε ad Sectionem ductis est ipsa ΕΓ, *Minima* vero est ΕΒ, quodque recta quæcunque ipsi ΕΓ propior major est remotiore ab eadem: quodque excessus quadrati cujuscunque earum supra quadratum ex ΒΕ æqualis est rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatam & centrum Ε in axe ΑΓ sumendam, quod vero simile sit rectangulo contento sub ΑΓ & excessu ejusdem supra latus rectum ejus.

Ducantur enim ΕΖ, ΕΗ, & demittantur normales ΖΙ, ΗΠ, ac fiat ΓΘ dimidium lateris recti, erit igitur ΓΘ minor quam ΓΕ. Sit ΓΚ ipsi ΓΕ æqualis, & jungantur ΘΕ, ΕΚ, ac producantur ΗΠ, ΖΙ ad Ο, Ξ: ducantur etiam ΜΛ, ΝΞ axi ΑΓ parallelæ. Erit igitur ΕΓ ad ΓΚ ut ΕΙ ad ΙΞ. Sed ΕΓ æqualis est ipsi ΓΚ, quare ΕΙ & ΞΙ æquantur. Quadratum autem ex ΙΖ (per primam hujus) duplum est quadrilateri ΓΘΙΛ: quadratum vero ex ΙΕ duplum est trianguli ΕΙΞ: quadratum igitur ex ΖΕ duplum est triangulorum ΕΓΘ, ΕΛΞ simul sumptorum. Sed quadratum ex ΕΒ (per secundam hujus) duplum est trianguli ΕΓΘ, ac duplum trianguli ΕΛΞ rectangulum est ΛΞΜΝ, quadratum igitur ex ΕΖ excedit quadratum ex ΕΒ rectangulo ΛΝ. Verum ratio ΚΓ ad ΓΘ eadem est ac transversi axis ad Latus rectum, eademque est ratio ΞΙ ad ΙΛ, unde per conversionem rationis, ΞΙ erit ad ΞΛ ut diameter transversa ad excessum ejusdem supra latus rectum: æquales autem sunt ΞΙ, ΞΝ, rectangulum itaque sub ΛΞ, ΞΝ simile est rectangulo contento sub diametro transversâ & excessu ejusdem supra latus rectum. Sed ΕΙ ipsi ΛΜ æqualis est, quare differentia inter quadrata ex ΕΖ & ΕΒ æqualis est rectangulo facto super ΕΙ quod prædicto simile est. Eodem modo demonstrabitur excessum quadrati ex ΕΗ supra quadratum ex ΕΒ æquari rectangulo super ΕΠ formato ac jam descripto simili.



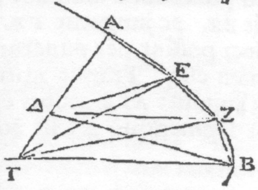
Pari argumento quadratum ex ΕΓ duplum est trianguli ΓΕΚ, & quadratum ex ΒΕ duplum est trianguli ΓΕΘ, differentia igitur quadratorum ex ΓΕ & ΕΒ duplum est trianguli ΘΕΚ. Hujus vero trianguli duplum æquale est rectangulo facto super ΓΕ similique descripto. Jam ΓΕ major est quam ΕΠ, & ΕΠ major quam ΕΙ, adeoque ΕΓ major est quam ΕΗ, & ΓΗ major quam ΕΖ, & ΓΖ quam ΕΒ. *Maxima* igitur e rectis per punctum Ε ductis est ΕΓ, *Minima* vero ΕΒ; e cæteris vero, inter ipsas ΕΓ, ΕΒ ductis, quæ propius distat ab ΕΓ major est remotiore: & excessus quadrati cujuscunque ductæ supra quadratum ex ΕΒ æqualis est rectangulo facto super interceptam inter ordinatim ad axem ΑΓ applicatam & centrum Sectionis, simili vero rectangulo prædicto. Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

Si sumatur punctum quodlibet in rectâ aliquâ Minimâ *ab Axe Sectionis ad Curvam ductâ, juxta jam demonstrata; à quo ducantur rectæ ad Sectionem ab uno ejus latere: earundem* Minima *erit pars illa hujus* Minimæ *quæ adjacet Sectioni, eidemque propior minor erit remotiore*

Sit ΑΒ Sectio quævis Conica, cujus Axis ΒΓ; sitque ΓΑ Minima aliqua ad Sectionem ducta: ac sumatur in ea punctum Δ inter ipsa Γ, Α situm Dico rectam ΔΑ Minimam esse e rectis ad hanc Sectionis partem de puncto Δ ducendis.

Ducantur enim ΔΕ, ΔΖ, ΔΒ, ac jungantur ΖΓ, ΓΕ, ut & rectæ ΑΕ, ΕΖ, ΖΒ. Jam ΒΓ major est quam ΓΑ, quare angulus ΓΑΕ major est angulo ΓΕΑ. Angulus vero ΓΕΑ major est angulo ΔΕΑ, adeoque angulus ΓΑΔ multo major erit angulo ΑΕΔ, ac proinde ΕΔ major erit quam ΔΑ. Pariter cum ΖΓ major est quam ΓΕ, erit angulus ΖΕΓ major angulo ΓΖΕ, unde angulus ΔΕΖ multo major erit quam ΕΖΔ ΖΔ igitur major erit quam ΔΕ. Ac eodem modo demonstrabitur ΔΒ majorem esse quam ΔΖ. Est itaque ΑΔ Minima rectarum ad hanc partem Sectionis ductarum, eidemque propior minor est remotiore. Idem quoque constabit de rectis ad alteram Sectionis partem ductis. Q. E. D.

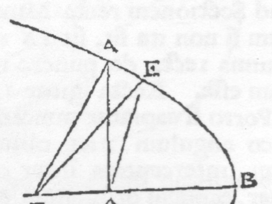


PROPOSITIO XIII.

Si à quovis puncto in Axe Parabolæ ducatur ad Sectionem recta Minima *quæ contineat cum Axe angulum; erit angulus ille acutus. Demissâque ab extremitate ejus normali ad Axem, abscindet illa Segmentum ejus æquale dimidio Lateris recti.*

Sit ΑΒ Parabola, cujus Axis ΒΓ; sitque Minima ad Parabolam ducta ΑΓ, Dico quod angulus ad Γ est acutus, quodque normalis ab Α ad ΒΓ demissa abscindit ab ea rectam æqualem dimidio lateris recti.

Quoniam recta ΑΓ Minima est, ΒΓ major erit dimidio lateris recti Nam si non major fuerit eâ, vel æqualis erit ei vel minor eâ. quod si æqualis fuerit dimidio lateris recti, erit ipsa ΒΓ (per 4^{am} hujus) Minima; vel etiam si ΒΓ minor fuerit dimidio lateris recti, erit quoque (per 7^{am} hujus) Minima. adeoque ΒΓ minor esset quam ΓΑ, quod est contra Hypothesin quare ΒΓ non est minor dimidio lateris recti, neque etiam æqualis ei, ergo major est eâ. Sit itaque ΓΔ æqualis dimidio lateris recti. Dico Axi normalem è puncto Δ erectam transire per Α. Nam si aliter fuerit, sit normalis illa recta ΔΕ, & ΓΕ (per octavam hujus) *Minima* erit è rectis de puncto Γ ad Sectionem ducendis hoc autem absurdum est, nam ΑΓ minor est eâ. Igitur perpendicularis ad punctum Δ erecta transibit per Α, ac ΑΓ dimidium erit lateris recti. erit quoque angulus ΑΓΒ acutus, ob angulum ΒΔΑ rectum Q. E. D.



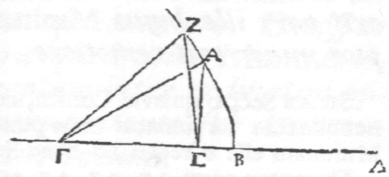
PROPOSITIO XIV.

Si ducatur à puncto in Axe Hyperbolæ recta Minima, *quæ contineat cum Axe angulos deinceps: erit angulus ille, qui respicit Verticem Sectionis, acutus. Ac si ab extremitate* Minimæ *ducatur normalis ad Axem, dividet illa interceptam inter centrum Sectionis*

&

& punctum unde educitur Minima *in Segmenta, quorum quod adjacet centro erit ad alterum in ratione diametri transversæ ad Latus rectum.*

Sit AB Hyperbola, cujus Axis BΓ, sitque AΓ Minima de puncto Γ educta, ac sit centrum Δ. Dico angulum AΓB acutum esse, ac normalem de puncto A ad axem BΓ demissam dividere ipsam ΓΔ in ratione axis transversi ad Latus rectum.



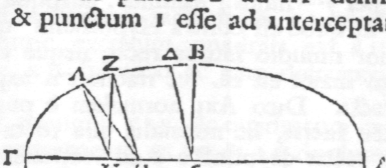
Est enim recta BΓ (ut constat ex quinto hujus) major dimidio lateris recti, & recta BΔ dimidium est lateris transversi, ratio itaque ΔB ad BΓ, minor est ratione lateris transversi ad latus rectum. Dividatur ΔΓ in puncto E, ita ut segmenta sint in ratione lateris transversi ad latus rectum. Dico normalem super ipsam ΔΓ ad punctum E erectam transire per punctum A. Nam si hoc non ita sit, illi normalis sit EZ, ac jungatur ΓZ. Erit itaque ΓZ (per nonam hujus) Minima rectarum quæ duci possint per punctum Γ. Hoc autem absurdum est. posuimus enim AΓ Minimam esse. Transit igitur normalis è puncto E excitata per punctum Sectionis A; & angulus AΓB acutus est. ac normalis de puncto A demissa dividit rectam ΓΔ, ita ut segmentum ΔE sit ad EΓ in ratione lateris transversi ad latus rectum. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

E Ductâ de puncto dato in Axe majore Ellipseos rectâ aliquâ Minima, *si hæc* Minima *transeat per Centrum Sectionis, normalis erit super Axem majorem. Si vero transeat per aliud punctum, continebit cum Axe majore angulum obtusum versus centrum: & normalis ab extremitate* Minimæ *cadet inter punctum unde educta est & Sectionis Verticem ita ut intercepta inter normalem & centrum sit ad interceptam inter eandem normalem & punctum illud, in ratione diametri transversæ ad latus rectum.*

Sit ABΓ Ellipsis, cujus Axis major AΓ & centrum I: educatur primum è puncto I ad Sectionem recta Minima IB. Dico rectam IB normalem esse super ipsam AΓ. Nam si non ita sit, sit IΔ normalis super AΓ; adeoque (per 11^{mam} hujus) IΔ foret minima recta de puncto I ducenda, contra Hypothesin. posuimus enim IB Minimam esse. Recta igitur IB normalis est super AΓ.

Porro si capiatur punctum aliud in Axe ut H, ac sit HZ Minima ab eodem H ducta: Dico angulum ZHI obtusum esse, ac si normalis de puncto Z ad AΓ demittatur, interceptam inter ordinatim applicatam & punctum I esse ad interceptam inter eandem ordinatam & punctum H, in ratione lateris transversi ad latus rectum.



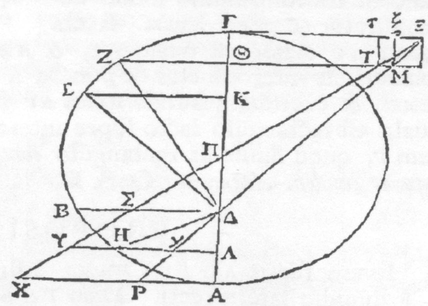
Quoniam enim ZH Minima est de puncto H ducta, erit HΓ (per septimam hujus) major dimidio lateris recti, ac recta ΓI dimidium est lateris transversi quare ratio IΓ ad HΓ minor erit ratione lateris transversi ad latus rectum. Dividatur itaque HΓ in puncto K, ita ut IK sit ad KH ut latus transversum ad latus rectum: Dico normalem è puncto K occurrere Sectioni in puncto Z. Nam si hoc non ita sit, sit ea recta KΛ, ac proinde HΛ (per decimam hujus) minima erit è rectis per punctum H ducendis. Est autem HZ recta illa Minima: quod absurdum. Occurrit igitur normalis è puncto K Sectioni ad punctum Z, & angulus IHZ obtusus est, ac demissâ de puncto Z super Axem AΓ normali ZK, IK erit ad KH sicut latus transversum ad latus rectum. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI

SI capiatur in Axe minore Ellipseos punctum, quod à Vertice ejusdem Axis distet intervallo dimidio Lateris recti ejus æquali; erit omnium rectarum ab eodem puncto ad Sectionem ductarum Maxima, *segmentum Axis minoris æquale dimidio lateris recti:* Minima *vero residuum erit ejusdem Axis. E cæteris vero, quæ propior est* Maximæ *major erit remotiore; & excessus quadrati ejus supra quadrata quarumcunque aliarum ductarum, æquales erunt rectangulis factis super interceptas inter ordinatim applicatas & Verticem Axis minoris, similibus vero contentis sub Axe minore & excessu lateris recti ejus supra Axem illum.*

Sit ΑΒΓ Ellipsis, cujus Axis minor ΑΓ, centrumque Π & in Axe capiatur punctum Δ, ita ut ΓΔ æqualis sit dimidio lateris recti Dico quod ΔΓ major est quâvis aliâ rectâ ad Sectionem de puncto Δ ductâ, quodque ΔΑ Minima est earundem: quodque propiores ipsi ΔΓ majores sunt remotioribus quodque quadratum ex ΓΔ excedit quadratum ex alia quacunque, rectangulo quod fit super interceptam inter ordinatim applicatam ejus & punctum Γ, simili vero rectangulo nuper descripto.

Ducantur enim ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ, ΔΗ: sitque ΔΒ normalis ad ΑΓ, ac fiat ΓΞ dimidium lateris recti & jungantur & producantur ipsæ ΞΠ, ΞΔ: demittantur etiam normales ΖΘ, ΕΚ, ΗΛ, quibus parallela sit recta ΑΧ. *Occurrat producta* ΖΘ *ipsis* ΞΠ, ΞΔ *in punctis* Τ, Μ, ac Axi ΑΓ parallelæ ducantur Μξ, Ττ. Quoniam autem ΓΔ æquale est ipsi ΓΞ, quadratum ex ΓΔ duplum est trianguli ΓΔΞ & quadratum ex ΘΔ duplum est trianguli ΘΔΜ, ac quadratum ex ΘΖ (per primam hujus) duplum est Trapezii ΓΞΘΤ· quadratum igitur ex ΓΔ excedit quadratum ex ΔΖ duplo trianguli ΤΜΞ: duplum vero hujus trianguli rectangulum est ΤΜτξ Jam ΓΠ est ad ΠΔ ut diameter transversa ad excessum lateris recti supra eandem (dimidium enim diametri transversæ est ad dimidium lateris recti sicut diameter transversa ad latus rectum) ac in eadem est ratione Ττ ad τξ sive τΤ ad ΤΜ quare τΤ est ad ΤΜ ut diameter transversa ad excessum lateris recti supra transversam. Sed Ττ æqualis est ipsi ΓΘ, differunt igitur quadrata ex ΓΔ, ΖΔ spatio æquali rectangulo facto super ΓΘ, & simili rectangulo descripto. Pari argumento probabitur excessum quadrati ex ΓΔ supra quadratum ex ΔΕ æquari rectangulo facto super ΓΚ, quod simile sit descripto. Quinetiam quadratum ex ΒΔ (per tertiam hujus) duplum est quadrilateri ΑΔΣΧ, & quadratum ex ΔΓ duplum est trianguli ΔΓΞ, cumque triangulum ΑΠΧ æquale est triangulo ΓΠΞ, erit differentia quadratorum ex ΓΔ, ΒΔ, dupla trianguli ΔΣΞ. duplum autem hujus trianguli æquale est rectangulo facto super ΓΔ, similique rectangulo jam descripto. Est igitur ΓΔ major quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΔΕ, & ΔΕ quam ΔΒ



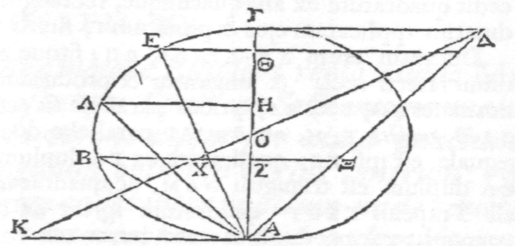
Insuper quadratum ex ΑΗ (per eandem tertiam) duplum est quadrilateri ΑΛΥΧ, & quadratum ex ΛΔ duplum est trianguli ΔγΛ, quare quadratum ex ΔΗ æquale est duplo spatio ΑΛΥΧ, una cum duplo triangulo ΔγΛ: Quadratum autem ex ΓΔ duplum est trianguli ΓΞΔ, & triangulum ΓΞΠ æquale est triangulo ΑΧΠ. Differunt igitur quadrata ex, ΓΔ, ΔΗ duplo trianguli ΞΥγ, cujus trianguli duplum æquale est rectangulo facto super ΓΛ similique prædicto. Denique quadratum ex ΔΑ duplum est trianguli ΔΑΡ, & triangulum ΓΠΞ æquale est triangulo ΠΧΑ; differunt igitur quadrata ex ΔΓ, ΔΑ, duplo trianguli ΞΧΡ, hujus autem trianguli duplum

duplum æquale est rectangulo super AΓ facto, similique descripto. Quapropter ΔΓ Maxima est è rectis ad Sectionem de puncto Δ ducendis, AΔ vero earundem Minima est. E reliquis autem quæ propior est ipsi ΓΔ major est remotiore, & excessus quadrati ipsius ΓΔ supra quadratum alterius cujusvis ductæ, æqualis est rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatam & Verticem Γ, quod simile sit descripto. Q. E. D.

PROPOSITIO XVII.

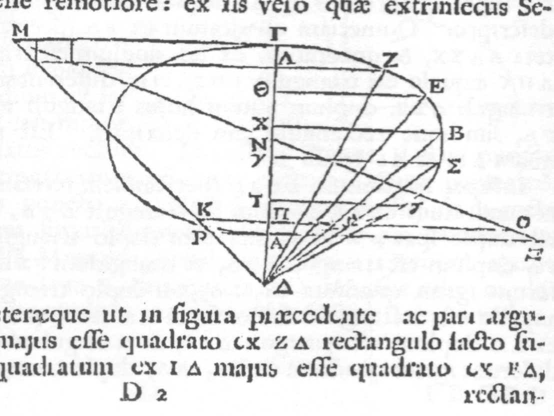
SIT jam AΓ Axis minor Ellipseos, eique æquale sit dimidium lateris recti, ac sit centrum O. Dico quoque quod AΓ *Maxima* est e rectis de puncto A ad Sectionem ductis, quodque eidem propior major est remotiore: quodque excessus quadrati ejus supra quadratum cujusvis alterius ductæ, æqualis est rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatam & Verticem Γ, quod simile sit rectangulo in præcedente Propositione descripto.

Ordinetur hæc propositio ad modum præcedentis, eodemque omnino modo probabitur quadratum ex AΓ majus esse quadrato ex AE rectangulo facto super ΓΘ descriptoque simili: pariterque quadratum ex AΓ majus esse quadrato ex AΛ rectangulo facto super ΓH, similique rectangulo prædicto. Quinetiam quadratum ex BZ (per tertiam hujus) duplum est plani AZXK, & quadratum ex ZA duplum est trianguli AZΞ, ut quadratum ex AΓ duplum est trianguli AΓΔ, ob AΓ ipsi ΓΔ æqualem. Triangulum vero ΓOΔ æquale est triangulo KOA: differentia igitur quadratorum ex AΓ & AB æqualis est duplo trianguli ΔXΞ, duplum autem hujus trianguli æquale est rectangulo facto super ΓZ similique descripto: quod quidem eodem omnino modo demonstratur ac præcedentia. Recta igitur AΓ major est quam AE, & AE quam AΛ, & AΛ quam AB. Proinde AΓ maxima est inter eductas de puncto A quæque eidem propior est major est remotiore: & excessus quadrati ipsius AΓ supra quadratum alicujus alterius ductæ, æqualis est rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatam & Verticem Γ, quod simile sit rectangulo *contento sub Axe minori & excessu quo latus rectum superat eundem Axem.* Q. E. D.



PROPOSITIO XVIII.

SI vero fuerit AΓ Axis minor Ellipseos, cujus centrum N: ac fiat ΓΔ æqualis dimidio lateris recti. Dico ΓΔ *Maximam* esse e rectis de puncto Δ ad Sectionem ducendis, ΔA vero earundem *Minimam*: propiorem autem ipsi ΓΔ, e rectis Sectionem secantibus, majorem esse remotiore: ex iis vero quæ extrinsecus Sectioni occurrunt, propiorem ipsi AΔ minorem esse remotiore: & excessum quadrati ipsius ΓΔ supra quadratum cujusvis alterius ductæ, æqualem esse rectangulo facto super interceptam inter punctum Γ & ordinatim applicatam, quod simile sit prædicto, nempe rectangulo sub Axe minore & excessu lateris ejus recti supra eundem Axem.

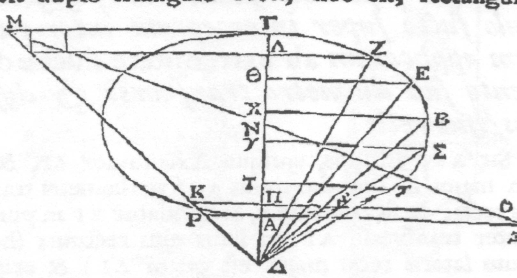


Ducantur rectæ ΔZ, ΔE, ΔB, cæteraque ut in figura præcedente: ac pari argumento patebit quadratum ex ΓΔ majus esse quadrato ex ZΔ rectangulo facto super ΓΛ similique prædicto, & quadratum ex ΓΔ majus esse quadrato ex EΔ, rectan-

rectangulo priori simili, facto super interceptam ΓΘ, quadratumque ex ΓΔ majus esse quadrato ex ΒΔ rectangulo ejusdem speciei super ipsam ΓΧ formato.

Quadratum autem ex ΑΔ, duplum est trianguli ΑΔΡ, ob ΓΜ, ΓΔ æquales, quadratum etiam ex ΓΔ duplum est trianguli ΔΓΜ. cumque triangulum ΜΓΝ æquale est triangulo ΑΝΞ, erit igitur excessus quadrati ex ΓΔ supra quadratum ex ΑΔ æqualis duplo triangulo ΞΜΡ, cujus trianguli duplum æquale est rectangulo facto super ΑΙ ejusdem speciei cum prædicto. Quare ΔΓ major est quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΔΕ, & ΔΕ quam ΔΒ, & ΔΒ quam ΔΑ.

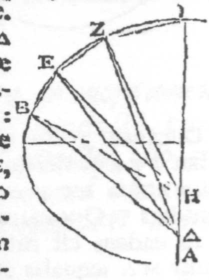
Quinetiam quadratum ex Πξ (per tertiam hujus) duplum est quadrilateri ΞΟΠΑ, & quadratum ex ΔΠ duplum est trianguli ΔΠΚ, quare quadratum ex ξΔ duplum est utriusque, Trapezii ΞΟΠΑ & trianguli ΠΔΚ simul sumpti. Quadratum autem ex ΙΔ duplum est trianguli ΓΜΔ, & triangulum ΓΜΝ triangulo ΑΝΞ æquale est. quadratum igitur ex ξΔ æquale est duplo triangulo ΟΜΚ, hoc est, rectangulo facto super ΙΠ, ejusdem speciei cum jam descriptis in præcedentibus duabus propositionibus Pari argumento demonstratur quadratum ex ΓΔ, excedere quadratum ex Δτ, rectangulo simili super Γτ facto. Nec aliter constabit quadratum ex ΓΔ majus esse quadrato ex ΔΣ, rectangulo ejusdem speciei super Γγ formato. Est autem excessus quadrati ex ΔΓ supra quadratum ex ΔΑ æqualis rectangulo descripto simili, super ΓΑ facto; quare ΔΑ minor est quam Δξ, & Δξ quam Δτ, & Δτ quam ΔΣ. Est igitur ΔΓ Maxima e ductis per punctum Δ, earundem vero minima est ΔΑ, & inter eas quæ Sectionem intersecant, quæ propior est ipsi ΔΓ major est remotiore: ex iis vero quæ Sectioni extrinsecus occurrunt, quæ ipsi ΔΑ propiores sunt minores sunt remotioribus. Quadratum etiam ex ΓΔ excedit quadratum cujusvis alterius ductæ, rectangulo facto super interceptam inter punctum Γ & ordinatim applicatam, quod simile sit descripto. Q. E. D.



PROPOSITIO XIX.

SI capiatur in Axe minore Ellipseos punctum, quod à Vertice Sectionis majori intervallo distet quam dimidio Lateris recti: erit illa Maxima *rectarum de puncto illo ad Sectionem ducendarum, quæ ad Verticem Sectionis ducitur. Reliquarum vero quæ huic propior est major erit remotiore.*

Sit ΑΒΓ Ellipsis, cujus Axis minor sit ΑΓ & in eo capiatur punctum Δ, ita ut ΓΔ major sit semilatere recto. Dico ΓΔ maximam esse e rectis per punctum Δ ad Sectionem ductis, eidemque propiorem majorem esse remotiore. Sit autem ΓΗ dimidium lateris recti, & ducantur è puncto Δ rectæ ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ, ac jungantur ΗΖ, ΗΕ, ΗΒ, atque etiam rectæ ΓΖ, ΖΕ, ΕΒ. Recta igitur ΓΗ (per tres proximas propositiones) major est quam ΖΗ, adeoque angulus ΓΖΗ major erit angulo ΖΓΗ: unde angulus ΓΖΔ multo major erit angulo ΖΓΔ. Recta itaque ΓΔ major est quam ΖΔ. Similiter cum ΗΖ major est quam ΗΕ, angulus ΖΕΗ major erit angulo ΕΖΗ, ac angulus ΖΕΔ multo major erit angulo ΕΖΔ: quocirca ΔΖ major est quam ΔΕ. Eodemque argumento probabitur rectam ΔΕ majorem esse quam ΔΒ. ΔΓ itaque maxima est rectarum per punctum Δ ad Sectionem ductarum, eidemque propior major est remotiore. Q. E. D.

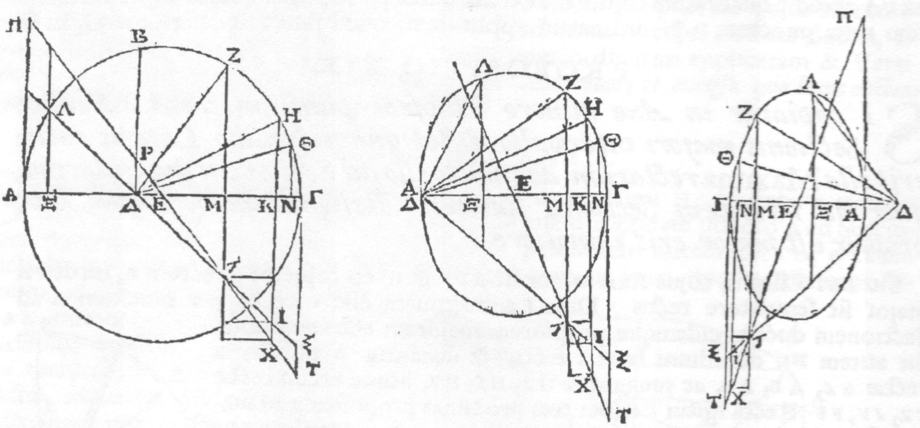


PROPO-

PROPOSITIO XX.

