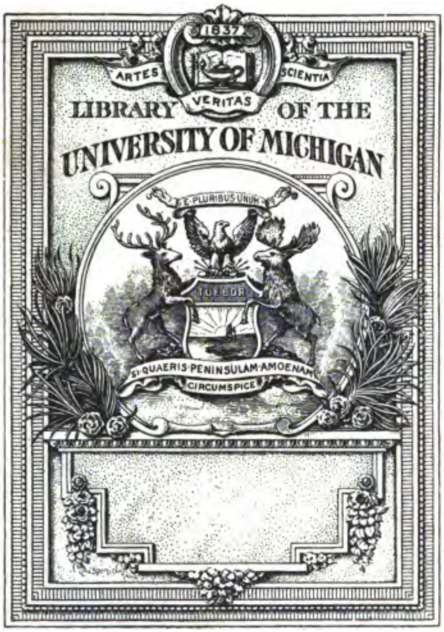

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Leibnizens
gesammelte Werke

aus den Handschriften

der Königlichen Bibliothek zu Hannover

herausgegeben

von

Georg Heinrich Pertz.

Dritte Folge

Mathematik.

Vierter Band.

HALLE,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1859.

Leibnizens mathematische Schriften

herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

Erste Abtheilung.

Band IV.

Briefwechsel zwischen Leibniz, Wallis, Varignon, Guido Grandi, Zendrini, Hermann und Freiherrn von Tschirnhaus.

HALLE,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1859.

BRIEFWECHSEL

zwischen

LEIBNIZ und WALLIS.

Wenn Leibniz noch im Jahre 1695 den Nestor der damaligen Mathematiker, Wallis, veranlasste, mit ihm in Correspondenz zu treten, obwohl er wissen musste, dass derselbe nicht zu den Anhängern der neuen Analysis gehörte, sondern der alten Schule treu geblieben war, so wird dies nicht befremden, wenn man erwägt, dass Leibniz stets darauf bedacht war, nach allen Seiten hin Verbindungen anzuknüpfen, um über die Fortschritte der Wissenschaft immer unterrichtet zu sein, und dass er, nachdem der Versuch mit Newton im Jahre 1693 eine neue Correspondenz zu beginnen gescheitert war, niemanden hatte, der ihm über den Gang der Dinge in England berichtete. Dazu kam, dass durch Wallis in der neuen Ausgabe seiner Algebra, die in dem zweiten Theil seiner gesammelten Werke im Jahre 1693 erschien, der Fluxionsrechnung Newton's zum ersten Male öffentlich Erwähnung geschehen war, wobei Leibniz und der Differentialrechnung nur im Vorbeigehen gedacht wurde. Es musste ihm demnach daran gelegen sein, das Verhältniss der Differentialrechnung zu der Fluxionsrechnung in das rechte Licht zu setzen. Wenn nun auch die Aufklärungen, die Leibniz in dieser Hinsicht giebt, gegenwärtig von keiner besondern Erheblichkeit mehr sind, so waren sie doch damals hinreichend, nicht allein den verschiedenen Ursprung der Differential- und Fluxionsrechnung darzulegen, sondern auch den gewaltigen Fortschritt zu zeigen, der durch die Differential- und Integralrechnung nach Leibnizens Principien in der höheren Mathematik geschehen war. Hierüber verbreitet sich denn auch Leibniz mit grosser Ausführlichkeit, insofern Wallis, als Vertreter der alten Zeit, die früheren Methoden der neuen Analysis möglichst gleich zu stellen sucht. Hervorzuheben bleibt jedoch, dass die Stellen, an welchen Leibniz über das Wesen und über die Auffassung der Bedeutung der Differentiale sich ausspricht, für die Darstellung der Principien der höheren Analysis im Sinne Leibnizens von entschiedener Wichtigkeit sind, wie z. B. die Stellen in den Schreiben vom 29. December 1698 und vom 30. März 1699. Es ist ferner hervorzuheben, dass Leibniz im vollsten Vertrauen auf die Gerechtigkeit seiner Sache und reinen Gewissens in Bezug auf Newton nicht die geringste Spur von Eifersucht zeigt und dass er willig die Veröffentlichung seiner Correspondenz mit demselben gestattet, ohne Besorgniss irgendwie dadurch compromittirt zu werden (vergl. das Schreiben vom 24. März 1698). In dieser Stimmung musste ihn der unvermuthete Angriff Fatio's um so schmerzlicher berühren, als Fatio selbst zu den Mitgliedern der Königlichen Societät in London gehörte und Leibniz voraussetzte, dass dieser Angriff mit Genehmigung der genannten Corporation geschah. Er beruhigte sich indess, als er durch die Vermittelung von Wallis und durch ein Schreiben des Secretärs der Societät, Sloane, in Erfahrung brachte, dass Fatio aus eigenem Antriebe gehandelt, und dass das, was er gegen ihn vorgebracht, nicht als ein Ausdruck der Meinung der Königlichen Societät anzusehen und ohne Billigung von Seiten derselben geschehen sei *). Damit gerieth die Sache in Vergessenheit, bis Keill im Jahre 1708 die Frage aufs neue anregte und den Streit von neuem entflammte.

Ausserdem ist die Correspondenz zwischen Leibniz und Wallis sehr reichhaltig an Beiträgen für die Geschichte der Mathematik überhaupt, indem Wallis mit besonderer Vorliebe historisch-mathematischen Studien sich widmete, so dass gegenwärtig noch immer auf das, was er auf diesem Gebiete geleistet, zurückgegangen wird, besonders aber für die Entwickelung der Mathematik während des 17. Jahrhunderts, welches der Verfasser der Arithmetica infinitorum fast ganz durchlebte.

Der Briefwechsel zwischen Leibniz und Wallis bis zum Jahre 1699 ist von dem letztern im dritten Bande seiner gesammelten Werke, der in dem erwähnten Jahre erschien, herausgegeben worden. Der wissenschaftliche Verkehr zwischen beiden Männern dauerte indess bis zu Ende des Jahres 1700 fort, so dass die Correspondenz zwischen Leibniz und Wallis hier um neun bisher ungedruckte Briefe vermehrt ist.

*) Hierbei ist zu vergleichen, was in Bezug auf Fatio de Duillier beigebracht ist in Bd. III. S. 124 f.

I.

Wallis an Leibniz.

Oxonii Dec. 1. 1696.

Accepi nuper (tardo itinere, per nescio quas manus intermedias ad me missam) schedulam quandam (ut a Te scriptam) in haec verba: „Vir celeberrimus Johannes Wallisius rogatur, ut quae de Area Hyperbolae per seriei cujusdam interpolationem exhibenda promisit in Commercio Epistolico, et quae alibi in hoc genere praestitisse dixit Dominum Vice-comitem Brounkerum, ad eorum instar quae de Circulo in Arithmetica Infinitorum habentur, edere velit. Etsi enim hodie aliae quoque expressiones sint inventae, attamen et istae suam peculiarem elegántiam habent. Scribebam Hanoverae, 6 Decembris 1695. Godefridus Guilielmus Leibnitius.“ Et quidem gratias habeo Nobilissimo Viro, quod aliquam mei curam habeas, et rerum mearum.

Promissum illud meum quod memoras in Commercio Epistolico a me factum (illud, credo, vis quod sub finem Epistolae XVI habetur) nimirum: Exposita serie numerorum $1, \frac{5}{6}, \frac{31}{30}, \frac{209}{140}, \frac{1471}{630}, \frac{10625}{2772}$ etc. si terminum inter 1 et $\frac{5}{6}$ intermedium, seriei congruum, exhibuerit Fermatius, exhibiturum me Hyperbolae Quadraturam: Id ego jam tum praestiteram. Est enim haec series eadem ipsa quae habetur Prop. 161 Arithmeticae Infinitorum; unde colligitur Hyperbolae quadratura Prop. 165. Ad quam nihil deest aliud, quam exhibitio numeri intermedii inter 1 et $\frac{5}{6}$ in illa serie, qui ita respiciat Ordinatas in Hyperbola, ut $\frac{5}{6}$ respicit earum Quadratura. Sicut enim ope seriei Prop. 133, nempe $1, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \frac{1}{630}, \frac{1}{2772}$ etc. colligitur Circuli Quadratura Prop. 135, ex intermedio numero inter 1 et $\frac{1}{6}$ in hac serie: sic Hyperbolae Quadratura colligitur ex numero intermedio inter 1 et $\frac{5}{6}$ in illa serie (suntque iidem denominatoris numeri, utriusque seriei). Potestque numerus ille Approximando, pluribus modis exhiberi (quod et a pluribus factum est) sed Accurate, credo (quod quaerebatur) numero finito non posse juxta receptam adhuc aliquam notationis formam.

Pariter, ut ope seriei 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{48}{105}$ etc. Prop. 118 colligitur Quadratura Circuli Prop. 121, ex numero intermedio inter 1 et $\frac{2}{3}$, sic ope seriei 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{28}{15}$, $\frac{288}{105}$ etc. Prop. 158 colligenda est Quadratura Hyperbolae, ex interposito numero medio inter 1 et $\frac{4}{3}$ (quae Hyperbolam exteriorem spectat).

Brounkeri Quadratura Hyperbolae (ex eisdem principiis) nempe posito (fig. 1) ABDE = 1, erit

$$\left.\begin{aligned} ABCdEA &= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{7\times 8}+\frac{1}{9\times 10}\ \text{etc.} \\ EdCDE &= \frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{6\times 7}+\frac{1}{8\times 9}+\frac{1}{10\times 11}\ \text{etc.} \\ EdC\gamma E &= \frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{4\times 5\times 6}+\frac{1}{6\times 7\times 8}+\frac{1}{8\times 9\times 10}\ \text{etc.} \end{aligned}\right\}\ \text{in infinitum.}$$

Quorum Demonstrationes ibidem habentur. Habetur in Philosophicis Transactionibus Londinensibus Num. 34 pro Mense Aprilis 1668. Quae tibi, credo, non displicebit.

Aliam autem ille tum ante mihi monstraverat (quae mihi potior videbatur), sed quam periisse credo (cum aliis ipsius scriptis) in aedium suarum conflagratione, et quam ego (post tot annos) non satis reminiscor.

Dum haec scripturus eram, ostendit mihi non-nemo, hesterno die, Acta Lipsiensia pro mense Junii praesentis Anni 1696. Quorum Eruditus Editor dignatus est inibi amplam meorum Operum Mathematicorum (Oxonii editorum) mentionem facere. Quo nomine me ipsi obstrictus sentio, et gratias habeo.

Sed conqueri videtur (saltem subinsinuare) quod, quum Newtoni methodos fusius exposuerim, de Leibnitianis parcius dixerim. At nolim ego Te (quem magni aestimo) a me quoquo modo laesum iri. Sed gratulor potius, Te, in tanta nobilitate positum, ad res nostras mathematicas descendere voluisse. Et tantum abest ut velim ego Tibi quocunque modo iniquus esse, ut, si qua ferat occasio, demerere malim.

Dum addit Eruditus Editor, illas me forte praeteriisse quod de illis mihi non satis constiterit: id omnino verum est.

Dicam utique quod res est (nec enim fateri pudet): Tuarum ego rerum nihil vidi quicquam, praeter haec duo. Quorum alterum illud est, quod inter Londinensium Collectiones Philosophicas habetur (sed absque Demonstratione) ex Actis Lipsicis descriptum, de

Quadrato Diametri ad Aream Circuli, ut 1 ad $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. in infinitum. Quod ego meis inserui (ut a Te factum) ad Algebrae meae Prop. 95. Alterum est illud de Testudine Quadrabili, cujus ego (ut de Tuo) mentionem feci in Algebrae meae postremo folio. Praeter haec duo, si plura viderim, non reticuissem.

Tuam Geometriam Incomporabilium vel Analysin Infinitorum (quam a Te ibidem memoratam dixi) ego nondum vidi; nec ejus quicquam vel de nomine ante inaudiveram quam prout ibidem ad ad calcem Algebrae dictum est.

Neque Calculi differentialis vel nomen audiveram, nisi postquam utrumque volumen absolverant operae, eratque Praefationis (praefigendae) postremum folium sub prelo, ejusque typos jam posuerant typothetae. Quippe tum me monuit amicorum quidam (harum rerum gnarus) qui peregre fuerat, tum talem methodum in Belgio praedicari, tum illam cum Newtoni methodo Fluxionum coincidere. Quod fecit ut (transmotis typis jam positis) id monitum interseruerim.

Sed et ante monueram Algebrae Prop. 95 pag. 389 (quod solum potui) Leibnitium et Tschirnhausium talia meditatos, sed quae ego non videram (necdum vidi).

Extant credo plura in Actis Lipsicis, sed quae ego non vidi: uti nec Tu, credo, vidisti Brunkeri Quadraturam Hyperbolae, quae extat in Transactionibus Londinensibus. Mihique condonari potest hac aetate (qui annum octogesimum superavi) si non omnia sciscitarer.

Noveram quidem jamdudum (et indicavi) de rebus hujusmodi nonnulla Te meditatum esse, Tibique cum Newtono (mediante Oldenburgio) intercessisse literas quasdam Tuas: sed quas ego non vidi, nec scio quales fuerint. Eratque Oldenburgius diu mortuus, ut non potuerim ab illo sciscitari. Rogabam quidem (per literas) Newtonum nostrum, ut, si eas penes se haberet, earum mihi copiam faceret literarum; sed retulit ille, se non habere. (Et quidem periisse credo, flammis inopinato correptas, cum pluribus Newtoni scriptis, meliori luce dignis, et, nisi per me stetisset, periissent etiam Newtoni literae). Eoque animo rogabam, ut tuas illas cum Newtoni literis junctim ederem. Idque etiamnum, si ferat occasio; facturus forte sum, modo mihi dignaberis eorum copiam facere.

Quod Henricus Oldenburgius fuerit Bremensis, et Nicolaus Mercator, Holsatus (quod suggerit Eruditus Editor), omnino verum esse credo; saltem Anglos non fuisse, satis novi (eosque Germaniae vestrae non invideo). Adeoque non Nostrates dixi, sed apud Nos. Nec tamen ideo minus eos vel amavi vel aestimavi. Nam mihi perinde est qua quis gente sit (Tros Tyriusve foret, nullo discrimine), modo sit vir bonus et bene meritus. Sed apud nos diu vixerant, et quicquid hac in re fecerint, apud nos factum est.

Quae fusius exposui, ut sentias quam Tibi non iniquus fuerim, aut parum candidus.

Ubi autem Eruditus Editor extenuatum it meas Methodos, quasi ad solas figuras integras, non ad earum partes se extenderint: non id malo animo factum judico, sed quod non satis ad hoc attenderit, quod Altitudo A (quam pro numero terminorum substituo) ubi tota figura consideratur, intelligenda est de altitudine totius figurae; sed ubi de segmento agitur, intelligenda est de alitudine istius segmenti. Pariterque Terminus Ultimus, illic de ultimo totius figurae, hic de ultimo istius segmenti (quod ego alicubi, ni male memini, insinuavi). Atque sic, meae methodi (caute adhibitae) de segmentis pariter procedunt atque de figuris integris. Et quidem segmentum illud est Figura.

Miror autem eum dixisse pag. 254, me quoad totum spatium Cycloidale, non vero quoad segmenta, rationem accommodasse, cum manifestum sit, me ostendisse, tum totam Cycloidem totius Circuli triplam esse, tum partem partis respective sumptae triplam (quod Dettonvilius seu Pascalius non ostendit, nec, quod sciam, ante me quisquam alius). Et de Cissoide similiter.

Dicit, Quadraturas meas (aliquas, credo, vult, non omnes) Fermatio, Robervallio et Pascalio ante fuisse notas. Quod si sit, clam me fuit; nec scio id ab illis ante fuisse editum, nedum demonstratum. Nominasset ille potius Cavallerium, qui (in Tractatu de usu Indivisibilium in Potestatibus Cossicis) Paraboloidum Quadraturas aliquas ante exhibuerat et demonstraverat (unde forsan illi alteri habuerint), sed me tunc inscio, et ex aliis Principiis.

Quod notat de meo per Inductionem processu (quod quadantenus verum est) de hoc abunde dictum est Algebrae cap. 78 et 99. Sed et recordandum erat, me non tam methodum Demonstrandi tum docere, quam methodum Investigandi (et quidem novam et minime contemnendam, quod ne quidem adversarii negare poterunt) cui methodus Inductionum apprime convenit. Quod si, ubi haec ego rite investigaverim, velint alii (demonstrationibus Apagogicis) porro confirmare, per me licet. Ego quantum satis est, me confirmasse existimo.

Quod autem queritur, me Demonstrationem ne pro una quidem serie attulisse, id factum videat (ut de Monadicis et Lateralibus nihil dicam) Algebrae cap. 78 de Quadraticis et Cubicis (Archimedea Methodo) ut Paradigmata id ipsum faciendi in seriebus sequentibus, quousque quis voluerit. Quod et Clarissimus Bullialdus in pluribus fecit.

Ubi autem notat, Inductionem non pariter applicabilem seriebus pro Ordinatis Irrationalibus: huic facile subvenitur. Verbi gratia, Cum ostenderim Complementum Parabolae (quae est series Secundanorum) esse $\frac{1}{3}$ Parallelogrammi circumscripti, hinc statim sequitur, Parabolam ipsam (quae est series subsecundanorum) esse $\frac{2}{3}$ ejusdem Parallelogrammi (prop. 23 Ar. Infin.). Et de reliquis similiter.

Et nullus dubito, quin, cum praejudicium deposuerint aemuli, tandem agnituri sint, insignem hanc fuisse Matheseos promotionem (quod et a plurimis factum video). Fatebuntur saltem, abunde satis, pro prima vice in tractatu non longo ostendisse me de hac methodo (nova quidem et satis foecunda) ejusque utilitate, quae possit ab aliis indies promoveri.

Quippe haec non dicta sunt, quasi nollem ego, aut non posse putem, hanc ultra promoveri (aut etiam promotam esse), quin id ipse feci in libris aliis post editis, ipseque (tum alibi passim, tum) ad operis hujus calcem suggerebam; quod et fore praesagiebat Oughtredus noster (hujusmodi rerum judex idoneus) deque eo mihi gratulatus est. Ipseque tantum abest ut id nollem, ut mihi potius gratuler, quod videam, me adhuc vivo, hoc contigisse. Sed de his hactenus.

Cycloidis inventionem ego (cum hoc Authore) Galileo potius tribuerim, quam Mersenno, quamvis et hic potuerit, suo marte, id ipsum cogitasse. Sed multo adhuc antiquiorem hanc figuram reperio, inter Cardinalis Cusani opera quae habemus Manuscripta (circiter Annum 1454) pulchre delineatam, eadem forma quae est apud Dettonvillium, posito Circulo Genitore in ejusdem altero vel utroque extremo. In Manuscripto, dico: nam in Codicibus editis perperam describitur. Atque apud Bovillum extare dicitur circa Annum 1510.

De invento Nelii, qui (traditis a me ad prop. 38 Ar. Infinitorum insistens) primus omnium exhibuit aequalem curvae rectam: quod dixerat Hugenius (eum non procul abfuisse, non tamen omnino assecutum) id post retraxit Hugenius (in suis ad me literis) jussitque ut id iterum Nelio assererem. Nam Nelius statim sciverit per omnia, qualis fuerit illa curva, ego non certus scio: sed Brunkerus et ego protinus deteximus Paraboloidem esse, cui ego nomen feci semi-cubicalem.

Nolim autem Celeberrimum Editorem dubitare (quod praecavere satagit) quin ego Vestratibus et inventis vestris favere fuero proclivis, non invidere vel extenuare: qui aliorum inventa soleo candide aestimare, aut etiam benigna interpretatione adjuvare (quod de Cavallerii Methodo Indivisibilium factum puto, quam ego sic expono ut Mathematicum ferre possit rigorem, a quorundam exceptionibus libera) qui plurima Brounkeri, Wrenni, Nelii, Hugenii, Mercatoris, Newtoni, Caswelli, aliorumque inventa conservavi, quae, nisi ego ediderim, periissent (dum ipsi sua edere neglexerint), de tuis paria facturus, si ad manus meas pervenerint. Scio quidem mihi Gallorum aliquos (non omnes tamen) aliquatenus infensos esse*) (sed immerenti), id autem de Germanis vestris nolim suspicari, nec velim ut tale quid de me suspicentur ipsi.

Si petis, quid ego nunc ago? Post edita Ptolomaei Harmonica, Porphyrii in eum Commentarium, et Bryennii, jam edo, quatenus per preli moras licet, ut tandem Musicae Scriptores Graecos (qui extant) omnes editos habeamus. Vale etc.

Salutatum velim (si ferat occasio) meo nomine, Celeberrimum Actorum Lipsicorum Editorem.

*) eo potissimum, quod Harrioti meminerim, quem ipsi mallent ignoratum. Später hinzugesetzt.

II.

Leibniz an Wallis.

Literae Tuae beneficio Domini Cresseti, Ablegati ad Aulas nostras Regii, mihi sunt redditae, quibus non tantum schedae cuidam meae humanissime respondes, desiderioque meo satisfacis, sed et occasione Recensionis Operum tuorum Mense Junio anni superioris in Actis Lipsiensibus exhibitae, quaedam monita erudita et (ut verbo dicam) Te digna, mecum cummunicas.

Et quoniam videris nonnulla in Actis dicta ita accepisse, quasi animi parum erga Germanos aequi accuseris, et quasi vicissim tua recensendo extenuentur: putavi non ingratum Tibi fore, si Epistolam Dominis Editoribus Actorum scriberem (cujus hic exemplum addo*), qua si ipsis videretur Actis iisdem inserta, satisfieri Tibi, scrupulis illis sublatis, possit.

Ego qui Te magni facio, et publice professus sum, quantum meo judicio Tibi debeat altior Geometria, aequissimum puto viris praeclare non de suo tantum seculo, sed et posteritate meritis debitas gratias rependi. Ut autem animi mei certior esse possis, ecce verbotenus transcripta quae ipse de Tuis meritis Geometricis dixi, Actorum Lipsiensium Mense Junio anni MDCLXXXVI pag. 298:

„Paucis dicam, quid potissimum insignibus nostri seculi „Mathematicis in hoc Geometriae genere mea sententia debeatur.

„Primum Galilaeus et Cavallerius involutissimas Co- „nonis et Archimedis artes detegere coeperunt.

„Sed Geometria Indivisibilium Cavallerii, Scientiae renascentis „non nisi infantia fuit. Majora subsidia attulerunt Triumviri cele- „bres, Fermatius, inventa methodo de Maximis et Minimis, „Cartesius, ostensa ratione lineas Geometriae communis (Trans- „cendentes enim exclusit) exprimendi per aequationes, et P. Gre- „gorius a S. Vincentio, multis praeclaris inventis. Quibus „egregiam Guldini regulam de Motu Centri Gravitatis addo.

„Sed et hi intra certos limites constitere, quos transgressi „sunt Hugenius et Wallisius, Geometria inclyti. Satis enim

*) Dieser Brief Leibnizens an die Herausgeber der Acta Erudit. ist Act. Erudit. mens. Jun. 1697 abgedruckt.

„probabile est Hugeniana Heuratio, et Wallisiana Neilio et Wrennio, „qui primi Curvis aequales rectas demonstravere, pulcherrimorum „inventorum occasionem dedisse. Quod tamen meritissimae laudi „inventionum nihil detrahit.

„Secuti sunt hos Jacobus Gregorius Scotus et Isaacus „Barrovius Anglus, qui praeclaris in hoc genere Theorematibus „scientiam mirifice locupletarunt.

„Interea Nicolaus Mercator Holsatus, Mathematicus et „ipse praestantissimus, primus, quod sciam, quadraturam aliquam „dedit per seriem infinitam.

„At idem inventum non suo tantum Marte assecutus est, sed „et universali quadam ratione absolvit, profundissimi ingenii Geo-„metra, Isaacus Newtonus, qui, si sua cogitata ederet, quae „illum adhuc premere intelligo, haud dubie nobis novos aditus ad „magna Scientiae incrementa compendiaque aperiret."

Quibus deinde nonnihil de iis addo, quae mea opera acces-sere, praesertim dum novo Calculi genere effeci ut etiam Algebram transcendentia, Analysi subjiciantur, et curvas, quas Cartesius a Geometria male excluserat, suis quibusdam aequationibus explicare docui; unde omnes earum proprietates certo calculi filo deduci possunt. Exemplo Cycloeidis, cui aequationem ibidem assigno $y = \sqrt{2x - xx} + \int \frac{d\overline{x}}{\sqrt{2x - xx}}$, ubi $\int$ significat summationem, et differentiationem, x abscissam ex axe inde a vertice, et y ordinatam normalem.

De Te autem queri nunquam mihi in mentem venit; quem facile apparet nostra, in Actis Lipsiensibus prodita, non satis vidisse.

Quae inter Oldenburgium et me commutatae sunt literae, quibus aliqua accesserant a Dn. Newtono, excellentis ingenii viro, variis meis itineribus et negotiis ab hoc studiorum genere plane diversis vel periere, ut alia multa, vel jacent in mole chartarum aliquando excutienda digerendaque, ubi a necessariis occupationi-bus vacatio erit, quam mihi tam subito, quam vellem, promittere non possum.

Caeterum libens ex Tuis literis intelligo, quod ego a Te fieri desiderabam, et ex Tuis meditationibus sequi judicabam, jam in ipsa Tua Arithmetica Infinitorum fuisse factum; et in Hyperbola idem quod in Circulo praestitum esse, quod mihi Tua nunc ad manum non habenti non apparuerat, et olim legenti aliter visum fuisse memoria decepta suggesserat. Interim vellem existeret qui tuam illam Methodum prosequeretur ad altiores vel magis compositas lineas. Nam utilitate sua non caret.

Cum videam in recensione dici, Methodum Arithmeticae Infinitorum porrigi ad quadraturas segmentorum, sed tantum ad totales, Tuas vero literas contrarium asserere: rem accuratius inspicere volui in exemplo Cissoidis, cujus tam recensio, quam tuae literae mentionem faciunt. Et visum mihi est, applicationem ad segmenta non carere difficultate, quia locum non facile habent collectiones numerorum in unum. Exempli gratia, pro Cissoidis spatio totali metiendo ais: Si series subsecundanorum $\sqrt{a}$ ducatur respective in seriem primanorum inversam $D - a$, fiet series $D\sqrt{a} - a\sqrt{a}$, quae est ad seriem aequalium sive totidem $D\sqrt{D}$, ut $\frac{2}{3} - \frac{2}{5}$ ad 1 seu 4 ad 15. Et eodem modo quaeruntur hujusmodi aliae proportiones, quibus denique interpolatio interseritur, cujus ope pulchre invenitur area integri spatii Cissoidalis, ex supposita Circuli Quadratura. Verum in partialibus segmentis duo termini generaliter in unum numerum addi non possunt. Unde illa numerorum in unum collectorum elegans in totalibus progressio, qua nititur interpolatio, cessare videtur in partialibus seu segmentis in universum sumtis. Equidem si ultimae *a* assignemus certam rationem ad D, rursus collectio fieri poterit, et fortasse tunc novae progressiones orientur, praesertim si ultima *a* certa lege varietur. Nescio tamen an tunc facile futurum sit pervenire ad progressiones numerorum aptas interpolationi: saltem novae in eo necdum a Te ipso publice exhibitae inquisitionis materia foret. Itaque optarem a Te ostendi, si commode fieri potest, quomodo Methodum illam tuam ad Segmenta Cissoidis, aliaque id genus applicari posse arbitreris: quandoquidem ejus rei spem facere tuae Literae videntur.

Jucundum lectu mihi fuit et ad Historiam Scientiae locupletandam notatu dignum videtur, quod indicas, Cycloeidis aliquam descriptionem jam extare apud Cardinalem de Cusa. Manuscriptum operum ejus Codicem, quam apud vos haberi memoras, Oxonii ni fallor extare eo ipso indicas. Ut vicem aliquam reddam (nam Cusanus erat natione Germanus), admonebo in recensione eorum qui Calculo valuere olim, quos tua memorat Algebra, praetermitti Johannem Suisset Vestratem, κατ' ἐξοχὴν dictum Calculatorem, quod gradus qualitatum seu formarum calculo subjecisset. Memini me nonnulla ejus Manuscripta videre in meis itineribus, quae vel ob tempus autoris edi digna videbantur. Scis a Julio Caesare Scaligero aliisque magni fuisse factum, et alios quosdam Scholasticos quaedam Semimathematica ejus exemplo dedisse, quae exstant.

Qui Algebram Tuam in Actis Lipsiensibus 1686 p. 283 recensuit, optavit, ut de Arte Divinandi occulte scripta, in qua egregia a Te specimina data ait, aliquid ederes. Verba ejus haec sunt:

„Caeterum cum celeberrimus Autor, quemadmodum intelleximus, excellat in solvendis, vel ut vulgo loquuntur Deciphrandis „Cryptographematibus, eaque Scientia magnam cum illis quae „hoc opere traduntur affinitatem habeat, orandus magnopere „est ut praecepta ejus tradat, praesertim cum ea quae hactenus prostant, valde sint imperfecta. Ita in hoc quoque genere „Vietae laudes aequabit, imo vincet, si duraturo ad posteritatem „specimine ostendat, quod illum fecisse solo Thuani testimonio credere cogimur."

His ego nunc meas preces adderem, nisi gravis aetas tua obstaret, in qua aequum est gaudere Te ac frui anteactorum laborum gloria, non vero ad novos labores vocari. Si qui tamen adessent Tibi juvenes ingeniosi et discendi cupidi, possent coram paucis verbis a Te multa discere, quae interesset non perire.

Postremo adjiciam, intellectum mihi ex aliorum libris, praeclare nuper a Te fuisse scriptum de sacrosancta Trinitate. Id mihi pergratum fuit ob Argumenti dignitatem, quod tractari a Viro compertae profunditatis et ἀκριβείας, publice interfuit.

Non dubito quin multas in variis doctrinae partibus, sed praesertim in Physicis et Mathematicis, cogitationes adhuc premas, quas vel per saturam et per compendium annotari conservarique magis optarem, quam ut antiquos Musicos Graecos nobis des restitutos, qui multo majora ipse per te potes. Vale etc.

Dabam Hannoverae $^{19}/_{29}$ Martii 1697.

III.

Wallis an Leibniz.

Oxoniae Apr. 6. 1697.

Literas Tuas humanissimas Martii $^{19}/_{29}$ Hannoverae datas accepi (et exosculatus sum) Martii 31 stilo nostro 1697, hoc est, Apr. 10 stilo vestro. Mihique gratulor quod Nobilissimo Viro Ego Meaque non displicuerint. Veniam interim exorare debeo, si locorum distantia fecerit, ut eruditissima tua scripta et inventa minus ego sciverim aut intellexerim, quam vellem; et quidem, quis sit ille Tuus Calculus Differentialis, non satis mihi compertum sit, nisi quod mihi nuper nunciatum est, eum cum Newtoni Doctrina Fluctionum quasi coincidere.

Nec pudet me meam hac in parte ignorantiam fateri, qui jam ab aliquot annis contentus fuerim (hac aetate) lampadem tradere, aliisque permittere, ut promoveant ea quae (si qua) ego non infeliciter detexerim.

Quod Literas scripseris (in mei gratiam) ad Editores Actorum Lipsicorum, favori tuo debeo, et grates habeo.

Quis eorum ille sit qui mea scripta recensuit in Actis Lipsicis pro mense Junii 1696, ego quidem non scio, sed ei gratias habeo. Neque enim est cur ego ei succensere debeam, si non (primo intuitu) statim perspexerit omnia quae penitius rimanti occurrissent, aut etiam sint occursura. Sufficit enim instituto suo, ut summa quaeque carpat et magis obvia, Lectoribus permittendo, si penitiora desiderent, apud Authores indicatos quaerere.

Nolim autem existimet quod in Gentem Vestram minus aequo sim animo; nam secus est.

Quod Methodos meas in Arithmetica Infinitorum putaverit ad Integras tantum Figuras pertingere, et non item ad earum Partes, inde factum credo, quod non satis attenderit ad Prop. 66 (ubi docetur, Ex cognita magnitudine seriei Integrae, cognosci magnitudinem ejusdem obtruncatae) aliasque quae huc spectant, puta Prop. 67, 68, 69, 70, 71, 72, 108, 109, 110 etc.

Quod autem ad Spatia Cycloidalia partialia non pertigerint meae methodi, non dixisset, si ad Mechanicorum Cap. 5 Prop. 20 advertisset, ubi docetur Semicycloidem Semicirculi totam totius Triplam esse, et partes partium respective sumptarum. Atque ad eandem formam dictum est Prop. 17, 18, 19, 21, 22.

Et quidem ego primus omnium (eorum qui figuram hanc tractaverunt) Cycloidis sic in partes suas resolutionem, secundum ipsius Anatomiam veram, ostendi: eoque insignem huic toto negotio affundi lucem (pariterque in figuris aliquot aliis). Aliisque ansam dedi, hujus imitatione, figuras alias sic resolvendi.

Respective sumptarum, inquam, non autem utcunque sumptarum, sed debito modo sumptarum, secundum cujusque Figurae veram Anatomiam.

Sed, inquis, Preli mendo (Actorum pag. 254) irrepsit vox Cycloidale, ubi dicendum erat Cissoidale. (Esto.) Totumque Cissoidale spatium me redegisse ad meas Methodos, non autem Partialia. Recte quidem (nempe non in eo ad Hugenium Tractatu Epistolari). Interrogatus enim eram de Cissoide tota (et ad interrogata respondi), non de Partibus (quod enim ibi de Partibus dicitur, Hugenius post suggessit quam id Responsi dederam.)

Sed ad Mechanicorum Cap. 5 Prop. 29 idem videas de Cissoidis partibus praestitum, quod erat de partibus Cycloidis, et utriusque figurae consensum ibidem indicatum. Non autem eadem prolixitate Cissoidem ibi prosequor, qua usus fueram ad Cycloidem, ejusque Solida, et solidorum superficies, Centraque Gravitatis omnium (ut nec alias figuras aliquot) quia sic opus in immensum excresceret.

Sed Cycloidem fusius prosequutus sum, ut sit Paradigmatis loco, ad cujus imitationem possit quis (cui libet et vacat) figuras alias tractare (mutatis mutandis pro cujusque figurae Charactere), sive ex duabus sive ex pluribus figuris implicatis constet istiusmodi figura Composita. Nam Methodi meae ratio est ibi satis evidens attente consideranti.

Ubi autem notas, difficultatem aliquam esse in accomodando ea, quae de Cissoide Tota dicuntur, ad ejus Partes: dicendum est, Ingenio opus esse (ubi Figura Composita est ex pluribus implicatis componentibus) ad disquirendum (ex Figurae Constructione) quae partes hujus, quibus illius componentium figurarum partibus, consociandae sint (praesertim ubi dissimili situ ponuntur figurae componentes) atque tum demum, partibus sic detectis, accommodandae sunt meae methodi. Quod a me factum videas in Cycloide, Cissoide, Conchoide, aliisque.

Sic ego distribuo Semi-Cycloidem (non ut Lanius, sed ut Anatomista) in Semicirculum et Figuram Arcuum, quibus separatim meas methodos adhibeo. Est utique Cycloidis Ordinata $f = a + s$, aggregata ex Arcu et Sinu recto; ejusque continua Incrementa (quas vos Differentias dicitis) aggregata ex incrementis horum. Et, ubi ad curvam ipsam respicitur, Obliquitas Tangentis in quoque puncto (propter Figuram Arcuum ex loco suo detrusam et luxatam, ob interjectum Semicirculum) quae est istius Puncti obliquitas (angulum intelligo quem ad Axem facit illa Tangens) componitur ex Tangentium utriusque figurae Obliquitatibus (et quidem si tertia quartave interponeretur figura, componeretur ex omnium obliquitatibus). Unde originem ducit Newtoni Doctrina Fluxionum, et Vester (si eum satis intelligo) Calculus Differentialis. Sic Conchoidem dirimo in Quadrantem Circuli et Figuram Tangentium. Ordinata in Cissoide est ad Ordinatam in Semicirculo, et interceptum Axem, tertia continue proportionalis: atque ex talibus Tertiis conflatur ea figura.

Quod meam Interpolandi methodum spectat, ea minima pars est mearum methodorum de Infinitis; atque tum demum in subsidium advocatur, cum intervenit Radix universalis (sive Binomii, sive Apotomes). Quo casu non expedienda res videtur (veris numeris) nisi per eam, quam ego voco Continuam Approximationem, alii Seriem convergentem, alii Seriem infinitam. Quae praesumit (quod nescio an me prior quispiam animadvertit) Aequationes intermedias inter (quas vocamus) Laterales, Quadraticas, Cubicas etc. Ubi autem non talis intervenit Radix Universalis, directe procedunt meae methodi.

Ubi dicitur, Nicolaum Mercatorem primum esse qui Quadraturam aliquam dedit per Seriem Infinitam: vide annon mea talis sit, Ar. Infin. pr. 191,

$$\square = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \text{ etc.}}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \text{ etc.}}$$

et Brunkeri $\square = 1\,\cfrac{1}{2\,\cfrac{9}{2\,\cfrac{25}{2\,\cfrac{49}{2\,\cfrac{81}{2} \text{ etc.}}}}}$

Sed et omnes mearum Tabellarum series (in Arithmetica Infinitorum) sunt Series Infinitae; et earum plurimae quales quae Vobis dicuntur (novo nomine) series Transcendentales.

Nolim utique ut Clarissimo Viro fraudi sit nova Compellatio. Nam quas ego vocaveram Continuas Approximationes, vocat Jacobus Gregorius Series Convergentes, et Newtonus, Series Infinitas; sed res eadem est. Sic quod ego vocaveram Centrum Percussionis, vocat Hugenius (novo nomine) Centrum Oscillationis; sed eadem res est. Et Fermatii Hyperbolae Infinitae eaedem sunt cum meis Seriebus Reciprocis. Et Galilaei Cycloides, Mersenni Trochoides, mea Cyclois, et Cusani Curva (quocunque nomine dicitur) sunt res eadem. Sic Rectificata Curva Nelii, et Curva Heuratii, et Curva demum Fermatii, eadem est cum mea Paraboloide Semi-cubicali. Et Gallorum Socia Cycloidis est ea Curva quae (mihi) terminat Figuram Sinuum rectorum. Et, ni fallor (sic saltem mihi nunciatum est), Newtoni Doctrina Fluxionum res eadem (vel quam simillima) quae vobis dicitur Calculus Differentialis: quod tamen neutri praejudicio esse debet. Et annon Fermatii Methodus de Maximis et Minimis (quae qualis sit non certus scio, nec scio an uspiam sit publici juris facta) non sit reapse idem processus quem ego adhibeo (nominis ignarus) in Parabolae, Hyperbolae, Ellipseos (aliarumque Curvarum) Tangentibus investigandis (in Tractatu de Conicis Sectionibus et alibi) sic variandus ut cujusque Curvae Character postulat: qui (ni fallor) Apollonio dicitur *περὶ μοναχῶν*. Estque Curvarum duarum Tactus, punctum illud quo Recta utramque tangit.

Suiceti (an Suisseti) nomen (ni fallor) Rogerus fuit (certe, non Johannes) et nescio an quicquam praestiterit in Algebra; sed erat Vir alias subtilis ingenii.

Cusani Figuram Cycloidis transcriptam habebis ex Codice MS., qui hic habetur in Saviliana Bibliotheca Mathematica (ex dono meo) *).

Quod memoras de Arte divinandi Occulte Scripta, est ea res non certis regulis coercenda propter infinitam varietatem Ciphras

*) Das, was Wallis über die Cycloide des Nicolaus von Cusa ursprünglich auf einem Zettel bemerkt und Leibniz zugeschickt hatte, ist in dem folgenden Excerpt weiter ausgeführt.

ponendi (et quarum difficultas, jam satis ardua, quotidie crescit) quae a conjecturis principio positis inchoanda est, quae prout succedere vel non succedere deprehenduntur; vel prosequendae sunt vel mutandae, donec quid certi constat. Sed tanti laboris res est, ut vix sit qui velit ediscere. Misi tamen (ex multis) Exemplar unum Epistolae Cipheris scriptae, prout ea ad manus meas pervenit intercepta, cum ejusdem Expositione a me praestita, ad Dn. Editorem Actorum Lipsicorum. Quod ad manus ejus perventurum spero (saltem opto), quamvis nesciverim illum de nomine compellare.

Quae ego de S a c r a T r i n i t a t e conscripsi (lingua Anglicana), quomodo ad Te transmittam nescio. Si quis autem ex Bibliopolis Vestris commercium habeat cum nostris Londinensibus, haberi possunt apud Thomam Parkhurst, Bibliopolam Londinensem, qui ea edidit.

Quando autem ego alicubi insinuaverim Cavallerii G e o m e t r i a m I n d i v i s i b i l i u m non aliam esse quam Veterum Methodum E x h a u s t i o n u m compendiosius traditam, nolim quis id a me dictum putet in ejus derogationem, sed in ejusdem confirmationem. Cum enim objecerint aliqui, non id esse Geometriae consonum, ut (verbi gratia) ex Lineis Rectis (nullius latitudinis) compleri censeatur Superficies Plana: per Rectas hasce (commoda interpretatione) intelligenda dixerim Parallelogramma, quorum latitudo sit infinitesima pars Altitudinis totius figurae, qualibus, numero infinitis, compleri posse spatium illud, satis Geometrice dici possit; saltem, ex talibus fieri figuram vel inscriptam vel circumscriptam, quae inter se differant (adeoque et ab exposita figura) dato minus. Atque sic intellectum, eodem fundamento niti cum Veterum Exhaustionibus, nec magis convelli posse quam illae, aut ἀγεωμετρησίας incusari. Qua benigna interpretatione non laesum iri putem Cavallerii methodum, sed adjutum, ut quae compendiosius tradat, aliorum prolixiores Exhaustiones. Atque haec sunt quae ad humanissimas Tuas literas respondenda censui. etc.

2*

Beilage.

Excerptum ex Epistola Wallisii Maji 4, 1697 in Philosophicis Transactionibus Londinensibus pro Mense Junio 1697 memorata, de Cycloide Cardinali Cusano cognita, circa Annum 1450, et Carolo Bovillo, circa Annum 1500.

Enarrat Torricellius inter opera sua Mathematica Anno 1644 edita, quod Cycloidem consideraverat Galilaeus tum ante annos 45 (adeoque Anno saltem 1599, aut adhuc prius) quodque adjacentis Figurae Quadraturam adgressus fuerit (et quibus modis sit aggressus), sed non est assecutus.

Eandem Curvam Anonymus quidam Gallus in l'Histoire de la Roulette, Anno 1658 Gallice edita, Mersenno tribuit, ut qui Anno 1615 (primus omnium, ut ipsi videtur) eam Gallis suis considerandam proposuit, la Roulette dictam, seu Trochoidem, non quod ipse Figurae Quadraturam invenerit (aut quidem aggressus fuerit), sed quod considerandam proposuerit.

Et quidem omnino fieri potest, ut Mersennus per se in eandem Curvam inciderit (nolim enim meritissimo Viro quicquam derogare) nescius eam a Galilaeo fuisse ante consideratam. Num autem id sciverit aut nesciverit Mersennus, non constat. Utcunque vero (sive sciverit sive non sciverit) Mersenno non debet praejudicio esse aut vitio verti, quod eam porro considerandam proposuerit. Certum enim est, eam (sive Curvam, sive Figuram adjacentem) non fuisse tum temporis ita perspectam prout nunc est.

Anno demum 1644 Torricellius suam edidit Figurae Quadraturam (Demonstratione munitam), nempe Cycloidem esse Circuli Genitoris Triplam, Modumque ducendi Tangentes. Et quidem primus omnium, quod sciam, haec edidit.

Sed Robervallium, ajunt, Anno 1634 hanc Quadraturam prius invenisse, quamvis ea non fuerit typis edita (nec quidem scio an etiamnum sit). Quod quidni verum sit, non video: quamvis id nesciverit Torricellius.

At certum est, neque Mersennum, neque Galilaeum, primos esse qui Curvam hanc consideraverunt. Extat enim apud Carolum Bovillum, inter opera sua Mathematica Annis 1501, 1503, 1510 edita, et speciatim in eo ubi agitur de Circuli Quadratura. Ubi inter alia plura ostendit, quod (dum Circulus super rectam in plano volvitur perimetro aequalem) quodlibet Peripheriae punctum (ascendendo et descendendo) Curvam describit (nempe eam quam jam Cycloidem dicimus) et quidem quodlibet in Circuli plano Punctum intra Circulum (solo centro excepto) ascendendo et descendendo Curvam itidem describit (nempe qualem jam dicimus Cycloidem Protractam), Centro autem describitur Recta, perimetro aequalis.

Ostendit item, quod Parallelogrammum intra quod volvitur Circulus (illud, puta, Cycloidi circumscribitur) est Circuli Quadruplum. Unde foret illatu facile, quod (si eximatur, medio loco, Circulus qui est Cycloidis Axi circumpositus) Parallelogrammi reliquum foret Circuli Triplum. Quod vix aliud est quam distorta Cyclois; saltem huic aequatur. Vel, si auferatur id quod est extra Cycloidem (quod ostendi potest Circulo aequale), manebit Cyclois, Circuli Tripla. Verum hoc ea aetate non innotuit.

Sed et (ante Bovillum) Cardinali Cusano notam fuisse constat. Quem in plerisque sequitur Bovillus, ab eo plurima mutuatus (quod qui utrumque legerit, non dubitabit) quem et aliquoties citat.

Extat utique in vetusto Codice Manuscripto (quem ego nuper intuli in Bibliothecam Mathematicam Oxoniae, quam Savilianam dicimus) a quodam Johanne Scoblant Aquisgrani descripto Anno 1454, vetusto Charactere qui eam aetatem sapit. Aquisgrani, inquam; sic enim lego quod ibi scribitur Aquisg'.

Id liquet ex Notis, quas ad variorum Tractatuum calcem subjunxit Scriba, quo die fuerit Tractatus ille absolutus. Nempe ad calcem unius: Finivi Aquisgrani Anno Dom. 1451, Octava Sci.ª Leopardi J. Scoblant. Ad calcem alterius: Ipsa die Annuntiationis 1454 Aquisgrani, Jo. Scoblant. Ad calcem hujus de quo agitur: Jo. Scoblant Aquisgrani 1454, Febr. die S. Mathiae. Ad calcem alterius: Per me Jo. Scoblant 1454 Aprilis die 18. Ad calcem ultimi: 1454. 28 Aprilis, per Jo. Scoblant Script'. Ut de Codicis antiquitate non sit dubitandum. Quanto autem prius Tractatum hunc conscripsit Cusanus, quam Codicem hunc descripsit Scoblantus ille, non liquet. Certe non multis annis: quippe in Pontificatu Papae Nicolai V, cui dicatur.

Hic inter opuscula quaedam Cardinalis Cusani (ubi agitur de Quadratura Circuli, Mechanice perficienda) conspicitur haec Figura.

Codicem cito MS., quia in Codicibus Editis Figura perperam describitur. Et quidem in MS. haud satis accurate, sed rudiori manu descripta est (prout sunt istius Codicis Figurae omnes) et a Scriba qui videtur rem ipsam haud satis intellexisse. Sed, quae (ad mentem Cusani restituta) sic se habet (fig. 2). Ubi notandum est (ex antecedentibus apud Cusanum), quod bp est ipsi constans character quo designat Semi-diametrum Circuli expositi: et ab constans character quo designat Rectam aequalem ejusdem Perimetro, puta, quam Circulus super planum volutus commensurat suae Perimetrō aequalem. His praesuppositis, Cusani verba (quae hanc Figuram spectant) rite intelligantur. viz.

„Dato Circulo, Quadratum aequale assignare. Hoc sic facito: Inter bp [hoc est, Semidiametrum expositi Circuli] et medietatem ab [hoc est, medietatem Rectae quam Circulus super Planum volutus commensurat suae perimetro aequalem] recipias medium proportionale, per nonam Sexti Euclidis [intellige, secundum Editionem Campani, quae est in Editione Clavii, 13 e 6] quod est costa Quadrati aequalis.“

Haec est Cusani Constructio hujus Figurae, suis verbis. Unde manifestum est, quod (coincidentibus punctis p, a in puncto contactus prioris Circuli) Curva quam describit p punctum, dum Circulus volvitur ab a ad b (cui nomen non assignat Cusanus), est ea Curva, quam jam Cycloidem aut Trochoidem dicimus: rectaque Contactuum puncta conjungens, est (quae jam dicitur) Basis Cycloidis, quodque ab seu pb aequalis censeri debet Perimetro expositi Circuli. (Secus enim, Costa Quadrati Circulo aequalis non foret media proportionalis inter medietatem hujus et Semidiametrum expositi Circuli).

Quod cum Scriba non satis animadverterit, rudi manu figuram delineavit, Circulos describens justo majores; Punctumque p, quod ponendum erat in Circuli peripheria, ille paulo inferius ponit; Punctumque b, quod ponendum erat in contactu posteriori, ponit ille paulo citra; Curvamque, puncto p descriptam, quae terminanda erat in ipso puncto posterioris contactus, ille paulo ultra terminat. Quae facile excusanda forent.

Sed et (quod rem totam manifesto mendo perturbat) Costam infimam Quadrati Circulo aptati (quae ponenda erat paulo supra Figurae Basin) ille cum Base confundit, quasi in ipsa Base producta jaceret.

Quam figuram (ut in MS. comparet rudiuscule delineata) libet hic fideliter exscriptam exhibere, ut Lectori constet quid fieri debuit ad mentem Cusani, et quid factum sit ex imperitia Scriptoris (fig. 3).

Atque hoc idem peccatur in Libris Editis, ubi, inter alia plura opera Cusani, edita Basileae 1565 (sed et, credo, multo prius), habetur Tractatus hic De Mathematicis Complementis, cum Annotationibus cujusdam Omnisancti, qui (praeterquam quod Costam illam infimam vel non posuit, vel perperam posuit) Figuram nimis contrahit, et pro Curva Cycloidis perperam pingit Arcum Circuli, omnino contra mentem Cusani, quam ille non satis intellexit. Figuram illam non appono: ut nec figuras quae apud Bovillum habentur, ut quae conspiciendae habentur in libris Editis.

Cusanus autem, postquam hanc Quadrati Costam (seu Latus) in hoc Schemate designaverat pro uno aliquo Circulo, procedit (in alio Schemate) ad mechanismum suum pro alio quovis Circulo accommodandum. viz.

„Et medietatem Costae signa in linea, quae ad angulum rectum conjungitur hp in Centro, et sit hr, trahendo pr; et habes angulum hpr: quem facito ex aere aut ligno. Et, modo quo supra, cum illo omnes Circulos quantocyus quadrare poteris."

Nempe, formato hoc angulo hpr, si ponatur hp semidiameter cujusvis circuli, crus reliquum (anguli sic formati) abscindet in hr semi-latus Quadrati Circulo aequalis.

Atque hinc satis liquet; Cycloidem quam nunc dicimus, jam ante aliquot secula fuisse consideratam, sed hoc tandem seculo penitius perspectam.

IV.

Leibniz an Wallis.

Alterae tuae Literae, non minus ac priores, multis nominibus mihi gratissimae sunt. Docent enim semper aliquid quod faciat ad Scientiae incrementum. Sed si vel hoc unum ostenderent, valere Te et nostri amanter meminisse, plurimum voluptatis afferrent. De Aequitate tua, et benevolo etiam in nostros animo, nunquam dubitavi, ejusdem indicia dudum habui, atque adeo et ipse, data occasione, quanti Tua in Scientias merita facerem, ostendi.

Tuam Methodum Interpolationum imprimis magni facio, et puto aliquid habere adhuc in recessu. Vellemque adeo produci ipsam longius ad alia binomia, trinomia etc., tum etiam ad partes ipsas figurarum. Has enim hactenus, ni fallor, non hac sed alia ratione consequeris, quantum ex tua responsione colligo.

Tametsi vocabulis generalius acceptis pro iisdem haberi possint continuae appropinquationes et series convergentes et series infinitae, ego tamen, docendi causa, multimodis haec distinguere soleo. Non omnis continua appropinquatio continuo exhibet incognitae Valorem exactum, omnes appropinquationes simul comprehendentem. Et valor ille exactus qualis Tuus $\square = \frac{3,3,5,5,7,7,9,9, \text{ etc.}}{2,4,4,6,6,8,8,10, \text{ etc.}}$, vel Brounkerianus cujus non satis perspexi originem, $\square = 1\cfrac{1}{2\cfrac{9}{2\cfrac{25}{2\cfrac{49}{2}}}}$ etc., a me tamen distinguitur a valore exacto per series infinitas proprie dictas, quae per meram terminorum collectionem conflantur, quales, ni fallor, primus dedit Nicolaus Mercator, ampliavit Newtonus, atque ego quoque excolui nonnihil.

Interim vellem, et Tuas et Brounkerianas exprimendi rationes et Hugenio-Gregorianam quoque serierum convergentium methodum promoveri.

Ostendit mihi olim Hugenius Parisiis Jacobi Gregorii perbrevem libellum in 4°, in quo videbatur aliqua contineri promotio serierum convergentium, sed αἰνιγματικῶς, quamquam mihi inspicere tantum in transitu, non legere vacarit. Vellem, quod ibi deest, a Dn. Davide Gregorio, ejus cognato, suppleri posset. Vides igitur unamquamque methodum a me suo pretio censeri.

Dixi aliquando in Lipsiensibus Eruditorum Actis, mihi omnes Methodos Tetragonisticas ad duo summa genera reducendas videri: vel enim colliguntur in unum quantitates infinitae numero, quantitate incomparabiliter minores toto; vel semper manetur in quantitatibus toti comparabilibus, quarum tamen numerus infinitus est quando totum exhauriunt. Utriusque Methodi specimina jam dedit Archimedes, sed nostrum seculum utramque longius produxit. Itaque, strictius loquendo, Methodus Exhaustionum a Methodo Indivisibilium distingui potest: tametsi commune omnibus sit principium demonstrandi, ut error ostendatur infinite parvus, seu minor quovis dato, Euclidis jam exemplo.

Methodum Fluxionum profundissimi Newtoni cognatam esse Methodo meae Differentiali, non tantum animadverti postquam opus ejus et tuum prodiit, sed etiam professus sum in Actis Eruditorum, et alias quoque monui; id enim candori meo convenire judicavi non minus quam ipsius merito. Itaque communi nomine designare soleo Analyseos Infinitesimalis, quae latius quam Methodus Tetragonistica patet.

Interim, quemadmodum et Vietaea et Cartesiana methodus Analyseos Speciosae nomine venit, discrimina tamen nonnulla supersunt: ita fortasse et Newtoniana et Mea differunt in nonnullis.

Mihi consideratio Differentiarum et Summarum in seriebus Numerorum primam lucem affuderat, cum animadverterem differentias tangentibus, et summas qaadraturis respondere. Vidi mox differentias differentiarum in Geometria osculis exprimi, et notavi mirabilem analogiam relationis inter differentias et summas cum relatione inter potentias et radices. Itaque judicavi, praeter affectiones quantitatis hactenus receptas y, y^2, y^3, $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{3}}$ etc. vel generaliter y^e, sive $\boxed{p^e}\, y$, vel potentiae ipsius y secundum exponentem e, posse adhiberi novas differentiarum vel fluxionum affectiones dy, d^2y (seu ddy), d^3y (seu $dddy$), imo utiliter etiam occurrit $d^{\frac{1}{2}}y$, et similiter generaliterque $d^e y$.

Hac jam affectione admissa, vidi commode per aequationes exprimi posse quantitates, quas a sua Analysi et Geometria excluserat Cartesius, et Curvas, quas ille non recte vocat Mechanicas; hac ratione calculo non minus subjici, quam ab ipso in Geometriam receptas. Et, quemadmodum Veteres jam aequationes curvarum locales observaverant, sed Cartesius tamen utilem operam nobis navavit, dum eas calculo suo expressit: ita putavi me non inutiliter facturum, si ostenderem methodum curvas ab ipso exclusas similiter per aequationes exprimendi, quarum ope omnia de iis certo calculi filo haberi possint.

Et licet fatear, quemadmodum rem ipsam in aequationibus curvarum localibus facilioribus calculo Cartesii expressam jam tenebant Veteres; ita rem ipsam, meis aequationibus differentialibus facilioribus expressam, non potuisse Tibi aliisque egregiis Viris esse ignotam: non ideo minus tamen puto et Cartesium et me aliquid utile praestitisse. Nam antequam talia ad constantes quosdam characteres calculi analytici reducuntur, tantumque omnia vi mentis et imaginationis sunt peragenda, non licet in magis composita abditaque penetrare, quae tamen, calculo semel constituto, lusus quidem jocusque videntur.

Unde jam mirum non est, Problemata quaedam post receptum calculum meum soluta haberi, quae antea vix sperabantur: ea praesertim quae ad transitum pertinent a Geometria ad Naturam, quoniam scilicet Vulgaris Geometria minus sufficit, quoties Infiniti involvitur consideratio, quam plerisque naturae operationibus inesse consentaneum est, quo melius referat Autorem suum.

Hugenius certe, qui haec studia haud dubie profundissime inspexerat, multisque modis auxerat, initio parvi faciebat Calculum meum, nondum perspecta ejus utilitate. Putabat enim dudum nota sic tantum nove exprimi: prorsus quemadmodum Robervallius et alii initio Cartesii Curvarum calculos parvi faciebant. Sed mutavit postea Hugenius sententiam suam, cum videret, quam commoda esset haec exprimendi ratio, et quam facile per eam res involutissimae evolverentur. Itaque maximi eam a se fieri aliquot ante obitum annis, non tantum in privatis ad me aliosque literis, sed publice quoque est professus.

Caeterum Transcendentium appellationem, nequid a me praeter rationem in phrasi Geometrica novari putes, sic accipio ut Transcendentes quantitates opponam Ordinariis vel Algebraicis. Et Algebraicas quidem vel Ordinarias voco quantitates, quarum relatio ad datas exprimi potest algebraice, id est per aequationes certi gradus primi, secundi, tertii etc. quales quantitates Cartesius solas in suam Geometriam recipiebat. Sed Transcendentes voco, quae omnem gradum algebraicum transcendunt. Has autem exprimimus vel per valores infinitos et in specie per series (neque enim ipsas Series, Transcendentales voco, sed quantitates ipsis exprimendas), vel per aequationes finitas, easque vel differentiales (ut cum Ordinata Cycloidis methodo mea exprimitur per Aequationem $y = \int \frac{xdx}{\sqrt{ay - yy}}$ vel exponentiales (ut cum incognita quaedam x exprimitur per hanc Aequationem $x^x + x = 1$). Et quidem expressionem Transcendentium exponentialem pro perfectissima habeo, quippe qua obtenta nihil ultra quaerendum restare arbitror, quod secus est in caeteris.

Primus autem, ni fallor, etiam exponentiales aequationes introduxi, cum incognita ingreditur exponentem. Et jam anno primo Actorum Lipsiensium specimen dedi in exemplo quantitatis ordinariae, transcendentaliter expressae, ut res fieret intelligibilior; nempe, si quaeratur $x^x + x = 30$, patet $x = 3$ satisfacere, cum sit $3^3 + 3 = 27 + 3 = 30$.

Haec ad Te fusius scribere volui, Vir egregie, tum ut rationem Tibi redderem nomenclaturae meae, atque ὀνοματοποιίας, nese videar solis vocabulis quaesisse novitatem, ut quos Trochoidem pro Cycloide dixisse notas; tum vero maxime, ut gradus et discrimina methodorum nostrarum aliarumque ex mente mea explicatius cognoscerentur, proficereque mihi liceat ex judicio Tuo, cujus ea vis est et penetratio, ut pro certo habeam plurimas Tibi superesse praeclaras cogitationes, quibus, licet nondum absolutis, vellem non fraudari posteritatem.

Itaque, licet facile agnoscam Cryptographematum solutionem certa methodo absolvi non posse, specimina tamen ejus aliqua a Te extare proderit, quibus ipsa ars ratiocinandi occultaque pervestigandi augeatur.

Tua de Trinitate scripta, et quicquid omnino Tuum est, ut ad nos deferatur operam dabo.

Unum tantum de Suisseto vestro adhuc addam. Verum esse, quod ais, Algebram non tractasse, sed cum initio operis de Algebra Tui, etiam de inventione notarum Arithmeticarum variarumque calculandi rationum ab Algebra differentium ageres, poteras Suisseti vestratis, si in mentem venisset, optimo jure facere mentionem. Itaque nunc suggessi, ut aliquid pro Cusano nostrate redderem, pro cujus figura nunc a Te missa gratias ago. Vale diu et fave etc.

Dabam Hannoverae 28 Maii 1697.

P. S. Unum addo: Placuisse mihi phrasin acutissimi Newtoni, qui Geometrice-Irrationalia vocat, quae Cartesius in Geometriam suam non recipit. Sed haec a Transcendentibus distinguo, tanquam genus a specie. Nam illa Geometrice-Irrationalia duum generum facio. Alia enim sunt gradus certi, sed Irrationalis, quarum exponens est numerus surdus, ut $\sqrt[\sqrt{2}]{2}$, seu potestas de 2 cujus exponens sit $\frac{1}{\sqrt{2}}$; et haec voco **Intercendentia**, quia gradus eorum cadit inter gradus rationales: possent etiam, strictiore sensu, Geometrice (vel si mavis, Algebraice) Irrationalia appellari. Alia vero sunt gradus indefiniti, ut x^y: et haec magis proprie Transcendentia appello. Et tale problema est, Rationem vel Angulum in data ratione secare.

Siqua esset occasio Dn. Newtono, summi ingenii Viro, (forte per amicum) salutem officiosissimam a me nuntiandi, eumque meo nomine precandi, ne se ab edendis praeclaris meditationibus diverti pateretur, hoc beneficium a Te petere auderem.

Didici Dn. Eduardum Bernardum p. m., Virum certe insignem, et cujus morti valde indolui, non ita pridem in Batavis fuisse, ut pleraque Goliana Manuscripta sub hasta vendita redimeret pro Bibliotheca, ut arbitror, publica Oxoniensi. Cumque in illis contenti fuerint libri aliquot lexicorum Sinicorum formam habentes, vocabulaque et characteres Sinicos interpretantes, valde mihi gratum foret discere, hos non fuisse dissipatos per plures possessores, sed simul redemtos et in Bibliothecam publicam illatos. Talia enim collecta conservari Reipublicae interest, cum facile recuperari ac recolligi non possint. Et cum Sinensis imperii magna sit potentia et amplitudo, et nunc aditus Europaeis apertus curiositate Monarchae, Scientias nostras praesertim Mathematicas valde amantis, optarem profecto protestantes dare operam, ne alii fructum inde soli colligant. Quam ob causam etiam nuper relationem a Rectore Collegii Jesuitarum Pekinensis conscriptam ex Manuscripto mihi transmisso cum praefatione et nonnullis additamentis cognati argumenti edi curavi, qua Edicti pro Christianis promulgati Historia continetur, cum enim antea toleraretur quidem Christiana religio favore et conniventia Principis ac Magistratuum, legibus tamen contraria habebatur, ut Sinenses eam amplectentes vexationibus expositi essent. Nunc vero tandem inter religiones jure approbatas recepta est. Unde magnus merito fructus speratur, dummodo ne illi soli eum decerpant, qui superstitiones suas purae Christi doctrinae admiscent. Ego Anglis et Batavis hanc rem non negligendam censeo, non tantum pietatis et famae, sed et vel commerciorum causa. Nam cum tantus sit amor Monarchae erga scientias Europaeas, prono ejus favore uti etiam commerciorum interesset. Qua de re nemo Te rectius Vestrates monuerit, cum in Theologia pariter ac Mathematicis excellas, et Theologia nostra apud Sinenses salvum, ut ita dicam, conductum a Mathematicis disciplinis petere cogatur.

Amicus quidam meus, linguarum studiosus, libenter nosse vellet, an exstet alicubi liber Adami Bohoriz, cui titulus Horae Arcticae de antiqua Lingua Carniolana, quoniam aliqua ex eo loca obtinere optaret. Fac mihi, quaeso, hanc gratiam, et apud vos inquiri cura, an alicubi lateat.

V.

Wallis an Leibniz.

Oxoniae Julii 30. 1697.

Literas Tuas pergratissimas Maji 28 datas accepi jam ante aliquot septimanas. Cum autem inibi de pluribus quaeris, non statim vacabat (alias item occupato) singulis respondere, et metuo ne jam non possim omnibus.

Continuas Approximationes, Series convergentes, Series infinitas quod spectat (et siqua sunt ejusmodi alia) quae mihi videntur tantundem significare; cum tamen id (quicquid sit) plurimis modis fieri possit (et quidem factum est), non repugno quin Tu singulis modis sua affigas nomina, aut haecce nomina (tantundem significantia) pro arbitrio distinguas; praesertim si vacet etiam distincte definire, quid quoque nomine significatum velis.

Questus utique sum aliquoties, quod Viri Magni suas Methodos nomine tenus venditant (quas apud se clam celant), non autem in publicum exhibent, quaenam illae sint. Sic Fermatius antehac methodum suam de Maximis et Minimis, Robervallius suam de Compositione motuum, Freniclius suam de Exclusionibus; nescio autem an eorum quisquam suam in publicum distincte tradiderit, sed hariolandum nobis permiserunt, quales fuerint, aut ut novas comminiscamur ipsi. Et siquid post factum est, imperfecte factum est.

Optaverim item ut Tibi vacet tuum Calculum Differentialem, et Newtono suam Fluxionum methodum justo ordine exponere, ut quid sit utrique commune, et quid intersit discriminis, et utramque distinctius intelligamus.

Quod non omnes continuae Appropinquationes tandem exhibent exactum valorem; omnino verum est. (Sic enim Hyperbola ad parallelam rectam intra Asymptoton positam continuo appropinquat, sed non ad dato minus). Adeoque ego dicere soleo Approximationes; hoc est, quae ita quam-proxime accedunt, ut dato minus distent: ut quae in infinitum continuatae censendae sunt coincidere. Talesque sunt quas ego indicavi.

Si Tu id interesse putes, quod Tua approximandi Methodus per Additionem procedat, Mea per continuam Multiplicationem: id facile accommodabitur. Quippe tantundem est, sive ego dixerim $\square = \frac{9 \times 25 \times 49 \times \text{ etc.}}{8 \times 24 \times 48 \times \text{ etc.}}$, sive $\square = 1 + \frac{1}{8} A + \frac{1}{24} B + \frac{1}{48} C +$ etc. Res eadem est, sed sub notatione diversa. Et utrovis modo proceditur ad dato minus, quod (processu in infinitum) tandem evanescit. Et in Brunkeriana pariter.

Ego quidem in scriptis meis plurimas adhibeo Methodos (et pro nova quaque difficultate novam comminiscor), quas attentus Lector facile animadvertat et imitetur; sed de imponendis Nominibus parum fui solicitus; fortasse minus quam oportuit.

Sic, verbi gratia, Angulum Contactus ad Circulum nullius esse magnitudinis, asserui jam pridem; non quidem omnium primus, sed Peletarii doctrinam, authoritate Clavii aliorumque oppressam, vindicavi. Cumque eadem sit ratio, hac in re, Curvarum omnium, hinc merito concludamus, Angulum Contactus ad quamvis curvam nullius esse magnitudinis (quam voces Methodum Contactuum). Atque hinc statim colligitur, cujuscunque Curvae quodvis punctum eam habere Directionem, Obliquitatem, Inclinationem (et quae sunt hujusmodi), quae est Rectae ibidem Tangentis, potestque propterea considerari, ut Pars Infinitesima istius Rectae. Atque hinc ortum ducit tota de Curvis Rectificandis doctrina (quam ego primus insinuabam ad Prop. 38. Ar. Infin.). Eademque porro ampliari potest ad Complanationem Curvarum Superficierum.

Sed et eadem Contactuum Methodus (ad speculationem Arithmeticam redacta) adhiberi potest, ubicunque est plurium magnitudinum (cujuscunque generis) superfoetatio, quarum una aliqua (vel etiam plures) sic sensim decrescit ut tandem evanescit. Adeoque ampliori nomine dici poterit, Methodus de Magnitudine evanescente, quae accommodari potest mille modis pro re nata.

Porro, ne Divaricationis, in Contactibus conspicuae, nulla ratio habeatur, hanc dico Mensuram esse Curvedinis, intensive consideratae: puta; qua ratione (in circulis) totus ambitus est ambitu minor (aut arcus simili arcu), ea ratione est illa peripheria (intensive) magis curva: ut quae habet tantundem curvedinis in minori Quanto: quae vocetur Methodus Curvedinum.

Quemadmodum vero Peripheriae punctum quodvis aliam atque aliam habere censeatur Directionem, sic in curvis Dissimilaribus, alia atque alia est in singulis punctis intensiva curvitas, seu gradus Curvedinis aut Flexionis: atque ut illa aestimanda est ex Recta Tangente, sic haec ex Circulo ibidem Exosculante. Nam, ut cujusque puncti in recta eadem est Directio, sic est cujusque puncti in eadem peripheria aequabilis Curvedo: quod (ex curvis omnibus) soli Circulo et Spirali circa Cylindrum convenit.

Hinc ortum ducat tuus Calculus Differentialis, et Newtoni Methodus Fluxionum, si ego utramque methodum recte intelligo. Potestque utraque (seclusa lineae curvae consideratione) Arithmetica speculatione considerata, aliis item magnitudinibus, pro re nata accommodari.

Porro, quod sit in Gravi quoddam (quod dicitur) Centrum Gravitatis, supponunt omnes, saltem Mechanicorum scriptores (quod nescio an quisquam me prior demonstravit), nempe punctum aliquod, per quod si grave plano utcunque secetur, erunt utrinque segmenta aeque gravia. Quod Centrum variis modis quaerunt, hoc est, quaerunt quasi communem totius Gravitationem quae respectivis particularum omnium gravitationibus aequipolleat. Indeque reputari potest totum Grave tantundem pendere, ponderare, quaquaversum ferri seu moveri (aliaque) ac si totum foret in illo Centro positum. Hoc ego vocaverim (ampliore nomine) Medium Arithmeticum: et pro doctrina de Centro Garavitatis, Methodum dixerim de Medio Arithmetico. Quam ego multis modis adhibeo.

Sic, si super plana basi erigi intelligatur corpus columnare, plano oblique sectum, erunt ad singula basis puncta aliae atque aliae Altitudines; quae omnes simul sumptae aequipollent communi alicui altitudini super totam basin, quam ego appellaverim altitudinem Arithmetice-mediam. Estque ea, quae Basis Centro-Gravitatis imminet, quae, in basin ducta, exhibet Ungulae magnitudinem. Quam voces Methodum Ungularum. Eademque valet de Linea (recta aut curva) in plano basis posita. Potestque facile accommodari ungulis Inclinatis.

Pariter, si planum illud intelligatur circa datam in eodem plano rectam ut axem converti, quo fiat Solidum conversione (integra an partiali) factum, erit hoc solidum (ex variarum particularum conversionibus factum) tantundem ac si ferri intelligatur tota basis, media quadam aequipollenti conversione: et quidem aequale erit Ungulae super ea basi erectae (aciem habenti in axe illo), cujus altitudo Arithmetice-media sit aequalis arcui centro gravitatis descripto (et partes partibus respective). Quam voces Methodum Conversionum. Eademque valet de curva rectave linea, in illa basi, sic circumlata.

Eademque Methodus (de Medio-Arithmetico) pluries repetita, et (pro re nata) debite adhibita, exhibebit Centrum-Gravitatis Ungularum, et Solidorum conversione factorum, Centrum-percussionis (aut Oscillationis Centrum), aliaque innumera, quorum magnam copiam videas in Mechanicis aliisque Scriptis meis.

Porro, jam olim notum est, Aream Circuli aequalem esse facto ex Radio in semissem Peripheriae, sive dimidio facti ex Radio in Peripheriam: idemque valet de Sectore ad Circuli Centrum. Est enim Circuli Sector haud aliud quam Rectangulum-Convolutum, contracta scilicet base in unum punctum, flexaque recta verticis in Arcum ipsi aequalem: unde quae erant in Rectangulo partialia Parallelogramma, jam fiunt totidem Triangula ejusdem basis et altitudinis, adeoque singula singulorum dimidia, et totum totius.

Quod pariter valet in aliis figuris convolutis (de figuris planis intellige), nempe quod convoluta est Evolutae dimidia. Quam voces Methodum Convolutionis et Evolutionis.

Sed figura solida, sic complicata, est Explicatae Triens: ut est Sector Sphaericus Cylindri. Quam voces Methodum Complicationis et Explicationis.

Sic Spiralis Archimedea est Parabola Convoluta, atque haec, Evoluta Spiralis: et Curva Parabolica, Spirali aequalis. Aliaeque Spirales, plurimae, sunt Paraboloides Convolutae. Sed et aliarum figurarum plurimarum similes fieri possunt Convolutiones, de quibus eadem valet Regula.

Sic Semi-circulus, puta ad Axem Semi-Cycloidis positus, si distribuatur in Sectores ad Peripheriam coeuntes in base Cycloidis, est figura Convoluta (contracta base Semi-cycloidis in unum punctum), quae si evolvatur (ut quae erant arcuum chordae in punctum coeuntes, jam fiant Parallelae rectae) figura sic evoluta erit quam ego voco Trilineum Restitutum, quod itaque est Semi-circuli duplum (et partes partium respective sumptarum). Illudque Trilineum quod cum Semi-circulo complet Semi-cycloidem, nil aliud est quam hoc Trilineum Luxatum, nempe ex suo loco detrusum propter Semi-circulum ipsi et Axi suo interjectum: quod itaque si (exempto Semi-circulo) suo loco restituatur, erit ipsum Trilineum Restitutum, cui itaque aequatur. Quam voces Methodum Luxationis et Restitutionis.

Perque harum Methodorum superfoetationem seu compositionem habetur genuina Semi-cycloidis Quadratura. Quippe Trilineum Luxatum aequale est Restituto, estque hoc, duplum Semi-circuli (utpote figurae convolutae) et simul utrumque, Semi-circuli triplum.

Estque haec Luxationis et Restitutionis methodus, res maximae utilitatis in figuris compositis mensurandis.

Porro, Magnitudinis cujusque Momentum (respectu habito ad conversionis Axem aut quod hujus instar est) appellare soleo id quod fit ex Magnitudine ejusque Distantia (aut Magnitudine Centrique gravitatis distantia) ab illo Axe. Adeoque habitis Magnitudine et Distantia, habetur Momentum, vel ex Momento et earum altera habetur reliqua. Quam voces Methodum Momentorum.

Porro, eadem Figura (Plana aut Solida) considerari potest ut secta Rectis Planisve vario situ positis, quae quidem Sectiones cum eandem figuram exhibeant omnes, potest altera pro altera substitui ut fert occasio. Exempli gratia, Trilineum illud (quod voco) Restitutum concipi potest ut secta rectis Basi parallelis, atque (sic secta) est Figura Arcuum; aut rectis Axi parallelis, estque (sic secta) Figura Sinuum Versorum. Item, si Semi-cycloidi insistat semi-solidum semi-conversione factum, concipi potest hoc solidum secari planis Cycloidis Basi parallelis, aut planis Cycloidis Axi parallelis, aut etiam planis Cycloidis Plano parallelis: quarum nunc haec, nunc illa, nunc ista possit esse calculo aptior, quae itaque possit prae aliis eligi, aut earum vice substitui: quam voces Methodum Contra-sectionum.

Suntque haec aliquod specimen Methodorum mearum passim adhibitarum, quas si omnes prosequi vellem, et aptis insignire nominibus, nimius essem, sed quas attentus lector, etiam non monitus, facile advertat et imitetur, et (imitando) faciat Regulas Generales. Suntque illae vel separatim adhibendae, vel pluries repetendae, vel etiam inter se et cum aliis, variis modis immiscendae et componendae, prout fert occasio, quod a me factum esse passim videas.

Meas in Arithmetica Infinitorum Series Infinitas quod spectat, nempe quae sunt, ut numeri naturali ordine procedentes ab 0 inchoati in infinitum (sed quarum ultimus terminus, puta U, supponitur datus) vel in horum ratione duplicata, triplicata, aliasve multiplicata, aut submultiplicata, aut ex his utcunque composita, aut secundum quemcunque Exponentem designanda, puta a^p: ego eas omnes ad hanc reduxi Regulam generalem, nempe Aggregatum totius seriei infinitae, ad terminum ultimum toties positum (puta ad m U) esse ut 1 ad $p + 1$ (Potestatis exponentem unitate auctum), quaecunque sit ea potestas p (quae est una ex tuis Aequationibus Transcendentalibus). Quippe ego, praeter potestates olim receptas, puta latus, quadratum, cubum etc. (per numeros integros exponendas) potestates intermedias censui considerandas (et, credo, primus) et consequenter, inter receptas Aequationum Analyticarum formulas, lateralem, quadraticalem, cubicalem etc. intelligendas esse intermedias quotlibet, quas (credo) nemo prius consideravit, quales sunt (ni fallor) quas tu Interscendentes vocas. Indeque (quod tu bene notas) ampliatur Curvarum Geometricarum numerus, ultra quas Cartesius eo nomine dignatus est.

Verum ego Cartesio facile permiserim ut definiat ipse, quid velit ille per curvas Geometricas apud eum intelligi, licet eam compellationem nos latius extendamus. Nam eandem vocem alii aliter definire solent. Quippe Triangulum apud Euclidem (de solis Rectilineis intellectum) aliud significat quam apud Sphaericorum scriptores; item Conus et Cylindrus aliter apud Euclidem (de solis erectis), aliter apud Apollonium aliosque, qui Scalenos admittunt. Atque Euclides ipse, aliter in libro 5°, aliter in 7°, definit Proportionalia.

Has meas series Integras (Figuris Integris aptatas) non video quin tu satis probas, sed de figurarum Partibus haesitas, an ad figurae partes accommodanda sit haec Methodus.

Verum de Partibus id ostensum est, pariter procedere, ad Arith. Infin. pr. 66 et sequentes. Et quidem, quoties Figura procedit secundum unam aliquam ejusmodi seriem (quaecunque demum ea sit), nulla est difficultas, quod videas ad pr. 67. pluresque alias sequentes.

Ubi autem Figura composita est secundum plures series, ingenio opus esse dixi, quo dirimatur figura sic composita in sui partes componentes (quod aliter atque aliter faciendum est, prout cujusque figurae natura postulat) et partibus sic diremptis separatim accommodanda est haec methodus, ubi locum habet.

Quod si non satis assequaris, sic accipe. Si mensurandum veniat Circuli vel Semi-circuli Segmentum, non protinus a totius Circuli vel Semi-circuli mensura procedendum est. immediate ad mensuram Segmenti per has Series (quia non procedunt continua Segmenta secundum aliquam hujusmodi seriem simplicem), sed considerandum est Segmentum ut summa vel differentia Sectoris et Trianguli (est utique Circuli Segmentum idem ac Circuli Sector, addito vel demto respective Triangulo), quorum utrumque (separatim) est hujusmodi Series infinita, et quidem Primanorum seu Lateralium: nempe Sector ex Arcubus, et Triangulum ex Rectis, Arithmetice proportionalibus. Quae duae series separatim tractandae sunt (et inconfuse) in tota de Segmento tractatione, eisque operationibus quae ipsum spectant. Quam voces Methodum Distributionum.

Pariter in Semi-cycloide: componitur haec figura ex Semicirculo et Trilineo luxato, ejusque Ordinata componitur ex Arcu ejusque Sinu recto, puta $o = a + s$; ejusque continua incrementa aequantur continuis incrementis horum, hoc est (in notatione tua) $do = da + ds$ vel (in notatione Newtoni) $\dot{o} = \dot{a} + \dot{s}$. Item ordinatarum quadrata $o^2 = a^2 + 2as + s^2$. Pariterque in omnibus quae sequuntur operationibus huc spectantibus, separatim tractanda sunt a et s, ut a me factum videas in Tractatu de Cycloide, eoque de Motu, cap. 5. pr. 20, 21 etc.

Necdum tamen locus est adhibendis hisce meis Seriebus, quia neque a neque s hic sumuntur Arithmetice-proportionales (sed qui congruunt ipsis v sinibus versis Arithmetice-proportionalibus), qui itaque sunt adhuc resolvendi priusquam seriebus hisce locus erit (quod quomodo factum sit, in processu nostro videas) atque tandem singulas portiones Semi-cycloidis debite sumptas, singulis portionibus semi-circuli respectivis, esse ut 3 ad 1.

Quippe in tam perplexo negotio pluribus methodis opus est, quarum altera in alterius subsidium veniat: et magis adhuc quum ad solida et semi-solida segmentorum variis modis conversione facta ventum est, eorumque momenta et centra gravitatis.

Sed simplicissimus modus quadrandi Cycloidem (si nihil porro quaereretur) est quem modo indicavi. Nempe si Semi-circulus ad Cycloidis axem positus distribuatur in Sectores, coeuntes (non ad Centrum, sed) ad Peripheriam (circuli generantis) in ipsa Cycloïdis base, erit haec Figura (ex Triangulis) Convoluta, hujusque Evoluta (ex totidem Rectangulis ejusdem basis et altitudinis) est Trilineum (quod voco) Restitutum; quod itaque est Semi-circuli Duplum (et partes partium respective) idemque Luxatum (interposito ad axem Semi-circulo) est Trilineum illud quod cum Semi-circulo complet Semi-cycloidem; adeoque Semi-cyclois (ex simul utrisque composita) est Semi-circuli Tripla, et partes partium respective.

Quippe*) si (fig. 4) omnia Triangula αB (in α coeuntia) Semi-circulum complentia (ejusve portionem quamlibet) intelligantur expandi in totidem Rectangula βb (Triangulorum dupla) fiet (quod voco) Trilineum Restitutum, Semi-circuli Duplum (et partes partium respective): atque hoc Trilineum, interpositu Semi-circuli Luxatum, est ipsissimum illud Trilineum, quod cum Semi-circulo complet Semi-cycloidem, qua est itaque Semi-circuli Tripla; et partes partium, respective sumptarum, Triplae. Est utique Bb trilinei Luxati, et Bb trilinei Restituti, eadem ubique, ipsique Arcui BA aequalis.

Similiter ego distribuo Semi-conchoidem in Circuli Quadrantem et Figuram Tangentium luxatam, aliasque Figuras compositas similiter, pro cujusque Compositione.

Spatium Cissoidale resolvitur in Semi-circulum et Sectores (contrario situ positos ad opposita Diametri Extrema coeuntes) prolongatos, atque sic complicatos ut in Analysi mea videre est, Mech. cap. 5 prop. 29.

---

*) Diese Stelle bis zu den Worten: Arcui AB aequalis, ist späterer Zusatz.

Methodos meas pro Tangentibus videas summatim traditas in Transactionibus Philosophicis pro Mense Martio 1672, iterumque ad Algebrae prop. 95, quas ante in Tractatu de Conicis Sectionibus passim adhibueram Anno 1655, eisdem plane nixas principiis cum tuo Calculo differentiali, sed diversa notationis formula. Nam meum a idem est atque tuum dx, nisi quod meum a sit nihil, tuum dx infinite exiguum. Et quum ea neglecta sint quae ego negligenda moneo pro abbreviando calculo, id quod super est, est tuum minutum triangulum, quod est apud te infinite-exiguum, apud me nullum est seu evanescens.

Nec tamen displicet quod res eadem aliis atque aliis modis explicetur, qui omnes suam habeant utilitatem.

Sic Indivisibilium doctrina, quamvis eodem fundamento nixa cum Veterum Exhaustionibus (adeoque non minus firma) alia tamen est (quod tu etiam mones) et insignem habet utilitatem, rem eandem succinctius et commodiori forma explicando, sicut et Arithmetica speciosa, prolixas operationum formulas in brevem synopsin reducendo. Et (ne plura nominem) Archimedea numerorum distributio (per loca, stadia, periodos etc.) in Arenario tradita, miram nacta est promotionem per eas quibus jam utimur figuras numerarias. Nec vitio dari debet Tuis aliorumque inventis (praesentis seculi), quod Veterum fundamentis superstruantur, et novis quotidie promoveantur accessionibus.

Aequationum Transcendentium et Interscendentium appellationes mihi non displicent (imo placent ut valde appositae), qualibus et ego aliquando utor aequationibus, sed absque nomine.

Quod interpolandi Methodus multum adhuc in recessu habeat, omnino verum est; ego eam eatenus prosecutus eram, quatenus quod erat prae manibus negotium postulabat. Nec displicebit siquis eam alius ultra promoveat, atque Tu maxime.

Interpolatio Unius termini mihi tunc sufficiebat: si quando pluribus interponendis opus est, id potest multis modis fieri. Modus qui maxime obvius videtur, sic esto: Sicut Newtonus, in ordine ad Circuli, Ellipseos aut Hyperbolae quadraturam, quo unum interponat terminum, extrahit (in speciebus) Radicem Quadraticam ipsius (v. g.) $R^2 \pm c^2$, si duos velis interpositos, extrahenda erit (in speciebus) radix Cubica; si tres, Biquadratica; et quidem si quotlibet numero n notandos, extrahenda erit radix potestatis ab $n+1$ denominandae.

Quodsi supponatur hic numerus n, numerus fractus, surdus, vel utcunque ἄῤῥητος, comminiscendae sunt novae extractionum methodi casibus hujusmodi congruae. Quippe (quod ego saepe moneo) in omnibus operationibus Resolutoriis (quales sunt Subtractio, Divisio, Extractio radicum, Aequationum solutio, Interpolatio etc.) semper pervenietur ad id quod stricto sensu fieri non potest, sed quod utcunque designetur quasi-factum (ut sunt -1, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ etc.). Adeoque continue procedetur ad alios aliosque gradus ἀῤῥησίας seu Inexplicabilitatis, in infinitum, ut nunquam desitura sit materia ultra ultraque procedendi, volentibus id aggredi. Quos quidem tantum abest ut sufflaminare velim, ut velim potius incitare. Atque, ut nollem eos sua laude fraudare qui praecesserint, ita nec eos remorari velim siqui satagunt inventis addere. Tuosque speciatim conatus laudo et approbo, qui id agere soles, ut aliorum Specimina Particularia Tu redigas in Regulas Universales. Quod Analysis Infinitesimalis latius pateat quam Methodus Tetragonistica, omnino recte mones. Est enim consideratio Arithmetica multo simplicior et magis abstracta (quod Savilius noster olim monuit), quam est Geometrica, adeoque magis Generalis, aliisque materiis applicabilis; ejusque ad Geometriam accommodatio est unus casus doctrinae universalis. Quod probe norunt, qui Euclidis Rationum doctrinam (Geometrice traditam in Lineis) multo felicius exhibent in Arithmetica Speciosa.

Atque, hoc intuitu, Cavallerii Geometriam Indivisibilium ego prosequor in mea Arithmetica Infinitorum. Et Sectiones Conicas, Cono exemptas, ego tracto ut figuras in Plano (per suas ipsarum affectiones expositas, a Cono abstractas) non minus quam Circulum et Triangulum, quae et ipsa sunt Sectiones Coni (quod et Dn. de Wit post fecit). Et Medium-Arithmeticum amplius extendo, cujus de Centro Gravitatis doctrina non est nisi unus Casus. Tuusque Calculus Differentialis latius patet quam ad Tetragonismos, aut etiam Curvarum Rectificationes.

Quod de Jacobi Gregorii Seriebus convergentibus suggeris, ego (patruelem ejus) Davidem Gregorium tuo nomine monui, qui mihi pollicitus est, Patrui sui tradita hac in re se plenius velle prosequi.

Quae Newtonum spectant, ad eum scripsi tuis verbis, simulque obtestatus sum meo nomine, ut imprimi curet quae sua supprimit scripta: quod et saepe ante feceram, sed hactenus incassum.

Quod de Sinensibus mones, ego plane tecum sentio, nempe ut sua interesse velint putare Protestantes, Religionem Christianam ibidem promovere, nec illud solis Jesuitis permittant. Sed quid ego ea in re praestare possim, non video. Sunt utique, ut plurimum, Mercatores suis rebus magis intenti quam Religionis. Id autem scripto insinuavi Tuo meoque nomine Archi-Episcopo Cantuariensi, ut quem propius spectet id curare.

Quae Tu edidisse te dicis de Religione Christiana apud Sinicos (Edicto publico) jam plenius admissa, nos nondum vidimus, saltem non ego.

Quosnam ex libris Sinicis de Bibliotheca Goliana redemit Bernardus noster, non possum dicere, cum ipse (quod tecum condoleo) mortuus sit, librique quos emit (consilio et sumptibus D. Narcissi Marsh, Archiepiscopi Dubliniensis) Dublinium sint transvecti, nec scio an eorum ullus sit apud nos Catalogus. Sed eos quos memoras libros Sinicos credo eum emisse omnes, eosque (cum reliquis) Bibliothecae Bodleianae speramus destinatos atque huc aliquando remittendos.

Librum quem memoras Adami Bohoriz (cui titulus: Horae Arcticae de antiqua lingua Carniolana) quaerendum curavi tum in publica Bodleiana Bibliotheca, tum in Collegiorum privatis, sed non invenio, metuoque ne apud nos non sit.

Suissetum (quod recte mones) potuissem cum aliis memorare (si animo tunc occurrisset), quamvis de Algebra non directe scripserit. Quippe ille (ni fallor) primus de rebus Physicis more Mathematico docuit disserere, quem secuti sunt alii aliquot, Semi-Mathematica (prout tu scite loqueris) scribentes. Quique (Galilaeum secuti) Mathesin Philosophiae naturali conjunxerunt, praesente seculo, immane quantum Physicam promoverunt. Quod et Rogerus Bacon (Vir magnus in obscuro seculo) ante annos circiter quadringentos (eoque plures) aggressus erat.

De Cryptographematis explicandis scribebam ad Editorem Actorum Lipsicorum, ipsis Calendis Januariis praesentis Anni; sed an ipse receperit nescio.

Caeterum (ut tandem finiam) amicitiam tuam gratulatus, quodque meam non sis dedignatus, valere jubeo, *Εὖ πράττειν καὶ εὖ χαίρειν* etc.

Monet D. Hospitalius, Te jam meditari Tractatum de Scientia Infinitâ. Lubenter intelligeremus, An et Quando id speremus.

VI.

Leibniz an Wallis.

Literas Tuas quanto prolixiores, tanto gratiores magna cum voluptate legi, et diversarum Methodorum recensionem elegantissimam et tuo acumine dignam in illis agnosco. Puto tamen plures recte revocari posse ad unum idemque caput. Et Figurarum Resolutionem in partes assignabiles, ab ea quae fit in partes inassignabiles nataque ex hac Transformatione, toto methodi genere differre arbitror. Methodi autem inassignabilium a Calculo Differentiali sic absorbentur, ut quicquid his per figurarum contemplationem consequi licet, id ipso calculo facile possit obtineri. Quare momentorum et Regulae Guldinianae usus (cujus quidam in Pappo vestigia observant), convolutiones quas voces, et complicationes, et luxationes, aliaque id genus, ut specimina tantum universalioris infinitesimalium Methodi accipio, quae calculo differentiali tractata velut sponte nascuntur. Et ut exemplo rem illustrem, constat momentum trilinei ex axe dupliciter haberi posse: nempe vel per dimidiam summam quadratorum ab ordinatis axi applicatorum, vel per summam rectangulorum ab abscissa et ordinata basi applicatorum. Atque haec quidem Te et Paschalium et alios ingeniosa figurae meditatio docuit. Et tamen horum duorum aequipollentia statim Calculo Differentiali patet. Differentialis enim quantitas $\frac{1}{2}xyy$ prodibit $\frac{1}{2}yydx + xydy$. Est autem $yydx$ idem quod quadratum ordinatae y applicatum ad axem; et $xydy$ idem quod rectangulum sub ordinata et abscissa applicatum ad basin, vel pro re nata ad verticis tangentem. Itaque dimidia summa quadratorum ad axem, et summa rectangulorum ad basin, ex se invicem pendent, cum summa eorum aequetur quantitati datae $\frac{1}{2}xyy$. Nam ex calculo differentiali cum $\frac{1}{2}dxyy$ (seu dimidia differentialis quantitas ipsius xyy) aequetur ipsi $\frac{1}{2}yydx + xydy$, utique summa horum vicissim, nempe $\frac{1}{2}\int yydx + \int xydy$, facit

$\dot{y}xyy$. Summae enim differentiis reciprocae sunt. Ubi tamen notandum, interdum pro alterutro signo + poni signum —, quod ipsa Calculi ratio itidem ostendit. Caeterum cum nos haec calculo assequi dico, non ideo figuralem considerationem contemno, quae nos huc duxit.

Sed per methodum convergentium Jacobi Gregorii, et per series infinitas Mercatoris, Newtoni et meas resolvitur figura in partes assignabiles.

Ab his vero omnibus methodis plane diversa est totoque genere alia Tua Methodus Interpolationum, ingeniosissima et felicissima mihi visa; qua optarem potuisses partes Cissoidis ad partes semicirculi reducere, ut totam ad totum reduxisti. Nam quid alia methodo consecutus sis (quemadmodum tuo et Hugenii calculo nos haec in cissoide facile obtinemus), de eo nunc non quaero. Itaque valde vellem, illam propriam tuam methodum produci longius, cum obtineantur per eam, ad quae per calculum non aeque semper aditus patet. Nam quod certo modo interpolationes in partibus desinunt in series infinitas, hic non moror. Itaque vellem aliquis juniorum tuo ductu hortatuque inventa tuae Methodi in Arithmetica Infinitorum expositae, in totis saltem, prosequeretur.

Quae meo nomine promisit D. Marchio Hospitalius, paulatim efformo, quantum per negotia alia bene multa licet. Verissimum est, inventionem Centri Gravitatis et inventionem Medii Arithmetici eodem redire. Verbi gratia, esto (fig. 5) G centrum gravitatis totius ipsarum AB, BC, CD, quarum centra propria sint E, F, H: erit AG medium-Arithmeticum inter ipsas AE, AF, AH. Et his similibusque considerationibus usus sum in Diario Gallico ante annos aliquot, cum publicarem et demonstrarem hanc propositionem universalissimam: Si mobile M simul tendat motibus quotcunque, quorum Celeritates et Directiones repraesententur (fig. 6) rectis MN, MP, MQ etc., motum compositum fore MR, ita ut haec recta transeat per S centrum commune gravitatis punctorum N, P, Q etc., et sit MR ad MS, ut numerus motuum componentium (seu punctorum N, P, Q etc.) ad unitatem. Ubi simul notavi, si omnes conatus componentes sint in eadem recta, ut AE, AF, AH, motum compositum fore ut AG. Notavi etiam alias, quadraturam vel summationem nihil aliud esse, quam inversionem Medii Arithmetici. Nam hoc Medium habetur, si summam terminorum dividas per ipsorum numerum. Ergo vicissim ex ductu Medii-Arithmetici in numerum terminorum fit Summa. Itaque in quadrando trilineo ABCA (fig. 7) ipsae ordinatae LM habeantur pro terminis, qui ad puncta axis (aequaliter divisi) respondentia collocentur; quo facto patet utique altitudinem AB referre numerum terminorum. Ac proinde, si rectangulum ABED aequetur trilineo ABCA, ipsam AD Mediam-Arithmeticam inter omnes, posito axe aequaliter diviso. Unde et, si mobile habeat infinitas numero, magnitudineque infinite-parvas solicitationes, ut sunt ipsae LM, eodemque modo distributas vel applicatas, haberet impetum (ex infinitis istis solicitationibus compositum) ut ABCA, vel ut ABED.

Nescio an animadverteris ex Actis Lipsiensibus, me nonnihil promovisse Regulam Guldini, nempe ut via Centri Gravitatis ducta in mobile aequetur areae; id verum esse, etiam si mobilis partes successive quiescant, et reliquas motum continuantes quasi deserant, vel contra, successive se reliquis jam motis adjungant. Exempli causa evolvatur Hugeniano modo Curva ABC, et evolutione sua describat curvam ADE (fig. 8.) Notetur FGH via Centri Gravitatis totius fili, etsi totum filum non simul moveatur. Nempe sit F centrum fili adhuc curvae ABC circumplicati, seu centrum hujus ipsius Curvae, et G sit centrum fili semievoluti DBC, constantis ex recta DB et arcu BC; denique H (dimidium punctum rectae CE) sit centrum fili totaliter evoluti. Ergo rectangulum sub recta CE et curva FGH aequabitur areae trilinei mixtilinei CEAC.

Optarem non specimina tantum, sed et artificia Artis tuae Cryptolyticae conservari curares. Est enim in his velut fastigium quoddam subtilitatis simul industriaeque humanae. Agnosco certis methodis comprehendi non posse, et, si posset, minus foret artificiosa; et vel ideo velim ipsa exponi artificia, et quasi calculus problematis soluti. Neque ego ista per se, sed potius ob artem inveniendi hinc promovendam, aestimanda censeo; eoque hortor, ut omnia candide exponi cures, cum non facile extiturus sit, qui neglecta vel suppressa a Te supplere possit. Vides me procuratorem apud Te agere, simul et gloriae tuae et publici boni atque posteritatis.

Vides etiam me a Mathematicis (per se non spernendis) ad graviora transire atque adeo in re maximi momenti desinere velle, quam prioribus literis attigi ac Tu respondens pro tuo insigni in pietatem veram gloriamque Dei promovendam studio, cordi Tibi esse ostendisti. Sed praestare arbitror, ut quae huic fini replicare visum est mihi, peculiari schedula hic adjecta complector. Vale adhuc diu et fave etc.

Dabam Hannoverae 28 Septembr. 1697 styl. vet.

P. S. Quod de quaesitis meis curam habuisti et quae scire licuit indicasti, gratias ago. Quid de caeteris adjectis videatur, licet paucis lineis mature discere opto, vel ut reddita intelligam. Consultum judicavi, quae ad Te in adjectis perscribo, communicari etiam viro excellentis doctrinae et optimae voluntatis, Rob. Bentleio, cum quo aliqua mihi, etsi non per literas, notitia est. Quoniam enim Tua aetas gravis, ut Londinum excurras et rem coram agas, non fert, poterit ille, si videbitur, supplere vicem tuam. Sed salute a me nuntiata, commendandum illi fortasse erit, ne res intempestive spargatur.

VII.

Wallis an Leibniz.

Oxoniae Octob. 21, 1697 s. v.

Accepi hodie gratissimas tuas literas Hanoverae datas Sept. 28, 1697 s. v. simulque fasciculum ad me missum, ob quem gratias habeo. Utramque mihi transmisit D. Guilielmus Trumbul, Serenissimi Regis nostri Secretarius. Inclusam hisce schedulam (mihi non destinatam) remitto prout Tu petis. Scripsi jam modo ad D. Bentley, tuis verbis, inclusis ad illum schedulis, quas ipsi communicatas velles, ut apud Reverendissimum Archiepiscopum ea de re agat, quod ipsum facturum spero. Laudo ego propositum, tum de promovenda Religione Protestantium apud Sinas, tum de conciliandis (si fieri possit) Protestantibus, infeliciter inter se dissentientibus, quippe ego nihil video, quin possint amice coalescere, si Pontifices (utrisque inimici) non foverent has discordias. Quippe eorum interest ut Nostri non consentiant. Neque id tam intuitu Religionis moliuntur, quam grandoris secularis. Non video quin Nostrorum, Adversae Partes possint in Praxi convenire. Et si qua sint in Speculativis, de quibus non possint per omnia pariter sentire, hoc mutua συγκαταβάσεως et ἐπιεικείᾳ ferri posse et taceri. Eundem Deum, eundem Christum colimus utrique, nec (quod sciam) Idololatricum quicquam cultui nostro immiscetur.

Non vacat de rebus Mathematicis quicquam addere, quia velim protinus (absque mora), cum tu id petis, de receptis tuis literis te certiorem facere. Id saltem insinuare visum est, fieri forte posse, ut una cum scriptis meis aliquot quae sub prelo sunt, Newtoni quaedam intermiscere, simulque (nisi tu prohibeas) Literarum tuarum aliquas, quae ad manus meas pervenerunt, et quae dignae sunt ut non pereant. Interim vale, Vir nobilissime, et amore digneris etc.

VIII.

Leibniz an Wallis.

Literae Tuae novissimae, eaeque breves, aliquid ultra sperare jubere videbantur, quod nisi exspectassem, respondissem promptius. Sed non putavi differendum diutius, quod interrogationi Tuae satisfaciendum esse judicarem.

Quaeris, an patiar nescio quas literas meas (ad Oldenburgium fortasse) apud Te repertas edi. Poteram petere, ut mecum antea communicentur: sed tamen satius putavi rem omnem Tuo arbitrio permittere. Tametsi enim facile intelligam, tumultuarie et a Juvene scripta, cujus progressus adhuc erant mediocres, veniam facilius quam laudem esse inventura, et, si vestrorum exquisitis scriptis conjungantur, ipsa imparitate deteriora apparitura esse, cum contra inter alias minorum gentium lucubrationes fortasse commendationem aliquam habuisse possint, atque adeo agnoscam (quod res est), magis vestrae (cui ipse faveo) quam famae meae hanc editionem esse velificaturam. Quia tamen judicas inesse aliquid non mali, nolo defugere autoritatem Tuam, et commodo reipublicae, etiam periculo opinionis meae, servire sum paratus.

Memini aliquando rogare, ut de Cryptolyticis in Artis aliquam formam redigendis cogitares. Id nunc quoque repeto. Est enim in illis summum specimen humanae penetrabilitatis. Communicata sunt mecum quae Dn. Menkenio misisti et visa mihi cum admiratione. Sed utinam ipsam quoque methodum inveniendi addidisses. Interim spero, esse apud vos cui possis artem tuam velut haereditate tradere, quamquam ipsa vis ingenii legari cuiquam non possit. Utinam haec malles agere, quae solus potes, quam resuscitare Veteres, quod excellenter facis, sed non solus.

Intellexi laetus Ecclesiae Anglicanae nomine salutatum Russorum Autocratora; utinam ea res inserviat aperiendo nostris purioris doctrinae emissariis itineri in Sinas, de quo scribere memini. Vale etc.

Dabam Hannoverae 24 Martii st. vet. 1698.

IX.

Wallis an Leibniz.

Oxoniae 22 Julii 1698.

Quod literas a me prolixiores ante exspectaveris, quas nondum acceperis, excusatum me (precor) habeas, quod pluribus implicitus negotiis non possim simul omnibus vacare.

Literae ex tuis aliquae, quas (te permittente) me editurum insinuabam, sunt (praeter earum aliquas quae mihi tecum intercesserunt nuper) Tuarum aliquot, quae erant ad Oldenburgium scriptae, quas cum ante frustra quaesiverim tandem obtinui: nempe ad Oldenburgium Epistola data Julii 15, 1674 et Octobr. 26, 1674, aliaque (sine data) eodem anno exeunte vel ineunte sequente, et Dec. 28, 1675, et Aug. 27., 1676, et Junii 21, 1677, et Julii 12; 1677.

Velim quidem, si per locorum distantiam liceat, de singulis te consulere, et siqua sint apud te harum exemplaria, velisque mihi quicquam additum, demptum aut permutatum, tibi obtemperabo. Quodsi tumultuarie scribenti (nec eo intuitu, ut ederentur) exciderit quicquam aut minus perspicue aut minus limate dictum; vel siquid irrepserit mendi ex mendosis quibus usus sum

Apographis (quorum ipsa Autographa non vidi) quod ego non sustulerim, id illustri Viro non imputabit Lector Candidus. Sunt utcunque illae literae (prout mihi videtur) dignae ne pereant, nec inibi habetur quicquam quod te dedeceat. Nec tibi cedet dedecori, quod tam mature rebus hisce mentem adhibueris, et tanto cum judicio. Estque aliquando gratum (sed et utile) videre quomodo se res habuerint, dum sub incude fuerint, necdum prorsus limatae, et quibus passibus processerint. Quod tu ipse mones (Ep. 27 Aug. 1676) de Schediasmatis Gregorianis et Pellianis. Quod autem tu tua extenues scripta, id dandum est Modestiae tuae (quippe quae laudent alii), quodque mea praeferre videaris, Humanitati tuae debeo.

Omnino elegans est (et plane verum), quod habes (Ep. 15 Julii 1674) de Quadrando Semi-Cycloidis Segmento quodam. Segmentum aliud quoddam quadravit Hugenius et (eo prior) Wrennius noster; uterque (credo) nescius quid alter fecerit. Sequitur utrumque ex meis universaliter traditis (in Tractatu de Cycloide, et de Motu). Estque hoc universaliter verum, quod in meis designationibus quarumcunque portionum Cycloidis, si ita sumantur a, s, vel a, v, vel a, R (aut quod tantundem est,) ut destruatur a; id omne est absolute quadrabile. Quod innuebam ad Algebrae Prop. 110.

Quod ais Ep. 26 Octob. 1674, putasse non-neminem Cartesii Regulam pro dividenda Aequatione Biquadratica in duas Quadraticas non esse Universalem: qui sic putat, fallitur ipse. Universalis enim est. Sed potest id pluribus modis fieri. Quippe si Aequationis Biquadraticae Radices quatuor sint a, b, c, d, possunt illa binatim componi (pro binis Quadraticis) pluribus modis, puta a, b; c, d: vel a, c; b, d: vel a, d; b, c. Ad quas combinationes inveniendas alia atque alia opus erit Aequationis Cubicae Radice. Quod autem ais (literis sequentibus) hoc non esse Novum Inventum: id omnino verum est. Hoc enim docuerat Bombellius seculo superiore, et (post eum) Vieta.

Difficultas quam memoras (Ep. 28 Dec. 1675, et 27 Aug. 1676, et 21 Junii 1677, et alibi) de Radice Aequationis Cubicae, ubi intervenit (quae dici solet) Quantitas Imaginaria (puta $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b^2}} \pm \sqrt[3]{a-\sqrt{-b^2}} = Z$) et de Radice Binomii Cubici exquirenda: non est ut quemquem porro remoretur. Utrumque nos satis expedivimus Algebrae Capp. 46, 47, 48, 49. Quippe casus ille non minus subest Regulis Cardanicis (rite intellectis), quam ubi talis non intervenit Imaginaria.

At inquis, quis exhibebit valorem Radicis $\sqrt{-b^2}$ vel $b\sqrt{-1}$, ut quae est Imaginaria et Impossibilis. Omnino, inquam. Sed et ipsum Quadratum $-b^2$ est non minus (stricte loquendo) Imaginarium et Impossibile. Et quidem omnino omnis Negativa quantitas (sive sit Linea, Planum, Solidum, aut aliud quicquam) est pariter Imaginaria et Impossibilis. Quippe impossibile est, ut existat quicquam quod sit minus quam Nihil. Sed, quo sensu velit qui imaginari Quadratum Negativum $(-b^2)$, pariter imaginari debet Imaginarii hujus Quadrati Latus Imaginarium. Et quidem $\sqrt{-b^2}$ in $\sqrt{-b^2}$ ductum non minus facit $-b^2$, quam $\sqrt{+b^2}$ in $\sqrt{+b^2}$ facit $+b^2$. Et Radix Binomii Cubici pariter utrobique elicietur. Hujusque doctrinae summa (ni fallor) habebatur in illa mea Epistola, quam tu memoras Ep. 28 Dec. 1675.

Quae habes Ep. 27 Aug. 1676 de Figurarum Transformatione, ego plane approbo. Eadem Arte (aut quae huic aequipollet) ego passim utor in distribuendis Figuris compositis in sua membra componentia, et in Restituendis Luxatis in Aequipollentes. Absque quo frustra fuissem in eis quae habeo de Calculo Centri Gravitatis.

Quae habes Ep. 21 Junii 1677 de tua pro Tangentibus methodo, ego item approbo. Quae fuerit Slusii methodus, vel non vidi vel non memini. Vide autem annon mea methodus sit aliquanto simplicior. Eam habes jam Anno 1655 passim adhibitam, de Conicis Sectionibus Prop. 23, 30, 36, 46, 49, et alibi, eamque fusius explicatam in Transactionibus Londinensibus pro Mense Martio 1672, indeque transcriptam in meam Algebram cap. 95. Cujus haec fere summa: Sit (fig. 9) $A\alpha$ exposita quaevis curva (concava, convexa, vel utcunque curvata) cujus vertex A, intercepta Diameter vel Sinus versus (quam tu Abscissam vocas) ad Curvae partem Concavam AV (seu ad Convexam AY) $= v$, ejusque Ordinata $V\alpha$ (vel $Y\alpha$) $= b$; curvamque in α contingat recta αF (vel $\alpha\Phi$) diametro YA occurrens ultra verticem in F (vel diametro AY citra verticem in Φ), sitque subtangens quaesita FV (vel ΦY) $= f$. Intelligantur autem in Diametro AV, ultra citraque V, puncta D, D (vel in AY puncta y) eisque ordinatim applicentur DOT (vel yTO) curvae occurrentes in O, et tangenti in T (ultra curvam utrobique, ubi est trilineum $AV\alpha$ ad curvae partem convexam), sitque

VD (vel Yy) = a; adeoque DA (seu yA) = v ± a, et DF (seu $y\Phi$) = f ± a. Et (propter similia triangula) VF . DF : : Vα . DT (vel YΦ . yΦ : : Yα . yT) = $\frac{f \pm a}{f}$ b. Eritque DT $\geqq$ (aequalis vel major quam) DO; nimirum aequalis si intelligatur D in V, sed major si extra V (et similiter yT aequalis vel minor quam yO; nempe aequalis si sit y in Y, minor si extra.) Atque hactenus universaliter, qualecunque fuerit Trilineum AVα (vel AYα.) Estque (quod probe notes) eadem Tangens (sed alibi terminata in F et Φ) quae Trilineo Interno AVα, et quae Trilineo Externo AYα convenit.

Sed pro DO (quae est cum DT comparanda) sumendus est, pro quaque curva, suus cujusque debitus Character, seu Aequatio propria. Exempli gratia, si Aα sit Parabola (quae est omnium simplicissima curva), est AV . AD : : Vαq . DOq = $\frac{v \pm a}{v}$ b^2, et DO = $b\sqrt{\frac{v \pm a}{v}}$. Eritque propterea $\frac{f \pm a}{f}$ b (= DT) aequalis vel major quam $b\sqrt{\frac{v \pm a}{v}}$ (= DO), adeoque (dividendo utrinque per b et quadrando) $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f^2} \geqq \frac{v \pm a}{v}$, et (decussatim multiplicando) $f^2v \pm 2fva + va^2 \geqq f^2v \pm f^2a$, pariterque (deletis utrinque aequalibus, vel potius ab initio neglectis, hoc est, iis omnibus in quibus a non conspicitur, caeterisque per ± a divisis) $2fv \pm va \geqq f^2$, hoc est, aequalis si sumatur D in V; sed illa major, si extra V.

Tandem (qui methodi nucleus est) posito D in V (quo sit a = o, adeoque evanescant ipsius multipla omnia) fiet ($2fv \pm va = 2fv \pm 0 =$) $2fv = f^2$, et $2v = f$ subtangens quaesita.

Si pro Parabola communi Apolloniana (quam Quadraticam dicas, utpote cujus Abscissae seu interceptae Diametri sunt in Ordinatarum ratione Duplicata, seu ut earum Quadrata) exposita sit Paraboloeides Cubica, Biquadratica, Supersolidalis, aut alia cujuscunque gradus, puta quae potestatis Exponentem habeat e, tum (pro f = 2v) prodiret f = 3v, f = 4v, f = 5v, aut f = ev etc., hoc est, Subtangens f foret Abscissae v multipla per numerum e (exponentem potestatis) sive sit ille numerus Integer, sive Fractus, sive utcunque Surdus (quippe jamdiu est quod ego introduxi in

Geometricam considerationem Potestates et Aequationes intermedias inter Lateralem, Quadraticam, Cubicam etc., quas tu vocas Interscendentes, et quae Exponentem habeant Indefinitum, ut e vel p, quas tu Transcendentes vocas).

Si vero Character Curvae sit magis compositus, quam est Parabolae aut Paraboloeideos, ratio rectae f ad v prodibit magis implicata: ut pro Hyperbolae prodibit $f = \frac{T+v}{\frac{1}{2}T+v}v$; pro Ellipsi vel Circulo $f = \frac{T-v}{\frac{1}{2}T-v}v$, hoc est, ut $\frac{1}{2}T \pm v$ ad $T \pm v$, sic v ad f. Atque in aliis curvis pariter pro cujusque charactere, qualium ego plura specimina ibidem exhibui. Et quidem, si non appareat prima fronte tale Trilineum ut $AV\alpha$ aut $AY\alpha$, quomodo accommodanda sit ea res, pluribus ostendi.

Sed et ibidem ostendi, quomodo abbrevianda sit Calculi pars magna, nempe omissis sive neglectis, ab initio, omnibus illis terminis, qui forent post delendi aut rejiciendi.

Hoc est, omissis ab initio terminis illis omnibus in quibus a non conspiceretur, nec sunt in a ducendi, utpote utrinque aequalibus.

Item, omissis omnibus in quibus haberetur a^2 vel hujus superior potestas, eo quod, post depressionem per $\pm a$, si adhuc a supersit, erit ille terminus nihilo aequalis (ut sunt omnia multipla ipsius a, cum ponitur $a = 0$) sive sit ille terminus intra vinculum, sive extra vinculum Irrationalitatis, si quod sit. Adeoque, quoties in praeviis ad hoc multiplicationibus (pro analogia constituenda) occurrit terminus ab a immunis in alium sic immunem ducendus, aut terminus quo conspicitur a in alium quo sic conspicitur; negligendum est illud multiplicationis membrum, solaque illa sunt prosequenda, ubi terminus quo conspicitur a (unius dimensionis) ducendus est in terminum quo non conspicitur a.

Fundamentum hujus processus hoc est: Quo habeatur Tangentis positio, hoc prospiciendum est unicum, ut Ordinata trilinei Curvilinei $AV\alpha$, cum ea quae est Ordinata Trianguli $FV\alpha$, coincidat, hoc est, DO cum DT, quod non fit nisi in Va, cumque ipsius DT constans Character (pro curvis omnibus) sit $\frac{f \pm a}{f}b$, (Aequatio Lateralis quam ingreditur ipsius a dimensio unica, non plures). Sicubi ipsius habeantur plures dimensiones (a^2, a^3 etc.), erit ille terminus (etiam post depressionem per $\pm a$) nihili multiplus, adeoque nihil.

Quumque hoc quod moneo adhibetur Calculi Compendium, id quod superest, est reapse tuus Calculus Differentialis (ut non sit ea tam res nova, quam nova loquendi formula, utut Tu id forte non animadverteris). Est utique meum a tantundem ac tuum x (seu y) Abscissae segmentum, cum hoc solo discrimine, quod tuum x est infinite parvum, meum a plane nihil. Cumque deleta sunt, seu (per calculi compendium) omissa ea omnia, quae delenda forent, quod reliquum est, et ipsum tuum minutum Triangulum Differentiale (duobus ordinatis proximis interjectum) toti FVα simile (Tibi quidem infinite-exiguum, mihi vero plane nihil.) Quippe quo retinetur Species Trianguli, sed abstracta a Magnitudine hoc est, Triangulum hujusce Formae, sed nullius determinatae Magnitudinis.

Nec tamen id tibi imputandum est, aut vitio dandum, quod non animadverteris rem ipsam a me fuisse ante insinuatam, sed sub alia verborum formula, cum non tibi magis incumbat mea vidisse omnia (et penitius examinasse) quam mihi tua. Nec sua caret utilitate, diversis itineribus ad id ipsum (seu quod aequipollet) a pluribus perventum esse.

Quod autem mea mihi videatur designatio simplicior, ponentis $a = o$, quam tua ponentis x infinite parvum, hinc est, nempe quod mihi non opus sit tuis aliquot Postulatis de infinite-parvo in se ducto, aut in aliud infinite-parvum, in nihilum degenerante (quod nonnisi cum aliqua cautione adhibendum est), cum sit per se perspicuum (quod mihi sufficit), quod Nihili quodcunque multiplum est adhuc Nihil.

Quodque tu mones Ep. 21 Junii 1677, quod non refert quem Angulum faciunt Ordinatae ad Axem (ubi tu Axem dicis eo sensu quo alii Diametrum, quippe plures sunt v. g. ejusdem Parabolae Diametri, sed Axis unicus, ad quem scilicet Ordinatae sunt ad angulos rectos), omnino verum est; quod et ego dudum monueram, ex eo quod consideratio Anguli non ingreditur Aequationem. Quippe haec mihi Regula generalis est: Quaecunque Quantitas non ingreditur Aequationem, ea (quoad illam Aequationem) est Indeterminata, adeoque potest pro arbitrio sumi, sed intra certos limites, ne secus evadat Aequatio Impossibilis. De quo fusius diximus ad Algebrae Prop. 57.

Sed et de Tangentibus monueram, hanc meam methodum extendi ad duarum Curvarum Contactum mutuum (quatenus id fieri potest) non minus quam ad Curvae Rectaeque. Puta, si quaeratur positio Parabolae quae tangat expositam Hyperbolam, Ellipsin, Circulumve, quippe ut illic quaeritur positio Trianguli F V α quod sit cum Trilineo A V α comparandum (ex collatis Characteribus Trianguli istiusque Trilinei), hic quaerenda est positio ipsius F V α Parabolae cum illo Trilineo (ex comparatis utriusque Characteribus), ita ut eadem V α sit utriusque communis Ordinata. (Verum hic alia erit adhibenda ratio in abbreviando calculo, quam ubi de Recta tangente agitur, eo quod Trianguli Character est Aequatio Lateralis, sed Parabolae, Quadratica: et pro aliis Curvis alia atque alia). Huc*) utique res redit universim: Duorum Trilineorum diversiformium, communem Ordinatam habentium, eidem Diametro applicatam, (seu quod tantundem est) data unius altitudine, alterius altitudinem investigare (nempe ex collatis inter se utriusque Characteribus). Quod et methodum (quam vocas) Tangentium Inversam comprehendit. Atque hinc amplus aperitur exspatiandi campus, si cui libet eum ingredi, de mutuis Curvarum inter se Contactibus.

Quae omnia sunt a me tradita in Epistola ad D. Oldenburgium scripta Febr. 15, 1671 stilo Angliae, et Transactionibus Londinensibus inserta pro Mense Martio 1672, indeque transumpta in Algebrae meae Cap. 95. Eaque hic repeto, ut videas (si vacet) quantus sit tuae meaeque methodi hac in re consensus, sed sub diversis loquendi formulis, et quodnam sit utriusque commune Fundamentum. Nam justa est quam tu innuis querela Ep. 27 Aug. 1676, quod Multa, quae videntur clara, gratis assumimus Axiomata, cum tamen opus sit ipsorum Axiomatum Analysi, ut verum quod subest Fundamentum pateseat, quod itaque soleo ego solicitus inquirere. Quippe, dum citra Principia consistimus, deest non parum luminis quod rem totam illustret.

Plura dicturum prohibet Epistola jam praelonga. Vale etc.

*) Diese Stelle bis zu den Worten: inter se contactibus, ist späterer Zusatz.

X.

Leibniz an Wallis.

Multa me dudum responsurum impediere: Itinera quaedam, tum occupatiunculae, spes etiam reperiendi delineationes quasdam antiquarum mearum Epistolarum, sed quae hactenus irrita fuit, quod non licuerit per magis necessarias occupationes excutere schedarum Chaos. Nunc, praesertim anno ad finem decurrente, diutius differendum non putavi, et rumpendas potius moras responsione qualicunque, quam trahendas, quando ex asse satisfacere non datur.

Verissimum est, quod ais, utile esse ex Epistolis quas edere paras progressum videre quem paulatim fecimus in scientia, neque enim Methodi uno momento totae nascuntur. Id appareret multo clarius, si quae alia et tunc et postea scripsi ad amicos, simul edi possent, mihique vacaret ex iis colligere, recognoscere et in ordinem redigere quae huc facerent. Interea contenti simus hoc Catone; et ego quidem tantum tribuo et judicio Tuo et benevolentiae, ut rem totam arbitrio Tuo committam.

Is qui in Cartesii Methodo resolvendi Aequationem Biquadraticam ope Cubicae errorem deprehendisse sibi videbatur, fuit Prestetus, cujus Elementa Matheseos Universalis, ut vocabat, initio sine nomine autoris edita, a Te, ni fallor, et aliis Malebranchio tributa fuerunt, qui patronus fuerit juvenis, eumque animarat ad haec studia atque etiam provexerat. Secundae Editioni nomen suum praescripsit Prestetus, sed ut mihi videtur magnum operae pretium non fecit. Cum autem Lutetiae Parisiorum agerem, ipse mihi attulit schedam, qua in Regula illa Cartesii aliquid nequicquam reprehendebat. Suadebam ut aggrederetur nondum exhausta, neque actum ageret; quam multa enim sunt, in quibus cum maximo fructu exerceri posset industria analyticorum? Sed surdo fabulam narrabam. Diu vero est, quod eum obiisse intellexi, de quo doleo; cum enim esset in calculo exercitatus, poterat elaborare in iis quae assiduitatem postulant.

Primus inventor reductionis Aequationum Biquadraticarum ad Quadraticas fuit Ludovicus Ferrarius, Cardani discipulus, juvenis egregius, qui praematura morte decessit. Eum saepe laudat

Cardanus. Vieta postea eandem rem tradidit, et mox Cartesius. Bombellus vero Ferrarii inventum (non multum post ejus obitum) descripsit.

Diu est quod ipse quoque judicavi $\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} = z$ esse quantitatem realem, etsi speciem habeat imaginariae, ob virtualem nimirum imaginariae destructionem, perinde ac in destructione actuali $a + b\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1}$ est $= 2a$. Hinc si ex $\sqrt[3]{a \pm b\sqrt{-1}}$ extrahamus radicem ope seriei infinitae ad inveniendum valorem ipsius z serie tali expressum, efficere possumus, ut reapse evanescat imaginaria quantitas. Atque ita etiam in casu imaginario regulis Cardanicis cum fructu utimur, ut alias vias taceam.

In eo vero quod addis, non mirum esse quod $\sqrt{-bb}$ seu $b\sqrt{-1}$ sit quantitas imaginaria et impossibilis, cum ipsum quadratum hujus imaginariae seu ipsum $-bb$, quadratum negativum, imaginaria sit quantitas, nonnihil reperio difficultatis. Certe enim $aa - bb$ est quantitas realis, cum tamen $a - b\sqrt{-1}$ sit quantitas impossibilis: oportet ergo in radice situm esse fundamentum impossibilitatis, quod in ipso quadrato non est.

Methodus Tangentium Slusiana fuit, ni fallor, aliquando inserta Transactionibus Philosophicis vestris ab optimo Oldenburgio editis. Non multum differt a Fermatiana aut Tua. Regulam aliquam continebat aptam illis, qui cum fundamenta non intelligant ex praescripto agere coguntur. Ita plerique utuntur regulis Cardanicis aut Ludovici Ferrarii, quas Cartesius suas fecit pro resolvendis Cubicis aut Biquadraticis aequationibus, etsi minime intelligant originem regularum, nec, si ex memoria sint deletae, aut libri non sint ad manus, per se recuperare eas possint. Ego multis olim modis et in Cardani et in Ferrarii regulas incidi. Vidi etiam Harriotum singulari plane ratione ad Cardanicas pervenisse. Sed nulla earum viarum, quas alii quod sciam usurparunt, apta est progressuro ad Aequationes altiores. Cartesius subindicarat alicubi in sua Geometria, pari ratione etiam aequationes sexti gradus posse reduci ad surdesolidas, qua quarti ad Cubicas. Sed vereor ut ipse hoc potuerit praestare. Certe cum doctus quidam juvenis Bremensis cui Docemio nomen, rationem sexti gradus ad quintum revocandi ab ipso postulasset, respondit ei Cartesius viamque praescripsit; sed meo judicio tam perplexam et obscuram

(Apographum enim Epistolae ad me pervenit) ut nihil inde possit elici. Quae res dubitationem meam auxit, utrum scilicet haec potuerit Cartesius: reapse enim fieri posse non nego.

Quod Calculum differentialem attinet, fateor multa ei esse communia cum iis quae et Tibi, et Fermatio aliisque, imo jam ipsi Archimedi erant explorata; fortasse tamen res multo longius nunc provecta est, ut jam effici possint, quae antea etiam summis Geometris clausa videbantur, Hugenio ipso id agnoscente. Perinde fere se res habet ac in Calculo Analytico ad lineas Conicas altioresve applicato: quis non videt Apollonium et veteres alios habuisse Theoremata quae materiam praebent aequationibus, quibus Cartesius postea lineas designare voluit? Interim methodo Cartesii res ad calculum reducta est, ut jam commode ac nullo negotio fiant, quae antea multo meditationis et imaginationis labore indigebant. Eodem modo Calculo nostro differentiali etiam Transcendentia Analyticis operationibus subjiciuntur, quae inde antea excluserat ipse Cartesius.

Putem praestare, ut Elementa vel differentialia momentanea considerentur velut quantitates more meo, quam ut pro nihilis habeantur. Nam et ipsae rursus suas habent differentias, et possunt etiam per lineas assignabiles proportionales repraesentari. Triangulum illud inassignabile, quod ego characteristicum vocare soleo, triangulo assignabili simile agnoscere tecum, et tamen pro nihilo habere, in quo retineatur species trianguli abstracta a magnitudine, ita ut sit datae figurae, nullius vero magnitudinis, nescio an intelligi possit, certe obscuritatem non necessariam inducere videtur. Figuram sine magnitudine quis agnoscat? Nec video quomodo hinc auferri possit magnitudo, cum dato tali Triangulo intelligi queat aliud simile adhuc minus, si scilicet in linea alia simili omnia proportionaliter fieri intelligantur. Finge duos circulos concentricos in eodem plano, et continue simul bisecari sectores eorum iisdem radiis productis comprehensos, nonne chordae etiam inassignabiles rationem radiorum servabunt, atque etiam inter evanescendum erunt inaequales, quemadmodum et inaequalia erunt segmenta similia inassignabilia duorum sectorum quae simul inter evanescendum orientur? Haec ergo segmenta, quae tamen triangulis characteristicis inassignabilibus infinities minora sunt, magnitudine tamen non carebunt; quanto minus ipsa haec triangula?

Interdum abusive dicimus Ordinatas etiam posse esse ad

Axem obliquas, cum proprie magis Axis dicatur recta, ad quem sunt normales; ideo cum accuratius loqui volo, pro Axe voco Directricem, quo vocabulo si bene memini utebatur Johannes de Witt in Conicis suis Elementis. Libenter enim vocabula apta etiam ab aliis proposita usurpo. Possunt autem pro directrice sumi rectae quaecunque, cum diametros per centrum (vel verum vel fictum infinite distans, quando scilicet parallelae sunt) transire oporteat. Rectam autem indefinitam, quae ad principium abscissarum angulum facit eundem cum directrice quem faciunt ordinatim applicatae, vocare soleo condirectricem, ad quam novae et propriae ordinatim applicatae sunt ipsis abscissis aequales et parallelae; unde eas voco coordinatas, nempe ordinatas ad condirectricem. Eamque nomenclaturam meam commoditatis causa nonnulli Viri in his studiis egregii jam frequentare coepere: commoditatis, inquam, causa, nam ad summam rei parum refert, quo quodque nomine appellemus.

Quod ais Tibi non opus esse infinite parvo in se ducto, vide ne ex oblivione quadam proficiscatur: annon enim elementa curvae representanda sunt per $\sqrt{dx\,dx + dy\,dy}$, posito rectam dx esse elementum abscissae x, et rectam dy elementum ordinatae y? Quin observo in his novam quandam legem Homogeneorum pro calculo infinitesimali: nam quadratum differentiae seu elementi primi gradus homogeneum est rectangulo facto ex recta communi ducta in differentiam secundi gradus, seu $dx\,dx$ homogeneum est ipsi $a\,ddx$. Cum fieri possit, ut elementum primi gradus sit proportione medium inter rectam communem et differentiam differentiarum, tantum abest ut haec pro nihilis sint habenda. Et habent usum illa secundi gradus elementa cum alias, tum pro lineis osculantibus commode inveniendis, uti elementa primi gradus tangentibus inserviunt.

Haec ad Literas Tuas moneo, magis ne nihil dicam, quam ut putem aliquid hoc loco a me afferri, quod Te animum intendentem fugere possit. Poterunt tamen haec monita nostra mutua fortasse aliis prodesse, quando Tu quidem ea publice legi operae pretium putas. Cui assentior, magis ne Tua pereant, quam quod mea tanti videantur.

Antequam finiam, patere ut meas exhortationes resumam, ne scilicet admirandam Tuam artem cryptolyticam perire patiaris. Scio praeceptis comprehendi non posse aut satis generalibus, aut satis determinatis. At huic defectui succurrerent exempla, si asscripta illis semper essent ipsa ratiocinationis Tuae vestigia. Patere Te quaeso exorari, et tantum beneficium da posteritati. Cum vero in eam rem sumtu et amanuensibus aptis opus sit, putem facile rationem inire posse, modo de Tua voluntate decretorie constet; quam ego mox discere valde optem non meo (ut facile judices) sed generis humani bono, in re ad gloriam Tuam maxime pertinente.

Quod superest, Calendis Januariis instantibus Deum quaeso, ut Tibi multos adhuc annos valenti et vigenti largiatur, Teque etiam proximi seculi non breve ornamentum esse sinat etc.

Dabam Hannoverae, 29 Dec. 1698.

XI.

Wallis an Leibniz.

Oxonii Jan. 16. 1698/9.

Literas tuas gratissimas, Hannoverae datas Dec. 29, 1698, accepi hodie. Et quidem opportune, quum reliquae, quas de Tuis habeo, fere omnes jam sunt impressae, quas haec sequetur. Atque mihi gratulor, quod mea tibi non displiceat illarum editio.

Quod multo clarius paterent tuae Methodi, si, quas da alios etiam scripseris amicos, simul ederentur, ego juxta tecum sentio. Et quidem optarim ut tibi vacaret illas recolligere et in ordinem redigere, atque rem totam ordine exponere. Cum vero id nondum contigerit, hoc ego solum potui, ut, quae ad manus meas pervenerint, non perirent.

Quod de Presteto mones, ego tecum sentio; nec est quod addam (ea de re) eis quae ante dixi, dum nesciverim quis esset quem tu insinuabas.

Quod addis de Ludovico Ferrario (ut qui primus invenerit Aequationis Biquadraticae in duas Quadraticas Resolutionem, Bombellio prior), ego ante nesciebam; nec scio numquid ab eo scriptum extet.

De Cardanicis Radicibus Aequationis Cubicae, quod tu suggeris (nempe, quod sub Notatione quasi-Imaginaria latet Realis Quantitas), omnino verum existimo. De quo ante dixi.

Quod $-bb$ quantitatem dixi Imaginariam, id intellige, quo sensu omnis Negativa Quantitas est (stricto sensu) Imaginaria, quippe quod non possit quicquam existere quod sit Minus quam Nihil. Sed $b\sqrt{-1}$ est duplici nomine Imaginarium, quasi in secundo gradu remotum: est utique $\sqrt{-1}$ media proportionalis inter $+1$ et -1, ut est $\sqrt{+1}$ media proportionalis inter $+1$ et $+1$, vel inter -1 et -1.

At inquis, $aa-bb$ est quantitas realis. Omnino quidem, dummodo aa sit plus quam bb. Sin illud, quam hoc, minus sit, erit $aa-bb$ Minus quam Nihil.

Slusianam Methodum pro Tangentibus, siquando viderim in Oldenburgii Transactionibus, oblitus sum. Nec magni interest, cum hujus aliorumque Methodos reapse convenire putaverim, sed sub diverso modo loquendi.

Quod tu mones de illis qui ex praescripto agunt, Regularum fundamenta nescientes, omnino verum est. Atque hinc est quod ipsi Methodorum Aequipollentiam non animadvertant, quae (sub variis loquendi formulis) reapse conveniunt.

Quod Aequationes Sexti gradus (quod censuit Cartesius) sint Reducibiles ad Quintum (sed et Aequationes gradus Octavi, Noni et Decimi, reducibiles ad Septimum), ego non negaverim. Sed nescio an quisquam id laboris hactenus in se susceperit, ut Reductionis Methodum universalem indicaverit. Dissolutionem compositarum Aequationum in Simpliciores innuit Huddenius, et (ante eum) Harriotus. Sed methodum Universalem de omnibus sic reducendis (ut sunt Biquadraticae ope Cubicae) nescio an quis aggressus sit. Et forte, siquando id fiat, tantis implicationibus id erit impeditum, ut vix foret operae pretium persequi. Nolim tamen quemquam inde deterrere, siquis aggredi velit.

Quod tuus Calculus Differentialis multa habet cum aliorum sensis communia, etiam ipsius Archimedis, tu (pro candore tuo) libere profiteris: non tamen est inde minus aestimandus. Nam multa sunt, quorum prima fundamenta fuerint Veteribus non ignota, ita tamen intricata et difficultatis plena, ut sint ea (nostra aetate) reddita multo dilucidiora et usibus aptiora (ut, ne plura nominem, Indorum Algorithmus per Figuras Numerarias, et Nuperorum Calculus Analyticus seu Arithmetica Speciosa; item Conicarum Sectionum Exemptio e Cono in Planum; aliaque plurima quae praesens aetas Veterum inventis superaddidit). Adeoque, ut nollem Veteres sua laude fraudare (quorum Fundamentis nos plura superstruximus), ita nec Modernos sufflaminare velim ne porro procedant, sed incitare potius, et Te prae caeteris.

Quod dixi de retenta Specie Trianguli abstracta a Magnitudine, non id intellectum velim, quasi Triangulum vellem quod Magnitudinem non habeat, sed quod considerari possit Species seu Forma Trianguli abstracta a Magnitudine, hoc est, non considerata magnitudine (ut puta si dixero Triangulum Aequilaterum, non interim dicto, quam Magnum sit), quippe hoc est Abstrahere. Si vero non placeat, ut dicatur Species Trianguli, dicas licet Gradum Inclinationis seu Declivitatis curvae in puncto Contactus, vel Angulum quem cum Ordinata facit recta Contingens, quippe hoc est quod quaeritur.

Dum suspicaris, insinuasse me, mihi non opus esse Factum ex infinite-parvo in se ducto, vel in aliud infinite-parvum (puta $d\bar{x}\,d\bar{x}$ vel $d\bar{y}\,d\bar{y}$), omnino non assequeris mentem meam, quippe ego plane contrarium insinuabam (non, quod hoc Multiplum mihi non sit opus, sed hujus Neglectum mihi non opus esse.) Nimirum, cum Factum ex $x + d\bar{x}$ in $y + d\bar{y}$ sit $xy + y d\bar{x} + x d\bar{y} + d\bar{x}\,d\bar{y}$, hujus loco tum Tu, tum D. Hospitalius (Artic. 5) assumitis (si ego vos recte intelligo) $xy + y d\bar{x} + x d\bar{y}$, neglecto $d\bar{x}\,d\bar{y}$, quasi hoc sit pro Nihilo habendum, eo quod factum sit ex infinite-parvo in infinite-parvum ducto, adeoque Heterogeneum (quod quasi Postulatum videmini passim adhibere). Dixeram ego, hoc Postulato mihi non opus esse (nempe, quod Factum ex infinite-parvo in infinite-parvum ducto habendum sit pro Nihilo), quod, dixi, non nisi caute admittendum esse. Admitti tuto potest (ob rationem a me ante dictam) in Contactu Curvae cum Recta (quod Vos facitis), sed non ita semper in mutuis Curvarum inter se Contactibus. Hujusque loco mihi sufficere dixi, quod Nihili quodvis Multiplum sit adhuc Nihil (quod mihi videbatur simplicius.) Nam Diametri seu Directricis segmentum VD (inter Trianguli Basin et Ordinatam Figurae interjectum) quod vos vocatis x aut y, ego voco a: adeoque, quo casu puncta V, D coincidunt (quod fit in Tactu), illud a nihil est (propter nihil interjectum) adeoque ipsius a quodvis Multiplum est item Nihil seu Evanescens. Quaeque inter evanescendum (ut tu vere loqueris) manent inaequalia (et quidem in eadem ratione inaequalia), ea, quum prorsus evanuerint, sunt pariter Nihil (quod, si processum meum rite perpendas, non potes non videre). Sin tu malis hanc punctorum V, D coincidentium dicere distantiam infinite-parvam, per me licet.

Quum dixi Te Axem (sensu laxiore) dicere, quo sensu dici solet Diameter, id Notabam quidem (ut quod tu intellectum velles), non Reprehendebam. Nam perinde mihi est, sive Axem, sive Diametrum, sive Directricem voces. Dum enim de Sensu convenit, nolim ego tecum de Nomine litigare.

Quod tu de Interpolandi Methodo antehac aliquoties monuisti, nimirum quod multum adhuc in recessu habeat, omnino verum est. Vis ut ego rem illam fusius prosequar; sed illud aggredi hac aetate, mihi non vacat. Fontem tamen aperiam, unde alii pro libitu suos deducant rivulos satis copiosos.

Plurimae sunt (quod notum est) Regularium Progressionum Formulae (quas Medietates vocabant olim Jordanus Brunus aliique), inter quas sunt Progressio (quae dicitur) Arithmetica, Geometrica, Harmonica, sed et (quae mihi dicuntur) Series Secundanorum, Tertianorum, Subsecundanorum, Subtertianorum etc., item Numerorum Triangularium, Pyramidalium etc. aliaeque plurimae. Et quidem plures excogitantur in dies.

Quarum omnium (si Progressionem Aequalium excipias) Series Primanorum seu Arithmetice-proportionalium est Simplicissima et quasi Norma reliquarum, ut 0, 1, 2, 3, 4 etc., ad quam exigendae sunt reliquae, pro suo cujusque Charactere.

Verbi gratia, Series Numerorum Triangularium, ut 0, 1, 3, 6, 10 etc., cujus ego Characterem facio $\frac{l^2 + l}{2}$ (Ar. Infin. prop. 171, 172). Hanc ego si Interpolare velim, suppono sic interpolatam (unis aut pluribus interpositis) Seriem illam Primanorum, puta 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3 etc. aut 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, 2, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$, 3 etc. Deinde, in Triangularium serie, expono l per singulos sic interpositos terminos, habeoque interpolatam seriem Numerorum Triangularium, puta 0, $\frac{3}{8}$, 1, $1\frac{7}{8}$, 3, $4\frac{3}{8}$, 6 etc. (qui fiunt ex Continua Additione Arithmetice-proportionalium $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{7}{8} + \frac{9}{8} + \frac{11}{8} + \frac{13}{8}$ etc. ut sunt ipsi 1, 3, 6, 10 etc. hoc est $1 + 2 + 3 + 4$ etc.: sicut series quam dico Hypergeometricam 1, 2, 6, 24, 120 etc. ex continua Multiplicatione Arithmetice-proportionalium $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ etc.). Atque ad eandem formam interpolandae sunt aliae Series pro suo cujusque Charactere (ut videre est ad Ar. Infin. pr. 184), ita tamen ut nonnunquam singuli interponendi termini exeant in seriem infinitam (aut aliam forte posthac excogitandam formam designandi quantitates perplexas, surdas, aut intricatas) praesertim in Radicum Extractionibus cujuscunque generis, aliisve id genus operationibus Resolutivis.

Ubi vero de pluribus hujusmodi seriebus separatim interpolandis constat, possunt harum duae pluresve inter se componi seu commisceri Addendo, Subtrahendo, Multiplicando, Dividendo, Radices extrahendo, aliisve modis, ut nunquam sit desitura materia volentibus hanc Artem ampliare.

Hujus ego plura exhibui specimina, Addendo et Subtrahendo Ar. Infin. prop. 108, 111, 114, 117 et seqq., item prop. 155, 158, 159 et seqq., Multiplicando item et Dividendo prop. 58, 59, 71 et seqq. item prop. 85, 88, 101 et seqq. et speciatim prop. 166, 167 et seqq.

Hanc Artem adhibuisse Newtonum, non dubito, sed quam reticet, contentus plurima exhibuisse specimina, ex seriebus sic compositis deprompta, donec harum rerum (quod ait) pertaesus destitit, patentem campum permittens aliis, si quis (otio abundans) eo se exercere velit.

Sed diserte notat, se neglectis saepe Figurarum formis (quibus res haecce non est coercenda) series Abstractas considerasse. Quod et tu aliquando mones, Methodos tuas ampliores esse, quam ut solis Quadraturis accommodentur.

Atque hoc est quod mihi potissimum propositum videas per totam meam Arithmeticam Infinitorum, nempe ut Speculationes Geometricas, Abstracte consideratas, reducerem ad speculationem pure Arithmeticam seu potius Logisticam (prout Arithmeticam et Logisticam distinguebant Veteres, illam ad Numerorum Integrorum considerationem accommodando, hanc item ad Fractionum et quarumcunque Rationum seu *λόγων* considerationem) adeoque Figurarum Quadraturas (et quae sunt hujusmodi) recenseo ut Casus particulares, sub Generalibus et Abstractis Seriebus comprehensos.

De Cryptolyticis (quod porro mones) dicendum: non omnes sunt huic negotio pares, aut discendi capaces (poscit haec res peculiare quoddam ingenii acumen). Qui pares sunt (expertus loquor) ubi quanti laboris res ea sit animadvertunt, molestiam declinant, et molliora malunt studia prosequi. Unum tamen aut alterum docturus sum, quibus sit res ea Methodis aggredienda (si saltem Methodus dicenda sit Vaga Venatio) monstrando, quibus ego passibus indagando soleo procedere (quod ipse pro Sagacitate sua imitetur) nec tamen eisdem semper, nam pro Vario Ferarum genere, variando est Venatio.