Si sumatur punctum in Axe minore Ellipseos, cujus distantia à Vertice Sectionis minor fuerit dimidio lateris recti, major vero Semiaxe minore; ac dividatur intercepta inter Verticem & centrum Sectionis, ita ut pars illa quæ est inter punctum divisionis & centrum sit ad distantiam ejusdem puncti à puncto prius sumpto, in ratione diametri transversæ ad latus rectum; & è puncto sic invento erigatur normalis ad Axem occurrens Sectioni, ac jungatur punctum prius sumptum cum puncto hujus occursus. erit juncta hæc rectarum omnium de puncto illo ducendarum Maxima; *è reliquis vero quæ eidem propior est major erit remotiore; & quadratum ejus superabit quadratum cujuscumque alterius ductæ, rectangulo facto super interceptam inter punctum inventum & ordinatim applicatam* ab extremitate ductæ demissam, *quod simile sit contento sub diametro transversâ & differentiâ ejusdem & Lateris ejus recti*

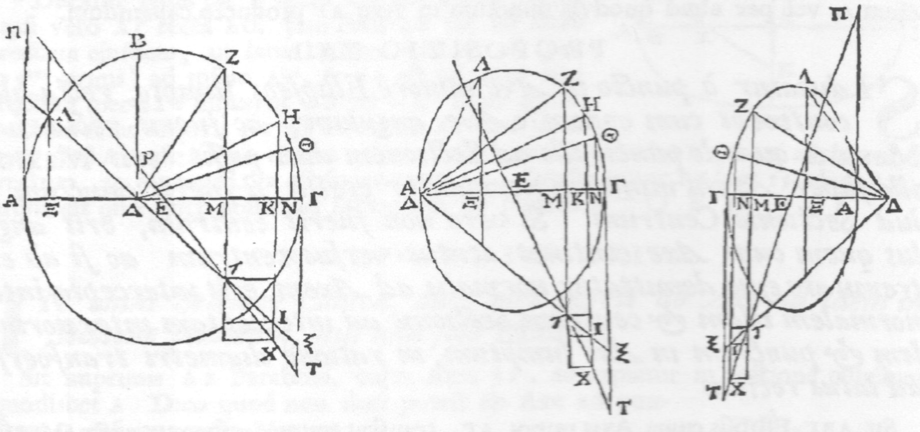
Sit ABΓ Ellipsis, ejusque Axis minor AΓ, & in eo capiatur punctum Δ, ita ut ΓΔ major sit dimidio ipsius AΓ sive diametri transversæ, minor autem dimidio lateris recti, & sit centrum E, & dividatur EΓ in puncto M, ita ut EM sit ad MΔ ut diameter transversa AΓ ad latus ejus rectum; (hoc autem fieri potest, quia dimidium lateris recti majus est quam ΔI) & erigatur e puncto M normalis ad AΓ ut ZM, & jungatur ZΔ. Dico quod recta ZΔ Maxima est rectarum per punctum Δ ad Sectionem ductarum, quodque eidem ab utrâque parte propior major est remotiore, quodque excessus quadrati ipsius ZΔ supra quadratum alterius cujusvis ductæ æqualis est rectangulo facto super interceptam inter punctum M & ordinatim applicatam, quod simile sit rectangulo in præcedentibus descripto.



Ducantur rectæ quælibet aliæ ΔΘ, ΔH, ΔZ, ΔΛ, ac sit ΔB axi perpendicularis, & fiat ΓT æqualis dimidio lateris recti, & demittantur normales ΘN, HK, ΛΞ: jungatur etiam ET producaturque, & agantur ipsi AΓ parallelæ, ut fecimus in præcedentibus Quoniam vero ME est ad ΔM ut latus transversum ad latus rectum, & in eadem est ratione EΓ ad ΓT, ut autem EΓ ad ΓT ita MI ad MT, recta igitur MΔ æqualis est ipsi MT, & quadratum ex MΔ duplum est trianguli MΔT, quadratum autem ex MZ (per primam hujus) æquale est duplo Trapezio ΓTIM quadratum igitur ex ΔZ æquale est duplo trianguli MΔT una cum duplo plani

ΓΤτΜ. Jam vero quadratum ex ΗΚ duplum est plani ΚΓΤΧ, & quadratum ex ΔΚ duplum est trianguli ΚΔΙ; quadratum igitur ex ΔΗ duplum est trianguli ΚΔΙ una cum duplo quadrilateri ΚΓΤΧ. adeoque differentia quadratorum ex ΔΖ & ΔΗ æqualis est duplo trianguli ΧΙτ. Duplum autem hujus trianguli æquale est rectangulo facto super ΚΜ, quod simile sit descripto. Hoc autem constabit eodem modo quo demonstravimus decimam sextam hujus Pariter probabitur quadratum ex ΖΔ excedere quadratum ex ΔΘ rectangulo facto super ΜΝ, ejusdem speciei cum prædicto. Eodemque argumento, quadratum ex ΓΔ duplum est trianguli ΔΓξ, unde differentia inter quadrata ex ΔΖ & ΔΓ duplum erit trianguli ξΤτ. quod quidem æquale est rectangulo facto super ΓΜ, speciei prædictæ. Recta igitur ΔΖ major est quam ΔΗ, & ΔΗ quam ΔΘ, & ΔΘ quam ΔΓ

Præterea quadratum ex ΔΒ (per tertiam hujus) duplum est quadrilateri ΠΑΔΡ, quadratum autem ex ΖΔ duplum est triangulorum ΕΓΤ, ΔΕτ, & triangulum ΕΓΤ



æquale est triangulo ΠΕΑ. igitur differentia inter quadrata ex ΔΖ & ΔΒ duplum est trianguli ΡΔτ, quod quidem æquale est rectangulo facto super ΔΜ speciei jam descriptæ Hæc autem eodem modo demonstrantur ac propositio 16ma. Parique armento differentia quadratorum ex ΔΖ & ΔΛ æqualis est rectangulo simili super ΜΞ facto.

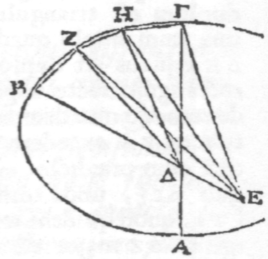
ΔΖ igitur Maxima est rectarum per punctum Δ ad Sectionem ducendarum, è quibus etiam quæ eidem propior est major erit remotiore, & excessus quadrati ipsius ΔΖ supra quadratum alterius cujusvis ductæ æqualis est rectangulo speciei descriptæ, facto super interceptam inter punctum Μ & ordinatim applicatam. Hæc autem omnia ita se habent, sive Axis minor æqualis fuerit dimidio lateris recti, sive major, sive minor eo. Nam sive major fuerit eo, ac ducantur rectæ à puncto Δ ad modum figuræ primæ, vel à puncto Α, ut in figura secunda, vel etiam à puncto exteriore, ut Δ in figura tertia, Maxima erit ea quam descripsimus. coincidente demonstrationis modo, in figuris secunda ac tertia, cum ea quam in prima jam exposuimus. Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

S*I capiatur in aliquâ* Maximâ, *in Ellipsi juxta propositionem præcedentem ductâ ac ultra Axem minorem productâ, punctum aliquod: erit quoque* Maxima *omnium de puncto illo ad eandem Sectionis partem ducendarum, recta ea cujus* Maxima *est pars; & ab utroque ejus latere quæ eidem propior est major erit remotiore.*

Sit ΑΒΓ Ellipsis, cujus Axis ΑΓ, sitque ΒΔ recta Maxima de puncto Δ ad Sectionem ducta, modo in Prop. præcedente descripto. In ΒΔ capiatur punctum aliquod

quod E, ita ut EB major sit quam BΔ Dico EB Maximam esse è rectis per punctum E ad Sectionem ductis, eidemque utrinque propiorem majorem esse remotiore.



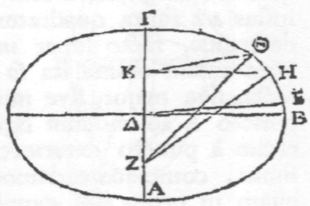
Ducantur rectæ EZ, EH, EΓ, ac jungantur ΔZ, ΔH, ΔΓ, ut & ipsæ ΓH, HZ, ZB. Quoniam vero ΔB major est quam ΔZ, angulus BZΔ major erit angulo ZBΔ, & multo major erit angulus BZE angulo ZBE: quocirca BE major est quam EZ. Pariter cum ΔZ major est quam ΔH, angulus ΔHZ major erit angulo ΔZH, adeoque angulus ZHE multo major erit quam EZH, ac proinde recta ZE major erit quam EH. Eodem modo patebit EH majorem esse quam EΓ. Recta igitur EB maxima est omnium de puncto E ad eandem Sectionis partem ductarum, quæque eidem EB propior est major erit remotiore. Idem autem eodem modo demonstrabitur si Maxima ducta fuerit per punctum A, vel per aliud quodvis punctum in Axe AΓ producto capiendum.

PROPOSITIO XXII.

Si ducatur à puncto in Axe minore Ellipseos sumpto, recta quæ contineat cum eodem Axe angulum; ac fuerit recta hæc Maxima *quæ de puncto illo ad Sectionem duci possit: erit* Maxima *illa super Axem minorem normaliter erecta, si fuerit punctum illud Sectionis Centrum Si vero non fuerit centrum, erit angulus quem cum Axe continet acutus versus centrum ac si ab extremitate ejus demittatur normalis ad Axem, erit intercepta inter normalem illam & centrum Sectionis ad interceptam inter normalem & punctum in Axe sumptum, in ratione diametri transversæ ad latus rectum*

Sit ABΓ Ellipsis cujus Axis minor AΓ, transeat autem imprimis recta Maxima per centrum ut BΔ. Dico BΔ esse ad angulos rectos super AΓ Nam si non ita sit, sit normalis illa ΔE. erit igitur ΔE (per 11^{mam} hujus) Maxima ductarum de puncto Δ: quod est contra hypothesin; posuimus enim ΔB maximam esse. Quare recta ΔB est ad angulos rectos super AΓ.

Educatur jam recta quævis maxima ZH de puncto alio Z. Dico angulum ΓZH acutum esse, demissâque normali de puncto H ad Axem AΓ, erit intercepta inter ordinatim applicatam & centrum Δ, ad interceptam inter eandem ordinatim applicatam & punctum Z, in ratione diametri transversæ ad latus rectum.



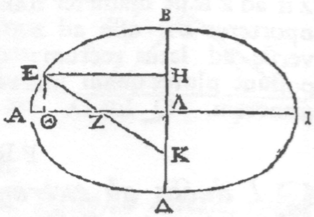
Erit enim recta ZΓ vel major dimidio lateris recti, vel minor eo, vel eidem æqualis. Non autem æqualis est ei, tunc enim (per 16^{am}.17^{am}.18^{am}.hujus) foret maxima. neque major est eo, quia sic etiam (per 19^{am} hujus) foret Maxima Est igitur ZΓ minor dimidio lateris recti Quare si fiat intercepta ad rectam compositam ex intercepta & ZΔ simul sumptis, sicut diameter transversa ad Latus rectum, erit intercepta illa minor quam ΓΔ, quia ΔZ minor est excessu dimidii lateris recti supra dimidium lateris transversi, adeoque ratio ejus ad ΓΔ minor erit ratione excessûs lateris recti supra diametrum transversam ad diametrum transversam est igitur in ea ratione ad minorem quam ΓΔ. Sit ea ΔK, ut sit KΔ ad ZK in ratione diametri transversæ ad latus rectum Dico normalem super Axem AΓ ad punctum K erectam transire per punctum H. Nam si non eo transeat, cadat ad modum rectæ KΘ & erit ΘZ (per demonstrata in 20ma hujus) Maxima. Hoc autem fieri nequit, *quia ex Hypothesi* ZH *est illa Maxima* Transit igitur normalis de puncto H demissa per punctum K, ita ut ΔK sit ad KZ ut diameter transversa ad latus rectum. *Manifestum autem est* ΓZH *angulum esse acutum, ob* ZKH *rectum* Q. E. D

PROPO-

PROPOSITIO XXIII.

SI educatur de puncto quovis in Axe minore Ellipseos Maxima: *erit pars ejus intercepta inter Sectionem & Axem majorem,* Minima *rectarum quæ duci possint è puncto illo quo intersecat Axem majorem*

Sit ΑΒΓΔ Ellipsis, cujus Axis major ΑΓ, minor vero ΒΔ, sitque ΚΕ Maxima de puncto Κ ducta, *occurrens Axi majori in puncto* Ζ. Dico ΖΕ Minimam esse rectarum per punctum Ζ ad Sectionem ductarum

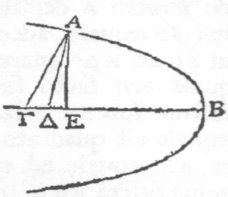


Ducatur enim per Ε recta ΕΗ ipsi ΔΒ normalis, ipsi vero ΑΓ recta ΕΘ. Jam Axis ΔΒ est ad latus rectum ejusdem, ut latus rectum Axis ΑΓ est (per 15^{am} primi) ad ipsam ΑΓ, & ΒΔ est ad latus ejus rectum (per 22^{am} hujus) ut ΛΗ ad ΗΚ latus igitur rectum Axis majoris ΑΓ est ad Axem ΑΓ ut ΛΗ ad ΗΚ Sed ΛΗ est ad ΗΚ ut ΘΖ ad ΘΛ, adeoque ΘΛ est ad ΘΖ ut ΑΓ ad latus ejus rectum ac ΘΕ normalis est super axem ΑΓ. Juncta igitur ΕΖ (per 15^{am} hujus) minima est quæ duci possit ad Sectionem de puncto Ζ Q E D.

PROPOSITIO XXIV.

IN omni Sectione Conica, duci non potest ab Axe ad idem in Sectione punctum, nisi una sola Minima.

Sit imprimis ΑΒ Parabola, cujus Axis ΒΓ, ac capiatur in Sectione punctum quodlibet Α Dico quod non duci potest ab Axe ad punctum Α nisi una recta Minima.

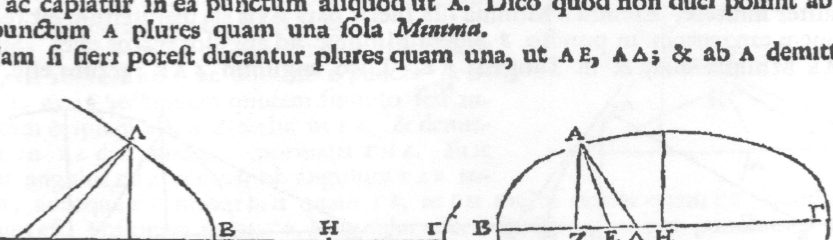


Nam si fieri potest ducantur ΑΓ, ΑΔ, ac demittatur ab Α ad Axem ΒΓ normalis, ut ΑΕ: erit igitur ΕΔ (per 13^{am} hujus) dimidium lateris recti, atque etiam ΕΓ æqualis erit eidem semilateri recto. Quod absurdum. Igitur non duci possunt ab Axe ad punctum Α plures quam una Minima. Q. E. D.

PROPOSITIO XXV.

SI vero Sectio ΑΒ fuerit Hyperbola vel Ellipsis Axe ΓΒ ac centro Η descripta; ac capiatur in ea punctum aliquod ut Α. Dico quod non duci possint ab Axe ad punctum Α plures quam una sola *Minima.*

Nam si fieri potest ducantur plures quam una, ut ΑΕ, ΑΔ; & ab Α demittatur

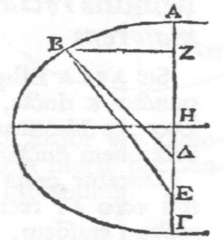


ΑΖ normalis in Axem ΒΓ. Erit igitur ΖΗ ad ΖΕ (per demonstrata in 14^{ma} & 15^{ma} hujus) ut Axis transversus ad latus rectum. Oporteret autem ΗΖ esse ad ΖΔ in eadem ratione diametri transversæ ad latus rectum Hoc autem impossibile est; ac proinde non duci possunt duæ rectæ Minimæ ab Axe ad idem punctum Α. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVI.

SI capiatur punctum quodvis in Ellipsi quod non fuerit in Vertice Axis minoris: non duci poterunt ab eodem ad Axem minorem plures quam una recta Maxima.

Sit A B Γ Ellipsis cujus Axis minor A Γ, sitque punctum in Sectione B. Dico quod de puncto B non duci possit ad Axem A Γ nisi una sola Maxima.

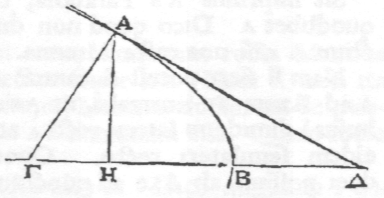


Nam si fieri potest, ducantur ad eam B Δ, B E, & demittatur normalis B Z, ac sit centrum Sectionis H. Jam si B E aliqua fuerit e maximis ad Axem ducendis, erit (per 22^am^ hujus) Z H ad Z E ut diameter transversa ad latus rectum. Sed etiam oporteret Z H esse ad Z Δ in eadem ratione diametri transversæ ad latus rectum: quod absurdum. Non igitur duci possunt plures quam una recta Maxima de puncto B ad Axem minorem. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

SI ducta ab extremitate Minimæ *alicujus, in præcedentibus descriptæ, Sectionis Tangens fuerit; super eandem* Minimam *ad angulos rectos insistet.*

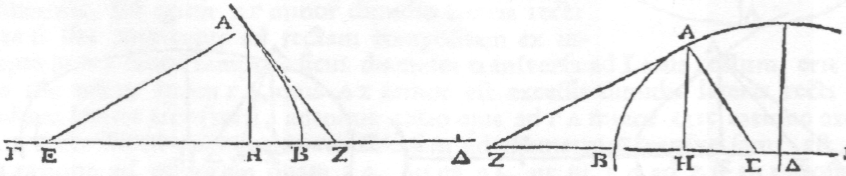
Sit imprimis Sectio A B Parabola, cujus Axis B Γ. Dico rectam ab extremitate cujusvis Minimæ ductam, Sectionemque tangentem, normalem esse super Minimam illam. Si fuerit minima illa pars Axis B Γ, res manifesta est. Si vero fuerit Minima alia ut A Γ, ducatur a puncto A recta A Δ quæ tangat Sectionem A B. Dico angulum Δ A Γ rectum esse.



Demittatur normalis A H, ac (per 13^am^ hujus) erit H Γ æqualis dimidio lateris recti, ac si A Δ tangat Parabolam, normali A H de puncto A demissâ, erit (per 35^am^ primi) B Δ ipsi B H æqualis, adeoque Γ H erit ad latus rectum ut B H ad H Δ: quare rectangulum sub Γ H, H Δ æquale erit facto sub B H & latere recto. Sed factum sub B H & latere recto (per 11^mam^ primi) æquale est quadrato ex A H: quadratum itaque ex A H æquale est rectangulo sub Γ H, H Δ. Angulus autem A H Δ rectus est: rectus est igitur (*per Lemma Pappi* I.) angulus Δ A Γ.

PROPOSITIO XXVIII.

JAM si fuerit Sectio A B Hyperbola vel Ellipsis cujus Axis B Γ. Dico rectam ab extremitate Minimæ alicujus ductam, ita ut tangat Sectionem, eidem Minimæ normaliter insistere. Etenim si Minima illa fuerit pars Axis B Γ, manifestum est rectam Sectionem tangentem in puncto B eidem Minimæ ad angulos rectos esse. Sit autem A E Minima alia, & sit Tangens A Z. Dico angulum Z A E rectum esse.

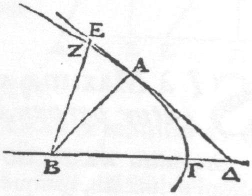


Demittatur normalis A H & sit centrum Δ: ac si fuerit A E minima & A H ordinatim applicata, erit Δ H ad H E (per 14^am^ & 15^am^ hujus) ut diameter transversa ad latus rectum. Est autem Δ H ad H Z ut rectangulum sub Δ H, H Z ad rectangulum sub H Z, H E, adeoque erit rectangulum sub Δ H, H Z ad rectangulum sub H Z, H E ut diameter transversa ad latus rectum. Sed diameter transversa est ad latus rectum (per 37^am^ primi) sicut rectangulum sub Δ H, H Z ad quadratum ex A H: igitur rectan-

rectangulum sub HZ, HE æquale est quadrato ex AH. Angulus autem AHZ rectus est, quocirca (*per Pappi Lemma* I) rectus est angulus ZAE. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

IDem autem aliter demonstrari potest hoc modo.

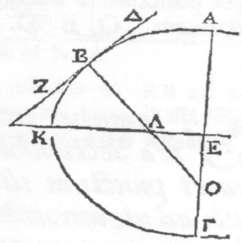


Sit AΓ aliqua e Sectionibus Conicis, cujus axis BΔ; ac sit Minima recta AB, tangens vero AΔ. Dico angulum ΔAB rectum esse.

Nam si non ita sit, normalis sit ipsi AΔ recta BE, adeoque AB major erit quam BΓ, ac propterea AB multo major erit quam BZ quod absurdum est. Posuimus enim AB Minimam esse. Quocirca si AB Minima sit, erit angulus ΔAB rectus.

PROPOSITIO XXX.

SI ab extremitate Maximæ *alicujus ad Ellipsin ductæ recta ducatur quæ Sectionem tangat Dico Tangentem illam super* Maximam *normaliter insistere.*

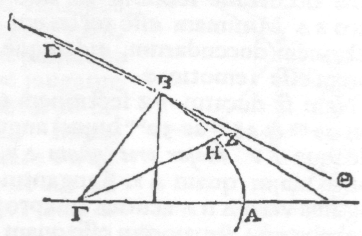


Sit ABΓ Ellipsis cujus Axis minor AΓ, & ab Axe ad Sectionem ducatur Maxima quædam ut OB, tangat autem sectionem recta BΔ ad punctum B. Dico angulum ΔBO rectum esse.

Ducatur è centro ad Sectionem Axi normalis FK, *quæ occurrat Maximæ* OB *in* Λ, quæque dimidium erit Axis majoris. Quoniam vero AΓ Axis minor est, & Axis EK occurrit Maximæ, erit (per 23um hujus) pars ejus intercepta inter Sectionem & Axem majorem recta Minima, quare BΛ Minima est. Tangit autem Sectionem recta BΔ: BΔ igitur (per tres proximas Prop.) normaliter insistit super ipsam BΛ, *hoc est super Maximam* BO. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

SI in qualibet trium Coni sectionum, ab eâ Minimæ *alicujus extremitate quæ ad Sectionem est, erigatur recta eidem* Minimæ *ad angulos rectos erit recta illa Sectionis Tangens.*

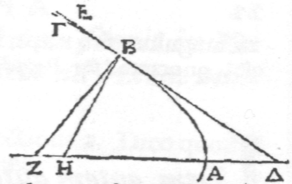


Sit enim Sectio Conica AB, & in eâ recta Minima ΓB. Dico rectam e puncto B ductam, ipsique ΓB normalem, Sectionem tangere.

Nam si fieri possit ut non tangat, intersecet eam, ut recta EBΘ ac ducatur e puncto quodam Z, extra Sectionem quidem sumpto sed inter eam & ipsam BΘ, recta alia ut BZ & demittatur in BZ de puncto Γ normalis ΓHZ. Erit igitur angulus ΓBZ acutus, ob angulum ΓZB rectum, adeoque ΓZ minor erit quam ΓB, ac ΓH multo minor quam ΓB quod absurdum est. Posuimus enim ΓB Minimam esse. Recta igitur per punctum B ipsi BΓ normalis tanget Sectionem Q. E. D.

PROPOSITIO XXXII.

SI recta tangat aliquam è Sectionibus Conicis, & erigatur è puncto contactus Tangenti normalis, quæ occurrat Axi: erit hæc recta Minima *quæ per punctum illud ad Axem ducitur.*

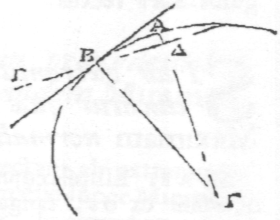


Sit enim ΑΒΓ Sectio Conica, Tangens vero ΔΕ, & de puncto contactus Β erigatur tangenti normalis ΒΖ, quæ producatur ad occursum Axis. Dico ΒΖ Minimam esse.

Nam si non ita sit, transeat Minima ΒΗ per punctum Β, ac angulus ΔΒΗ (per 27^{am} & 28^{am} hujus) rectus erit quod quidem absurdum est. Posuimus enim angulum ΔΒΖ rectum esse. Quocirca recta ΒΖ Minima est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

SI à Maximæ alicujus extremitate illâ quæ ad Sectionem est erigatur perpendicularis, erit ea Sectionis Tangens.

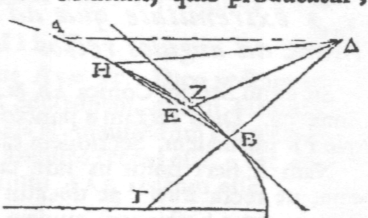


Sit enim ΑΒ Sectio Conica, sitque ΒΓ Maxima aliqua. Dico rectam per punctum Β ductam, ipsique ΒΓ normalem, sectionem tangere.

Nam si non ita sit, intersecet eam ad modum rectæ ΒΔΕ, & ducatur è puncto Γ recta ΓΔΑ, occurrens ipsi ΒΕ in Δ, *Sectioni autem in* Α. Cum autem ΓΔ subtendit angulum rectum, ΓΒ vero angulum acutum, erit ΓΔ major quam ΓΒ. Sed ΑΓ major est quam ΔΓ, adeoque ΑΓ multo major erit quam ΓΒ. Hoc autem absurdum est posuimus enim ΓΒ Maximam esse. Quapropter recta per punctum Β ducta, ipsique ΓΒ normalis, tanget sectionem. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIV.

SI sumatur punctum in aliquâ vel è Maximis *vel* Minimis, *extra Sectionem Conicam productis: erit portio ejus, quæ interjacet punctum illud & Sectionem,* Minima *rectarum de puncto illo ad utrumvis latus Sectionis egredientium, modo non produci sed in uno tantum puncto Sectioni occurrere concipiantur: è cæteris vero quæ eidem propinquior minor erit remotiore.*



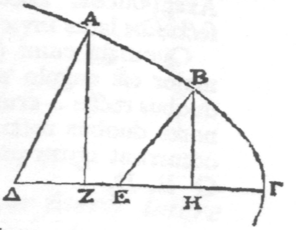
Sit ΑΒ Sectio Conica, & ΒΓ aliqua e Maximis vel Minimis, quæ producatur, & in producta capiatur punctum quodvis Δ, à quo ducantur ad sectionem rectæ ΔΑ, ΔΗ, ΔΕ, quæ singulæ occurrant sectioni in uno tantum puncto. Dico ΒΔ Minimam esse rectarum de puncto Δ ad sectionem ducendarum, eidemque propiorem minorem esse remotiore.

Nam si ducatur ΒΖ sectionem tangens in Β, erit (per 27^{am} & 28^{am} ac 30^{am} hujus) angulus ΖΒΔ rectus, adeoque ΔΖ *major erit quam* ΔΒ, *ac* ducta ΔΕ multo major quam ΔΒ. Jungantur rectæ ΗΒ, ΗΕ, atque angulus ΔΕΗ obtusus erit, angulus vero ΔΗΕ acutus quapropter ΔΗ major erit quam ΔΕ. Ac pari argumento probabitur ΔΑ majorem esse quam ΔΗ. Possumus etiam idem demonstrare de rectis ab alterâ parte ipsius ΒΔ ducendis. Constat ergo Propositio.

PROPOSITIO XXXV.

IN omni Sectione Conicâ, si ducantur plures Minimæ; *erunt anguli comprehensi sub Axe &* Minimis *à Vertice Sectionis remotioribus majores comprehensis sub Axe & eidem Vertici propinquioribus.*

Sit autem imprimis Sectio Parabola ut ΑΒΓ, cujus Axis ΓΔ: sintque rectæ ΑΔ, ΒΕ Minimæ Dico angulum ΑΔΓ majorem esse angulo ΒΕΓ.

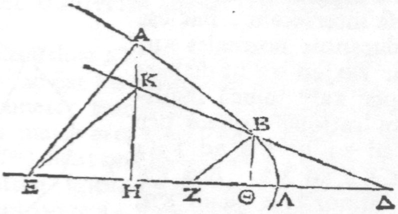


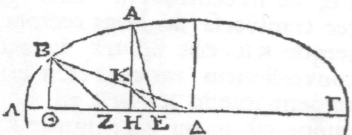
Demittantur normales ΑΖ, ΒΗ cumque ΒΖ Minima est, erit (per 13^{am} hujus) ΕΗ dimidium lateris recti; ac (per eandem) erit etiam ΔΖ æqualis dimidio lateris recti, ita ut ΕΗ æqualis sit ipsi ΔΖ Cathetus vero ΑΖ major est Catheto ΒΗ quare angulus ΑΔΖ major est angulo ΒΕΗ Q. E. D

PROPOSITIO XXXVI

SIT jam Sectio Hyperbola vel Ellipsis, cujus Axis ΑΕ & centrum Δ; & sint ΑΕ, ΒΖ Minimæ. Dico angulum ΑΕΔ majorem esse angulo ΒΖΔ.

Demittantur normales ΒΘ, ΑΗ, & jungatur ΔΚΒ. Erit igitur ΔΗ ad ΗΕ (per 14^{am} & 15^{am} *hujus*) *sicut diameter transversa* ad latus rectum, ac (per easdem) erit ΔΘ ad ΘΖ in eadem ratione proinde ΔΗ erit ad ΗΕ ut ΔΘ ad ΘΖ, ac permu-



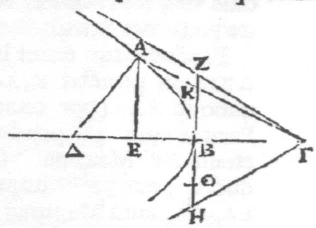


tando erit ΔΗ ad ΔΘ sicut ΗΕ ad ΘΖ. Sed ΔΗ est ad ΔΘ ut ΚΗ ad ΒΘ: quapropter ΗΕ est ad ΘΖ sicut ΚΗ ad ΒΘ. Anguli autem ΑΗΕ, ΒΘΖ recti sunt, adeoque triangula ΚΕΗ, ΒΖΘ similia sunt, & *anguli* ΚΕΗ, ΒΖΘ *æquales*; angulus igitur ΑΕΗ major est angulo ΒΖΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVII.

S*I in Hyperbola ducatur recta aliqua* Minima *quæ contineat cum Axe angulum erit angulus ille minor angulo comprehenso sub alterutro Asymptotorum & rectâ quæ per Verticem Sectionis ducta Axi normalis est.*

Sit Hyperbolæ ΑΒ Axis ΓΔ, Asymptoti autem ΖΓ, ΓΗ; sitque recta quædam Minima ΑΔ & è puncto Β erigatur Axi normalis ΖΒΗ Dico angulum ΑΔΓ minorem esse angulo ΓΖΗ.



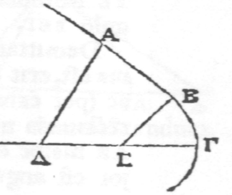
Fiat ΒΘ dimidium lateris recti, sive cadat punctum Θ super Η, vel inter Β, Η, vel extra ea, ac jungatur ΑΓ. Jam ΓΒ est ad ΒΘ, sicut axis transversus ad latus rectum, est autem ΓΕ ad ΕΔ (per 14^{am} hujus) sicut axis transversus ad latus rectum. quare ΓΒ est ad ΒΘ ut ΓΕ ad ΕΔ. Sed ΚΒ est ad ΒΓ ut ΑΕ ad ΕΓ, adeoque ex æquo erit ΚΒ ad ΒΘ sicut ΑΕ ad ΕΔ. Ratio autem ΚΒ ad ΒΘ minor est ratione ΖΒ ad ΒΘ, & ΖΒ est ad ΒΘ (per 3^{am} II^{di}) ut ΓΒ ad ΒΖ. Quapropter ratio ΑΓ ad ΕΔ minor est ratione ΓΒ ad ΒΖ. Hæc vero latera continent angulos rectos unde manifestum est angulum ΑΔΓ minorem esse angulo ΓΖΒ Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVIII.

S*I ducantur à Sectione aliqua Conica rectæ duæ* Minimæ *ad idem Axis latus; occurrent illæ productæ ad oppositam Sectionis partem, sive ultra Axem.*

Sit

Sit sectio Conica ΑΒ super Axe ΓΔ; sintque ΑΔ, ΒΕ duæ Minimæ à sectione ad Axem ductæ. Dico rectas ΔΑ, ΒΕ productas, ad alterum sectionis latus invicem occursuras.

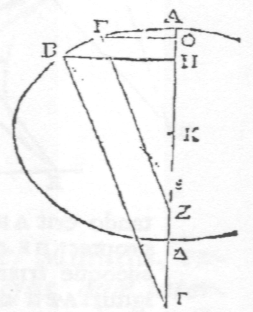


Quoniam enim (per 35^{am} & 36^{am} hujus) angulus ΑΔΓ major est angulo ΒΕΓ, erunt anguli ΑΔΕ, ΔΕΒ majores duobus rectis. erunt igitur anguli iisdem deinceps minores duobus rectis: sunt autem ΑΔ, ΒΕ duæ Minimæ, occurrunt igitur productæ, ad alteram sectionis partem. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIX.

Rectæ Maximæ *à Sectione ad Axem Ellipseos minorem ductæ occurrunt invicem ad eandem Sectionis partem*

Sit ΑΒΓ Ellipsis, cujus Axis minor ΑΔ. Dico Maximas à Sectione ΑΒΓ ductas occurrere inter se ad partes Semi-Ellipseos ΑΒΔ.

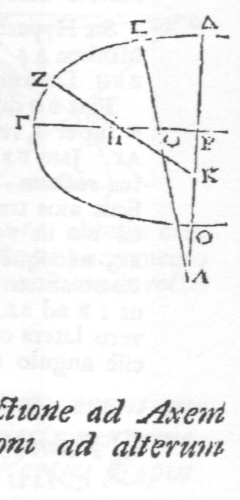


Nam si possibile sit, ut non sese intersecent, sint eæ duæ rectæ Maximæ ΒΕ, ΓΖ, & ducantur normales ΒΗ, ΓΘ, ac sit centrum Κ. Erit igitur ΚΘ ad ΘΖ ut diameter transversa ad latus rectum (per 22^{am} hujus) similiterque ΚΗ erit ad ΗΕ in eadem ratione: quare per conversionem rationis ΚΗ erit ad ΚΕ ut ΚΘ ad ΚΖ; ac permutando ΚΗ erit ad ΚΘ ut ΚΕ ad ΚΖ. Sed ΚΖ minor est quam ΚΕ: igitur ΚΘ minor erit quam ΚΗ, quod est contra Hypothesin. Minimæ igitur ΒΕ, ΓΖ occurrunt invicem: *cumque* ΚΕ *minor est quam* ΚΖ, *occurrent ad easdem partes Axis ad quas puncta* Γ, Β. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XL.

Concursus rectarum Minimarum *in Ellipsi fiunt intra angulum comprehensum sub Semiaxe ad quem ducuntur* Minimæ *& sub Axe minore.*

Sit ΔΕΓ Ellipsis, cujus Axis minor ΔΒΟ; sintque Minimæ duæ ΕΘ, ΖΗ. Dico rectas ΕΘ, ΖΗ productas concurrere intra angulum ΓΒΟ.

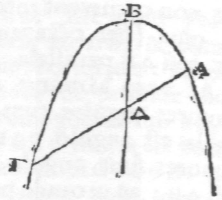


Producantur enim hæ rectæ ab Η & Θ ad occursum ipsius ΔΒΟ, in punctis Κ, Λ. Quoniam vero ΕΘ Minima est, erit quoque ΕΛ (per conversam Prop. XXIII hujus) Maxima. Pariter cum ΖΗ producta occurrit ipsi ΒΟ in puncto Κ, erit etiam ΖΚ Maxima. Occurrunt autem inter se ΕΘ, ΖΗ productæ (per 38^{vam} hujus) ad alteram partem Axis. Sed rectæ ΕΛ, ΖΚ, cum Maximæ sint, occurrunt invicem (per 39^{am} hujus) ad eandem Axis minoris partem. Situm est igitur punctum occursus intra angulum rectis ΓΒ, ΒΟ comprehensum. Q. E. D.

PROPOSITIO XLI.

Rectæ Minimæ *in Parabola vel Ellipsi de Sectione ad Axem ductæ & productæ occurrent etiam Sectioni ad alterum ejus latus.*

Res quidem in Ellipsi per se satis manifesta est.



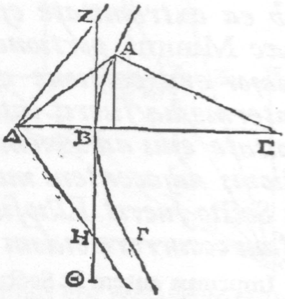
Sin autem sectio ΑΒΓ Parabola fuerit axe ΒΔ, sit recta aliqua Minima ΑΔ. Dico ΑΔ productam occurrere alteri sectionis parti ΒΓ.

Quoniam enim sectio Parabola est, ac ducitur ad diametrum ejus recta ΑΔ; producta ea (per 27^am^ primi) conveniet cum sectione ΒΓ. Q. E D.

PROPOSITIO XLII

In Hyperbola, si diameter transversa non major fuerit latere ejus recto, nulla Minima *de Sectione ad Axem duci potest, quæ occurrat alteri Sectionis lateri. Si vero diameter transversa major fuerit latere ejus recto, pars* Minimarum *producta occurret alteri Sectionis lateri. altera vero pars non item.*

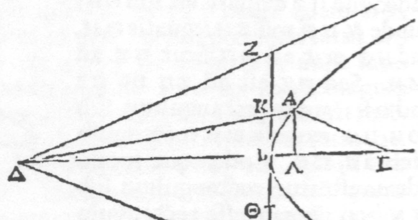
Sit Hyperbolæ ΑΒΓ Axis ΔΕ, ac centrum Δ; sitque recta aliqua Minima ΑΕ: nec sit diameter transversa major latere recto. Dico quod ΑΕ producta non occurret sectioni



Sint Asymptoti duæ ΔΖ, ΔΗ, ac sit ΖΒΗ ipsi ΔΕ ad angulos rectos ac fiat ΒΘ dimidium lateris recti. Quoniam vero diameter transversa non major est latere recto, ΔΒ non major erit quam ΒΘ; ac ΔΒ est ad ΒΘ (per tertiam II^di^) sicut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΒΖ, quadratum igitur ex ΒΔ non majus erit quadrato ex ΒΖ, adeoque ΒΔ non major quam ΒΖ: unde & angulus ΒΖΔ non major erit angulo ΖΔΒ Sed (per 37^am^ hujus) angulus ΒΖΔ major est angulo ΑΕΒ, quare angulus ΖΔΒ major est angulo ΑΕΒ Angulus autem ΖΔΒ æqualis est angulo ΒΔΗ: quare angulus ΒΔΗ major est angulo ΑΕΒ. Jam angulus qui ipsi ΑΕΒ deinceps est una cum angulo ΑΕΒ æqualis est duobus rectis, adeoque angulus ΕΔΗ una cum angulo ipsi ΑΕΒ deinceps major est duobus rectis; rectæ igitur ΑΕ, ΔΗ productæ ad partes Ε & Η non occurrent inter se. Sed & recta ΑΕ non occurret sectionis parti ΒΓ (per octavam II^di^) quia non occurrit Asymptoto ΔΗ. Q. E. D.

PROPOSITIO XLIII.

Quod si fuerit diameter transversa major latere recto. Dico *Minimarum* aliquas à Sectione ΑΒΓ ductas & productas occurrere Sectioni ab alterâ ejus parte; aliquas vero eidem non occurrere.



Sint duæ Sectionis Asymptoti ΖΔ, ΔΗ: cumque diameter transversa major est latere recto, erit ΔΒ major dimidio lateris recti ΒΘ, adeoque ratio ipsius ΖΒ ad ΒΘ major erit ratione ΖΒ ad ΒΔ. Fiat ΚΒ ad ΒΘ sicut ΖΒ ad ΒΔ, & jungatur ΔΚ, quæ producta (per 2^dam^ II^di^) occurret sectioni. Occurrat autem in puncto Α, & ab Α demittatur Axi ΔΕ normalis ΑΛ, ac fiat ΔΛ ad ΛΕ sicut ΔΒ ad ΒΘ, sive ut diameter transversa ad latus rectum. Quoniam vero normalis est ΛΑ, erit intercepta ΑΕ (per nonam hujus) aliqua è Minimis. Cum autem ΒΚ est ad ΒΔ sicut ΑΛ ad ΛΔ, atque etiam ΔΒ est ad ΒΘ sicut ΔΛ ad ΛΕ, erit ex æquo ΑΛ ad ΛΕ sicut ΒΚ ad ΒΘ Sed ΒΚ est ad ΒΘ ut ΖΒ ad ΒΔ; quare ΑΛ est ad ΛΕ sicut ΖΒ ad ΒΔ. Anguli autem ΖΒΔ, ΑΛΕ sunt æquales, quia recti, atque adeo triangula ΖΒΔ, ΑΛΕ similia, & angulus ΖΔΒ angulo ΑΕΛ æqualis.

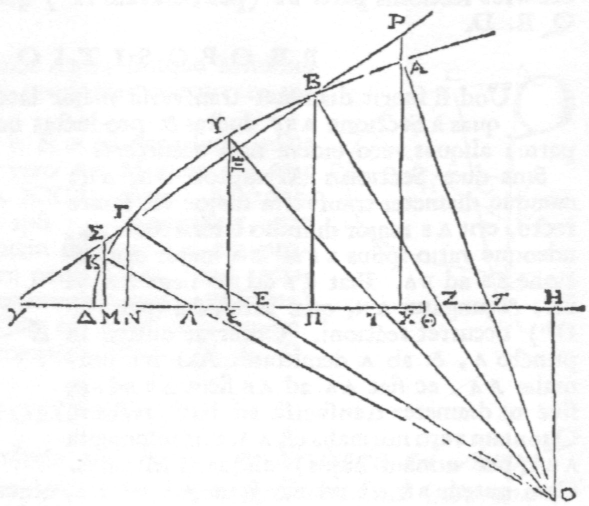
qualis. unde & angulus ΒΔΗ eidem angulo ΑΕΛ æqualis est. Quocirca rectæ ΔΗ ΛΕ non occurrent inter se, atque ΛΕ producta non occurret sectioni nisi in puncto Λ, quia (per octavam II^{di}) non occurrit utrique Asymptoto ΔΗ, ΔΖ: est enim ΛΕ ipsi ΔΗ parallela. Recta igitur ΛΕ non occurrit sectioni nisi in solo puncto Λ.

At vero Minimæ illæ, quæ occurrunt axi inter puncta Β, Ϝ, (per 36^{am} hujus) minores angulos cum Axe comprehendunt quam ΒΔΗ: (etenim angulus ΑΕΒ æqualis est angulo ΒΔΗ, & anguli Minimarum istarum inter Β & Ε transeuntium minores sunt angulo ΑΕΒ, *hoc est angulo* ΒΔΗ) adeoque productæ non occurrent ipsi ΔΗ; ac proinde non intersecabunt sectionem ΒΓ, ob causam jam dictam, nempe Prop. 8^{vam} II^{di}. Cæteras vero Minimas comprehendentes cum Axe angulos majores angulo ΑΕΒ, quia ipsi ΔΗ occurrunt, etiam interpositæ sectioni ΒΓ occurrere necesse est Q. E. D

PROPOSITIO XLIV.

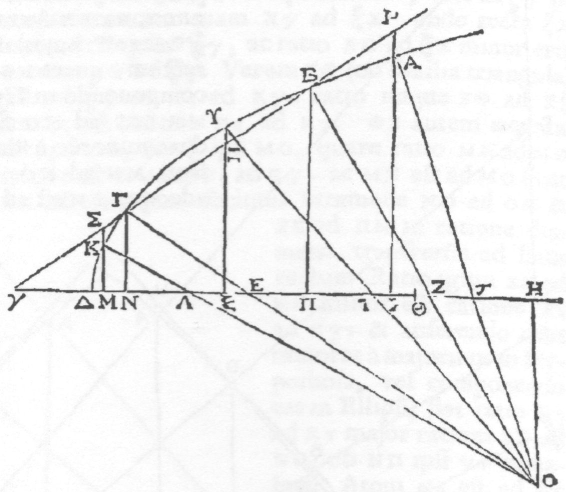
SI ad Axem alicujus Sectionis Conicæ ducantur duæ Minimæ, *quæ ad occursum producantur; & de puncto occursus earundem ducatur alia quævis recta, quæ Axem secans Sectioni conveniat. portio ejus inter Sectionem & Axem intercepta non erit* Minima *Ac si hæc ducta non fuerit intermedia inter duas* Minimas, *& agatur ab ea extremitate ejus quæ est ad Sectionem* Minima; *abscindet hæc* Minima *portionem Axis Vertici Sectionis adjacentem, quæ major erit portione ejusdem ab ipsa ducta abscissâ. Si vero ducta intermedia fuerit inter duas* Minimas, *ea* Minima, *quæ ab extremitate ejus ad Axem ducitur, auferet portionem Axis Vertici Sectionis adjacentem minorem portione ab ipsa ducta abscissâ. Quod si Sectio fuerit Ellipsis, oportebit & duas* Minimas *& tertiam ductam occurrere eidem majori Semiaxi Sectionis.*

Imprimis autem sit Sectio Parabola ut ΑΒΓ, cujus Axis ΔΗ; ac sint duæ Minimæ ab eadem ductæ ΒΖ, ΓΕ, quæ occurrant inter se in puncto Ο: & educatur è puncto Ο recta ΚΛ, primum extra ipsas ΟΓ, ΟΒ. Dico ΚΛ non esse aliquam è Minimis, Minimamque per punctum Κ ductam abscindere ab Axe majorem portionem, Vertici sectionis Δ conterminam, quam est ΔΛ.



Demittantur normales ΟΗ, ΒΠ, ΓΝ, ΚΜ, ac sit ΘΗ dimidium lateris recti. Quoniam vero ΒΖ Minima est, & ΒΠ normalis, erit (per 13^{am} hujus) ΠΖ æqualis dimidio lateris recti; adeoque ΠΖ æqualis est ipsi ΘΗ: unde & ΠΘ ipsi ΖΗ æqualis erit, ac ΗΘ erit ad ΘΠ sicut ΠΖ ad ΖΗ. Sed ΠΖ est ad ΖΗ ut ΠΒ ad ΟΗ; unde rectangulum sub ΟΗ, ΗΘ æquale erit rectangulo sub ΒΠ, ΠΘ. Eodemque modo demonstratur rectangulum sub ΓΝ, ΝΘ æquale esse rectangulo sub ΟΗ, ΗΘ: æquale est igitur rectangulum sub ΠΒ, ΘΠ rectangulo ΓΝ, ΝΘ, ac proinde ΠΒ est ad ΓΝ ut ΝΘ ad ΘΠ. Jungatur ΒΓ ac producatur ad occursum Axis ΔΗ in puncto γ, producatur etiam normalis ΚΜ ad Σ Erit igitur ΠΒ ad ΓΝ sicut Πγ ad γΝ, adeoque Πγ est ad γΝ sicut ΝΘ ad ΘΠ, *ac dividendo* ΠΝ *est*

est ad γN *sicut* ΠN *ad* OΠ: æqualis est igitur recta γN ipsi ΠΘ. Est igitur γM minor quam ΠΘ, unde ratio ΠM ad Mγ major est ratione ΠM ad ΠΘ, & componendo ratio Πγ ad γM, hoc est ΠB ad MΣ, major erit ratione MO ad ΘΠ: adeoque rectangulum sub BΠ, ΠΘ majus erit rectangulo sub ΣM, MΘ, ac proinde multo majus rectangulo sub KM, MΘ. Demonstravimus autem rectangulum sub BΠ, ΠΘ æquale esse rectangulo sub OH, HΘ adeoque rectangulum OHΘ majus est rectangulo KMΘ; ac ratio OH ad KM, sive HΛ ad ΛM, major est ratione MΘ ad ΘH: quocirca HΘ major est quam MΛ. Sed HΘ æqualis est dimidio lateris recti, ergo MΛ minor est dimidio lateris recti. Minima igitur à puncto K ducenda auferet ab Axe segmentum majus quam ΛΔ: unde patet (per 24^{am} hujus) KΛ non esse Minimam.



Jam si ducatur ad alterum latus ipsarum BO, OΓ, etiam extra eas, alia quævis recta ut OA Dico partem ejus Aτ non esse Minimam Minimam vero è puncto A ductâ auferre ab Axe portionem majorem quam Δτ. Sit AX normalis ipsi ΔH, & (per jam demonstrata) recta ΠΘ æqualis est ipsi γN, unde γX major erit quam ΠΘ, ac ratio ΠX ad Xγ minor erit ratione XΠ ad ΠΘ. Dividendo autem ratio XΠ ad Πγ minor erit ratione ejusdem ad XΘ, ac componendo ratio Xγ ad γΠ, *hoc est* XP *ad* ΠB, minor erit ratione ΠΘ ad ΘX: quare ratio XP ad ΠB minor est ratione ΠO ad OX, ac rectangulum ΘXP minus erit rectangulo BΠΘ, adeoque rectangulum AXO multo minus erit rectangulo BΠΘ. Sed BΠΘ æquale est rectangulo OHO, quocirca AXΘ minus est rectangulo OHO; ad proinde ratio AX ad OH, hoc est Xτ ad τH, minor erit ratione HΘ ad ΘX. erit igitur HΘ major quam Xτ. Sed ΘH dimidium est lateris recti, quare Xτ minor est dimidio lateris recti Minima itaque de puncto A ducenda auferet rectam majorem quam Xτ, adeoque majus erit segmentum Axis, à sectionis Vertice Δ sumptum, quam segmentum Δτ rectâ Aτ abscissum ac propterea (per 24^{am} hujus) recta Aτ non est aliqua è Minimis.

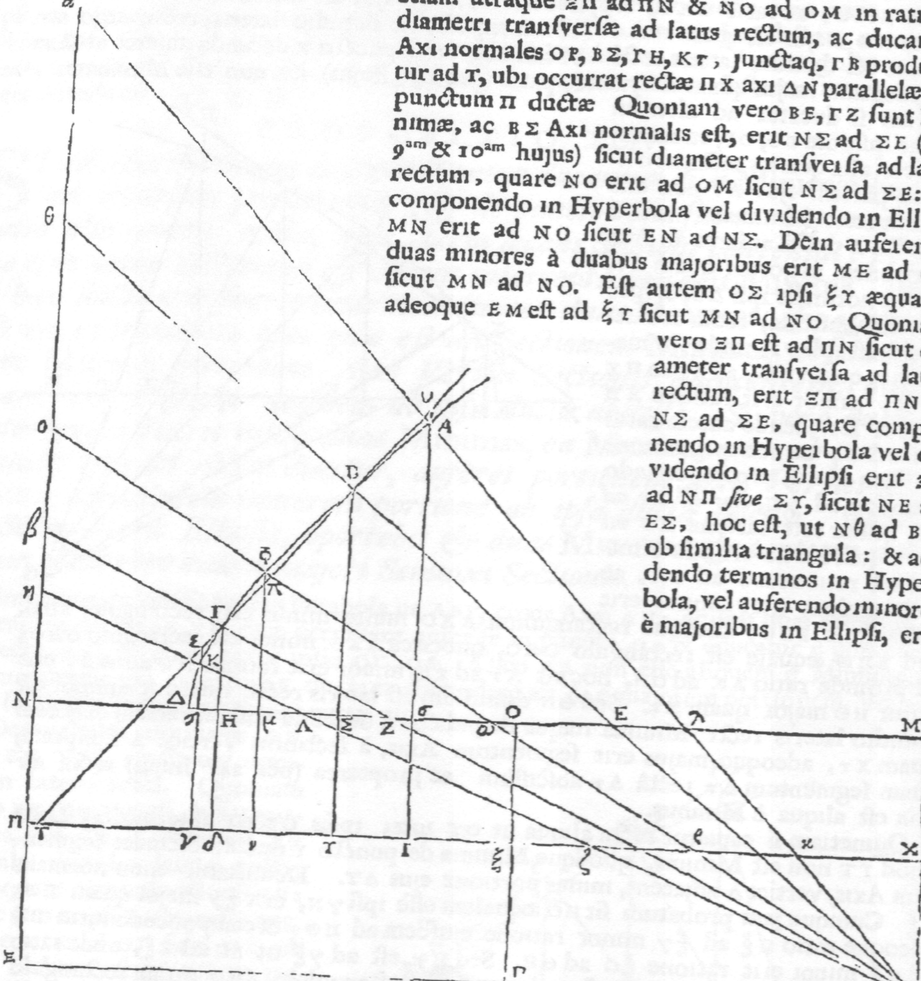
Quinetiam si capiatur recta aliqua ut OΥ inter ipsas OB, OΓ intermedia: Dico quod Υτ non est Minima, quodque Minima de puncto Υ ducta abscindet segmentum Axis, vertici Δ adjacens, minus portione ejus Δτ. Demittatur enim normalis Υξ Cumque jam probatum sit ΠO æqualem esse ipsi γN, erit ξγ major quam ΠΘ; adeoque ratio Πξ ad ξγ minor ratione ejusdem ad ΠΘ & componendo ratio Πγ ad γξ minor erit ratione ξO ad ΘΠ. Sed Πγ est ad γξ ut BΠ ad Ξξ, unde ratio BΠ ad Ξξ minor est ratione ξΘ ad ΘΠ: ac rectangulum BΠΘ minus rectangulo ΞξΘ, multoque minus rectangulo ΥξO Rectangulum autem OHΘ æquale est rectangulo BΠΘ, quare rectangulum OHΘ minus est facto sub Υξ, ξΘ: unde & ratio OH ad Υξ minor erit ratione ξΘ ad ΘH. Sed OH est ad Υξ sicut Hτ ad Ιξ, quare Hτ est ad Υξ in minore ratione quam ξΘ ad ΘH recta igitur HΘ minor est quam Υξ. Verum HΘ dimidium est lateris recti, quapropter recta Minima de puncto Υ ducenda auferet portionem minorem quam ξτ· ac segmentum Axis Vertici Sectionis adjacens minus erit quam Δτ unde Υτ non est Minima, sed Minima de puncto Υ ducenda auferet Axis portionem minorem quam Δτ. Q. E. D.

PROPOSITIO XLV

Si vero sectio fuerit Hyperbola vel Ellipsis ut ABΓΔ, Axe MΔ centro vero N, & ducantur in sectione duæ *Minimæ*, ut BE, ΓZ, à quarum concursu in puncto O agatur

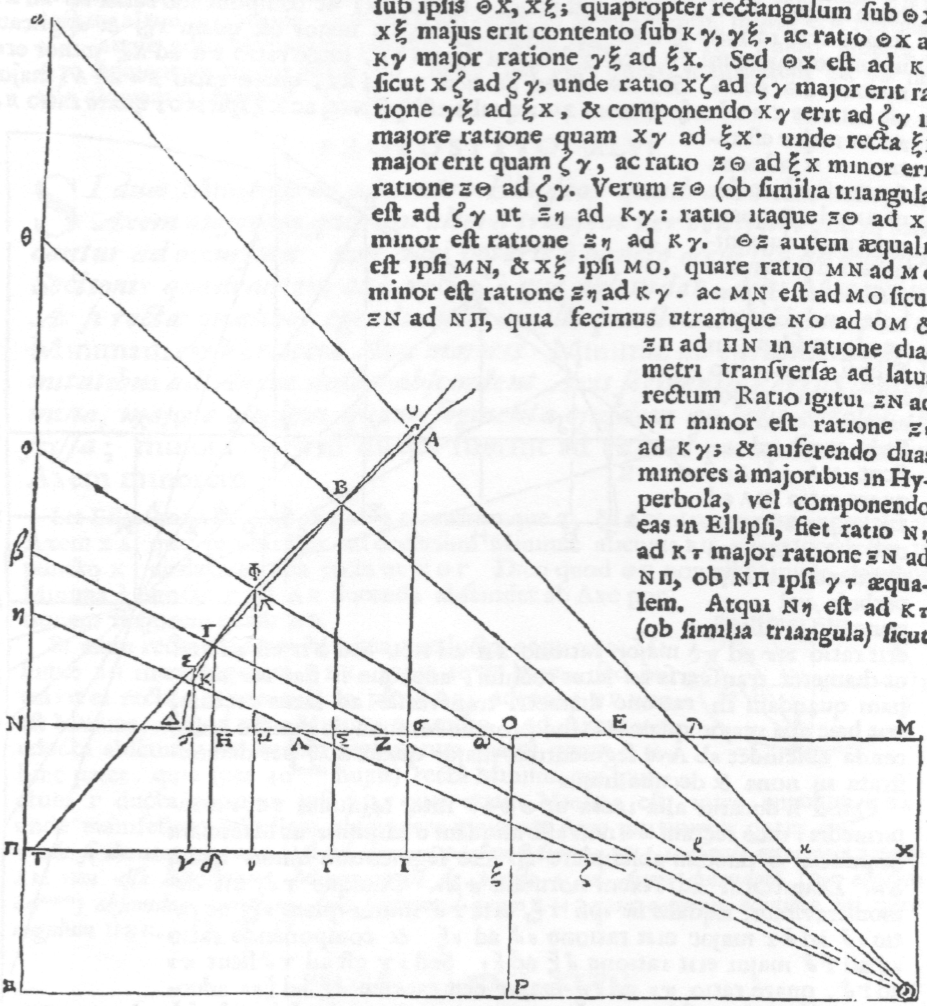
Θ agatur recta ΘΛΚ. Dico portionem ejus inter sectionem & Axem interceptam non esse aliquam è *Minimis*: sed *Minimam* de puncto Κ ductam abscindere segmentum Axis majus quam ΔΛ.