Haec raptim scripsi, quo tuis utcunque respondeam Literis, ne officio in te deessem meo. Tu vale tuoque faveas etc.

P. S. *) Monendum hic duxi (ex Philosophicis Transactionibus pro Mense Octobri 1697 desumptum) in Algebrae meae Cap. 109 irrepsisse Numeros quosdam vitiosos, qui quamvis summam Demonstrationis non evertant, sunt tamen rectificandi. Propositum est, Datum Cubum (cujus latus ponatur $= 1$) ita perforare, ut Cubus alter, ipsi aequalis, per foramen transeat. Quod cum pluribus modis fieri possit, hunc selegi. Intelligatur Cubus perforandus Sphaerae inscriptus, cujus itaque Diameter seu Axis erit (aequalis Diagonio Cubi) $= \sqrt{3}$. Cujus Polos occupent Cubi Angulus A, et huic oppositus latens. Reliquique sex Anguli B, C, D, E, F, G, in planum per Centrum (Axi ad Angulos rectos) projiciantur, non quod illi omnes sint in eodem plano, sed B, D, F sunt in plano superiori quod ab A (polo proximo) distat Axis triente; reliquique C, E, G in plano huic parallelo quod tantundem distat ab opposito polo latente. Sed omnes hi Anguli, demissis in planum illud per centrum perpendicularibus projecti, formabunt in illo hexagonum regulare BCDEFG. Cui si intelligatur Circulus circumscriptus, non erit ille Circulus Sphaerae maximus (quia puncta sic projecta non pertingunt ad extremum ambitum Circuli Sphaerae maximi per centrum), sed qualis ille est qui per B, D, F, vel per C, E, G transit. Cujus itaque Diameter est $= \sqrt{\frac{8}{3}}$, et $PB = \sqrt{\frac{1}{6}}$, et $PG = \sqrt{\frac{1}{2}}$, et $BM = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}$, et $MQ = \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Cum itaque $MH = \frac{1}{2} = 0.500$ (semilatus incumbentis Cubi transituri) minus sit quam $MQ = \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.548$, manifestum est (facto foramine HIKL) transire posse cubum incumbentem, perforato aequalem.

---

*) Dieses Postscriptum ist später hinzugesetzt.

XII.

Leibniz an Wallis.

30 Martii 1699.

Multum debeo benevolentiae Tuae, quod tantum Tibi laboris sumis in panno meo ad purpuram tuam assuendo, dum literas quasdam a me olim scriptas et pene in memoria mea obliteratas producis: tum etiam quod memor desiderii mei olim significati, quae de Bohoritii libro compereras, nuntiare voluisti. Ipse interim ad me commodato pervenit beneficio amici qui ex Bibliotheca publica Senatus Francofurtanae ad Moenum urbis transmisit.

Nunc ad Tuas illas priores et ampliores venio, quae beneficio Amplissimi Ablegati vestri recte et mature ad me sunt perlatae. Ludovicum Ferrarium Raphaele Bombello priorem dedisse reductionem aequationis quadrato-quadraticae ad cubicam, ex ipso didici Bombello, qui gratus praedicat inventorem atque etiam inventi modum exponit. Postea vidi Cardanum juvenis discipuli immatura morte defuncti laudare ingenium, cujus vitam peculiari dissertatiuncula operibus, si bene memini, inserta perstringit, et hoc ipsum ei ascribit insigne inventum. Editum aliquid a Ferrario non apparet. Vieta et Cartesius cum rem ambo attigerint, autorem praeteriere.

Reduci posse aequationes exponentem habentes numerum derivativum, ad proxime inferiorem aequationem exponentis primitivi, verum censeo, sed nemo hactenus demonstravit. Cartesius in Geometria professus est et in Epistola inedita tentavit ostendere sextae ad quintam reductionem, sed scopum meo judicio non tetigit. Viae, quibus Ferrarius aliique in quarto gradu usi, hic non succedit, nec aliam quisquam monstravit: et quanquam prolixior esset calculus, quam ut tentari mereretur, ad scientiae tamen perfectionem pertineret, habere praedemonstrationem successus, id est methodum. Sed facit rei difficultas, ut plerique omnes hunc scopulum sint circumvecti. Unde factum est, ut post Ferrarium nihil adjectum sit ad aequationum resolutionem speciosam etiam universalem.

Inter $-bb$ et $\sqrt{-bb}$ id interest, quod $aa-bb$ realis esse potest quantitas et positiva, sed $a+\sqrt{-bb}$ non potest.

Equidem potest forma characteristici Trianguli in curva recte explicari gradu declivitatis, sed pro calculo utile est fingere quantitates infinite parvas, seu ut Nicolaus Mercator vocabat, infinitesimas; quales, cum ratio eorum inter se utique assignabilis quaeritur, jam pro nihilis habere non licet. Rejiciuntur interim quoties incomparabiliter majoribus adjiciuntur, secundum Lemmata incomparabilium aliquando a me in Actis Lipsiensibus proposita; quo fundamento etiam utitur Dn. Marchio Hospitalius. Itaque si per se stet $x+dx$, rejicitur dx. Secus est si quaeratur $(x)-x$ seu $x+dx-x$; tunc enim quantitas assignabilis evanescit. Et pari jure non possunt simul stare $x dx$ et $dx dx$, seu $x+dx$ in dx. Hinc si differentiari debeat xy, scribique $(x)(y)-xy$, posito $(x)=x+dx$ et $(y)=y+dy$, evanescit rectangulum assignabile, manet rectangulum sub assignabili et elementari primi gradus, rejiciendumque est rectangulum sub elementaribus duabus, nempe $x+dx, y+dy = xy+xdy+ydx+dx dy$, ut bene mones, ubi detracto xy, restat $xdy+ydx+dxdy$. Sed hic $dxdy$ rejiciendum, ut ipsis $xdy+ydx$ incomparabiliter minus, et fit $d,xy = xdy+ydx$, ita ut semper manifestum sit, re in ipsis assignabilibus peracta, errorem, qui inde metui queat, esse dato minorem, si quis calculum ad Archimedis stylum traducere velit. Sed cum descenditur ad secundam differentiationem, tunc etiam rectangula illa ex assignabili et elementari evanescunt supersuntque rectangula ex duabus elementaribus, et quae (quod memorabile est) his homogenea facta ex assignabili ducta in differentio-differentialem. Nihil ergo a nobis negligitur nisi in loco, nec quicquam aliud pro nihilo ducitur, nisi comparate. Nec alio indigemus postulato. Itaque dd,xy est $2dxdy+xddy+yddx$. Qui calculus ad oscula aliaque id genus innumera usum habet. Simplicius, fateor, est quod ais, nihili multiplum esse nihilum, sed usum quem nos proponimus non habet. [Verae interim an fictitiae sint quantitates inassignabiles, non disputo; sufficit servire ad compendium cogitandi, semperque mutato tantum stylo demonstrationem secum ferre; itaque notavi, si quis incomparabiliter vel quantum satis parva pro infinite parvis substituat, me non repugnare].*)

Licet judicarem Te pro humanitate Tua non admodum re-

---

*) Dieser eingeschlossene Satz sollte wahrscheinlich in der Abschrift des Briefes wegbleiben.

prehendere, quod axem dixissem, ubi ordinatae non sunt normales; libenter tamen professus sum, qua ratione loqui ipse soleam, cum distinctius omnia efferre interest.

Magni semper feci faciamque Tuam methodum interpollandi, et ut dixi, vellem oriri juvenes qui prosequerentur hanc rationem, qua inductive et tamen indubitate (quod adeo non improbo, ut mirer magis) tot Quadraturas ad circulum et hyperbolam [etsi (quod unum deest) non nisi in totalibus, hac quidem arte, figuris] reducis.

Nescio quomodo remissius nunc tractantur studia illa altiora, cum tamen nunquam, post tot aditus apertos, facilius potuerint tractari. Sed puto infelicia tempora intercessisse, dum bella curas hominum alio vertere; ita pauci admodum juvenes in gloriae pristinae spem succrescunt. Etiam natura quam paucos nunc observatores diligentes habet! Utinam, ut Gallica Scientiarum Academia nuperrime a Rege restituta est, etiam vestrae Regiae Societati novus quidam calor infunderetur.

Dum ita faves, ut etiam exemplum novi Tui operis polliceare, ita auges obligationem meam, ut pene spem dissolvendi vinculi adimas. Tanti tamen muneris beneficium quis recuset? Residentem Londini habet aula nostra Dn. Berrium; quod ad eum perveniet, recta deinde ad nos ibit.

Unum, antequam finiam, venia, spero, Tua addo. Vir in Gallia doctus, cujus extat liber antiquitatis temporum restitutae, opus molitur de nationum origine, cujus delineationem exhibet Epistola, quam adjungo. Equidem indulgere alicubi ingenio videtur et Celtarum suorum honori, expecto tamen aliqua non spernenda, ut judicium Tuum desidero. Itaque optarem pervenire schedam ad Dn. Episcopum quondam Santassaphensem, nunc nescio annon Coventricensem, qui et ipse ex Mythologiis veritatem Historicam elicere, ut audii, aggressus fuit, etsi specimen ejus ad me non pervenerit. Si quis etiam alius in his studiis egregiis operam conferre posset, libenter sententiam ejus intelligemus. Celtae olim Germanos et Gallos complectebantur; Wallicam vel Cambricam vestram linguam (quae semi-Germana est) veteri Galliae proximam ipse credo. Cumros vestros vel Cambros pro parte ex Cimbricae nostrae antiquis habitatoribus venisse suspicio mihi est, ut postea Angli ex posterioribus sunt egressi. Titanum cum Diis bello veteres intellexisse Scytharum aut Celtarum antiquas in

Asiam et Graeciam irruptiones, tunc cum ibi regnabant qui postea Dii sunt habiti, verisimile mihi visum est. Promethei (Titanis) alligatio ad Caucasum forte nil aliud designat, quam coercitos copiis ad Caspias portas collocatis Scythos. Sed nihil in his est ultra conjecturas.

P. S. Cryptolyticorum super omnia rogo ne obliviscare. Nolim perire haec pene summa humanae subtilitatis specimina.

XIII.

Wallis an Leibniz.

Oxoniae Apr. 20, 1699.

Tu novis me continue cumulas beneficiis. Talia siquidem reputo tuas Literas, quarum ego aliquot (te permittente) meis interserui, ut Gemmas et Ornamenta. Neque tibi erit dedecori, Te ea dudum fuisse meditatum, quae etiam nunc non forent contemnenda.

Ultimae tuae, 30 Martii datae, serius huc accesserunt, quam ut possent praecedentibus associari, quum totum illud opus absolverant Typographi, istiusque ego duo Exemplaria tradideram Juveni Menkenio (Dni. Menkenii filio), quae suscepit ille se Parenti suo transmissurum, indeque eorum alterum ad Te transferendum (quod factum iri spero) dicitque jam esse in itinere. Idemque Juvenis ingenuus, qui apud nos egit aliquamdiu, ad Patrem die crastino (quod ait) rediturus, est harum lator.

Ludovicum Ferrarium, Bombellio priorem, Aequationem Biquadraticam in duas Quadraticas distribuisse, ipso Bombellio id sponte agnoscente (et Cardano pariter comprobante) ego te monente jam rescisco. Et quidem suspicor, me id olim apud Bombellium legisse, sed cum illud jam ante multos annos factum fuerit, istius ego eram plane oblitus, tibique gratias habeo, quod candide monueris. Quod de illo peculiarem scripserit dissertationem Cardanus, vel nesciebam, vel oblitus eram.

De Aequationibus superiorum graduum, Exponentem habentium numerum compositum, ad inferiorem reducendis cujus Exponens sit Incompositus proxime minor, ego plane juxta tecum sentio. Atque in hunc, credo, finem Harriotus tot paradigmata subjecit Aequationum Inferiorum, ex quibus componi possent Superiores, atque in eas resolvi.

De Differentiis Infinitesimarum-infinitesimis explicandis non est, ut sis porro solicitus. Nam, ut tu mihi facile concedis, quod Nihili quodvis multiplum sit adhuc Nihil, eadem ego facilitate tibi permitto, ut Differentias Infinitesimas in Infinitesimas ductas tu pariter negligas. Potestque id Tuto fieri, modo caute (quod ego vos fecisse diserte dixeram), quippe in omni genere Quantitatum, quae differunt dato minus, reputanda sunt Aequalia. Quo nititur Exhaustionum doctrina tota, Veteribus pariter et Recentioribus necessaria. Methodoque tua, cum tibi usui sit, quo utaris, non repugno.

De $\sqrt{-bb}$ seu $b\sqrt{-1}$ jam ante dixi (quantum mihi videtur) satis, neque jam vacat rem eam penitius excutere.

Quod tu quereris, remissius jam tractari altiora studia, et pauciores esse Naturae observatores diligentes, quadantenus verum esse non diffiteor. Sed mirandum non est, ut res alias, sic hominum studia, suas habere vicissitudines. Praesenti seculo (quod jam ad finem vergit) eruditionem in omni rerum genere insignes (et quidem insperatos) processus obtinuisse, certum est: in re Physica, Medica, Chymica, Anatomica, Botanica, Mathematica, Geometrica, Analytica, Astronomica, Geographica, Nautica, Mechanica, ipsaque (quod minus laetor) Bellica, et quidem longe majores quam per multa retro secula obtinuerat. Quippe quibus vix aliud sibi proposuisse videntur homines, quam ut intelligere videantur quae ab Euclide, Aristotele, caeterisque ex antiquis olim fuerint tradita, de progressu porro faciendo haud soliciti: quasi scientiarum metas posuerint illi, quas transcendere sit nefas. Cum vero ausi sint aliqui (et quidem pauci) ultra prospicere, facti sunt aliis animi, late patentem campum ingredi. Et res novas aggredi, novus ardor, novus impetus impulit, nec infeliciter. Sed postquam haec desiit esse res nova, hic novus ardor deferbuit. Mortui sunt ex sedulis indagatoribus non pauci, aliique morituri, juvenesque non accendebat (ut antea) rerum Novitas: sed ipsa Materia erat magna ex parte exhausta, ut non tam Messis jam spernenda sit quam spicilegium. Et quidem jam fessis et fatigatis permittendum videatur, ut quadantenus requiescant. Atque hinc factum puto (pro variabilitate naturae hominum), quod severiora studia negligantur.

Fierique forte potest (quod tamen ominari nollem), ut praesentis seculi diligentiae succedat desidia sequentis.

Optas Tu (et quidem ego pariter), ut sicut Gallorum Academia Scientiarum jam videatur restituta, sic Nostrae Societati Regiae novus calor infunderetur. Atque hoc ipsum jam modo monui his verbis, sed et ipsi (quod tibi non displicebit) reapse me monentem praevenerunt, qui jam nuper sibi novas leges posuerunt, serias hujusmodi Inquisitiones viritim promovendi. Sed inter Gallorum illam Academiam nostramque Societatem Regiam hoc interest discriminis: fruuntur illi sumptibus Regiis suisque gaudent singulatim salariis, nostri suis sumptibus agunt omnia.

Verum etiam, ubi obtinueris quod ego tibi nuper misi volumen meum tertium, videbis in Flamstedii ad me Epistola, non plane otiosos nostrates esse, ut qui tum Fixarum loca plurima a se sedulo observata narrat, tum mobile exhibet Phaenomenon Parallaseos Orbis Annui Telluris, ab ipso deprehensum, et continuis Annorum octo Observationibus stabilitum: Phaenomenon per aliquot retro secula frustra quaesitum et fere desperatum, nunc in Anglia primo detectum.

Literarum exemplar, tuis inclusum, mittendum curabo (quod tu petis) ad Dn. Episcopum nuper Asaphensem, nunc Lichfieldi-Coventriensem, mox facturum Wigorniensem (seu Worcestrensem). Idque mihi jam in mentem revocat Tractatum bene longum cujusdam Olai Rudbek, Sueci, ante annos (si satis memini) quasi sexdecim (aut etiam plures) editum, saltem sub id tempus a me conspectum, quo deducere satagit ex Veterum Mythologia res Historicas, quae fabulis hisce fecerint occasionem. Et speciatim ex Homerica narratione itinerum Ulissis (post captam Trojam) deducit eum (partim navigio, partim terrestri itinere) Septentrionem versus usque ad extremas oras Sueciae Septentrionalis, ubi figit Rudbekius Herculis columnas (non ad Fretum Gibraltar), indeque per oras Norvegiae (jam dictae) Insulasque Britannicas circumvectum perducit eum ad Phaeacum Insulas (jam Canarinas forte dictas) indeque per fretum Gibraltar et Mediterraneum Mare ad suam tandem Ithacam restituit. Omniaque haec ex Poetarum Mythologia desumptis characteribus adornat haud . . . . . ut si nova non sint, magnam saltem habeant veri similitudinem. Id autem ego mihi speciatim notavi, quod habet ex Poetarum quodam veterrimo (cujus ego nominis jam sum oblitus) de quadam Insula (prope Britanniam) tum olim a Mari absorpta, unde mare totum, circum circa, redditum est longo tempore lutosum et caeno turbidum, ut per plures annos vix navigari potuerit, donec tandem, disperso sensim luto, ad statum illum redierit quem jam cernimus. Qualis fuerit haec Insula, aut ubi particulatim sita, non memini quod Rudbekius diserte dicit, ne quidem ex conjectura. Sed mihi subiit cogitare (caeteris stantibus) hoc insinuari posse Rupturam Isthmi, quo Britannia fuerat olim (ante omnem harum rerum certam historiam) cum Gallia conjuncta. Quippe si talis fuerit olim Isthmus, maris impetu Britannici et Germanici coeuntium ruptus (quod non est inopinabile), necesse est ut inde talia obvenerint phaenomena quae narrantur. Non enim tota moles Isthmi foret uno impetu discussa, sed postquam marium alterum Isthmi summum transcenderit, molem illam (eundo et redeundo) sensim ablueret, lutosum inde turbidumque factum, et (propter maria jam conjuncta quae fuerant Isthmo pridem disterminata, indeque ortum insuetum marium horum motum) haud navigabile, donec turbidis hisce motibus tandem compositis, in pacatum statum rediret. Ego nihil hac in re statuo, sed rem totam penitius considerandam permitto. Tu interim vale etc.

XIV.

Leibniz an Wallis.

Nunquam accipio a Te literas, quin laeter Tuam valetudinem adhuc sibi bene constare. Tertiam partem operum tuorum mox recipere spero in Nundinis Brunsvicensibus, nam illuc Dn. Menkenium misisse intelligo, cujus filius apud me fuit multumque humanitatem Tuam depraedicavit. Ego vero pro insigni munere condignas gratias ago.

Circa Aequationes Graduum altiorum earumque veram Analysin radicesque irrationales exequar aliquando vetera cogitata, ubi tantillum otii nactus fuero: puto enim visam mihi dudum aliquam pedum viam.

Differentiae secundae et altiores non hactenus tantum a me considerantur, ut appareat eas recte abjici, sed etiam ut appareat eas caeteris abjectis recte aliquando retineri, quoties non tantum de tangentium, sed etiam de osculorum proprietatibus agitur; sed nihil in his est, quod Te, ubi animum huc intendas, fugere possit.

Praeclare judicas de progressibus Scientiarum; nempe homines optimarum rerum velut satietate quadam capi, et si, ut mihi videtur, hactenus praestita sint non tam potissima quam facillima, nec tam spicilegia posteris relicta, quam messis integra, paucis tantum spicis magis obviis praedecerptis. Quamvis autem jam talia minore in vulgus plausu agantur, puto tamen semper magnis inventis honorem habitum iri.

Parallaxin orbis annui a Flamstedio tandem experimentis esse demonstratam, res plane eximia est. Spero arcanum magneticarum varietatum aliquando detectum iri, si modo certae satis et multae observationes habeantur. Halaeum audio nescio quid ingeniose in eam rem conjectasse, de quo judicium Tuum nosse velim. Sed super omnia optarem homines majore cura incumbere in artis medicae constitutionem quandam firmiorem. Turbatur progressus artis, dum certa ab incertis non distinguuntur, et quisque sibi pro arbitrio hypotheses ac notiones fingit.

Velim etiam operam dare viros doctos, ut ex praesenti facie telluris mutationes ejus praeteritae agnoscantur. Nonnulla in hanc rem ex nostris regionibus et mihi observata sunt. Amicus qui bonam partem literum Germanici et Balthici maris lustravit, non inelegantes habet observationes, quae et ipsae ad isthmi rupturam ex parte referuntur, quas velim ex vestro et Aremorico litore confirmari, hortaborque ut quaestiones formet ad vos mittendas. Rudbekii Atlanticam legi, doctam et ingeniosam, sed ut verum fatear, interdum indulgentiorem. Ignoscendum tamen est praeclare proferentibus, quoties affectu patriae quaedam infirma admiscent: fortasse enim huic eorum in imaginaria affectui vera debemus, ut in Alchymia. Iter certe Ulyssis mihi nihil minus quam persuasit. Quae de Heroe suo dixit Homerus, non ex Historia, sed ingenio commentus est, et voluit eum errare per quicquid longinqui fando tunc compertum erat. Sed illis temporibus, cum res mira et magna erat ex Graecia in Pontum navigasse, Ulyssem iter fecisse etiam hodie improbum et hodoeporicon ejus exactum adeo ad Homerum devenisse, in quo rupes Septentrionis notatae fuerint, quas vix hodie habent chartae, quis credat? Scilicet nulla gens est, quae in sylvarum et montium nominibus non facile aliquid fingat, quod assonet locorum nominibus quae apud veteres exstant.

Verissimum est inclytam Societatem Regiam vestram, imo scilicet dicere, nostram subsidia non nisi a se hactenus petiisse, sed tanto majore gloria res tantas gessit. Ego qui inter veteranos Collegas me esse glorior, et si minus utilis, tamen dedi operam, ne Societati dedecori essem, eoque magis admiratus sum, exortum nuper ex illa qui in me acerbe scripsit. Is est Nicolaus Fatius Duillierius, cujus libellum de Curva brevissimi descensus et Solido minimum in medio resistente Tibi visum est et (ausim dicere) ubi in me dicit non probatum puto. Graves habet (si Diis placet) mei accusandi rationes: unam, quod non est nominatus, cum ipse fateatur se non dignatum edere, per quae in hoc genere nominaretur; alteram, quod alii a me sunt nominati, hoc vocat ex solio mathematico existimationem Geometris distribuere, quasi mihi non liceat laudare eos qui voluere ut sua bene merita extarent? Nec uspiam dixi hos solos ea posse, de quibus agebatur; illud innui, talia non facile posse, nisi qui methodos nostris similes sequantur, ut scilicet excitarem homines ad Geometriae partem tam utilem excolendam. Praeterea si omnes voluissem nominare, a quibus talia expectari possent, modo illis vacaret haec agere, certe Te inprimis etiam illo loco non praeterissem, cui quantum debeamus omnes etiam pro his disquisitionibus, haud semel publice dixi satisque alias agnovi a Te eruta, quae pene indagatu impossibilia videbantur. Itaque libenter audio quaedam cryptolytica Tua specimina tertio volumini inserta esse. Viros meritis insignes ad problemata provocare non soleo, et constat programma Bernoullianum me plano ignaro ad Dn. Newtonum fuisse transmissum.

Haec vero Fatii, affectibus nescio quibus agitati, in me immerita et inexpectata incursatio me moveret parum, nisi permissio edendi a Societate Regia accessisset, quam fateor non sine summa admiratione vidi. Quid tantum commeritus sim, ut ita laederer publice, mecum exputare non possum. Spero tamen illam permissionem subreptitie fuisse impetratam, eaque adhuc spe me utcunque solor: sed tum demum animo ero tranquilliore, ubi non vanam esse intellexero. Itaque benevolentia tua toties testata uti audeo rogoque ut in rem inquiras, et hanc molestam dubitationem, si potes et aequum putas, mihi eximas. Satis mihi erit per Te intellexisse hoc scribendi genus quo usus est Fatius, indignis in me modis invectus, Societati non probari.

Quod superest, vale adhuc diu et quartum nobis, ac si vota mea aliquid possunt, etiam quintum Tomum comple etc.

Dabam Hanoverae 4 Augusti 1699.

XV.

Wallis an Leibniz.

Oxoniae Aug. 29, 1699.

Literas Tuas Hanoverae datas 6 Augusti 1699, acceptas Oxoniae 22 Augusti, postridie (transcriptas) Londinum mittebam (ad dignissimum Societatis Regiae Secretarium) cum Societate Regia communicandas, saltem cum eorum illis quos ea res spectaret, quibus Tu (non immerito) quereris de indigna quadam Tui tractatione a D. Fatio. Quid inde mihi responsum fuerit, mox *dicetur*.

Fatii quem memoras librum videram quidem ego, sed non legeram (necdum examinavi). Neque sciebam quicquam inibi de Te fuisse scriptum, priusquam has Tuas acceperim literas. Nihilque tale mihi probatum iri (sive ab ipso sive ab alio scriptum) Tu recte judicas.

Verum quidem est, quod obtinuerit D. Fatius, ut Sodalibus Regiae Societatis accenseatur. Non tantae tamen est (ne quid gravius dicam) apud nos existimationis, ut Tibi anteponi mereatur, nedum ut contemptui habere debeat aut indignis modis tractare Nobilissimum Virum, qui tum alias, tum in rebus speciatim Mathematicis optime merueris.

Nescio an idem ipse sit, qui nuper (celato suo nomine) in D. Davidem Gregorium (Astronomiae Professorem Oxoniae) pariter involavit, prout videre est in Actis Lipsiensibus pro Mense Februario 1699 pag. 87. Sin idem ipse non sit, operam Gregorio nostro non ingratam praestabit Cl. D. Editor, si indicaverit, quis sit ille Anonymus, qui scripsit ea quae sunt ibidem edita. Est utique quoddam hominum genus, qui (cum de se suisque rebus altius sentiunt quam reliqua pars mortalium) magis satagunt aliorum famam laedere, quam ut bene mereantur ipsi.

Rem Tuam quod spectat, Fatius hic, a quo Te laesum quereris, non Anglus est, sed Germanus ex Helvetia, qui apud nos aliquamdiu moratus, nuper (quod audio) hinc recessit in suam nescio patriam, an alio. Nolim ego Te a quoquam laesum, praesertim non ab Anglis, apud quos Tibi fama manet illibata, nec facile ab aemulis minuenda.

Edendi permissionem quod spectat, nolim existimes rem illam ab aliquo consessu Societatis Regiae factam, aut ipsis consciis. Sed D. Vice-praeses, pro potestate sibi facta, solet (ipsis inconsultis) imprimendi facere licentiam, qui cum nihil suspicatus sit aliud, quam Solutionem Problematis Geometrici (quod non satis perspexit ipse, nec erat de eo examinando solicitus) se tuto posse putavit permittere ut imprimeretur, nescius quod inibi de Te quicquam diceretur, quem laesum nollet. Cui Tu (credo) pro candore Tuo facilis indulgebis (incaute facti) veniam. Huc utique spectat quod a Dignissimo Societatis Secretario responsum accepi, quod suis verbis subjungam hisce literis.

Me quod spectat, non est ut sis solicitus Te excusare, quippe ego me minime laesum putem, sive quod nullae fuerint ad me missae literae quibus incitarer, sive quod inter eos non fuerim nominatus, quos Tu recensuisti ut negotio pares. Utcunque enim haec D. Fatio (de se) gravia videantur, mihi certe non sunt, qui fui tam hujus rei negligens, ut ne unam horulam impenderim, sive Problematis Solutionem exquirendo, sive aliorum demonstrationes examinando: contentus utique ex aliorum solutionibus resciscere, quaesitam curvam (celerrimi descensus per data duo puncta) Cycloidem esse (ut mihi porro quaesitu non sit opus), securus interim, tot egregios viros (inter se consentientes) non esse calculo lapsos omnes.

Noveram quidem hanc curvam a Newtono nostro fuisse repertam, sed et a D. Davide Gregorio sub idem tempus. Qui cum in eandem curvam consenserint uterque (nec erant de recitandis methodis quibus huc perventum erat soliciti), sat esse rati sunt id una vice significare, quod factum est in Transactionibus Philosophicis pro Mense Junuario 1696/7. Quodque habetur in illis pro sequente Martio supplementum, est ipsius Gregorii.

Quid hac in re fecerit Fatius (aut quisquam alius), ego nesciebam; quaeque habentur in Actis Lipsiensibus pro Mense Majo 1697, non videram nisi post acceptas has Tuas literas, necdum examinavi. Atque Tu mihi facile concedas, hac aetate, ut vacationem mihi indulgeam a talibus inquisitionibus.

Ad id quod de litoribus Gallico et Anglicano suggeris, hoc dicendum putem: Praeruptos clivos atque praealtos (congeneris materiae, et simili situ, quasi ad perpendiculum) ad Dubrim et Caletum contrapositas (ubi est brevissimus trajectus ab Anglia in Galliam) magnam prae se ferre speciem, quasi fuerint olim aliquando (ante hominum memoriam) continuati, nec nisi rupto Isthmo (qui Angliam forte cum Gallia conjunxerat) separati et quasi dilacerati. Multaque quae dudum me legisse memini apud Rudbekii Atlanticam (sed quae, post tot annos, non jam distincte reminiscor) a Veteri nescio quo Scriptore deprompta, mihi videntur huc spectare; quae ille alio trahit, puta ad Insulam (nescio quam) a mari absorptam, unde factum sit mare (per multos annos) turbidum, coenosum et innavigabilem, sed huic Isthmo (si quis olim fuerit) dirupto, aptius convenirent.

Tu vale, Vir Nobilissime, et perge (quod facis) a Literato Orbe mereri etc.

XVI.

Leibniz an Wallis.

Jam dudum Tibi gratias debeo ingentes et plane singulares, quod epistolas quasdam meas olim ad Cl. Oldenburgium, nuper ad Te ipsum de rebus Mathematicis scriptas, perire noluisti, et in cumulum favoris assutum pannum meum cum purpura Tua mihi dono misisti. Quod utinam aliquo genere officii aut redhostimenti satis digne pensare possem.

In Epistolis meis antiquis etsi sint quae ipse non satis intelligam, et mendis fortasse olim inter scribendum a me ipso festinante admissis non carere putem, in summa tamen res bene habet, curaeque Tuae debebitur, siquid in illis bonae est frugis.

Ex Tuis praeclaris in hoc Tomo ultimo comprehensis, etsi omnia digna sint Te, digna publico cultu, nihil tamen magis placuit quam mirifica illa Tua artis Cryptolyticae specimina, sed quibus irritas appetitum nostrum, non exples. Ego vero qui nollem pulcherrimos in hoc quoque genere labores Tuos intercidere, dudum mirificam illam a Te ostentatam artem praedicando Principis cujusdam eximii curiositatem accendere conatus sum. Et cum interroganti mihi atque hortanti respondens non videreris recusare operam, ingeniosos aliquos et studiosos juvenes ad Te mittendos ducendi per inventionum Tuarum vestigia, ut tanta ars propagaretur, jussus nempe sum ex Te quaerere, quibus legibus conditionibusque subire laborem non recuses, ut mysteria illa candide discipulis paucis et selectis aperiantur. Erit autem Tibi res cum Principe generoso, et dum illi satisfacies, poteris simul utilitati publicae et gloriae Tuae velificari.

Fatii in me dicta non multum jam moror, ex quo Societati Regiae probata non esse intellexi. Inclytae Societatis Regiae Secretario, Domino Sloane, scribam ipse proxime, nec tantum testatae jam per tot in omnes bene merita et in me quoque promtissimae humanitati ejus qua potero respondebo, sed etiam proponam aliquid, ne literae sint inanes. Id quod facit ut adhuc differre officium cogar; interea rogo ut eum multa cum gratiarum actione a me salutes.

Quaesivi de censura demonstrationis cujusdam Gregorianae Actis Lipsiensibus inserta; responsum est, Davidis Gregorii, celeberrimi viri, merita apud omnes digne aestimari neque praetermissum iri occasionem hoc testandi; caeterum edentibus collectoribus quae anonyma acceperant, visum ubi de rationibus agitur, non fuisse quaerendum de personis, nec fuisse dubitatum, quin sine offensione cujusquam objectiones edi possent, quae modeste proponerentur. Ego tamen mallem litibus parum profuturis careri posse, sed si Fatius intra hunc se modum tenuisset, nec verbulum de eo per querelas commutassem cum quoquam, libertatem judicandi cuivis relinquens, aut fortasse etiam responsurus, si e re publica literariâ visum fuisset.

Id ago etiam ut colligantur observationes quas amicus ingeniosus in Maris Balthici litoribus habuit, proponanturque velut inquisitoris articuli pro litoribus Oceani Germanici nostro et vestro. Putat his confirmari rupturam Isthmi, qui Galliam Britanniae connectebat. Sunt tamen in illis, in quibus adhuc haereo. Equidem cohaesisse olim non dubito, sed non putem tamen, ullis Historiarum monumentis eousque assurgi.

Nescio ubi notavi, Dn. Lluydium Vestrum (si bene memini), virum egregium, qui multam operam in telluris stratis aliisque id genus examinandis ponit, antiquitatesque gentium investigat, de Lingua Hibernica quaedam non vulgaria observasse, et ni fallor, Latinae antiquae affinem judicare. Haec merentur discuti. Sane crediderim, ut Vestri Angli a recentioribus nostri litoris incolis, Saxonibus, venere, ita Cymraeos Vestros vel Cambros esse ab antiquioribus habitatoribus, nostris Cimbris, et vestros Scotos antiquos seu Hibernos adhuc antiquiores orae nostrae incolas indicare. Vale.

Dabam Hanoverae 24 Novembr. 1699.

XVII.

Wallis an Leibniz.

Oxoniae Martii 29, 1700.

Literas Tuas, Vir Celeberrime, Novembr. 24 ad me datas accepi non ita pridem, quibus quod non prius responderim, Te veniam oro.

Tua Novissima Sinica quod spectat, atque rem eam quam Tu illic agis, haud incommodum fore judico, si illius Libri plura Exemplaria Bibliopolae vestri ad nostros mercatum mittant; dignus utique est Liber ille qui pluribus innotescat. Unum illud exemplar quod ad me mittere dignatus sis, est forte unicum quod in Angliam appulit. Id ego dudum concessi Reverendissimo D. Archiepiscopo Cantabrigensi (id expetenti, quod aliunde sibi comparare non potuerit), cujus curae rem eam quae ibi agitur commendaveram. Ex eo tempore (anno jam praeterito exeunte) missus est ad Sinas (D. Archiepiscopo rem promovente) a Mercatoribus nostris, rem illic habentibus, Vir ingeniosus D. Pond, Medicinae studiosus, Matheseos peritus et Sacris Ordinibus (hac occasione) initiatus, ut possit non Medici tantum, sed et Concionatoris munus obire apud Mercatores nostros ibidem agentes, et rem Christianismi (si quo possit modo) promoveat. Huic contulerunt (quod audio) Mercatores (praeter alia suscipiendi itineris invitamenta) centum et viginti libras Anglicanas (sterlingas vocant) pro comparandis Instrumentis Mathematicis (aliisque rebus eo spectantibus), quo sit apud Sinenses acceptior. Eum comitatus est Chirurgus, D. Oliphant, Scoto-britannus, tertiusque D. Brown (rebus ejusmodi promovendis non minus idoneus) qui jam tertia vice est ad Sinas profectus: sed metuo ne hic perierit in itinere, quippe quod de illo ultimum audivimus, est quod aegrotaverit valde, metueritque ne non posset iter integrum absolvere. Quinam alii sint simul profecti, non possum dicere. Sed haec dixisse visum est, quod ea Tibi putaverim fore non ingrata. Doleo interim, quod res Protestantium haud satis feliciter cedant apud Europaeos.

Rem Cryptographicam quod spectat, haereo quid dicam. Nostris utique Amicis non minus quam Inimicis magno fore posset incommodo, si Ars, occulte scripta recludendi, passim innotesceret. Nam in negotiis magni momenti transigendis magno usui esse solet, posse secreto res communicare. Id autem ago (et egi aliquamdiu) innuente Rege nostro, ut doceam non-neminem (quatenus res ea doceri potest), quibus ego passibus procedere soleo rem eam exequendo (ne penitus periret Ars ea). Nescio autem an id debeam promiscue ad alios propalare, inconsulto nostro Principe. Si quid autem Tibi obtigerit tale, quod Tua interesse putaveris explicatum iri, operam dabo, quatenus potero (modo hoc transmittas) ut id fiat.

Nedum interim hic nihil sit quod rem Mathematicam spectet, libet haec pauca subjungere.

Meminisse forsan poteris, Vir Celeberrime, quod in Epistola quadam mea ad Te data 30 Julii 1697 (quae et ex eo tempore est inter alias typis edita) inter alias ibidem memoratas meas Methodos (quibus in Tetragonismis utor) occurrant hae duae, quarum alteram appello Methodum Convolutionis et Evolutionis, alteram Methodum Complicationis et Explicationis. Quarum ope ostendo, tum aliarum aliquot Figurarum, tum speciatim Cycloidis dimetiendae quis sit modus omnium simplicissimus.

Simili artificio colligetur tota Sphaerae cum Cylindro collatio. Quod sibi fieri fecit Monimentum Archimedes.

Quippe si (fig. 10) ad Basin P (peripheriae circuli aequalem) sumatur Altitudo R (aequalis Radio) fiet Parallelogrammum Rectangulum $=$ RP, quod ex minutis Parallelogrammis aeque altis, numero infinitis, conflatum intelligatur. Quorum si omnium vertices intelligantur in unicum C punctum contrahi, quo ex illis Parallelogrammis totidem fiant Triangula super eisdem Basibus aeque alta, singula singulorum adeoque omnia omnium dimidia (curvata base in circuli peripheriam), fiet Circulus Centro C, Radio R, Parallelogrammi dimidius $= \frac{1}{2}RP$.

Quae est ipsa Archimedis dimensio circuli, aequalis utique Triangulo Rectangulo, cujus laterum (circa rectum angulum) aequatur alterum peripheriae, alterum radio expositi circuli, quippe $\frac{1}{2}R$ (semialtitudo Trianguli) in P (basin) ducta exhibet magnitudinem istius Trianguli $\frac{1}{2}RP$, Circulo aequalem.

(Idemque accommodabitur Sectori circulari, sumpto Arcu A pro P Peripheria).

Porro, si ad illud Parallelogrammum $= RP$ (ut Basin) sumatur ibidem (in ordine ad Hemisphaerium) Altitudo R, fiet Parallelepipedum $= RRP$, quod pariter ex minutis Parallelepipedis aequealtis, numero infinitis, conflatum intelligatur, quorum omnium communis Altitudo sit R, et Basium Aggregatum $= RP$. Quodsi Parallelogrammum hoc (manente magnitudine $= RP$) intelligatur in Curvam Superficiem Cylindricam incurvari (cujus Basis sit P, jam in Peripheriam Circuli convoluta, Altitudo R), quo minuta illa Parallelepipeda in totidem Cuneos seu Prismata Triangularia (Parallelepipedorum singula singulorum, adeoque omnia omnium subdupla) redigantur, vertices habentia totidem C puncta (seu Lineolas minutas) in Axe Cylindri, fiet Cylindrus (Parallelepipedi dimidius) $= \frac{1}{2}RRP$.

Vel (in ordine ad Sphaeram integram) si sumatur utrinque Altitudo R (ut sit tota Altitudo $D = 2R$), fiet (convolutione pariter facta) Cylindrus (ut prius) ex Cuneis seu Prismatibus, numero infinitis (vertices habentibus in Axe Cylindri) $= RRP$ ($= \frac{1}{2}RP \times 2R$) aequalis Facto ex $\frac{1}{2}RP$ (circulari Basi) in Altitudinem $2R$, seu (quod tantundem est) $= \frac{1}{2}R \times 2RP$, aequalis Facto ex $\frac{1}{2}R$ (semisse communis Altitudinis Cuneorum) in (Basium aggregatum) $2RP$.

Quod quidem Basium Aggregatum, est ipsa Cylindrica Superficies curva $= P \times 2R$ (aequalis Facto ex Basis circularis Peripheria P in Altitudinem $2R$ ducta) seu $\frac{1}{2}RP \times 4$ (aequalis quatuor circulis in Sphaera maximis) quibus si accenseantur oppositae duae Bases circulares, fiet Cylindri (Sphaerae circumscripti) tota superficies, aequalis sex circulis maximis $= \frac{1}{2}RP \times 6 = 3RP$; et Cylindri magnitudo $= RRP = \frac{1}{2}RP \times 2R$ aequalis Facto ex Base circulari $\frac{1}{2}RP$ in Altitudinem $2R$ ducta, ut prius.

Quodsi porro Cuneorum horum omnium vertices (Cylindri Axem complentes) intelligantur in unum C punctum contrahi (quo Cunei illi seu Prismata jam fiant totidem Pyramides, super eisdem Basibus aequealtae, singulae singulorum adeoque omnes omnium subsesquialterae, seu ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$; et superficies, prius Curva Cylindrica, jam fiat sphaerica, manente quod prius erat Basium Aggregato $= 2RP$, quatuor circulis maximis aequali), habebitur tum tota sphaerae superficies $= 2RP = \frac{1}{2}RP \times 4$ aequalis quatuor circulis maximis (et quidem toti Curvae Cylindricae aequalis, et partes partibus aequales, easdem Axis partes respicientibus), tum sphaerae magnitudo $= \frac{2}{3}RRP = \frac{1}{3}R \times 2RP$ aequalis Facto ex $\frac{1}{3}R$ (triente communis Altitudinis Pyramidum omnium) in $2RP$ (Basium Aggregatum, jam factam Superficiem Sphaericam) ducto.

Est itaque Cylindri, Sphaerae circumscripti, tum Superficies ad superficiem, tum magnitudo ad magnitudinem (inscriptae sphaerae) sesquialtera seu ut 3 ad 2, illic quidem ut sex circuli maximi $= 3RP$ ad quatuor circulos maximos $= 2RP$, hic vero ut RRP ad $\frac{2}{3}RRP$. Quod est illud Archimedis Inventum celebre.

Idem paulo brevius haberetur, si in Parallelepipedo illo (super plana Base $= 2RP$ cum Altitudine R) ex minutis Parallelepipedis conflato, horum omnium vertices immediate censeantur in unicum C punctum comprimi, quo, manente ut prius Basium Aggregato $= 2RP$, Parallelepipeda illa in totidem Pyramides redigantur, vertices habentes ad sphaerae Centrum C coëuntes, cujus Radius R (communis Pyramidum omnium Altitudo) et Sphaerica Superficies, Basium Aggregatum; quippe $\frac{1}{3}R$ (triens communis Altitudinis) in $2RP$ (Basium Aggregatum) exhibet Sphaerae magnitudinem (ut prius) $= \frac{2}{3}RRP$, et Sphaerae superficiem $= 2RP$.

(Potestque hoc itidem accommodari Sectori Sphaerico: ducto $\frac{1}{3}R$ (triente communis Altitudinis Pyramidum inibi omnium) in Portionem Sphaericae Superficiei plano abscissam, quae est ad totam Superficiem Sphaericam, ut est Diametri (seu Axis) pars abscissa ad totam Diametrum, ut supra ostensum est).

Haec pauca subjungere visum est: quae quamvis non novam exhibeant doctrinam, prius incognitam, constructio tamen, haud inelegans, Tibi (credo) non displicebit. etc.

XVIII.

Leibniz an Wallis.

Mitto Tibi, Vir plurimum Reverende et Celeberrime, Sinica novissima mea, quae non alio consilio edi curavi, quam ut exemplis alienis nostros excitarem. Interea plura de his rebus ad me sunt perscripta, atque inter alia: multos denuo patres Jesuitas appulisse ad portum Macaensem, idque Monarcham Sinarum magna cum voluptate intellexisse. Pontificem Romanum etiam centum millia scutatorum nuperrime in Missiones Sinicas destinasse. Sed et Gallos in hanc rem incumbere magno nisu, ex ipsa Gallia accepi. Quae cum ita sint, profecto et honoris divini et, si post hunc id quoque addere fas est, nostri interesse censeo, ut offerentes se divinitus occasiones ne negligamus. Satis compertum habeo, Europaeas scientias potissimum a magno illo Principe in Patribus Jesuitis expeti, quibus, ut moderatissime loquar, nihilo concedunt nostri. Etsi autem divina gloria et verae religionis propagatio omnibus aliis rationum momentis praeponderet, addi tamen fas erit, Reipublicae etiam commerciorumque interesse, tantum Monarcham obligari beneficio nobis facili, ipsi autem magnopere expetito. Nam summa ejus delectatio est, pulcherima quaeque artificia Europaeorum hominesque imprimis egregios nancisci. Quodsi is semel intelligat, quam praeclara sit nostrorum doctrina, incredibiles ea res poterit habere utilitates. Quanti enim sit potentissimi mortalium animum devincire, qui ducentos hominum milliones habet sine exceptione parentes, ditionemque Europa tota majorem melioremque imperio complectitur, et (quod caput est rei) sapientia bonitateque praecellit, et vigore aetatis multos adhuc annos spondet, et regni haeredem iisdem sententiis imbui diligenter curat, cuivis prudenti aestimandum permitto.

Sed cum hic multum situm sit in ipsis initiis, ideo magna cura expendenda omnia censeo, ac primum premenda consilia, ne intempestive emanantia facilius impediantur; deinde circumspiciendum de singularis dexteritatis magnaeque simul pietatis viris, quibus committi res tanta possit, et qui aliquamdiu essent praeparandi. Et sunt non pauca mihi in hoc genere comperta, de quibus agi poterit fusius, ubi R. et IU. Archiepiscopum Vestrum Regni

Primatem et res maximas apud Vos administrantem, ad quem jam de nostris votis retulisti, animum illis advertisse constabit.

Cum divinae gloriae communisque boni summam rationem habendam ipsa doceat altior philosophia, agnoscamque Religionem Protestantium recte intellectam digna Deo sensa verique cultus praecepta sanctissima continere, dandam operam nobis censeo, ut sarta tecta ad seram posteritatem transmittatur, inque id tanto magis incumbendum, quanto majora eam pericula novissimo rerum positu circumstant. Exploratum autem rerum peritis arbitror, nihil magis nocuisse, quam fatalem illam scissionem inter eos qui Evangelici et qui Reformati vocantur. Huic malo multi medelam afferre sunt conati, imprimisque ex Magna Britannia Duraeus olim rem singulari studio egit; sed sive quod Medici non satis perite morbum tractassent, sive potius quod nondum ad crisin ille maturuisset, nihil est actum.

Nunc autem mihi compertum est, eo res esse loco, ut Deo aspirante studiis virorum quorundam virtute et doctrina praestantium, qui serio in hanc curam incumbere volent, putem effici posse, quae omnem expectationem supergrediantur. Cujus rei haec argumenta habeo: quod Reformati quidem in Charentoniana olim Synodo, ubique inter ipsos probata, aliisque modis promtitudinem suam declaravere, neque videntur placita retractaturi. Ex parte autem Evangelicorum cognita mihi est insignium quorundam Theologorum prona mens et magnorum Principum enixa voluntas. Et quod est amplius, ex his Principibus unus, prudentia, zelo et autoritate egregius, etiam voluit, ut talia a me scriberentur.

Quanam igitur ratione his animorum inclinationibus rerumque momentis non semper redituris rite sit utendum, viris sapientia et pietate praestantibus arbitrandum relinquo; et facta jam pace talia agere, opportunum Magnaeque Britanniae Regi et Nationi Theologis doctissimis et moderatissimis abundanti inprimis gloriosum fore puto.

XIX.

Wallis an Leibniz.

Oxoniae Nov. 5, 1700 stil. Juliano.

Literas Tuas Brunsvici datas Sept. 3 accepi tandem Sept. 30 stilo nostro. Quibus quod non prius responderim, causa est, quod nihil habuerim Te dignum, quo Te detinerem: necdum habeo. Gratulor ego Vobis novam Vestram Societatem Brandeburgicam, rebus tam Naturalibus quam Religiosis (ut videtur) accommodam: Tibique speciatim gratulor, cujus curae res ea potissimum demandatur. Cui ego (si res haberet) lubenter vellem inservire, si quidem penes foret quod huc conducat; verum in tanta locorum distantia haud quicquam praestare valeo, praeter vota mea. Meminisse forte poteris, Vir Nobilissime, quid Flamstedius noster (in ejus ad me Epistola, typis edita) ab ipso observatum ostendit de Parallaxi Orbis Annui Telluris ope cujusdam Instrumenti sui, cujus Radius pedum sex circiter. Si Serenissimus D. Elector Brandeburgicus Instrumentum condi curaret (isti non absimile) cujus Radius sit Pedum 12 aut 20 (in usum novae suae Societatis) specillis Telescopicis rite instructum, mirum est, quam illud conducere possit vero Mundi Systemati patefaciendo. Quid id sit de Tuo, quod innuis Actis Lipsicis (nuperis credo) insertum, de Centro Gravitatis nova Methodo adhibito, nondum vidi; quippe locorum distantia facit, ut tardius huc appellant talia. Vale etc.

XX.

Leibniz an Wallis.

Absentia Aulae Brandeburgicae in Prussiam profectae, unde Fridericus Rex vix demum solenni in Metropolin ingressu reversus est, fecit ut Societatis novae res lentius procederent: nunc tamen urgebitur acrius, cogitabiturque etiam de instrumentis quae sint digna Instituto, inprimis ut, si potest, parallaxis Orbis annui sensu ipso porro comprobetur.

Observatio mea Centrobaryca dudum inserta Actis Lipsiensibus huc redibat, ut consideraretur, viam centri gravitatis ductam in mobile dare aream motu totius debite generatam, licet durante motu mobile frangatur in partes diversi motus, earumque pars etiam quiescat, nihilominus enim centrum gravitatis totius moveri intelligetur. Exempli causa si (fig. 11) filum ex arcu ABC evolvatur et extremitate describat curvam CDE more Hugeniano, patet cum filum est in situ ABD, parte quiescente in arcu AB, parte mota et in rectam BD extensa, centrum gravitatis totius in eo situ haberi, si G centrum arcus AB, et R medium rectae BD jungantur recta GR, eaque secetur in K, sic ut fiat RK ad GK, ut AB ad BD, et idem semper fiet usque ad H medium ipsius AE, ita ut KH sit linea centri, erit rectangulum ex AE (id est ABC) ducta in curvam KH duplum quadrilinei DBAED.

Utinam Tomum adhuc novum Operum Tuorum videre liceat, ibique Tua arcana Cryptolytica explicentur nihil id nocebit...... nam his artibus defectis quaerentur imposterum aliae difficilius deprehendendae, et interea tanto ingenii humani specimine ars inveniendi provehetur. Ego in id ipsum et alia profutura Tibi pristinum adhuc diu vigorem opto. Vale et fave etc.

P. S. Quaesivi de origine quadraturae Brunkerianae per fractiones in fractione replicatas ex Wallisiana quadratura ductae.

BRIEFWECHSEL

zwischen

LEIBNIZ und VARIGNON.

In Frankreich zählte die von Leibniz geschaffene neue Analysis anfangs nur zwei namhafte Anhänger, den Marquis de l'Hospital und Varignon (geb. 1654, gest. 1722). Es ist bereits erwähnt worden*), dass der erstere den Angriff auf die neue Lehre, welcher von den Cartesianern, namentlich durch den Abbé Catelan, erhoben wurde, mit leichter Mühe beseitigte; dagegen hatte der letztere einen bei weitem hartnäckigeren Kampf, der im Schoosse der französischen Akademie der Wissenschaften ausbrach, zu bestehen und abzuwehren, und zwar allein, da in Folge anhaltender Kränklichkeit der Marquis de l'Hospital vom literärischen Kampfplatz sich bereits zurückgezogen hatte. Diesem Streit, in welchen der Anfang der Correspondenz zwischen Leibniz und Varignon mitten hineinversetzt, lagen keineswegs wissenschaftliche Motive zu Grunde; es war vielmehr eine Intrigue, die von den Gegnern der neuen Analysis aus Missgunst und Neid über die hohen Verdienste Fremder und Ausländer um die Wissenschaft angezettelt wurde, um ihnen den Eintritt in die Akademie der Wissenschaften zu verwehren. Freilich bot dazu das noch wenig begründete Fundament der höheren Analysis den besten Angriffspunkt, die ganze Lehre als unsicher und zu ungenauen Resultaten führend darzustellen. Da die Gegner Erklärungen Leibnizen's zu ihren Gunsten deuteten, so sahen sich die Freunde des letzteren

*) Sieh. Bd. II. S. 211.

genöthigt, ihn um bestimmtere Auskunft, wie seine Ausdrücke zu verstehen seien, aufzufordern, und es dürften von dem ganzen Streite eben diese Explicationen allein gegenwärtig noch einiges Interesse verdienen, insofern Leibniz hier eine Veranlassung hatte, seine Ansichten über die unendlichkleinen Grössen ausführlich zu entwickeln. Indess, man muss es offen gestehen, enthalten weder die von Leibniz beigebrachte „Justification du Calcul des infinitesimales par celuy de l'Algebre ordinaire", noch die späteren Erläuterungen, namentlich in dem Briefe vom 20. Jun. 1702, irgend welche feste Anhaltspunkte für solche, die noch nicht mit dem Wesen der höheren Analysis vertraut sind; sie sind nur für diejenigen verständlich, die sich bereits durch die Anwendung der höheren Analysis von der Zuverlässigkeit ihres Fundamentes überzeugt haben. Keineswegs aber kann die Art und Weise, wie Leibniz über die Natur der unendlichkleinen Grössen sich ausdrückt, die Ansprüche der Wissenschaft befriedigen; es fehlt in seinen Auslassungen zum mindesten die Bestimmtheit, wie sie die Mathematik verlangt. Wenn man nun auch nicht zu der Behauptung sich hinreissen lassen darf, als habe Leibniz selbst das Fundament der höheren Analysis nicht klar erkannt — lediglich vermag ihn das Gesetz der Continuität, das er zuerst aufstellte, vor diesem Vorwurf zu schützen — so lässt sich auf der anderen Seite doch nicht leugnen, dass die schwankenden Ausdrücke, in welchen Leibniz über die unendlichkleinen Grössen spricht, hinreichend darthun, dass er vergebens nach einem passenden Zeichen suchte, um den Begriff des Continuirlichen in den Calcul einzuführen. —

Varignon hatte in seiner Schrift „Projet d'une nouvelle mécanique", die im Jahre 1687 erschien, die Zusammensetzung der Kräfte zu einem allgemeinen Princip für die Behandlung der Statik erhoben; es scheint, dass fortan seine wissenschaftliche Thätigkeit vorzugsweise auf die Lösung mechanischer Probleme gerichtet war. Die höhere Analysis gab ja ein treffliches Hülfsmittel an die

Hand, die wichtigen Theorieen von Hugens und Newton zu prüfen und zu erweitern. Da darf es nicht befremden, dass Mathematiker zweiten Ranges hierbei zu Theoremen gelangten, die mit früheren, durch die Synthese wohl begründeten in Widerspruch standen; sie waren in dem Gebrauch der höheren Analysis noch nicht hinreichend geübt, oder aber sie legten ihren Untersuchungen andere Hypothesen über die Natur der Kräfte zu Grunde, als jene oben genannten Heroen. Von dieser Art sind nun auch die Mittheilungen, die Varignon über die Centralbewegung eines Körpers in der vorliegenden Correspondenz an Leibniz übersendet. Sie verdienen gegenwärtig hier nur eine Stelle, insofern sie zum Verständniss der Leibnizischen Briefe nothwendig sind, und weil Leibniz dadurch veranlasst wurde, einiges in seinen dynamischen Bestimmungen zu rectificiren. Dagegen beweisen die Briefe Leibnizens in einzelnen hingeworfenen Bemerkungen, wie vollkommen er das gesammte Gebiet der Dynamik beherrschte, und wie weit er mit wahrhaft überlegenem Geiste auch hierin seiner Zeit vorauseilte. Besonders erhellt dies aus den Aufgaben, die er als zunächst zur Lösung zu bringen bezeichnet: die Bestimmung der Bahn eines sich bewegenden Körpers, der von mehreren Anziehungsmittelpunkten afficirt wird, und wenn die Anziehungsmittelpunkte beweglich sind; ferner die Bewegung eines Körpers im widerstehenden Mittel, welche Annahme auch über die Natur des Widerstandes zu Grunde gelegt werde — sämmtlich Aufgaben, zu deren vollständiger Lösung weder die Astronomie zu damaliger Zeit hinreichendes Material geliefert hatte, noch die Kräfte der Analysis ausreichten, die aber im Laufe des 18. Jahrhunderts die Aufmerksamkeit der grössten Geometer unausgesetzt in Anspruch nahmen und zur Erweiterung und Vervollkommnung des Gebietes der höheren Analysis mächtig beigetragen haben. Als besonders wichtig, namentlich im Interesse der Schifffahrt, bezeichnet Leibniz die genaue Bestimmung der Mondsbahn, die Newton in den Principiis nur unvollständig behandelt hatte, so dass er selbst einmal seine

Kräfte daran versuchen wollte, wenn ihm Muse dazu würde, die er jedoch vergeblich ersehnte.

Von der Correspondenz zwischen Leibniz und Varignon war bisher nur ein Brief Leibnizens gedruckt; Dutens erhielt ihn, als er die sämmtlichen Werke Leibnizens zum Druck vorbereitete, von d'Alembert zugesandt (Leib. op. omn. Tom. III. p. 404 sq.).

Von den Briefen Leibnizens fehlen einige; sie waren in seinem Nachlass nicht aufzufinden. Ihr Inhalt ergiebt sich jedoch zum Theil aus den Briefen Varignon's, der mit grosser Genauigkeit auf alles eingeht, was Leibniz in seinen Briefen berührt.

Die Briefe Varignon's sind nicht vollständig mitgetheilt; es ist alles das ausgeschieden, was ohne wissenschaftliches Interesse ist.

I.

Varignon an Leibniz.

A Paris ce 28. Novembre (1701).

Soufrez que je prenne la liberté de vous asseurer moy même de mes tres humbles respects, et de vous donner avis d'un Ecrit qu'on répand ici sous vôtre nom par raport à la contestation que vous sçavez être entre M. Rolle et moy sur votre calcul qu'il prétend fautif et paralogistique. M. l'Abbé Galloys, qui est celuy qui le fait agir, repand ici que vous avez déclaré n'entendre par differentielle ou Infinement petit, qu'une grandeur à la verité tres petite, mais cependant toujours fixe et determinée, telle qu'est la Terre par raport au firmament, ou un grain de sable par raport à la Terre: au lieu que j'ay appelé Infiniment petit ou differentielle d'une grandeur, ce en quoy cette grandeur est Inépuisable. J'ay, dis-je, appelé Infini ou Indéfini, tout Inépuisable; et Infiniment ou Indéfinement petit par raport à une grandeur, ce en quoy elle est inépuisable. D'ou j'ay conclu que dans le calcul differentiel, Infini, Indéfini, Inépuisable en grandeur, plus grand que quelque grandeur qu'on puisse assigner, ou Indéterminablement grand, ne signifient que la même chose, non plus que Infiniment ou Indéfiniment petit, plus petit que quelque grandeur qu'on puisse assigner, ou Indéterminablement petit. Je vous supplie, Monsieur, de vouloir bien m'envoyer vôtre sentiment sur cela, affin d'arrêter les ennemis de ce calcul, qui abusent ainsy de vôtre nom pour tromper les Ignorans et les Simples. Le Professeur des Mathematiques des Jesuites d'ici, m'a fait voir cet Ecrit qu'il m'a dit leur avoir été envoyé de vôtre part pour être inseré dans les Journaux de Trevoux, comme un éclaircissement des difficultés qu'on y a faites sur l'Infini à l'occasion de la nouvelle Methode de M. Bernoulli de Bâle pour trouver les rayons osculateurs des courbes Algebraiques, qu'on y a aussi inséré avec beaucoup de fautes. J'ay vu, dis-je, cet Ecrit, lequel n'est point de vôtre main, à la reserve de quelques corrections entre-lignes, qui m'ont paru de vôtre écriture. Vous y dites seulement (autant que je m'en peux souvenir) que vos differens genres d'infinis, ou d'infinement petits, se doivent regarder comme l'on fait d'ordinaire le firmament par raport à la Terre, et la Terre par raport à un grain de sable: de sorte que par raport au firmament la Terre seroit une differentielle du premier genre, et un grain de sable, une du second. Comme je ne pus nier que cet Ecrit ne fust de vous, je dis à ce Pere, que ce n'étoit là qu'une comparaison grossière pour vous faire entendre à tout le monde. Les ennemis de vôtre calcul ne laissent pourtant pas d'en triompher, et de répandre cela comme une déclaration nette et précise de vôtre sentiment sur cette matière. Je vous supplie donc, Monsieur, de vouloir bien nous envoyer au plustost cette déclaration nette et précise de vôtre sentiment sur cela, adressée à nôtre illustre Ami M. Bernoulli de Groningue, ou à moy si vous me jugez digne de cet honneur, affin de faire taire, s'il est possible, ou de moins de confondre ces ennemis de la vérité. M. Bernoulli vous aura parlé sans doute des paralogismes grossiers de M. Rolle: je luy en envoye encore un paquet de cette fois, dont il poura vous faire part. Mais comme ils deshonoreroient l'Academie, je vous demande, s'il vous plaist, le secret sur cela.

Pardon, Monsieur, de la liberté que je prend de vous écrire ainsy recta: c'est pour épargner à nôtre illustre et prétieux Ami M. Bernoulli la peine de vous copier une si longue lettre. Il a eu la bonté de vous presenter de tems en tems mes tres humbles respects, de vous asseurer de la profonde vénération que j'ay pour vôtre rare mérite. Je vous prie d'estre persuadé que ce sont véritables sentimens de mon coeur, et ce qui me rend entièrement etc.

II.

Leibniz an Varignon.

Hanover 2 Fevrier 1702.

C'est un peu tard que je reponds à l'honneur de vostre lettre du 29 Novembre de l'année passée, que je n'ay receue qu'aujourdhuy. C'est que M. Bernoulli me l'ayant envoyée de Groningue, elle n'est arrivée à Berlin que lorsque j'en fus parti pour retourner à Hanover avec la Reine de Prusse, Sa Majesté m'ayant fait la grace de vouloir que je fusse de sa suite, ce qui avoit retardé mon retour. Je vous suis bien obligé, Monsieur, et à vos savans, qui me font l'honneur de faire quelque reflexion sur ce que j'avois écrit à un de mes amis *) à l'occasion de ce qu'on avoit mis dans le Journal de Trevoux contre le calcul des differences et des sommes. Je ne me souviens pas assez des expressions dont je m'y puis estre servi, mais mon dessein a esté de marquer, qu'on n'a point besoin de faire dependre l'analyse Mathematique des controverses metaphysiques, ny d'asseurer qu'il y a dans la nature des lignes infiniment petites à la rigueur, ou comparaison des nostres, ny par consequent qu'il y a des lignes infiniment plus grandes que les nostres [et pourtant terminées, d'autant qu'il m'a paru, que l'infini pris à la rigueur doit avoir sa source dans l'interminé, sans quoy je ne voy pas moyen de trouver un fondement propre à le discerner du fini] **). C'est pourquoy à fin d'eviter ces subtilités, j'ay cru que pour rendre le raisonnement sensible à tout le monde, il suffisoit d'expliquer icy l'infini par l'incomparable, c'est à dire de concevoir des quantités incomparablement plus grandes ou plus petites que les nostres; ce qui fournit autant qu'on veut de degrés d'incomparables, puisque ce qui est incomparablement plus petit, entre inutilement en ligne de compte à l'egard de celuy qui est incomparablement plus grand que luy, c'est ainsi qu'une parcelle de la matiere magnetique qui passe à travers du verre n'est pas comparable avec un grain de

*) Siehe die Beilage zu diesem Briefe.

**) Diese eingeklammerte Stelle sollte in der Abschrift des Briefes ausgelassen werden.

sable, ny ce grain avec le globe de la terre, ny ce globe avec le firmament. Et c'est pour cet effect que j'ay donné un jour des lemmes des incomparables dans les Actes de Leipzic, qu'on peut entendre comme on veut, soit des infinis à la rigueur, soit des grandeurs seulement, qui n'entrent point en ligne de compte les unes au prix des autres. Mais il faut considerer en même temps, que ces incomparables communs mêmes n'estant nullement fixes ou determinés, et pouvant estre pris aussi petits qu'on veut dans nos raisonnemens Geometriques, font l'effect des infiniment petits rigoureux, puis qu'un adversaire voulant contredire à nostre enontiation, il s'ensuit par nostre calcul que l'erreur sera moindre qu'aucune erreur qu'il pourra assigner, estant en nostre pouvoir de prendre cet incomparablement petit, assez petit pour cela, d'autant qu'on peut tousjours prendre une grandeur aussi petite qu'on veut. C'est peut-estre ce que vous entendés, Monsieur, en parlant de l'inépuisable, et c'est sans doute en cela que consiste la demonstration rigoureuse du calcul infinitesimal dont nous nous servons, et qui a cela de commode, qu'il donne directement et visiblement, et d'une maniere propre à marquer la source de l'invention, ce que les anciens, comme Archimede, donnoient par circuit dans leur reductions ad absurdum, ne pouvant pas faute d'un tel calcul, parvenir à des verités ou solutions embarassées, quoyqu'ils possedassent le fondement de l'invention. D'où il s'ensuit, que si quelcun n'admet point des lignes infinies et infiniment petites à la rigueur metaphysique et comme des choses reelles, il peut s'en servir seurement comme des notions ideales qui abregent le raisonnement, semblables à ce qu'on appelle racines imaginaires dans l'analyse commune (comme par exemple $\sqrt{-2}$), lesquelles toutes imaginaires qu'on les appelle, ne laissent pas d'estre utiles, et même necessaires à exprimer analytiquement des grandeurs reelles; estant impossible par exemple d'exprimer sans intervention des imaginaires la valeur analytique d'une droite necessaire à faire la trisection de l'angle donné, comme on ne sçauroit etablir nostre calcul des Transcendentes sans employer les differences qui sont sur le point d'evanouir, en prenant tout d'un coup l'incomparablement petit au lieu de ce qu'on peut assigner tousjours plus petit à l'infini. C'est encore de la même façon qu'on conçoit des dimensions au delà de trois, et même des puissances dont les exposans ne sont pas des nombres ordinaires, le tout pour établir des idées propres à abreger les raisonnemens et fondées en realités.

Cependant il ne faut point s'imaginer que la science de l'infini est degradée par cette explication et reduite à des fictions; car il reste tousjours un infini syncategorematique, comme parle l'ecole, et il demeure vray par exemple que 2 est autant que $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ etc. ce qui est une serie infinie, dans laquelle toutes les fractions dont les numerateurs sont 1 et les denominateurs de progression Geometrique double, sont comprises à la fois, quoyqu'on n'y employe tousjours que des nombres ordinaires et quoyqu'on n'y fasse point entrer aucune fraction infiniment petite, ou dont le denominateur soit un nombre infini. De plus comme les racines imaginaires ont leur fundamentum in re, de sorte que feu Mons. Hugens, lorsque je luy communiquay que $\sqrt[2]{1+\sqrt{-3}}+\sqrt[2]{1-\sqrt{-3}}$ est egal à $\sqrt[2]{6}$, le trouva si admirable, qu'il me repondit, qu'il y a là dedans quelque chose qui nous est incompréhensible; on peut dire de même, que les infinis et infiniment petits sont tellement fondés que tout se fait dans la Geometrie, et même dans la nature, comme si c'estoient des parfaites realités, temoins non seulement nostre Analyse Geometrique des Transcendentes, mais encor ma loy de la continuité, en vertu de laquelle il est permis de considerer le repos comme un mouvement infiniment petit (c'est à dire comme equivalent à une espece de son contradictoire), et la coincidence comme une distance infiniment petite, et l'egalité comme la derniere des inegalités etc. loy que j'ay expliquée et appliqué autres fois dans les Nouvelles de la Republique des Lettres de M. Bayle, à l'occasion des regles du mouvement de des-Cartes et du R. P. de Malebranche, et dont je remarquay depuis (par la seconde edition des regles de ce Pere faite par apres) que toute la force n'avoit pas esté assez considerée. Cependant on peut dire en general que doute la continuité est une chose ideale et qu'il n'y a jamais rien dans la nature, qui ait des parties parfaitement uniformes, mais en recompense le reel ne laisse pas de se gouverner parfaitement par l'ideal et l'abstrait, et il se trouve que les regles du fini reussissent dans l'infini, comme s'il y avait des atomes (c'est à dire des elemens assignables de la nature), quoyqu'il n'y en ait point la matiere estant actuellement sousdivisée sans fin; et que vice versa les regles de l'infini reussissent dans le fini, comme s'il y avoit des infiniment petits metaphysiques, quoyqu'on n'en ait point besoin; et que la division de la matiere ne parvienne jamais à les parcelles infiniment petites: c'est par ce que tout se gouverne par raison, et qu'autrement il n'y auroit point de science ny regle, ce qui ne seroit point conforme avec la nature du souverain principe.

Au reste lorsque la lecture du Journal de Trevoux me fit écrire quelque chose sur ce qu'on y disoit contre le calcul des differences, j'avoue que je ne pensay pas à la controverse que vous, Monsieur, ou plustost ceux qui se servent du calcul des differences, ont avec M. Rolle. Ce n'est pas aussi que depuis vostre derniere que j'ay sû, que M. l'Abbé Galloys que j'honnore tousjours beaucoup, y prend part. Peut estre que son opposition ne vient que de ce qu'il croit que nous fondons la demonstration de ce calcul sur des paradoxes Metaphysiques dont je tiens moy même qu'on peut bien le degager. Sans que je m'imagine que ce savant Abbé soit capable de croire que ce calcul est aussi fautif qu'il semble que M. Rolle le dit suivant ce que vous m'apprenés, je n'ay jamais vû encor les ouvrages publiés par cet auteur. Je ne laisse pas de croire qu'il a de la penetration, et je souhaiterois qu'il la tournât du costé qui luy ouvriroit un champs propre à faire valoir son talent pour l'accroissement des sciences. Cependant son opposition même ne laissera pas de servir à eclaircir les difficultés que les commençans peuvent trouver dans nostre Analyse. Je trouve même qu'il importe beaucoup pour bien établir les fondemens des sciences qu'il y ait de tels contredisans; c'est ainsi que les Sceptiques combattaient les principes de la Geometrie, avec tout autant de raison; que le P. Gottignies, Jesuite savant, voulut jetter des meilleurs fondemens de l'Algebre, et que Messieurs Cluver et Nieuwentiit ont combattu depuis peu, quoyque differemment, nostre Analyse infinitesimale. La Geometrie et l'Algebre ont subsisté, et j'espere que nostre Science des infinis ne laissera pas de subsister aussi; mais elle vous aura une grande obligation à jamais, pour les lumieres que vous y repandés. J'ay souvent consideré qu'un Geometre, qui repondroit aux objections de Sextus Empiricus et à celles que François Suarez, auteur du livre quod nihil scitur, envoya à Clavius, ou à d'autres semblables, feroit quelque chose de plus utile qu'on ne s'imagineroit peut estre. C'est pourquoy nous n'avons point sujet de regretter la peine qu'il faut prendre pour justifier nostre Analyse, envers toute sorte d'esprits capables de l'entendre. Mais je serois bien faché cependant si cela vous arrestoit trop, puisque vous estes en estat et en train d'avancer dans la science par plusieurs belles decouvertes. J'espere d'avoir le profit et le plaisir d'en estre informé de temps en temps, et cependant je suis avec zele etc.

Beilage.

Leibniz an Pinson.

Bronsvic 29 Aoust 1701.

J'espere que M. l'Abbé Nicaise trouvera bon que je vous donne occasion de lire ce que je luy ecris, pour ne pas repeter les mêmes choses. Les Naudaeana et Patiniana me seront tres agreables. M. Naudé et M. Guy Patin estoient tous deux fort habiles et jugeoient assez librement.

Je desire d'obtenir une copie des ouvrages de Suisset, pour les faire entrer dans un recueil *Κειμηλίων φιλοσοφικῶν* que je medite, avec le livre philosophique de Ratramne que le R. P. Dom Mabillon m'a envoyé, et autres choses semblables plus modernes.

Un des Journaux de Trevoux contient quelque methode de M. Jaques Bernoulli et y mêle des reflexions sur le calcul des differences, ou j'ay tant de part. L'auteur de ces reflexions semble trouver le chemin par l'infini et l'infini de l'infini non pas assés seur et trop eloigné de la methode des anciens, mais il aura la bonté de considerer, que si les decouvertes sont considerables, la nouveauté de la methode en releve plus tost la beauté. Mais à l'egard de la seureté du chemin le livre de M. le Marquis de l'Hospital luy pourra donner satisfaction. J'adjouteray même à ce que cet illustre Mathematicien en a dit qu'on n'a pas besoin de prendre l'infini icy à la rigueur, mais seulement comme lors qu'on dit dans l'optique que les rayons du soleil viennent d'un point infiniment eloigné et ainsi sont estimés paralleles. Et quand il y a plusieurs degrés d'infini ou infiniment petit, c'est comme le globe de la terre est estimé un point à l'egard de la distance des fixes, et une boule que nous manions est encor un point en comparaison du semidiametre du globe de la terre, de sorte que la distance des fixes est comme un infini de l'infini par rapport au diametre de la boule. Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée, de sorte qu'on ne differe du style d'Archimede que dans les expressions qui sont plus directes dans nostre Methode, et plus conformes à l'art d'inventer.

Je n'ay pas encor le livre posthume de M. Nicole pour la grace universelle qu'il combattoit pendant sa vie. Le Journal de Trevoux m'en a appris les premieres nouvelles. Je trouve ce qu'on en rapporte assez raisonnable, mais je voudrois savoir ce qu'on en disent les Jansenistes ou pretendus tels, s'ils accusent le livre de supposition ou s'ils accusent feu M. Nicole de foiblesse. Car ils ne sont gueres endurans sur ces matieres.

M. Cellarius, savant homme de l'université de Halle, a publié une Geographie ancienne fort bonne avec des cartes conformes à ses sentimens. Mrs. Huguetan pretendent donner une nouvelle edition de la Bibliotheque de Photius. Je viens d'apprendre la mort de M. Obrecht, préteur Royal à Strasbourg, dont je suis faché, car il avoit une erudition tres grande, estant egalement jurisconsulte et homme de lettres. Ceux qui l'ont vû l'année passée à Francfort, où il estoit plenipotentiaire de France dans la controverse Palatine, m'ont dit qu'il aimoit un peu à boire avec ses amis; je ne say si cela a esté avantageux à sa santé. La France ne trouvera pas aisement une personne qui connoisse si bien les droits et affaires de l'Empire. Je vous supplie de m'envoyer un jour ce que l'auteur des loix civiles dans leur ordre naturel a fait sur le droit public, quoyque d'ailleurs il s'en faille beaucoup que sa maniere de reduire le droit en art me satisfasse, et il y a longtemps que j'ay fabriqué une idée du droit tirée des raisons naturelles qui est bien differente de la sienne. Je suis avec zele etc.

Als Antwort auf das vorstehende Schreiben ist ein Brief Varignon's an Joh. Bernoulli zu betrachten, von dem Leibniz folgenden Auszug aufbewahrt hat:

Extrait de la lettre de M. Varignon à M. Jean Bernoulli.

J'ay donné la lettre de M. Leibniz pour estre inserée dans le Journal des Savans, en explication de l'article que je vous ay envoyé des Memoires de Trevoux. En attendant que cette lettre paroisse, je n'ay pas laissé de la faire voir au P. Gouye, qui a esté fort surpris d'y voir que l'infini rigoureux que M. Leibniz dit inutile pour son calcul, n'est qu'un infini reel et existent, et non pas l'infini ideal ou inepuisable per mentem, comme ce Pere l'avoit cru en nous l'opposant dans ces Memoires, et apres cette lüe, il m'a dit comme dans une espece de colere contre M. Leibniz, pourquoy ne s'expliquoit il pas ainsi dans le memoire qu'il nous avoit envoyé? J'ay aussi monstré cette lettre à M. de la Hire, qui m'a paru revenu de l'impression que ce memoire avoit faite sur luy.

C'est dans les Actes de Leipzik et à l'insceu de M. vostre frere, que le P. Gouye a pris la methode des rayons osculateurs qui luy a servi de pretexte à mal parler du calcul differentiel. Le procés n'est pas encor jugé entre M. Rolle et moy, quelques poursuites que je passe pour cela. Voicy la premiere de mes reponses que vous me marqués souhaiter. J'en ay encor une sixieme contenant encor plusieurs paralogismes de M. Rolle que je vous envoyeray une autrefois, c'est la derniere. J'attends tousjours la demonstration de la Multisection des Angles sur les nombres irrationals que vous m'avés promise.

M. le Marquis de l'Hospital a perdu son pere il y a 4 mois. C'est à l'embarras qu'elle a causé, qu'il faut attribuer son long silence.

III.

Leibniz an Varignon.

14 Avril 1702.

J'ay appris par ce que M. Bernoulli de Groningue m'a communiqué que vous avés receu m'a lettre, qu'on l'employera dans le Journal des Savans, mais qu'au sentiment du R. P. Gouye, que je m'y explique autrement que dans le memoire que le Journal de Trevoux a rendu public. Je reconnois d'avoir dit quelque chose de plus dans ma lettre, aussi estoit-il necessaire, car il s'agissoit d'éclaircir le memoire, mais je ne crois pas qu'il y ait de l'opposition. Si ce Pere en trouve et me la fait connoistre, je tacheray de la lever. Au moins n'y avoit il pas la moindre chose qui dût faire juger que j'entendois une quantité tres petite à la verité, mais tousjours fixe et determinée. Au reste j'avois écrit il y a deja quelques années à M. Bernoulli de Groningue que les infinis et infiniment petits pourroient estre pris pour des fictions, semblables aux racines imaginaires, sans que cela dût faire tort à nostre calcul, ces fictions estant utiles et fondées en realité.

S'il est encor temps, je vous supplie d'y faire changer dans la lettre deux endroits que je trouve le meriter en relisant la minute. C'est qu'en parlant des lemmes des incomparables mis dans les Actes de Leipzic, et des grandeurs qui n'entrent point en ligne de compte, il falloit dire: les unes (et non pas les uns) au prix des autres. Et un peu apres, je m'apperçois d'avoir employé puisque deux fois, trop pres l'une de l'autre, et vous supplie de changer le second en: d'autant*).

Je vous supplie aussi de faire mes complimens par occasion à M. l'Abbé Bignon, à M. le Marquis de l'Hospital, et à M. de Fontenelle. J'auray l'honneur de leur écrire, mais ne voulant pas les importuner de lettres inutiles, j'attends que je puisse leur mander quelque chose. Cependant vous m'obligerés, Monsieur, si vous me faites part de quelques nouvelles literaires mathematiques, cela se peut par la voye de M. le resident Brosseau. Je m'imagine que vous pousserés entre autres vos recherches sur les lignes physiques qui viennent du mouvement de la pesanteur ou attraction composé avec l'impetuosité conçue d'ailleurs, et que vous aurés determiné la loy des lignes planetiques de M. Cassini, où il seroit à propos d'examiner ce qui arrive quand il y a plus d'un centre d'attraction, car il est apparent que les planetes agissent l'une sur l'autre. M. Gregory publie à Oxfort un systeme d'Astronomie fondé sur les attractions, je crois voir par l'index capitum qu'on m'a envoyé, qu'il considere une double Action celle du

*) Beide Aenderungen sind in dem obigen Briefe geschehen.

Soleil et celle de la planete principale sur le satellite, mais non pas les actions des planetes principales entr'elles, ce qui le meriteroit pourtant aussi. Je suis etc.

IV.

Varignon an Leibniz.

A Paris ce 23. May 1702.

C'est pour vous remercier avec bien de la reconnoissance de l'honneur de vos deux lettres, dont la premiere m'a été envoyée par M. Bernoulli de Groningue, et la seconde m'a été rendue par M. Pinson. Lorsque j'ay recu celle-ci, la premiere étoit desja publique dans le Journal des Scavans du 20. Mars dernier, où j'avois desja fait la premiere des deux corrections que vous me marquez en mettant les unes au lieu des uns. Pour la seconde, qui consiste à mettre d'autant au lieu du second puisque, je ne l'ay point faite; mais c'est une délicatesse de langue qui ne fait rien à la chose, et si peu sensible que sans vous je n'y auroit point fait asseurément d'attention; et elle me le paroist encore si peu que je doute qu'il y ait beaucoup de gens qui la fassent. Cette lettre a un peu étourdi nos adversaires, de sorte qu'ils ne font plus tant de bruit: ils ne laissent pourtant pas de remuer encore sourdement pour surprendre du moins les ignorans. Vous le voyez par le Journal que voici, où M. Rolle tâche de décrier votre calcul en se servant de ce calcul luy même qu'il déguise d'une maniere si grossiere qu'il n'y a pourtant que les ignorans qui y puissent être trompés. Jusqu'ici et dans toutes les objections qu'il m'a faites à l'Academie contre ce calcul, il le pretendoit toûjours fautif et sujet à l'erreur; mais je luy ay si bien démontré que les Paralogismes qu'il croyoit y voir, n'étoient que de luy, et que faute d'entendre assez ce calcul, qu'il n'ose plus l'accuser d'erreur dans ce Journal: il se contente de le dire seulement insuffisant. Comme il n'y parle point de moy, et qu'il ne seroit pas possible de luy répondre sans parler de luy et même d'une maniere qui ne manqueroit pas de contrevenir au silence que nous a imposé l'Academie, je n'oserois publier le projet de Reponse*) que voici; je me suis contenté de le donner à M. le Marquis de l'Hospital pour aider à quelqu'un, lequel n'etant point de l'Academie aura plus de liberté que moy de repondre à M. Rolle.

La raison pour laquelle à la fin de ce projet, je traite de subterfuge les Tangentes relatives de M. Rolle, c'est qu'il m'a soutenu autrefois à l'Academie dans la derniere de ses objections contre le calcul differentiel, que son égalité A (voyez le Journal) donnoit au point G (fig. 12) un maximum PG par raport à l'axe OP tiré du point O paralellement à DG; ce que j'ay démontré être faux dans la Reponse que j'en ay donnée à Mrs. nos Juges (M. Cassini, M. de la Hire, et le P. Gouye) et qu'ils doivent luy avoir communiquée, le silence que nous imposa l'Academie au mois de Novembre dernier qu'elle nomma ces trois Juges, m'ayant empéché de le luy démontrer luy même. C'est apparement pour soutenir encore ce prétendu maximum PG, qu'il donne le nom de tangente relative à DG, qu'il croyoit alors être une veritable Tangente. Outre tout ceci j'envoye de plus cette derniere Réponse à M. Bernoulli de Groningue, qui a desja touttes les autres qu'il pourra vous communiquer, si vous le souhaitez: et là vous verrez beaucoup plus de paralogismes de M. Rolle, qu'il n'a fait d'objections contre le calcul differentiel, en commettant presque toûjours plusieurs dans une même objection: par exemple, il en commet jusqu'à quatre dans la derniere dont je viens de parler. Je n'en marque pourtant rien dans la Reflexion que voici sur le Journal qui les accompagne. C'est pourquoy je vous demande en grace de ne faire aucune mention de tout ceci, c'est à dire, de ce qui s'est passé dans l'Academie entre M. Rolle et moy. Mais ce Journal étant public, tout le monde a droit d'y répondre. C'est pour cela que je l'envoye aussi à M. Bernoulli de Groningue, étant tres à propos d'y répondre aussi comme il faut dans les Actes de Leipsik, pour faire voir à ceux que M. Rolle pouroit surprendre, que M. le Marquis de l'Hospital, celuy qui répondra ici, et moy, nous ne sommes pas les seuls qui condamions M. Rolle.

---

*) Reflexions sur l'écrit de M. Rolle, inseré dans le Journal des Sçavans du 13. Avril 1702 sous le titre de Regles et Remarques pour le Problème général des Tangentes.

Voicy le pole P (fig. 13) que je luy demande de l'espèce de Conchoide EDV qu'exprime son égalité

$$D \ldots\ldots\ldots z^3 - 6pzz + yyz + ppz - 4p^3 = 0.$$

Soient les droites DL, RK, lesquelles se coupent à angles droits en A; et $AP = 3p$, $AC = \frac{1}{2}p = CM$. Soient aussi sur l'axe DL deux paraboles ordinaires AS, CT, dont la premiere ait son parametre $= p$; et la seconde, le sien $= 8p$. Apres avoir fait l'ordonnée BG qui les rencontre en F et en G, soient achevés les rectangles BH, BK, et la droite HM tirée par le point fixe M, avec KN qui luy soit paralelle. Vous voyez que si du centre P et du rayon $PE = AN$, l'on décrit l'arc EO qui rencontre GB prolongée en E, ce point E sera un de ceux qu'exprime l'égalité D, en appelant AB, z; et BE, y. Je demande aussi à M. Rolle les points d'inflexion de cette courbe, pour voir comment il déguisera la methode qui se trouve pour cela dans L'Analyse des infiniment petits.

Quant aux lignes physiques dont vous me faites l'honneur de me parler, j'ay trouvé plusieurs formules des forces centrifuges ou centripetes, que j'appelle en general forces centrales. L'application que j'en ay faite aux orbes celestes dont l'ovale de M. Cassini est du nombre, s'imprime actuellement dans les Memoires de l'Academie de 1700. Outres ces formules en voici une que vous trouverez, je croy, fort simple.

I. Soit (fig. 14) une courbe quelconque QLM, dont les forces centrales tendent touttes au point fixe C. Soit AL le rayon de la developée au point L de cette courbe, et LH la tangente en ce point. Ensuite apres avoir pris Ll indefiniment petite, soient des centres C et L les arcs de cercles LR et LE; soit de plus RP perpendiculaire sur Ll.

Quant aux noms, soient aussi $AL = n$, $LR = dx$, $Rl = dz$, $Ll = ds$, $y =$ à la force centrale vers C, et $dt =$ à l'instant que le corps à qui elle fait décrire la courbe QLM, met à parcourir l'élément Ll de cette courbe.

II. Cela posé, les triangles semblables AlL et LlE donneront $AL(n) . Ll(ds) :: Ll(ds) . LE = \frac{ds^2}{n}$. De même les triangles semblables LlR et LRP donneront aussi $Ll(ds) . Rl(dz) :: LR . RP :: y$ (force suivant LC). $\frac{ydz}{ds}$ (force suivant

PR). Or à cause de PR et EI touttes deux perpendiculaires (hyp.) sur LI, l'espace EI$\left(\frac{ds^2}{n}\right)$ est ce qu'il y a de parcouru en vertu de cette force $\left(\frac{ydz}{ds}\right)$ pendant l'instant dt par le corps qui décrit l'arc élémentaire LI, au lieu de suivre sa tangente LH, comme il auroit fait sans elle ou sans y. Donc cette force instantanée luy ayant été continuellement appliquée pendant ce tems dt, et d'ailleurs étant manifeste que des espaces ainsy parcourus en vertu de forces uniformes et toujours appliquées (ainsy qu'on le pense d'ordinaire de la pesanteur) sont comme les produits de ces forces par les quarrés des tems de leur application non-interrompue, l'on aura $\frac{ds^2}{n} = \frac{ydz}{ds} \times dt^2$, ou $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$ pour la Regle cherchée.

III. Autrement. Soit de plus ID paralelle à LC: il en résultera encore un triangle DIE semblable à LIR, lequel donnera RI(dz) LR(dx)::IE $\left(\frac{ds^2}{n}\right)$.DE $= \frac{dxds^2}{ndz}$. De plus on aura aussi LI(ds).LR(dx)::LR.LP::y,(force suivant LC). $\frac{ydz}{ds}$ (force suivant LP). Donc on aura encore comme cydessus (art. II.) $\frac{dxds^2}{ndz} = \frac{ydx}{ds} \times dt^2$, ou $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$.

IV. Autrement encore. Les triangles semblables DIE, LRP, et LIR donneront aussi RI(dz).LI(ds)::RP.LR:: IE$\left(\frac{ds^2}{n}\right)$.ID $= \frac{ds^3}{nds}$. Donc on aura encore comme cydessus (art. II.) $\frac{ds^3}{ndz} = ydt^2$, ou $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$.

V. Il est visible qu'âfin qu'un corps se meuve uniformément sur une courbe quelconque, il faut que les directions des forces centrales requises pour la décrire, soient touttes perpendiculaires à cette courbe. Et par conséquent alors, outre $dt = ds$, l'on aura aussi $dz = ds$, ce qui changera la Regle précedente en $y = \frac{ds^3}{nds^3} = \frac{1}{n}$. D'où l'on voit qu'en ce cas les forces centrales seroient toûjours en raison réciproque des rayons correspondans de la developpée de cette courbe.

VI. Pour appliquer la Regle précedente (art. II. III. IV.) à quelque éxemple, soit l'Ellipse ordinaire ALB (fig. 15) dont le grand axe soit AB, et au foyer C de la quelle tendent les forces centrales (y) necessaries, par éxemple, à quelque Planete pour la décrire dans l'hypothese de Kepler qui fait les tems (t) comme les aires ACL, c'est à dire (en supposant $CL = r$) $dt = rdz$.

L'Analyse des Inf. petits (art. 78) donne ici le rayon (n) de la developpée $= \frac{rds^3}{dzds^2 - rdzddr}$ (soit du centre C l'arc LH, et $AH = x$) $= \frac{rds^3}{dzds^2 + rdzddx}$. Or (art. II. III. IV.) la force centrale $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$, donc aussi $y = \frac{ds^2 + rddx}{rdt^2}$ (à cause de $dt = rdz$) $= \frac{ds^2 + rddx}{r^3dz^2} = \frac{ds^2}{r^3dz^2} + \frac{ddx}{rrdz^2}$. Or (si outre $AB = a$, on fait encore la distance des foyers $DC = c$, $bb = aa - cc$, et dz constante) l'équation $bdr = dz\sqrt{4ar - 4rr - bb}$ au foyer C de l'Ellipse ALB donnera aussi ddr ou $-ddx = \frac{2adrdz - 4rdrdz}{b\sqrt{4ar - 4rr - bb}}$ (à cause de $dr = \frac{dz\sqrt{4ar - 4rr - bb}}{b}$) $= \frac{2adz^2 - 4rdz^2}{bb}$. Donc $y = \frac{ds^2}{r^3dz^2} - \frac{2a + 4r}{bbrr} = \frac{dx^2 + dz^2}{r^3dz^2} - \frac{2a + 4r}{bbrr} = \frac{dx^2}{r^3dz^2} + \frac{1}{r^3} - \frac{2a + 4r}{bbrr}$ (à cause de $dx^2 = dr^2 = \frac{4ar - 4rr - bb}{bb} \times dz^2$) $= \frac{4ar - 4rr - bb}{r^3bb} + \frac{1}{r^3} - \frac{2a + 4r}{bbrr} = \frac{2ar}{bbr^3} = \frac{2a}{bb} \times \frac{1}{rr} = \frac{2a}{bb} \times \frac{1}{CL^2}$, ainsy que vous et M. Newton l'avez trouvé.

Je n'ay pas manqué de faire vos complimens à M. l'Abbé Bignon, à M. le Marquis de l'Hospital, et à M. de Fontenelle: celuyci lut samedy 20. May à l'Academie les lettres que vous luy avez écrites; il ne manquera pas de vous en rendre compte. Je finis donc etc.

P. S. Comme le P. Gouye est presentement converti, je luy ay donné le Memoire que M. Pinson m'a rendu de vôtre part pour la Justification du Calcul differentiel par l'Algebre ordinaire,*) affin qu'il le mette dans les Journaux de Trevoux:

---

*) Siehe die folgende Beilage.

les autheurs du Journal des Scavans ne voulant plus y inserer de Mathematique que lorsqu'ils en oût assez pour en faire un Journal entier, ce qui nous auroit fait trop attendre. C'est un parti qu'ils ont pris depuis votre Lettre imprimée dans celuy du 20. Mars dernier. M. de Fontenelle m'a dit qu'il va faire des élemens metaphysiques de vôtre Calcul, dont il a (dit-il) le systeme tout entier dans la teste. Ce qu'il y a de vray, c'est qu'il l'entend fort bien, qu'il suffist qu'il entende une chose pour être en état de la bien faire entendre aux autres, tant il a l'imagination facile et le tour d'esprit heureux. Encore une fois, Monsieur, je suis etc.

Quand vous me ferez l'honneur de m'écrire, vous pourez m'adresser vos lettres au College des quatre nations, où je suis Professeur des Mathematiques.

Beilage.

Justification du Calcul des infinitesimales par celuy de l'Algebre ordinaire.

Deux droites AX et EY (fig. 16) se coupant en C, prenons des points E et Y, et menons EA et YX perpendiculaires à la droite AX. Appellons AC, c et AE, e; AX, x et XY, y. Donc à cause des triangles semblables CAE, CXY, il y aura $x - c$ à y comme c à e, et par consequent si la droite EY approchoit de plus en plus du point A, gardant tousjours le même Angle au point variable C, il est manifeste, que les droites c et e diminueroient tousjours, mais que cependant la raison de c à e demeureroit la même, laquelle nous supposerons icy estre autre que la raison de l'égalité, et le dit angle autre que demidroit.

Posons maintenant le cas que la droite EY vienne ainsi tomber en A même, il est manifeste que les points C et E iront aussi tomber en A, que les droites AC, AE ou c et e evanouiront, et que de l'analogie ou equation $\frac{x - c}{y} = \frac{c}{e}$ sera fait $\frac{x}{y} = \frac{c}{e}$. Donc dans le cas present il y aura $x - c = x$. Supposant, que ce cas est compris sous la regle generale. Et neantmoins c et e ne seront point des riens absolument, puisqu'elles gardent ensemble la raison de CX à XY, ou celle qui est entre le sinus entier ou rayon, et entre la tangente qui convient à l'angle en C, lequel l'Angle nous avons supposé estre tousjours demeuré le même pendant qu'EY approchoit du point A. Car si c et e estoient des riens absolument dans ce calcul reduit au cas de la coincidence des points C, E, A, comme un rien vaut l'autre, c et e seroient egales, et de l'equation ou analogie $x : y = c : e$ seroit fait $x : y = 0 : 0 = 1$, c'est à dire il y auroit $x = y$, ce qui est une absurdité, puisque nous avons supposé que l'angle est autre que demidroit. Donc c et e dans ce calcul d'Algebre ne sont prises pour des riens que comparativement par rapport à x et y, mais cependant c et e ont du rapport l'une à l'autre, et on les prend pour des infinitesimales, tout comme les elemens que nostre calcul des differences reconnoist dans les ordonnées des courbes, c'est à dire pour des accroissemens et decroissemens momentanés. Ainsi on trouve dans le calcul de l'Algebre ordinaire les traces du calcul transcendant des differences, et ces mêmes singularités dont quelques sçavans se font des scrupules. Et même le calcul d'Algebre ne sauroit s'en passer, s'il doit conserver ses avantages, dont un des plus considerables est la generalité qui luy est due afin qu'il puisse comprendre tous les cas, même celuy où quelques droites données evanouissent. Ce qui seroit ridicule de ne vouloir point faire et de se priver volontairement d'une des plus grandes utilités. Tous les Analystes habiles dans la Specieuse ordinaire en ont profité, pour rendre leur calculs et constructions generales. Et cet avantage appliqué encor à la physique et particulierement aux loix du mouvement revient en partie à ce que j'appelle la loy de la Continuité qui me sert depuis longtemps de principe d'invention en physique, et encor d'examen fort commode pour voir si quelques regles qu'on donne vont bien; dont j'avois publié il y a plusieurs années un echantillon dans les Nouvelles de la Republique des lettres, prenant l'egalité pour un cas particulier de l'inegalité et le repos pour un cas particulier du mouvement, et le parallelisme pour un cas de la convergence etc. supposant non pas que la difference des grandeurs qui deviennent egales est deja rien, mais qu'elle est dans l'acte d'evanouir, et de même du mouvement, qu'il n'est pas encor rien absolument, mais qu'il est sur le point de l'estre. Et si quelqu'un n'en est point content, on peut luy faire voir à la facon d'Archimede, que l'erreur n'est point assignable et ne peut estre donnée par aucune construction. C'est ainsi qu'on a repondu à un Mathematicien tres ingenieux d'ailleurs, lequel, fondé sur des scrupules semblables à ceux qu'on oppose à nostre calcul, trouve à redire à la quadrature de la parabole, car on luy a demandé si par quelque construction il peut assigner une grandeur moindre que la difference qu'il pretend estre entre l'aire parabolique donnée par Archimede et la veritable, comme on peut tousjours faire lorsqu'une quadrature est fausse.

Cependant quoyqu'il ne soit point vray à la rigueur que le repos est une espece de mouvement, ou que l'égalité est une espece d'inégalité, comme il n'est point vray non plus que le Cercle est une espece de polygone regulier: neantmoins on peut dire, que le repos, l'égalité, et le cercle terminent les mouvemens, les égalités, et les polygones reguliers, qui par un changement continuel y arrivent en evanouissant. Et quoyque ces terminaisons soyent exclusives, c'est à dire non-comprises à la rigueur dans les varietés qu'elles bornent, neantmoins elles en ont les proprietés, comme si elles y estoient comprises, suivant le langage des infinies ou infinitesimales, qui prend le cercle, par exemple, pour un polygone regulier dont le nombre des costés est infini. Autrement la loy de la continuité seroit violée, c'est à dire puisqu'on passe des polygones au cercle, par un changement continuel et sans faire de saut, il faut aussi qu'il ne se fasse point de saut dans le passage des affections des polygones à celle du cercle

---

V.

Leibniz an Varignon.

Luzbourg pres de Berlin 20 Juin 1702.

Je vous suis obligé de la communication du Journal des Savans du 13 d'Avril de cette année, qui contient les Remarques sur le probleme de l'invention des tangentes d'une courbe donnée. La Methode qu'on y donne est infiniment defectueuse, elle est bien au dessous de la nostre et n'adjoute rien à celle de Messieurs de Fermat, des Cartes, Hudde, Slusius et semblables, qu'on avoit autresfois; car elle ne va pas aux equations irrationelles, et moins aux transcendentes de sommation, et encor moins aux transcendentes aux exponentielles. Il semble qu'on n'y fait que deguiser les differences, et qu'on ne sauroit monstrer la source des regles sans tomber dans les methodes d'autruy. La difficulté qu'on se fait de la pluralité des tangentes à un même point de la courbe, n'est gueres considerable. Comme les points de la courbe à plus d'une tangente sont determinés et particuliers, il est aisé de les decouvrir par les voyes qui sont connues et même par les plus vulgaires. Quoyque je ne puisse point donner maintenant assés d'attention à cette matiere, je prends pourtant un moment que j'ay à moy, pour considerer la courbe de la premiere équation du Memoire dont le Journal susdit donne la figure pag. 240. L'axe estant OHM (fig. 17), et la courbe OFGM, et OH, y, l'abscisse, et HF, x, l'ordonnée ou appliquée normale, et l'équation

$$\begin{matrix} y^4 - 8ay^3 - 12axyy + 48aaxy + 4aaxx \\ + 16aayy \qquad\qquad - 64a^3x \end{matrix} = 0.$$ L'auteur du Memoire remarque bien qu'en cas qu'il y a OD, $x = DG$, $y = 2a$ le point G a deux tangentes CG, LG. Mais pour trouver cela, et les soustangentielles CD, LD, on n'avoit point besoin des detours qu'il prend. Car cherchant la valeur de l'appliquée x, on trouve

$$2ax = 3yy - 12ay + 16aa + 2(y - 2a)\sqrt{(2yy - 8ay + 16aa)},$$

donc $\dfrac{a\,dx}{dy} = 3(y-2a) + \sqrt{(2yy - 8ay + 16aa)} + \dfrac{2(y-2a)(y-2a)}{\sqrt{(2yy-8ay+16aa)}}$,

donc lorsqu'il y a $y = 2a$, on aura $dx:dy = \sqrt{(2yy - 8ay + 16aa)}:a$ $=$ (supposé $y = 2a$) $2\sqrt{2} = x:t = 2a:t$, donc $t = a:\sqrt{2}$, tout comme l'auteur l'avoit trouvé, mais on s'apperçoit qu'il y a deux t, savoir CD et DL, parceque suivant la methode ordinaire, on trouve par les signes ou valeurs de t affirmatives ou negatives, que les tangentes des points entre O et G doivent estre menées vers O, et celles des points entre M et G vers M. D'où il suit qu'au point G doit arriver l'un et l'autre, et que la tangente doit estre double, puisqu'elle n'est point DG, qui seroit simple et commune aux deux rangs, savoir aux tangentes superieures et aux inferieures, si elle en pouvoit estre dans le cas présent.

Je m'etonne comment l'auteur du Memoire peut appeller cette DG tangente relative, comme si elle estoit Tangente icy en aucune maniere, et servoit à construire une equation qui a deux racines egales, ou coupoit la courbe en deux points coincidens. Pour cela il faudroit que les portions de courbe, OG, MG, se touchassent, au lieu qu'elles se coupent si on les continue. Je m'étonne aussi que l'auteur veut introduire des tangentes relatives à l'axe. Une Tangente de la courbe l'est tousjours de quelque maniere qu'on prenne l'axe, si on entend par la Tangente une ligne qui coupe la courbe en deux points coincidens, comme il se fait dans nostre calcul. Il est vray que dans le sens vulgaire, où la tangente ne doit point du tout couper la courbe dans le point, où elle la rencontre, on pourroit concevoir des Tangentes relatives, mais non pas selon l'axe, ains selon qu'on prend la courbe en son unité et continuation: car icy il y a en effect deux courbes qui se coupent, OGP et MGN, et il arrive que la droite CG touche la courbe OP, et que la droite LG touche la courbe MN. Mais si l'essence de la Tangente estoit de ne point couper la courbe au point du rencontre G, alors en cas qu'on prend OGM pour une courbe entiere, regardant plustost à l'equation commune qu'à la direction, alors, dis-je, CG et LG ne seront point tangentes de cette courbe totale ou composée OGM, car elles la coupent et dans ce sens il y auroit des Tangentes relatives selon la maniere de continuer la courbe, puisque CG et LG le seroient à l'egard des courbes OGP et MGN, mais non pas à l'egard de la courbe OGM. Mais dans le fonds ce n'est qu'une question de nom, et nostre calcul mettant l'essence de la tangente dans la duplicité des points coincidens, on peut dire CG et LG sont veritablement des tangentes à l'égard même de la courbe OGM, tout comme une certaine droite, qui est la tangente des deux parties, concave et convexe, qui se joignent dans le point d'inflexion de la courbe, se prend aussi pour touchante de la courbe totale, quoyqu'elle la coupe au même point. Mais les maxima et minima sont veritablement relatifs aux Axes, et nullement essentiels à la courbe, comme le sont les tangentes et les points d'inflexion. Au reste l'auteur a raison de dire apres d'autres que les tangentes degenerent quelquesfois en asymptotes qui en sont une espece alors; cependant on peut trouver les asymptotes par le calcul de l'analyse vulgaire sans avoir besoin d'aucune methode des tangentes, c'est à dire par les seules valeurs des ordonnées paralleles ou convergentes, quand elles deviennent infinies. Il est vray que la methode des Tangentes y fournit souvent des abregés, comme peut faire aussi la methode appropriée à la pluralité des tangentes que M. le Marquis de l'Hospital a déja donnée par le calcul des differences dans son Analyse des infiniment petits sect. 9. articl. 165. Comme vous me l'indiqués, Monsieur, et remarqués aussi que dans le Journal des Savans 1692 p. 176 et dans les Actes de Leipzic de 1694 p. 397 il y a des exemples de la pluralité des Touchantes, ce qui fait qu'on ne comprend pas, comment l'auteur du Memoire peut dire que lorsque diverses Tangentes conviennent à un même point d'une courbe, les Methodes ordinaires (où il comprend encor celles qu'on a données par nostre calcul des differences) ne suffisent pas pour en trouver une seule, d'autant qu'il semble n'avoir fait que changer nos expressions. Je ne parle point des autres equations et courbes contenues dans le Memoire en question, sur lesquelles on pourroit faire bien des remarques. Je voy, Monsieur, que vous avés etudié la matiere à fonds et que vos reflexions peuvent donner un grand jour à ces matieres. C'est le meilleur usage qu'on peut tirer des oppositions. Il auroit esté à souhaiter que ce Memoire nous eût donné quelque progrés nouveau: mais changer les dy en zn, et les dx en vn, ce n'est pas le moyen d'en faire. Je crois que l'auteur en seroit capable, s'il n'aimoit mieux actum agere, dans l'esperance qu'il a conçue de rabattre quelque chose de l'opinion qu'on a conçue dans le monde du calcul des differences. En quoy on luy peut bien predire qu'il ne reussira jamais, la consideration des differences elementaires estant la veritable clef des secrets de la Geometrie interieure, et la differentation (avec la sommation pure ou impliquée qui luy est reciproque) estant une operation aussi naturelle dans le calcul de cette Geometrie, que la multiplication (avec la division et extraction qui luy est reciproque) l'est dans le calcul de la Geometrie ordinaire, de sorte que c'est inventa fruge glandibus vesci, et se faire du tort à soy même que de chercher des detours pour l'eviter.

P. S. J'ay ecrit la lettre en sorte que vous la puissiés montrer ou communiquer, Monsieur, si vous le trouvés à propos, apres l'avoir examinée et apres avoir jugé que j'ay bien rencontré. Car je suis un peu etranger maintenant dans ces matieres, et dans une assiette d'esprit, où je ne suis gueres capable d'y trouver de l'attention, car je me trouve dans la maison de plaisance de la Reine de Prusse, où sont aussi Mad. l'Electrice d'Hanover et Mad. la Duchesse de Courlande. On se retire tard, et on n'est pas trop à soy. Quoyque l'Academie eût eu raison de faire cesser ce qu'il y avoit de personnel dans les contestations, il est pourtant bon que la matiere soit eclaircie. Je prieray M. Bernoulli de Groningue de me communiquer ce que je n'ay pas encor vu de vos reponses: mais je souhaiterois qu'on tirât de vos ecrits et de ceux de M. Rolle avec la permission de l'Academie ce qu'il y a d'instructif, c'est à dire les objections et les solutions, laissant là le personnel et tout ce qui peut se tourner contre quelcun. Pour ce qui est des impressions centrales, je seray bien aise de voir un jour dans les Memoires de l'Academie ce que vous aurés trouvé sur les ovales de M. Cassini; cependant je vous remercie de ce que vous me communiqués sur le calcul de ces impressions, qui est une matiere tres utile.

Entre nous je crois que Mons. de Fontenelle, qui a l'esprit galant et beau, en a voulu railler, lorsqu'il a dit qu'il vouloit faire des elemens metaphysiques de nostre calcul. Pour dire le vray, je ne suis pas trop persuadé moy même, qu'il faut considerer nos infinis et infiniment petits autrement que comme des choses ideales ou comme des fictions bien fondées. Je croy qu'il n'y a point de creature au dessous de la quelle il n'y ait une infinité de creatures, cependant je ne crois point qu'il y en ait, ny même qu'il y en puisse avoir d'infiniment petites et c'est ce que je crois pouvoir demonstrer. Il est que les substances simples (c'est à dire qui ne sont pas des estres par aggregation) sont veritablement indivisibles, mais elles sont immaterielles, et ne sont que principes d'action. Je prepare maintenant une reponse à ce que M. Bayle m'a objecté dans la seconde edition de son Dictionnaire, article Rorarius, mais je ne suis pas encor resolu de la faire imprimer, et je me contenteray peutestre de la luy communiquer. Si le R. P. Gouye a esté disposé à se rendre, j'espere que mes papiers auront pû me conserver dans ce dessein. Je voudrois bien savoir ce que dit M. l'Abbé Gallois. Pour M. de Fontenelle, j'espere qu'il aura receu les observations d'une nouvelle Comete, faites à Berlin, que je luy ay envoyées à deux fois. Je ne say, si on l'a observée aussi chez vous. Je suis etc.

VI.

Varignon an Leibniz.

A Paris ce 5. Avril (1704).

Soufrez qu'apres vous avoir renouvelé mes tres humbles respects, je prenne la liberté de vous faire une prière que vous agréerez (je croy) d'autant plus qu'elle ne concerne que l'avancement des sciences dont vous êtes un si illustre promoteur: c'est de vouloir bien acorder au R. Pere Lelong, prêtre de l'Oratoire, la grace qu'il vous demande par la lettre cy jointe, pour un ouvrage que vous verrez être d'une grande conséquence, et qui demande une vaste érudition; aussi ce Pere est-il tres habile et tres laborieux, jusqu'à l'avoir déja fort avancé. Mais comme un homme seul, quelque habile et quelque laborieux qu'il soit, ne peut pas suffire à tout ce qu'un si grand ouvrage demande de recherches, il a recours à vous comme à celuy qui de toute l'Europe est le plus capable de le secourir en ce rencontre, soit par vous ou par ceux que vous y voudrez bien engager, n'y ayant point de sçavant qui ne s'en fasse un plaisir et un honneur des que vous le luy conseillerez. D'ailleurs le Pere Lelong ne manquera pas de leur rendre dans son ouvrage toutte la justice que méritera la part qu'ils y auront, sur tout à vous qui y aurez le plus contribué: outre qu'il est fort habile, c'est un parfaitement honnête homme; il est Bibliothéquaire de la Maison de l'Oratoire, qui est ici rue St. Honoré, où il demeure avec le R. P. Malbranche, dont il est aussi fort estimé et fort ami. Permettez moy donc, Monsieur, de joindre mes prieres aux siennes pour vous supplier de luy accorder la grace qu'il vous demande.

Sans doute que M. Bernoulli de Groningue vous aura fait part de l'affligeante nouvelle que je luy anonçay il y a un mois de l'irreparable perte que nous avons faite de nôtre cher et illustre M. le Marquis de l'Hôpital, qui mourut ici le 2. Février dernier d'une petite fiévre qu'il portoit au commencement par la ville, et que les medecins ont rendu mortelle. Il a laissé un ouvrage presque fini sur les Sections Coniques par le calcul, sur les Lieux, sur la Construction des équations, lequel comprend toutte la geométrie de M. Descartes, et beaucoup plus. L'Ecrit est assez complet, mais les figures sont dans un grand desordre, étant touttes sur pres qu'autant de papiers volans, et presque touttes sans dates. Le P. Malbranche qui l'a entre les mains, pense à m'en charger pour le donner au public; mais je n'ay pas presentement le tems de m'y appliquer: ce sera le plus tost que je pourray, prenant un tres grand interest à la gloire de M. le Marquis de l'Hôpital.

Les Memoires de 1701 de l'Academie sont publics depuis un mois que j'ecrivis par Bâle à M. Bernoulli de Groningue, que je luy en envoyray son exemplaire avec celuy de M. son frere dès que celuy-ci m'en aura indiqué l'occasion. Je luy envoyray aussi vôtre exemplaire pour vous le faire tenir, toutte autre voye etant fermée. Vous y verrez la methode que je vous ay envoyée autrefois pour trouver les forces centrales, de laquelle j'en tire une infinité de formules touttes aussi générales que celles que vous avez vues dans les Memoires de 1700, et cela dépendemment et indépendemment des Rayons Osculateurs que je trouve aussi d'une manière infiniment générale en ce qu'elle en fournit une infinité de formules aussi générales, chacune que tout ce qu'on en a donné jusqu'ici, s'en tire en corollaires, même sans aucun calcul. Outre touttes ces formules de forces centrales, j'ay aussi trouvé celle que vous m'avez conseillé autrefois de chercher pour le mouvement d'un corps tiré de différens côtés par différentes forces centrales à la fois, tel que seroit celuy d'un stile qui décriroit une Courbe à plusieurs foyers à la maniere de M. de Tschirnhausen, soit que ces foyers ou ces forces soient dans un même plan ou dans des plans différens: cela trouvera dans les Memoires de 1703.

VII.

Leibniz an Varignon.

(Im Auszuge.)

Je ne savois rien de la nouvelle affligeante de la mort de nostre illustre ami Monsieur le Marquis de l'Hospital. Quelle perte? Il pouvait donner bien autre chose que les Sections Coniques par le calcul, et j'espere qu'on trouvera dans ses papiers Essais sur des matieres plus importantes, et qui auront plus de rapport à l'infini et à la physique. J'espere que nos Antagonistes se seront lassés de leur petites objections. M. Wallis est mort aussi; c'est une perte tres grande. M. Newton a publié son livre des couleurs, et je l'attends. M. Gregory a inseré quelque chose de la Theorie de la Lune de M. Newton dans son ouvrage Astronomique. Il est vray qu'il ne l'explique pas tout à fait; cependant elle est fondée dans les forces centrales, ainsi vous en jugerés mieux que personne, et je vous suppliez, Monsieur, de la vouloir considerer dans ce livre de M. Gregory. On dit que M. Flamstead s'obstinant de refuser des observations à M. Newton, l'empeche de publier cette Theorie dans la perfection, où il la souhaiteroit. Je voudrois qu'au defaut de M. Flamstead d'autres bons observateurs le secourussent. N'avés vous point examiné ce qu'on peut tirer des Tables de M. de la Hire? M. le Marquis de l'Hospital n'at-il point touché aux courbes ou lieux qui suivent immediatement les Coniques. C'est ce qu'il faudroit tacher un jour de faire pour en regler le nombre et l'ordre. Feu M. l'Abbé Mariotte avoit fait une petite Mecanique pour les ingenieurs; il me l'a dit luy même, si je ne me trompe: elle estoit pour la practique. N'en at-on rien trouvé?

Ne penset-on pas chez vous à tacher de perfectionner la Medecine? la mort de nostre illustre ami me fait souvenir de cela. C'est une chose honteuse que la negligence des hommes sur ce chapitre. M. Fayon, si habile homme, n'y songet-il pas, et ne consideret-il point qu'ayant à sa disposition pour l'avancement de cette science les forces d'un des plus grands Monarques qui ayent jamais esté dans l'univers, il pourroit jetter les fondemens d'un bastiment dont l'utilité seroit inestimable.

VIII.

Varignon an Leibniz.

A Paris ce 6. Decemb. 1704.

On imprime dans les Memoires de 1703, le raport de votre Arithmétique Binaire avec les anciens caractères chinois de Fohi.

J'ay appris qu'on n'a pas jugé à propos de mettre dans le Journal des Scavans votre Réponse au P. Lamy Benedictin sur l'union de l'ame et du corps: les Autheurs de ce Journal n'y voulant plus mettre de contestations. M. de Fontenelle cherche à qui il l'a donnée.

Ce qu'on m'a mis de M. le Marquis de l'Hôpital entre les mains, ne comprend que les Sections Coniques par le calcul, avec leur usage pour la résolution des Equations: il est enfin en état de paroître. Je l'ay intitulé: Traité Analytique des Sections Coniques et de leur usage pour la Resolution des Equations dans les Problêmes tant déterminés qu'indéterminés. Ouvrage posthume de M. le Marquis de l'Hôpital, Honoraire de l'Académie Royale des Sciences. On en imprime actuellement la premiere feuille. C'est tout ce qui a été mis de M. de Hôpital entre les mains du P. Malbranche, duquel je ne l'ay voulu recevoir que par compte sur un billet qu'il a de moy, et moy de luy, pour le rendre de même apres l'impression, ne l'ayant voulu recevoir qu'à cette condition. Je serois faché d'avoir touché autrement aucun des papiers de M. de l'Hôpital.

M. de la Hire, entre les mains de qui les papiers de M. Mariotte furent mis apres sa mort, m'a dit n'y avoir point trouvé la petite Mécanique que M. Mariotte vous a dit autres fois avoir faite pour les Ingenieurs et pour la pratique.

Je n'ay point encore reçu l'Astronomie de M. Grégori: elle me vient par Basle, d'où je reçu il y a quelque tems les œuvres posthumes de M. Hugens, et le petit livre de Cheynaeus. Je n'ay encore lu que 8 ou 10 pages de ce dernier, où je n'ay pas trouvé grande chose.

J'ay fait vos complimens (comme vous me le marquiez) à M. l'Abbé Bignon, l'Abbé Galloys, de Fontenelle, des Billetes, et au R. P. Malbranche, lesquels m'ont tous chargé de vous bienfaire aussi les leurs. Mr. l'Abbé Bignon me dist alors (ce fut le 13. Juin dernier) qu'il y avoit plus de 18 mois qu'il n'avoit reçu de vos lettres.

On va faire ici au commencement de l'année un nouveau Journal qu'on donnera tous les mois: ce sera, outre quelques pieces particulières, un extrait de ce qui paroitra de meilleur dans tous les Journaux de l'Europe qui pourront venir jusqu'aux Autheurs de celuy-ci. Un d'entr'-eux me charge de vous prier de nous dire ce qu'il y auroit à faire pour le rendre le meilleur et le plus utile qu'il soit possible, et par qu'elle voye on pourroit avoir le vôtre pour en profiter. J'apprend du Pere Lelong que celuy qui fesoit le votre a cessé; nous vous demandons du moins vos avis pour celuy-ci.

On va imprimer ici un traité d'Analyse par le P. Raineau, prêtre de l'Oratoire. On imprime actuellement un traité des Lieux geométriques et de la construction des Equations par M. Guinée. Enfin le P. Mabillon vient de publier un supplement à sa Diplomatique, pour réponse au P. Germon Jesuite qui l'avoit attaquée: le P. Mabillon luy repond sans parler de luy ny de sa critique et seulement comme se faisant à soy même les difficultés qu'elle contient avec quelques autres qu'il prévoit qu'on luy pourroit faire encore.

Voila tout ce que je scais des affaires d'Autruy: Parlons (je vous prie) presentement des Miennes par raport à une chose que je vous ay dit (dans la lettre que je vous ay envoyée avec vos Memoires de 1701) me rouler par la teste depuis tres long tems: la voici.

Après avoir trouvé les Regles des forces centrales qui sont dans ces Memoires de 1701 et dans ceux de 1700, j'ay cherché leur raport avec les pesanteurs des corps où elles se rencontrent; et j'ay aussi trouvé une Regle infiniment générale de ce raport. Mais entre les corollaires de cette Regle il y en a un, où je me trouve arrêté par l'authorité de plusieurs grands hommes qui ont avancé le contraire: c'est lorsque la Courbe est un cercle dont le centre est aussi celuy des forces centrales ou centrifuges du corps qui le décrit; par exemple, un cercle que décriroit un corps attaché à un des bouts d'une corde non extensible et retenue par l'autre au centre de ce cercle. Tous ceux qui jusqu'ici ont traité cette matière, ont unanimement avancé, qu'un corps qui décriroit ainsy un cercle d'une vitesse uniforme égale à ce qu'il en acquieroit en tombant de la hauteur du demi-rayon de ce cercle auroit partout une force centrifuge égale à sa pesanteur; et moy je trouve qu'il ne luy faudroit pour cela qu'une vitesse égale à ce qu'il en acquieroit en tombant seulement de la hauteur du quart de ce rayon. Ceci est non seulement une suite de ma Regle générale; mais je le trouve encore en plusieurs manières particulières. Cependant n'osant préferer mes lumieres (quelques claires qu'elles me paroissent) à celles d'aussi grands hommes que le sont la plupart de ceux auxquels je me trouve contraire, je vous prie de vouloir bien examiner ceci, et de m'en dire votre sentiment.

Problême.

Trouver le raport des Forces centrales (tant centrifuges que centripetes) aux Pesanteurs absolues des corps mus de vitesses variées à discretion le long de telles courbes qu'on voudra.

I. Pour démêler les forces centrales des corps d'avec leurs Pesanteurs, je supposeray partout dans la suite, que les courbes qu'on leur fera décrire, seront touttes sur des plans parfaitement horizontaux, lesquels rendant ces corps comme sans pesanteur, en soutenant tout ce qu'ils en ont.

II. Cela posé, soit (fig. 18. 19) une Courbe quelconque MLN décrite par le corps L mu suivant MN avec telle variation de vitesses qu'on voudra, en tendant toûjours vers ou à contre sens d'un point quelconque C du plan de cette même courbe, suivant des Lignes droites LC, lC etc. qui passent touttes par ce point: on demande le raport de la pesanteur absolue de ce corps avec ce qu'il fait d'effort à chaque point de cette courbe pour s'en écarter en suivant la tangente LQ ou (ce qui revient au même) avec les forces qui égales à ces efforts, le retiennent toûjours sur cette courbe en l'attirant ou en le repoussant incessament et directement contr'-eux suivant les droites correspondantes LC, qui passent touttes par le point C, lequel s'appellera pour cela le centre de ces forces, que leur égalité avec ces efforts fera aussi prendre pour eux dans la suite en les appellant du même nom de forces centrales; les droites LC, lC s'appelleront les rayons de ces mêmes forces.

Pour trouver presentement le raport de ces forces avec la pesanteur du corps L, imaginons l'arc Ll infiniment petit, des extremités duquel partent les rayons LC, lC, avec la petite droite LP paralelle à lC, et qui rencontre en P la tangente LQ. Soit de plus la verticale HL de la hauteur de la quelle le corps L tombant, il acquieroit en L en vertu de sa seule pesanteur, la vitesse quil a effectivement en ce point suivant Ll, ou pour suivre LP.

Dans la suite cette hauteur HL s'appellera déterminatrice de cette vitesse, pour n'être pas obligé de repeter cette grande phrase touttes les fois qu'on en parlera.

III. Tout cela supposé, il est visible que si l'on prend la tangente LQ double de HL, et qu'on imagine le corps L se mouvoir uniformément de cette vitesse sur LQ, non seulement il parcourera cette longueur LQ dans un tems égal à celuy qu'il auroit mis à tomber de H en L, en commençant en H; mais encore si l'on prend sa partie infinement petite LP pour le tems que ce corps mettroit à la parcourir de cette même vitesse, c'est à dire (hyp.) pour le tems qu'il met à parcourir effectivement Ll, l'on aura aussi LQ pour celuy qu'il employroit à parcourir ainsy cette même LQ, ou à tomber de H en L par sa seule pesanteur.

IV. Cela étant, si l'on suppose que la force centrifuge ou centripete (qui feroit faire LP au corps L dans le tems qu'abandonné à luy même, il parcoureroit LP, ou que retenu sur la courbe, il parcourt effectivement Ll) soit inhérente dans le corps L, et qu'elle agisse incessament sur luy suivant lP, de même que sa pesanteur fait de haut en bas dans l'hypothese de Galilée (si cette supposition déplaist, au lieu de la pesanteur effective du corps L, il n'y a qu'à luy en imaginer une égale à sa force centripete ou centrifuge en L, suivant lP vers ou à contre sens du point C; et le raport qu'on trouvera cy apres, de cette nouvelle pesanteur à la sienne, sera celuy qu'on cherche de sa force cen trale en L à sa propre pesanteur): il est visible que puisque cette force centrale en L, est capable de luy faire parcourir lP dans le tems LP, si l'on fait cette Analogie $\overline{LP}^2 . \overline{LQ}^2 :: Pl . \frac{\overline{LQ}^2 \times Pl}{\overline{LP}^2}$, ce quatrième terme sera l'espace que cette force centrale inhérente (hyp.) comme une espece de pesanteur dans le corps L, luy feroit parcourir dans le tems LQ que sa pesanteur (art. 3.) le fait tomber de même de H en L; puisqu'alors les especes seroient comme les quarrés des tems.

V. Donc HL et $\frac{\overline{LQ}^2 \times Pl}{\overline{LP}^2}$ sont les espaces que la pesanteur du corps L, et sa force centrale en L suivant LC, luy feroient parcourir de la même manière en tems égaux. Et par conséquent ces deux forces doivent être comme ces espaces: c'est à dire que si l'on prend p pour la pesanteur de ce corps, et f pour sa force centrale en L par raport au centre C, l'on aura $f.p :: \frac{\overline{LQ}^2 \times Pl}{\frac{1}{4}\overline{LP}^2} . HL$ (à cause que suivant l'art. 3 LQ est $= 2HL$, et $LP = Ll$) :: $\frac{4\overline{HL}^2 \times Pl}{\overline{Ll}^2} . HL$, ce qui donne $f = \frac{4p \times HL \times Pl}{Ll \times Pl}$ (en prenant aussi h pour HL) $= \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$ pour Regle générale de comparaison entre les forces centrales et les pesanteurs des corps. Ce qu'il faloit trouver.

VI. Touttes choses demeurant les mêmes que dans l'art. 2, et B étant le point où Cl prolongée rencontre la touchante LQ; si apres avoir tiré les rayons LR et lR de la dévelopée de la Courbe MLN, on décrit des centres C et L les arcs LD et lF; la ressemblance des Triangles LRl et FLl donnant $LR.Ll :: Ll.lF = \frac{Ll \times Ll}{LR}$, et celle des triangles BlP et BCL donnant de même $Bl.Pl :: BC.LC$, et par conséquent $Bl = Pl$, à cause de $BC = LC$; les triangles BDL et BFl pareillement semblables donneront aussi $DL.LB$ ou $Ll :: Fl:Bl$ ou $Pl = \frac{Ll \times Fl}{DL}$ (à cause de $Fl = \frac{Ll \times Ll}{LR}$) $= \frac{\overline{Ll}^2}{DL \times LR}$. Donc en subsistuant cette valeur de Pl dans la formule ou Regle $f = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$ du précédent art. 5, l'on aura aussi en général $f = \frac{4ph \times Ll}{DL \times LR}$, de sorte que si presentement on appelle LR, r; Ll, ds et DL, dx, l'on aura de même en général $f = \frac{4p\,h\,ds}{r\,dx}$ pour la Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps.

VII. Corol. On voit de là que lorsque le centre C des forces est en R, c'est à dire, lorsque les forces centrales du corps L qu'on suppose décrire la courbe MLN, tendent suivant les rayons RL correspondans de la Dévelopée de cette courbe, ou que leur centre C est sur cette dévelopée, alors LD se confondant avec Ll, et rendant par là $dx = ds$, l'on aura $f = \frac{4ph}{r}$, ou $f.p :: h.\frac{r}{4}$, c'est à dire en général qu'alors en chaque point L de quelque courbe MLN que ce soit, la pesanteur du corps L qu'on suppose la décrire en tendant toûjours suivant le rayon RL

correspondant de la dévelopée de cette courbe, sera à sa force centrale ou tendante aussi suivant RL, comme le quart de ce rayon de Dévelopée, à la hauteur déterminatrice de la vitesse de ce corps en L, c'est à dire, à la hauteur d'où ce corps tombant auroit à la fin de sa chutte en vertu de sa seule pesanteur, une vitesse égale à celle (quelle qu'elle soit) qu'il a effectivement en chaque point L suivant l'élément correspondant Ll de cette même courbe MLN.

VIII. Donc en prenant presentement cette courbe MLN pour un cercle qui auroit R pour centre, et $RL = r$ pour ses rayons, suivant lesquels le corps L qui le décrit, tend à s'écarter de ce centre, l'on aura aussi $f.p::h.\frac{r}{4}\left(\frac{RL}{4}\right)$, et par conséquent $f = p$, lorsque $h = \frac{1}{4}RL$: c'est à dire que lorsque la hauteur (h) d'où ce corps acquiéroit par sa chutte une vitesse égale à celle qu'il a sur ce cercle, sera égale au quart du rayon de ce même cercle, sa force centrifuge sera précisément égale à sa pésanteur. Ce que vous voyez, Monsieur, étre très différent du sentiment ordinaire, où l'on croit que pour que la force centrifuge d'un corps qui décriroit ainsy un cercle, fust égale à sa pesanteur, il luy faudroit une vitesse égale à ce qu'il en acquieroit en tombant de la hauteur du demi-rayon de ce cercle. Voici en quoy il me paroist que les Autheurs de ce sentiment se sont mépris.

IX. Soit (fig. 20) un cercle MLN (dont le centre soit R) décrit comme cydessus par le corps L en tendant toûjours suivant les rayons RL de cercle; soit HL une verticale, de la hauteur de laquelle ce corps tombant acquieroit en vertu de sa seule pesanteur, une vitesse égale à celle qu'il a effectivement en L suivant la tangente LQ de ce cercle. Ces Autheurs apres avoir supposé de plus LP infiniment petite, Pl paralelle à LQ, et avoir démontré expressément ou équivalemment que la force centrifuge de ce corps en L est à sa pesanteur absolue $::Pl.\frac{Ll \times Ll}{4HL}$, ainsy qu'il resulte du précédent art. 5, ils concluent que cette même force du corps L est à sa pesanteur $::\frac{Ll \times Ll}{2RL}.\frac{Ll \times Ll}{4HL}::HL.\frac{1}{2}RL$, en supposant tous expressément (hors M. Hugens à qui je vas aussi répondre) que $Pl = \frac{Ll \times Ll}{2RL}$; au lieu que je viens de conclure (art. 8.) que cette force centrifuge est à la pesanteur du corps L :: HL.$\frac{1}{2}$RL, en supposant au contraire $Pl = \frac{Ll \times Ll}{RL}$, de sorte que toutte la difficulté qu'il y a entre nos sentimens en ce point, vient uniquement de la différence de ces deux suppositions. Voyons donc laquelle est la vraye, s'il est vray que quelqu'une des deux le soit.

X. Pour le voir, il faut considérer qu'un point n'ayant aucune direction particulière, ce ne peut être qu'en considérant une courbe comme un polygone d'une infinité de côtés, qui prolongés en soient autant de tangentes, qu'on peut dire que le corps qui la décrit, est dans un effort continuël pour s'échaper par la touchante de cette même courbe à chaque point où il se trouve, en sorte qu'il s'echaperoit effectivement suivant cette tangente, s'il étoit abandonné à luy même en cet endroit.

XI. Cela étant, quelque soit la Courbe MLN ainsy regardée comme un polygone d'une infinité de côtés, dont deux soient Ll et ML qui prolongé fasse la tangente LQ; si l'on suppose que RL, Rl sont deux rayons de sa developée, et que Pl est paralelle à LR; il est manifeste que l'on aura en général LR.Ll :: Ll.Pl = $\frac{Ll \times Ll}{LR}$, donc en prenant presentement cette courbe MLN pour un cercle dont R soit le centre, l'on aura aussi $Pl = \frac{Ll \times Ll}{LR}$. Ce qu'il faloit démontrer.

XII. La même chose se peut encore démontrer autrement pour le cercle en particulier. Car ce polygone infiniti-latère ayant ses côtés ML et Ll également inclinés sur LR, et de plus LR = lR, les angles MLR et LlR faits des côtés infiniment petits de ce polygone avec ses rayons, seront aussi par tout égaux entr'eux; et par consequent Pl étant (hyp.) paralelle à LR, les triangles LRl et PLl seront de même partout semblables entr'eux. Donc le cercle en particulier donnera encore partout LR.Ll :: Ll.Pl ou $Pl = \frac{Ll \times Ll}{LR}$, et non pas $Pl = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$, ainsy que l'ont supposé les Autheurs dont il s'agit ici.

XIII. Ce qui les a trompés, c'est qu'en imaginant lK perpendiculaire sur LR, ils ont cru que Pl étoit = LK, comme lorsque ces grandeurs sont finies, au lieu que Pl est ici $= 2LK$. Pour le voir il n'y a qu'à prolonger lK jusqu'à sa rencontre du cercle en M: car alors ayant $lM = 2KM$, avec l'Analogie Pl.LK::lM.KM, que donnent les triangles PMl et LMK, que le petit côté ML prolongé en LQ, et la petite Pl parallele à LK, rendent rectilignes et semblables; l'on aura aussi $Pl = 2LK = \frac{2Ll \times Ll}{2LR} = \frac{Ll \times Ll}{LR}$, et non pas $Pl = LK = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$.

XIV. Voici encore la même chose d'une autre manière. Du point A (fig. 21) pris à discretion hors du cercle MLN sur le diametre NL prolongé, et mobile suivant AL, soient deux droites AE et AF toûjours touchantes de ce cercle en λ et μ, lesquels points d'atouchement seront par conséquent aussi mobiles sur la circonférence de ce même cercle, avec la corde $\lambda\mu$ qui les joint, en s'approchant ou en s'éloignant avec elle du point L, à mesure que le point A s'en approchera ou s'en éloignera, jusqu'à s'y confondre avec le point A lorsqu'il y arrivera. Par le point d'atouchement λ soit la droite $\lambda\pi$ qui le suive partout en demeurant toûjours paralelle à NA, et dont π soit la rencontre avec la tangente μA prolongée vers q.

Cela posé, il suit en général de la seule doctrine d'Euclide, qu'à quelque distance du cercle que soit le point A, l'on aura par tout $\lambda\pi = 2Ax$; et par conséquent aussi lorsque $\lambda\pi$ se trouvera en lP, et $Ax = LK$, par l'arrivée de A en L, de Aλ en Ll, de Aμ en LM, ou de μAq en MLQ, et de $\lambda\mu$ en LN. Donc aussi pour lors on aura $lP = 2LK = \frac{2Ll \times Ll}{LN} = \frac{Ll \times Ll}{LR}$, en prenant R pour le centre du cercle en question; et cela jusqu'à l'entière confusion des points λ, μ, l, P, x, K, μ, M et A dans le seul point L de la circonférence circulaire MLN. *Ce qu'il faloit démontrer.*

Peut-être trouverez vous, Monsieur, que je me suis un peu trop arrêté à prouver cette vérité, la pluspart des démonstrations précédentes revenant à la manière ordinaire de trouver les rayons des dévelopées, si connues des Autheurs dont il s'agit ici. J'en ay cependant encore plusieurs autres pour touttes sortes de Courbes en général et pour le cercle en particulier que j'omets de peur de vous ennuyer, aussi bien que deux autres solutions que j'ay encore du Problême général par où j'ay commencé. Je passe donc à l'autre tour qu'a pris M. Hugens pour prouver ce que je combats: vous allez voir que sa méprise revient presque à celle des autres.

XV. M. Hugens apres avoir supposé un cercle MLN (fig. 22) décrit par le corps L d'une vitesse uniforme égale à ce que ce corps en acquieroit en vertu de sa seule pesanteur, en tombant de la hauteur EL égale à la moytié du rayon LR de ce cercle, il suppose la tangente LQ suivant laquelle ce corps s'échaperoit de cette même vitesse, si on l'abandonnoit à luy même en L. Ensuite apres avoir supposé $LQ = 2EL = RL$, sa partie LB infiniment petite, et la sécante BN qui en passant par le centre R du cercle, le rencontre en l et en N; il supose enfin $EF . EL :: \overline{LB}^2 . \overline{LQ}^2$.

Tout cela supposé, il trouve que la force centrifuge du corps L luy feroit faire lB dans le tems que sa pesanteur luy feroit parcourir EF; et que par conséquent cette force centrifuge en L seroit à sa pesanteur comme Bl est à EF. Ensuite supposant que Bl est $= \frac{LB \times LB}{BN} = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$, il trouve $Bl = EF$; ce qui luy fait dire que cette force centrifuge du corps L (résultante d'une vitesse égale à ce qu'il en acquieroit en tombant de la hauteur EL du demi-rayon du cercle qu'il décrit) est égale à sa pesanteur. Mais la supposition de $Bl = \frac{LB \times LB}{BN}$ est ici fausse.

Car si l'on fait lP paralelle à LR, on trouvera comme cy dessus (art. 11, 12, 13 et 14) $Pl = \frac{Ll \times Ll}{LR}$. Or à cause de $Bl . Pl :: BR . LR$ et que l'infinie petitesse de Bl par raport à BL, elle même infiniment petite (hyp.) par raport à LR, rend $BR = LR$; l'on aura aussi $Bl = Pl$. Donc on aura de même ici $Bl = \frac{Ll \times Ll}{LR}$ $= \frac{LB \times LB}{LR}$, et non pas $Bl = \frac{LB \times LB}{BN}$, comme le suppose M. Hugens.

XVI. La même chose se peut encore démontrer immédiatement et sans dépendance de la valeur de Pl. Car (touttes choses demeurant les mêmes que cy dessus) quelques soient les angles RLM et RlL faits par les rayons RL et Rl du cercle MLN avec les côtés infiniment petits ML et Ll de ce polygone infinitilatère, il est de l'uniformité de sa courboure, qu'ils soient égaux entr'-eux, et leurs complements aussi; par conséquent que les triangles BLR et BlL soient semblables. Donc $RB.LB::LB.lB$ $= \frac{LB \times LB}{RB} = \frac{LB \times LB}{LR}$. Ce qu'il faloit démontrer.

L'on aura aussi $RL.Ll::LB.lB = \frac{Ll \times LB}{RL}$, et $RB.RL::lB$ $\left(\frac{Ll \times LB}{RL}\right).LP = \frac{Ll \times LB}{RB}$ $\left(\text{à cause de } \frac{LB}{RB} = \frac{LP}{RL} = \frac{Ll}{RL}\right)$ $= \frac{Ll \times Ll}{RL}$. Ce qu'il faloit encore démontrer.

XVII. Non seulement voila en quoy M. Hugens s'est mépris, mais encore voici comment sa methode, elle même, conduit à la proposition que je soutiens. Soit donc encore le corps L tournant circulairement autour du centre R d'une vitesse telle qu'il l'auroit acquise en L en tombant d'une hauteur EL égale au quart du rayon RL de ce cercle; je dis que sa force centrifuge sera égale à celle de sa pesanteur en chaque point L.

Soit LQ la touchante que ce corps suivroit de cette vitesse, si on l'abandonnoit à luy même en L; soit aussi $LQ = 2EL = \frac{1}{2}RL$; soit encore LB infiniment petite, avec la secante BN par le centre R, laquelle rencontre le cercle en l et en N; soit enfin $EF.EL::$ $\overline{LB}^2.\overline{LQ}^2$.

Presentement de ce que $LQ = 2EL$, si le corps L apres être tombé de E en L, se meut uniformément le long de LQ avec la vitesse acquise en L en vertu de sa seule pesanteur; on scait qu'il doit parcourir LQ dans un tems égal à celuy qu'il a mis à tomber de E en L; et que ce tems sera à ce qu'il en mettra à parcourir LB de cette même vitesse uniforme, comme LQ est à LB. Ainsy en prenant LQ pour le tems que ce corps aura mis à parcourir cette même ligne LQ, ou à tomber de la hauteur EL égale (hyp.) au quart du rayon RL, l'on aura aussi LB pour ce qu'il en aura mis à parcourir cet infiniment petit LB. Par conséquent le tems de la chutte de ce corps de la hauteur EL en vertu de sa seule pesanteur, sera au tems qu'il doit employer à parcourir LB d'une vitesse uniforme égale à ce qu'il en auroit acquis à la fin de cette chutte en L, comme LQ est à LB. Mais à cause de (hyp.) $EL.EF::\overline{LQ}^2.\overline{LB}^2$, si l'on prend ainsy LQ pour le tems de cette chutte par EL, l'on aura aussi LB pour le tems de cette même chutte par EF. Donc EF et LB seront parcourues en tems égaux: scavoir EF par la chutte de E en F, et LB d'une vitesse uniforme acquise en L en vertu de cette chutte continuée jusqu'en L, et toûjours commencée en E. Or on scait que dans le tems que le corps L va ainsy de L en B, il auroit été de même de L en l avec la même vitesse uniforme; et par conséquent sa force centrifuge luy a fait faire lB dans ce même tems. Donc sa force centrifuge en L est telle quelle luy feroit faire lB dans le même tems que sa pesanteur luy feroit parcourir EF d'une chutte commencée en E.

Mais à cause de (art. 15 et 16) $Bl = \frac{BL \times BL}{LR}$, d'ou résulte $LR.BL :: BL.Bl$, l'on aura $\overline{LR}^2.\overline{BL}^2 :: LR.Bl$, ou (en divisant les antecédans par 4) $\frac{1}{4}\overline{LR}^2.\overline{BL}^2 :: \frac{1}{4}LR.BL$. Or (hyp.) $LQ = 2EL = \frac{1}{2}RL$, et par conséquent $\overline{LQ}^2 = \frac{1}{4}RL$, et $EL = \frac{1}{4}RL$, donc $\overline{LQ}^2 . \overline{BL}^2 :: EL.Bl$. Mais on avoit aussi (hyp.) $\overline{LQ}^2.\overline{BL}^2 :: EL.EF$. Donc EF et Bl sont égales entr'-elles. Par conséquent venant de trouver que la pesanteur du corps L luy feroit parcourir EF d'une chutte commencée en E, dans le même tems que sa force centrifuge, résultante de son tour noyment supposé, luy feroit parcourir lB; on voit aussi que cette forme centrifuge du corps L, résultante d'une vitesse circulaire égale à ce qu'il en acquieroit en tombant de la hauteur du quart du rayon du cercle qu'il décrit, seroit précisément égale à sa pesanteur. Ce qu'il faloit démontrer.

XVIII. Au contraire si l'on prend $LQ = 2EL = RL$, comme fait M. Hugens, tout le reste demeurant le même, on trouvera comme cy dessus (art. 17) $\overline{LR}^2.\overline{BL}^2 :: LR.Bl$. Ce qui se changera ici en $\overline{LQ}^2 . BL^2 :: 2EL.Bl :: EL.\frac{1}{2}Bl$. Mais par l'hypothese on avoit aussi (art. 17) $\overline{LQ}^2.\overline{BL}^2 :: EL.EF$. Donc ici l'on auroit $EF = \frac{1}{2}Bl$. Par conséquent, quoyque la pesanteur du corps L luy fasse parcourir EF d'une chutte commencée en E, dans le même tems que sa force centrifuge (résultante d'une vitesse circulaire égale à ce qu'il en acquieroit en tombant de la hauteur du demi-rayon du cercle qu'il décrit) luy feroit parcourir lB, il ne s'ensuit pas que ces deux forces doivent être égales, comme on l'a cru jusqu'ici. On voit au contraire que la force centrifuge seroit ici double de la pesanteur du corps en question.