De puncto Θ demittatur ad Axem normalis recta ΘΜ, ac per centrum Ν ipsi ΜΘ parallela ducatur recta ΝΞ, ac per punctum Θ ipsi ΜΝ parallela sit ΘΞ, & producatur ΝΞ ad occursum ipsarum ΘΓ, ΘΒ: iis autem occurrat in punctis β, θ. Fiat etiam utraque ΞΠ ad ΠΝ & ΝΟ ad ΟΜ in ratione diametri transversæ ad latus rectum, ac ducantur Axi normales ΟΡ, ΒΣ, ΓΗ, ΚΥ, junctaq; ΓΒ producatur ad Υ, ubi occurrat rectæ ΠΧ axi ΔΝ parallelæ per punctum Π ductæ. Quoniam vero ΒΕ, ΓΖ sunt Minimæ, ac ΒΣ Axi normalis est, erit ΝΣ ad ΣΕ (per 9^{am} & 10^{am} hujus) sicut diameter transversa ad latus rectum, quare ΝΟ erit ad ΟΜ sicut ΝΣ ad ΣΕ: ac componendo in Hyperbola vel dividendo in Ellipsi ΜΝ erit ad ΝΟ sicut ΕΝ ad ΝΣ. Dein auferendo duas minores à duabus majoribus erit ΜΕ ad ΟΣ sicut ΜΝ ad ΝΟ. Est autem ΟΣ ipsi ξΥ æqualis, adeoque ΕΜ est ad ξΥ sicut ΜΝ ad ΝΟ. Quoniam vero ΞΠ est ad ΠΝ sicut diameter transversa ad latus rectum, erit ΞΠ ad ΠΝ ut ΝΣ ad ΣΕ, quare componendo in Hyperbola vel dividendo in Ellipsi erit ΞΝ ad ΝΠ *sive* ΣΥ, sicut ΝΕ ad ΕΣ, hoc est, ut Νθ ad ΒΣ, ob similia triangula: & addendo terminos in Hyperbola, vel auferendo minores è majoribus in Ellipsi, erit



Ξθ ad ΒΥ sicut ΝΕ ad ΕΣ, vel sicut ΞΝ ad ΝΠ. Jam ratio rectanguli ΞΝΜ ad rectangulum ΠΝΟ componitur ex ratione ΞΝ ad ΝΠ & ΜΝ ad ΝΟ. demonstravimus autem ΞΝ esse ad ΝΠ sicut Ξθ ad ΒΥ, & ΜΝ esse ad ΝΟ ut ΕΜ ad ξΥ, ratio igitur rectanguli ΝΜΘ ad rectangulum ΝΠξ componitur ex ratione Ξθ ad ΒΥ & ratione ΕΜ ad ξΥ. Sed rectangulum ΝΜΘ æquale est facto sub Ξθ & ΕΜ, quia Ξθ est ad ΟΞ sicut ΘΜ ad ΜΕ. rectangulum igitur ΝΠξ æquale est contento sub ΒΥ, Υξ. Eodem modo demonstrabitur rectangulum ΝΠξ æquale esse rectangulo Γδξ, atque adeo rectangulum sub ΒΥ, Υξ æquale esse rectangulo sub Γδ, δξ unde ΒΥ est ad Γδ ut δξ est ad ξΥ. Sed ΒΥ est ad Γδ sicut ΥΤ ad Τδ, quare ΥΤ est ad Τδ sicut δξ ad ξΥ; ac dividendo Υδ est ad δΤ sicut Υδ ad ξΥ: unde patet ξΥ ipsi Τδ æqualis.

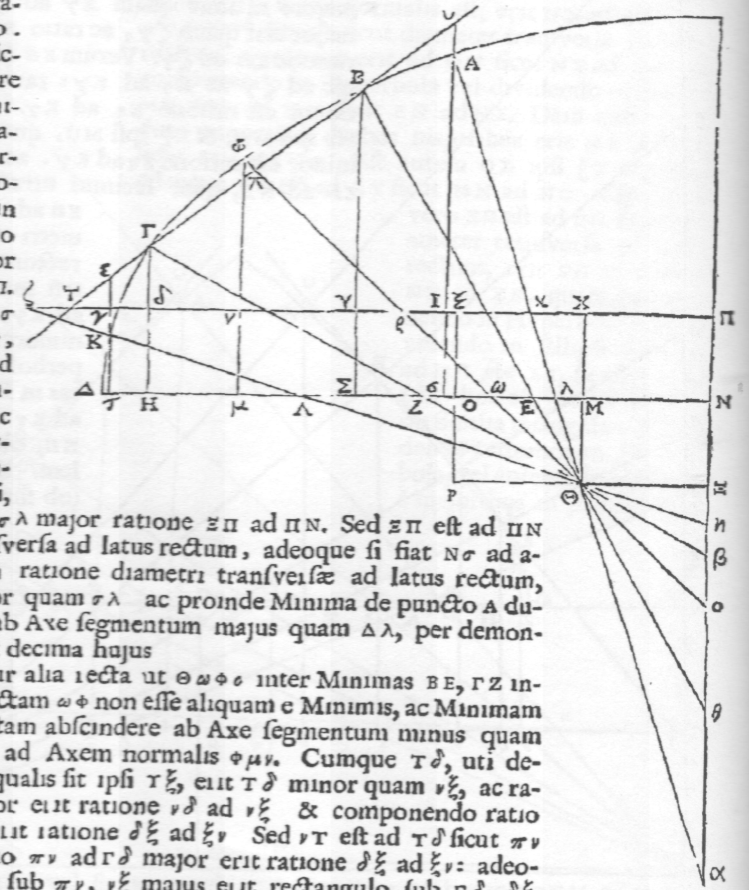
Hinc constabit Υξ majorem esse quam Τγ, ratio itaque γΥ ad Τγ major erit ratione ejusdem ad Υξ, ac componendo erit ratio ΥΤ ad Υγ major ratione γξ ad ξτ. Sed ΥΤ eſt ad Τγ ſicut ΒΥ ad εγ; ratio igitur ΒΥ ad εγ major eſt ratione γξ ad ξΤ: atque adeo rectangulum ſub ΒΤ, Τξ majus erit rectangulo ſub εγ, γξ, ac multo majus rectangulo Κγξ. Rectangulum autem ſub ΒΥ, Τξ æquale eſt rectangulo ΝΠξ, quare rectangulum ΝΠξ majus eſt rectangulo Κγξ Rectangulum vero ΝΠξ æquale eſt rectangulo ΧΘΡ, quia ΝΟ eſt ad ΟΜ ſicut ΘΧ ad ΧΜ, ergo rectangulum ΧΘΡ majus eſt rectangulo Κγξ. Continetur autem rectangulum ΧΘΡ ſub ipſis ΘΧ, Χξ; quapropter rectangulum ſub ΘΧ, Χξ majus erit contento ſub Κγ, γξ, ac ratio ΘΧ ad Κγ major ratione γξ ad ξΧ. Sed ΘΧ eſt ad Κγ ſicut Χζ ad ζγ, unde ratio Χζ ad ζγ major erit ratione γξ ad ξΧ, & componendo Χγ erit ad ζγ in majore ratione quam Χγ ad ξΧ· unde recta ξΧ major erit quam ζγ, ac ratio ΞΘ ad ξΧ minor erit ratione ΞΘ ad ζγ. Verum ΞΘ (ob ſimilia triangula) eſt ad ζγ ut Ξη ad Κγ: ratio itaque ΞΘ ad Χξ minor eſt ratione Ξη ad Κγ. ΘΞ autem æqualis eſt ipſi ΜΝ, & Χξ ipſi ΜΟ, quare ratio ΜΝ ad ΜΟ minor eſt ratione Ξη ad Κγ. ac ΜΝ eſt ad ΜΟ ſicut ΞΝ ad ΝΠ, quia fecimus utramque ΝΟ ad ΟΜ & ΞΠ ad ΠΝ in ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum Ratio igitur ΞΝ ad ΝΠ minor eſt ratione Ξη ad Κγ; & auferendo duas minores à majoribus in Hyperbola, vel componendo eas in Ellipſi, fiet ratio Νη ad Κτ major ratione ΞΝ ad ΝΠ, ob ΝΠ ipſi γτ æqualem. Atqui Νη eſt ad Κτ (ob ſimilia triangula) ſicut



ΝΛ ad Λτ; adeoque ratio ΝΛ ad Λτ major eſt ratione ΞΝ *ad* ΝΠ: *ac dividendo in Hyperbola vel componendo in Ellipſi ratio* Ντ *ad* τΛ *major erit ratione* ΞΠ ad ΠΝ, hoc eſt ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum. Jam ſi faciamus Ντ ad rectam aliam ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum; erit hæc alia major quam Λτ, adeoque recta Minima de puncto Κ ducenda (per 9^{am}, 10^{am} & 25^{am} hujus) abſcindet ſegmentum Axis Vertici Δ adjacens, quod majus erit quam ΔΛ

Porro ſi ducatur recta alia ad modum ipſius ΘλΑα: dico rectam Αλ non eſſe Minimam, Minimamque per punctum Α ductam abſcindere ab Axe ſegmentum majus quam Δλ. Demittatur enim ad Axem normalis Ασ, quæ producatur ad υ & Ι. Jam quoniam Τδ æqualis eſt ipſi Τξ, erit Τδ major quam ξΙ, ac ratio ipſius δΙ ad Ιξ major ratione ejuſdem ad Τδ; *ac componendo vel dividendo ratio* δξ *ad* ξΙ *major erit ratione* ΙΤ *ad* Τδ. Sed ΙΤ eſt ad Τδ ſicut Ιυ ad Γδ, adeoque ratio δξ ad ξΙ major

major est ratione Ιυ ad Γδ, ac multo major ratione ΙΑ ad Γδ, & rectangulum sub Γδ, δξ majus erit contento sub ΑΙ, Ιξ. Rectangulum vero sub Γδ, δξ æquale est rectangulo ΠΝΟ, quare rectangulum ΠΝΟ majus est rectangulo ΑΙξ. Rectangulum autem ΠΝΟ æquale est rectangulo ΧΘΡ, quia ΝΟ est ad ΟΜ, hoc est Πξ ad ξΧ, sicut ΞΠ ad ΠΝ sive Ρξ ad ξΟ: rectangulum igitur ΧΘΡ majus est rectangulo ΑΙξ. Sed rectangulum ΧΘΡ fit sub ΧΘ, Χξ, quare ΘΧξ majus est rectangulo ΑΙξ, ac ratio ΘΧ ad ΑΙ major erit ratione Ιξ ad ξΧ Sed ΟΧ est ad ΑΙ sicut Χκ ad κΙ; ratio igitur Χκ ad κΙ major est ratione Ιξ ad ξΧ; ac componendo ratio ΙΧ ad Χκ minor erit ratione ΙΧ ad Ιξ· recta igitur Χκ major est quam Ιξ, & applicatâ utrinque communi ξκ, erit Χξ major quam Ικ, unde ratio ΞΘ ad Χξ minor erit ratione ΞΘ ad Ικ Sed ΞΘ est ad Ικ sicut Ξα ad ΑΙ, quare ratio Ξα ad ΑΙ major est ratione ΞΘ ad Χξ. Verum ΞΟ æqualis est ipsi ΝΜ, ac Χξ ipsi ΜΟ; quare ratio Ξα ad ΑΙ major est ratione ΝΜ ad ΜΟ. & ΝΜ est ad ΜΟ sicut ΞΝ ad ΝΠ, quare auferendo duas minores à duabus majoribus in Hyperbola, vel componendo easdem in Ellipsi, erit ratio αΝ ad Ασ major ratione ΞΝ ad ΝΠ. Sed αΝ est ad Ασ sicut Νλ ad λσ, quare ratio Νλ ad λσ major est ratione ΞΝ ad ΝΠ. ac dividendo in Hyperbola vel componendo in Ellipsi, erit ratio Νσ ad σλ major ratione ΞΠ ad ΠΝ. Sed ΞΠ est ad ΠΝ ut diameter transversa ad latus rectum, adeoque si fiat Νσ ad aliam quandam in ratione diametri transversæ ad latus rectum, erit hæc alia major quam σλ ac proinde Minima de puncto Α ducenda abscindet ab Axe segmentum majus quam Δλ, per demonstrata in nona & decima hujus



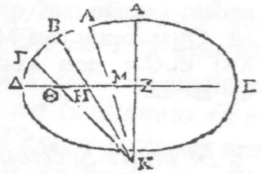
Quod si ducatur alia recta ut Θωφϕ inter Minimas ΒΕ, ΓΖ intermedia. dico rectam ωφ non esse aliquam e Minimis, ac Minimam de puncto φ ductam abscindere ab Axe segmentum minus quam Δω. Demittatur ad Axem normalis φμν. Cumque Τδ, uti demonstravimus, æqualis sit ipsi Τξ, erit Τδ minor quam νξ, ac ratio νδ ad δΤ major erit ratione νδ ad νξ & componendo ratio νΤ ad Τδ major erit ratione δξ ad ξν Sed νΤ est ad Τδ sicut πν ad Γδ, quare ratio πν ad Γδ major erit ratione δξ ad ξν: adeoque rectangulum sub πν, νξ majus erit rectangulo sub Γδ, δξ. At φν major est quam πν, ac proinde rectangulum φνξ multo majus erit quam rectangulum Γδξ. Est autem rectangulum Γδξ (per jam demonstrata) æquale rectangulo ΝΠξ, quod quidem æquale est rectangulo ΧΘΡ· quare rectangulum sub φν, νξ majus est rectangulo ΧΘΡ Sed rectangulum ΧΘΡ fit sub ΘΧ, Χξ. quare rectangulum φνξ majus est rectangulo ΟΧξ, ac ratio φν ad ΘΧ major est ratione Χξ ad ξν. Est autem φν ad ΘΧ sicut νρ ad ρΧ, quare ratio νρ ad ρΧ major est ratione Χξ ad ξν, ac componendo ratio νΧ ad Χξ major est ratione νΧ ad νρ unde constat Χξ minorem esse quam νρ, ac rationem ΞΟ ad Χξ majorem esse ratione ΞΘ ad νρ. Sed (ob similia triangula) ΞΘ est ad νρ sicut Ξο ad φν. ratio igitur ΞΘ ad Χξ major est ratione Ξο ad φν. Cum autem ΞΘ ipsi ΜΝ, ac Χξ ipsi ΜΟ æqualis est,

est, ratio ΜΝ ad ΜΟ major erit ratione ΞΟ ad Φν. cumque ΜΝ est ad ΜΟ sicut ΞΝ ad ΝΠ, erit ratio ΞΝ ad ΝΠ major ratione ΞΟ ad Φν. Auferendo igitur duas minores à duabus majoribus in Hyperbola, vel componendo easdem in Ellipsi, erit ratio ΞΝ ad ΝΠ major ratione ΟΝ ad Φμ. Sed (ob similia triangula) ΟΝ est ad Φμ sicut Νω ad ωμ, quare ratio ΞΝ ad ΝΠ major est ratione Νω ad ωμ. ac dividendo in Hyperbola vel componendo in Ellipsi, erit ratio ΞΠ ad ΠΝ major ratione Νμ ad μω. Verum ΞΠ est ad ΠΝ sicut diameter transversa ad latus rectum, adeoque ratio illa major erit ratione Νμ ad μω. Propterea si faciamus Νμ ad rectam aliam in ratione diametri transversæ ad latus rectum, minor erit illa quam μω, atque adeo Minima de puncto Φ ducenda (per 9^{am} & 10^{am} hujus) auferet ab Axe segmentum minus quam Δω unde (per 25^{am} hujus) manifestum est Φω non esse aliquam e Minimis Q. E. D.

PROPOSITIO XLVI

S*I duæ* Minimæ *in alterutro Ellipseos quadrante ducantur ad Axem majorem, quarum altera transeat per centrum; ac producantur ad occursum non duci poterit à puncto occursûs ad eundem Sectionis quadrantem alia recta, è qua abscindat Axis* Minimam *Ac si rectæ quælibet egrediantur ex illo puncto ad Sectionem inter* Minimam *& Verticem Axis majoris* Minimæ *ab earundem extremitatibus ad Axem ductæ abscindent Axis segmenta Vertici contermina, majora quidem quam segmenta ejusdem ab ipsis egressis abscissa*; minora vero si ductæ fuerint ad alteras partes sive versus Axem minorem

Sit Ellipseos ΑΒΓ Axis major ΔΕ centrumque Ζ, & e centro erigatur normalis ad Axem ΖΑ, quæ producatur ad occursum Minimæ alicujus ΒΗ etiam productæ in puncto Κ ac ducatur alia recta ut ΚΘΓ Dico quod ΘΓ non est Minima, quodque Minima è puncto Γ ad ΔΕ ducenda abscindet ab Axe portionem majorem quam ΔΘ.



Si enim recta ΓΘ foret Minima, producta occurreret Minimæ ΒΗ intra angulum ΔΖΚ, juxta 40^{mam} hujus. sed occurrit ei recta ΓΘ non nisi in puncto Κ; adeoque ΘΓ non est Minima. Quod vero Minima e puncto Γ ad Axem ΔΕ educta abscindat ex eodem segmentum majus quam ΔΘ, hinc patet, quia (per 40^{mam} hujus) recta Minima per punctum Γ ducta occurrit ipsi ΒΗ, quæ etiam Minima est, intra angulum ΗΖΚ unde manifestum est illam abscindere majorem Axis portionem quam ΔΘ.

At si ducatur alia ut ΛΜΚ ad alteram partem Minimæ ΒΗ, consimili argumento patebit ΛΜ non esse Minimam, Minimamque de puncto Λ ad Axem ducendam (per eandem 40^{mam}) abscindere minorem Axis portionem quam ΔΜ quia occurret Minimæ ΒΗ intra angulum ΗΖΚ. Q. E. D

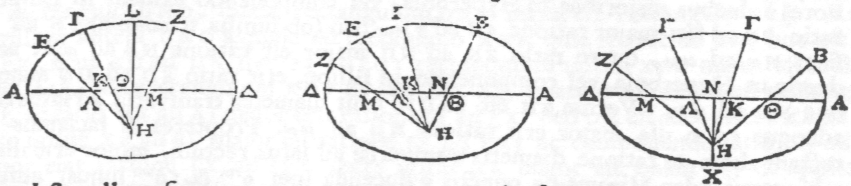
PROPOSITIO XLVII.

Q*Uatuor rectæ* Minimæ *in eadem Semi-ellipsi ductæ, & ab Axe majore abscissæ, non conveniunt in eodem puncto*

Sit ΑΒΓΔ Ellipsis cujus Axis major ΑΔ. Dico quod si ducantur ab Axe ΑΔ ad Sectionem ΑΒΓΔ quatuor Minimæ, non convenient inter se in eodem puncto Nam, si fieri possit, ducantur rectæ ΚΓ, ΛΕ, ΜΖ, ΟΒ quæ conveniant inter se in puncto Η. Jam vel aliqua ex his rectis normalis erit super Axem ΑΔ, vel nulla earum normalis erit Sit autem imprimis una earum ΒΟ Axi normalis

Quoniam vero recta ΒΘ Minima est, atque etiam Axi ΑΔ normalis, erit (per 15^{am} hujus) punctum Ο centrum Sectionis occurrat autem eidem recta Minima

ΚΓ in puncto Η, & ducatur recta alia ΦΗ, ac (per 46^{um} hujus) pars ejus ΕΛ non erit Minima. Posuimus autem Minimam esse; quod absurdum.

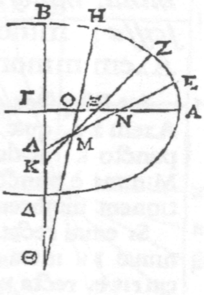


Quod si nulla ipsarum ΒΘ, ΚΓ, ΛΕ, ΜΖ normalis fuerit super Axem ΑΔ, sit centrum Ν inter rectas ΒΘ, ΓΚ positum, ac oportebit ducere tres Minimas ad eundem Sectionis Semiaxem, quæ concurrant in eodem puncto Hoc autem fieri nequit, ut (ex 45ta hujus) manifestum est. Si vero Centrum Ν intermedium fuerit inter ΚΓ, ΛΕ, axi ΑΔ normaliter erigatur recta ΝΧ, & (per 40^{im} hujus) concursus ipsarum ΕΛ, ΖΜ erit intra angulum ΔΝΧ. Pariterque constabit Minimas ΒΘ, ΓΚ concursuras intra angulum ΑΝΧ. Debent autem omnes concurrere in puncto Η: hoc autem absurdum. Quatuor igitur Minimæ ad Sectionem ductæ non conveniunt in eodem puncto. Q E D

PROPOSITIO XLVIII.

Tres Maximæ ad eundem Ellipseos quadrantem ductæ non concurrunt in eodem puncto

Sit Ellipseos ΑΒΓ Axis major ΑΓ, minor ΒΔ. Dico tres Maximas, ad eundem Ellipseos quadrantem ΑΒΓ ductas, non occurrere inter se in eodem puncto Nam si fieri possit ducantur rectæ ΕΛ, ΖΚ, ΗΘ concurrentes in eodem puncto Μ. Quoniam vero ΕΛ, ΖΚ, ΗΘ Maximæ sunt, erunt etiam ΕΝ, ΖΞ, ΟΗ (per 23^{am} hujus) tres Minimæ Tres igitur Minimæ ad eundem Sectionis quadrantem ductæ concurrere debent in eodem puncto: id quod (per 45^{am} & 46^{am} hujus) absurdum est Quapropter tres Maximæ ad eundem quadrantem Sectionis ΑΒΓ ductæ non concurrere possunt in eodem puncto Μ. Q. E. D.

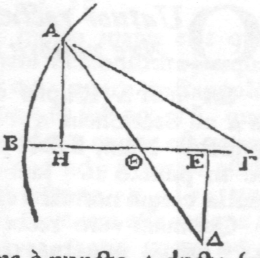


PROPOSITIO XLIX.

In omni Sectione Conicâ. si erigatur super Axem normalis, ad punctum ejus quodlibet, modo non longius distet à Vertice Sectionis quam dimidio Lateris recti; ac capiatur punctum aliquod in eadem normali, unde egrediatur recta quævis ad alterum Sectionis latus, inter normalem & Verticem Sectionis Recta Minima *ab extremitate ejusdem ducta non erit pars ejus; sed abscindet ex Axe portionem Vertici Sectionis adjacentem, majorem eâ quæ à rectâ de sumpto puncto eductâ abscinditur*

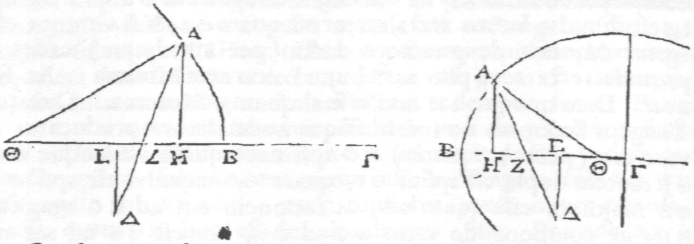
Imprimis Parabolæ ΑΒ sit Axis ΒΓ, normalis vero sit ΕΔ, ita ut ΕΒ, segmentum Axis à normali illâ abscissum, non majus sit dimidio lateris recti, & in ipsa ΔΕ capiatur punctum quoddam Δ extra Axem, & agatur recta ΔΘΑ. Dico rectam ΑΘ non esse Minimam.

Demittatur enim normalis ΑΗ. Cumque ΕΒ non est major semilatere recto, erit ΕΗ minor semilatere recto. Fiat ΗΓ æqualis semilateri recto, ac ducatur ΑΓ: erit itaque ΑΓ (per 8^{vam} hujus) Minima, adeoque ΑΘ (per 24^{am} hujus) non erit Minima Abscindit enim recta Minima à puncto Α ducta segmentum Axis majus quam ΒΕ. cadit igitur remotius à Sectionis Vertice quam ΑΘ.



PROPOSITIO L

SIT jam AB Hyperbola vel Ellipsis, cujus axis BΓ centrumque Γ; & Axi normalis erigatur ΔE, ita ut BE non major sit semilatere recto & è capto in recta ΔE puncto quovis Δ educatur recta aliqua, ut ΔZA. Dico rectam AZ non esse Minimam, Minimamque de puncto A egressam abscindere portionem Axis majorem quam BZ. Oportet autem in Ellipsi normalem cadere in Axem majorem, eductamque occurrere eidem dimidio Axis in quem cadit normalis.



Demittatur enim normalis AH. Cumque BE non est major semilatere recto, ac ΓB semidiameter est transversa, erit ratio diametri transversæ ad latus rectum non majori ratione ΓB ad BE. Sed ratio ΓH ad HE major est ratione ΓB ad BE: ratio igitur ΓH ad HE major est ratione diametri transversæ ad latus rectum. Fiat ideo HΓ ad HΘ ut diameter transversa ad latus rectum, ac recta AΘ (per 9^{m} & 10^{mam} hujus) erit Minima. Recta itaque AZ (per 25^{m} hujus) non est Minima, *sed Minima de puncto* A *ducta abscindit portionem axis majorem quam* BZ. Q. E. D.

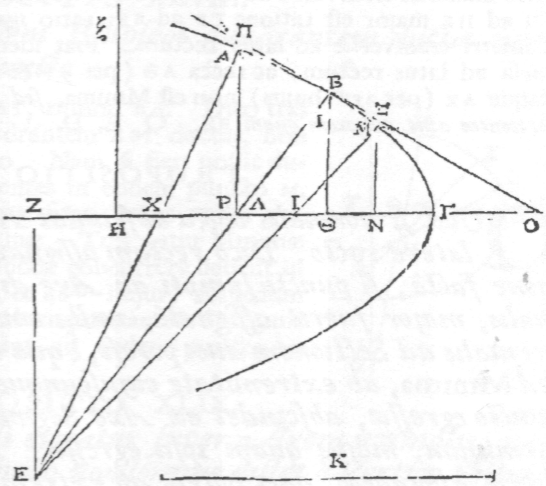
PROPOSITIO LI.

Quod si normalis ducta abscindat Axis segmentum majus semilatere recto. Dico rectam assignari posse, cum quâ comparatione factâ, si puncti sumpti ab Axe distantia, sive longitudo normalis, major fuerit assignatâ, nulla omnino recta ab extremitate normalis ad Sectionem duci potest, è qua abscindat Axis Minimam: *sed* Minima, *ab extremitate cujuscunque rectæ ad Sectionem ex eo puncto egressæ, abscindet ex Axe Segmentum Vertici sectionis conterminum, majus quam ipsa egressa. Quod si normalis æqualis fuerit assignatæ, duci potest ab extremitate ejus una sola recta è qua abscindatur* Minima. Minimæ *vero, ab extremitatibus cæterarum omnium ab eodem puncto egredientium ductæ, abscindent segmenta Axis vertici adjacentia, majora quam ab ipsis egressis abscissa. Si vero normalis minor fuerit assignatâ, duæ tantum rectæ duci possunt è quibus abscindat Axis* Minimas. Minimæque *ab extremitatibus egredientium ductæ, dictasque duas* Minimas *interjacentes, abscindent ab Axe portiones Vertici Sectionis conterminas, minores quam quæ ab ipsis egressis abscinduntur: Quæ vero ducuntur ab extremitatibus cæterarum egredientium, inter duas illas* Minimas *non intermediarum, abscindent portiones Axis majores quam ab ipsis egressis abscissæ. Oportet autem in Ellipsi normalem in Axem majorem demitti.*

Imprimis autem sit ABΓ Parabola, cujus Axis ΓZ, super quem erigatur LZ normaliter & sit segmentum Axis ΓZ majus dimidio lateris recti. Dico quod si capiantur puncta in ipsa EZ, à quibus egrediantur ad Sectionem rectæ, ea omnia necessariò eventura, prout declaravimus in hac Propositione.

Quoniam

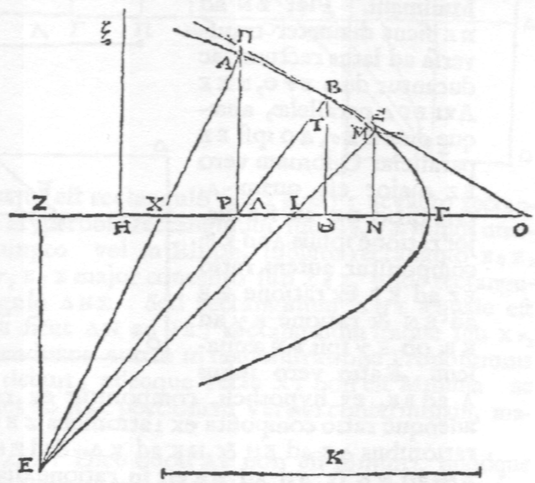
Quoniam ΓZ major est dimidio lateris recti, sit ZH dimidium lateris recti, ac dividatur ΓH in puncto Θ, ita ut segmentum ΘH duplum sit ipsius ΘΓ, & erigatur normalis ΘB, ac fiat recta quædam K ad ΘB sicut ΘH ad HZ: sumptoque in recta EZ puncto E, sit primum ZE major quam K. Dico quod non duci possit è puncto E recta aliqua e qua abscindat Axis Minimam: exempli gratia, ductâ rectâ EΛB, dico BΛ non esse Minimam. Etenim K est ad ΘB ut ΘH ad HZ, & K minor est quam ZE, quare ratio ZE ad BΘ, hoc est ZΛ ad ΛΘ major est ratione ΘH ad HZ, ac componendo ratio ZΘ ad ΘΛ major erit ratione ΘZ ad ZH: adeoque ZH, quæ æqualis est dimidio lateris recti, major est quam ΘΛ, & ΘΛ minor est dimidio lateris recti. Igitur Minima de puncto B ducta (per 8^{vam} hujus) cadet propius puncto Z, ac proinde recta BΛ (per 24^{am} hujus) non erit Minima. Ac si ducatur alia recta ut EIM. Dico quoque IM non esse aliquam e Minimis. Ducatur enim per punctum B Tangens Sectionis BO, demissaque normalis MN producatur ad Ξ. Ob Parabolam vero erit (per 35^{am} primi) ΓO ipsi ΓΘ æqualis, adeoque ΘO dupla erit ipsius ΘΓ. ΘH autem dupla est ipsius ΘΓ, quare ΘO æqualis est ipsi ΘH. Hinc consequitur ΘH majorem esse quam ON, ac rationem ΘN ad NO majorem esse ratione NO ad ΘH: ac componendo ratio ΘO ad ON, hoc est BΘ ad NΞ major erit ratione NH ad HΘ, adeoque rectangulum sub BΘ, ΘH majus erit contento sub ΞN, NH, ac multo majus contento sub MN, NH. Rectangulum vero sub EZ, ZH majus est contento sub BO, ΘH, quoniam (per nuper demonstrata) ratio FZ ad BO major est ratione OH ad ZH, adeoque rectangulum sub EZ, ZH majus est contento sub MN, NH, unde ratio ZE ad MN, sive ZI ad IN, major est ratione NH ad HZ. ac componendo ratio ZN ad NI major ratione NZ ad ZH. Quocirca HZ major erit quam NI. Sed HZ æqualis est dimidio lateris recti, quare NI minor est dimidio lateris recti, ac proinde MI non est aliqua e Minimis, sed Minima de puncto M ad Axem ducta (per 8^{vam} & 24^{am} hujus) propior erit puncto Z.