XIX. Apres tant de preuves si claires et si faciles de la vérité du sentiment que je soutiens ici, et de la fausseté de celuy que je combats, il ne resteroit plus qu'à rasseurer ceux qui, jugeant des grandeurs infiniment petites LK, Pl et Bl, comme si elles étaient finies, pourroient apprehender de se trouver contraires à Euclide en ne croyant pas de celles-là ce qu'il a démontré de celles-ci. Il suit effectivement de ce qu'il a demontré du cercle (en ramassant dans la fig. 23 ceux des fig. 20, 21, 22 avec ce qu'on y suppose dans les art. 13, 14 et 16, y ajoutant seulement LT paralelle à MI, et qui rencontre PI et BI en V et en S) qu'on auroit PI = VI = LK, et BI = SI, si touttes ces lignes étoient finies; mais il ne s'ensuit pas de même qu'elles soient encore égales, lorsqu'elles sont infiniment petites, comme ici.

La raison de ce défaut de conséquence vient de ce que les differences PV et BS de ces infiniment petits, sont de même genre qu'eux et par conséquent comptables par raport à ceux; au lieu que si les quantités PI, VI ou LK, et BI, SI, étoient finies, l'angle QLT toûjours (constr.) infiniment petit, rendant aussi toûjours leurs différences PV et BS infiniment petites, et par conséquent nulles par raport à ces quantités finies, ces mêmes quantités seroient alors effectivement égales, ainsy qu'il suit de la doctrine d'Euclide sur laquelle les Autheurs précédens semblent s'être appuyés.

XX. On voit de là et de l'art. 10, qu'il s'en faut l'angle infiniment petit QLT que la tangente LQ (que doit suivre le corps mu circulairement suivant MLN, si on l'abandonnoit à luy même au point L) ne fasse un Angle absolument droit avec le rayon LR, comme le fait (hyp.) la droite LT avec ce-même rayon LR; et qu'ainsy si l'on prend cette droite LT pour la tangente d'Euclide, ce n'est point absolument suivant cette Tangente que ce corps doit s'échaper, mais seulement suivant le prolongement LQ du petit côté ML de ce polygone infiniti-latère: laquelle LQ ne faisant qu'un angle infiniment petit avec LT, peut cependant passer pour cette tangente LT tant qu'il ne s'agira que de grandeur finie. Et si l'on conçoit que cela dure jusqu'à ce que cette LQ soit enfin confondue avec LT, on pourra dire qu'alors le corps L s'échaperoit suivant LT; et les raports précédens subsistant jusqu'à cet instant de confusion, tout ce qu'on en a conclu cy dessus sera encore vray dans ce dernier instant.

Voila, Monsieur, ce que je vous demande en grace de vouloir bien examiner et m'en dire votre sentiment, n'osant préferer mes lumières (quelques claires qu'elles me paroissent) à celles d'aussi grands hommes que le sont la pluspart de ceux auxquels vous me voyez contraire. Je suis avec un profond respect etc.

P. S. Etant sur le point de cacheter cette lettre, il venu en pensée de vous envoyer aussi la Réponse qui a été faite par un nommé M. Saurin (homme d'esprit et de mérite) au Journal des Sçavans que je vous envoyay dans une lettre il y a environ deux ans, où M. Rolle attaquoit encore la Methode des infiniment petits sur les Tangentes. Là voici cette reponse que je joins à votre exemplaire des Mémoires de l'Académie, avec la Réplique que Mr. Rolle y a faite: Replique que vous trouverez asseurément pitoyable, tout il y fait paroitre d'ignorance en cette matière ou de mauvaise foy. J'y joins de plus un Ecrit qu'il vient de donner tout fraichement sur les tangentes inverses, où je trouve aussi une infinité de choses à reprendre, quoyque je ne l'aye encore lu qu'en courant: j'en aperçu la plus grande partie dés qu'il le lut à l'Academie; mais il diroit d e u x e t d e u x s o n t c i n q, que je ne m'aviserois pas de le reprendre, pour ne pas m'exposer davantage à sa langue qui est des plus mauvaises: je me contentay de le dire à M. de Fontenelle à qui je donnay la pluspart des integrales (trouvées sur champ) de ce que M. Rolle s'en propose à trouver dans cet écrit.

Quoyque sa méthode, ou plustot ses méthodes (si methode il y a) ne paroissent qu'autant de retours d'un homme qui retourne en bricolant au point d'où il est parti, je trouve qu'il s'est égaré en voulant retourner à la génératrice de la differentielle H de la pag. 8. Cette differentielle est $2ayxz - bbxz - 2ayyv + 2bbyv - ffxv = 0$, ou (en substituant dx et dy, au lieu de v et de z, ainsy qu'il le permet presentement) $2ayxdy - bbxdy - 2ayydx + 2bbydx - ffxdx = 0$: il donne l'égalité S de la pag. 9, scavoir $ahyy - bbhy - atxx + hffx = 0$ pour l'intégrale, ou (selon luy) pour la génératrice qui a donné cette differentielle; et moy, je trouve $ayy - bby - ffx = 0$ pour cette génératrice. Je le trouve en deux manières dont voici la plus courte que l'autre m'a donnée pour cette égalité ci. Il n'y a qu'à multiplier la précedente differentielle par $\frac{x}{x^4}$, et elle se changera en $\frac{2axxydy - 2ay^2xdx}{x^4}$ $- \frac{bbxxdy + 2bbyxdx}{x^4} - ffx^{-2}dx = 0$, dont l'intégrale est $\frac{ayy}{xx}$

$-\frac{bby}{xx}+ffx^{-1}=0$, ou (en multipliant le tout par xx) $ayy-bby+ffx=0$, ainsy que je le vient de dire.

Remarq. Si l'on differentie cette équation $ayy-bby+ffx=0$, elle donnera seulement $2aydy-bbdy+ffdx=0$; d'où l'on voit que la proposée H étoit déguisée: voici comment. Soit l'équation $ayy-bby+ffx=0$ divisée par xx, en ce cas l'on aura $\frac{ayy-bby+ffx}{xx}=0$, dont la differentielle est 0

$$=\frac{2axxydy-bbxxdy+ffxxdx-2ayyxdx+2bbyxdx-2ffxxdx}{x^4}$$

$$=\frac{2axydy-bbxdy-2ayydx+2bbydx-ffxdx}{x^3},$$

ou $2axydy-bbxdy-2ayydx+2bbydx-ffxdx=0$, qui est l'égalité H proposée, en restituant z et v au lieu de leurs valeurs dy et dx. D'où l'on voit encore que $ayy-bby+ffx=0$ est sa génératrice cherchée.

Il est vray que l'égalité S de la pag. 9 donnant $2ahydy-bbhdy-2atxdx+hffdx=0$, et $t=\frac{ahyy-bbhy+hffx}{axx}$, la substitution de cette valeur de t dans la précédente différentielle rendroit aussi l'égalité H. Mais il est à observer que de faire ainsy $t=\frac{ahyy-bbhy+hffx}{axx}$, c'est faire $t=0$; puisqu'on vient de voir $ayy-bby+ffx=0$. Par conséquent l'égalité S se changeant alors en celle-ci, ce ne seroit pas l'égalité S, mais $ayy-bby+ffx=0$ qui rendroit l'égalité H proposée; donc l'égalité S n'est pas la génératrice de l'égalité H.

IX.

Leibniz an Varignon.

Hanover ce 27 Juillet 1705.

J'ay receu enfin le Journal du 13me d'Avril de cette année, qu'un Suedois m'a apporté, et j'ay vû que je n'avois pas besoin d'autre instruction, ny de beaucoup de discussion, pour examiner ce qui est contesté entre M. Saurin et M. Rolle. C'est pourquoy, pour satisfaire à vostre desir, et au sien, quoyque d'ailleurs je n'aime pas les contestations, je vous envoye le papier cyjoint, esperant qu'il sera conforme à vostre intention. La mienne seroit que sans le publier on le communiquat à M. l'Abbé Bignon, et je luy écriray pour cet effect par la poste suivante, et vous adresseray la lettre sous cachet volant. Peutestre qu'elle le portera à terminer selon la justice une dispute scandaleuse du costé de celuy qui fait des objections les plus frivoles qui se puissent voir, en l'obligeant de reconnoistre qu'on a satisfait sur cet article. Je pense même à en écrire aussi à M. l'Abbé Gallois et à adresser la lettre pour luy à M. l'Abbé Bignon. Si cela ne servira de rien, il faut abandonner la pensée de faire rendre justice à M. Saurin et à nostre calcul par l'Academie, et nous tacherons de ramasser des jugemens des autres.

J'ecriray par la premiere au R. P. Lelong, ayant parlé à Mons. Mayer qui s'est chargé du supplement de son Catalogue Scripturaire par rapport à l'Allemagne.

J'ay reveu encor vostre demonstration sur la force centrifugue, et je crois que vous avés raison dans un point important qui est de prendre non pas LK dans vostre figure, mais son double Pl et de mener la droite MLP oblique au rayon, quoyque l'angle differe incomparablement du droit. Je vous expliqueray une autre fois quelle consequence considerable j'en tire. Cependant avec tout cela, apres avoir examiné la chose independamment de vostre demonstration par une voye assez simple, que je vous pourray communiquer quand il vous plaira, qu'il faut dire que la hauteur qui donne une force centrifuge égale à la pesanteur, est égale au demi-rayon de la circulation. Apres cela retournant à vostre demonstration, je ne puis trouver d'autre fondement de nostre difference que celuy que voicy. C'est que vous concevés Pl comme décrite d'un mouvement croissant continuellement, car vous dites, Monsieur, que Pl est à la ligne que cette force centrifuge considerée comme une pesanteur, feroit parcourir un mobile pendant le temps LQ, comme les quarrés des temps, c'est à dire comme LP qu. à LQ qu. Mais alors on ne doit point estimer la force centrifuge par cette ligne Pl, qu'elle fait parcourir, car cette force est icy..... commune celerité, mais les celerités ne sont point comme les hauteurs que les corps parcourent d'un mouvement uniformement acceleré. Mais en considerant Pl comme la mesure de la force, il faut concevoir que le mobile la parcourt uniformement et alors l'analogie des lignes comme des quarrés ne sauroit avoir lieu.

Puisque vous voulés, Monsieur, que je recoive de Hollande ce que vous me destinés de l'Histoire de l'Academie, vous aurés la bonté de marquer à qui je me dois adresser pour cet effect, ou si vous voulés que je marque une personne en Hollande à qui on la doive faire tenir. En tout cas on y pourroit mettre un couvert qui s'adressât à moy, et puis l'envelopper d'un autre couvert, qui porteroit:

A Monsieur

Monsieur Gargan, Secretaire de Madame l'Electrice de Bronsvic, et faire porter ce paquet à Mons. de Botmar, Envoyé extraordinaire de la Maison de Bronsvic qui se trouve à la Haye.

Voicy encor de quoy je prends la liberté de vous supplier. On m'a dit que Mons. de la Hire a fait un instrument pour trouver les Eclipses, qu'on peut avoir en carton et en laiton. Je le desirerois dans l'une et dans l'autre matiere; mais je voudrois savoir combien cela cousteroit. M. Tschirnhaus m'a écrit de l'avoir vû. Et apprenant par un des derniers Journaux de Hollande, que M. de la Hire a donné depuis peu un nouveau niveau, je vous supplie, Monsieur, de me dire entre nous, si vous jugés que ce niveau est meilleur que les autres, et particulierement que celuy de Chapotot, dont le R. P. Lelong m'a envoyé la description.

Je vous supplie aussi de me faire part de temps en temps des nouvelles de ce qui passe dans l'Academie. Le Suedois venu de Paris, m'a dit que M. de l'Isle y a esté receu, et qu'on luy a donné l'intendance des cartes geographiques, c'est de quoy je serois bien aise. Je l'avois fait exhorter autres fois de nous donner des Cartes suivant la Geographia Nubiensis qui est d'un auteur Arabe, mais traduite. Si vous en avés l'occasion, Monsieur, je vous supplie de le saluer de ma part, et de repeter ce conseil.

J'espere que M. des Billettes vivra encor; c'est une de mes plus anciennes connoissances. Travaillet-on encor à la description des arts mecaniques, où il s'employoit?

M. Tschirnhaus desire d'apprendre si M. Homberg a receu les lettres qu'il luy a écrites depuis son retour au sujet des verres brulans, n'ayant point receu de reponse.

J'ay vû dans le Journal de Hollande qu'un habile Chymiste de l'Academie a tiré de l'argille paitrie avec de l'huyle de Lin et misé dans la retorte une matiere que l'aimant attire comme du fer. Je ne say si celuy qui a fait cette experience, sait qu'elle a esté aussi faite et publiée autres fois par un chymiste Allemand, nommé Becherus, qui n'en estoit pourtant pas l'inventeur. Elle se trouve dans son Supplementum Physicae subterraneae, qu'il publia dans le temps que j'avois deja fait connoissance avec luy. Il y a bien long temps de cela, car ce fut avant que je vins en France. Mais il n'a pas pû m'asseurer, que cette matiere estoit veritablement du fer, et qu'il en avoit tiré, quoyqu'il sembloit le dire, soit qu'effectivement il n'y en eut point, ou que la quantité en estoit trop petite pour estre tirée de la terre, où elle estoit engagée. Maintenant quel experience a esté faite à l'Academie, j'espere qu'on l'aura poussée à bout, et qu'on saura, s'il y a veritablement du fer ou non. Car l'on sait d'ailleurs qu'encor les huiles et autres matieres ont quelque chose de magnetique. Je suis curieux de la production artificielle des metaux; comme aussi de la production artificielle des mercures tirés des metaux que M. Homberg nous promet, et qui par là tirera Mercurios corporum du nombre des non-Entia Chymica, où bien des gens les ont mis jusqu'icy. J'ay connu des chymistes habiles qui m'ont asseuré d'en avoir fait par hazard, mais de n'avoir pû les faire exprés. Mais il y pouvoit avoir de l'erreur dans l'experience, ou peutestre que leur drogues en contenoient, de sorte qu'il importe d'eclaircir le public là dessus. Et quand il n'y auroit aucune des utilités que les Chymistes se promettent de ces mercures et particulierement de celuy de l'antimoine, ces experiences ne laisseroient pas d'estre luciferae, quand elles ne seroient point luciferae. Mais je ne scay comment je me suis enfoncé icy dans la Chymie, où je me plaisois assez dans ma jeunesse. J'espere que M. Homberg nous en dônnera quelque systeme provisionnel. Madame, Epouse du Frere du Roy, avoit mandé à Madame l'Electrice de Bronsvic, sa Tante, que M. le Duc d'Orleans, son fils, se plaisoit fort aux experiences de M. Homberg. Une telle assistance peut contribuer beaucoup aux avancemens des sciences. Ayant lû dans le Journal de Hollande que M. Homberg a preferé la place qu'il a dans l'Academie, à celle du Medecin de ce grand Prince, j'espere qu'il l'aura fait avec son approbation, car autrement M. l'Abbé Bignon n'en auroit point parlé publiquement.

M. Butterfield qui a fait beaucoup d'experiences sur l'aimant, en at-il publié quelque chose?

On a publié depuis long temps chez Cusson, et puis chez quelques autres imprimeurs ou libraires, quantité de petits traités qui avoient du rapport aux sciences physiques et Mathematiques. J'en ay peu, et je voudrois en avoir beaucoup. Si un ami en pouvoit faire un recueil pour moy, je mettrois ordre au payement, et je luy en aurois bien de l'obligation. J'ay oublié dire que j'ay appris autres fois que M. de l'Isle a fait des remarques sur la Notitia familiarum Galliae de M. Imhof; il seroit bon qu'il les donnat ou du moins qu'il les envoyat en Allemagne. etc.

X.

Varignon an Leibniz.

A Paris ce 9. Octob. 1705.

Votre lettre du 26. Juillet dernier me fut rendue sur la fin du même mois. Je fus aussi tost porter à M. l'Abbé Bignon celle que vous m'adressiez pour lui, avec celle que son paquet contenoit aussi pour M. l'Abbé Galloys. M. l'Abbé Bignon lut la sienne sur le champ, et il me dist qu'il ne manqueroit pas de vous faire réponse, et qu'en attendant j'eusse à vous asseurer qu'il avait desja donné des ordres pour terminer la dispute d'entre M. Saurin et M. Rolle; que pour Juges avec luy, il avait nommé M. Cassini, M. de la Hire, M. l'Abbé Galloys et M. de Fontenelle, qui est le seul de ceux qui sont pour les infiniment petits, qui n'ait pas été récusé. Pour nous, nous n'avons récusé personne, non pas même M. l'Abbé Galloys, tout ennemi déclaré qu'il est de ce calcul, ny M. de la Hire, quelque livré qu'il soit à M. l'Abbé Galloys: M. Saurin a seulement demandé que le jugement de chacun de ces Mrs. fust rendu public, pour retenir les ennemis du calcul par la crainte d'exposer leur réputation. Apres plusieurs seances ils ont enfin donné chacun leur jugement par ecrit à M. l'Abbé Bignon, sur la solution que M. Saurin a donnée de l'exemple A qui fait le sujet du Journal du 13. Avril dernier: nous ne scavons encore quand M. l'Abbé Bignon declarera ces jugemens; dês que je les scauray, je vous en feray part.

Pour vôtre lettre à M. l'Abbé Galloys, elle a pensé tout gâter: on a répandu par le monde que vous y conveniez vous même que vôtre calcul n'était pas démontré. C'est ainsy qu'on a abusé du souhait que vous sembliez faire qu'il le fust à la maniere des Anciens, et qu'on a supprimé ce que vous disiez sur la fin pour le démontrer d'une maniere que vous disiez équivalente à celle-là. Dês que je vis cette lettre, je previs l'abus qu'on en pouvait faire; mais je n'osay la supprimer.

Voici aussi un Ecrit que m'a donné pour vous M. Geofroy (un de nos chimistes associés) par raport à ce que vous m'avez écrit sur la composition du fer avec l'huile de lin et l'argille.

M. Homberg n'a encore rien donné sur la maniere de tirer le mercure des metaux.

M. Buterfield n'a rien donné non plus de ses expériences sur l'aimant, qui sont en grand nombre, et dont plusieurs sont tres curieuses.

Le niveau de M. de la Hire n'est point encore public: il m'a paru par la description qu'il en a lue à l'Academie, que ce n'était que le niveau ordinaire renversé: au lieu qu'on suspend l'autre, il met le sien en équilibre sur un pivot où il l'arrête en suite.

Je ne scais rien de nouveau sur la Physique et les Mathématiques hors nos Memoires et les Journaux. Venons presentement à la difficulté que vous me faites l'honneur de me faire sur ma comparaison des forces centrales avec la pesanteur.

I. J'augure bien, Monsieur, de ce que vous aprouvez la manière dont je trouve Pl double de LK dans les art. 13 et 14 (fig. 20. 21) de ma lettre du 6. Decemb. 1704. Et par conséquent aussi $Bl = \frac{Ll \times Ll}{LR}$ dans l'art. 15 de la même lettre (je l'appelleray dans la suite lettre premiere). Cela seul substitué dans les raisonnemens que M. Newton Phil. nat. princ. Math. Schol. prop. 4. pag. 42, M. le Marquis de Hôpital Mem. de l'Acad. de 1700 pag. 11, et M. Hugens Opusc. de vi centrifuga prop. 5. pag. 413 font pour prouver que la hauteur d'où un corps tombant acquieroit une vitesse qui continuée en cercle, luy donneroit une force centrifuge égale à la pesanteur, doit être égale

au demi-rayon de la circulation, prouve au contraire que cette hauteur ne doit être que le quart de ce rayon, M. Newton et M. le Marquis de l'Hôpital supposant (fig. 20. 21) Pl = LK, et M. Hugens (fig. 22) supposant de même $Bl = \frac{LB \times LB}{BN} = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$.
Aussi avez vous vu dans l'art. 17 de ma let. 1, que le raisonnement luy même de M. Hugens donne ce que je prétend, sans y faire d'autre changement que d'y substituer $Bl = \frac{BL \times BL}{\frac{1}{2}BN} = \frac{Ll \times Ll}{LR}$ au lieu de $Bl = \frac{BL \times BL}{BN} = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$. D'où vous voyez qu'en m'accordant (comme vous faites) que j'ay eu raison de prendre Pl double de LK, c'est m'accorder ce que je prétend contre ces Auteurs, supposé la validité de leurs raisonnemens dans le reste.

II. Mais parcequ'ils considerent ainsy que moi, la force centrifuge comme une espece de pesanteur ou de force constante, qui continuellement appliquée feroit parcourir des espaces comme les quarrés des tems, il est de leur justification comme de la mienne de satisfaire à la difficulté que vous me faites l'honneur de me faire sur cela.

III. Vous dites que je concois Pl comme décrite d'un mouvement croissant continuellement. Cela est vray, et c'est une suite de l'uniformité de la force centrifuge qui toujours appliquée au corps qu'elle tire de cette quantité, la luy doit faire ainsy parcourir pendant l'instant qu'elle lui fait décrire l'arc Ll au lieu de la portion LP de la tangente LQ qu'il décriroit sans cette force. Ainsy la conséquence que vous dites que je tire, est juste: scavoir que Pl est à la ligne que cette force centrifuge, considérée comme une pesanteur, feroit parcourir au mobile pendant le tems LQ, comme les quarrés des tems, c'est à dire, comme $\overline{LP}^2$ est à $\overline{LQ}^2$. C'est aussi pour le prouver que M. Newton (Schol. prop. 4 pag. 42) dit que Corpus omne vi eadem in eandem plagam continuata, describit spatia in duplicata ratione temporum.

IV. Mais alors, dites vous, on ne doit point estimer la force centrifuge par cette ligne Pl, qu'elle fait parcourir. Cela est vray, excepté dans le cas des Pl décrites en tems égaux: il est, dis je, vray que Pl seule, ny comparée à d'autres décrites dans des tems differens, ne prouve rien pour la quantité de la force centrifuge; differentes forces centrifuges pouvant faire décrire les mêmes Pl en des tems différens. Mais il n'en va pas de même des Pl contemporaines ou simultanées, c'est à dire, décrites par un même corps dans des instans égaux: car ces petites lignes étant comme les sommes de vitesses avec lesquelles elles ont été parcourues; et ces sommes de vitesses, faites de part et d'autre d'un égal nombre d'accroissemens égaux (de chaque part) au premier par lequel chaque force centrifuge a commencé, étant aussi entr'-elles comme les vitesses initiales contemporaines ou simultanées, lesquelles dans un même corps sont pareillement comme les forces qui les produisent, les effets étant toûjours comme leurs causes; c'est une suite nécessaire que les Pl contemporaines soient aussi toûjours entr'-elles comme les forces centrifuges qui les font parcourir à un même corps ou à des corps égaux dans des instans égaux.

V. C'est sur ce principe que M. Hugens, M. Newton et M. le Marquis de l'Hôpital ont bati tout ce qu'ils ont dit des forces centrifuges, et prenant par tout la force centrifuge du mobile à sa pesanteur, en raison de Pl à ce que cette pesanteur feroit parcourir d'espace à ce corps dans un premier instant (de la chutte) égal à celui que la force centrifuge a employé à luy faire parcourir Pl. Mais comme ils ont pris juste cette premiére portion de hauteur, contemporaine à Pl, et qu'ils ont pris au contraire Pl trop petite de la moytié; il suit necessairement que la force centrifuge qu'ils ont trouvée, n'est que la moytié de la véritable qui est effectivement à la pesanteur du mobile, comme Pl est à cette premièrе portion de hauteur. Aussi au lieu de conclure $f = \frac{4ph}{r}$ comme j'ay fait dans les art. 7 et 8 de ma let. 1. et comme on le va voir encore démontré d'une autre manière dans l'art. 8 de cette lettre-ci, en appelant f cette force centrifuge, p la pesanteur du mobile en question, r le rayon de la circulation, et h la hauteur d'où la vitesse de la circulation s'acquieroit en vertu de la seule pesanteur; ils ont seulement conclu $f = \frac{2ph}{r}$, ou son équivalent. De sorte que dans le cas de $f = p$, ils ont seulement trouvé cette hauteur $h = \frac{r}{2}$, au lieu de $h = \frac{r}{4}$ qu'ils devoient trouver en prenant (comme j'ay fait dans les fig. 20. 21 de ma let. 1.) $Pl = 2LK$ et non pas $Pl = LK$, ainsy qu'ils ont fait. C'est là l'unique source de leur méprise; car ils ont raisonné juste dans tout le reste.

VI. Le raisonnement par lequel je viens de prouver (art. 4) sur les fig. 18. 19 de ma let. 1. que les forces centrifuges vers C sont comme les Pl qu'elles font parcourir à un même corps ou à des corps égaux dans des instans égaux, prouvant également pour touttes les forces constantes, telles qu'est la pesanteur dans l'hypothese de Galilée, et pour tous les espaces qu'elles font parcourir à des corps égaux dans des tems égaux quelconques; c'est aussi sur ce principe qu'apres avoir trouvé (art. 3 et 4 de ma let. 1.) HL et $\frac{\overline{LQ}^2 \times Pl}{\overline{LP}^2}$ pour les espaces que la pesanteur (p) et la force centrifuge (f) du mobile en question, luy feroient parcourir dans les tems égaux à LQ ou à 2 HL, j'ay conclu (let. 1. art. 5) que $f.p :: \frac{\overline{LQ}^2 \times Pl}{\overline{LP}^2} . HL$ (à cause de $LQ = 2HL$ et de $LP = Ll$) $:: \frac{4\overline{HL}^2 \times Pl}{\overline{Ll}^2} . HL$. Ce qui m'a donné $f = \frac{4p \times HL \times Pl}{Ll \times Ll}$ (en prenant h pour HL) $= \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$ pour la Regle générale de comparaison entre les forces centrales et les pesanteurs des corps.

VII. Voici encore la même chose d'une autre maniere, en ne comparant entr'-eux que des espaces infiniment petits parcourus par un même corps ou par des corps égaux dans des instans égaux. Pour cela, touttes choses demeurant les mémes que dans ma let. 1. art. 2 et 3, si l'on prend (fig. 24) $H\lambda$ pour ce que le corps tombant de H, parcôuroit de la hauteur HL en vertu de sa seule pesanteur dans l'instant que sa force centrale lui fait faire Pl parallele à sa direction LC, et infiniment prés d'elle; il est manifeste que cette force centrale (f) se trouvera pour lors être à la pesanteur (p) de ce corps $:: Pl . H\lambda$, soit qu'on prenne ces longueurs Pl, $H\lambda$, comme parcourues chacune d'un mouvement uniforme, ou (art. 4) d'un mouvement uniformément accéléré: il suffit qu'elles le soient touttes deux de l'une ou de l'autre de ces deux manières dans instans égaux. Mais ce tems par Pl, ou par $H\lambda$, étant (let. 1. art. 3) à celui de la chutte de H en L $::$ LP (Ll). LQ (2HL), l'on aura de plus $H\lambda : HL :: Ll \times Ll . 4HL \times HL$, ou $H\lambda$

$= \frac{Ll \times Ll}{4HL}$. Donc on aura aussi pour lors $f.p::Pl.\frac{Ll \times Ll}{4HL}$, ce qui donne encore $f = \frac{4p \times HL \times Pl}{Ll \times Ll} = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$, comme dans le précendent art. 6.

VIII. Si l'on conçoit presentement que LC, lC soient deux rayons de la developpée de la courbe MLN, par exemple, que cette courbe soit un cercle dont C soit le centre; en ce cas Pl se trouvant $= \frac{Ll \times Ll}{LC}$, l'on aura de même $f = \frac{4ph}{LC}$ (en prenant r pour LC) $= \frac{4ph}{r}$, comme vous l'avez desja vu dans ma let. 1. art. 7 et 8, supposés ci dessus art. 5. Ce qui dans le cas de $f = p$, donne encore $h = \frac{r}{4}$, et non pas $h = \frac{r}{2}$: c'est à dire le quart du rayon du cercle de revolution, et non pas la moytié de ce rayon, pour la hauteur d'où le mobile tombant, acquieroit en vertu de sa seule pesanteur une vitesse égale à celle dont il parcourt le même cercle. D'où vous voyez encore l'erreur de ceux, qui ont cru que cette hauteur devoit être égale au demi-rayon de ce cercle.

IX. Vous dites cependant qu'apres avoir examiné la chose indépendemment de ma démonstration, vous avez trouvé par une voye assez simple (que vous voulez bien me communiquer) qu'il faut dire que la hauteur qui donne une force centrifuge égale à la pesanteur, est égale au demi-rayon de la circulation.

Je vous prie, Monsieur, de m'indiquer cette voye, vous promettant de l'examiner avec toutte la docilité d'un homme qui ne cherche que la vérité. C'est ainsy que j'en ay desja examiné une aussi tres simple par laquelle M. Bernoulli de Groningue a pretendu me prouver la même chose que vous: voici son objection avec ma réponse qui peut-être vous satisfera par avance.

Objection de M. Bernoulli.

Un corps pesant agité sur la circonférence d'un cercle horizontal d'une vitesse égale à celle qu'il acquieroit en tombant de la hauteur du demi-rayon de ce cercle a partout une force centrifuge égale à la pesanteur.

„Demonst. Soit (fig. 25) LMN une parabole que décrit le „corps pesant L jetté librement en l'air suivant la direction hori-

„zontale LQ avec une vitesse égale à celle qu'il acquieroit en tom-„bant de la hauteur de HL. Soit aussi RC la développée de la „parabole MLN, MC une corde appliquée sur la développée qui par „son développement décrit la parabole LMN. Il est d'abord mani-„feste que si nous concevons le corps pesant attaché au bout de „cette corde pendant qu'il décrit en l'air la parabole: il est, dis-je, „manifeste que cette corde ne doit point être tendue par le corps „pesant; puisqu'il la décrit, comme je suppose, sans être attaché à „cette corde. Il faut donc que la force centrifuge que le corps „aquiert en quelque point M que ce soit, et avec laquelle il tendrait „la corde MC, si elle était seule, soit aneantie par la pesanteur, „ou plus tost par une partie de la pesanteur; parceque sa direc-„tion étant toûjours verticale suivant MO, si on la divise (tirant la „perpendiculaire OS sur MC) en deux forces latérales OS, MS, ce „n'est que celle suivant MS, qui est directement opposée à la force „centrifuge; en sorte que cette force au point M sera égale (ayant „nommé p la pesanteur absolue du corps pesant) à $\frac{p \times MS}{MO}$: d'où „il suit qu'au sommet L la force centrifuge sera égale à la pe-„santeur absolue entière. Or au sommet L le rayon de la déve-„loppée LR est = au $\frac{1}{2}$ parametre: et partant si du centre R on „décrit le cercle PLT, qui sera osculateur de la parabole, sur lequel „on fait mouvoir un autre corps pesant d'une vitesse uniforme et „égale à celle que le premier corps a au sommet de la parabole, „il est clair que ces deux corps partant ensemble du point L, iront „au premier instant de compagnie et sur des courbures égales, car „le cercle PLT baise la parabole au point L, et par conséquent „ils auront au point L des forces centrifuges égales, c'est à dire, „chacune égale à la pesanteur absolue, comme je l'ay desja dé-„monstré du premier corps. Il ne reste donc plus rien si non que „je fasse voir que HL = $\frac{1}{2}$LR; ce que je prouve ainsy. Soit „LQ double de HL, et soit menée QM parallele à l'axe LR. Puisque „donc le corps pesant est porté suivant l'horizontale LQ d'une „vitesse uniforme et égale (par l'hyp.) à celle qu'il acquieroit en „tombant de H en L, il faut par la loy de l'accéleration que le „tems par HL soit égal au tems par LQ. Or dans le tems que le „mobile parcourt en vertu du mouvement horizontal uniforme la „ligne LQ, il parcourt aussi en vertu du mouvement vertical ac-„céléré la ligne QM ou LK. Il faut donc que HL et LK soient

„égales, parcequ'elles sont parcourues en tems égaux d'un mou-„vement également accéléré; et partant aussi $LQ = 2LK$. Or par „la nature de la parabole, LQ ou $KM = \sqrt{\text{param.} \times LK}$. Donc „$\sqrt{\text{param.} \times LK} = 2LK$ ou $\text{param.} \times LK = 4LK \times LK$; et par con-„séquent LK ou $HL = \frac{1}{4}$ param. $= \frac{1}{2}LR$. Ce qu'il falait démontrer.

Jusque là ce sont les propres termes de M. Bernoulli: voici aussi les propres termes de la Réponse que je luy ay faite.

Réponse.

„Prenez y garde, Monsieur, vous voulez, sur la supposition „que je viens de démonstrer fausse: scavoir qu'au sommet L de „vôtre parabole LMN décrite par le concourt de la pesanteur du „corps L et d'une force qui le pousseroit suivant l'horizontale LQ „d'une vitesse égale à ce qu'il en acquieroit en L en tombant de „la hauteur HL du quart du parametre de cette parabole, seroit la „même en L ou en l infiniment prés de L, que s'il decrivoit le „cercle osculateur PLT d'une vitesse égale à l'acquise de H en L. „Je demeure d'accord qu'en L ou en l la force centrifuge de ce „corps décrivant la parabole, seroit égale à sa pesanteur; mais je „prétend que s'il décrit le cercle osculateur suivant PLT de la „vitesse que nous supposons, sa force centrifuge en L ou en l et „ailleurs sera double de celle-là. Pour le voir, imaginons le côté „infiniment petit AL de ce polygone circulaire, prolongé vers BQ. „On demonstrera comme cydessus (c'est à dire, comme dans „l'art. 10 de ma lettre du 6. Decemb. 1704) que le prolonge-„ment ne s'en doit point faire suivant LQ, mais suivant une autre „droite LB, en sorte que faisant LV parallele à LR, et qui ren-„contre LQ, LB en X, V, l'on aura lV double lX pour l'espace „que la force centrifuge résultante de la rotation circulaire du „corps L, luy feroit décrire dans le tems que libre en L il par-„courait LV, ou qu'il parcourt effectivement Ll. Or pour décrire „la parabole LMN par le concourt des mouvemens supposés, sa „pesanteur ne luy doit faire parcourir que Xl dans ce même tems. „Donc sa force centrifuge résultante de sa rotation circulaire sup-„posée, doit être double de sa pesanteur, et non pas égale comme „vous l'avez supposé. Vous voyez bien que de là je pourois encore „démontrer la proposition que vous contestez.

X. Telle est ma réponse à la précedente objection de M. Bernoulli que vous voyez manquer comme les autres, en ce qu'il prend LQ perpendiculaire au rayon LR du cercle PLT, au lieu de son élément AL prolongé vers LB, pour la ligne que suivroit le corps qui le décrit, abandonné à lui même en L. Quant à la conséquence considérable que vous dites avoir tirée de cette pensée de prendre ainsy la droite ALB (ou MLP dans les fig. de ma let. 1.) par laquelle le mobile tend à aller, non pas perpendiculaire au rayon, mais oblique, quoyque la différence de l'angle droit soit infinitesimale, j'accepte avec reconnaissance l'offre que vous avez bien voulu m'en faire. Je vous prie donc de vouloir bien en joindre l'explication au jugement que j'attend de vous sur tout ceci.

Le P. Malbranche, le P. Lelong, M. de Fontenelle et M. des Billetes m'ont fort chargé de vous bien faire leurs complimens, et M. Saurin aussi qui vous remercie avec moy de l'attestation que vous luy avez envoyée. M. de Fontenelle me réitera encore, il n'y a que peu de jours, de vous bien faire ses complimens. Il y a environ 3 semaines que M. Bernoulli de Groningue arriva à Basle avec toutte sa famille en bonne santé Dieu merci: je suis dans une tres grande affliction de la perte que nous venons de faire de M. son frère. Je vous prie de me faire scavoir le geometre que vous aurez honoré de sa place dans vôtre Academie de Berlin: nous ne luy choisirons de successeur dans la nôtre qu'au retour des vacances, vers la fin de Novembre; je ne manqueray pas de vous le faire scavoir aussi. Je suis avec bien respect etc.

XI.

Varignon an Leibniz.

I. Peu de jours apres ma lettre du 9. Octob. dernier, la question des pesanteurs des corps comparées à leurs forces centrales sur touttes sortes de Courbes décrites par ces corps avec telle varieté ou variation de vitesses que ce soit, me repassa par la teste en me promenant; et il me vint aussi tost en pensée qu'en regardant (ainsy que j'ay fait art. 4 de ma lettre du 6. Decemb. 1704) l'élément Ll (fig. 26) de la courbe MLN, comme décrit par le concours de deux mouvemens, l'un uniforme suivant LQ, et l'autre uniformément accéléré suivant Pl, cet élément Ll doit être ici regardé comme courbe, et comme un véritable arc, le long duquel la courbe MLN est baisée par son cercle osculateur en cet endroit; par conséquent aussi comme un véritable arc de cercle, et non comme un côté droit de polygone, ainsy que je le regardois, et qu'on l'a regardé jusqu'ici pour trouver la longueur du rayon de ce cercle osculateur. Ce qui m'empêche pour tant pas que la Regle générale $f = \frac{4p. \times HL \times Pl}{Ll \times Ll} = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$ de l'art. 5 de ma lettre du 6. December. 1704 ne soit excélente: le defaut des conséquences n'étant que dans l'application que j'y ay faite du rayon osculateur en prenant à l'ordinaire la courbe MLN comme un véritable Polygone à côtés droits, quoyqu'infiniment petits, au lieu qu'il en faut ici regarder chaque élément Ll comme un véritable arc de son cercle osculateur en cet endroit, ainsy que l'exigent les deux mouvemens du concours desquels il est parcouru.

II. En effet en prenant ainsy Ll pour un véritable arc du cercle qui baise la courbe MLN en cet endroit, R pour le centre de ce cercle osculateur, RL pour un de ses rayons perpendiculaire à sa touchante en L et Rl pour un autre rayon infiniment prés de celui-là, et qui prolongé rencontre en E cette même touchante LQ, la prop. 36 du Liv. 3. d'Euclide donnera $LE \times LE = El \times \overline{ER + lR} = 2LR \times El$, ou $El = \frac{LE \times LE}{2LR} = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$.

Or en faisant lF perpendiculairé en F sur la tangente LQ, et LD perpendiculaire en D sur l'ordonnée Cl, laquelle prolongée rencontre en B cette même tangente LQ, les triangles rectilignes semblables EFl, ELR, et BPl, BLC donneront El.Fl::ER.LR, et Bl.Pl::BC.LC, et par conséquent aussi El = Fl et Bl = Pl, à cause que l'arc infiniment petit Ll rend ER = LR, et BC = LC. De plus les triangles rectilignes semblables BFl, BDL donneront pareillement LB ou Ll.LD::Bl ou Pl.Fl ou $El = \frac{LD \times Pl}{Ll}$

Donc ayant desja $El = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$, l'on aura pareillement $\frac{LD \times Pl}{Ll} = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$, ou $Pl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{2LR \times LD}$. Donc enfin en substituant cette valeur de Pl dans la formule générale $f = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$, de sorte que si presentement on appelle LR, r; Ll, ds et DL, dx, l'on aura de même en général $f = \frac{2phds}{rdx}$ pour la Regle de comparaison de touttes sortes de forces centrales avec les pesanteurs des corps.

III. Corol. On voit de là que lorsque C est en R, comme lorsque la courbe MLN est un cercle dont le centre R est aussi celui des forces centrales cherchées, alors LD (dx) devenant égal a Ll (ds), l'on aura $f = \frac{2ph}{r}$, ou $f.p::h.\frac{r}{2}$, et par conséquent $h = \frac{r}{2}$, lorsque $f = p$, conformément à ce que vous prétendez avec M. Hugens et les autres.

IV. Remarq. Il est à remarquer que la manière dont je viens de trouver la valeur de Pl sans considérer les courbes comme des Polygones, m'a aussi donné des formules ou valeurs des rayons osculateurs, lesquelles sont aussi générales que celles que j'ay tirées de cette consideration dans les Mem. de 1701 pag. 20 etc.

Autre solution.

V. Touttes choses demeurant les mêmes que cy dessus, soit seulement de plus DV perpendiculaire en V sur la tangente LQ. Cela posé avec $Fl = El = \frac{Ll \times Ll}{2LR} = \frac{ds^2}{2r}$, trouvée cy dessus art. 2, les triangles réctilignes semblables BDL, BVD donneront BL ou lL (ds). DL (dx) :: BD . VD :: f (force suivant lC ou LC). $\frac{fdx}{ds}$ (force suivant VD). Or à cause de VD et Fl touttes deux (hyp.) perpendiculaires sur LQ, l'espace Fl $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$ est ce qu'il y en a de parcouru en vertu de cette force $\left(\frac{fdx}{ds}\right)$ pendant l'instant dt que le corps L décrit l'arc élémentaire Ll au lieu de suivre la tangente LQ, comme il auroit fait sans cette force ou sans f. Donc cette force instantanée $\left(\frac{fdx}{ds}\right)$ lui ayant été continuellement appliquée pendant ce tems dt, et d'ailleurs étant constant que des espaces ainsi parcourus en vertu des forces toûjours les mêmes et toûjours appliquées (ainsy qu'on le pense ordinairement de la pesanteur) sont comme les produits de ces forces par les quarrés des tems de leur application non interrompue, l'on aura desja $\frac{ds^2}{2r} = \frac{fdx}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$ pour une Regle générale du raport des forces centrales entr'-elles, tendantes vers C, ou directement à contre sens, quelques variées qu'elles soient sur une même courbe quelconque MLN, à raison de la varieté des vitesses avec lesquelles cette courbe peut être décrite par un même corps aussi quelconque.

VI. Autrement. Soient de plus les ordonnées CL, Cl etc. appelées y, et par conséquent $Dl = dy$. Les triangles rectilignes semblables BDL, BFl, BVD donneront ici LD (dx). BD ou lD (dy) :: lF $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$. BF $= \frac{dyds^2}{2rdx}$, et BL ou lL (ds). BD ou lD (dy) :: BD . BV :: f (force suivant lC ou LC). $\frac{fdy}{ds}$ (force suivant BV ou BF). Donc on aura encore (comme cydessus art. 5) $\frac{dyds^2}{2rdx} = \frac{fdy}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, c'est à dire, encore la même Regle que dans le précedent art. 5.

VII. Autrement encore. Les triangles rectilignes semblables BDL, BFl donneront aussi DL (dx). BL ou lL (ds) :: Fl $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$. Bl $= \frac{ds^3}{2rdx}$. Donc on aura encore (comme cy dessus art. 5.) $\frac{ds^3}{2rdx} = fdt^2$; ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, c'est à dire, encore la même Regle que dans les deux derniers art. 5 et 6.

VIII. Concevons presentement, comme dans la première solution, que HL est une hauteur d'où le corps tombant, il acquieroit en L une vitesse égale à ce que sa rotation suivant MLN lui en donne en L suivant LQ. Cela étant, si l'on suppose aussi LQ double de HL, non seulement cette vitesse uniforme pouroit porter ce corps de L en Q, dans le tems qu'il auroit mis à tomber de H en L en vertu de sa seule pesanteur, mais encore ce tems seroit à ce qu'il en auroit mis à parcourir LF ou LB de cette même vitesse uniforme, c'est à dire, à ce qu'il en met à parcourir effectivement Ll, comme LQ est à LF ou LB ou Ll: de sorte qu'en prenant LQ pour le tems que le corps L mettroit à tomber de H en L, l'on aura aussi Ll pour l'instant qu'il employe à parcourir cet élément de la courbe MLN qu'on le suppose décrire. Donc si l'on prend cet instant pour le premier de sa chutte, pendant lequel il parcoure $H\lambda$, l'on aura $\overline{LQ}^2 . \overline{Ll}^2 :: HL . H\lambda = \frac{HL \times \overline{Ll}^2}{\overline{LQ}^2}$ (à cause qu'on suppose ici $Ll = ds$, et $LQ = 2HL = 2h$) $= \frac{ds^2}{4h}$.

Mais cet instant que le corps L employe à parcourir Ll est aussi celui que ses forces (art. 5, 6, 7) $\frac{fdx}{ds}$, $\frac{fdy}{ds}$, f employent à lui faire parcourir Fl, BF, Bl d'un mouvement accéléré à la maniere de celui que sa pesanteur lui donneroit de H en λ pendant ce même instant. Donc sa pesanteur (appelée p) est à chacune de ces forces, comme $H\lambda \left(\frac{ds^2}{4h}\right)$ est à chacune des longueurs $Fl \left(\frac{ds^2}{2r}\right)$, $BF \left(\frac{dyds^2}{2rdx}\right)$, $Bl \left(\frac{ds^3}{2rdx}\right)$, qui leur repondent, c'est à dire

1. $p . \frac{fdx}{ds} :: H\lambda \left(\frac{ds^2}{4h}\right) . Fl \left(\frac{ds^2}{2r}\right)$

2. $p . \frac{fdy}{ds} :: H\lambda \left(\frac{ds^2}{4h}\right) . BF \left(\frac{dyds^2}{2rdx}\right)$.

3. $p . \; f \; :: H\lambda \left(\frac{ds^2}{4h}\right) . Bl \left(\frac{ds^3}{2rdx}\right)$.

Et chacune de ces Analogies donne $f = \frac{2hpds}{rdx}$, qui est la même Regle de comparaison des forces centrales des corps avec leurs pesanteurs, trouvée cy dessus art. 2. Ce qu'il falait encore trouver.

IX. Remarq. On voit dans cette seconde solution, non seulement (art. 8) le raport de la pesanteur d'un corps quelconque aux forces centrales qu'il auroit sur une courbe aussi quelconque qu'il décriroit de telle vitesse qu'on voudroit, uniforme ou variée à discretion, en tendant toûjours vers un même point (quelqu'il fust) du plan de cette courbe; mais encore (art. 5, 6, 7) le raport de ces mêmes forces entr'-elles, lequel s'exprimant ici par $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, marque que ces forces centrales (f) doivent toûjours être entr'-elles comme les fractions correspondantes $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$; ce qui s'accorde avec le Regle $f = \frac{ds^3}{rdxdt^2}$, que j'ay desja donnée de ce dernier raport dans les Mem. de l'Academie de 1701, le signe de l'égalité dans les choses disparates et heterogenes (telles que sont ces forces et les grandeurs qui les expriment) ne signifiant que des égalités de raports.

Au reste, quoyque la courbe MLN ne doive point être ici regardée comme un polygone, à cause que ses élémens Ll n'y sont point regardés comme des lignes droites décrites par le concours de deux mouvemens uniformes, ou du moins semblables, cela n'empêche pourtant pas qu'en les regardant ainsy décrits, comme on le peut toûjours en réduisant les mouvemens variés à d'uniformes, la forme de polygone qui en résulteroit alors à cette courbe, ne donne toûjours Pl double de LK dans fig. 20. 21. 23 de ma lettre du 6. Decemb. 1704, ny par conséquent que ce que vous avez trouvé en conséquence de cette hypothese ne subsiste toûjours: vous m'avez promis de m'en faire part, je vous la demande en grace. En attendant, voici encore une troisième solution que j'ay tirée de cette reduction des mouvemens variés en d'uniformes.

Troisième solution.

X. Jusqu'ici nous avons regardé la force centrale du corps L (fig. 27) en chaque point L de la courbe MLN qu'on le suppose décrire, comme une espece de pesanteur ou de force constante tendante suivant LC, laquelle agissant incessamment sur ce corps, lui feroit parcourir d'un mouvement uniformément accéléré, le côté LK du parallelogramme PK, ou son opposé Pl, pendant l'instant que libre en L, sa vitesse de rotation en ce point L suivant LQ luy feroit parcourir d'un mouvement uniforme la partie infiniment petite LP de cette tangente LQ; et le mouvement résultant de ces deux-là suivant l'élément Ll, devant se faire en ligne de courbe, nous avons été obligés de regarder cet élément et les autres dc la courbe MLN, comme véritablement courbes en ces endroits, et la tangente lLQ au seul point L, comme celle suivant laquelle la vitesse de rotation du corps en L tend à l'emporter.

Mais si l'on veut regarder cette courbe MLN comme un Polygone infiniti-latère dont les élémens ML, Ll etc. soient autant de petits côtés droits les plus petits qui se puissent supposer; en ce cas le petit côté ML prolongé vers T, devenant la tangente suivant laquelle la vitesse de rotation en L du corps décrivant, tend à l'emporter d'un mouvement uniforme, il luy faut supposer encore une autre force suivant LC, capable de luy faire parcourir aussi d'un mouvement uniforme le côté LG du parallelogramme YG, ou son opposé YI, pendant le même instant que sa vitesse de rotation employroit à lui faire parcourir LY, ou qu'il employe effectivement à parcourir LI. Or si l'on considére que la vitesse précédente (Solut. 1 et 2) du corps L, accélérée de P en I à la maniere de celle des chuttes des corps pesans, devroit lui donner en I une vitesse qui uniforme seroit capable de lui faire parcourir YI double de PI, dans un instant égal à celui qu'il auroit mis à tomber (pour ainsi dire) de P en I en vertu de la seule force centrale regardée comme une espece de pesanteur tendante en C, ou qu'il a effectivement mis à parcourir LI, on verra que du concours de cette vitesse uniforme en L suivant LG, avec celle de rotation suivant LY, ce corps non seulement parcouroit la diagonale LI du parallelogramme YG pendant ce même instant; mais aussi qu'il arriveroit en I avec la même vitesse que s'il y arrivoit (comme cy dessus Solut. 1 et 2) par le concours de la vitesse de rotation suivant LQ, avec la précédente vitesse accélérée de P en I. Donc ce corps L décrira l'élément LI dans des instans égaux, et avec une même vitesse en I, soit qu'il le décrive par le concours de cette vitesse accélérée de P en I, avec la vitesse uniforme de rotation suivant LQ, ou qu'il le décrive par le concours de cette vitesse uniforme suivant LT, avec une autre pareillement uniforme suivant LG ou YI, égale à l'acquise en I par cette accélération. Donc aussi les deux côtés LY, LG du parallelogramme YG sont entr'-eux comme ces deux vitesses uniformes, ou (ce qui revient au même) comme les forces productrices de ces vitesses: c'est à dire que LY est à LG, comme la force acquise en L par la chutte de H en L du corps L en vertu de sa seule pesanteur, est à sa force acquise en I par une semblable chutte de P en I en vertu de sa seule force centrale.

XI. Or il est manifeste que la pesanteur d'un corps, agissant également sur lui dans tous les instans de sa chutte, et tous ces efforts égaux chacun à sa pesanteur, se conservant et s'acumulant (pour ainsy dire) dans toute la durée de sa chutte, leur nombre à chaque instant doit être comme le nombre des instans écoulés depuis le commencement de cette même chutte jusqu'à cet instant, et par conséquent leur somme, c'est à dire, la force acquise de ce corps à chaque instant doit être égale au produit de sa pesanteur par le nombre de ces instans, ou par la durée de sa chutte jusqu'à ce même instant.

On scait aussi, que la force totale de ce corps en L, acquise par la chutte de H en L en vertu de sa seule pesanteur, seroit seule capable de lui faire parcourir LT double de HL d'une vitesse uniforme égale à ce qu'il en auroit acquis en L en vertu de sa chutte, et dans un tems égal à celui de cette chutte de H en L. Donc la force totale de ce corps à la fin de sa chutte en L en vertu de sa seule pesanteur, est égale au produit de sa pesanteur par le temps qu'il employroit à parcourir LT double de HL d'une vitesse uniforme égale à ce qu'il en auroit ainsi acquis en L, c'est à dire (hyp.) égale à sa vitesse de rotation en L.

On prouvera de même que la force de ce corps acquise en l par son espece de chutte de P en l en vertu de sa seule force centrale, doit aussi être égale au produit de cette force centrale par le tems qu'elle employroit à le faire ainsy tomber de P en l, ou (hyp.) que sa vitesse uniforme de rotation employroit à lui faire parcourir LP ou LY.

Donc en prenant les longueurs LT, LY pour les tems que le corps L employroit à les parcourir de cette vitesse uniforme de rotation, p pour la pesanteur de ce corps, et f pour sa force centrale en L, l'on aura $p \times LT$ pour la force totale de ce corps acquise en L par sa chutte de H en L en vertu de sa seule pesanteur; et $f \times LY$ pour sa force totale pareillement acquise en l par une semblable chutte de P en l en vertu de sa seule force centrale. Donc aussi (art. 10) $LY . LG :: p \times LT . f \times LY$, ou $f = \frac{p \times LT \times LG}{LY \times LY}$ (à cause qu'on suppose ici $LT = 2HL$, et $LG = Yl$) $= \frac{2p \times HL \times Yl}{LY \times LY} = \frac{2p \times HL \times Yl}{Ll \times Ll}$.

XII. Cela étant si l'on prend (comme l'on vient de faire art. 10) la courbe MLN pour un Polygone infiniti-latère, dont RL, Rl soient deux rayons de sa developpée et que lZ soit un arc de cercle décrit du centre L, la ressemblance des triangles LRl, lLZ donnera $RL . Ll :: Ll . lZ = \frac{Ll \times Ll}{RL}$. Et si l'on prolonge Cl jusqu'à la rencontre en X de la tangente LT, la ressemblance des triangles XDL, XZl donnera aussi $DL . LX$ ou $Ll :: Zl \left(\frac{Ll \times Ll}{RL}\right) . Xl$

$= \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$. Mais les triangles XYl, XLC, que Yl (hyp.) parallele à LC rend semblables, donnant Xl . Yl : : XC . LC, et l'angle XCL (hyp.) infiniment petit, rendant de plus XC = LC; l'on aura pareillement Xl = Yl, donc aussi $Yl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$. Par conséquent en substituant cette valeur de Yl dans la formule $f = \frac{2p \times HL \times Yl}{Ll \times Ll}$, qu'on vient de trouver à la fin de l'art. 11, l'on aura de même $f = \frac{2p \times HL \times Ll}{RL \times DL}$. Donc en appelant encore HL, h; RL, r; Ll, ds et DL, dx, l'on aura encore ici $f = \frac{2ph\,ds}{r\,dx}$ pour Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps, commé dans les art. 2 et 8 cy dessus. Ce qu'il falait encore trouver.

Voila, comme vous voyez, Monsieur, un Regle générale du raport des forces centrales aux pesanteurs des corps, laquelle s'accorde presentement avec ce que vous prétendez touchant la force centrifuge circulaire, et comme cette Regle se trouve ici démontrée dans l'une et dans l'autre hypothese des courbes regardées comme courbes en tout, ou comme polygones, j'espere que vous en serez content. Je vous prie de me le faire scavoir et de me croire toûjours avec bien du respect etc.

P. S. Voici encore quelques articles de votre dernière lettre du 26. Juillet, sur lesquels je me souviens de ne vous avoir point fait reponse dans ma dernière du 9. Octob.

C'est M. de l'Isle le cadet qui a travaillé aux notices des Gaules et aux familles de ce pays pour s'instruire de ces choses-là seulement, et non pas dans la vue d'en rien faire imprimer. C'est M. de l'Isle l'ainé qui est de l'Academie.

M. Homberg m'a dit que depuis que M. Tschirnhausen est parti de ce pays-ci, il n'a reçu aucune lettre de lui. Pour ce qui est de la production artificielle du Mercure, M. Homberg m'a dit qu'il la donnera dans quelque temps. Il m'a chargé de vous saluer de sa part: permettez moy de saluer aussi ici M. Tschirnhausen.

Il y a environ 15 jours que je trouvay M. Pinson dans une maison, où je fus faire visite, et lui ayant dit que je vous écrivois, il me chargea de vous dire qu'il vous avoit écrit par un étranger qui alloit dans vos quartiers, et à qui il avoit donné un fort gros paquet pour vous.

L'Instrument de M. de la Hire pour trouver les Eclipses se vend ici 4 tt en carton; il couteroit 8 ou 10 pistoles pour le faire faire en cuivre.

Le Samedy 14. Novembre à l'assemblée publique de l'Academie, au retour des vacances, M. de Fontenelle fit deux fort beaux éloges funebres, l'un de M. (Jaq.) Bernoulli, et l'autre de M. Amontons, un de nos éléves fort singulier aussi dans son espece. L'eloge de M. Bernoulli en contenoit aussi un fort beau des infiniment petits.

A propos d'infiniment petits, il ne s'est rien passé par raport à la contestation sur leur sujet, depuis ma derniere lettre du 9. octob. M. l'Abbé Bignon n'a point encore prononcé sur les jugemens de Mrs. les conseillers, qu'il s'est fait donner par écrit de chacun deux. Dês qu'il y aura quelque chose de nouveau par raport à cela, je ne manqueray pas de vous le faire scavoir.

Je n'étois ici de cette lettre Lundi dernier, lorsque relisant la votre du 26. Juillet, pour voir si je n'avois rien oublié de ce que vous m'y demandiez d'être informé, j'y apercu qu'en demandant à M. de l'Isle ce que vous me marquiez souhaiter scavoir de lui, j'avois oublié à lui parler de la geographie de l'Arabe de Nubie: je remis au Mecredy suivant, qui étoit hier, à lui en parler à l'Academie; et le soir, au retour de l'Academie, votre lettre de 6. de ce mois me fut rendue. J'auray l'honneur d'y repondre le plus tost que je pouray, celle-ci n'étant desja trop longue. En attendant voici la liste que M. de l'Isle me vient d'envoyer de ses ouvrages pour vous, avec ce qu'il me dist hier touchant la geographie de Nubie.

Il a fait (dit-il) des cartes itineraires sur la geographie de l'Arabe de Nubie, et il croit avoir dechifré cet Auteur qui est très difficile à entendre. Il dit qu'il s'est servi très utilement de cet ouvrage, tant pour la geographie ancienne, que pour le moyen âge et l'état present du monde. Il ajoute qu'il n'a pas û dessein de faire imprimer ces cartes de l'Arabe de Nubie; mais que quand il fera les cartes du moyen âge, cet Auteur y aura beaucoup de part.

A Paris, ce 26. Novemb. 1705.

XII.

Varignon an Leibniz.

Il y a quatre mois que je dois réponse à votre lettre du 21. Decembre dernier, et il y en a cinq que je ne suis presque capable de rien. Je fus attaqué le 20. Novemb. de maux de teste accompagnés de foiblesses qui à peine me permirent d'achever la lettre que je vous envoyay le 26. du même mois, et de lire celle que je reçu alors de vous en datte du 6. même mois aussi, sans oser m'appliquer aux demonstrations qu'elle centenoit. Je ne vous dis rien de mon mal dans ma lettre croyant qu'il n'auroit pas de suites, mais j'en ay été tellement maltraité depuis ce tems-là que toutte application m'a été interdite: de sorte que je n'ay seulement osé jetter les yeux sur vos deux démonstrations de la force centrifuge, que vers la semaine sainte que je me trouvay assez de néteté de teste pour oser m'y appliquer. Elles me parurent tres bonnes; mais celles qui sont fondées sur ce que la force centrifuge meut le corps d'un mouvement accéléré dans ce qu'elle luï fait parcourir d'espace à chaque instant, ne le sont pas moins; et bien loin qu'il y ait là aucune erreur qui en corrige une autre, ce chemin me paroist le véritable, et celui des mouvemens uniformes, que vous avez suivi, ne me paroist qu'un équivalent supposé, puisque la force centrifuge ou l'opposée qui lui est égale, est réellement constante pendant chaque instant, et continument appliquée au corps sur lequel elle agit, de même que la pesanteur sur les graves pendant quelque tems que ce soit. Ainsy le mouvement de la tangente vers la courbe, résultant de la force centrifuge ou centripete, doit être arithmetiquement accéléré pendant chaque instant de même que celui des corps graves pendant quelque tems que ce soit, de sorte que cette hypothese me paroist la véritable, et celle des mouvemens uniformes seulement équivalente en ce qu'elle donne le même raport des forces dont il est ici question. Aussi les courbes sont elles courbes en tout dans la première de ces hypotheses, au lieu qu'elles ne sont que des Polygones équivalents dans la seconde. Et ça été pour m'accommoder à touttes les deux que j'ay cherché pour l'une et pour l'autre les demonstrations que je vous ay envoyées du raport des forces centrales aux pesanteur des corps.

Voici un petit Memoire de M. Geofroy par raport à ce que vous m'avez écrit de l'experience de Becherus.

Je ne scais ici personne qui ait rien trouvé sur les jeux de hazard: sans doute que le traité De arte conjectandi que feu M. Bernoulli a laissé presque achevé, donnera des lumieres sur cela. Le procès des infiniment petits est pendu au croq.

Quant à la Machine des Eclipses de M. de la Hire, et au Niveau que vous me marquez souhaiter, ma maladie est cause, que je n'ay point encore exécuté cette commission. Je ne manqueray pas de m'en aquiter au retour des Eaux de Vichy et de Bourbon, pour lesquelles je pars mecredy prochain par le conseil des Medecins qui me les ordonnent pour le retablissement de ma santé, qui est toûjours tres mauvaise, quoyqu'elle le soit beaucoup moins qu'elle ne l'étoit pendant l'hiver. Le beau tems qu'il fait presentement, me soulage fort; mais le froid ou le mauvais tems me tue. J'espere être de retour ici, au plus tard dans deux mois, et être en état de profiter de la remarque que vous m'avez promise, si vous voulez bien me l'envoyer. Vous obligerez sensiblement etc.

A Paris ce 29. Avril (1706).

XIII.

Leibniz an Varignon.

10 Octobr. 1706.

Je suis ravi d'apprendre vostre heureux retour et le retablissement de vos forces. Cependant vous ferés bien sans doute, de vous menager encor beaucoup. En attendant que vous soyés entierement remis, je vous felicite, et le public aussi d'un amendement si considerable, et en souhaite de tout mon cœur l'accomplissement et la durée.

C'est à present le temps des vacances de l'Academie. Cependant j'espere que M. l'Abbé Bignon aura receu de moy une lettre avec un Memoire physique contenant quelque chose qui se remarque dans nos mines et dans les mines voisines. J'y avois joint aussi une lettre à M. de Fontenelle.

J'avois envoyé il y a quelques années à Mons. de Fontenelle un Memoire, où je comparois mon Arithmetique binaire nouvelle (qui n'a point d'autres notes que 0 et 1) avec les caracteres anciens attribués à Fohy, Roy et philosophe de la Chine: ce Memoire estoit destiné à estre inseré dans les Memoires de l'Academie, mais je n'ay pas appris, si on l'a fait ou si on a encor dessein de le faire. Ainsi je vous supplie, Monsieur, de vous en informer dans l'occasion, aussi bien que de ce qu'on pense de mon Memoire physique.

Ma remarque où j'employe utilement vostre maniere d'exprimer la force centrifuge, a esté envoyée à Leipzic pour y entrer dans les Actes*). Elle ne me sert pas à trouver quelque chose, mais à mieux exprimer ce que j'avois trouvé. Une erreur avoit corrigé l'autre auprès de ceux qui avoient conclu vray et supposé faux, ils avoient raison dans la conclusion, mais vous refusiés avec raison leur principe, lorsque vous combattiés encor leur conclusion. La voye est plus simple qui ne met pas l'acceleration dans les elemens, lorsqu'on n'en a point besoin. Je m'en suis servi depuis plus de 30 ans. Il y a d'autres cas, où il est necessaire de concevoir de la courbure dans les Elemens des courbes, cependant le detour non necessaire ne laisse pas de mener enfin à la même conclusion.

Je n'ay pas encor employé vos billets pour M. de l'Orme (dont je vous fais des remercimens) en ayant egaré un. Mais j'espere de le retrouver. Je vous en suis obligé, Monsieur, mais cela ne doit pas vous couster, autrement il faut vous en tenir compte.

Je souhaite que M. Geofroy tire du fer effectif de cette argille magnetique, apres quoy son probleme se pourra mieux proposer t r o u v e r d e s c e n d r e s s a n s f e r. On aura vû à Paris le livre de M. Guglielmini des Sels, où il soutient contre M. Homberg et autres Chymistes de l'Academie, qu'on ne peut point changer les sels.

---

*) Excerptum ex epistola Auctoris, quam pro sua Hypothesi physica motus planetarii ad amicum scripsit (Act. Erudit. Lips. an. 1706).

XIV.

Varignon an Leibniz.

Voici une proposition que vous verrez dans les Memoires de l'Academie, touchant les resistances des milieux où les corps se meuvent, laquelle me paroit des plus générales et des plus simples, en ayant deduit fort aisément tout ce que Vous, M. Newton, M. Hughens et M. Wallis avez donné sur cette matière, en l'appliquant à vos hypotheses: je l'ay aussi appliquée à plusieurs autres dans lesquelles tout cela m'est aussi venu et avec la même facilité. La voici cette proposition précédée de deux lemmes dont le premier sert à la demonstrer, et le second à en tirer les conséquences.

Lemme I.

Les resistances instantanées continues d'un milieu quelconque à une mouvement fini quelconque, et d'une durée finie, sont infiniment petites.

Lemme II.

La somme des vitesses instantanées d'un corps mû de quelque maniere que ce soit, est toûjours proportionelle à la longueur du chemin qu'elles lui font parcourir l'une apres l'autre par instant.

J'omets ici les demonstrations de ces deux lemmes, comme inutiles par raport à vous. Je dis seulement que j'appelleray dans la suite vitesses primitives, ou primitivement telles ou telles, ce que le mobile en auroit dans un milieu sans resistance ny action, tel qu'on imagine d'ordinaire le vuide.

Proposition.

Soit un corps quelconque qui dans un milieu sans resistance ny action, fust mû pendant les tems AT avec des vitesses qui fussent à la fin de ces tems, comme les ordonnées correspondantes TV d'une courbe quelconque FVC dont l'axe soit AC; trouver en général les resistances de ce milieu, ce qu'elles laisseroient de vitesse au mobile à la fin des tems AT, ce que ces vitesses restantes lui seroient parcourir d'espace pendant ces temps etc.

Solut. Soient les droites EV, eu (fig. 28) infiniment proches l'une de l'autre, perpendiculaires en T, t, de même que KF en A, sur l'axe AC; et dont les parties TR, tr expriment les resistances que le milieu aura faites au corps mû pendant les tems AT, At; soit aussi la courbe ARC, à laquelle se terminent touttes ces resistances totales TR, tr, égales aux forces ou aux vitesses perdues pendant ces tems AT, At correspondans. Soit aussi la courbe HWC, laquelle ait partout ses ordonnées WT = RV correspondantes, lesquelles expriment les vitesses restantes à la fin des tems AT, et jointes aux perdues TR, donneront les ordonnées TV de la courbe FVC pour les vitesses primitives corrrespondantes.

Il est manifeste par le lem. I. que chaque difference Pr des resistances totales TR, tr exprimera la resistance que le milieu doit faire pendant chaque instant Tt, à la force ou à la vitesse restante RV à la fin de chaque tems correspondant AT. Donc en prenant les ordonnées TE, te de la courbe KEC pour les puissances, ou plus généralement pour les affections quelconques des vitesses etc. que suivent ces resistances instantanées, l'on aura partout Pr en raison constante à TE, c'est à dire que la fraction $\frac{Pr}{TE}$ sera constante; et conséquemment aussi que $\frac{Pr}{TE} = \frac{Tt}{a^m}$ sera l'équation générale des courbes ARC, HWC, en prenant les instans Tt constans de même que la grandeur a et m indéterminée pour fournir à l'homogeneité requise.

Donc en appelant AT, t; TR, r; TE, z; TV, v; RV ou (hyp.) TW, u; et conséquemment aussi Tt, dt, et Pr, dr; outre $r = v - u$, et $dr = dv - du$, l'on aura en général $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a^m}$, ou $\frac{dv - du}{z} = \frac{dt}{a^m}$ pour l'équation des courbes ARC, HWC, laquelle caracterisée pour chacune par l'introduction de ce que les courbes données FVC, KEC, leur assigneront de particulier, donnera tout ce qu'il faloit, ainsi qu'on le verra dans la suite.

Pour éviter la confusion dans l'usage qu'on va faire des quatre courbes que voici, la premiere ARC s'appellera courbe des resistances; la seconde FVC, courbe des vitesses primitives; la troisième HWC, courbe des vitesses restantes; et la quatrieme KEC, courbe des affections sur lesquelles les resistances se reglent. Cela posé, voici quelques conséquences de la solution précédente.

Corol. I. Puisque (hyp.) TW est partout ici égale à RV correspondante, il est manifeste que lorsque la courbe FVC des vitesses primitives passera par A, c'est à dire, lorsque ces vitesses commenceront à zero, la courbe HWC des vitesses restantes passera aussi par A, ces vitesses commençant de même à zero: de sorte que AF et AH seront alors également nulles ou zero.

Corol. II. De ce que (hyp.) les courbes FVC, ARC, HWC donnent partout RV = TW, il suit manifestement aussi que les aires correspondantes ARVF, ATWH seront de même partout égales entr'-elles.

Corol. III. Puisque (lem. 2) chaque espace parcouru est toujours comme la somme des vitesses instantanées RV ou TW employées à le parcourir, les espaces parcourus pendant les tems AT seront toûjours ici entr'-eux comme les aires ARVF ou ATWH correspondantes, et ce qu'il en reste à parcourir, comme les aires restantes CRVC ou CTWC.

Corol. IV. Donc aussi (lem. 2) l'espace parcouru pendant chaque tems AT(t) avec les vitesses retardées par la resistance du milieu dont il s'agit ici, sera toûjours à ce qui en auroit été parcouru sans cette resistance pendant ce même tems, comme ARVF ou ATWH est à ATVF.

Corol. V. Ainsi ce que la resistance du milieu en empêche d'être parcouru pendant chaque tems AT, est toûjours comme l'aire correspondante ART, c'est à dire, comme la somme des resistances totales TR qui se sont trouvées pendant tout ce tems AT.

Corol. VI. Puisque dr (Pr) est à z (TE), ou à z dt (ETte) en raison constante, à cause de dt supposée par tout ici constante, l'on aura aussi toûjours r (TR) proportionelle à $\int z\,dt$ (ATEK): c'est à dire les resistances totales ou les vitesses perdues à la fin des tems AT, comme les aires correspondantes ATEK.

Voila en général pour touttes sortes de mouvemens retardés par des resistances en raison quelconque du milieu, quelques fussent aussi ces mouvemens primitivement et sans aucune resistance

Voici presentement en particulier pour ceux qui primitivement et sans resistance seroient uniformes.

Corol. VII. Si presentement on suppose que le mouvement qu'on a regardé jusqu'ici d'une variation de vitesses à volonté quand même le milieu ne lui auroit fait aucune resistance, fust ici uniforme primitivement et sans la resistance de ce milieu; il est manifeste, que la courbe FVC, qui par ses ordonnées TV exprimoit ci dessus les vitesses primitives variées (v) telles que ce mouvement les auroit eues sans la resistance du milieu, doit ici dégénerer en une ligne droite parallele à AC (fig. 29) et touttes ses ordonnées TV (v) devenir chacune égale à la constante AF, que j'appelle ici a, laquelle y doit exprimer la premiere vitesse du corps mû, au commencement A du tems AT, ce qui donnant ici $v = a$ constante, et conséquemment $dv = 0$, et $dr\ (dv - du) = - du$, la seconde $\frac{dv - du}{z} = \frac{dt}{a^m}$ des deux formules generales trouvées dans la solution précedente, se changera ici en $\frac{-du}{z} = \frac{dt}{a^m}$. Pour la premiere $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a^m}$, elle demeurera ici la même que là, avec cette seule difference que r qui étoit là $= v - u$, sera isi $= a - u$.

Corol. VIII. Puisque (cor. 7) on a ici $dr = - du$, il est manifeste que la courbe ARC des resistances doit être ici la même par raport à l'axe FC, que celle HWC des vitesses restantes (u) étoit dans fig. 28 par raport à l'axe AC; et qu'ainsi ARC sera ici tout ensemble la courbe des resistances (r) par raport à l'axe AC, et des vistesses restantes (u) par raport à l'axe FC, sans qu'il soit besoin d'y marquer HWC. Quant à la courbe KEC des affections, on la suppose ici à droite sur l'axe FC, ce qu'elle étoit cidevant à gauche sur l'axe AC: ce renversement de position se fait ici pour ne rien changer aux figures des exemples qui avoient été resolus sur celle-ci avant que la premiere me fust venu en pensée. Voici quelques uns de ces exemples.

Exemple I. (fig. 29.)

Trouver la courbe ARC etc. dans l'hypothese des resistances instantanées en raison des vitesses restantes de primitivement uniformes.

Solut. Cette hypothese donnant RV (u) = VE (z), la premiere équation $\frac{-du}{z} = \frac{dt}{a^m}$ du corol. 7. de la prop. génér. se réduira ici à

$\frac{-du}{u} = \frac{dt}{a}$, en faisant $m = 1$ suivant la loy des homogenes. Ce qui fait voir tout d'un coup, que la courbe ARC doit être ici une logarithmique d'une soutangente $= a$ (AF) constante, et dont FC doit être l'asymptote. Tout le reste s'en déduit sans peine, et même par le moyen de l'hyperbole à la maniere de M. Newton.

Exemple II. (fig. 28.)

Trouver les courbes ARC des resistances, HWC des vitesses restantes etc. dans l'hypothese 1. des resistances instantanées en raison des vitesses restantes; et 2. des vitesses primitives accélérées en raison des tems écoulés depuis le commencement du mouvement, ainsi que dans l'hypothese de Galilée sur la pesanteur des corps qui tomberoient en lignes droites dans un milieu qui n'aideroit ny resisteroit à leur mouvement.

Solut. Suivant la solut. de la prop. génér. et les noms qui s'y trouvent, la premiere de ces hypotheses-ci donnera TE $(z) =$ WT $=$ RV $(u) =$ TV $-$ TR $(v - r)$; et la seconde, TV $(v) =$ AT (t); d'où resulte $t - r = v - r = u = z$, et $dv = dt$. Donc en subsistant ces valeurs de z, dv dans les deux formules générales $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a^m}$, $\frac{dv - du}{z} = \frac{dt}{a^m}$ de cette solution, la premiere de ces deux équations se changera ici en $\frac{dr}{t - r} = \frac{dt}{a^m}$ (en faisant $m = 1$ suivant la loy des homogenes, $= \frac{dt}{a}$ pour la courbe ARC des resistances) et la seconde, en $\frac{dt - du}{u} = \frac{dt}{a}$ pour la courbe HWC des vitesses restantes: d'où resulte aussi $\frac{dt}{a} = \frac{du}{a - u}$ pour l'équation de cette courbe HWC; ce qui fait voir qu'elle doit être encore ici une logarithmique qui passe par A (fig. 30) d'une soutangente $= a$, et d'une asymptote BC parallele à AC, et distance d'elle de la valeur de AB $= a$; d'où se construit tout d'un coup la courbe ARC des resistances, en prenant par tout RV $=$ TW. Tout le reste s'en déduit aussi sans peine, et même encore par le moyen de l'hyperbole à la maniere de M. Newton.

Exemple III. (fig. 29.)

Trouver la courbe ARC etc. dans l'hypothese des resistances instantanées en raison des quarrés des vitesses restantes de primitivement uniformes.

Solut. Cette hypothese donnant RV × RV (uu) = VE (z), l'équation $\frac{-du}{z} = \frac{dt}{a^m}$ du corol. 7 de la prop. génér. se réduira ici à $\frac{-du}{uu} = \frac{dt}{aa}$, en faisant $m=2$ suivant la loy des homogenes; et l'intégrale de cette derniere équation sera $tu = aa - au$: d'où l'on voit que la courbe ARC qu'elle exprime, doit être ici une hyperbole équilatère entre asymptotes, une desquelles est FC prolongée jusqu'à son centre distant de son sommet A de la valeur $a\sqrt{2}$. Et delà tout le reste se déduit encore sans peine.

On le pouroit encore trouver par le moyen de deux arcs indefinis ARC, FGC (fig. 31) d'une logarithmique qui ait sa soutangente = AF (a), en sorte que FC soit l'asymptote du premier et AC celle du second. Car si l'on prend encore RV (u) pour les vitesses restantes de la premiere AF (a), l'on aura presentement VG pour les tems (t) écoulés depuis le commencement du mouvement, et AT ou FV pour les espaces parcourus pendant ces tems. FGC est ici la continuation AB de RCA dans une autre position.

Exemple IV. (fig. 28.)

Trouver les courbes ARC des resistances, HWC des vitesses restantes etc. dans l'hypothese 1. des resistances instantanées en raison des quarrés des vitesses restantes; et 2. des vitesses primitives accélérées en raison des tems écoulés depuis le commencement du mouvement, ainsi que dans second exemple.

Solut. Suivant la solut. de la prop. génér. et les noms qui s'y trouvent, la premiere de ces deux hypotheses-ci donnera TE (z) $= \overline{WT}^2 = \overline{RV}^2$ (uu) $= \overline{TV - TR}^2 = \overline{v - r}^2$; et la seconde, TV (v) = AT (t); d'où resulte $t - r = v - r = u$, et $dv = dt$. Donc en substituant ces valeurs de z, dv dans les deux formules générales $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a^m}$, $\frac{dv - du}{z} = \frac{dt}{a^m}$ de cette solution, la premiere de ces deux équations se changera ici en $\frac{dr}{t - r^2} = \frac{dt}{aa}$, en faisant $m = 2$ pour la courbe ARC des resistances; et la seconde en $\frac{dt - du}{uu} = \frac{dt}{aa}$, d'où resulte $\frac{dt}{a} = \frac{adu}{aa - uu}$ pour la courbe HWC des vitesses restantes. Ces deux courbes se construiront par le moyen d'une logarithmique d'une soutangente $= \frac{1}{2}a$. Tout le reste s'en déduit encore sans peine, et même encore par le moyen de l'hyperbole à la maniere de M. Newton.

Voila, Monsieur, des fruits de votre admirable calcul. J'ay encore appliqué la proposition precedente aux mouvemens primitivement retardés, et à plusieurs autres hypotheses des resistances. Mais ce serait abuser de votre tems que de vous en dire ici d'avantage: je crains même de n'en avoir desja que trop dit pour un aussi habile homme que vous. Je finis donc en vous asseurant du profond respect avec lequel je suis toûjours etc.

P. S. La mort de M. l'Abbé Galloys a enfin réduit M. Rolle à se taire: non seulement il ne pense plus à rien dire contre les infiniment petits, mais même il m'a marqué être très faché d'y avoir jamais pensé, sentant bien le tort qu'il a fait en cela à sa reputation. Il se plaind d'y avoir été engagé par cet Abbé qui a toujours été assez habile pour n'exposer que celui-ci sans rien engager du sien, se contentant de crier...... sans jamais rien donner par écrit: il battoit la caisse, et M. Rolle allait au feu, ne pouvant (dit-il) resister aux sollicitations de l'autre: c'est ainsi qu'il fait le proces à son cour en voulant justifier son esprit.

XV.

Leibniz an Varignon.

12 Aoust 1707.

Comme je dois partir pour Bronsvic, je reponds à la haste à l'honneur de votre lettre et me conjouis premierement avec vous et avec nos amis sur votre heureuse reconvalescence. Il faudra se bien menager de peur de recheute, et sur tout se moderer en fait de meditations. J'ay parcouru la partie generale de votre discours sur les resistences, où il n'y a rien à dire dans le fonds. Il y a seulement certaines expressions, que j'aurois changées, si j'avois en à parler de cette matiere. Premierement j'aurois defini les Resistences, en disant que ce sont des diminutions de la vistesse d'un corps agissant venues d'un corps patient, tel que le milieu.

Pour dire dans ce lemme, que les resistences sont infiniment petites, il faut exprimer en comparaison de quoy, savoir en comparaison des vistesses d'un corps, qui est en mouvement, que j'appelle quelque fois aussi des impetuosités, pour les distinguer de ces vistesses imparfaites ou embryonnées telles, qu'un corps pesant a au premier instant de la cheute et reçoit à chaque moment. C'est pourquoy Galiléi l'a renversé, et prenant la pesanteur pour quelque chose d'ordinaire, il a dit, que l'impetuosité, item la percussion étoit infinie, au lieu que prenant la vistesse pour une grandeur ordinaire, la pesanteur et aussi la resistance instantanée, qui luy est homogene, sera infiniment petite.

Dans le lemme second, je n'aurois point dit vistesses instantanées, mais simplement vistesses. Car toute vistesse est instantanée.

Dans la solution de la proposition générale, je n'aurois point parlé de forces, car les forces vives (dont il s'agit là) ne sont point proportionelles aux vistesses, comme j'ay demonstré. Et Mons. Jean Bernoulli ayant parfaitement bien compris mes raisons, et en demeurant d'accord, pourra vous en dire d'avantage. Il me semble aussi, que dans cette solution vous n'avés point besoin de la lettre m. Il suffit de dire $Pr : TE = Tt : a$, car puisque Pr, Te, Tt sont des simples lignes, a en sera aussi une, et par consequent de nulle puissance. Il me semble que la Courbe KEC (fig. 30) auroit merité le nom de Courbe de Resistences: car ses ordonnées sont proportionelles aux resistences Pr. Mais pour parler plus clairement, on pourroit dire, que KEC est la Courbe des Resistences Elementaires ou instantanées et AKC la courbe des resistences totales.

Je ne say, Monsieur, si vous avés examiné mon Schediasma sur les resistences du milieu dans les Actes de Leipzic. Peut estre y trouvés vous quelque chose à dire, puisque vous n'en parlés point. Mon langage est un peu different de celui de Monsieur Newton, autant que je m'en souviens, parceque je fais abstraction de la progression des temps, qui peut estre prise uniforme ou difforme. Mais je crois, que dans le fonds nos conclusions s'accordent.

J'ay employé alors un moyen de rendre les lignes sensibles. Imaginés vous, Monsieur, que la Regle RG (fig. 32) avec son point R coule le long d'une ligne immobile AT, d'un mouvement uniforme et parallele, et que cependant un mobile M coure sur la regle avec une vistesse, qui soit déminuée selon certaines resistances, les ordonnées RM de la ligne MM representeront les espaces, les differences ou tangentes donneront les vistesses restantes, et les differences secondes ou osculations determineront les resistances. Il me semble aussi d'avoir remarqué, que si la resistance est d'une diminution uniforme et absolue, qui n'a aucune relation à la vistesse du mobile, comme je le conçois dans un globe, qui roule sur un tapis, et perd à chaque moment sensible la vistesse, qu'il doit employer pour plier un certain petit poil, qui est tousjours la même, comme il est peut-être aussi à peu pres dans les frictions; j'ay trouvé, que la ligne MM est la logarithmique. Soit AT, t, et TM soit m, et la vistesse restante soit v, et la resistance totale ou vistesse perdue r, et la vistesse initiale V, que je suppose n'avoir point esté changée, que par la resistance dont il s'agit, donc v sera $V - r$. Or dr resistance elementaire dependant de la longueur elementaire de l'espace ex hypothesi, sera proportionelle à dm, et nous marquerons le degré de la resistence, qui est tousjours le même, par le nombre π et dirons, que $dr = \pi dm$ et $r = \pi m$. C'est ce, que j'aurois pû dire aussi d'abord, la resistance estant en raison composée ici de l'espace parcouru, et du degré de l'apreté de l'espace marqué par π; d'ailleurs $dm = vdt : a$, c'est à dire, dm est à dt, comme la vistesse restante v, est à une constante a. Or $v = V - r = V - \pi m$, donc nous aurons $dm = V - \pi m, dt : a$, ou bien $dt = adm, :, V - \pi m$, c'est à dire dt est à dm, comme a est à $V - \pi m$. Or a, V et π estant constantes, il est manifeste, que la ligne est Logarithmique, et depend de la quadrature de l'Hyperbole.

XVI.

Varignon an Leibniz.

A Paris ce 3. Sept. 1707.

Votre lettre du 12. Aoust me fut rendue il y a 10 jours par le P. Lelong. Je vous rend mil graces de la part que vous voulez bien prendre à ma santé: je prie Dieu d'en conserver une aussi pretieuse que la vôtre. Je suis bien aise que ma proposition générale des resistances ne vous ait pas déplû. Je croy comme vous

1. Que dans le Lem. 2 il faut marquer par raport à quoy ces resistances sont infiniment petites: je ne manqueray pas de le faire.

2. Il est vray que toutte vitesse étant instantanée, il suffist de dire simplement vitesses: c'est aussi ce que j'ay marqué dans les définitions que je ne vous ay point envoyées; et pour en faire ressouvenir, je me suis servi tantost de l'une et tantost de l'autre de ces expressions.

3. Si vous entendez par forces vives ce que la cause motrice en employe à chaque instant, par exemple la pesanteur, je conviens que les vitesses actuelles qui sont l'effet de tout ce que cette cause en a desja produit et en produit encore à chaque instant, ne sont point proportionelles à ces sortes de forces qui ne le sont qu'à ce qu'elles produisent actuellement de mouvement. Mais ces vitesses entieres instantanées dans un même corps le sont toûjours aux forces totales requises pour les produire telles qu'elles sont en tout à chaque instant; tel est le produit de la pesanteur constante d'un corps par la durée de la chutte, cette force totale est toûjours proportionelle à sa derniere vitesse dans un milieu sans resistance ny action; ou si le milieu resiste, la difference de cette force totale à la resistance totale du milieu, laquelle difference est alors la force totale productrice de la vitesse, sera toûjours proportionelle à cette vitesse actuelle de ce corps, comme la cause à l'effet: aussi cette force totale, que vous appellez peut-être impetuosité, se fait elle d'autant plus sentir que le corps a plus de vitesse.

4. Il est vray, qu'au lieu de a^m on peut mettre simplement a dans la formule $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a^m}$, en sauvant l'homogeneité sur la valeur

supposée de z: par exemple, au lieu de supposer $z = au + uu$, qui demanderoit $m = 2$ dans cette Regle, on peut supposer $z = \frac{au + uu}{a}$, qui dans $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a}$ produira la même homogeneité: tout cela revient au même dans le fond; cependant je convieus que le second sera le mieux, en ce que l'homogeneité se trouvera pour lors dans la supposition comme dans la Regle. C'est à quoy je me suis conformé depuis votre lettre en effaçant m dans la Regle, et en divisant la valeur donnée z par a^{m-1}.

5. Je crois aussi comme vous que la courbe KEC serait mieux appelée courbe des resistances, que des affections des vitesses: c'est aussi ce premier nom que je lui donneray dans la suite: je l'appelleray courbe des resistances instantanées, pour la distinguer de la Courbe ARC des resistances totales.

6. Ouy, Monsieur, j'ay lû votre Schediasma sur les resistances du milieu dans les Actes de Leipzic,*) et je me trouve partout d'accord avec vous, excepté dans le nomb. 7 art. 5 pag. 45. Vous dites: si spatia percursa AS (fig. 33) sint ut Logarithmi Sinuum KV arcuum BK, tempora insumpta sunt ut logarithmi rationum, quae sunt inter sinum versum BV, et VD complementum ejus ad BD diametrum; et je trouve qu'il y faut au contraire ut logarithmi rationum VD ad BV: mais ce ne peut-être là qu'une meprise d'inadvertance ou d'impression, puisque vos nomb. 5 et 6 du même art. 5 prouvent ce que je dis.

7. Votre maniere d'exprimer tousjours les espaces parcourus, par de lignes; les vitesses, par les differences premieres de ces lignes; et les resistances instantanées, par les differences de ces differences, est fort simple en général, mais je ne scais si elle le seroit autant dans l'application à toutte autre hypothêse qu'à celle où vous l'employez dans votre lettre: cette hypothêse des resistances instantanées en raison des espaces parcourus pendant leurs instans, qui est la même que vous aviez desja faite dans l'art. 1 pag. 40. de votre Schediasma, vous donne (dis-je) fort simplement ici la logarithmique qu'elle vous avoit desja donnée d'une

*) Schediasma de resistentia medii, et motu projectorum gravium in medio resistente. Act. Erudit. 1689.

autre maniere dans cet art. 1. Voici comment ma Regle $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a}$ la donne aussi. Car en supportant ainsi les dr (qui sont ici $-du$) en raison des udt, ou des u en faisant dt constante, j'auray $z = u$, et conséquemment $\frac{-du}{u} = \frac{dt}{a}$, qui est aussi l'équation de vôtre logarithmique.

8. Voici encore quelque chose que j'ay trouvée sur cette matiere depuis ma derniere lettre.

Si l'on veut faire mention de la pesanteur du fluide ou milieu dans ses resistances, laquelle soit appelée q en volume égal à celui du corps mû dont la pesanteur soit aussi appelée p, laquelle lui donneroit dv de vitesse à chaque instant dans un milieu sans resistance ny action; si l'on prend dr pour tout ce que le milieu resistant lui fait de resistance à chaque instant dt, tant de la part de sa pesanteur q que d'ailleurs, et z proportionelle à tout ce que le milieu en fait à ce corps de toutte autre part que de celle de sa pesanteur q; j'ay aussi trouvé $\frac{pdr - qdv}{pz} = \frac{dt}{a}$ pour Regle des mouvemens verticaux de haut en bas dans ce milieu, et $\frac{pdr + qdv}{pz} = \frac{dt}{a}$ pour celle des verticaux de bas en haut. Quant aux obliques, ils se feroient en lignes courbes, qui se determineront par le moyen de ces mouvemens verticaux et de ceux de projection oblique, qui n'auroit plus rien à soufrir de la pesanteur de fluide ou milieu, soutenue alors par la portion de force verticale qu'elle éteindroit.

Vous voyez, Monsieur, qu'en faisant à l'ordinaire précision de la pesanteur du milieu, comme s'il n'en avoit aucune, c'est à dire ici $q = 0$, cette Regle $\frac{pdr \mp qdv}{pz} = \frac{dt}{a}$ rendra la générale $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a}$ de cette hypothêse-ci, et que l'application en est aussi tres facile.

Par exemple, si l'on suppose à l'ordinaire la pesanteur du corps mû, telle qu'en tombant dans un milieu sans resistance ny action, elle lui donnast des vitesses primitives v qui fussent comme les tems écoulés (t) depuis le commencement de sa chutte, c'est à dire $dv = dt$, et que les resistances instantanées du milieu où il tombe effectivement, venues d'ailleurs que de la pesanteur q de ce milieu, soient comme les vitesses effectives u de ce corps dans ce milieu, c'est à dire $z = u$, la substitution de ces valeurs de dv, z dans la Regle $\frac{pdr - qdv}{pz} = \frac{dt}{a}$, dont dr se change toûjours en $dv - du$, la reduira ici à $\frac{pdt - pdu - qdt}{pu} = \frac{dt}{a}$, d'où résulte $\frac{du}{a - \frac{aq}{p} - u} = \frac{dt}{a}$, qui est une équation à la logarithmique.

Si au lieu de tomber, ce corps montait verticalement malgré sa pesanteur etc. en commençant avec une vitesse de projection $= a$, laquelle ne n'éteignist tout à fait qu'apres le tems c; on auroit alors $dv = -\frac{adt}{c}$, et la substitution de cette valeur de dv, et de celles de $dr = dv - du$, et de $z = u$, dans l'autre Regle $\frac{pdr + qdv}{pz} = \frac{dt}{a}$, la changeroit aussi en $\frac{\frac{padt}{c} - pdu - \frac{qadt}{c}}{pu} = \frac{dt}{a}$, d'où résulte $-acpdu = cpudt + aapdt + aaqdt$, ou $\frac{-du}{u + \frac{aa}{c} + \frac{aaq}{cp}} = \frac{dt}{a}$, qui est encore à la même logarithmique autrement placée que dans la chutte précedente.

Je ne scais rien ici de nouveau si non que le livre du P. Reyneau paraitra dans peu, et que les sections coniques de feu M. le Marq. de l'Hôpital paroissent depuis peu de jours: voici un billet pour en recevoir un exemplaire en Hollande, que M. la Marquise de l'Hôpital vous prie d'accepter.

XVII.

Varignon an Leibniz.

Voila le Reverend Pere Lelong qui se donne la peine de m'aporter lui même votre lettre du 1 Mars. Et comme le paquet de ce qu'il vous écrit n'est point encore fermé, je me hate de vous remercier de la bonne opinion que vous avez de ce que j'ais l'honneur de vous écrire dans ma derniere sur les mouvemens.

J'en suis presentement aux courbes de projection dans les milieux qui resistent, et que j'ay desja trouvées en plusieurs manieres pour les resistances en raison des vitesses. Je passeray aux autres par le moyen de la derniere formule que j'ay eu l'honneur de vous envoyer, laquelle n'aura point besoin de mouvemens composés qui n'y réussiroient pas. Je passeray en suite les planetaires que vous me conseillez d'examiner.

M. Bernoulli ne m'a rien dit de votre maniere d'expliquer le mouvement. Je ne manqueray pas de faire bien vos complimens à Madame la Marquise de l'Hôpital qui conserve soigneusement tous les papiers de feu M. le Marquis, que je ne voudrois toucher que par compte, et sur mon billet, comme j'ay fait (malgré elle) ceux des Sections coniques.

Pour les Elemens de M. Parent, ils sont d'une obscurité si terrible, que je n'ay pu obtenir de moy la patience de les lire.

A Paris ce 16. Mars 1708.

XVIII.

Varignon an Leibniz.

Le P. Lelong m'envoya avant hier votre lettre du 9. de ce mois. Je me souviens d'avoir autresfois vu dans les Actes de Leipsik les difficultés que vous fesiez contre l'opinion de M. Descartes touchant la quantité du mouvement qu'il croyoit toûjours la même dans l'univers, et que vous prétendiez que c'étoit la quantité de force qui y demeuroit toûjours la même. Comme il me paroissoit en cela quelques équivoques, je fis alors quelques remarques dans la vue de vous les envoyer pour en avoir votre sentiment; mais je n'osay vous les envoyer, n'étant pas encore alors assez connu de vous; et quand depuis je les ay recherchées pour vous les envoyer, je n'ay pu les retrouver, quelque recherche que j'en aye faite dans mes paperasses, de sorte que je ne scais plus du tout ce qu'elles sont devenues. Quant à ce que vous dites dans votre derniere lettre que vous avez trouvé les forces en raison des quarrés des vitesses quand les corps sont égaux, je ne vois pas encore de quelles forces ou de quelles vitesses vous entendez parler. Vous verrez dans les Memoires de 1707 plusieurs sortes de forces que j'y ay determinées, sans cependant qu'il s'y en trouve aucune dans le raport que vous leur assignez. Par exemple

1. Dans les mouvemens accelerés en raison des puissances quelconques n, r, de tems écoulées t, ϑ, en prenant u, v, pour les vitesses acquises à la fin de ces tems; f, φ pour les forces vives productrices des augmentations instantanées de ces vitesses, telles qu'est la pesanteur, et m, μ pour les masses des corps mûs: cette hypothese de $u.v::t^n.\vartheta^r$ me donne

$$f.\varphi::mnt^{n-1}.\mu r\vartheta^{r-1}::\frac{mnu}{t}.\frac{\mu rv}{\vartheta}::mnu^{\frac{n-1}{n}}.\mu rv^{\frac{r-1}{r}}.$$

Ce qui dans le cas de $n = 1 = r$ suivant Galilée donneroit seulement $f.\varphi::m.\mu$.

2. Dans les mouvemens uniformes je trouve $f.\varphi::mu.\mu v$, dont f, φ ne sont forces vives qu'au premier instant, et seulement perseverantes sans augmentation ny diminution dans tous les autres; ce qui donne simplement $f.\varphi::u.v$ lorsque les corps sont égaux, et non pas $f.\varphi::uu.vv$. Ainsi il faut que l'hypothese qui vous a donné ce dernier raport, renferme quelque chose que je ne vois pas: je vous prie de me dire ce qui en est. Quant à ce qu'il s'est imprimé de physique en ce pais-ci, il y paroist depuis un an un in 12° intitulé N o u v e a u s y s t e m e o u n o u v e l l e e x p l i c a t i o n d u m o u v e m e n t d e s P l a n e t e s, p. M. V i l l e m o t etc. imprimé à Lion. Ce système est fondé sur les forces centrifuges circulaires: l'Auteur a de l'esprit, mais il n'est pas assez geometre. Comme on lui a fait beaucoup de difficultés, et moy quelques unes en mon particulier, ni étant venu voir, il pense à se réimprimer corrigé; et dans cette vue il en a (je crois) supprimé les exemplaires, n'en pouvant presentement trouver un pour donner à un ami. Si cependant celui que j'ay, vous est agreable, je le donneray à qui il vous plaira pour vous le faire tenir.

Si M. Carré, membre de notre Academie, n'étoit pas malade, il ne feroit pas (je crois) de façon de prendre soin de rendre public ce qui pouroit se trouver de considerable parmi les papiers de feu M. le Marquis de l'Hôpital; mais Madame la Marquise semble les vouloir garder pour M. son fis qui est encore au college, n'ayant que 14 à 15 ans. Je n'ay pas manqué de lui bienfaire vos remercimens de son livre en lui lisant l'endroit de votre penultieme lettre, où vous marquiez conserver toujours une grande estime pour feu M. son Mary; ce qui lui fist d'autant plus de plaisir que la memoire lui en est toujours tres chere: elle m'a aussi fort chargé de vous en bien remercier pour elle.

.M. Bernoulli m'a envoyé l'endroit d'une lettre que vous lui avez écrite, où vous demandez: Quis ille sit Gallus Fr. C. D. qui calculum nostrum attentat subinde, et quaedam Martio et Novembri anni superioris Actis Lips. inseri curavit. Tout ce que j'ay consulté de Geometres de ce pais-ci, ny moy, ne devinons point qui peut être cet Auteur, à moins que ce ne soit M. Rolle caché sous ce nom peut être imaginaire, s'étant desja caché de même autresfois sous celui de Remi Lochell. Quoyqu'il en soit, il est presentement si batu de l'oyseau, qu'il n'ose plus rien publier contre votre calcul, surtout depuis qu'il a perdu M. l'Abbé Galloys, son apuy en cette chicane, en laquelle M. Rolle m'a dit, lui même, que cet Abbé l'avait engagé. J'apprend cependant que M. Rolle ne laisse pas de decrier encore sourdement ce calcul par le monde. Quoyqu'il en soit, l'Auteur a eu raison pour son honneur de ne se pas faire connoitre.

Le livre du P. Reyneau de l'Oratoire, intitulé Analyse démontrée en deux in 4°, vient enfin de paroitre. Il m'a dit qu'il vous doit aussi envoyer par le P. Lelong, un billet de son libraire pour en recevoir de sa part un exemplaire en Hollande: j'espere que vous en serez content. C'est un homme d'une grand merite et du côté de sa capacité et du côté de sa modestie. Je suis toujours avec beaucoup d'estime et de respect etc.

A Paris ce 28. Avril (1708).

XIX.

Varignon an Leibniz.

Je ne scais rien de nouveau en ce pays-ci: l'Academie marche toûjours son train, c'est à dire que tout le monde y travaille toûjours avec ardeur. J'y continue les mouvemens faits dans des milieux resistans: ils me durent si longtems que parceque j'y ay trouvé plusieurs choses dignes de remarque, que je n'ay encore pu donner touttes à l'Academie, faute de tems d'y parler, tant la presse y est grande. Vous en verrez une partie dans les Mem. de 1708, le reste sera dans les autres. Je cherche presentement la courbe de projection dans les milieux resistans, tant en raison des quarrés des vitesses du corps jetté, qu'en raison des sommes faites de ces vitesses et de leurs quarrés; mais j'y suis embarassé, la composition de mouvement qui m'a servi à determiner la courbe qui se doit décrire dans un milieu resistant en raison des vitesses du corps jetté, n'ayant de lieu que dans cette hypothese-ci, et dans la vuide. Vous verrez aussi dans les Mem. de 1708, que M. Rolle y accuse de défaut la maniere ordinaire de construire les équations; et comme M. de la Hire, qui en a donné un traité il y a environ 30 ans, s'y croit attaqué, il y repond. M. Mery Anatomiste va aussi repondre à M. de la Hire, qui l'a attaqué sur un Memoire qu'il a donné en 1708 touchant l'organe immédiat de la vision que M. Mery croit avec M. Mariote être la corroïde. Il paroist ici depuis deux jours une nouvelle dissertation sur l'origine des Idées que l'Auteur prétend venir touttes des sens contre le sentiment de M. des Cartes, du P. Malbranche, et de Mrs. du Port-royal: c'est ainsi que le porte l'affiche que j'en vis il y a deux jours; je n'ay point encore vu cette dissertation. Vous voyez que je cherche jusque sur les murailles des nouvelles litteraires pour vous en faire part. Je vous souhaite par avance une heureuse année suivie de plusieurs autres heureuses de plus en plus. Tels sont les voeux sinceres etc.

A Paris ce 16. Decemb. 1709.

XX.

Leibniz an Varignon.

J'ay été ravi de revoir vostre main, et d'apprendre que vous êtes bien remis: cependant il est necessaire de se menager en meditant. La resistence du milieu meritoit d'être bien examinée. Le cas où les resistences soyent comme les quarrés des vistesses peut être supposé, mais il ne paroist gueres reel. Il est bon pourtant d'avoir moyen de determiner toutes ces choses pour perfectionner l'art de raisonner. Et je m'imagine qu'on y peut reussir. Il seroit peutestre utile pour l'Astronomie, d'examiner si quelque resistence du milieu pourroit varier le mouvement des Astres. La Lune sur tout, dont les variations nous sont les plus sensibles, meriteroit cet examen. Si j'avois du temps de reste, ce seroit une recherche où je me voudrois attacher: car le reglement du mouvement de la Lune seroit de grande importance pour la navigation.

M. Rolle pourroit être appellé pater difficultatum, comme un certain Ministre public; il paroit né pour faire des difficultés. Les constructions des équations, comme M. des Cartes, et M. Sluse encor mieux, les ont données, sont vrayes et bonnes, mais bien souvent ce ne sont pas les meilleurs, et il faut de tout autres adresses pour y parvenir. Ainsi il faut avouer que nôtre Analyse vulgaire est bien imparfaite. Quand j'étois en France, le seul M. Hugens connoissoit la methode de M. Sluse, et M. Ozannam, quand je luy en montray un échantillon, en fut tout étonné. Car auparavant il avoit tousjours oté toutes les inconnues suivant M. Descartes jusqu'à une seule, au lieu que M. Sluse en laisse deux pour avoir des lieux. Apres que j'en eus parlé à M. Ozannam, la chose devint connue, et ce ne fut que depuis que luy et M. de la Hire s'en servirent. Mais ce n'est pas encor le tout.

Sur la question de l'organe de la veue, l'opinion de M. Mariotte me parut aussi la mieux fondée.

Je ne say si vous avés vû dans les Actes de Leipzic, comment j'ay profité il y a deux ans ou environ de l'occasion que vous me fournistes, Monsieur, pour corriger non pas mon sentiment, mais bien mon expression sur le conatus centralis, que j'avois employé pour expliquer le mouvement des planetes par la circulation harmonique et la pesanteur. J'y ay dit aussi que je vous en avois obligation.

Celuy qui pretend que toutes les idées viennent des sens, n'entend point ce que c'est qu'une demonstration, ou bien la connoissance d'une verité necessaire. Car les sens ne sauroient fournir que des inductions qui ne prouvent jamais la necessité universelle de l'enontiation.

Vous semblés vous plaindre, Monsieur, de la sterilité du temps en matiere de lettres, et cependant vous marqués que l'Academie va tousjours son train, et qu'on y temoigne de l'ardeur. Ainsi j'ose vous supplier de me donner quelque part de ce qui s'y fait, autant que cela peut etre permis. Car les Memoires de l'Academie, et même les Journaux de France nous viennent bien tard. Je vous remercie cependant, Monsieur, des deux billets que vous m'envoyés, l'un pour les Memoires de l'an 1708, l'autre pour 2 exemplaires de la Connoissance des temps.

M. de la Hire ne poursuit-il pas ses meditations sur l'aimant? il y a encor des choses à découvrir. Il me semble que M. Buterfield pretendoit d'avoir fait des bonnes observations là dessus. N'en at-il rien fait imprimer?

M. des Billettes est-il encor en vie? si vous le voyés, Monsieur, ayés la bonté de le saluer de ma part, et de luy dire, que je souhaiterois qu'il ne laissat point perir quantité de bonnes pensées mecaniques. Continuet-on encor la description des arts mecaniques dans l'Academie? On l'avoit deja commencée de mon temps. Feu M. Buot qui avoit eté luy même ouvrier en fer et étoit devenu geometre je ne say comment, avoit entrepris la description des ouvrages de fer, et il y étoit propre.

Je vous souhaite aussi quantité de bonnes années au commencement de celle-cy, afin que vous puissiés continuer à enrichir le public, et je suis etc.

XXI.

Varignon an Leibniz.

M. Homberg nous fist voir il y a 8 ou 10 jours à l'Academie un nouveau phosphore: c'est une espece de sel qu'il tire des excremens humains; cette poudre mise sur quelque chose, comme sur du papier, y met presqu' aussitost le feu, non en l'enflamant, mais en le brulant comme un charbon allumé qu'on auroit mis dessus. Elle y met le feu plus vite le jour que la nuit; et sa vertu dure peu, à moins qu'elle ne soit dans une phiole bien fermée; encore l'y perd elle en assez peu de tems.

Puisque l'occasion se presente, voici quelque chose de ce que j'ay trouvé sur les forces centrales inverses, c'est à dire, pour trouver la courbe, la loy des forces centrales étant donnée. M. Bernoulli m'écrivit jadis avoir resolu ce probleme: je le tentay legerement en le prenant en général, comme je croyois qu'il avoit fait, c'est à dire, pour des tems en raison quelconque, et sans y supposer d'autre quadrature que celle de l'équation en premieres differences que je cherchois; et ne trouvant rien de tel, je lachay prise aussi tost, ne m'opiniatrant jamais contre les difficultés, prevenu que lorsqu'apres quelques tentatives je ne trouve rien, c'est que je ne suis pas dans la veritable route, et que je dois attendre du hazard qu'il m'en presente une autre, qui ne me vient d'ordinaire qu'apres avoir oublié celle-là, dans laquelle la depense d'attention que j'ay faite, et même de calcul, me retient toujours malgré moy. M. Bernoulli (en prenant (fig. 34) $AO = a$, $BO = x$, $AL = z$, $bN = dy$ et φ pour les forces centrales données en x et en constantes) m'en envoya il y a quelques jours cette formule $dz = \frac{aacdx}{x\sqrt{abxx - xx \times \int \varphi dx - aacc}}$ avec l'Analyse qui à son ordinaire est de plus ingenieuses, dans laquelle voyant qu'il prenait les élémens de tems par Bb en raison des aires centrales BOb, et qu'il supposoit de plus une quadrature $\int \varphi dx$ que je voulois eviter. Cette formule et une pareille et en pareil cas que M. Herman m'envoya aussi peu de jours apres à l'occasion de celle-là que M. Bernoulli lui avoit envoyée comme à moy, m'engagerent à voir si mes formules directes des forces centrales ne me donneroient point aussi la même chose. Elles m'en donnerent tout aussi tost deux solutions que j'envoyai sur le champ à M. Bernoulli pour repondre aux deux qu'il m'avoit envoyées. La teste ainsi echaufée sur cette matiere, m'en fist trouver le lendemain plusieurs autres infiniment plus générales, c'est à dire, pour tous les raports de tems imaginables, en supposant cependant (comme lui) la quadrature de $\int \varphi dx$. De 18 formules des forces centrales directes, que j'ay données dans les Mem. de 1701 pag. 31, 32, quatorze m'ont donné la solution que je cherchois dans toutte cette étendue, en prenant (comme dans ces Memoires) $AO = a$, $AL = z$, $BO = y$, $bN = dx$, $Bb = ds$, $dt = pdx$ pour l'élément de tems employé à parcourir Bb, et f pour la force centrale en chaque point B suivant BO, les grandeurs p, f étant données à volonté en y et en constante. En voici deux exemples, par lesquels vous jugerez aisément de tous les autres; dans le premier je vais supposer ydx constant, et dans l'autre tout variable à volonté.

Solution I. du probleme en question, dans l'hypothese ydx constante.

Cette hypothese dans les Mem. de 1701 pag. 32. art. 19 donne $f = -\frac{dsdds}{dydt^2}$ (en prenant $dt = pdx$) $= -\frac{dsdds}{ppdydx^2}$; et conséquemment $\frac{2fppdy}{yy} = -\frac{2dsdds}{yydx^2}$, dont l'integrale (à cause de ydx constante) est $2 \times \int \frac{fppdy}{yy} = -\frac{ds^2}{yydx^2} + n$ constante arbitraire, ou $2yydx^2 \times \int \frac{fppdy}{yy} = nyydx^2 - ds^2 = nyydx^2 - dx^2 - dy^2$; ce qui donne $dy^2 = nyydx^2 - dx^2 - 2yydx^2 \times \int \frac{fppdy}{yy}$, ou $dy = dx\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int \frac{fppdy}{yy}}$, ou bien aussi $dx = \frac{dy}{\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int \frac{fppdy}{yy}}}$, de sorte qu'ayant $OL(a) . OB(y) :: Ll(dz) . Nb(dx) = \frac{ydz}{a}$, l'on aura $\frac{ydz}{a} = \frac{dy}{\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int \frac{fppdy}{yy}}}$ (en prenant ac pour l'unité, et $ab = n$) $= \frac{acdy}{\sqrt{abyy - aaco - 2yy \times \int \frac{fppdy}{yy}}}$, ou $dz = \frac{aacdy}{y\sqrt{abyy - aaco - 2yy \times \int \frac{fppdy}{yy}}}$. Ce qu'il faloit trouver.

Solution II. sans rien supposer de constant parmi les indeterminées.

La premiere $f = \frac{dxdyds^2 + yds^2ddx - ydxdsdds}{ydydxdt^2}$ des formules infiniment générales directes de la pag. 31 des Mem. de 1701 donne $\frac{2ydydx^3ds^2 + 2yyds^2dxddx - 2yydx^2dsdds}{y^4 dx^4} = \frac{2dt^2}{yydx^2} \times fdy$ (en prenant encore $dt = pdx$) $= \frac{2fppdy}{yy}$, dont l'integrale est $2 \times \int \frac{fppdy}{yy} = - \frac{ds^2}{yydx^2} + n$ constante, et le reste comme dans la solut. 1.

Corol. Si l'on suppose ici (comme Mrs. Bernoulli et Herman) $dt = ydx$, la precedente supposition générale de $dt = pdx$ quelconque, donnera pour ce cas-ci $p = y$, ce qui y reduira la precedente équation générale à

$$dz = \frac{aacdy}{y\sqrt{abyy - aacc - 2yy \times \int fdy}}$$

qui (au .... pres) est celle de ces deux Messieurs.

Douze autres de mes 18 formules directes donnent de même la precedente solution générale, et de plus cette autre

$$dz = \frac{aacdy}{y\sqrt{abyy - aacc - 2aayy \times \int \frac{fqqdy}{y^4}}}$$

en y prenant $dt = qdz$ quelconque dont q, comme p dans l'autre, soit donnée à volonté en y et en constantes, aussi bien que f.

Outre ces 18 formules directes de la pag. 31, 32 des Mem. de 1701 dont 14 donnent l'une et l'autre de ces deux inverses générales, et dont les 12 dernieres sont déduites des six premieres en y supposant dx, dy, ds, dz successivement constantes, l'on peut encore en deduire une infinité d'autres de ces six premieres en y supposant de même toutte autre chose de constante, desquelles nouvelles formules directes plusieurs donneront ces deux inverses: par exemple, en y supposant aussi $\frac{dy}{y}, \frac{ds^2}{y}, y^m dx, y^m ds$ etc. successivement constantes, j'en ay encore deduit tout autant d'autres formules directes qui ont donné encore ces inverses générales, de sorte que les formules directes des forces centrales m'ont fourni plus de 20 solutions de ce probleme, en le resolvant par $dt = pdx$ et par $dt = qdz$, lesquelles hypotheses donnant $pdx = qdz = \frac{aqdx}{y}$, donnent $p = \frac{aq}{y}$, et $q = \frac{py}{a}$, lesquelles valeurs de p, q, substituées en leurs places dans les precedentes formules générales inverses, les changeront l'une en l'autre, reciproquemment, de sorte que les solutions s'en prouveront mutuellement sans avoir besoin d'en faire deux problemes.

Je suis persuadé que si M. Bernoulli eust pensé à cette généralité, il n'auroit pas manqué de trouver aussi la même chose; mais je doute que sans le secours de mes formules directes (auxquelles il ne paroist pas avoir pensé non plus) il l'eust trouvée aussi simplement et en autant de manieres. Quant à la construction qu'il donne de son équation, et à la maniere dont il fait voir que la courbe resultante ne peut être que section conique quand les forces centrales sont données en raison reciproque des quarrés des distances du mobile au centre de ces forces, rien asseurement ne marque plus de sagacité: c'est aussi ce que je trouve de plus beau dans son Ecrit, que tout y soit digne de lui; je vous en dirois davantage si vous ne la connaissiez pas, et si jamais je donne ceci, je ne manqeray pas de lui rendre toutte la justice qui lui est deue, aussi bien qu'à M. Herman, me faisant honneur d'en faire aux autres: jugez de là comment je parle de vous quand l'occassion s'en presente, personne n'ayant plus d'estime et de veneration pour vous etc.

A Paris ce 4. Decembr. 1710.

XXII.

Leibniz an Varignon.

Je suis bien aise d'apprendre vos progrès dans la recherche des inclinaisons centrales. Je me souviens que lorsqu'avant plusieurs années j'examinay les causes physiques des mouvemens célestes, je trouvay que le probleme se reduisoit aux quadratures. M. Bernoulli a bien fait de demonstrer ce que M. Newton n'avoit pas demonstré assés, que les seules coniques satisfont dans le cas en question. Apres cela il faudra examiner ce qui vient quand le centre même est mobile et quand un même mobile est attiré par deux centres, ou même d'avantage tout à la fois. Il importeroit d'y venir, pour voir si le mouvement de la Lune pourroit être determiné passablement par ce moyen. Car elle tend en même temps vers la terre et vers le soleil, pendant que la terre est mobile elle-même. J'ay mis autres fois dans le Journal de Paris une composition des tendences qui pourra servir icy. Si le même mobile M (fig. 35) a en même temps plusieurs tendences, comme MA, MB, MC, sa tendence composée ou effective MD passera par E, centre de gravité des points A, B, C, et sera à ME, comme le nombre des tendences simples est à l'unité. Il y a lieu de former encor quantité de beaux theoremes à cette occasion, qui se presentent aisement quand on y pense. Vous aurés vû dans le Journal de Leipzig depuis que je n'ay pas eu de vos nouvelles, comment une difficulté qui vous étoit venue dans l'esprit, m'a donné occasion de me mieux exprimer circa conatus centrifugos.

Ne connoissés vous pas, Monsieur, un certain Monsieur F. D. C. A. V. qui envoye de temps en temps quelques pieces aux Actes de Leipzig et qui par exemple au May 1709 a fait quelque remarque sur l'Analyse demontrée du R. P. Raineau?

Il me manque beaucoup de vos Memoires, et même ceux de l'an 1703 me sont venus sans les figures. Un homme, Monsieur Nuguet a passé ici l'esté passé et m'a dit qu'il avoit trouvé quelque chose sur le moyen d'exciter le phosphore dans le vuide; je ne say si cela vous est connu.

J'ay oublié de dire qu'aux tendences centrales on pourroit adjouter la resistence du milieu. Or je trouve que cette resistence est de deux especes; l'une est la resistence de la masse même du milieu que le mobile peut deplacer, l'autre est la resistence des superficies et vient à une espece de tenacité dans le milieu ou d'asperité, pour ainsi dire, dans le mobile. Mais je trouve que l'une et l'autre resistence se reduit enfin à une semblable estime, et que tousjours les pertes des velocités sont proportionnelles aux vistesses. Quant à la resistence de la masse, la chose est claire d'elle même; mais à l'egard de la resistence qui vient des superficies, c'est comme si un globe rouloit sur un tapis, où il doit surmonter la force elastice de quantité de petits poils qu'il plie en courant; d'où il suit, que la perte de sa velocité est proportionnée à la longueur de l'espace parcouru. Soit la velocité totale g, la velocité restée v, la longueur parcourue l, le tems t, la velocité perdue sera $g - v$, et les $g - v$ seront comme les l, donc en differentiant les — dv seront comme dl. Mais les dl sont comme les vdt, donc les — dv sont comme les vdt. Et par consequent les elemens du temps étant egaux, les diminutions des velocités sont proportionnelles aux velocités mémes du mobile à chaque moment. Si le mobile perdoit continuellement de sa velocité par la resistence du milieu, sa circulation approcheroit de plus en plus de la ligne droite, si le milieu n'avoit luy même un mouvement propre à entretenir la circulation. Vous m'obligerés, Monsieur, si vous me donniés part quelques fois des nouveautés literaires de l'Academie que j'apprends tard, et je suis etc.

Hannover le 12. Fevrier 1711.

XXIII.

Varignon an Leibniz.

A Paris ce 23. Mars 1711.

Le Pere Lelong m'a rendu la lettre du 12. Fevrier que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire. Vous y parlez d'une composition de mouvemens que vous avez mise autrefois dans le Journal de Paris: je l'y ai vue, et j'en fais usage (en vous citant) dans une réimpression que je prepare de mon Projet d'une nouvelle Mecanique ou Statique par les mouvemens composés, imprimé pour la premiere fois en 1687. Mais je n'en voy point d'usage dans la recherche des formules des forces centrales. J'ay aussi demontré dans les Mem. de 1707 pag. 306 corol. 11, que dans les mouvemens primitivement uniformes retardés par des resistances en raison des vitesses restantes, les pertes de vitesses sont comme ces vitesses elles mêmes dans des instans égaux, ainsi que vous le dites dans votre derniere lettre; et là je cite ce que vous en avez dit dans les Actes de Leipsik de 1689 pag. 40 et 41 art. 1.

Quant aux forces centrales à plusieurs foyers, j'en ay trouvé dès il y a long-tems une formule generale pour tant de forces centrales qu'on voudra supposer dans un mobile quelconque à chaque point de la Courbe qu'il decrit, tendantes à autant de centres ou foyers placés où l'on voudra par raport à cette Courbe quelconque, et par raport à son plan: c'est à dire, soit que ces centres ou foyers soient tous ou quelques uns dedans, et les autres au dehors de cette courbe; soit aussi que ces centres soient tous dans son plan, ou quelques uns au dessus, et les autres au dessous de ce même plan: je donnay cette formule generale avec quelques applications dans les Mem. de 1703 pag. 216 etc. Il est vray que je ne considerois alors le mobile que dans un milieu sans resistances; mais ce que j'ay donné depuis dans les Mem. de 1707, 1708 etc. touchant les mouvemens faits dans des milieux de resistances quelconques, m'a conduit à une formule aussi generale de ce même Problême des mouvemens faits en lignes courbes quelconques dans ces milieux avec des forces tendantes encore d'un même mobile à tant de foyers qu'on voudra, placés aussi où l'on voudra par raport à chaque courbe que ce mobile tracera, quelle qu'elle soit, et par raport au plan de cette même courbe. Là voici cette formule.

I. Soit une Courbe quelconque HEG (fig. 36) decrite dans un milieu de resistances aussi quelconques par le mobile E de tant de forces centrales qu'on voudra en chaque point E de cette Courbe, tendantes à autant de foyers ou centres N, C, D, K, F, L, M etc. placés à volonté: par exemple, C, K, F, M hors du plan de cette Courbe HEG, et à telles distances CV, KX, FY, MZ qu'on voudra de lui, savoir (si l'on veut) C, F, d'un côté de ce plan, et K, M, de l'autre: tous les autres centres ou foyers N, D, L etc. étant (si l'on veut aussi) dans ce même plan, auquel CV, KX, FY, MZ sont perpendiculaires en V, X, Y, Z, par lesquels points sur ce plan soient imaginées au point E les droites VE, XE, YE, ZE. Soient ensuite de l'autre extremité e de l'element Ee de la Courbe, sur EN, EV, ED, EX, EY, EL, EZ etc. prolongées (s'il est necessaire) du côté de E, autant de petites perpendiculaires en, ev, eδ, ex, ey, el, ez etc. qui les rencontrent en n, v, δ, x, y, l, z etc.

II. Cela fait, si l'on appelle ds l'element Ee de la courbe; u la vitesse dont il est parcouru; dt l'element de tems employé à le parcourir; z la resistance quelconque du milieu qui s'y oppose; et N, V, D, X, Y, L, Z etc. ce que les forces centrales du mobile tendantes aux foyers donnés N, C, D, K, F, L, M etc. en ont de tendantes en N, V, D, X, Y, L, Z etc. foyers de celles-ci: l'on aura ici en general pour toutes les positions possibles de ceux-là par raport à la Courbe HEG en chaque point E, par raport à son plan, et par raport à un autre plan QR perpendiculaire à celui-là, et à cette courbe en chaque point E: l'on aura, dis-je, en general

$$1.\quad ds = \left\{ \begin{array}{l} N \times En + V \times Ev + D \times E\delta + X \times Ex + \text{ etc.} \\ -Y \times Ey - L \times El - Z \times Ez - \text{ etc.} \mp udu \end{array} \right\} : \pm z$$

$$2.\quad ds = \left\{ \begin{array}{l} N \times En + \frac{C \times EV \times Ev}{EC} + D \times E\delta + \frac{K \times EX \times Ex}{EK} + \text{ etc.} \\ -\frac{F \times EY \times Ey}{EF} - L \times El - \frac{M \times EZ \times Ez}{EM} - \text{ etc.} \mp udu \end{array} \right\} : \pm z$$

en appelant aussi N, C, D, K, F, L, M etc. les forces totales tendantes aux veritables foyers donnés N, C, D, K, F, L, M etc.

La raison de ces deux formules generales paroitra sur la fin de l'art. 5 plus brievement et plus simplement qu'il ne seroit possible de la rendre ici, où il faudroit des digressions pour expliquer ce qui se va presenter naturellement dans cet art. 5.

III. Si l'on veut presentement que tous ces foyers donnés soient dans le plan de la courbe HEG, cette hypothese qui rend C en V, K en X, F en Y, M en Z etc. rendant ainsi EV = EC, EX = EK, EY = EF, EZ = EM etc., la seconde ces deux Regles generales du precedent art. 2 se changera ici en

$$ds = \left\{ \begin{array}{l} N \times En + C \times Ev + D \times E\delta + K \times Ex + \text{ etc.} \\ -F \times Ey - L \times El - M \times Ez - \text{ etc.} \mp udu \end{array} \right\} \pm Z,$$ qui sera la generale de ce cas-ci pour tant de forces centrales qu'on voudra supposer au mobile en chaque point E de la Courbe HEG, tendantes à autant de foyers placés où l'on voudra dans le plan de cette Courbe, sur lequel en, ev, eδ, ex, ey, el, ez etc. se trouveront ici perpendiculaires en n, v, δ, x, y, l, z etc. aux rayons ou directions veritables EN, EC, ED, EK, EF, EL, EM etc. des forces totales N, C, D, K, F, L, M etc. tendantes aux veritables foyers donnés de ces noms N, C, D, K, F, L, M etc.

IV. Quant aux signes qui se trouvent dans cette Regle de l'art. 3 et dans les deux de l'art. 2, il est à remarquer

1. Que les signes superieurs de $\mp$du, $\pm$z sont pour le cas de mouvement quelconque de E vers H, et les inferieurs pour celui de E vers G.

2. Que suivant cela, quelqu'autre nombre de forces centrales qu'ait le mobile en chaque point E de la Courbe HEG, tendantes

à autant de centres ou foyers placés tout autrement qu'ici; tout ce qui se trouvera de ces foyers du côté de H par rapart au plan QR perpendiculaire (hyp.) à celui de cette courbe, et à celle en ce point E, rendra positifs tous les termes affectés des expressions des forces qui y tendent, ou de leurs derivées suivant le plan de la courbe, telles que sont les expressions V, X, Y, Z des forces ainsi derivées des totales C, K, F, M dans l'art. 2. Et qu'au contraire tous les affectés des expressions des forces tendantes de l'autre côté G de ce plan QR, ou des expressions de leurs derivées suivant le plan de la Courbe, seront negatifs.

3. Si parmi ces forces centrales il s'en trouvoit qui au lieu de tendre vers leurs foyers ou centres, tendissent directement à contre-sens, comme de chacun de ces centres à la circonference, c'est à dire, tendissent à éloigner le mobile E de leurs foyers ou points de concours de leurs directions, au lieu de tendre (comme ici) à l'en approcher; elles ou leurs derivées suivant le plan de la Courbe, rendront alors negatifs les termes qu'elles auroient rendus positifs, et au contraire positifs ceux qu'elles auroient rendus negatifs en tendant vers leurs centres comme dans le precedent nomb. 2.

4. Lorsqu'enfin le mobile se trouve en quelque point E de la Courbe, où le plan QR passe par un ou par plusieus foyers de ces forces centrales, les tendantes à ces foyers ou directement à contre-sens, ou bien leurs derivées suivant le plan de la courbe, ne contribuant en rien à faire avancer ou à retarder le mobile suivant cette courbe, et se trouvant ainsi nulles par raport à l'un et à l'autre de ces deux effets, doivent rendre alors nuls tous les termes que sans cela elles auroient rendus positifs ou negatifs comme dans les nomb. 2. 3.

5. Dans tout cela (nomb. 2. 3. 4.) il est encore à remarquer que lorsqu'il se trouve des centres ou des foyers des forces centrales du mobile hors le plan de la Courbe qu'il trace, ces centres ou foyers doivent être tellement placés de part et d'autre de ce plan que les forces derivées de celles-là perpendiculairement à ce plan, par exemple, suivant CV, KX, FY, MZ dans la figure de l'art. 2. fassent des sommes égales directement contraires; autrement le mobile ne se meuvroit plus dans un même plan.

V. Suivant cela, si le mobile n'avoit qu'une force centrale en chaque point E de la courbe HEG, son centre devroit être dans le plan de cette courbe, comme (par exemple) D dans les figures precedentes, où tous les autres alors nuls, reduiroient ces figures à celle-ci (fig. 37) et pour lors les formules generales des art. 2. 3 se reduiroient ici à $ds = \frac{D \times E\delta \mp udu}{\pm z}$, de sorte qu'en prenant ici $p = D$ pour cette force ou pesanteur quelconque tendante à son foyer D, son rayon $ED = y$, et consequemment $E\delta = dy$, l'on auroit en ce cas $ds = \frac{pdy \mp udu}{\pm z}$.

J'ay envoyé cette derniere formule à M. Bernoulli à l'occasion d'une solution qu'il m'a envoyée, et que j'ay donnée des à part à l'Academie, pour trouver la force centrale d'un mobile qui decriroit une Courbe quelconque donnée dans un milieu resistant en raison composée de sa densité et des puissances quelconques des vitesses du mobile à chaque point de cette Courbe: dans laquelle solution il a fait évanoüir les vitesses (u) avec beaucoup d'adresse par la maniere dont il s'est servi dans les Actes de Leipsik de 1679 pag. 115. C'est aussi cette formule que j'ay deduite la premiere de $ds = \frac{\pm udu}{\varphi \mp z}$, dont φ exprime un force de même direction que la vitesse u dont elle est acceleratrice ou retardatrice suivant cette direction, les signes superieurs y étant pour le premier cas, et les inferieurs pour le second: de sorte qu'en prenant la tangente en E pour cette direction, cette hypothese rendant $\varphi = \frac{pdy}{ds}$, il en resulte $ds = \frac{pdy \mp udu}{\pm z}$. Cette autre formule $ds = \frac{\pm udu}{\varphi \mp z}$ m'est venue de la generale $\frac{dt}{a} = \frac{dv - du}{z}$, que j'ay donnée dans les Mem. de 1707, 1708 pour des mouvemens faits dans des milieux de resistances quelconques $= z$ à chaque instant $= dt$, en y substituant les forces motrices $= \varphi$ au lieu des vitesses primitives $= v$ telles qu'elles seroient dans un milieu sans resistance. J'ay encore trouvé cette Regle $ds = \frac{\pm udu}{\varphi \mp z}$ par une autre voye independante de celle-là, et aussi simple qu'elle: c'est en y substituant au lieu de φ, le total des forces à chaque point de la Courbe suivant sa tangente en ce point, resultantes de tant de forces centrales qu'on voudra supposer tendre à autant de foyers placés à volonté, ou directement à contre-sens, que me sont venues les deux formules generales de l'art. 2.

VI. Il est à remarquer dans toutes les formules ou Regles précedentes que si la Courbe quelconque HEG étoit decrite d'un mouvement uniforme malgré les resistances (z) du milieu, elles auroient alors toutes $udu = 0$; cette hypothese de u constante, en rendant les accroissemens ou les decroissemens $du = 0$. De la on voit

1. Que dans le cas d'un seul foyer D (art. 5) l'on aura generalement $ds = \frac{pdy}{\pm z}$ pour toutes sortes de courbes; et consequemment $z.p::dy.ds$ (soit dans la fig. 37 la tangente EO qu rencontre en O la droite OD perpendiculaire au foyer D sur le rayon EO)$::ED.EO$, c'est à dire en general pour toutes sortes de courbes dans ce cas-ci d'une seule force centrale (p) toujours tendante en D, que pour decrire chacune de ces courbes d'un mouvement uniforme quelconque, la resistance (z) du milieu y devroit toujours être à cette force centrale ou pesanteur (p) du mobile, comme le rayon ED de cette force seroit à la tangente EO correspondante en chaque point E de cette courbe, ou (à cause de QR perpendiculaire (hyp.) en E à la courbe ou à sa tangente EO) comme le sinus de l'angle DER seroit au sinus total. D'où l'on voit que si cette courbe HEG de la fig. 37 art. 5 étoit un cercle dont le foyer D fust le centre, ce cas qui rend $dy\,(E\delta) = 0$, rendant aussi la resistance $z = 0$ dans la precedente formule $ds = \frac{pdy}{z}$, requieroit un milieu sans resistance, tel qu'on suppose d'ordinaire le vuide, pour qu'un cercle y pust être decrit du mouvement uniforme par un mobile d'une seule force centrale tendante au centre de ce cercle.

Si au contraire le foyer D de cette force étoit infiniment éloigné, en sorte que toutes les ED fassent parallèles entr'-elles, et que le cercle HEG eust R pour centre, du quel on menast dans la fig. 37 RP perpendiculaire sur ED, cette même formule $ds = \frac{pdy}{\pm z}$ donnant ici $z.p::dy.ds::ED.EO::RP.ER$ fait voir que la resistance (z) du milieu devroit être à la pesanteur (p) du mobile E, en raison de l'abscisse RP d'un diametre ainsi dirigé du cercle à son rayon ER, pour qu'il y pust être encore decrit d'un mouvement uniforme. Cela suit aussi tout d'un coup du general conclu d'abord dans ce nomb. 1.

2. Si la Courbe HEG étoit une Ellipse ou une Hyperbole dont les foyers fussent D, L ou L, M, et qu'elle fust decrite d'un mouvement uniforme par un mobile E de deux forces centrales tendantes à ces deux foyers, une à chacun en chaque point E de cette courbe: la formule generale de l'art. 3 se reduiroit ici à $ds = \frac{D \times E\delta - L \times El}{\pm z}$ pour l'ellipse de la fig. 38, et à $ds = \frac{-L \times El - M \times Ez}{\pm z} = \frac{L \times El + M \times Ez}{\mp z}$ pour l'hyperbole de la fig. 39. Et ces deux courbes ayant, la premiere $E\delta = El$, et la seconde $El = Ez$, l'on y aura pour l'ellipse (fig. 38) $z . D - L :: El . ds (Ee)$ et pour l'hyperbole (fig. 39) $z . L + M :: El . ds (Ee)$. D'où l'on voit que la resistance z du milieu devroit être à la difference $D - L$ des forces centrales D, L du mobile E sur l'ellipse, et à la somme $L + M$ des deux autres L, M sur l'hyperbole, comme le sinus de la moytié de l'angle DEL dans l'ellipse, et comme le sinus de la moytié du complement de l'angle MEL sur l'hyperbole, seroit au sinus total, pour que le mobile E pust decrire d'un mouvement uniforme chacune de ces deux courbes avec deux forces centrales tendantes chacune à chacun des deux foyers de ces deux mêmes courbes dans ce milieu resistant.

3. On trouvera la même chose pour la Parabole HEG (fig. 40) laquelle n'est qu'une Ellipse ou une Hyperbole de foyers D ou M infiniment éloignés de son determinable L: en cas de mouvement uniforme du mobile E en la decrivant, on y trouvera, dis-je, egalement (comme dans le nomb. 2) $z . D - L :: El . ds (Ee)$, et $z . L + M :: El . ds (Ee)$. C'est à dire que la resistance z du milieu y devroit être encore à la difference $D - L$, ou à la somme $L + M$ des forces centrales du mobile E, tendantes suivant ED, EL, ou suivant EL, EM, comme le sinus de la moytié de l'angle DEL, ou comme le sinus de la moytié du complement de l'angle MEL, seroit au sinus total; et consequemment aussi (en imaginant la tangente ET, et l'appliquée EA à l'axe TL de cette parabole) comme la soutangente AT seroit à la tangente ET de cette parabole supposée decrite d'un mouvement uniforme.

On pouroit tirer encore plusieurs autres consequences des

Regles precedentes des art. 2. 3; mais je ne voy point comment on les pouroit appliquer au mouvement de la Lune tendante à la fois au Soleil et à la Terre dont le centre en seroit un foyer mobile, ne voyant point encore comment on peut faire entrer, c'est à dire, exprimer dans ces formules la mobilité ou plus tot le mouvement effectif des foyers. Parlons d'autre chose, les forces centrales ne m'ayant desia entrainé que trop loing pour une lettre: ains je ne diray rien ici de la maniere de trouver les rayons osculateurs des courbes à plusieurs foyers placés encore où l'on voudra, que j'ay aussi donnée dans les Mem. de 1703 pag. 218 etc.

S'il vaquoit quelque place d'Associé Etranger dans votre Academie de Berlin, l'estime que j'en fais, me la feroit souhaiter, et vous me feriez plaisir de me l'accorder en cas que la Religion Catholique n'y soit pas un obstacle.

Pour nouvelles de ce pays-ci, il est y est revenu depuis peu de Genes un Anatomiste nommé Desnoües, qui en a raporté plusieurs Anatomies de corps entiers dissequés, et modelés en cire jusqu'aux moindres vaisseaux d'une maniere si naturelle pour la configuration et les couleurs, qu'on y est presque trompé. Feu l'Abbé Zumbo Sicilien, qui mourut ici il y a 2 ou 3 ans, et qui y avoit apporté une teste humaine ainsi copiée en cire jusqu'aux moindres parties avec une nativité et un descente de croix pareillement en cire, qui ont fait et font encore l'admiration de tous ceux qui les ont vues, avoit commencé quelques choses de ces Anatomies du Sr. Desnoües à Genes: celui-ci y a fait continuer ce travail, et le fait encore continuer ici sous la direction par un nommé de la Croix Sculpteur, qui imite la nature jusqu'à tromper les yeux en plusieurs choses, et à les surprendre dans tout ce qui seroit de ces fausses Anatomies chez le Sr. Desnoües. Tout ce que je vous en pourois dire, n'aprocheroit jamais de ce que vous en penseriez si vous les aviez vues; tous ceux qui les ont vues, en sont enchantés.

On ne devine point quel peut être l'Auteur F. D. C. A. V. Ces lettres pouroient signifier Francois De Catelan, Abbé de V. s'il est vray qu'il s'appelle Francois, et que le nom de son benefice commence par une V: je ne l'ay encore pu scavoir, cet Abbé ayant rompu tout commerce depuis longtems avec les gens de lettres. Il me venoit voir jadis presque tous les mois, et moy reciproquement lui; mais depuis sa contestation avec feu M. le

Marq. de l'Hôpital à l'occasion des infiniment petits, il a cessé tout à fait de paroitre parmi les gens de lettres; et quand on a été chez lui pour le voir, son laquais même a toûjours repondu qu'il n'y étoit pas, aussi bien au P. Malbranche, son meilleur ami, qu'aux autres. Tout cela soit dit, je vous prie, entre nous; car je n'ay pas cessé pour cela de l'estimer, l'ayant toûjours reconnu un parfaitement honnete homme et de beaucoup d'esprit, mais un peu trop vif, ce qui l'a quelques fois fait aller un peu trop vite en certaines choses, sour tout lorsqu'il s'est agi de la doctrine de M. Descartes dont il est zelé defenseur; et s'il y a fait quelques fautes, je les ay toujours attribuées à sa trop grande precipitation, le connoissant d'ailleurs homme habile et de merite.

M. l'Abbé Bignon a fait scavoir à l'Academie votre sentiment sur la Cause du mouvement du Mercure dans les Barometres. Votre raison, qu'un corps qui tombe dans un fluide, en rend la colonne moins pesante que lorsqu'il y nageoit, me paroist evidente, toutte vitesse à part: puisque si (toutte vitesse à part) ce corps en tombant pressoit autant ou plus le fluide que lorsqu'il y nageoit, le fluide (par reaction toûjours egale à l'action) lui resisteroit autant ou plus que lorsqu'il se soutenoit en repos; et par consequent le corps qui y auroit nagé, n'y pouroit pas tomber, ce qui est contraire à l'experience que nous avons des vapeurs et de la pluye. Il n'y a donc que la vitesse de ce corps en tombant, qui pust augmenter la pesanteur de la colonne du fluide où il tomberoit; mais l'experience que vous avez faite faire à un des deux Professeurs contestant sur cette matiere, repond (ce me semble) assez à cette difficulté pour pouvoir dire que la cause de la descente du vif argent dans la branche scêlée du Barometre en tems de pluye, et de son ascension en beau tems, vient de ce que la chutte de l'eau en pluye rend l'air moins pesant que lorsqu'elle y nage en vapeurs. Cette raison seroit, dis-je, aussi excelente qu'elle est ingenieuse, s'il étoit vray que le Mercure descendist toûjours dans la branche scêlée du Barometre en tems de pluye, et qu'il y montast toujours en tout autre tems. Mais M. de la Hire et M. Maraldi, qui depuis longtems tiennent l'un et l'autre Registre des observations qu'ils font regulierement toutte l'année sur le Barometre et sur le Thermometre, dirent qu'il n'étoit pas vray que le Mercure descendist toûjours dans la branche scêlée du Barometre en tems de pluye, et qu'il y remontast toûjours en beau tems, ayant (dirent-ils) vu plusieurs fois l'une et l'autre effet arriver en pareils tems: M. Maraldi ajouta même qu'en tems de pluye le Mercure montoit presqu'aussi souvant dans le Barometre, qu'il y descendoit. Cela étant, vostre raison, quoique des plus ingenieuses, ne seroit plus valable: j'en ay une autre depuis long-tems, qui me paroist satisfaire à touttes ces bizareries; mais ce sera pour une autre lettre, celle-ci n'étant desia que trop longue.

XXIV.

Leibniz an Varignon.

Je vous dois remercier des soins que vous prenés de ce qui me regarde touchant les livres que je devrois avoir receus. Je devois sans doute marquer plustot ce qui me manquoit, sans me reposer sur la bonne foy ou sur l'exactitude des gens qui s'en etoient chargés. J'espere que je pourray acheter encor ce que je n'ay point receu. Messieurs Frisch et Bohm paroissent plus exacts que M. Delorme, il semble même que ce dernier n'en use pas tousjours comme il devroit.

Je vous remercie aussi bien fort de la peine que vous aves prise de me communiquer votre calcul et vos formules des forces centrales, même en cas de la resistance du milieu. Quand il y a plusieurs foyers, ma methode que je donneray un jour dans le Journal de Paris peut servir aussi. Car supposé qu'un mobile M (fig. 41) soit solicité par des forces paracentriques des foyers ${}_1F$, ${}_2F$, ${}_3F$, et que ces solicitations quant à leur grandeur et direction soyent comme M_1N, M_2N, M_3N, on n'a qu'à trouver G centre de gravité des points ${}_1N$, ${}_2N$, ${}_3N$ et MG prise trois fois marquera la grandeur et la direction de la solicitation composée ou totale.

Puisque je vois que la recherche du mouvement, lors que le mobile est solicité par un centre ambulant, demande encor quelque meditation, j'y penseray à mon loisir.

Pour ce qui est de ma pensée sur les raisons des phenomenes du Barometre, dont j'avois parlé à Monsieur l'Abbé Bignon, je crois bien que la difference de la pesanteur de la colonne d'air selon que les particules de l'eau y descendent ou y sont soutenues, n'est pas l'unique cause de tous ces phenomenes, mais il me semble qu'elle ne peut manquer d'y contribuer beaucoup, puisqu'en effect, on ne peut point nier, que la colonne en doit devenir moins ou plus pesante. Mais il y faut sur tout joindre l'effect des vents, lesquels emportent souvent une partie de la colonne de l'air, en amenent d'autre air à la place, et compriment l'air ou le rarifient, quand deux vents sont convergens ou divergens. L'air sera encor soutenu par le vent violent, et particulierement par un vent qui va s'eloigner de la terre et tend en quelque façon de bas en haut, ce qui contribue aussi à rarifier l'air, comme il sera pressé vers la terre et même comprimé par un vent qui tend de haut en bas. Enfin certaines vents, amenant de l'humidité avec eux, contribuent par là au grossissement des gouttes, qui les rend capables de tomber: et les vents qui rarifient l'air, contribuent encor par une autre raison à rendre la colonne plus legere, c'est que l'air plus rare soutient moins les gouttes d'eau qui y nagent: témoin la machine du vuide, où l'air rarifié laisse tomber de l'eau, tellement que par ce moyen on peut tirer de l'eau de l'air, en renouvellant continuellement l'air rarifié dans cette machine. Le concours de tant de causes ne permet point que l'effect du barometre puisse estre tout à fait regulier; et M. de la Hire a eu raison de dire dans votre assemblée, que le Mercure du Barometre ne descend pas tousjours en temps de pluye, et ne remonte pas tousjours en beau temps. Je ne crois pas aussi que personne se soit avisé de la dire, à moins qu'on n'y adjoute quelques distinctions dont je ne m'eloignerois pas, comme seroit de dire que l'usage du barometre paroist d'avantage dans les changemens durables, que dans ceux qui ne sont que passagers, et que pour mieux juger sur le barometre, il faut y adjouter l'observation des vents. Cependant je seray bien aise d'apprendre un jour votre explication des phenomenes du Barometre.