Jam si ducatur alia ut AXE, dico quod AX non est Minima. Demittatur enim normalis AP quæ producatur ad Π. Quoniam vero ΘO æqualis est ipsi ΘH, ut nuper diximus, consequitur rectam ΘO majorem esse quam PH; adeoque ratio PΘ ad ΘO minor erit ratione PΘ ad PH, ac componendo ratio PO ad ΘO minor erit ratione ΘH ad PH. Sed PO est ad ΘO ut PΠ ad BΘ, quare ratio PΠ ad BΘ minor est ratione ΘH ad PH. unde rectangulum sub PΠ, PH minus erit rectangulo sub BΘ, ΘH, ac rectangulum sub AP, PH multo minus erit contento sub BΘ, ΘH. Demonstravimus autem rectangulum sub EZ, ZH majus esse contento sub BΘ, OH, quapropter rectangulum sub AP, PH minus erit rectangulo sub EZ, ZH. Ratio igitur AP ad EZ minor est ratione ZH ad HP. Sed AP est ad EZ ut PX ad XZ, adeoque ratio PX ad XZ minor est ratione ZH ad HP, ac invertendo ratio ZX ad XP major erit ratione PH ad HZ: dein componendo ratio ZP ad PX major erit ratione PZ ad ZH. Hinc liquet ZH majorem esse quam PX. Sed ZH æqualis est dimidio lateris recti, ergo PX minor est dimidio lateris recti. Recta igitur AX non est aliqua è Minimis, sed Minima de puncto A ducta (per 8^{vam} & 24^{am} hujus) propius puncto Z cadet. Igitur si normalis EZ major fuerit quam recta K, nulla duci potest ad Sectionem recta per punctum E è qua abscindat Axis Minimam.

Quod si ZE æqualis fuerit ipsi K. Dico quod non nisi una sola recta, è qua abscindatur Minima, de puncto E ad sectionem duci poterit: quodque Minimæ ab extremitatibus reliquarum ex eodem E egredientium ductæ remotiores sunt à Vertice Γ

Quoniam enim ΘH est ad HZ sicut K, vel eidem æqualis EZ, ad BΘ, & ZΛ est ad ΛΘ in eadem ratione, erit ΘH ad HZ ut ZΛ ad ΛΘ, *ac componendo ΘZ erit ad HZ ut ΘZ ad* ΛΘ quare ZH æqualis est ipsi ΛΘ. Sed ZH æqualis est dimidio lateris recti, adeoque & ΛΘ dimidium est lateris recti, ac proinde AB (per 8^{vam} hujus) Minima est. Dico quoque quod non duci poterit per punctum E alia recta è qua abscindat Axis Minimam. Ducatur enim recta aliqua alia ut ME, & normalis sit MN ad Z producenda, sitque BO Tangens Sectionis & juxta modum præmonstratum constabit, rectangulum sub BΘ, ΘH quod æquale est rectangulo sub EZ, ZH majus esse rectangulo sub MN, NH. Hinc iisdem argumentis, quibus præcedentia, probabitur ZH æqualem dimidio lateris recti majorem esse quam IN. adeoque IM non esse Minimam, sed Minimam de puncto M ductam cadere versus Z Pariter si ducatur alia ut AXE, AX non erit Minima, sed Minima de puncto A ducta cadet quoque versus Z Demissâ enim normali AP & ad Π productâ, eodem modo demonstrabitur rectangulum sub AP, PH minus esse rectangulo sub BΘ, ΘH, quod æquale est rectangulo sub EZ, ZH. unde constabit, juxta nuper ostensa, rectam XP minorem esse quam HZ, hoc est dimidio lateris recti Proinde AX non erit aliqua e Minimis, sed Minima per A ducta cadet versus Z.



Sit jam FZ minor quam K Dico duci posse de puncto E ad sectionem ABΓ duas rectas è quibus abscindat Axis Minimas. ac, si ab extremitatibus rectarum inter has duas intermediarum ducantur Minimæ, abscindere illas segmenta Axis minora quam quæ abscindunt ipsæ rectæ ex E eductæ. Cæteræ vero rectæ exteriores auferent segmenta Axis majora segmentis quæ à Minimis ab earundem extremitatibus ad axem eductis abscinduntur

Nam cum ZE minor est quam K, erit ratio EZ ad ΘB minor ratione ipsius K ad ΘB, hoc est ratione ΘH ad HZ, adeoque rectangulum sub EZ, HZ minus erit rectangulo sub BΘ, ΘH. Fiat igitur rectangulum sub TΘ, ΘH æquale rectangulo sub EZ, ZH, & sit ξH normalis ipsi ZH & per datum punctum T, Asymptotis ξH, HΓ (per quartam secundi) describatur Hyperbola, quæ quidem sectio occurrat Parabolæ in punctis A, M. Jungantur rectæ EA, EM, ac demittantur normales AP, MN. Quoniam vero sectio ATM Hyperbola est, cujus Asymptoti ξH, HΓ, ac ducuntur à sectione illa ad angulos rectos AP, MN, TΘ, propterea (per 12^{am} II^{di}) rectangulum sub MN, NH æquale erit contento sub TΘ, ΘH, quod quidem æquale est rectangulo sub ΓZ, ZH. Hinc MN erit ad EZ sicut ZH ad HN Sed MN est ad EZ sicut NI ad IZ, quare ZH est ad HN sicut NI ad IZ, ac componendo ZN est ad HZ sicut NZ ad NI · unde NI ipsi ZH sive dimidio lateris recti æqualis est. Recta igitur MI (per 8^{vam} hujus) Minima est Pari modo constabit ipsam AX Minimam esse. Sunt itaque MI, AX duæ Minimæ concurrentes inter se in puncto E. Ac si educatur ex E ad Sectionem recta quævis alia inter AE & EM, & ab ejusdem extremitate ducatur Minima, cadet ea propius Vertici Sectionis. Quod si educatur recta aliqua extra ipsas AE, EM, cadet Minima ejus versus partes à Vertice Sectionis remotiores Hæc autem omnia demonstrantur ex 44^{ta} hujus libri. Q. E. D.

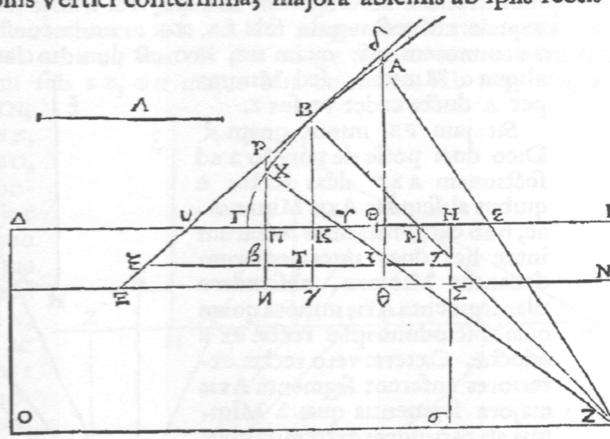
PROPO-

PROPOSITIO LII.

SI vero Sectio proposita ΑΒΓ fuerit Hyperbola vel Ellipsis, Axe ΕΓΔ centroque Δ descripta, ac sit ΖΕ Axi normalis, ita ut ΕΓ major sit dimidio lateris recti. Dico eadem omnia in his consequi, quæ in Parabola.

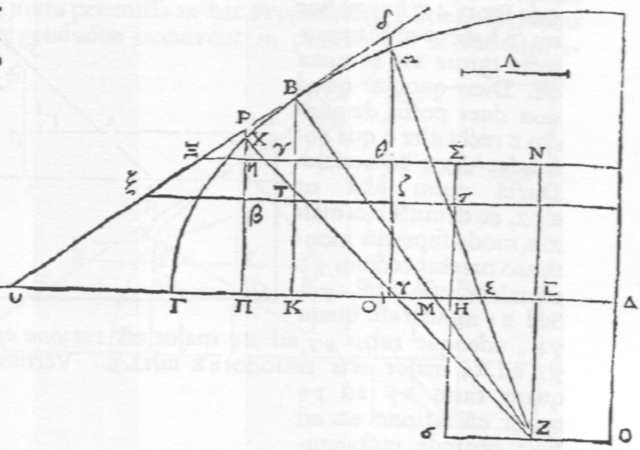
Quoniam ΔΓ semidiameter transversa est, ac ΓΕ major est semisse lateris recti, erit ratio ΔΓ ad ΓΕ minor ratione diametri transversæ ad latus rectum: atque adeo, si faciamus ΔΗ ad ΗΕ sicut diameter transversa ad latus rectum, cadet punctum Η inter Γ & Ε. Inter ipsas ΔΗ, ΔΓ inveniantur duæ mediæ proportionales ut ΔΘ, ΔΚ; & Axi normalis sit ΚΒ: ac fiat recta quædam Λ ad ipsam ΚΒ in ratione composita ex ratione ΔΕ ad ΕΗ & ratione ΗΚ ad ΚΔ.

Primum autem sit ΕΖ major quam Λ. Dico impossibile esse ducere, de puncto Ζ ad Sectionem, rectam aliquam è qua abscindat Axis Minimam, sed Minimas, ab extremitatibus quarumcunque rectarum de Ζ ad sectionem egredientium, abscindere Axis segmenta, sectionis Vertici contermina, majora abscissis ab ipsis rectis de Ζ eductis. Jungatur enim ΖΜΒ: Dico ΒΜ non esse Minimam. Fiat ΖΝ ad ΝΕ sicut diameter transversa ad latus rectum, ac ducantur duæ ΖσΟ, ΝΣΞ Axi ΕΓΔ parallelæ, aliæque duæ ΗΣσ, ΔΟ ipsi ΕΖ parallelæ. Quoniam vero ΕΖ major est quam Λ, erit ratio ΕΖ ad ΚΒ major ratione ipsius Λ ad ΚΒ: componitur autem ratio ΕΖ ad ΚΒ ex ratione ΖΕ ad ΕΝ & ratione Κγ ad ΚΒ, ob Κγ ipsi ΕΝ æqualem. Ratio vero ipsius Λ ad ΒΚ, ex hypothesi, componitur ex ratione ΔΕ ad ΕΗ & ratione ΗΚ ad ΚΔ: adeoque ratio composita ex rationibus ΖΕ ad ΕΝ & Κγ ad ΚΒ major est composita ex rationibus ΔΕ ad ΕΗ & ΗΚ ad ΚΔ. Sed ΖΕ est ad ΕΝ sicut ΔΕ ad ΕΗ, quia utraque ΖΝ ad ΝΕ & ΔΗ ad ΗΕ est in ratione diametri transversæ ad latus rectum. Reliqua igitur ratio Κγ ad ΚΒ major est ratione ΗΚ ad ΚΔ: unde rectangulum sub Κγ, ΚΔ majus erit contento sub ΚΒ, ΗΚ. Rectangulum autem sub Κγ, ΚΔ est rectangulum ΔΚγ, adeoque rectangulum sub ΚΒ, ΗΚ minus est rectangulo ΔΚγ. Fiat rectangulum γΚΗ, nempe quod continetur sub Κγ, γΣ, commune: ac rectangulum sub Βγ, γΣ minus erit rectangulo ΔΗΣ. Est vero rectangulum ΔΣ æquale rectangulo σΝ, quia ΖΝ est ad ΝΕ sicut ΔΗ ad ΗΕ, quare rectangulum sub Βγ, γΣ minus est rectangulo σΝ. Probavimus autem, in demonstrandâ 45^{ta} hujus, quod eidem æquale esse debuit, adeoque ΒΜ non est aliqua è Minimis, sed Minima de puncto Β educta abscindet portionem Axis Vertici sectionis adjacentem majorem quam ΓΜ.



Jam vero si ducatur recta alia ut ΖΤΧ, extra punctum Β: dico ipsam quoque ΧΤ non esse Minimam, sed Minimam de puncto Χ ductam abscindere Axis segmentum Vertici sectionis conterminum, majus quam ΓΤ. Ducatur sectionis Tangens ad punctum Β ut ΒΞ, & Axi normalis ΧΠ, quæ producatur ad Ρ. Quoniam vero ratio Κγ ad ΚΒ major est ratione ΗΚ ad ΚΔ, fiat ΤΚ ad ΚΒ sicut ΗΚ ad ΚΔ, ac per Τ Axi ΕΓΔ parallela ducatur ξΤτ. Cum autem recta ΒυξΞ tangit sectionem, ac ΒΚ Axi ΔυΚ normalis est, erit rectangulum sub ΚΔ, Δυ (per 37^{mam} primi) æquale quadrato ex ΔΓ. Est igitur ΚΔ ad ΔΓ sicut ΔΓ ad Δυ, ac tertia proportionalis ipsis ΚΔ, ΔΓ est Δυ, uti tertia proportionalis ipsis ΗΔ, ΔΘ est recta ΚΔ: ac ΚΔ est ad ΔΓ sicut ΔΗ ad ΔΘ, *quia ΔΚ, ΔΘ sunt duæ mediæ proportionales inter ipsas ΔΗ, ΔΓ*, quapropter ΗΔ est ad ΔΚ sicut ΔΚ ad Δυ: & auferendo duas minores à duabus majoribus

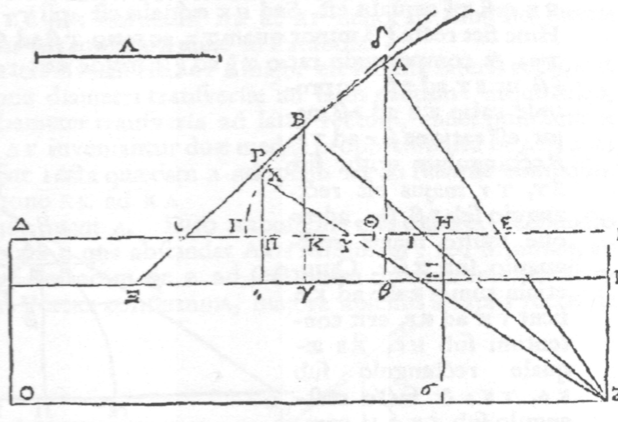
joribus, reliqua HK ad reliquam Kυ erit ut HΔ ad ΔK. Sed HΔ est ad ΔK sicut TB ad BK, quia fecimus TK ad KB sicut HK ad KΔ; adeoque HK erit ad Kυ sicut TB ad BK. Verum TB est ad BK sicut Tξ ad Kυ, quare HK est ad Kυ ut Tξ ad Kυ, unde HK ipsi Tξ æqualis est. Sed HK æqualis est ipsi Tτ, adeoque Tτ æqualis est ipsi Tξ. Hinc fiet recta ξβ minor quam Tτ, ac ratio Tβ ad βξ major erit ratione ipsius Tβ ad Tτ; & componendo ratio Tξ ad ξβ major erit ratione βτ ad Tτ. Sed Tξ est ad ξβ ut BT ad Pβ, ac proinde ratio TB ad Pβ major est ratione βτ ad Tτ. Rectangulum igitur sub BT, Tτ majus est rectangulo sub Pβ, βτ, adeoque multo majus rectangulo sub Xβτ. Quinetiam cum HK est ad KΔ sicut TK ad KB, erit contentum sub HK, KB æquale rectangulo sub KΔ, TK; & facto rectangulo sub TK, KH communi, erit rectangulum sub BT, Tτ æquale rectangulo ΔHτ. Est autem rectangulum sub BT, Tτ majus contento sub Xβ, βτ; adeoque rectangulum ΔHτ majus est rectangulo sub Xβ, βτ: ac facto rectangulo sub βη, ηΣ communi, erit in Hyperbola rectangulum sub Xη, ηΣ minus utroque rectangulo ΔHτ, βηΣ simul sumpto vel in Ellipsi, sublato rectangulo BηΣ, erit differentia rectangulorum ΔHτ, BηΣ major contento sub XηΣ, unde rectangulum XηΣ multo minus erit rectangulo ΔHΣ Sed rectangulum ΔHΣ æquale est rectangulo ΣNZ, quia ZN est ad NE sicut ΔH ad HE; rectangulum itaque sub Xη, ηΣ minus est rectangulo ΣNZ. Ostendimus autem in demonstratione Propositionis 45^æ hujus, quod eidem æquale esse debuit; adeoque recta XT non est Minima ac Minima de puncto X ducta abscindet ab Axe portionem Vertici conterminam, majorem quam ΓT

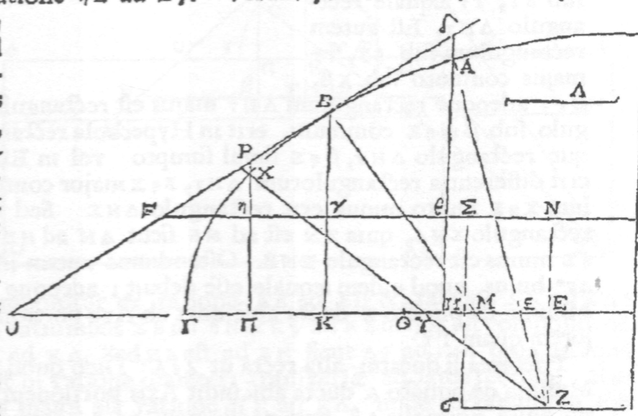


Præterea si ducatur alia recta ut ZεA: Dico quod Aε non est Minima, quodque Minima de puncto A ducta abscindit Axis portionem majorem quam Γε. Demittatur enim normalis Aθ, quæ producatur ad δ. Demonstravimus autem rectam Tτ æqualem esse ipsi Tξ, adeoque τζ minorem esse quam Tξ, unde ratio Tζ ad ζτ major erit ratione ζT ad Tξ; ac componendo ratio Tτ ad τζ major ratione ζξ ad Tξ. Sed ζξ est ad Tξ sicut δζ ad BT, adeoque ratio Tτ ad τζ major est ratione δζ ad BT ac rectangulum sub BT, Tτ majus erit rectangulo sub δζ, ζτ. Unde argumento nuper usurpato simili, demonstrabitur rectangulum sub Aθ, θΣ minus esse rectangulo ΣNZ, ac propterea (per 45^am hujus) constabit Aε non esse Minimam, sed Minimam de puncto A eductam abscindere portionem Axis majorem quam Γε.

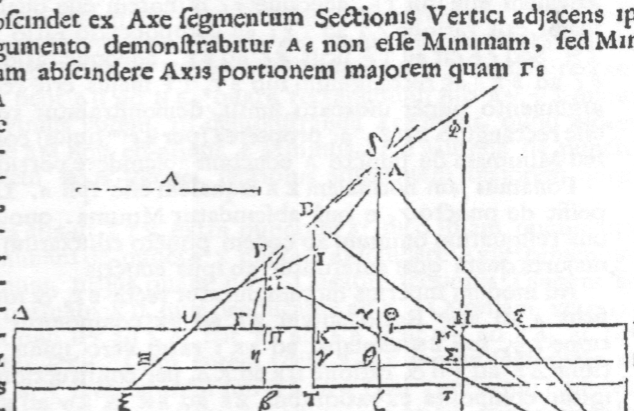
Ponamus jam normalem ZE æqualem esse ipsi Λ. Dico quod una sola recta duci possit de puncto Z, e quâ abscindatur Minima. quodque Minimæ ab extremitatibus reliquarum omnium ab eodem puncto eductarum abscindunt ex Axe portiones majores quam quæ auferuntur ab ipsis eductis

Ad modum superius dictum ducatur recta BK, & jungatur ZB & erit ZE ad BK sicut Λ ad BK. Ratio autem ZB ad BK componitur ex ratione ZE ad EN & ratione Kγ, ipsi EN æqualis, ad BK: ratio vero ipsius Λ ad BK componitur ex ratione ΔE ad EH & ratione HK ad KΔ, per constructionem superius traditam. Ratio igitur composita ex rationibus ZE ad EN & Kγ ad KB æqualis est compositæ ex rationibus ΔE ad EH & HK ad KΔ. Sed ratio ZE ad EN æqualis est rationi ΔE ad EH, adeoque ratio Kγ ad KB eadem est ac ratio HK ad KΔ, ac proinde rectangulum sub Kγ, KΔ æquale erit contento sub KB, HK: & rectangulo sub Kγ, KH communi mum facto, erit in Hyperbola summa vel in Ellipsi differentia, hoc est rectangulum sub Bγ, γΣ, æqualis rectangulo ΔHΣ, quod rectangulo ZNΣ etiam æquale est, quare rectangulum ZNΣ æquale est rectangulo sub Bγ, γΣ. Probavimus autem (in demonstratione Prop. 45^{ae} hujus) hoc ita se habere in Minimis recta igitur BM Minima est. Dico quoque quod non duci possit de puncto Z recta alia è qua abscindat Axis Minimam Ductâ enim aliâ ut ZΥX, ac demissa normali XΠ, modo superius monstrato patebit rectam γΣ æqualem esse ipsi γΞ. Sed Ξη minor est quam γΣ, adeoque ratio ηγ ad Ξη major est ratione ejusdem ad γΣ, ac componendo γΞ ad Ξη major erit ratione ηΣ ad Σγ. Verum γΞ est ad Ξη sicut Bγ ad Pη; quare ratio Bγ ad Pη major est ratione ηΣ ad Σγ: proinde rectangulum sub Bγ, γΣ majus erit rectangulo sub Pη, ηΣ, ac multo majus rectangulo sub Xη, ηΣ. Demonstratum autem est rectangulum sub Bγ, γΣ æquale esse rectangulo ΣNZ, propterea rectangulum sub Xη, ηΣ minus erit rectangulo ΣNZ. At (per 45^{am} hujus) eidem æquale esse debuit, adeoque recta XΥ non est Minima. Minima vero de puncto X educta abscindet ex Axe segmentum Sectionis Vertici adjacens ipsâ ΓΥ majus. Ac pari argumento demonstrabitur Aε non esse Minimam, sed Minimam de puncto A ductam abscindere Axis portionem majorem quam Γε

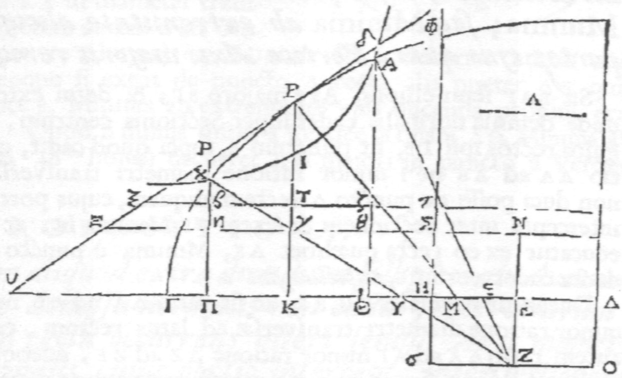




Denique sit ZE ipsâ Λ minor. Dico duci posse de puncto Z duas tantum rectas è quibus abscindat Axis Minimas, Minimas autem de punctis in Sectione, inter illas duas eductas intermedias, abscindere portiones Axis *minores* abscissis à rectis è puncto Z egredientibus: Minimas vero, ab extremitatibus cæterarum extra istas duas e puncto Z egressarum, abscindere segmenta Axis Vertici adjacentia, majora quam quæ ex eodem abscindunt ipsæ egressæ.

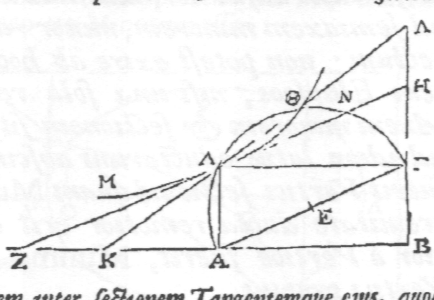


Quoniam enim ratio ZE ad BK minor est ratione Λ ad BK, per superius demonstrata, constabit rationem Kγ ad KB minorem esse ratione HK ad KΔ, ac rectangulum ΣNZ minus esse rectangulo sub Bγ, γΣ. Fiat igitur rectangulum sub γI, γΣ æquale rectangulo ΣNZ, & per punctum I describatur Hyperbola Asymptotis ΞΣ, ΣHΦ, quod quidem fiet juxta 4^{am} secundi. Sit Hyperbola illa AIX, demissisque normalibus Aθ, Xη, erit utrumque rectangulum sub Aθ, θΣ ac sub Xη, ηΣ æquale rectangulo ΣNZ; ac proinde (juxta præmissa in hac Propositione) constabit rectas Aε, XΥ esse duas Minimas, quæ productæ occurrent in puncto Z. Demonstravimus autem (in 45^{ta} hujus) quod, si hoc ita se habeat, ac si ducatur recta aliqua alia e puncto Z, non abscindi possit ex eadem Minima Nam si è puncto Z egrediatur recta inter ipsas Aε, XΥ, & ab extremitate ejus ducatur ad Axem Minima, abscindet illa Axis portionem Vertici conterminam, minorem segmento à rectâ per Z ductâ abscisso. Contrarium autem fiet in Minimis ab extremitatibus reliquarum eductarum, quæ abscindent Axis portiones majores Quæ vero dicta sunt de Axe Ellipseos intelligi debent de Axe majori. Q E D.



INTERPRETIS ARABIS SCHOLION.

In sequentibus hujus libri requiritur inventio duarum mediarum proportionalium inter duas rectas datas, idemque postulat Apollonius *in hac Propositione Modus autem effectionis hic est. Sint duæ rectæ* AB, BΓ; *ac si æquales fuerint, manifestum est terminos interpositos etiam iisdem æquales esse. Quod si inæquales fuerint, sit* AB *major; & conveniant ad angulos rectos in* B, *ac producantur indefinité. Completo autem parallelogrammo* ABΓΔ, *jungatur* AΓ *quæ bisecetur in puncto* E; *ac centro* E *describatur Circulus* ABΓΔ *parallelogrammo circumscriptus, & per* Δ *agatur recta* ZΔH *ipsi* AΓ *parallela, quæ divisa erit bifariam in puncto* Δ, *ob æquales* AE, EΓ. *intersecabit vero arcum* ΔΓ, *quia* ΓΔ *major est quam* ΔA: *occurrat autem ei in puncto* N *Describatur (juxta quartam* II^{di}*) per punctum* Δ *Asymptotis*, BZ, BH *Hyperbola* ΘΔM, *& erit* ZH *(per nonam* II^{di}*) Tangens ejusdem, ob æquales* ZΔ, ΔH *Ac manifestum est Sectionem illam Circulo occurrere inter puncta* Δ, N, *aliter enim caderet segmentum arcus* ΔN *& subtensa ejusdem inter sectionem Tangentemque ejus, quod (per* 32^{dam} *primi) fieri non potest. Neque erunt intersectiones cum circulo* ABΓΔ *(per* 33^{im} II^{di}*) plures quam duæ Occurrat igitur in punctis* Δ, Θ; *ac juncta* ΔΘ *producatur utrinque ad* K, Λ, *ipsæque* ΔK, ΘΛ *(per* 8^{vam} II^{di}*) æquales erunt Dico quod inter rectas* AB, BΓ *duæ proportionales sunt* AΓ, KA.



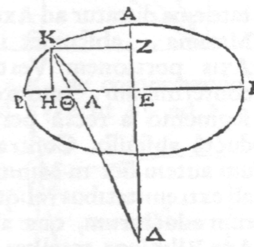
Quoniam ΔK *ipsi* ΘΛ *æqualis est, erit rectangulum sub* ΔΛ, ΛΘ, *hoc est (ob Circulum) rectangulum sub* BΛ, AΓ, *æquale rectangulo sub* ΘK, KΔ, *sive sub* BK, KA, *adeoque* AΓ *erit ad* KA *sicut* BK *ad* BΛ. *Sed* BK *est ad* BA *sicut* ΔI, *hoc est* AB *ad* AΓ, *atque etiam in eâdem est ratione* KA *ad* AΔ, hoc est BΓ. *Hoc autem fit ob similitudinem triangulorum* ABK, AΓΔ, ΔAK. *Proinde* AB *erit ad* AΓ *sicut* AΓ *ad* KA *ac* KA *ad* BΓ, quare AΓ, KA sunt duæ mediæ proportionales inter AB, BΓ. Q. E. D.