Il y a des gens de differentes religions dans notre Societé des Sciences, ainsi on y sera sans doute bien aise, Monsieur, de vous y associer; et je vous en donneray bientôt des nouvelles. Cependant je suis avec zele etc.

XXV.

Varignon an Leibniz.

Dans votre lettre du 20 Juin, qu'on eté ravi de me mettre parmi les membres de la societé de Berlin, vous ajoutez: et je croy vous en avoir instruit. Si je l'eusse sçu plustost, je n'aurois pas manqué de vous en faire plustost mes tres humbles et tres sinceres remercimens, et à elle aussi; et si je m'acquitte si tard de ce devoir, depuis votre lettre d'avis reçue, c'est qu'elle me trouva la teste si pleine de Quarrés magiques que je ne pouvois presqu'alors penser à autre chose qui pust dignement accompagner ma lettre de remerciment à cette sçavante societé que je n'osois remercier (pour ainsi dire) les mains vuides. J'étois alors depuis près de deux mois occupé à l'examen d'un gros traité de plus de 300 pages in 4. de Quarrés magiques et magiquement magiques, qu'il faloit rendre avec mon avis par écrit à M. l'Abbé Bignon avant que d'aller à la campagne, pour laquelle j'étois sur le point de partir: ce qui me fist remettre au loisir que j'y esperois, à penser à quelque chose qui pust faire agréer mon remerciment à cette Illustre Compagnie; ce que je souhaite être dans le paquet que je prend la liberté de vous envoyer pour elle.

Ce gros traité de Quarrés magiques et magiquement magiques est du Chanoine de Bruxelles (nommé M. Poignard) qui en publia un touchant les premiers en 1704. Il le corrige et l'augmente des magiquement magiques dans ce nouveau qu'il destine encore au public sous le nom de seconde édition, et qui m'a couté d'autant plus de peine et de tems qu'il ne consiste qu'en exemples de calculs tres longs sans aucune demonstration qui fasse voir que les Methodes qu'il contient, ne font pas sujettes à exception comme il est arrivé à quelques unes du premier traité de l'Auteur.

Revenons à votre derniere lettre du 20 Juin: vous y demontrez d'une maniere tres ingenieuse qu'il n'y a point de raison d'un nombre negatif à un positif; et si c'est-là la note que M. Bernoulli m'a écrit avoir été ajoutée pour vous à ma reponse au Pere Grandi, elle servira encore à le convaincre de l'impossibilité des Plus qu'infinis au sens de M. Wallis.

De ce qu'une division infinie de $\frac{1}{1+1}$ donne $1-1+1-1+1-1+1-1+$ etc. $=0+0+0+0+$ etc., rien ne me paroist plus plaisant ou plustost plus ridicule que de voir ce Pere en vouloir conclure la possibilité de la creation, comme si une infinité de riens, ou de fois rien, étoit capable de produire ou de valoir quelque chose: rien, dis-je, ne me paroist plus propre à faire mepriser les Mathematiques aux Ignorans, et à les leur rendre suspectes d'erreur. L'explication que vous donnez de cette Enigme est encore des plus ingenieuses, en disant (comme vous faites) que les droits du pair et de l'impair se trouvant confondus dans l'Infini, il le faut prendre pour un moyen arithmetique entre les deux; et qu'ainsi le nombre pair d'unités dans $1-1+1-1+1-1+$ etc. rendant cette suitte infinie $=0$, et l'impair la rendant $=1$, la somme en doit être $=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$

Pour moy, voyant que la division de $\frac{1}{1+1}$ poussée à l'infini, donne $1-1+1-1+1-1+1-1+$ etc. $=0$, et $1-1+1-1+1-1+1-$ etc. $=1$, selonque le nombre des unités est pair ou impair dans cette suite infinie; j'avois conclu qu'une telle division ne donnait rien ici, et que chaque operation y detruisant toujours l'autre, c'étoit toujours à remencer apres une infinité d'operations comme si l'on n'en eust fait aucune lorsque le nombre en est pair, ou comme si l'on n'en eust fait qu'une lorsqu'il est impair.

Pour remedier à cet inconvenient ou pour éviter l'enigme, au lieu de la fraction $\frac{1}{1+1}$ je me sers de son égale $\frac{1}{3-1}$, dont la division poussée à l'infini, donne $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$ etc. en progression geometrique decroissante dont la somme est $=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$. On peut trouver de même une infinité d'autres progressions geometriques decroissantes, chacune $=\frac{1}{1+1}$ sans aucune Enigme, en poussant à l'infini la division d'une fraction quelconque $\frac{1}{a-b}$ d'un denominateur $a-b=2$.

C'est ainsi que pour pousser la division d'une fraction quelconque à l'infini, quelqu'en soit le denominateur, je la reduis toujours à un de deux parties inégales dont je mets la plus grande la premiere en diviseur: de cette maniere une même fraction peut se resoudre non seulement en une infinité de series differentes, mais encore si visiblement égales, chacune à cette fraction, qu'elle se retrouve toujours sans peine en être la somme. Au contraire les divisions infinies de fractions qui ont leurs denominateurs chacun de deux parties inégales dont la moindre est la premiere en diviseur, donnent toujours faux; ce qui fait que tant que x est plus grande que l'unité dans $\frac{1}{1+x}$, la remarque de $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 +$ etc. que le P. Grandi fait apres d'autres, est fausse aussi bien que la serie que l'on en deduit d'ordinaire pour celle du logarithme de $1 + x$: en ce cas de $x > 1$, il faudroit $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} -$ etc. Mais aussi pour lors la serie du logarithme de $1 + x$ auroit le logarithme de x pour son premier terme, et d'un logarithme on retomberoit ainsi dans un autre. Quant au cas, où les deux parties du denominateur de la fraction seroient égales entr'-elles, si ce denominateur en étoit la somme, on retomberoit toujours dans l'Enigme du P. Grandi, et s'il n'en étoit que la difference ou zero, la division infinie ne rendroit qu'un infini qu'on sçavoit desja. Mais que fais-je? L'occasion de l'énigme du P. Grandi me fait vous entretenir de bagatelles par raport à vous: Pardon, je reprend le fil de votre lettre.

Je souhaiterois aussi une demonstration numeri linearum tertii ordinis que M. Newton donne trop sechement. Il en manque aussi quelques unes à un Journal tres curieux d'Angleterre De mensura sortis, que M. Moivre me vient d'envoyer de sa façon. Je le reçus peu de jours avant votre lettre, et l'embaras où j'étois, me fist en remettre aussi la lecture à la campagne pour en remercier l'auteur: c'est ce que je vas faire apres ce paquet-ci fermé.

Quant aux sollicitations centrales, il y a long tems que j'en suis distrait: je les ay aussi determinées pour des centres multiples dans le plein comme dans le vuide; mais je n'ay encore rien trouvé sur les centres mobiles que je n'ay encore envisagés qu'en passant: je ne manqueray pas d'y penser serieusement dès que je seray assez à moy pour cela;

Les gazettes vous auront appris sans doute la perte que nous fismes le mois de Septembre dernier, de M. Cassini mort agé de 88 ans sans aucune maladie et par la seule necessité de mourir: homme aussi regretable pour la droiture et la bonté de son coeur, que pour la beauté de son esprit et sa grande capacité surtout en Astronomie. M. son fils m'a promis plusieurs observations faites en differentes parties du monde sur la variation de l'aimant; M. de l'Isle geographe, eleve de feu M. Cassini, m'en a aussi promis plusieurs qu'il a ramassées de differens voyageurs. Comme ces deux Messieurs comptent d'en faire usage, et qu'ils pouroient apprehender qu'elles ne fussent rendues publiques par d'autres que par eux, je ne leur ay point dit que c'est pour vous que je les leur demandois; je les ay laissés croire que c'est pour ma propre curiosité. Dès qu'ils me les auront données, j'en tireray copie que je vous envoiray à la premiere occasion que le Pere Lelong ou moy en aurons.

Vous savez qu'on trouve des Ecrevisses dont les grosses pates sont fort inégales, une tres petite avec une fort grosse: le peuple croit que la petite n'est qu'une nouvelle qui revient à la place d'une arrachée. Un de nos Messieurs, nommé M. de Reaumur, pour s'en asseurer, a nouri tout l'été dernier des ecrevisses enfermées dans un des coffres percées de plusieurs trous, qui sont à quelques bateaux sur la Seine pour y conserver du poisson; et leur ayant arraché les pates entieres et à differentes articulations, il a trouvé qu'elles leur revenoient toujours complettes, aux unes plus vites et aux autres plus lentement; ce qui me paroist curieux, et ce que bien des gens n'auroient pas cru non plus que moy. Voila tout ce que je scais ici de nouveau, hors les livres badins, et plusieurs contre le Jansenisme. Je me trompe: j'oubliois de vous dire que le fils de M. de la Hire a trouvé une maniere d'attacher les chevaux au carosse qui les rend tres faciles à en être detachés quand ils prennent le mors aux dents, par le moyen d'un cordon qui tire celui qui est dans le carosse, et qui detache les chevaux aussi prestement qu'on tireroit un coup de fusil.

M. Desbillettes vous remercie fort de l'honneur de votre souvenir, et m'a fort chargé de vous bien faire ses complimens: il est toujours en parfaite santé pour son âge, qui ne lui permet pourtant plus de travailler autant qu'il feroit aux arts; ce qui lui fait demander à être fait veteran à l'Academie pour en être tout à fait dispensé.

A Paris le 19. Novemb. 1712.

XXVI.

Leibniz an Varignon.

18 Janvier 1713.

Je vous remercie de la part de la Societé de la lettre obligeante que vous luy avés ecrite, et de la belle piece que vous luy avés communiquée, qu'on ne manquera pas d'employer.

Vous avés fort raison de faire des recherches sur la dimension de la surface du Cone scalene: et je vous diray là dessus, d'avoir lû et entendu à Paris, que feu M. Roberval pretendoit d'en avoir la construction, et il tenoit cela avec quelques autres solutions inter arcàna, pour se maintenir contre celuy qui luy voudroit disputer la chaire de Ramus. Or je crois d'avoir remarqué autrefois qu'il y avoit un grand rapport entre la dimension de la surface du Cone scalene et entre la dimension de la Courbe conique à centre, c'est à dire, Elliptique ou Hyperbolique, et qu'il me paroissoit, que quand j'aurois le loisir d'examiner la chose, je pourrois donner la surface du Cone scalene ex data dimensione curvae Conicae, et que peutestre M. Roberval avoit decouvert quelque chose d'approchant. Cela est d'autant plus croyable, que la surface du cylindre scalene depend de la dimension de la courbe Elliptique, et le cone scalene degenére en cylindre, si le sommet est posé infiniment eloigné.

Il est effectivement vray que dans le cas de la figure du P. Grandi, on tombe in ultimo dans $1-1+1-1$ etc. et dans un $\frac{1}{2}$ selon les differentes considerations. Mais il ne faut se fier aux raisonnemens sur les series infinies, que lorsqu'on en peut demonstrer la verité par les finies à la façon d'Archimede. M. de Moivre a du genie, et ce qu'il aura donné sur le sort, n'est pas à mepriser.

Il est toujours facheux de perdre une personne comme M. Cassini, quelque age qu'il puisse avoir, et je le regrette avec vous.

L'invention du jeune M. de la Hire de detacher promtement les chevaux du carosse quand ils prennent le mors aux dens, sera bonne sans doute et de son cru, mais il n'aura peutetre point sçu, que la meme chose a eté inventée et practiquée à Paris il y a plus de 40 ans, car j'en ay oui parler, quand j'y estois. Je ne doute point que M. des Billettes en ait oui parler aussi. Je suis ravi d'apprendre qu'il se porte encor bien, et je vous supplie de le luy temoigner avec mes complimens. Etant asseuré qu'il sait quantité de choses jolies et utiles surtout dans les Mecaniques, qui se perdront, s'il ne les conserve, je souhaiterois qu'il en mist ou en fist mettre quelque chose par ecrit.

Je serois ravi de voir des observations magnetiques choisies depuis l'an 1700 dont le temps et le lieu fussent bien marqués.

XXVII.

Varignon an Leibniz.

J'ay fait quelques tentatives sur ce que vous m'avez écrit que quelqu'une des deux lignes coniques à centre pourroit peut-être servir à trouver la surface du cone oblique à base circulaire, comme la circonference circulaire de la base du droit sert à en trouver la surface. Mais l'Ellipse perpendiculaire à l'axe du cone oblique, laquelle ainsi posée sert à trouver la surface du cylindre circulaire oblique, m'a paru aussi peu propre pour trouver la surface de ce cone, que la base circulaire; et l'hyperbole ne m'y a paru avoir aucun raport: de sorte que mes tentatives n'ont abouti touttes qu'à me faire retomber toujours dans la solution que je vous ay envoyée. Non seulement la dimension de la surface de ce cone scalène que M. de Roberval (à ce qu'on a dit) se vantoit d'avoir trouvée par le moyen d'une des deux lignes coniques à centre, ne se trouve point parmi les ouvrages imprimés dans le recueil de Divers ouvrages de Mathematique et de Physique, par Mrs. de l'Academie Royale des Sciences, imprimé in fol. 1673; mais encore M. de la Hire, qui a eu soin de cette impression, et qui a été le depositaire de tous les papiers de feu M. de Roberval, me dist il y a quelques jours qu'il n'y avoit rien trouvé de cette pretendue dimension.

Voici les observations magnetiques que vous m'avez marqué souhaiter, faites en 1704, 1705, 1706, 1707, 1708. Mais je vous prie que ce ne soit que pour votre propre curiosité, parceque M. Cassini, qui me les a communiquées sans lui dire que ce fust pour autre chose que pour satisfaire la mienne, a dessein d'en faire le même usage qu'il a fait d'autres que vous pouvez avoir vues dans nos Mem. de 1708 pag. 173 et 292, que vous verrez avoir été faites dans les deux mêmes voyages que celles-là, avec lesquelles vous verrez aussi qu'elles ne s'accordent guere; ce qui fait du moins sentir la difficulté de les faire exactement. M. de l'Isle, qui m'en avoit aussi promis, ne m'a point tenu parole: il m'a dit pour excuse ou pour défaite, qu'elles sont tant mêlées d'incertaines qu'il ne seroit pas aisé de discerner les bonnes d'avec les mauvaises.

A Paris le 10. Mars 1713.

XXVIII.
Leibniz an Varignon.

(Im Auszuge.)

28 Juin 1713.

Mons. Buot, bon Geometre, qui étoit de l'Academie, et ayant été armurier dans la jeunesse, s'étoit chargé de la description des arts de travailler sur le fer et particulierement de tout ce qui en regarde la fonte ou la trempe. J'espere que ses observations se trouveront dans les papiers de l'Academie. Monsieur l'Abbé Mariotte qui étoit aussi de mes amis, avoit fait une nouvelle espece de Mecanique, qui ne consistoit pas comme les ordinaires dans l'explication du levier et semblables choses qu'on appelle forces mouvantes, mais dans la connoissance de la force des corps particuliers, pierres, bois, fers, cordes etc. à resister à un effort dans un employ qu'on en pourroit faire, soit pour mouvoir, soit pour soutenir quelque poids. J'espere que ce petit livre se trouvera dans les papiers de l'Academie, et il meritera d'etre publié.

J'apprends de M. Bernoulli que le livre des Anglois a paru, dans lequel ils pretendent prouver que l'invention du Nouveau

Calcul est de M. Newton. Mais par ce que M. Bernoulli m'en mande, je juge que bien loin de l'avoir prouvé, ils donnent lieu de juger que c'est apres coup que le calcul des points a été formé, et que M. Newton a bien eu avec nous la connoissance des fluxions, mais non pas du calcul: comme les anciens ont connu les lieux, mais non pas leur calcul tel que la Specieuse nous l'a fourni. Ainsi je ne doute point qu'on ne me rende justice en France.

XXIX.

Varignon an Leibniz.

L'histoire du chien parlant a causé ici d'autant plus de surprise qu'elle seroit incroyable si vous n'asseuriez l'avoir aprise d'un Prince qui l'a entendu parler dans une Foire, où une infinité d'autres personnes en doivent avoir été temoins: sans doute que le maitre de ce chien ne manquera pas de le promener par toutte l'Europe: s'il vient ici, il en remportera seurement beaucoup d'argent, quoyque ce chien ne parle qu'Allemand que peu de gens de ce pais-ci entendent, lui suffisant pour la curiosité dont on est ici, que son chien y prononce les lettres de l'Alphabet que vous me dites qu'il scait prononcer.

M. de la Hire m'a encore repeté qu'il n'a rien trouvé de la dimension du cone oblique dans les papiers de M. de Roberval, qui lui ont été mis entre les mains apres la mort de cet auteur.

Quant à l'art de travailler le Fer, et à la Mecanique, que vous dites que Mrs. Buot et Mariotte avoient promis, M. de la Hire m'a aussi dit n'en avoir rien trouvé parmi les papiers qui lui ont été remis, qu'il ne croit pas que M. Mariotte ait rien fait de cette Mecanique que ce qui s'en trouve repandu dans son traité du mouvement des Eaux; et qu'à l'égard de M. Buot il n'a jamais entendu dire qu'il est rien fait sur l'art de travailler le Fer.

On travaille toujours à l'Academie sur l'histoire des Arts dont il y en a desja un grand nombre de descriptions faites; mais la guerre, qui dure toujours, nous tient toujours hors d'état de faire la depense de leurs impressions: depense qu'il n'y a que le Roy qui puisse faire.

Je suis tres faché du mauvais procès que M. Keill vient de vous susciter en Angleterre: on en est ici d'autant plus surpris que M. Newton lui-même, dans les Princ. Math. vous reconnoist aussi pour l'Inventeur de calcul en question, et que depuis pres de 30 ans vous jouissez paisiblement de cette gloire que vous vous êtes jusqu'ici reciproquement accordée avec une civilité qui édifioit tous les honnêtes gens: gloire aussi grande pour chacun de vous deux que s'il étoit le seul inventeur de ce calcul. C'est ce qui fait qu'on ne cesse point ici de vous en rendre honneur comme à M. Newton.

M. Bernoulli m'écrivit il y a quelque tems de vous envoyer ce que Mrs. de Lagny et Parent ont fait de nouveau. Il n'y a rien de nouveau de M. de Lagny. Il nous prepare de nouvelles series fort ingenieuses pour la quadrature du cercle approchée: ce sera un ouvrage assez considerable dont le manuscrit m'a passé par les mains de la part de M. l'Abbé Bignon pour l'examiner à la priere de l'Auteur. Pour ce qui est de M. Parent, il vient de faire rafîcher ses Journaux intitulés Recherches de Physique et de Mathematique, en trois vol. in 12. augmentés de plusieurs pieces qu'il a lues en differens tems à l'Academie, et qu'elle n'a pas jugé à propos d'inserer dans ses Memoires. Il y a à la fin de ces volumes des Errata et des corrections de la valeur d'un d'entr'-eux: ils sont aussi obscurs et aussi embroüillés dans le texte et dans les figures, que les elemens de Mecanique de l'Auteur, dont les corrections se trouvent aussi en tres grand nombre dans ces Journaux, de maniere que je les ay abandonnés dès la premiere lecture sans pouvoir me resoudre à les dechifrer.

Nous avons eu ici pendant quelque tems un nommé M. Goldbach qui se disoit fort de vos amis: il m'a dit qu'il alloit d'ici en Italie, d'où il retournera droit chez lui en Prusse.

A Paris le 9. Aoust 1713.

XXX.

Varignon an Leibniz.

Voici un Livre contenant un projet de Paix universelle et stable pour toujours, que l'Auteur vous prie d'accepter comme un hommage dû à votre rare merite, et à votre vaste intelligence de tout. Cet Auteur est un homme de qualité, nommé M. l'Abbé de Saint Pierre, de l'Academie françoise, et cousin germain de M. le Marechal de Vilars. Pour perfectionner cet ouvrage, cet Auteur a besoin de bonnes observations, et sur tout de bonnes contradictions: c'est pourquoy il vous prie, Monsieur, de vouloir bien lui faire part des Remarques pour ou contre que vous ferez en lisant ce livre, et de celles que vos amis connoisseurs y pouront aussi faire. Comme je lui suis fort attaché depuis long temps, je vous demande aussi cette grace pour lui, vous asseurant de sa reconnoissance et de celle etc.

Le 3. Mars 1714.

XXXI.

Varignon an Leibniz.

Vous me demandiez le sentiment de M. de la Hire et de M. Cassini le fils sur la Theorie de la Lune inserée dans l'Astronomie de M. Gregori. M. de la Hire m'a dit ne l'avoir point examinée; et l'ayant prié de l'examiner, il s'en est excusé sur ce que cela luî couteroit trop de peine. M. Cassini le fils m'a dit avoir calculé une Eclipse suivant cette Theorie, laquelle erroit d'une demiheure; et qu'y ayant ajouté une correction que M. Gregori disoit devoir en être retranchée, il l'avoit trouvée assez juste: il m'a asseuré qu'il lui en avoit coûté près de trois jours de calcul.

J'ay desja eu l'honneur de vous dire que M. de la Hire, depositaire des papiers de feus M. de Roberval et Mariotte, m'a dit n'avoir rien trouvé dans ceux de M. de Roberval, qui ait raport à la dimension de la surface du cone scalene, bien loin de l'y avoir trouvée par le moyen de la ligne elliptique; et que dans ceux de M. Mariotte il n'a point trouvé non plus la petite Mecanique pratique qu'il vous a dit avoir faite pour feu M. de Vauban.

M. Ozanam vit encore, et est de l'Academie: il se porte bien pour son âge que vous scavez être desja fort avancée. Quand je lui ay parlé de son Diophante, il m'a dit qu'il le donneroit quand on le lui payeroit.

Voila pour ce qui regarde votre lettre du 13 Decemb. 1713 à une partie de laquelle je croy vous avoir desja repondu, en attendant que je fusse plus informé du reste que je n'étoit alors. Quant à celle que je reçu de vous le 3 de ce mois-ci par la mediation de M. Scheuchzer, M. Herman me vient aussi de mander qu'il est chargé de la Patente que vous pensiez à m'envoyer, et qu'il me l'envoyra par la premiere occasion seure qu'il en trouvera: je vous en rend encore tres humbles graces, Monsieur, et de ce que vous avez jugé mon explanation du cone scalene, digne d'être inserée dans vos scavans Miscellanea de Berlin. Celle que vous me dites avoir trouvée par une courbe constructible par la Geometrie ordinaire, doit être beaucoup plus belle, et je la verray avec plaisir.

M. de Montmort vous aura envoyé sans doute un exemplaire de son Essay d'Analyse sur les jeux de hazard, qu'il vient de faire reimprimé fort augmenté. On vous aura sans doute aussi envoyé de Basle le traité de Arte conjectandi de feu M. Jacq. Bernoulli, imprimé depuis plus de six mois, puisqu'arrivant de la campagne au commencement du mois de Novemb. dernier, j'appris qu'il en étoit venu ici un exemplaire pour essay chez un de nos libraires: il n'y a pourtant été commun que vers le mois de Janvier dernier que je le reçu en present du fils de l'Auteur.

Depuis ce tems-là M. le chevalier Renau, Ingenieur general de la Marine, ayant fait imprimer contre l'avis de l'Academie et de ses amis connaisseurs, un Memoire par raport à son ancienne dispute contre Hughens sur son livre de la Maneuvre des Vaisseaux, il en a envoyé un exemplaire à M. Jean Bernoulli, qu'on lui avoit dit être de son sentiment; et celui-ci l'ayant aussi desaprouvé, il s'est excité entr'-eux deux par lettres une dispute qui a produit enfin un livre de la part de M. Bernoulli qui me le vient d'envoyer: il y a beaucoup de belles choses, telles que vous scavez qu'il est capable d'en donner; vous verrez quand l'exemplaire qu'il vous en a aussi sans doute envoyé sera parvenu jusqu'à vous. Je suis toujours avec un profond respect etc.

A Paris le 25. May 1714.

XXXII.

Leibniz an Varignon.

Depuis que je suis de retour, je suis fort occupé, et même incommodé un peu maintenant de la goutte. Cela m'a empeché de satisfaire plustost à mon devoir.

Voicy ma reponse à M. l'Abbé de S. Pierre, que je vous supplie de luy faire tenir. Je vous suis obligé, Monsieur, de m'avoir procuré l'honneur de sa connoissance. Ses raisons sont solides, j'ay lû sur tout avec profit et plaisir ses reponses aux objections. Le mal est que ceux dont depend l'affaire n'en seront point informés.

Je vous remercie, Monsieur, de l'extrait de M. Parent; comme il connoitra mieux mes sentimens par la Theodicée, il en jugera peutetre mieux à present.

Je ne doute point que depuis la paix, qui a la mine de durer, l'Academie Royale des Sciences ne reprenne vigueur, et ne nous donne bientost les années qui sont en arriere. Je souhaite particulierement que l'on pense à donner les descriptions des Arts qu'on a commencée déja. M. des Billettes me manda un jour qu'on commenceroit par l'imprimerie. J'espere qu'il sera encor en santé, et je vous supplie, Monsieur, de luy faire mes complimens dans l'occasion.

Je pense à donner un jour moy même un vieux Commercium epistolicum, mais il faudra deterrer mes vieux papiers. De disputer avec un homme grossier comme Keilius, n'est point une chose conforme à mon humeur, et si j'ay du loisir, je tacheray de refuter de telles gens par quelques realités où ils ne s'attendent point. M. Chamberlain, auteur de l'Estat present de la Grande Bretagne, qui est un des membres de la Societé Royale de Londres, m'a envoyé l'extrait d'un journal de la Societé, où l'on declare que le rapport des commissaires, nommés par la Societé, qu'ils ont publié dans leur Commercium, n'est pas un jugement definitif de la Societé même. Aussi ne m'a-t-elle jamais fait savoir qu'elle vouloit faire le juge, et ne m'a jamais fait demander si je la voulois reconnoitre pour juge competent, et luy sousmettre mes raisons, dont elle n'a eu aucune connoissance. Les commissaires aussi n'ont ecouté qu'un coté: il falloit me les nommer pour savoir s'ils ne me seroient suspects. Ainsi tout ce qu'on a fait contre moy, est la chose du monde la plus informe. Il paroist que mes adversaires ont raison en une chose, c'est que si les lettres ne sont point interpolées, M. Jaques Gregori a scu avant moy ma Quadrature Arithmetique du Cercle. Mais toute l'Angleterre et l'Ecosse, ses amis, son propre neveu David Gregori l'avoient ignoré jusqu'icy. Quand M. Collins ou M. Oldenbourg m'a communiqué autres fois cette series de M. Gregory parmy d'autres, c'estoit apres que j'avois déja envoyé la mienne. Ainsi j'auray supposé qu'il y étoit venu apres moy, puis que la mienne avoit été receue d'abord comme quelque chose de fort nouveau. Car l'ancienne lettre de M. Gregory qu'on a produite maintenant, écrite avant que j'eusse commencé de devenir Geometre, n'etoit point venue à ma connoissance, et je crois que M. Collins luy même ne s'en etoit point souvenu, quand nous étoins en commerce. Le principal est la question du Calcul des infinitesimales, mais M. Bernoulli a fort bien remarqué, que M. Newton n'a point eu ce calcul; sa Methode des Fluxions etoit lineale.

Je suis maintenant témoin oculaire et auriculaire du chien parlant; entre autres mots il a bien prononcé Thé, Caffé, Chocolat, assemblée.

Je suis etc.

XXXIII.

Varignon an Leibniz.

A Paris le 20. Juillet 1715.

Le 5. de ce mois je reçus votre lettre du 22. Juin, vous étant desja redevable d'une reponse à celle que vous me fites l'honneur de m'écrire en m'adressant celle que je donnay de votre part à M. l'Abbé de Saint Pierre, à qui elle fist beaucoup de plaisir: il me la lut avec les avis que vous lui donniez par raport à son ouvrage, lesquels par le grand sens et les faits historiques dont ils sont soutenus le charmerent aussi bien que moy: il espere bien en profiter pour la perfection de cet ouvrage. Il m'a dit vous en avoir remercié peu de jours apres, et que depuis il vous a aussi remercié d'un manuscrit que vous lui avez envoyé par raport à son sujet: il m'a dit avoir pris pour cela l'occasion des lettres que S. A. R. Madame écrivoit en Allemagne.

Je vous remercie aussi de la plus ample instruction, que vous m'avez donnée par raport au chien parlant: j'en ay regalé ici bien des gens qui en ont été aussi surpris que moy.

Je n'ay pas manqué de bien faire vos complimens à M. des Billettes, qui se porte autant bien que son grand âge de 82 ans se peut permettre: il me chargea aussi reciproquement de vous faire les siens. Il me vient de donner pour vous un Ecrit qu'il appelle Compagnie du Bonheur, mais il feroit un trop gros paquet pour vous être envoyé par la poste.

On travaille toujours à la description des Arts à l'Academie; mais, faute d'argent, on ne scait encore quand on en poura faire imprimer quelque chose. Vous me demandez si l'on envoyra quelqu'un au Levant, comme autres fois M. Tournefort; je n'en ay point entendu parler, mais ce defaut d'argent suffiroit seul pour l'empecher.

Je n'ay point vu ce M. de Sully, Anglois, que vous me disiez fort habile en Horlogerie; M. de Remond m'a fait voir le livre de cet Horlogeur, que j'ay lu avec plaisir aussi bien que les belles reflexions qui y sont de vous sur la fin. Je n'ay point entendu parler de ce M. de Sully à l'Academie, mais seulement à quelques uns de nos Academiciens qui vont au caffé où il se trouve, et où je ne vas jamais: je croy qu'il est encore ici, parcequ'on m'a dit qu'il pense à s'y établir.

Voila pour ce qui regarde la lettre que vous aviez ajoutée sans date pour moy à celle que vous m'adressiez pour M. l'Abbé de Saint Pierre. Quant à la seconde que je recu le 5. de ce mois, la machine Astronomique du Prêtre du Suabe, que vous me dites être dans le cabinet de l'Empereur, me paroist curieuse, et utile si les Ephemerides qu'il en a tirées, s'accordent avec les autres. Quoyqu'il en soit, c'est dommage que l'Auteur si habile dans la pratique de la mecanique soit mort: guidé par quelque habile Astronome, peut être auroit il pu rendre sa machine plus exacte. Dans les Mem. de 1709 que je vous ay envoyés par M. Lith de

Francfort sur l'Oder, qui les a remis à M. Herman lequel vous les a fait tenir, vous trouverez des cartes de feu M. Cassini, lesquelles vous donneront ces Ephemerides plus exactement qu'une machine, suivant l'explication qu'il en donne dans ces Memoires.

Il y a aussi en ici une personne qui s'est mis sur les rangs pour les longitudes, ainsi que vous l'avez pu apprendre par la gazette d'Hollande, où elle l'a fait anoncer; mais il n'y a pas mieux reussi que Mrs. Wriston et Ditton, Anglois, dont j'apprend que le dernier est mort depuis peu.

M. Bianchini ne nous a rien dit du dessein que le Pape Inocent XII. et en suite celui d'à present avoient eü de faire faire une revision du Calendrier Gregorien: on y a travaillé quelque tems à Rome dans une congregation dont étoit M. Maraldi qui se trouvoit pour lors en ce pays-là, et par la mediation du quel on recevoit les avis de M. Cassini; mais le tout est demeuré sans être achevé et sans qu'on sache pour quoy à ce que dit M. Maraldi.

Je n'ay pas manqué de faire vos complimens au Pere Lelong, et de lui marquer que vous êtes surpris de ne plus recevoir de ses lettres: en voici une qu'il m'a donnée pour vous.

Quant à l'exemple que vous demandez pour un de vos amis, des cubes magiques que M. Sauveur a publiés dans les Mem. de 1710, cet Auteur n'en donne aucun, il se contente d'expliquer sa methode en general sur un cube de 5 celules de coté, et d'une maniere qui ne me paroist que croquée, et si confuse que je ne l'entend point assez pour en rien deduire: peut être est ce la faute de ma teste qui ne me permet pas encore de m'appliquer; dans l'état languissant où je me trouve, je l'ay encore presqu'aussi embarassée que lorsque j'avois la fievre.

Voila tout ce qui concerne vos deux dernieres lettres du 7. Fevrier et du 22. Juin. Je ne scais rien d'avantage si non que je suis toujours avec bien du respect etc.

XXXIV.

Varignon an Leibniz.

Le 13. Octobre nous perdisme le Pere Malbranche, mort sans fievre, et par la necessité seule de maurir, comme une lampe qui s'éteind faute d'huile: nous fesons en lui une grande perte. Il était aussi recommandable par la honté de son coeur, que par l'élevation de son esprit: j'y perd en mon particulier un bon ami que j'estimois fort.

Nous avions aussi perdu quelques jours auparavant M., Homberg, chimiste des plus habiles de l'Europe, et aussi tres difficile à remplacer en son genre.

A Paris le 9. Novemb. 1715.

XXXV.

Varignon an Leibniz.

A Paris le 27. Fevrier 1716.

J'ay reçu vos deux lettres du 14. Octob. et du 22. Decembre 1715 peu de tems l'une apres l'autre: la premiere me fut envoyée par M. l'Abbé Bignon, et la seconde par M. Martini. M. l'Abbé Bignon envoya aussi de votre part à l'Academie le cube magique de 27 celules que vous lui aviez envoyé: il fut donné à M. de la Hire pour l'examiner, lequel peu de jours apres dist à l'assemblée l'avoir trouvé vray sans rien decouvrir de la methode; l'Abrégé que vous m'en aviez envoyé dans la premiere de vos lettres, m'a aussi paru tel. Quant à celui que vous m'aviez dit dans la seconde, de proposer pour étrenes, chacun s'excuse de s'y appliquer, disant qu'il a autres choses à faire: il en couteroit trop à une teste échauffée et pleine d'autres matieres, pour s'appliquer à celle-ci. M. Sauveur qui la doit avoir plus presente que personne, m'avoit paru d'abord s'y devoir appliquer; mais peu de jours apres il m'envoya lettre que voici de lui pour s'en excuser: cependant quelques jours apres cette lettre il me donna le cube que voici, lequel n'est que de 27 celules, encore n'est il que croqué.

Les Mem. de 1713 sont encore sous la presse, l'imprimeur avançant si peu qu'il a été depuis Noel jusqu'à Samedy dernier à imprimer un Memoire d'environ 6 feuilles de moy. Ce Memoire est sur le nombre des racines égales qu'exigent les courbes en differens points, selon qu'elles y sont contournées ou rebroussées. Entre les rebroussées en même sens j'en trouve de trois sortes: les unes dont le cercle osculateur en leur point de rebroussement, passe entierement au dedans de leurs branches; les autres où il passe entierement en dehors; et d'autres enfin où il passe entre ces branches, et le seul qui puisse y passer ainsi à travers l'angle qu'elles font entr'-elles. Je trouve que de ces trois especes de courbes rebroussées en même sens, le cercle osculateur au point de rebroussement des deux premieres, exige cinq racines egales pour la determination de son rayon osculateur; et quatre seulement au point de rebroussement de la troisieme, de même qu'au point de rebroussement des rebroussées en sens contraires. Quant à tous les autres points de courbes quelconques, mêmes aux points de contour ou d'inflexion, le cercle osculateur n'y exige que trois racines égales, lesquelles en ces points d'inflexion sont toujours infiniment grandes ou infiniment petites, et finies par tout ailleurs dans les endroits d'une seule concavité ou convexité. Ces nombres et ces longueurs de racines egales serviront à distinguer tous ces differens points des courbes; ce que je demontre par les developemens qui les engendrent. Je demontre aussi en general que chaque cercle touchant d'une courbe en quelque point que ce soit, y exige toujours autant de racines égales plus une, qu'il y touche de branches d'un même côté de ce point: de sorte que si l'on prend n pour le nombre de ces branches placées d'un même côté de ce point où ce cercle les touche touttes, je veux dire pour le moindre nombre des branches rebroussées que la courbe eust d'un même côté, si elle en avoit de part et d'autre de ce point de rebroussement; le cercle qui les y toucheroit touttes, y exigeroit $n + 1$ de racines égales pour la position d'une perpendiculaire en ce point de rebroussement, sur laquelle son centre se trouvast. C'est ainsi que les cercles touchans des courbes non rebroussées, torses ou non, n'y exigent par tout que deux racines égales, ainsi qu'on le pense d'ordinaire, ces courbes n'ayant jamais qu'une branche de chaque côté de chacun de leurs points. Par la même raison les courbes rebroussées à deux branches, soit en même sens ou en sens contraires, les ayant touttes deux d'un même côté de leur point de rebroussement; le cercle touchant en ce point, y exigera trois racines égales. Il y en exigeroit quatre si ces .courbes étoient rebroussées en trois branches d'un même côté de leur point de rebroussement; cinq, si elles l'étoient en quatre; six, si elles l'étoient en cinq; et toujours autant de racines égales plus une, que la courbe auroit de branches rebroussées d'un même côté, en quelques sens que les convexités ou concavités de ces branches fussent tournées. Voila pour la position du rayon osculateur, et le surplus de racines égales qu'il exige pour sa determination totale, est pour la determination de sa longueur. Pardon, Monsieur: je ne scais comment ma teste encore échaufée de ces matieres, m'a mené si loing.

BRIEFWECHSEL

zwischen

LEIBNIZ und GUIDO GRANDI.

Guido Grandi (geb. zu Cremona 1671, gest. 1742 als Professor der Mathematik zu Pisa) war einer der ersten unter den Mathematikern Italiens, der, wie es scheint, durch eigenes Studium in die von Leibniz geschaffene höhere Analysis eindrang. Es gelang ihm, durch die beiden Schriften: Geometrica demonstratio Vivianeorum problematum, Florent. 1699, und: Geometrica demonstratio theorematum Hugenianorum circa logisticam, cum epistola ad Pat. Cevam, Florent. 1701, die Aufmerksamkeit auf sich zu lenken, und er erhielt einen Platz an der Universität zu Pisa. Im Jahre 1703 erschien von ihm eine neue Schrift: Quadratura circuli et hyperbolae per infinitas hyperbolas geometrice exhibita; es ist offenbar dieselbe, die Grandi an Leibniz übersandte und deren Inhalt die Veranlassung zu der vorliegenden Correspondenz zwischen beiden Männern wurde.

In seinem ersten Schreiben bemerkt Leibniz unter anderen, dass es nicht unwichtig sei, dass die Mathematiker ein und derselben Zeichensprache sich bedienten. Es ist dies ein Gegenstand, auf welchen er in seinen Correspondenzen wiederholt zurückkommt und dessen sorgfältige Behandlung ihm besonders am Herzen liegt. Keiner erkannte sicherer, ob ein Zeichen zweckmässig sei oder nicht, keiner war mehr als er von der ausserordentlichen Wichtigkeit einer passenden Zeichensprache durchdrungen. Er selbst hatte ja durch die Einführung des Algorithmus der höheren Analysis aufs glänzendste dargethan, wie sehr der Fortschritt der Wissenschaft von dem Gebrauch zweckmässig gewählter Symbole abhängig ist. Noch in seinen letzten Lebensjahren veröffentlichte er in den Denkschriften der Berliner Akademie ein „Monitum de characteribus algebraicis," offenbar damit die darin aufgestellten Zeichen, durch die Autorität der Akademie geweiht, allseitig in Gebrauch kämen.

Ein anderer Gegenstand der vorliegenden Correspondenz ist die Behauptung Grandi's, die in der oben zuletzt genannten Schrift vorkommt, dass die Summe einer unendlichen Anzahl von Nullen (die man anstatt der unendlichen Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ..$ in inf. setzen kann) einer bestimmten Grösse gleich sei. Er gerieth darüber in einen heftigen Streit mit seinem Landsmann Marchetti. Ausserhalb Italien scheint Niemand hiervon Notiz genommen zu haben, bis Grandi im Jahre 1710 eine Schrift unter dem Titel: De infinitis infinitorum infiniteque parvorum ordinibus, herausgab, in welcher er seine Ideen weiter ausführte und vertheidigte. Da Grandi, um seine Behauptung zu stützen, Gründe sehr eigenthümlicher Art gebrauchte, so sahen sich Varignon und auf Wolf's Instanz auch Leibniz veranlasst, dergleichen für mathematische Beweisführung Ungeeignetes zurückzuweisen*). Aber auch die Art und Weise, wie Leibniz in dem angeführten Schreiben an Ch. Wolf den Nachweis führt, dass $1 - 1 + 1 - 1 + ..$ in inf. $= \frac{1}{2}$, ist keineswegs zulässig; dass er selbst das Unsichere seines Beweises fühlte, beweist sein Brief vom 6. Sept. 1713. — Dieser Brief ist insofern noch bemerkenswerth, als Leibniz darin seine Ansichten über das Unendliche und Unendlichkleine unumwunden ausspricht. Er erklärt die unendlichen und unendlichkleinen Grössen als Fictionen; ähnlich den imaginären Ausdrücken, die in der Algebra nothwendig seien, seien sie von Nutzen, um auf einem kurzen, aber sicheren Wege zu Resultaten zu gelangen. Was die unendlichkleinen Grössen betrifft, so reiche es aus, sie so klein als möglich zu nehmen, damit der Fehler möglichst klein werde, so dass also im Grunde kein Irrthum begangen werde. Sie dürften indess, setzt Leibniz sogleich hinzu, keineswegs als absolute Nullen betrachtet werden, sondern vielmehr „ut nihila respectiva, id est ut evanescentia quidem in nihilum, retinentia tamen characterem ejus quod evanescit" wodurch offenbar die vorhandene Schwierigkeit nicht beseitigt, im Gegentheil durch eine neue Unklarheit vermehrt wird. Bekanntlich hat Euler diese Leibnizische Auffassung der Differentiale zu der seinigen gemacht und in seinem grossen Werke über die Differentialrechnung zu Grunde gelegt.

Zuletzt erwähnt noch Grandi eine neue Curve, von ihm Rhodonea genannt. Er hat darüber und über eine andere doppelter Krümmung, welcher er zu Ehren der Gräfin Clelia Borromei, einer Freundin der Geometrie, den Namen Clelia beilegte, eine besondere Schrift herausgegeben: Flores geometrici ex Rhodonearum et Cleliarum curvarum descriptione resultantes, una cum novi expeditissimi Mesolabii auctario, Florent. 1728.

*) Sieh. Epistola ad Ch. Wolfium circa Scientiam infiniti, Bd. 5. S. 382 ff.

I.

Grandi an Leibniz.

Exigua haec opella, quam hisce litteris adnexam accipies, pluribus certe nominibus Tibi etiam communicanda erat, quanquam mecum ipse diutius contendi propriae tenuitatis conscius, an usque adeo auderem, ut crepundia mea ante oculos tuos, profundioribus Mathesis speculationibus dudum assuetos, venire paterer, qua ratione praecedentia opuscula mea quibus Vivianeorum Problematum, ac mox Theorematum Hugenianorum demonstrationem in me suscepi, haud sollicitus fui, ut ad te deferrentur. Pluribus autem, ut jam dixi, nominibus hanc opellam tibi debitam esse cum intelligerem, quippe quae et in demonstrandis sublimibus Propositionibus tuis potissimum versatur, et Tui calculi principiorum applicationem nonnullam continet (quae in Italia prorsus nova est) adeoque meae erga virtutem tuam venerationis, Tuaeque apud nos famae argumenta exhibet minime contemnenda, Tibi ipsam reddendam curavi, hortante inprimis Celebr. Magliabechio nostro, qui ingenti jam apud omnes de tua incomparabili doctrina, et immortalibus erga Geometriam et Analysin meritis, parem etiam de Tua Humanitate summa opinionem apud me conciliavit, gratumque tibi qualecunque hoc munusculum meum futurum spopondit. Quodsi et profundissimis doctrinis tuis erudiri me hac occasione continget, litteratoque frui commercio, certe reseratum mihi veritatis et sapientiae fontem ejusmodi felicissima vel audacia vel confidentia mea arbitrabor. Vale.

Florentiae IV. Kal. Julii 1703.

II.

Leibniz an Grandi.

Quo minus pro transmisso praeclaro opere Tuo maturius gratias agerem, fecit partim absentia mea, cum aliquamdiu Berolini essem apud Reginam Borussorum, partim incredibilis ex ejus morte perturbatio. Sane cum illa mihi faveret mirifice et vix quicquam suavius mihi accidere posset quam creberrime cum divina principe de rebus pulcherrimis subtilissimisque colloqui, facile intelligis quam grave fuerit subito amittere, quod ea aetate et ipsius et mea perpetuum hujus vitae meae bonum putaram. Nunc ad me utcunque redii et amicos, statimque occurrit, quid Tibi adhuc debeam. Libellum Tuum Tetragonisticum vidi legique multa cum voluptate; legi, inquam, non mathematica tantum, sed et versus ad Principem Gastonem certe elegantes et tanti principis laudibus congruentes, quem cum Magno Fratre olim Florentiae veneratum esse, nunc quoque non postremum itineris mei Italici fructum habeo. Sed venio ad contenta Libro. Scala intensionum luminis inserviet ad gradus solicitationum gravitatis. Jam olim enim eo modo quo judicamus illuminari objecta, in ratione distantiarum reciproca duplicata, notavi etiam solicitari gravia a centro, mathematice scilicet seu abstracte rem tractando et physicas causas seponendo. Atque hinc duxi planetas tali lege ad solem niti, quod etiam (nescio an eodem argumento) Newtono placuit.

Quadratura per infinitas Paraboloeides cum ea, ut scis, conjungitur utiliter, quae fit per infinitas Hyperboloides, prout scilicet x est minor vel major quam *a* seu unitas. Nic. Mercatoris Tetragonismum Hyperbolae jam laudaveram olim in Actis Lipsiensibus, cum meum Circuli Tetragonismum primum ederem, ejusque exemplo ad meum fueram incitatus. Sed hoc vos latuisse non est mirum, nam plurimum jam temporis ab illa mea prima editione effluxit.

Constructiones Tractorias primus omnium transtuli ad Geometriam. Cum enim olim Cl. Perrault Parisiis lineam tractoriam simplicissimam quaerendam proponeret, inveni ejus proprietatem ab Hyperbolae Quadratura pendentem et nomen etiam Tractoriae imposui. Postea ope Tractionis magis compositae docui efficere omnes quadraturas, quod deinde Cl. Jac. Bernoullius compendiosius reddidit. Sed et reperi saepe ope Tractoriae constructionis posse describi curvas, de quibus nihil aliud datum est, quam Tangentium proprietas, quae difficultas major est difficultate Quadraturarum.

Paucula etiam annoto circa scribendi modum mihi solitum; levicula quidem, sed quae tamen ad commoditatem tum calculi tum typorum non raro pertinent. Multiplicationes significo simplici ascriptione, puncto interjecto, ubi opus, aut commate interdum. Divisionem saepe exprimo per duo puncta, et Rationem designo tanquam aequationem. Exempli causa pro $\frac{a}{b}$ saepe scribo $a:b$, sed si multae fractiones conjungantur, scribo more recepto, ut in seriebus; sed esse a ad b ut c ad d sic designo $a:b = c:d$, tanquam si scripsissem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Et superfluum puto hanc Analogiam sic designare cum plerisque $a.b::c.d$; novo enim signo proportionis nempe :: non est opus, cum sufficiat signum aequationis, ex quo et omnes analogiarum proprietates demonstrantur. Pro vinculo plerumque adhibeo commata vel parentheses loco linearum superducendarum, quae saepe aliae super alias duci debent et spatia typorum valde turbant. Ex. gr. pro $a * \overline{bb + c * \overline{e + f}}$, quo exprimi solet ad quantitatem $e + f$ multiplicatam per c, addi bb, et proveniens multiplicari per a, ego scribere malim $a, bb + c(e + f)$ vel $a(bb + c(e + f))$; interdum et duplici commate utor, ex. gr. $a + b,, ce + f, g + h$. Idemque facio pro radicibus, veluti si fuisset $a\sqrt{bb + \sqrt{c * \overline{e + f}}}$, scripsissem $a\sqrt{(bb + \sqrt{(c, e + f)})}$. Pagina tua 111. et 112. maluissem signa poni inter fractiones quam ad numeratorem, ne videatur fractio per proxime appositam multiplicata, nam ad multiplicationem appositio sufficit, ut $\frac{a}{b} \cdot \frac{c + d}{e}$ significat unam per alteram multiplicari.

Addo etiam magnam me analogiam deprehendisse inter potentias et differentias, atque ideo in differentiis replicatis ut dddx, ddddx etc. scribere interdum d^3x, d^4x; imo aliquando adhibere generaliter d^rx. Ita posito $y = x^e$, erit d^ry seu $d^rx^e = (e.e-1.e-2$ etc. usque ad $e-r+1)\, x^{e-r}\, (dx)^r$, si modo ipsae x uniformiter crescant vel arithmetice, seu si ipsae dx sint constantes. Sed si ipsae x crescant Geometrica proportione, ita ut sit $a\,dx = x\,dc$, posito a et dc esse constantes, fiet $d^rx^e = (e:a)^r x^e (dc)^r$ vel $= e^r x^{e-r} (dx)^r$.

Postremo ad profectum Scientiae pertinet, ut methodos per solutionem problematum exerceamus; sic non ita pridem Dn. Joh. Bernoullius proposuit hoc problema: dato (positione) arcu curvae invenire aliam curvam infinitis modis, cujus arcus aliquis a nobis assignandus arcui dato sit aequalis, et ita ut posito datam curvam esse Algebraicam, etiam quaesita sit Algebraica, quod a me est solutum diversa methodo ab ea, qua ipse est usus. Vale. Dabam Hanoverae 11. Jul. 1705.

III.

Grandi an Leibniz.

Humanissimas litteras tuas per Cl. V. Magliabechium mihi Florentiae redditas summa voluptate perlegi. Quae ad commodiorem analytici calculi scriptionem admones, gratissima sunt, et usui fortasse futura, nisi majoris obscuritatis et confusionis cavendae scrupulus aliud suaserit; optandum enim foret in his signis statuendis retinendisque mathematici convenirent, ne ad novi cujuslibet libri editionem novam semper technographiam addiscere et imaginationi figere lectores cogantur, neve magis ab hujus scientiae cultu characterum perplexitate et inconstantia avertantur.

Acta Eruditorum Lips. difficillime ad nos, nec nisi serius deferuntur. Florentiae cum degerem anno 1698, primi libri mei Geometrici editionem praemonens, vix unius semihorae spatium illa evolvere datum fuit in Bibliotheca Card. Medicei, ubi tamen ad annum usque 1694 dumtaxat collecta tum servabantur, nec scio adhuc posteriorum tomorum accessione locupletata fuisse. Hic tamen Pisis apud eruditum equitem Albizium ad annum usque 1699 extensa habentur, sed caetera nulla diligentia sibi potuit comparare pertinacia bellorum commercium omne bibliopolarum perturbante. Unde non mirum aut nostram diligentiam effugere quandoque inventa vestra, quae nec statim ad nos deveniunt, nec ubi devenerint, ita obvia haberi possunt, ut pro arbitrio consulere liceat.

Gravitatis intensionem in duplicata ratione distantiarum a centro reciproce sumpta crescere, ex Planetarum periodis, quae temporum rationem sesquialteram rationis distantiarum a sole observat, ingeniose deducitis, at generatim in terrestribus etiam corporibus id obtinere ut persuadeamur, physica aut mechanica ratio desideratur, quae ab attractionis hypothesi, vel ambiguo alio sistemate non pendeat. Quae de generalibus differentiis $d^r y$ notasti, amicis hujus scientiae studiosis communicabo; in his, praeter utrumque Manfredium, laudo Victorium Stanearium, Joseph Verzaliam, Jacobum Panzaninum, et (spero etiam accessurum, qui nunc lineari tantum geometria profundissima et subtilissima quaeque molitur) Laurentium Lorenzinum.

Venio ad Problema a Cl. Joh. Bernoullio propositum, mihique abs te communicatum (pro quo summas tibi gratias refero, et ut simili honore me deinceps prosequaris enixius rogo), nempe de Curva describenda, cujus arcus a nobis assignandus arcui positione dato alterius propositae Curvae sit aequalis. Quo spectant nonnulla jam a me edita in Epistola Geometrica ad Thomam Cevam adnexa demonstrationi meae Theorematum Hugenianorum, quatenus ibi num. 19 docui, qualibet plana figura data, quam una duae rectae et curva quaedam comprehendat, cylindrum invenire, cui ita circumvolvatur, ut curva ipsa nihilosecius in uno plano jaceat, sitque ejusdem cylindri transversa sectio. Quemamodum ex cylindro super cycloide erecto, transversa sectione habetur curva datae parabolae aequalis, cum nihil sit ungula cylindrica superficiei curvae ad dictam sectionem terminantis, quam Parabola ipsa cylindro cycloidali advoluta; quo eodem modo notavi Logisticam ex cylindro super Tractoria erecto secari posse, et generatim si relatio ordinatarum ad axem mutetur in relationem ordinatarum ad curvam, ex cylindro super posteriore excitato, priorem curvam secari posse, id quod per methodum tangentium inversam obtinetur, cum non aliud requiratur, quam ut tangens quaesitae posterioris curvae, super qua cylindrus excitandus est, aequetur semper subtangenti prioris curvae datae; sed et per explicationem in planum curvae superficiei Conicae contingit curvas transformari in alias priori longitudine retenta, vel convolutione circa conos, aut cylindros, de quibus alias.

Verum arbitror propositum Theorema sic solvi posse: Curvae datae axis esto $= x$ et ordinata $= y$; mox valor ipsius dy in terminis ab ipso dx affectis (per differentiationem aequationis curvae datae) reperiatur, omnesque ejus coefficientes ponantur $= z$, id est $dy = zdx$; Axis autem curvae datae habere debeat ad axem curvae inveniendae rationem 1 ad g (in portionibus, quibus respondebunt aequales arcus curvae), dico ordinatam curvae quaesitae fore integralem quantitatis $dx\sqrt{zz - gg + 1}$.

At si non curemus, ut curvae quaesitae et datae axes certam proportionem (in partibus quae respondent paribus curvarum arcubus) obtineant, datae curvae AJD (fig. 75) ad eundem axem AC apponatur quaelibet curva AHN (dummodo ejus basis NC non major, sed utcunque minor sit data curva AJD), ducta ubilibet ordinata HJF, et curvae posterioris normali HK, prioris autem tangente EJO intercepta basi CN, et ei ex vertice parallela AB; fiat perpetuo ut quadratum KF ad quadratum FH, ita quadratum tangentis EO ad aggregatum quadratorum AC et GQ, et ordinata GQ ad basin e directo puncti H, compleatur hoc modo curva NQT; spatio autem GQTC applicato ad AC oriatur latitudo GX ibidem ordinanda, ut proveniat curva MXC; haec erit aequalis datae AJD. Quod erat demonstrandum.

Hoc tamen deficit utraque constructio, quod non semper in priori evadat integrabilis $dx\sqrt{zz-gg+1}$ independenter a curvis non rectificabilibus, nec in posteriori spatium GQTC absolute quadrabile semper evadit, ut opus esset ad algebraicam curvae quaesitae aequationem constituendam, sed quandoque dumtaxat, idque ex accidenti, nisi methodus addatur, qua talis curva NHA assumi debeat, unde facta praecedenti constructione spatium GQTC quadrabile proveniat, quod mihi nunc in promtu non esse fateor nec vero vacare, ut illud inquiram. Vale et de Mathesis dignitate, quam hactenus adeo promovisti, bene mereri perge. Pisis Kal. Novembr. 1705.

IV.

Leibniz an Grandi.

Gratissimae mihi fuere literae Tuae. Notationes Algebraicas quisque pro arbitrio instituit: ego commoditatis rationem habeo, ut omnia in eadem linea signari possint, et vito superfluitatem, neque enim alio quam divisionis signo ad exprimendam Rationem et proportionalitatem opus est; consensus fateor hic optandus esset. Meditationes Tuae ad Problema Bernoullianum satis vim ingenii indicant, etsi non vacaverit prorsus absolvere quod desideratur. Ego quidem solutionem statim dedi et perscripsi, sed quam in exemplis exequi non vacavit. Commisi tamen alteri hanc curam, qui fortasse edet aliquando; nam mihi in his versari attentius vix ultra licet.

Aliquot viri docti nunc in Arithmetica mea dyadica occupantur, ubi omnes numeri scribuntur per solas notas 0 et 1, omnesque numerorum series in quavis columna pulcherrimas periodos habent: unde fit ut haec notandi ratio, etsi non destinata ad praxin vulgarem, magna tamen scientiae incrementa promittat. Apparet eandem arithmeticam ante ter mille et amplius annos innotuisse Fohio, Sinensium Regi vel philosopho, ut ex ejus figuris a Coupletio et aliis jam editis ope arithmeticae meae compertum habemus, solutumque aenigma quod ipsis Sinensibus jam inde a Confutii tempore negotium facessivit.

V.

Grandi an Leibniz.

Serius ad me pervenit notitia epistolarum, quas in Causa Varignoniana et Marchetiana dignatus es Actis Lipsiensibus inserere. Quod attinet ad primam, ipse mihi videor difficultatem omnem abstulisse, quae circa plus quam infinitas quantitates proposita fuerat, ac satis respondisse instantiis oppositis in mea Prostasi, quae sub praelo nunc est, ac brevi ad te pariter mittetur. Quod ad alteram pertinet, doleo animadversionem tuam ad me non pervenisse, antequam e praelo prodiret, ac publica fieret Responsio mea Apologetica ad D. Marchettum: tua enim doctrina usus essem ad rem, quae vulgo adeo paradoxa, mihi vero certissima videtur, uberius declarandam. Caeterum, ubi creationis mysterium, in multiplicatione infinita ejus quod per se nihil est, adumbravi, expresse me imperfectam analogiam promovere fassus sum, quae paritatem omnimodam non postulat; unde quas disparitates attulisti, et ipse perlibenter amplector, sed non prohibent illae, ne similitudo aliqua inter utramque operationem servetur, quantum satis ad mentem bene compositam persuadendam de possibilitate hujus mysterii, eamque adversus naturae praejudicia confirmandam. Nisi in aliquo discreparet actio creativa ab ea multiplicationis infinitae efficacia, non jam paritas sed identitas, ut ita loquar, exempli adducta esset, ac fieret naturalis et consentanea causis secundis vis illa creativa, quam solius supremi Entis propriam agnoscimus. Exemplum illud de Gemma non esse adaequatum ultro agnovi, nec de illo in tota Responsione adversus oppositiones Marchettianas verbum ullum facere volui; imo dum illud proponerem, expresse non tamquam exactum, sed rude tantum exemplum, et in speciem vulgo plausibile recognovi, dicens pag. 28. mei libri de Quadr. Circuli: Ego vero idem rudiori exemplo exponi, ac vulgo etiam persuaderi posse censebam hoc pacto: Titius, et Maevius etc. Quod autem addis ad instantiam meae doctrinae oppositam, quod eadem quantitas infinities posita, et infinities subtracta dimidio sui aequivaleret, respondendum non fuisse ex vi infiniti, quae nihil ipsum multiplicando in aliquid commutet, sed ex quo in numero infinito cum nec paris nec imparis differentia determinari queat, aestimandus sit valor per medium arithmeticum inter varios casus, quibus aggregatum quantitatum $a - a + a - a + a - a$ etc. nunc est $= a$, nunc $= 0$, adeoque continuata in infinitum serie ponendus $= \frac{a}{2}$, fateor acumen et veritatem animadversionis tuae; sed quaerere libet, cur non (saltem per causam remotam) responsio refundens hunc effectum in rationem infinitatis sustineri non possit? Eatenus enim in serie infinita confunduntur casus paris et imparis, quatenus demum infinita est; ergo ratio cur illa series fiat $= \frac{a}{2}$, videtur ex Infiniti natura non incommode nec absurde petita: etsi, quomodo postea vis infiniti eo pertingat, non satis fortasse explicuerim, sed ex praeclara animadversione tua penitius enucleandum reliquerim. Ad haec certissimum est, partes infinitesimas, quas dx aut dy ex tuo praescripto dicimus, et velut nihil respectivum habemus, dum ex calculo expungimus, ubi ordinarias quantitates tractamus, tales esse, ut quantumlibet multiplicatae per numerum finitum, adhuc nihil respectivum maneant, et expungi similiter debeant; per numerum vero infinitum multiplicatae, jam in quantitatem assignabilem assurgunt, et evadunt $=$ x vel y etc. Cur ergo idem discrimen in nihilo absoluto non observetur, quod scilicet, etiamsi per finitum quemlibet numerum multiplicatum adhuc absolute nihil efficiat, nihilominus per infinitum, aut maximum qui concipi possit inter ipsosmet infinitos, illud multiplicando, ideam alicujus quantitatis exsurgere cogat? Ad haec aliquot fortasse series terminorum in infinitum progredientium, et certae quantitati nihilominus aequales assignari possunt, in quibus tamen valor per regulam, qua aestimari solent valores plurium casuum, ex eorum summa per numerum multiplicitatis casuum divisa, vix assignari poterit. Quomodo enim hinc deducatur exempli causa, quod series in qua infinitae unitates denominantur ab omnibus quadratis unitate minutis, nempe $\frac{1}{4-1}+\frac{1}{9-1}+\frac{1}{16-1}+\frac{1}{25-1}+\frac{1}{36-1}$ etc. $=\frac{3}{4}$? aut quod alternatim ponendo $\frac{1}{4-1}-\frac{1}{9-1}+\frac{1}{16-1}-\frac{1}{25-1}+\frac{1}{36-1}-\frac{1}{49-1}$ etc. $=\frac{1}{2}$?

Caeterum innumeras tibi grates habeo, quod conciliare nisus sis meas sententias cum iis, a quibus dissentio; id enim et optimi Amici munus agnosco, et nedum gratissimum, sed perhonorificum mihi esse profiteor. Quod autem Marchettianas rationes mihi oppositas non videris, nihil plane tua interesse debet, cum illas et in mea responsione relatas animadvertere possis, et earum debilitatem statim agnoscere; is enimvero non me oppugnare aggressus est, quod falsam tantummodo doctrinam meam putaret (id quod aequissimo animo ferre paratus eram, nihil enim mea refert, quod alii secus ac ego sentiant) sed quod erroneam diceret, temerariam, a recta Theologia alienam, et si quae alia sunt hujus commatis; id quod a me justa ratione refellendum esse judicavi, cum me nihil commisisse videris, quod (etsi fortasse non ad summum usque rigorem, sed toleranter dumtaxat sit) Religioni nostrae contrarium aestimari queat; imo potius laudando conatu maxime necessarium creationis mysterium adversus atheos propugnandum exhibeat, in ejusdem Religionis Christianae favorem. Vale, et meis studiis favere perge, Vir summe et Mathematicorum Primipile.

Dabam Pisis prid. Kal. Julii 1713.

VI.

Leibniz an Grandi.

Cum praeclara Tua in rem Geometricam, et nostram inprimis Analysin merita dudum ut par est aestimaverim, nunc propius Tibi innotescere laetor, magis ut applaudam currenti, et ad majora tendenti animum addam, quam quod sperem multum adjumenti Tibi a me hac aetate et his occupationibus afferri posse. Sumus adhuc in primo tantum aditu Analyseos profundioris, eoque magis egregiorum virorum conjunctis laboribus opus est. Et vestra Italia, ferax insignium ingeniorum, gustare hujus doctrinae dulcedinem coepit, Te inprimis duce. Caeterum mea sententia est, saepius exposita, infinite parvas pariter atque infinitas quantitates esse fictiones quidem, sed utiles ad ratiocinandum compendiose simul ac tute. Et sufficere ut capiantur vere tam parvae quam opus est, ut error sit minor dato; unde ostenditur, nullus. Ejus sententiae indubitata argumenta habeo, sed quae exponere nunc quidem prolixius foret. Interea infinite parva concipimus non ut nihila simpliciter et absolute, sed ut nihila respectiva (ut ipse bene notas), id est ut evanescentia quidem in nihilum, retinentia tamen characterem ejus quod evanescit. Talia ducta in quantitatem infinitam etiam modificatam concipimus producere quantitatem ordinariam. Nec ineleganter hinc a Te illustratur Creationis negotium, ubi vis infinita absoluta ex nihilo absoluto aliquid facit. Certe in nostra Analysi concipimus rectam infinitam modificatam, ut $aa:dx$, ductam in dx rectam in nihilum abeuntem vel quod idem est in statum annihilationis rectae x continue decrescentis producere rectangulum ordinarium aa. Equidem infinitae numero (id est quovis numero plures) magnitudines nunquam componunt unum totum infinitum, et infinitudo vera non cadit nisi in infinitum virtutis, omni parte carens; et ideo nec aeternitas nec recta infinita etsi uno nomine expressa est unum totum, et quantitates illae calculi nostri extraordinariae sunt fictiones, non ideo tamen spernendae sunt, aut rejicienda cum illis analogia, quam verae religioni.......*) esse posse non omnino negem; cum in calculo perinde sit ac si essent verae quantitates, habeantque fundamentum in re et veritatem quandam idealem ut radices imaginariae, quas non recte Prestetius, Analysta Gallus, contradictione laborare dicebat. Ut enim radices imaginariae necessariae sunt ad tuendas aequationes quae casus possibiles pariter et impossibiles contineant, ita quantitates extraordinariae necessariae sunt ad regulas generales quae media pariter cum extremis complectantur,

*) „profuturam" vielleicht zu ergänzen.

verbi gratia, ut parallelismus tanquam extremum convergentiae sub convergentia comprehendatur. Et Natura rebus legem continuitatis inviolabilem a me olim in Novellis Reipublicae prioribus apud Batavos editis expositam praescripsit, ut usus earum etiam in physicis nunquam fallat, etsi in illis non demonstratione rigorosa, sed convenientiae rationibus constet, ut dicendum sit, Deum ipsum ad eas respexisse. Et dici non inepte potest ipsum casum infiniti modificati in infinite parvum modificatum ducti continue crescendo et decrescendo evadere tandem ut combinationem infiniti absoluti cum nihilo absoluto, id est creationem. Nec sine jactura philosophiae has subtilitates, et hanc ut sic dicam metaphysicam Geometriae (quam Caramuel Metageometriam vocaret) ignorarunt Philosophi Scholastici, multa alioqui ingeniosa et scitu digna, et iis quae in scholis vulgo agitantur utiliora prolaturi. Me adolescente Nieulandius, praefectus militum Batavus, idemque Geometra et philosophus, in libello paulo ante annum 1672 edito, cui Hugenii Epistola praefixa est, analogia quadam non valde Tuae dissimili ad Creationem illustrandam usus erat, sed libellus nunc non est ad manum. Non diffessus sum ipse, sed fundamenti loco posui quod observas, ex natura infiniti oriri, quod paris et imparis discrimina evanescunt in serie de qua agitur, interim in genere etiam, cum finita est; sed utrum per + an — terminetur ambigua, dicendum est aestimationem esse eandem, ut valor sit $\frac{1}{2}$. Agnosco etiam, non omnibus seriebus infinitis summandis applicari eam methodum posse, qua nempe ostendi $1 - 1 + 1 - 1$ etc. in infinitum esse $\frac{1}{2}$ seu $\frac{1}{1+1}$; sed ea methodo hic opus erat eo magis, quod haec series non esset decrescens nec continue usque ad intervallum dato minus advergens summae, ut aliae series solent. Sed difficultatem peculiarem prae se ferret amicisque viris doctis, antequam meam explicationem percepissent, minime toleranda videretur, nec admittenda divisio, quae ex $\frac{1}{1+1}$ facit $1 - 1 + 1 - 1$ etc. Interim in aliis quoque seriebus, ubi alternant + et —, posset similis aliqua aestimatio subinde institui alternativa. Et complures ob causas maximi momenti foret habere Methodum, per quam series decrescens constans ex meris membris affirmativis possit reduci ad seriem, in qua membra positiva et privativa sint alternantia.

Cl. Marchettum vellem Tecum collisum non fuisse. Eum audio queri de insigui viro, et mihi olim amico, Vincentio Viviano, quod hic illum multos ante annos editionem libri de Resistentia Solidorum diu differre coëgerit. Ego meum judicium hic non interpono, neque Vivianum quantumvis amicum excusarem, si quid ea in re humani passus esset: ipsum autem librum Marchettianum de Solidorum Resistentia legere olim memini, et haerebam in demonstrationibus nonnullis, praesertim cum de solido utrinque fulto agitur, quae mihi paulo abruptiores videbantur, cum quam maxime clarae optentur, quoties a pura mathesi ad mixtam physicae transimus, ubi facilior deceptio est. Ejus versio perelegans poëmatis Lucretiani versibus Italicis conscripta ad me pervenit ejusque cum laude memini in opere Theodicaeae.

Audio obiisse Eminentem virum Laurentium Magalotum, cujus etiam Florentiae benevolentiam expertus sum. Is pro veritate Religionis quaedam conscripsit, quae vellem extare. Magliabecium non nostrum minus quam vestrum de literis optime meritum spero et opto adhuc vivere et valere.

Te, Vir Eximie, video etiam in Historia recondita versatum esse, et cum voluptate legi in Diario Italico, quae occasione originum Camaldulensium circa res quasdam in confiniis seculi decimi et undecimi gestas agitasti. Nam et mihi de Hugone Marchione Tusciae et Waldrada ejus sorore, Petro Candiano Duci Venetiarum nupta, agenti harum rerum cura fuit. Scipio Ammiratus junior in revisa a se Historia Florentina Paterna citat diploma quoddam apud Aretinos, ni fallor, extans, in quo mentio fit Adalberti Marchionis, filii Adalberti item Marchionis, lege viventis Longobardorum, ex seculo (opinor) nono. Idem diploma, sed ex eodem Ammirato ut arbitror citat etiam vester Cosmus de Arena in Historia veterum principum Hetruriae, cujus consuetudine olim Florentiae utiliter usus sum. Copiam ejus Diplomatis mihi fieri opto, ut de eo sufficienter judicari possit, eamque in rem Tuam opem imploro. Nescio an ejus meminerit Gamurrinus in suo de Familiis Tuscis et Umbris opere, quod superest, sed quod mihi in antiquis valde confusum videbatur. Vale et fave.

Dabam Viennae Austriae 6. Septembr. 1713.

VII.

Grandi an Leibniz.

Gratissimae fuerunt litterae tuae, Vir Doctissime, quibus sensum tuum de infinite parvorum et magnorum natura, cogitatis meis apprime consentientem, optime illustras. Doleo impedita, ex grassantis pestis suspicione, viarum commercia in causa fuisse, cur librum meum Apologeticum Marchettianae epistolae oppositum, et dudum tibi destinatum, nondum receperis; ibi enim Cl. Viviani defensionem certissimis documentis innixam reperisses, unde nihil ab ipso, minus quàm Virum Candidum et litterarii progressus amatorem decebat, actum fuisse contra Dominum Marchettum in retardanda libelli de Resistentia Solidorum editione (quae nec aliunde D. Blondelli opusculum, diu antequam haec dissensio inter Marchettum et Vivianum excitaretur, impressum praevenire unquam poterat) manifeste constat. Ad haec ostendo, in Cl. Viviani Adversariis de eodem argumento adhuc existentibus, et tum sigillo, tum subscriptione Seren. Card. Leopoldi Medicei jam inde ab anno 1667 signatis, longe plura extare ad illustrandam doctrinam illam de Resistentia Solidorum idonea, quam quae apud Cl. Marchettum habentur, ut dubitare liceat, annon potius conqueri possimus, quod Marchettus Vivianum impedierit a suis edendis, quam ut ille de hoc justam querelam moveat ob editionem libri sui ad aliquot menses dumtaxat Viviàni causa dilatam. Et quidem in Viviani commentariis (quae spero aliquando in lucem proditura, nam iis recensendis atque in ordinem redigendis, ac supplendis demonstrationibus quae in schedulis illis plerumque desunt aut imperfecte indicantur, non parum operae hac occasione impendi) habemus complura solida aequalis resistentiae, tum in casu, quo extra murum pendeant, uno tantum termino innixa, tum in casu quo hinc inde binis fulcris innitantur; et in summa, quaecunque a te ipso in Actis Lips. 1684 (ni fallor) felicissime adinventa sunt circa species solidorum aequalis resistentiae, itemque a Cl. Varignonio in Monumentis Academiae Parisiensis alia via demonstrata sunt, haec a D. Viviano jam animadversa fuerant, et solita lineari methodo veterum Geometrarum, citra ullam Analyseos speciem, exposita, quamquam certissimum sit, nec Tibi nec Varignonio visa fuisse scripta Viviani, quae tamen ipsum Blondello olim communicasse ex ejus quadam epistola constat. Ego vero infinitas species solidorum aequalis resistentiae insuper adinveni, et in praedicta Apologetica mea Responsione exposui, quae tibi omnibusque harum rerum amatoribus maxime probanda auguror. Multa etiam in illustrandis Vivianeis ea de re commentariis adducam, nondum hactenus ab ullo, quod sciam, animadversa. Utinam otii et commodi satis ad haec perficienda obtinere aliquando possim!

Nuper mihi construenda proponebatur curva quaedam Rosiformis, quam Rhodoneam appellare placuit, in qua quadrata ramorum AF, Af (fig. 76) sint reciproce ut sinus angulorum AfL, AFH, quos dicti rami cum ipsa curva continent; adeo ut posito lumine in A irradiante in curvam, seu verius in superficie ab illa circa AC rotata descriptam, intensio ubilibet sit aequalis, utpote composita ex reciproca duplicata distantiarum a lumine et directa sinuum incidentiae: imo etiam corpus quoddam premens hanc superficiem in ratione composita ex vi gravitatis quadrato distantiae AF vel Af reciproce proportionalis et ex sinu anguli, quo superficies inclinatur ad perpendicula horizontium per varia ejus superficiei loca ductorum, ubilibet tam in C quam in f aut in F illi incumbendo, eam aequaliter premat. Cum autem in ea construenda rem ad dimensionem cujusdam spatii adduxissem, ex improviso in hanc simplicissimam constructionem incidi, quam figura ostendit. Nimirum, esto AGB semicirculus radio CB descriptus, super quo item alius sit semicirculus CIB, et ducta ubilibet ordinata DE, secante semicirculum priorem in D, posteriorem in I, jungatur AD, fiatque AF = intervallo CI; erit F ad curvam Rhodoneam, de qua loquimur.

Tangens HF inclinatur ramo ad angulum HFA semper duplum anguli GAF, quem ramus cum subtensa AG (extremi puncti A tangente) complectitur. Et consequenter perpendicularis curvae inclinatur pariter eidem ramo ad angulum duplum residui anguli FAC. Porro circulus osculator cujuslibet puncti F transit semper per idem punctum A, et dicti circuli diameter est tertia proportionalis post ramum AF et radium AC: Spatium AFfC est = $\frac{1}{2}$ trianguli GAC; partes etiam quaelibet AFf facile quadrantur. At si radio AC describatur arcus circuli CK, erit superficies sphaerica ab hoc circa AC descripta aequalis curvae superficiei, quam Rhodonea AFfC circa eandem AC (vel etiam circa AG, aequalem enim superficiem creat cum habeat curva centrum gravitatis in recta, quae angulum GAC bifariam secat) rotata generaret. Imo si circa quamlibet rectam per punctum A transeuntem tam Rhodonea scilicet AFfC, quam arcus idem circularis KC convertantur, aequales semper superficies sunt prodituræ: nam elementa curvae binis ramis infinite proximis intercepta, sunt ad elementa dicti arcus reciproce ut radius circuli ad ramum curvae, adeoque et ut peripheriae, quae ab eorundem dato cuilibet axi motus aeque inclinatorum extremis generantur. Sed vereor, ne Poma dare Alcinoo videar, qui has nugas praestantissimo Geometrarum Principi offeram.

Viri Clarissimi Magalotti epistolae, quae in Atheos conscriptae sunt, ut et varia alia ejus opuscula apud multos Mss. servantur; utinam adjutricem manum inveniant, ut edi possint ad publicam utilitatem.

Scipio Ammiratus Junior non erat certe Senioris Ammirati filius, ut ipse supponere videris in epistola tua; imo senior Canonicus fuit Metropolitanae ecclesiae Florentinae, ac sacerdos, quo utique munere fungi non permittit Viros matrimonio illigatos ecclesiae nostrae vetustissima disciplina; sed cum famulum haberet industrium studiorum suorum administrum, et amanuensem diligentissimum Christophorum del Bianco, hunc omnium suorum bonorum haeredem conscripsit suo testamento die 11. Januarii 1600, ea conditione ut nomen et cognomentum et stemma familiae suae assumeret, qui propterea in Scipionem Ammiratum Juniorem evasit. Porro frustra conquisitum est documentum ab eo relatum de Adalberto Etruriae Marchione circa annum 896, tum a Cl. Viro Cosmo de Arena, qui id examinare cupiebat, tum ab aliis; num ego felicior in eo expiscando futurus sim, mihi polliceri non audeo; non omittam tamen, tum inter Mss. Junioris Ammirati, quae in Majoris Nosocomii Florentini bibliotheca extant, tum inter veteres Volaterani Archivii membranas (nam episcopum Volateranum respicit ejusque ecclesiam donatio praedicta) omnem indaginem collocare, si qua ex parte obtineri possit quo votis tuis fiat satis. Cl. Magliabequium Florentiae sospitem reliqui nuper; an nunc etiam optima fruatur valetudine, ignoro, nam proximis meis litteris nondum respondit, quibus ipsum, nomine etiam tuo, salvere jubebam. Vale, et ad incrementum omnis litteraturae, imprimis vero ad perfectionem analyseos, quae Te inprimis Auctore ad hanc facilitatem, quam nunc exhibet, evecta est, majoremque earum, quae adhuc supersunt, salebrarum explanationem abs te merito postulat, diutissime vive. Dabam Pisis nonis Decembris 1713.

VIII.

Grandi an Leibniz.

Postquam epistolam ad te nonis Decembris scriptam tabellario deferendam tradideram, animum pupugit solicitudo, an non in curvae illius Rhodoneae natura definienda pronunciarim, sinus angulorum, quos curva cum ramis continet, reciproce proportionales esse quadratis eorundem ramorum; quod si mihi calamo excidit, emendandum opto, ut directe sint tales sinus quadratis ramorum proportionales. Id in causa est, ut hanc schedulam adjungam; atque id me ab initio dicere voluisse patet ex aliis curvae illius proprietatibus, quae talem directam, non vero reciprocam proportionem supponunt. Hac occasione illud addo, vim centripetam, cujus actione ad polum, unde rami illi procedunt, directam distantiarumque reciproce sumptarum ratione septuplicata crescentem huic ipsi curvae describendae idoneam fore. Curvae ipsius dimensionem, nec non corporis ab ea circa suum axem conversa geniti molem nondum tentavi, et vereor, ut ex voto succedere mihi possit, nisi in seriem infinitam valorem hinc prodeuntem conjiciendo. Sed jam temperandum. Iterum vale, tibique addictissimum amare perge.

Pisis V. Idus Decembr. 1713.

IX.

Leibniz an Grandi.

Gaudeo optimi et ingeniosissimi Viri et mihi quondam amici, Vincentii Viviani, famam a Te vindicari. Magis adhuc gaudebo, si ab interitu vindicentur beneficio Tuo multae ejus praeclarae cogitationes cum aliae, tum de Resistentia Solidorum, et de Cursu aquarum. Nam et aquarum curam habebat per Hetruriam Medicaeam, et haud dubie Geometra et Naturae consultus multa ad usum observarat ultra Michelinum. Guilielmini librum Italicum de Aquis currentibus puto vivente adhuc Viviano prodiisse, et nosse optem, quid de eo judicarit, et quid de controversia Guilielmini cum Papino circa idem argumentum senserit. Mihi ista expendere satis non vacavit. Mire placet ratio ejus, ex inspectione figurarum eruendi multa quae nos assequimur per notandi artem. Est etiam aliqua (quam voco) Analysis Situs, ab Analysi magnitudinis quae sola vulgo nota est diversa, sed eam nondum quisquam constituit. Veterum processus Analyseos hujus semina quaedam continent, quibus usus est Vivianus, sed longe altius aliquid in illis latet. Cum Vivianus ultimus superstes fuerit discipulorum Galilaei, nescio an non quaedam in schedis notavit Anecdota ex Galilaei sermonibus hausta. Circa resistentiam solidorum notavi olim in Actis Lipsiensibus alium prodire calculum, si ut ego arbitror fibrae resistentium extendantur antequam rumpantur, quam si supponatur cum Galilaeo et ni fallor etiam cum Marchetto rupturam fieri sine..... tensione tanquam in momento. Blondellus librum de Resistentia Solidorum composuerat, sed re melius comperta cum ego Parisiis agerem, id est paulo post annum 1672, totum revocarat. Paulus Wurzius, qui Ductor exercitus apud Batavos paulo post initium belli Gallici (id est paulo post eundem annum) obiit, idem argumentum tractarat per experimenta, quae Galilaeo haud consona deprehenderat, sed schedae ejus periere. Cum olim Cl. Marchetti libellum inspicerem, haerebam inprimis in ejus demonstratione, quando accedebat ad solidum utrinque fultum. Sane cum tunc ruptura alicubi fit in medio, contingit quaedam ut sic dicam extritio, quae non est obvia, cum solidum ex muro projectum est et rumpitur prope murum.

Perelegans est tua curvae Rhodoneae inventio, quae rotata det superficiem, ubique aequaliter a dati puncti luminosi radiis afficiendam; praesertim cum constructionem quae Tetragonismum aliquem exigere videbatur, reduxeris ad operationem communis Geometriae. Posses si vacaret Tibi rem in dissertationem non prolixam redigere et synthesi analysin seu inveniendi modum adjungere, nec alia sit promta edendi occasio, posset inseri novo Tomo Miscellaneorum Berolinensium, quem nunc paramus.

Gratias ago quod insignem virum Antonium Maliabeccum a me salutasti; tum quod de Scipione Ammirato juniore me doces; sed plurimum debebimus Historiarum amantes, si Adalberti Marchionis chartam ex tenebris erueris, inquisitione tum apud Volaterranos, tum inter schedas Ammirati instituta. Miror inprimis in ea charta anno Domini 896 data Adalbertum profiteri se vivere lege Longobardorum. Is enim loquendi mos, quantum memini, seculo nono nondum frequentabatur. Itaque vereri coepi ne in anno sit peccatum.

Quoniam animadverti ex Diario Veneto, quanto studio versatus sis in rebus seculi X exeuntis discutiendis, quaerere in mentem venit, an Tibi aliquis notus sit Hugo Marchio cum conjuge Waldrada, qui egerit circa Rhodigium vel in vicinis locis paludosis, vulgo Polesine di Rovigo. Suspicatus sum Waldradam esse notam illam magni Marchionis sororem secundis nuptiis Candiano Venetiarum Duci nuptam, et ab eo viduam, quae secundis nuptiis poterit alteri illi Hugoni se junxisse. Nam habui horum conjugum notitiam ex Necrologio Monasterii Vangadiciensis; porro illic Waldradam cum fratre Hugone possessiones habuisse constat. Quod superest, vale et fave. Dabam Viennae Austriae 3. Martii 1714.

BRIEFWECHSEL

zwischen

LEIBNIZ und ZENDRINI.

Gleich seinem Zeitgenossen Guido Grandi war Zendrini*) (geb. 1679, gest. 1747 zu Venedig) in Italien einer der ersten, der unbekümmert über die Streitigkeiten in Betreff der Zuverlässigkeit des Fundaments der neuen Analysis die unschätzbaren Vorzüge derselben vor der bisher üblichen Methode erkannte. Er machte sich ihre Theorieen zu eigen und brachte sie besonders auf physikalische und mechanische Probleme zur Anwendung. Indess sind die Fragen, die Zendrini aus den Gebieten der Hydromechanik, Dynamik, Ballistik, Akustik in seiner Correspondenz mit Leibniz erwähnt und kurz erörtert, eben nur erste Versuche, ein unmittelbar der Natur entlehntes Problem mathematisch zu behandeln; noch lagen zu wenig, durch Experimente hinreichend begründete Erfahrungssätze vor, die als Ausgangspunkt für dergleichen Untersuchungen dienen konnten. — Au der anderen Seite zeigt sich in dieser kurzen Correspondenz die ausserordentliche Vielseitigkeit Leibnizens aufs glänzendste; er weiss in den verschiedenartigsten Gebieten, die zur Sprache kommen, Bescheid und hebt treffend dasjenige hervor, worauf die Aufmerksamkeit besonders zu richten ist.

*) Eine sehr ausführliche Würdigung der hohen Verdienste Zendrini's um die Hydromechanik enthält der von Prony verfasste Artikel: Zendrini, in der Biographie universelle, tom. LII.

I.

Zendrini an Leibniz.

Non diutius, quin humanitatem tuam, Vir Illustrissime, hisce litteris in obsequii tesseram exerceam, me continere possum: ex quo enim matheseos studia salutavi, profundiorisque Geometriae sacra limina adivi, tui inprimis nominis clarissimi extiti cultor, et e schedis tuis mathematicis, quae passim Europae diaria exornant, quantum per ingenii contumaciam licuit, studiorum meorum fundamenta erui. Non semel opportunitatem tibi, Vir celeberrime, scribendi anxie quaesivi, multa tamen hucusque ne justum desiderium officiumque implerem, in causa fuerunt: eminentiora tua studia inprimis non solum interioris Matheseos, verum et Metaphysica, quin immo et Historica, caeteraque solidioris Eruditionis, uti ex altera parte mei in Geometricis et Physicis tenues nimis vel prorsus inanes conatus. Sed cum per eruditissimum aeque ac amicissimum D. Burghettium officia mea per litteras tibi deferenda non semel......, persensique in postrema ad eundem data Epistola V. Nov. instantis, qua animi benignitate nostra studia excipias, non diutius haesitavi in accipienda hasce ad te dandi occasione, non solum ut maximas propensionis quam erga me ostendisti gratias rependam, sed ut nostra qualiacunque ea demum sint cogitata tecum possim communicare, et a te, omnium artium ornamento et oraculo, corrigi ac erudiri.

Ex iisdem supra memoratis litteris solutionem difficultatis D. Comitis Riccati comperi, et revera in allatis exemplis, licet indeterminatae jam sint separatae, attamen in altiorum graduum differentialibus per quadraturas rem expediri nequit. Caeterum enodationem aenigmatis seriei infinitae terminorum se invicem destruentium $+1-1+1-1+$ etc. $=\frac{1}{2}$ jam vidi maxima cum voluptate tribus ferme abhinc annis in litteris, quas Nobilissimo et

Eximio Viro D. Bernardo Trevisano IV. idus Octobris dedisti, et ut verum fatear, de tam facili et novo solutionis genere obstupui' nitibatur enim in assumendo medio arithmetico inter 0 et unitatem, ex eo quod in terminis finitis, si ultimus sit +, erit utique = 1, si —, = 0; ergo cum in terminis infinitis non abrumpatur series neque cum signo + vel —, ergo summam seriei concludebas esse medium arithmeticum inter 0 et 1, nempe $\frac{1}{2}$. Sed non minus elegans est solutio desumta ex formlua $\frac{1}{1-x} = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - x^5$ etc. faciendo $x = 1$. Hoc paradoxum antepono celebri illi Galileano de puncto aequali maximae peripheriae circuli.

Tibi, Vir Illustrissime, litterariam disputationem, quae inter DD. Bernoullios et D. Riccatum intercedit, notam credo; ortum duxit ex occasione solutionis Problematis Newtoniani circa inversum Problema virium centralium in vacuo in ratione reciproca duplicata distantiarum a virium centro. Solutionem indeterminatam satis facilem esse, id notum est, non ita de peculiari illa succedere sensit celebris noster Hermannus in Tomo II et V Diarii Italici. Tantam autem difficultatem non involvere eximius Joh. Bernoullius asseruit in Actis Regiae Acad. Paris. a. 1710, solutionemque uti quaesitam ex eo quod Conisectiones hac gaudere proprietate jam Hermanno constabat accusavit: neque integrationem expressionis differentialis gradus secundi absque tali adminiculo unquam assecutum fuisse ibi ostendere conatur. Hoc tamen negavit particulari Schediasmate in XIX. Tomo Diarii Italici D. Riccatus, ostenditque se methodi compotem esse separandi indeterminatas construendique curvas ex data lege, et ex Hermanni calculis idem ipse fecisse colligit, interim confirmando faciliorem esse solutionem generalis, quam particularis casus. In sequenti Tomo, nempe XX, D. Nicolaus Bernoulli aliam dissertationem pro patrui defensione subnectit, in qua praeter quaestionis nodum multa praeclara et Bernoulliis digna leguntur. Sed novam parare responsionem D. Comes per litteras me monet. In fine Bernoulliani Schediasmatis appendicis loco Problema exhibetur Geometris Italis, neque qua ratione nostrae Nationi simpliciter inditum, constat, nisi forte per quandam contentionis speciem id factum sit; communiter enim ita autumant Itali, si quidem nullam difficultatem involvit, si modo hanc consistere volunt in constructione cujusdam lineae virium, ubi status quaestionis propositae sonat, et non in descriptione cujusdam Trajectoriae genitae ex circumvolutione axis motu aequabili, interim dum grave data lege tendit ad centrum virium, et tali pacto meo quidem judicio difficilior esset casus, quam ille pro conisectionibus. Problema tale est: Punctum C (fig. 77) est centrum virium, BbC curva, cujus ordinatim applicatae BA, ba exprimunt vires centripetas in distantiis CA, Ca simulque tempora a mobili insumta, incipiendo casum a punctis A, a, et descendendo per distantias AC, aC; quaeritur natura hujus curvae BbC, sive in qua hypothesi virium tempora descensuum per AC, aC a punctis A, a quietis sint proportionalia viribus agentibus in distantiis CA, Ca. Solutio: Vocetur AC, y; AB, x; aequatio curvae quaesitae erit $x = \sqrt[3]{6y}$, hoc est, vires in subtriplicata distantiarum a foco; curvam autem esse parabolam cubicam patet.

Supposita vero gyratione axis CAD (fig. 78) circa centrum C, interdum dum grave D descendit per DC lege virium supradicta, sit fd, dz; $CF = CA = y$; Fd, dy; $CD = a$; invenio aequationem curvae localem esse $dz = \frac{dy\sqrt{2}}{\sqrt{2abbyy - 3y^3\sqrt[3]{6y} + 3ayy\sqrt[3]{6a} - 2a^4}}$, cujus constructio satis est involuta, nisi per quadraturas rem expedire contenti simus.

Occasione id ferente invenio, quod si ad tangentem FNe centro C ducatur normalis CN et e O, centro radii osculantis, recta OP perpendicularis FC, esse vires centrales, quibuscum describuntur cujusvis generis Trajectoriae ut $\frac{1}{FP \times NC^2}$, quae expressio est adhuc simplicior Moyvraeana.

Sed missis iis dicam aliquid de quodem meo Schediasmate, quod forsan publicam lucem aspiciet in proximo Tomo nostri Diarii. Agitur in hoc de riparum corrosionibus in fluminibus, hoc est determinatur curva efformata ab aquis currentibus in oppositis aggeribus compositis ex partibus ammovilibus, cum fluidi directio aliqua de causa versus alterutram ripam tendit. De hoc problemate sermonem habuit D. Guylielminy prop. 8 pag. 159 Della Natura de fiumi: Curvae tamen determinationem praeteriit forsan ob methodi deficientiam; ego rem breviter sic expedio tam pro corrosionibus verticalibus quam horizontalibus, et primo pro verticalibus. Esto CQSO (fig. 79) sectio fluminis verticalis, Bm sit linea horizonti parallela transiens per initium fluminis; sit CpO curva quaesita cujus axis Ce, et e quolibet puncto P ducatur PDR parallela QC, et Dm, Ef sint ad horizontalem mB normales; esto curva SRD quae repraesentet resistentias aggeris pro diversis altitudinibus CD, CE, et XJV velocitates respectivas aquae in D, d etc. Vocetur Pp, ds; eD, x; eC, a; $CD = a - x$ et $Np = -dx$, $DP = z$. Cum enim impetus fluidi in Pp sit in ratione composita ex velocitatis duplicata, et duplicata sinus anguli incidentiae, erit aequalis $\frac{uu \times Np^2}{Pp^2}$ (dicendo u velocitatem et accipiendo Pp pro constanti ad salvandam legem homogeneorum). Pariter cum resistentia ripae in Pp sit in ratione composita ex sinu anguli NpP et tenacitatis materiae, ex qua efformatur agger, erit utique haec $= NP \times DR$. Persistet autem curva corrosionum in curvatura CPO, cum haec resistentia aequabit aquae impulsum, ergo $\frac{uu \times Np^2}{Pp^2} = NP \times DR$ vel ad salvandam legem homogeneorum $= \frac{NP \times DR}{Pp}$, hinc in terminis analyticis $+ uu\,dxx = tdsdz$, faciendo DR, t. Sunto Ef, c; et Ee, b et pro communi hypothesi $u = \sqrt{\frac{c}{b}x}$ = velocitati debitae puncto D, et $t = a + x$ pro hypothesi satis probabili, aequatio reducetur ad sequentem $z + gf$*) $= -\int dx \sqrt{\frac{\sqrt{aa + 2ax + uxx}}{2a + x} - \frac{1}{2}}$, in qua $m = \frac{c}{b}$ et $n = 1 + 4mm$, faciendo autem $t = 1$, supponendo nempe resistentiam aggeris ubique aequalem, et $p = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4mmxx}}{4} - \frac{1}{2}}$, erit $z = -\frac{1}{3m} \times \overline{2pp - 1}\,\sqrt{pp - 1} + C$; C autem determinatur ex suppositione $z = 0$ ac per consequens $x = a$.

Horizontales vero corrosiones ex iisdem principiis mutatis mutandis facile deduco.

Scholium dissertatiunculae subnectere in animo est circa aquarum fluentium velocitates computatis resistentiis riparum, fundi et fluidi vis.... et in hypothesi magis probabili invenio curvam velocitatum adhuc conicam parabolam esse, inverso situ tamen positam; ne verificetur theoria, multa desunt experimenta, et deerunt fortasse semper in tam lubrica et contumaci materia.

*) gf est planum datum.

Scire cuperem, an projectum maximam vim a projiciente determinatam recipiat? v. g. an ad expellendum globum e tormento bellico maximo impetu possibili quantitas pulveris pyrii sit determinata, ita ut si in majori quantitate eo utamur, quam par sit respectu gravitatis globi, conferat ad validiorem adhuc ictum producendum nec ne? Mihi videtur rationi magis consona determinatio inter resistentiam projecti et vim agentem saltem in casu superiori, si quidem applicatio virium (nempe ignis et aëris violentissimae expansiones) sequitur in tempore, et per quandam speciem fluxus partium activarum, ita ut cum eadem velocitate movetur globus ac partes igneae, hae nil amplius motum globi juvabunt. Moveri autem tali celeritate posse videtur globus, antequam tota vis ignis, si hic in magna sit quantitate, singulis corporis movendi particulis applicari possit, et tali pacto determinari posset maxima vis pro amovenda data resistentia maxima possibili velocitate.

Sed fortasse nimis, Vir Illustrissime, calamus....; prolixioris epistolae ab humanitate tua incomparabili veniam postulo. Reliquum est, ut omnia ex corde tibi felicia.....

Dabam Venetiis VI Kal. Junii MDCCXV.

II.

Leibniz an Zendrini.

Multum praeclarissimo Burghetto nostro debeo, quod propiorem Tui notitiam mihi procuraret, quam ex fama dudum optabam. Gaudeo praeclara Italiae ingenia paulatim ad interioris Analyseos studium conversa, nunc pulchris speciminibus acumen ostendere. Nollem tamen lites Dni. Hermanni causa Domino Comiti Riccato cum praeceptore communi D. Johanne Bernoullio fuisse natas. Eae mihi prorsus ignotae fuere hactenus, quia Diarium Venetum ad nos non perfertur. Et optem terminari quam primum honorifica utrinque ratione, ne tandem, ut saepe fit, liticula in odia et dicteria pungentia desinat. Etiamsi verum fuisset, Dn. Hermannum adjutum notitia Conicarum ad solutionem inversam problematis Trajectorii devenisse, hoc tamen nihil obesset, id enim agebatur, ut demonstraretur proprietatem hanc Conicarum esse reciprocam.

Itaque mihi controversia minime necessaria videtur, suaderemque D. Comiti Riccato, si quid apud eum possem, ut stylum moderetur, et dissimulet quod observas, posse aliquos offendi in Italia, quod Italis nominatim problema proponatur. Poteritque eo dissimulari facilius, quod quae in hoc genere habetis, pleraque ex Bernoulliana institutione tanquam fonte profluxerint.

Caeterum ego ita sum oppressus distractusque aliis diversissimi generis occupationibus, ut calculis tentandis tempus tribuere nullum possim. Itaque beneficio me afficies, si Tuis solutionibus analysin ipsam adjicies, videntur enim ingeniosae. Sed maxime velim Methodis ipsis provehendis operam dari, et ubi ad particularia descendere lubet, tentari problemata utilia, quale illud tuum est de corrosione riparum. Meretur certe aquarum currentium doctrina discuti accuratius, quam ab egregio Viro, Dominico Guglielmino, aut ab Antagonista ejus ingenioso, Dionysio Papino, fieri potuit, quoniam illis deerant Methodi haec tractandi cum ἀκριβείᾳ quam res capit; interea Guglielminus utilem materiam disquirendi praebuit. Vellem extarent, quae Vincentius Vivianus, praeclarus certe Geometra, circa aquas meditatus erat; illis enim curandis a Magno Hetruriae Duce fuerat praefectus.

Circa trajectorias vellem non tam proponi casus qui non dantur, quam tentari, an Luna, contumacissimum sidus, Legibus Geometricis magis subjici possit, qua in re Newtonus sibi satisfecisse nondum videtur, ut ex iis conjicio, quae David Gregorius in suis Elementis Astronomicis ex ipsius sententia dedit.

Recte judicas, posse limitatam esse quantitatem pulveris pyrii pro tormento et globo, ut major non prosit, etsi enim non arbitror eo pervenire in nostris tormentis, ut globi celeritas aequet celeritatem venti ignei impellentis; puto tamen, si major aequo sit pulveris pyrii quantitas, totam non esse ignem concepturam, antequam globus tormento exeat. Et ideo propositae etiam sunt ab Ingeniariis nonnullis inventiunculae quaedam ad efficiendum, ut pulvis pyrius promtius accendatur. Et fortasse quae admista augere vulgo creduntur vim pulveris, non nisi hoc praestant, sed tanto plus firmitatis bombarda vel tormentum habere debet, ne frangatur. Itaque praeter machinae firmitatem hic consideranda, quae accelerant accensionem et quae tardant egressionem, quod nullo virium detrimento faciunt pondus globi, longitudo fistulae, et modus hoc praestandi cum virium detrimento, si globus in exeundo frictionem sentiat, et potest tamen hic plus esse lucri quam damni.

Serenissimus Hassiae Landgravius Cassellis experimenta instituti curavit circa modum elevandi aquam per ignem, et is qui haec ipsius auspiciis curat, significavit mihi, in illis locis ubi equi nunc adhibentur ad aquas ex fodinis exantlandas, tertiae partis sumtuum hac ratione compendium fieri posse, quod non spernendum foret.

Galilaei, summi Viri, paradoxum de puncto aequali peripheriae, lusus ingenii est seu elegans sophisma, quae habent usum ad excitandam attentionem et comparandas veras rationes. In quo consistit rigor demonstrandi, quem aliquando si labores qui nunc urgent, Deo dante absolvero, in rebus quae etiam pertinent ad re rationeque a materia abstracta, ut Elementa quaedam in his quoque demonstrata, aliquando consequamur.

Cum Dn. Burgettus mox Venetias relicturus sit, spero Tuo me imposterum favore illic frui posse, sive ad libros obtinendos, sive ad alia cognoscenda, vellemque eum vicissim aliquo officio demereri posse.

Curavi olim, ut Theodicaea mea ad Bernardum Trevisanum vestrum, Virum utique magnum, deferretur, sed nondum didici, quae sit ejus de hoc opere sententia, cum tamen pauci sint, qui de eo melius judicare possint. Visus est aliquando cogitationem suscepisse de excitandis magis magisque praeclaris Italiae ingeniis. Ei instituto merito applausi, optavique etiam, ut Dictionarium Vocabulorum Technicorum in Italia conficeretur, quale Galli jam habent, Academici enim Secerniculi Florentini ad vocabula communis usus tantummodo respexerunt.

III.

Zendrini an Leibniz.

Accepi humanissimas tuas litteras, tantaque cum voluptate ac veneratione perlegi, quantum conditio tua, mens summa, ceteraeque eximiae dotes, per quas tui nominis clarissimi fama per orbem longe lateque spargitur, merentur.

Optime judicas circa controversias inter Cl. Bernoullios et D. Comitem Riccatum, natas occasione notae solutionis Hermannianae, et licet non tam facile, pluribus in contrarium suadentibus, eorum scripta in odia vel pungentia dicteria desinere crederem, tamen cum lis reducatur fere ad simplicem nominis quaestionem, aequum esset et laudabile silentio omnia tradere, quod etiam D. Comitem esse facturum tum ex ejus privatis litteris, cum ex ejus dissertatione non ita pridem publici juris facta in Tomo XXI Diarii Italici comperio. Incipit enim his verbis: La presente dissertazione servirà di riposta alle Annotazioni, che s'è compiacciuto di fare il dottissimo Signor Niccolò Bernoulli sopra la mia difesa della soluzione del Signor Jacopo Ermanno, e per mia parte... certamente l'ultima etc. Adde sensus tuos in hac re, quos ipsi opportune significabo, quosque pro lege inviolabili D. Comiti futuros sperarem: hortaborque tuo nomine ut missis his ad promovendas scientias methodosque utilius nervos omnes contendant. Certe post te, inventorem eximium calculi infinitesimalis, maxima incrementa scientiis mathematicis Cl. Bernoullii dederunt et dant, jureque quodam hereditario sublimia haec studia in hac optime merita familia nepotibus traduntur.

Si analysim solutionibus meis tibi in progressa communicatis non adjeci, id factum, ne tibi, celeberrimo Viro, scribens debitae modestiae aliquid detraherem. Imposterum, ut tuis obtemperem jussibus, calculos solutionibus, si quas dabo, appendam. Circa aquarum fluentium doctrinam praebuerunt quidem hucusque Autores disquirendi materiam, rem tamen, ut notas, minime consumpserunt. Vincentium Vivianum aliquid circa aquas esse meditatum me non latet, meditationes vero ipsas neque vidi, neque ubi vel apud quos extent, mihi innotescit. Caeterum si aquarum fluentium scientia parum promota est, nihil fluidorum cursus in animalium corporibus exploratus est. Borellius et Bellinus multa quidem, et haec non spernenda dederunt, sed idem obstaculum quod Guglielminum detinuit, ne hydrostaticam exhauriret, fecit, ut ii quoque ceteroquin celeberrimi Autores rem, quam prae manibus habebant, acu non tetigerint. Utinam animum vires meae adaequarent, si quidem acriter incumbere vellem ad scientiae tam praeclarae et necessariae promotionem, ut tandem Medicina a statu semiempyrico, in quo adhuc jacet, vindicaretur. Generalia quaedam de motu fluidorum in animato corpore olim meditatus sum, praecipue circa sanguinem, in cujus recta crasi, motusque harmonia consistere animalis salutem vix est qui neget. Vim igitur cordis ad sanguinis promotionem per vasa propria huic muneri inservientia ante omnia indagare volui; utut autem in vasis arteriosis motus fluidi ob vasorum distractibilitatem et contractibilitatem diversa lege celebratur, quam si per fistulas rigidas propagaretur, hinc Lemma quoddam fundamentale, ut sequitur, praemisi. Intelligatur anthliae AG (fig. 20) annexus tubus distractilis et contractilis HNML, qui in maxima sui dilatatione occupare possit spatium GOLK. Esto curva KCB ad axem KA, cujus area, puta DKC, representet vim residuam pro fluidi promotione, cum embolus DF est in D. Vocetur DK, x; AK, a, eritque DA $= a - x$; DC, y; Mn augmentum dimidium diametri ex parte ML, post intrusionem emboli usque ad D sit z. Vis totalis $F = AKB = cc$. Diameter primaria ante intrusionem, hoc est $MN = h$, et $\frac{1}{2}h + z = k$. Velocitas cum qua movetur fluidum in anthlia, sit u, tempus t, peripheria radio Pn descripta p, et resistentia ob fluidi inertiam g. Velocitas autem fluidi in tubo distractili dicatur V. Et quia resistentia fasciarum in tubo distractili, per demonstrata a Cl. Bernoullio in Dissertatione de musculis aequatur pressioni sive vi impellenti ductae in radium Pn et peripheriam ejus p, vis autem impellens vel sustinens in situ D est ut portio areae ADCB $= \overline{cc - \int ydx} \times \overline{\tfrac{1}{2}h + z} \times p = \overline{cc - \int ydx} \times kp$. Resistentiae vero pars altera orta ex inertia fluidi est ut quadratum velocitatis ductum in orificium Nn: ergo $g = VV \times \frac{pk}{2}$. Spatium autem percursum ab embolo vel fluido in anthlia, cum est in situ D, est ut velocitas in tempus, et velocitas ut vis et tempus, ergo $a - x = ut$ et $u = t \times \overline{cc - \int ydx}$, quare erit $uu = \overline{a - x} \times \overline{cc - \int ydx}$ vel $u = \sqrt{\overline{a - x} \times \overline{cc - \int ydx}}$. Velocitas autem V fluidi in tubo distractili ob fluidi contiguitatem cum fluido anthliae obsidebitur, si fiat juxta leges staticas $u . V :: k^2 . b^2$ (dicendo b diametrum anthliae AE), ergo $V = \frac{bbu}{kk} = \frac{bb\sqrt{\overline{a - x} \times \overline{cc - \int ydx}}}{kk}$, et $VV = \frac{b^4}{k^4} \times \overline{\overline{a - x} \times \overline{cc - \int ydx}}$, quare $g = \left(VV \times \frac{pk}{2}\right) = \frac{b^4 p}{2k^3}$

$\times \overline{a - x} \times \overline{cc - \int ydx}$, et hinc $F.v + g :: \frac{ccp}{k} \left(\text{ob const.} \frac{p}{k}\right)$ ad $\overline{cc - \int ydx} \times kp + \frac{b^4 p}{k^4} \times \overline{\overline{a - x} \times \overline{cc - \int ydx}}$, vel etiam $F.v + g :: cc.$ $\frac{\overline{2k^4 + b^4, a - x}}{2kk} \times \overline{cc - \int ydx}$, hoc est, vis totalis ad resistentiarum aggregatum (sumpta $AK = a$ pro unitate ad salvandam legem homogeneorum) ut area ADK ad

$$\frac{1}{2Pn^2 \times AK^2} \times 2\,\overline{Pn^4 \times AK + AE^4 \times AD} \times ADCB.$$

Cum Acusticae duobus abhinc annis aliqualem operam darem, et praecipue pro verificanda hypothesi et observatione D. Charrè (?) asserentis in Act. Acad. Regiae Scient. corpora solida similia, qualia sunt cylindrica, sonos edere, si percutiantur non in ratione suarum longitudinum vel crassitierum, sed habita ratione tantum ad eorum superficies, ejus ratiocinio et experimentis acquiescere non potui; idcirco plura tentavi experimenta, plures ligneos cylindros percutiendo sonosque cum chordis musicis conferendo. Accidit ut pulsando diversa puncta cylindri lignei persenserim in certo ac determinato situ acutiorem sonum, quam in reliquis partibus. Phaenomeni rationem reddere curavi, ut sequitur. Sit corpus FEAHG (fig. 81) cujuscunque figurae, in hoc reperiendum est punctum L vel Q vel ambo (tot enim et non plura habere potest) quibus in locis si percutiatur, sonum diversum a suo naturali reddit; quod autem dico de punctis L et Q, idem dicendum de quovis alio puncto circulorum transeuntium per haec duo puncta basibusque corporis parallelorum. Percussio enim undas sonorum excitat in corpore solido non secus ac undae in aqua stagnante ab ictu lapidis suscitantur, hac tamen differentia ut in fluido undae haerent in superficie, sed in corporibus solidis penetrant crassitiem corporum, seque diffundunt ad usque oppositam superficiem. Excitetur motus in E, propagabitur hic in instanti usque ad H; circuli autem sonori in progressu ad partem oppositam magis magisque crescunt, et probabiliter in proportione arithmetica suarum diametrorum, ita ut EG, Ea, quae sunt circulorum horum limites, sint duae rectae lineae. Undae cum primum H attingunt, convertuntur versus E motu retrogrado, postea versus H et ita ultro citroque, donc prorsus motus exstinguatur. In aqua stagnante ubicunque projiciatur lapis, eandem et constantem invenit resistentiam propagatio undarum, in solidis non item; datur enim in his varia et diversa resistentia, uti et planum EH minimae resistentiae, quo percusso validior particularum tremor excitabitur, quam in reliquis locis. Sed licet percussio non fiat in E, sed in alio loco, puta P, erit quidem partium oscillatio minor, sonum tamen in ratione acuti vel gravis eundem edent. Si demum percutiatur corpus in punctis Q et L, obtusior vel prorsus nullus sonus excitabitur; ratio est, quia circuli sonori ultro citroque pergentes in series successivas disponuntur; datur autem punctum C, in quo se intersecantes lineae GE, FH, ubi aequatis momentis circulorum progredientium et revertentium se invicem sustinendo tremor perit, neque per consequens sonus solitus auditur. Centrum autem sonus in hujusmodi corporibus idem est ac centrum percussionis; hinc fit, ut si punctum aliquod circuli QS percutiatur, mutum appareat. Secus in reliquis omnibus punctis extra circulos QS et LM. Invenio autem tale punctum, ut sequitur. Esto corpus cujusvis figurae (fig. 81); Fa, Sa sint duae curvae similes ad communem axem DA. Quaestio reducitur ad inventionem plani EH minimae resistentiae. Sit ergo $AD = a$, $AB = x$, $BE = y$, erit $BD = a - x = t$, $DF = b$, $DC = z$ et $CB = t - z$. Expressio autem pro resistentia cujuscunque plani HE solidi propositi juxta demonstrata Cl. Varignonii Act. Acad. Scient. An. 1702 est $\frac{ay^3}{ax - xx}$. Substituo loco unius ex incognitis x vel y valorem, qui habebitur ex natura curvarum corporis sonantis; dein sumo differentias colligoque distantiam minimi plani ab extremitate corporis. Sit e. g. corpus propositum figurae cylindricae, erit tunc $b = y$ et resistentia ejus $\frac{ab^3}{ax - xx}$, et differentiando $\frac{-adx + 2xdx}{ax - xx^2} \times ab^3 = 0$ ex natura minimi; vel $-adx + 2xdx = 0$, quare $\frac{a}{2} = x$. Nimirum distabit planum minimae resistentiae per semissem longitudinis totius cylindri, uti jam notum est. Invento plano reperiendum est punctum C, ubi lineae EG, HF se decussant, id quod est impedimentum soni per theoriam. In cylindris ergo (fig. 82) cum triangula FDC, SCH sint similia, erit FD (b). DC (z) : : BH ($y = b$) ad $SH = CB = t - z$, ergo $z = t - z$ vel $2z = t = a - x = \frac{a}{2}$ et $z = \frac{1}{4} a$, quod perfecte respondet experientiae. Eadem ratione alterum planum

LM invenitur. Haec de figuris, in quibus planum minimae resistentiae cadit in medio axe B. Sed in Conis eorumque truncis, figurisque omnibus, in quibus haec lex non servatur, uti in fig. 83. 84. 85, consideranda venit etiam reflexionis natura; haec enim cum fiat in aequalibus incidentiae angulis, evenit, ut cum primum undulatio sonorum pervenit ad superficiem oppositam, reflectatur in angulis FHG et a HM aequalibus; hinc in fig. 84. 85 duo etiam habebuntur plana muta. In fig. 83 unicum tantum, si tamen, supposito HE plano minimae resistentiae, angulus DHB=ang. BHJ punctumque D in axis extremitate desinat. Inventio autem horum planorum in hisce figuris facile e supradictis eruitur, ideoque lubens praetereo, ne in immensum Viro Illustrissimo taedium augeam. An supradicta theoria cum ratione consentiat, necne, meum non est judicare; si intra probabilitatis limites consistet, factum satis rei physicae autumo; certe calculis respondent experimenta hucusque tentata. Fundari in hoc rationem formandi in musicis instrumentis (vulgo d a a r c o) sustentaculum seu fulcrum (s c a g n e l l o) pro chordis in certo et determinato situ, nimirum in plano muto, crederem. Dari etiam in Tympanis hujusmodi locum mutum vel semiacutum, probabile est; cum primum dabitur occasio, examini subjiciam.

Utile quidem esset post tot speculationes circa Trajectorias potius ad ingenii ostentationem, quam ad Astronomicam veritatem promovendam, ut accuratius Geometrae circa Planetarum errores et praecipue circa Lunam cogitationes suas dirigerent. Angli post novissimam Solis Eclipsim mense Majo elapso celebratam Theoriae Lunae Newtonianae acquiescere videntur, siquidem ad normam hujus institutis calculis, a veritate nisi uno vel altero minuto aberrasse profitentur.

Quod pertinet ad quantitatem pulveris pyrii in tormentis bellicis, non tantum quaesivi, an limitata esset hujus quantitas, quae in actu ejaculationis accenditur, verum etiam an resistentia pilae explodendae coërceatur inter determinatos limites, ita ut recipere non valeat inertia pilae, nisi datum impetus gradum a vento igneo, licet hic vi maxima, ne dicam infinita, respectu resistentiae pollere concedatur. Totum artificium ne plus aequo pulveris pyrii impendatur, consistit in figura Camerae, et in quodam peculiari modo deferendi ignem in ejusdem camerae fundum. Equidem globus ferreus pondus librarum L, duodecim tantum pulveris pyrii libris validissimo ictu ejaculabimur, si tamen utamur tormentis, quae vocantur della nuova Invenzione. Sed et circa pilarum figuram plura veniunt consideranda, et forsan, experientia suadente, postponendae sunt sphaericae sphaerico-cylindricis.

Paradoxum Galilaeanum de puncto aequali peripheriae, ut optime notas, sophisma est elegans, postquam enim devenimus ad elementum ultimum infinite parvum in summitate scutellae, aequale elemento in summitate coni, nequimus absque paralogismo ulterius progredi, quia jam transitum faciamus ad heterogenea, nimirum a consideratione superficierum ad lineas et puncta; hinc male colligitur proposita aequalitas. Nil aliud enim est circulus ille Galilaei, nisi terminus superficiei scutellae, uti punctum ejus terminus respondentis coni. Peccavit idcirco summus alioquin ille Vir, non solum transitum faciendo a superficie ad lineam circularem et punctum, sed etiam comparationem instituendo peripheriae cum puncto.

Excell. Bernardo Trevisano de egregio tuo opere Theodicaeae verba feci; adversa valetudo per integrum annum fecit, ut a cujuscunque generis studiis abstineretur; paucis abhinc diebus ab urbe secessit, ut ruri liberiori salubriorique aëre frueretur. Ante discessum ut tibi inclusam mitterem, ut modo facio, commisit.

Sed et quando Dynamica tua illustrata sperare poterimus? quaeso ne diutius publicationem rei tam praeclarae et tam necessariae ad promovendam physicam protrahas. Interim si quid Venetiis possum, jure tuo utere. Ego enim nil magis cupio, quam pro te aliquid agere, tuamque benevolentiam aliquo modo promereri posse. Vale etc.

Dabam Venetiis Cal. Octobr. An. 1715.

IV.

Leibniz an Zendrini.

Mirifice delector Tuis applicationibus Geometriae ad Mechanicam Naturae. Sunt tamen quaedam fortasse adhuc considerationibus Tuis circa motum fluidi per tubulum expansilem et contractilem adjicienda. Et quidem inertiam fluidi, quod ab embolo vel aequivalente per tubum antliae annexum pellitur, non puto vim imminuere, quae embolum impellit, nisi quando fluidum novum velocitatis gradum acquirit. Hoc non satis considerato fit, ut quidam inertia in calculis suis abutantur. Nempe vis embolum aequabiliter impellens resistentiam ab inertia fluidi jam in motu positi sentit, tantummodo in quantum pars fluidi ex ampla antlia, in angustum tubum compulsa, velocitatem suam intendere cogitur. Itaque vis quam causa impellens quovis elemento temporis amittit, est in ratione composita ponderis fluidi elementaris in tubulum transeuntis hoc temporis elemento, et quadrati ab incremento velocitatis, quod pendet a differentia capacitatum. Hujus vis autem amissae pars impenditur in expansionem tubi. Sed puto tamen novum adhuc impedimentum addendum esse, in tubis angustis sane magnum, ab ipsis scilicet parietibus tuborum, qui summam laevitatem seu polituram non habent et cursui fluidi resistunt tum asperitate sua, tum fluidi adhaerentis tenacitate. Atque haec resistentia non ut illa inertiae, cessat cum velocitas fluidi non augetur, sed perpetuo durat, dum fluidum in tubo fertur, quamdiu ejus parietes non laevigantur. Praeterea considerandum puto, cordis se contrahentis celeritatem per partes pulsus non videri aequabilem. Itaque operae pretium foret in motum pulsus inquiri accuratius atque inter alia dispici, an non is instar arcus a tensione liberati initio sit tardior, paulatimque celerior, donec post acquisitam quam potest celeritatem rursus lentescat, cum resistentia incipit magis crescere quam vis. Dubitavi etiam an non motus cordis, et cujuscunque musculi sit nonnihil interruptus, etsi interruptiones sint insensibiles.

De Acusticis non bene memini, quomodo alii Naturam Soni explicent. Ego olim, cum Cl. Schelhamerus librum suum de Organo Auditus (adhuc ante Duvernejum) ederet, me Epistolam ei scribere memini, quam et libello suo adjecit. Ibi rem sic concipio, quasi aër constet ex partibus tremoris capacibus. Itaque cum corpus in aëre positum tremit, hunc tremorem particulis aëris circumpositi tribuit, hae similiter vicinis eundem tremorem imprimunt, et istae rursus vicinis, atque ita in orbem, atque etiam per foramina oblique. Hinc etiam deduxi propagationem soni aequabilem esse, aliaque id genus. Ibidem similitudinem cum undis in aqua refutavi, ea enim ad solam superficiem aquae pertinet et nascitur a gravitate, non a vi elastica: interim non veto, quominus haec quoque propagatio undarum nomine exprimatur. Quae de cylindris ligneis observasti, servient fortasse ad eruendam ipsius ligni structuram. Ingeniosissime mihi videris rem examinasse; quia tamen hypothesibus quibusdam indiges, videndum an non res variare debeat pro varia corporum structura. Ponamus lignum ex circulis concentricis constare, perveniet motus ex E in H (fig. 86), non per diametrum, sed per circuitum ac si circulus esset vacuus; non ut aliquando Dn. Mariottus me monente expertus est, si circulum horizontalem AB (fig. 87) suspendas ex sublimi C, et globulum D ita suspendas ex sublimi E, ut circulum intus tangat in F; denique baculo circulum exterius percutias in G, opposito ipsi F, globulus D ibit versus percutientem, quia circulus AFBG mutatur in ellipsoidem punctis F, G invicem appropinquantibus. His aliisque consideratis conjunctisque cum structurae hypothesi phaenomenis, sperem multa erui posse, quae nunc ignorantur, Tuo praesertim ingenio, quod video magno acumine in his versari; interim non dubito quin cylindro percusso in E (fig. 88) vis propagetur non tantum ad H, sed etiam ad S et M.

Oportet Theoriam Lunae hactenus non satis constitutam esse, nam Hallejus et Whistonus nuper in calculo Eclipsis Solaris nec inter se consenserunt, nec satis suis calculis fidere ausi sunt. Flamsteadius mihi per amicum nuper significavit, quae Newtonus posuit de Lunae theoria, etiam in novissima Principiorum editione, habere quaedam incerta, nonnulla etiam falsa. Sane si motus Lunae satis constitutus esset, etiam ad longitudines maritimas valde accederemus. Johannes Baptista Morinus olim eas a se inventas putabat, sed in eo erraverat, quod motum Lunae satis constitutum crediderat, ut mihi Bullialdus olim narravit.

Quod ad explosionem globi per pulverem pyrium attinet, non video cur pila, non obstante sua inertia, cujuscunque celeritatis capax non sit, nec ullam dubitandi rationem in Tuis animadverti. Neque quicquam aliud inertia est (Keplero primum animadversa, et post eum a Cartesio in Epistolis repetita), quam quod corpori celeritas dari non potest, sine detrimento virium dantis. Itaque quamdiu celeritas globi in tormento minor est, quam venti expellentis, crescet, nisi forte tantam illam celeritatem venti ponamus, ut ab ea globus rumpatur et perforetur. Sed talem credo nec tormentum sustineret. Gratum erit, si structuram Tormentorum, quae dicis della nuova invenzione, exposueris.

Gratias ago pro literis Excell. Bernardi Trevisani transmissis, quem a morbo recreatum valde gaudeo. Dn. Bourguetum jam Venetiis discessisse puto. Is mihi scripsit, Dn. Vallisnierium habere valida argumenta, quibus vermes spermaticos Leeuwenhoekii Batavi impugnet. Ea optem ab ipso obtinere; nam Dn. Bourgueti objectionibus, ni fallor, facile satisfieri potest. Si forte jam publice eas edidit Dn. Vallisnierius, rogo ut eas mihi ex libris ejus communicare velis. Dn. Farinellus, Agens Regis mei, ad me Tua curabit. Quod superest, vale etc.

Dabam Hanoverae 4 Novembr. 1715.

V.

Zendrini an Leibniz.

Summopere gavisus fui in accipiendis tuis literis, quas erga me humanitate et tolerantia plenas comperi. Quae circa tubos contractiles et distractiles optime notas, solutionibus meis adjiciam: quod pertinet vero ad resistentias ex frictione superficierum cum tenacitate fluidi ortas non dubito, quin hae in exilioribus praecipue vasis non debeant considerari, et quidem hoc feci, cum velocitatem sanguinis investigavi. Quae subjicis de motu cordis constrictorio non aequabili velocitate se.... ratione etiam sic colligo, nam experimenta perquam difficilia sunt pro phaenomeni veritate eruenda. Cor musculus est alternis vicibus se constringens ac dilatans; necesse igitur est ut alternatim etiam infletur, difleturque in carnosa sua substantia juxta caeterorum musculorum leges. In inflatione premitur contentus sanguis sinistri ventriculi, ut in aortam ejaculetur; at cum diflatur, id fieri mera cessatione vis inflantis fibrarumque restitutione dicendum est; secus antagonista musculo opus esset, qui sua inflatione id praestaret, quod anatomicis observationibus refragatur; nullo enim musculo ita operante cor dicatur. Crederem ergo musculares fibras ad instar musicarum chordarum tendi, et quidem a potentia spirituum vel alterius rei potentis rarefactionem illam subitaneam ciere; idcirco quam primum spiritus animales irradiare muscularia interstitia cessant, incipit vis fibrae restitutiva agere; patet ergo vim inflantem ad hoc ut musculum possit dilatare, fibrarum resistentiam superare debere, quae porro cum satis valida sit, adaequare priorem potis est, quod in maxima possibili musculi dilatatione succedet; ad detinendum autem musculum in tali statu, novam materiam inflantem suppeditari singulis temporis intervallis oportet, usque dum actio durat; et ita accidit in musculis se tantum ad voluntatis imperium moventibus, uti sunt externi omnes corpus vestientes, at in internis et in iis, qui semper usque dum animalis vita perdurat, moventur, uti est cor, tensionis maximum gradum habent suae fibrae, et spirituum manipuli in copia determinata ad inflationem deferuntur. Sed praeter fibrarum naturalem vim se contrahendi, majorem quam in reliquis externis musculis, considerandus etiam materiae inflantis violentus motus venit, et determinata quantitas materiae inflantis per temporis aequalia intervalla in musculares sinus irruens, ob cujus vim non solum subita rarefactione pars distenditur, sed etiam impetu quodam concepto ad differentiam motionum musculorum externorum eadem ulterius dilatatur usque dum resistentia fibrarum aequet momentum vis impellentis, tunc enim cum non subministretur alia spirituum copia, fibrae se contrahunt restituuntque ad pristinam et naturalem longitudinem vi sui elaterii propria. Patet igitur in dilatatione superandam esse fibrarum elasticarum resistentiam, ideoque tardiorem esse motum initio, in fine vero velociorem, et ita in restitutione ad instar arcus a tensione liberati cordis fibras agere, ut optime notasti. Fibras autem esse elasticas pluribus experimentis comprobatur, uti refert Borellus de Motu animalium prop. 7.

Ad considerationes Acusticas et praecipue circa plana insonora figurarum solidarum verum quidem est certis hypothesibus indigere, ut quaestioni satisfaciant, attamen cum phaenomena abunde explicent, uti satis verisimiles mihi liceat eas supponere. Quod ligni structuram possint patefacere, non satis video: etenim non solum experimenta tentavi in ligneis cylindris, verum etiam in ferreis, et ex latere cocto confectis, observavique constanter idem phaenomenon planorum insonorum sequi, et tamen structuram ligni diversam prorsus esse a structura ferri nemo negabit; reliquum ergo est, ut ad musica instrumenta tale inventum dirigatur.

Ex quo, Vir Illustrissime ac Celeberrime, me monuisti utilia theoremata pro scientiae naturalis incremento et praecipue ad rem astronomicam promovendam esse quaerenda, non desii ad hunc scopum non solum cogitationes meas dirigere, verum etiam et amicorum meditationes in hoc essent curavi. Nostri ergo Geometrae ad usus Astronomiae utile sequens Problema putant, in eoque solvendo laborant: Trajectoriam describere circa datum centrum virium, ita ut velocitas mobilis seu Planetae curvam describentis sit ut quaevis data functio temporis. Quaestio satis est ardua, nec hucusque generalis solutio reperta est, licet aliquibus casibus particularibus satisfactum sit. De hac re te consulendum putavi, ut candide quid sentias rescribas. Si aliquid utilitatis inesse cernes, mittemus analysin; sin minus, ad alia animum et vires convertemus.

Tormentum quod vocatur della nuova invenzione, collocatur in Ballistica sub tertio genere; et licet a denominatione machina prorsus nova videatur, tamen ab Hispanis eam habuimus multis abhinc annis, si tantum constructionem et figuram respiciamus. Vide Surerii Memoires de l'Artillerie pag. 60 Tom. I. Uti vero semper facile fuit inventis addere, unus ex Ingeniariis Serenissimae nostrae Reipublicae, nomine Sigismondus Alberghetti, qui dum viveret XX circiter abhinc annis, uti erat totius rei Tormentariae peritissimus, tormentum hoc perficere suscepit et ad optimos usus rei bellicae traduxit. Forma ejus non discrepat a descripta in supradictis Mem. Surerianis pag. 60, camerae vero diameter, non ut illa Autoris Galli figurae sphaeroideae, non excedit diametrum animae, et est formae prorsus conicae. Loco pilae solidae ferreae substituit noster vacuam, bombam; sed ut eam reciperet tormentum, multum ampliavit ejus diametrum, nimirum ut contineret bombam ponderis 120 ℔., et ita reddita fuit haec machina amphibia, et dici mereatur mortario-tormentum. Vocatur autem ab Autore nostro Cannone petriero. Pondus metalli inservientis pro fabricando tormento, quod projiciat bombam librarum 120, non excedit pondus pro fabrica tormenti calibr. 20 ℔.; sed pila seu bomba est sphaerico-cylindrica, uti inferius exponam. Cum oneratur, post pulverem pyrium immediate adaptatur bomba absque usu alterius interpositae materiae stupaceae, herbaceae etc. XII ℔. pulveris pyrii, qua quantitate utimur in tormentis calib. XX, inserviunt ad explodendam bombam supradictam; id quod in re bellica plurimi est faciendum multis de causis tum economicis tum praeservativis. Talium machinarum forma bombae meretur attente considerari, si quidem primo intuitu postponendam sphaericae apparet, si motus facilitas nobis est attendenda, et tamen contrarium accidere experientia monstrat.

Bomba igitur representatur in fig. 89 ABDFECA; constat ex duobus segmentis sphaericis BAC et DFE et portione cylindrica BDFC. Vacuitatem habet AG ad instar bombarum vulgarium et desinit in lumen sesquidigitale A; tota haec vacuitas repletur pyrio pulvere aliaque mistura ad hoc ut cum primum ignem concepit in frustula scindatur bomba, quod tamen accidere minime debet, antequam bomba in scopo figatur. Est OMNP sectio tormenti, JDHEK sectio ejusdem animae, DHE camera figurae conicae, lumen ad concipiendum ignem est L situm in basi ejus partis tormenti quae vocatur l a g i o i a MQN, desinit autem in fundo camerae, nempe in apice coni H, ut facillime pulvis pyrius ignem concipiat. Bomba igitur in hoc tormento collocatur, ut schema exhibet; sed cum exploditur, debet accendi pulvis intus contentus in AG et quidem beneficio cujusdam...... egredientis ab A et discurrentis per convexitatem AB vel AC. Cum primum explosa est, et egressa e JK, lumen A convertitur versus partes oppositas H integra conversione et unica, quae conversio fit praeterpropter dum tota describitur linea projectionis, quod sane meo quidem judicio mirabile est phaenomenon, pro cujus explicatione dicerem hoc sequi ex insigni aëris ex parte A rarefactione et ex centro gravitatis bombae non coincidente cum centro molis ejusdem. Sed fortasse hae sunt inanes speculationes, certe experimenta centies repetita coram Principe et Magistratu ita se habere ostendunt: et enim in scopo ligneo, quod parabatur ex solidissimis quercinis trabibus verticaliter dispositis, similantibus navium contignationes, semper pars luminis A versus tormentum constanter reperta est; et si tali phaenemeno destitueretur nostra bomba, se in scopum altius fingendo facili negotio ignem, quem fert, exstingueret ob aëris privationem in actu penetrationis, quod non succedit modo supradicto. Horizontaliter non disponitur nostrum tormentum, sed aliquot gradibus supra libellam elevatur pro ratione distantiae obicis; hinc etiam condidit Alberghetus supra laudatus Tabulas quasdam, quibus mediantibus ictu oculi elevatio tormenti comperiebatur in omnibus distantiis sive amplitudinibus lineae projectionis; nunquam ergo ferit ut vocant d i p u n t o i n b i a n c o sed d i v o l a t a. Ictus magnitudo collecta ex obicis penetratione multum sphaericarum pilarum ejusdem diametri quantitatem exsuperat. Minoris calibri quam antedicta tormenta construuntur etiam, et utuntur sine pilis incendiariis ad normam vulgarium, attamen pilis solidis sphaerico-cylindricis, cum jam conjectum sit majorem utilitatem sphaericis afferre.

D. Vallisnerio, uti innuisti, scripsi et argumenta sua circa vermes spermaticos quaesivi; is mihi humanissime rescripsit eximio Viro petenti facturum quam primum satis, cum otium dabitur ad colligenda redigendaque in ordine, quae circa hanc materiam sparsa habet. Publicae lectiones in Patavina Universitate, Clinicae exercitium, ejusdem studii praesidentia, ne totus in hac re sit, valde distrahunt. Non dubito tamen, quin proximo mense in quo incidunt vacationes, meditationes suas mihi transmissurus sit, quas statim tibi communicabo. Typis super hoc argumentum nil edidit. Interim exemplar suarum naturalium observationum recens editum ut tibi transmittam, jubet, simulque quod modo facio, suam perfectam observantiam erga te, Virum celeberrimum, ut ejus nomine tester, injunxit. Pariter D. Joannes Baptista Reccanati, Patricius Venetus, eximiae spei juvenis, qui nuper editionem latinam Historiae Poggii Florentini vulgavit adjunctis notis, illustrationibus et vita ipsiusmet Auctoris, ejusdem operis exemplar in tui nominis Illustrissimi obsequium dono mittit. Ego quoque cum elapsis mensibus edideram Tractatulum circa Historiam et Usum Corticis Peruviani, eum tibi mitto, non ut legas, id enim non meretur, sed ut intra ceterorum tuorum librorum medicinalium supellectilem projicias. Omnia D. Farinello tenere faciam, ut proxima occasione ad te mittat. Interim tibi ex corde annos Nestoreos, omniaque felicia et fausta precatus etc.

Dabam Venetiis Nonis Januarii 1715/16.

VI.

Leibniz an Zendrini.

(Im Auszuge.)

Utinam liceret profundius tecum intrare in mysteria naturae, quae ingeniose perlustras. Est hoc in plerisque naturae nisibus, ut nunc in unam, nunc in alteram partem excedatur, moderatioque ipsa reciprocatione obtineatur. Notavi aliquando tale quoddam in furno calcario nunc inspirante, nunc expirante; itaque satis consentaneum est, ut cordis fibrae nunc tumescant, nunc detumescant. Sed diligentius inquirendum esset in causas, quibus periodus fit brevior vel longior, caeteraeque pulsuum variationes producuntur, ut cognoscatur quid solidi insit Galeni et Sinensium observationibus. Cogitandum etiam, annon membrum pulsans immergendo liquori accuratius observari quaedam pulsus varietates possint, quam tactu. Cum arcus tensus se restituit, verum est velocitatem continue crescere, sed verum tamen etiam est incrementa velocitatis continue decrescere. Putem in eo, quod spiritus vocamus, esse aliquid explosioni pyriae simile, idque per nervos et membranas decurrere, ut pulvis pyrius per funiculum incendiarium. Sed hoc mirum, quod funiculus ille incendiarius noster semper et statim ad novam deflagrationem reparatur.

Vellem aliquis Musicus egregius simulque insignis Mathematicus Oceanum istum rei sonorae parum hactenus navigatum ingrederetur, primum litora legens, et paulatim egrediens in altum mare, id est incipiendo a simplicioribus experimentis. Ita sperem pleraque ad rationes mathematico-mechanicas reduci posse, nec male videris incepisse. Quae sonoris ferreis, ligneis, terreis (velut ex terra cocta) communia sunt, utique ex peculiari structura corporum non pendent: putem tamen etiam multa discrimina observatum iri refundenda in hanc structuram. Et inprimis utile erit observare discrimen inter continua et contigua licet conglutinata, itemque inter homogenea et heterogenea conglutinata vel conterminata. Variatur etiam sonus cavi liquorum infusione. Etiam liquores per se vel combinati solidis variant, aqua aquae superfusa multo clarius sonat, quam superfuso duro.

Vix ullius veritatis elegantis et difficilis investigatio est inutilis, nam si nihil aliud, inservit ad ingenium exercendum et artem meditandi augendam. Itaque gratissima mihi erit analysis solutionis vestrae circa trajectoriam ex velocitate mobilis a temporibus determinata, cum alias soleat determinari a locis. Caeterum ad usum Astronomiae maxime opus foret, data linea centri attrahentis mobilis, verb. gr. terrae, datoque impetu semel impresso satelliti, veluti lunae, definire satellitis trajectoriam, sive seposita omni solis attractione, tanquam luna a sola terra traheretur, sive adjuncta, et sufficit ponere conatus ad centrum esse reciproce ut quadrata distantiarum, quod maxime naturale est. An Newtonus rationem hoc solvendi dederit, non satis dicere possum, quia pleraque ejus attente inspicere non vacavit. Viam tamen et ad haec et ad magis composita perveniendi suppetere non dubito.

Pro descriptione Tormenti ab Alberghetto constructi gratias ago. Ratio cur bombus ejus tormento egressus se convertat, et lumen a tergo trahat, haec esse videtur, quod pars lumini opposita est gravior et solidior. Mihi videtur utilissimum fore, ut bombi jacerentur ope aëris, ita enim multo accuratius, quam pulvere pyrio in scopum dirigi possent.

Cum Dn. Leeuwenhoekius sit valde senex, vellem praeclarissimi Domini Vallisnerii objectiones ipsi vivo offerri posse; non autem dubito futuras plenas moderationis et cum honorifica appellatione conjunctas, id enim viri diligentia et studium veritatis meretur. Est mihi aliqua cum ipso notitia. Gratias ago pro egregiis operum vestrorum muneribus, quas etiam Nobilissimo Dn. Reccanato reddi peto, cum multa mei obsequii significatione. Quae de Cortice Peruviano meditatus es, legam studiose. Nescio an recte ausim coram Te proferre, quod mihi aliquando de operatione ejus in mentem venit, ideo prodesse quia naturae nostrae est valde ingratus. Ita enim eam turbat et avertit a suo typo. Nam scio idem praestare exiguam admodum quantitatem manifestorum venenorum. Optem complures Tui similes praxin medicam rationalem meditari, separare certa a conjecturis et ipsis conjecturis constabiliendis aut explodendis operam dare. Vale etc.

Dabam Hanoverae 15 Martii 1716.

BRIEFWECHSEL

zwischen

LEIBNIZ und HERMANN.

Jacob Hermann*) (geb. 1678, gest. 1733) war einer der vorzüglichsten Schüler von Jacob Bernoulli. Er hatte sich durch seine Responsio ad Considerationes secundas cl. Nieuwentiitii circa calculi differentialis principia, Basil. 1700, Leibniz bemerkbar gemacht, der einige Jahre später ihn für die erledigte Professur der Mathematik an der Universität Padua empfahl. Dies gab die Veranlassung zur vorliegenden Correspondenz, die vom Jahre 1704 bis zum Tode Leibnizens ununterbrochen fortdauerte.

Leibniz glaubte in Hermann einen jungen talentvollen Mann gefunden zu haben, wie er ihn schon lange suchte, der nämlich bereit und geschickt war, die Ideen, die in den ersten Entwürfen in seinen Papieren ruhten und zu deren Durcharbeitung ihm die Zeit mangelte, zu entwickeln und weiter zu führen. Er bringt deshalb in seinem ersten Schreiben sogleich zweierlei zur Sprache, worauf er Hermann's Aufmerksamkeit zu richten wünscht: die Dyadik, und wie der Begriff eines Differentials zu fassen sei. Was die Dyadik betrifft, so interessirte sich Leibniz für die Ausbildung derselben besonders insofern, als er sie mit algebraischen Untersuchungen in Verbindung gebracht hatte; er gebrauchte nämlich, um den Zusammenhang zwischen den unbekannten Grössen und ihren Coefficienten deutlicher darzustellen, für die letzteren eine eigenthümliche Bezeichnung durch Ziffern, und drückte z. B. zwei Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten so aus:

$$0 = 100 + 110x + 101y + 111xy + 120xx + 102yy$$
$$0 = 200 + 210x + 201y + 211xy + 220yy + 202yy$$

In den Ziffern 111, 211 u. s. w. bezeichnet die erste, also 1 oder 2, den Ursprung des Gliedes, ob es zur ersten oder zweiten Glei-

*) Professor der Mathematik in Padua, darauf Sturm's Nachfolger in Frankfurt an der Oder, alsdann Akademiker in Petersburg, in seinen letzten Lebensjahren Professor der Moral in Basel.

chung gehört; die beiden folgenden deuten die Beziehung zu den Unbekannten in demselben Gliede an, so dass also 120 ausdrückt, dass es zu den Unbekannten x^2y^0 gehört. Dadurch erhielt Leibniz nicht allein bei der Elimination sehr harmonisch gebildete Ausdrücke, in welchen man die erste Grundlegung zu der in neuester Zeit so wichtig gewordenen Theorie der Determinanten erkannt hat*), sondern auch gewisse Erleichterungen für die Bestimmung der Coefficienten in den Reihen, in welche er die Wurzeln der Gleichungen entwickelte. In Betreff des Letzteren hatte Leibniz eine kurze Andeutung am Schlusse der Abhandlung gegeben, in der er die Beschuldigungen Fatio's zurückwies**). Auf diese kommt er in seinen Briefen an Hermann zurück und spricht gegen ihn den Wunsch aus, die in Rede stehende Untersuchung weiter zu führen, namentlich zu ermitteln, ob es nicht möglich sei, unmittelbar aus der Reihe zu erkennen, ob die Gleichung unmögliche Wurzeln habe, und wie die verschiedenen Wurzeln der Gleichung in der Reihe selbst zu unterscheiden seien. Um Hermann zu dergleichen Studien zu veranlassen, bringt Leibniz aus seinen früheren Untersuchungen einzelnes zur Sprache, z. B. über die Kennzeichen der Convergenz und Divergenz der Reihen, einen Versuch das sogenannte Harriotsche Theorem zu beweisen u. s. w. Als Newton's Arithmetica universalis im Jahre 1707 erschien, erhielten diese algebraischen Discussionen eine neue Anregung. Leibniz übersendet sogleich an Hermann eine Abschrift der darin enthaltenen Methode, die Divisoren einer Gleichung zu finden und fordert ihn auf, Newton's Verfahren auf Ausdrücke von höheren als vom zweiten Grade auszudehnen. Zugleich deutet Leibniz ein Verfahren an, aus einer Gleichung eine andere abzuleiten, welche die Differenz zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung als Wurzel enthält. Endlich übersendet Leibniz selbst eine Methode in der Abhandlung: Methodus generalis investigandi divisores formularum rationalium integralium ex datis divisoribus numerorum rationalium integrorum. Die Grundzüge dieser Methode bestehen im Wesentlichen darin, dass die gegebene Gleichung in eine solche transfor-

*) Sieh. Leibnizens Schreiben an den Marquis de l'Hospital vom 28. April 1693, Bd. II. S. 236 ff. — Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1857, S. 4.