PROPO-

PROPOSITIO LIII

SI capiatur, extra dimidium Ellipsis ab Axe majore divisæ, punctum quoddam, à quo normalis ad Axem demissa cadat super centrum Sectionis; ac fuerit ratio hujus normalis semiaxe minore auctæ ad semiaxem minorem, non minor ratione diametri transversæ ad latus rectum Ex hoc puncto egredi nequit recta aliqua ad Sectionem, cujus portio intercepta inter Axem & Sectionem sit Minima; *sed* Minima *ab extremitate alicujus ductæ cadet ad eas partes ejus quæ à Vertice Axis majoris remotiores sunt.*

Sit BAΓ semi-ellipsis, Axe majore BΓ; & detur extra illam punctum quodvis Δ, unde demissa normalis cadat super Sectionis centrum, hoc est, ducta ΔE ad angulos rectos ipsi ΓB, sit punctum E, super quod cadit, centrum Sectionis: & sit ratio ΔA ad AE non minor ratione diametri transversæ ad latus rectum. Dico non duci posse de puncto Δ rectam aliquam, cujus portio intercepta inter Sectionem & Axem BΓ Minima sit, ac si educatur ex eo recta quælibet ΔK, Minima è puncto K ducta cadet versus E, *respectu ipsius* ΔK.

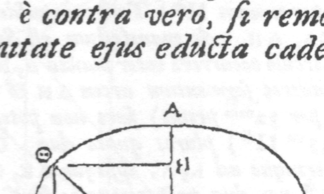


Ducantur normales KH, KZ, ac sit ratio ΔA ad AE non minor ratione diametri transversæ ad latus rectum, erit autem ratio ΔA ad AF minor ratione ΔZ ad ZF, adeoque ratio ΔZ ad ZE sive EH ad HO major erit ratione diametri transversæ ad latus rectum. Fiat itaque EH ad HΛ sicut diameter transversa ad latus rectum, ac recta KΛ (per decimam hujus) Minima erit, adeoque recta KO (per 25^{am} hujus) non est Minima: sed recta Minima per K ducta cadet propius centro E quam recta KΔ. Q. E. D

PROPOSITIO LIV.

SI capiatur punctum quodvis extra dimidium Ellipseos ab Axe majore divisæ, à quo demissa normalis super centrum cadat; ac sit ratio hujus normalis una cum semiaxe minore simul sumptæ ad semiaxem minorem, minor ratione diametri transversæ ad latus rectum· non potest exire ab hoc puncto, ad alterutrum Quadrantem Ellipseos, nisi una sola recta, cujus portio intercepta inter Axem majorem & sectionem sit Minima: *è nullâ vero reliquarum ad idem latus eductarum abscindi potest* Minima. *Sed si propior fuerit Vertici sectionis quam* Minima *illa,* Minima *ab ejusdem extremitate ducta remotior erit à Vertice; è contra vero, si remotior à Vertice fuerit,* Minima *ab extremitate ejus educta cadet Vertici propius.*

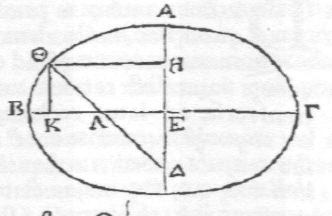
Sit BAΓ semi-ellipsis, Axe majore BΓ, & detur extra illam punctum aliquod Δ, à quo normalis cadat super centrum, ut ΔE cadens super centrum Sectionis E, ad angulos rectos Axi ΓB: sitque ratio ΔA ad AF minor ratione diametri transversæ ad latus rectum. Dico quod ad eundem sectionis quadrantem non nisi una recta duci possit de puncto Δ, cujus portio inter Curvam BAΓ & Axem BΓ intercepta sit aliqua è Minimis.



In reliquis vero de puncto Δ eductis, si ab extremitatibus earum quæ Vertici B propiores sunt, agantur Mi-

nima,

nimæ, cadent eæ remotiores à puncto Β. Minimæ vero, ab extremitatibus rectarum ex Δ exeuntium punctoque Β remotiorum, propiores erunt Vertici quam ipsæ eductæ.

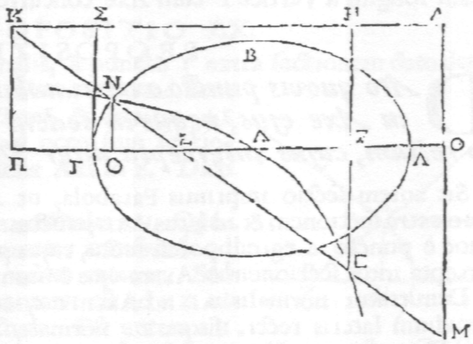


Quoniam enim ratio ΔΑ ad ΑΕ minor est ratione diametri transversæ ad latus rectum, fiat ΔΗ ad ΗΕ ut diameter transversa ad latus rectum, & ducantur ΗΘ, ΘΚ ipsis ΒΓ, ΑΕ parallelæ; & jungatur ΘΛΔ. Dico ΘΛ, partem interceptam ipsius ΘΔ, esse Minimam. Nam ΔΗ est ad ΗΕ sicut ΕΚ ad ΚΛ, quare ΕΚ est ad ΚΛ ut diameter transversa ad latus rectum, punctum autem Ε est centrum sectionis quare (per 11^m hujus) ΘΛ Minima est. Occurrit autem Axi minori in puncto Δ, adeoque si exeat de puncto Δ recta alia præter ΔΘ, quæ remotior fuerit eâ à Vertice Β, Minima ab extremitate ejus ducenda propior erit puncto Β quam recta ipsa Quod si minus distet à Vertice Β quam ΔΘ, Minima ab ejus extremitate ducta (per 46^m hujus) occurret Axi majori in puncto à Vertice Β remotiori

PROPOSITIO LV.

Si sumatur punctum aliquod extra dimidium Ellipseos ab Axe majore bisectæ, à quo demissa normalis non cadat super centrum Duci poterit ab eodem recta occurrens alteri semissi Axis majoris in quem non cadit normalis, cujus portio intercepta inter sectionem & Axem majorem sit Minima; *nec ab eodem puncto duci potest alia recta occurrens eidem reliquo semiaxi, è qua abscindatur* Minima

Sit ΑΒΓ Ellipsis, Axe majore ΑΓ ac centro Δ, & sit datum punctum Ε, è quo demittatur Axi ΑΓ normalis ΕΖ, nec sit centrum in puncto Ζ Dico quod duci possit ex Ε recta occurrens ipsi ΔΓ, ita ut inter sectionem ΑΒΓ & semiaxem ΔΓ intercipiatur Minima. Fiat ΕΗ ad ΗΖ sicut diameter transversa ad latus rectum, atque etiam in eadem ratione fiat ΔΟ ad ΘΖ. ac per Η ipsi ΑΓ parallela ducatur ΚΛ, uti per Θ ipsi ΕΖ parallela recta ΜΘΛ dein per datum punctum Ε, Asymptotis ΜΛ, ΛΚ (per 4^{am} secundi) describatur Hyperbola. Sit Hyperbola illa ΕΝ, occurrens Ellipsi in puncto Ν, jungaturque ΝΞΕ. Dico ΝΞ Minimam esse.



Producatur ΕΝ ad occursum utriusque Asymptoti ΜΛ, ΛΚ, conveniat autem iis in punctis Μ, Κ, ac demittantur ad ΑΓ normales ΝΟ, ΚΠ: & erit (per 8^{vam} secundi) ΜΕ ipsi ΚΝ æqualis, adeoque ΖΘ ipsi ΠΟ æqualis est. Est autem ΕΗ ad ΗΖ sicut diameter transversa ad latus rectum, & ut ΕΗ est ad ΗΖ ita ΖΠ ad ΠΞ, adeoque ΖΠ est ad ΠΞ ut diameter transversa ad latus rectum Sed ΔΘ est ad ΘΖ in eadem ratione diametri transversæ ad latus rectum, quare ΖΠ est ad ΠΞ ut ΔΟ ad ΘΖ. Recta vero ΘΖ ipsi ΠΟ æqualis est, uti ΔΘ utrisque ΠΟ, ΔΖ simul sumptis. Auferendo igitur ab ipsa ΖΠ utrisque ΖΔ, ΠΟ, & ab ipsa ΠΞ rectam ΠΟ, erit residuum ΔΟ ad residuum ΟΞ ut totum ΠΖ ad totum ΠΞ, hoc est ut diameter transversa ad latus rectum. Verum ΝΟ normalis est, & Δ est sectionis centrum, ergo (per 10^m hujus) recta ΝΞ Minima est Q. E. D.

PROPO-

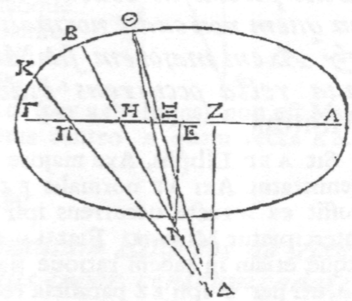
PROPOSITIO LVI

Diximus autem in præcedente Propositione Hyperbolam Ellipsi concursuram: quod hoc modo demonstratur. Ducatur ΓΣ tangens Ellipsin in Vertice Γ. Quoniam vero ΔΘ est ad ΘZ sicut diameter transversa ad latus rectum, ac ratio ΔΘ ad ΘZ minor est ratione ΓΘ ad ΘZ, erit ratio ΓΘ ad ΘZ major ratione diametri transversæ ad latus rectum, nempe ratione HE ad HZ. Cum autem ratio ΓΘ ad ΘZ *major est ratione* HE *ad* HZ, *rectangulum igitur sub* ΓΘ, HZ majus erit rectangulo sub ΘZ, HE. Sed HZ æqualis est ipsi ΓΣ, uti ZΘ ipsi HΛ: quapropter rectangulum sub ΘΓ, ΓΣ majus erit contento sub EH, HΛ. Sectio igitur Hyperbolica per punctum E transiens, ac Asymptotis MΛ, ΛΣ descripta (per conversam duodecimi secundi) occurret rectæ ΓΣ. Est autem ΓΣ Tangens Sectionis ABΓ, ac proinde Hyperbola illa occurret semi-ellipsi ABΓ. Q. E. D.

PROPOSITIO LVII

Hoc demonstrato, jam restat probandum nullam aliam rectam eidem Sectionis quadranti occurrentem, ab eodem puncto duci posse, è qua abscindat Axis Minimam.

Sit ABΓ Ellipsis, Axe majore ΓΛ & centro Γ, & à dato infra Axem puncto Δ demittatur normalis ΔZ, ac ex eodem Δ ducatur recta ΔHB, e qua abscissa sit Minima HB. Ducantur etiam ΔK, ΔΘ, *occurrentes Axi in punctis* Π, Ξ. *Dico neque* ΘΞ, *nec* KΠ *Minimas esse.*

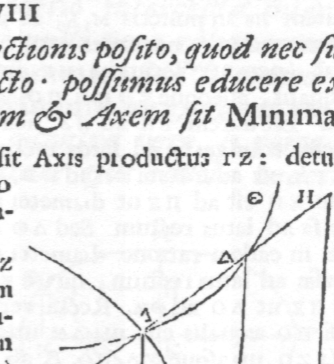


E centro Sectionis Γ ducatur ΓN ipsi ΔZ parallela, occurrens rectæ BHΔ in puncto N, ac jungatur NΘ. Quoniam vero BH Minima est, occurrens Minimæ per centrum Sectionis ductæ in puncto N, intra angulum HZΔ, portio rectæ NΘ inter Axem & Sectionem intercepta non erit Minima, sed Minima de puncto Θ ducta (per 46^{am} hujus) propior erit Vertici Γ, ac proinde recta ΘΞ *a Vertice adhuc remotior* (per 25^{am} hujus) non erit Minima. Pari modo demonstrabitur rectam KΠ non esse Minimam, Minimamque per punctum K ductam longius à Vertice Γ cum Axe concurrere quam KΠ. Q. E. D.

PROPOSITIO LVIII

Dato quovis puncto extra ambitum Sectionis posito, quod nec sit in Axe ejus, neque in eodem producto: possumus educere ex eo rectam, cujus intercepta inter Sectionem & Axem sit Minima.

Sit autem sectio imprimis Parabola, ut AB, & sit Axis productus ΓZ: detur vero extra sectionem & ad latus Axis punctum Δ. Dico quod è puncto Δ egredi potest recta, cujus portio intercepta inter sectionem & Axem ejus Minima sit.



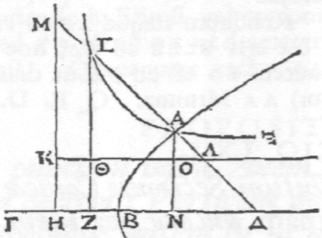
Demittatur normalis ΔE ad Axem ΓZ, & fiat ΓZ dimidium lateris recti, sitque ZΠ normalis in ipsam ZΓ. Dein per punctum Δ, Asymptotis ΠZ, ZΓ describatur Hyperbola ΛΔΘ, quæ occurrat Parabolæ in puncto Λ. Jungatur ΔΛ, ac producatur ad Π, Γ: *Dico* ΛΓ *Minimam esse.*

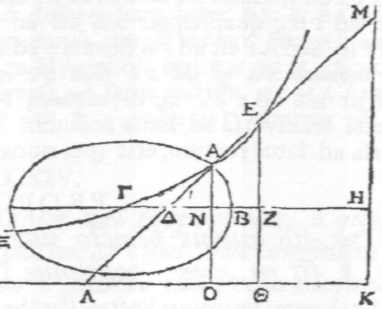
Ex Λ demittatur ad ΓZ cathetus ΛK, cumque ΔΠ (per 8^{vam} secundi) ipsi ΛΓ æqualis est, erit quoque recta ZE ipsi KΓ æqualis. Sed ZE dimidium est lateris recti, adeoque & KΓ æqualis est dimidio lateris recti. Est autem KΛ normalis, ac proinde (per 8^{vam} hujus) recta ΛΓ Minima est. Q. E. D.

PROPOSITIO LIX.

SI vero sectio fuerit Hyperbola vel Ellipsis ut ΑΒ, Axe ΒΔ & centro Γ; ac detur punctum quoddam Ε extra sectionem, nec in Axe, neque in Axe producto; à quo demittatur ad Axem ΒΔ normalis ΕΖ. Imprimis autem non cadat super Centrum. Dico quod possumus ducere per punctum Ε rectam, è quâ portio abscissa inter Curvam ΑΒ & Axem ΒΔ sit Minima.

Fiat ΓΗ ad ΗΖ sicut diameter transversa ad latus rectum, & ducatur ad angulos rectos normalis ΗΜ. Fiat etiam ΕΘ ad ΘΖ in eadem ratione diametri transversæ ad latus rectum, & agatur recta ΚΛ per punctum Θ ipsi ΖΔ parallela; & per punctum datum Ε describatur (per 4^am^ secundi) Hyperbola Asymptotis ΜΚ, ΚΛ; quæ quidem occurret sectioni ΑΒ. Sit autem Hyperbola illa ΕΑΞ conveniens sectioni ΑΒ in puncto Α, & jungatur ΕΑ producaturque utrinque ad Μ, Λ, *occurrat autem Axi ad Δ. Dico rectam ΑΔ Minimam esse.* Demittatur normalis ΑΝ.

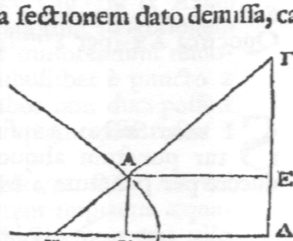




Quoniam vero recta ΜΕ (per 8^vam^ secundi) æqualis est ipsi ΑΛ, erit quoque ΚΘ ipsi ΟΛ, ac proinde ΟΚ ipsi ΘΛ æqualis, cui etiam æqualis est ΝΗ. Est autem ΖΔ ad ΟΛ sive ΝΗ, ut ΖΕ ad ΕΘ, hoc est ut ΖΓ ad ΓΗ. *quare alternando* ΖΔ *est ad* ΖΓ *sicut* ΝΗ *ad* ΗΓ. Ac componendo in Hyperbola, vel dividendo in Ellipsi erit ΔΓ ad ΓΝ sicut ΖΓ ad ΓΗ, quare per conversionem rationis in Ellipsi, vel dividendo in Hyperbola, ΓΝ erit ad ΝΔ, sicut ΓΗ ad ΗΖ, hoc est, ut diameter transversa ad latus rectum. Verum ΑΝ normalis est in Axem ΒΔ, adeoque (per 9^am^ & 10^am^ hujus) ΑΔ Minima est. Pari modo demonstrabitur, si cadat normalis ΖΕ ad alteram partem verticis Β.

PROPOSITIO LX.

QUod si in Hyperbola normalis, à puncto Γ extra sectionem dato demissa, cadat super centrum, ut ΓΔ. Fiat ΓΕ ad ΕΔ sicut diameter transversa ad latus rectum, & ducatur ΑΕ Axi ΔΖ parallela, & producatur ad occursum sectionis in Α. Jungatur ΓΑ conveniens Axi in Ζ. Dico ΑΖ Minimam esse.



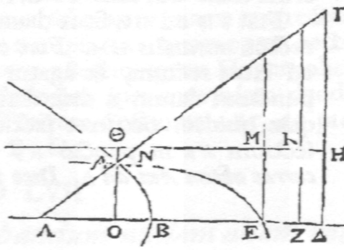
De puncto Α ducatur ad Axem normalis ΑΗ. Quoniam vero ΓΕ est ad ΕΔ sicut diameter transversa ad latus rectum, ΓΑ ad ΑΖ erit in eadem ratione. Sed ut ΓΑ ad ΑΖ ita ΔΗ ad ΗΖ: quare ΔΗ est ad ΗΖ ut diameter transversa ad latus rectum. Est autem ΑΗ normalis in Axem; adeoque (per nonam hujus) ΑΖ Minima est. Q. E. D.

PROPOSITIO LXI.

AT vero si normalis de puncto dato demissa cadat ab altera parte, sive ultra centrum Hyperbolæ ad modum rectæ ΓΔ. Sit Ε centrum Hyperbolæ, ac fiat ΕΖ ad ΖΔ sicut diameter transversa ad latus rectum, ac in eadem ratione fiat ΓΗ ad ΗΔ; & ducatur ΗΘ Axi ΔΒ parallela, ut & ΖΚ, ΙΜ ipsi ΓΔ parallelæ. Per punctum Γ Asymptotis ΘΚ, ΚΖ describatur Hyperbola quæ occurret sectioni ΑΒ. Occurrat

Occurrat autem in puncto Λ, ac sit Hyperbola illa ΛΕ. Jungatur ΓΛ quæ producatur ad Δ. Dico ΛΔ Minimam esse.

Demittatur recta ΘΛΟ normalis super Axem ΔΟ. Jam fecimus ΓΗ ad ΗΔ sicut ΕΖ ad ΖΔ, adeoque rectangulum sub ΓΗ & ΗΚ (hoc est ΖΔ) æquale est rectangulo sub ΚΜ (sive ΕΖ) & ΜΕ, hoc est ΗΔ Sed rectangulum sub ΚΜ, ΜΕ (per 12^{am} secundi) æquale est rectangulo sub ΚΘ, ΘΛ, quia sunt inter Asymptotos; quare rectangulum sub ΓΗ, ΗΚ æquale est rectangulo sub ΚΘ, ΘΛ, unde ΛΘ est ad ΓΗ sicut ΗΚ ad ΚΘ Verum ΛΘ est ad ΓΗ sicut ΘΝ ad ΝΗ, ac propterea ΗΚ est ad ΚΘ sicut ΘΝ ad ΝΗ, *ac componendo* ΗΘ *est ad* ΘΚ *sicut* ΘΗ *ad* ΗΝ, *adeoque* ΘΚ *æqualis est ipsi* ΗΝ Est autem ΘΚ ipsi ΖΟ æqualis, ac proinde ΖΟ, ΝΗ æquales sunt. Hinc ΛΔ est ad ΝΗ sicut eadem ΛΔ ad ΖΟ, quare ΛΔ est ad ΖΟ sicut ΛΓ ad ΓΝ, ac ΛΓ est ad ΓΝ sicut ΔΓ ad ΓΗ, quapropter ΛΔ est ad ΖΟ sicut ΔΓ ad ΓΗ Sed ΔΓ est ad ΓΗ sicut ΔΕ ad ΕΖ; *adeoque permutando* ΛΔ *est ad* ΔΕ *sicut* ΟΖ *ad* ΖΕ. Residuum itaque ΛΕ ad residuum ΕΟ est ut ΔΕ ad ΕΖ. ac dividendo, ΕΟ ad ΟΛ erit ut ΕΖ ad ΖΔ, hoc est ut diameter transversa ad latus rectum. Cum autem ΕΟ est ad ΟΛ ut diameter transversa ad latus rectum, erit (per nonam hujus) ΛΔ Minima. Q. E. D.

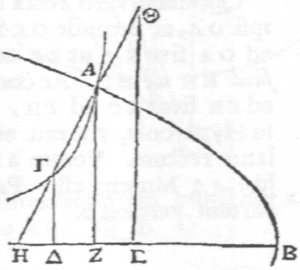


PROPOSITIO LXII.

Dato quovis puncto intra ambitum Sectionis Conicæ quod non sit in Axe · possumus Minimam *ducere per idem punctum.*

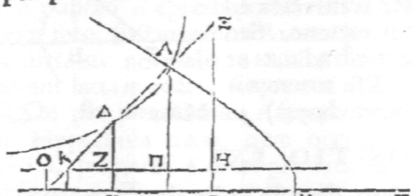
Sit autem imprimis Sectio Parabola, ut ΑΒ, Axe ΒΗ: ac detur punctum Γ intra ambitum Sectionis Dico possibile esse ducere per punctum Γ rectam Minimam.

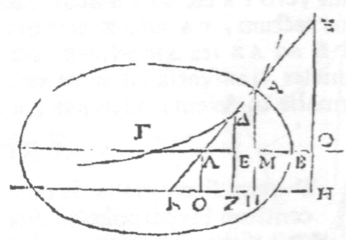
De puncto Γ demittatur ad Axem normalis ΓΔ, & sit ΔΓ dimidium lateris recti ipsi autem ΒΗ per Ε erigatur ad angulos rectos recta ΕΘ, & per punctum Γ Asymptotis ΘΕ, ΕΗ describatur Hyperbola ΑΓ, quæ quidem occurret Parabolæ occurrat autem in puncto Α, ac juncta recta ΑΓ producatur ad Η, Θ Dico rectam ΑΗ esse Minimam. Demittatur normalis ΑΖ: cumque ΓΗ (per 8^{vam} secundi) ipsi ΘΑ æqualis est, erit ΔΗ ipsi ΕΖ æqualis; *ac proinde* ΕΔ *ipsi* ΖΗ *æqualis.* Sed ΕΔ est dimidium lateris recti, adeoque & ΖΗ dimidium est lateris recti. Quocirca ΑΗ (per 8^{vam} hujus) Minima est Q. E D.



PROPOSITIO LXIII.

Si vero Sectio ΑΒ fuerit Hyperbola vel Ellipsis, Axe ΒΑ ac centro Γ: ac detur punctum aliquod Δ, in situ superius descripto. Dico quod possumus ducere per punctum Δ Minimam.

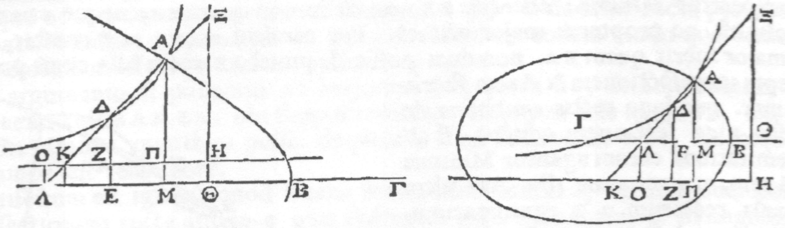




Demittatur enim normalis ΔΕ, ac fiat ΓΘ ad ΘΕ, ut & ΔΖ ad ΖΓ, sicut diameter transversa ad latus rectum, & per punctum Ζ ducatur ΗΚ Axi ΒΓ parallela,

 ipsi

ipsi vero ΔΕ parallela sit recta ΗΘΞ: Describatur per punctum Δ Asymptotis ΗΞ, ΗΚ, Hyperbola ΑΔ, quæ quidem occurret datæ Hyperbolæ vel Ellipsi. Sit autem punctum occursus Α, ac juncta ΑΔ producatur ad Λ, Ξ. Dico rectam ΑΛ Minimam esse.



Quoniam enim ΞΑ, ΔΚ (per 8vam secundi) æquales sunt, erunt etiam ΗΠ sive ΘΜ & ΚΖ æquales: est autem ΖΚ ad ΚΟ differentiam inter ΖΚ & ΕΛ, sicut ΔΖ ad ΖΕ; ac ΔΖ est ad ΖΕ sicut ΓΘ ad ΘΕ; quare ΘΜ est ad differentiam inter ΘΜ & ΕΛ ut ΓΘ ad ΘF; *adeoque per conversionem rationis ac permutando* ΜΘ *est ad* ΘΓ *sicut* ΛΕ *ad* ΕΓ, unde dividendo in Ellipsi vel componendo in Hyperbola erit ΓΜ ad ΜΛ sicut ΓΘ ad ΘΕ. Sed ΓΘ est ad ΘΕ ut diameter transversa ad latus rectum, ac ΜΛ Axi ΘΓ normalis est. Quapropter recta ΑΛ (per 9am & 10am hujus) Minima est. Q. E D

PROPOSITIO LXIV.

SI detur punctum infra Axem Parabolæ vel Hyperbolæ, à quo recta ad Sectionis Verticem ducta contineat cum Axe angulum acutum; impossibile autem sit ut ducatur è puncto illo recta aliqua cujus portio inter Axem & Sectionem intercepta sit Minima; *vel* in Ellipsi, *si una tantum fuerit recta, ex dato puncto exeuns ad partes Sectionis contrarias illis ad quas jacet datum punctum, è qua abscindat Axis* Minimam: *erit recta, quæ de puncto illo ad Verticem Sectionis ducitur,* Minima *omnium ad illam Sectionis partem ab eodem ducendarum, atque huic propior minor erit remotiore*

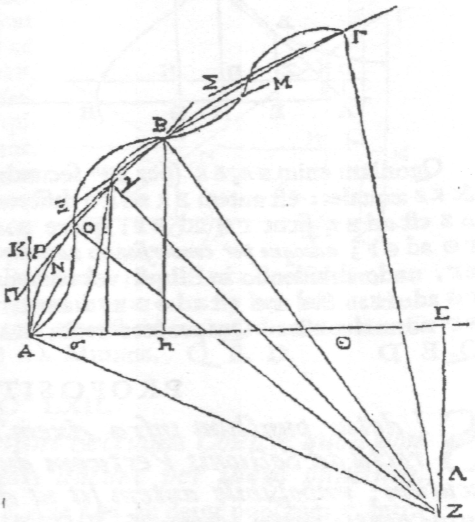
Sit autem imprimis sectio Parabola ut ΑΒΓ, Axe ΑΕ, sitque datum punctum Ζ infra Axem, ita ut angulus ΖΑΕ, qui continetur à rectâ per punctum illud ad Verticem sectionis ductâ & Axe ΑΕ, acutus fuerit Primum autem non sit possibile, ut ducatur ad sectionem recta aliqua cujus portio inter Curvam & Axem intercepta sit Minima. Dico quod Minima omnium, quæ duci possint ad sectionem ΑΓ de puncto Ζ, est ipsa ΑΖ, quodque eidem propiores ductæ minores sunt remotioribus Hoc autem manifestum erit ex eo quod, rectis quibuslibet è puncto Ζ eductis & ad sectionem continuatis, ab earundem extremitatibus non duci possint rectæ Minimæ, quæ non occurrant Axi remotius à Vertice Α quam ipsæ rectæ è puncto Ζ eductæ.