**) Sieh. Bd. V. S. 348 f.

mirt wird, deren Glieder sämmtlich positiv sind, und dass alsdann für x eine Zahl angenommen wird, die grösser ist als jeder einzelne in der transformirten Gleichung vorkommende Coefficient; diese Zahl an die Stelle von x in die Gleichung gesetzt wird eine Zahl hervorbringen, deren Factoren in Verbindung mit den Resten einer fortgesetzten Division durch die angenommene Zahl die Coefficienten der gesuchten Divisoren der gegebenen Gleichung ergeben.

Hiermit wird das Gebiet der Algebra verlassen. Vom Jahre 1709 an kommen in der Correspondenz zwischen Leibniz und Hermann fast nur Punkte aus der Dynamik zur Sprache. Aus Hermann's Briefe XLIII am Schlusse des Jahres 1708 geht hervor, dass Leibniz ihm die Gesetze des Stosses mitgetheilt hatte; Hermann, der in seinen Vorträgen an der Universität namentlich die Mechanik zu berücksichtigen und bereits den Plan zu seiner Phoronomia gefasst hatte, nahm hiervon Gelegenheit Leibniz um den Beweis a priori über das Maass der Kräfte zu bitten. Indem ihn Leibniz auf eine diesen Gegenstand betreffende Abhandlung verweist, die in den Actis Erudit. Lips. erschienen war, beginnt zunächst eine Discussion über die Centrifugalkraft, alsdann aber erörtert Leibniz selbst die Principien der Dynamik nach seinem System im Zusammenhang, so dass dieser Theil der Correspondenz zwischen Leibniz und Hermann einen äusserst wichtigen Beitrag zur Kenntniss der Leibnizischen Dynamik liefert.

Die Briefe Leibnizens an Hermann — mit Ausnahme einiger, die hier zum ersten Male gedruckt sind — erschienen zuerst in den Memoiren der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1757 nach Abschriften, welche von den im Nachlasse Hermann's befindlichen Originalen genommen waren, und sodann von Dutens nach der Zeitfolge geordnet in dem dritten Bande der sämmtlichen Werke Leibnizens. Veranlassung dazu gab ein Prioritätsstreit über das Princip der kleinsten Kraft, den König gegen Maupertuis erhob auf Grund eines Bruchstückes aus einem angeblich an Hermann gerichteten Briefe Leibnizens vom 16. Octobr. 1707, wonach dem letzteren der erste Gebrauch des genannten Princips zu vindiciren ist. Nachdem die Berliner Akademie für ihren Präsidenten Partei genommen, und da der von König vorgelegte vollständige Brief unter den Papieren Hermann's im Original sich nicht vorfand, so wurde der ganze Brief durch einen Beschluss der Akademie für untergeschoben erklärt. Er erschien später in der von König herausgegebenen Schrift: Appel au Public du jugement de l'Académie Royale de Berlin, zugleich mit drei anderen Leibnizischen Briefen*). Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Akademie insofern Recht hatte, dass der Brief nicht an Hermann gerichtet sein konnte; auch aus der vorliegenden, bis auf wenige Briefe vollständigen Correspondenz geht unzweideutig hervor, dass der in Rede stehende Brief weder hinsichtlich seiner Form noch seines Inhalts hineinpasst**); auf der anderen Seite indess verräth die Haltung und Ausdrucksweise des ganzen Briefes die Feder Leibnizens. Der Herausgeber der mathematischen Schriften Leibnizens steht auf Seiten Königs: der Brief ist leibnizisch, obwohl bisher trotz wiederholter Nachsuchungen unter den Papieren Leibnizens ihm nicht gelungen ist das Original aufzufinden.

Auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover sind nur wenige von den Briefen Leibnizens an Hermann im Original vorhanden; sie mussten deshalb grösstentheils nach den oben erwähnten Drucken, die aber nicht selten lückenhaft sind und auch unklare Stellen enthalten, hier wiedergegeben werden. In den Briefen Hermann's, die zum ersten Mal gedruckt vorliegen, ist alles das weggelassen, was ohne wissenschaftliches Interesse ist.

---

*) Eine deutsche Uebersetzung der genannten Schrift findet sich in: Vollständige Sammlung aller Streitschriften, die neulich über das vorgebliche Gesetz der Natur von der kleinsten Kraft in den Wirkungen der Körper zwischen dem Herrn Präsidenten von Maupertuis zu Berlin, Herrn Professor König in Holland, und anderen mehr, gewechselt worden. Unparteyisch ins Deutsche übersetzt. Leipzig, 1753.

**) Auch aus Hermann's Brief vom 7. Jul. 1712 geht hervor, dass Leibniz ihm bis dahin noch keine nähere Mittheilung über das Princip der Continuität gemacht hatte; er schreibt darin in Bezug auf Leibnizens Theodicee: Nodus Liberi et Necessarii ibi, quantum humanitus sperari poterat, solutus videtur, adeo ut alter philosophicus circa Continuum et Indivisibilia adhuc extricandus videatur.

I.

Hermann an Leibniz.

Diu est ex quo Amplitudini Tuae propius innotescere in votis habui, quanquam inconcinno epistolio tempora Tua morari hactenus non sim ausus, multifaria quibus domi forisque assidue occuparis negotia identidem mecum perpendens. Humanissimae autem litterae ad Cel. nostrum Profess. Bernoulli nuperrime datae, ex quibus non sine stupore, laetus tamen, percepi a Tua Ampl. Illustrissimis et Generosissimis Curatoribus Academiae Patavinae perhumaniter me commendatum esse, ad scribendum ita me invitare videntur, ut citra ingrati animi vitium ulteriores moras nectere mihi nequaquam liceat. Gratias itaque Tuae Amplitudini persolvo non quidem quas debeo, sed quas possum maximas pro tanto honore quo me afficere voluit mei commendatione Illustriss. illis Viris ad honorificam adeo stationem: et merita mea longe inferiora sunt illis laudibus quibus me in praefatis litteris largius cumulas, quibusque propensum Tuum erga me animum testatum voluisti. Hac igitur Tua erga me benevolentia ceu luculento iterum ostendis argumento, non satis Tibi esse tot sublimium inventorum publicatione, inter quae incomparabilis ille differentialis eminet calculus, tantum de mathematicis aliisque studiis meruisse, verum scientiarum incrementa adeo cordi Tibi esse, ut eos qui promovendis scientiarum pomoeriis apti Tibi videntur consilio juves, et ne a coeptis deterreantur humanitate Tua erigas et animes, verbo, ad strenuum cursum eos incites. Tot igitur curis et pro bono rei litterariae exantlatis laboribus non solum maximam Eruditorum partem, sed me inprimis, tametsi in eorum numero recenseri non merear, ita obstrinxisti, ut merito omnes pro Incolumitate Tua et Longaevitate ardentissima Deo vota faciamus. Nunc tandem studiis meis multum me profecisse arbitror, quod ea ab Amplitudine Tua probari videam. Hocque efficacissimum mihi subdet stimulum in studiis meis gnaviter pergendi, et nullis laboribus nullisque vigiliis parcendi, ne tanto Patrocinio et Favore absolute indignus censear, sed potius de continuatione ejus, quam humillime a Tua Amplitudine efflagito, spem concipere valeam.

Sed tandem ad ea veniendum quae de me scire cupis. Quanquam reconditior Geometria prae omnibus aliis scientiis mirifice mihi placuerit, ei tamen non ita unice incubui ut reliquas seu practicam mathesin negligerem, quam a quadriennio jam studiosos doceo; paucissimi enim sunt quorum palato analyticum studium sapiat, aut qui dotibus ad id polleant, ita ut pleraque mea collegia sint mere practica. Non ausim tamen me in Doctrina aquarum in Italia praeprimis florentem multis exercitatum dicere, eo quod ea quae in variis autoribus circa has res jam legeram et quibus non parum delectabar, ad praxin deducendi occasio omnis mihi defuerit, non tamen vererer tale quid in me suscipere, persuasus me ipsam praxin aut quae eo pertinent paucarum septimanarum decursu addiscere posse. Nihil itaque gaudium meum et ardorem ad stationem illam obtinendam imminuere posset, nisi eos, a quibus dependeo, difficiliores hac in re deprehenderem conscientiae libertatem periclitantem et Religionis exercitium intermissum ob oculos mihi ponentes, quorum sane rationibus nullo modo resisti posse mihi videtur. Nisi, inquam, recensita modo obstarent, omnibus modis eo pervenire conarer, ob magnum quo ardeo desiderium Analysin Tuam infinitorum in sola ferme Italia neglectam propagandi, ut eo cognito Itali pariter clarius intelligant, quantum sublimia haec studia Amplitudini Tuae debeant, postquam elegantissima ista Analysis in Germania, Belgio, Gallia aliisque regionibus innotuit et egregios cultores nacta est. Ne tamen quicquam dissimulem, mallem operam meam tali in loco et statione impendere, ubi integra Religionis exercitio et libertate gaudere possem ut in Germania, Belgio, alibique locorum; quapropter, cum Amplitudo Tua, ubicunque studia florent, tantam Auctoritatem et Existimationem nacta sit, ut quemcunque Ipsi commendare visum fuerit, ejus commendatione eos staturos ad quos facta fuerit, persuasum habeam, me meaque studia ejus benevolentiae qua par est observantia de meliore nota commendo, hocque tenue specimen Analyticum pro inveniendis Radiis Osculi ejus judicio subjicio, ut si dignum judicetur, Actis Erudit. inseri patiatur, aliud, ut jubet, scriptum propediem missurus, in quo usum reconditioris Geometriae in rebus ad praxin spectantibus ostendere satagam. etc.

Dabam Basileae die 15 Octobris 1704.

Beilage.

Modus expedite inveniendi Radium Osculi in qualibet Curva.

In Schediasmate meo de Methodo inveniendi Radios Osculi in Curvis ex Focis descriptis Mens. Nov. Act. Erudit. 1702 pag. 501 inserto oblitus sum ostendere, eandem Methodum mutatis tantum mutandis omnibus indiscriminatim Curvis applicari posse, ea enim mediante elegans sese obtulit Cel. Dn. Jac. Bernoulli expressio Radii osculi in quibusvis algebraicis Curvis, quam singulari super differentiali calculo observationi acceptam refert, et in Actis Erudit. 1700 pag. 508 publicavit. Ad talem vero formulam non facile quisquam nisi visa prius Bernoulliana formula, trita via aut reapse pervenit, aut perventurus videtur. Et si Celeber. Varignonus voti compos factus est, veritati asserti mei id nihil derogabit; nisi enim Calculi differentialis fuisset callentissimus, calculum pro ea expressione radii osculi institutum eumque satis prolixum ad optatum finem nunquam perduxisset, quod manifestum fiet, statim atque suam analysin publici juris fieri permittet. Mediocriter contra in Calculo versati, viam hic praemonstrandam ineuntes facillime simul et brevissime intentum assequentur. Caeterum hic obiter monebo Bernoullianam methodum ad eandem expressionem ducentem a mea toto coelo diversam esse, quod Clarissimus Ille Vir suo loco ostendet. Verum ad rem.

Radius Osculi generaliter vocetur litera R; demonstravit Cl. Jac. Bernoulli, existentibus Curvae elementis ds constantibus, fore tum $R = \frac{-dxds}{ddy}$, tum etiam $R = +\frac{dyds}{ddx}$ (vid. Act. Lips. A. 1694 pag. 264), fient $ddx = +\frac{dyds}{R}$, $ddy = \frac{-dxds}{R}$. Redacta itaque aequatione curvae ad secunda differentialia, substituendi sunt hi valores ddx, ddy in ea aequatione, et loco elementorum abscissae, applicatae, et Curvae sive dx, dy et ds, eorum proportionales applicata, subnormalis, et normalis Curvae surrogandae, aequatio inde emerget quae debite reducta valorem ipsius R in puris ordinariis dabit quantitatibus. Q. E. I.

Sit brevitatis causa aequatio $hx^ry^s + a = 0$, unde $hrx^{r-1}y^sdx + hsx^ry^{s-1}dy = 0$, adeoque $h,\overline{rr - r}\,x^{r-2}y^sdx^2 + 2hrsx^{r-1}y^{s-1}dxdy + h,\overline{ss - s}\,x^r y^{s-2}dy^2 + hrx^{r-1}y^s ddx + hsx^r y^{s-1}ddy = 0$, sive $hrx^{r-1}y^sddx + hsx^ry^{s-1}ddy = h,\overline{r - rr}\,x^{r-2}y^sdx^2 + h,\overline{s - ss}\,x^ry^{s-2}dy^2 - 2hrsx^{r-1}y^{s-1}dxdy$, unde si substituatur $+\dfrac{dyds}{R}$ pro ddx, et $\dfrac{-dxds}{R}$ pro ddy, fiet $\dfrac{+hrx^{r-1}y^s dyds - hsx^r y^{s-1} dxds}{R}$ $= h,\overline{r - rr}\,x^{r-2}y^s dx^2 + h,\overline{s - ss}\,x^r y^{s-2}dy^2 - 2hrsx^{r-1}y^{s-1}dxdy$, et reducta hac aequatione erit

$$R = \frac{-hsx^ry^{s-1}dxds + hrx^{r-1}y^sdyds}{h,\overline{r - rr}\,x^{r-2}y^sdx^2 + h,\overline{s - ss}\,x^ry^{s-2}dy^2 - 2hrsx^{r-1}y^{s-1}dxdy},$$

ubi si loco dx, dy, dz substituantur y, z et p (existentibus z et p subnormali et normali), habebitur aequatio in finitis quantitatibus

$$R = \frac{-hsx^ry^sp + hrx^{r-1}y^szp}{h,\overline{r - rr}\,x^{r-2}y^{s+2} + h,\overline{s - ss}\,x^ry^{s-2}zz - 2hrsx^{r-1}y^sz}.$$

Quodsi autem Radius Osculi expetatur curvae, cujus aequatio $fx^m + gy^n + hx^ry^s + a = 0$ (in qua x abscissas, y applicatas ut in priore exemplo, m, n, r, s exponentes et f, g, h coefficientes designant), novo calculo non opus erit, sed praecedens formula abunde sufficiet. Sit primo fx^m ubi sola x indeterminata occurrit, ad quem casum superior aequatio pro radio osculi reducatur, viz. ponendo $s = 0, r = m, h = f$, quaeque adeo in hanc degenerabit fractionem $+\dfrac{fmx^{m-1}zp}{f,\overline{m - mm}\,x^{m-2}yy}$; sic pro membro gy^n fiet fractio $-\dfrac{gny^np}{g,\overline{n - nn}\,y^{n-2}zz}$; pro membro vero hx^ry^s utique retinetur fractio primitus inventa: unde Radius Osculi nostrae Curvae erit Fractio, cujus Numerator erit summa Numeratorum fractionum harum partialium, Denominator vero summa eorundem Denominatorum, hoc est

$$R = \frac{\overline{fmzx^{m-1} + hrx^{r-1}y^sz - gny^n - hsx^ry^s},\,p}{\left\{\begin{array}{l} f,\overline{m - mm}\,yyx^{m-2} + g,\overline{n - nn}\,zzy^{n-2} + h,\overline{r - rr}\,x^{r-2}y^{s+2} \\ \qquad + h,\overline{s - ss}\,x^ry^{s-2}zz - 2hrsx^{r-1}y^sz \end{array}\right\}}$$

plane ut invenit Clar. Bernoulli.

Pari modo si ponatur $Mdx = Ndy$ omnes curvas tam Algebraicas quam transcendentes denotare, ubi M et N quantitates utcunque datae per x, y et constantes, invenietur Radius Osculi differentiando aequationem, usque dum ad secunda differentialia perventum sit:

$dxdM + Mddx = Nddy + dydN$, unde $dNdy - dMdx = Mddx - Nddy$. Verum pro ddx ponendo $\frac{dyds}{R}$ et pro ddy, $-\frac{dxds}{R}$, fiet aequatio $\frac{Mdyds + Ndxds}{R} = dNdy - dMdx$, ex qua elicitur $R = \frac{Mdyds + Ndxds}{dNdy - dMdx}$, vel quia dx, dy, ds proportionalia sunt ipsis y, z et p (quibus eaedem lineae designantur ut supra) et ponendo $dM = Sdx$ et $dN = Tdy$, fiet $R = \frac{\overline{ZM + yN}, p}{zzT - yyS}$, quae expressio finitis tantum constat quantitatibus, omnibusque Curvis adaptari potest.

II.

Leibniz an Hermann.

Cum dudum magnifecerim praeclara studia tua, nunc et notitia personae delector, ex quo literas humanitatis et doctrinae plenas a te accepi. Cum te commendavi Excellentissimis viris Reformatoribus studii Patavini, vel potius Amico apud eos valido, feci quod tua eruditione ac virtute dignum putavi, et conveniens officio meo. Judicavi etiam in publicum utile, et tibi honorificum fore, si nova Analysis nostra tuo ingenio ornata in Italiam introduceretur. Itaque cum te excusasses religionis causa, dissimulavi responsum tuum apud Amicum Italum, dilato tempore ut cogitandi tibi spatium relinqueretur, praesertim cum expectandum videretur, quid Cl. Naudaeo nostro responsurus esses. Is ergo cum nuper a te literas mecum communicaverit, quibus re amplius deliberata, sententiam ut mihi quidem videtur, in melius mutasti; jam et Amico illi significo, te a conditione oblata non abhorrere, et tibi suadeo, ut recta ad illum des literas, tum quod ita evitatur ingens circuitus, tum quod vestra interest amborum, quam primum invicem nosci. Est ille V. Cl. Mich. Angelus Fardella Siculus, scriptis in re Mathematica et Philosophica elegantibus notus, cujus amicitia mihi conciliata Venetiis, ubi ille apud nobilissimos Viros gratia et eruditionis fama florebat, ex eo tempore semper sum usus. Cathedram Meteorologicae professionis apud Patavinos tenet ipse, et licet juvenes generosos ex patriciis Venetis Mathesin theoreticam practicamque docuerit, maluit tamen hanc spartam Patavii deferri Viro erudito Transalpino; amat enim nostros mirifice, et officiis colit. Itaque habebis in eo Amicum fidum, et cujus consiliis niti possis. Literas, quas ad eum destinabis, ita inscribere licebit:

All' Illustr. Signor mio, e Padrone Colendissimo Il Sig. Abbate Fardella Lettore publico nello Studio di Padoa.

Huic ergo potissimum ages gratias, et tanquam cum Viro praeclaro et candido ages, ut par est. Nec dubito ejus opera, quae ad stipendium et reliqua pertinent, rite confectum iri. De religione non est, cur in literis mentionem ullam facias. Nemo ignorabit, quis cujasve sis; sed nemo curabit, si, ut credere de te par est, prudenter agas, nec temere mentionem rei injicias, quae ad rem, cujus causa accersitus es, non facit. Satis ad amplificandam Dei gloriam, verumque cultum propugnandum facies, si scientiis auctis admiranda Dei magis magisque detegantur, et apud gentem, ubi inconsulta superstitio hactenus cum Copernico verum Mundi systema interioremque rerum notitiam proscripsit, aditus novus ad haec arcana postliminio aperiatur. Caeterum Venetiis scio Reformatae Religionis exercitia frequentari, non publice quidem, non ita tamen ut rem publicam fallant. Duos alios Viros egregios et mihi amicos Patavii reperies, Medicos insignes et scriptis celebres, priorem etiam in re Mathematica praeclarum, Dominicum Gulielminum, et Bernardum Ramazzinum. Hi vel in mei gratiam tibi favituri essent, quanquam (sat scio) tute per te facile tales conciliare tibi possis. Gulielminus de aquis decurrentibus librum egregium et practicum Italica lingua edidit, quo in summa plurimum sum delectatus ob multam et curiosam observationem variorum accidentium in fluminum cursu, prudentemque considerationem incommodorum et remediorum, quae Bononiae publico nomine aquas curanti per multos annos sese obtulere, tametsi quaestiones quasdam θεωρητικωτέρους ad Analysin nostram ex parte pertinentes examinare non vacarit.

Elegans calculus tuus circa Radios Osculi perplacuit. Nec dubito quin novis in dies inventis egregiis aucturus sis scientiam.

Viros doctos apud vos, qui mihi favent, á me saluta, inprimis Cl. Battierium, tum vicinos vobis Fatium atque Ottium, quorum illum novam quandam seriem tetragonisticam ex mea eruisse V. Cl. Jac. Bernoullius ad me perscripsit; id, qua ratione factum sit, forte ex te discam. Vale, et me ama.

Dabam Berolini 24. Novemb. 1704.

P. S. Parisiis Fascis expectatur Basileam mittendus, atque inde Augustam. Ei inerit Tabula aenea iconem continens Sereniss. Electoris Brunsvicensis. Scripsi, ut ad Dominum Bernoullium dirigatur, et hunc rogo, ut inde Augustam curare velit. Sed dum vereor ne forte absit domo, rogo, ut favere velis, et aliquam si opus rei curam gerere. Augustam deferri debet ad Dn. Schröck, Agent de Brunsvick.

Beilage.

Ante multos annos excogitavi Arithmeticae genus novum tanquam ipsius Analyseos transcendentis instrumentum inexpectatum. Publicavi nondum, quod usus ejus reapse ostendere non vacarit, volui tamen, ut nescius ne esses. Binariam voco hanc Arithmeticam, vel dyadicam imitatione decadicae, nam ut alii progressione denaria, ita ego dupla utor, eaque ratione non aliis egeo notis quam 0 et 1, ut in tabula adjecta vides, quae utcunque continuari potest. Ex hac scribendi ratione statim constat, quod alicubi per ambages demonstravit Schotenius, et norunt Examinatores monetarum paucis ponderibus progressionis geometricae duplae multa ponderari posse. Caeterum usus hujus scribendi rationis non esse debet in populari computo, sed Numerorum arcanis eruendis. Habet enim id praeclarum haec expressio, quod cum sit simplicissima, statim miras exhibet connexiones, dum series omnes numericae ordinatim procedunt. Vides numerorum naturalem seriem periodis constare scriptu facillimis, primaeque columnae periodum esse 01, 01, 01 etc., secundae 0011, 0011 etc., tertiae 00001111, 00001111 etc., atque ita porro. Demonstravi autem, quod momenti est maximi, seriem numerorum triangulorum, quadratorum, cubicorum, biquadraticorum, surdesolidorum etc. et ut verbo dicam, potentiae cujuscunque quantumvis altae similiter periodum habere in una-

0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15
10000	16

quaque columna seu finitum intervallum, quo decurso redeunt notae priores. Dantur et in aliis praeter dyadicam progressionibus haec intervalla, sed propter multiplicitatem notarum non facile erui possunt, et longius differuntur; hic in summa simplicitate notarum, quae non aliae quam 0 et 1, facillimus aditus patet. Vellem vacaret eruere cujusque potentiae periodos; fortasse succurrerent amici tui meique. Et ne putes rem esse exigui momenti, considerandum est pro seriebus infinitis generalibus, ubi scilicet indeterminata inest, et pro determinatis, sed per fractos, qualis est mea tetragonostica $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ etc., superesse series in integris investigandas tanquam ultimum, quod in quantitatibus transcendentibus determinatis per numeros exprimendis quaeri potest. Ita si haberemus, qua ratione continuari in infinitum posset series Ludolphina pro circulo, nihil amplius in numeris rationalibus pro circuli magnitudine quaerendum superest. Quod autem difficile erit, dum notis utemur decadicis; id facilius (opinor) obtinebimus per dyadicas, ubi non aliae erunt notae quam 0 et 1. Et viam eo perveniendi commodissimam video, ubi constituta erunt, prout par est, novae hujus scientiae Numerica Elementa; quae cum ita sint, nolim suadere, ut tempus teras Ludolphinis calculis extendendis, ubi nec magna laus ingenii, nec artis inveniendi augmentum apparet. Unum adhuc adjicio, cum crebris objectionibus Virorum doctorum pulsatus fuerim, qui nostra infinite parva, abjectionemque eorum pro nullis concoquere non possunt, convincendis illis subinde methodum meam hanc esse, ut tantum postulem, casum quo quantitas aliqua fit 0, in generali calculo comprehendi, ubiubi est quantacunque aut quantulacunque. Hoc uno enim admisso (quod est postulatum, quo vulgares etiam Analystae sunt usi) necesse est incidi in calculi nostri leges. Caeterum revera ita sentio, quantitates infinitas et infinite parvas non magis reales esse quam sunt radices imaginariae, nec minus tamen quam has usum in Analysi praestare; caeterum pro ipsis facile substitui utcunque magnas aut utcunque parvas, ut scilicet error minor sit quovis dato.

III.

Hermann an Leibniz.

Amicus quidam Marburgo nupere ad me scripsit, Cathedram ibi Mathematicam jam vacare, eo quod Cl. Papinus Principis sui jussu Cassellis perpetuo esset mansurus: eaque propter Seren. Principem ad Academiam Marburgensem dedisse literas quibus significabat, sibi pergratum fore, si aliquis sibi proponeretur, qui ei Professioni praefici posset; subjunxitque Amicus Histor. ibi Professor ad id Munus me pertrahendi cupidus, se ea quidem jam excogitasse et partim egisse quae apta videbantur ad id ut vacans Professio mihi decernatur, longe plus tamen ponderis Tuam commendationem isti negotio allaturam esse. Nescius utique erat Amicus eorum quae pro incomparabili Tua humanitate in mei gratiam apud Patavinos egisti, item quod fidem meam et Tibi et Cl. Fardellae jam obstrinxerim de acceptanda conditione Patavina, quorum omnium certiorem Eum reddidi. Non tamen dubito, quin Ampl. Tua a me humillime rogata et apud Marburgenses me commendare de meliore nota esset dignatura, et quin tam honorifica commendatio optatum habitura esset successum, si forsan Excell. et Generosiss. Reformatores studii Patavini sententiam suam de me vocando mutassent, quod quantocyus rescire oporteret, antequam videlicet Marburgensis Professio cuiquam decernatur.

Mallem vero caeteris paribus Patavii insignibus Viris Dn. Dn. Fardellae, Gulielmino, Ramazzino etc. adjungi, cum quibus frequentissima daretur occasio de excellentissimis Tuis repertis sermocinandi, quam Marburgensi Professioni praefici.

Quantum ad Tetragonisticam Fatianam, ea consistit in pluribus seriebus, quas ex Tua elicuit; artificium ipsum, quod ille in sua charta ab ipsius Fratre natu majore mihi transmissa subticuit, non difficulter detexi, quod hoc est: Sit series pro Area Circuli $0 + \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} -$ etc.

1. Si summae ex singulis vicinis terminis accipiatur dimidium (ut sumendo dimidium ex $0 + \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ fit $\frac{\frac{1}{2}}{1}$; ex $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{1.3}$ fit $\frac{1}{1.3}$; ex $-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = -\frac{2}{3.5}$ fit $\frac{1}{3.5}$; ex $+\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{5.7}$ fit

$\frac{1}{5.7}$ etc.), oritur secunda series $0+\frac{\frac{1}{2}}{1}$; $+\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}-\frac{1}{7.9}$ $+\frac{1}{9.11}-$ etc. aequalis primae.

2. Tractando hanc secundam eodem modo, quo primam, sed incipiendo a termino affirmativo $+\frac{1}{1.3}$, cujus dimidium sumitur $\frac{\frac{1}{2}.1}{1.3}$ (reliquis terminis affirmative adjiciendum), oritur series tertia

$$0+\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{\frac{1}{2}.1}{1.3};+\frac{1.2}{1.3.5}-\frac{1.2}{3.5.7}+\frac{1.2}{5.7.9}-\frac{1.2}{7.9.11}+\text{etc.}$$

Ita fit quarta series

$$0+\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{\frac{1}{2}.1}{1.3}+\frac{\frac{1}{2}.1.2}{1.3.5};+\frac{1.2.3}{1.3.5.7}-\frac{1.2.3}{3.5.7.9}+\text{etc.}$$

Et ita elicitur series terminis mere affirmativis constans, pro area Circuli $\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{\frac{1}{2}.1}{1.3}+\frac{\frac{1}{2}.1.2}{1.3.5}+\frac{\frac{1}{2}.1.2.3}{1.3.5.7}+$ etc. Ita mutavi quoque hanc seriem pro hyperbola $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$ etc. in hanc

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.8}+\frac{1}{4.16}+\frac{1}{5.32}+\frac{1}{6.64}+\text{etc.}$$

Insignis Tua observatio circa abjectionem infinite parvorum, pro qua gratias ago maximas, mihi apprime utilis erit in Tractatu quem conscribere mihi proposui Deo annuente de Veritate et Infallibilitate Calculi Tui differentialis more antiquorum demonstrando.

Fascem quem Parisiis Basileam mittere jussisti, Cl. noster Bernoulli nondum accepit; quam primum autem is huc pervenerit, Augustam curabit; Cl. is Vir suum Cultum Tibi ut deferrem aeque ac Cl. Battierius aliique jusserunt.

Basileae die 21 Januarii 1705.

IV.

Leibniz an Hermann.

Literae tuae 21. Januarii datae heri demum ad me pervenere: nam tristissima morte Reginae Borussorum factum est, ut paulo diutius Berolini haeserim, quam destinaram. Plurimum me affecit nuntius hujus facti tam immaturi atque acerbi; nam Princeps erat omnibus virtutibus decoribusque cumulata, et quae mihi mirifice favebat, ut quando in ejus Aula versabar, vix unum mihi diem ab ea abesse liceret: colloquio ejus nihil suavius fingi poterat, aut magis conditum ingenii sale. Ita bono ingenti mihi imposterum carendum est, quod in omne reliquum vitae tempus jure quodam meo mihi spondebam; sed haec apud te ἀπροσδιόνυσα mihi nescio quomodo excidere, quando cogitationem rei funestae renovat apparatus feralis corporis Berolinum transvehendi. Ut ad res tuas redeam, mirabar equidem nihil amplius a Cl. Fardella ad me perscribi, credebamque rem inter vos transigi. Nunc vero pene vereor, ne quid ipsi acciderit, itaque proximo pulsore non tantum ad ipsum mittam literas, sed etiam ad Dn. Zanovellum nostras res Venetiis agentem, cui Dn. Abbas Fardella non est ignotus, ut discam tandem, quo res sit loco. Si quid possum Cassellis per amicos, non deero quidem, interim inquiram, an id agatur ut Dn. Papinus professione sese abdicet.

Placet methodus, quam excogitavit Dn. Fatius, et tu quoque tuo Marte detexisti, seriem propositam in aliam convertendi. Si tres termini, aus plures in unum adderentur, et assumeretur semper pars tertia, vel alia adhuc minor, totidem aliae series prodirent. In expressione numerorum dyadica plura latent, quam quis facile suspicetur. Quidam Pater Congregationis Oratorii Parisiis Algebram novam edet, cujus conspectus aliquis ad me fuit transmissus. In ea mentionem quoque faciet meae novae cogitationis characteristicae, cujus specimen aliquando dedi in Actis Eruditorum, cum exposui extractionem universalem radicis ex aequatione per seriem, quod nescio an animadverteris, nempe pro literis a, b, c, d etc. non exprimentibus satis habitudinem ipsorum ex datis, exhibeo numeros eam exhibentes. Idque praeclari usus esse deprehendo ad Canones calculandos. Exemp. gr. si ex duabus aequationibus duarum incognitarum reperienda sit una unius incognitae, sic procedo in ipsis aequationibus generatim formandis, et quidem pro secundo gradu

$$0 = 100 + 110x + 101y + 111xy + 120xx + 102yy$$

$$0 = 200 + 210x + 201y + 211xy + 220xx + 202yy$$

ubi numeri, velut 111, 211 etc. significant prima nota sua (1 vel 2) utrum ex prima an secunda aequatione sint sumti; duabus vero seqq. notis exprimitur, quomodo se habeant x et y in termino, cujus sunt coefficientes, sic 111 vel 211 coefficiens est termini $x^1 y^1$ vel xy, sed 120 coefficiens est termini $x^2 y^0$ seu xx, et ita porro. Hoc modo jam calculando prodeunt semper Canones quam maxime regulares, et harmoniam quam continent prodentes. Optandum esset, incipiendo a simplicibus hoc modo constitui progressionem Canonum pro tollendis incognitis. Ita magno calculi labore imposterum levaremur, nec contemnendi usus theoremata acquireremus. Sed de his, et similibus aliis plura. Nunc vale, et me ama. Dabam Hanoverae 10. Martii 1705.

P. S. Insignem Virum Dn. Bernoullium vestrum, imo nostrum, a me saluta. Optarem vel ipse vel alius varia ludendi genera Mathematice tractaret.

V.

Hermann an Leibniz.

Gaudeo quod Dn. Reynaltus, Praesbyter Oratorii, quem Parisiis apud Cl. Malebranchium vidi, in Algebra sua quam evulgandam parat, Tuae Arithmeticae dyadicae mentionem sit facturus, hancque ob rem tanto avidius eum librum expecto. Aliquot jam retro annis jam animadverti hujusmodi expressionibus, quarum in Epistola meministi, Te usum esse Act. Erudit. 1700 Mens. Majo, ubi occasione quorundam theorematum Moyvraeanorum ex generali aequatione aut potius serie radicem extrahere docuisti: at libenter fateor, me non satis bene tunc percepisse, quem in finem novum illud designationis genus adhiberetur; nunc vero ex explicatione quam Ampl. Tua impertiri mihi voluit et pro quo gratias ago humillimas, usum illius nonnihil clarius perspicio, credoque clarissimam mihi affulsuram esse lucem ex iis quae adhuc circa hoc argumentum se communicaturum promittit.

Nondum examinare licuit, quaenam prodire debeant series, si tres aut quatuor termini in unum adderentur, et postea summarum tertia vel quarta pars caperetur.

Jam diu est, quod Gregorii Astronomiam geometricam cum Cheynaei libro de Calculo fluxionum inverso ex Belgio acceperim, quibus libris plura egregia inesse nemo equidem inficiabitur, mihi tamen nihilo secius videtur, plurima quae Gregorius prolixius in sua Astronomia demonstrat, analysi facilius et brevius demonstrare posse, neque de suo multum in ea contineri videtur, sed omnia fere ex Newtono mutuata sunt, ut rectius commentarius, quamquam non absolutus, Cl. Newtoni Principiorum Phil. Naturalis dici possit.

Clariss. noster Bernoullius, cujus cultum Tibi pariter defero, suum librum de Arte conjectandi ad umbilicum fere perduxit, inibique pleraque fere ludendi genera pertractat. Nuper cum multum operae insumeret percurrendis curvis primi generis supra Sectiones Conicas, plurimarumque curvaturas et varios flexus definiisset, incidit in aliquem Act. Lips. Newtoniani libri de Specie et Quadratura Curvarum Opticae suae per modum appendicis adjecti recensionem continentem, seque a Cel. Newtono praeoccupatum attonitus invenit. Vale etc.

Basileae 4. Aprilis 1705.

VI.

Leibniz an Hermann.

Gaudeo rem Patavinam eo loco esse, ut spes sit omnia rite, et ex animi tui sententia constitutum iri. Id ex Domini Bernoullii vestri, aut potius nostri, literis non ita pridem Basilea ad me datis intellexi. Interea meas quoque tibi redditas puto, quas scripseram cum nondum scirem Cl. Fardellam tibi respondisse. Caeterum rogo, ut mature mihi indices, quandonam in Italiam sis abiturus, ut antequam id fiat, deliberare possim, quae forte e re esse queant. Si vacat, rogo ut cogites de quadam Analytica inquisitione, quam et Dn. Jacobo Bernoullio, acuminis insignis Viro, commendavi. Scis omnium aequationum radices posse exprimi rationaliter per Seriem infinitam. Idque etiam in eo Schediasmate, quo Dn. Fatio in Actis Eruditorum respondi, generali canone praestare docui. Sed quid fiet, si aequatio habeat omnes radices impossibiles, et praeterea quomodo diversae ejusdem Aequationis radices in serie illa a se invicem destinguerentur? Hoc nondum quisquam satis exposuit. Vellem autem inprimis explicari caput illud de impossibilitate quantitatis ex valore ejus rationali per seriem infinitam expresso agnoscenda, et quidem ex ipsa serie independenter ab aequatione, ex qua deducta est. Interdum enim ignoratur haec aequatio, interdum nulla plane datur, cum quantitas est transcendens. Et quidem in casu impossibilitatis necesse est seriem non esse advergentem, seu si pars ejus semper major atque major sumatur, necesse est differentiam a quaesita quantitate non fieri minorem quantitate data; sed hoc praevidere ex constructione seriei, et cum series illa ex generali sui aequationis gradu deducta est, velut ex $xx + bx + ac = 0$, invenire ex ipsa serie, seu ex defectu advergentiae, limites seu quandonam incipiat aut definiat impossibilitas, id inquisitione dignum puto. Quodsi id ex seriebus eruere possumus, quae ex aequationibus sunt deductae, facilius etiam deinde idem praestabimus in seriebus itidem generalibus, sed valorem quantitatis transcendentis exprimentibus. De caetero me ad priores refero. Vale, et me ama. etc.

Dabam Hanoverae 7. April. 1705.

VII.

Leibniz an Hermann.

Ipse ad me scripsit D. Abbas Fardella, literas inter vos tarde commeare; id difficultati itinerum tribui debet turbulentis his temporibus, ex eaque mora id natum incommodi, quod Ill. Marcellus, qui rebus Academiae Patavinae praeerat, apud quem non parum potest Fardella, abiit magistratu. Spero tamen non ideo minus rem processuram, et mirum non est, si Residenti id negotii datum ut ad Dominos referat.

Videtur mihi determinatio limitum pars esse essentialis doctrinae de seriebus infinitis plene tradendae. Nam utique nisi demonstretur seriem advergere quaesito, ita ut continuatione reddere queamus errorem minorem data quantitate, non possumus pronuntiare ipsam seriem totam dare quaesitum. Hac autem demonstratione habita, via utique strata est ad determinandum limitem, seu ultimum casum advergentiae, qui utique ultimus est casus possibilitatis. Inter alias vias haec incidit: Quoties talis est series, aut in talem transformata, ut constet ex partibus $a - b + c - d + e - f$ etc. ubi scilicet plus et minus alternant (sive quaevis harum partium a, b, c etc. quam quantitatem positivam significare suppono, sit simplex, sive rursus ex aliis partibus constet), tunc ad sciendum, utrum series advergat quaesito, tantum opus est videre, an ipsa membra a, b, c etc. advergant nihilo, seu fiant minores quantitate quavis data. Hoc theorema olim demonstravi, cum meam quadraturam arithmeticam in Gallia edere vellem. Nempe si series $a - b + c - d + e - f$ etc. $= y$, et fiat

$$
\begin{array}{lr}
y = a & \\
y = a - b & \text{erit} \\
y = a - b + c & \text{valor} \\
y = a - b + c - d & \text{justo} \\
\text{etc.} \quad \text{etc.} &
\end{array}
\left\{\begin{array}{l}\text{major} \\ \text{minor} \\ \text{major} \\ \text{minor} \\ \text{etc.}\end{array}\right\}
\begin{array}{l}\text{ita tamen} \\ \text{ut sit error} \\ \text{minor quam} \\ \\ \\ \end{array}
\left\{\begin{array}{l} b \\ c \\ d \\ e \\ \\ \end{array}\right.
$$

semper scilicet minor termino proximo post eos, quos habemus. Itaque ubi transformaretur proposita series in aliam, in qua + et — in membris alternarent, tunc limes vel transformationis qui possibilitatem ejus restringeret, vel advergentiae ad nihilum in ipsis terminis foret limes possibilitatis seriei. In radicibus aequationum limites aliunde, nempe ex ipsa aequatione, nobis noti sunt, et possumus etiam transformare aequationes pro arbitrio; itaque in ipsis opinor facilius dabitur modus ex ipsa lege seriei limitem possibilitatis deducendi, et res deinde facilius promovebitur ad series quarum origo ex aequatione aliqua ordinaria nobis non est explorata. Sed sunt multae aliae viae perveniendi ad quaesitum, una alia commodior pro re nata. Sufficit in genere nos ob oculos id habere, ut demonstremus seriem revera advergere, et suspicor rem Dn. Bernoullio vestro expensam, qui in argumento serierum infinitarum plurimum studii posuit. Caeterum ad demonstrandam possibilitatem advergentiae necesse est, ut determinemus legem seu progressionem seriei, vel etiam ut determinemus terminum quemcunque progressionis. Exempli causa in serie $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$ etc. lex progressionis est, ut posito Terminum esse T et numerum seu locum Termini esse n, sit $T = x^n : n$, ubi x est constans, T et n variantes, neque vero nisi cognita lege seriei ad demonstrationem advergentiae potest perveniri.

Quod de Arithmetica dyadica illustranda cogitas, gaudeo.

Omnino sentio in ea latere non tantum perfectionem scientiae numerorum, sed etiam applicationis Numerorum ad Geometriam, ut scilicet determinatas quantitates sive irrationales, sive etiam transcendentes quam optime in numeris, serie scilicet bimalium, ut vulgo decimalium, exprimamus, definiamusque (quod in eo genere primarium est) legem progressionis. Putem autem post Algorithmum esse veniendum ad determinationem periodorum, quas habent columnae seriei numerorum Arithmeticae progressionis, et potentiarum ab iis quarumcunque aut formularum inde conflatarum. Eumque in finem dedi demonstrationem, qua ostendo quaslibet talium serierum columnas esse periodicas, ita ut priores notae constanter redeant post aliquod intervallum. Haec demonstratio simul viam aperit ad periodos has determinandas. Itaque communicare eam volui, tanquam potissimum ni fallor profuturam. Ignosci autem peto lituris, nam ut rursus describeretur, nunc commode et statim fieri non potuit.

Si numerorum naturalium columnae primae terminos quoslibet vocemus 10, columnae secundae vocemus 11, tertiae terminos quoslibet 12, quartae 13 etc., periodus columnae terminorum 10 est 010101, seu breviter 01, columnae ipsorum 11 est 0011, columnae ipsorum 12 est 00001111 seu 0414, columnae quartae seu pro 13 est 0818 etc., et generatim columnae $(n-1)^{\text{mae}}$ seu terminorum 1n est $0.2^n\,1.2^n$ seu nullarum 2^n et deinde unitatum totidem. Hinc porro indago, quas periodos faciant 10.11 (seu factum ex 10 in respondentem 11), 10.12, 10.13, 10.14 etc. Nempe 10.11 habet periodum 0.2(01)1 seu nullarum duarum et deinde 01 semel; et 10.12 habet periodum 0.4(01)2 seu nullarum 4 et deinde 01 bis seu 0101, ut tota periodus sit 00000101; 10.13 dat 0.8(01)4, et generaliter 10 in 1n dat periodum $0.2^n(01)2^{n-1}$. Et similiter 11 in 1n dat periodum $0.2^n(0.2.1.2)2^{n-2}$, et generalissime 1m in 1n dat $0.2^n.(0.2^m.1.2^m)2^{n-m-1}$, id est si terminus columnae, cujus periodus habet 2^m nullas et deinde 2^m unitates, multiplicetur in terminum respondentem columnae, cujus periodus est nullarum 2^n et unitatum totidem, posito n esse majorem quam m, periodus columnae productae erit primum nullarum 2^n, deinde repetet ipsam periodum columnae 1m tot vicibus, quot in 2^{n-m-1} sunt unitates. Eodem modo pergi potest ad productum ex quibuscunque naturalium columnis tribus, quatuor etc., Regulaque condi generalis. Id jam prodest ad potentiarum periodos determinandas, nam numeri etc. 13 | 12 | 11 | 10 quadratum est

	*	12	*	11	*	10
etc.	10.14	10.13	10.12	10.11		
etc.	11.13	11.12				
	etc.	etc.				

Haec in speciem perplexa aggredienti facillima comperientur.

Hanoverae 26. Junii 1705.

P. S. Insigni viro Dn. Bernoullio vestro proximis scribam; nunc saluta quaeso quam officiosissime, et significa pecuniae refusionem et quae ad transitum vectarum rerum pertinent, mox curatum iri; interea me multas gratias agere. Vale, et me ama.*)

VIII.

Hermann an Leibniz.

Aliquot jam sunt anni, ex quo Problema de eliciendo valore finito radicum ex data aliqua serie, qua aequationis cujusdam radices exprimuntur, aggressus sim, verum calculi prolixitas summa

*) Auf dem ersten Entwurf dieses Briefes ist von Leibniz noch Folgendes bemerkt: Exemplar meum novissimi Newtoniani operis non a Bibliopola accepi, sed ex Anglia ipsa missu amici et mei et autoris. Sed facile opinor procurabit Dn. Menkenius, qui quotidie ex Anglia accipit libros quos deinde in Actis recenset. Hoc interim Dno. Jacobo Bernoullio cum multa a me salute ut nunties peto, qui videtur nuperis meis suboffensus, quanquam immerito, quantum certe mihi videtur. Virum et facio et semper feci maximi. Sed interdum deprehendo paulo difficiliorem aut morosiorem ac querulum etiam praeter modum. Ego nihil magis valetudini adversum judico, quam velim ut curet diligenter, famaque sua ac laude fruatur, quam magnam et meretur et habet. Velim ne supprimat multa praeclara quae habet. An non consideravit limites possibilitatis in seriebus infinitis, de quibus aliquot dissertationes edidit?

Solutionem meam problematis Bernoulliani alia vice libenter mittam, si tanti videtur. Semper solvo infinitis modis.

et ipsa rei difficultas ab hoc labore vel in ipso limine me sem pe deterrebant; nunc autem accedente humanissima Tua invitatione pristinam speculationem resumam, quam sane utilissimam esse nemo Analystarum negare poterit. Nam invento modo quo in data aliqua serie radices ab invicem discriminari possint, multum haud dubie luminis affulgebit simile quid praestandi in seriebus transcendentes quantitates exprimentibus; verum haec disquisitio magnis difficultatibus urgeri videtur, et quanquam aliquatenus assignari possit, quandonam series radices imaginarias aut impossibiles involvet, supponendo imaginariam non dare seriem advergentem sed potius in infinitum excurrentem, hoc est cujus termini fiant tandem quavis data majores. Si verbi gr. detur haec series $x = \frac{q}{p} + \frac{qq}{p^3} + \frac{2q^3}{p^5} + \frac{5q^4}{p^7} + \frac{14q^5}{p^9} + \frac{42q^6}{p^{11}} + \frac{132q^7}{p^{13}} +$ etc. ubi si $q = pp$, series non fiet advergens, adeoque involvet radices impossibiles, sed si $\frac{1}{2}p \sqsubset, = \sqrt{q}$, apparebit eam fieri advergentem atque adeo radices esse reales, sed has radices in seriebus magis implicitis finitis exprimere valoribus maxima difficultas est: nonnunquam facile succedit, ut in hoc exemplo, ubi observo hanc seriem multiplicatam per p producere quantitatem quae litera aut valore q quadratum seriei excedet, adeoque si a serie dematur $\frac{1}{2}p$ et residuum $x - \frac{1}{2}p =$
$\frac{q}{p} + \frac{qq}{p^2} + \frac{2q^3}{p^5} + \frac{5q^4}{p^7} + \frac{14q^5}{p^9} + \frac{42q^6}{p^{11}} + \frac{132q^7}{p^{13}}$ etc. quadretur, fiet $\square\, x - \frac{1}{2}q = \frac{1}{4}pp - q$, adeoque $x - \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$, quod indicat, superiorem seriem radices designare aequationis quadraticae $xx - px + p = 0$. Verum radices similiter ex seriebus eruere altiorum dimensionum, perquam prolixum nequirit calculum.

Nuper Animum subiit inquirere, quo pacto Algorithmus in Arithmetica Tua Dyadica instituendus esset, et non sine voluptate deprehendi, omnes quatuor ut vocant regulas tam facile peragi posse, ut ferme infans iis addiscendis par esset, nam quia solummodo 1 et 0 in ea adhibentur, fit ut multiplicatio degeneret in meram additionem, divisio vero et radicis quadratae extractio in subtractionem, adeo ut, si haec arithmetica Dyadica primitus loco Decadicae introducta fuisset, Logarithmis haud opus fuisse videtur. Ego curiositatis et utilitatis gratia istam Arithmeticam Binariam Tua Ampl. dignam praeceptis comprendere constitui, quo Amicis et aliis quoque innotesceret; eaque propter T. Ampl. humillime rogo, ut quae in hac Arithmetica hactenus observavit, mecum communicare non dedignetur, de quibus tamen ita utar, ut nemo non videat, quantum Ampl. Tuae debeam.

Lites circa Calculum Tuum differentialem, quae Parisiis antea fervebant inter Cl. Varignon et Dn. Rollium, calculi hujus hostem acerrimum, et quae ab aliquo tempore sopitae videbantur, iterum sunt exortae, Rollio calculum insimul integralem aggrediente, qua in re perpetuis suis hallucinationibus nil nisi ignorantiam suam in hoc argumento prodidit. Cl. Varignon varia scripta eristica Parisiis mihi misit tum a Dn. Rollio, tum a Cl. Saurino, qui Calculi differentialis partes sustinet, in publicum emissa, in hujus ultimo Rollius tam arctè constringitur, ut nulla elabendi rima parere ipsi videatur.

Prodiit nuper in Act. Eruditorum M. Apr. Cl. Craigii solutio curiosi Problematis a Cel. nostro Joh. Bernoullio in Diario Gallico Febr. 1703 propositi, de inveniendis innumeris Curvis algebraicis propositae cuivis algebraicae longitudine aequalibus, sed in antecessum dicere possum, eam Cl. Bernoulli non esse satisfacturam propter defectum universalitatis. Nam antehac similem solutionem ipsi transmisi, quam eo nomine non approbavit, quod universalis non esset, sed tantum peculiaribus quibusdam casibus applicabilis: at subjunxit se Tuam ejusdem solutionem universalem accepisse seque generalissimam constructionem adinvenisse, quae suo tempore magna cum voluptate me visurum spero.

Cel. nostri Professoris Cultum nunc Tibi defero, qui non dubitat, quin epistolam, quam suo Filio Augustae nunc habitanti miserat Excell. Dn. Schroeckio tradendam qui eam ad Tè curaret, in qua Te certiorem facit se fascem jam diu anxie expectatum Basilea dimisisse; in iis literis oblitus est Te etiam atque etiam rogare, ut, si fieri posset, Newtoni Tractatum de Coloribus et speciebus Curvarum tertii generis, quem aliquoties frustra a Belgis Bibliopolis meis Amicis pro Cl. Bernoullio et pro me petieram, aut commodare aut venalem procurare velis, de quo petito nimium libero ut ignoscas humillime rogo, quod sane nunquam apud tantum Patronum fecissem, nisi ut alio Patrono ut Amico gratificarer qui summo eum Tractatum Newtonianum videndi tenetur desiderio etc.

Basileae 13 Juli 1705.

IX.

Leibniz an Hermann.

Spero redditum iri nuperas meas, nec minus quas nunc scribo. Adjeceram illis demonstrationem profuturam ad intelligendam periodorum in seriebus Numerorum Arithmeticae progressionis utcunque replicatae necessitatem rationemque. Voco autem progressionem Arithmeticam replicatam, omnes summas aut summarum summas utcunque replicatas Arithmeticae progressionis, atque adeo omnes Arithmeticorum potentiae ejusdem gradus aut ex his conflatae formulae sunt termini progressionis Arithmeticae replicatae. De Geometrica transcribo, quae Amicus ingeniosus ad me scripsit, cui volupe fuit nonnihil in haec inspicere, me invitante:

In progressionibus, inquit, Geometricis duplis nostra Arithmetica vulgari seu Decadica expressis notae primae columnae redeunt eaedem post quartam quamque, in secunda columna post vigesimam quamque, in tertia post centesimam quamque, in quarta post quingentesimam quamque, Numeris ordinalibus semper in quintupla progressione crescentibus.

In progressionibus Geometricis tripla, octupla, et aliis quibusdam, ut credi par est, eadem lex observatur. Notandum tamen, si octuplam a numero 5 incipias, Nullas meras prodire pro prima columna, sed in secunda easdem notas redire post quartam quamque, in tertia post vigesimam quamque, et ita porro, ut ante.

In proportione quadrupla eaedem notae redeunt in prima columna post alteram quamque, in secunda post decimam quamque, in tertia post vigesimam quamque etc.

In quintupla, a quocunque numero incipias, 5 aut 0 in prima columna reperies. In secunda columna semper eadem nota, 2 aut 7 aut 0; sed in tertia columna redeunt notae post alteram quamque, in quarta columna post notam quartam quamque, in quinta columna post notam octavam quamque, et ita porro, semper notas duplicando.

In proportione sextupla una eademque nota est in prima columna, in secunda redeunt notae post quintam quamque, in tertia post 25tam quamque, in quarta post 125tam quamque, et ita porro.

In septuplae prima columna eaedem notae redeunt post quartam quamque. Caeterae columnae legem pristinam servant, nempe ut in tertia notae redeant post 20mam quamque, in quarta post 100mam quamque etc.

In noncuplae prima columna sunt binae tantum notae, in secunda eaedem redeunt post 10mam quamque, in tertia post 50mam quamque etc. Decupla cognita est. In undecuplae prima columna non nisi una est nota, in secunda redeunt notae post decimam quamque, in tertia post 50mam quamque etc.

Si pro nostra Arithmetica decadica aliam, verbi gratia Heptadicam sequeremur, in progressionis duplae prima columna notae redibunt post tertiam quamque, in secunda post 21mam quamque, in tertia post 147am quamque etc.

In Octoadica progressionis duplae singularis quaedam lex est. In tripla, si a 3 incipias, notae primae columnae redeunt post secundam seu alteram quamque, in secunda post notam decimam sextam quamque, in tertia post 128mam quamque etc.

In Arithmetica Enneadica pro dupla progressione in columna prima notae redeunt post sextam quamque, in secunda post notam 54tam quamque, in 3tia post notam 486tam quamque etc. Pro progressione tripla (quae est aliquota noncuplae) lex revolutionis accedit ei, quae est in dupla secundum Arithmeticam Octoadicam. Si quadruplam a 3 incipias, solae notae 3 erunt in prima columna, sed in secunda notae redibunt post nonam quamque, in tertia post 81am quamque.

In Arithmetica Hendecadica, sive incipias per 1, sive per 3, in prima columna notae redeunt post 10mam quamque, in secunda post 110mam quamque, in tertia post 1210mam quamque etc. Tandem in Arithmetica pentadecadica pro progressione dupla si incipias ab 1, notae in columna prima redeunt post quartam quamque, in 2da post 60mam quamque, in 3tia post 900mam quamque etc.

Ex his speciminibus intelligi potest, quantus hic campus novae numerorum scientiae sit apertus, quae non in simplici consistat speculatione, sed insignia compendia maximasque praebeat utilitates, non tantum in numerorum rationalium seriebus, summis, terminis longe remotis quam facillime licet inveniendis, sed etiam in irrationalium imo transcendentium valoribus ad leges revocandis. Et quamquam in quocunque Arithmeticae genere aliquid tale locum habeat, ipsaque comparatio diversarum Arithmeticarum majorem lucem foenerari debeat; necesse est tamen Dyadicam utilitate eminere, ubi ob binas tantum notas plerumque omnia simpliciora et legis patientiora esse oportet. Caeterum quia de Algorithmo quatuor, quas vocant, specierum cogitasti, ibique omnis fere difficultas ad additionem redit, transcribam Tibi modum quem pro additione adhibeo meum, quo simul errores melius excluduntur, et facilitate revisionique consulitur.

(Conferat. fig. 42).

1		summam	$2^1 = 2$
2	significat	praecedentium	$2^2 = 4$
3	(fig. 42)	unitatum	$2^3 = 8$
etc.		esse	etc. etc.

Processus Additionis dyadicae hic est:

In columna, ut A, in unum addo Unitates maximum conficientes Numerum progressionis Geometricae duplae, quem columna dare potest, qui in A est 4, cujus a 2 potentiae exponens, cum sit 2, ideo novissimae quatuor unitatum ascribo 2. Inde rursus colligo maximum numerum progressionis Geometricae duplae, quem dare solum potest reliquum columnae, sed cum hoc loco det nullum supersitque solum 1, ideo scribere oportet 1 sub columna. Numerus autem 2 transfertur in columnam a praesente secundam (si esset numerus 3, transferretur in 3tiam, et ita porro) et ibi signatur punctum in loco secundo columnae ab hinc secundae C (si esset 3, signaretur punctum in loco tertio columnae ab hinc tertiae D). Intelligo autem primum, secundum vel tertium locum de intervallis inter notas sumtis, ab imo ascendendo. Puncta autem in columna ubi signantur, significant unitates.*) In columna B unitati quartae rursus adscribo 2, ob rationem praecedentem, et abhinc unitati secundae ascribo / loco 1, ut ambiguitas evitetur nec unitas collectitia cum unitate columnae confundatur. Cumque nihil restet, sub columna B scribo 0, et ob 2 designo punctum in columnae post praesentem secundae loco secundo. Et

*) Ductus hinc appinxi ad ostendendam connexionem inter puncta et eos, ex quibus oriuntur numeros collectionum exponentes, ut ratio processus appareat, in praxi autem his ductibus opus non est. Bemerkung von Leibniz.

ob 1 seu unitatem designo punctum in loco primo columnae à praesenti B primae C. Similiter in columna C unitati quartae adscribo 2, et secundae ab hac ascribo 1, et quia nihil restat, ideo sub columna C scribo 0, et ob 2 designo punctum in secundo loco columnae a C secundae E. Et ob / designo punctum in primo loco columnae a C primae D. Et ita porro.

Cum ergo examen seu revisionem instituo (nam hac methodo puncta punctorumque sedes cum numeris conferendo semper calculus ab intuente examinari potest ex integro vel per partes), primum confero quod sub columna superest, cum eo quod in columna superest post numerorum collectitiorum exponentes ascriptos. Deinde percurro puncta notata infimo seu primo loco, et video an cuique respondeat / in columna proxime praecedente. Mox percurro puncta notata secundo (tertio) loco, et video an cuique respondeat 2 in columna secunda retro (3 in columna tertia retro) etc. Vale etc. Dabam Hanoverae 2. Julii 1705.

P. S. Quod ad series infinitas (de quibus in praecedentibus nostris literis) attinet, non id suadeo, ut magnopere sis sollicitus de seriei valore finito inveniendo, quando id licet (hoc enim num fuerit nimium e re publica mathematica petere), sed tantum ut constituatur modus agnoscendi, an valor per seriem sit possibilis seu advergens, et quis sit limes possibilitatis, idque ex ipsa serie, origine scilicet ejus ignorata vel dissimulata. Id enim essentiale est ad constitutionem seriei infinitae, quae finitae quantitati aequari debet, ut certi simus ac demonstrare possimus ex lege seriei, advergentiam ei inesse, seu satis longe procedendo errorem fieri minorem dato.

X.

Hermann an Leibniz.

Utramque Tuam epistolam primam a Dn. Schreckio Augusta mihi transmissam, alteram a Cel. nostro Prof. Bernoullio mihi traditam recte accepi, pro quibus gratias quas possum ago maximas.

Gratias insuper persolvo maximas pro humanissima communicatione Demonstrationum praecipuorum Arithmeticae Tuae Binariae theorematum, quibus nihil utilius dari posse mihi videtur, firmiterque mihi persuadeo reconditissima numerorum mysteria hac arithmetica dyadica, quae indies familiarior mihi fit, erui posse. Quanquam omnis arithmetica ejusmodi periodos admittat, quales dyadica involvit, difficilius tamen eruuntur propter majorem notarum numerum, quod vel prolixissimae periodi geometricarum progressionum in decadica arithmetica satis superque ostendunt, de quibus Cl. Amicus Tuus Tecum egit, quaeque in ultima Tua 2. Julii mecum communicare, pro summa Tua humanitate, non es gravatus; Dyadica autem arithmetica in iisdem progressionibus geometricis periodos habet multo breviores et patentiores, et hae periodi columnarum cujusvis progressionis planam viam mihi aperire videntur pro summis serierum inveniendis et multis aliis ut suspicor, quae tamen omnia qua par est attentione nondum examinare mihi licuit. Attamen novo Tuo designandi modo coefficientes in aequationibus tam algebraicis quam transcendentibus per certos numeros utor in solutione Problematis ducendi Curvam Algebraicam per quotlibet puncta data, quod magni aliquando usus esse potest pro valoribus quantitatum transcendentium per approximationes exhibendis, hancque solutionem Ampl. Tua proxima occasione transmittam, ejus judicio eam submissurus; nam a pauco eo tempore, ex quo in Problematis illius solutionem incidi, nondum satis otii nancisci potui chartae eam committendi, unde factum ut Cl. noster Bernoullius eam nondum viderit. Nec sperare possum me eam unquam ostendere posse, nam hectice eum in modum Cl. hunc Virum corripuit et emaciavit, ut nihil nisi sceleti speciem prae se ferat: heri me rogavit, ut officiosam suam salutem Tibi impertiendo eum apud Te excusarem, quod non scribat absentibus nunc viribus et eum impedientibus, quominus suo erga Te officio defungatur. Et quia omnem reconvalescendi spem amisit, a me pariter contendit, ut Tibi, Vir Excellentissime, suo nomine gratias agerem maximas pro omni Amicitia, Amore, Honore et Benevolentia, quibus eum a multo jam tempore dignatus es, et Tibi fausta quaeque, sanitatem inconcussam, vitam longaevam et omnia quae tum animo tum corpori prodesse queunt animitus et toto pectore vovit, cui et ego accinens iterum etiam atque etiam rogo ut mihi porro favere et patrocinari velis etc.

Basileae 4 Cal. Augusti 1705.

Es folgt hier ein Brief Hermann's, datirt 15. Aug. 1705, der nur eine Mittheilung im Auftrage Jac. Bernoulli's enthält, die ohne besonderes Interesse ist.

XI.

Hermann an Leibniz.

Praeterito Cursore Cel. nostri Bernoulli rogatu literis Te lacessivi, nunc vero a maestissima ejus Uxore rogatus tristem de Clarissimi illius Viri obitu nuntium ad Te defero. Febris enim hectica qua ab aliquo jam tempore corripiebatur nudius quartus Eum quinquagenos aetatis annos praetergressum nobis absumsit; tanto autem acerbior haec mihi accidit jactura, quanto magis Amicitiam ejus omni fuco carentem, atque frequentes quibus maximo cum fructu et voluptate fruebar conversationes mecum perpendo. Sicque cum magnum amiserim Patronum verumque Amicum, Ampl. Tuam etiam atque etiam rogo, suo favori imposterum ut hactenus me commendatum habeat, D. O. M. precatus ut Virum Illustrissimum Reipublicae literariae insigne Ornamentum, Seculi Gentisque egregium Decus, omniumque solidarum et reconditiorum scientiarum Antistitem inconcussa cum sanitate orbi erudito quam diutissime fulgere jubeat.

Fateor libenter me nunc silere potius optasse, quam ingrato nuntio de amisso Amico Te percutere; verum quia superstes Vidua cum duobus defuncti nostri Professoris Fratribus e suo judicarunt esse officio ut confestim de obitu Mariti vel Fratris certior fieres, et Academiae id Scientiarum Berolinensi, cui tanta cum laude praesides et ad quam Tuo potissimum favore et commendatione ascitus quoque erat, quemque adeo locum suo nunc obitu vacuum relinquit, mature pariter ut innotesceret. Idcirco cum ad id opera mea requireretur, ipsis deesse nolui; imprimis cum me rogarint ut Tibi suo nomine etiam gratias agam maximas pro omnibus amicitiae testimoniis, quae erga defunctum edere voluisti et quorum se Tibi debitorem magnum paucis ante beatam suam ἀνάλυσιν diebus mihi testatus est. Celeberrimae etiam Academiae membris se quoque magnopere obstrictum esse agnovit gratiasque ut pariter agerem a me efflagitavit quod Illum inter tam Illustres viros cooptare non fuerint dedignati. Tibique et singulis omnia fausta et prospera apprecabatur, ad promovendam Gloriam Dei et Scientiarum pomoeria extendenda. Et ne patientia Tua nimis abutar, hic filum abrumpo. Vale etc.

Basileae 19 Augusti 1705.

XII.

Leibniz an Hermann.

Ex nuntio de obitu insignis Viri et semper memorandi Dn. Jacobi Bernoullii plurimum doloris accepi, tum ob ingens profundioris doctrinae detrimentum, tum quod me privatum videam amico eximio et adjutore magno communium studiorum. Honoratissimae Dominae viduae, fratribusque defuncti spectatissimis rogo ut gratias agas meo nomine, quod me acerbi casus certiorem reddentes affectum suum testari, meique se affectus certos ostendere voluere. Societati Scientiarum Regiae, quae Berolini est, significavi et vestram et nostram jacturam. Non dubito magno omnium sensu acceptum iri: nam acumen Viri quod pauci aequabunt, nemo ignorat harum literarum intelligens. Ipsius certe opera potissimum effectum est, ut meae Meditationes circa interiorem Geometriam ampliorem usum acciperent latiusque spargerentur, quod ille praestitit non tantum fratrem ingeniosissimum excitando, sed et propria pulcherrima inventa conferendo. Quorum ne quid pereat nostrum monere est, curare cognatorum, et Tuum quoque, Vir eximie, et amicitiae et viciniae jure. Spero ultima voluntate defuncti aliquid de affectis laboribus schedisque constitutum esse; sin minus, possent inferri publico loco, veluti Bibliothecae patriae, aut Tabulario Societatis: Vitam etiam delineari cum elogio velim, quod egregius Vir, Otto Menkenius, libenter Actis suis inseret. De Dn. Joh. Bernoullio diu est quod nihil intelligo. Eum nunc puto apud vos agere, aut certe non diu abfuturum. Itaque speciatim a me salutari et dolorem meum significari peto. Vidi quae in Actis dixit de mea ratione construendi problematis, quod proposuerat Curvarum datae aequalium. Illud miror, suspicatum, nescio quas mirificas calculi difficultates: credo quod exequi declinassem, quod etiam in levissimis facio, adeo nunc alia urgent. Venit in mentem suadere haeredibus Tuo interventu, ut congerantur omnes defuncti Schedae Mathematicae, addo, et philosophicae, et ut speciatim omnium, quae in Actis Diariisque dedit, Analyses colligantur, ut aliquando edi possint. Interdum enim non omnibus harum rerum peritis obviae videbuntur. Calculum etiam nuperum de curvis tertii gradus, ex quibus jam 33 descripserat, asservari e re putem.

Spero ex Te intelligere, quae sive in Dyadicis, sive in aliis ipse pro insigni acumine Tuo subinde agis, et optem imprimis progressionis Geometricae periodos exhiberi in columnis.

Male me habet (etsi fortunae Tuae faveam) quod discessu Tuo exigua mihi spes relinquatur videndi Tui, neque enim credo ante Italicum iter excurres in Germaniam hactenus Tibi praeteritam. Ex Cl. Fardellae literis constantem in ipso conatum deprehendo conficiendi negotium Tuum, nec spem abesse, mutatisque licet personis, priora consilia superesse. Quod superest, vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 21 Sept. 1705.

XIII.

Hermann an Leibniz.

Rure ante aliquot dies mihi redeunti humanissimae Tuae literae redditae sunt, quibus perlectis statim me ad Viduam defuncti nostri Dn. Bernoulli contuli et dolorem quem de praematura ejus morte concepisti indicavi, pro quo luculentissimo Amoris ac Benevolentiae erga defunctum testimonio, quas potest, gratias agit maximas, Deumque pro perenni Tua incolumitate atque prosperitate precatur. Cum ea quoque de Manuscriptis Mariti egi, Tuumque consilium ipsi exposui, ad quae regessit se nequaquam refragaturam, si quid praelo dignum inter chartas reperiatur, publico id donare; et spero quoque id suo tempore effectui datum iri, ad quod ego levem meam opellam statim obtuli, quia eadem de re paulo post Cl. Professoris mortem mecum locuta est. Ars, quam vocabat, Conjectandi parum ab omnimoda perfectione abest, ultimamque accepisset manum, si vel paucis duntaxat mensibus fato suo supervixisset. Totum opus in quatuor dividitur partes, quarum prima Hugenianum tractatulum de ratiociniis in ludo aleae cum additis ad eum insignibus notis propriis complectitur. Secunda continet doctrinam de Permutationibus et Combinationibus. Tertia usum doctrinae praecedentis in variis sortitionibus et ludis aleae explicat. Pars tandem quarta usum quoque tradit et applicationem praecedentium in Civilibus, Moralibus et Oeconomicis.

Ecce hic, Vir Amplissime, adjunctam brevem Vitae ejus delineationem qualem petiisti Actis Eruditorum Lipsiens. inserendam, quam ut cum Clarissimo Dn. Menckenio communicare digneris enixe rogo, huicque similem Cl. quoque nostro Battierio ICto tradidi, qui beati nostri Professoris manibus parentabit.

Quatuor aut quinque jam sunt septimanae, ex quo Cl. noster Joh. Bernoulli cum uxore et liberis incolumis hic appulit. Vacans professio Mathematum a Senatu nostro Academico perhonorifice ipsi fuit oblata, et ab Ampl. Magistratu aucto ipsi salario professorali confirmata, qui honor exceptis Buxtorfiis nonnullis ad alias Universitates quoque vocatis, nulli hactenus Professorum nostrorum contigit. Ante aliquot dies me Eum invisentem rogavit ut Ampl. Tuae plurimam salutem suo nomine impertirem, et is quoque epistolam a Cl. Moyvraeo, Londino ad eum datam, mihi perlegendam tradidit, quae multa continebat mathematica, et inter alia solutionem suam satis prolixam attulit Problematis a Cl. Joh. Bernoulli olim in Actis propositi, de invenienda Curva tali, ut portio axis intercepta inter tangentem aliquam sit ad ipsam illam tangentem in data ratione m ad 1. Subiit animum: aliam et Moyvraeana faciliorem quaero solutionem, et puto rem ex voto mihi successisse; verum Tuum est, Vir Amplissime, de ea judicare. Sit itaque (fig. 43) Curva AGC ea quae quaeritur, cujus axis AB, applicata CB, tangens CD; jam pono $CB = xx - yy$, subtang. $DB = 2xy$, eritque tangens $CD = xx + yy$ et ex hypothesi $AD = mxx + myy$, abscissa vero $AB = mxx + myy + 2xy$. Tales vero suppositiones eo imprimis consilio instituo, ut calculus signis radicalibus non implicetur, quibus positis erit

$$\begin{array}{ccccc} CE & . & GE & :: & CB \,.\, DB \\ 2xdx - 2ydy & . & 2m, \overline{xdx + ydy} + 2, \overline{ydx + xdy} & :: & xx - yy \,.\, 2xy; \end{array}$$ hincque

habebimus $\dfrac{xdx - ydy}{xx - yy} = \dfrac{m, \overline{xdx + ydy}}{2xy} + \dfrac{ydx + xdy}{2xy}$, vel transponendo $\dfrac{ydx + xdy}{2xx}$ ad alteram partem, fiet $\dfrac{xdx - ydy}{xx - yy}$

$$-\frac{ydx-xdy}{2xy}\left(=\frac{xxydx-xyydy+y^3dx-x^3dy}{2xy,\overline{xx-yy}}\right)=\frac{m,\overline{xdx+ydy}}{2xy},$$

vel multiplicando ubique per $2xy$ et dividendo per $xx+yy$, erit $\frac{ydx-xdy}{xx-yy}=\frac{m,\overline{xdx+ydy}}{xx+yy}$; verum $\frac{ydx-xdy}{xx-yy}=\frac{\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy}{x-y}$ $-\frac{\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy}{x+y}$, ergo $\frac{\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy}{x-y}-\frac{\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy}{x+y}=\frac{m,\overline{xdx+ydy}}{xx+yy}$. Unde sequitur $\frac{1}{2}$ Log. $\overline{x-y}-\frac{1}{2}$ Log. $\overline{x+y}=m$, Log. $\overline{xx+yy}^{\frac{1}{2}}$ vel Log. $\overline{x-y}$ — Log. $\overline{x+y}=2m$ Log. $\overline{xx+yy}^{\frac{1}{2}}$, ergo $\frac{x-y}{x+y}$ $=\overline{xx+yy}^{m}$, aut ut lex homogeneorum servetur $\frac{a^{2m},\overline{x-y}}{x+y}$ $=\overline{xx+yy}^{m}$. Q. E. I.

Quantum ad methodum meam attinet, qua curvam analyticam per quotlibet data puncta duco, lubet eam hic paucis exponere, omisso tamen calculo nimis sane prolixo quam ut epistolae nunc inseri possit.

Sint, verbi gratia, (fig. 44) quatuor puncta data A, B, C, D, per quae oporteat lineam algebraicam ABCD transire, duco per aliquod punctum ut A, lineam indefinitam AG, super quam ex datis punctis B, C, D etc. perpendiculares demitto BE, CF, DG, quae omnes datae erunt longitudinis, aeque ac partes axis AE, AF, AG etc. Vocentur hae ordine A, B, C, illae vero a, b, c; quibus positis sumo aequationem $01x+10y+11xy+02xx-20yy=0$, statuendo $AK=x$ et $HK=y$, in qua aequatione valores numerorum assumtitiorum 01, 10, 11, 02, 20 etc. eruendi sunt, quod hoc pacto perfici potest. Propter identitatem relationis omnium punctorum B, C, D, H ad axem AG, habebimus tres sequentes aequationes, ponendo successive in superiore aequatione pro x valores datarum AE, AF, AG, hoc est A, B, C, et loco y valores ipsarum applicatarum BE, CF, DG vel a, b, c, et fient:

$$01A+10a+11Aa+02AA+20aa=0$$
$$01B+10b+11Bb+02BB+20bb=0$$
$$01C+10c+11Cc+02CC+20cc=0$$

Jam beneficio trium harum aequationum inveniuntur valores terminorum assumtitiorum 01, 10, 11, 02, 20 in quantitatibus datis vel constantibus, qui valores in aequatione $01x+10y+11xy$

$+ 02xx + 20yy = 0$ substituti dabunt aequationem pro curva quaesita.

Circa Dyadica subinde in periodos columnarum progressionum geometricarum inquisivi, verum nihil inveni hactenus quod Ampl. Tuae offerri mereatur.

Basileae 28. Octobris 1705.

Beilage.

Vita et Obitus Viri Celeberrimi Jacobi Bernoulli, utriusque Regiae Scientiarum Academiae Parisiensis et Berolinensis Socii, et in inclita Basiliensium Academia Matheseos Professoris Clarissimi.

Praematura Mors Viri Excellentissimi Jacobi Bernoulli non tantum Academiae Patriae, verum et universae Reipublicae literariae gravissimam attulit jacturam. Ea accidit 16 Augusti Anni hujus currentis 1705 paulo post horam quintam matutinam, anno aetatis suae quinquagesimo primo.

Clariss. noster Bernoullius (oriundus majoribus tempore Ducis Albani ob religionem orthodoxam Patria Antwerpia pulsis) in lucem est editus anno vergente 1654 d. 27 Decembris, Patre Viro Ampliss. Nicolao Bernoulli, Fori Judicialis et Camerae rationum in Republica Basiliensi Assessore integerrimo octuagesimoque aetatis anno etiamnunc superstite. Excusso pulvere Gymnasii Philosophiae in Scholis usitatae principia hausit ex institutione Celeberr. Viri Joh. Jac. Hofmanni S. S. T. D et Historiarum in Academia patria Professoris, impetratisque in ea consuetis gradibus, animum ad Studium sacrum appulit, magis tamen ex instigatione paterna quam proprio instinctu. Interea dum juveniles anni calebant, Poesin quoque latinam, gallicam, germanicam excoluit multaque non infestive lusit, et linguis pariter sedulo operam dedit. Scientias mathematicas ab ineunte aetate mire deperiit, dum adhuc Puer ex inspectione figurarum geometricarum secretum quoddam oblectamentum capiebat, ut natus ad studium hoc, non factus videretur. Ἀυτοδίδακτος in illo fuit, nullius unquam vivi Praeceptoris opera usus, quin et librorum pene omnium subsidio destitutus. Si quem sors objecerat, hunc furtim evolvebat, ut rigorem Parentis, qui Filium aliis destinarat studiis, eluderet, proposito sibi interea in emblema Phaëtonte in curru solis cum epigraphe: Invito Patre sydera verso; hancque ob causam ultra communis Arithmeticae, Geometriae, Astronomiae praxin non penetravit, nescius quiddam longe praestantius haberi ante peregrinationem literariam. In prima nihilominus adolescentia penetrans ejus ingenium eluxit in celebri Problemate Chronologico de inveniendo Anno Periodi Julianae ex datis tribus Cyclis Solis, Lunae et Indictionum, quod occasione Prop. 2 partis primae Deliciarum Mathematicarum Schwenteri ante decimum octavum aetatis annum proprio marte solutum dedit, nesciens eo tempore ejusdem Problematis solutionem a P. Billy Jesuita, celebri Mathematico, tanquam insigne artis specimen in Diario Parisiensi jam antea publicatam extare. Peregrinationem suam iniit noster A. 1676 et Genevae Estheram Elysabetham a Waldkirch a secundo a nativitate mense caecam scribere docuit, Burgdigalae vero Tabulas gnomonicas universales (nondum quidem editas) condidit. Peragrata Gallia domum redux A. 1680 suasu Amicorum R. P. Malbranchii celeberrimum opus de inquirenda Veritate et Cartesii philosophica primum coepit evolvere, hujusque philosophandi modum potius quam principia approbavit, et postquam illucescentis cometae ingenii quendam lusum de futura ejus apparatione vernacula lingua edidisset, secundo Rheno Belgium petiit. Hic sanioris Philosophiae et demonstrationum mathematicarum dulcedine primum inescatus, Elementa Euclidea docuit prius quam didicit, abditaque Geometriae Cartesianae repetitis aliquoties conatibus penetrare coepit, mox etiam Conamen suum de motu Cometarum in latinum transtulit ac multo quam prius auctius edidit, Tractatumque suum egregium de Gravitate Aetheris conscripsit. Hinc perlustrata Flandria, Brabantia, Caletum usque pergens, in Angliam trajecit, ubi salutatis Illustri Boylio aliisque Celeberrimis Viris, Congregationi hebdomadariae Academicorum augendis majoremque ad perfectionem perducendis scientiis institutae semel interfuit, dein mari Hamburgum vectus per Germaniam recto tramite Patriam repetiit, et paulo post brevi excursu Helvetiae cantones invisit.

Patriae redditus A. 1682 eo studia sua impendit, ut publico prodesset, quem in finem aliquot aestates Collegium quoddam Experimentale Physico-Mechanicum aperuit, eoque primus rerum harum pulcherrimarum in Academia Basiliensi Auctor et Evulgator extitit. Profecturus postea Heidelbergam, ubi vicaria ejus in docenda Mathesi desiderabatur opera, domi retentus est per subsequens Matrimonium quod A. 1684 contraxit cum Stupanorum Medicorum suo tempore non incelebrium Nepte et Pronepte, e qua geminae Prolis masculae et foemineae Parens factus. Tum vero mathematica demum serio tractare instituit, praecipuosque Autores et pro se legere et inter legendum aliis explicare coepit, unaque docendo et meditando sic profecit ipse, ut interioris Geometriae adyta non tantum brevi recluderet ac praestantissima tum Veterum, tum Recentiorum inventa sibi plana perspectaque redderet, verum etiam propriis inventis Scientiam quotidie magis magisque locupletaret ac perficeret. Mortuo postea Celeberr. Petro Megerlino J. U. D. et Mathem. apud Basil. Prof. ejus in locum unanimi Procerum calculo suffectus est A. 1687 d. 15 Febr. Spartam sic nactus genio suo et studiis convenientem, magno cum applausu et honore exornavit, omnibusque deinceps Academicis Dignitatibus atque inter eas Rectoratu Universitatis semel, et Philosophici Ordinis Decanatu ter pari cum successu et dexteritate omniumque applausu functus est. In sua statione operam suam studiosae juventuti ita commodavit, ut nulli eam expetenti denegarit, quamdiu corporis id vires permiserunt; hinc plures Exteri tanti Viri fama allecti Basileae advolarunt, docta ejus institutione fruituri. Mira in docendo pollebat facilitate, suaque dexteritate difficillima quaeque Auditoribus suis ita propinare novit, ut plane nescirent, ludone an somno ea arcana didicerint. Academicis quoque debemus exercitiis egregium ejus tractatum de S e r i e b u s i n f i n i t i s, in quo abdita nobis pandit geometriae mysteria. Indies sic novis inventis augere perrexit Geometriam, eaque cum in Actis Eruditorum Lipsiensibus, tum in aliis eruditorum Diariis cum publico communicavit, quibus ita se exteris commendavit, ut A. 1699 non tantum Regiae Scientiarum Academiae Parisiis et A. 1701 Berolini utriusque noviter tum instauratae praeter omnem spem suam et expectationem cum Ingeniosissimo Fratre fuerit adscriptus, verum etiam tum Natalium splendore, tum eminentiorum munerum dignitate Nobilissimi Viri, Illustrissimus Dominus Rogerus Brulartus, Marchio de Puyzieulx et Silleri etc. etc. Magni Galliarum Regis ad Helveticam Gentem Legatus Excellentissimus, et Illustrissimus Dominus Gulielmus Franciscus de l'Hopital Eques, Marchio S. Memii et Montelerii, Comes Antremontii, Dominus in Ouques, la Chaise et le Beau etc. etc. dum viveret excellentissimus Geometra, benevolentia sua insigni eum dignati sint. Cum Celebratissimis pariter in Republica literaria Viris, inter quos brevitati studentes heic loci tantum nominabimus Illustrissimum Dn. Leibnitium Sereniss. Electoris Brunsvič. Consiliarium status et Societatis Berolinensis Praesidem et Parisiensis ac Londinensis Socium, Dom. Ottonem Menckenium in Academ. Lips. Profess. Celeberri., Dn. Petrum Varignonium e Regia Scientiar. Academia et Matheseos Profes. famigeratiss., Dn. Nicolaum Fatium Duillerium Regiae Londinensis Societatis sodalem digniss. arctam Amicitiam coluit crebrisque ab iis exhilarabatur literis. Verum enimvero aliis inserviendo se ipsum consumsit, nam continuis suis meditationibus totque insomnibus noctibus, quibus reconditioris Geometriae recessus perscrutando publico prodesse studuit, corporis contra vires ita debilitavit, ut varii periculosique morbi cum quibus conflictatus est, insequuti sint; podagrae enim, a qua a multo jam tempore vexabatur, febris tandem accessit hectica cum praecedente tussi perquam violenta, quae cum indies magis magisque augeretur, nullam Ipsi reconvalescendi spem reliquit; unde omnibus in domo sua dispositis, mortis meditationi se totum tradidit sicque 16to, ut dictum, Augusti aerumnosam hanc vitam cum meliore commutavit. Paucis ante postremum diebus Amicos rogavit ut Spiralem Logarithmicam circulo inscriptam cum epigraphe: Eadem mutata resurgo, sepulchri sui saxo insculpi curarent, ad insignes proprietates quas primus ei Curvae inesse deprehendit alludens, cum ea se non solum sui evolutione generet, sed etiam sui ipsius Caustica existat, seque adeo ipsam post varias mutationes de novo producat; hacque in re Celeberr. noster Defunctus Archimedis exemplum imitari voluit, qui insigne suum inventum de proportione Sphaerae ad circumscriptum Cylindrum tumulo suo inscribi jussit.

Quantum ad opera beati nostri Professoris attinet, praeter jam memorata viz. Tractatus de Cometis et de gravitate aetheris, ut et Tabulas Gnomonicas Universales cum dilucidis praeceptis ad praelum paratas, meditationum ejus reliquarum magna pars Diario Parisiensi et Actis Erudit. Lips. inserta legitur, pars etiamnum pressa latet. Inter caetera novam rationem metiendi nubium altitudines, et ponderandi sub aqua aeris adinvenit, paralogismum in illo ponderando per vesicam commissum demonstravit; Contactus, quem vocant, Osculi naturam plenius excussit. Imprimis autem commemorari hic meretur Calculus differentialis, quem propria meditatione cum Cl. Fratre ita sibi familiarem reddidit ac etiam perfecit, ut Excell. ejus Inventor, Ampl. Leibnitius, ultro fassus sit, novum hunc Calculum Clarissimorum Bernouilliorum aeque ac suum dici mereri, illius enim subsidio Loxodromicas Tabulas in Tangentium Canone latere ostendit, Lineas Mechanicas absque quadraturis per simplices Tractorias construxit, Minimum Crepusculum determinavit, Portionem Superficiei Sphaericae dato cuivis plano aequalem assignavit, nec non lineam Celerrimi Descensus, resistentias corporum motorum in fluido, et fluidorum contra-actionem in solida supputavit, lineas mediarum directionum, Velocitates item et declinationes navium invenit, aliaque plura. Radii nempe Visualis per medium inaequaliter densum transeuntis, velique vento inflati curvaturas exhibuit, indeque regulas ad artem nauticam utilissimas confecit. Curvam elasticam et huic supparem quam linteum fluido impletum refert; Curvam item Accessus et Recessus aequabilis ad punctum datum elicuit et Problemata de linea in superficie conoidis brevissima et de Figuris Isoperimetris absolvit. Relationem illam adeo simplicem inter Evolutas et Causticas, maximi momenti inventum, indeque spirae mirabilis mirandas proprietates primus detexit, et methodi tangentium inversae nec non serierum infinitarum artificium multum promovit. Problemata illustria de quadrisectione Trianguli scaleni per duas normales rectas, et de secando generaliter circuli arcu in data ratione per communem Geometriam soluta dedit. Editionem novissimam Geometriae Cartesianae, dum curabat ipse, notis quibusdam tumultuariis auxit. Artem Conjectandi meditabatur in lucem edendam, eamque pene ad umbilicum deduxerat, cum praematura mors eum occuparet; in ea arte ratiocinia in ludis aleae ad moralia, civilia et oeconomica applicare docet, soluto eum in finem singulari quodam Problemate, quod tum utilitatis amplitudine, tum inventionis difficultate ipsi circuli Tetragonismo longe praeponit, qui si maxime inveniretur, exigui usus esset*).

---

*) Für diesen letzten Abschnitt von den Worten an: Quantum ad opera beati etc. hatte Leibniz gesetzt: Inventa ejus plurima et pulcherrima, quae in Actis Eruditorum et alibi extant, non recensemus, addere contenti, cum magnum seculi nostri inventum Analysis infinitesimalis Leibnitiana prodisset, nostrum de usu ejus et applicatione praesertim ad Physico-Mechanica, ex facili exemplo ab

XIV.

Hermann an Leibniz.

Epistolam meam 28. Octobris praeterlapsi cum inclusa Clarissimi Jacobi Bernoulli biographia a Domino Schreckio Augusta Tibi transmissam esse spero: nunc vero non expectata ad eam responsione gravissimis Amplitudinis Tuae negotiis paucis lineis obstrepere cogor, ut Cl. nostri Battierii ICti futuro die lunae orationem funebrem Cl. Jac. Bernoulli, coram Academia nostra recitaturi, petito, meoque officio satisfaciam. Nam quoniam Oratio illa funebris cum epicediis Fautorum et Amicorum typis mandabitur et Ampl. Tua Cel. nostrum Prof. plurima benevolentia et amicitia prosequuta est viventem, enixe Eam nunc rogamus demortui Domini Professoris Fratres, Cognati et Amici, ut Fautorum epicidiis suum addendo hac suae amicitiae, amoris et honoris testificatione dignetur pariter Mortuum, cum nulla plane re memoria ejus magis celebrari certi simus, quam si publice constet Ampl. Tuae Amicitia et Familiaritate eum gavisum fuisse: hocque insigne beneficium, ut et reliqua omnia quavis occasione oblata pro virili demereri studebimus, Deum simul precantes ut Ampl. Tuae vitam longaevam et sanitatem inconcussam in scientiarum augmentum largiri velit.

Clariss. Joh. Bernoullius praeterito die Martis Professionem suam auspicatus est, habuitque perelegantem orationem de Altioris Geometriae nova Analysi ejusque usu et necessitate ad studium physicum. Hisce vale, Vir Consultissime et Amplissime, et importunitati meae ignosce etc.

Basileae 21. Novembr. 1705.

---

autore exhibito (demonstratione scilicet Curvae Isochronae) novam subito lucem hausisse, et in eum Calculum Analyticum excolendum (quem Differentialem, eique reciprocum Summatorium vel Integralem vocant) magno studio et successu incubuisse, eximiis Problematibus solutis, ut inter maximos tanti inventi propagatores jure meritoque haberi possit, Leibnitiusque defuncti Amici et semper lugendi memoriae hoc distichon consecrarit:

Infinita Tibi terris Lux fulsit in ipsis,
Bernoulli, et quisquam Te superesse neget?

XV.

Leibniz an Hermann.

Lipsiam misi quae beneficio Tuo accepi pertinentia ad vitam inclyti Viri Jacobi Bernoullii. Fluebat mihi olim venula quaedam poëtica, cujus et specimina habentur, sed nunc exaruit; itaque disticho quaeso ut contenti sitis, quo ita celebravi memoriam amici:

Infinita Tibi terris lux fulsit in ipsis,
Bernoulli, et quisquam te superesse neget.

Dabam Hanoverae 24. Decemb. 1705.

P. S. Expecto avide decretum animi Tui intelligere in Negotio Patavino, cui non unam ob causam faveo.

So findet sich der vorstehende Brief abgedruckt in den Memoiren der Berliner Akademie vom Jahre 1757 und daraus in Leib. op. omn. Tom. III. pag. 523. Dass derselbe aber unvollständig ist, geht aus der folgenden Antwort Hermann's hervor. Unter den Leibnizischen Papieren fand sich folgendes Bruchstück, das offenbar mit dem Obigen ein Ganzes gebildet hat:

Ad problema quod poscit, inveniri curvam, ubi portio inter punctum fixum et tangentem, et portio tangentis inter curvam et axem, sunt in ratione data, annoto generaliter: Quotiescunque duae Functiones, ut voco, utcunque formatae ex ductu rectarum ad curvam perpendicularium, tangentium, coordinatarum, et ad earum aliquas perpendicularium, parallelarum, bisecantium angulos, aut utcunque secantium rectas etc. sunt in ratione data, problema hoc Tangentium inversum semper potest reduci saltem ad quadraturas.

Elegans est ratio Tua generalis, qua curvam ducere doces, quae transit per puncta data. Potuisses adhuc augere aequationem assumtitiam ad curvam quaesitam, scribendo $00+01x+10y+11xy+02xx+20yy=0$, sumendo 00 pro quantitate, unde abest x et y, seu pro constante. Interim ex assumtitiis una semper non computanda est arbitrariis. Exempli gratia, sunt tria puncta, fiatque aequatio $00+01x+10y=0$, dico duas tantum in effectu adesse arbitrorias, alioqui liceret rectam ducere per tria puncta data;

haec aequatio est ad rectam. Res meretur prosecutionem; potest enim hinc intelligi, curvae cujus gradus per quot data puncta duci possint.

XVI.

Hermann an Leibniz.

Statim post redditam mihi Epistolam Tuam humanissimam inclusum distichon, quod in honorem mortui Dn. Bernoulli condidisti, Cl. nostro Battierio et Viduae Cl. Bernoulli tradidi; verum cum aliis Epicediis typis exprimi nequivit, quod Parentatio Cl. Illius Viri praelo jam exiisset et divulgata esset maximo illorum et etiam meo taedio; non minores tamen cuncti Ampl. Tuae gratias se debere profitentur, pro insigni hoc beneficio quo defunctum nostrum Professorem, ut et totam ejus Familiam afficere haud fuit gravata.

Mirifice arridet generalis Tua Constructio Problematis de transformandis Curvis Algebraicis in alias algebraicas aequalis longitudinis cum proposita, quam ope Ellipsis vel Hyperbolae perficere doces in Epistola ad Cl. nostrum Bernoullium. Quod modus meus ducendi Curvam algebraicam per quotlibet puncta data a Tua Ampl. probetur, facit ut eum aliquo nunc in pretio habeam; et sane illud Problema aliqualem mihi habere videtur utilitatem, quam Tibi tamquam Judici omnium suffragiis in hisce Scientiis Supremo inutile est prolixius exponere. In meis aequationibus incognitarum coefficientium investigationi inservientibus terminum pure cognitum omisi studio, ut viz. in calculo satis prolixo pro determinatione coefficientium saltem eo labore sublevarer dictam quantitatem constantem aut terminum pure cognitum determinandi. Sed ne Ampl. Tuae patientia et bonitate abuti velle videar, hujus epistolii metam hic pono, eam rogitans, ut amore suo atque benevolentia prosequi porro dignetur etc.

Basileae 3. Febr. 1706.

XVII.

Hermann an Leibniz.

In postremis meis jam ante octo, vel quod excurrit septimanas hinc dimissis, quas ad Amplitudinem Tuam perlatas esse spero, ex Fardellianis literis retuli, in quonam situ negotium Patavinum consisteret. Alias iterum paucos ante dies a Clariss. Fardella accepi, quibus certiorem me reddit Excell. Academiae Patavinae Reformatores de Vocatione mea ad mathematicam ibi Professionem solenne decretum formasse.

Basileae 14 Apr. 1706.

XVIII.

Leibniz an Hermann.

Diu est, quod de negotio Tuo nihil intellexi. Epigrammation in memoriam Bernullianam Lipsienses Actorum Collectores brevi compendio vitae a nobis transmisso adjecere; ita non peribit, si modo tanti est. Nescio an Tibi significaverim V. Cl. Dominicum Gulielminum ad me dedisse literas, quibus significat inter alia, se sententiam de Te rogatum, communicato etiam scripto Tuo, quo nostra contra Batavum objectorem defendis; se vero merito Tibi favere, et pergratum sibi fore si advoceris. Respondi ipsi multa alia interim a Te esse praestita ad scientiae augmentum, quae etiam extent in Actis; interim fortasse proderit Dn. Abbatem Fardellam ex Te intelligere quod de Domino Gulielmino scripsi.

Ex Gallia mihi scriptum est Dn. Saurinum cum Rollio de calculo nostro litigantem typis edi curasse Tuum judicium, simulque V. Cl. Joh. Bernoullii, et meum, sed jubente Dn. Abbate Bignonio supprimere coactum exemplaria, Bignonio aegre ferente, quod hoc factum esset lite pendente, et judicio jam constituto; quamquam non novum sit etiam post litem in tribunalibus contestatam edi scripta a litigantibus.

Quis Monachus ille Benedictinus, qui de Cathedra Mathematica Tecum certare audet, nescio; an forte quidam est, qui se, ni fallor, Grandium vocat, et quaedam circa calculum differentialem attentavit utcunque mihi, si bene memini, per Cl. Magliabechium transmissa; sed nihil hac de re affirmare possum.

Curva datae aequalis effici potest modis infinitis per cujusvis formae speculum, imo et per vitrum figurae datae, adeoque catacaustice; sed Ellipsis et Hyperbola hanc praebent commoditatem, quod Tibi nullo opus est Calculo ad definiendam speculi positionem, magnitudinem aut speciem infimam, ut differentia inter fila evanescat. Eleganter notavit Dn. Bernoullius aliquando Ellipsin abire in circulum, seu duo foci coeunt in unum, hoc nempe intelligo fieri si curva in se redeat. Doctissimus Jac. Bernoullius paulo ante obitum inquisierat in Curvas tertii gradus, quas Newtonus etiam determinare aggressus est, idque fecit Libro Newtoni nondum inspecto; putabat plures prodituras curvas quam dedit Newtonus, et jam ultra 30 determinaverat, quas multum adhuc a numeri medietate abesse putabat. Vellem haec aliaque multa egregii Viri meditata non interire, et haeredes vel Tibi vel alteri committere, ut ex schedis ejus utiliora excerperentur in publicos usus. Mereretur prosecutionem quod de curva per data puncta transeunte scripsisti. Quod superest, vale etc.

Dabam Hanoverae 15. April. 1706.

XIX.

Leibniz an Hermann.

Gaudeo non mediocriter Patavinae Professionis negotium tandem esse confectum. Idem mihi significat Dn. Abbas Fardella, Vir doctrina non minus quam virtute excellens, et qui plurimum in ea re laboravit, utilitatis publicae causa. Ei nunc gratias ago, et plurimum me quoque debere profiteor: ipsi enim uni acceptum ferendum est, non tantum quod proposita res est, sed etiam quod confecta tot difficultatibus superatis, quas facile animo complecti licet. Nescio, an religiosus, ut vocant, Tibi aemulus, non sit P. Guido Grandius, cujus nuper aliquid prodiit in nostro etiam Calculo tentatum, sed ita ut non longe progressum appareat. Multum spero Italiam Tibi debituram, sed Patavium inprimis, quanquam satis agnoscam perlongum satis tempus Tibi non vacaturum admodum incumbere subtilitatibus. Professores enim saepe captui juvenum se accommodare, eaque magis docere oportet, quae prosunt discentibus, quam quae splendent inter profectos. Caeterum uti Tibi gratulor honorem et emolumentum, ita propemodum doleo longius Te recedere, quam ut aliquando Te videre sperem, sed meam voluptatem commodo Tuo, imo publico, posthabendam putavi. Spero autem communicatione crebra absentiae damnum levatum iri; nam facilis inter nos esse potest literarum commutatio per Dn. Zanovellum, Agentem in rebus Serenissimi Electoris apud Venetorum Serenissimam Rempublicam. Non dubito, quin subinde aliquid elegans et profuturum meditatus sis; id a Te discere gratum erit. Nobilissimo Battierio, rogo, ut meo nomine gratias agas, quod tam honorifice nostri meminit in S. Oratione de vita insignis Viri Bernoullii; ibidem ait ipsummet defunctum constituisse, quid de schedis suis fieri vellet. Quale id sit, fac quaeso ut sciam, simulque indica si placet, an non impetrari possint in publicos usus. Aliquoties cogitavi, posse Elementa quaedam hujus Analysis confici meliora, quam habentur hactenus, et in eum fere modum, quod ad Cartesii Geometriam factum est; egregia specimina excellentium Virorum adjici; ibi locus foret Analysibus, quarum fructum ipse Bernullius p. m. inseruit Actis, analysi non raro supressa; aliaque id genus accedere possent, de quibus nondum quidquam dedit, veluti de ducenda minima linea in quibusdum superficiebus, de curvarum gradus tertii determinatione. Cogita quaeso hac de re, et si quid ante abitum perficere potes, tenta, tum ut honori defuncti, tum etiam ut profectui scientiae velificemur. Interea vale etc.

Dabam Hanoverae 21. Maji 1706.

XX.

Leibniz an Hermann.

Valde cupio nosse an vocatio dudum promissa tandem ad Te pervenerit, aut quo res sit loco? Nec minus desidero subinde particeps fieri meditationum Tuarum; etsi enim sim per alia distractissimus, et toto tempore, quo apud nos legatio Anglica fuerit, vix cogitare potuerim de rebus ad studia pertinentibus, aveo tamen discere beneficio amicorum quid geratur, et a Te praesertim, a quo plurima expecto egregia. Dn. Bernoullius mihi adolescentem alterius fratris filium in nostris studiis laudat. Ita haereditaria haec familiae laus erit. Ait etiam a Te errorem quendam Hiraei, et examen ad Acta Lipsiensia missum; quod si Analysin tuae solutionis non addidisti, peto ut eam mecum communices. Rogavi etiam, ut me paulo distinctius de posthumis Dn. Jacobi Bernullii doceres; id si vacat, iterum peto. Vellem vel servari loco tuto, vel edi quae id utcunque merentur, uti certe merebuntur pleraque. Quin prodesset etiam Analyses eorum, quae in Actis et alibi edidit, conservari; virorum enim egregiorum ipsas inquisitiones non interire interest. Ex dissertationibus Academicis, quas typis edidit, vidi nonnullas apud Dn. Naudaeum Berolini, sed habeo plane nullas. Dn. Jacobus Bernoullius p. m. paulo ante obitum ad me scripserat, coepisse se indagare lineas tertii gradus, seu quae proximae sunt conicis, et jam computasse ultra 30, adhuc autem superesse multo plures; eam inquisitionem non perire vellem. Quod superest, vale, et me ama, et fac subinde rerum Tuarum fiam certior.

Dabam Hanoverae 15. Jul. 1706.

XXI.

Hermann an Leibniz.

Clariss. Fardella mihi non dixit, quisnam ille Monachus Benedictinus esset Professionem Patavinam ambiens, adeo ut dicere non possim, an sit P. Guido Grandus cujus commentarium in Vivianea Problemata vidi satis amplum, in quo methodo tantum indivisibilium Cavalleriana utebatur, alter autem ejus tractatus de Logarithmica in Actis nupere recensitus ad manus nostras nondum pervenit; verum ex Actis vidimus Cel. Bernoullius et ego, eum Grandii librum novitate materiae non esse multum commendabilem, cum sola theoremata circa Logarithmicam magno apparatu demonstret, quae Hugenius Tractatui de Causa gravitatis attexuit, et quae tribus fere lineis calculi differentialis beneficio quam facillime expediri potuissent, ut in responsione mea ad Dn. Nieuwentiitii Considerationes jam antehac monueram.

Vidisti, Vir consultissime, ex nupero Mense Actorum me non parum a Cl. de la Hire dissentire circa Curvaturam Radii visivi per aërem difformiter densum transeuntis, quam Cycloïdem esse dicit in Commentariis Academiae Parisiensis, et ego curvam esse demonstro in infinitum abeuntem et asymptota praeditam. Errorem inde profluxisse puto, quod Dn. de la Hire existimarit raritates aëris versus terram decrescere in ratione applicatarum in Triangulo, quod omnino falsum esse constat, cum eae raritates aëris potius in geometrica proportione decrescant, ut in meo Schediasmate demonstravi. Imo quod magis mirandum, si vel maxime ponatur raritates aëris per ordinatas in Triangulo posse repraesentari, non inde tamen Cyclois pro curva Radii Luminosi, sed circulus prodibit, adeo ut omnino concludendum esse videatur, Cl. Hirium nimium festinanter Schediasma suum in publicum emisisse.

Profectus mei nimis tenues sunt, Vir Ex., quam, ut Tu putas, Italiam aut Patavium mihi multum debituram spondere possim; quod autem Ampl. Tua tam benigne de me judicet, insigni suae erga me benevolentiae ac amori id tribuo. Operam semper dabo, ut praeconceptae saltem de me opinioni et spei quadantenus respondeam, cum ut toti ex asse satisfaciam, me nimis debilem agnoscam. Scio interim Professoribus Mathematicis plerumque non nisi vulgaria Auditoribus suis esse propinanda et ingerenda, cum perpaucis profundioris Matheseos degustare dapes volupedit. Et in compluribus meis mathematicis Collegiis nonnisi vulgares Geometriae Practicae et Fortificatoriae artis praxes a me fere exiguntur, adeo ut in his etiam aliqualem mihi hoc pacto habitum acquisiverim, quae antea prae analysi aliisque profundioris matheseos speculationibus maxime fastidiveram.

Circa transformationem curvarum in alias aequales statim quoque animadverti, Ellipsim speculi vices subeuntem in circulum abire, quotiescunque transmutanda in se redeat, verum hoc in casu speculi diameter promiscue et pro libitu accipi non potest, sed quidam limites semper sunt observandi. Si v. g. Circulus AJEA (fig. 45) sit transformandus in aliam et aequalem Curvam, radius GA, instituto calculo, major sumendus est quam $\frac{4AD}{\sqrt{3}}$, ut Cl. Bernoullius suo calculo itidem invenit, nam si GA aequalis aut minor esset quam $\frac{4AD}{\sqrt{3}}$, nova Curva composita esset ex duabus, quarum una affirmativa, altera negativa esset, quarum summa demum inveniretur Circumferentiae circulari AJEA aequalis, et hac ratione non haberetur una curva finita propositae aequalis, sed summa duarum infinitarum, ut dictum.

Beatum nostrum Jacobum Bernoullium de suis Schedis ita statuisse a relicta Vidua accepi, ut Filio suo Unico, Arti Pictoriae Augustae nunc operam danti, asserventur, quae postea, cum Lutetiam petet, typis ibi exscribi curet, ea saltem quae Cel. Varignon luce publica digna censebit. Spero tamen me aliquid in publicos usus obtenturum post Juvenis hujus Bernoullii hic adventum, qui propediem accidere debet, tyrocinii annis jam dudum effluxis: si voti compos fio, meis partibus non deero, sed ea congeram, quae augmento scientiae conducere posse judicabo. Non obliviscar etiam determinationes curvarum tertii generis quarum omnes classes diligenter percurrebat, a simplicissimis ordiendo aequationibus ut $a.ixxy = 0$; $a.kxyy = 0$; $bx.gy^3 = 0$; $cxx.gy^3 = 0$; $dx^3.ey = 0$; $dx^3.fyy = 0$; ab hisce ad aequationes 4 dimensionum progrediendo incepit a $a.bx.gy^3 = 0$; $a.bx.ixxy$; $a.bx.kxyy$; $a.cxx.gy^3 = 0$; $a.cxx.ixxy = 0$, et ita porro pervenit sic progrediendo ad usque 70 aequationes, quas omnes non nisi 34 ad summum diversas curvas designare ostendit, harumque curvarum asymptotas, axes, puncta flexus contrarii aut reversionis, aliaque similia diligenter assignat.

Quantum ad methodum Bernoullianam de ducenda minima linea in quibusdam superficiebus, ut in Conoidibus rectis, illa non diversa multum est ab ea, qua lineam celerrimi descensus antea inquisiverat, et si recte memini, ita circiter habet. Esto Curva quaecunque ABC (fig. 46) rotata circa AD, quae gignat conoidem ABCFDA, in cujus superficie ducenda sit linea BKH inter eosdem terminos brevissima. Sint EF arcus aequatoris, ABC, AKJ, AHF tres meridiani, BN, KL arculi descripti a punctis B et K; et sunto CD $= JD = FD = a$, $BG = NG = f$; $KP = LP = g$; $CJ = m$; $JF = n$; $BK = s$, $KH = u$, et tandem $NK = HL = p$. Quibus positis

$CD.CJ :: BG.BN$	$JD.JF :: KP.KL$	$\sqrt{BN^2 + NK^2} = BK$
$a.m :: f.\frac{fm}{a}$	$a.n :: g.\frac{gn}{a}$	$\sqrt{\frac{mmff}{aa} + pp} = s$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{KL^2+LH^2} = KH \\ \sqrt{\frac{nngg}{aa}+pp} = u\end{array}\right\}.$$ Jam ex hypothesi $\sqrt{\frac{mmff}{aa}+pp} + \sqrt{\frac{nngg}{aa}+pp} = \text{Min.}$, unde $\frac{ffmdm}{aas} + \frac{ggndn}{aau} = 0$, et quia puncta B, H fixa sunt, erit $dm = -dn$, adeoque $\frac{ffm}{aas} = \frac{ggn}{aau}$, hoc est $\frac{ffm}{aas} =$ constanti. Sint jam $BG = f = x$, $QC = y$, $CJ = m = dy$; tangens in K vel $KE = t$, erit $KN = \frac{tdx}{x} = p$, adeoque $BK = s = \sqrt{\frac{mmff}{aa}+pp} = \sqrt{\frac{xxdy^2}{aa}+\frac{ttdx^2}{xx}}$, et $\frac{ffm}{s} = \frac{ax^3dy}{\sqrt{x^4dy^2+aattdx^2}}$ $= \text{const.} = ac$; unde elicitur $dy = \frac{actdx}{xx\sqrt{xx-cc}}$; longitudo curvae erit $= \int\frac{tdx}{\sqrt{xx-cc}}$. Hanc Methodum universaliorem reddidi, ut in omnibus plane superficiebus conoidicis et non-conoidicis aequaliter succederet; sed ne longiore mea epistola Ampl. Tuae taedio sim, in aliam occasionem eam reservo.

Clarissimi Viri Battierius et Bernoullius me rogarunt, ut cultum suum Tuae Ampl. et officia vicissim deferrem, hicque insignis vir sperat ultimam suam epistolam rite Tibi traditam esse. Hisce vale etc.

Basileae 17 Julii 1706.

XXII.

Hermann an Leibniz.

Dn. Moyvraeus in nuperrimis suis ad Cl. nostrum Bernoullium literis egregiam novamque proposuit seriem pro longitudine Circumferentiae circularis mihi proponendam, cujus inventionem tam singularis esse artificii dicit, ut non nisi casu Amicus suus Anglus, seriei Inventor, in id incidere potuerit. Si Diameter Circuli sit unitas, erit Circumferentia

$= 1, \overline{\frac{16}{5} - \frac{4}{239}} - \frac{1}{3}, \overline{\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}} + \frac{1}{5}, \overline{\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}} - \frac{1}{7}, \overline{\frac{16}{5^7} - \frac{4}{239^7}}$
$+ \frac{1}{9}, \overline{\frac{16}{5^9} - \frac{4}{239^9}}$ — etc. Progressionis hujus celerrime convergentis demonstrationem statim inveni et Dn. Bernoulli ostendi, cui non displicuit. Sit semicirculus AGD (fig. 47) quem tangit recta FA in A, in qua sumto quovis puncto F, et ducta FD semicirculum secante in G, vocentur FA, t; arcus AG, a et diameter $= 1$, notum est hoc casu fore $a = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 -$ etc., unde si alius arcus AH sumatur et per H ex puncto D linea DH trajiciatur, rectae AF in J occurrens, sit hic arcus AH $= b$, recta JA $= x$, fiet iterum $b = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{9} x^9 -$ etc. Vocetur tandem quadrans Circuli q, et fiat $16a - 4b = 4q$ vel $2a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}q$. Jam pro t talis fractio eligi debet, ut tangens arcus 2a vel 2AG fractione exprimatur, cujus denominator sit duplum numeratoris unitate minutum, adeoque si ponatur $t = \frac{1}{5}$, erit tangens $2a = \frac{60}{119}$, talis fractio ut requiritur: tangens autem arcus $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}q$ erit per theorema, quod in nupero Mense Junio demonstravi, $= \frac{1+x}{2+2x}$, adeoque $\frac{60}{119} = \frac{1+x}{2+2x}$, unde elicitur $x = \frac{1}{239}$; adeoque erit $a = \frac{1}{5}$
$- \frac{1}{3}, \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}, \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}, \frac{1}{5^7}$ etc. et $b = \frac{1}{239} - \frac{1}{3}, \frac{1}{239^3}$
$+ \frac{1}{5}, \frac{1}{239^5} - \frac{1}{7}, \frac{1}{239^7} +$ etc., unde substituendo valores arcuum a et b in aequatione $16a - 4b = 4q =$ Circumf. fiet

$$4q = 1, \overline{\frac{16}{5} - \frac{4}{239}} - \frac{1}{3}, \overline{\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}} + \frac{1}{5}, \overline{\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}} - \frac{1}{7}, \overline{\frac{16}{5^7} - \frac{4}{239^7}}$$
$$+ \frac{1}{9}, \overline{\frac{16}{5^9} - \frac{4}{239^9}} - \text{etc.}$$

Quae est ipa formula Moyvraeana.

Haud absimiliter inveni Quadrantem Circumf. ponendo Diametrum $= 1$

$$= 1, \overline{\frac{1}{2^0} - \frac{1}{7^1}} - \frac{1}{3}, \overline{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{7^3}} + \frac{1}{5}, \overline{\frac{1}{2^4} - \frac{1}{7^5}} - \frac{1}{7}, \overline{\frac{1}{2^6} - \frac{1}{7^7}} +$$
$$\frac{1}{9}, \overline{\frac{1}{2^8} - \frac{1}{7^9}} - \text{etc.}$$

Innumerae aliae hujusmodi series pari facilitate inveniri possent hisce vestigiis insistendo, quae omnes mira celeritate convergerent, sed hae prae multis aliis simpliciores videntur eo quod numeratores fractionum ubique sint iidem.

In Schediasmate meo de Curvatura Radii luminosi omnia, ut vidisti, demonstravi, excepta mea constructione pro unda Hugeniana, vel Synchrona DV (Fig. 3. Mens. Junii Act.). Supposui primum omnes curvas Refractionis FD, FV provenire eodem modo ac si mobile aliquod in F impulsum secundum diversas directiones AF, ΔF, cum celeritatibus AF, PH, RS designatis per applicatas in Logarithmica APR, easdem describeret. Jam si PH $=$ u, RS vel ΔF $=$ l, positis reliquis ut in Actis monui, erit tempus per FD $= \int \frac{-aadu}{uu\sqrt{aa-uu}} = \frac{\sqrt{aa-uu}}{u}$; tempus vero per FV $= \frac{a\sqrt{aa-ll}}{bl} - \frac{\sqrt{bb-aa}}{b} = \frac{\sqrt{aa-uu}}{u} =$ temp. per FD; unde si fiat $\sqrt{bb-aa} = c$ et $p = \frac{b\sqrt{aa-uu}}{u}$, erit etiam $l = \frac{ab}{\sqrt{bb+2cp+pp}}$.

Caeterum ignosce, Vir Excellentissime etc.

Dabam Basileae 21 Augusti 1706.

XXIII.

Leibniz an Hermann.

Mire placet Tua deductio novae et promtioris appropinquationis ex serie, quae arcus valorem per tangentes exhibet, quam a me primum inventam credo non ignoras. Nuper Amicus ad me scripsit, et dubitavit, an nostra methodus de maximis et minimis applicari possit ad puncta regressus, quale in figura 48. Nam ibi tangens proprie est CE, non recta parallela axi. Interim idem ait methodum Cartesii et Huddenii in hoc casu locum habere. Respondi methodum Huddenii non esse nisi casum particularem methodi nostrae, cum scilicet non nisi una est variabilis, et nulla irrationalis variabilem comprehendens, et eadem demonstratione niti, qua nostram. Caeterum Methodum nostram omnino hic quoque locum habere, nam si linea ABCD revera una est (non duae prorsus diversae se tangentes in C), concipi potest tanquam in figura 49, ubi saccum quendam regressus format, ubi manifeste locum habet Methodus nostra in puncto K. Sed saccus ille in punctum evanescens dat casum figurae 48. Haec etsi non vacaverit experiri in exemplis, vera tamen esse non dubito.

Gratias ago, quod significas quae Dn. Fardella de me scripsit. Spero Dn. Bernoullium nostrum optime valere, et meas literas accepisse. Vereor ne Suecorum in Saxonia irruptio res Lipsienses omnes, et inter eas Acta Eruditorum turbet. Nuper illic misi paucula Davidi Gregorio reponenda, qui in suis Astronomiae Elementis oppugnavit meam motuum coelestium explicationem, sed vi ejus non bene intellecta. Fortasse non respondissem, nisi eadem opera emendandum aliquid in meis succurrisset, quamquam emendatio non tam ad rem, quam ad modum enuntiandum pertineat, quem reddo rotundiorem. Gregorius contra vortices paratragoediatur, sed ego ostendo talem vorticum motum concipi posse et ex meis consequi, qui motum solidi in liquido sic moto non turbet, imo qui potius ex conspiratione utriusque necessario oriatur. Flamsteadius in eo jam est, ut 30 annorum observationes edat sumtu Admiralitatis Anglicanae. Vellem possint etiam edi observationes Cl. Kirchii, qui Astronomus est Regiae Societatis Berolinensis, quas etiam a 30 et amplius annis instituit. Vereor ne rerum Europaearum mutatio ingens noceat Academiae Regiae Parisinae. Nuper hic fuit Dn. Gundelsheim, Medicus Regis Borussiae, qui cum Tournefortio plantarum causa in Oriente fuit, omnes Archipelagi insulas et totum dextrum Maris Euxini littus lustravit. Ait observationes ipsorum edi debere. Anglus doctus huc attulit elegantem librum Domini Gulielmini de Salibus, qui valde probabiliter tuetur, sales non transformari, quod mihi utique Leuwenhoekii observationibus rationi consentaneum visum est, cum figurae maneant in summa illa exiguitate, quam microscopia ostendunt. Illud tamen cum ipso affirmare non ausim, ad atomos usque insecabiles persistere, ac ne a natura quidem transmutari posse. Vale, et me ama etc. Dabam Hanoverae 17. Septemb. 1706.

XXIV.

Hermann an Leibniz.

Quod demonstratio mea formulae Anglicanae pro rectificatione Circumferentiae Circularis placuerit, est quod mihi gratuler, optimeque scio primam rectificationem Circuli Amplitudini Tuae deberi, expressionem volo dicere valoris circi per tangentem.

Pro variis novis literariis, quae Ampl. Tuae mecum communicare placuit, gratias ago maximas, nullusque dubito quin Clarissimi Guglielmini tractatus de Salibus egregium sit opus et acumine suo dignum, sed hujusmodi libri apud nos plane non inveniuntur, neque adhuc invenire potui tractatum ejusdem de Motu fluminum, quem Parisiis obiter tantum apud Clariss. Varignon perlustravi et egregia continere credo.

Methodum de maximis et minimis in investigandis punctis reversionum optime adhiberi posse, extra omne dubium positum esse videtur, cum methodus Huddeniana, quae nonnisi specialissimus est casus differentialis calculi, eo quoque pertingat; quod manifeste patet in Curvis saccum habentibus, quales Amplitudo Tua concipit. Sit v. gr. $y^3 = axx$, quae aequatio designet curvam (fig. 50) ABCD, quae mutatur in (fig. 51) curvam ABGCD, si insuper BC = b et aequatio $y^3 = axx - b^3$; jam patet partem BGC habere maximam applicatam velut FG, quae determinabit punctum regressus evanescente BC aut b aut appropinquantibus sibi invicem punctis flexus contrarii B et C. Celeberr. postea Bernoullius suas super hac eadem re aperuit cogitationes, quas jam a compluribus annis ad Dn. Marchionem Hospitalium se misisse dicit; is ostendit in puncto reversionis C esse infinitas tangentes, quod ope Curvae (fig. 51) ABGCD facile demonstratur, nam pars BGC infinitas tangentes admittit et .... omnium possibilium directionum; evanescente autem b aut BC, curva ABGCD mutatur in fig. 50 et aequatio $y^3 = axx - b^3$ in $y^3 = axx$, quae prius proponebatur. Idem hac quoque ratione ostendit: Sumit in axe FC Curvae ABC (fig. 50) punctum F pro initio abscissarum sibique proponit inveniendum punctum D, in quo subtangens sit ad applicatam in ratione 1 ad n, sitque FC = c eritque aequatio $a \times \overline{x - c}^2 = y^3$, unde $2adx, \overline{x - c} = 3yydy$, unde $3yy . 2a, \overline{x - c} :: dx . dy :: 1 . n$, ergo $3nyy = 2ax - 2ac$ vel $y = \sqrt{\frac{2a}{3n} \times \overline{x - c}}$

vel $\frac{8a^3}{27n^3}\times\overline{x-c}^3=a^4\times\overline{x-c}^4$ aut $\overline{x-c}^3=\frac{27n^3a}{8}\times\overline{x-c}^4$, quae aequatio reducta cubica erit ejusque radices puncta D determinabunt, ubi subtangens sit ad applicatam in ratione 1 ad n; verum in illa aequatione Cubica binomium $x-c$ quoque radix erit, cum tota aequatio per id dividi possit, unde sequitur $x=c$, ex quo sequitur punctum C quaesito quoque satisfacere.

Avidus expecto Responsionem Tuam in Actis, quam ad Gregorii objectiones contra vortices reponere voluisti. Evolvi Gregorii Astronomiam, sed non multa nova in ea inveni, mihique lapsus in eo videtur in eo quod asserat Ellipsin Cassinianam eam proprietatem habere, ut areae circa unum focum sint proportionales angulis respondentibus circa alterum, facile enim ostendi potest paralogismus in demonstratione sua commissus. Celeberr. Newtoni tractatus de Coloribus latio donatus prodiit, quem tamen nondum vidi. Haud ita pridem prodiere quoque anni 1704 et 5 Commentariorum Academiae Parisinae, in quibus egregia habentur elogia Dn. Dn. Marchionis Hospitalii et Jac. Bernoullii a Dn. de Fontenelle edita, quorum prius tamen non omnimode Dn. Bernoullio arridet.

Caeterum Deum precor ut auspicatus hodie annus 1707^{us} cum longa et haud interrupta serie reliquorum omni modo faustum felicemque esse velit Amplitudini Tuae, super quam toto ejus decursu benedictionum suarum divinarum thesauros ubertim effundat, Eamque nobis quam diutissime salvam et incolumem servet. Vale etc.

Calendis Januariis 1707.

Clarissimus noster Bernoullius Ampliss. Virum plurimum salvere jubet hacque occasione omnia ipsi bona quoad animam, quoad corpus apprecatur; is satis bene valet, quanquam tussis illa qua jam pluribus mensibus laborat, nondum penitus cessarit.

XXV.

Leibniz an Hermann.

Neque mihi ab aliquot mensibus doctissimus Fardella respondit, ut propemodum verear, ne quid ei acciderit adversi; itaque ejus rei gratia ad Amicum Venetum scripsi. Marpurgensis Professionis causa obiter (in Tui gratiam) ex Celeberrimo Papino olim quaesivi, an ea vacaret; respondit negando. Credo salarium ejus accipere, absentem licet. Itaque ne aegre fiat egregio Viro, ante omnia discendum erit, an voluntas sit Serenissimo Landgravio, vel ipsi vel novo Professori supplemento prospiciendi de suo. Scis non facile augeri fundos Academiarum, Principes tamen extra ordinem succurrere non raro. Itaque cauto opus erit, recteque facies, si sententiam Aulae ante omnia per amicum explores.

Intelligo etiam in Anglia quendam de paralogismo admonuisse Gregorium, cum Cassinianas Ovales habere putavit angulos ad unum focum proportionales areis ad alterum focum. Mihi vix amplius his exerceri fas est. Itaque gratum facies, si indices sedem erroris; putem modum hanc quae id praestat curvam describendi inveniri posse: sed res tanti non est, quoniam si haberetur, non prodesset, neque enim id curat natura in liberis motibus, ut circuli describantur, in quibus anguli sunt ut tempora, quod nos ob compendium calculi vellemus.

Nescio, an Tibi aliquando significaverim, quantopere optarem ab aliquo demonstrari Regulam ab Harrioto olim inventam (unde videtur descripsisse Cartesius), quod signorum mutationes in aequationibus non nisi radices reales habentibus sint tot, quot radices verae, et signorum consecutiones tot, quot radices falsae. Harriotus eam inductione veram comperit. Cartesius rationem ejus nullam assignavit, nec quisquam post ipsum. Is non mediocris est analyticae scientiae defectus. Si haec demonstrari posset propositio: aequatione multiplicata per veram (falsam) radicem, unitate augeri numerum mutationum (consecutionum) in signis qui prius erat, etiam propositum theorema demonstratum foret.

Dn. Bernoullium nostrum morbo laborare ignorabam; rogo, ut ei a me vicem voti reddas, et cum omnia fausta, tum in primis prosperam valetudinem meo nomine a Deo apprecere, plurimum enim reipublicae interesse censeo, ut nobis conservetur. Idem Tibi precor, Vir clarissime, ut quam diutissime publicae rei prosis, nam et a Te praeclara quaeque nobis polliceor.

Nuper Dn. Naudaeus mihi retulit commercium, quod Tecum colebat, nescio qua de causa silentio Tuo cessasse. Mihi semper visum est diversum sentire duos incolumi amicitia posse. Est in eo Viro laudabile studium et veritatis et pietatis. Plerique solemus θέσεις φυλάττειν, quas juvenes accepimus, et hanc veniam petimusque damusque vicissim. Apologiam nostram contra ea, quae Bernardus nuper suos apud Batavos Gallico Diario inseruerat, qualem ego, probante Dn. Bernoullio, summiseram, jam ut intelligo illic legitur, nam nondum vidi. Commentarios Academiae Regiae Scientiarum Parisinae ad annum 1704 pertinentes vidi, sequentes nondum, scilicet rarius nobis innotescit quae Gallia et Italia praestant, eaque in parte vestra melior conditio est, eoque magis obstrictus ero, si qua hujusmodi subinde docebis. Video Dn. Parent Academiae illius socium multa solere dare in illis Commentariis, quae subinde mihi dubitatione carere non videntur ut La-Hiriana. Ejus Elementa mechanica aliquando attentius examinare voluerat Dn. Bernoullius; an hoc facere vacaverit nescio. Vale, et nos ama etc. Dabam Berolini 18. Januar. 1707.

XXVI.

Hermann an Leibniz.

De Gregorio mirum est ipsummet paralogismum suum non advertisse nisi monitum, cum statim oculis pateat. Is volebat demonstrare sequentem propositionem, pag. 217 Astr. Phys. et Geom. Elem.: Supra Ovali ALDB (fig. 52) aucto angulo AFL aequalibus incrementis LFM, MFN, areae ALG incrementa simul facta, nempe LMG, MNG etiam aequalia sunt. Hanc ita probare contendit propriisque ipsius utar verbis. Rectae, inquit, FM, GL se intersecant in V, rectaeque FN, GM in T. A puncto L ad LM demitattur normalis LO, ab M ad FN recta MP, et in LG recta MR; ab N denique in MG normalis NK. Concipiantur porro anguli LFM, MFN minimi, unde anguli LGM, MGN minimi erunt: ideoque rectae FL, FM, FN erunt fere inter se parallelae, sicut et GL, GM, GN; curvaeque pars LMN a recta non abludet, unde Triangula LVM, MFN rectilinea sunt et aequiangula et proinde similia. Et ob aequales angulos LFO, MFP triangula rectangula etiam sunt similia; et igitur FM.FL :: LO.MP; et ob similia Δ LVM, MFN, LO.MP :: MR.NK; unde FL.FM :: MR.NK. Sed ut prius ostensum est ex natura hujus Figurae FL.FM::GM.GL et igitur GM . GL :: MR . NK, et proinde Triangula LMG, MNG aequalia sunt. Q. E. D.

Haec est egregia Dn. Gregorii demonstratio. Interim tamen longe alii curvae illa proprietas convenit, quam huic ovali Cassinianae competere putat. Nam existentibus x abcissa, y ordinata, a et b distantiae focorum ab alterutro verticum, erit aequatio differentialis Curvae illi satisfaciens, in qua areae circa unum focum proportionales sint anguli circa alterum, hujusmodi $ydx - xdy - ady = \frac{bbydx + b^3dy - bbxdy}{bb - 2bx + xx + yy}$, in qua si separari possent differentialia et in determinatae, solutum esset Problema; interim tamen plusquam probabile est talem Curvam esse Mechanicam. Dominus Gregorius non satis cautus infinite parva saepenumero tractare videtur; sic enim etiam in Schediasmate suo de Catenaria, quod Anonimus quidam solidissime refutavit, per paralogismum Act. Lips. 1698 pag. 313 in inquisitione radii osculi ad veram conclusionem pervenit.

Quantum ad theorema Harrioti circa radices veras ex mutatione signorum in aequationibus dignoscendas, quodque Cartesius in sua Geometria quoque usurparat nulla addita demonstratione, miror utique a nullo adhuc demonstratum esse. Verumque est, theorema demonstratum fore, si probari posset, quod multiplicata aequatione per veram aut falsam radicem, unitate augeatur numerus mutationum aut consecutionum signorum qui prius erat, si nullae adsint radices imaginariae; nam fieri potest ut aequatio nil nisi radices falsas habens, multiplicata per radicem veram aequationem producat, in qua sint merae mutationes in signis, nullae autem consecutiones; sed quando hoc accidit, judicari potest, aliquas in aequatione proposita contineri radices imaginarias. Cogitavi nonnihil de hoc theoremate et aliquid observavi, quo ut spero probari posset veritas propositionis, sed tempus mihi nondum fuit, hoc argumentum ea qua debet ἀκριβείᾳ excutere, proxima tamen occasione quando Frater meus Norimbergam iter est facturus, fusius quae observavi Amplitudinis Tuae judicio submittam, literasque ad Dn. Naudaeum dabo quas Norimbergam usque feret Frater et dehinc Berolinum curabit. Doleo magnopere Cl. Naudaeum sinistram de me opinionem concepisse ex meo grandiusculo silentio ortam et gaudeo vicissim ultimas meas literas Septembris anni superioris quas in nuperis ad me suis accepisse nuntiat, suspicionem ipsi exemisse. Et sane silentium meum defectui potius occasionum scribendi, quam quod ille deversa a me sentiret tribuendum est, imo et ego ridiculum esse duco ob diversitatem opinionum cuiquam succensere; hoc saltem egregio illi Viro a mea parte neutiquam est metuendum, cum perfecta inter nos sit doctrinae convenientia, et si qua in re ab ipso dissensi, inde venit, quod ille egregium quendam Virum, theologum de Eclesia Neocomensi optime meritum, quibusdam sententiis et opinionibus heterodoxis imo et hereticis insimularet, a quibus immunem illum esse etiamnum credo. Amplitudo Tua judicabit an ideo amicitiae vincula dissolvere potuissem cum Dn. Naudaeo, cujus Pietatem, Eruditionem et insignem morum Suavitatem suspicio et maximi facio; imo operam semper sum daturus, ut tam proficuam mihi amicitiam quibuscunque modis mihi conservem. Interim si quid aegre ferrem, hoc esset quod tantas laudes tantaque encomia in me profundat, ut majora in primarium Eruditi orbis Virum derivare vix posset.

Dn. Parent multus est in theoria frictionum, quam Amontonius prius experientia determinaverat; interim nondum satis patientiae mihi fuit tam stupendos calculos percurrere, contentus ipsam methodum aut calculi fundamentum nosse, totum in eo consistens ut frictiones deducat a majore aut minore pressione eamque in machinis consideret, reliquaque omnia sunt satis vulgaria, imo a paralogismis eum penitus immunem vix credo; ejusque αὐταρκειαν miratus sum Hugenium circum quoddam theorema de Vi Centrifuga reprehendentem, dum ipsemet ea in re gravem committeret lapsum. In Elementis suis Mechanicis nihil habet sibi peculiare praeter discursus obscuritatem, nam omnia quae ibi profert, jam prius erant inventa, interim omnia sibi vendicat, ne quidem principio illo motus compositi excepto, cui Dn. Varignon totam suam Mechanicam inaedificavit, adeoque in praefatione dicit sibi plane ignotum fuisse, quod jam antea Dn. Varignon eo principio usus esset. In septimo capite IV. Partis horum Elementorum de Curva Catenaria agens tandem per nescio quas ambages ad notissimam proprietatem devenit, qua fit ut $\frac{\int y ds}{s}$ = Maximo, sumendo s pro Curva aut longitudine Catenariae et y pro applicata, et tandem concludit: Mais je laisse cecy aux combinaisons integrales des Algebristes. Quasi hoc indignum esset, cui se applicaret.

In Commentariis 1705 pag. 254 extat Specimen Dn. de Lagny quod inscribit: Supplement de la Trigonometrie contenant deux Theoremes Generaux sur les Tangentes et Secantes des angles multiples, ubi duas formulas generales exhibet pro Tangentibus et Secantibus conformes iis quas in Actis 1706 Mense Jun. dedi, antequam Commentarii comparuissent. Is multum insudat in laudandis suis theorematis, atque miratur quod nemo adhuc extiterit qui in ea inquireret, putatque Calculi prolixitatem et difficultatem ab hac inquisitione Geometras absterruisse, aut forsan quod existimarent ex data relatione sinuum tangentes et secantes ultro fluere, sed tandem concludit: Mais, dit-il, il y a une difference infinie entre trouver de cette maniere la Tangente et la Secante d'un arc en particulier, et trouver le rapport general de Tangentes et des Secantes à l'infini: et si l'on cherchoit ce rapport par celui des sinus, on tomberoit necessairement dans des formules d'incommensurables qui n'auroient rien ni d'elegant ni de praticable, et paulo inferius: tout cela, dis-je, fait voir ordinairement que la methode des cordes n'a rien de commun avec celles des Tangentes et des Secantes. Interim tamen has ipsas formulas deduxi etiam ex formulis sinuum, quas in Actis 1703 demonstratas dedi, et ostendi in epistola ad Dn. Varignon expressionem Tangentium et Secantium omnino elici debere ex expressione sinuum, nullasque inde formulas irrationales nihil elegantiae et facilitatis prae se ferentes, ut asseveranter Dn. Lagny dixerat, prodire. Adeoque demonstravi inventionem Tangentium et Secantium non nisi Corollarium generalis expressionis sinuum, contra quod Dn. Lagny putabat.

Cl. noster Bernoullius nunc optime valet, Tibique, Vir Excellentissime, pro nuncupato de valetudine sua voto gratias agit maximas, et Tuae Ampl. inconcussam sanitatem et omnigenam felicitatem apprecatur, cui et meum adjungo votum pro Ampl. Tuae incolumitate gratiasque rependo humillimas pro sua insignissima erga me humanitate et benevolentia, cujus tot luculenta hactenus jam dedit testimonia, quae quoad vivam, altae menti reposta manebunt. Dn. Bernoulli nuperrime mihi retulit Acta Societatis Berolinensis, cui Societati tanto cum splendore praesides, edi debere, et Ampl. Tuam mihi quoque libertatem concedere quaedam mea specimina eo sum-mittere iisdem inserenda; hoc tanto beneficio utar cogitando inter Parisiensis Academiae Commentarios non omnia Schediasmata tam exquisita continere inventa, vitio mihi eo minus versum iri, si Helvetius ego, quos Galli despicere saepissime solent tanquam crasto aëre natos, tenuia admodum inventa communicem. Dn. Gregorius de Problemate astronomico inveniendi stationes Planetarum agit in sua Astronomia et non nisi orbitas circulares et concentricas in eodem plano jacentes adhibuit, quod est facillimum: ego vero Problema generalissime solvi, supponendo orbitas Ellipticas ad invicem in datis angulis indicatas, Planetasque circa communem focum areas describere temporibus proportionales, quod Problema solutum ad Ampl. Tuam mittam, ut obsequium meum utcunque testarer, qui me nunquam non exbibebo etc.

Basileae 19. Martii 1707.

XXVII.

Hermann an Leibniz.

Postremae tandem Cl. Abbatis Fardellae litterae mihi felicem negotii nostri exitum nuntiant, de quo Amplitud. Tuam illico certiorem esse faciendam officii mei esse putavi.

Nullus dubito quin Ampl. Tua scriptum meum circa stationes Planetarum acceperit a Dn. Naudaeo, cui id summiseram Ampl. Tuae tradendum. In eo Schediasmate orbitas Ellipticas projeci in Circulares, quod omnino fieri potest, si nulla inclinationis orbitarum ratio habeatur; verum si et inclinationes considerentur quales astronomi tradunt, ambae orbitae hac ratione non semper in Circulares transmutari possunt eo projectionis genere, quod in Schediasmate explicui, sed una existente circulari post projectionem contingit fere in omnibus Planetis ut altera sit Elliptica. Hoc tamen methodo meae nihil plane derogare potest, cum in orbitis ellipticis aeque succedat ac in Circularibus. Modus Projectionis quo usus sum, me quoque ad infinitas lunulas ellipticas manuduxit, omnes perfecte quadrabiles, et ad alia non inelegantia. Sit exempli gratia ABDE (fig. 53) Ellipsis quaecunque, cujus diametri conjugatae AD, EB, ex centro Ellipsis C per medium lineae AB, ut F, ducatur linea CFG factaque CF = GF diametris conjugatis AB, GC describatur ellipsis altera AGBC, erit lunula elliptica AHBGA aequalis Triangulo rectilineo ACB: immo omnia quae in lunulis Hippocraticis inventa sunt de partialibus quadraturis, ad lunulas quoque ellipticas analogice accommodari poterunt.

Marchionis Hospitalii Opuscula postuma et Patris Renoulti Algebra brevi lucem publicam aspicient. Dn. Stancarius mihi scripsit Bononia, Cl. Manfredum omnia quae in Actis Erudit. Lips. sine demonstratione extant specimina, suis demonstrationibus firmata esse editurum idque opus sub prelo jamjam sudare. An scopum autem attigerit, ipsum opus manifestabit; oportet saltem ut non tantum in Calculo differentiali sit versatus, sed ut multa quoque integralis calculi arcana ad manus ipsi sint. Hisce vale etc.

Basileae 11. Maji 1707.

Es folgt hier ein Brief Hermann's, datirt Basileae 18. Maj. 1707, der nur Mittheilungen über seinen Abgang nach Padua enthält.

XXVIII.

Leibniz an Hermann.

Scriptum Tuum elegans de Stationibus Planetarum Dn. Naudaeus mecum communicavit; inseretur Commentariis nostris, quorum specimen hoc anno prodibit, ut spero. Interea non sine laetitiae sensu literas Tuas accepi, quibus rem Patavinam confectam narras: eo nomine et Tibi et Venetis gratulor. Scripserat ad me Cl. Fardella ante septimanas aliquot rem conclusioni vicinam esse, atque affectam: nunc confectam gaudeo. Quod in literis Tuis de projectionibus Ellipsium scribis, id in postscripti modum adjici poterit priori Schediasmati Tuo. Aliqua fortasse nostris in Actis extantia Cl. Manfredus demonstrabit; an omnia, dubito; interim fatendum est Inventa demonstrare plerumque plus laboris requirere, quam ingenii, praesertim cum demonstrationes non peculiari quadam arte commendantur. Doce, quaeso, quis Dn. Stancarius Bononia ad te scribens. Differentialem calculum scis a me non aliter distingui a summatorio, quam multiplicationem a divisione, cum alter sit regressus alterius. Fatendum ergo est calculum, in quo differentialibus, seu infinitesimalibus utimur, adhuc esse imperfectum quemadmodum et...... Eximium Virum Dn. Bernoullium nostrum rogo a me salutes. Interea rem ex sententia gere, et me ama. Dabam Berolini 26. Maii 1707.

P. S. Has literas scripseram Berolini, sed distractus expedire intermiseram; nunc reversus domum inter schedia mea repertas absolvo, Tibique negotium Patavinum confectum gratulor. Nam rem in Senatu potentissimae Reipublicae conclusam ex voto, eximius Abbas noster mihi significavit. Ejus certe indefessae diligentiae optatus rei exitus debetur. Ego Deum precor, ut Tibi eam evocationem faustam et felicem et in publicum fructuosam esse jubeat. Dabam Hanoverae 16. Junii 1707.

Ingeniosissimi Bernoullii nostri tussis me male habet, et in metum conjicit. Rogo, ut eum officiosissime a me salutes, horterisque ad valetudinis curam. Si tussis ab acredine humorum orta est, aquosa et diluentia opponenda censerem. Nullas unquam a Dn. Iselio literas vidi.

XXIX.

Leibniz an Hermann.

Cum proximo cursore vix domum reversus ad Te scriberem, nondum Tuas binas acceperam, quae apud amicum interim cum aliis quibusdam ad me destinatis hic latuerant; priores datae sunt 19. Martii, posteriores decimo octavo Maji die. De rebus Marpurgensibus nihil dico, Patavina confecta, unde saltem major fama et plausus. Cl. Fardellam diu ex gravi morbo decubuisse, interim didiceris; et rerum Academicarum curas distulerant graviores, quibus potentissimae Reipublicae Senatus premebatur. Suaserim ut non magnopere formam evocationis cures, sufficit decretum in Senatu factum, et a Secretario missum; sed dependebit res ab exemplis aliorum in Academiam Patavinam evocatorum, nam si aliis missae sunt literae evocatoriae Excellentissimorum Reformatorum, nec Tibi credo negabuntur.

Gratissimum est, quod nonnihil considerasti Parentianas meditationes, quae vereor ne sint plenae paralogismis, id enim suspicor ex illa gloriolam captandi aviditate, quam praefatione Elementorum suorum prodit. Itaque, si quando Tibi attentius in haec Elementa inspicere vacabit, judicium Tuum intelligere gaudebo. Dn. Lagny et alii Galli, Varignonio excepto, per ambages adhuc quaerunt, quae Tibi nobisque sunt explorata. Tua de Stationibus planetariis meditatio nostris Miscellaneis inseretur, una cum additione ex literis ad me Tuis. Ea res occasionem mihi dedit curandi, ut Te quoque Societas nostra potiatur.

Operae pretium est Harrioti theorema demonstrari, nam multa inde egregia colligi poterunt. Exempli causa, sit quaecunque formula habens meras radices falsas $10x^n + 11x^{n-1} + 12x^{n-2} + 13x^{n-3} +$ etc. et multiplicetur per $20x - 21$, prodibit

$$\begin{array}{llllll} 10.20x^{n+1} & + 11.20x^n & + 12.20x^{n-1} & + 13.20x^{n-2} & + 14.20x^{n-3} \\ & - 10.21 & - 11.21 & - 12.21 & - 13.21 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} + 15.20x^{n-4} & + 16.20x^{n-5} & \\ - 14.21 & - 15.21 & \text{etc.} \end{array}$$

Cum ergo primus terminus producti sit affirmativus, et ultimus negativus, et per Theorema Harrioti non nisi una mutatio signorum in producto esse possit, sequitur, uno ex terminis producti existente affirmativo, omnes praecedentes esse affirmativos, et uno ex iisdem existente negativo, omnes sequentes esse negativos. Hinc quantitates $\frac{11}{10}$, $\frac{12}{11}$, $\frac{13}{12}$, $\frac{14}{13}$, $\frac{15}{14}$, $\frac{16}{15}$ etc. eam inter se habitudinem habebunt, ut si una, velut $\frac{14}{13}$, sit major quam $\frac{21}{20}$, etiam praecedentes, velut $\frac{13}{12}$, sint majores vel saltem non minores quam $\frac{21}{20}$. Ergo $\frac{13}{12}$ non potest esse minor quam $\frac{14}{13}$. Et cum eaedem quantitates similiter eam inter se habitudinem habeant, ut si una, velut $\frac{14}{13}$, sit minor quam $\frac{21}{20}$, etiam sequentes, velut $\frac{15}{14}$, sint minores, vel saltem non majores quam $\frac{21}{20}$, ergo $\frac{15}{14}$ non potest esse major quam $\frac{14}{13}$. Et generaliter, fractio prior non potest esse minor fractione posteriore. Jam si radices formulae $x^n + 11x^{n-1} +$ etc. (posito $10 = 1$) ponantur esse $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$, patet fore $11 = a + b + c +$ etc. et $12 = ab + ac +$ etc. et $13 = abc +$ etc. et $14 = abcd +$ etc. Et ita porro. Unde nascetur theorema generale: Fractionem ortam ex summa combinationum divisa per summam combinationum proxime inferiorum non posse esse minorem fractione alia similiter facta ex combinationibus altioribus. Nempe fractio ex summa binionum, divisa per summam unionum, non potest esse minor quam fractio ex summa ternionum divisa ex summa binionum, et ita porro. Hinc etiam productum ex summa unionum in summam ternionum non potest esse major quadrato ex summa binionum, et ita similiter in aliis. Ita elegantia circa combinationes ex Harrioti theoremate supposito derivabuntur. Quodsi aliunde talia de combinationibus deriventur, hinc demonstrari poterit Theorema Harrioti; sed non sine ambitu. Praestabit tamen aliquam ejus demonstrationem haberi, quam nullam, qua non sine magno Scientiae defectu hactenus caremus.

Insigni Viro Dn. Abbati Fardellae literis recta in Italiam missis respondi; praesentes an Te reperturae adhuc sint Basileae, non satis scio. Iter felix faustumque apprecor; non dubito, quin pro Tua prudentia evitaturus sis, quicquid hominibus invidis et in Te curiose inspecturis occasionem criminandi dare possit circa ea, quae Italos Helvetiosque Tuos dissociant. Vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 24. Junii 1707.

P. S. Dn. Naudaeus suspectum habet amici Tui libellum, quod in eo dissimulentur, quae vestros a remotioribus quibusdam distingunt.

XXX.

Hermann an Leibniz.

Gratias ago quod Schediasma meum de Stationibus Planetarum prorsus indignum non judicet, quod Commentariis hujus anni inseratur; cogitabam plura addere et ad speciales casus applicare, ast vocatio mea Patavina ab aliquo tempore aliaque negotia ita me distraxerunt, ut id exequi aut geometrica tractare nondum vacaverit. Cl. noster Bernoullius bene valet liberatusque est ab ea tussi, quae eum sat diu vexaverat; decem fere elapsi sunt dies, ex quo ad Fabarias thermas profectus sit; eo perendie proficisci pariter constitui et abhinc postea iter meum per Italiam Patavium usque prosequar. Valdopere optarem ut Ampl. Tuae aliqua in re utilis esse possem, quo gratum ad minimum animum quadantenus comprobare liceret. De Manfrediano libro specialiora nunc habeo ex titulo qui talis est: De Constructione aequationum differentialium primi gradus Autore Gabriele Manfredio Phil. Doct. Bononiensi, Philosophicae quae in Patria est Academiae Socio ordinario, in 4, Bononiae Typis Constantini Pisarii. Dn. Victor Franciscus Stancarius, egregius Astronomus et Geometra Bononiensis in Observatorio Marsiliano habitans, hunc Gabrielem Manfredium tamquam primum Italiae Analystam mihi plurimum laudavit in suis literis. Ad discessum me paro qui erit futura die Veneris, ne tempus usui thermarum favens transeat, tametsi literae vocatoriae publico sigillo munitae, quarum eximius Abbas spem mihi facit proxime accipiendarum, nondum ad me pervenerint. Multis negotiis nunc distractus epistolae filum abrumpere cogor, rogans ut Ampl. Tua me quod hactenus fecit, porro amet etc.

Dabam Basileae 6. Julii 1707.

XXXI.

Leibniz an Hermann.

Scribit ad me eximius Dn. Fardella noster, negotium Tuum esse confectum, nisi quod a Te ipso difficultas mota est circa formam invitationis; negat autem unquam factam etiam aliis egregiis viris aliunde vocatis, ut ante adventum Ducale diploma cum publico sigillo daretur, factum tamen in Tui gratiam illud singulare, ut exemplum decreti Senatus a Cancellario Ducali signatum ad Te mitteretur. Quae cum ita sint, suaserim ut nullam amplius moram in Te esse maturata profectione ostendas. Equidem dum Te ad discessum hortor, commodis ipse meis obloquor; quo magis enim a nobis removebere, eo minus potero praeclaris Tuis meditationibus juvari et erudiri. Ego tamen publicam et Tuam utilitatem meae praefero, quanquam sperem non ideo minus frui interdum literis Tuis et meditationibus, quas etiam urgebis haud dubie intentius, ubi res in tranquillo collocatas habebis. Si quid interim vel Tuum Tibi ingenium, vel aliorum commercium lectiove suggessit, fac quaeso, ut etiam ad me inde aliquid perveniat, et meritissimum Dn. Bernoullium nostrum a me saluta, quem nuperas meas Tecum recepisse non dubito.

In Tuo Schediasmate de Stationibus Planetarum exprimendo, alicubi notatio mutabitur. Soleo ego observare, ut proportiones exprimam per modum aequationum et fractionum hoc modo $a:b = l:m$ seu $\frac{a}{b} = \frac{l}{m}$, neque alia peculiari notatione opus est veluti $a.b :: l.m$. Nonnulla etiam alia hujusmodi inposterum observabuntur in Miscellaneis Berolinensibus uniformitatis causa. Multiplicationem etiam non soleo exprimere crucibus, sed simplici adscriptione velut $a + b, l + m$ vel etiam $(a + b)(l + m)$ idque idem est mihi quod $\overline{a+b} \times \overline{l+m}$. Commata autem vel parentheses pro vinculis adhibere soleo; parum quidem in his momenti, praestat tamen commodissima eligi et constanter servari.

Diu est, quod non intellexi, quid Galli agant in Analytica, aut alioqui in Mathematica. Bello gravissimo nonnihil refrigescere has de studiis curas, facile crediderim, et tamen novam Societatem Regiam Monspelii conditam intellexi. Quod superest, iter faustum felixque precor. Dabam Hanoverae 21. Julii 1707.

XXXII.

Hermann an Leibniz.

Humanissimae Tuae 24. Junii uno tantum die ante discessum ex Patria pervenerunt, ad quas si serius responsio mea quam par est procedit, veniam me impetraturum spero a Tua Benevolentia, si quidem nulla alia morae causa extitit, quam itineris negotia multifaria et ipsa peregrinatio, quae ob potionem aquarum Fabariensium longior nonnihil accidit et huc usque vere ab octavo superioris Mensis die perduravit; nam 12^{mo} hujus Patavii appellens et Clariss. nostrum Abbatem in aedibus suis frustra quaerens, illico me Venetias, ubi commorari illum intellexi, concessi. Is pro effusissimo suo erga me amore non solum humanissime me excepit, ad Excellent. Reformatores studii Patavini salutatum deduxit, ipsumque Diploma ducale mihi procuravit, sed etiam nihil intestatum reliquit, quod vel ad augendam famam meam vel ad firmandam eandem conducere poterat. Clarissimus hic Vir optima nunc fruitur sanitate, ex quo vitam mire sobriam instituere ipsumque Cornarum imitari aliquatenus coepit; vegeto enim nunc est corpore et fere indefatigabili, cum contra langueret antehac et variis corporis morbis affligeretur. Maximo meo solatio video eum benignissime de Protestantium sentire religione, eorumque libenter amicitiam colere qui eidem sunt addicti et caeterum bonis moribus exornati. Ut verbo concludam, invenio in Persona eximii nostri Fardellae non tantum Virum Doctissimum, sed etiam Pium ab omni superstitione remotum, erga quemvis officiosum et amicis addictissimum, adornatum festivo ingenio, sed simul acuto, justo, solidioribusque tantum studiis dedito. Quantum ad modum evocationis is nihil officere potest negotio, et si quam difficultatem super ea re Cl. Abbati movi, id potius egi ut Parentum voluntati morem gererem, quam ut eidem serio insisterem, quod satis ex eo patet, quod iter meum ingressus sim non expectata Cl. Fardellae responsione.

Quantum ad Dn. Parent attinet, verum est, pleraque jactabundus profert, verum si obscuritas et confusio libri eximantur, perpauca ipsi remanebunt. Et statim atque ceremonialibus extricatus fuero negotiis, attentius ejus Elementa Mechanica examinare constitui. Eaedem distractiones me pariter impediunt, quominus in ea me immergere queam, quae de theoremate Harriotti annotasti perquam curiosa, haec enim omnia plus otii et tranquillitatis animi requirunt, quam nunc habeo tot visitationibus aliisque tantum non obrutus.

Quod levidense meum de Stationibus Planetarum Specimen non displicuerit, est quod mihi gratuler, sed profecto tale non est, quod mihi ad ingressum in Societatem vestram Regiam viam sternere possit. Unde si quas hac in parte benignas de me foveat cogitationes Ampl. Tua, id pereximiae suae erga me benevolentiae acceptum refero, cui etiam Celeberr. nostri Abbatis debeo amicitiam, quovis mihi auro praeferendam.

Habitationem meam, si modo possibile sit, apud amicissimum hunc Virum figam, Professionem autem non nisi circa medium Novembris auspicari potero; ad quod orationem componam circa utilitatem et praestantiam matheseos, imprimis vero praestantissimae Tuae Analyseos differentialis.

Nonnullos his in oris inveni calculi differentialis addiscendi cupidos, ut adeo sperem me occasionem habiturum esse praecellentem methodum Tuam in Italia etiam disseminandi.

Plura non habeo; caeterum Ampl. Tuam etiam atque etiam rogandam duco, ut, si qua in re ad ejus officia me idoneum judicabit, mandatis suis me exhilarare non dedignetur etc.

Venetiis 19. Augusti 1707.

XXXIII.

Hermann an Leibniz.

Paucae elapsae sunt septimanae, ex quo humanissimas et amoris plenissimas literas*) ab Amplitudine Tua in nova hac Musarum sede laetus accepi, utpote ex quibus perennem Tuam benevolentiam et animi erga me propensionem tam conspicuis mihi consignatam testimoniis perspicere licuit.

Cl. Manfredius ab aliquo tempore suum tractatum de Constructione aequationum differentialium primi gradus per Cel. nostrum Guglielminum Bononia huc concedentem mihi transmisit. Libri scopus est, ut praecipua circa methodum inversam tangentium inventa in Actis Eruditorum et Commentariis Parisiensibus passim sine demonstratione extantia dilucidet et arcana eorundem retegat; et in multis sane operam minime lusisse mihi videtur: modo imprimis egregio hujus differentialis aequationis $-\frac{ydy}{dx} = x - 2\sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}$ hanc integralem invenit $\overline{\frac{5}{2}x - \sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}}$ in $\sqrt[5]{\frac{1}{2}a^4x + a^4\sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}} = aa$, quae proin est aequatio pro curva omnes Parabolas ad eundem axem exstructas parametrosque habentes aequales distantiis verticum a dato in axe puncto ad angulos rectos trajiciente, et hoc problema reducit ad constructionem aequationis differentialis $aady = bqdx + pydx$, in qua q et p utcunque dari intelliguntur per x, quo casu invenit $ay = z\int\frac{bqadz}{pzz} \pm z$, posito $\frac{pdx}{a} = \frac{adz}{z}$. Caeterum curabo, ut quam proxime ipse Manfredii libellus ad Ampl. Tuam deferatur. Quantum ad me attinet, lectionibus meis concin-

---

*) Dieser Brief fehlt.

nandis totus fere incumbo parumque mihi temporis est, quod Geometricis speculationibus impendere possim; sed postquam Professionem hanc meam auspicatus fuero, majus otium mihi affulsurum spero. Plura quae scribam non habeo; idcirco hisce vale etc.

Patavii 13. Octobr. 1707.

XXXIV.

Leibniz an Hermann.

Valde gaudeo res Tuas omnes ex sententia procedere, et doctrinam Tuam sane insignem aestimatores reperisse. Ipse Illustrissimus Abbas Fardella et sibi et mihi plurimum gratulatur, quod commendatio nostra tam bene cessit. Ubi defunctus eris curis et laboribus, quae ingressum novae professionis comitantur, non dubito quin magis magisque....

Quam Dn. Manfredus Tibi misit constructionem aequationis differentialis $aady = bqdx + pydx$, etiam mihi, credo, et Dnn. Bernoulliis non ignota fuit, et memini aliquando de ea cum Dn. Marchione Hospitalio per literas agere. Pluribus etiam diversis modis ad eam perveni, in meis quibusdam memorialibus schedis rem sic concepi: proponatur $dy:dx = z + vy$, posito z et v dari utcunque ex x. Fiat $\log w = \int vdx$, et erit $y = w\int(dx.z:w)$; sed haec nunc diligentius introspicere non vacat. Haec amplius extendi magnae utilitatis foret.

Pervenit ad me ex Anglia nova Algebra ex veteribus Newtoni praelectionibus concinnata; sunt in ea non tantum utilia exempla, sed et praecepta quaedam peringeniosa ad investigandos divisores, etsi enim praxi nonnihil sunt perplexa, ingenium tamen indicant. Quod superest, vale et me ama. Dabam Hanoverae 16. Decemb. 1707.

XXXV.

Hermann an Leibniz.

Professionem meam auspicatus sum die 27. Decembr. superioris oratione de Utilitate et Praestantia Matheseos, imprimis ingeniosissimae Tuae analyseos, cujus amatores nonnullos his in oris reperi; omnia satis feliciter, Deo sit laus, successerunt. Nunc in explicandis geometriae elementis occupor.

Optime scio, a Te etiam aequationis differentialis $\frac{dy}{dx} = z + vy$ aeque ac Dn. Dn. Bernoulliis solutionem datam olim esse, quam Dn. Manfredius in suo libello construere annisus est, qui omnem lucem ex analysi Dn. Joh. Bernoulli in Act. Lips. 1697 pag. 115 mutuatus est. Nam si ponatur $y = mn$ vel $dy = ndm + mdn$, aequatio $dy = zdx + vydx$ mutabitur in hanc aliam $ndm + mdn = zdx + mnvdx$; ergo si fiat $mnvdx = mdn$, erit $nvdx = dn$ vel $\frac{dn}{n} = vdx$, hoc est $ln = \int vdx$ et $ndm = zdx$ vel $dm = \frac{zdx}{n}$ et $m = \int \frac{zdx}{n}$, unde $y = mn = n \int \frac{zdx}{n}$. Quae eadem est cum Tua.

Nuperrime in Acta Erudit. 1698 pag. 471 incidens, ubi Cl. Joh. Bernoullius dicit, generalem se invenisse methodum secandi ordinatim positione datas sive algebraicas sive transcendentes curvas in angulo recto sive obliquo, invariabili seu data lege variabili; vires pariter meas in hoc Problemate tentare volui, quali autem successu Tuum, Vir Illus., esto judicium.

Sint duae curvae AB, Ab (fig. 54) positione datae sive algebraicae sive transcendentes, sitque Bb ad utramque normalis. Ex punctis B et b ad axem AE ducantur, si placet, perpend. BE, be, sintque $Ae = x$, $eb = y$, $Ee = Cc = dx$, $bc = dy$, differentiale vero eb, quatenus applicata est curvae Bb, est $BD = dY$; unde cum Bb sit perpendicul. ad ACb, erit $\overline{Db}^2 = BD \times DC$, hoc est $-dx^2 = dydY$ vel $\frac{dY}{dx} = -\frac{dx}{dy} \ldots A$. Sit jam quaecunque aequatio $aady = xxdx + yydx \ldots. B$, vel integrando $aay = \frac{1}{3}x^3 + \int yydx$ vel $aa = \frac{x^3}{3y} + \int \frac{yydx}{y}$ (aut ponendo $\int yydx = p^3$) $= \frac{x^3}{3y} + \frac{p^3}{y} \ldots.. C$. In aequatione B substituantur loco dy et dx proportionalia $-dx$, dY ex aequatione A, eritque $-aadx = xxdY + yydY$ vel $aa = -\frac{xxdY}{dx} - \frac{yydY}{dx}$, unde $aa = \frac{x^3}{3y} + \frac{p^3}{y} = \frac{-xxdY - yydY}{dx}$ vel $x^3dx + 3p^3dx = -3xxydY - 3y^3dY$, quae est aequatio differentialis ad curvam Bb. Eadem ratione si lineae AB, Ab forent logarithmicae diversarum subtang., curva eas normaliter secans inveniri posset, supponendo omnes logarithmicas per commune quoddam punctum transire et ad eandem asymptotam esse constructas, nam ex natura logarithmicae est $ydx = ady$ vel $\frac{ady}{y} = dx$, unde $aly = x$ et $a = \frac{x}{ly}$. In priore ponantur loco dy, $-dx$ et loco dx, dY, eritque $-\frac{adx}{y} = dY$ vel $a = \frac{ydY}{-dx} = \frac{x}{ly}$; unde $ydYly = -xdx$, ut habet Dn. Bernoullius in supra citato loco.

Haec sunt quae mihi in mentem venerunt, quae autem propter alia negotia, quantum oporteret digerere nondum vacavit; plura non addo nisi quod sub auspiciis hujus anni, ejus decursum et finem ita felices Ampl. Tuae optem, ut nihil desit, quod ad omnimodam animi tranquillitatem facere possit, et tales periodi frequentes et prosperae ei recurrant. Vale etc.

Patavii die 12 Januarii 1708.

XXXVI.

Leibniz an Hermann.

(Im Auszuge)

29 Febr. 1708.

Perplacet Analysis Tua pro problemate inveniendi lineam, quae curvas ordinatim positione datas in angulo datae legis secet. Tecum incipiens ita pergo: (1) $dv:dx = -dx:dy$, quae est aequatio generalis; si jam aequatio specialis ad curvam AC sit $dx = ady:y$, fiat $dv = -aady:yy$ et $v = aa:y$. Sed si aequatio specialis sit (2) $aady = xxdx + yydx$, ubi simul concurrunt x, dx, y, dy, ideo ut tollamus ambas x et dx, sumamus dx esse constantem et differentiando aeq. 2 fit (3) $x = aaddy - 2ydydx, :2dxdx$, unde per aeqq. 3, 2, 1 tollendo x et dx supererit aequatio, in qua habebitur dv per ddy, dy et y adeoque per affectiones unius solius indeterminatae; quod mihi melius videtur, quam unam indeterminatam per plures determinari. Sed possumus etiam adhibere novam aequationem generalem, nam differentiando aequ. 1 prodibit (4) $ddy = ddvdxdx:dvdv$. Unde haberi potest aequatio, in qua extent solum ddv, dv, dy, y. Quin potest res tandem reduci ad aequationem differentialem ordinariam primi gradus, qua soluta habeatur quaesitum.

Mitto excerptum ex Arithmetica universali Neutoni de modo investigandi divisores unius aut duarum dimensionum. Optem res produci ad plures dimensiones.

XXXVII.

Hermann an Leibniz.

Paucas ante septimanas humanissima Tua epistola ab Ill. Dn. Abbate Fardella mihi reddita summopere me exhilaravit, utpote ex qua prosperam Tuam valetudinem laetus intellexi atque pro solito prolixissimae Tuae erga me benevolentiae luculentissima collegi testimonia, non tantum quod elegantem Newtoni methodum pro inveniendis divisoribus variarum formularum algebraicarum ex Anglica quadam Algebra recens typis edita transcriptam mecum benigne communicare voluisti, sed etiam quod Rev. P. Horatio Burgundo tam honorifice citra meritum meum commendare, quae tua erga me est humanitas summa, non dedignatus est. Primo cursore post acceptam exoptatissimam tuam de qua loquor epistolam, ad egregium hunc Patrem suam demisi, una cum adjunctis propriis literis, in quibus animum meum de suis quas ad Ampl. Tuam miserat Problematibus aperui, simulque Epicycloidis suae Conicae proportionem ad circulum genitorem addidi, quam paucos post acceptas Tuas literas dies inveneram. De hoc enim epicycloidum genere nemo adhuc quod sciam egit neque ipse Dn. de la Hire in prolixo suo Schediasmate de Lineis Cycloidalibus Commentariis Academiae 1706 pag. 340 sqq. edit. Paris. inserto, ubi de variis tamen Cycloidum speciebus fuse loquitur. Omnes enim reliquae Cycloides ab hac, cujus mentionem feci, conica Cycloide differunt, quod illarum Circulus genitor in eodem semper plano sit cum circulo immoto vel basi, et in hac circulus genitor certo ubique angulo inclinatus sit ad basin, super cujus circumferentia perpetuo incedit. Sit ex. gr. Conus Isosceles ABDCEA (fig. 55), cujus vertex in puncto fixo A elevatus sit supra plano horizontali CFHE altitudine AG. Si hujusmodi conus rotetur circa punctum fixum A, circulus basis coni BDCE movebitur in linea circulari CFHE, punctumque quodvis C in circumferentia CDBE sumtum hujusmodi rotatione epicycloidem describet, cujus circulus genitor erit BDCE inclinatus ad basin CFHE in dato angulo, ut hic obtuso BCH. Ponatur curvam BPF dimidiam esse cycloidem conicam, cujus initium in F et punctum supremum in B. Sintque radius $CG = a$, $CQ = QB = b$. Sinus compl. inclinationis plani BDCE super $CFEH = c$ et sinus totus $= r$. Dico generaliter esse Epicycloidem BPFCB ad semicirculum genitorem BDC ut $a + 2\sqrt{aa \pm \frac{2abc}{r} + bb}$ ad a; et longitudo BPF. Diamet. $BC :: 2\sqrt{aa \pm \frac{2abc}{r} + bb}$ ad a. Ponitur in signo radicali $\pm \frac{2abc}{r}$ ad exhauriendos duos casus, quibus subesse potest problema; vel enim angulus BCH mensura inclinationis duorum planorum BCE et CFHE est obtusus, quo casu ponendum dumtaxat esset $+ \frac{2abc}{r}$, vel acutus, et tunc haberetur $- \frac{2abc}{r}$. Jam si ponantur ambo circuli, genitor BDCE et Basis CFHE, in eodem plano esse, erit $c = r$, unde $\sqrt{aa \pm \frac{2abc}{r} + bb} = \sqrt{aa \pm 2ab + bb} = a \pm b$. Ergo Epicyclois BPFCB ad $BDCB :: 3a \pm 2b . a$. Nempe ut $3a + 2b$ ad a, si genitor moveatur in convexa, et ut $3a - 2b$ ad a, si in concava baseos circumferentia rotetur circulus BDCE. Ut jam dudum demonstratum habetur; haecque in eum solummodo finem recenseo ut consensus patescat generalis meae solutionis ad peculiares casus applicatae cum iis, quae jam antea geometris innotuerunt.

Atque haec cum P. Burgundo communicaveram in mea epistola, ad quam hoc mane responsorias humanitate plenissimas ab eodem accepi, in qua dolet quod sufficiens tempus sibi non suppetat ad excolenda studia mathematica, quibus alias plurimum se delectari scribit. Interim tamen diffiteri non possum me pudore admodum fuisse suffusum, uti apertam Ampl. Tuae epistolam ad eundem Patrem legissem, in qua encomiis me ornatum videram quae mihi nequaquam convenire possunt, sed talibus viris melius tribuerentur, quorum discipulum me profiteri oporteret.

Verum utique est, Analysin meam pro invenienda linea positione datas curvas in constante angulo secante ulterius promoveri posse, et revera in similes praeter propter cogitationes incideram iis, quas Ampl. Tua mihi aperuit paulo postquam praecedentem meam epistolam abhinc demisissem; nam eam quam in dicta epistola subjiciebam analysin nimium deproperando perficere ob temporis angustiam nequiveram. Newtoni Regulam pro Divisorum inventione nondum quantum satis est examinare vacavit, interim tamen licet prolixa nonnihil sit elegans admodum mihi videtur, adeo ut omnino operae pretium mihi videatur in ejusdem demonstrationem inquirendi. Dn. de Lagni in Commentariis Academiae Regiae Scientiarum Paris. 1706 plura egregia habet circa inventionem valorum aequationum aut ut exactius loquar, circa approximationes radicum etc.

In elementis Geometriae tradendis multum in eo sollicitus fui, ut omnia inutilia, quorum multa in Euclidaeis elementis occurrunt, praeterirem, et Geometriam elementarem quanta fieri posset brevitate pertractarem; resque mihi ex voto successit, cum eandem jam ab aliquo tempore absolverim et tamen palmaria Archimedis theoremata quae Euclides non attigit, simul quoque demonstrarim. Atque haec sunt, Vir Illust. quae ad humanissimam Tuam epistolam reponenda habui. Vale etc.

Patavii d. 19. Apr. 1708.

XXXVIII.

Leibniz an Hermann.

Nuperrime per brevitatem temporis respondere non licuit. Nunc gratias ago, quod communicasti, quae Tibi cum R. P. Horatio Burgundo acta, cujus non inelegans meditatio a Te perfici meruit.

Utile erit, si Newtoni regulam divisorum examines. Reperi inter veteres meas schedas aliam rationem, quae ad praxin videtur commodior. Aequatione praeparata (sublatis scilicet ex aequatione irrationalibus et fractionibus) constat, si radicem rationalem habeat, velut $x + r$, fore r unum ex divisoribus ultimi termini aequationis datae. Et apud Schotenium jam habetur, ut ex pluribus divisoribus ultimi termini eligas qui succedere possit, posse augeri vel minui radicem pro x (verb. gr.) ponendo $x = y - n$, si jam ....

aequatio fuisset $10+11x+12xx+13x^3+14x^4+x^5$, si placeret fieret ultimus novae $10+11n+12nn+13n^3+14n^4+n^5$, cujus divisorum is, qui succedere debet. Sit (r) porro radix novae aequationis, erit $y=n+r$, ergo $(r)=-n+r$ seu $r-(r)=n$. Itaque seligendi sunt ex divisoribus illi r et (r), quorum differentia numerus assumtus n; qui cum variari possit, facile determinabuntur divisores succedentes. Atque haec quidem jam habentur, sed mihi occasionem dedere longius procedendi. Esto formula aequationem dividens secundi gradus, velut $xx+qx+r$, patet rursus r fore unum ex divisoribus ultimi termini aequationis datae. Faciendo ergo $x=y-n$, debet rursus (r) esse unus ex divisoribus ultimi termini novi $+10-11n+12nn-13n^3+14n^4-n^5$, sed eundem valorem substituendo in divisore formulam dividente, formula dividens novam aequationem fiet: $yy-2ny+nn+qy-qn+r$, ergo $nn-qn+r=(r)$ seu $(r)-r,:n=n-q$. Unde patet (r) et r, qui succedere possint, eos esse, quorum differentia vel summa divisibilis per n, et proinde cum n pro arbitrio variari possit, facile discerni, et hoc cujuscunque gradus sit formula dividens. Hinc vero invento r et (r) succedentibus facile habebitur q, nam erit $q=n-((r)-r,:n)$. Eodem modo si divisor sit $x^3+pxx+r$, facile habebitur r, q, p, si possibiles sunt: nam r et (r) seligentur ita ut $(r)-r$ sit divisibilis per n, sed q, p habebuntur ex aequatione $n^3-pnn+qn-r=(r)$, quia n variantibus utcunque manent p et q, et ita tot semper haberi possunt aequationes, quot quaesitae. Quod si inventis valoribus res non succedit, impossibilis erit talis divisor rationalis; plerumque autem impossibilitas ex solis r et (r), variando (r) cum n, detegetur. Interim Newtoniana quoque methodus evolvi merebitur.

Elementa Geometriae multas ob causas aliter adhuc quam in Euclide extant demonstrari mererentur. Quod superest, vale et me ama. Dabam Hanoverae 11. Maii 1708.

XXXIX.

Hermann an Leibniz.

Ad humanissimas Amplitudinis Tuae literas undecimi Mensis elapsi responsionem hucusque distuli, quod exspectandum duxerim, donec mihi Schediasma illud Newtonianum methodi divisores inveniendi, quod a Tua erga me benignitate antehac acceperam et paulo post cum nobili quodam Venetiano, eclesiastici tamen ordinis, qui studiis mathematicis maximopere delectatur, communicaveram, restitutum esset, quod nonnisi paucos ante dies contigit, et in rei mysterium accuratius inquirere possem; id autem tanto cum successu feci, ut postera die sine multo labore totum arcanum mihi detexisse videar, quod an ita sit, penes Ampl. Tuam judicium esto. Sit formula generalis, cujus divisor quaeritur $Ax^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3}$ etc... B, in qua litera B designat terminum, in quo x non reperitur. Jam si haec formula divisibilis est per binomium quoddam $ax \pm b$ (ubi a est divisor aliquis ipsius A), erunt quoque omnes formulae resultantes ex substitutione cujusvis quantitatis loco x in formula proposita, divisibilis per omnia binomia oriunda ex simili substitutione valorum x, in binomio $ax \pm b$. Et vice versa si formula dividenda non divisibilis existat per ullum binomium $ax \pm b$, tunc etiam quicquid demum loco x substitutum fuerit utrinque, modo non sit $= 0$, nulla formularum resultantium per suum respondens binomium divisibilis evadet. Quod quia evidens satis est, nulla demonstratione opus habet.

G	H	I	K
f	$Af^m + pf^{m-1} + qf^{m-2}$ etc..B	$\varphi', \varphi'', \varphi'''$ etc.	$af \pm b$
g	$Ag^m + pg^{m-1} + qg^{m-2}$ etc..B	$\gamma', \gamma'', \gamma'''$ etc.	$ag \pm b$
h	$Ah^m + ph^{m-1} + qh^{m-2}$ etc..B	$\delta', \delta'', \delta'''$ etc.	$ah \pm b$
k	$Ak^m + pk^{m-1} + qk^{m-2}$ etc..B	$\varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$ etc.	$ak \pm b$

Unde si in generali formula $Aa^m +$ etc. substituantur loco x termini progressionis arithmeticae G, mutabitur illa in formulas columnae H, divisor vero fictus $ax \pm b$ in formulas respectivas columna K expressas. Adeoque si proposita formula $Ax^m +$ etc. divisibilis sit per divisorem aliquem ut $ax \pm b$, tunc omnes termini columnae H divisibiles erunt per suum cuique respondentem terminum columnae K. Divisorem $ax \pm b$ fictum nomino, quia suppono nondum constare, quid pro a et b poni debeat, ut divisio succedat. Termini columnae I respondentes e regione formulis columnae H divisores sunt formularum respectivarum hujus columnae H, hoc est $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ divisores sunt formulae $Af^m + pf^{m-1}$ etc. et sic in reliquis. Quibus positis, sequitur (1) quod cum termini seriei G progressionem arithmet. descendentem, si placet, constituant, series K similiter progress. arithmeticam efficiat, cujus differentia sit differentia progressionis G per a seu divisorem aliquem ipsius A multiplicata. (2) Si inter divisores columnae I adsint termini ut $\varphi', \gamma', \delta'$ seu $\varphi', \gamma' \delta''$ vel quavis alia ratione sumti, qui descendendo progressionem arithmeticam componant, cujus differentia sit aequalis differentiae seriei G per divisorem quemvis a coefficientis A altissimi in formula termini multiplicata, respondebunt vel aequales erunt illi termini terminis seriei K, posito quod progressio tam divisorum columnae I, quam terminorum seriei G in infinitum abeat; nempe eo casu φ' vel φ'' etc. respondebit $af \pm b, \gamma', \gamma''$ ipsi $ag \pm b$, et sic porro; vel positis (3) $f = 1$, $g = 0$ et $h = -1$, neglectis reliquis ut k, termini $af \pm b, ag \pm b$, $ah \pm b$ etc. degenerabunt in $a \pm b, \pm b$ et $-a \pm b$, qui proinde in hac suppositione respondebunt divisoribus seriei I, quibus illi $af \pm b$ etc. respondere diximus. Atque ita inveniuntur b cum suis signis, sed habentur etiam valores a; unde habebuntur divisor vel divisores tentandi, cum quibus si divisio non succedat concludi debet, formulam propositam nullum divisorem unius dimensionis habere; cum si quem haberet, is cum aliquo termino progressionis divisorum I, quibus formulas seriei K respondere ostendimus, coincidere deberet contra hyp. Atque in hisce continetur demonstratio methodi Newtonianae pro inventione divisoris unius dimensionis.

Ad explorandum, utrum formula $Ax^m + px^{m-1} + qx^{m-2} +$ etc. .... B divisorem unum pluresve admittat duarum dimensionum, per $axx \pm bx \pm c$ generaliter exprimendos, ubi itaque valores ipsarum a, b et c quaeruntur, in expressione generali divisorum substituendi; factis superioribus substitutionibus terminorum seriei G loco x in proposita formula dividenda, ea transformabitur in totidem alias columnae H; et $axx \pm bx \pm c$ mutabitur in terminos seriei L, quae quidem non componit progressionem arithmeticam, ast detractis terminis illis, in quibus termini seriei G sunt duarum dimensionum, residua in columna M collocata constituunt progressionem arithmeticam descendentem perinde ac in G, a qua tamen in hoc differt, quod progressionis M differentia multiplum b sit differentiae in progressione G. Et si facilitatis gratia in columna M loco f, g, h, k substituantur 2, 1, 0, — 1 etc. aeque ac in columna H, prior M mutabitur in N; in columna vero H quaerantur omnes partes aliquotae cujusvis termini, a quibus subtrahantur vel addantur quadrata terminorum respondentium seriei G per divisorem quemvis a coefficientis A multiplicata; et residua et summae designentur jam per terminos columnae I, quibus antea simpliciter partes aliquotas formularum K denotavimus. Si ergo inter terminos columnae I, quales hoc secundo casu descripsimus, aliqui progressiones arithmeticas forment, hae ipsae progressiones valores literarum b et c determinabunt, quibus in $axx \pm bx \pm c$ substitutis, formulae oriuntur, cum quibus divisiones sunt tentandae. Nam termini progressionum columnae I, si plures sint, vel progressionis, si unica, respondebunt terminis seriei N:

L	M	N
$aff \pm bf \pm c$	$\pm bf \pm c$	$\pm 2b \pm c$
$agg \pm bg \pm c$	$\pm bg \pm c$	$\pm b \pm c$
$ahh \pm bh \pm c$	$\pm bh \pm c$	$\pm c$
$akk \pm bk \pm c$	$\pm bk \pm c$	$\mp b \pm c$

Unde si quem divisorem proposita formula admittat duarum dimensionum, ea necessario coincidere debet cum aliquo termino seriei L, et debitis praeparationibus emerget respondens terminus seriei N; ex quo liquet eos solos divisores tentandos esse, qui eliciantur ex hac columna N, quae valores literarum b et c determinabit; nam cum δ' vel δ'' etc. $=$ c, invenietur $b = \gamma' - \delta'$ vel $\gamma' - \delta''$ etc., subtrahendo ergo in progressione arithmetica columnae I, terminum respondentem termino h vel 0 seriei G a termino proxime superiore respondente ipsi g in eadem progressione G. Terminus vero c est ille ipse terminus progressionis in I, respondens termino h in serie G. Inventis igitur valoribus ex b et c iisque in $axx \pm bx \pm c$ substitutis, oriuntur formulae, per quas divisiones tentari debent. Valor autem ipsius a jam inventione terminorum seriei I determinatus supponitur; unde si ex hujus supposita quantitate in serie I nulla oriatur progressio arithmetica, vel etiam hujusmodi progressiones formulas dent, cum quarum nulla divisio succedat; alius divisor assumendus erit ipsius A atque cum hoc alio divisore a idem ac praecedens processus instituatur, atque ita porro. Unde si adhibitis omnibus divisoribus ipsius A, et cum iis operationibus, quas superius descripsi, institutis, nullae prodeant formulae, cum quibus divisio succedat, iterum concludere licebit, formulam propositam non habere divisorem duarum dimensionum. Quod secundo vult Newtoniana Methodus.

Atque ex hisce principiis jam liquere arbitror, quo pacto divisores altiorum graduum indagari debeant, atque inquisitionis laborem longum admodum futurum esse. Amplitud. Tuae methodus, pro cujus communicatione gratias ago maximas, licet aliis principiis innitatur Newtoniana, mihi quoque usu facilior et expeditior videtur. Eo ipso momento, quo Venetias abierat Cl. Abbas Fardella, epistolam tuam mecum communicabat, ex qua mihi innotuit, Dn. Nicolaum Bernoullium Newtonianas regulas pro inventione divisorum etiam demonstrasse. Cum igitur ejus ratiocinia nondum viderim, gratum mihi esset sciendi num similibus cum meis fundamentis superstructa sit ejus disquisitio; de hoc enim nihil mihi scribit Cl. Joh. Bernoulli. Hisce vale etc.

Patavii d. 12. Julii 1708.

Amicus quidam Venetus, Dn. Joannes Poleni, machinam quandam arithmeticam construxisse dicitur, cujus beneficio multiplicationes et divisiones optime peragi affirmatur, interim machinam ipsam nondum vidi.

XL.

Hermann an Leibniz.

Aliquot jam elapsae sunt septimanae, ex quo humanissimae Tuae litterae cum adjuncto Schediasmate Newtonianae methodi, divisores irrationales inveniendi, mihi redditae sunt. Pro hujus benevola communicatione et innumeris aliis Benevolentiae testimoniis grates persolvo maximas. Laetus insuper intellexi Dn. Nicolaum Bernoullium, Cel. Joh. Bernoullii ex Fratre natu majore Nepotem, magnae spei Juvenem, alterius Methodi Newtonianae consistentis in pervestigandis divisoribus rationalibus ope certarum progressionum, demonstrationem feliciter detexisse, speroque et meam quoque circa idem argumentum demonstrationem ad Amplitudinem Tuam interim pervenisse. Nunc autem altera methodus Newtoni pro inventione divisorum irrationalium, quae satis egregia mihi videtur, evolvenda est. Sit primo aequatio quatuor dimensionum $x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, et factis $\alpha = q - \frac{1}{4}pp$, $\beta = r - \frac{1}{2}\alpha p$ et $z = s - \frac{1}{4}\alpha\alpha$. Ponit n divisorem esse terminorum β et $2z$, deinde sumit k divisorem esse aliquem quantitatis $\frac{\beta}{n}$, si p sit par, vel imparis divisoris dimidium, si p sit impar. Quotum aufert ex

$\frac{1}{2}pk$ et reliqui dimidium vocat l, et posito pro Q, $\frac{\alpha + nkk}{2}$, explorat an $QQ - s$ dividi possit per n, et quoti radix aequalis sit l. Si haec omnia contigerint, ponit $xx + \frac{1}{2}px + Q = \overline{kx + l} \times n^{\frac{1}{2}}$. Haec omnia ita demonstrari posse videntur. Cum sit

$xx + \frac{1}{2}px + Q = \overline{kx + l} \times \sqrt{n}$, erit quadrando

$$\begin{array}{l} x^4 + px^3 + 2Qxx + pQx + QQ = nkkxx + 2nklx + nll, \\ \qquad\quad + \frac{1}{4}pp \end{array}$$

$$\text{vel } \left.\begin{array}{l} x^4 + px^3 + 2Qxx + pQx + QQ \\ \qquad\quad + \frac{1}{4}pp \quad - 2nkl - nll \\ \qquad\quad - nkk \end{array}\right\} = 0$$

$$x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$$

Quae comparata cum aequatione data, dabit quantitates assumtitias Q, h, l, n. Nam $2Q + \frac{1}{4}pp - nkk = q$, vel $2Q - nkk = q - \frac{1}{4}pp = \alpha$, erit $Q = \frac{\alpha + nkk}{2}$; $pQ - 2nkl = r$; vel substituendo valorem ipsius Q, $\frac{\alpha + nkk}{2}$, $\frac{1}{2}\alpha p + \frac{1}{2}npkk - 2nkl = r$; vel quia $\beta = r - \frac{1}{2}\alpha p$, $\frac{1}{2}npkk - 2nkl = \beta$; unde $\frac{1}{2}pkk - \frac{\beta}{n} = 2kl$, hoc est $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = 2l$. Hinc et ex mox subjiciendis constat ratio, cur Newtonus velit, (1) ut n divisor sit communis ipsius β et 2z; (2) ut k divisor aliquis sit ipsius $\frac{\beta}{n}$; (3) cur quotiens $\frac{\beta}{nk}$ subtrahi debeat ex $\frac{1}{2}pk$; et tandem (4) quod residuum duplum sit ipsius l. Porro $QQ - nll = s$ et $QQ - s = nll$, unde $l = \sqrt{\frac{QQ - s}{2}}$. Sed substituendo $\frac{1}{4}\alpha\alpha + \frac{1}{2}\alpha nkk + \frac{1}{4}nnk^4$ loco QQ, proveniet $2\alpha nkk + nnk^4 - 4nll = 4z$, in suppositione quod $s - \frac{1}{4}\alpha\alpha = z$; unde ut haec aequatio dividi possit per n, oportet ut 4z quoque divisibile sit per n; sed super ostensum est β quoque divisibilem fieri debere per n, adeo ut hoc pacto n communis divisor futurus sit β et 4z. Demonstrata ergo sunt praecepta Newtoniana circa inventionem divisoris non rationalis, cum formula est quatuor dimensionum. Simili modo procedendum est in aequationibus altiorum graduum sed parium, ubi tamen conditionum numerus crescente in immensum calculo augetur, ut fere hujusmodi artificia in praxi vix adhiberi possint. Sit aequatio sex dimensionum $x^6+px^5+qx^4+rx^3+sxx+tx+v=0$, et aequatio ficta tertii gradus $x^3+\frac{1}{2}pxx+Qx+R=\pm\sqrt{n}\times\overline{kxx+lx+m}$, ex qua deducitur

$$\left.\begin{array}{l} x^6+px^5+2Qx^4+2Rx^3+pRxx+2QRx+RR \\ \quad +\frac{1}{4}pp+pQ \quad +QQ \quad -2nlm-nmm \\ \quad -nkk-2nkl \quad -2nkm \\ \qquad\qquad\qquad -nll \end{array}\right\}=0$$

Cujus coefficientes comparatae cum coefficientibus propositae determinabunt literas assumtitias Q, R, n, l, m, k. Nam $2Q+\frac{1}{4}pp-nkk=q$, unde ponendo iterum $\alpha=q-\frac{1}{4}pp$, erit $Q=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nkk$, $R=\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}pQ+nkl$, $s=pR+QQ-2nkm-nll$, $t=2QR-2nlm$, et $v=RR-nmm$, ex quibus elicitur tandem $2nlm-2nklQ=rQ-pQQ-t$ vel $\overline{2m-2kQ}\times l=\frac{rQ-pQQ-t}{n}$, ex quo patet l esse debere divisorem aliquem ipsius $\frac{rQ-pQQ-t}{n}$. Praeterea cum $v=RR-nmm$, erit $m=\sqrt{\frac{RR-v}{n}}$; et quia $t=2QR-2nlm$, habetur $m=\frac{QR-\frac{1}{2}t}{nl}=\sqrt{\frac{RR-v}{n}}$, et pariter cum $pR+QQ-2nkm-nll=s$, fiet $m=\frac{QQ+pR-nll-s}{2nk}$; quae omnia sunt ut praecipit autor. Et tandem ex calculo elicitur, literam k divisorem esse debere integrum quantitatis $\frac{\lambda}{2nn}$. Similiter tentari posset reductio aequationum per extractiones Radicis Cubicae, sed hos casus nondum examinare vacavit.

Anno hoc Academico sequenti Novembre inchoando Mechanicam explicare mecum constitui, interque alia ansam habebo Excell. Tuae inventa dynamica quanta potero diligentia explicandi, si modo ingenium voluntati responderet; tentabo interim vires meas, et quantum etiam Naturalis Philosophia acumini Tuo debeat, palam facere studebo. Quantum ex Cl. Varignon intelligo, P. Reyneau Analysis demonstrata et duobus tomis comprehensa publici jam est juris. In hisce oris a multo jam tempore Mathemata silent, et raro novi quid in hisce scientiis in publicum prodire solet. His vale etc.

Patavii 29 Augusti 1708.

XLI.

Leibniz an Hermann.

Solutio Tua Newtoniani problematis (problema enim merito appelles methodum, cujus demonstratio non apponitur) optima est, et in substantia non differt a Bernulliana. Scribit mihi Dn. Joh. Bernoullius se quoque dedisse et Tibi communicasse solutionem problematis de statione Planetarum, desideratque ut a Te petam, quia ipse exemplar non servaverit. Quod ad aequationum vel formularum divisiones attinet, prosecutus nonnihil sum Methodum a Newtoniana diversam, quae adhibet divisiones divisorum ultimi termini per numerum loco x suppositum, veluti h, et reperio, si aequatio data transformetur in aliam, cujus omnes radices sint falsae, uno quasi tenore per residuos continuatae cujusdam divisionis, omnes exhiberi coefficientes formulae dividentis, si qua talis datur. Sed haec methodus supponit numerorum divisores haberi, etiam paullo majorum. Hoc supposito res omnis ad magnam facilitatem reducta est, dicique potest, saltem problema algebraicum transmutatum esse in arithmeticum. Methodum ejus computationum ex scheda adjecta videbis, de qua judicium Tuum mihi gratum erit.

Suspicor Amici Veneti machinam multiplicandi et dividendi non multum differre a Morlandiana et Grilletiana, quas in Anglia et Gallia vidi olim, ubi multiplicationes nihil aliud sunt, quam rhabdologia, additiones autem, quas rhabdologia praescribit, fiunt in adjecta machina Pascaliana, ita ut totum sit combinatio inventi Neperiani et Pascaliani; sed mea toto coelo diversa est, nihilque rhabdologiae simile supponit. Quod superest, vale et fave etc. Dabam Hanoverae 6. Septb. 1708.

Beilage.

Methodus generalis investigandi divisores formularum rationalium integralium ex datis divisoribus numerorum rationalium integrorum.

Formula vel aequatio data ita transformetur, ut omnes ejus radices fiant falsae, adeoque ut omnes termini sint affecti signo +. Talis sit quaecunque $p + qx + rxx + sx^3 + tx^4 + vx^5 = \odot$, quaeritur an et quae formula secundum eandem x ordinata eam dividat. Formulae dividentes si dantur, erunt minimum duae, verbi gratia una: $b + cx + dxx + ex^3 = ☽$, altera $\beta + \gamma x + \delta xx = ♀$, quae in se invicem ductae producent ipsam ⊙.

Pro x sumatur numerus h integer affirmativus rationalis, major quavis datarum p, q, r, s, t, v. Eoque in formula ⊙ loco x substituto, resultabit numerus qui vocetur m, cujus exhibeantur divisores seu Factores. Horum quilibet dividatur per h, et notetur residuus primus; tum quotiens rursus dividatur per h, et notetur residuus secundus; atque ita continuetur, donec amplius per h dividi quotiens non possit, ita ultimus quotiens simul erit ultimus residuorum. Cuilibet Factori ascribatur sua series residuorum. Sed ex his Factoribus statim illi rejici possunt, quorum primus residuus nullus est ex divisoribus seu factoribus termini ultimi formulae datae, et quorum ultimus residuus nullus est ex divisoribus seu factoribus termini summi formulae datae. Ex caeteris seriebus residuorum, si quidem res succedit, aliqua dabit b, c, d, e, et altera ei respondens dabit β, γ, δ, eaeque series ita inter se congruent, ut primus residuus unius ductus in primum alterius seu $b\beta$ det p, ultimum terminum formulae datae, et simul ultimus residuus unius ductus in ultimum alterius seu $e\delta$ det v, summum terminum formulae datae. Praeterea etiam numeri residuorum duarum serierum congruentium b, c, d, e (nempe hoc loco 4) et β, γ, δ (nempe 3) in unum additi et binario minuti dare debent numerum gradus formulae datae (nempe $+4+3-2=5$). Quodsi talis serierum congruentia non contingat, tuto pronuntiari potest, formulam datam non esse divisibilem excepto uno casu, cum est quadratica, quo casu formulae dividentes coincidunt inter se. Sed casus formulae datae quadraticae aliunde satis dignosci potest. Congruentia autem existente tentari divisio potest per unam formularum, cujus coefficientes sint residui unius serierum congruentium. Et series, cui nulla alia congruit, excludetur.

Quodsi vero serierum congruentia contingat plus semel, vel tentari divisio potest per formulam ex qualibet congruentia, vel procedetur ad novam hypothesin novo assumto numero h, unde novus (uti supra) fiet numerus (m). Cujus exhibeantur Factores et eodem modo dividantur per (h), ut Factores ipsius m divisi sunt per h, prodibuntque novae series residuorum, ex quibus solae eligentur illae quae coincidunt, seriebus prioris hypotheseos non exclusis. Et vera erit serierum conjugatio, quam quaevis hypothesis dabit, utcunque varies h vel (h) vel ((h)) etc. Quodsi nulla talis est conjugatio, quae semper procedat, etiam quaesita divisio impossibilis erit.

Ratio horum partim ex dictis manifesta est, ut relatio serierum conjugatarum inter se, partim facile reddi potest. Nempe si tam formulam ⊙ quam formulam ☽ explices, pro x substituendo $y+h$, ultimus terminus formulae ex ⊙ factae erit $p+qh+rhh+sh^3+th^4+vh^5=m$, divisibilis per ultimum terminum formulae ex ☽ factae $b+ch+dhh+eh^3=n$, idemque est si adhibeas (h) vel ((h)). Itaque patet fore

$p+qh+rhh+sh^3+th^4+vh^5=m$ divisibilem per

$b+ch+dhh+eh^3=n$

$p+q(h)+r(hh)+s(h^3)+t(h^4)+v(h^5)=(m)$ ....

$b+c(h)+d(hh)+e(h^3)=(n)$

$p+q((h))+r((hh))+s((h^3))+t((h^4))+v((h^5))=((m))$.......

$b+c((h))+d((hh))+e((h^3))=((n))$

Sunt ergo n factores respondentium m, ubi numeri m sunt dati, sed numeri n sunt quaesiti inter plures datos. Praeterea b est unus ex Factoribus ipsius p, et e est unus ex factoribus ipsius v. Et aptus nobis Factor ipsius m, qui sit n quaesitus, si dividatur per h respondentem, quotiente iterum diviso, et quotientis quotiente, quamdiu licet, dabit residuos, primum b, secundum c, tertium d, ultimum e, posito omnes literas esse quantitates affirmativas, et h divisorem esse majorem quam quemvis ex his b, c, d, e; quod non potest non esse, quia assumtus est major quovis ex datis p, q, r, s, t, v, quorum maximus major est maximo ex ipsis b, c, d, e. Nempe $eh^3+dhh+ch+b, : h = ehh+dh+c+b(:h)$, et $ehh+dh+c, : h = eh+d+c(:h)$, et $eh+d, : h = e+d(:h)$, et $e:h=e(:h)$, ubi $ehh+dh+c$, $eh+d$, e sunt quotientes; sed b, c, d, e sunt residui. Veri autem seu apti residui erunt, quorum series in quavis hypothesi eadem prodibit. Nam quicunque sint h vel (h) vel ((h)), iidem sunt b, c, d, e.

Exemplum adjicere non inutile erit. Data sit Formula $2x^5+3x^4+8x^3+6xx+5x+6=$ ⊙, quaeritur formula dividens. Pro x ponendo $h=10$, major quolibet coefficientium, fiet 238656 $=m$, qui numerus sexies dimidiari, semel per 3 dividi potest, productoque tandem diviso per 11, prodiit 113, primitivus.

200000	Ex horum divisorum simplicissimorum combinationibus prodeunt divisores seu Factores:
30000	
8000	
600	
50	
6	
238656	

Factores

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64	
3.	6.	12.	24.	48.	96.	192	
11.	22.	44.	88.	176.	352.	704	
	33.	66.	132.	264.	528.	1056.	2112
113.	226.	452.	904.	1808.	3616.	7232	
	339.	678.	1356.	2712.	5424.	10848.	21696
	1243.	2486.	4972.	9944.	19888.	39776.	79552
	3729.	7458.	14916.	29832.	59664.	119328.	238656

Ex his soli lineola subducta notati sunt, qui examinari merentur, iique apparent primo aspectu, nam quia hoc loco $h=10$, residui sunt ipsae notae numeri cujusque, ex. gr. si 176 modo praescripto dividas per 10, primus residuus est 6, secundus 7, tertius 1. Excluduntur ergo quorum ultima nota non est factor ipsius p, hoc loco ipsius 6, nempe 1, 2, 3; excluduntur etiam quorum prima nota non est Factor ipsius v, hoc loco ipsius 2, nempe 1, 2. Minimi etiam Factores hic debent esse duarum notarum, ut duos possint dare residuos, quia formula dividens (veluti $b+cx$) ad minimum est duorum terminorum. Series autem duorum residuorum conjuganda est cum serie quinque residuorum; series trium cum serie quatuor, id est hoc loco conjugandi sunt numeri 11, 12, 22 cum numeris quinarum, ex quibus unus notatus est 21696. Unde sola prodit conjugatio inter 11 et 21696, quia hoc solo casu simul prima nota in primam dat 2, et ultima in ultimam dat 6. Item conjugandi sunt numeri ternarum notarum 113, 132, 176 cum numeris quaternarum 1056, 1243, 1356, 2112, 2712, ex quibus conjugationibus duae solummodo ob eandem rationem licitae sunt inter 113 et 2112, item inter 113 et 2712. Habemus ergo tres conjugationes licitas, facileque apparet, solam succedere conjugationem inter 113 et 2112, seu inter seriem residuorum 3, 1, 1 et seriem residuorum 2, 1, 1, 2, et fiet $☽ = 2x^3 + 1xx + 1x + 2$ et $♀ = 1xx + 1x + 3$, eae enim formulae in se invicem ductae producunt formulam datam $\odot$. Nec opus est hoc loco nos progredi ad alterius hypotheseos assumtionem, loco ipsius

10. Quodsi tamen assumsissemus $(h) = 100$, tunc (m) fuisset 20308060506, cujus confactores sunt 10103 et 2010102, eosdem daturi residuos si per 100 dividas, quos superiores confactores dedere, divisi per 10. Ita comparatio factorum novorum cum prioribus dedisset seriem residuorum desideratam, nempe 1, 1, 3 et 2, 1, 1, 2; sed 20308060506 non habet Factores 101 et 201060906 vel 10103 et 2010102. Et sufficeret haec methodus, si facilis haberetur ratio inveniendi cujusque numeri divisores; interim res saltem eo reducta est.

Transformatio aequationis in eam, cujus omnes radices sunt falsae, etiam aliter ad factores inveniendos prodesse posset, nullis adhibitis quantitatibus h. Nam si $bx^3 + cxx + dx + e$ in $(b)xx + (c)x + (e)$, ubi sit $(c) = d$, debent producere datam $2x^5 + 3x^4 + 8x^3 + 6xx + 5x + 6$, prodibit $b(b) = 2$, $e(e) = 6$, $b(c) + (b)c = 3$, $e(e) + (e)d = 5$. Porro b et (b) sunt 1 et 2, at e et (e) sunt vel 1 et 6, vel 2 et 3. Hinc non difficile etiam erit invenire c et (c), item d et (d), si haberi possunt. Nam pro inveniendis c et (c) divellendus est numerus 3 in duos, quorum unus sit divisibilis per 2, alter per 1, id est in 2 et 1, ergo c erit 2, et (c) erit 1, vel contra. Similiter pro inveniendis d et (d) numerus 5 erit divellendus in duos, et quidem si e et (e) sint 1 et 6, divellendus in duos, quorum unus sit divisibilis per 1, alter per 6, sed hoc fieri nequit; itaque e et (e) sint 2 et 3, et divellatur 5 in duos, quorum unus sit divisibilis per 3, alter per 2, id est in ipsos 2 et 3. Ergo d et (d) erunt 1 et 1, sed $(c) = (d)$, ergo et $(c) = 1$ et $c = 2$. Ergo $(b) = 1$ et $b = 2$; itaque tandem $2x^3 + 1xx + 1x + 2$ et $1xx + 1x + 3$ sunt factores ipsius formulae datae. Si plures fuissent literae quaesitae, processissemus ad plures hujusmodi divulsiones, quas praescribit comparatio terminorum natorum ex confactoribus ductis in se invicem cum terminis respondentibus aequationis datae. Haec via etiam serviet ad divisores Numerorum inveniendos.

XLII.

Hermann an Leibniz.

Hesterna die seram sub vesperam humanissimae Tuae literae, Vir Consultissime, cum annexo Schediasmate circa Inventionem divisorum rationalium optime mihi a Hospite meo redditae fuerunt, ubi domum reversus essem. Quia sic sero ad manus meas pervenit Methodus Ampl. Tuae pro investigandis divisoribus, nondum eam ea qua par est attentione perlegere potui. Verum quantum tumultuaria lectione animadvertere mihi licuit, generalis est et usu multo facilior Newtoniana, quae pro divisoribus plurium quam duarum dimensionum immensum saepissime calculum exigit, cum contra Ampl. Tuae methodus multo, ut mihi videtur, brevius et facilius idem expediat atque adeo Autore suo Per-Illustri digna sit, qua in re magis haud dubie confirmabor, postquam Schedam debita cum attentione perlegero. Nunc autem Ampl. Tuae hoc epistolio obstrepo, quia a Cl. Abbate Fardella intellexi, hodie illum literas ad Ampl. Tuam esse daturum, quibus meas addidi, ut gratias agerem maximas pro transmissa mihi elegantissima methodo inveniendi divisores, de qua modo loquutus sum. Quod mea demonstratio Newtoniani modi, divisores rationales eliciendi, non displicuerit, est quod mihi gratuler; alteram meam demonstrationem regularum ejusdem auctoris pro inventione divisorum irrationalium, interea ad Ampl. Tuam pervenisse spero. Et quanquam Newtonianae regulae peringeniosae sint, quia tamen tot conditionibus implicantur in aequationibus nonnihil altiorum graduum, in ipsa praxi inutiles quasi redduntur.

Quantum ad Solutionem Problematis de Stationibus Planetarum quam Cel. Bernoullius mecum communicaverat, eam Schediasmati meo super eadem materia, quod antehac ad Ampl. Tuam Berolinum miseram, cum debita Inventoris laude inserui. Sed ne inde petenda sit, hic iterum apponam. Sint duo circuli ABH, CDG (fig. 56) circa idem centrum E descripti. Si super radio EA, qui minorem circulum CDG secat in C, in circulis ABH, CDG duo mobilia A et C simul moveri incipiant, motuque aequabili prius tendat ex A per B versus H, alterum ex C per D versus G; sintque duo arcus AB, CD eodem tempore descripti, hi erunt inter se ut velocitates. Jam conjungendo puncta B, D recta BD, quaeritur talis positio lineae BD, ut si mobile A tempusculo infinite parvo pergeret moveri ex B in b, et mobile C eodem tempusculo ex D in d perveniat, recta bd parallela sit priori BD. Quibus positis sint $AE = a$, $CE = b$, per D et B agit Bernoullius tangentes DF, BF concurrentes in F, ex quo puncto et punctis contactuum B, D versus centrum E rectas ducit FE, BE, DE, facitque $FB = x$ velocitatem in AB vel Bb ut 1, velocitatem in CD vel Dd ut m; unde $Bb . Dd :: 1 . m :: FB (x) . FD$, quae proinde est $= mx$. Hinc quia $FBq + BEq = FDq + DEq$ vel $aa + xx = bb + mmxx$, unde habetur $x = \sqrt{\frac{aa - bb}{mm - 1}}$ FB, = et

$FD = m \sqrt{\frac{aa - bb}{mm - 1}} = m \frac{cm}{\sqrt{mn - 1}}$ si fiat $aa - bb = cc$ et

$BD = \frac{acm - bc}{\sqrt{aamm - bb}}$; unde in triangulo BED tria latera nota sunt, adeoque et angulus BED vel arcus ID; sed $ID . CD :: am - b . am$; habeatur ergo etiam arcus CID vel punctum D vel positio trianguli BED, specie et magnitudine dati. Q. E. I.

Quantum a Dn. Dn. Kouneau et Naudé intelligo, Societatis Berolinensis Acta brevi praelo subjicientur. Nullus dubito, quin aeque grata ac accepta futura sint Eruditis ad Parisinae Academiae Miscellanea, quae magna cum aviditate legi solent a Curiosis, praecipue si sciverint cuncta illius Academiae Berolinensis Specimina oculos Tuos subiisse.

Neque dubito, quin machina arithmetica ab Ampl. Tua excogitata multis parasangis superet illam, quam Amicus Venetus sibi construxit, quam nuperrime inspexi; multis ea rotis constat, quarum una dentibus instructa, quae pro rei indigentia aut deprimi vel rursus elevari possunt et cum alia rota committi; jam pro diversitate numerorum multiplicandorum modo plures, modo pauciores dentes super plano rotae erigit, trahendo ad id certos funiculos, aliquibus postea rotae revolutionibus tandem productum multiplicationis se manifestat. Facile interim crediderim, principio quo Rhabdologiae fundantur, pariter superstructam esse.

Haec sunt, Vir Consultissime, quae deproperare hac vice potui in splendida hac Civitate, ubi nunc ago, negotiorum quorundam meorum gratia et partim etiam curiositate Caesarei Oratoris ad Sereniss. RP. ingressum oculis quoque meis usurpandi allectus. His vale, mihique bene cupere non desine etc.

Venetiis 21 Sept. 1708.

XLIII.

Hermann an Leibniz.

Nihil profundius unquam vulnus animae infligere poterit, Vir Amplissime, quam nuperrimae ab amico mihi redditae literae, periclitantem Tuam valetudinem significantes, fecerunt. Pari tristitia affectus erat Clariss. Abbas Fardella, qui in eo adhuc solatii nonnihil mecum petiit, quod falsus forsan esset sparsus de adversa Tua salute rumor. Faxit D. O. M. ut solidum hoc sit solatium.

Quas in postremis Tuis literis*) mecum communicare dignatus es, formulae circa collisionem corporum perelegantes sunt et verae in corporibus elasticis. Demonstrationem a priori circa aestimationem virium valde videre cupio, cum hoc de argumento in publicis meis lectionibus, quibus Mechanicam explico, adhuc agendi sit animus. Hisce deproperatis vale etc.

Patavii 29 Decembr. 1708.

XLIV.

Hermann an Leibniz.

Tardiuscule nonnihil ad humanissimas tuas literas 20 Decembris superioris**) respondeo, quia sero nimis et nonnisi nudius tertius ad me pervenerunt cum adjunctis Diplomatis: horum Diplomatum exemplaria Celeberrimis Viris Dn. Abbati Fardellae, Gulielmino et Ramazzino destinata, illico Dn. Fardellae, ut jussisti, reddi curavi, qui reliqua duo, retento suo, suo quodque loco distribuit. Unde non dubito, quin Clarissimi Viri literis sint significaturi, quam grati acciderint ipsis honores receptionis in Societatem Regiam, quae Berolini est per orbem literarium longe Celeberrimam, et Tibi potissimum cui Moderamen ejusdem a Serenissimo ejus Fundatore demandatum est non sine ipsius Societatis gloria, quisque debitas persoluturi sint grates ac Illustri Academiae.

---

*) Dieser Brief fehlt.

**) Dieser Brief ist nicht vorhanden.

Idem et me quoque manet debitum, utpote quem eodem receptionis beneficio condecoratum voluistis Vir Ampl. et incluta Societas, nihil tale merentem: profectus enim meos nimis tenues existimo, quam ut nomen meum in Catalogo Virorum ad Scientiarum pomoeria protendenda natorum ac studio factorum comparere mereatur. Hancque ob causam pro tanta benevolentiae Vestrae testificatione gratias ago.

Summopere gaudeo falsum fuisse rumorem de prostrata Tua valetudine, qui ante aliquot tempus ad nos delatus erat, ast longe gratior adhuc erit nuntius, quem avide expectamus, perfectae et prosperae salutis Tuae. Basilea intellexi Cl. Bernoullium nostrum non penitus bona uti sanitate, quod non sine summa tristitia potui intelligere.

Haud ita pridem in manus mihi incidit liber aliquis Dni. Parent, cui titulus: Recherches de Mathematique et de Physique, in quo errores nonnullos taxare praetendit in Disquisitione Dioptrica Dn. Joh. Bernoulli, quae ex Actis Lips. translata est in Diarium Gallicum; imprimis vero censorium calamum stringit in Hugenianam theoriam Vis centrifugae, qualis exposita est in Hugenii Opusculis posthumis, inter alia putat Hugenium Vim centrifugam duplo minorem justa fecisse. Sed utique fallitur Parent, uti antehac falsus erat in alia Propositione, quam Hugeniano cuidam theorematі opponere voluerat in Diario Gallico 23 Maji 1701, ut editores Operum posthumorum Hugenii optime notarunt. In hac ipsa materia vis centrifugae misere hallucinari potius videtur Parentius ipse eo ipso tempore quo maximos quosvis Autores erroris et paralogismorum accusare non dubitavit. Pag. 793 Tomi secundi dicit: Quoyque la force Centrifuge ait été traitée par les plus grands Hommes, il ne me paroit pas cependant qu'ils ayent connu sa veritable nature, du moins de celle qui depend du mouvement Circulaire, comme on le verra par cette explication. Hactenus ille: in hoc discursu asserere videtur aut statuere ac si daretur aliqua vis Centrifuga independens a motu circulari. Sed hoc nihil est prae aliis quos committit erroribus, ut cum post allata verba demonstrare conatur, Vim Centrifugam tum fore aequalem Vi gravitatis, cum corpus movetur in circumferentia circuli velocitate acquisita post casum per altitudinem quartae diametri partis, ut Hugenius determinavit, qui tamen vires centrifugas aestimavit per excessus secantis arculi infinite parvi eodem tempore percursi a circulante mobili ac excessus iste super radium genitus intelligitur. Parent vero duplum hujus excessus assumit pro mensura Vis Centrifugae. In animum fere induxi, quasdam animadversiones Lipsiam mittendi Actis inserendas, ut ex illis constet quam injuste Dn. Parent Hugenii Meditationes et inventa sugillaverit. Hisce vale, etc.

Patavii d. 21 Febr. 1709.

XLV.

Leibniz an Hermann.

Gaudeo diplomata recte esse reddita. Diuturna mea domo absentia fecit, ut literae mihi tardius redderentur, atque ita nec in tempore respondere possem. Autumni partem in thermis, hyemis partem Berolini egi, et satis nunc divino munere valeo, domumque confirmata valetudine reversus sum; Tibique autem plurimum debeo, quod de ea sollicitus fuisti. Id inter alia Berolini egi, ut quaedam ex scripturis ad Societatem missis selecta miscellanea prodirent, quod hoc anno futurum spero. Inserentur et Tua de Planetarum stationibus, omissis tamen projectionibus. Nondum intellexi judicium Tuum de mea methodo inveniendi divisores aequationis vel formularum. Certum est rem hoc modo satis commode reduci ad divisores numerorum inveniendos. Et tamen excogitavi adhuc aliquid, cujus ope spero etiam hac necessitate methodum pro maxima parte liberari posse. Sed multa alia habeo multo majoris momenti, si absolvere vacaret. Deest in his oris amicus aliquis, cum quo de talibus colloqui atque agere possim. Ita nemo est, qui ad haec excitet, multa quae inde distrahant; nullus est longe lateque Hermannus. Cum vobis diplomata misi, feci quod officii mei esse putavi, et ad promovendum scopum Societatis Scientiarum facere credidi. Parentius ille, in cujus inquisitiones animadvertisti, audaculum se passim ostendit in aliis refutandis, et ambitiosulum in inventis sibi ascribendis, quae dudum prostant, tanquam ea suo marte obtinuisset: inquisitiones illas (Recherches) nondum vidi, sed amici de ea ad me perscripsere. Ajunt, et mea eum vellicare, sed hoc parum curo.

Quod vim centrifugam attinet, rogo ut inspicias, quae Octobri

Actorum anni 1706 inserui pag. 446 seqq. ut meas ipse locutiones emendarem, comparesque cum iis, quae Hugenius et Parentius habent, et deinde sententiam Tuam ad me perscribas. Ego non in re lapsus eram, sed tantum in locutione; quid Hugenio aut Parentio contigerit, re considerata et cum meis collata deprehendes. Dici aliquomodo potest, vim centrifugam locum habere etiam, cum circularis motus non consideratur. Pro centro enim punctum quodcunque assumi potest, et concipi quantum continuato mobilis motu per tangentem curvae ab illo centro recedatur, et quantum mobile retrahendum sit ad curvam, in quo vis centrifuga consistit. Quod superest, vale etc. Dabam Hanoverae 21. Martii 1709.

XLVI.

Leibniz an Hermann.

Non dubito, quin literas meas ante complures septimanas acceperis, quibus et Tuis respondebam, et circa vim centrifugam, de qua Parentius aliquid contra Hugenium movit, aliqua annotabam, rogans ut inspiceres quae Octobri Actorum Lipsiensium anni 1706 inserui p. 446 sqq., et mihi judicium Tuum haud gravatim perscriberes. Id ergo etiamnum a favore Tuo expecto, scriboque vel ideo saltem ut, an priora mea ad Te pervenerint, discam; non dubito etiam, quin expenderis modum meum, quo inventio divisoris rationalis aequationis reducitur ad divisores numerorum, ita ut hac facile data nihil futurum sit facilius, quam sine multa tentatione innire divisorem aequationis. Verum enim vero, quia inventio ipsa divisorum numeri dati problema est nondum commode solutum, ideo iisdem, quae feci, fundamentum insistens viam video divisores aequationum commode inveniendi, non suppositis numerorum divisoribus; sed ad hoc exequendum adhuc otiolo opus foret.

Puto impressionem Miscellaneorum Berolinensium jam coeptam esse, et spero hoc anno tempestive absolutum iri. Quod superest, vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 16. Maii 1709.

XLVII.

Hermann an Leibniz.

In aliqua ex praecendentibus meis me jam scripsisse putabam, quantopere mihi placuerit Methodus Tua inveniendi Divisores formularum: quantum enim de ea judicare valeo, multis occasionibus longe faciliorem et compendiosiorem tuam aestimo, quam Newtonianam, quando nimirum formulae divisorum occurrunt altiorum graduum, sine controversia faciliore negotio res tota expeditur, quam Newtoni regulis tot circumstantiis et cautelis limitandis. Quod si vero inventio etiam divisorum necessaria ad determinationem coefficitium formularum pro divisoribus magis adhuc contrahi poterit, alio insuper nomine Newtoni Regulis methodum Tuam praeferendam ducam.

Cum persuasissimus sim multa saeculis profutura maximique momenti inventa Mathematica et Philosophica inter chartas Tuas adhuc delitescere, vehementer doleo, neminem esse qui in iis edendis et ad prelum disponendis Tibi, aliis occupationibus distracto, operam praestare velit et possit. Caeterum optime novi, Professores Matheseos plerumque teneri, vulgares Matheseos practicae operationes studiosae juventuti propinare, sed miror neminem esse qui altius sapere et de universo orbe literario bene mereri cupiat, editionem Meditationum Tuarum promovendo atque urgendo.

Quod ad Parentium attinet, non tantum audaculum et ambitiosulum eundem existimo in diminutivo, sed fortasse verius temerarium et arrogantem. Nam qui non gregarios milites, sed summos Mathematicarum disciplinarum Ductores nulla urgente necessitate aggreditur, et jam pridem ab aliis publicata inventa recoquere eaque tanquam proprio marte eruta in publicum emittere non dubitat, is sane temerarii et insolenter ambitiosi titulo non indignus censeri debet. Eo ipso loco ubi Hugenianum tractatum censorio calamo perstringit, satis apparet ipsum, cum ea scriberet, nescivisse, quid Vis centrifuga esset. Interim tamen si ipsi credimus, solus is est qui hujusmodi Virium veram habeat notitiam, et omnes reliqui qui ante ipsum de hoc argumento egerunt falsi sunt. Interim omnes solo Parentio excepto, qui de Vi Centrifuga scripserunt, ea demonstrasse videntur quae demonstranda sumserunt, Parentius vero aliorum inventis nil nisi paralogismos addidit, ut manifestum id me facturum spero.

Perlegi diligenter locum Actorum 1706 Mens. Octobr. ubi itidem de Vi Centrifuga agitur. Distinguis talem Vim in tangentialem et arcualem. Auctores de prima tantum virium Centrifugarum specie loquuti sunt, quam subinde cum vi gravitatis contulerunt, omnes enim eam mensurant penes sinum versum arcus infinite parvi aut excessum secantis et radii, ut Hugenius, qui posterior vis centrifugae aestimandi modus coincidit cum priore, cum dictus excessus sit ad sinum versum ut secans arculi infinitesimi ad radium, quae ultima ratio est aequalitatis. De conatu vero arcuali nullum reperiri videtur vestigium apud eos, qui de hisce scripserunt, vel potius eundem esse cum tangentiali statuere videntur, nam ubi corpus in E (fig. 57) arcum EA decurrendo pervenit in A, asserunt corporis directionem in A esse tangentem AD, atque adeo conatus centrifugi mensuram in eodem puncto A fore DG, sinum anguli contactus DAG.

Parentius solus praetendit, vis Centrifugae mensuram esse duplum sinus versi AB, in fine sui libri, nam eo loco ubi Hugeniana examinat, simplicem AB accipit pro dicta mensura. Ejus ratiocinium huc breviter redit: In eadem hac nostra figura modo citata per E ducta intelligatur tangens EM radio AC occurrens in M, atqui sine probatione asserit subtangentem BM exprimere vim centrifugam, duos vero motus per EB et AB componere motum per arcum EA. Jam facile ostendi potest, quod arcu EA existente infinite parvo, subtangens BM dupla est BA. Sed cum dicat Parentius, motum arcualem EA componi motibus EB et AB, manifestum esse puto, vim per AB non esse partem vis Centrifugae quam exprimit per BM, quia haec AB concurrit ad constituendum motum arcualem EA. Vis autem Centrifuga est, qua corpus conatur per tangentem EM recedere ab arcu EA, adeoque spatium AM, quo recedit, tantum exprimere potest conatum illum centrifugum, sed AM hoc casu est = AB; ergo haec AB esset quantitas recessus et expressio vis Centrifugae. Caeterum libenter concedo, quod, si mobile percurrendo arcum EA motum suum prosequatur nihilo impediente in recta AF, conatus centrifugus arcualis exprimendus sit per FG vel aequalem AH, duplum sinus versi AB.

Laetus quoque intellexi Collectanea Berolinensis Societatis Regiae sub prelo jam sudare spemque esse fore, ut exeunte hoc anno publicae luci exponantur, nullus enim dubito quin multa praeclara inventa iis contineantur. Quod superest, vale etc.

Patavii d. 6. Junii 1709.

XLVIII.

Leibniz an Hermann.

(Im Auszuge)

De Vi centrifuga rogo, Vir eximie, ut rem iterum expendas, et cum meo specimine Motus planetarii Actis inserto conferas; reperies omnino regulariter adhibendam vim centrifugam non tangentialem, sed arcualem. Tangentialis tantum locum habet initio circulationis, at Arcualis, quia non duo tantum puncta, sed tria supponit, locum habet circulatione durante. Est quidem conatus arcualis tangentiali proportionalis, cum sit ejus duplum; hinc saepe alius pro alio sine errore sumitur; sed quando tertium aliquid huic vi homogeneum assumendum est, et per modum additionis aut subtractionis vi centrifugae conjungendum, ut factum est in explicando planetarum motu paracentrico per compositionem vis centrifugae et gravitatis, tum vero reperies non impune tangentialem arcuali substitui. Ego sane calculo ipso jubente, adhibueram arcualem re, sed tangentialem verbo, quod novissime emendavi. Verum est, corpus conari recedere a centro per tangentem, sed ut determinetur vis qua conatur, conjungi debet tangens praecedens, ducta per duo praecedentia puncta, cum puncto novo, examinandumque est, quantum tangens illa a centro illo quod respicitur, plus minusve recedat, quam punctum novum.

Caeterum ut verba Epistolae Tuae sequar, quicquid sit de autoribus, an de Tangentiali tantum locuti sint, dicendum est eos de arcuali loqui debuisse, quia volebant agere de ea Vi centrifuga, quae locum habet durante motu. Et speciatim cum gravitati eam contulere, hoc facere debuerunt. Itaque ego revera arcualem cum gravitate composui in explicando motu planetarum per circulationem. Duplum enim adhibui ipsius Tangentialis, quam vulgari modo locutus vim centrifugam simpliciter appellabam, sed minus bene. Illud recte dixerunt vires centrifugas esse ut sinus versos, nam arcuales sunt ut sinus versi, cum sint tangentialium dupla. Esto de conatu arculi apud alios nullum esse vestigium, (quanquam rem non excluserim) certissima tamen demonstratione a me exhibita (d. l. p. 448) et ipso successu compositionis motuum paracentricorum comprobata, adhiberi debere manifestum est. Dicis: asserere eos, corporis directionem in A esse tangentem AD, sed illa assertio falsa est in rigore, de quo hic agitur (etsi hae directiones assignabiliter non differunt), cum enim mobile tendat ab E ad A, directio est EA vel AF. Vera foret assertio in motus initio, ut explicui, sed hoc non habet locum nisi in primo momento. Parentii ratiocinationem non curo, cum nec locum ejus viderim, nec consequentiae vim in illis, quae inde refers paulo obscurius, intelligam. Sed quod dixi, irrefragabile censeo. Cum denique in fine subjicis, Te libenter concedere, quod, si mobile percurrendo arcum EA motum suum prosequatur nihilo impediente in recta AF, tunc conatus centrifugus arcualis exprimendus sit per FG vel AH duplum sinus versi, concedere videris, quod volo; nam semper hoc in circulatione, demto initio, contingit. Concipiendum enim est, quasi mobile prosequeretur motum suum EA versus F, atque inde retraheretur versus C. Jungatur CF arcum AG secans in K; patet K aequivalere ipsi G, seu differentiam inter FG et FK esse ipsis differentibus incomparabiliter minorem. Itaque concipitur motus in AK tanquam compositus ex motu in AF et motu in FK. Porro EA revera est tangens, quia est recta, quae duo puncta infinitesimaliter distantia jungit. Suspicor Parentium fortasse Schediasma meum vidisse, antequam suas disquisitiones ederet, et substituto alio ratiocinandi modo voluisse dissimulare, unde profecisset, more suo. Tempus quo libellum suum edidit, fortasse suspicionem juvare poterit. Interim male ratiocinatur, si dicit (ut scribis) motum EA (in hypothesi ipsius) componi ex EB et AB, seu motum AG componi ex AD et AB (qua ratione ipse Parentius in vim centrifugam tangentialem recideret). Nam componitur potius hoc loco motus in AG ex motu in AF et in FG. Porro idem est, motum EA componere ex EB et AB et componere eum ex EM et MA. Deberet potius dicere, componi ex EM et MB, quia MB dupla est ipsius AB, quod ipse desiderat. Verum hoc quoque incongruum est, quia B non cadit in arcum. Ideo non video, quomodo ex suo explicando modo conficiat vim centrifugam explicandam esse per duplum sinus versi: errat, dum directionem sumit in EM perpendiculari ad radium CE, cum debeat sumi in chorda, qualis est EA. Itaque ad meam explicationem vel aequivalentem recurrendum est.

XLIX.

Hermann an Leibniz.

Tres circiter elapsae sunt septimanae, Vir Amplissime, ex quo humanissimae Tuae literae superiore Junio datae ad me perlatae sunt, ad quas promptius mihi responsuro obstiterunt curae domesticae, quae per aliquot dies studia mea interceperunt. Actorum mensem illum, ubi Parentianas disquisitiones recenseri significas, nondum vidi; Doctiss. Collectores non abs re fecerunt, si inhonestum Parentii morem excellentissimos quosque viros injuste sugillandi notarunt. Hic utique in suis Disquisitionibus inventoris speciem affectat, sed infortunio suo nonnisi talia producit, quae antea jam nota erant atque inventa, et quidem eo scribendi modo ut obscuritas atque paralogismi pari passu ambulent; maxime vero in iis, quae de conatu centrifugo conscribillavit, hoc elucet, praecipue in ultimo Schediasmate; nam in recensitis Disquisitionibus bis vel ter de viribus hisce agit, in quorum primo specimine tredecim Hugeniana theoremata bene quidem demonstravit, sed postquam Marchionis Hospitalii aut potius Cel. Joh. Bernoullii nostri Mss. vidit demonstrationes, in ultimo vero sibi ipsi contrarius conatum centrifugum duplo sinu verso exponit, quem antea simplici expresserat, quod proin ex Tuo Schediasmate hausisse eum suspicor, quamquam rei fundamentum minime sit assequutus. Nam licet Disquisitionum titulus adscriptum habeat annum 1705, plura tamen sunt, quae me movent, ut credam, hanc ultimam editionem biennio forsan tardius in publicum prodiise, quam titulus indicat, aut, quod potius crediderim, plures additiones, inter quas est specimen de Vi centrifuga, et Inquisitio Dioptrica in curvaturam radii solaris per medium inaequaliter densum transeuntis, meae quam habent Acta Erud. 1708 satis conformis, aliaque plura reperiuntur, veteri editioni anni 1705 biennio forsan post inseruisse.

Sed venio ad Tuam demonstrationem, Vir consultissime, qua Act. Erud. 1706 p. 448 perspicue demonstrasti, vim centrifugam arcualem duplam esse tangentialis, vel quod eodem recidit, hanc simplici, illam duplo sinu verso arcus infinite parvi exprimendam esse, quod verum nunc mihi videtur. Putabam equidem me in modum incidisse, quo probari posset, vim arcualem simplici sinu verso perinde ac tangentialem exponendam esse; sed ratiocinii filum sequutus cum voluptate perspexi, demonstrationem meam cum Tua perfecte conspirare: ast vero mentem meam distinctius exponam. Pono mobile data quadam velocitate venire ad punctum A (fig. 58) non directione tangentis JA, sed directione arcus EA ejusve subtensae; evidens est mobile in motu suo perrecturum esse describendo spatium AF, ubi ex E pervenit in A eo tempore quo spatium EA absolvit (suppono enim AF et EA aequales esse) si nihil sit, quod motum impediat. Ergo necesse est, ut adsit vis coërcens, ne mobile motum suum in AF prosequatur, sed arcum EAG decurrat; et haec vis coërcens erit aequalis vi centrifugae. Restat igitur, ut inquiratur quanta haec vis esse debeat; ad id primum consideravi tangentem JD tamquam planum reflectens mobile ad partem contrariam ejus, in qua ad planum accesserat corpus: hoc est, si corpus in E incidat in planum JD directione et velocitate EA, posui planum ita repercutere corpus secundum directionum AG', ut angulus reflexionis DAG par fiat angulo incidentiae JAE: nam hujusmodi reflexionibus vidi circularem motum conservatum iri, quandoquidem latera EA et GA polygoni infinitolateri circulo inscripti ab arcubus EA et GA tantum quantitate ipsis arcubus inassignabili deficiunt. Porro quia motus in AG componitur motibus in AB et in BG vel AD, conclusi vim repercussionis, quae est ut AB, aequipollere conatui centrifugo. Sed non statim observavi repercussionis vim, quae mea quidem sententia recte exponitur sinu verso AB, non debere sumi pro tota vi coërcenti atque motum circularem conservanti, quam aequivalentem ponimus conatui centrifugo. Non tantum enim vis AM, qua mobile delatum in A juxta directionem radii a centro C recedere conatur, destruenda est, sed nova vis super accedat necesse est, ut mobile in arcu AG moveri pergat. Destructo enim motu AM, qui cum AD componere intelligitur motum AF, remanet adhuc motus tangentialis AD, qui arcualis reddi non potest, nisi de novo accedat vis AB quae cum AD componat motum arcualem AG; atque sic Vis tota coërcens mobile, ut arcum EAG aequabili motu percurrat, non est sola AB vel AM, sed aggregatum virium AB et AM, hoc est duplum ipsius AB. Sic ergo constat, vim arcualem duplo sinu verso exponendam esse, et tangentialem simplici, plane ut Tu primus docuisti. Nam omnes reliqui, quot sciam, Autores de vi centrifuga tangentiali egerunt, quod exinde maxime patet, quod tum conatum centrifugum docuerunt gravitati aequalem fieri, cum mobile circulatur velocitate ea, quam acquireret grave descensu per altitudinem quartae diametri circularis partis: quae regula vera tantum est, ubi de conatu tangentiali agitur, et falsa, si de arcuali; nam arcualis conatus excussorius aequalis fit gravitati, quando mobile in sua circumferentia aequabiliter movetur celeritate ea, quam grave acquireret post descensum a quiete per octavam diametri aut quartam radii partem. Parentius vero, qui conatum hujusmodi etiam per duplum sinum versum expressit, eandem nihilominus circulationis velocitatem invenit, quam Hugenius aliique qui tantum vim tangentialem contulerunt cum gravitate, sed ratiocinio usus a solis iis intelligendo, qui in Cabbala nonnihil versati sunt.

Tandem gratias Tibi ago, Vir Amplissime, quod quaeris quid agam, lucubratiunculas enim meas nunquam tanti facere auderem, ut eas dignas haberem, de quibus apud Virum in omni scientiarum genere consummatum mentio fieret. Ut tamen humanissimis tuis jussis morem geram, celare amplius non possum me in conscribenda Mechanica fluidorum nunc occupatum esse, quae si eventus votis meis respondebit, publicam lucem aspiciet. In hoc opere a simplicissimis Hydrostaticis principiis ordiar atque ad praecipua hujus aevi inventa ordine progrediar et curvaturas Lintei ab incumbente fluido, Veli vento inflati methodo facili atque sine calculo determinare satagam, ut perplura alia taceam, de quibus agendum mihi erit.

Celeberr. Noster Fardella jam ante quatuor septimanas Barcinonem profectus est. Plura non succurrunt. Vale, etc.

Patavii d. 29. August. 1709.

L.

Hermann an Leibniz.

Quatuor jam effluxerunt Menses, Vir Illustris, ex quo literas ad Dn. Zanovellum Venetias misi ad Te curandas, verum cum nihil interea responsi ab ipso obtinuerim, cui literas Tibi destinatas etiam atque etiam commendaveram, etiamnunc ignoro utrum epistolium meum ad Te delatum sit, eaque propter iteratas hasce exarandas duxi. In eo quod dixi epistolio, in sententiam Tuam libens transii, Conatum Centrifugum arcualem exprimendum esse duplo sinu verso arcus indefinite parvi, quando nimirum motus per arculum infinite parvum idem censeri possit ac motus per subtensam ejus. Hac enim conditione propositionis veritas extra controversiam posita mihi videtur. Sola mihi difficultas super hoc argumento superest, qui fieri possit ut primo statim momento a motu tangentiali, quo incipit arcualis conatus centrifugus, duplus fiat ejus qui obtinebat ab initio circulationis motu mobilis existente tantum tangentiali, aut potius conatu ad motum per tangentem. Instantaneus, ut ita dicam, transitus conatus centrifugi simplicis ad duplum nonnihil negotii mihi facessit; licet necessitatem consequentiae clare perspiciam, posito quod motus per arculum infinite parvum idem considerari debeat cum motu per subtensam ejusdem aut per latus alicujus polygoni infinitilateri circulo inscripti. Sed haec ipsa difficultas me hactenus impedivit, quo minus motus mobilis in circumferentia circuli pro rectilineis haberem, sed potius loco circuli parabolam substituerem, quam datus circulus, in quo mobile rotatur, in vertice oscularetur, ita quidem ut motus per arculum parabolae infinite parvum vertici principali adjacentem haberi posset pro motu circulari, quandoquidem dictus parabolicus arcus ex natura osculi confundi intelligitur cum arcu circulari indefinite parvo. Hac enim ratione vidi, si mobile circuletur velocitate tanta, quantam acquisivisset in fine casus per quartam Parametri Parabolae partem, fore conatum centrifugum conatui gravitatis aequalem, et cum hoc casu Parameter Parabolae circulum osculantis aequalis sit hujus diametro, hinc constitit mihi veritas Theorematis Hugeniani ex iis, quae calci Operis de Horologio oscillatorio apposita sunt. Unde si Ampl. Tuae placeret demonstrare, quod motus arcualis idem sit cum motu per latus Polygoni infinitilateri circulo inscripti, omnis mihi scrupulus hac in re sublatus esset.

Sexennium jam praeterlapsum est, ex quo occasione quadam mihi oblata cogitare coepi de Problemate inveniendi curvam, quae sui ipsius evolutione se ipsam describit, cujus meministi in aliqua ad Newtonum Epistola, quae cum aliis Tomo tertio Operum Wallisii inserta est; atque tunc statim comperi solam esse Cycloidem, quae se ipsam inverso aut subcontrario situ producat. Inveni praeterea aliam curvam, quae idem praestat, sed alio modo nempe se ipsam generat sui evolutione situ directo, adeo ut crescente radio osculi in curva evoluta simul etiam crescat radius osculi alterius, quae hujus evolutione describitur. Atque haec curva ejus est naturae, ut ejus radius osculi in quovis curvae puncto aequalis sit longitudini arcus curvae respondentis aucti linea data, quae curva, licet algebraica non sit, admissis tamen aut concessis curvarum quadraturis construi potest; et constructio dependet a quadratura circuli et hyperbolae. Methodus mea, quae non tantum ad haec problemata extenditur, sed etiam inservit inventioni Curvarum, quae sui evolutione non easdem, sed similes curvas producant, paucis huc redit: Sit (fig. 59) AB curva genita evolutione alterius IK haecque ipsa IK orta intelligatur evolutione curvae $\alpha\beta$; jam si curva $\alpha\beta$ similis et aequalis fuerit primae AB, curva IK generabit sui evolutione et generabitur a curva AB vel $\alpha\beta$. Sint ergo AB et $\alpha\beta$ ad eundem axem $A\alpha$ exstructae identicae, eritque $AC = \alpha k$, $BC = \beta k$, et triangula BDE, $\beta\delta\varepsilon$ erunt similia et aequalia, quibus etiam simile existet triangulum GHI. Quibus positis est etiam $B\beta = Ck = A\alpha$ ac propter angulum rectum $BI\beta$ triang. $BI\beta$ simile triang. BDE. Unde vocando $A\alpha = B\beta = a$, $AC = x$, $BC = y$, $AB = s$, radius osculi $BI = z$, $BE = dx$, $DE = dy$ et $BD = ds$; unde BD (ds). DE (dy) :: $B\beta$ (a). BI $\left(z = \frac{ady}{ds}\right)$. Sed ponendo elementa curvae ds constantia, invenitur generaliter in omni curva $z = \frac{dsdy}{ddx}$; ergo $\frac{ady}{ds} = \frac{dsdy}{ddx}$, et $addx = ds^2$, hoc est $adx = sds$ vel $2ax = ss$, quod indicat curvam esse Cycloidem, cujus Circulus Generator diametrum habeat $= \frac{1}{2}a$. Sed si curvae AB et $\alpha\beta$ (fig. 60) non sunt aequales, sed tantum similes, linea jungens puncta B et β, ubicunque haec accepta fuerint, producta in idem punctum Z lineae AZ incidet. Unde nominando $AZ = a$, $\alpha Z = b$, $A\alpha = c$, $ZB = y$, erit $B\beta = \frac{cy}{a}$, $DE = dx$, $BE = dy$, $BD = ds$, erit iterum BD (ds). DE (dx) :: $B\beta \left(\frac{cy}{a}\right)$. BI $\left(= \frac{cydx}{ads}\right)$. Sed posita adhuc BD constante erit BI radius osculi curvae quaesitae $AB = \frac{ydxds}{dx^2 - yddy}$; ergo $BI = \frac{cydx}{ads} = \frac{ydxds}{dx^2 - yddy}$; unde $cdx^2 - cyddy = ads^2$ vel quia $b + c = a$, $cdx^2 - cyddy\ (= cds^2 + bds^2) = cdx^2 + cdy^2 + bds^2$, $-cdy^2 - cyddy = bds^2$, cujus integrale est $-cydy - bsds$ et hujus integrale

$ac - cyy = bss$. Hinc deduco aequationem curvae differentialem $dx = \frac{dy\sqrt{ayy - aab}}{\sqrt{aab - byy}}$, quae est aequatio epicycloidis cujusdam.

Audio Cel. Frid. Hofmannum suam Medicinae cathedram in Academia Halensi vacantem reddidisse. Novi Virum quendam in Botanicis, Historia naturali et omni reliqua solidiore Medicina eximie versatum et Matheseos non prorsus ignarum, qui non sine egregio decore Universitatis illius vacantem Professionem exornaturus esset, si ad eam vocaretur. Is est Joannes Scheuchzerus, Medicus Tigurinus, egregiis jam speciminibus Botanicis clarus, cujus honorifica fit mentio in Commentariis Academiae Regiae Parisiensis, ad quam aliquas subinde mittit lucubrationes perinde ac Frater ejus natu major Joh. Jacobus Scheuchzerus. Et junioris Scheuchzeri merita Illustri Abbati Bignonio ita jam ab aliquot annis innotuerunt, ut nemo melius de Viri profectibus judicare possit, qui frequentes ad ipsum dat literas. Hic tandem epistolio metam figo. Vale etc.

Patavii 13 Novembr. 1709.

LI.

Leibniz an Hermann.

Non est quod novae subdubitationes circa conatum centrifugum nos morentur. Nil mirum, in aliquo casu inter simplum et duplum non posse assignari medium, cum inter finitum et infinitum non possit assignari, ut in transitu ab asymptota ad Hyperbolae ordinatam. Sed et calculus ostendet exemplum transitus ex certo capite continui, ubi tamen statim trajicitur a 2 ad 1. Esto $y = 1 + x^0$, ajo y semper esse 2, nisi in momento quo x evanescit, quo casu fit $y = 1$; nam $x^0 = 1$, excepto casu, quo fit $x = 0$, cum sit $0^0 = 0$. Nihil etiam causae est, cur dubitemus utrum conatum arcualem in circulo per rectas explicare liceat; neque enim ad veritatem refert in curvis, utrum puncta earum inassignabiliter distantia per rectas, an per alias curvas qualescunque, veluti arculos circulorum vel parabolarum vel aliarum linearum conjungas cum linea, quae prodit, quacunque hujusmodi hypothesi semper eodem recidat, nullo assignabili discrimine; etsi enim multum ad commoditatem referat aliquando quid..... et una methodus utilior interdum sit quam alia, nunquam tamen, si recte procedamus, pugnantia concludentur. Id memini me aliquando Dn. Bernoullio in alique cognato huic exemplo, actu ipso ostendere. Si tales scrupuli locum haberent, scientiae certitudo labefactaretur.

Elegantia mihi videntur, quae de Curva se ipsam aut similem sibi per evolutionem describente habes, tametsi prima specie non videaris quaesitum concludere. Ponis curvam $\alpha\beta$ evolutione sui describere curvam IK, et hanc rursus evolutione sui describere curvam AB, congruam curvae $\alpha\beta$, et hinc concludis, IK esse quaesitam seu IK congruere ipsi AB, quod non videtur sequi. Sed rectificatur consequentia, si ponamus AB esse quaesitam quae describatur ab IK; hoc posito etiam IK describi ab $\alpha\beta$ congrua ipsi AB. Ergo si generaliter problema, quod proponis, solvamus, continebitur in ea solutione etiam problema quod intendis; etsi problema sit determinatum, coincidet cum eo quod intendis. Ais aequationem $dx = dy \sqrt{(ayy - aab, :, aab - byy)}$ pro curva similem evolutione sui exhibente esse Epicycloidis cujusdam, id explicari desidero, si vacat. Pendere sane videtur a curvae alicujus extensione. Aliquando etiam a Te (si vacabit) obtinere spero Analysin curvae, se ipsam non inverse, sed directe evolventis.

Dn. Joh. Scheuchzerus mihi fuit ignotus aut non observatus, sed ... judicio eximium esse non dubito. Dn. Hofmannus tunc cum in Aulam Berolinensem transiit, professionem Halensem sibi adhuc reservari curavit.

LII.

Hermann an Leibniz.

Humanissima eaque gratissima epistola Tua 24. Octobris his demum diebus mihi reddita est, et quidem postridie illius diei, quo aliquod epistolium ad Amplitudinem Tuam dedi, in quo ad praecedentes meas literas nihil adhuc responsi me accepisse significavi. Nunc vero oblata hac occasione Nobilissimi Burneti, Rev. Episcopi Salisburiensis Filii natu majoris, in rebus mathematicis et praesertim reconditiore Geometria eximie versati, ad postremas Tuas respondeo, sed praepropere admodum, cum in transitu tantum suo per hanc urbem mihi significarit, Hanoveram se cum Fratre et Ephoro suo Massonio, Viro Clarissimo, concessurum esse, cultum suum denuntiaturum Ampl. Tuae tanquam omnis solidioris Eruditionis Fonti inexhausto.

Sed venio ad humanissimas Tuas literas. Parentio satis familiare est, ut aliorum inventa incomto verborum mangonio sua facere studeat, quanquam ubique fere dissimulet aliorum scripta et meditata sibi antea innotuisse; atque ita eum facere utique oportebat, ut plagiarii nomen a se abigeret. Interim tamen de se nimis magnifice et aliis nimis abjecte sentire videtur, dum putat se apud alios fidem inventurum, quando persuadere conatur proprio se marte in ea incidisse, quae ex aliorum scriptis ipsum hausisse et in pejus mutasse omnibus constare potest.

De Villemotii libro nihil aliud mihi videre contigit, nisi magnificum Fontenellii elogium in Historia Academiae Parisiensis anni 1707; librum tamen propediem me accepturum spero, quem statim atque nactus fuero avide perlegam et quid mihi de eo videatur, statim significabo. De hoc tamen autore neque Dn. Burnetus qui eum legit, demonstrandi morem probat. In opere quod meditor Hydraulico, in quo omnia a primis principiis repetam, etiam tractare constitui de cursu fluminum, qua in re Disputationes inter Celeberr. nostrum Gulielminum et Cl. Papinum mihi optime notae sunt, sed puto in nonnullis utrinque peccatum esse, quanquam angustia temporis non permittat, ut hic exponam, ubinam praeclari hi viri a veritate descivisse mihi videntur. Ego saltem scopulos illos sollicite devitare studebo, in quos impegisse videntur egregii viri; pleraque per Geometriam linearem absque calculo absolvere conabor, ut ab Italis legi possit, quorum multi sunt, qui in Geometria utcunque versati, analyseos differentialis mysteria non satis callent, ut liber per calculum procedens ab ipsis intelligi possit. Dabo etiam modos inveniendi Velariam et Curvam lintei absque calculo per simplicem Geometriam, sed quae iis fundamentis nituntur, quibus differentialis calculus aut etiam tota Antiquorum methodus exhaustionum superstructa est: et ea quam sequor methodus forte non contemnenda videbitur, quod ejus beneficio regressus patet ab aequationibus differentio-differentialibus ad aequationes differentiales primi gradus, quando id fieri potest, ut in nominatis Curvis Velaria et Lintei aliisque expertus sum.

Clariss. noster Gulielminus nunc febre continua laborat atque ideo nondum ipsi loqui potui eumque hortari, ut observationes aliquas selectiores mitteret Miscellaneis Societatis Celeberrimae, quae Berolini Tuis curis subest, inserendas. De hoc eodem negotio quoque egi cum Cl. Ramazzino, cui salutem Tuam plurimum denuntiavi; optimus Senex qui cultum suum per hasce meas Tibi defert, petitioni Tuae libenter annuet et morem geret quantum ipsi licebit in misero quo nunc versatur statu, quo omni fere oculorum usu caret propter guttam serenam, quae ipsum ab aliquot jam annis affligit. A Cel. Bernoullio ipse ab aliquo tempore etiam intellexi, se theoriam suam motus reptorii multum perfecisse, ejusque ope quamvis curvam ad arcus circulares quantum libet vicinos reducere posse, quod inventum utique eximium est; caeterum quantum scio, bona utitur valetudine, sed dubiis, ut audio, cogitationibus agitatus, utrum obsequi debeat vocationi ad stationem Leidensem ipsi oblatae. Unicum scio ejus ex Fratre Senatore Nepotem, qui in studiis Mathematicis insignem spem facit atque is est qui Newtonianae Regulae inveniendi divisores quantitatum compositarum demonstrationem invenit, sed alter mihi adhuc ignotus est, nisi forte hujus, de quo modo loquutus sum, frater minor intelligatur, qui tempore, quo Basilea discessi, pulverem scholasticum nondum excusserat. Nam defuncti Jacobi Filius unicus nunquam adduci potuit, ut Mathematis operam daret.

Ad Excell. Trevisanum, meum itidem Fautorem insignem, proxime literas dabo eique salutem Tuam plurimam significando, simul applausum aperiam, quo elegantem ejus tractatum del buon Gusto prosequeris. Aliud nunc sub prelo sudat opus Philosophicum de rebus Metaphysicis et Physicis agens, ab eodem conscriptum. Ticini anno superiore etiam in lucem exiit P. Sacherii Jesuitae Neostatica, agens de motibus acceleratis, sed hypothesibus utitur a Galilaeanis multum differentibus; nam statuit velocitates mobili quovis instanti superadditas esse distantiis mobilis a centro telluris, quo omnia corpora tendere supponit, proportionales; videtur hic auctor Ideas suas praecipuas ex Newtoni Principiis desumsisse, librum tamen nondum examinare qua par est attentione vacavit. Nihil aliud novi in re literaria; si interea Italia quid curiosi in rebus philosophicis aut mathematicis produxeat, non deero iis in tempore communicandis Hisce paucis deproperatis manum de tabula retraho, me tamen indesinenter profiteor etc.

Patavii die 28 Novembr. 1709.

LIII.

Hermann an Leibniz.

Patavii d. 13. Febr. 1710.

Doleo, quod responsoriae Tuae, Illustrissime Vir, quarum in postremis Tuis meministi, ad me non pervenerint, cum e contra omnes meas ad Te delatas videam. Quod ad subdubitationes meas attinet, quas in praecedentibus meis protuleram, libens agnosco eas tanti non esse, ut doctrinae Tuae virium centrifugarum et centripetarum quicquam de certitudine detrahere possint, quod exemplo pereleganti eoque satis apposito luculenter ostendis; unde factum, ut meae difficultates jam evanuerint, perspecto insuper egregio concentu theoriae Tuae cum iis, quae ex Hugenianis repertis memoriae prodita sunt.

Quod ea, quae nuperrime circa Curvas se mutuo alternatim evolventes, quasque fortasse Amicabiles vocare liceret, protuli, non displicuerint, est quod mihi gratuler. Has, inquam, curvas quae se mutuo sui evolutione describunt, amicabiles nomino, perinde ac illi numeri ab Arithmeticis hoc vocabulo insigniuntur, quorum partes aliquotae in unum additae non quidem datos numeros, quorum partes aliquotae adduntur, sed alternos restituunt. Interea non inficias ibo me in praecedentibus meis rem omnem satis imperfecte proposuisse, nam verissimum est, quod observasti, non sequi tertiam curvam, quam congruere supponebam primae, secundae quoque congruere debere, quamquam caeteroquin assertum verum sit, ut nunc Geometrice id demonstrabo. Sit ergo (fig. 62) prima curva RPL, quae sui evolutione secundam LHC, et haec tertiam CDA describere intelligatur. Si prima et tertia congruunt, etiam secunda CHL congruet primae RNL vel tertia CDA, atque adeo hae curvae non solum amicabiles sunt, sed perfecte aequales. Ad demonstrationem hujus propositionis sequenti utor lemmate.

Si in duabus Curvis ABM et abm (fig. 61) sumtis quibusvis arcubus aequalibus AB et ab, ductisque per terminos B, b tangentibus BD, bd, anguli DBC, dbc comprehensi tangentibus et ordinatis ubique aequales sunt, ipsae curvae ABM et abm sibi mutuo congruunt. Et si loco arcuum aequalium AB et ab arcus utrinque accipiantur in data ratione, et anguli DBC et dbc semper aequales existant, curvae ABM et abm similes sunt.

Hoc posito, si curvae ADC et LNR (fig. 62) congruunt, sequitur omnes lineas CR, qQ, EP, DN, quae connectunt arcus aequales AC, LR; AE et LP etc. tum parallelas esse, tum aequales ipsi AL. Unde ductis per puncta quaevis q, E, D rectis qH, EI, DK perpendicularibus curvae ADC et per totidem puncta prioribus respondentia in prima curva Q, P, N rectis QH, PI, NK tangentibus curvam, quae prioribus perpendicularibus ad curvam ADC occurrent in punctis H, I, K etc. quae ex hypothesi sunt in Curva CHL. Jam vero anguli perpendicularium curvae ADC et parallelarum ipsi AL eo majores sunt, quo propiores fuerint eorum vertices puncto ultimo C; nam RCB est rectus, sequens vero QqH acutus quidem, sed major quam angulus PEI, et hic major adhuc est angulo NDK, et tandem angulus fit nullus, quando DN coincidit cum AL. Hoc sequitur, quia curva ADC cava est versus eandem rectam CB vel AB. Si jam angulus PEI statuatur semirectus, erit EI = PI, vel curva PNL = curvae IHC, et angulus EIT = ang. TIP vel alterno IPW. Porro rectae qQ et DN ita ductae intelligantur, ut anguli QqH et NDK simul aequales sint recto, hoc est ut unus horum angulorum alterius complementum sit ad rectum: atque hinc ambo triangula rectangula QqH et NDK propter hypotenusas aequales qQ et DN aequalia sunt et similia; unde qH = NK, hoc est curva CH = curvae NL, et angulus qHG = angulo KNO; et sic infiniti alii arcus aequales in curvis CIL et LNR sumi possunt ita, ut anguli tangentium et ordinatarum per puncta contactus utrinque constanter aequales sint. Unde per Lemma superius curva CHL congruit curvae LNR vel aequali ADC. Q. E. D. Calculum quoque pro curvis hujusmodi multum contraxi, cum is unica analogia perficiatur, in qua ne quidem secundorum differentialium aut expressione radii osculi opus sit. Nam vocando AL vel $DN = 2a$, $AF = x$, $DF = y$, $AD = s$, $D\delta = dx$, $Dd = ds$, fient triangula $Dd\delta$ et DNK similia, et cum NK sit $=$ NL, hoc est per hypoth. $=$ AD, erit $NK = s$, adeoque $Dd\,(ds) : D\delta\,(dx) = DN\,(2a) : NK\,(s)$. Hinc $sds = 2adx$, et $ss = 4ax$. Unde constat solam Cycloidem se inverso situ sui evolutione generare.

Analysis pro curvis similibus parum differt a praecedenti. Si (fig. 63) Curva LNR sui evolutione describens curvam LKC, similis sit curvae ADC descriptae evolutione secundae CKL, eodem fere modo ac prius probari potest, omnes tres eas curvas similes esse; unde lineae AL, DN, CR, quae supra parallelae erant, nunc concurrere debent in quodam puncto Z, rectae vero omnes AZ, DZ, CZ ductae ex punctis quibusvis curvae ADC secabuntur a curva LNB in data ratione. Unde vocando $AZ = a$, $LZ = b$, $AL = c$, DZ vel $FZ = y$, $AD = s$, $Dd = ds$, $D\delta = dy$, et $d\delta = dx$, erit $DN = \dfrac{cy}{a}$ et arcus $LN = NK = \dfrac{bs}{a}$. His positis, triangula similia $Dd\delta$ et DNK dant aequationem $bsds = -cydy$ et $bss = aac - cyy$. Atque hinc elicui $dx = dy\,\sqrt{(ayy - aab, :, a^2b - by^2)}$ (A). Hanc aequationem esse ad Epicycloidem, cujus diameter AB circuli generatoris AMB sit aequalis $a - \sqrt{ab}$, et $BZ = \sqrt{ab}$ = radio circuli immobilis, sic ostendo. Ponatur Epicyclois quaedam ADC, cujus Basis BC arcus circuli descripti centro Z intervallo $BZ = m$, et circulus generator AMB, sintque ut prius $DZ = FZ = y$, $AZ = a$ etc., aequatio differentialis Epicycloidis erit: $dx = dy\left(\dfrac{a}{m}yy - am\right) : \sqrt{(-aamm + (aa + mm)yy - y^4)}$ (B). Jam prima aequatio (A), multiplicando terminos fractionis surdae, per numeratorem $\sqrt{(ayy - aab)}$, factisque debitis reductionibus, mutatur in $dx = dy\left(\dfrac{a}{\sqrt{ab}}yy - a\sqrt{ab}\right) : \sqrt{(-a^3b + (aa + ab)yy - y^4)}$ (C). Jam si loco $\sqrt{ab}$ ponatur m in hac ultima aequatione, aequatio (C) plane coincidet cum aequatione (B), quae est aequatio differentialis Epicycloidis. Ergo etiam (A) est aequatio Epicycloidis, ut dictum est. Atque hinc iterum constat solas Epicycloides sui evolutione sibi similes curvas describere.

Quantum ad curvam se ipsam directe evolventem attinet, talis erit omnis ea, cujus radius osculi aequalis est curvae data linea auctae. Quod facile ostenditur. Sint duae curvae AB et CD, quarum illa describatur evolutione hujus, ita ut ambae sibi mutuo congruant. Si arcus CD (fig. 64) ubique aequalis est arcui AB, et cum ex natura evolutarum angulus quoque FDB constanter aequalis sit angulo GBE, manifestum est per superius Lemma, curvam CD congruere alteri AD; adeoque si radius osculi BD curvae AB fuerit $= AB + AC$, curva AB producetur evolutione curvae sibi aequalis. Et si curva CD ubique aequalis est alteri AB, erunt coordinatae CF, FD aequales coordinatis AE, EB. Adeoque vocando $AC = a$, $AE = CF = x$, $BE = FD = y$, erit $BM = x + y$ et $MD = HD - HM = a + y - x$. Erit ergo $B\beta(dx) : b\beta(dy) = BM(x + y) : MD(a + y - x)$; unde $xdy + ydy = adx + ydx - xdx$ aequatio differentialis curvae AB, in qua si indeterminatae cum suis differentialibus separari poterunt, habebitur constructio curvae quaesitae; hanc vero separationem nondum obtinere potui. Si radius osculi BD ponitur aequalis curvae AB + data AC, habetur aequatio ubi differentialia separata sunt, sed nascitur aequatio transcendens secundi gradus.

Tentavi etiam Problema inversum Virium centripetarum, quod adhuc intactum remansit, inveniendi nimirum curvas illas, in quibus mobilia habeant Vires centripetas juxta datam legem progredientes, ut juxta reciprocam rationem quadratorum distantiarum a centro directionis; nonnulla jam assecutus mihi videor, de quibus fortasse fusius agam in Schediasmatis Actis vestris Berolinensibus inserendis, si modo tanti videbuntur tenues speculationes meae. Hisce vale etc.

LIV.

Hermann an Leibniz.

Novem jam elapsi sunt menses et amplius, ex quo postremas meas ad Amplitudinem Tuam dedi, easque Hanoveram curandas Dn. Zanovello commendavi, sed de literarum mearum fato incertus, quia nullae interea responsoriae Tuae, Illustrissime Vir, ad me sunt perlatae, a me impetrare non potui, ut Tibi cultum meum et observantiam deferendi longiores moras necterem, maxime sub auspiciis hujus anni, quae Tibi frustra apprecor et laeta, et faxit Deus O. M. ut haec Te salvo et incolumi saepius recurrant, quod non meorum solum, sed universae Literatorum turbae votorum summa est. —

Plures jam praeterfluxerunt menses, ex quo P. Guidonis Grandi libellus de Infinitis Infinitorum prodiit, adeo ut vix dubitem, quin ejus contenta Tibi jam innotuerint. Versatur praecipuus egregii Viri labor, ut Hyperbolarum altiorum spatia plusquam Infinita Wallisii contra Dn. Varignon, qui haec tamquam contradictionem involventia in Actis Academiae Regiae explodere visus erat, geometricis demonstrationibus evincat, nam reliqua aliud non continent, quam lineares demonstrationes principiorum calculi Tui differentialis, quibus quantitates aliis infinities minores abjiciuntur, arcus curvarum infinitesimi pro lineolis rectis habentur etc. Operi poëticum proemium praemisit, quo initia, progressum, et praesentem statum scientiae infinitorum historica narratione persequitur. Praeter hoc opusculum P. Grandi, opus postumum de Principio Sulphureo Dn. Gulielmini, et Cl. Ramazzini Diatribam De Principum Valetudine tuenda, nihil fere notatu digni in Italia ab aliquo tempore in lucem venit. Si meorum qualiumcunque conatuum meminisse fas est, etiamnunc circa opusculum meum Mechanicae fluidorum, quod ob alia negotiorum impedimenta ab aliquo tempore huc ferme usque intermittere debui, occupatus jam sum, speroque fore, ut ineunte proximo Martio prelum subire possit. In hoc meo Tentamine, expositis generalibus fluidorum et liquidorum corporum affectionibus et praemissis nonnullis lemmatis ex Mechanica solidorum depromptis, considero primum gravitationes liquorum in vasis rigidis, harumque pressionum assigno medias directiones et centra pressionum, ex quibus dein tamquam corollaria omnia elicio, quae circa aequilibria liquorum et solidorum in liquoribus tradi solent: et prae circa regulas inde derivo pro determinandis firmitatibus tuborum requisitis ad superandas liquoris pressiones. Dehinc contemplor pressiones liquorum in vasis flexibilibus, et hac occasione Problematis de curvatura lintei generalem profero solutionem absque ullo calculo solaque geometria lineari. Postea evolvo ea, quae ab aëris gravitate et elasticitate proveniunt atque unico theoremate binas propositiones 21 et 22 lib. 2 Princ. Phil. Nat. Math. Dn. Newtoni complector, utpote quo ostendo, qua lege densitates aëris in diversis a terra distantiis variari debeant, quacunque demum lege corporum pondera in variis illis distantiis variari ponantur. Sed quia tamen hoc theorema particulari hypothesi elasticitatum aëris densitatibus proportionalium innititur, universalissimum subjungo theorema aliud, quod generaliter densitates aëris in Atmosphaera assignat, quaecunque demum relatio inter elaterem aëris ejusque densitates intercedere possit et gravium pondera in diversis a terra distantiis variari fingantur. Et cum viderem in Commentariis Academiae Gallicae Scientiar. Dn. Maraldum statuere, decrementa Mercurii in barometro 1, 2, 3, 4 etc. linearum contingere in altitudinibus supra horizontem (ubi argentum vivum in altitudine 28 digitor. suspensum haerere asserit) 61, 61+62, 61+62+63, 61 + 62 + 63 + 64 etc. ped. hancque progressionem observationibus satis accurate quadrare; theorema meum novissimum huic progressioni applicare volui et reperi in ultimis atmosphaerae confiniis seu in hypothesi hac Maraldiana in distantia ab horizonte 12796 hexapodarum, aërem paulo magis quam secuplo rariorem esse quam in horizonte, ubi mercurius in barometro est 28 digitorum. Ibi enim densitas aëris est ad densitatem in horizonte ut 121 ad 793. Excussis sic omnibus, quae ad pressiones liquorum spectant, progredior ad Mensuras liquorum fluentium, quam doctrinam libro secundo trado, in hoc enim Cl. Gulielmini reperta ad praxin faciliora reddere conor, atque loco tabularum illarum ad calcem illius Mensurae aquarum fluentium positarum, dumtaxat parametrum alicujus Parabolae mensurae quaesitae inservientis invenire doceo, quo invento absque tabularum illarum usu mensuram aquae fluentis per quamlibet sectionem ope logarithmorum facile obtineri ostendo; simulque alia nonnulla ad fluminum cursus spectantia pluribus expendo. Libro tertio tracto quicquid ad percussiones liquorum pertinet, et fusius in hoc examino motus corporum in mediis fluidis et resistentibus methodo diversa a Newtoniana et Varignoniana, supponendo primum densitatem medii ubique eandem esse, qua suppositione posita, geometricis demonstrationibus ostendo pleraque, quae a Newtono alia ratione ostensa sunt; postea considero densitates medii variari motusque ex hac hypothesi nascentes determino simulque invenio, qua ratione densitates medii variari debeant, ut corpora eadem accelerationis lege ac in vacuo descendere possint; dehinc varia tracto problemata circa motus projectorum in ejusmodi mediis, ut Data vi centripeta invenire medii densitates, ut mobile projectum data illa vi curvam datam decurrere possit; vel etiam Invenire vim centripetam, ut mobile medium resistens trajiciens, cujus in singulis locis notae sint densitates, vis illius actione datam itidem curvam describat. Hisce peractis pluribus ago de resistentiis, quas Solida corpora in fluidis lata, a suis figuris patiuntur, de figura seu curva velaria, cujus solutionem et demonstrationem etiam absque calculo algebraico trado, sed simplici demonstratione lineari; denique etiam motus navium expendo harumque celeritates, medias directiones et navium declinationes ope principiorum hactenus a me expositorum generaliter definio. Atque tandem opusculo finem impono examine motuum circularium fluidorum. Haec praecipua sunt meditatiunculorum mearum argumenta, quibus prolixius enarratis haud dubie taedio Tibi fui, cujus proinde est, ut veniam deprecer etc.

Patavii die 11. Jan. 1711.

LV.

Hermann an Leibniz.

Post nonnullas literas, quas ad Amplitudinem Tuam dedi, cum nullas responsorias licet multo tempore jam expectatas accepissem, alias jam superiori Januario exarandas duxi, quas ad Celeberr. nostrum Bernoullium direxi, persuasus eas Tibi certo redditum iri; eas tamen nondum apud Te appulisse nec postremas ex antecedentibus meis, ex humanissimis Tuis 4 Martii*) his diebus ad me perlatis non obscure mihi patuit, quod quidem valde dolui aliquandiu, sed subito post ex iisdem doloris lenimen percepi, utpote quae et eae Cl. Wolfii, quae praecesserunt, occasionem mihi ostendunt, fore ut copia tandem mihi fiat .... tantum Patronum meum et Fautorem, qualem Te multas ob causas suspiciendum semper et observanter colendum habui, ex quo abdicatione Dn. Sturmii Francofurtanam Professionem mihi decretum iri spem injiciunt. Dn. Wolfio jam respondi me ultro stationem accepturum esse, modo a Proceribus meis abeundi veniam obtinuero, quoniam a sexennio, ad quod hi Professores Patavini adstringuntur, biennium adhuc mihi explendum restat, quanquam non dubitem, me eam facile impetraturum esse. Caeterum gratias Tibi ago maximas pro cura, qua rem meam gerere dignaris, cum praesertim in hoc negotio novae vocationis, tum etiam in aliis multis, et certo asse-

*) Dieser Brief ist nicht vorhanden.

verare ausim, unam ex praecipuis rationibus, quibus inductus sim, ut ad vos propius accedere cogitem, hanc esse, quod perspiciam, novam hanc migrationem studiis meis mirum quantum proficuam futuram esse, cum frequentius et facilius de studiis meis et conatibus utcunque tenuibus Tecum conferre, majusque in iis lumen accipere possim. Et aliquid de meis nunc lucubrationibus subjungam, quoniam id jubes; etiamnunc in perpoliendo meo opusculo fluidorum occupatus distineor, quod fortasse jam praelis commissum esset, nisi lemmata nonnulla curiosa, imprimis vero admirabilem Tuam scientiam dynamicam demonstratam, addenda duxissem, ut ostenderem, quam multa sequantur ex principiis paucis iisque simplicissimis; nam ex eodem principio deduco quicquid proponi potest circa motus acceleratos gravium, sive moveantur in vacuo sive in medio resistente, tum etiam universam theoriam Centri oscillationis modo diverso a Bernoulliano a vectis consideratione petito. Multa alia recensere possem hanc ad rem attinentia, sed quia forte nonnulla se mihi objiciunt impedimenta, hisce plura addere non licet. Hisce vale etc.

Patavii 9. Aprilis 1711.

LVI.

Hermann an Leibniz.

Recte quidem ad me perlatae sunt literae Tuae 4 Martii Berolini datae, sed nescio an responsoriae meae 9 Apr. datae Tibi, Illustrissime vir, redditae sint, quibus gratias Tibi agendas habui maximas, quod mihi nihil tale merenti nec cogitanti stationem Francofurtanam Cl. Sturmii abdicatione vacantem procurare dignatus es.

Quod ad studia mea attinet, etiamnunc in perpoliendo opusculo meo Mechanicae fluidorum versor, quod quidem in his oris prelo subdere antehac mecum constituebam, priusquam de negotio Francofurtano mihi quicquam innotuisset, sed postea mutavi sententiam, ideo quod sperem fore, ut judicio Tuo et examini submittere possim ante ejus impressionem. In eo multa praemitto lemmata ex staticis desumta, inter quae Novam Tuam Scientiam

Dynamicam circa aestimationem virium corporum penes moles eorum et quadrata velocitatum conjunctim, aliqua diligentia stabilire conor, nec spero irrito conatu. Ex qua indagine id utilitatis cepi, ut ex unico simplicissimo principio non solum quicquid circa motus acceleratos in qualibet imaginabili gravitatis hypothesi proponi potest, sive corpora descendunt in vacuo sive in mediis quomodocunque resistentibus, facili negotio deducam, sed etiam universam theoriam Centri oscillationis modo diverso ab Hugeniano et Bernoulliano, tametsi conclusiones meae cum iis, in quas eximii hi Geometrae inciderunt, examussim conspirent etc.

Patavii d. 2. Junii 1711.

LVII.

Hermann an Leibniz.

Binas literas meas Amplitudini Tuae redditas esse ex postremis Tuis humanissimis laetus accepi. Statim post penultimas Tuas ad me perlatas Dn. Zanovellam rogavi, ut pyxidulam ut jussisti per tabellarium ordinarium ad TE curare vellet, quod paucos post dies se praestitisse rescripsit, adeo ut nullus dubitem, quin desideratum jam acceperis.

Deinde multo cum gaudio ex TE intelligo, Tua me sententia commode residuum temporis praesenti meae stationi praestituti absolvere posse, TEque pro insigni Tua erga me benevolentia curaturum, ut dilatae profectionis meae causae apud Berolinenses Ministros insinuentur, adeo ut, quod mihi pergratum est, securus pensum meum absolvere hoc loco possim. Hac itaque de re gratias ago maximas, quod non levem scrupulum, quem Dn. Wolfii literae celerem discessum urgentes mihi injecerunt, eximere voluisti, et pro literis, quas in junioris Dn. Bernoullii gratiam ad Illustrissimos Trevisanum et Guerinum dare dignatus es, quas hac aestate cuique suas praesens tradam proficua ipsos circa Bernoullii negotium consilia rogaturus. Caeterum etiam Dn. Nic. Bernoulli et Celeb. ejus Patruo significavi non abs re fore, si hydraulicis rebus, praesertim aquarum currentium legibus meditandis nonnihil laboris impendat, utpote rei Proceribus meis apprime commendatae et procul dubio in novo Mathematico vocando desideratae. Unde non male faceret, si juxta monitum Ampl. Tuae ad Batavos excurreret, rem illic aggerariam et aquatica opera inspecturus, nullumque est dubium, quin ipsi hoc studium pulchre successurum sit, ubi experientiam meditationibus praemiserit.

Non me latet Cel. Joh. Bernoullium olim Dynamica Tua apud Cl. Volderum fortiter propugnasse ipsumque in partes nostras traxisse, eleganti argumento a posteriori usum, cujus in Tractatu meo et Tuorum fusius mentionem faciam, quia Bernoullianum ratiocinium ex compositione motus desumtum nunquam adhuc in publicum prodiit, adeo ut vere dixerim, neminem adhuc de Dynamicis Tuis stabiliendis publice egisse. Demonstratio mea directa fundatur in jam passim noto theoremate mechanico infiniti prorsus usus, sed parum adhuc adhibito, quod scilicet Areae Curvae sollicitationum proportionales sint quadratis ordinatarum figurae celeritatum ex continua ejusmodi sollicitationum successione ortarum, ut si mobile A (fig. 65) aequabili motu celeritate EF ex E feratur versus Q, et alia vice celeritate GK ex G ibidem in Q, erit vis mobilis A celeritate EF ad vim ejusdem sed celeritate FK, ut $\overline{EF}^2$ ad $\overline{GK}^2$. Intelligatur enim mobile exiens ex A in singulis punctis rectae AE affici sollicitationibus versus Q directis et per ordinatas A_2A, B_2B, C_2C etc. figurae A_2A_2EE expressis. Jam vis absoluta mobilis in E est ipse nisus vivus, qui ex omnibus sollicitationibus, quibus urgetur, dum ex A venit in E, vel ex ejusmodi sollicitationum continua replicatione aut successione provenit, Nisus vero ex sollicitationibus hisce oriturus erit ut area A_2A_2EE figurae sollicitationum, quod facile est probatu; unde revera area A_2A_2EE exponit nisum vivum seu vim corporis in E, in quo acquisivisse intelligitur celeritatem EF, quacum si deinceps moveri intelligatur absque succedentium sollicitationum novis impressionibus, aequabili motu feretur. Pari ratione mobile A vim habebit in G, ubi celeritatem GK acquisivisse supponitur, exponendam area A_2A_2GG, prout id fusius ostendo in meo Tractatu; et quia EF, GK sunt ordinatae scalae seu curvae velocitatum AFK mobili acquisitarum illis sollicitationum replicationibus, et Newtonus demonstravit areas A_2A_2EE, A_2A_2GG proportionales esse quadratis ordinatarum EF et GK, sequitur vim absolutam et plenam corporis A cum celeritate EF esse ad vim ejusdem habentis celeritatem GK, ut quadratum EF ad quadratum GK.

Hoc idem eleganter etiam confirmatur per regulas motus ex percussione. Nam si globus elasticus A cum celeritate 4 impingatur in quiescentem se septuplo majorem 7A, ei imprimet celeritatem 1, et regredietur priore sua celeritate uno gradu imminuta seu ut 3, quacum impingatur secundo in globum quiescentem 5A, tertioque cum residua post hunc impactum velocitate 2 in quiescentem 3A, et denique residua celeritate post tertium impulsum 1, impellat quarto globum quiscentem A aequalem impellenti, singulisque globis 7A, 5A, 3A, A celeritatis gradum imprimet, ipse vero post quartum ictum ad quietem redactus erit adeoque tota ejus vis quatuor hisce impulsibus consumta; et quia globi impellentis ictus excipientes aequiveloces facti sunt, eorum motus sunt effectus violenti homogenei, quibus simul sumtis aequivalebit vis globi A celeritate 4. Unde hujus vis tanta est, quanta vis globi 16A singulis 7A, 5A, 3A, A aequivelocis et universis aequalis, sed vis globi 16A cum celeritate 1 est ad vim globi aeque velocis 1A, ut 16 ad 1, ergo vis globi A cum celeritate 4 est ad vim ejusdem cum celeritate 1 ut 16 ad 1 seu in duplicata proportione velocitatum.

Novi quidem Dn. Scheuchzerum in suis Itineribus Alpinis montium altitudines Barometro explorare solere, sed optandum esset ut observationes ejus cum altitudinibus aliunde certo compertis conferre liceret ad perfectionem hujus modi altitudines investigandi in praxi omnium facillimi. Experimenta fateor dissentire a Tabulis, quas Cassinus junior in Actis Parisinis prodidit, sed etiam has tabulas dissentire comperi a numeris qui ex hypothesi ordinaria Mariotto adhibita provenire debent, qui tamen saepe satis egregie cum observationibus conspirare mihi visi sunt, adeo ut nullus dubitem, quin hypothesis sua duplicis in aëre partis comprimibilis et incomprimibilis eleganter usui accomodari possit, quod saltem aliquando tentabo.

Ridicula plane est P. Grandi ἀβλεψία existimantis infinita nihila absoluta aggregare posse quantitatem datam, cujus paralogismum notasti, data eleganti aenigmatis solutione. Ab amico rogatus statim post Marchettianae epistolae publicationem, Grandiani erroris fontem detexi, ostendens Grandium perperam seriem suam $bV-bV, + bV-bV, + bV-bV$ etc. instar seriei convergentis tractasse, cujusmodi series erat, quae in Prop. VII extat, ex qua lepidum hoc suum Corollarium deduxit. Nam in figura ejus hic (fig. 66) resumta, existente curvae JDS ordinata $DP = GK$, et abscissa $GD = KP = LJ = KJ^2 : GJ^2$, quae in seriem conversa sit $= GV - G1$,

$+ G2 - G3, + G4 - G5, + (G5.KJ^2 : GJ^2)$. Jam si series convergens est, quod fit, cum GK minor quam VK, fractio $G5.KJ^2 : GJ^2$ abjici potest propter aliquam, ut G5, quavis data minorem, et habebitur praecise series, quam Prop. VII dedit; sed coincidente YG cum bV et GJ cum VJ, tantum abest ut fractio $G5.KJ^2 : GJ^2$ contemni debeat, ut potius tota series aequalis fiat huic fractioni, quae tunc erit $bV.KJ^2 : VJ^2 = \frac{1}{2}bV = VS$, elidentibus se mutuo omnibus terminis ipsam praecedentibus $bV - bV, + bV - bV$ etc. ipsorum numero existente pari; sed si impar fuerit adjecto adhuc termino G6, seriei summa erit $= bV - (bV.KJ^2 : VJ^2) = \frac{1}{2}bV$, ut prius, destruentibus se mutuo omnibus terminis, qui $bV - (bV.KJ^2 : VJ^2)$ praecedunt. Certe ejusmodi ridiculum Corollarium aptius est ad labefactandam mysteriorum fidem et prostituendam profundiorem Geometriam, quam ad easdem illustrandas.

Analysis mea Curvarum Paracentricarum ita habet in compendium redacta. Sint (fig. 67) GAN Paracentrica, AR directio jactus et DR ipsi perpendicularis ex centro sollicitationum D, sintque $DR = b$, celeritas jactus secundum $AR = c$, coordinatae curvae $DQ = x$, $QN = y$, $DN = z = \sqrt{xx + yy}$. Sollicitatio in curvae puncto $N = f$ et in eodem mobilis velocitas $= u$, Dq perpendicularis ad tangentem curvae $Nq = p$, arcus $PO = \Theta$, ejusque radius $DP = r$, Nn sit elementum curvae, et pn arculus centro D descriptus $= zd\Theta : r$. Triangula similia Npn et NDq praebent $d\Theta = - prdz : z\sqrt{zz - pp}$; verum est Cel. in $A_2 (c)$: Cel. in $N (u) = Dq (p) : DR (b)$, unde $p = bc : u$, quod in praec. aequ. substitutum dat $d\Theta = - bcrdz : z\sqrt{uuzz - bbcc}$ (1), quod pono $= d\sigma : n$, existente n quolibet numero positivo rationali; hinc $d\Theta = d\sigma : n$, et $\Theta \pm q = \sigma : n$. Idcirco quoties σ est arcus circuli similis cuidam arcui TPO, ejusque radius ad hujus radium ut 1 ad n, id est ut numerus ad numerum, Problema est Algebraicum. Pono igitur $d\sigma : n = - rdt : n\sqrt{rr - tt}$, ubi $t = \frac{+}{+} e \frac{+}{+} A$, et e constans, A vero quantitas quaelibet data in z et constantibus, unde aequatio (1) fiet $bcrdz : z\sqrt{uuzz - bbcc} = rdt : n\sqrt{rr - tt}$; atque hinc elicitur sequens $uu = bbcc : zz, + (ss \pm 2eA - A^2) nnbbcc : B^2z^4$ (2), existente $ss = rr - ee$ et $B = dA : dz$. Differentiando deinde aequationem (2), loco zudu ponendo $- 2fdz$, cui aequale est, dividendoque per $-2dz$, habebitur denique generalis formula $f = b^2c^2 : z^3, + (2s^2B + s^2zC \mp ezB^2 \pm 4eBC \pm 2ezAC + zAB^2 - 2A^2B - zA^2C) n^2b^2c^2 : B^3z^5$, existente $C = dB : dz$. Generalis curvae

cui haec formula competit, elicitur ex aequatione $\Theta \pm q = \sigma : n$ vel .... constante $\pm q$ quae duntaxat curvae axem diversificat, $\Theta = \sigma : n$; vel $\nu\Theta = \mu\sigma$, posito $1 : n = \mu : \nu$. Nam $\sqrt{rr - tt}$ est sinus rectus arcus σ, et $t = \frac{+}{+} e \frac{\overline{+}}{+} A$ sinus complementi, unde vocando ejus secantem S et tangentem T, erit $S = r^2 : \frac{+}{+} e \frac{\overline{+}}{+} A$, et T $= \sqrt{SS - rr}$. Unde per canonem pro multisectione arcus per secantes et tangentes, erit secans $\mu\sigma = S^\mu : (r^{\mu-1} - 2ir^{\mu-3}T^2 + 4ir^{\mu-5}T^4 - 6ir^{\mu-7}T^6 + \text{etc.})$, ubi $2i = \frac{n.n-1}{1.2.}$, $4i = \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}$; $6i =$ etc. Arcus Θ vel PO tangens est $ry:x$, et secans $= rz:x$, unde arcus $r\Theta$ secans erit
$= rz^r : (x^r - 2kx^{r-2}yy + 4kx^{r-4}y^4 - 6kx^{r-6}y^6 + \text{etc.})$, ubi $2k = \frac{r.r-1}{1.2}$, $4k = \frac{r.r-1.r-2.r-3}{1.2.3.4.}$, $6k =$ etc. Et quia arcus $r\Theta$ et $\mu\sigma$ aequales sunt, secantes eorum etiam aequabuntur, atque hinc elicio generalem curvae aequationem $S^\mu.(x^r - 2kx^{r-2}yy + 4kx^{r-4}y^4 - \text{etc.}) = rz^r.(r^\mu - 2ir^{\mu-3}T^2 + 4ir^{\mu-5}T^4 - \text{etc.})$. Quae semper finito terminorum numero constabit, quoties numeri μ, r fuerint integri et rationales.

Haec, ut mandatis Tuis obtemperarem, proferre debui. Haec methodus fortasse in aliis quoque utiliter adhiberi poterit.

Jam per diversos in Autores historicos quos petiisti inquiri curavi, sed nihil adhuc de iis rescire potui, nec quicquam novi in re medica, Physica aut Mathematica ab aliquo tempore prodiit, quod communicare possem vel indiculum mittere. La Galeria di Minerva suo tempore in Germaniam mecum deferam. Hisce vale etc.

Patavi Postrid. Cal. Jun. 1712.

LVIII.

Leibniz an Hermann.

(Im Auszuge)

Iterata vice Tui causa ad Berolinenses scripsi, nec contradici video. Quae per Dn. Zanovellam misisti, mea ut arbitror culpa corrupta advenere, credo quod calores jam increvissent. Debueram petere maturius. Quantum memini, non expressisti, quandonam ex compacto finiatur pensum Tuum Patavinum. Putem Te non tantum posse, sed et debere jam nunc significare Curatoribus Academiae, discessum tempore expleto Tuum imminere, ut mature prospicere Academiae de successore possint. Rationes facile suppeditabunt domesticae res Tuae, monita paterna, alia id genus. Simul suggeres amicum Tuum viris insignibus, Querino et Trevisano faventibus, ut spero: juvante nomine et ipso quod commendabis studio ejus rei aquilegiensis.

Probatione illa vel confirmatione Dynamices meae quam Dn. Bernoullius petiit ab ictu obliquo, ego quoque dudum usus eram, imo illa consideratio inter primas fuit, quae me ad rem inveniendam juvit, cum Parisiis juvenis in Pardiesii libello de Motu legerem; quae ille habebat de ictu hujusmodi obliquo, obiter attulerat. Sed vereor ut ea via quam ingressus es ad demonstrationem mei principii pervenire possis. Sit celeritas unius ejusdemque mobilis c, solicitatio quarum aggregatum est, erit dc. Vires (ex meo principio) sunt ut quadrata celeritatum seu v ut cc, ergo elementum virium dv ut cdc. Sit spatium seu longitudo percursa l et tempus t, constat esse dl ut cdt. Ex Tuo vero schemate, elementum virium dv est velut trapezium ${}_2C_2EE$ seu ut dc dl, hoc ergo si est ut c dc, dl erit ut c, quod est verum positis dt constantibus. Vera igitur doctrina Tua, quod dv est ut dc dl, seu quod elementa virium sint in ratione composita ex rationibus elementorum celeritatis et elementorum spatii, positis elementis temporis aequalibus, et demonstrari potest, si assumatur vires esse ut dixi. Sed si contra ex doctrina Tua velis demonstrare meam, demonstrandum Tibi erit aliunde, esse dv ut dc dl, positis dt constantibus, quod qua ratione praestare possis a priore, sine principiis metaphysicis quibus ego utor et quae olim ad Dn. Joh. Bernoullium perscripsi, curiose spectabo, ubi aperueris. Principia etiam metaphysica mea, veros hujus doctrinae fontes, Tecum lubens communicabo, sed quorum in gratiam nonnihil meditandum est mihi, magis enim in schedis quam in memoria habeo, etsi meditatione semper recuperare possim, citius etiam quam quaerere schedas, quae in Oceano chartarum natant. Accuratius loquendo dicerem esse dv ut dc dl : dt, quia dv est ut cdc, et c ut dl : dt. Suaserim si permittis dynamica tentamenta ad mentem meam non immisceri Operi Hydragogico, sed praemitti peculiari opera, possemque mittere aliquid, a Te (si videbitur) amplius deducendum et illustrandum. Regulae quidem percussionum per omnia conspirant. Ostendi olim, nisi haec aestimatio observetur, habiturum iri motum perpetuum; item assumo eandem quantitatem virium servari, si nihil accidentalibus (ex. gr. mollitie materiae) absorbeatur.

Grandius et Tuus ille Antagonista non videntur satis profecisse in nostra Analysi, idque ut spero, si noscatur ab intelligentibus, Dn. Nic. Bernoullio proderit. Interim dispiciendum erit, an non juvenes ingeniosi apud Italos, sed qui simul sint bonae mentis, nec ingrati inflatique ut illi, his nostris initiari possint. Pro commmunicata analysi pulchra paracentrici theorematis Tui gratias ago.

Hypothesis massae aëreae ex comprimibili et incomprimibili compositae in calculos tabulasque Tuo (si quando vacabit) studio referri meretur. Mihi id vel ideo gratissimum foret, quia de Hercyniorum montium altitudine utcunque hinc conjectanda cogitamus.

Velim nosse quid Grandius responderit, si admonitio Tua ad eum pervenerit. Dn. Wolfius mea nuper Tibi perscripta longius protulit peringeniose.

LIX.

Hermann an Leibniz.

Nullus dubito, quin literae meae 2 Junii Ampl. Tuae redditae fuerint, interea ego Mens. Apr. Actor. vidi atque in eo solidissimam Tuam annotationem in Responsionem Cl. Varignonii ad Libr. P. Grandi de Infinitis Infinitorum; et sane verissima sunt quae illic de Infinito et Infinite parvo mones, talia non nisi quantitates fictas esse, sed quae ad veritatem ducant atque ideo toleranter veras existere. Hisce demum diebus Amicus quidam mutuo mihi dedit excellentissimum Opus quod inscribitur, Essais de Theodicée sur la Bonté de Dieu, la liberté de l'Homme et l'origine du Mal, quod a pluribus Patriciis Venetis cum admiratione lectum esse accepi; tametsi tantum obiter id perlustrare potui, utpote paulo post possessori restituendum, id tamen tanto me lumine perfudisse confiteri teneor, ut nusquam paria me visurum existimem, nisi qui librum transcribere velit. Uno verbo, nihil unquam ejus praestantiae circa materias difficillimas me legisse assero. Nodus Liberi et Necessarii ibi quantum humanitus sperari poterat, solutus videtur, adeo ut alter philosophicus circa Continuum et Indivisibilia adhuc extricandus videatur.

Circa Historicos Neapolitanos a Porcacchio editos et Historiam Gentis Malespinae cum ipse inquisivi ubique, tum ab aliis inquiri curavi, sed hactenus nihil de his Autoribus rescire potui. Plura, ne taedio sim, non addam. Vale etc.

Patavii d. 7 Julii 1712.

LX.

Hermann an Leibniz.

Gratias ago maximas, quod altera vice mei causa ad Berolinenses scribere dignatus es. Putabam me jam in aliqua ex praecedentibus meis significasse, pensum hoc meum Patavinum finitum iri die 28 Aprilis anni futuri 1713.

Quod ad Systema Tuum Dynamicum attinet, verissimum utique est quod mones, rem eo deduci, ut probetur a priori dV esse ut dcdl:dt, positis dV, dl, dc, dt pro elementis vis motricis, spatii, celeritatis et temporis. Id vero probare conabor praemissis nonnullis, quibus utrum rem acu tetigerim necne, ipsa videbis. Pono itaque, quod

1. Corpora aequalia et aequivelocia sunt Virium aequalium. Hinc si mobile aliquod M feratur Vi V + dV et celeritate c + dc, eidemque mobili alia vi V praedito et celeritate c accedat incrementum vis motricis dQ, quod celeritati c addat incrementum dc, ita ut vis totalis sit V + dQ et celeritas huic conveniens c + dc eadem cum illa, quae vi V + dV competit, erit V + dV = V + dQ, vel dV = dQ.

2. Si Mobile M celeritate c et Vi V spatiolum AB (dl) (fig. 68) percurrere incipiens, in singulis insuper spatii punctis urgeatur versus D sollicitatione S, erit Vis mobilis in fine spatii B, ut V + Sdl seu (nominando Sdl, dQ) ut V + dQ.

Nam quia Mobile M initio spatii A vim ut V habet, et praeterea in singulis spatii AB punctis afficitur vi sollicitante S, ejus vis in fine spatii aucta erit Vi quae resultat ex sollicitationis S actione continua et non interrupta durante motu in spatiolo dl; atqui haec Vis resultans est ut factum ex sollicitatione S in spatium dl, quandoquidem sollicitatio in nullo spatii puncto otiosa intelligitur, sed per omnia continuata atque permanens. Est igitur Vis totalis composita ex vi in A seu V, et ex quae resultat ex sollicitationis S continuatione in spatio dl seu Sdl, quam mobile habet in B, ut $V+Sdl$.