Demonstrabitur autem hoc modo. Demittatur normalis ΖΕ, ac recta ΑΕ vel erit æqualis semilateri recto, vel major eo vel minor Sit autem imprimis æqualis ei vel minor eo, ac cunctis rectis per Ζ ad sectionem ductis, non erit ulla cujus portio inter Sectionem & Axem intercepta Minima est, sed Minimæ, ab earundem in Sectione extremitatibus ad Axem ductæ, cadent versus partes ab Α remotiores quam rectæ quæ ex Ζ prodeunt, juxta 49am hujus

Si vero ΑΕ major fuerit semilatere recto, sit ΓΘ dimidium lateris recti, ac sit ΘΗ duplum ipsius ΑΗ, & ad punctum Η ipsi ΑΕ normalis sit ΗΒ. ac fiat ΕΛ ad ΗΒ sicut ΘΗ ad ΘΕ Erit autem ΖΕ vel æqualis ipsi ΕΛ, vel minor eâ, vel major. At non erit æqualis ipsi ΕΛ, quia (per 51am hujus) si ΖΕ fuerit ipsi ΕΛ æqualis, duci possit una recta de puncto Ζ è quâ absinderetur Minima. ΖΕ igitur non erit ipsi ΕΛ æqualis. Pari modi constabit ΕΖ minorem esse non posse quam recta ΕΛ. Nam

(per

(per eandem 51^{am} hujus) si E Z minor fuerit quam E A, duci possint duæ rectæ, quarum utriusque portio inter Sectionem & Axem intercepta sit Minima, contra Hypothesin Posuimus enim non duci posse de puncto Z aliquam rectam è quâ interciperetur Minima: adeoque Z E non est minor quam E A, neque etiam eidem æqualis est, ac propterea major erit eâ. Per eandem autem 51^{am} constat, quod si Z E major fuerit quam E A, non duci possit de puncto Z recta ulla cujus portio intercepta inter sectionem & Axem fuerit Minima. quodque rectis quibusvis de puncto Z ad sectionem eductis, si ab extremitatibus earum agantur Minimæ ad Axem, convenirent illæ Axi ultra occursûs rectarum e Z egredientium, sive remotius à Vertice A. Quapropter, sive A E æqualis fuerit dimidio lateris recti, sive minor eo, vel etiam si A E major fuerit dimidio lateris recti, simulq. Z E major quam E A, rectæ omnes de puncto Z ad sectionem prodeuntes occurrent Axi propius puncto Verticis A quam Minimæ ab extremitatibus earundem ductæ. Hoc posito: Dico rectam Z A Minimam esse rectarum de puncto Z ad sectionem prodeuntium, eidemque propiorem minorem esse remotiore



Ducantur rectæ Z B, Z Γ; ac primum si fieri possit, sit A Z ipsi B Z æqualis, & ad A tangat sectionem recta A K, & erit (per 17^{am} primi) A K Axi A E normalis, quia ordinatim ad Axem applicatis parallela est, unde angulus Z A K obtusus est. Ductâ autem ipsi A Z normali ut A N, cadet ea intra sectionem, quia (per 32^{dam} primi) impossibile est ducere inter Tangentem & Sectionem rectam aliquam. Ducatur etiam per punctum B Tangens Sectionis B Ξ, ac Minima de puncto B ad Axem ducta remotior erit à puncto A quam B Z, per nuper demonstrata, comprehendit autem Minima (per 27^{mam} hujus) cum Tangente B Ξ angulum rectum, adeoque angulus Z B Ξ acutus erit. Ac si centro Z radio B Z describatur arcus circuli, occurret ille Tangenti B Ξ, recta vero N A erit tota extra illum, quia angulus Z B Ξ acutus est, angulus vero Z A N rectus Quare si sit circulus ille curva B Ξ O A, necesse est ut occurrat sectioni, sitque punctum occursus O Jungatur O Z, ac tangat sectionem recta O Π cadens necessariò extra circulum. Cum autem Minima de puncto O ad Axem ducta remotior est à Vertice A quam recta O Z, ac Minima illa cum Tangente O Π (per 27^{am} hujus) comprehendit angulum rectum angulus igitur Z O Π acutus erit, ac proinde recta O Π circulo occurrere debet. Eadem autem cadit extra illum Hoc autem absurdum est, adeoque A Z non est ipsi B Z æqualis

Si vero fieri possit, sit A Z major quam Z B, ac centro Z radio Z B describatur circulus, qui quidem occurret ipsi A Z: portio autem aliqua Tangentis B Ξ erit intra circulum, per nuper demonstrata occurret igitur circulus sectioni necessariò, quia rectæ A Z occurrit. Sit circulus ille B γ σ, ac jungatur Z γ, ducaturque per punctum γ sectionis Tangens γ P, quæ quidem cadet intra circulum, quia Minima inter punctum γ & Axem intercepta cadit versus partes remotiores à puncto A quam recta γ Z: unde angulus Z γ P acutus est Recta itaque γ P occurrere debet circulo Manifestum autem est debere eandem totam extra reperiri quod absurdum. Recta igitur A Z non est major quam B Z, neque eidem æqualis, est ergo minor eâ

Dico quoque rectas ipsi A Z propiores remotioribus minores esse Producatur enim Tangens Ξ B ad Σ; cumque recta B Ξ tangit sectionem in puncto B, & angulus Z B Ξ acutus est, erit angulus deinceps, nempe Z B Σ, obtusus, & per B ipsi B Z normalis sit B M, quæ proinde cadet intra sectionem. De puncto Γ ducatur sectionis Tangens

Tangens ΓΣ; & ponatur imprimis, si fieri possit, recta BZ ipsi ΓZ æqualis. Centro Z radio ZΓ describatur circulus, qui quidem cadet extra rectam ΓΣ, quia angulus ZΓΣ acutus est, idem vero cadet intra rectam BM, quia BM ipsi BZ normalis est, atque adeo occurret circulus ille Sectioni. Jam si ducatur recta per punctum hujus intersectionis ad punctum Z, patebit absurditas eodem modo quo demonstravimus absurdam esse æqualitatem ipsarum AZ, ZB.

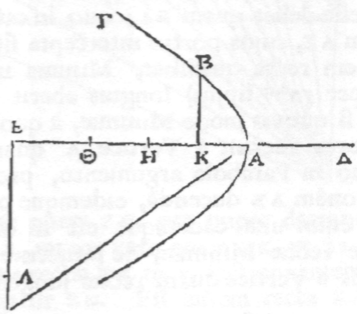
Pari argumento, si ponamus ZB majorem esse quam ZΓ, demonstrabitur absurditas, ac in rectis AZ, ZB, ubi supposuimus AZ majorem esse quam BZ. Est igitur AZ recta Minima quæ duci possit de puncto Z ad sectionem ABΓ, eidemque propior minor est remotiore.

Manifestum est igitur, quod si talis fuerit situs puncti Z, ut non duci possit ab eo ad sectionem recta aliqua e quæ abscindat Axis Minimam, & sit angulus ZAE acutus, foret recta AZ Minima omnium ad sectionem de puncto Z ductarum, ipsique AZ propior minor esset remotiore. Quinetiam si non fuerit nisi una sola recta de puncto Z educta, e quâ abscindatur Minima, ac fuerit angulus ZAE acutus, in sequente 67ma hujus demonstrabitur AZ minorem esse quâvis aliâ de puncto Z ad sectionem ductâ, eidemque propiorem minorem esse remotiore.

PROPOSITIO LXV

Quod si sectio fuerit Hyperbola, ut ABΓ, Axe ΔE & centro Δ descripta, & sumatur infra Axem punctum Z, ita ut juncta recta AZ contineat cum Axe angulum ZAE acutum; *ac nulla recta ab eodem Z duci possit cujus intercepta sit Minima.* Dico rectam AZ minorem esse quâvis aliâ ad sectionem de puncto Z ducendâ; ductisque rectis quibusvis ex eodem Z ad sectionem, propiorem ipsi AZ minorem esse remotiore ab eadem.

Hoc autem manifestum erit, si recta quælibet Minima, à quovis in sectione ABΓ puncto ad Axem AE ducta, cadat versus partes remotiores à Vertice A quam quæ jungit punctum illud & Z. Demittatur ad Axem de puncto Z normalis ZE, & AE vel æqualis erit dimidio lateris recti, vel erit major eo, vel minor. Si vero eidem vel æqualis fuerit vel minor eo, ac rectæ de puncto Z ad sectionem ABΓ egrediantur; quæ ab earundem extremitatibus ducuntur ad Axem Minimæ (per 45am hujus) remotiores erunt ipsis à Vertice A. Si vero AE major fuerit dimidio lateris recti, fiat ΔΘ ad ΘE sicut diameter transversa ad latus rectum: ac inter ipsas ΘΔ, ΔA capiantur duæ mediæ proportionales ΔH, ΔK, & de puncto K ipsi AE normalis erigatur KB, & fiat EΛ ad KB in ratione rectanguli sub ΔE, ΘK ad rectangulum sub ΔK, ΘE. Dico quod ZE major esse debet quam recta EΛ. Nam si possibile sit ut non sit major eâ, ponamus imprimis eas æquales esse ac (per 52dam hujus) demonstratum est rectam unam duci posse de puncto Z è qua abscindat Axis Minimam. Cum autem hoc non ita se habeat, recta EZ non æqualis erit ipsi EΛ. Per eandem etiam probatur rectam ZE non minorem esse quam EΛ, quia si minor fuerit eâ, non impossibile esset ducere de puncto Z duas rectas, quarum portiones inter Sectionem & Axem interceptæ forent Minimæ: recta igitur ZE major erit quam EΛ. Verum (per 52dam hujus) demonstratum est quod, si ZE major fuerit quam EΛ, non duci possit e puncto Z recta aliqua è qua abscindat Axis Minimam, quodque Minimæ, à terminis rectarum de puncto Z prodeuntium ductæ, longius distent à Vertice A quam ipsæ prodeuntes. Quapropter rectis quibuscunque de puncto Z ad sectionem ductis, Minimæ ab earundem extremitatibus ad Axem emissæ remotiores erunt ipsis à puncto A: adeoque iisdem argumentis, quibus in præcedente propositione rem demonstravimus in Parabolâ, manifestum erit rectam AZ minorem esse quavis aliâ per punctum Z ad sectionem ABΓ ductâ, eidemque propiorem minorem esse remotiore.



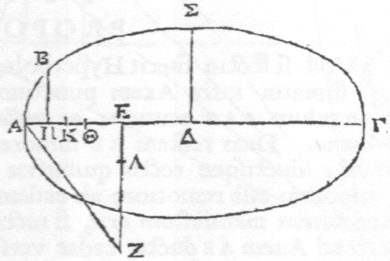
PROPO-

PROPOSITIO LXVI.

QUinetiam si sectio fuerit Ellipsis, ut ΑΒΓ, cujus Axis major ΑΓ & centrum Δ, ac sumatur infra Axem majorem punctum Ζ, ita ut angulus ΖΑΓ sit acutus: & e centro Δ erigatur Axi normalis ΔΣ: sit autem punctum Ζ tale, ut ab eo non duci poterit ad quadrantem sectionis ΑΣ recta aliqua, cujus portio inter Sectionem & Axem intercepta sit Minima. Dico ΑΖ minorem esse rectâ quâvis aliâ de Ζ ad sectionis partem ΑΣ ducendâ, eidemque viciniorem minorem esse remotiore.

Oportet autem normalem de Ζ ad axem demissam cadere inter puncta Α, Δ: non potest enim cadere inter Δ, Γ, quin possibile esset ducere ad sectionem de Ζ (per 55^{mam} hujus) rectam, cujus pars intercepta inter Axem & Sectionem foret aliqua e Minimis. Posuimus vero hoc non fieri posse, adeoque normalis non cadet inter puncta Δ, Γ. Neque cadet super centrum Δ, quia si cadat super Δ, ac producatur ad sectionem, portio ejus inter Sectionem & Axem intercepta (per 11^{mam} hujus) foret Minima. Occurret igitur ipsi ΑΔ ad modum normalis ΖΕ ac ΑΕ vel æqualis erit dimidio lateris recti, vel minor erit eo, vel major.

Jam si minor fuerit eo vel eidem æqualis, patet quod è rectis quibusvis de Ζ ad sectionem ΑΣ prodeuntibus non fieri possit ut abscindantur Minimæ. sed Minimæ à prodeuntium extremitatibus ad Axem ductæ (per 52^{dam} hujus) longius aberunt à Vertice Α quam ipsæ prodeuntes. Quod si ΑΕ major fuerit dimidio lateris recti, fiat ΔΘ ad ΘΕ sicut diameter transversa ad latus rectum, ac capiantur inter ipsas ΑΔ, ΔΘ duæ mediæ proportionales ΗΔ, ΔΚ, & per Η ducatur Axi ad angulos rectos ordinatim applicata ΗΒ: dein fiat ΕΛ ad ΗΒ in ratione rectanguli sub ΔΕ, ΘΗ ad rectangulum sub ΔΗ, ΘΕ, ac ΖΕ vel æqualis erit ipsi ΕΛ, vel major erit eâ, vel minor. Si vero ΕΖ ipsi ΕΛ æqualis fuerit, una quidem recta duci potest (per 52^{dam} hujus) de Ζ ad sectionem ΑΣ, e qua abscindat Axis Minimam: Sed aliter fieri oportet, *adeoque* ΕΖ *non est rectæ* ΕΛ *æqualis*. Neque ΕΖ minor esse potest quam ΕΛ, tum enim duci poterunt duæ rectæ e quibus (*per eandem*) abscinderentur Minimæ. Quapropter ΕΖ major esse debet quam ΕΛ; quo in casu nulla recta duci potest de puncto Ζ ad sectionem ΑΣ, cujus portio intercepta sit Minima: ac si ducatur à tali puncto Ζ ad sectionem recta quælibet, Minima inter ejusdem extremitatem & Axem interjecta (per 52^{dam} hujus) longius aberit à Vertice Α quam ipsa recta de Ζ educta.



Jam si quovis modo Minimæ, à quolibet sectionis ΑΣ puncto ad Axem eductæ, remotiores fuerint à Vertice Α quam rectæ de sumpto puncto Ζ prodeuntes, pari quo in Parabola argumento, probabitur ΑΖ minorem esse quavis aliâ de Ζ ad sectionem ΑΣ ducendâ, eidemque propiorem minorem esse remotiore. Demonstratio enim una eademque est in omnibus tribus sectionibus, quoties in data sectione rectæ Minimæ, de punctis ejus ad Axem ductæ, occurrunt eidem Axi remotius à Vertice quam rectæ jungentes hæc puncta & sumptum Ζ.

PROPOSITIO LXVII.

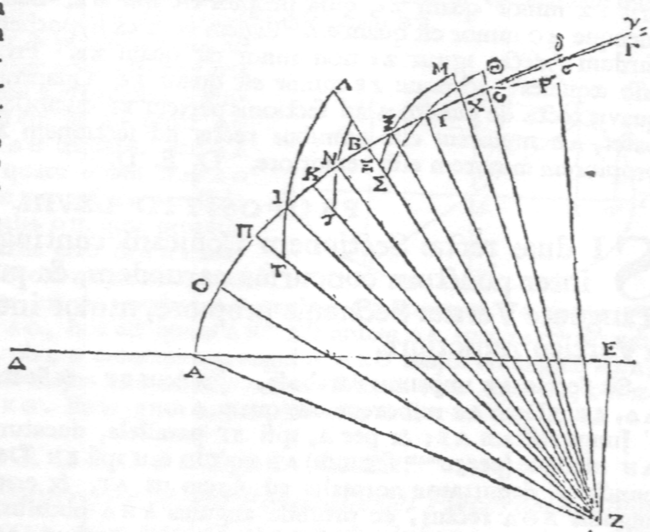
SIT jam sectio ΑΒΓ Parabola vel Hyperbola, cujus Axis ΔΕ, & detur punctum infra Axem ut Ζ, sitque angulus ΖΑΕ acutus. possibile autem sit ut prodeat de puncto Ζ una sola recta cujus portio intercepta sit Minima. Dico quod, etiam hoc in casu, ΑΖ minor est quavis alia recta de puncto Ζ ad sectionem ΑΒΓ eductâ, quodque eidem propior minor est remotiore.

De Ζ ad Axem demittatur normalis ΖΕ, ac dico quod, rectâ quavis de puncto Ζ ad sectionem ΑΒΓ egrediente, Minima ab ejusdem extremitate ad Axem ducta longius aberit à Vertice Α quam ipsa egressa, si unam solam excipias: adeoque ΑΕ in Parabola vel Hyperbola major erit dimidio lateris recti. Nam si non major fuerit eo, impossibile esset ducere de puncto Ζ rectam aliquam e qua interciperetur Minima, uti constat ex 49na & 52da hujus. Est itaque ΑΕ major semilatere recto.

recto. Jam si Parabola fuerit, auferatur ab A E, à parte puncti E, recta dimidio lateris recti æqualis: ac fiat, modo (in Prop. 64ta hujus) monstrato, usque dum inveniatur recta E Λ, cum qua comparanda est recta E Z, & E Z eidem æqualis erit. Non enim potest esse minor eâ, quia tum duci poterint de puncto Z ad sectionem duæ rectæ è quibus abscindat Axis Minimas (per 51^{im} hujus) contra Hypothesin: neque erit Z E major illa, quia hac conditione (per eandem 51^{mam}) non duci poterit ulla recta de puncto Z cujus portio intercepta sit aliqua e Minimis. Hoc autem aliter se habet: quare recta E Z ipsi æqualis erit. Quo posito, ex eadem 51ma, manifestum est unam singularem rectam duci posse de puncto Z, cujus portio inter Sectionem & Axem intercepta Minima sit; cæterasque omnes Minimas à terminis rectarum de puncto Z prodeuntium ductas remotiores esse à Vertice A quam ipsæ prodeuntes

Idem etiam demonstrabitur si sectio fuerit Hyperbola, cujus centrum Δ. Dividatur Δ E ita ut segmenta sint inter se in ratione diametri transversæ ad latus rectum, ac fiant reliqua ad modum Prop. 65^{tæ} hujus, usque dum inveniatur recta E Λ cum normali Z E comparanda. Et, si recta Z E æqualis fuerit inventæ E Λ, pari ac in Parabola argumento constabit punctum Z tale esse, ut una tantum recta ab eodem duci possit è qua abscindatur Minima: ductisque ad sectionem de Z rectis quibuscunque, Minimas ab earundem extremitatibus ad Axem emissas longius abesse à Vertice A quam ipsæ ductæ, per 52^{dam} hujus manifestum est. Hinc consequuntur eadem omnia quæ in Parabola.

Sit jam Z B unica illa recta per Z ad sectionem A B Γ ducta, e qua abscindit Axis Minimam, ac ducantur ad sectionem inter A & B duæ aliæ, ut Z O, Z Π, &, eodem modo quo demonstravimus Propositionem LXIV^{tam} hujus, constabit A Z Minimam esse e rectis de puncto Z ad sectionem ductis Prodeuntibusq; ad sectionem rectis quibusvis Z O, Z Π, inter puncta A & B; quæ eidem A Z vicinior est minor erit remotiore.



Dico quoque quod Z Π minor est quam Z B. Nam si non sit minor eâ, primum sit æqualis ei, ac ducatur inter eas recta Z K; erit igitur Z K major quam Z Π, per nuper demonstrata. quare in Z K capiatur recta major quam Z B, minor vero quam Z K, ut Z τ; & centro Z, radio Z τ describatur circulus occurrens rectæ Z K in τ, sectioni autem ad N inter K & B, ad modum circuli N τ, & jungatur Z N. Est autem recta K Z ipsi A Z propior quam Z N; recta igitur Z K minor est quam Z N, *hoc est quam* Z τ, quod absurdum est: quare absurda est positio Z K majorem esse quam Z B; adeoque Z Π, Z B non sunt æquales.

Ponamus jam, si fieri possit, Z Π majorem esse quam Z B, ac capiatur recta aliqua in Z Π quæ major sit quam Z B, minor vero quam Z Π, ut Z T; & centro Z, radio Z T describatur circulus occurrens rectæ Z Π, sectioni vero necessariò inter Π & B. Occurrat autem iis ad modum arcus T I Λ, & jungatur Z I; ideoque recta Z Π minor erit quam Z I, quia propior est ipsi A Z quam Z I. Sed Z I ipsi Z T æqualis est, adeoque Z Π minor est quam Z T, quod absurdum. Recta igitur Z Π non est major quam Z B; neque eidem æqualis, per nuper demonstrata: ac proinde minor est ea. Constat itaque rectas omnes de puncto Z ad sectionem inter A, B ductas minores esse quam Z B.

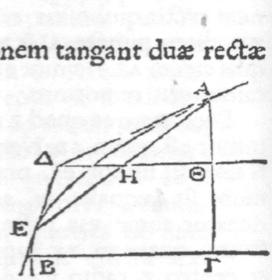
Ducantur

Ducantur jam ad reliquam sectionem ΒΓ, ab altera parte ipsius ΖΒ, rectæ Ζο, Ζσ. Dico ΖΒ minorem esse quam Ζο, ac Ζο quam Ζσ. Agantur sectionis Tangentes οδ, σγ & erunt anguli Ζοδ, Ζσγ obtusi, quia rectæ Minimæ de punctis ο, σ ad Axem ductæ remotiores sunt à Vertice Α quam rectæ ad utrumque punctum ab ipso Ζ eductæ. Ipsi Ζο ad punctum ο normalis sit ΟΡ, quæ quidem cadet intra sectionem, unde patebit, eodem quo Prop 64^{am} demonstravimus modo, rectam Ζο minorem esse quam Ζσ; adeoque etiam ab altera parte ipsius ΒΖ, rectæ per Ζ ductæ, quæ propiores sunt Vertici Α, minores erunt remotioribus. Dico quoque quod ΖΒ minor est illis omnibus. Quoniam enim Axis abscindit e recta ΖΒ Minimam, erit angulus comprehensus à Tangente per punctum Β ductâ & ipsâ ΖΒ rectus. Jam si fieri possit, fiat imprimis ΖΒ ipsi Ζο æqualis, & ducatur inter eas recta ΖΧ; & ΖΧ minor erit quam Ζο, quia propior est ipsi ΑΖ, hoc est quam ΖΒ. Capiatur igitur recta ΖΞ minor quam ΖΒ, sed major quam ΖΧ, ac centro Ζ, radio ΖΞ circinetur circulus, quæ propterea occurret sectioni inter puncta Β, Χ. Sit autem circulus ille ΜξΞ occurrens sectioni in ξ, & jungatur Ζξ, ideo Ζξ minor erit quam ΖΧ, quia propior est ipsi ΑΖ: adeoque ΖΜ ipsi Ζξ æqualis minor erit quam ΖΧ absurdum est igitur ΖΞ majorem esse quam ΖΧ quare recta Ζο non est ipsi ΖΒ æqualis Si vero fieri possit, sit minor ea, ac fiat ΖΣ major quam Ζο, minor vero quam ΖΒ, & centro Ζ, radio ΖΣ describatur circulus occurrens sectioni inter puncta Β, ο. Occurrat autem in Υ, & sit circulus ille ΣΥΘ; & jungatur ΥΖ. adeoque erit ΥΖ minor quam Ζο, quia propior est ipsi ΑΖ. Sed ΥΖ æqualis est ipsi ΖΘ, ideoque ΖΟ minor est quam Ζο. Eadem vero ex hypothesi major est ea; quod absurdum. recta igitur Ζο non minor est quam ΖΒ. Probavimus autem eas non esse æquales: adeoque ΖΒ minor est quam Ζο. Quapropter recta ΒΖ minor est quavis recta de puncto Ζ ad sectionis partem ΒΓ ducibilem. Unde & ex præmissis patet, ΑΖ minorem esse omnibus rectis ad sectionem ΑΒΓ ducendis, eidemque propiorem minorem esse remotiore. Q. E. D.

PROPOSITIO LXVIII.

SI duæ rectæ Sectionem Conicam contingant; erit intercepta inter punctum concursûs earundem, & punctum contactûs in Tangente Vertici Sectionis propiore, minor interceptâ in Tangente à Vertice remotiore.

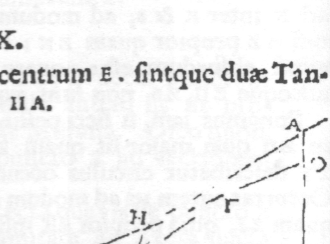
Sit Sectio ΑΒ imprimis Parabola, cujus Axis ΒΓ. & Sectionem tangant duæ rectæ ΑΔ, ΔΕ. Dico ΔΕ minorem esse quam ΔΑ.



Junge rectam ΑΕ; & per Δ, ipsi ΒΓ parallela, ducatur ΔΗ ideoque (per 30^{mam} secundi) ΑΗ æqualis erit ipsi ΕΗ De puncto Α demittatur normalis ad Axem ut ΑΓ, & erit angulus ΑΘΔ rectus, ac proinde angulus ΑΗΔ obtusus. Est verò ΔΗ utrique triangulo ΑΔΗ, ΕΔΗ communis, ac duo latera ΑΗ, ΗΔ æqualia sunt duobus lateribus ΕΗ, ΗΔ. angulus autem ΕΗΔ minor est angulo ΑΗΔ: Basis igitur ΔΕ minor est basi ΑΔ. Q. E D.

PROPOSITIO LXIX.

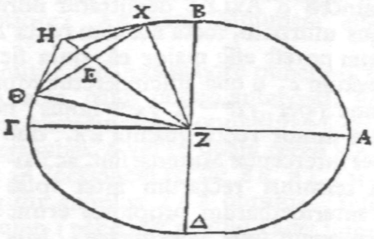
SIT jam Sectio Hyperbola ut ΑΒ, cujus Axis ΔΕ, centrum Ε. sintque duæ Tangentes ΖΗ, ΗΑ. Dico quod ΖΗ minor est quam ΗΑ.



Junge ΗΕ, quæ producatur in directum; jungatur etiam ΑΓΖ, occurrens ipsi ΗΕ in Γ. ideoque ΑΓ (per 30^{mam} secundi) æqualis erit ipsi ΓΖ. Demittatur normalis ΑΔ, & producatur ΕΓ ad Θ; &, ob angulum ΑΔΕ rectum, angulus ΑΘΕ major eo obtusus erit, unde & angulus ΑΓΗ obtusus. ac propterea ΗΓΖ eidem deinceps minor erit eo, utpote acutus. Sed recta ΑΓ ipsi ΓΖ æqualis est, & ΗΓ utrique triangulo ΑΓΗ, ΗΓΖ communis: Basis igitur ΖΗ minor est Basi ΗΑ. Q E D

PROPOSITIO LXX

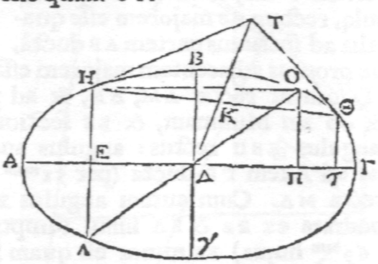
SIT autem Sectio ΑΒΓΔ Ellipsis, cujus Axis major ΑΓ, minor ΒΔ, & *centrum* Ζ, & ducantur inter puncta Β, Γ, sive ad eundem sectionis quadrantem Tangentes duæ ΧΗ, ΗΘ. Dico Axi propiorem minorem esse remotiore.



Jungantur rectæ ΘΧ, ΗΕΖ, & erit ΧΒ (per 30^{mam} secundi) ipsi ΕΘ æqualis. Cumque recta ΖΧ propior est Semi-axi minori ΖΒ quam ΖΘ, & recta ΖΘ propior est Semi-axi majori quam ΖΧ, erit (per 11^{am} hujus) ΖΘ major quam ΖΧ. Latera autem ΖΕ, ΕΘ æqualia sunt lateribus ΖΕ, ΕΧ, angulus igitur ΘΕΖ major est angulo ΧΕΖ, ac propterea angulus ΧΕΗ major angulo ΗΕΘ. Sed latera ΧΕ, ΕΗ æqualia sunt lateribus ΘΕ, ΕΗ: adeoque Basis ΧΗ major est Basi ΘΗ. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXI.

SIT ΑΒΓ Ellipsis, cujus Axis major ΑΓ, minor Βγ, ac centrum Δ, sintque ΗΕ, ΘΤ normales super Axem majorem, ita ut ΗΕ major sit quam ΘΤ: tangant autem sectionem rectæ duæ ΗΤ, ΤΘ, quæ proinde (per 27^{mam} secundi) convenient inter se ad easdem partes centri. Dico ΗΤ majorem esse quam ΘΤ.



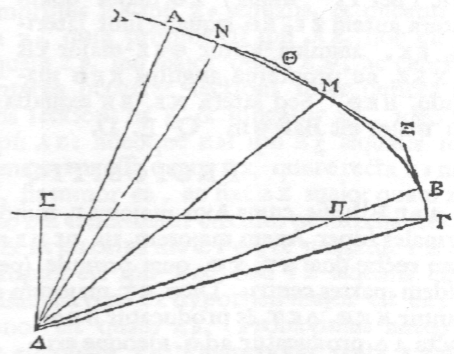
Jungantur ΗΚΘ, ΔΚΤ, & producatur ΗΕ ad Λ, ac juncta ΛΔ producatur ad Ο. ideoque erit ΛΔ (per 30^{mam} primi) ipsi ΔΟ æqualis. Cumque ΛΕ ipsi ΕΗ æqualis est, ac ΔΕ super ΛΗ normalis, erit ΛΔ ipsi ΔΗ æqualis. Sed ΛΔ ipsi ΔΟ est æqualis: quare etiam ΗΔ, ΔΟ sunt æquales, junctaque ΗΟ ipsi ΕΤ parallela erit. Demittatur normalis ΟΠ, quæ proinde ipsi ΗΕ parallela & æqualis erit. Sed ΗΕ major est quam ΘΤ, unde & ΟΠ major est quam ΘΤ, ac recta ΔΘ propior est Axi majori ΔΓ quam ΔΟ: quocirca ΔΘ (per 11^{mam} hujus) major est quam ΔΟ, hoc est quam ΔΗ. Est autem ΘΚ (per 30^{mam} secundi) ipsi ΚΗ æqualis. Unde, ob ΔΚ communem, angulus ΔΚΟ major est angulo ΗΚΔ, ac proinde angulus ΤΚΗ major erit angulo ΤΚΘ. Latera vero duo ΗΚ, ΚΤ æqualia sunt duobus ΤΚ, ΚΘ. Basis igitur ΗΤ major erit Basi ΤΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXII.