3. Si sollicitatio S in spatio dl continuata absque interruptione tempusculo dt quo mobile spatium illud transmittit ejus celeritati c incrementum dc superaddat, ita ut celeritas ejus in fine temporis dt vel spatii dl sit $c+dc$, huic celeritati conveniet vis $V+dQ$.

Etenim cum mobile spatiolum dl celeritate c percurrere incipiat, et tempusculo dt, quo spatium illud percurrit, sollicitatio S (hyp.) generet incrementum celeritatis dc, finito illo tempusculo erit mobilis celeritas $c+dc$. Verum (art. 2.) in fine ejusdem spatii tempore dt confecti vis mobilis est $V+Sdl$ vel $V+dQ$. Ergo celeritati $c+dc$ convenit vis $V+dQ$.

Haec omnia, ni fallor, clara sunt, quibus positis propositio principalis facile nunc concludetur:

Si viribus V et $V+dV$ quae duntaxat majoris elemento dV a se invicem differunt, conveniant celeritates c et $c+dc$, ac sollicitatio quaecunque S in spatiolo dl continuata tempusculo dt, quo mobile spatiolum illud percurrit, generare possit celeriatis c incrementum dc, dico fore nesessario elementum virium $dV = Sdl = dQ$ seu $dV = dldc:dt = cdc$.

Cum (hyp.) sollicitatio S tempusculo dt celeritati mobilis c adjungat ejus elementum dc, celeritati totali $c+dc$ conveniet (art. 3.) Vis $V+dQ$. Verum eidem celeritati $c+dc$ convenit (hyp.) vis $V+dV$; ergo (art. 1.) $V+dQ=V+dV$, et $dQ=dV$; unde quia $dQ=Sdl$, erit $dV=Sdl=dcdl:dt=cdc$. Q. E. Dem.

Atque ex hisce apparet, cur in praecedenti mea epistola expresserim vires areis figurarum, quarum ordinatae essent sollicitationes quaecunque, abscissae vero spatia mobili percurrenda, quod nimis confuse in dicta illa epistola explicueram. In hisce consistit mea demonstratio, qua principium Tuum Dynamicum probare conatus sum, quo vero successu meum non est affirmare, quin imo meo ratiocinio merito diffidens Tuo id judicio approbanti vel rejicienti submissum volo et debeo. Principia, quibus in hisce uteris, Metaphysica pereximia esse debere, non vane judico ex opere excellentissimo Theodiceae. Atque inde est quod immensum Tuorum in me collatorum beneficiorum cumulum non parum auctum sentiam, quando eorundem particeps factus fuero, ut humanissime me sperare jubes, atque iisdem velut pretiosissimis gemmis opusculum meum exornandi veniam impetravero.

Dynamica mea tentamina Hydragogicis non immiscebo, sed peculiari tractatione operi praemittam. Argumentum, quo olim ostendisti, motum perpetuum aliquando oriri debere, si vires essent ut quantitas motus, etiam urgeo in opusculo meo. Etiam reperio ex principio, quod eadem virium quantitas servetur, regulas motus ex percussione deduci posse.

Sint enim A et B mobilia eorumque celeritates ante ictum $+a, -b$, suppono enim sibi invicem his celeritatibus obviam venire idque facilitatis gratia, namque in reliquis casibus sequens discursus similiter valere videtur, $-\alpha$ et $+\beta$ eorum velocitates post ictum. Juxta principium habetur $Aa^2 + Bb^2 = A\alpha^2 + B\beta^2$, vel $Aa^2 - A\alpha^2 = B\beta^2 - Bb^2$, seu $A . a + a . a - \alpha = B . \beta + b . \beta - b$ (1). Jam si singulae celeritates augeri intelligantur incremento $+dp$ (poterat etiam sumi decrementum $-dp$) ita ut $+a, -b, +\beta$ et $-\alpha$ fiant $+a + dp, -b + dp, +\beta + dp$ et $-\alpha + dp$ substitutisque hisce valoribus loco illorum in aequatione 1, orietur sequens $A . a + \alpha . a - \alpha + 2dp = B . \beta + b . \beta - b + 2dp$, vel $A . a + \alpha . a - \alpha + 2Adp . a + \alpha = B . \beta + b . \beta - b + 2Bdp . \beta + b$ (2). Subducta aequatione (1) ex hac (2) remanebit $2Adp . a + \alpha = 2Bdp . \beta + b$, vel divisa aequatione per $2dp$, $A . a + \alpha = B . \beta + b$ (3); hinc $Aa - Bb = B\beta - A\alpha$. Jam si celeritas centri gravitatis ante ictum dicatur z, post ictum ω, et summa corporum seu $A + B = M$, erit $Aa - Bb = Mz$ et $B\beta - A\alpha = M\omega$; ergo $Mz = M\omega$ vel $z = \omega$, id est centrum gravitatis eadem celeritate movetur ante et post conflictum. Deinde divisa aequatione (1) per (3) resultat $a - \alpha = \beta - b$ vel $a + b = \alpha + \beta$, id est, eadem est velocitas relativa corporum ad se mutuo appropinquantium, quae recedentium post congressum. Paria inveniuntur in casu, quo mobilia ante collisionem ad easdem partes moventur, in hisce celeritatis additamentum $+dp$ vel $-dp$ vices motus communis seu navigii supplet, sed in hoc differt ab hac suppositione ab aliis adhibita, quod illi motum navigii datum assumant pro demonstrationis indigentia, hoc loco vero sit quantitas, data quavis minor, imo nulla, quo non obstante propositio adhuc obtinet.

Inter multos, quos in his regionibus in Mathematicis institui, unicum tantum Juvenem Vicentinum bonae indolis simul et idoneum nactus sum, qui in profundiore Geometria initiari posset. Is laudabiles jam profectus fecit, adeo ut elegantia ab ipso suo tempore sperari possint.

Jam mecum constitui Hypothesin Tuam Massae aëreae ex comprimibili et incomprimibili compositae excolere ubi primum nonnihil otii nactus fuero, atque tabulas inde condere, quae dimensionibus altimetricis inservire possint; rei cardo in eo verti videtur ut disquiratur, quanam proportione pars comprimibilis incomprimibili in variis ab horizonte distantiis admixta sit, quod ex observationibus accuratis, ut Maraldianis, forte fieri poterit. Non puto P. Grandum annotationem meam in mirificissimum suum Creatrix Corollarium vidisse, quia occasione controversiae cum Cl. Varignonio commercium quod mecum habebat literarium intermisit.

Pulchras esse oportet Cl. Wolfii meditationes in Tuas nuper mecum communicatas quas aliis seriebus similes Grandianae absurditatem in speciem involventes applicuit, quod Tibi non displicuerint. Eas suo tempore cum aliis Eruditionis ejus monumentis mihi nondum visis, ut Ideam Universalem Matheseos vernacula lingua conscriptam et ab Amico harum rerum gnaro mihi valde laudatam, cum voluptate inspiciam.

Circa desideratos libros Fontanini, Vignolii, Bianchini, Crescimbenii Amico Venetias scripsi, ut in eos et Catalogos inquirat; interim hujus Bibliopolae Patavini Catalogum per brevem transmitto, donec alios accepero, quos deinceps sine mora quoque mittam.

Accepi omnino optimi Viri Cl. Fardellae infortunium casus apoplectici; interim per Dei gratiam non solum adhuc in vivis est, sed etiam sat virium adhuc habuit, ut Barcinone discedere et Neapolim iter ingredi posset, quod ante aliquot septimanas feliciter absolvit, et Balneis nunc Neapolitanis cum fructu et spe recuperandae salutis utitur. Hisce vale etc.

Patavii d. 4. Aug. 1712.

LXI.

Leibniz an Hermann.

Dn. Nic. Bernoullium ex Batavia in Angliam transfretasse, a Dno. Patruo ejus accepi. Si praenovissem hoc ejus in Batavos iter, consuluissem ut ad Ill. Ruzzinum prius adiret; spero tamen hoc in reditu feliciter fieri posse.

Utile erit perfici meditationem de columnae aëris compositione ex comprimibili et incomprimibili parte, possetque generali calculo res determinari, quacunque demum lege gradus et quantitas comprimibilitatis mutaretur. Per experimenta deinde determinabitur, quae lex mutandi maxime respondeat. Cogitamus in Hercyniae montibus et puteis exprimenta sumere. Hinc etiam nova lux habebitur circa constitutionem aëris. Gratias ago pro Catalogo Patavino. Plura fortasse in Venetis notanda occurrent.

In demonstratione Tua dynamica novissimis literis ad me perscripta omnia bene procedunt, nisi quod postremam consequentiam non intelligo, nempe cum ais Sdl = dcdl : dt. Nam solicitatio S, ut hic a Te accipitur, est quoddam potentiae incrementum infinitie infinites parvum, ducendum in elementa infinities infinite parva spatii seu in elementa spatioli; itaque non apparet, quomodo tale elementum potentiae aestimare possis ipsius potentiae mensura nondum constituta, nec alio adminiculo adhibito. Neque etiam istam aequationem uspiam quod sciam probas. Non sunt jam ad manus Tuae literae praecedentes, unde nescio an in illis aliquid attuleris ad probandum esse Sdl = dcdl : dt.

Equidem probari potest meum principium Dynamicum ex suppositione gravitatis seu solicitationis aequalibus temporibus aequalia celeritatis elementa imprimentis, eo prorsus modo quo jam olim ostendi in Actis Eruditorum, nempe aestimando vim vel potentiam ab effectu eam consumente seu violento. Licet enim hypothesis physica gravitatis et experimenta ibi adhiberi videantur, revera tamen experimenta tantum inserviunt ad confirmationem, demonstratio autem ex ipsa hypothesi ab experimentis animo abstracta procedit.

Sed probationem altiorem habeo ex principiis metaphysicis, quam nempe desideras, ubi non est necesse procedi per elementa infinite parva, nec opus est adhibere effectum violentum aut suppositionem, qualis est gravitatis. Adhibeo autem notiones quasdam potentiae, effectus puri, et actionis, easque ad motum aequabilem applico. Sit ergo, ut soleo, longitudo spatii seu linea motus l, tempus t, velocitas v, corpus c, effectus e, potentia p, actio a. Effectus aestimatio mihi talis est, ut dicam effectus esse in ratione composita corporum quae transferuntur, et linearum, per quas transferuntur. Ita dicendum est, e esse ut cl. Nempe effectum hic considero purum, in solo discrimine inter statum priorem et posteriorem producto consistentem, non spectando media per quae discrimen illud est productum. Loquor autem de effectu puro, non de violento illo supradicto, seu vim qua producitur consumente, qui revera eam etiam metitur, veluti cum corpus grave ad aliquam altitudinem est attollendum; quod secus est in effectu puro qui manente potentia producitur, veluti cum corpus intelligitur translatum per aliquam longitudinem in plano horizontali. Porro in Actione aestimanda compono tam effectum purum, quam velocitatem qua est praestitus; et proinde in motu aequabili, ubi quovis temporis elemento aequali idem effectus eadem celeritate producitur, dicendum est esse a ut ev seu actiones esse in ratione composita effectuum et velocitatum. Atque ita cum ostenderimus esse e ut cl, sequetur esse a ut clv. Sed potentiae notio talis est, ut ducta in tempus, quo exercetur, actionem producat, seu ut potentia sit id, cujus exercitium temporale actio est, nam non nisi ex actione potentia nosci potest. Itaque in motu aequabili, ubi eadem manet potentia, dicendum erit esse a ut pt, seu actiones esse in ratione composita potentiarum et temporum, quibus potentiae exercentur. Et proinde habemus clv ut pt. Jam constat in motu aequabili esse l ut tv, seu longitudines percursas esse in ratione composita temporum et velocitatum, itaque fiet ctvv ut clv, et proinde ctvv ut pt. Ergo tandem fit p ut cvv, seu potentiae erunt in ratione composita ex corporum simplice et velocitatum duplicata. Q. E. D. Ex his sequitur egregium Corollarium, posito aequalem quantitatem potentiae servari in mundo, consequi ut etiam aequalis quantitas actionis in mundo servetur temporibus aequalibus. Nempe ut tantum sit Actiones motricis in una hora, quantum in alia quacunque, et ita dici possit, eandem esse quantitatem Motionis in mundo, sed recte acceptae, addendo scilicet aequalem temporis quantitatem. At Cartesius quantitatem

Motus non recte accepit, dum a tempore eam separare voluit, quod tamen omnis actio involvit. Rectius id, quod quantitatem motus vocavit, vocasset quantitatem conatus, quippe rei momentaneae, cum ipse actualis motus sit res successiva.

Nosti meas illas tres Regulas circa duorum corporum durorum concursus directos centrales. Nempe si mobilia sint A et B, celeritates ante ictum a et b, post ictum α et β, ponendo has velocitates esse quantitates affirmativas, cum tendunt in easdem partes, eam vero negativam quae tendit in contrarias, hinc prodibit Reg. 1: Eadem manet quantitas potentiae, $Aaa + Bbb = A\alpha\alpha + B\beta\beta$; Reg. 2: Eadem manet quantitas progressus, $Aa + Bb = A\alpha + B\beta$. Differt autem quantitas progressus a quantitate motus Cartesiana, quod cum corpora in contrarias partes tendunt, progressus totalis est differentia progressus in singulis. Porro in singulis quantitas progressus et quantitas motus Cartesiana coincidit. Reg. 3: Eadem manet celeritas respectiva, seu qua corpora distantiam mutant, $a - b = \beta - \alpha$. Et quidem ex harum trium regularum duabus quibuscunque vulgari calculo sequitur tertia, v. g. si $A(aa - \alpha\alpha) = B(\beta\beta - bb)$ dividas per $A(a - \alpha) = B(\beta - b)$, id est aeq. 1 per 2, prodit $a + \alpha = b + \beta$, quae est aequatio tertia. Quando corpora non sunt satis dura, pars virium in motus intestinos partium mollis impenditur atque ita disparet. Sed a Te pulcherrime observatum video, ex Reg. 1 deduci secundam, adhibito incremento velocitatum communi dv, posito da, db, $d\alpha$, $d\beta = dv$ quasi promotione in easdem partes elementari; id autem statim calculus differentialis more meo dabit: scilicet ex aeq. 1 differentiando fiet $2Aadv + 2Bbdv = 2A\alpha dv + 2B\beta dv$, id est $Aa + Bb = A\alpha + B\beta$, quae est regula secunda. Operae tamen pretium erit, hanc consequentiam ab aequatione ordinaria ad differentialem hujusmodi hic demonstrari rigorose. Ego rem alia methodo demonstravi. Fingo (fig. 69) planum, in quo concurrunt corpora A et B, esse inclinatum ad horizontem, sed angulo infinite parvo, et ita corpora sibi occurrere impetu proprio, sed simul etiam descendere communi impressione gravitatis; porro in corporibus gravibus a gravitate exercenda non impeditis commune centrum gravitatis continue descendit, quam recte potest, et quidem motu accelerato, perinde ac si gravium summa in ipso centro gravitatis collecta esset. Nec privatus eorum motus gravitatis effectum impedit, sed hoc loco acceleratio est infinita parva ob inclinationem inassignabilem, et proinde coincidet cum motu aequabili. Cum ergo casus horizontalis coincidat cum casu inclinationis infinite parvae, et casus inclinationis infinite parvae det progressum centri gravitatis aequivalentem aequabili, utique casus horizontalis dabit eundem. Idem etiam alia demonstratione sic conficietur et quidem adhuc melius vel evidentius: Corpora A et B concurrant in plano horizontali, ponantur autem prius descendisse ipsa in arcubus verticalibus circulorum planum horizontale tangentibus, ex altitudinibus quae motum iis dedere, quem habent, atque ita quidem, ut ambo eodem momento descendere desinant ac planum horizontale attingant; quo etiam momento eorum centrum gravitatis commune nactum erit certum gradum celeritatis, eoque gradu in recta horizontali (A) (B) perget usque ad concursum. Jam si post concursum centrum hoc non feratur celeritate eadem qua prius, sed aliam nanciscatur, servabit eam, nisi quid impediat. Ponantur jam corpora post concursum pergere ea, quam in concursu accepere, celeritate et directione non amplius impedita, et eodem momento ambo pervenire ad arcus horizonti inclinatos eumque tangentes quales supra, in quibus iterum assurgere possint, tunc centrum gravitatis commune etiam eo momento ascendere incipiet, sed non tamen eadem celeritate, qua prius descendere desiit, sed ea quam nactum est post concursum, ergo nec ad eandem, ex qua descendit, altitudinem praecise assurgere rursus poterit, sed vel plus poterit ascendere vel minus, ac proinde effectus non erit aequalis causae, quod ponimus esse absurdum. Ergo fieri nequit, ut celeritas centri communis per concursum mutetur. Habemus ergo utramque regulam ex eodem principio nempe conservatae potentiae demonstratam. Sed habeo et alias vias, quae nova nec satis hactenus observata docent, et quae proferri fortasse merentur, ne intercidant. Itaque cogito, dynamica quaedam elementa breviter conscribere Tibique mittere, ut si videbitur, augere et illustrare possis. Ita ex meo brevi libello, Tuoque ampliore commentario nascetur fortasse Opus Dynamicum peculiare non contemnendum, a Tuo Hydragogico plane, ni fallor, separandum. Habeo etiam demonstrationem, quod in omni corpore, imo linea vel figura detur centrum gravitatis, quod nescio an satis ab aliis sit demonstratum. Guldinus ea de re consulendus foret. Quod superest, vale etc.

Dabam Wolfebyti 9 Septembr. 1712.

LXII.

Hermann an Leibniz.

Ob temporis angustiam, cui nunc includor, hac vice non nisi festinantissimo calamo haec pauca ad Amplitudinem Tuam deproperare possum, ut significem, recte me accepisse binas Tuas epistolas, quarum prior eximiam continebat demonstrationem Propositionis Dynamicae circa aestimationem Virium; altera vero me certiorem faciebat, quod Ampl. Tua ad Serenissimi Electoris Brunsvicensis Plenipotentiarium literas dedit in gratiam Dn. Nic. Bernoulli cum Ill. Carolo Ruzzino communicandas, quas optimum, spero, effectum producturas esse, non obstante quod in iis futuri mei discessus mentio facta sit, quod non valde nocere potest ob eas ipsas rationes, quas Ampl. Tua adducit.

Rogavi et petii a Bibliopolis Venetis Catalogos suorum librorum, sed apud nullum impressum Catalogum invenire potui, quem Ampl. Tuae transmittere possem.

Pro demonstratione Tua theorematis itidem Tui dynamici tanto majores debeo et ago gratias, quanto praestantior et nescio quid eximii mihi continere videtur. Unde non possum non enixe rogare Ampl. Tuam, ut Elementa Scientiae Dynamicae, quorum spem mihi facit, quantocyus licuerit, conscribere dignetur. Multi enim sunt in his oris, qui cogitata Tua nonnihil admittere et mirifice admirari incipiunt, inter quos etiam Illustrissimus Abbas Antonius Conti, Patricius Venetus, quo vix quemquam magis in interiore Geometria versatum novi, postquam aliquamdiu mea institutione usus est. Is certe Philosophemata Tua magis, quam verbis explicare possim, deperit. Omnia quae in meo libro Mechanico huc faciunt, quia ita Tibi agendum videtur, removi, ut aliquando, si ita videbitur, seorsim imprimi possint, postquam oculos Tuos subierunt. Opusculum meum Mense Novembris, ut spero, prelo subdetur, quod Illustri Nomini Tuo tanquam Praesidi Societatis Berolinensis inscribere cogito, si ita permiseris, quandoquidem non aequum esse duco, ut sub alius Patrocinio in publicum exeat, quam qui summum in hisce, ut in aliis scientiis fastigium attigit. Non solum versatur circa fluida, sed etiam complectitur, quaecunque ad motus gravium pertinent in quacunque gravitatis hypothesi, ut taceam alia quae spectant vectem infinitis potentiis obliquis impulsum, et generalissimam propositionem, cujus problemata Catenariae, Velariae etc. tantum casus sunt particulares. Proxime vero distinctiorem tabulam totius opusculi, et circa dynamica perscribam. Interea accipe hic literas Dn. Bourgueti, et plurimum vale etc.

Patavii d. 27 Octbris 1712.

LXIII.

Leibniz an Hermann.

Dn. Bernoullium juvenem reducem in Batavos spero ad Illust. Ruzzinum adiisse. Gaudeo mea principia dynamica Tibi non displicuisse; quem dedicationis honorem mihi destinas, magis muneri meo, quam merito tribuo. Rogo, ut si tibi vacaverit, Hypothesis de gravitate aëris partem non elasticam admistam habentis meminisse velis. Semen bombycum nuper aestate nimis provecta venit mea culpa, qui non maturius petieram; unde in itinere periit. Itaque ausim tantumdem hac vice petere, sed ea lege, ut utriusque pretium indices. Gratissimum erit schema Tui operis. Dno. Bourgueto inclusas mitti peto. Nunc id agitur, ut meae Theodicaeae Tentamina Latine Germaniceque edantur, fortasse et Anglice. Credo, qui Italice tentaret, omissis ponendis vel in margine refarcitis, quae illic non probantur, Censores adversos non esse habiturum. Quod superest, vale et fave etc.

P. S. Gaudeo etiam Illustr. Abbatem Contium in methodos nostras penetrasse, nec philosophemata mea spernere.

LXIV.

Hermann an Leibniz.

In postremis meis literis sub finem Oct. datis, Amplitudinis Tuae Epistolae 13 Sept. mens. Oct. ad me perlatae contenta ad Scientiam pertinentia aliis tunc et aliquandiu post negotiis distracto attingere mihi non licuit; nunc vero tantillum otii nactus praecipua ejus capita breviter perpendam, multiplici namque et profundiore doctrina referta.

Video in penultimis meis aliquam mihi consequentiam probatione egentem excidisse, cum ex consideratione Sollicitationum mobilibus continue applicatarum dynamicam Tuam Propositionem deducere conatus sum: scilicet positis Sollicitatione quacunque acceleratrice S, elemento longitudinis percurrendae dl, Celeritatis dc, et temporis dt, dixeram esse Sdl ut dc dl : dt, sed non probaveram, unde quod illic omissum, hoc loco supplendum est. Id vero deducitur ex notissimo principio, quo Celeritatum incrementa momentanea dicuntur esse in composita ratione Sollicitationum et elementorum temporis, quibus ea generantur, adeo ut sit dc sicut Sdt, et S ut dc : dt; hinc Sdl ut dcdl : dt. Q. E. D.

Scio jam pereleganter olim ab Ampl. Tua ostensum esse principium Dynamicum ex consideratione gravitatis aequalibus temporibus aequalia celeritatis elementa mobili ascendenti auferentis, argumento ab e f f e c t u v i o l e n t o potentiam consumente petito. Interim tamen rem paulo generalius sumendo putabam ejus etiam demonstrationem a priori haberi posse ex generalissimis motus principiis, conferendo Potentiae seu vis vivae elementa cum elementis dc celeritatum, praescindendo a mediis seu causis physicis dicta celeritatis elementa mobili imprimentibus. Nam causa agens quaecunque quae mobili m, tempore dt, celeritatis elementum dc inducit, erit ut mdc : dt. Potentia vero (dP) celeritatis elemento (dc) conveniens, erit ut C a u s a a g e n s actionisque e x t e n s i o conjunctim. Actionis extensio mihi est spatium seu extensio, in qua causa indesinenter et continue agit, id est in cujus singulis punctis operatur; est igitur dP ut mdcdl : dt; unde cum dl : dt sit ut celeritas (c), sequitur esse dP ut mcdc, et P ut mcc. Hac, inquam, ratione me demonstrationem a priori obtinuisse existimaram. Et quanquam haec deductio rem satis commode conficiat, eam tamen nihili facio prae perexima Tua demonstratione ex principiis metaphysicis derivata, pro cujus communicatione humanissima gratias quas possum maximas ago, utpote quae mihi mirifice placuit, non obstante quod difficultas me premat, quae ab ingenii mei tarditate haud dubie provenit; ut ea me liberem, eandem proponere libet, humanitati Tuae, Celeberrime Vir, confisus a qua ejus solutionem supplex expecto. Positis nempe longitudine spatii, seu linea motus l, tempore t, velocitate v, corpore c, effectu e, potentia p, et actione a, tres sunt analogiae, quarum concursu probas esse pt ut ctvv, vel p ut cvv: I. quod sit e ut cl; II. quod sit a ut ev; et III. quod a ut pt. Prima et tertia nihil mihi negotii facessunt, solumque circa secundam haereo; nam quia actiones mihi effectibus proportionales videntur, adeo ut dupla, tripla actio etiam duplum, triplum etc. effectum praestare debeat, ideo non video cur esse debeat a ut ev, cum potius crediderim, esse a ut e simpliciter; nam cum effectus nomine intelligatur quicquid a causa producitur, sub effectu e celeritas v jam contineri videtur, ita ut non appareat, cur in aestimatione actionis velocitas cum effectu, sub quo velocitas jam comprehenditur, adhuc semel debeat componi. Haec sola est difficultas quae mihi est super subtilissima Tua demonstratione, quam tamen mihi exemptum iri spero in Elementis Tuis Dynamicis, quorum mihi pro incomparabili Tua humanitate et benevolentia spem fecisti, quae magna cum aviditate expecto, nullus dubitans alia adhuc praeclara in iis contentum iri; talia non vanus auguror ex iis quae de Regulis motus habes, circa aequabilem progressum centri gravitatis corporum inter se collisorum ante et post occursum, deductum ex principio conservatae potentiae motricis post ictum, quae erat ante impactum corporum perfecte durorum. Quod mea deductio ejusdem aequabilis progressus Tibi non displicuit, est quod mihi gratuler; quin et mihi etiam constitit jam ab eo tempore rem per calculum differentialem expediri posse, differentiando aequationem $Aaa + Bbb = A\alpha\alpha + B\beta\beta$, ut habeatur $2Aadv + 2Bbdv = 2A\alpha dv + 2B\beta dv$, ex qua ultro fluit $Aa + Bb = A\alpha + B\beta$, et talem demonstrationem jam tum Ill. Abbati Conti, Patricio Veneto, harum rerum gnaro, per literas communicaveram; sed mihi non abs re videbatur rem in ultimo rigore demonstrare.

Demonstrationem Tuam, qua ostendis, in omni linea, superficie, et corpore dari centrum gravitatis, novam esse auguror et ex aliis principiis deductam, quam quibus Wallisius hoc idem (prop. 15 De Centr. Grav. fol. 638 Operum suorum Math. Tom. 1) demonstrans usus est. Guldinus vero ad manus non est.

Opusculum meum non solum circa hydrostatica versatur, sed generaliter complectitur, quae scitu necessaria sunt circa vires corporibus applicatas; nam id absolvitur duobus libris, quorum primus subdivisus in duas partes continet multa circa medias directiones infinitarum diversarum tendentiarum juxta quaslibet directiones, punctorum, quo refertur elegantissimum Tuum theorema in Diario olim Parisiensi publicatum, dein linearum et denique superficierum, in quibus omnibus elegantes observantur centri gravitatis proprietates; deinde has tendentias etiam contemplor in corporibus flexibilibus generali aliqua propositione, sub qua continentur solutiones Curvarum Catenariae, Velariae, Lintei et hujus naturae infinitae aliae; non enim considero tendentias seu impulsus, quibus ejusmodi Curvarum puncta urgentur, curvis perpendiculares solum seu etiam axi parallelas, sed utcunque obliquas, harumque tendentiarum medias directiones determino. Parte vero secunda primi libri absolvo, quaecunque ad motus acceleratos, vel retardatos, isochronos, paracentricos et id genus alios spectant, seposita tamen resistentia medii; atque inter alia a priori demonstro Hugenii principium, cui universam theoriam Centri oscillationis superstruxerat, scilicet commune centrum gravitatis partium penduli cujusque compositi, si quaeque pars ea celeritate ascendere incipiat a reliquis separata, quam cum his reliquis conjunctim et connexa descendendo acquisiverat, ad eam ipsam altitudinem reascensurum esse, ex qua delapsum erat partibus illis penduli compositi conjunctim descendentibus, quod principium etiam Cel. olim Jac. Bernoullius, sed indirecta tantum demonstratione stabilivit, idque ex formula sua pro centro oscillationis deduxit. Sed demonstratio mea ab hujus centri notione independens est, remque directe concludit. Secundus liber corporibus fluidis destinatur, eaque pervestigat quaecunque ad pressiones seu gravitationes liquorum, ad vires vasorum ad perferendas liquorum pressiones necessarias, ad aequilibria liquorum, ad gravitationes atmosphaerae ejusque densitates et elasticitates pertinent; tum etiam motus aquarum ex vasis erumpentium et nonnulla circa cursus fluminum, deinde vires fluidorum ex percussione, quo pertinent resistentiae quas corpora in fluidis lata a figuris patiuntur, nec non motus corporum in mediis fluidis tam rectilineos quam curvilineos perpluraque alia discutit, adeo ut opusculo titulus de Viribus et Motionibus corporum solidorum et fluidorum natus sit, quod Illustri Tuo nomini et Societati Regiae nostrae, quae Berolini est, inscribere ausus sum; ineunte novo anno prelo committetur. In animo quidem habebam in primo Libro Dynamica tractandi, ubi argumenta Tua adversus Papinianas objectiones pluribus vindicare conatus sum; verum quia talia seorsim pertractanda censes et maxime quia ipse Systematis Tui elementa edere in animum induxisti Tuum, omnia huc pertinentia ex libro sustuli. Quod vero aliquas mihi in edendis Elementis Tuis Dynamicis partes permittere digneris, id citra ullum meum meritum tanquam benevolentiae Tuae erga me testimonium luculentum interpretor, qua etiam de re est quod gratias agam maximas.

In gratiam Dn. Bernoulli Illustriss. hujus Academiae Curatoribus scripsi, cum ipsis demum abeundi propositum negotiorum domesticorum et voluntatis Paternae praetextu aperui, quorum responsoriae spem felicis exitus injecerunt, nam Excell. Duumviri Venerius et Morosini promiserunt se Bernoullii rationem habituros esse; sic etiam plurimum conferet, quod Ampl. Tua eundem Dn. Bernoullium per Illustr. Ruzinum commendari curavit.

Quod reliquum est, faustum Ampl. Tuae anni exitum et auspicatum in proxime inchoandum introitum precor, omni prosperitatum genere transigendum; faxit D. O. M. ut anniversariae ejusmodi vicissitudines Tibi et Scientiis quibusvis solidioribus saepissime felices sospiti recurrant; mihi interim favere non desine etc.

Patavii d. 22 Dec. 1712.

LXV.

Leibniz an Hermann.

1. Febr. 1713.

Novissimas meas cum inclusis ad Dn. Bourguetum acceperis; interea accepi ipse, quas 22. Decemb. anni superioris doctas et ingeniosas dedisti, quibus nunc respondeo. Et primum observo mihi sollicitationes et ipsa celeritatis incrementa momentanea esse idem. Ita non celeritates elementares, sed spatia infinities infinite parva celeritate elementari percursa erunt in ratione composita celeritatum elementarium (seu solicitationum) et elementorum temporis.

Quae de Causa agente actionisque extensione dicis, mihi non satis liquida videntur. In causa agente, ni fallor, spectanda est potentia; itaque non video quid sit illud in causa agente, quod cum spatio conjungis, ut habeas potentiam; nec cur quaeras aliquid extra causam agentem, ad formandam potentiam.

Opus est, distincta quadam notione et expositione erui notum effectum (nempe non violentum, a simplicioribus enim inchoandum est), quem ita accipio, ut separem a celeritate, qua praestatur, quanquam nemini vetare, possim, ne vocabulum aliter accipiatur pro eo, quo ego ipsam actionem aestimo, cum scilicet id, quod praestatur, conjungitur cum celeritate praestandi. Itaque intellecta mente mea nullam video rationem haerendi in eo, quod dixi, esse a ut ev, id est ut compositum ex eo quod praestatur, et celeritate qua praestatur. Et si admittis, ut facis, esse e ut cl, id est effectus esse in ratione composita tam corporum, quae promoventur quam longitudinum per quas promoventur, jam eo ipso admittis acceptionem effectus meam, quae praescinditur a celeritate. Nam manifestum est, cl posse conjungi cum majore minoreve velocitate, et ita prodire clv vel ev, quod ego tum attribuo toti actioni.

Atque ita ex ipso e ut cl, quod agnoscis, actiones effectibus proportionales non sunt. Tres meae compositiones rationum, nempe e ut cl, a ut ev, a ut pt, nihil aliud sunt quam definitiones; nempe esse ut cl, est apud me definitio effectus, et esse ut ev, est apud me definitio actionis; et esse ut a: t, est apud me definitio potentiae, seu a esse ut pt: nempe potentiam (ex suo utique exercitio agnoscendam) definio per id, quod exercendo ducitur in tempus, et ita producis actionem. Intelligo autem actionem, qua potentia agit quantum potest. Haec ubi satis meditatus fueris, fortasse reperies, non commodius has notiones distingui ac digeri posse, nec rationes inveniri magis determinatas.

Non admitto causam agentem, quae mobili m tempore dt dat celeritatem dc, esse ut mdc:dt; nec video quomodo hoc possit probari, nisi assumas ut definitionem. Sed tunc non capio, nec video, quomodo ex hac notione cum spatio conjuncta formès potentiam, et cur non alius pari jure diceret causam agentem esse ut mdl:dt, vel aliud quiddam? Deinde in simplicissimis Elementis, ut hic, non quaeritur, quid causa agens in alio producat, sed quid in se ipsa, nempe causa. Hic ipse status mobilis seu potentia determinatur, si ejus magnitudinem, et celeritatem attendas, nec de productione celeritatis, sed productis ope celeritatis agitur.

Quodsi ad magis composita progredi definitionemque hanc illis applicare velis, reperies nec tunc rem procedere, sed potentiam saepe determinare ex solo mdc, nec referre quantum sit tempus dt. Exempli causa corpus grave descendens ex aliqua altitudine producit aliquam celeritatem, nec refert quo tempore descendat: tempus enim variabit, prout planum descensus erit plus vel minus inclinatum. In his ergo eundum est per gradus, incipiendo a simplicissimis, et multa cum circumspectione incedendum; alioquin quidvis ex quovis faciemus. In simplicissimis, velut hypothesi motus aequabilis, et corporis non gravis, vel gravis in horizonte moti, frustra adhiberentur quantitates elementares.

Actionis etiam extensio per spatium non est commoda, nec capienda satis, nisi eam reddas momentaneam et accipias alio quam ego sensu. Actio mihi est temporalis et jam in se involvit spatium seu longitudinem, actioque adeo non censenda est extendi. Extensio enim alicujus rei intelligitur, cum additur aliquid novum, per quod res extendi replicarique censetur. At potentia mihi per tempus extenditur, quia ipsa per se, meo sensu, tempus non involvit, sed est momentaneum quiddam, quod quovis momento replicatur, seu ducitur in tempus. Et ita prodit actio data. Sed Tu, cum de actionis extensione loqueris, alio eam sensu accipere videris. Tuae definitiones plane abludunt a meis et ita variabimus in terminis. Tu sumis effectum extensius quam ego, ut aequetur meae actioni: Actionem autem sumis restrictius quam ego, ut äequetur meae potentiae. Ita frustra aequationem institueremus.

Dn. Bernoullius junior, cum reversus esset ex Anglia, Illustr. Ruzzinum Ultrajecti adiit, qui postea Plenipotentiario Electorali Brunsvicensi, cui commendaveram, dixit: Cl. M. Bernoulli me paroist bien jeune, pour étre Professeur, et de plus la profession n'est pas encore vacante. Vereor ne prius noceat; posterius non nocebit: itaque Tibi significare mature volui, ut obviam eas huic difficultati. Puto enim, si adsit doctrina et prudentia, vigorem aetatis potius commendationis loco haberi posse, et spero Juveni prudentiam non defore; nec semper de hominum prudentia et moribus ex primo aspectu brevique congressu judicari potest. Credo Te ipsum, cum Patavium venisti, non multo aetate majorem fuisse. Dn. Professori Bernoullio rem mature significari e re erit. Ego interim Illustr. Plenipotentiario Brunsvicensi scribam, scientiam non esse annis aestimandam, videboque an aliquid Illustr. Ruzzino insinuari possit quod in rem sit.

Ignosce, quaeso, quod literae istae tam male scriptae sunt; multa allevi inter relegendum, quo melius explicarem mentem meam, nec ob brevitatem temporis describere vacavit.

De seminibus Bombycum, quantum nuper, iterum petere audeo. Vidistine P. Sacchieri Jesuitae apud Papienses Neostaticam, ex supposito concursu linearum directionis in centro terrae, et quid de illa Tibi videtur? Ajunt hominem esse magni ingenii, et sunt fortasse Patavii, qui eum norint.

Vale et fave etc.

LXVI.

Hermann an Leibniz.

Non solum nuperrimas Amplitudinis Tuae literas cum inclusis ad Dn. Bourguetum ipsi redditis, sed etiam novissimas recte accepi. Statim atque priores mihi redditae essent, semina bombycum optimae notae per Amicos conquiri curavi et obtinui, quae nunc mitto optans, ut felicius, quam priora, ad Te perveniant.

Postremae Ampl. Tuae literae scrupulum, qui mihi circa ejus Dynamica supererat, penitus exemerunt, qua de re gratias quantas possum ago maximas. Non videbam, quomodo posset dici a esse ut ev, quandoquidem effectus nomine intelligebam omne id quod ab actione producitur vel praestatur, adeo ut sub effectu etiam contineatur velocitas v, qua corpus c suam longitudinem l absolvit. Verum cum effectus sit ut corpus transferendum et longitudo l conjunctim, praescindendo a celeritate nunc clare perspicio esse omnino a ut ev, adeo ut nunc omnia mihi liquido constare videantur. Sed talia Tibi non videntur ea quae circa actionem ejusque extensionem in postremis meis balbutivi, incommodis vocabulis usus. Verumtamen ut aliquid veri ex iis deduci posse existimo, restricto terminorum significatu ad determinatum sensum, ita ad melius exprimendam mentem meam libenter nunc omnia a definitionibus ordirer, nisi temporis angustia prohiberer; verum id proxima occasione exequi conabor.

Quod opusculum meum Illustri nomini Tuo inscribere audeo, non est muneri utlibet splendido, sed extentiori Excell. Tuae merito per universam quaqua patet Rempublicam literariam agnito tribuendum et debito quo ipsi ob tot benevolentiae testimonia mihi hactenus humanissime exhibita obstrictus sum, praeterquam quod opusculo maximum hac ratione decus, cujus capax est, concilia bo.

Si sat temporis in hoc loco commorandi mihi superesset, magna cum voluptate Tua Theodiceae Tentamina Italice redderem et cum Amicis postea communicarem, ut Versionem corrigerent et perpolirent; sed paucos dies post Paschalis festum abhinc discedam, posteaquam pro hoc tempore dimissionem a Proceribus meis jam impetravi. Dn. Bernoullium juvenem multa solicitudine pluribus Patriciis de meliore nota commendavi et faventes quidem responsiones obtinui, quibus tamen nondum acquiescere possum, quia audio P. Corazzum, Benedictinum Monachum, qui ante hoc sexennium etiam meus Competitor erat, non solum stationem prensare, sed nonnullos jam Proceres in suas partes traxisse, quod ipsis persuasisset, se in Architectura Aquaria plurimum valere, qua in re nescio quae magnifica se praestiturum promisit, eundem haud dubie exitum habitura, quem ejus quadratura Circuli, quam se invenisse arbitrabatur, habuit. Caeterum homo est in Mathematicis plane hospes. Non desinam propterea omnes nervos in id intendere, ut Dn. Bernoullius mihi successor constituatur, nec certe ejus juventus quicquam obesse deberet, quanquam et mihi, cum primum Venetias venissem, juvenilis aetas objecta sit. Interim apud Amicos, qui aliquid valent, efficere nunquam desino hanc objectionem amoliri, quandoquidem Ill. Ruzzinus etiam eam movit. Hisce vale etc.

Patavii d. 2. Mart. 1713.

LXVII.

Leibniz an Hermann.

Non dubito quin literas meas acceperis non unas: priores cum additis ad D. Bourguetum, alias, quibus annotavi nonnihil ad dynamica a Te communicata. Avide Tuas expectavi, tum ut scirem quando iter ingressurus esses, tum quo esset loco quaestio de successore. Significaveram Ill. Ruzzino Dn. Nic. Bernoullium admodum juvenem visum. Abiit ille in Galliam. Mallem prius se Ruzzino per amicos talium judices probasset, et rei hydragogicae practicae in Batavis operam dedisset. Spero tamen nihilominus ei favitum iri, nam de se spem nobis non mediocrem excitavit. Si favere potes missu seminis bombycum, quantum anno praecedente fuit, res maturanda esset ob appetentes calores, ne pereat, ut superiore anno mea serius petentis culpa acciderat. Posset recta per cursorem publicum Hanoveram destinari. Ego, ut par est, satisfaciam. Quam primum hinc discedere paro, neque amplius a Te hic literas spero. Vale. Dabam Viennae 24 Martii 1713.

LXVIII.

Hermann an Leibniz.

Literas quas memoras, Amplissime Vir, ad Dn. Bourguetum et me datas accepi omnes, ut reapse jam in diversis meis responsoriis significavi, quas non recte redditas esse ex postremis Tuis Vienna datis cum taedio intellexi.

Plura alia circa res Mathematicas scribere volentem impediunt perplura negotia, quorum nonnulla mihi imminens discessus accersit, sed spero me, ubi in Germaniam venero, genio meo facilius indulgere possim; hoc tamen reticere non possum nec debeo, postremas Ampl. Tuas literas mihi omne dubium circa ejus demonstrationem Dynamicam exemisse, quam prorsus eximiam censeo, utpote mire simplicem et ingeniosam etc.

Patavii d. 6. Apr. 1713.

Es folgt hier ein Brief Hermann's, datirt Venetiis 11 Maj. 1713, der nur Mittheilungen in Bezug auf seinen Abgang von Padua enthält.

LXIX.

Hermann an Leibniz.

Statim post meum in hac urbe adventum literas ad Te, Ill. Vir, dare constitueram, sed spe detentus fore, ut quam primum Hanoveram sis rediturus, propositum meum ad exitum deducendum hucusque distuli. Jam superiore mense Septembris in hisce oris appuli et paulo post Munia mea laetus auspicatus sum. Nuperrime literas quidem Patavio accepi, sed nemini adhuc vacantem meam

Professionem decretam esse intellexi, ut adeo spem omnem non abjiciam de transferenda statione in Dn. Nic. Bernoullium.

Est quidam Monachus Benedictinus, jam meus antea Competitor pro eadem Cathedra, qui consilia in omnes partes vertit, ut statione potiatur; et alius quidam Collega meus in Lycaeo Patavino etiam curas suas eo intendit, ut mihi in Professionem succedat. Interim quia nihil adhuc profecerunt, indicium id mihi praebere videtur, Proceres Academiae ad eorum vel saltem alterutrius electionem nequaquam propendere, quod Bernoullio non potest non proficuum esse, quandoquidem Cl. Varignon nomine Societatis Parisiensis amplum Canditati profectuum atque peritiae testimonium Curatoribus misit, et societas Berolinensis eundem inter suos ascivit. Basileae transeunti monstravit mihi Cl. Prof. Bernoulli syllogen literarum, qua Angli freti calculi differentialis inventionem soli Newtono suo tribuunt, atque in ea violentum ipsorum processum miratus sum; ex adverso gaudebam quodam modo, eundem Bernoullium capitalem in Newtono errorem detexisse, ex quo satis aperte constet, Newtono secundas differentias sumendi genuinam rationem ne tum cognitam fuisse, cum Principia sua Philosophiae Naturalis prima vice ederet, quod in controversia de Inventore Calculi differentialis, in quantum a Calculo Barroviano distinguitur, maximi momenti est.

Secunda eorundem Principiorum Newtonianorum editio prodiit, quam propediem expecto, visurus num errorem correxerit Newtonus. Ceterum felicissimum hujus anni expirantis exitum et felicissimum in novum introitum toto pectore precor; faxit Deus ut saepius adhuc ejusmodi temporum vicissitudines laeto Tibi et sospiti recurrant. Vale etc.

Francofurti ad Viadrum d. 22. Dec. 1713.

LXX.

Leibniz an Hermann.

Mirabar quod tam diu nihil a te intelligerem, et suspicor adhuc etiam ex literis Dn. Joh. Bernoulli et Dn. Bourguetti, aliquam ex tuis intercidisse. Nam Bourguettus responsum aliquod suum tibi credidisse significat. Ego tamen non nisi unum de Theodicea mea per te accepi.

Ex quo indicium de Dn. Venere fecisti, statim ex sententia tua Hanoveram scripsi.

Facile agnosco, iter et rerum domesticarum constitutionem mutationemque loci tibi meditationes Mathematicas aliquandiu non permisisse; spero tamen rebus in tranquillo jam locatis rediturum te ad praeclaras illas curas. Et omnino doctrina de aestimanda altitudine locorum ex differentiis Barometri perfici meretur, adhibita etiam si placet hypothesi mea.

Scripsi Berolinum hortatusque sum, ut cogitent de novo Miscellaneorum Tomo, in quem et ipse nonnulla conferam, nec dubito, quin plurimum a te juvari hoc institutum possit.

Nosse velim, quis ille sit Monachus Benedictinus tibi olim competitor. Cum neminem habeam Venetiis, nec satis sciam an literae meae ad Dn. Abbatem Fardellam recte perferantur, obstringeres me non parum, si quem indicares, cui commendari possent.

Commercium Epistolicum Londini editum nondum vidi, remotus nunc a locis, ubi haberi potest. Itaque nec dum satis plene respondere possum. Quod superest reciproce tibi fausta et felicia omnia in hunc et sequentes annos precor. Vale. Dabam Viennae 10 Januar. 1714.

LXXI.

Hermann an Leibniz.

Felicem Vienna in his oris Excell. Tuae reditum gratulor, inter alia etiam hanc ob causam, quod literae meae tutius ad Te pervenire queant. Semel enim atque iterum sciscitatus sim, num velles literas nonnullas a Dn. Bourgueto mihi traditas, cum Patavio abirem, Viennam mitti, an vero tantisper apud me retineri, donec ad has oras appulisses; sed nihil responsi accepi. Sciscitabar etiam, quid fieri cuperes de fasciculo Parisiis misso Tibique destinato. Sed statim atque Dn. Wolfius mihi occasionem vel potius personam indicavit, cui mitti debeat fasciculus, illico eundem Bibliopolis nostris Viadrinis merces suas Lipsiam ad Nundinas instantes mittentibus tradi curavi Lipsiam deferendum atque, ut Dn. Wolfius mihi significavit, Foerstero Bibliopolae vestro reddendum;

qua de re Ex. Tuam certiorem facere volui. Hisce vero antiquiores Bourgueti literas addere e re duxi, qui ut cultus sui atque observantiae Te certiorem facerem, me Venetiis solventem plurimum rogavit. A Dn. Wolfio cum voluptate intelligo, Te editionem meditari commercii Tui epistolici fasciculo literarum ab Anglis edito opponendum, quo sine dubio luculentissime injustae vociferationes, quibus Inventionis honorem Calculi differentialis Tibi eripere moliti sunt, retundentur. Hoc idem etiam desiderat Dn. Varignon, qui valetudinem et otium ad id Tibi precatur. Newtonus agnovit errorem a Dn. Joh. Bernoulli per Nepotem ejus sibi indicatum et correxit, non tamen correctoris ullam mentionem fecit in nova Principior. Phil. Nat. editione, et negat errorem consistere in erronea evolutione serierum suarum ad exprimenda secunda, tertia etc. differentialia, sed in inversione alicujus tangentis. Opus meum Illustri nomini Tuo inscribendum nondum sub prelo est, sed propediem in Hollandiam ad Wetstenios id mittam imprimendum. Theoriam Virium Centralium mihi plurimum ampliasse videor, ex quo has vires non ad aliquod punctum positione datum dirigi, sed exseri in mobile secundum directiones lineam quamcunque curvam contingentes contemplatus sum. Problema reducitur ad quadraturas hoc casu, etsi mobile in vacuo fertur, cum e contrario duntaxat involvat inventionem radii circuli osculatoris et tangentium, si virium centrum sit unicum punctum; nec certe adeo facile est, etiam seposita resistentia medii, quandoquidem hoc casu tempora non amplius sunt ut areae, ut in altero casu unius centri indivisibilis. Ego vero in meo libro mobile in pleno moveri supposui atque adeo resistentiam medii una consideravi et nihilominus canonem admodum simplicem naotus sum, quo mihi innotuit sollicitationem centralem seu vim centripetam in quolibet curvae puncto, cum mobile fertur in medio resistente, se habere ad vim centripetam in eodem curvae puncto, cum mobile fertur in vacuo, in duplicata proportione abscissae majoris ad minorem alicujus quadrilinei hyperbolici inter asymptotas, quod quadrilineum aequetur areae densitatum, id est illi areae quae oritur extenso arcu curvae a mobili descripto in lineam rectam atque in singulis punctis erectis perpendicularibus densitati medii in correspondentibus curvae punctis proportionalibus, in suppositione resistentias medii proportionari quadratis celeritatum ductis in densitatem medii. Sed forte nimium Tua tempora moror, Vir Consultissime; quod si est, veniam precatus me ulteriori Tuo favori et benevolentiae étiam atque etiam commendo. Vale etc.

Francofurti d. 24 Septembr. 1714.

LXXII.

Hermann an Leibniz.

A Cl. Wolfio nostro certior factus Hanoverae Te nunc agere, Vir perillustris atque excellentissime, absque ulteriori mora hoc epistolium ad Te dare debui, partim ut literas Cl. Michelotti, celeberrimi apud Venetos Medici, comitarer, partim etiam ut Cl. Varignonii petito satisfacerem; praecipue vero ut cultum meum obsequiosissimum Tibi significarem. Sed ut ad Cl. Varignonii petitum redeam, de eo sequentia ejus verba faciunt: „Je vous remercie du ,soin que vous avez eu du paquet que M. de Lith vous a remis „de ma part pour M. de Leibnitz; je vous prie d'y veiller encore, „et quand vous ecrirez à Mr. de Leibnitz de luy demander s'il l'a „reçue: c'est un present d'un Abbé de consequence d'ici, qui m'en „demande souvent des nouvelles, c'est un projet de Paix perpe- „tuelle, dont vous avez sans doute veu le plan dans differens Jour- „naux, et dont cet Auteur voudroit bien avoir le sentiment de Mr. „de Leibnitz, c'est à dire ses objections, pour le perfectioner." Jam superiori anno tempore nundinarum Lipsiens. D. Michaelis Bibliopolae nostro Conrado Lipsiam eunti fasciculum illum tradidi, Dno. Forstero Bibliopolae vestro commendandum ad id, ut eum deinceps ad Te deferri curaret. Literas vero meas, quibus hoc significaveram, una cum Varignonianis ad Cl. Wolfium ejus hortatu miseram. Postea vero num fasciculus cum literis Tibi redditus sit, rescire non potui: nam incertus ubinam locorum degeris (pro certo enim mihi nuntiatum erat cum Sereniss. Principe Walliae, Majestatis suae Britannicae Nuru, in Angliam Te transfretasse) id ex Te ipso sciscitari non poteram nec quicquam a Cl. Wolfio ea de re accipere. Nunc vero, ex quo non amplius dubitare licet, quin hae literae tuto ad Te perventurae sint, Te etiam atque etiam rogatum velim, ut de eventu missi illius fasciculi literarumque haud gravatim certiorem me facere dignari velis, ſut cum Cl. Varignonio id quamprimum communicare queam.

Dn. Michelottus, cujus literas cum hisce accipis, percelebris est apud Venetos Medicus et insignis Practicus Procerum gratia tantum florens, ut si non omnes, saltem plerique, ejus opera utantur, et quia est subacti judicii Vir Matheseosque laudabiliter gnarus, fieri non potuit, quin extantiorum Tuorum illustriumque in rem literariam universam, praesertim vero solidiorem Philosophiam et Mathesin reconditiorem meritorum cultor sit strenuus et admirator devotus, prout ex ejusdem literis id abunde colligere poteris. Si, quod Michelottus anxie exspectat, ad literas ejus responsum dare dignaberis, ad me mitti poterit, nisi brevior via pateat recta Venetias scribendi. Is Dni. Nic. Bernoullii mihi in Patavino Lyceo substituendi negotio non solum plurimum favet, sed meo rogatu fervide urget eaque de re frequenter literas cum Cl. Prof. Patruo Nicolai permutat. Sed detrectatorum Bernoullii astutia atque malitia factum, ut successus nondum pro voto responderit. Agebatur apud curatores Patavinos de Cel. Prof. Bernoulli Patavium vocando, sed quia is summam 1500 thalerorum uncialium pro annuo honorario poposcit in quam Excell. Proceres consentire non audent, totidem ducatos Venetos thalerorum loco offerentes, vereor ne tota res in irritum recidat etiam in praejudicium Doctiss. ejus Nepotis, quia hoc posito, Michelotto judice res ferme conclamata est, cum ex adverso si Dn. Johannes duntaxat per biennium aut triennium operam suam Universitati Patavinae commodare voluisset, ejus Nepoti deinceps Patruo substituendo indubia spes facta sit. Hoc ipse Michelottus Cl. Professori significavit, sed minime hoc moveri videtur ad vocationem accipiendam. Caeterum enixe rogo ut porro favere pergas etc.

Francofurti ad Viadrum 17. Maji 1715.

Es folgt hier ein Brief Hermann's, datirt Francofurt. 2 Sept. 1715, mit der Anzeige, dass er ein Exemplar seines Werkes übersendet.

LXXIII.

Leibniz an Hermann.

Spero silentio meo diuturniori veniam a Te datum iri, lectis quae ad Egregium Virum Petrum Antonium Michelottum scribo, cui velim magis satisfacere posse. Sed quod ille a me petit, credo a Te melius habebit, nam Te video etiam Pitcarniana expendisse, et in mathesi ad physicam applicanda egregie versatum. Agnovi dudum praeclara a Te expectanda esse, sed vicit expectationem meam liber Tuus phoronomicus, quem ad me misisti, externa specie elegantissimum, sed doctrina interiore multo adhuc elegantiorem. Itaque plurimas Tibi gratias debeo, etiam quod nomen meum initio comparere voluisti, quanquam et intus aliquando honorifice mei memineris.

Non potui mihi temperare, quin percurrerem opus Tuum, quanquam summa cum festinatione et ut librum Historiarum vel Romaniscum legere solemus. Demonstrationes enim praesertim paulo longiores expendere nunc non licuit, quanquam nec opus putem. Elegantes sunt versus praefixi, sed quod dicunt:

Newtonus hospes divitis Insulae
Hac primus ivit,

nescio an sine injuria tot aliorum dici possit.

Vim mortuam Tecum dici sollicitationem §. 9 percommodum mihi visum est, si scilicet ab aliena impressione oriatur; generaliter erit conatus, quem impetui seu vi vivae oppono.

Inertia materiae, de qua loqueris §. 11, res est plane mira et altissimae indaginis, et paucis adhuc intellecta. Mira ex ea consequuntur. Si in materia nihil aliud consideretur, quam extensio et antitypia, nulla est ratio, cur loco moventi resistat, seu in quiete perstare tendat, adeoque lucta sit inter agens et patiens, cum in eo statu sit indifferens, et minimus motus quieti praevaleat. Sed si sit in motu, utique ratio est, cur in eo perstare tendat.

Nescio an argumentum probet §. 28, gravitatem agere in partes corporis interiores omnes. Nam si partes a gravitate non affectae aequabiliter per massam distributae ponerentur, tamen situ mutato, eadem maneret gravitas.

Theorema meum, de quo §. 49, non tantum est in epistola ad Wallisium, sed et in Diario Parisino 7. Septemb. 1693, ubi et addita est demonstratio: citavi et in Theodicaea, part. I. §. 22. Locum autem habet non tantum in sollicitationum, sed et in ipsorum motuum compositione, seu generaliter in compositione tendentiarum mortuarum, vel vivarum.

Bene notasti §. 87, Lemma illud differentiarum esse fundamentum quadraturarum, sed (quod addi velim) earum, quae oriuntur ex calculo nostro infinitesimali, vel simili. Sunt tamen quadraturae, quae aliunde oriuntur, v. g. quadratura Lunlae. Per hoc ipsum theorema ego meas methodos coepi, et adeo calculum meum dixi differentialem. Ideo qui fluxionem dicunt, veram originem obscurant nec satis attendunt.

Cum §. 115 notas, sollicitationes centrales a Newtono centripetas appellari, poteras addere sollicitationibus centralibus etiam centrifugas comprehendi posse; et ob id ipsum ego centrales nominaveram, ut ambae eodem nomine comprehenderentur.

Etsi in arbitrio Mathematici quodam modo sit, quae nomina rebus imponantur, dummodo significatione constanter utatur, est tamen utile, ut analogia quaedam servetur in ὀνοματοθεσίᾳ. Itaque cum momentum sollicitationis componas ex facto per sollicitationem in spatii elementum, quod tempusculo percurrit, videbatur convenire, ut momentum celeritatis similiter esset factum ex celeritate in spatii elementum; sed video Te §. 125 vocare momentum celeritatis, quod fit ex ipsa in proprium suum elementum ducta.

Quod ais §. 219 posse a te apodictice demonstrari, vires esse aestimandas secundum altitudines ascensionum, id quale sit libenter discam. Ego non tantum ascensiones, sed et quodvis resistens vim absorbens adhibere soleo; verb. gr. loco ascensionis certae gravium quantitatis ad quandam altitudinem, potes adhibere tensionem Elastri ad datum gradum, vel etiam concitationem dati numeri globulorum in datam celeritatem in singulis aequalem; quae omnia possunt effici pari modo ante concursum et post concursum. Ut jam taceam meam rationem vires explicandi a priori ex ipsa earum definitione, quam Tecum communicavi.

Probe etiam notasti §. 218 Corpora penitus inertia forte nulla dari, poterat dici senza forze corpora non nisi in speciem inertia esse, et sic appellari a Te ea, quae vim intus absorbent. Putas nullum ab hac doctrina praestantiorum hujus aevi Geometrarum abhorrere videri. Sed videbis abhorrere Newtonum, qui quod naturam virium non perfecte percepisset, non ita pridem in appendice Optici Operis statuit vires in mundo paulatim decrescere, et divina vi (revera miraculo) reparari.

Quod modum notandi attinet, interdum utilius ad intelligentiam adhiberi putem comma, quod omisisti v. g. §. 229, cum scribis $(2mu - nu + 2nr) : m + n$; ego ad evitandum, ne quis accipiat tanquam $(2mu - nu + 2nr) : m, + n$, ita scriberem $(2mu - nu + 2nr) :, m + n$ vel $(2mu - nu + 2nr) : (m + n)$ vel $2mu - nu + 2nr, : (m + n)$, vel quod est simplicissimum $2mu - nu + 2nr, :, m + u$; si vero sensus fuisset $(2mu - nu + 2nr) : m + n$, scripsissem $(2mu - nu + 2nr, : m) + u$. Interim fateor in praesente casu non facile erraturum rei intelligentem.

Ad §. 238 observo, quod frumenti pollen non facit praestare alabastri pulverem, qui super igne corpus fluidum prorsus imitatur, et continuitatem quandam acquisivisse videtur bullis etiam formatis.

Ad §. 241 noto, aërem si ponatur non ire in infinitum, et servare gravitatem, utique supremam superficiem horizontalem habiturum, ut alia, quae liquida vocas.

Ad §. 287. Vereor, ut Boylius Antliam Gerikianam perfectiorem rediderit.

Qui fit quod §. 347, 348 et sqq. non meministi observationum Scheuchzerianarum circa altitudinem montium; sane comparando altitudines aliunde observatas cum ductis ex Barometro, dijudicari poterit, quousque liceat uti hypothesi densitatum pressionibus proportionalium, et utrum satis fiat phaenomenis adjungendo meam, per quam hypothesis prior restringatur ad partem aëris comprimibilem. Sane si haec adjunctio satisfaceret, hypothesis prior simul confirmaretnr.

Libri Tui secundi capite 10 de fluminibus agis, quae materia, cum magnae sit utilitatis, mereretur tractari amplius. Rogo ut aliquando examines controversiam inter Gulielminum et Papinum, cujus partes habentur in Actis Eruditorum. Novissimum scriptum Papini habetur in ejus libro in 8. edito, novissimum Gulielmini in Miscellaneis Berolinensibus.

Ad §. 651 noto, me sententiam meam de causa soni explicuisse in Epistola ad Dn. Schelhammerum, quam ille libro suo de Organo auditus adjecit. Ex ea res jam ad calculum revocari poterat.

Quaecunque hactenus notavi, minutiae videri possent; unum nunc adjiciam, de quo, ut Te moneam, magis necessarium videtur. Ais initio cap. 20 libri 2: ab omnibus qui de viribus centralibus scripsere Geometris, harum virium centralium, vel ut nos eas vocare solemus, sollicitationum gravitatis centralium meta vel centrum positione datum et immutabile considerari consuevit..... Nos vero rem generalissime pertractaturi sollicitationum illarum centrum in una eademque curva mutabile assumemus, ita quidem, ut mobile in singulis curvae percurrendae punctis ad aliud atque aliud centrum sollicitationum urgeatur. Ego cum non satis edita ab aliis in hoc genere expendere potuerim, Tibi melius in iis versato facile credo; quanquam mirarer Newtonum haec non attigisse, qui omnino debebat in explicando Lunae motu adhibere centrum sollicitationis mobile, nempe tellurem. Sed quod subjicis, quantum judicare possum, haud videtur satisfacere. Hoc modo (inquis) centra omnia erunt in quadam linea curva, quam sollicitationum gravitatis directiones contingunt. Sed si quid judico, hic est casus tantum specialis centri mobilis. Esto enim (fig. 70) centrum C, mobile M, et ponatur C ex $_1C$ transire in $_2C$, dum mobile ex impetu prioribus sollicitationibus concepto transit ex $_1M$ in $_2M$, utique directiones $_1C_1M$, $_2C_2M$ non est necesse concurrere in puncto $_2C$, vel alio ei indefinite propinquo, quemadmodum Tua assumtio postulat; sed possunt tales assumi motus, ut concurrant directiones ad distantiam quantamvis a C. Itaque ad rem generaliter tractandam majore molimine opus erit. Quod si hoc meum monitum non inutile judicas, fortasse ipse idem non male notabis in Actis Eruditorum vel alibi, ut aliorum animadversiones praevenias. Fortasse enim Angli (utcunque illis forte nimium faveris) quaerent quod reprehendant, ne quid de Parentio in Gallia, Antagonista Tuo in Italia, aut similibus aliis dicam.

De caetero ut praeclaris Tuis successibus mirifice applaudo, ita nihil mihi erit gratius, quam subinde Tuo favore intelligere, tum quid ipse agas, tum quid alii in nostris studiis moliantur. Et majorem ostendes benevolentiam, si non semper expectes, dum responsio a me adeo distracto redeat.

Dn. Abbati de St. Petro, autori Consilii de pace publica stabilienda, Villarsi Ducis cognato, qui librum suum per Dn. Varignonitam miserat, respondi dudum et ab ipso replicationem nactus. Tibi ob librum ad me curatum gratias, ut par est, ago. Vale, et fave, etc. Dabam Hanoverae 17 Septembr. 1715.

LXXIV.

Leibniz an Hermann.

Tertias a me literas miraberis praesertim post primarum moram, sed secundas*) scripsi in mei gratiam opem a te petens in disquisitiuncula quadam: hanc scribo in gratiam amicorum, id est Bernoulliorum nostrorum. Adiit nunc Venetias Ill. Comes Schulemburgius, amicus meus a multis annis et patronus singularis, quem Serenissima Respublica copiis suis terrestribus praeficere cogitat. Is cum sit Vir magnae autoritatis et prudentiae, credidi sermonibus obiter apud Nobiles Venetos in auctoritate positos et negotium Bernoullianum tractantes ab eo jactis, plurimum momenti ad rem conficiendam afferri posse. Itaque in eundem sensum Dn. Michelotto scribo, quas inclusas vides literas, aliasque ad Comitem Schulemburgium includo, ut scilicet ipse Dn. Michelottus si potest commode reddat et colloquio habito consilium cum eo capiat. Scripsissem recta ad Dn. Michelottum, nec Tibi negotium facessivissem, si certa ad eum scribendi ratio in promtu fuisset, absque enim satis scio, Venetiis an Patavii degat, sed spero Te pro humanitate Tua et cum Bernoulliis amicitia haud aegre hoc ipsis officium esse praestaturum. Unum adjicio: in nupera Epistola curvam quaesivi, posito tangentem interceptam inter latera anguli recti esse rectam constantem; ita curva determinata est, puto tamen haud magno negotio problema solvi posse generale, posito Tangentem $T\Theta$ (fig. 71) inter latera anguli interceptam datam esse per relationem ad ipsam AT, vel datam esse relationem inter AT et $A\Theta$; itaque rogo, ut problema tam generaliter conceptum solvere malis, cujus casus erit curva prior.

Quod superest, vale etc.

Dabam Hanoverae 14 Novembr. 1715.

---

*) Dieser Brief ist nicht vorhanden.

LXXV.

Hermann an Leibniz.

Diu est quod literas Tuas humanissimas 17. Septembris ad me datas cum inclusis Michelotto inscriptis recte acceperim et pluries jam ad eas responsionem parare conatus sum, sed aliis semper et aliis negotiorum curis in transversum venientibus factum, ut officii mei debitum istud solvendum differre cogerer, ita ut interea temporis secundas et a postremo cursore tertias Tuas litteras accepissem. Hac ergo vice ad singulas responsionem suscipio, idque tanto libentius quod novas a Dn. Michelotto literas acceperim ad Te mittendas, quas hisce meis, prout eas accepi, adjunxi.

In primis vero gratias ago maximas, quod opellam meam Phoronomiae benigno oculo intueri et quae in ejus lectione in mentem Tibi venerunt, mecum communicare voluisti; hoc unum tamen doleo, Amici versiculum Newtonum respicientem eum in sensum accipi, quasi tot aliis praeclaris viris injurius esset, a quo sensu Poëtae animus longe abfuit; praedicto enim versiculo aliud indigitare non voluit, quam quod Newtonus tum suas proprias meditationes circa materias in Principiis suis excussas, tum aliorum inventa a se promota primus in Systema quoddam collegerit et cum publico communicarit, salvo inventionis honore, qui in ordine ad specialia argumenta in Newtoniano opere pertractata Autoribus suis competat, qualia sunt Regulae motus in collisione corporum, Theoriae Virium centrifugarum, Isochronismi gravium cadentium, Proportionis inter tempora lationis et areas orbitarum a planetis descriptarum, aliaque.

Argumentum §. 28 Phoronom. meae allatum ad probandum, gravitatem agere in omnes partes interiores corporum, Tibi non satis validum videtur, quia si partes corporis a gravitate non affectae aequabiliter per massam distributae essent, non mutaretur corporis pondus quantumlibet mutato ejus situ. Sed bona cum venia mihi regerere liceat, quod hoc ipsum id probat, quod probandum erat, pondera corporum massis eorum proportionalia esse. Nam si partes a gravitate non affectae per corporis massam aequabiliter diffusae sunt, idem etiam accidet partibus ipsis a gravitate affectis, ut scilicet per massam aequabiliter distributae sint; propterea habebunt hae partes affectae simul sumtae ad totam massam datam quandam rationem atque adeo pondus totius corporis erit omnino ut ejus massa. Deinde si gravitas in intimas etiam corporis particulas per massam aequabiliter dispersas agere potest, nulla apparet ratio, cur non in omnes agere possit, nisi dicatur omnes gravitatis impulsibus pervias non esse, sed plures tantum per massam aequabiliter diffusas. Verum ad hoc respondeo, quod hac ratione tamen sequeretur fore, ut corpus, mutatis ejus figura et situ, etiam pondere suo mutari debeat, etenim concipi non potest, quod particulae corporis, quae in certo ejus situ gravitatis ictibus perviae erant, eaedem etiam perviae futurae sint in alio quolibet situ, etiamsi partes corporum a gravitate non affectas per massam aequabiliter distributas statuas, sed utlibet mutato corporis situ aliae partes gravitatis impressionibus exponerentur, adeo ut variato situ corporis pondus mutari necessum sit, contra hypothesin.

Optime scio theorema Tuum insigne, quod §. 49 demonstratum dedi, non solum in solicitationibus, sed et tendentiis quibusvis locum habere, cum etiam hoc sensu eodem usus sim §. 451 seqq., et ex praeclaro Tuo Theodicaeae opere etiam didici idem theorema in Diario Parisiensi pro mense Septembr. 1693 mihi nondum nec unquam viso, etsi magna cum cura quaesito, extare.

Quod §. 125 momentum Celeritatis appellarim factum ex celeritate in ejus elementum, non vero ex celeritate in spatii elementum, ut Tuo judicio analogia postulare recte videbatur, cum Momentum solicitationis a me dictum sit factum ex solicitatione in spatii elementum, inde est, quod non area scalae Celeritatum cum area scalae Solicitationum acceleratricium mihi conferenda fuerit, sed triangulum AGH (fig. 72) quod celeritatis scala secundaria dici posset, nam velut rectangulum HGg seu factum ex celeritate ejusque elemento est elementum trianguli AGH, et rectangulum BEe elementum areae AABE, atque hoc BEe momentum solicitatonis BE mihi audit, ita analogice etiam HGg upote rectangulum sub ordinata HG et elemento axis AG dici poterat momentum ordinatae HG seu AG, id est EF, atque adeo momentum celeritatis, ut adeo hinc appareat analogiae rationem in ὀνοματοθεσίᾳ non prorsus neglectam fuisse.

In §§. 347. 348 Observationum Scheuchzerianarum brevitatis gratia non memini, quia altitudines locorum, quas egregii Viri exhibuerunt, hypothetice tantum ex observationibus suis barometricis erutae sunt, utpote quae fundantur in suppositione, quod densitates aëris vi comprimenti proportionales sint. Sin vero altitudines mentium aliunde notas fecissent, ut observationibus eorum uti cognitaeque altitudines cum iis, quae ex hypothesi Mariotti et Maraldi prodeunt, conferri potuissent, observationes Scheuchzerianas silentio non praeteriissem. Quam primum vacabit, hypothesin Tuam circa aërem mixtum ex materia comprimibili et incomprimibili cum observationibus Maraldianis et Cassinianis in Commentariis Acad. Reg. Paris. Scientiarum existentibus omni cura et diligentia conferre studebo.

Materia fluminum utique magnae utilitatis est atque digna, quae fuse pertractetur, sed quia observationes accuratae in hac tractatione necessariae mihi desunt, de ea fusius in meo libro agere non potui, quanquam inter ea, quae breviter tantum attigi, forte nonnulla non penitus aspernanda tradidi. Quod vero ad litem inter Gulielminum et Papinum attinet, non ut Papino videtur, in multis a veritate descivisse ille mihi videtur, cum e contrario Papinus nonnulla habeat, quibus aegre assentiri possum. Schelhammeri librum de Organo auditus nunquam vidi; propterea mihi etiamnunc ignota sunt, quae in epistola ad eum data atque libro isti inserta circa causam soni olim meditatus es, alioqui eorum honorificam quam merentur haud dubie mentionem fecissem iisque etiam utiliter usus fuissem.

Quae in Cap. 20 Libr. 2 habeo circa solicitationes non ad punctum datum, sed ad centrum mobile tendentes, judicas esse tantum casum specialem centri mobilis, et ad rem generaliter pertractandam majori molimine opus esse. Sed, quod pace Tua et permissu dictum velim, tota difficultas isthaec ab aequivocatione vocis Centri mihi nata videtur. Esto, inquis, centrum C (fig. 73), mobile M, et ponatur C ex $_1C$ transire in $_2C$, dum mobile ex impetu concepto prioribus solicitationibus transit ex $_1M$ in $_2M$, utique directiones $_1C_1M$, $_2C_2M$ non est necesse concurrere in puncto $_2C$ vel alio indefinite propinquo, quemadmodum tua assumtio postulat, sed possunt tales assumi motus, ut concurrant directiones ad distantiam quantamvis a C. Concedo posse concurrere directiones MC, $_2M_2C$ ad distantiam quantamlibet a C, ut in N vel n, ita ut curvam quamcunque Nn diversam a curva $_1C_2C$ contingant, sed nego meam assumtionem postulare, ut directiones illae concurrant in $_1C$ vel alio ei indefinite propinquo. Per centrum enim non intelligo punctum quodvis, versus quod mobile quoddam solicitatur, sed punctum concursus directionum harum solicitationum, cum mobile spatii elementum transmittit. Sic etiamsi mobile $_1M$, quod secundum directionem $_1MN$ solicitatur, etiam urgeatur versus $_1C$, et $_2M$ secundum $_2Mn$ solicitatum etiam versus $_2C$, non tamen ideo puncta $_1C$, $_2C$ centra dici debent, ad quae terminentur solicitationum directiones, sed puncta contactus N et n curvae Nn. Idcirco theoremata mea, quae habentur §. 607 num. V et VI, item in Appendice §. XI et XII generalia mihi etiamnunc videntur; sola difficultas superesse posset, ut ex positione directionis $_1MN$ inveniatur punctum curvae Nn ut N, quod generaliter definitur per hanc aequationem $_1MN = hkrds :, akds \pm ardh$, ubi h est sinus anguli, sub quo curva $_1M_2M$ a linea $_1MN$ secatur, k sinus complementi, dh elementum sinus h, sinus totus a, elementum curvae $_1M_2M$, ds, ac denique radius osculi in M, r. Ceterum non minores gratias ago, etsi haec theoria mihi errori obnoxia non videatur, quam si revera incautus lapsus essem, quod me ejus monere voluisti, ut mature errorem corrigere possem, ne scilicet a Parentio vel aliis ea de re reprehendar. Ejusmodi reprehensiones inevitabiles videntur, cum Celeberrimi nostri Bernoulli elegantissimum scriptum: Essay d'une nouvelle théorie etc. Parentii stricturas effugere non potuerit. Utinam vero eodem jure hujus crises contemnere mihi liceret, quo praeclarissimo Bernoullio! Verum hoc mihi arrogare non licet, quandoquidem in nonnullis locis meae Phoronomiae errorem deprehenderim aliquando a me corrigendum, sed qui nusquam summae rei vel methodo quicquam derogat, quod sciam. Sic §. 626 rationem sinus compl. anguli MAK ad sin. compl. anguli aAK nominavi b ad a, cum ratio sinus totius ad sinum complementi anguli aAM nominanda fuisset b ad a: hac vero correctione facta omnia sequentia in eodem paragrapho recte se habere videntur, ut alia nunc taceam, quae subinde brevius expediri potuissent.

Sed veniendum est ad postremas Tuas literas. Quae de liticula aut controversia habes inter Cel. Joh. Bernoullium et Comitem Riccatum, eum in modum narrare videris ac si a me profecta esse aut saltem meo hortatu, quod tamen a veritate omnimodo est alienum, non enim cum Comite ullas unquam literas commutavi nec quum in Italia essem nec postea, nec is mihi aliter cognitus est, nisi quod ipsum semel atque iterum in Bibliopoliis Venetis viderim atque postea is me semel in transitu Patavii salutare dignatus sit. De ejus moliminibus quicquam contra Dn. Bernoullium ne per somnium mihi unquam constitit, priusquam prior ejus Scheda publicata esset, et si quid de ejus proposito mature mihi innotuisset, omni modo conatus essem, ut mentem mutaret nihilque adversus Bernoullium publicaret; interim satis urbano stylo est usus, iis elogiis Clarissimum B. cumulans, quae tanto viro digna sunt. Quod vero controversiam ipsam attinet, ea non versatur in eo, num Cl. Bernoullius errorem unquam commiserit, sed tantummodo num quae Dn. Bernoullius in mea analysi inversi Problematis virium centralium publice reprehenderat, reprehensione dignum sit, et annon mea solutio Bernoullianae sit anteferenda, qua in re ne ego cum ipso sentio, qui affirmativam incautus tueri conatus est. Quod reliquum est et in mea potestate, faciam libenter eumque hortabor, ut controversiam ulterius urgere desinat.

Problema Tuum generaliter conceptum huc redire videtur: Data in angulo recto HAC (fig. 74) Curva quaecunque GEC, ductisque ordinatis quibusvis $E\Theta$, $e\vartheta$ ipsi AG parallelis, et per puncta Θ, ϑ rectis ΘT, ϑt respective parallelis lineis AE, Ae, quae ex puncto A ad terminos E, e ordinatarum $E\Theta$, $e\vartheta$ etc. ductae sunt, invenire curvam CVB, quam singulae rectae ΘT, ϑt angulo recto CAB inscriptae contingunt.

Solutio facillima est; ducta enim per quodlibet punctum E curvae GEC tangente EH, et per A recta AO tangenti EH parallela, rectae ΘT quae ipsi EA aequidistans est occurrente in O, factoque demum segmento TV hujus rectae ΘT aequali ΘO, erit punctum V in curva quaesita CVB.

Demonstratio facilis est. Nam quia rectae EA, ΘT et eA, ϑt parallelae sunt et aequales, erunt $AT = E\Theta$, et $e\vartheta = At$, atque adeo $em = Tt$, ducta scilicet EF parallela CA, et $mn = \vartheta\tau$, idque generaliter sive arculus Ee finitae sive indefinite parvae sit magnitudinis; sed supponendo posterius, erit $em : mn = HF : FA$, et $Tt : \vartheta\tau = Vt : V\vartheta$, unde quia $em = Tt$, et $\vartheta\tau = mn$, erit etiam $HF : FA = Vt : V\vartheta$, ductisque FI, AO parallelis tangenti HE, fiet $HF : FA = EI : IA = \Theta O : OT$, ergo etiam $\Theta O : OT = Vt : V\vartheta = VT : V\Theta$, et invertendo et componendo $\Theta T : \Theta O = \Theta T : VT$. Ergo $VT = \Theta O$. Quod erat demonstrandum.

Si singulae ΘT sint ejusdem magnitudinis, erit curva GEC Circulus centro A radio $AG = \Theta T$ descriptus, et hic est casus problematis in prioribus Tuis literis mihi propositi, eruntque adeo singuli anguli HEA, FIA, AOT recti, hinc ductis IK et IL, quarum haec parallela sit CA, illa vero AG, et quia EI generaliter $= VT$, erunt hoc casu $EK = VZ$ et $LA = AZ$. Unde si dicantur $AE = \Theta T = a$, $AZ = AL = x$, $VZ = EK = y$, $EF = \Theta A = v$, ac $AF = AT = \sqrt{aa - vv}$, erunt $EI = vv : a$, et $EK = VZ = v^3 : aa = y$, adeo $v^3 = aay$ et $v = \sqrt[3]{aay}$. AI vero $= \overline{aa - vv} : a$, et $AL = \dfrac{\overline{aa - vv}\sqrt{aa - vv}}{aa} = x$, hinc $\overline{aa - vv}\sqrt{aa - vv} = aax$, et $\overline{aa - vv}^{3:2} = aax$ vel $(aa : vv)^3 = a^4xx$, et $aa - vv = a\sqrt[3]{axx}$. Sed $v = \sqrt[3]{aay}$ praebet $vv = a\sqrt[3]{ayy}$, ergo $aa - a\sqrt[3]{ayy} = a\sqrt[3]{axx}$ vel $a - \sqrt[3]{ayy} = \sqrt[3]{axx}$ est aequatio curvae CVB in casu praesenti, vel etiam $\sqrt[3]{aa} - \sqrt[3]{yy} = \sqrt[3]{xx}$.

Epistolam ad Dn. Michelottum curabo quam diligentissime. Hisce vale et favere non desine etc.

Francofurti ad Viadrum d. 22 Nov. 1715.

LXXVI.

Leibniz an Hermann.

Multas ago gratias, quod me labore solvendi problematis Geometrici Tua opera sublevasti. Agnosco non esse ex valde difficilibus, et sane si prolixo labore indigere credidissem, non fuissem ausus eum in Te transferre. Mihi vero nunc, quod alias aut aliis facile, pro difficili est. Interea video Te non studiose tantum, sed et ingeniose in ea re versatum, data constructione generali elegante. Ita plus dedisti, quam petebam; ego enim calculo contentus fuissem exhibente relationem generalem, ita ut AY haberetur generaliter ex $A\Theta$ et ΘT, et similiter YV ex $A\Theta$ et ΘT: idque si vacat adhuc a Te petere ausim. Ita enim si deinde in speciali casu habeatur relatio inter $A\Theta$ et ΘT, ut supponitur, poterit haberi etiam relatio AY et $A\Theta$, itemque inter YV et $A\Theta$, ac proinde tandem (sublata $A\Theta$) inter AY et YV, quae ad extremum desideratur. Sane ingredientur calculum generalem etiam $dA\Theta$ et $d\Theta T$, sed hae quantitates in applicatione speciali evanescent.

Amici tui, Poëtae, ut apparet, eleganter docti versus minime reprehendo; sed morem Germanorum agnosco, qui (contra quam de Graecis ait Tacitus) tantum aliena mirantur. Si ex data linea, quam centrum gravitationis mobile describit, datoque uno situ puncti mobilis gravis, impetuque ejus, et directione in eo situ, Tua quam dedisti methodo definire potes lineam projectionis, quam ita punctum grave describit, saltem ope quadraturarum; rem profecto egregiam praestitisti, et quam si bene memini, Dn. Varignonius negabat sibi esse in promtu. Mihi non licet nunc profundius ingredi in discussionem eorum, quae optima voluntate ad praeclarum tuum opus admonui. Unum tantum, quia facilius est, nunc attingo, nempe quaestionem, utrum gravitas in omnes corporis partes agat, seu an omnes corporis gravis partes sint graves? Hoc ego verum esse non puto, si quis per partes corporis intelligat, quicquid ejus volumine continetur. Nec potest esse verum, nisi quis cum novis quibusdam Anglis putet dari vacuum, et gravitatem non oriri ex principiis mechanicis, seu qualitate occulta; quas duas hypotheses prorsus falsas esse puto. Sentio igitur corpora gravia esse pervia fluido gravifico, idque ipsum non esse grave; nec proinde quicquid in corporis volumine includitur, a gravitate affici. Tua Thesis est: gravitas agit in partes corporis etiam interiores omnes. Hoc ita probas: si mutato situ non potest mutari gravitas, sequitur quod gravitas agat in partes interiores omnes. Sed verum est prius (per hypothesin praemissam, experimentis scilicet comprobatam), ergo et posterius. Probanda est propositio hypothetica: sed hoc quomodo praestes non apparet, nam Tuum argumentum videtur solum dirigi in eos, qui gravitatem referrent ad exteriores partes tantum, non vero in eos, qui referrent etiam ad interiores, at non omnes. Itaque mihi probatio Tua videtur in formam concludentem redigi non posse. Hactenus respondi ad argumentum Tuum. Ego vero ex abundanti, contrario argumento seu instantia vim consequentiae Tuae infringere aggressus sum, exhibendo structuram corporis, quae satisfaciat experimento, seu mutato situ non mutet gravitatem, etsi gravitas in omnes corporis partes non agat. Hoc efficio, ponendo scilicet partes non graves esse per massam aequaliter distributas. Respondes, ex eo ipso sequi corporum pondera esse massis proportionalia. Recte; sed Tu aliquid amplius probare voluisti, nempe quamlibet corporis gravis partem esse gravem. Objicis, concipi non posse corpus, cujus partes in quovis situ sint gravitatis ictibus aeque perviae (ad sensum scilicet), sed rationem, cur hoc concipi nequeat, non addis. Ego vero rem sic puto concipi posse. Finge corpus totum constare ex retibus, vel clathris sibi superimpositis aequabiliter contextis, id quomodocunque vertas aequabiliter eidem liquido eodem fere modo pervium erit; et quidem eodem prorsus modo ad sensum, si modo rete sit contextum ex filis valde tenuibus (uti revera de corporibus nostris dicendum est). Ita enim discrimen ex mutato situ insensibile erit, cum in sola superficie non intus discrimen oriri possit, superficiales autem partes (quando magna est texturae tenuitas, corpus vero ipsum comparatione filorum valde crassum) rationem sensibilem non habeant ad totum. Itaque ut ingenue dicam quod sentio, videtur hic aliquid esse mutandum. Caeterum hac propositione, quam ego nec probatam nec veram puto, in Tuo opere, ni fallor, non indiges. Cl. Michelotto alias quae licebit respondebo. Interea vale etc.

Dabam Hanoverae 3. Decembr. 1715.

LXXVII.

Hermann an Leibniz.

Jam ante plures dies ad humanissimas Tuas literas die 3. Dec. ad me datas respondissem, Vir Ill., nisi afflicta nonnihil valetudo mea calamum manibus mihi excussisset. Nunc vero per Divinam gratiam satis bene valeo, et ut tantundem de Te quem scientiae et bonae artes diutissime florentem optant, rescire valeam, vehementer cupio.

Sed ad literas Tuas humanitatis plenissimas revertar, gaudeo quod solutio mea Problematis Tui non prorsus displicuerit; nulla vero causa est, cur mihi ob levissimum laborem, quem eidem impendi, gratias ullas agas. Quae adhuc circa idem Problema perfici jubes, hoc loco absolvere conabor. Problema est, ut inveniatur aequatio curvae CVB, quam recta ΘT in angulo recto CAB ita mobilis (ut segmenta AΘ, AT, vel quod idem est, AΘ, ΘE, facta scilicet ΘE = AT, datam constanter ad se invicem relationem servent) ubique contingat. Esto itaque curva quaecunque GEC, cujus ordinata EΘ ad abscissam AΘ sit = AT, adeo ut ducta AE parallela sit ubique rectae mobili ΘT. Ducta pariter sit EF parallela AG et per curvae punctum E tangens EH; per F vero FD aequidistans tangenti EH et occurrens rectae AE in D, deinde facta $AQ = ED$, recta QV parallela AG per punctum Q ducta lineae mobili ΘT occurret in Curvae quaesitae puncto V, prout in praecedenti mea epistola ostensum. Propterea, factis denominationibus linearum ut sequitur, scilicet

$$\begin{array}{ll} AF = AT = t & AY = EM = y \\ EF = \Theta A = u & YV = DN = x \\ HF = s & AE = \Theta T = z \end{array}$$

Triangula similia EMD, AND praebebunt analogiam

$$EM : AN = MD : DN$$
$$y : u - y = t - x : x,$$

ergo $xy = tu - ty - ux + xy$ vel $tu = ty + ux$ (1). Propter parallelas vero EH et FE fiet HF (s) : AF (t) = EF : AD = EM (y) : AN (u − y), hinc $ty = su - sy$ (2). Iam ope harum duarum aequationum atque illius, quae curvae CEH naturam explicat, indeterminatae omnes s, t et u tolli possunt, ut sola remaneat aequatio in indeterminatis x, y et constantibus data, quae curvae quaesitae CVB naturam referat. Exempl. Sit CEG quadrans circuli centro A descripti, quo recidit casus Problematis initio mihi propositi, adeo ut $AE = z$ nunc dicatur a, eritque $s = \frac{uu}{t}$, qui valor in aequatione secunda substitutus dat $ty = (u^3 - uuy) : t$ vel $tty = u^3 - uuy$, hinc $tty + uuy = u^3$, aut (quia ex natura circuli $tt + uu = aa$) $aay = u^3$. Aequationes vero 1 et 2 inter se collatae dant $\frac{t}{s} \left(= \frac{tu - ty}{su - sy} \right) = \frac{tt}{uu} = \frac{ux}{ty}$, ergo $t^3y\ (= u^3x) = aaxy$, vel $t^3 = aax$, adeoque $t = \sqrt[3]{aax}$ et $tt = \sqrt[3]{a^4xx}$; sic etiam quia $u^3 = aay$, fiet $uu = \sqrt[3]{a^4yy}$, ergo $\sqrt[3]{a^4xx} + \sqrt[3]{a^4yy}$ (= tt + uu, ex natura circuli) = aa, vel dividendo per $\sqrt[3]{a^4}$, $\sqrt[3]{xx} + \sqrt[3]{yy} = \sqrt[3]{aa}$, etiam ut in praecedenti mea epistola inveneram pro aequatione curvae CVB. Quae abit in sequentem

$$\begin{array}{llll} x^6 + 3yyx^4 & + 3y^4xx & + y^6 & = 0 \\ -3aa & + 21aayy & - 3aay^4 & \\ & - 3a^4 & + 3a^4yy & \\ & & - a^6 & \end{array}$$

Alterum Problema, cujus mentionem injicis, quo ex data linea, quam centrum gravitationis mobile describit, datoque uno situ puncti mobilis gravis, impetuque ejus et directione in eo situ, definienda est linea projectionis, quam punctum grave describit, ex difficillimis esse videtur multumque diversum ab eodem problemate, sed directionibus gravium in punctum convergentibus, quod post Cel. Bernoullium et Newtonum etiam a Cl. Varignonio solutum est in posteriore sensu concursus directionum gravitatis in centro; nec ejus inventa, quae hactenus publicavit circa vires centrales, sufficiunt solutioni novissimi Problematis, quia proportio harum virium, cum earum directiones datam lineam contingunt, ex ejus meditationibus editis elici non potest, nisi multa iis superaddantur. Non miror proinde Dnum. Varignonium negasse Problematis Tui solutionem sibi in promtu esse. Mea vero methodus eo pertingit, suppositis figurarum quadraturis, ut projectilis puncta determinentur.

Fig. 158 Phoronomiae, datis Curva AY, angulo jactus FAα et celeritate jactus in A, invenire Curvam AM, seu in singulis YN puncta M, in quibus Curva AM radios evolutae YN curvae AY occurrit. Fiant $\log. B = \int \overline{Cds : am}$, $A = b - \int \overline{Bds : m}$, $P = \frac{eeAA + 2eeBB - AABC}{eAA}$, $QQ = \int \overline{2PPdm : h}$, ac denique linea YM in fig. 158 $= \int \overline{QQdP : PP}, - \int \overline{Pdm : h}, \pm d$. Ubi singulae a, b, c, d, e et h sunt quantitates datae, et elementum Curvae AY, quod est $Yy = ds$, $YM = m$, reliquae indeterminatae omnes A, B, P et Q in hisce ds et m ita datae sunt, ut inde terminatae ab invicem separatae sint atque adeo Curva AM per puncta describi possit. Haec vero omnia ita se habere dico salvo calculi errore, quia diebus hisce ita distractus fui, ut nulli rei serio et attente vacare potuerim.

Elegantia sunt, quae circa quaestionem, utrum omnes cujusque corporis partes aequales, aequales gravitatis ictus excipiant nec ne, mones, eaque ita comparata mihi nunc videntur, ut iisdem cedendum sit. Interim nunquam controversum lemma tanquam Propositionem geometrice demonstrabilem, sed physice tantum respexi et hoc posteriori modo idem probare conatus sum utcunque: plura tamen super hanc rem adhuc proferri possent et nonnulla in qualemcunque mei excusationem allegare possem, nisi tabellarii discessus instans huic epistolio finem imponeret. Vale etc.

Francofurti ad Oderam die 6 Jan. 1716.

LXXVIII.

Leibniz an Hermann.

(Im Auszuge)

2 Novembr. 1716.

Angli, ut accepi, solutionem quandam problematis Bernoulliani de lineis ad alias perpendicularibus (cujus solutionem Tibi quoque notam esse intelligo) suis Transactionibus hujus anni inseruere, generalem quidem, quamvis nonnihil vagam, sed haud talem, qualem oportet. Et perinde est ac si quis problema planum per Conicas construat. Nam descendunt ad differentias secundas, cum (ut scis) res praestari possit per differentias primi gradus.

Videris fortasse Taylori Methodum Incrementorum, quam vocat. Equos ille ponit post currum. Ego per Methodum incrementorum in seriebus numerorum perveni ad Methodum differentiarum inassignabilium, ut postulat natura rerum. Angli, qui istam Methodum non nisi mutuo sumtam habent, contra procedunt. Caeterum vix quicquam affert alicujus momenti, quo specimen artis suae ostendat, superciliosus interim omnium praeter Newtonum contemtor.

BRIEFWECHSEL

zwischen

LEIBNIZ

und dem

FREIHERRN VON TSCHIRNHAUS.

Freiherr Ehrenfried Walther von Tschirnhaus, geb. 10. April 1651, zeigte frühzeitig ein lebhaftes Interesse für die mathematischen Wissenschaften. Zu seiner nicht geringen Freude, wie er selbst in seinen spätern Lebensjahren öfters erzählte, fand er bereits auf dem Gymnasium zu Görlitz einen Lehrer, dessen Unterricht in den Fundamenten der Mathematik für ihn so förderlich war, dass er sich selbstständig fortbilden konnte. Im Jahre 1668 ging Tschirnhaus nach Holland, um auf der Universität Leyden seine Ausbildung zu vollenden. Seine Studien erlitten eine Unterbrechung, als im Jahre 1672 Holland von den Franzosen besetzt wurde; Tschirnhaus betheiligte sich als Volontär am Kampfe, kehrte aber nach anderthalbjährigen Kriegsdiensten nach Leyden zurück. Es unterliegt keinem Zweifel, dass damals in Holland eine weit günstigere Gelegenheit zum Studium der philosophischen und mathematischen Wissenschaften sich bot, als auf den Universitäten Deutschlands; denn während auf den Universitäten zu Leipzig und Jena, wie wir aus den Geständnissen Leibnizens wissen, die mathematischen Vorträge nicht über die Elemente Euklid's hinausgingen, lebten und lehrten in Holland die Schüler von Descartes. Wir dürfen demnach mit gutem Grunde annehmen, dass Tschirnhaus in die höhere Mathematik bereits fünf Jahre früher eingeweiht war, als Leibniz, der vom Jahre 1673 an in Paris durch eigene Anstrengung sie sich zu eigen machen musste. Nach einem kurzen Besuch in seiner Heimath trat Tschirnhaus im Jahre 1675 eine grosse wissenschaftliche Reise an. Er ging über Holland nach London, wo er die Bekanntschaft von Oldenburg und Collins machte. Mit dem ersteren blieb Tschirnhaus nach seinem Weggange von London in wissenschaftlichem Verkehr, und wir ersehen namentlich aus einem Briefe, den er am 1. September 1676 von

Paris an Oldenburg schrieb *), dass der erste Brief Newton's, der durch Oldenburg unter dem 26. Jul. 1676 (Bd. I. S. 100 ff.) an Leibniz überschickt wurde und der zugleich zur Mittheilung an Tschirnhaus bestimmt war, für den letztern neue, ihm bis dahin

---

*) Es kann nur das folgende Bruchstück dieses Briefes, wie es im Commercium epistolicum Joh. Collins aliorumque de Analysi promota (neueste Ausgabe von Biot und Lefort S. 121) sich findet, hier mitgetheilt werden:

Expectabam cum desiderio responsum, cum aliquot abhinc mensibus ad te literas meas transmiseram; sed nec ex modo datis colligere licet has receptas fuisse. Interim admodum oblectatus fui, hisce conspectis quae ad D. Leibnitium exarasti, maximeque me tibi devinxisti, quod me participem volueris facere tam ingeniosarum inventionum, et promotionis Geometriae tam pulchrae quam utilis. Statim cursim eas pervolvi, ut viderem num forte inter hasce Series Infinitas existeret ea qua ingeniosissimus D. Leibnitius Circulum, imo quamvis sectionem Conicam (centro in finita distantia gaudentem) quadravit, tali ratione ut mihi persuadeam simpliciorem viam, nec quoad linearem constructionem, nec numeralem expressionem, nunquam visum iri; quique hisce porro insistens, generalem adinvenit Methodum Figuram quamvis datam in talem rationalem transmutandi, quae per solum inventum (admodum praestans meo judicio) D. Mercatoris ad Seriem infinitam posset reduci; sed hac de materia, cum ipse non ita pridem mentem suam declaravit, non opus est ut prolixior sim. Verum ut ad specimina perquam ingeniosa D. Newtoni revertar, haec non potuere non mihi placere, tam ob utilitatem qua se tam late ad quarumvis quantitatum dimensiones, ac alia difficilia enodanda in Mathematicis extendunt, quam ob deductionem harum a fundamentis non minus generalibus quam ingeniosis derivatam: non obstante quod existimem, ad quantitatem quamvis ad infinitam seriem aequipollentem reducendam fundamenta adhuc dari et simpliciora et universaliora, quam sunt fractionum et irrationalium reductio ad tales Series, ope Divisionis aut Extractionis, quae mihi tale quid non nisi per accidens praestare videntur, cum haec successum quoque habeant, licet non adsint fractiones aut irrationales Quantitates. Similia porro quae in hac re praestitit eximius ille Geometra Gregorius, memoranda certe sunt, et quidem optime famae ipsius consulturi, qui ipsius relicta Manuscripta luci publicae ut exponantur operam navabunt.

unbekannte Resultate enthielt. Von Collins erhielt Tschirnhaus während seines Aufenthalts in London mehrere mündliche Mittheilungen, namentlich in Betreff der Untersuchungen Gregory's über die allgemeine Auflösung der Gleichungen (Bd. I. S. 82. 93), ein Problem, das, wie es scheint, Tschirnhaus' gesammte Thätigkeit damals in Anspruch nahm. Dagegen ist die Angabe, die im Commercium epistolicum Joh. Collins sich findet und von Edleston und von Brewster wiederholt wird*), dass nämlich von Collins eine Abschrift des Newtonschen Briefes vom 10. December 1672**)

---

*) Im Commer. epistol. Joh. Collins (neuste Ausgabe von Biot und Lefort S. 84) heisst es: Missum fuit Apographum hujus Epistolae ad Tscurnhausium mense Majo 1675, et ad Leibnitium mense Junio 1676. — Edleston (Correspondence of Sir Isaac Newton and Cotes p. XLVII) giebt an: A copy of Newton's letter was sent to Tschirnhaus in May 1675, in Collins's paper „About Descartes" (14 folio leaves, Roy. Soc. MSS. LXXXI). — Brewster (Memoirs of the life, writings and discoveries of Sir Isaac Newton, voll. II, p. 31) bemerkt: A copy of his letter was sent to Tschirnhausen in May 1675, thirteen months before it was sent to Leibnitz.

**) Dieser Newtonsche Brief, auf welchen von Seiten der Engländer so grosses Gewicht gelegt wird, findet sich im Commer. epist. (neuste Ausgabe von Biot und Lefort S. 83 f.) wie folgt mitgetheilt:

Ex animo gaudeo D. Barrovii amici nostri reverendi lectiones Mathematicis exteris adeo placuisse, neque parum me juvat intelligere eos (Slusium et Gregorium) in eandem mecum incidisse ducendi Tangentes Methodum. Qualem eam esse conjiciam, ex hoc exemplo percipies. Pone CB (fig. 90) applicatam ad AB, in quovis angulo dato, terminari ad quamvis Curvam AC, et dicatur AB, x et BC, y, habitudoque inter x et y exprimatur qualibet aequatione, puta $x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3 = 0$, qua ipsa determinatur Curva. Regula ducendi Tangentem haec est: multiplica aequationis terminos per quamlibet progressionem arithmeticam juxta dimensiones y, puta $\underset{0}{x^3} - \underset{1}{2xxy} + \underset{0}{bxx} - \underset{0}{bbx} + \underset{2}{byy} - \underset{3}{y^3}$, ut et juxta dimensiones x, puta $\underset{3}{x^3} - \underset{2}{2xxy} + \underset{2}{bxx} - \underset{1}{bbx} + \underset{0}{byy} - \underset{0}{y^3}$. Prius productum erit Numerator, et posterius divisum per x Denominator Fractionis, quae exprimet longitudinem BD, ad cujus extremitatem D ducenda est Tangens CD: est ergo longitudo $BD = \frac{-2xxy + 2byy - 3y^3}{3xx - 4xy + 2bx - bb}$.

an Tschirnhaus geschickt worden sei, in mehrfacher Hinsicht sehr zweifelhaft; denn Tschirnhaus befand sich im Mai 1675 entweder in London, oder war noch unterwegs auf der Hinreise begriffen*); ferner würde sich Collins dieser Mittheilung, ebenso wie der oben erwähnten, noch erinnert und ihrer gedacht haben, als er an Leibniz einen Auszug desselben Newtonschen Briefes überschickte (Bd. I. S. 91 f.). . Angenommen aber auch, dass jene Notiz richtig wäre und dass Collins eine Abschrift des gedachten Newtonschen Briefes an Tschirnhaus im Mai 1678 abgegeben hätte, was konnte dieser über Newton's Fluxionen daraus erfahren? Ebenso wenig, als Collins und Oldenburg davon wussten; diesen war sogar noch im Juli 1676 — also über ein Jahr später — nichts Näheres darüber bekannt**). Auch würde Tschirnhaus nicht versäumt haben,

---

Hoc est unum particulare, vel corollarium potius Methodi generalis, quae extendit se, citra molestum ullum calculum, non modo ad ducendum Tangentes ad quasvis Curvas, sive Geometricas, sive Mechanicas, vel quomodocunque rectas lineas aliasve Curvas respicientes, verum etiam ad resolvendum alia abstrusiora Problematum genera de Curvitatibus, Areis, Longitudinibus, Centris Gravitatis Curvarum etc. Neque (quemadmodum Huddenii methodus de Maximis et Minimis) ad solas restringitur aequationes illas, quae quantitatibus surdis sunt immunes.

Hanc methodum intertexui alteri isti, qua Aequationum Exegesin instituo, reducendo eas ad Series infinitas. Memini me ex occasione aliquando narrasse D. Barrovio, edendis Lectionibus suis occupato, instructum me esse hujusmodi methodo Tangentes ducendi, sed nescio quo diverticulo ab ea ipsi describenda fuerim avocatus.

Slusii Methodum Tangentes ducendi brevi publice prodituram confido; quamprimum advenerit exemplar ejus, ad me transmittere ne grave ducas.

*) Sollte sich das letztere auf irgend eine Weise ermitteln lassen, so liegt die Unrichtigkeit der obigen Notiz am Tage, denn Tschirnhaus, damals 24 Jahr alt, war vor seiner Ankunft in London Collins sowohl als Oldenburg gewiss ganz unbekannt.

**) Sieh. Bd. I. S. 91, wo es heisst: Defuncto Gregorio, congessit Collinius amplum illud commercium litterarium, quod ipsi inter se coluerant, in quo habetur argumenti hujus de seriebus historia: cui Dn. Newtonus pollicitus est se adjecturum suam methodum inventionis falls er an Leibniz irgend etwas über Newton's Entdeckungen mitgetheilt hätte, in der Differenz, die zwischen ihm und Leibniz später ausbrach und wobei es sich namentlich um die Methode der Differential- und Integralrechnung handelte, darauf zurückzukommen; aber es findet sich in Betreff dessen in der vorliegenden Correspondenz nicht die geringste Andeutung.

Mit Empfehlungen Oldenburg's an Leibniz traf Tschirnhaus im September 1675 in Paris ein. Er wurde sehr bald mit Leibniz aufs innigste befreundet, denn beide in der schönsten Blüthe jugendlicher Kraft beseelte dieselbe Vorliebe für philosophische und mathematische Studien. Quod Tschirnhausium ad nos misisti, schreibt Leibniz an Oldenburg (Bd. I. S. 84), fecisti pro amico: multum enim ejus consuetudine delector, et ingenium agnosco in Juvene praeclarum, et magna promittens inventa mihi ostendit non pauca, Analytica et Geometrica, sane perelegantia. Die Leibnizischen Manuscripte aus der zweiten Hälfte des Jahres 1675 und aus dem Jahre 1676 zeigen zahlreiche Spuren von den gemeinsamen Arbeiten beider; auf demselben Blatte finden sich die Schriftzüge Tschirnhausens neben denen von der Hand Leibnizens. Wie bereits erwähnt, beschäftigte sich damals Tschirnhaus vorzugsweise mit der allgemeinen Auflösung der Gleichungen; auch Leibnizens Aufmerksamkeit war um dieselbe Zeit auf dieses grosse Problem gerichtet. Doch dies Eine war für Leibniz nicht genug; über das ganze Gebiet der Mathematik erstreckte sich seine Thätigkeit. Vor allem ist hier hervorzuheben, dass in diese Zeit der ge-

---

illius, prima quaque occasione commoda edendam; de qua interea temporis hoc scire praeter rem non fuerit, quod scilicet Dn. Newtonus cum in literis suis Dcbr. 10. 1672 communicaret nobis methodum ducendi tangentes ad curvas geometricas ex aequatione exprimente relationem ordinatarum ad Basin, subjicit hoc esse unum particulare, vel corollarium potius, methodi generalis, quae extendit se absque molesto calculo etc. — Hiermit ist zu vergleichen die folgende Stelle aus Oldenburg's Brief an Leibniz vom 30. Septemper 1675 (Bd. I. S. 82): Scire cupis, an dare Nostrates Geometrice possint dimensionem Curvae Ellipseos aut Hyperbolae ex data Circuli aut Hyperbolae quadratura. Respondet Collinius, illos id praestare non posse Geometrica praecisione, sed dare eos posse ejusmodi approximationes, quae quacunque quantitate data minus a scopo aberrabunt.

meinsamen Studien beider Freunde die grosse Entdeckung Leibnizens fällt: die Einführung des Algorithmus der höheren Analysis (im October 1675). Es ist mehrfach ausgesprochen worden, als könne Tschirnhaus irgend welchen Antheil daran gehabt haben; diese Vermuthung indess wird durch das Vorhergehende hinreichend zurückgewiesen. Ausserdem aber geht aus der vorliegenden Correspondenz hervor, dass Tschirnhaus kein grosses Gewicht auf die so folgenreiche Entdeckung Leibnizens legte; er war vielmehr der Ansicht, dass die Einführurg einer solchen monströsen Zeichensprache ganz überflüssig sei, und meinte, dass die bis dahin üblichen Methoden, wenn sie nur anderweitig vervollkommnet würden, zur Lösung von Problemen aus der höheren Mathematik genügten. Dass Tschirnhaus in dieser Meinung verharrte, selbst nachdem Leibnizens Erfindung allseitig anerkannt und durch sie bereits die glänzendsten Erfolge errungen waren, geht aus einer Mittheilung Christian Wolf's hervor, die sich in dessen eigener Lebensbeschreibung S. 123 f. findet*).

Zu Anfang des Jahres 1677 verliess Tschirnhaus Paris. Er ging über Lyon, Turin, Mailand, Venedig nach Rom. Sein erstes Schreiben, das er von hier aus an Leibniz richtete, enthält eine sehr ausführliche Beschreibung dieser Reise; sie liefert einen ausgezeichneten Beitrag zur Charakteristik des Mannes, der alles, was

*) Ch. Wolf erzählt daselbst: Ich reisete auf die Oster-Messe A. 1705 (muss höchst wahrscheinlich heissen: 1703) nach Leipzig, um daselbst den Herrn von Tschirnhausen zu sprechen: welches auch geschahe. Ich referirte ihm, was mir in seiner Medicina mentis schwer vorkommen zu verstehen und sagte ihm, wie ich es erkläret hätte. Er war damit zufrieden. Als ich ihn aber fragte, wie man denn die elementa definitionum erfinden könnte: antwortete er mir weiter nichts, als: dieses wäre eben die Haupt Sache. Weil ich gerne von dem Calculo differentiali etwas verstanden hätte, der dazumahl noch weniger bekandt war, fragte ich ihn, wie ich dazu gelangen könnte. Er machte aber nicht viel davon, sondern gab mir nur zur Antwort, er beruhe auf einer einigen Propositien in Barrow Lectionibus geometricis und wäre nicht der rechte methodus, sondern nur ein compendium verae methodi, deren es unendlich viele gäbe. Den rechten methodum wollte er in dem andern Tomo seiner Medicinae mentis zeigen, wo er die in dem ersten Tomo gegebenen Regeln

ihm als neu entgegentrat, mit gleich lebhaftem Interesse erfasste*).

Dieses erste Schreiben, so wie alle folgenden, die Tschirnhaus auf der Reise an Leibniz richtete, geben ein vollständiges Bild sowohl von seinen eigenen Studien auf dem Gebiet der mathematischen Disciplinen, als auch über die gemeinsamen Arbeiten beider während ihres Zusammenseins in Paris. Leider sind die Antworten Leibnizens auf diese ersten Briefe Tschirnhausens nicht vollständig vorhanden; sie werden indess gewiss hinreichend ersetzt durch das, was Leibniz in Folge seiner Unterredung mit Tschirnhaus niedergeschrieben hat, als derselbe auf der Rückkehr in seine Heimath durch Hannover kam und einige Tage bei Leibniz verweilte.

Nachdem Tschirnhaus gegen Ende des Jahres 1679 in seine Heimath zurückgekehrt war, begann er sofort seine äusserst weitgehenden wissenschaftlichen Pläne ins Werk zu setzen. Er erkannte indess sehr bald, dass dazu seine eigenen Mittel nicht ausreichten. Um sich Geld zu verschaffen, beschloss er im Jahre 1682 noch einmal nach Paris zu gehen, denn er hoffte, auf Grund seiner Untersuchungen über die Eigenschaften der Brennlinien, nicht nur seine Wahl zum Mitglied der dortigen Akademie der Wissenschaften durchzusetzen, sondern auch durch sein persönliches Erscheinen eine ansehnliche Pension vom Könige von Frankreich zur Fortsetzung seiner Studien zu erhalten. Das Erstere gelang ihm, besonders durch die Empfehlung und durch die ächt

---

auf die Mathematik appliciren würde und da sollte die Welt die Augen darüber aufthun und sich verwundern. Wenn aber der dritte Theil herauskommen würde, darinnen er eben seinen Methodum auf die Physik appliciren würde, so würde man darüber erstaunen. Er recommendirte mir aber, um in der Mathematik weiter zu gehen, Barrowii lectiones geometricas und Nieuwentiit Analysin infinitorum, ingleichen auch Ozanams Elémens d'Algebre (Ch. Wolf's eigene Lebensbeschreibung, herausgegeben von H. Wuttke, S. 123 f.)

*) Diese Reisebeschreibung ist im Folgenden nicht abgedruckt; ich hoffe sie bei einer andern Gelegenheit, wo von Tschirnhaus ausführlich die Rede sein soll, mitzutheilen. Dasselbe gilt von allen seinen spätern Briefen an Leibniz, in welchen von andern als mathematischen Gegenständen gehandelt wird.

freundschaftliche Unterstützung Leibnizens; in Bezug auf das Zweite wurden ihm nur leere Versprechungen gemacht. Tschirnhaus kehrte nach Deutschland zurück, in der Meinung, die Realisirung der ihm in Paris gewordenen Zusagen zu erreichen, wenn er seinen Namen in der wissenschaftlichen Welt bekannt machte. Er beeilte sich daher die Ergebnisse seiner mathematischen Studien in den Actis Eruditorum Lipsiensium zu veröffentlichen. Es erschienen zunächst seine Auflösung der Gleichungen und seine Untersuchungen über Quadraturen, zwei Gegenstände, auf deren Gebiet namentlich er mit Leibniz in Paris gemeinsam gearbeitet hatte. Hierbei konnte es nicht fehlen, dass der eine die Ideen des andern aufgenommen und mit den seinigen combinirt hatte, und dass er sie deshalb zuletzt als sein Eigenthum betrachtete. So geschah es denn, dass Tschirnhaus in den erwähnten Veröffentlichungen auf Ergebnisse Anspruch machte, von denen Leibniz nachweisen konnte, dass sie die seinigen wären. Dazu kam, dass Leibniz das, was Tschirnhaus bekannt machte, noch nicht für hinreichend reif und vollendet hielt; nach seiner Ansicht sollte überhaupt noch nicht mit der Veröffentlichung der Methoden, sondern höchstens mit der Bekanntmachung einzelner Beispiele, die mit Hülfe derselben behandelt waren, vorgegangen werden. Leibniz sah sich demnach genöthigt, das was ihm gehörte, öffentlich in den Actis Eruditorum als von ihm entlehnt zu bezeichnen*). Hiermit war der Bruch zwischen beiden Freunden entschieden. Um eine ärgerliche literarische Fehde, deren Kampfplatz die Acta Eruditorum werden sollten, im Entstehen zu unterdrücken, übernahm der Herausgeber derselben Mencke eine Vermittelung zwischen beiden Männern herbeizuführen. Unter den Leibnizischen Papieren befinden sich die beiden folgenden Briefe, die nicht allein in Betreff der in Rede stehenden Sache, sondern auch noch in anderer Hinsicht höchst interessant sind:

Mencke an Leibniz.

Demselbigen sol ich negst dienstschuldigstem Grusse nicht verhalten, dass Mons. Tschirnhaus unss diese tage eine grosse

*) Vergl. die Abhandlung: De Geometria recondita et Analysi indivisibilium atque infinitorum (Bd. V. S. 226 ff.).

weitläufftige apologiam wieder meinen Hohg. Patron eingeschicket, undt begehret, dass solche je eher je lieber in unsern Actis möchte publiciret werden. Er wil darin aussführlich erweisen, dass er nicht, wie er aperte beschuldiget worden, eines anderen inventum vor das seinige aussgegeben, sondern dass er selbst erst auf diese gedancken gekommen, undt praetendiret, die wieder ihn formirte objectiones zu removiren. Nun sehen wir gar ungern, wan M. H. Herr Patron undt obgedachter Mons. Tschirnhaus in einander gerathen solten, alss die in teutschland heute in hoc studiorum genere die berühmtesten seyn, undt so lange Zeit vertraute freunde gewesen. Ich weiss auch nicht, ob es ihnen beyden solte reputirlich seyn, wan hierauss ein krieg entstehen solte; zumahl da sich die exteri, welche unss teutschen ohnedem nicht gern die Ehre eines neuen inventi gönnen wollen, gewiss damit kitzeln werden. Wie ich dan von gewisser hand nachricht habe, dass man in Engeland im werke begriffen, ich weiss nicht welche quadraturam circuli, die unsern Actis inseriret ist, ihrem professori Newton zu Cambridge publice zu vindiciren, undt zu erweisen, dass solches dessen, und nicht eines teutschen inventum sey. Also bin ich angestanden, gedachte des von Tschirnhauses apologiam in die Acta zu bringen, ehe undt bevor ich meinem Hochg. Patron communication davon gethan, ungeachtet er urgiret, dass man doch diese apologiam den nechsten Monat inseriren möchte, undt stelle also M. H. Herrn anheim zu bedencken, ob nicht dienlicher sey, dass Sie mit einander durch briefwechselung, alss vorhin gewesene gute freunde, die gantze Sache aussmachten, damit hernach ein concept, das ihnen beyden anständig, denen Actis einverleibet werden könnte, ut utriusque honori consulatur.

Leipzig den 16 Julii 1684.

Leibniz an Mencke.

Dessen werthes 16 Jul. habe zurecht erhalten, und bedanke mich dass derselbe mir von M. Tschirnhaus schrifft part gegeben; erkenne auch auss dem vorschlag, so M. H. Herr selbiger gethan, umb den streit privatim beyzulegen, desselben wohl intentionnirtes gemüth, so allem nachtheiligen zuvorzukommen erachtet. Ich habe an M. Tschirnhaus bereits deswegen schon vorlängst geschrieben gehabt und ihm zu verstehen geben, er möchte sich dieses nicht so absolute allein zuschreiben, weil ich aus seinem brieff gefolgert, dass ers in druck geben wolte. Schreibe ihm iezo nochmahls beykommendes, so vornehmlich deswegen abgehen lasse, damit M. H. Herr sehe, dass ich seinem consilio deferire. Denn im übrigen endtlich Hr. Tschirnhaus am wenigsten ehre von diesem streite haben würde, massen ob er gleich über vermuthen vorgeben wolte, dass er hierinnen von mir das fundament nicht gehabt, und ich ihn in re inter amicos sincere acta nicht überführen kan, auch solches nicht tanti (?), so wird er doch seinen paralogismum nicht excusiren, sondern mich zwingen selbigen clarens zu entdecken, da ich zuvor also davon gesprochen, dass es vielleicht wenig merken werden. Denn gewiss ists, dass er das problema quadraturae Circuli nicht seiner meinung nach absolviret, noch dessen impossibilitatem erwiesen; und bin ich versichert, dass man zu Paris und London mit mir eins seyn wird. So kan man auch leicht erachten, dass derienige das fundamentum methodi besser verstehe, so dessen gebrauch und limites weiss, als der damit in paralogismos verfallet. Was sonst Hr. Newton betrifft, so habe ich dessen sowohl als Hr. Oldenburgs seel. briefe, darinn sie mir meine quadraturam nicht disputiren, sondern zugestehen; ich glaube auch nicht dass Hr. Newton sie sich zuschreiben werde, sondern nur einige inventa circa series infinitas, die er theils auch ad circulum appliciret, darauff Hr. Mercator, ein teutscher, zuerst gefallen, Hr. Newton sie weiter gebracht, ich aber auff eine andere weise dahinter kommen; unterdessen bekenne ich dass Hr. Newton die principia, daraus er eben die quadratur schliessen hätte können, schon gehabt, allein man fället nicht gleich auf alle consequenzen, einer macht diese, der andere eine andere combination.

Hiebey schicke M. H. Herrn eine Methodum de maximis et minimis, welche treflichen usum in der ganzen Mathesi hat.

Durch das Vorstehende erhält demnach die an einem andern Orte ausgesprochene Vermuthung, dass durch Tschirnhausens Veröffentlichungen Leibniz zur Bekanntmachung der Differenzialrechnung veranlasst wurde, ihre Begründung. Nachdem er sie neun Jahre lang zurückgehalten, entschloss er sich, um seine Rechte für alle Eventualitäten zu sichern und einen möglichen Prioritätsstreit im Voraus abzuschneiden, wenigstens ein Bruchstück seiner grossen Entdeckung bekannt zu machen; aber von den mehrfachen Entwürfen, die unter seinen Papieren sich noch vorfinden, wählte er den, der durch eine äusserst knappe und gedrängte Darstellung bemerkenswerth ist, so dass nur die fähigsten unter den Mathematikern in das Verständniss desselben einzudringen vermochten. Von dem andern递Haupttheil der höheren Analysis, von der Integralrechnung, worauf Leibniz bei weiten den grössten Werth legte, spricht er nur in kurzen unverständlichen Andeutungen; der oben erwähnten Ansicht getreu, dass man Methoden nicht bekannt machen müsse, vermied er die Elemente derselben zu enthüllen. Die Folge davon war, dass Johann Bernoulli der Erfinder der Integralrechnung zu sein sich anmasste (Sieh. Bd. III. S. 115 f.), und bis auf die neueste Zeit auch dafür gehalten worden ist.

Die Unterbrechung der Correspondenz zwischen Leibniz und Tschirnhaus dauerte bis zu Ende des Jahres 1692. Aus den vorhandenen Briefen erhellt nicht, wodurch die Wiederanknüpfung des freundschaftlichen Verhältnisses zwischen beiden Männern veranlasst wurde. Während dieser Zeit hatte Tschirnhaus mehr noch als früher seine Thätigkeit fast ausschliesslich der Verfertigung von Brennspiegeln aus Metall und von Brenngläsern zugewandt. Um letztere in möglichster Grösse herzustellen, legte er selbst Glashütten an, die ersten in seinem engern Vaterlande Sachsen. Auch erfand er neue Polir- und Schleifmaschienen und liess sie auf eigene Kosten ausführen. Obwohl Tschirnhaus seine Fabrikate zu möglichst hohen Preisen verwerthete, so wurde dennoch durch diese kostspieligen Unternehmungen, besonders aber auch dadurch, dass er seit 1700 fast ununterbrochen in Dresden in der Nähe des Hofes lebte, der gänzliche Ruin seines Vermögens nach und nach herbeigeführt. Indess mitten in den Zerstreuungen des Hoflebens unterliess er nicht mit mathematischen Problemen sich su beschäftigen; nach seinem eigenen Bekenntniss fühlte er sich nur in den

Stunden wahrhaft glücklich, welche er ungestört seinen Studien widmen konnte.

Die Correspondenz zwischen Leibniz und Tschirnhaus wird besonders seit 1700 sehr unvollständig. In der damaligen kriegerischen Zeit gingen die Briefe häufig verloren. Die letzten Briefe Tschirnhausens sind aus dem Jahre 1706. Er starb den 11. October 1709. Nach seinem Tode brach über sein Vermögen der Concurs aus; alle seine werthvollen Anlagen wurden von den Gläubigern mit Beschlag belegt und gingen, wie es scheint, gänzlich zu Grunde.

I.

Tschirnhaus an Leibniz.

Romae d. 17. Aprilis 1677.

In Paris habe von Hr. Oldenburgern gedachte Brieffe erhalten, aber aus mangel der zeit noch bies dato nicht antworten können; das einen newen modum die radices irrationales omnium aequationum zu determiniren gefunden annoch in Paris, habe in selbigen Schreiben so damahl an den Hrn. abgehen lassen nebenst andern realien notificirt, damitt aber der Hr. siehet wie candide verfahre, so wihl selbigen communiciren; die gantze difficultät bestehet hierinne, das wir alle intermedios terminos ex quacunque aequatione können wegbringen; dieweil den also unus incognitus terminus und unicus quoque cognitus, patet radices extractio; ferner dieweil in keiner aequation eintziger terminus kan weggebracht werden ipsa immutata, so ist nöthig das eine gegebne aequation in eine andere transmutirt werde, darin die intermedii termini können tollirt werden; dieses kan ferner also geschehen: sit aequatio quaecunque $xx - px + q = 0$ *) sive cubica $x^3 - pxx + qx - r = 0$ etc. si jam saltem unicus terminus debeat auferri, supponatur $x = a + y$ et transmutetur aequatio, in qua unicus terminus debet auferri, ope $x = a + y$ in aliam, ubi y incognita radix, in qua ponatur ille terminus auferendus $= 0$ atque sic inveniemus, qua ratione a sit assumenda ad terminum illum auferendum: sit ex. in hac aequatione $xx - px - q = 0$ auferendus secundus terminus, fiat $x = y + a$, jam vero

$$\begin{aligned} xx &= yy + 2ay + aa \\ -px &= \quad - py - pa = 0 \\ +q &= \qquad\qquad q \end{aligned}$$

*) Tschirnhaus gebraucht stets das Zeichen ∞ als Gleichheitszeichen.

adeoque ponendo $2ay - py = 0$, erit $2a - p = 0$ et $a = \frac{p}{2}$, hinc patet debere fieri $x = y + \frac{p}{2}$ ad secundum terminum in aequatione quadratica tollendum, atque sic non solum terminus unicus aufertur et in quacunque aequatione, sed et radices quadraticae aequationis determinantur, prout hoc quoque a Schottenio in Commentariis ostenditur. Si jam velis duos terminos in quacunque aequatione auferre, supponendum saltem $xx = ax + b + y$, si tres $x^3 = axx + bx + c + y$, si quatuor $x^4 = ax^3 + bxx + cx + d + y$, atque sic in infinitum, non obstante demonstratione, qua contrarium evincebat Gregorius, prout scribit Oldenburgerus, et operatio instituenda eadem prorsus ratione ut antea. Verum ut te adjuvem quantum possum, si forte haec introspicere animus sit, cum consectariorum utilissimorum haec methodus sit ferax, sit ex. g. cubica aequatio $x^3 - pxx + qx - r = 0$; verum cum jam unicum terminum ex aequatione possim tollere, compendiosius progrediar (id quod semper observatum in superioribus aequationibus multum calculi abscindit) supponendo saltem $x^3 - qx - r = 0$ et supponendo $xx = ax + b + y$, hinc enim

$$\begin{array}{llll}
y^3 + 3byy & + 3bby & + b^3 & \\
\quad - 2qyy & + 3ary & - 2qbb & \\
 & - 4qby & + 3bar & \\
 & + qqy & + qqb & = 0 \quad (A) \\
 & - aaqy & - aqr & \\
 & & - aaqb & \\
 & & + a^3r - rr &
\end{array}$$

jam ponatur $3b - 2q = 0$, eritque $b = \frac{2q}{3}$ et secundo fiat $3bb + 3ar - 4qb + qq - aaq = 0$ et erit, restituto b, quantitas $a = \frac{3r}{2q} + \sqrt{\frac{qrr}{4qq} - \frac{q}{3}}$; jam cum in aequatione (A) duobus terminis sublatis (id quod fiet a et b substituendo, prout jam inventae) y possit inveniri sitque

$$y = \sqrt[3]{4rr - \frac{27r^4}{2q^3} + \frac{8q^3}{27} + \frac{4qr}{3} - \frac{9r^3}{qq}\sqrt{\frac{9rr}{4qq} - \frac{q}{3}}},$$

erit in aequatione $xx = ax + b + x$ substitutis a, b et y

$$x = \left\{ \frac{3r}{4q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9rr}{4qq} - \frac{q}{3} + \sqrt{\left(\frac{9rr}{8qq} + \frac{7q}{12} + \frac{3r}{4q}\sqrt{\frac{9rr}{4qq} - \frac{q}{3}} + \sqrt[3]{4rr - \frac{27r^4}{2q^3} - \frac{8q^3}{27} + \frac{4qr}{3} - \frac{9r^3}{qq}\sqrt{\frac{9rr}{4qq} - \frac{q}{3}}}\right)}} \right.$$

desiderata radix cubicae aequationis. Haec nulli hactenus praeter D. Mohr et D. Schillero communicavi; sed D. Oldenburgero id non rescribam, nisi postquam ad ultimam perfectionem deduxero. Praeterea in utilissimas hoc in itinere quandocunque speculationes incidi, sed nescio num tempus unquam habiturus sim ea quae annotata saltem habeo, in praxim deducendi; inter alia in modum incidi admodum naturalem, omnium irrationalium quantitatum expressionem, cujuscunque gradus sint, per infinitas series obtinendi, absque ulla extractione radicum; sit ex. gr. $2aa = xx$, dico quod $x = a + \frac{a}{2} - \frac{a}{10} + \frac{a}{60} - \frac{a}{348} + \frac{a}{2030}$ etc. et $a = x - \frac{x}{3} + \frac{x}{21} - \frac{x}{119} + \frac{x}{697} - \frac{x}{4059}$ etc., quas series nescio num per Methodum Gregorii possint terminari, et posses Dn. Neutonio proponere saltem series hasce terminandas, aut quod idem, in progressione hac $\frac{a}{1}$, $\frac{3a}{2}$, $\frac{7a}{5}$, $\frac{17a}{12}$, $\frac{41a}{29}$, $\frac{99a}{70}$ ultimum seu maximum terminum invenire: est enim $a = \frac{a}{1}$, $a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$, $a + \frac{a}{2} - \frac{a}{10} = \frac{7a}{5}$, $a + \frac{a}{2} - \frac{a}{10} + \frac{a}{60} = \frac{17a}{12}$ etc. Progressio vero numerorum sic procedit: ad Fractionis praecedentis (ex. $\frac{7a}{5}$) numeratorem (7) adde denominatorem (5) et habebis (12) semper subsequentis Fractionis denominatorem; secundo ad hunc denominatorem (12) inventum adde praecedentis Fractionis $\left(\frac{7a}{5}\right)$ denominatorem (5) et habebis (17) numeratorem subsequentis fractionis (quae itaque erit $\frac{17a}{12}$). Methodum quoque, qua haec inveniuntur, si desideras, sequentibus communicabo, nec credo mihi, qua es facilitate, sententias tuas paradoxas admodum, quas eruisti in Tamesis ostio, nec non quaecunque se tibi memorabilia offerunt, esse celaturum.

P. S. Endlich ersuche, so was würdiges in Mons. Newton briefen, mir zu communiciren, oder auch sonst was mir dienen köndte.

II.

Tschirnhaus an Leibniz.

Mochte wiessen ob den Hrn. ein modus Generalis bekandt: ex data alicujus spatii, curva Geometrica terminati, mensura centrum gravitatis in axe determinandi, es würde mir in gewiesser inquisition dienen. Es hatt wohl der des Cartes einen ingenieusen modum hierin den Schotenio communicirt, so in dessen Commentarien enthalten, aber nicht universal beglaube zu sein. Meine letzte exercirung damitt meine studia mathematica beschlossen, hatt mich auff einen so leichten Methodum, omnium curvarum quantitatum hactenus cognitarum mensuram zuerhalten gebracht, als mir nicht wiessend, massen solches solo calculo (ohne inquisition der Tangenten, noch supposition indefinitae alicujus parvae lineolae neque centri gravitatis cognitio) eoque facillimo, duobus aut tribus saltem lineolis constanti beschiehet. Mochte wiessen ob man die quadratur dieser spatiorum, deren natur in folgenden aequationen

$$\begin{array}{llll} y = \sqrt{xx - x^4} & y = \sqrt{x^6 - x^8} & y = \sqrt{x^{10} - x^{12}} & \text{atque sic in} \\ y = \sqrt{x^4 - x^7} & y = \sqrt{x^{10} - x^{13}} & y = \sqrt{x^{16} - x^{19}} & \text{infinitum} \\ y = \sqrt{x^6 - x^{10}} & y = \sqrt{x^{14} - x^{18}} & y = \sqrt{x^{22} - x^{26}} & \end{array}$$

welche alle ad mensuram reduciret, wie auch infinita andere, so surdis signis miris modis implicirt, ... solche nicht meinen, das circuli quadratura sehr probabel .... weil die quadratura dieses spatii $y = \sqrt{xx - x^4}$ seu $y = x\sqrt{1 - xx}$ bekandt, nehmlich $= \frac{2}{3}$, und ad circuli quadraturam nichts mehr zu finden nöthig, als summa omnium $\sqrt{1 - xx}$.

III.

Tschirnhaus an Leibniz.

Rom d. 27 Januar. An. 1778.

Tam amplas literas jam dum ante duos menses ad Te*) transmisi, ut mihi viderer omnem scribendi modum excessisse, et

*) Leibniz hat bemerkt: non vidi.

quia binarum literarum quas ope Dn. Paluzii ad Te magno abhinc temporis spatio destinaram, nondum tamen responsum accepissem, eas potius ad Dn. Schüllerum misi, ut Tibi hac ratione et secure et citius redderentur. In iis autem ad omnia quae tunc desiderabas, quantum vires permisere, respondi et inter alia Methodum communicavi, qua omnium quantitatum possibilis proportio determinatur, omnesque quantitates irrationales ad infinitas series reducuntur, ubi ostenditur $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} + \frac{1}{60} - \frac{1}{348}$ etc. et alia hujus generis. Hoc solum hic addam 1) quod haec Methodus facilius multo intelligatur, si explicetur per continuas subtractiones et prout quoque primo adinveni, sed prolixior mihi visa illius explicatio, adeoque malui alteram per divisionem ipsi praeferre; 2) quod data aliqua serie infinita, statim ejus conversa (uti sic eandem soles vocare) possit inveniri; ostendi enim ibi, qua ratione data aliqua serie haec ad infinitas aequationes possit transferri, comparando omnes terminos hujus seriei cum terminis generalis cujusdam seriei, et quod ex hisce aequationibus duae semper series infinitae possint elici, prout altera quantitatum cognita aut incognita supponitur. Siquidem tempus id permittet ut haecce omnia denuo accuratius retractare possim, tentabo quae conversa series, supposita tua circuli quadratura, proveniat hac methodo et alia quae ad ultimam perfectionem hujus Methodi desiderantur. Porro circa Metaphysica quoque quaedam erunt ibi exposita, sed rudiora forte quam quae Tibi placere possint. Interim gaudeo quod Virum offenderis, ex cujus conversatione satisfactionem circa talia habere possis, sed nescio sane, ob quam rationem nomen ejus mihi retices, quod mihi utique pergratum esset cognoscere, uti et aliquando quae circa haec inter Vos peracta. Stenonem cognovi Virum admodum religiosum esse et certe ingenio pollentem, interim tamen non miror, quod Te disserentem haud assecutus fuerit, cum aliquatenus interiora ejus penetrare mihi licuit et ratio Tua circa haec allata praeprimis Ipsi conveniens esse videtur. In Oldenburgero nostro utique multum perdidimus, et vellem libenter per Te addiscere, quis ei successurus sit, uti et alia quae in Anglia jam curiosa occurrunt, quia literarum commercium inter me et illos hac ratione interruptum.

Pat. Gottignies in sua Logisticae Idea An. 1677 hic impressa pag. 207 hisce verbis quadraturam suam circuli mundo annunciat: Nemo hactenus inventus est, qui in rigore Geometrico solverit quadraturam circuli, tametsi certo constat solvi posse; utrum legitimam ejus solutionem ego invenerim, tunc alii statuent, quando publici juris facta erunt, quae hactenus inter privata mea scripta delitescunt. Multoties contuli cum Ipso, sed multas conjecturas habeo, quae mihi contrarium suadent, et revera si obtinuisset, eas non video, quare non publici juris faceret; sed forte probabilitate deceptus possibilitatis incidens in talia problemata, quae solutum facilia videbantur, quaeque circuli quadraturam supponebant, prout quaedam Ipse in praedicto Tractatu recenset, et revera mihi non saepe (credo facile et aliis has materias tranctantibus) talia se obtulere, quanquam nunquam probabilius specimen sequente: Sit (fig. 91) Parabola ADE, cujus axis AD, sitque DE = AD; jam fiat AB = DN et ductis lineis BM et QN parall. ad AH fiat BG = OQ et NO = GM; idem fiat utique et exsurget spatium AHLEFA = Parabolae ADE; dico jam dato solido, quod fit a figura HLE circa axim HE (seu ut dicis, momentum figurae HLE) dari quadraturam circuli. Quis primo intuitu non existimaret, hoc possibile esse, cum 1) quadratura spatji HLE detur, 2) solidi dimensio, quod fit a figura HKL circa axim KL, ac cum 3) spatium hoc HLE tantam affinitatem habeat cum Parabola, cujus quadratura datur; hac probabilitate allectus me ad hoc solvendum accinxi et vidi statim, totam difficultatem in eo consistere, ut centrum gravitatis hujus figurae HLE determinetur in axe KL, adeoque inquisivi in Methodum Generalem ex datae figurae quadratura centrum gravitatis determinandi, et cum non videretur juxta vota progressus, ad Te confugi et revera non potuisses aptius respondere, quam referendo idem prorsus exemplum, in quod incidi (ut perfacile ex applicatione apparebit, licet primo intuitu diversa videantur) loco responsionis cum annexa ingeniosa reflexione ex tua Cyclometria, quod tam generalis circuli quadratura non possit dari, cum (prout, si recte memini, ibi recenses) hinc alias Anguli trisectio ope circuli possit exhiberi et similia, seu quod idem, aequationes cubicae ac superiorum dimensionum horum angulorum sectiones exprimentes possent ad quadraticam reduci, quod utique non possibile videtur, licet nullam hac de re demonstrationem habeam nec adhuc videam impossibilitatem hujus solidi dimensionem impetrandi aut certae cujusdam partis saltem, hicque obiter velim scias: per hoc ipsum instrumentum, quo me vidisti Angulum datum in quotvis aequales partes posse dividere, quoque me jam, invariato prorsus eodem, quotcunque medias proportionales designare posse. Quae de Fractionum reductione ad numeros decimales innuis, bene percepi et ut omnia universalia, magni admodum facio, ac si per tempus licebit, non ad decimalem, sed ad quamcunque ejusmodi divisionem, ut binalem, trinalem, septinalem etc. applicabo; verum non omni ex parte percepi, qua ratione hinc curvarum quadraturae possint derivari nec quod alio loco scribis, Te idem negotium per Logarithmos posse absolvere, et horum cognitio mihi pergrata esset. Quoad Methodum, in quam incidi, ope cujus majori facilitate, quam hactenus vidi, quadraturas curvarum quantitatum exhibeo, non credo displicebit ejus communicatio; sequentia autem circa illam annoto. 1) Non existimo me dixisse ipsam absolvi absque Methodo indivisibilium, ut vulgo vocant, sed saltem non opus esse ut consideremus rectangula cujusdam altitudinis indefinite parva; fateor enim considerandas esse vel solas lineas rectas aut superficies planas, ut solet Cavallerius, vel universalius cum Cartesio nihil aliud considerandum esse quam solam relationem, qua ille solet uti ad curvarum naturas calculo designandas, prout statim apparebit. Interim si hisce non directa Methodo quadraturas curvarum quantitatum obtineri credis, utique nec Methodus mea hoc praestabit; ostendam autem hic prius ex occasione, quomodo didici quadraturam Lunulae Hippocratis posse demonstrari per simplicem linearum transpositionem absque Euclideo illo Theoremate quod insinuas: Sit circulus EABD (fig. 92) centro C et radio CA descriptus; ductis jam diametris AD et EB normaliter se intersecantibus in C, ac linea recta AB, tunc fiat (ducta ad libitum MN parallela AC) ML = KN, et sic ubique, eritque spatium CKOB hinc proveniens = spatio AMBL; fiat denuo KO parallela CB ac semper aequalis FJ, eritque hinc productum spatium EFHC aequale spatio AMBL adeoque semilunula EPAHFEH = triangulo ACB seu ECD, et facile hinc porro possem ostendere, EFH curvam esse arcum circuli radio DE descriptum, ac proinde semilunulam EPAHF esse eandem quam Hippocrates considerat. Sed hoc Tecum agendo, utique superfluum esset. Hoc ex occasione noto, si AMB sit curva Parabolica et fiat continue ac ubique ML = KN et hinc KO = FJ, FQ esse quarta parte QP adeoque spatium ACBM ad triangulum ut 4 ad 3, et sic in quibusvis figuris, hoc applicando aut quadraturas datorum spatiorum assequi licet aut quadraturas ad minimum semper alicujus alterius spatii. Sed haec forte non recenseri merebantur. 2) Itaque me ad Methodum modo promissam, quam breviter ac clare potero, explicandam accingo: Sit (fig 93) figura quaecunque CBD, jam concipiatur alia figura quaecunque CBA perpendiculariter erecta supra lineam CB, atque sic ex infinitis rectangulis FJG formetur solidum quoddam; dico jam infinitas intersectiones hujus solidi secundum lineam JG parallelam BD aequari infinitis intersectionibus hujus solidi secundum lineam HG parallelam BC, seu quod idem, omnia rectangula FJG aequari omnibus spatiis ABJF. In hoc unico et tam facili consistit haec Methodus; quod qui bene perceperit, in reliquis nullam difficultatem experietur. Et mirum posset videri, haec tam facilia non potuisse alicui in mentem venire, cum ingeniosissima hujus seculi extent inventa, nisi viderem tam infinita numero praeclara Theoremata tanta facilitate hinc posse deduci, quorum permulta ab aliis, sane non difficiliori Methodo, fuissent exhibita, si haecce ipsis nota fuissent; sed infinita cum extent facilia, ad quae nimirum penetranda non multum requiritur ingenii et quae tamen maximi usus, non mirum est ut nos, quibus infinita percurrere non datum, quaedam subterfugiant, licet et facillima et perquam utilia; et posito quoque haec nota extitisse aliis, ut vix dubitare possum, non forte ipsis quoque notum fuit haec tam utilia esse ad quadraturas eruendas; et praeterea ea plerumque magni aestimamus, ad quae elicienda multum ingenii requiritur, videtur adeoque quae imaginationem late afficiunt ac admirationem in nobis excitent, potuisse homines ad tam sublimia pertingere; ea vero proinde parum aut nullius fere momenti quae quam maxime universalia et facilia quaeque ideo ordinarie solemus negligere: sed satis praefati (ne ridiculum videatur me velle rem, primo intuitu nullius momenti, in tantum extollere) ad rem ipsam propius accedamus. Formetur primo tale solidum ex quadrato ABLK (fig. 94) et triangulo BLC, sitque BL vel LC $= 1$; jam fiat BG $= x$ ad primam sectionem HGF calculo exprimendam; secundo ponatur quoque LD $= x$ (Nota: si linea LC major aut minor BL, potius LD litera y aut simili signanda est ob confusionem evitandam) ad secundam sectionem, ut supra dixi, JMLK calculo exprimendam, haecque generaliter in omnibus sequentibus notanda. Jam itaque

$$m\left\{\begin{array}{l}HG = 1 \\ GF = x\end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l}JM = 1 \\ ML = 1 - x\end{array}\right\} m^{*)}$$

jam omnes intersectiones HGF aequantur omnibus rectangulis JML, hoc est omn. HGF $= x = 1 - x =$ omn. JMLK adeoque $2x = 1$ et omnes $x = \frac{1}{2}$.

Sit secundo corpus ex duobus triangulis BLC et BLK (fig. 95); jam sit

$$\left.\begin{array}{l}HG = x \\ FG = x\end{array}\right\} m \qquad \left.\begin{array}{l}\text{ABLK juxta priora} = \frac{1}{2} \\ \text{BMJ juxta eadem} = \frac{xx}{2}\end{array}\right\} s$$

eritque $xx = \frac{1 - xx}{2}$ adeoque $3xx = 1$ et tandem omn. $xx = \frac{1}{3}$. Per haecce tam pauca et facilia exhibetur trianguli, circuli, cum ad triangulum reducatur, Cycloidis, Parabolae, Coni, Sphaerae, Spiralis, Conoidis Parabolici, Conoidis Hyperbolici dimensio, id est praecipua inventa Veterum ac infinita numero recentiorum; sed ulterius progrediamur.

Sit tertio solidum constans (fig. 96) ex triangulo seu Figura, ubi GF $= x$ et Figura BLK, ubi GH $= xx$, jam

$$m\left\{\begin{array}{l}HG = xx \\ GF = x\end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l}\text{KLB per priora} = \frac{1}{3} \\ \text{JMB per eodem} = \frac{xx}{3}\end{array}\right\} s$$

eritque $x^2 = \frac{1 - x^2}{3}$, adeoque $4x^3 = 1$ et $x^3 = \frac{1}{4}$, atque sic progrediendo eadem facilitate invenies $x^4 = \frac{1}{5}$, $x^5 = \frac{1}{6}$, atque sic in infinitum, ubi notes posse eadem inveniri, si figura BLK in secunda et tertia invertatur, uti et tam haec quam omnia sequentia posse quasi innumeris modis inveniri.