SI sumatur punctum infra Axem Parabolæ vel Hyperbolæ, à quo possibile sit educere duas rectas, ita ut in utrâque portio intercepta inter Sectionem & Axem sit Minima: *erit ea, quæ ex his duabus Vertici Sectionis propius adjacet, omnium rectarum, de sumpto puncto ad eam Sectionis partem quæ interjacet Verticem & rectam alteram ductarum,* Maxima. *è cæteris vero ad eandem partem ductis, quæ* Maximæ *utrinque propior est major erit remotiore altera vero recta minor erit cæteris omnibus ab eodem puncto ad reliquam istius partis Sectionem, sive ad ejusdem lateris complementum: quæque eidem propior est, è rectis ad reliquam Sectionem ductis, minor erit remotiore.*

Sit Sectio ΑΒΓ, cujus Axis ΓΕ, sub quo sumptum est punctum Δ: ac sint ΔΑ, ΔΒ, rectæ duæ ad sectionem ductæ, è quibus abscindit Axis Minimas. Dico quod ΔΒ major est omnibus rectis è puncto Δ ad sectionis partem ΑΒΓ ducendis, quodque rectæ utrinque eidem ΒΔ propiores majores sunt remotioribus: quodque ΔΑ minor est quavis recta de puncto Δ ad reliquam sectionem ΑΧ ducibili: quodque eidem propior minor est remotiore.

De puncto Δ Axi ΓΕ demittatur normalis ΔΕ, & inquiratur, modo in 64^{ta} & 65^{ta} hujus usurpato, recta ΕΛ cum recta ΔΕ comparanda, qua minor esse debet ΔΕ. Non enim potest esse major eâ, quia sic impossibile esset aliquam rectam ducere per punctum Δ, e qua abscinderetur Minima. Neque eidem æqualis est, quia hâc conditione (per 51^{mam} & 52^{dam} hujus) non nisi una sola Minima daretur. Erit igitur ΔΕ minor rectâ quæsitâ ΕΛ. quo in casu duci poterunt duæ rectæ, quarum portiones interceptæ Minimæ sint, ac Minimæ à terminis rectarum inter ipsas ΔΑ, ΔΒ intermediarum propiores erunt Vertici Γ quam ipsæ intermediæ: Minimæ vero de cæterarum ductarum extremitatibus emissæ (per easdem 51^{am} & 52^{dam} hujus) remotiores erunt ab eodem. Unde, eodem modo quo demonstravimus 64^{tam} hujus, patebit, rectam ΔΒ majorem esse quâvis rectâ per Δ ad sectionis partem ΒΓ ductâ, eidemque ΔΒ propiores à parte Verticis Γ majores esse remotioribus simulq, rectam ΔΒ majorem esse quacunque alia ad sectionis partem ΑΒ ductâ,



eidemque propius adjacentem majorem esse remotiore. Demonstrabitur autem hoc modo. Ducantur rectæ ΔΜ, ΔΝ, & ad puncta Β, Μ tangant sectionem rectæ ΒΞ, ΞΜΟ, & ob ΒΠ Minimam, & ΒΞ sectionis Tangentem, erit (per 27^{mam} & 28^{vam} hujus) angulus ΞΒΠ rectus: angulus autem ΞΜΔ obtusus est, quia Minima de puncto Μ ad Axem ΓΕ ducta (per 51^{mam} & 52^{dam} hujus) propinquior est Vertici Γ quam recta ΜΔ. Cum autem angulus ΞΒΔ rectus est, ac angulus ΞΜΔ obtusus, erunt quadrata ex ΞΒ & ΒΔ simul sumpta majora quadratis ex ΞΜ, ΜΔ. Sed (per 68^{vam} & 69^{nam} hujus) ΒΞ minor est quam ΞΜ, quare ΒΔ major est quam ΔΜ Pari modo demonstrabitur rectam ΜΔ majorem esse quam ΔΝ, quia angulus ΘΜΔ acutus est, ac ductâ ΝΘ sectionis Tangente, erit angulus ΘΝΔ obtusus Similiter probabitur rectam ΝΔ majorem esse quam ΔΑ Recta igitur ΒΔ Maxima est è rectis de puncto Δ ad partem sectionis ΑΓ ductis, eidemque propior major est remotiore. Quod vero ΔΑ minor est quavis rectâ de puncto Δ ad reliquam sectionem ΑΧ ductâ, eodem argumento constabit quo usi sumus in demonstrandâ 64^{ta} hujus. Pariterque patebit rectam ipsi ΑΔ propiorem, inter eas quæ prodeunt e puncto Δ ad sectionem ΑΧ, majorem esse remotiore ab eadem.

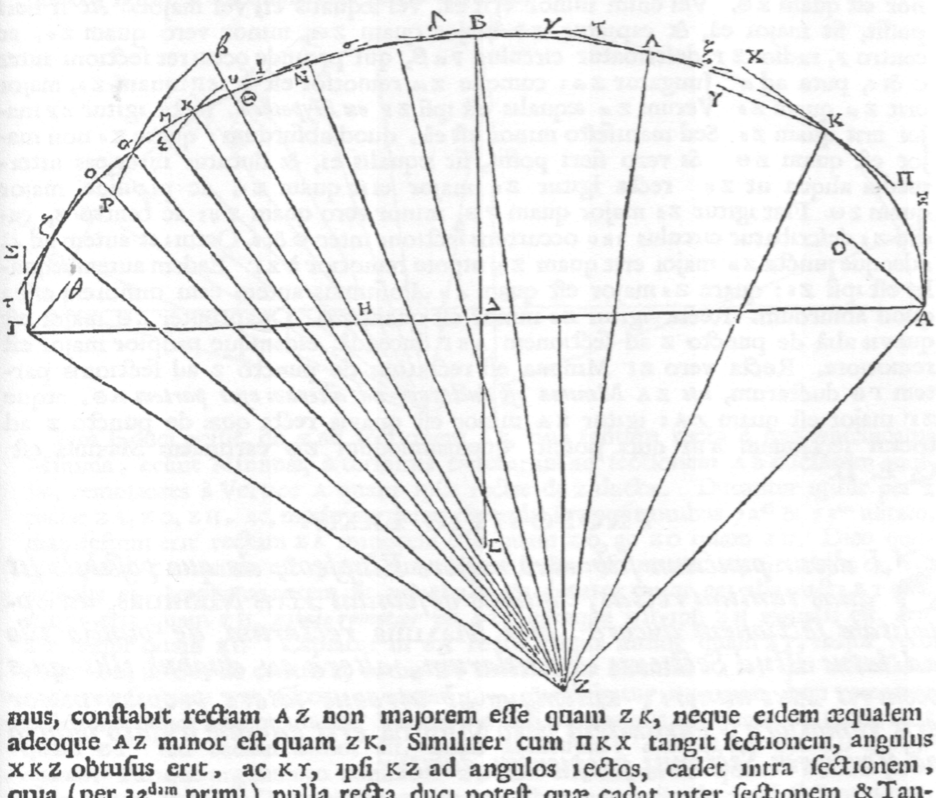
PROPOSITIO LXXIII.

S*I capiatur punctum infra majorem Ellipseos Axem, quod non sit in Axe minore producto; ac inter rectas è puncto illo ad Sectionem ducendas non sit nisi una sola è qua abscindat Axis* Minimam: *erit hæc recta major quâvis aliâ; eidemque propior major erit remotiore.* Minima *vero quæ duci possit de puncto illo ad eandem semi-ellipsin, ad quam ducitur* Maxima, *erit recta jungens punctum datum & Sectionis Verticem puncto illi viciniorem.*

Sit ΑΒΓ Ellipsis, cujus Axis ΑΓ & centrum Δ; & ad Δ erigatur Axi normalis ΒΔΕ: sumatur etiam sub Axe punctum Ζ, è quo non nisi una sola recta ad sectionem ΑΒΓ duci potest, cujus portio intercepta sit Minima. Hæc igitur recta, è qua abscinditur Minima, talis esse debet, ut præter eam non alia duci possit ad sectionem de puncto sumpto. Semper autem possibile est unam rectam ducere de puncto Ζ, cujus intercepta sit Minima, quæque occurrat alteri semi-axi, sive semissi illi

Axis in quam non cadit normalis de puncto Z, per demonstrata in 55ta hujus. Recta igitur illa de Z ad sectionem ABΓ ducta, e qua abscinditur Minima, occurret reliquo semi-axi ΓΔ. Sit autem ea recta ZHΘ, & jungatur ZA. Dico ZΘ Maximam esse è rectis de puncto Z ad sectionem ABΓ ducendis, eidemque ab utraque parte propiorem majorem esse remotiore; AZ vero Minimam esse omnium.

Quoniam enim sectio ABΓ Ellipsis est, ac sumitur sub Axe majore punctum, à quo non duci potest ad sectionem nisi una sola recta, cujus portio intercepta sit Minima: demonstratum est (per 52^{dam} hujus) cæteras Minimas, à quibuslibet sectionis punctis ad Axem ductas, longius abesse à Verticibus A vel Γ, quam rectæ jungentes puncta illa & Z. Educantur de puncto Z ad sectionem rectæ ZK, ZΛ, ZM; tangat autem AΞ sectionem in puncto A: erit igitur angulus ZAΞ obtusus. Ipsi vero AZ ad punctum A perpendicularis sit AO, quæ (per 32^{dam} primi) cadet intra sectionem. Ducatur etiam per K sectionis Tangens ΠKX. Quoniam vero Minima de puncto K ad Axem ducta remotior est ab A quam recta KZ, erit (per 57^{am} hujus) angulus ΠKZ acutus. Sed angulus OAZ rectus est; adeoque demissâ de puncto Z normali, eodem argumento, quo in demonstrandâ 64ta hujus usi sumus, constabit rectam AZ non majorem esse quam ZK, neque eidem æqualem adeoque AZ minor est quam ZK. Similiter cum ΠKX tangit sectionem, angulus XKZ obtusus erit, ac KΥ, ipsi KZ ad angulos rectos, cadet intra sectionem, quia (per 32^{dam} primi) nulla recta duci potest quæ cadat inter sectionem & Tangentem. Agatur jam per punctum Λ sectionis Tangens ξΛΙ, & Minima per Λ ducta remotior erit à Vertice A quam ΛZ, unde, juxta demonstrata in 64ta hujus, recta ZK minor erit quam ZΛ. Ac si jungatur ZB & per B ducatur Tangens sectionis γBδ, ob angulum γBΔ rectum erit angulus γBZ acutus, adeoque ΛZ (juxta eandem 64^{tam}) minor erit quam ZB.



Dico quoque ZB minorem esse quam ZM. Sectionem tangat recta δMσ ad punctum M. Quoniam vero ABΓ Ellipsis est, atque transit normalis BΔE per centrum sectionis Δ, ac Bδ, δM sunt duæ Tangentes; erit Bδ major quam δM (per 70^{mam} hujus). Quadrata autem ex δB, BZ simul minora erunt quadratis ex δM, MZ simul,

simul, quia angulus δBZ obtusus est, angulus vero δMZ acutus, adeoque recta ZB minor erit quam ZM. Similiter demonstrabitur ZM minorem esse quam ZN, ductâ scilicet Tangente σNI. Hinc manifestum est rectas ipsi ΘZ propiores majores esse remotioribus.

Dico quoque ΘZ majorem esse quam ZN. Ducatur per Θ sectionis Tangens ΘI, & erit angulus IΘZ rectus (per 28^{vam} hujus) & angulus INZ obtusus est, Tangens autem NI (per 70^{am} hujus) major est quam IΘ. Quapropter ΘZ major erit quam ZN, ac proinde major quavis recta de puncto Z ad sectionis partem AΘ ducenda, eidemque propior major erit remotiore

Porro recta ΓZ Minima est è rectis ad sectionis partem ΘΓ ducendis, puta Zζ Zο, Zη. Tangat sectionem recta ΓΣ in puncto Γ, ipsique ΓZ normalis sit Γθ, quæ (per 32^{dam} primi) cadet intra sectionem, & ad punctum ζ sectionem tangat ζτ. Minima autem de puncto ζ ad Axem ducta remotior erit à Vertice Γ quam ipsa Zζ, adeoque angulus τζZ acutus erit, propptereaque recta ZΓ minor erit quam Zζ, juxta demonstrata in 64^{ta} hujus Eodemque modo probabitur quod e rectis ad sectionis partem ΘΓ de puncto Z ducendis, quæ propior est ipsi ZΓ minor erit remotiore Recta igitur Zζ minor est quam Zο. Dico quoque quod Zο minor est quam ZΘ. Vel enim minor erit eâ, vel æqualis ei, vel major. Ac si fieri possit, sit major eâ, & capiatur ZP major quam ZΘ, minor vero quam Zο, ac centro Z, radio ZP describatur circulus Pαβ, qui proinde occurret sectioni inter O & ο, puta ad α Jungatur Zα: cumque Zα remotior est à ZΓ quam Zο, major erit Zα quam Zο Verum Zα æqualis est ipsi ZP *ex Hypothesi*. recta igitur ZP major erit quam Zο Sed manifesto minor est eâ, quod absurdum: quare Zο non major est quam ZΘ Si vero fieri possit, sit æqualis ei, & ducatur inter eas intermedia aliqua ut Zη recta igitur Zη major erit quam Zο, ac proinde major quam ZΘ. Fiat igitur Zε major quam ZΘ, minor vero quam Zη; ac centro Z, radio Zε describatur circulus εκυ occurrens sectioni inter Θ & ο. Occurrat autem ad κ. adeoque juncta Zκ major erit quam Zη, utpote remotior à ZΓ Eadem autem æqualis est ipsi Zε: quare Zε major est quam Zη Posuimus autem eam minorem esse: quod absurdum. Recta igitur Zο minor est quam ZO Quapropter ZΘ major est quavis aliâ de puncto Z ad sectionem ABΓ ducendâ, eidemque propior major est remotiore. Recta vero ZΓ Minima est rectarum de puncto Z ad sectionis partem ΓΘ ductarum, *uti* ZA *Minima est ductarum ad alteram ejus partem* AΘ, atque ZΓ major est quam ZA: igitur ZA minor est quavis recta quæ de puncto Z ad totam sectionem ABΓ duci potest, quemadmodum ZO earundem Maxima est Q. E. D.

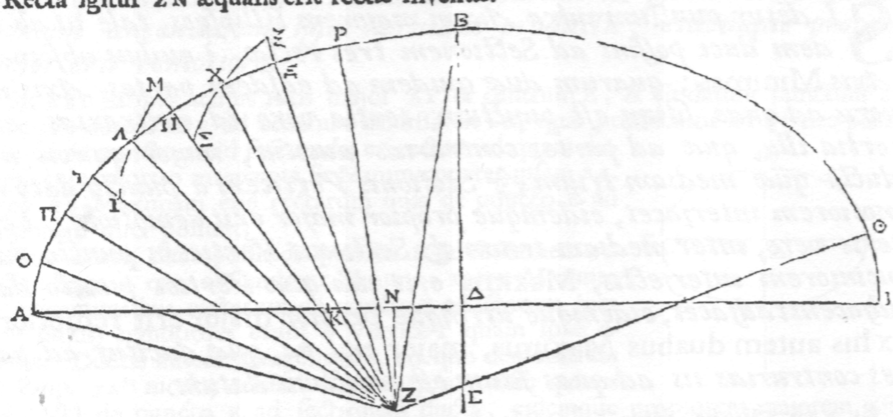
PROPOSITIO LXXIV.

SI detur punctum sub Axe majore Ellipseos, de quo possibile sit duas tantum rectas, è quibus abscindat Axis Minimas, *ad oppositam sectionem ducere. erit* Maxima *rectarum, de puncto illo ad latus istud Sectionis ducendarum, altera ex duabus illis quæ occurrit Axi minori; eidemque ab utroque latere propior major erit remotiore: earundem vero* Minima *erit ea quæ à dato puncto ad Verticem Sectionis propiorem ducitur.*

Sit ABΓ Ellipsis, cujus Axis major AΓ, & sit punctum datum Z sub Axe majore, de centro vero sectionis Δ erigatur Axi normalis BΔE: ac possibile sit de puncto Z duas tantum rectas ducere, quarum portiones inter sectionem ABΓ & Axem interceptæ sint Minimæ. Ponamus autem has rectas de Z ductas esse ZH, ZΘ; neque duci posse aliam præter has duas à qua abscindatur Minima Dico rectam ZO, quæ occurrit Axi minori, majorem esse qualibet aliâ de Z ad sectionem ABΓ ducendâ, eidemque ZΘ ab utroque latere propiorem majorem esse remotiore rectam vero ZA minorem esse quavis aliâ.

De puncto Z demittatur normalis ZN, ac manifestum est ZN non cadere posse super

super centrum Sectionis. Nam si caderet super centrum, vel impossibile esset ducere de Z rectam aliam è qua abscinderetur Minima, præter ipsam Z N ad sectionem productam, vel possibile esset ducere duas alias rectas æquales (per 53^{am} & 54^{am} hujus) è quarum utrâque abscinderetur Minima. Hoc autem est contra hypothesin. Cadat igitur normalis Z N inter puncta A, Δ, ac recta A N major erit semilatere recto; quia si non major fuerit eo, impossibile foret (per 50^{mam} hujus) ducere de Z inter A & B rectam aliquam cujus portio intercepta sit Minima. Itaque A N, uti diximus, major esse debet dimidio lateris recti. Fiat Δ K ad K N sicut diameter transversa ad latus rectum, & inveniantur inter A Δ, Δ K duæ mediæ proportionales, & erigatur normalis, quemadmodum fecimus in Prop. 64ta hujus, cæteraque peragantur, usque dum inveniatur recta illa quæ cum recta Z N conferenda est. Huic autem sic inventæ æqualis esse debet recta Z N: nam si major fuerit eâ, nulla duci potest recta de Z ad sectionis partem A B, è qua abscindatur Minima. Neque minor erit ea: tunc enim poterimus ducere duas rectas ad sectionem A B, è quarum utraque (per 52^{dam} hujus) intercipiatur Minima, possumus etiam (per 55^{am} hujus) rectam tertiam educere de Z ad sectionis partem B Γ. Recta igitur Z N æqualis erit rectæ inventæ.



Jam si duci possit, de Z ad sectionem A B, una tantum recta è qua abscindatur Minima, erunt Minimæ, à terminis cæterarum ad sectionem A B ductarum emissæ, remotiores à Vertice A quam ipsæ rectæ de Z ductæ. Ducantur igitur per Z rectæ Z A, Z O, Z Π, ac, modo in demonstrandis Propositionibus 72da & 73^{tia} usitato, manifestum erit rectam Z A minorem esse quam Z O, ac Z O quam Z Π. Dico quoque quod Z Π minor est quam Z H. Nam si non sit minor ea, sit major ea, vel æqualis ei. Imprimis autem sit æqualis ei, & ducatur inter eas alia recta Z T quæ major erit quam Z Π, *utpote remotior ab* A Z: cumque Z Π ipsi Z H æqualis est, erit Z T major quam Z H. Capiatur in Z T recta aliqua minor quam Z T, major vero quam Z H, ut Z I; ac centro Z, radio Z I describatur circulus I Λ M, qui necessario occurret sectioni T H. Occurrat autem in Λ, & jungatur Z Λ, quæ, cum remotior sit ab A Z, major erit quam Z T. Verum Z Λ ipsi Z I æqualis est, quare Z I major erit quam Z T: sed eadem minor est, quod absurdum: *adeoque* Z Π *ipsi* Z H *non est æqualis*. Parique argumento constabit Z H non esse minorem quam Z Π, ac proinde major erit ea. Quapropter Z H major est quavis recta de Z ad sectionis partem A H ducibili, eidemque propior major est remotiore: earundem vero Minima est Z A.

Simili autem methodo, qua rem demonstravimus in rectis inter A & H ductis, probabitur ipsam Z B majorem esse quavis recta inter H & B ab eodem puncto Z ducendâ; eidemque propiorem majorem esse remotiore. Dico quoque quod Z H minor est quavis recta inter H, B ducta. Ducatur enim alia ut Z P, ac, si fieri possit ut non sit major quam Z H, sit æqualis ei, vel minor eâ. Sit autem primo æqualis ei, & inter ipsas Z H, Z P ducatur intermedia ut Z Ξ, quæ proinde minor erit quam Z P: adeoque minor quam Z H. Fiat Z Σ major quam Z Ξ, minor vero quam Z H,

ac

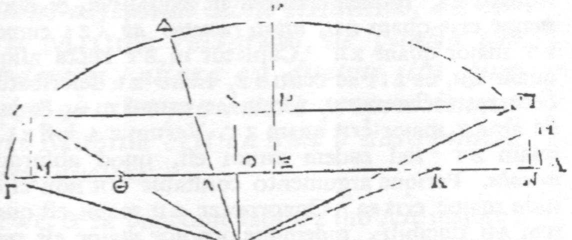
ac centro Z radio ZΣ circinetur circulus ΣXξ, occurrens sectioni inter Ξ & H, puta ad X & juncta recta ZX minor erit quam ZΣ, quia longius abest ab ipsa ZB Hæc autem æqualis est ipsi Zξ, adeoque Zξ minor erit ipsa ZΞ. eandem autem supposuimus majorem eâ quod absurdum. Quare recta ZP non est æqualis ipsi ZH. Pariterque demonstrari potest ZP non esse minorem eâ. Recta igitur ZB Maxima est rectarum de puncto Z ad sectionis partem AB ductarum, eidemque propior major est remotiore, *ZH vero minor est quavis recta ad sectionis partem HB ductâ.*

Quoniam vero ABΓ Ellipsis est, cujus Axis major AΓ, ac minor BΔE, punctum autem Z situm est intra angulum AΔΓ, si ab eodem ad sectionis partem BΓ ducatur recta altera ZO, *cujus intercepta ΘΛ sit Minima*. constabit, modo in proximâ Propositione usurpato, rectam ZΘ Maximam esse omnium de puncto Z ad sectionis partem BΓ ductarum, eidemque propiorem majorem esse remotiore Demonstratum autem est ZB majorem esse quavis recta ad sectionis partem AB ducta, eidemque propiorem majorem esse remotiore. Quocirca ZO major est quavis ductâ de puncto Z ad totam sectionem ABΓ, eidemque utrinque propiores majores sunt remotioribus Omnium vero Minima est recta ZA. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXV.

SI detur punctum infra Axem majorem Ellipseos, tale ut ab eodem duci possint ad Sectionem tres rectæ, è quibus abscindat Axis Minimas; *quarum duæ quidem ad easdem partes Axis minoris ad quas situm est punctum, tertia vero ad contrarias erit tertia illa, quæ ad partes contrarias ducitur, major quavis alia ductâ quæ mediam trium & Sectionis Verticem à puncto dato remotiorem interjacet, eidemque propior major erit remotiore; è cæteris vero, inter mediam trium & Sectionis Verticem puncto dato viciniorem interjectis,* Maxima *erit illa quæ Vertici puncto dato adjacenti adjacet, eidemque utrinque propior* major erit remotiore; ex his autem duabus Maximis, major *erit ea, quæ ducitur ad partes contrarias iis ad quas situm est punctum datum.*

Sit ABΓ Ellipsis, cujus Axis major AΓ & centrum Ξ, & sit BΞ normalis super Axem ad centrum sectionis, sub quo sit punctum datum E. ducantur autem ex eodem tres rectæ e quibus abscindat Axis Minimas, ut EH, FZ, FΔ; quarum duæ, ut EZ, EΔ, erunt ad easdem partes ad quas situm est E; tertia vero EH ad contrarias Dico EH Maximam esse rectarum de puncto E ad totam sectionem ABΓ ductarum, eidemque utrinque propiorem, e rectis ad sectionis partem inter Δ & A ductis, majorem esse remotiore.



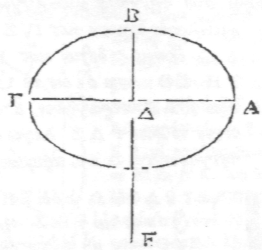
Quoniam enim rectæ ΔΛ, ZΘ sunt Minimæ, constabit, eo quo in Parabola demonstravimus modo (Prop. 72^da hujus) quod recta EZ Maxima est ex iis quæ de puncto E ad sectionis partem ΓΔ duci possint, quodque eidem propior major est remotiore Pariter cum ΔΛ & HK sunt Minimæ, eodem modo ac in Propositione præcedente, probabitur rectam EH majorem esse quavis rectâ de puncto E ad partem AΔ ductâ

Dico quoque quod EH major est quam EZ De punctis Z, H, Λ demittantur normales ZM, HN, FO, & MΞ erit ad MΘ (per 15^im hujus) sicut diameter transversa ad latus rectum ac (per eandem) NΞ erit ad NK sicut diameter transversa ad latus rectum quare ΞM erit ad MΘ sicut ΞN ad NK Ratio autem OM ad MΘ minor est ratione ΞM ad MO, ac proinde ratio OM ad MΘ minor est ratione ΞN ad NK, ac multo minor ratione ON ad NK: dividendo autem ratio OΘ ad ΘM minor erit ratione OK ad KN. Sed OΘ est ad ΘM sicut EO ad ZM: & OK est ad KN sicut EO ad HN ratio igitur EO ad ZM minor est ratione ejusdem ad HN. unde patet ZM majorem esse quam HN; adeoque recta per punctum Z Axi AΓ parallela remotior erit à puncto A quam punctum H. Sit hæc parallela recta ZPΠ, & producatur normalis EO ad X, & ob ZP ipsi PΠ æqualem, recta ΠX major erit quam XZ. Recta vero EX, utrique triangulo EXZ, EXΠ communis, normalis est super ZΠ: quapropter EΠ major est quam EZ, & FH major est quam EΠ; atque adeo major est quam EZ. Igitur EH Maxima est e rectis ad sectionem ABΓ de puncto E ducendis, ac quæ propiores vel remotiores sunt ab eadem ita se habebunt quemadmodum in Propositione descriptum est Q E D

PROPOSITIO LXXVI

SI normalis de puncto dato ad Ellipseos Axem majorem demissa cadat super centrum Sectionis; ac si nulla alia recta, è quâ abscindat Axis Minimam, *duci possit de puncto illo ad oppositos Ellipseos quadrantes erit* Maxima *rectarum de puncto dato ad Sectionem ducendarum ipsa normalis producta; eidemque propior major erit remotiore.*

Sit ABΓ Ellipsis, cujus Axis major AΓ & centrum Δ, & sit datum punctum E, normalis autem ab E ad centrum demissa sit EΔ, quæ producatur ad B: nec possibile sit de puncto E ad sectionem BΓ rectam aliquam ducere, cujus portio intercepta sit Minima, præter ipsam BΔ. Dico EB Maximam esse rectarum quæ de puncto E ad sectionem duci possunt.

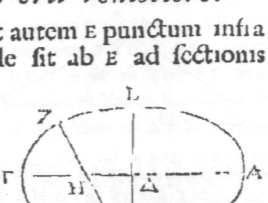


Nam si non duci possit de puncto E ad sectionem BΓ recta aliqua è qua abscindatur Minima; rectæ Minimæ, ab extremitatibus rectarum de puncto E eductarum (per 53^am hujus) remotiores erunt à Vertice Γ quam ipsæ eductæ. Ductis autem Tangentibus, eo quo demonstrata est Prop. 72^da modo, constabit EB majorem esse quâvis aliâ rectâ de puncto E ad sectionem ductâ, eidemque propiorem majorem esse remotiore Q. E. D.

PROPOSITIO LXXVII

SI normalis ad Axem majorem Ellipseos demissa cadat super centrum Sectionis; possibile autem sit ad quadrantem alterutrum Sectionis ducere rectam aliquam è qua abscindat Axis Minimam. *erit recta hæc* Maxima *omnium de puncto dato ad eundem quadrantem ductarum, eidemque propior major erit remotiore.*

Sit ABΓ Ellipsis, cujus Axis major AΓ, ac centrum Δ, sit autem E punctum infra Axem AΓ datum, unde demissa normalis EΔ· ac possibile sit ab E ad sectionis quadrantem ΓB educere rectam aliam è qua abscindatur Minima, puta EHZ. Dico EZ majorem esse quavis alia de puncto E ad ΓB ducenda, eidemque ab utraque parte propiorem majorem esse remotiore



Quoniam enim BΔ, ZH sunt duæ Minimæ, quæ productæ conveniunt in E, rectæ Minimæ prodeuntes e punctis quibusvis sectionis inter Γ & Z (per 46^am hujus) occurrent Axi remotius a Vertice Γ quam rectæ connectentes eadem puncta & E, Minimæ vero de punctis sectionis inter B & Z ductæ (per eandem 46^tam) propiores erunt Vertici Γ quam rectæ de puncto dato E ad eadem in sectione puncta producentes Quibus positis, ad modum demonstrationis Prop 72^dæ, ope Tangentium, probabitur rectam EZ majorem esse quâvis alia de puncto E ad sectionem BΓ ducta, eidemque propiorem majorem esse remotiore. Q E D.

ΠΑΠΠΟΥ