Sit jam porro solidum (fig. 94) constans ex duabus superficiebus BLKA et BLC, in quibus GH $= 1$ et GF $= xx$, jam uti supra

$$m\left\{\begin{array}{l}HG = 1 \\ GF = xx\end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l}JM = 1 \\ ML = 1 - \sqrt{x}\end{array}\right\} m$$

et erit $xx = 1 - \sqrt{x}$ adeoque $\sqrt{x} = 1 - xx$ et hinc per priora

*) Die Buchstaben m und s drücken Multiplication und Subtraction aus.

omn. $\sqrt{x} = \frac{2}{3}$. Sit jam (fig. 95) GH $= x$ et GF $= xx$, jam

$$m\left\{\begin{matrix} HG = x & BLK = \frac{1}{2} \\ GF = xx & BMJ = \frac{1}{2}\sqrt{xx} \end{matrix}\right\}s$$

et erit $x^3 = \frac{1 - \sqrt{xx}}{2}$, adeoque $\sqrt{xx} = 1 - 2x^3$, hoc est $\sqrt{xx}$ $= \frac{2}{4}$. Jam assumendo GH $= xx$ et GF $= xx$, invenies $\sqrt{x^3}$ $= \frac{2}{5}$, assumendo vero GH $= x^3$ et GF $= xx$, invenies $\sqrt{x^4}$ $= \frac{2}{6}$, et sic porro $\sqrt{x^5} = \frac{2}{7}$, $\sqrt{x^6} = \frac{2}{8}$, atque sic porro in infinitum. Tertio si assumamus HG $= 1$ et GF $= x^3$, 2) HG $= x$ et GF $= x^3$, 3) HG $= xx$ et GF $= x^3$, 4) HG $= x^3$ et GF $= x^3$, atque sic porro inveniemus $\sqrt[3]{x} = \frac{3}{4}$, $\sqrt[3]{xx} = \frac{3}{5}$, $\sqrt[3]{x^3} = \frac{3}{6}$, $\sqrt[3]{x^4} = \frac{3}{7}$, atque sic indefinite. Eadem ratione invenio sic progrediendo $\sqrt[4]{x} = \frac{4}{5}$, $\sqrt[4]{xx} = \frac{4}{6}$, $\sqrt[4]{x^3} = \frac{4}{7}$, $\sqrt[4]{x^4}$ $= \frac{4}{8}$, item $\sqrt[5]{x} = \frac{5}{6}$, $\sqrt[5]{xx} = \frac{5}{7}$, $\sqrt[5]{x^3} = \frac{5}{8}$, atque sic in infinitum. Semper aequales erunt tales quantitates fractioni, cujus numerator exponens signi radicalis, denominator summa exponentis signi radicalis et exponentis quantitatis x. Et hisce paucis me existimo 1) omnium Parabolarum, Spiralium et Conoidum Parabolicarum dimensionem ac infinitarum praeterea superficierum ac solidorum dimensionem ea facilitate exhibuisse, qualem hactenus non vidi; 2) quoque omnium quantitatum, quae ab harum compositione exsurgunt, uti sunt omnia Conoidea Parabolica a Parabolis infinitis circa basin genita atque infinitae aliae tales quantitates; 3) quia compositarum ex surdis quantitates infinitis modis possunt exprimi, ab unica tali compositione infinitarum quantitatum mensura dependet ex. gr. $\sqrt{x} + \sqrt{x^3} =$ juxta priora $\frac{2}{3} + \frac{2}{4}$ $= \frac{6}{7}$; verum haec quantitas infinitis modis potest exprimi ex. gr. multiplicando in se quadratice, cubice etc. et extrahendo radicem quadraticam, cubicam etc.; sic multiplicando in se quadratice hanc quantitatem et extrahendo radicem erit $\sqrt{x+x^3+2\sqrt{x^4}} = \frac{7}{6}$ etc., ubi notandum, quod quandoque egregia hinc assequuntur, si extractio procedit, velut in praesenti exemplo, erit enim $\sqrt{x+x^3+2xx} = \frac{7}{6}$ (Nota: quid probabilius, jam hinc dari $\sqrt{x+2xx}$, cum detur $\sqrt{x+2xx+x^3}$, hoc est hyperbolae quadratura, sed probabilibus in hoc negotio non credendum, interim ad minimum interpolationis negotium a Wallisio exhibitum multum hinc adjuvabitur). Quot jam existimas quantitatum mensuram dari, conjungendo tali ratione omnes binas, ternas, quaternas etc.? Attamen in eo non terminatur Methodus, sed progressum jam scio in infinitum haec continuandi, ad binomiorum, trinomiorum etc. impetrandi mensuram, et cum jam omnium curvarum possibilium nunc determinarim (ut ex receptis a me literis Te intellexisse spero) et facile in hoc negotio omnes possibiles combinationes determinare liceat, credo si tempus haberem, me posse hinc determinare tam omnes possibiles quadraturas, quam quae non quadraturam admittunt, et alia quae ad ultimam hujus Methodi perfectionem requiruntur. Verum ut aliqua saltem Tibi communicem exempla quantitatum compositarum, in quae incidi ulterius progrediendo, observavi omn. $x\sqrt{1-xx} = \frac{2}{2,3}$, omn. $xx\sqrt{1-x^3} = \frac{2}{3,3}$, omn. $x^3\sqrt{1-x^4} = \frac{2}{4,3}$ etc.; item omn. $x^3\sqrt{1-xx} = \frac{8}{4,15}$, omn. $x^5\sqrt{1-x^3} = \frac{8}{6,15}$, omn. $x^7\sqrt{1-x^4} = \frac{8}{8,15}$ etc.; omn. $x^5\sqrt{1-xx} = \frac{48}{6,105}$, omn. $x^8\sqrt{1-x^3} = \frac{48}{9,105}$, omn. $x^{11}\sqrt{1-x^4} = \frac{48}{12,105}$, atque sic talia magno numero communicare possem. Jam interim ad alteram partem hujus Methodi me convertam, quae constitit ut dato aliquo spatio mensura ejus detegatur (loquor saltem de superficie, quia omnes aliae quantitates ad has reduci possunt) tuncque sic procedo: conjungendo primo rectangulum cum proposita figura, formo solidum hinc ut antea, et siquidem hinc non mensura patet progrediendo ut supra, assumo alias ac alias figuras quadrabiles et efficio hinc solida priori aequalia et tunc, ut antea, progredior formando semper aequationes inter diversas illas sectiones, cumque semper spatia illa quadrabilia in certa progressione assumo, debent provenientia quoque semper in certa progressione progredi, adeoque ut facile videam, num hac methodo intentum assequi liceat. Ostendam speciminis loco, qua ratione circuli et aliarum figurarum novas hac Methodo detexerim quadraturas. Primo sit (fig. 97) semicirculus DMI et assumamus rectangulum DACI ita ut radius $JO = DA$; sed cum hac ratione nihil invenimus, quod tendat ad nostrum scopum, ut tentanti constabit, assumo triangulum FHD, in quo $FH = DH$, et efficio solidum priori aequale, hoc est efficio, ut rectangulum MKB semper aequale sit rectangulo EGL; ponamus itaque in hunc finem $IK = x = HG = NL$ et posito $OI = a$, erit DK seu $FG = 2a - x = EG$. Jam sit HN seu $GL = z$ et fiat rectangulum MKB = rectang. EGL eritque $a\sqrt{2ax - xx} = 2az - xz$, quibus reductis invenitur $x = \frac{2a\,zz}{aa + zz}$, ex quibus patet curvam hanc HLS esse eandem, qua egregie circulum quadrasti. Sed videamus, qualis quadratura ex hac Methodo proveniat. Cum itaque jam omnia rectangula EGL juxta superiora aequalia sint omnibus spatiis DHGE supra NL, hoc si calculo exprimo $DEGH = FHD - FGE$, hoc est $DEGH = \frac{4\,aa}{2} - \frac{4aa - 4ax + xx}{2}$ $= \frac{4\,ax - xx}{2}$, restituatur jam x et erit $\frac{8azz}{aa + zz} - \frac{4\,aaz^4}{\overline{aa + zz}^2}$, hoc est $\frac{8a^4zz + 4aaz^4}{a^4 + 2aazz + z^4}$, hoc si dividatur per 2 et erunt omn. $a\sqrt{2ax - xx} =$ $\frac{4a^4zz + 2aaz^4}{a^4 + 2azz + z^4}$; quodsi in hac fractione loco $2aaz^4$ esset $4aaz^4$, posset haec fractio dividi per $aa + zz$ atque sic in tuam quadraturam inciderem, quod aliquando examinabo, num possibile sit, hinc quoque educendi; qua ratione vero jam haec fractio ad infinitam seriem reduci debeat, Tibi notius jam est ex Dn. Mercatoris Methodo, quam ut prolixior eo sim; annoto saltem, si ponamus FG seu $DK = x$ (quod in sequentibus quoque facio), invenietur $a\sqrt{2ax - xx} = \frac{2a^6}{a^4 + 2aazz + z^4}$. Sit secundo curva DMI talis, cujus natura $\sqrt[3]{2axx - x^3}$ eritque, supposito $a\sqrt[3]{2aax - x^3} = xz$, $x =$ $\frac{2a^4}{a^3 + z^3}$; jam omnes FGE supra PL aequales omnibus rectangulis EGL, hoc est $\frac{xx}{2} = \sqrt[3]{2axx - x^3}$, hoc est restituto x, erit $a\sqrt[3]{2axx - x^3}$ $= \frac{2a^8}{a^6 + 2a^3z^3 + z^6}$. Eadem ratione invenies $a\sqrt[4]{2ax^3 - x^4} =$

$\frac{2a^{10}}{a^8+2a^4z^4+z^8}$, atque sic in infinitum infinitas quadraturas per series infinitas non ineleganter expressas. Possem jam ulterius progredi et eadem facilitate ostendere, tam quae Parabolis infinitis analoga, quam alia innumerabilia spatia indefinitae longitudinis ad finitam mensuram reducendi; sed credo haec ex superioribus satis abunde constare. Hoc interim adjungam, cum tota haec Methodus saltem in eo consistat, ut Relationes ejusdem quantitatis ad diversas lineas adaequemus (atque proinde reflectendo ad pag. 39 Geomet. D. des Cartes, mihi certo persuadeo hanc ipsam ipsius quadraturas investigandi methodum adfuisse, quam, cum tam facilis existebat, potius indigitare volebat, quam prolixe explicare, prout ipsi familiare erat circa talia) hocque sic praecise spectatum non saltem solidis applicabile, in hoc siquidem tali occasione incidi: sit (fig. 98) linea $AB = a$, jam $AC = x$ et $CB = y$, hinc $a = x + y$, $aa = xx + 2xy + yy$, $a^3 = x^3 + 3xxy + 3xyy + y^3$, atque sic in infinitum; demonstraveram autem omn. $x =$ omn. y, omn. $xx =$ omn. $2xy =$ omn. yy; item omn. $x^3 =$ omn. $3xxy =$ omn. $3xyy =$ omn. y^3, atque sic in infinitum semper continuam aequalitatem intra hasce infinitas quantitates existere; verum demonstratio haecce, cum difficilis esset, eo ipso mihi displicuit, quapropter in faciliorem inquirens vidi primo facile patere, quasvis infinitas dignitates ab alia parte hujus lineae incipiendo aequari infinitis dignitatibus eadem ratione compositis incipiendo ab altera ejusdem parte, ac proinde omn. $x =$ omn. y, omn. $xx =$ omn. yy, omn. $x^3 =$ omn. y^3 etc. item omn. $xxy =$ omn xyy, atque sic quoad similia, adeoque saltem demonstrandum faciliori via omn. $xx =$ omn. $2xy$, item omn. $x^3 =$ omn. $3xxy$, atque sic continuo aequalitatem intra diversi generis dignitates. Variis autem tentatis viis res sic facillime successit. Dico itaque 1) omn. $2xy = xx$ seu omnia rectangula AHF aequari omnibus quadratis AH (in fig. 99) et sic demonstro: omnia enim rectangula AHF bis aequalia sunt omnibus rectangulis EHD bis, hoc est solido a triangulo ABF et triangulo altero AFG perpendiculari ad AF, hoc est omnibus intersectionibus CD bis ejusdem solidi, hoc est omnibus triangulis AHE bis, hoc est omnibus quadratis AH. Q. E. D. Dico 2) omn. $3xxy = x^3$ et sic demonstro: omnia enim producta ex quadratis AH (fig. 100) in HF ter aequalia sunt omnibus productis ex quadratis EH in HD ter, hoc est aequalia solido ex triangulo AFB et figura altera AFG perpendiculari ad lineam AF ter, hoc est omnibus intersectionibus secundum lineam CD parall. AF ter, hoc est omnibus spatiis AHE ter, hoc est omnibus rectangulis AHE, hoc est omnibus cubis AH. Q. E. D. Atque sic porro progrediendo cum tantam facilitatem haecce sic demonstrandi observarem, hisce insistens in jam modo communicatam Methodum incidi. Verum cum omnia, quae contra consuetudinem fiunt, ordinarie risum movent, non dubito quin eadem ratione tam extraordinariam parenthesin excipias, quod nec absque usu fiet, si quidem nimia attentio circa talia studia plerumque efficit, ut vultus nostri constitutio tristitiae statui vicinior esse appareat quam hilaritatis. Idem quoque tentavi in superficiebus, et non contemnendum observavi successum; attamen recordatus, quod Cavalerius solas lineas et superficies considerando, in superficiebus et corporibus sibi ipsi impedimento fuerit, quominus curvarum ac superficierum curvarum dimensiones exhiberet atque sic suam Methodum ad summam perfectionem reduceret, quod post ipsum egregie ab Aliis praestatum, considerantes in superficiebus rectangula, cujus altitudo indefinite parva atque sic in aliis quantitatibus semper homogenea indivisibilia: reflectens, inquam, ad ea, vidi haec optime succedere, quanquam ob temporis brevitatem impossibile mihi fuit, haec ex professo pertractare, quod ad quietiorem statum reservo. Jam vero mentem meam sic explico: sit (fig. 101) AHK quaecunque figura sitque AB $=$ x, BC $=$ y, BD seu CF $=$ 0 seu quantitas omni assignabili minor, qua utitur Fermatius et Multi post ipsum ad Tangentes determinandas, Tu vero ad quasvis quantitatum transmutationes in alias solo calculo peragendas, AH $= 1 =$ HK, hincque HD seu FG $= 1 - x - 0$; porro calculi facilitas maxima erit, si postquam quantitas 0 certam dimensionem acquisivit, omnes quantitates includentes plures ejusdem 0 dimensiones omittamus. Sit itaque primo natura hujus spatii hac aequatione expressa $y = x$ adeoque

I.

$$\left.\begin{array}{l} DE = 0 + x \\ BC = x \end{array}\right\} s$$

$$\left.\begin{array}{l} FE = 0 \\ FG = 1 - x - 0 \end{array}\right\} m \qquad \left.\begin{array}{l} BC = x \\ CF = 0 \end{array}\right\} m$$

Jam omn. rectang. GFE $= 10 - x0 = 0x =$ omn. rectang. BCF adeoque $2x = 1$ et $x = \frac{1}{2}$.

II.

Sit $y = xx$ adeoque

$$\left.\begin{array}{l} DE = xx + 2\,0\,x \\ BC \text{ seu } DF = xx \end{array}\right\} s$$

$$\left.\begin{array}{l} FE = 2\,0\,x \\ FG = 1 - x - 0 \end{array}\right\} m \qquad \left.\begin{array}{l} BC = xx \\ CF = 0 \end{array}\right\} m$$

omn. rectang. $GFE = 20\,x - 20\,xx = 0\,xx =$ omn. rectang. BCF,
ergo $2\,x = 3\,xx$, hoc est juxta priora $xx = \frac{1}{3}$.

III.

Sit $y = x^3$, jam

$$\left.\begin{array}{l} DE = x^3 + 3\,0\,xx \\ DF = x^3 \end{array}\right\} s$$

$$\left.\begin{array}{l} FE = 3\,0\,xx \\ FG = 1 - x - 0 \end{array}\right\} m \qquad \left.\begin{array}{l} BC = x^3 \\ CF = 0 \end{array}\right\} m$$

omn. rectang. $GFE = 30\,xx - 30x^3 = 0\,x^3 =$ omn. rectang. BCF,
adeoque $3\,xx = 4\,x^3$ et hinc juxta priora $x^3 = \frac{1}{4}$,

atque sic in infinitum. Sed haec etiam alia adhuc via ac faciliori possunt exhiberi. Et haec ad explicationem superiorum sufficiant; ubi animadvertere licet, hanc viam per superficies solas in eo superare priorem, quod hic ad quantitatum dimensionem obtinendam non opus alterius diversae superficiei dimensione habere, sed solam naturam superficierum nobis datam, et credo hanc ultimam esse perfectionem quam desiderare possunt Mathematici circa quantitatum mensuras, veluti aliquando me spero ostensurum. Circuli Tui quadraturam statim hinc deduco et quaecunque hactenus vidi egregia, ac mihi persuadeo, quicquid humanitus potest deduci circa hanc materiam (licet subridendo forte existimabis me hancce Phrasin contraxisse a Viro, quem me scis magni admodum aestimare et qui reliqua captum humanum superantia credidit, quae tamen recentiorum industria detexit). Nec hinc Gregorius amplius Algebrae defectum incusaret circa quantitatum mensuras, prout facit in Praefatione Geometriae suae Universalis. Ultimo possem hic ostendere, tam qua ratione per eandem Methodum hinc deduxerim duo Theoremata Tibi transmissa, ad centra gravitatis curvarum quantitatum determinanda, quam qua ratione ope horum centra gravitatis majori facilitate ac supra curvarum quadraturae assignari possint; sed brevitatis causa haec omitto cumque haec non difficulter jamjam pateant. Tuam Cyclometriam omnes maxime desiderant, quibus insinuavi inventa quae continet, ac optat praeprimis Dn. Nanzarius, ut quam primum hujus Tractatus exemplar possit impetrari, qua de re ut et circa hactenus desiderata a Te literae hisce inclusae pleniorem spero instructionem exhibebunt. Dn. Fabri nondum visitavi ob multas rationes, attamen non discedam Ipso insalutato. De Borellio non dissimile mihi judicium vestro; Kircherum vero multoties salutavi ob diversas rationes; in Musicis impetravi quaedam eorum quae reticet in sua Musurgia; jam Artis suae Combinatoriae secundus Tomus, qui dicitur Ars analogica, Amstelodami imprimitur; in Hetruria describenda modo occupatur. Caeterum adeo ejus interiora penetravi tam ex lectione quam Ipsius conversatione, ut quousque ipsius Methodo pertingere liceat, quaeque paradoxa hinc deducere, me credam aliquatenus videre, de quibus, ut spero, aliquando oretenus. Auzout non Romae est; Francisc. Levera vero mortuus. Cassini inventa de duobus aliis Planetis circa Saturnum praeter Hugenianum hic in dubium vocantur. Caeterum quoad optica vitra et hic et alibi egregia vidi; Divini vero non est Romae; Bacone Genuae occupatur in scribendo certo libro. Vidi librum Francis. Bayle Tolosae impres. An. 77 hoc titulo: Problemata Physica et Medica, in quibus varii Veterum et Recentiorum errores deteguntur; item Dissertationes ejusdem Physicae; non potui eo ob certas rationes nisi duarum horarum spatio frui; inter multa quaedam nova quoque indigitabat, quaedam circa refractionis materiam et tam defectus demonstrationis Fermatii, quam Cartesii in hoc negotio mihi videbatur ingeniose detegere ac emendare. Posses submonere Dn. Hugenium hac de re, quem meo nomine officiosissime salutes; licet non libenter talia literis committam, attamen ob ea quae tam praestanti Viro debeo, non possum quin indicem, Italos de ipso admodum male judicare ac conqueri ipsum ultra viginti propositiones ex Gallileo hausisse in suo Horologio oscillatorio, nec ipsius tamen mentionem fecisse; desiderat quoque Dn. Riccius ab eo jam a longo tempore responsum. Dicunt huc allatum esse horologium ex Gallia, quod praestantius sit ultima inventione Dn. Hugenii; spero hoc me brevi visurum. Perhibetur quoque Becklinium, quae circa viventia sub aquis in lucem emisit, curiosa esse.

IV.

Leibniz an Tschirnhaus.*)

Venio ad ea quae de dimensionibus curvarum habes, peringeniosa more tuo. Sed nolim putes ad eorum demonstrationem opus esse rectangulis exiguae altitudinis. Nam ex multis planis non fit solidum nec ex multis lineis spatium, sed ex multis rectangulis vel parallelepipedis exiguis. Ea quam explicas in literis methodus tua est affinis ductibus figurae in figuram, quos primus invenit et cum fructu adhibuit P. Gregorius a S. Vincentio, postea generalius adhibuit Pascalius. Ego talia et innumera alia calculo solo complector, ex. causa sit y aequ. $\sqrt{x^2+b^2}$, z aequ. $\sqrt{bx+b^2}$, et yz aequ. $a\omega$ aequ. $\sqrt{bx^3+b^3x+b^2x^2+b^4}$, erunt plana solidi ductu ordinatarum y, z in se invicem facti proportionalia seu homogenea planis seu, ut ita dicam, ordinatis solidi ductus**). Si jam solidum alio modo secari possit quomodocunque et alia figura plana curvilinea reperiatur, cujus ordinatae v sint proportionales planis sectionis, patet cum solidum diversis modis sectum semper sit idem, summam omnium v haberi posse ex data summa omnium ω, vel contra. Eadem methodo usus est P. Honor. Fabri in suis Geometriae Elementis ad demonstrandas quadraturas, sed plerasque dudum notas. Sed neminem autorem vidi, qui hujus rei pariter ac multarum aliarum vim animo complexus sit. Te certe unum hunc ductuum usum satis universaliter considerasse arbitror. Unus olim P. Gregorius a S. Vincentio aliquid hujusmodi quasi per nebulam vidisse videtur, sed calculi defectu latius extendere non potuit. Sed nonnulla ex his variosque alios vastissimos conceptus Tibi aliquando in schedis meis dudum notatos monstrabo, si modo Tibi tanti vi-

*) Von der Antwort Leibnizens fand sich nur das folgende Bruchstück.

**) Leibniz macht hierbei die Marginalbemerkung: Methodum illam tuam per solidorum ductuum diversas sectiones hac complector aequatione transcendente $\int \overline{zydx}$ aequ. $\int\int \overline{\overline{z\,dx}\,dy}$, ubi tantum ipsarum z et y relationem ad x in ipsarum locum substitui oportet. Unde infinitae deduci possunt quadraturae absolutae vel hypotheticae, sed infinitas alias ejusmodi aequationes habeo non minus feraces, ut intelliges calculo meo intellecto.

detur. Caeterum omnes hujusmodi methodos puto imperfectas, habent enim aliquid a casu. Et data problemata earum ope solvere non possumus, nisi condita Tabula. Nescio an demonstrare possis ope Tuae methodi (sectionis ductuum) omnes quadraturas possibiles provenire, puto tamen multas pulcherrimas progressiones ejus ope provenire posse. Ego (si methodos hujusmodi sequi libet) methodum per differentias habeo pro perfectissima, ejus enim ope omnes curvas quadrabiles in Tabula exhiberi posse certum et demonstrabile est, quod me Tibi alias dicere memini. Altera pars quoque Methodi tuae pulcherrima haud dubie theoremata et progressiones exhibebit. Puto autem hanc methodum tuam fore aptissimam ad Wallisianas interpolationes demonstrandas et universaliores reddendas. Caeterum annotare operae pretium est ad tuam Methodum nos devenire sine ulla solidi contemplatione, hoc unum tantum adhibendo, quod summa summarum idem sit cum momento figurae alicujus vel seriei.*) Et similia theoremata etiam ad imaginarias dimensiones produci possunt, cum scilicet aequalitates sectione alicujus figurae imaginationi exhibere non licet. Calculum autem habeo pro talibus theorematis eruendis peculiarem, qui cum calculo, quo ad tangentes utor, convenit. Caeterum hujus calculandi rationis circa transcendentia ne primi quidem aditus Cartesio fuere noti, non defectu ingenii, sed (ut in aliis hominibus) defectu reflexionis. Quare non potui non risitare nonnihil, cum putes Cartesio methodum investigandi Quadraturas tuam innotuisse. Pari jure poteris dicere eam innotuisse Cavalerio, aut nescio cui non. Ego pro certo habeo, Cartesium in his rebus non multo longius fuisse provectum, quam Cavalerium, nam Cavalerii tantum more quaerebat summas ordinatarum in figuris. Si vero intellexisset satis Archimedeam Geometriam, nunquam dixisset, non posse inveniri lineam curvam rectae aequalem, facile enim judicasset dari posse curvam, in qua (polygoni infinitanguli instar considerata) latera procederent ut ordinatae parabolae alteriusve figurae quadrabilis; potuisse autem talia invenire, si se applicuisset, non dubito, non tam vi methodi suae, quam vi ingenii. Caeterum progrediendo in lectione literarum tuarum video te subjecisse pulcherrimas quasdam et universalissimas contemplationes, ex quibus illa semper mirifice placuit, quod omn. x^2 aequ. omn.

*) Leibniz hat am Rande bemerkt: id est $\int \overline{zydx}$.

2xy aequ. omn. y^2, et ita de caeteris, posito AB (fig. 98) esse constantem seu $y + x$ aequ. a, et AC aequ. x et CB aequ. y. Haec contemplatio penitus nova est et te digna: nec enim hoc theorema alibi videre memini, et gaudeo id a te facile demonstrari, est enim momenti maximi. Non vidi illa duo theoremata circa centra gravitatis curvarum, quae mihi transmisisse ais. Ego non dubito, si ita pergis, quin tandem ad intima atque universalissima sis perventurus, in quo si tibi sparsae et variae, atque ut ita dicam, desultoriae meditationes meae utiles esse possunt, quas in his rebus habeo, equidem mihi gratulabor. Vicissim a te multa et pulcherrima mihi ignota expecto. Optime facies, si quae de periodis fractionum ad numeros decimales reductarum innuis, etiam ad alias progressiones .....

V.

Tschirnhaus an Leibniz.

Romae d. 10. Aprilis An. 1678.

Literas tuas binas recepi easque gratissimas; ad priores non licuit prius respondere, cum responsum ad meas ex Patria nondum receperam; jam vero ad quid determinatus sim, paucis significabo.*) —

Jam autem Tua venia ad Mathematica me converto; et primo quoad Methodum, qua usus fui ad quadraturas, quamque ultimis literis communicaram, responsio Tua efficit, ut sequentia adhuc annotare necesse habeam: Gregorius a S. Vincentio non solum tam universaliter, ut hoc explicas, sed neque tam generaliter, prout ego percipio, haec intellexit, uti statim dicam; porro nec aliquid essentiale meae Methodi habet, quod enim talia solida considerat, id quoque a Cavalerio factum et saltem accidentale hujus Methodi, ex quo patet, quod prorsus hancce Methodum non sciverit, ut clarius ex infra dicendis constabit, ac proinde ut non videam, quare ipsi hoc attribuendum; ac idem de Pascalio judico, cum revera si haec ipsi perspecta fuissent, non subticuisset, cum tanta facilitate res

*) Im Folgenden verbreitet sich Tschirnhaus mit grosser Weitläuftigkeit über Pläne zu weitern Reisen und über seine zukünftige Stellung im Vaterlande.

peragatur ac universalitate, quod utrumque de sua Methodo ostendere ipsius intentio erat. Fabri Synopsin Geometricam nunquam legeram, sed hujus rei admonitus ab Dn. Nanzario impetratam totam evolvi; fateor praeter alia multa satis bona, quod quoque aliquarum parabolarum dimensionem tradit (nam omnium sane mensuram non exhibet) quodque in quibusdam earum solidis iisdem mecum utatur, quodque haec solida in eadem elementa resolvat, ut ego; sed quod inde mecum concludit, prorsus diversa ratione efficit, cum non elementa omnia ad invicem adaequet, ut ego, ac via prolixiori, cum alio diverso insuper ad hoc probandum Theoremate opus habeat, quod mihi nullatenus necessarium; praeterea semper quantitates in Heterogenea Elementa resolvit, quod meae Methodi saltem particularis casus est, veluti statim dicam, licet credebam, me hoc sufficienter in literis meis indicasse. Quod autem praeterea addis, quod putes, Te dudum ea de re mecum locutum, utique nescio, ad quae referas; hoc certus sum, quod de illis omnibus, quae Tibi transmisi hanc Methodum concernentia, nunquam aliquid mihi indicaras, imo nec ipse eo tempore adhuc ad illa reflexeram, et revera admodum contra mores meos esset tale quid committere, licet quoque variam tam ipse, quam ex aliis mihi compararim cognitionem circa quadraturas, attamen non mihi hac in re prorsus satisfeci. Fateor interim quod tres Methodos praecipue aestimo: prima est, qua vidi Dominum Heuratium uti ad curvarum in rectas transmutationem, quam sincere et universaliter explicat, ejusdem Methodi deinde Dn. Barrow varia exempla suppeditavit satis egregia; secunda Methodus est Tua, qua solo calculo soles unam figuram in aliam transmutare exprimendo calculo quantitatem rectanguli altitudinis indefinitae parvae, efficiendoque hoc alteri aequale, quam ex Te addiscere licuit, prout in meis literis ingenue, prout mea est consuetudo: confessus et qua fateor me admodum delectatum fuisse, cum non solum hinc quadraturae, sed et Tangentes ac alia egregia deducantur; tertia est haec ipsa, quam Tibi transmiseram, qua cujuscunque quantitatis (adeoque vides, quod de solidis dixi, quoque saltem corrolarium meae Methodi esse) elementa homogenea (Heterogenea etenim specialem saltem casum constituunt non secus ac Cavalerii Methodus harum trium Methodorum saltem corrolarium existit) omnibus modis, quibus ut diversa considerari possunt, sibi ad invicem adaequantur, atque sic ope aequationum quadraturas elicui; quae revera si Tibi nota fuerit, saltem non mihi unquam indicasti, uti probe scies, hanc autem satis clare me exemplis indicasse putem. Nec porro Parabolarum quadraturas saltem dedi, in solidis Heterogenea Elementa, hoc est omnes superficies horum ad invicem adaequando, sed et in ipsis superficiebus homogenea elementa, hoc est rectangula altitudinis indefinite parvae ad invicem comparando, quod a nullo addidici, et variis admodum modis hoc idem et alia similia hac methodo praestare possum. Ulterius si sit quantitas quaedam, primo quoque Elementa ejus varie ad invicem adaequando, hoc universali ratione efficio, sed diversa a Tua expressione, qua tres sectiones differentes solidorum a me consideratorum exhibes, meoque judicio magis intelligibili ac ordinaria, cum novitatem in definitionibus vocum quantum possum effugio, hoc enim nihil aliud est quam scientias difficiles reddere, nec deinde quoque opus habeo in similibus quantitatibus ad figuras earum reflectere, licet a principio ad tales aequationes efficiendas hoc apprime necessarium: sed hoc saltem compendium est Methodi, non ipsa Methodus, et quorum alia adhuc et majoris momenti scio. Si autem jam memorata Methodo facilior ac universalior existit, qua uteris ope Logarithmorum quadraturas exhibendi, ejus communicationem apprime desiderarem, uti et omnia quae a Te proficiscuntur, nec non Methodum, qua infinitas series elicis ex infinitis aequationibus. Videbis mea recepta (quod non dubito, cum ne unica litera ad Schullerum data jam per quatuor annos perdita fuerit), in quantum consentiat cum Tua, estque illa corollarium illius Methodi, qua omnem possibilem rationem seu proportionem duarum quantitatum determino. Tales aequationes vero, in quibus incognita exponentem ingreditur, non opus habui adhuc resolvere; interim hoc jam video plures tales posse resolvi omnium aequationum radicibus universaliter determinatis; nunc omnes nondum examinavi. Tria alias existimavi mihi superanda difficilia admodum in Mathematicis, quibus intentis me aliorum omnium adhuc desideratorum participem fieri posse persuasi, aut quae cum horum respectu facilia, quoque iis superandis me non imparem futurum; primum est: Omnium quantitatum quadraturas una et generali Methodo determinare, in quo licet varia sciam, imo rem eo reduxerim, ut saltem triginta quantitatum quadraturis determinatis omnium exhibuerim, nihil tamen hactenus conceptibus meis correspondens. Sed reliqua duo penitus absolvi et ultimum juxta propria vota est; autem secundum: Omnium curvarum possibilium (determinatio, quod credo Te jam percepisse ex literis, quarum tam saepe mentionem feci, et licet quaedam adhuc ad ea perficienda desiderari possint, haec jam omnia in mea potestate esse scio, modo occasio detur me hisce applicandi. Tertium est: Generalis Methodus omnium aequationum radices exhibendi et in iisdem literis tres methodos hoc ipsum exsequendi transmiseram; verum primam non amplius pro mea cognosco, cum meliorem scio, ut statim dicam, cujus illa saltem corollarium, praeterea prolixa admodum, cum calculus, quo aequationis quinti gradus radicem universalem exhibeo, et quem Parisiis Dn. de Graaff in Hollandiam perficiendum miseram, vix octiduo absolvi possit, cum jam horae spatio rem eandem peragere sciam, altera methodo adjutus. Dicam itaque me non ita pridem in talem Methodum incidisse, quae mihi omnimodo satisfecit, credo et Tibi; haec praeter magnam facilitatem in respectu priorum hoc etiam peculiare habet, quod omnis calculus, qui ad eam acquirendam adhibetur, non inutilis prorsus, uti in prioribus et quod praecipue rem taediosam efficit, sed totius Algebrae praecipua Elementa ac Compendia et primaria Theoremata exhibet ac primas ejusdem quaestiones compendiosa admodum reductione resolvit. Hanc hic sincere Tibi ac distincta quam fieri poterit (nullum laborem respiciens ac temporis jacturam, quo licet premar) quasi explicatione describere constitui, iisque compendiis (primariis tamen) quibus intra quatuordecim dies (imo intra admodum breve tempus, si saltem generales radicum expressiones desideremus) ipsam absolvi posse crediderim (hoc est, usque ad duodecimum gradum, hinc enim, credo, progressio patebit) quaeque talia sunt et tam necessaria, ut sine his ordinaria via procedendo non eo perduci posset, si decem homines seculum in eo calculando consumerent, imo nullatenus cum papyrus hujus terrae non sufficeret, ut facile ostendere possem, hanc autem rigidissimis tuis censuris subjicio.*) —

Tandem ut ad ea revertar, quae loqueris de lingua Philosophica ac aliis similibus, non utique haec percipio, nec quoque quod dicis de lingua quadam Geometrica, qua Dn. Desargues sub-

---

*) Es folgt hier eine sehr weitläufige Darstellung der Methodus Generalis omnium aequationum radices exhibendi; da Tschirnhaus selbst sie in den Act. Erudit. 1683 bekannt gemacht hat, so kann dieselbe hier füglich wegbleiben.

tilissimas ratiocinationes instituit sine figuris et calculo, nunquam sane haec vidi, nisi quae de Sectionibus habet conicis perpulchra, sed quae aliquo modo imaginationem fatigant. Hoc quidem mihi persuasi et certus sum, nos posse in rebus philosophicis ad veritates incognitas indagandas eadem ratione calculo uti simili Algebraico; sed hic primo definitiones rerum tradendae, quae satis perspicax ingenium desiderant, nec ad eas formandas praestantiora praecepta unquam vidi, quam quae habet Dn. Spinoza de Emendatione intellectus, quod manuscriptum a Dn. Schulero mihi transmissum penes me habeo; utinam omnia reliqua ejus opera! Et in eo totus ero postquam mihi in Mathematicis satisfecerim, si quidem fata, concedant. Sed quod non adeo facile sit, definitiones rerum tradere accuratas, id vel ex hoc solo constat, quod et in Mathematicis non semper tales traditae; sic ne unicum vidi qui veram definitionem tradiderit proportionis, imo quod magis mirandum rei simplicissimae, hoc est, lineae rectae nullam accuratam definitionem, nisi per solas proprietates, quod nimirum sit brevissima eosdem terminos habentium, quod extrema obumbrent omnia media etc. *)

Auf dieses Schreiben liess Tschirnhaus sehr bald ein anderes, datirt Rom den 30. April 1678, folgen, in welchem er Leibniz anzeigt, dass er Rom verliesse, um Sicilien und Malta zu besuchen. Er hofft in zwei Monaten zurück zu sein, und spricht den Wunsch aus, bei seiner Rückkehr nach Rom einen Brief Leibnizens vorzufinden.

VI.

Leibniz an Tschirnhaus. **)

Ex quo Tibi scripsi, binas a Te accepi, priorem prolixam, qua Methodum inveniendi aequationum radices describis, alteram

*) Das Folgende ist dadurch, dass ein Stück Papier abgerissen ist, zu verstümmelt, als dass es hier wiedergegeben werden könnte.

**) Leibniz hat bemerkt: Romam ad Dn. Tschirnhusium fine Maji 1678. — Tschirnhausius accepit Epistolam, nam respondit et in responsione verba mea allegat. In hac Epistola explicui jam Tschirnhusio brevem, qua iter tuum significas; respondissem priori statim nisi vetuisses ob iter instans tuum. Nunc respondeo, quia ita posterioribus jussisti. Spero Te ex Siculo itinere salvum reversum aut mox reversurum. Quanquam autem sciam Te satis in itineribus circumspectum esse, quia tamen multis casibus expositi sunt peregrinantes, non desinam de Te esse solicitus, donec Te reversum intellexero. Schillerus noster jam sex et ultra mensibus nihil a Te accepisse scribit, quare vereor, ne literae Tuae ad me, quas Schillerianis inclusisse scribis, cum illis perierint. Certe eas, quibus exposuisse scribis methodum exprimendi quamvis rationem vel proportionem per seriem infinitam, non accepi; quare nec illud vidi, quod illic ais a Te descriptum modum investigandi numerum omnium curvarum. Quod Methodum tuam aequationum Radices inveniendi tam ample et distincte non sine labore mihi describere voluisti, multum me Tibi debere profiteor. Legi diligenter et ni fallor intellexi et deprehendi tandem, nondum omnino rem absolutam esse, imo si quid judico hac quidem via ne absolvi quidem posse. Nimirum tota res huc redit: Sit aequatio $x^4 + qx^2 + rx + s$ aequ. 0. Ponitur x aequ. $a + b + c$, unde aequationem aliam excitas, quam priori comparando facis: $ab + ac + bc$ aequ. m, abc aequ. n, $a^4 + b^4 + c^4$ aequ. l. Hinc derivare vis sequentes aequationes: $a^4 + b^4 + c^4$ aequ. l, $a^4 b^4 + a^4 c^4 + b^4 c^4$ aequ. e, $a^4 b^4 c^4$ aequ. n^4. His tribus novissimis obtentis fateor haberi quaesitas a, b, c adeoque et x. Verum ajo ipsas et nominatim aequationem penultimam sive quantitatem desideratam e, valorem scilicet cognitum ipsius $a^4 b^4 + a^4 c^4 + b^4 c^4$, ex prioribus assumtis deducere impossibile esse, nisi forte per aequationem aeque difficilem ac est resolvenda. Cujus sententiae meae demonstrationem in adjecta charta explicui, addidique qua ratione mihi ad aequationum radices perveniri posse videatur, ubi et demonstrationem futuri successus adjeci. De quo sententiam tuam expecto. Certe haec sola est via mihi nota, quae secum fert successus demonstrationem. Intelligis etiam inde non pauca eorum, quae in literis tuis exposuisti, et mihi jam olim fuisse explorata sive tentata, et inprimis illam methodum tuam ex aequationibus $ab + ac + bc$ aequ. m, abc aequ. n, $a^4 + b^4 + c^4$ aequ. l inveniendi e et per consequens x, olim mihi quoque miri-

---

generalem meam methodum investigandi quadraturas: item notam definitionis realis, quae est possibilitas. Ipse post utrumque sibi ascripsit.

fice blanditam, sed postea irritam deprehensam. Pulchra habes theoremata circa formas ex literis similiter se habentibus ortas, in quo genere et ego multum laboravi, de quo et prioribus literis Tibi scribere memini. Ex. gr. tabulam habeo, per quam statim apparet, quot cujuscunque formae sint exempla in dato literarum numero, v. g. formae ab, datis tribus literis, exempla sunt 3, ab, ac, bc. Haec tabula secundum quandam regulam facilem conditur, quam tamen et Tibi satis animadversam ex literis tuis apparet, ni fallor. Aliam habeo majoris momenti circa multiplicationem formae in formam v. g. a^2b in ab, positis literis 4, a, b, c, d:

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & ab & ac & ad & bc & bd & cd \\
a^2b) & a^3b^2 & a^3bc & a^3bd & a^2b^2c & a^2b^2d & a^2bcd \\
 & \frac{12}{12}=1 & \underbrace{\frac{12}{12}=1 \quad \frac{12}{12}=1}_{2} & & \underbrace{\frac{12}{12}=1 \quad \frac{12}{12}=1}_{2} & & \frac{12}{4}=3
\end{array}
$$

seu a^2b in ab dat

$$a^3b^2 + 2a^3bc + 2a^2b^2c + 3a^2bcd.$$

Nimirum non tantum omnia exempla unius formae in unum exemplum alterius duco (quemadmodum et Tu notasti) ad formas provenientes inveniendas, sed et ad numeros formis provenientibus praefigendos cuilibet formae provenienti subscribo quotientem ex divisione numeri exemplorum formae multiplicantis, hoc loco a^2b (qui numerus est hic 12) per numerum exemplorum cujusque formae provenientis, ut a^2bcd in literis 4 exempla sunt 4, et 12 per 4 dat 3. Si forma saepius proveniat, multiplicandus quotiens per numerum repetitionum. Notabile est, in quibusdam casibus quotientem esse fractionem, sed eam postea semper multiplicatione per numerum repetitionum tolli. Hujus autem regulae ope Tabulam condere coepi, cujus ope primo aspectu statim formae in formam ductus sciri possit, et vero pulchras illa habet progressiones, quarum magnam partem jam video. Porro in Algebra quoque pulcherrimos ea Tabula usus habebit, non tantum in problematibus illis, ubi literae incognitae se eodem habent modo, sed et in aliis omnibus, quia problemata omnia tandem reduci possent ad problemata incognitarum se similiter habentium. Quod est utilissimum, quia tunc plerumque pulchra compendia se proferunt et (quod sane magni momenti est) una aequatio omnibus illis incognitis simul inveniendis servit, et diversae illae incognitae sunt aequationis ultimo inventae radices: unde semper summae earum et summae rectangulorum ex ipsis et parallelepipedorum seu rectangulorum solidorum summa etc. inveniri potest. Ex ipsa nimirum aequatione ultimata; nam in ea secundus terminus aequatur summae radicum, tertius summae rectangulorum etc., cumque radices aequationis ultimatae sint eaedem cum indeterminatis seu incognitis pluribus in problemate resolvendo adhibitis, patet de illis hoc verum esse quod earum summa et summa rectangulorum etc. habeatur. Ex. g. sit $x+y$ aequ. a et xy aequ. b^2, fit aequatio y^2-ay+b^2 aequ. 0, cujus aequationis una radix erit y, altera x. Hinc etiam patet, cum omnia problemata possint reduci (vel calculo vel linearum ductu) ad incognitas similiter se habentes, et in problematis similiter se habentibus ad ultimatam aequationem reductis, habeatur omnium incognitarum summa et summa rectangulorum etc., hinc utique omnia problemata tandem his tantum adhibitis resolventur seu ut tuis literis utar, positis incognitis problematis a, b, c, d, e inveniendis, invenientur ope ipsarum x, y, z etc., posito x aequ. $a+b+c+$ etc., y aequ. $ab+ac+$ etc., z aequ. abc + etc. [Sed tunc non vicissim a, b, c servire debent ad inveniendam x, quod in aequationum radicibus investigandis fit adeoque tunc non ipsarum y, z etc. valores primum quaerendi, sed ipsarum a, b, c etc. per $a^4+b^4+c^4+$ aequ...., $a^4 b^4 c^4$....]. Et hoc mihi inter maxima totius Algebrae arcana habendum videtur, cum illius ope omnia problemata reducantur ad pauca, et tabulae condi possint, per quas cuncta sine calculo inveniantur. Haec etiam vera videtur esse via, inveniendi constructiones Geometricas elegantes. Haec Tibi candide perscribere volui, quia et haec et multa alia a Te potissimum perfici posse spero. Analytici nostri (si Vietam excipias) parum de constructionibus elegantibus solliciti sunt, calculum exhibere contenti; cum tamen problemata ista pleraque ingenii potius quam praxeos causa quaerantur, hinc mihi videtur semper elegans quoque constructio esse quoad licet quaerenda. Hugenius mihi dixit, se aliquid meditatum circa demonstrationes ex calculo concinnandas elegantes more Veterum, longe diversum a Schoteniano: ego circa artem inveniendi constructiones elegantes multa habeo notata, sed tamen nondum perfecta; potissimum autem arcanum consistit, ut dixi, in eo ut quaerantur incognitae plures se similiter habentes, item pauciorum radicum. Saepe enim ratio, cur problemata justo altius ascendunt, oritur non tam ex ipsorum natura, quam ex natura incognitae assumtae quae plures habet radices, cum tamen problema resolvi possit per aliam incognitam habentem pauciores. Ex. g. si pro incognita sumas distantiam puncti quaesiti a centro sectionis Conicae, pauciores orientur radices, quam si sumas distantiam a foco, quia duo sunt foci, adeoque et duae distantiae satisfacientes, loco unius: sed haec obiter. Ad reliqua literarum tuarum capita venio. Methodi qua circa quadraturas uteris, scripseram vestigia quaedam in Fabrio et Pascalio extare, sed et me tale quiddam subinde tentasse. Hoc Tu ita interpretari videris ac si suspicarer Te aliunde hausisse, quod mihi nec per somnium in mentem venit. Scio enim eam Tibi ingenii vim esse, ut etiam praestantiora excogitare possis. Tota res huc redit, ni fallor, quemadmodum in figura plana quadraturam dare possim vel quaerendo summam omnium y vel quaerendo summam omnium x, ita in solido, ubi tres sunt indeterminatae x, y, z, etiam tribus modis in plana resolvi solidum potest, unde comparando inter se valores totius contenti semper ejusdem aequationes tetragonisticae oriuntur. Ex his autem aequationibus tetragonisticis variae oriuntur quadraturae, ut explicuisti. Ego non hunc tantum, sed et infinitos alios modos habeo obtinendi aequationes tetragonisticas per calculum, cujus istae a Te propositae sunt casus tantum. Calculum autem hunc exsequor per nova quaedam signa mirae commoditatis, de quibus cum nuper scripsissem respondes, tuum exprimendi modum magis ordinarium ac intelligibilem esse, et Te novitatem in definitionibus rerum quam maxime effugere; hoc enim nihil aliud esse, quam scientias difficiles reddere. Sed idem olim opponere potuissent veteres Arithmetici, cum alii recentiores loco characterum Romanorum Arabicos introducerent, aut veteres Algebraici, cum Vieta pro numeris literas afferret. In signis spectanda est commoditas ad inveniendum, quae maxima est quoties rei naturam intimam paucis exprimunt et velut pingunt, ita enim mirifice imminuitur cogitandi labor. Talia vero sunt signa a me in calculo aequationum tetragonisticarum adhibita, quibus problemata saepe difficillima paucis solvo. Ex. g. problema illud, quod Cartesius in Epistolis frustra aggressus est: invenire curvam talem ut intervallum AT inter tangentem CT et ordinatam EA in axe sumtum sit recta constans, meis characteribus adhibitis, tribus quatuorve lineolis solvo. Est enim mihi pro methodo tangentium inversa et methodo tetragonistica calculus idem, eadem signa. De his omnibus me jam olim Tibi loqui memini, sed parum attendenti; itaque tantum abest ut Te tuam istam methodum quadrandi a me hausisse putem, ut contra potius animadverterim Te ad multa a me proposita non satis attendisse, quoniam nescio qua praeventione semper suspicabaris, meas methodos esse tantum particulares et parum naturales; illis itaque neglectis Tu tua sponte quaerebas eadem, et cum denique non raro ad illa ipsa per Te venisses, quibus ego usus fueram, tunc Tibi universalia admodum ac naturalia videbantur et diversa plane a meis prius propositis apparebant tum quod ea aliter exprimeres quam ego, tum quod Tibi viae ac processus, quo ad ea perveneras, conscio magis blandirentur, quam cum a me proponebantur, quia Tibi quippe minus attendenti processum et inveniendi modum non exposueram. Fateor hoc Te commodi inde reportasse, tum quod ista hoc modo tua fierent, tum quod ita in inveniendo Te exerceres; verum potuisses labori et tempori parcere et inveniendi artem in aliis adhuc intactis exercere. Nam ut in genere dicam quod sentio, si me jam olim audivisses, tempus quod quadraturis et aequationum radicibus hactenus impendisti, magnam partem aliis impendisses, quia ultra ea, quae ex Parisiensibus nostris collationibus sumi poterant, nondum profecisti. Nam et ego jam Parisiis omnem comparationem referebam ad rectangula ab, abc etc. inveniendarum radicum causa: et quod quadraturas attinet, Methodum per differentias quam jam olim Tibi proposui, omnibus aliis praefero. Omnis enim figura differentialis est quadrabilis, te contra omnis figura quadrabilis est differentialis. Differentialem voco, cujus ordinatarum series coincidit seriei differentiarum ab alia serie: quaerendum est ergo tantum, an data figura sit differentialis: id vero invenitur comparando aequationem figurae datae cum aequatione generali figurae differentialis, ope enim hujus aequationis differentialis generalis possunt enumerari omnes aequationes speciales, quae sunt ad figuras quadrabiles, et ita facile condi posset tabula omnium figurarum quadrabilium. Duo tamen adhuc desidero in hac methodo, primum quod tantum exhibet figuras illas, quarum quadratrices sunt analyticae [quadratrix figura est, cujus figura differentialis est figura data, seu quae ita se habet ad datam, ut series aliqua ad suas differentias], non vero eas quadratrices, quae sunt transcendentes. Ex. g. non ostendisset, quod quadratrix Hyperbolae sit logarithmica. Hac utique methodo area figurae propositae non potest inveniri, quando nec per aequationem exprimi potest, per aequationem, inquam, communem; alioqui enim etiam quantitates transcendentes seu (si ita appellare libet) non-analyticae per aequationes, sed transcendentes (in quibus incognita exponentem ingreditur) exprimi possent. Haec itaque methodus, etsi ostendat Circulum et Hyperbolam non habere quadratricem analyticam, non tamen ostendit, qualem habeant quadratricem; et non potest ostendere haec methodus, utrum forte figura aliqua proposita si non absolute, saltem ex supposita alterius v. g. Circuli aut Hyperboles quadratura possit inveniri, ex. g. utrum curva Ellipseos inveniri possit, supposita Circuli vel Hyperbolae vel utriusque quadratura, quemadmodum ego inveni curvam Hyperbolae aequilaterae ex supposita Hyperbolae quadratura. Habeo etiam varias artes, quibus huic defectui mederi licet. Alter hujus methodi defectus est, quod etsi ostendat figuram aliquam non esse quadrabilem analytice quadratura universali omnibus portionibus communi, seu non habere quadraticem analyticam, non tamen ostendit, utrum non specialis aliqua portio speciali ratione quadrari possit. Atque ita hodieque ignoramus, utrum possibile sit, inveniri quadraturam specialem certi alicujus sectoris vel segmenti circularis vel etiam integri circuli. Habeo quidem varias vias, quibus speciales hujusmodi quadraturas invenio, sed nullam habeo ita comparatam, ut ejus ope determinare possim, an quadratura aliqua specialis proposita v. g. integri circuli sit possibilis (per quantitatem analyticam ordinariam seu non-transcendentem), an vero impossibilis. Hujusmodi itaque difficultates a Te quaeri optarem, quas scilicet nos nondum in potestate habemus. Ego nullam hactenus aliam viam demonstrandi tales impossibilitates specialium portionum quadraturas inveniendi agnosco, quam per resolutiones aequationum transcendentium, seu ubi incognita exponentem ingreditur. Nam qui ejusmodi aequationem $x^y + \overline{ya}^x$ + etc. aequ. 0 solvere, seu in aliam ordinariam mutare, seu impossibilitatem in ordinariam mutandi ostendere potest, is etiam perfecte omnes quadraturas invenire potest, aut demonstrare impossibilitatem, quia omnes quadraturae per hujusmodi aequationes transcendentes exprimi possunt. Itaque restat perficienda analytica ista transcendens, qua absoluta omnia habebimus, quae nunc quaerimus in hoc genere. Quae ideo annotare volui, quoniam scribis, nondum Te opus habuisse his aequationibus: quod non miror, quoniam nec alius quisquam earum usum perspexit, aut analyticam satis generaliter tractavit. Methodus mea resolvendi quadraturas per logarithmos coincidit cum methodo ista reducendi eas ad aequationes transcendentes. Est autem utique generalissima, quia omnibus curvis analyticis pariter ac transcendentibus communis est. Eam quia breviter satis describere non possum et alioqui haec epistola prolixissima est, alteri tempori servo. Tres ais methodos quadraturarum a Te aestimari, unam qua Heuratius, Barrovius aliique passim utuntur ope tangentium; alteram meam transmutandi figuram unam in aliam ope calculi; tertiam tuam per diversas ejusdem solidi sectiones. Ego vero omnes istas tres methodos pro partibus habeo generalis Calculi mei Tetragonistici, cujus exemplum tantum erat methodus illa transmutatoria, quam Tibi communicavi. Nam et caetera omnia per calculum certum et constantem efficio; unde plurima theoremata methodique a Gregorio aliisque data mihi non habentur tanti, nam inter mea tantum rudimenta fuere; postea vero ista omnia calculo consequi didici, et eadem opera nactus sum multo majora. Itaque non sine causa optavi, ut in alia potius inquireres momenti majoris, et quae nondum sunt in potestate, veluti (1) demonstrationem impossibilitatis quadraturae portionis alicujus specialis, ex. g. Circuli integri; (2) Methodum tangentium inversam, quando scilicet curva quaesita est transcendens, nam quando est analytica, tunc etiam methodum tangentium inversam universaliter in potestate habeo; in transcendentibus autem calculus quidem meus tetragonisticus saepissime satisfacit, sed supersunt tamen aliqua, quae nondum satis excussi, adeoque nondum possum pronuntiare, me ea habere in potestate; (3) Resolutionem aequationum, in quibus incognita in exponentem ingreditur ac proinde inventionem radicis sive per valorem transcendentem (literas vel numeros irrationales in exponente exhibentem) sive per valorem communem (cum non nisi numeri rationales exponentem ingrediuntur) quando id fieri potest. Hoc autem tertio capite effecto, duo priora, quadratura scilicet et methodus tangentium inversa, statim absoluta erunt; (4) Resolutionem problematum Geometriae communis (quae scilicet ad aequationes ordinarias revocantur) per calculos brevissimos et constructiones elegantissimas lineares: huc pertinet ars contrahendi calculum ab initio, ut postea non sit opus depressione; ars ex calculo concinnandi elegantes constructiones lineares, imo ars perveniendi ad constructiones sine calculo per analysin seu non tam magnitudinis (quae ad calculum pertinet) quam situs, in quo mihi videntur aliquid habuisse Veteres, quod obliteratum hodie restitui, ac forte longius produci posset.

Haec tractatio etsi minus sit grandisona quam priores, est tamen magis captui communi accommodata nec minus ingenii desiderat quam ulla aliarum; caeterum jam supra aliquid ex ea attigi; (5) Resolutionem problematum Numericorum Diophanteorum, sed in eo sum, ut hunc articulum expungam. Nam aliquot ab hinc septimanes viam et facillimam et generalissimam reperisse videor, omnia haec problemata resolvendi, et quando id in numeris rationalibus fieri non potest, demonstrandi impossibilitatem. Caeterum haec quatuor aut quinque desiderata a Te examinari optarem. Haud dubie enim multà in illis magni momenti detegeres; in aliis vero quae jam in potestate nostra sunt, Te parciorem esse suaderem, nisi ubi forte elegantes progressiones et pulchra theoremata reperies. Nam etiam quando aliquid in potestate habemus, non ideo tamen pulchra theoremata in eo latentia eruimus atque animadvertimus. Itaque tametsi utique manifeste habeamus in potestate enumerationem omnium curvarum analyticarum communem, quoniam tamen calculus ad eam rem necessarius, nisi arte tractetur, satis prolixus est, ideo pulchrum aliquid et difficile praestabis, si veram curvarum hujusmodi progressionem in infinitum progredientem nobis deteges. Saepe enim fit ut diversae inter se aequationes, tamen ejusdem generis sint, ex. g. xy aequ. a^2 et $x^2 y^2$ aequ. b^2, utraque aequatio est ad Hyperbolam; hoc autem in altioribus constanti ac facili ratione detegere posse magni momenti foret. Illud etiam nosse vellem, quomodo ut ais, triginta tantum quadraturis determinatis, alias omnes exhibere confidas. Caeterum dum reliqua tuarum literarum percurro, obiter animadverto Te scribere: „multi admodum falso credunt Artem Combinatoriam esse separatim scientiam et ante Algebram ac alias scientias addiscendam, imo sunt qui credunt Artem Combinatoriam plura in se continere quam artem vulgo Algebram dictam, hoc est filiam plus scire quam matrem, nam revera si nulla alia re id vel ex sola potestatum compositione patet Artem Combinatoriam ex Algebra addisci.“ Hactenus verba tua, quae haud dubie in me diriguntur. Illi enim multi, qui ita, ut Tu ais, putant, praeter me opinor pauci sunt; puto autem Te recte sentire, quia me non videris percepisse. Nam si combinatoriam habes pro Scientia inveniendi numeros variationum, fatebor Tibi lubens eam scientiae Numerorum esse subordinatam et per consequens Algebrae, quia et scientia Numerorum Algebrae subordinata est, utique enim non invenies numeros illos nisi addendo, multiplicando etc. Multiplicandi autem ars ex scientia generali de quantitate, quam nonnulli Algebram vocant, descendit. Verum mihi aliud longe est Ars Combinatoria, scilicet scientia de formis seu de simili et dissimili, quemadmodum Algebra est scientia de magnitudine seu de aequali et inaequali, imo Combinatoria parum differre videtur a Scientia Characteristica generali, cujus ope characteres apti ad Algebram, ad Musicam, imo et ad Logicam excogitati sunt aut excogitari possunt. Hujus scientiae etiam portio est Cryptographia, quamquam in ea non tam componere quam resolvere composita et ut ita dicam radices investigare difficile sit. Nam quod radix in Algebra, id clavis in Cryptographia Divinatoria. Algebra a se ipsa tantum habet regulas aequalitatum et proportionum, sed quando problemata difficiliora sunt et aequationum radices valde involutae, cogitur mutuo sumere aliqua a scientia superiore de simili et dissimili seu a Combinatoria. Nam artificium comparandi aequationes similes seu ejusdem formae jam Cardano aliisque fuit notum et a Vieta distinctissime descriptum, proprie ex Arte Combinatoria petitum est, nec tantum cum de formulis magnitudinem exprimentibus atque aequationibus resolvendis agitur, sed etiam aliarum formularum nihil cum magnitudine commune habentium clavis involuta evolvenda est, adhiberi potest ac debet. Ars etiam quaerendi progressiones et condendi tabulas formularum est pure Combinatoria, neque enim tantum in formulis magnitudines exprimentibus, sed et aliis omnibus locum habent. Possunt enim etiam formulae exceptari exprimentes situm atque ductum linearum et angulorum, magnitudinibus licet non consideratis, cujus ope facilius utique elegantiores constructiones reperientur, quam per calculum magnitudinum. Quod Triangulorum eosdem angulos habentium latera sint proportionalia, hoc demonstrari potest ope theorematum Combinatoriorum (seu de simili et dissimili) longe naturalius, quam fecit Euclides. Fateor interim nusquam pulchriora, quam in Algebra, Artis Combinatoriae sive Characteristicae generalis specimina edita esse, ac proinde qui Algebram teneat, facilius Combinatoriam generalem constituturum, quia semper ad scientias generales facilius a posteriori ex specialibus exemplis, quam a priori pervenitur. Ipsam autem Combinatoriam seu Characteristicam generalem longe majora continere, quam Algebra dedit, dubitari non debet; ejus enim ope omnes cogitationes nostrae velut pingi et figi et contrahi atque ordinari possunt: pingi a l i i s ut doceantur;

figi nobis ne obliviscamur; contrahi ut paucis, ordinari ut omnia in conspectu meditantibus habeantur. Quamquam autem sciam Te nescio qua de causa praeoccupatum ab his meditationibus meis fuisse alieniorem, credo tamen, ubi serio rem examinaveris, mecum sensurum, generalem hanc Characteristicam incredibilis usus fore, cum et lingua sive scriptura ejus ope excogitari possit, quae paucis diebus disci possit et omnibus exprimendis, quae in usu communi occurrunt, sit suffectura et ad judicandum atque inveniendum mire valitura, exemplo characterum numeralium; utique enim facilius multo arithmeticis characteribus calculamus, quam Romanis idque vel calamo vel mente: haud dubie quia characteres Arabici commodiores sunt, id est genesin numerorum melius experimentes. Nemo autem vereri debet, ne characterum contemplatio nos a rebus abducat, imo contra ad intima rerum ducet. Nam hodie ob characteres male ordinatos confusas saepe notitias habemus, tunc autem ope characterum habebimus facile distinctissimas; erit enim in promtu velut Mechanicum meditandi filum, cujus ope idea quaelibet in alias, ex quibus componitur, facillime resolvi possit, imo charactere alicujus conceptus attente considerato, statim conceptus simpliciores, in quos resolvitur, menti occurrent: unde quoniam resolutio conceptus resolutioni characteris ad amussim respondet, characteres tantum aspecti nobis adaequatas notitias sponte et sine labore ingerent in mentem, quo nullum ad perfectionem mentis majus auxilium sperari potest. Haec ad Te paulo fusius perscribere volui, mi Amice, ut experirer plusne apud Te rationes, quam praejudicatae opiniones valerent; si dices, rem esse praeclaram sed difficilem, satis a Te obtinui. Nam difficultas me non terret, cum satis videam certas et ni fallor commodissimas superandi eam rationes. Spinosae opera posthuma prodiisse non ignorabis. Extat et in illis fragmentum de Emendatione intellectus, sed ubi ego maxime aliquid expectabam, ibi desinit. In Ethica non ubique satis sententias suas exponit, quod sic satis animadverto. Nonnunquam paralogizat, quod inde factum, quia a rigore demonstrandi abscessit; ego certe puto, utile esse in Geometricis discedere a rigore, quoniam in illis facile caventur errores, at in Metaphysicis et Ethicis summum demonstrandi rigorem sequendum puto, quia in illis facilis lapsus; si tamen Characteristicen constitutam haberemus, aeque tuto in Metaphysicis ac in Mathematicis ratiocinaremur. Ais definitiones rerum esse traditu difficiles: intelligis fortasse conceptus quam maxime simplices et ut ita dicam originarios, quos tradere fateor difficile esse. Verum sciendum est ejusdem rei plures esse definitiones, id est proprietates reciprocas rem ab aliis omnibus distinguentes, et ex una quaque nos omnes ducere posse alias rei proprietates, quod etiam non ignoras, sed ex his definitionibus aliae aliis perfectiores sive primis atque adaequatis notionibus propriores sunt. Et quidem certam habeo notam definitionis perfectae atque adaequatae, quando scilicet percepta semel definitione dubitari amplius non potest, utrum res, ea definitione comprehensa, sit possibilis vel non. Ceterum qui Characteristicam seu Analyticam universalem constituere velit, initio quibuscunque uti potest definitionibus, quia omnes continuata resolutione tandem in idem desinunt. Quod ais in rebus valde compositis opus esse calculo, in eo plane mecum sentis: idem autem est ac si dixisses opus esse characteribus, nihil aliud enim est Calculus quam operatio per characteres, quae non solum in quantitatibus, sed et in omni alia ratiocinatione locum habet; interea quando id fieri potest, magni aestimo ea quae sine calculo prolixo, id est sine charta et calamo, sola vi mentis peragi possunt, quia quam minimum pendent ab externis, et in Captivi quoque, cui negatur calamus aut cui ligatae sunt manus, potestate sunt. Itaque exercere nos debemus tum in calculando, tum in meditando, et debemus conari ea quae calculo sumus nacti etiam sine calculo postea sola meditatione demonstrare, quod saepe succedere expertus sum. Sed non dubito, quin de multis idem sentiamus, et si differamus sequendi ratione, quam nolim dissensus inter nos causam esse, quemadmodum nec dissensus amicitiam minuet. Quare spero sinceritatem meam Tibi non ingratam fore, qua sententiam de tua radicum ex aequationibus extractione exposui; quoniam enim a scopo abludere putavi, volui id Tibi significare, ut labori parceres. Vicissim de mea exspecto judicium tuum, cui sane multum tribuo, nec dubito profiteri et plurima me didicisse a Te et etiamnum discere posse, Teque egregiarum inventionum esse capacem, et quae ab aliis atque etiam me jam exhibita sunt, etiam per Te praestare posse, si animum attendas. Malim tamen publici boni causa Te animum potius applicare ad intacta, et quae nondum in potestate habemus; spero etiam praejudicia nonnulla, quae contra meas opiniones quasdam habere videris, magis magisque deletum iri. Quod superest, vale faveque ac sanitatis pariter tuae statum ac studiorum egregiorum progressum significa etc.

VII.

Tschirnhaus an Leibniz.

Me accingo, ut literis Tuis respondeam, et primo quoad Methodum meam radices exhibendi non miror, quod talia profers, hanc enim plane non percepisti, quod quidem ex Tuis literis mihi clarissimum, ut postmodum ostendam. Duo autem video in causa fuisse: primum quod non sufficienter satis demonstrationem illius explicarim, hoc est nimis breviter, licet revera contineat omnia, quae ad eam necessaria sunt, et revera haec praevidebam, adeoque eandem bis repetii, quamque in superioribus exemplo, sed unico saltem declararam; verum cum admodum prolixus fuerim in antecedentibus, vix me tum longius extendere poteram; secunda fuit, quod quia absque dubio principium attentius quam reliqua respexisti, hoc est primam partem (in tres etenim partes divido, quae Tibi circa haec communicavi) hicque quaedam occurrebant, quae videbantur cum tuis cogitatis consentire, omnia sequentia illis applicasti, hoc est rebus quae ab iis diversissimae, adeoque non miror Te ea non assecutum; omnia enim illa quae in prima parte explico, saltem accidentalia sunt hujus Methodi, sed ipsa essentialia parte secunda continentur, et revera melius fecissem, si secundam partem primo collocassem, quod certe si denuo eam in ordinem redigere tempus erit, non omittam, ne aliis quoque id impedimento sit, quominus eandem facile percipiant, quod fusius jam et clarissime ostendam. Dicis itaque primo, posito ab etc. $=$ y, abc etc. $=$ z, a^4 etc. $=$ h, a^4b^4 etc. $=$ e, $a^4b^4c^4 = z^4$, invenire ipsam e ex datis y, z, h aeque difficile esse quam invenire aequationis propositae radicem etc., quae omnia si Tibi concedam, nihil hoc ad me, nam quae hic habes et quae in sequentibus porro deducis, me nullatenus tangunt; tali enim ratione ego prorsus nego me procedere. Et haec .... clarissime ostendunt Te Reductionem meam quoque non percepisse adeoque nec demonstrationem hujus Methodi quae ea nititur. Adeoque vides Te hisce meam Methodum non destruere (siquidem verum est quod jam suppono; statim autem exemplo aliquo demonstrabo, me talem viam radices determinandi non inire), is enim qui hoc ostendere vult, debet meam demonstrationem aggredi quam bis repetii in fine tertiae partis, ubi ostendi quod hac Methodo infallibiliter radices habeamus; hanc autem ostendere falsam, judico impossibile, nam profecto licet authoritas mea hic non valeat, possum tamen dicere, quod licet attente respexerim ad rem, quae revera facilis, attamen nihil potuerim invenire quod non solide concludat; sed non tam facilis apparebit, nisi illis qui attente artificium considerabunt, quod tradidi, quo reductio aequationum (quae post comparationem restat peragenda) facile peragitur. Illi enim qui easdem aequationes reducere conabuntur, via ordinaria ac experto labore respicient mea et mecum calculabuntur, absque dubio percipient reductionis meae facilitatae formam ac qua ratione in eam inciderim ex notatis parte secunda, atque si tum dignabuntur respicere ad demonstationem meam, absque dubio hanc optime percipient, confidoque hanc firmissimam eos esse experturos. Verum propius ad ipsam rem accedo et pergo ostendere, quae effecere, quominus eandem perceperis. Dicis itaque: facile errorem deprehendi, quia plane olim similia cogitabam, a quibus postea tempus et progressus meditandi me liberarunt, et paulo post: Res eo tota redire videtur, ut potestates exprimamus per rectangula ab, abc, abcd etc., haec ergo ratio mire mihi blandiebatur, quemadmodum et Tibi arrisisse video, sed tandem irritam deprehendi. Hucusque tua verba; ad quae respondeo, me absolute negare, quod in eo consistat mea Methodus, quodque e contra ex ea pateat, qui tale quid aggrediuntur, scopum nullatenus posse attingere (et revera candide fateor, me nec de illis quidem quantum scio cogitasse) quod non melius ostendere potero, quam si breviter declarem, in qua consistit mea Methodus, illudque omne uno exemplo illustrem, quo nulla obscuritas remaneat. Sit itaque linea recta quam vocemus x, haec concipiatur divisa esse in duas partes, in tres, in quatuor etc. atque sic in infinitum, quas vocemus a, b, c, d etc.; erit itaque $x=a+b$, $x=a+b+c$, $x=a+b+c+d$ etc. Jam fiant a qualibet tali aequatione omnes potestates x (hic forte statim credes, hoc cum tuis cogitationibus alias habitis, ut certo loco tuarum literarum innuis, consentire, sed quaeso ne properes, mox diversissima sentias, et qui hucusque saltem pervenit, quidem in via recta est, prout credo multos ad haec reflexisse, sed ad progrediendum infinitae viae se offerunt quibus in avia deducimur et fateor me in vera obtinenda diu hic laborasse et observasse, sed tandem in eam incidi quae talis). Sit ex. g.

$$\begin{array}{llllll} x^4 = & a^4 & + 4a^3b & + 6aabb & + 12aabc \\ & b^4 & b^3a & \text{etc.} & \text{etc.} \\ & c^4 & a^3c & & \\ & \text{etc.} & \text{etc.} & & \end{array}$$

Considerando hasce quantitates observavi 1. eas omnes aequaliter compositas esse; 2. hasce quantitates aequaliter compositas duorum generum esse, quaedam enim sunt primitivae quae non dividuntur nisi per se ac unitatem, aliae quae ab his derivatae ac divisionem patiuntur, prioris generis sunt $a^4 + b^4 + c^4 + \ldots$, $aabb + acc + bbcc$, posterioris $a^3b + b^3a$ etc., item $aabc$ etc. 3. Inter quantitates primitivas denuo esse hanc differentiam, quod vel omnes termini, ex quibus constant, sint quantitates simplices ex. g. $a+b$, $a+b+c$, item $ab+ac+bc$ etc., $abc+abd+bcd+acd$ etc., et has primitivas simplicissimas voco, vel quod omnes termini, ex quibus constant, sint potestates $a^3+b^3+c^3$, $a^4+b^4+c^4$ etc., item $aabb+aacc+bbcc$, item $aabbcc+aabbdd$ etc. 4. Hinc jam mea intentio in ejusmodi potestatibus omnia reducere ad primitivas quantitates, adeo ut nullae adessent quae non sint primitivae, uti fit supra, ubi adest a^3b etc., $aabc$ etc., quae non sunt primitivae quantitates. Et in eo consistit essentiale meae Methodi, de quo tamen ne quidem mentionem facis in responsione tua, quasi ne quidem hac de re locutus fuissem in principio partis secundae, et ac si absque eo Methodus illa consistere queat. Jam quae sequuntur accidentalia sunt et possunt variis modis fieri, sed simplicissimam credo qua usus, et quae directe ex prioribus sequitur. 5. Ut itaque id quod non est primitivum in ejusmodi potestatibus ad tales reducerem, id conatus fui efficere ope quantitatum primitivarum simplicissimarum, de quo supra annotat. 3. adeoque supposui praeter $x=a+b$, $x=a+b+c$, $x=a+b+c+d$ etc. etiam $y=ab+bc+ac$, $z=abc$ etc., quae omnes talis sunt conditionis, et qua ratione porro ex iis intentum meum obtinuerim, parte prima prolixe ostendi. Sed notandum, ut ibi etiam notavi, non necessarium esse licet optimum ad tale quid efficiendum, ut utamur quantitatibus primitivis simplicissimis, quibuscunque enim aliis suppositionibus, modo quantitates sint primitivae, poterimus efficere ut potestates superiores ex puris quantitatibus primitivis constent (quod etiam non attendis, cum loqueris quod sola rectangula adhibeam, cum tamen aliquot exempla in communicatis ostenderim); num vero semper potestates sic reductae ad primitivas quantitates adhibeant medium ad radices determinandas, eo demonstrationem tunc non extendi, quia nondum tempus habui haec ad finem optatum deducere, et quia ea ipsa quae tunc inveneram ad id sufficiebant determinandum. Ex quibus patet haec nihil aliud esse quam perfectionem Elementorum lib. 2. Euclidis; qui si bene processisset, nobis talia Theoremata debebat exhibere, ille saltem unicum communicat prout ego desidero ex. g. $xx = \begin{array}{l} aa + 2ab \\ bb \end{array}$, ubi utique tota potestas ex puris primitivis. Ac tandem hinc parte tertia ostendo ope talium Theorematum quae tunc inveni, hoc est potestatum quae fiunt a linea recta secta in quotcunque partes et quae ex puris primitivis quantitatibus constant, non solum omnium aequationum radices universales determinari, sed et particulares quae eandem cum prioribus compositionem obtinent, quam demonstrationem si destruere valeas, magnum quid mihi praestabis. Ex quibus percipies, quantum haec differant a tuis cogitatis, primo enim potestates illas non refero ad rectangula, sed ad primitivas quantitates: quae quidem multum differunt, qui enim prius praetendit, aliquid suscipit quod impossibile est, ut facile ostendere possem, sed hoc labore me sublevas, dum hoc concedis; sed qui posterius, rem omnino possibilem, ut in iis quae Tibi transmisi potuisti videre et quae variis modis fieri potest; sic ex. g. prior potestas redacta ad puras primitivas est talis

$$\begin{array}{llll} x^4 - 4abxx + 4abcx + & \text{dupl.} \ \square ab + ac + bc, \\ \quad \text{etc.} & \qquad -a^4 - b^4 - c^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{item } x^4 - 2aaxx - 8abcx - 2aabb + a^4. \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{array}$$

2. qui meam Methodum scit, per eam dirigtiur, quas formulas eligere debeat ac qua ratione his uti, nimirum ut potestates illas ad primitivas quantitates redigat; verum qui a formulis incipit, sane infinitas vias prae se habet, quibus non nisi tentando progreditur nec certo sit quam eligere debeat, quae unica causa est quare ad haecce quae mihi de hisce Parisiis dixisti nunquam attendi nec revera aestimavi, quia talia mentem non perficiunt. Sed ego iisdem aliquid constans tunc quaesivi et utique

obtinui viam aliquam, sed quae laboriosa admodum et specialissimus prioris Methodi casus, et illa omnia quae tunc a Te hausi et quae proprio labore tunc assequutus fui, si illis inhaesissem diutius, revera effecissent, ut nihil praestans unquam assecutus fuissem, cum mihi non poterant dare cognitionem quam supra explicavi. 3. hinc quoque quod supra promisi facile ostendam, nimirum sit

$$\begin{array}{lll} x^4 - 4abxx + 4abcx + & \text{dupl.} & \square ab + ac + bc \\ \quad - 4ac & & - a^4 - b^4 - c^4 \\ \quad - 4bc & & \end{array}$$

ponatur $x^4 - pxx + qx - r = 0$, atque hinc comparatione instituta habebimus tres aequationes pro tribus literis a, b, c inveniendis, atque invenies aequationibus hisce reductis ad cubicam perveniri aequationem, atque sic x quod = supponitur $a + b + c$, habebitur, hoc est radix $\square$to $=$ $\square$to aequationis ope cubicae, quae revera diversa sunt ab iis quae percenses, et vides quidem rem mihi optime succedere ad meum finem obtinendum, quare tua utique quae adfers me nullatenus tangunt, ut dixi. Verum quia reductio ordinaria via procedendo laboriosa, ego ostendi exemplo, qua ratione haec eo reducere valeamus, ut nihil aliud opus erit quam hanc quaestionem solvere $ab + ac + bc = p$, $abc = q$, $a^4 + b^4 + c^4 = r$, quod facillimum, et eo exemplo universalem viam, qua ratione semper res ad tales quaestiones resolvendas, ubi rectangula et potestates occurrunt, reducere possimus, quod fateor non facile intelligetur nisi quis mecum calculetur, tunc etenim videbit causam hujus reductionis ab hac aequatione pendere $x^4 - 4yxx + 4zx + 2yy - a^4 - b^4 - c^4$. Sit jam $x^4 - pxx + qx - r$, nam hinc statim patet comparatione facta esse $4y = p$, adeoque $y = \frac{p}{4}$, $4z = q$ adeoque $z = \frac{q}{4}$; jam $2yy - a^4 - b^4 - c^4 = -r$, in hac aequatione y potest restitui et habebitur $a^4 + b^4 + c^4 = r + \frac{pp}{8}$, adeoque reduximus rem eo, ut sola rectangula y, z adsint et potestates aequales cognitis quantitatibus, et hinc si velis respicere ad Theoremata A et B, observabis hoc necessario semper fieri posse, cum enim Theoremata illa aequalem dimensionem in omnibus suis terminis obtinent, sitque x, xx, x^3, x^4 etc., necessario aliqui termini esse debent ut solae quantitates y, z, t etc. adjungantur x, xx, x^3 etc. adeoque comparatione facta hae quantitates y, z, t aequales erunt cognitis p, q, r etc.

sique jam ubicunque occurrunt potestates y, z, t etc., restituantur cognitae p, q, r etc. quae ipsis aequales, res eo reducta erit, ut nihil supersit quam quaestionem solvere ubi rectangula et potestates dantur aequales cognitis, quod ultra modum aestimandum est. Qui haec percipiet, videbit me laboriosissimam rem ad maximam facilitatem reduxisse et hinc absque dubio meam demonstrationem facile intelliget, hoc ipso enim nititur. Quae quantum in me est, hic volui clarum reddere, ut a Te plane percipiatur, et tunc tuum judicium non reformido, scio enim Te candidi esse ingenii et inventi nunc praestantiam nosse aestimare. Hinc jam porro non difficulter respondere possum ad omnia reliqua quae habes; dicis Te vero tunc memini non rectangulis solis, sed aliquando et potestatibus uti solitum, sed nunc vero se rectangula etiam Tibi approbavere, quibus credo satis percipio, quid velis, uti et quando putes primam meam inquisitionem circa talia fuisse irrationalium ope (non vidisti quae multo antea circa regulam Hudenii qui quoque ponit $x=a+b$ laboraverim et quae adhuc reservo) et multa alia talia quae refers. Attamen de talibus disputare non mea ... consuetudo nec quoque credam circa ea me ulli unquam injustitiam fecisse, quapropter haecce relinquens sic respondeo. Causa in promptu est, quia tunc non sciebam potestates ad primitivas quantitates debere referri nec ab ullo haec audiveram et licet quis mihi dixisset rectangulis me uti debere, hoc tamen nihil mihi profuisset, si non dixisset rationem ob quam, hoc est quia quantitates primitivas simplicissimas repraesentant uti jam scio; porro quoque non scivissem cum rectangula sola non sufficiunt, quas insuper quantitates deberem assumere, ut hoc succederet, alias enim judicassem rem impossibilem et sic ab hoc opere penitus recessissem prout Tibi contigit; porro nec qui numeri his rectangulis praefigendi, absque eo enim res itidem successu destituitur, atque sic revera non multum mihi communicasset sua rectangulorum cognitione, quam in egregium tentationum labyrinthum praecipitando. Quoad Methodum vero qua ratione ipsa reductio fieri debet ad primitivas quantitates, hoc tanquam accidentale cuique relinquo, ut arbitrio suo disponat, mihi quidem brevissima visa fuit quam communicavi, sed forte alia re adhuc compendia offerrent, si revidendi tempus aderit, interim hactenus mihi non suffecit, nec jamdum, ut in praxi numerum saltem exemplorum cujusque formae determinarem, sed ipsa exempla quaeque adeo apponere necesse habui; alias equidem potestates quoque exprimo $x^3 = a^3 + 3a^2b + 6abc$, uti in Algebrae meae compendio haec cum aliis non contemnendis asservo. Observationes quae a parte assignare curasti sunt peregregiae et placuerunt, licet enim verum sit, quod qui generalem habet Methodum necessario haec, si ita se habeant, posse in praxi acquirere, attamen et perutile est tam generales reflexiones facere et quae mentem aptam reddunt, ut res quam abstractissime concipiat, quod apprime in Mathematicis necessarium. Quoad ultimam annotationem non necesse est ut multum labores in formis radicum determinandis; si enim ponamus $x = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, $x = \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} + \sqrt[5]{c}$ etc., haec si liberentur a signis radicalibus radices universales omnium aequationum exhibent ut alias dixi; sed quia haec liberatio a signis perquam molesta est, hinc haecce ad superiorem Methodum reducta, quae omnia compendia signa radicalia breviter ablegandi in se continet, parvo labore haec poterimus et certo determinare. Atque haecce sufficiant hac vice circa hanc materiam.

Quoad quadraturas miror revera, quod mihi de novo affingis aliquid, quod tamen, cum viderem Te eo inclinare, posterioribus literis tam clare ostenderam, ut nauseam potuisset movere, et cum de tribus Methodis loquerer, quae mihi placerent, nonne expresse dixi, quod hanc Methodum aestimarem, quae in quavis quantitate (non saltem in solido) in sua Elementa resoluta (non tantum in superficies) omnibus modis quibus id fieri potest, haecce ad invicem adaequaret, et de hac Methodo dixeram, quod aeque late crederem illam se extendere, quam Tuae aequationes, quas appellare Tibi placet Tetragonisticas. Sed longum abest, si vellem omnia hic recensere, quae mihi in tuis literis affingis; sic eadem ratione revera non est mea sententia, quod improbem novitatem in definitionibus vocum hac ratione ut interpreteris, sed tantum inusitatum modum eas exprimendi, cum nulla inde utilitas et per alia magis usitata haec melius possimus efficere, et sic maxime laudo Vietam, quod potius literas alphabeti voluerit adhibere, quam nescio quae alia monstra characterum; sed maxime mihi in ipso displicet, quod tam pulchram scientiam foedarit talibus vocabulis: Hypobibasmus, Antithesis, Coefficiens, Gradus parodici, et infinitis aliis ineptiis, quae fateor si in libri alicujus lectione offendam, vix a me impetrare possim ut legam; quapropter Cartesius et Dn. Spinoza mihi ultra modum placent, quod a talibus abstinuerint, nam haec efficiunt, ut multi homines tales libros legere negligant, atque sic sapientiae augmentum damnum patitur et praeterea memoria oneratur superfluis. Quoad tuos characteres si utilitatem insignem afferant, non improbo, sed pro talibus reputavi, quia videbam in illis quae afferebas me aeque facile ac intelligibilius posse procedere, et saltem quatenus hominum ingenium expertus fui, observavi haec illis perquam molesta esse. Ac necdum probas satis praesentibus literis eorum utilitatem dum dicis, quibus problemata difficillima paucis lineis absolvo, ex. gr. invenire curvam talem ut intervallum AT (fig. 102) sit recta constans: nescio num mecum joceris, nonne hoc facillime et universaliter, sive AT sit constans sive quacunque ratione composita, Dn. Barrow Appendi. 3 p. 123 prop. 3 ostendit, et hoc ego absque illis characteribus alia methodo, quae quoque universalis, praesto tanta facilitate, ut statim absque ullo calculo pateat, qualis sit haec curva (sive convexam aut concavam versus CT desideres), et si calculo deberem uti, quatuor literis scriptis res peracta esset. Sed ut videas num vera loquar, exemplum tradam, ex quo cognosces, quanta sit ipsius facilitas, et num tui characteres Tibi majorem praebeant; etenim fere absque ut me servirem calculo, sequens solvi problema: sit BC perpendicularis ad BT Tangentem, quaerantur jam tales curvae, ut AT aut quaelibet ejus potestas multiplicata in AB aut quamlibet potestatem, item ut AC aut quaelibet ejus potestas multiplicata in AB aut quamlibet ejus potestatem sit = potestati convenienti a constante aliqua quantitate ex. gr. ut quadratum AT in AB sit aequale semper cubo a constante quantitate; dico omnes illas curvas esse geometricas. Et quoad Methodum tuam de differentiis, ubi hos ipsos characteres seu signa soles adhibere, quaeso, candide loquamur, nonne melius fecisses, illam hac aut simili ratione communicando (sit (fig. 103) curva HFGB quaecunque, sit HPML rectangulum, inveniatur jam curva BTQ, ita ut rectangulum JKNO erit aequale semper rectangulo DCRS, supponendo GE et FE esse indefinite parvas, hoc autem fiet si fiat ut AD (supponendo AF Tangentem esse) ad FD, sic constans KN ad DF), quam loquendo de curva differentiali et aliis talibus, quae credo pauci et non absque labore intelligant; ipse statim non intellexissem, nisi legissem, quae Barrow pag. 37 et 38 suarum Lect. circa haec habet et mihi notum fuisset ex eodem authore, quod modo indicavi, nec existimo Te fingere posse tuam Methodum ab iis quae dixi differre, haec enim ex Tuis literis nimis aperta; et quicquid certe illa invenisti, ego hisce paucis eadem facilitate semper assequar. Sed jam ad ipsam Methodum accedo, nescio quare eam omnibus aliis praeferas; si hoc fieret ob eam rationem, quia natura nobis indicat, quod debeamus a simplicissimis incipere et rectangulum utique est simplicissima figurarum, quas scimus, utique Tibi assentirer, et hoc ipsum quidem Dn. Barrow bene perspexit, licet sero nimis, nam post multa superflua, quae nobis tradidit, observavit se eadem et multo praestantiora hoc unico observato (quod modo indicavi) posse acquirere; sed si ob aliam rationem hanc Methodum omnibus aliis praefers, plane diversum sentio, nam omnia quae ibi recenses, ego eadem ratione aliis infinitis modis possum praestare, cum eadem ratione sicuti ponendo rectangulum HLMP et assumendo omnes curvas geometricas aut analyticas BFH, determinare licet numerum curvarum BTQ quadrabilium; sic assumpta quacunque figura quadrabili loco trianguli, haec omnia eadem ratione assequi licet, atque hisce sufficienter ostendi, quare in aestimio habeam quaedam theoremata Dn. Barrow (fateor interim quod sua Theoremata infinities generaliora efficere potuisset, uti et Dn. Gregorius Scotus, qui haec sine dubio visu excepisset, existimabat, se Geometriam ad maximam universalitatem reduxisse, cum tamen sua Theoremata meorum, de quibus alias, perquam speciales casus existant). Et miror Te parvi facere eadem, et interim quae affers, nihil sunt, quam ea ipsa, ut jam fuse ostendi, aut ad minimum ego eadem hisce paucis praestare valeo. Et quaeso, nonne praeterea Dn. Barrow unico Theoremate, quod supra notavi pag. 123, omnes quadra turas ad Logarithmos reduxit? Ope hujus facillime Gregorii a S. Vincentio Theorema de hyperbola exhibetur (de aequalitate nimirum spatiorum, quatenus ad asymptotos refertur), ostenditur quadratricem hyperbolae esse Logarithmicam (quod Tu in Tua methodo desideras, quae tale quid ut fateris non exhibet). Ipsius Logarithmici spatii datur quadratura et infinita talia, quorum unumquodque aestimationem meretur. Atque sic me credo etiam ex Tuis ipsis literis deduxisse, quod mea aestimanda sint, licet verbis contrarium dicas. Dicis porro: et ita facile condi posset Tabula omnium Figurarum; ne haec Tibi persuadeas, fateor licet multa compendia adhibuerim, res tamen ultra modum laboriosa est; hunc interim fructum hinc obtinui, ut illa disquisitione, dum generalibus curvarum expressionibus omnes curvas quadrabiles determinare conabar, quod nimirum observabam, qua ratione Resolutio Problematum Numericorum facillime sit expedienda ac generalissima ratione, et quando id in numeris non fieri potest, qua via demonstrandi impossibilitas innotescat; adeoque haecce postquam ad maximum compendium reduxi, ut inservire possent ali, qui forte talia suscipere ob prolixitatem non reformidaret, reliqui et me ad alia convertens perpendi haec multo facilius peragi posse, si rem sic aggrediamur. Sit curva quaecunque (fig. 104) et lineas AB et BC vocemus x et y (soleo autem, ut obiter hoc notem, characteres figurae sic ascribere, ut medium locum occupent intra duo puncta, quibus linea terminatur, quam repraesentant), si jam ex data x omnes compositiones possibiles faciamus (ex. gr. x, xx, x^3, x^4 etc. $\sqrt{x}$, $\sqrt{xx}$, $\sqrt{x^3}$ etc. $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{xx}$, $\sqrt[3]{x^3}$ etc., hasque deinde binas ac binas, ternas ac ternas etc. conjungendo signis + et — et extrahendo radices per gradus prout feci, et alia his similia) illasque aequales ponamus areae ABC, hincque jam per problema 7 pag. 25 Barrow. determinemus longitudinem lineae BC, habebimus seriem omnium curvarum quadrabilium et cujus omnia spatia constanti regula quadrantur, et hinc clarissime sequitur, curvae spatia quae hac ratione non quadrantur, veluti circulus, hyperbolae, tale quid non admittere; quid autem ego existimem, quod efficiendum sit, ut ad ultimam perfectionem circa quadraturas perveniamus, nondum hic omnes meas cogitationes in ordinem redegi ut Tibi ausim ea proponere, quanquam me hoc totum occupet, quantum per negotia, quibus premor, licet. Caeterum quod non opus habuerim aequationibus, quas transcendentes vocas, in quadraturis (nam alias cum Dn. Slusio et Cartesio in aliis problematibus haec observo, ut exponentem potestatum litera explicem), non credo inde evenisse, quod non satis generaliter analysin ac quisquam alius circa haec tractarim, cum quoque omnes curvas generalissime calculo exprimo, tam Geometricas, quam transcendentes ut vocas, meoque judicio admodum simplici, cum eadem expressione, qua Cartesius Geometricas exprimat, omnes conceptibiles curvas exprimam, hocque insuper hac expressione obtinens, ut omnium talium curvarum Tangentes eadem prorsus facilitate, imo iisdem legibus, prout Dn. Slusius praescribit, definiam; atque haec existimo esse validas rationes ad minimum ut Tibi quantum possum probabilissima concedam, non praejudicatas opiniones, quae effecere quominus Te in quibusdam non secutus fuerim; interim tamen ingenue fateor quoad hanc tuam expressionem, me illam non vilipendere, revera enim ignoro num melior sit mea, sed illam saltem sit judicavi positis prioribus rationibus. Quodsi in continuatione meorum studiorum (quae sic mihi videor disposuisse ut certo me ad optatum circa talia finem sint deductura) mihi aliquid detegatur, quo cessent, liberrime Tibi manus dabo atque tum non intermittam haec ipsa quoque aggrediendo experiri quantum valeant. Atque hoc existimo majori utilitate fieri, quam si ipsas jam aggrederer ob rationes quae mihi incertae, atque certum ac fixum cogitationum filum (sic enim semper progrediendo soleo progredi, omnia alia inordinata studia magis menti obsunt quam prosunt) hisce interrumperem. Adde quod maximi momenti esse judicem: postquam quis aliquo modo scit, quid sit distincta cognitio, ac aliquatenus verae Methodi regulas perspexit, ut in quam proprias inclinationes sequatur, et contra ut nihil magis caveat quam aliorum inclinationes sequi, si cum ipsius non consentiant (licet non causas sciat), cujusque regulae praestantiam experientia et rationes novi, quibus non tam mea defendo quam author Tibi sum ut strenue talibus incumbas, quia Te eo inclinari sentis. Et licet itaque pateat quod non credam quod magnum inde damnum passus fuerim ea non sequendo, agnosco interim maximum quod mihi in meis disquisitionibus obtigit fuisse, quod me primo ad Radicum extractionem et quae huic sunt agnata conversus fuerim, atque sic non meam curvarum expressionem non solum respexerim omnibus reliquis omissis, hoc est quod nihil aliud quam simpliciter curvas solas considerarim; hinc enim cito omnium Radicum expressionem obtinuissem multo praestantiori ratione, quam fuit ea, quam Tibi supra communicavi, et quae intima harum rerum mysteria recludit, veluti jam scio Tangentium constructionem expeditissimam, quae ex ipsa curvarum natura fluit, ac alia non minoris momenti circa quadraturas. Methodum Tangentium inversarum jam quoque scio duplici via, absolute si curva Geometrica, quandoque si non talis; duplicem quoque viam qua portiones speciales quadrentur; priori vidi in Cycloide ADF (fig. 105) spatium DEF absolute quadrari, quando AB est quarta pars AC, illudque spatium esse = spatio ABD, quod Dn. Hugens quadravit; imo infinita quadrabilia spatia dari, si cyclois ad alia curva spatia refertur, prout jam relata ad quadratum; posteriori spatia particularia ad infinitas series reduco atque sic quandoque tales series se patiuntur ad finitas quantitates referri. Quae causa porro fuerit, cur haecce Tibi transcripserim circa Artem combinatoriam, revera jam me latet; certum est me ad Tua tunc non reflexisse, credo tamen occassionem id mihi dedisse, quia imaginationem plenam de iis tunc habebam ex conversatione Dn. Kircheri, qui praecipue mecum loquebatur de sua Arte combinatoria ejusque praestantia. Alias per ipsam tunc non intellexi Artem quae recenset saltem numerum variationum, sed et quae ipsas variationes exhibet, nam multiplicatione potestatum ex formulis $x=a+b$, $x=a+b+c$ etc. utrumque acquiritur. Dicis quae de Pascalio et Fabrio adfers, me Tibi hoc sic interpretari videre ac si suspicarer etc. quod tamen Tibi ne per somnium in mentem venit; respondeo quod mea intentio revera quoque hoc non fuit. Atque quia vidi, quod me multa ex praeconceptis opinionibus agere praesumis hocque Te sic judicare credo (licet imbecillitatem meam profiteor) quia Tibi non semper rationes, quare aliquid sustinuerim, aperte indicavi, coactus quodammodo fui Philosophice i. e. liberrime, attamen vere amicali responsione Tibi cogitationes meas hisce aperire, inter quae libere exarata locum quoque concedes huič responsioni, dico itaque me observasse quod admodum curiosus es in determinandis rerum inventoribus, quodsi hoc facis eam ob causam, ut observes, qua ratione augmentum sapientiae de seculo in seculum creverit, ac alia quae hinc sequuntur, ut ita curiositati tuae satisfacias, haec nihil ad me .....

Quoad tandem Characteristicam Tuam dicis: Te nescio qua de causa praeoccupatum ab his meis meditationibus fuisse alieniorem, quod revera in quantum differam ignoro, nam credo me talia quaedam prioribus literis indigitasse, quae quoque citas et confiteris me tecum sentire. Praeterea multum hac de re olim tecum locutus, in quibus aperte dixi, me in praecipuis tecum convenire, licet non in omnibus. Ut autem perfecte hac de re judicare possis, meam sententiam clare hisce declarabo. Cum aliquatenus Algebrae cognitionem mihi acquisiveram, perplacebant in ea quod quasi ludendo tam remotae a nostra cognitione veritates possent acquiri; hinc maxime tale quid in aliis scientiis desideravi, sed cum non ita statim applicatio pateret, et Cartesius loquebatur de sua Methodo, quasi haec se universaliter ad omnia et aeque facile extenderet, ego credebam ipsum tale quid habuisse, ac proinde maxime hoc in suis scriptis perquirebam, in quibus evolvendis tum temporis maxime occupatus eram, sed nihil revera inveni quod animo satisfaceret; interim tamen incidi paulo post in Epistolam, in qua loquitur de lingua aliqua Philosophica, qua Rusticus aeque facile posset (si recte memini) in veritatis inquisitione progredi ac magnus Philosophus, et alia plura his non absimilia, quae admodum mirabar et utique inexpectata mihi erant. Sed Linguae vocabulum mihi obfuit, ut haec non perciperem; sed dum in demonstrationibus concinnandis admodum occupatus essem ac delectarer me ipsum ex calculo Algebraico tanta facilitate illas posse elicere, ad quas excogitandas legendo mathematica Scripta divinum ingenium habuisse existimaram, observavi quod revera eadem res utrobique peragatur eadem certitudine nisi quod Algebra haec expeditius exsequatur, atque adeo nullam aliam differentiam esse quam si quis duabus diversis linguis eadem loquatur; hic subito reflexi ad ea quae inveneram in modo indicata epistola, et haecce applicans vidi omnia perfecte consentire. Hinc existimabam, me verum sensum Cartesii percepisse, adeoque in mea sententia confirmatior factus auctoritate tanti Philosophi multas quidem posthac, sed frustra volvi cogitationes, adeoque quo mihi viam sternerem ad illud acquirendum, mihi firmiter proposui Algebram ex professo excolere, quia nimirum jam tale quid habebamus ut sic bene iis perpensis, simul addiscerem applicationem ejusdem ad omnia. Hinc Algebram primo ex variis authoribus in unum corpus collegi, ut sic omnia quae dispersa erant praecipua inventa, simul contemplandi facilior occasio esset, quo deinde breve compendium adornavi et alia multa peregi quibus recensendis hic supersedeo. Deinde cum in cognitionem pervenissem Dn. Spinosae, Dn. Schullerum rogavi ut ab ipso inquireret in veram methodum investigandi veritatem (quia tunc temporis domum eram ex Hollandia reversus), sed mihi in responsione retulit, quod ipsius praecipua cura fuerit, ideam veram ab omnibus aliis ideis, falsa, ficta et dubia distinguere, et hinc se incredibilem facilitatem in progressu veritatis acquirendae ostendisse; cum demum in Hollandiam reversus, ipsum accessi et post varia, quoque ostensa Cartesii epistola, quid de illa sentiret, rogabam, sed ille ridendo respondebat: credisne, mi Amice, omnia quae Cartesius dixit, vera esse? dixi: non; bene dum replicavit, res itaque haec nobis non magnam solicitudinem causabit, et sic alia uti solebat. Attamen fateor mihi vix probabile videbatur, quod Cartesius haecce, si non eorum solide persuasus fuisset, ad Mersennum scripsisset, cum sciebat tunc literas suas a multis visum iri, quapropter hisce non dimovebar a mea opinione. Hanc Epistolam Tibi postea quoque, ut probe noris, monstravi et varia de hisce rebus collocuti fuimus, sed quantum jam recordor, in eo semper se terminabat discursus, quod viderem Te methodum hanc ad omnia, quae in Mundo sunt, extendere (nec video me deceptum, nam et adhuc es in ea sententia, ut clare tuae literae indicant, dicis enim: ope ejus omnes nostrae cogitationes etc., in quibus Tibi non contrarius sum, et revera perquam optarem, ut tale quid haberemus, et quis vellet de ejus praestantia dubitare?), sed mea cogitatio tunc erat, quod saltem in tali methodo occupatus essem acquirenda, ut problemata physica eadem ratione tractare possem et resolvere, ac problemata Mathematica ope Algebrae, et eo saltem conatus meos postea extendi. Verum deinde percepi, non opus esse ut progrederer ad ea, cum necdum habeamus in ipsa Algebra veram ac genuinam artem inveniendi; observavi enim nos mirum in modum omnes deceptos fuisse Algebrae speciositate, hancque esse confusissimam artem, quod magis magisque videbam, cum mihi illuxit verae Analyseos Idea, praesertim cum infinitis exemplis hac in re confirmatior factus. Dicam itaque Tibi me in talem methodum incidisse quae his praerogativis gaudet: 1. non posse dari faciliorem, hoc statim ex ejus forma et notione facillimae methodi patet; 2. nulla aequationum reductione hic opus esse; 3. nulla eorundem ad simpliciores depressione; 4. nulla radicum extractione; 5. nulla radicum electione, nam radice extracta non scimus statim alias, quae radix proposito problemati satisfacit; hisce ad eam perfectionem reductis, quantum temporis angustia mihi permisit, nondum tamen volui aggredi ipsa problemata physica, nisi prius problemata mechanica et quae motum spectant, quatenus is imaginationi subjiciatur, ad similem methodum reduxissem, et hic quidem observavi talia tam facile posse solvi, ut vix calculo ullo opus sit. Cumque tot viae non concurrant ad idem problema solvendum, quot in Geometricis, difficultas hic non tanta est, ut ibi ad omnium facillimam determinandam, adeo ut hic facile possint praescribi praecepta, quibus observatis, si centum idem problema solvendum susciperent, necessario tamen omnes per easdem vias cogitationes dirigerent ad ignotum determinandum, attamen si problemata nimis composita essent, vix absque calculi adjumento res procederet; considerans interim hic facilius multo causam, quam in Geometricis, quare calculo opus sit, observavi scientiam aliquam nobis superesse, quae nullo calculo indigeat et qua bene in ordinem redacta, omnia particularia in Physicis absque calculo poterunt determinari, et huic scientiae convenit, quae dicis ut et in captivi, cui negatur calamus et cui ligatae manus, potestate sit, nec mirum, nam haec ea ipsa est, circa quam et post mortem poterimus esse occupati. Vix interim credo, quod quis talem scientiam (quae merito aeterna posset appellari, ut et omnes, quae ad hanc perfectionem possint reduci) nobis facile tradet, licet in hac ipsa credam problemata majori posse facilitate solvi, quam ulla analysi mathematica, nisi quis se suaque ad talem statum redegerit, ut quam minime a rebus externis dependeat. Atque hisce meas cogitationes circa haec, seu si mavis opiniones aut praeconcepta praejudicia (ab amicis siquidem quieto haec suscipio vultu) libere exposui.

VIII.

Leibniz an Tschirnhaus.

Constitui quaedam reponere literis, quas ex itinere scriptas nec ad me perlatas Tute, cum hac transires, reddidisti. Quanquam enim ex colloquiis ultro citroque habitis in plerisque, ubi Te haerere aut aliter sentire scripseras, satisfactum dubitationibus tuis opiner, quod Te ipsum ingenue agniturum et contraria tua libenter retracturum arbitror; utile tamen erit nonnulla denuo attingere, ut intelligam an apud Te profecerim, et ne amplius imposterum eadem discutere opus sit. Actum est inter nos de Radicibus Aequationum, de Quadraturis, de aliis Geometricis, de Metaphysicis, Logicis. *Radices aequationum tribus Methodis* assequi credidisti: *prima* est per enumerationes formularum irrationalium, tollendo irrationales, sed calculo opus esset immenso. Hanc methodum agitabas animo cum primum Parisiis mecum loquereris, quia tunc nondum constabat formulas generales pro qualibet aequatione dari posse; sed cum ostendissem imaginarias in speciem nihil obstare generalitate et specimine monstrassem quomodo ponendo $x \sqcap a + b$ series quaedam aequationum omnium graduum resolvi posset, et quomodo spes esset, assumendo plures partes, posse inveniri radices generales, merito mecum hanc methodum persecutus es. Cumque ego, considerans Formas $\begin{matrix} ab & abc \\ ac & etc. \\ etc. & \end{matrix}$

quas rectangula voco, esse simplicissimas, ad eas revocassem potestates ab x, et inde suppositis valoribus ipsorum y, z ex cognitis quantitatibus per comparationem sumtis seu posito $a^5 + b^5$ etc. $\sqcap \ldots$, $ab +$ etc. $\sqcap \ldots$ et $abc +$ etc. $\sqcap \ldots$. et $abcd \sqcap \ldots$, sperarem invenire tales quatuor aequationes $a^5 + b^5$ etc. $\sqcap \ldots$, $a^5b^5 + a^5c^5$ etc. $\sqcap \ldots$, $a^5b^5c^5 +$ etc. $\sqcap \ldots$, $a^5b^5c^5d^5 \sqcap \ldots$, quibus repertis habuissemus $a^{20} + \ldots a^{15} + \ldots a^{10} + \ldots a^5 + \ldots \sqcap 0$ et per consequens quaesitum: Tibi tunc methodus ista mea se non satis probabat, quia ad meas operandi rationes non satis attenderas, neque opinor eam tunc perceperas; postea tamen de Tuo in eadem incidisti, multaque pulchra theoremata reperisti, atque haec est secunda tua Methodus pro aequationibus radicum. Sed ego interim deprehendi, istam methodum non posse ad exitum perducere, cumque Tu perstares successumque a Te demonstratum diceres et me dissentientem tua non intellexisse confidentissime assereres [his verbis: non miror quod talia profers', hanc enim plane non percepisti; item: ostendi quod hac methodo infallibiliter radices habeantur; hanc autem ostendere falsam, judico impossibile; item: quam demonstrationem si destruere valeas, magnum quid mihi praestabis etc.] cum tamen ego tuam methodum primo statim aspectu intellexissem, quippe mihi familiarissimam, quaedam etiam in tuis emendanda monuissem, ut quod pro $x \sqcap a + b + c$ alium calculum adhibes quam pro $x \sqcap a + b + c + d$, cum tamen unus sufficiat pro omnibus et in x^2 sufficiant duae literae, in x^3 tres etc. ad valores potestatum inveniendos pro literis quotcunque; itaque gratissimum fuit, quod eorum Te convincere potui tum de sinceritate tum de exactitudine in hoc genere mea: de sinceritate quidem, ut agnosceres me vere asseruisse, haec olim mihi cognita; de exactitudine, quia ni fallor agnovisti, me tuam methodum diligenter legisse et intellexisse et errorem deprehendisse, locum enim lineola signatum apud me vidisti. Itaque imposterum spero Te non ita facile monita mea insuper habiturum. Tertiam tuam methodum radices aequationum inveniendi, nempe si sit $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t \sqcap 0$, ponendo $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \sqcap q$, tollendo x per y et ope arbitrariarum b, c, d etc. auferendo terminos intermedios in aequatione proveniente $y^4 + \ldots$ etc. $\sqcap 0$, non puto succedere posse in altioribus nisi quoad casus speciales. Ejusque rei videor mihi habere demonstrationem: itaque autor essem ne ea tempus perderes. Utile esse potest ad aequationes transformandas, non tamen (generaliter) ad resolvendas.

Venio ad quadraturas et quae cum his connectuntur, ubi primum Apologiam texere cogor vocabulorum quae adhibui, quia ea sugillas. Nolim itaque putes ea esse inutilia; saepe enim hac ratione paucis lineolis exprimo theoremata generalissima, quibus alias explicandis opus esset replere paginam, quanquam necesse est Tibi et aliis quibus non distincte explicui apparere obscuriora. Sunt tamen pleraque ni fallor satis rebus significandis et memoriae juvandae apta, saltem me valde sublevant calculum, aequationem, problema, curvam etc. *Algebraica* voco, quando per potentias certi finiti rationalis exponentis exprimi possunt, alias voco *Transcendentia*. Quid sit *Calculus tetragonisticus*, patet, id est serviens ad tetragonismos. Curvam *quadratricem* voco, quae servit ad aliam figuram quadrandam. Curvam *summatricem* et *differentialem* voco, quarum ordinatae se habent inter se ut summae et differentiae. Calculus differentialis est, quem praeter literas x, y etc. ingrediuntur infinite parvae $\overline{dx}$, $\overline{dy}$ et similes. Invenire Tangentes curvae, reducitur ad hoc problema: invenire seriei differentias; invenire autem aream figurae, reducitur ad hoc: datae seriei invenire summas, vel (quod magis instruit) data serie invenire aliam, cujus differentiae coincidant terminis seriei datae. Ope hujus calculi differentialis omnia ista reperio, sine figurarum inspectione et linearum ductu, et per consequens ea, ad quae imaginatio per linearum ductus attingere nequit. Hinc inveni modum habendi tangentes sine sublatione fractionum et irrationalium, quam Te maximi facere testatus es, in quam non facile incidet nisi qui considerabit tangentes ad differentias reduci. Itaque nunc opinor non amplius dices, aliis methodis statim praestari, quod meo illo calculo differentiali. Nec possibile est generaliora praestari in hoc negotio, itaque ex quo mecum locutus es, non amplius opinor dices: quicquid ea methodo invenerim, Te per alias eadem facilitate praestiturum. Unum exemplum dabo, quod est ex utilissimis et mea methodo facillimis: Ex datis figurae partiumque ejus quarumcunque centris gravitatis invenire areas, quod ita solvo: Sit (fig. 106) figura trilinea orthogonia ABC (nam ad tales caeterae revocari possunt), quaeritur area portionis cujuscunque, ut ABC, dato portionis cujuscunque centro gravitatis. Quoniam descripta habetur curva et centrum spatii assignari potest ex hypothesi, demittatur ex quolibet centro L perpendicularis LH in AG tangentem verticis et ipsi LH sumatur in basi aequalis BM, idque faciendo ubique per omnia puncta M ducatur curva, quae utique haberi poterit algebraice, quia curva CC supponitur esse algebraica, et algebraice habentur puncta B, C, L, H. Jam ex puncto M educatur tangens (quod in curva Algebraica semper fieri potest) occurrens axi AB in T, et completo rectangulo ABCG ducatur per L ipsa SR aequalis et parallela ipsi BC, ajo aream ABC fore ad rectang. SBCR, ut est TB ad BM. Ex data autem area invenire centrum gravitatis, problema est quod generaliter sumtum algebraice impossibile est, quemadmodum facile demonstrare possum.

Curvam quam proponis, in qua (fig. 107) posita BT tangente sit quadratum AT in AB aequale cubo a constante, nullo negotio reperio; est enim ipsamet Hyperbola.

Caeterum tres habeo calculos transcendentibus etiam applicabiles, unum per differentias seu quantitates infinite parvas, alterum per series infinitas, tertium per exponentes irrationales, ex quibus novissimus habet aliquid prae caeteris, per ipsum enim solum demonstrare possum impossibilitatem quadraturae specialis ex. gr. circuli totius; per duos vero priores tantum invenire possum aut impossibilem demonstrare quadraturam generalem algebraicam alicujus figurae. Est autem generalis quadratura algebraica idem quod inventio curvae algebraicae quadratricis, cujus ope quaelibet figurae datae portio quadrari potest. Quoniam autem testaris Tibi difficile videri, invenire omnes figuras quadrabiles, ideo ostendam facilitatem. Proposita sit curva algebraica quaecunque, utique ejus aequatio continebitur sub hac generali: $0 \sqcap a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 +$ etc. (1), positis a, b, c etc. datis, quaeritur an ipsa sit capax quadraturae algebraicae generalis, id est quaeritur ejus curva summatrix, cujus aequatio sit $0 \sqcap l + mx + nz + pxz + qx^2 + rz^2 +$ etc. (2), erunt l, m, n etc. quaesitae. Ex nota methodo tangentium constat esse $\frac{z}{t} \sqcap \frac{m + pz + 2px \text{ etc.}}{n + px + 2rz \text{ etc.}}$ (3); ponatur $\frac{z}{t} \sqcap y$ (4) et ex aequ. (3) et (4) fiet: $ny + pxy + 2rzy$ etc.

$\sqcap m + pz + 2qx$ etc. (5), ex qua aequatione tollendo z ope aequationis (2) habebitur aequatio, in qua solae erunt indefinitae x et y, quae proinde coincidere debet cum aequ. (1) data, quod an possibile sit constabit ex comparatione terminorum, qua inveniemus valores literarum p, m, n etc. Atque ita calculo aliquot horarum habebimus universalem regulam pro quadratura generali algebraica figurae algebraicae cujuscunque. Et memini me Tibi jam haec Parisiis dicere, sed ut video non attendisti. Eadem et ad figuras transcendentes suo modo applicare et determinare possum, utrum datae figurae quadratura pendeat ex quadratura circuli aut hyperbolae vel utriusque; item ad problemata methodi tangentium inversae, quanquam tunc artificio adhuc aliquo nonnunquam opus sit. Haec facilia quidem, sed ideo difficilia visa autoribus, quia non solent aequationes generales adhibere pro curva qualibet ejusque tangentibus, ut inde regula unica pro omnibus inveniretur. Non est cur Reynaldum defendas; non enim soleo in talibus temere judicare. Ille utriusque sphaeroidis oblongi et lati superficiem se dedisse putat, ego puto ipsum dedisse neutrius. Pauci eorum, qui Methodum indivisibilium vulgarem intelligunt, intelligunt usum Trianguli characteristici (ut ego vocare soleo), imo credo neminem in Italia eum intelligere, in Gallia vix quisquam praeter Hugenium, in Anglia plures. Bullialdus qui intelligit methodum indivisibilium et de ea librum scripsit ineditum, fassus est se non posse invenire superficiem Conoidis parabolici, quod tamen facillimum est. Vides quantum inter methodos indivisibilium intersit.

Subjiciam pauca de quibusdam aliis, quae ad Geometriam non spectant. Certum est haberi et a me certo determinari posse methodum praestandi omnia sine calculo. Opus est tamen signis aliis, sub quibus ego comprehendo imagines et verba. Optima signa sunt imagines, et verba ut apta sint, debent imagines accurate repraesentare. Quod cum in Geometricis non faciat Algebra, ideo illi meum calculum geometricum praefero, quem Tibi ostendi. Non experior eam, de qua quereris, in optimis definitionibus reperiendis difficultatem; possum enim hoc problema certa analysi solvere: Datis omnium terminorum proprietatibus reciprocis seu definitionibus qualibuscunque, invenire definitiones optimi generis. Per definitiones optimi generis intelligo eas, ex quibus constat rem definitam esse possibilem, quia alioqui nihil tuto ex definitionibus concludi potest, nam de impossibilibus possunt duo contradictoria simul concludi. Itaque ad hanc necessariam et primam definitionis bonae notam ipsa me cogitandi methodus duxit, id enim denique satis bonum est, quod usum praestat quem desideramus. Hujus notae corollarium est tantum, ut causa efficiens includatur in eorum definitionibus, quae causam efficientem habent. Hinc patet etiam, quod definitiones non sint arbitrariae, ut putavit Hobbius.

Annum agens aetatis decimum octavum scribensque libellum de Arte Combinatoria, quem biennio post edidi, certum meditandi filum inveni, admirabile verae analyseos arcanum, cujus corollarium est lingua vel characteristica rationalis. Hanc nemo credo alius intellexit, alioqui qui eam intellexisset, omnibus aliis missis eam fuisset persecutus, nihil enim majus ab homine praestari potest.

Haec sunt quae Epistolae tuae respondenda potius putavi, quam Tibi, nam ex quo collocuti sumus, Tibi fallor jam satisfeci.

Zur weiteren Charakterisirung der Unterredung, die Tschirnhaus auf seiner Rückkehr nach Deutschland mit Leibniz zu Hannover hatte, mögen noch einige Stellen aus einem Schreiben Leibnizens folgen, das jene Unterredung zum Theil frischer wieder giebt, von dem aber der Anfang fehlt:

Habes historiam quarundam mearum meditationum quam ideo enarravi, ne ut aliquando facis, varias methodos longe differentes habeas pro iisdem aut me dissimulare putes, per quos profecerim, quanquam credam Te, ex quo nuper mecum locutus es, longe aliter de plerisque meis sentire, quam fecisti, cum novissimas literas ex itinere scriberes. Agnosces etiam me non temere judicasse de tuis circa extractionem radicum ex aequationibus methodis; neque ex vanitate dixisse me credes, quod quaedam talia jam antea quaesiissem, sed eo consilio ne me tua descripsisse aliquando suspicareris; et cum Tibi in memoriam revocavi eorum, quae Parisiis ostenderam, non id fecisse, quasi crederem Te mea sumsisse, scio enim quid per Te possis, sed ut facilius Tibi probarem, me non fuisse in his plane novum. —

Agnosces credo nunc, ex quo mecum locutus es, me non jocatum, cum dixi meum calculum differentialem praestare, quae Barrovius et Gregorius, aliique ut ipsi talia concipiunt, non potuissent; unde quod Barrovius habet de problemate illo suo generali, ex quo caetera pendent, quod Phrygia sapientia sibi occurrisse fatetur post caetera, id mihi statim ab initio methodo mea necessario occurrit, imo consistit in una ex aequationibus mei calculi differentialis. —

Risi, cum Barrovium dixisti omnes quadraturas revocasse ad logarithmos locumque indicasti. Ille enim dicit ibi, quae jam ex Gregorio a S. Vincentio et Wallisio notissima sunt, nimirum ipsius Hyperbolae et ab ea pendentium figurarum quadraturam per logarithmos haberi. Quae ego in hoc genere habeo aut quaero, ab his infinite distant; sed calor objiciendi mihi aliquid, quo reprehensas tuas radicum methodos ulciscereris, eo Te abripuerat. Ego Barrovium magni facio, sed non puto me illi injuriam facere, cum dico esse mihi in promtu infinities majora non in eo tantum ut generalius enuntiem ab ipso prolata, quod Tu quaeris, sed ut ea praestem, ad quae ex ejus methodis nullus patebat aditus. Quadraturae Hyperbolae reductio ad logarithmos non habetur ope solius Trianguli characteristici, nisi alia praeterea consideratio accedat. Itaque cum indicavi, usum communem quadraturarum per tangentes eo non attingere, non ideo exclusi a me correctum. Habeo enim ego methodum generalem pro quadraturis Paraboloidum omnium et Hyperboloidum, qua et Hyperbolae ipsius quadratura exhibetur (scil. per logarithmos) in qua non considerantur tangentes, sed tantum differentiae et summae. Nam methodus tangentium correcta reducitur ad methodum differentiarum.

Jucundum etiam fuit videre, quomodo affectaveris nominare Cartesium et Slusium, cum de aequationibus meis transcendentibus loqueris, quasi illi quicquam dixissent ad rem meam faciens. Scilicet illi non utuntur literis in exponente, nisi cum sunt numeri rationales. Ausim quovis pignore contendere, Slusium ipsum si ei dicerem quomodo illis utor ad supplendum id quod Algebrae communi deest solvendaque problemata quae calculum alioqui respuunt, fassurum nihil tale a se somniatum, sed Tu par pari referre voluisti, quia quaedam ob quae Cartesiani Cartesium jactant, jam apud alios extare dixeram.

Das nächste Schreiben, welches von Tschirnhaus vorhanden ist, ist datirt: Kiesslingswalda 5 Decembr. 1679, und enthält nur Mittheilungen über seine häuslichen Einrichtungen.

IX.

Tschirnhaus an Leibniz.

.... habe einen sonderbahren Methode gefunden, Spiegel in grosser Grösse und mitt leichter Mühe zu machen, die vielleicht einen grössern effect, als der in des Königs Bibliothek zu Paris erweisen werden. Sonsten habe in der that erfahren, dass wen excavatae sphaericae superficiei ex ligno (quae facile paratur) agglutinantur superficies rotundae et planae ex vitro hujus magnitudinis O solche perfect als wie andere Brenspiegel brennen, doch nicht mitt solcher force. Habe auch weil mit dieser materie umbgangen, diess problema solviret: sit (fig. 108) curva circularis AEC; supponantur radii paralleli solis DE reflecti per EF; quaeritur quae sit curva FRC, quae ex reflexorum radiorum intersectionibus formatur? et inveni curvam hanc esse Geometricam, ut has vocat Cartesius; imo data quacunque curva Geometrica AEC, invenitur etiam curva Geometrica FRC. Vellem scire, num talia ab aliquo Mathematicorum hactenus determinata, praecipue a Dn. Hugens cujus Dioptrica nunc lucem forte vidit. Caeterum adinveni methodum multo faciliorem Slusiana (qua nec credo facilior existit), ope cujus non solum Geometricarum curvarum, sed et Mechanicarum Tangentes statim determinantur, atque similia plura, de quibus alias.

Kiesslingswalda d. 7 Aprill 1681.

X.

Leibniz an Tschirnhaus.

ohnweit Northausen den 13 Maji 1681.

Dessen ohnverhofftes sowohl als angenehmes habe heut erst erhalten, und weil ich eben auf der reise begriffen, und mich in einem Dorff am Harz befinde, gleich darauff antworten wollen. M. H. meldet von einem seiner schreiben an mich, so mir aber nicht zu handen kommen, gleich wohl erhalte ich sonsten die briefe, die mir gerad nach Hanover adressirt werden. Nach absterben Herrn Herzog Johann Fridrichs hochseel. andenkens bin ich zwar in meinen officiis conserviret worden, aber man hat nicht mehr die vorige curiosität, daher ich auch lange Zeit nicht erfahren, was in Frankreich und England passiret, ausgenommen dass man ein mittel in England gefunden, die beine also zu praepariren dass sie essbar seyn.

M. Hrn. curvam cujus puncta designantur intersectionibus radiorum reflexorum qui in datam curvam parallele inciderant, verstehe ich nicht recht, nam quilibet radius reflexus quemlibet alium intersecat, et nullum est punctum in plano, quod non duorum quorundam radiorum a data curva in eo plano existente post parallelam incidentiam reflexorum intersectio intelligi possit. Itaque locus intersectionum non est linea, sed superficies, nempe totum planum. Credo Te peculiarem quandam determinationem in animo habuisse, sed hanc non exprimis.

Circa Methodum Tangentium generalem ex calculo ductam nihil praestari posse puto ultra eam qua utor, communem curvis analyticis et transcendentibus, rationaliter vel irrationaliter expressis; cujus rei fundamentum Tibi coram explicui. Quoniam enim idem est tangentes curvarum et differentias serierum investigare, hinc licet valor ordinatae sit ex multis partibus irrationalibus utcunque involutis compositus, nihilominus non opus habeo sublatione irrationalium, nam differentiae totorum componuntur ex differentiis partium. Eodem modo et cum curvis transcendentibus procedo. Una tamen superest difficultas, quam nondum satis ex sententia superavi, scilicet invenire tangentes, quando incognita seu indeterminata ingreditur exponentem, ex. gr. sit curva ejus naturae, ut posita abscissa x et ordinata y et recta constante a, habeatur aequatio hujusmodi: $y^x + x^y$ aequ. a^{xy} (necesse est autem dari quandam rectam constantem praeter a, quae exprimat unitatem) quaeritur modus inveniendi curvae tangentem. Si haec haberentur, haberemus etiam quadraturas quales sunt, scilicet vel analytice, quando id fieri potest, vel transcendenter.

De speculis urentibus saepe cogitavi et expertus sum laminam vitream, scutellae cupreae impositam, calore accedente emollitam sese sic satis scutellae applicare; hanc methodum puto earum quas novi optimam; an aliquid facilius habeas, scire velim.

Ego hac aestate occupabor in absolvendis tandem meis molendinis ventaneis, quae fodinis applico, de quo memini me Tibi coram locutum. Si qua naturae experimenta vel artis inventa memorabilia Tibi innotuere, ea rogo communices. Interea ex sententia vale etc.

P. S. Ob M. H. meines vor fast 2 Jahren bekommen, habe noch nicht erfahren können.

Bitte mir Herrn Mohrs zu Coppenhagen adresse zu schreiben, wenn ich etwa einmahl an ihn etwas schreiben wolte.

Hierauf folgen mehrere Briefe aus dem Jahre 1682, die Leibniz von Tschirnhaus aus Paris zugesandt erhielt. Dieser nämlich hatte sich noch einmal dahin begeben, um zur ungestörten Fortsetzung seiner Studien eine Pension von dem Könige von Frankreich sich zu erwirken. Zu dem Ende hatte er eine kurze Zusammenstellung seiner Erfindungen der Königlichen Akademie zu Paris überreicht, wovon er eine Abschrift an Leibniz schickte, die hier abgedruckt folgt. Die Briefe selbst enthalten grösstentheils Mittheilungen über die Fortsetzung seiner Bemühungen, den Zweck seiner Reise zu erreichen. Auf Tschirnhaus' ausdrücklichen Wunsch richtete Leibniz das folgende Schreiben an Galloys, dessen Bekanntschaft er während seines Pariser Aufenthaltes gemacht hatte und der bei dem Minister Colbert in hohem Ansehen stand:

Leibniz an Galloys.

4 May 1682.

Je sçay que vous avez des grandes occupations qui ne vous permettent pas de donner tout le temps aux belles sciences, que vous voudriés bien y employer. Mais si le public est privé maintenant de tant d'excellentes pensées que vous luy pourriés donner, l faut qu'il se paye de celles des autres, à qui vostre protection fait naistre la commodité d'en produire. Vostre bonté est allée jusqu'à ceux qui n'en ont que la volonté, et c'est sur ce fondement sans doute, que vous vous estiés empressé, si je l'ose dire, pour mes interests. Mais lorsque j'estois sur le point d'en profiter, la volonté d'un grand Prince qui me voulut avoir auprés de luy m'obligea de retourner en Allemagne, je ne laisse pas de vous estre aussi obligé que si j'avois jouy du plein effect de vos bontés. Et comme j'ay eu par là l'honneur de reconnoistre vos sentimens genereux, j'ose vous supplier de les tourner vers un objet, où ils seroient encor mieux employés. C'est un gentilhomme Allemand, qui se trouve à present à Paris, qui est mon amy particulier, mais qui a de si beaux sentimens et de si belles connoissances, que je ne croy pas qu'on vous puisse recommander une personne qui le merite d'avantage. Je suis asseuré qu'il y a tres peu de personnes qu'on puisse mettre en parallele avec luy pour l'Analyse et Geometrie. Mais il a tant de penetration pour toute sorte de belles choses, que je souhaite pour l'amour des sciences qu'on luy donne occasion de continuer cette application ardente, de laquelle il sera detourné sans cela, pour vaquer à d'autres soins, puisque ce n'est pas faute d'employs et de commodités qu'il a pris ce dessein. Quand vous l'aurés connu, je suis seur que vous le favoriserés non pas pour l'amour de moy, mais pour l'amour de luy même. Cependant je vous en auray la même obligation, que si vous l'aviés fait à moy, et je suis etc.

XI.

Tschirnhaus an Leibniz.

Paris 27 May 1682.

Ich wünschete dass mir der Hr. in einem exempel gewiesen hett, wie er Tangentes determinirt $x^y + y^x = a$; worumb diesen methodum nicht gefolget die curvas so zu exprimiren, dieweil omnes curvas alia ratione gar leicht exprimiren kan, habe zu andrer Zeit gedacht, und ist in beygelegtem zu ersehen, durch welcher expression hülffe aller curvarum non-analyticarum seu transcendentium eadem facilitate Tangentes determino quam analyticarum. Dass man man nicht allezeit reciproce gehen kan in dergleichen problematibus, scheinet die ursache zu sein, quod infinitae curvae huic rei satisfaciant quae inquiritur adeoque res indeterminata existit; wie man aber dergleichen quaestiones, da curvae infinitae diversae naturae satisfaciant, solviren kan, weiss noch zur zeit kein mittel; so ob es gleich leicht data curva, invenire aliam ubi ordinatim applicatae aequales arcubus convenientibus hujus curvae, reciproce tamen res difficilis. Data enim Parabola, si curva hinc invenienda, cujus respective arcus aequales ordinatim applicatis hujus parabolae, forte infinitae hinc dantur curvae quae hoc efficiunt, non enim videtur probabile quod sola Cyclois huic rei tantum satisfaciat, et forte dantur quoque curvae Geometricae variae quae idem praestant; sed non video ullam viam, qua ratione haec curvae possint scientifice determinari. Hoc problema admodum curiose persequebar olim, cum viderem, quod idem in spatiis tentares, cum mihi quoque in lineis res nec facilior visa; sed haec omnia reliqui, cum viderem, datis omnium spatiorum Quadrāturis omnia similia problemata facile determinari; habemus autem ex sola descriptione curvarum methodum omnia spatia quadrandi, adeoque in eo totus fui, ut omnium curvarum tam Geometricarum quam Mechanicarum descriptionem simplicissimam quae in natura existit exhiberem, quod credo me in *Tractatulo* meo praestitisse, prout hac de re fusius meam sententiam expositam ibi aliquando leges .....

Ea quae Societati Regiae communicavi, quia sic desideras, ea summariter referam. Sunt autem haec tria: Prima est Methodus, qua Tangentes exhibeo tum Curvarum Geometricarum quam Mechanicarum, unica et eadem regula eaque tam facili, ut expeditior sit Slusiana, tamque universali, ut unica et eadem opera infinitarum semper Curvarum tangentes determinantur.

2. Est Tractatulus brevis, qui Artis inveniendi generalia praecepta includit, qui forte Tibi non displicebit.

3. Sunt quaedam Dioptricam, Catoptricam et Geometriam spectantia; praecipua jam saltem hic commemorabo et prout ea communicavi l'Abbe de la Rocque:

1. Hactenus saltem puncta considerata, ubi radii solares incidentes in curvam quandam superficiem politam et reflexi coguntur in unicum punctum, ubi comburunt; ego vero ostendo, qua ratione non solum unicum hoc punctum, sed integra aliqua Curva, quae ex hisce reflexorum radiorum intersectionibus oritur, debeat concipi.

Sic in figura 109 omnes MW, NW, OW, PW denotant incidentes radios solis; NB, OC, PD, QE, RF etc. radios reflexos. Indefinitae intersectiones fiunt in punctis A, B, C, D, E, F, G etc. Polygonum hinc formatur constans ex lineolis AB, BC, CD, DE, EF etc. Si jam distantiae MN, NO, OP, PQ etc. indefinitae parvae concipiantur, Polygonum ABCDEF etc. repraesentabit Curvam, cujusque radii reflexi NA; OB; PC, QD etc. erunt Tangentes, A punctum comburens seu focus.

2. Ostendi Methodum Generalem, qua ratione ejusmodi Curvae ex reflexorum radiorum intersectionibus sic ortae possint Geometricae determinari, et in specie determino Curvam, quae in Speculo caustico sphaerico a radiis solaribus formatur, hac ratione: Dato quadrante ACDE (fig. 110) describatur semicirculus AGE; jam ducta quaecunque FD parallela CA secetur pars intercepta inter quadrantem CDE et semiperipheriam AGE, nimirum DG, bifariam in H et erit H punctum aliquod ex infinitis, ex quibus constat reflexorum Curva BHE. Ex hac descriptione patet, focum B esse in medio radii AC.

3. Novam hinc Methodum exhibeo infinitas Curvas mensurandi seu reducendi ad rectas his aequales, per generale hoc Theorema, quod non ingratum Tibi erit:

Si Radii solis DF (fig. 111) incidant in quamcunque Curvam (sive sit Geometrica, prout Cartesius vocat, sive Mechanica ut Quadratrix, Cyclois etc. sive etiam libera manu formata) AFE et sic reflectantur, ut harum intersectiones Curvam efficiant BGE, Radius incidens DF et reflexus GF semper aequales erunt Curvae portioni GE, quae intercipitur inter punctum Tangentis G et punctum E contactus Curvarum, et per consequens CA et AB, ubi incidens et reflexus coincidunt, aequales esse integrae Curvae BGE, sic ex. gr. in Circulo curva illa BGE aequalis erit Radio CA et dimidio Radii AB.

Tractatulus haec tria continet: 1. Qua occasione et Methodo in viam inciderim, quam praestantissimam judico, ad quam in hac vita aspirare licet, quaeque est inventio veritatis per nos ipsos; 2. Artis inveniendi generalia praecepta, quibus adjuti non solum impossibile erit, ut unquam in falsa incidamus, sed potius certo semper Veritatem simus cognituri, quod infallibiliter semper his mediis ulterius progrediemur nova ac nova continue detegendo, modo nos ad talia applicare animus nobis sit, idque exiguo labore. 3. In quo praecipue subjecto perscrutando vitam suaviter et cum oblectamento consumere liceat.

Methodus Tangentes Curvarum determinandi.

Sit (fig. 112) Curva Geometrica BDE, cujus natura ut fieri solet calculo expressa sit (BC supponatur $= x$, CD $= y$, AB $= z$).

1. Termini aequationis, exhibentes proprietatem Curvae, tali ratione disponantur, ut potestas maxima y quae dari potest, sola sit ab altera parte aequationis (exempli gratia $yy = 2ax - xx$) vel si ea desit, ponantur omnes termini aequationis aequales nihilo (sic $xy = aa$ redigitur ad $xy - aa = 0$).

2. Fiat Fractio, cujus denominator hoc pacto constituatur: Omnibus terminis ubi cognitae (adhaerentes indeterminatis x et y) unius sunt dimensionis, praefigatur unitas; ubi duarum dimensionum, binarius; ubi trium dimensionum, ternarius, atque ita porro.

3. Numerator vero ita construatur. Omnibus terminis, ubi x unius est dimensionis, praefigatur unitas; ubi duarum, binarius; ubi trium, ternarius, ablata vero ab omnibus hisce terminis x unica dimensione, eritque Fractio ejusmodi $= Z$.

Quantum jam ad Mechanicas Curvas attinet, notandum me nullum discrimen videre inter eas lineas, quas Cartesius Geometricas appellat, et Mechanicas, nisi quod in Geometricis Curvis x et y exprimantur per notas lineas et in Mechanicis x et y Curvarum partes seu Arcus designent (adeoque non capio justam esse rationem, quare ideo a Geometria excludendae). Sic autem ego concipio eandem curvam ex. gr. $yy = 2ax - xx$, a Cartesio Geometricam dictam, semper mihi infinitas Curvas exhibere, (sit ex. gr. [fig. 113] Curva quaevis ABC ejusque portio $AB = x$ et $BC = y$, eadem nunc natura $yy = 2ax - xx$ mihi infinitas curvas repraesentat AEG prout loco ABC alia ac alia Curva substituitur). Harum vero infinitarum Curvarum Tangentes una et eadem opera determino. Quaeratur enim juxta regulam modo datam, natura Curvae data $yy = 2ax - xx$, $Z = \frac{2ax}{2a - 2x}$ seu $Z = \frac{ax}{a - x}$; huic addatur semper x et habitur $\frac{2ax - xx}{a - x}$; sique jam Tangens FB assumatur aequalis $\frac{2ax - xx}{a - x}$, dico quod ducta linea FE tangat Curvam AEG in E, qualiscunque Curva ABC etiam sit.

Atque sic tanta universalitate et expedita admodum ratione infinitarum Curvarum Tangentes una et eadem opera semper exhibentur.

XII.

Leibniz an Tschirnhaus.

Desselben sehr werthes vom $\frac{13}{23}$ Maji habe nach meiner rückkunfft vom Harz alhier gefunden, also dass ein paar posten verstrichen, ehe ich solches erhalten und beantworten können. Ich verhoffe, es werde sich alles unterdessen wohl angelassen haben, zumahlen weil der Hr. Abbé Galloys sich der sache angenommen, welcher bey dem Hr. Colbert viel gilt und von leuten urtheilen kan. Kan der Process des phosphori dazu etwas helffen, so wird mir es gewündscht seyn, wie ich ihn denn hiermit schicke. Den Phosphorum aber selbst zu schicken ist mir unmöglich, weil ich schohn vorlängst nichts mehr davon habe, nachdem ich an unterschiedtliche davon geschickt, und ein schöhn stück, so ich dem Herzog zeigen wollen, ohngefehr in der Hand durch die bewegung in des Herzogs gegenwart angezündet, wie M. Hr. aus meinem vorigen schreiben an M. de Mariotte wird ersehen haben, denn ich begehrt er solte es M. Hrn. communiciren, weil unterschiedtliches (sein problema und anderes betreffend) darinn enthalten, damit ich es nicht zweymahl zu schreiben vonnöthen hätte. Was ich vor einem halben jahr vom phosphoro noch übrig hatte, habe ich meinem Diener geben, welcher in Dennemarck geruffen worden den phosphorum alda zu zeigen und zu machen, denn Prinz George der die materi alhier gesehen seinem Bruder, dem Könige, davon referiret gehabt. Wie ihn denn der König aniezo, nachdem er solchen phosphorum in ziemlicher copia gemacht, in Dienste genommen, und habe ich ihm geschrieben mir ein stücklein zu schicken*).

Unter denen Academicis wird M. Hr. den Hrn. Abbé Mariotte den ehrlichsten und aufrichtigsten zu seyn finden. So hat er auch ein sonderlich talent die natur zu untersuchen, artliche experimenta auszufinden und deren ursachen zu errathen. Aber mit Metaphysicis und Analyticis bemüht er sich nicht.

M. Hrn. tractat werde zweifelsohne mit sonderbarer Lust und Nuzen lesen, und ersehe gern bereits aus dem so M. Hr. davon ge-

---

*) Hiernach ist die betreffende Stelle in Guhrauer's Leben Leibnizens Th. I. S. 198 zu berichtigen.

denket, dass er nunmehr von einigen aus Cartesio und Spinosa gezogenen praejudiciis befreyet, dagegen ich unterschiedtlich mahl gepredigget, inmassen ich allezeit davor gehalten, neque cogitationem neque extensionem esse notiones primitivas aut perfecte intellectas. Was sonst M. Hr. in seinem tractat de educatione, de inquisitione veritatis, und de Medicina ut ita dicam provisional hat, solches wird zweifelsohne trefflich und nüzlich seyn. Das Zinn dessen composition mich erinnert M. Hrn. communicirt zu haben, ist zwar hart und klinget wie silber, aber es ist nicht so schöhn weiss. Die invention, die Beine weich zu machen, ist meines wissens nicht von M. Boyle, sondern von M. Papin, so von M. Hugens sich zu M. Boyle begeben. Die Manier die steine mit einem zusaz zu schmelzen, dass sie kalt wieder harte werden, ist etwas sonderliches und wissenswürdiges. Von Herrn Rohaut opere posthumo so ...... Geometricum erinnere mich ehemalen gehöhret zu haben, glaube nicht, dass es was sonderliches. Hr. Bullialdus hat mir vor diesem selbst gedacht von seiner Arithmetica infinitorum, befinde aber dass er meist proportiones jam notas et quas Wallisius in seinem opere gleiches titels per inductionem gegeben, demonstriret. Wenn M. Römer autor von der Machina Astronomica, so wundert mich dass das Journal des Sçavans nicht sein, sondern Turets gedenket.

Die Progressio Bimalis würde sonderlich ad expressiones quantitatum in numeris nüzlich seyn, denn es prima und simplicissima, und zweifle nicht dass sich darinne viel harmoniae finden würden, so in andern progressionen nicht also zu spühren. Der bekandte Methodus, Tangentes zu determiniren, lässet sich zwar auch gewissermasse ad Transcendentes Curvas appliciren, wie M. Hr. gethan, wenn die curva per arcum alterius curvae nach der von ihm gesetzten art determinirt; alleine die curvae transcendentes werden offt gar anders exprimirt, als gesezt dass sowohl x als y lineae curvae werden, würde schohn die von M. Hrn. gegebene manier in etwas geändert werden müssen. Mein methodus deucht mich sey generalior und compendiosior, wenn auch gleich die transcendens gar nicht per arcus curvarum, sondern auf viel andere weisen determiniret. Und were guth wenn man allemahl ein mittel finden köndte curvam Transcendentem alia ratione determinatam determinare per linearum rectarum vel curvarum inter se relationem. Die curvae Transcendentes per aequationem transcendentem determinatae, als wie diese $x^y + y^x$ aequ. a, lassen sich nicht leicht ad determinationes per arcus curvarum reduciren, doch ist es möglich, wiewohl es nicht ganz ausgemacht. Mein Methodus Tangentium generalissima ist auch diesen aequationibus gemein; der methodus dessen man pro aequationibus Algebraicis seu communibus bedienet, ist nur ein corollarium hujus methodi generalissimae, welche ist eines von den Dingen, die mir am meisten mühe gekostet, und habe fast desperiret dazu zu gelangen, habe auch fast keinen weg gesehen. Dass foci oder umbilici auch in transcendentibus statt haben, daran habe nie gezweifelt, man müsse aber anstatt filorum rectorum, wie in Ellipsi et Hyperbolae ex focis describenda, sich fila curva secundum certas leges, deren summa oder differenz zusammen eine datam quantitatem etc. mache, einbilden. Im übrigen damit M. Hr. sehe, dass ich aus meinem Methodo sowohl den von selbigem gesezten casum, als auch noch andere determiniren könne, so schwehrer scheinen, so will ich setzen; AB (fig. 114) sey x, und BC sey y, und aequatio yy aequ. $2ax - xx$; es sey aber auch BE eine curva, als zum exempel arcus circuli centro fixo H, radio HB descriptus; gesezt nun AB sey zum exempel curva Ellipseos datae, so wird mir doch allezeit unschwehr seyn mea Methodo curvae AE tangentem zu finden, wiewohl die constructio, die M. Hr. tanquam generalem gegeben, sich hieher meines ermessens nicht würde appliciren lassen. Unterdessen bleibt gleichwohl die von M. Hrn. gegebene construction (eo casu quo BE est recta et semper parallela) sehr ingenios und nüzlich. M. Hrn. theorema de curva quam radii solares a speculo concavo reflexi tangunt, ist auch sehr schöhn; weil aber M. Hr. mir solches data opera obscure proponiret und die demonstration zweifelsohne wegen kürze der zeit nicht geschicket, auch andere zu Paris sie nicht finden können, als habe versucht, ob ich sie köndte treffen, so auch erfolget, davon M. Hrn. will urtheilen lassen.

Si radii paralleli incidant in speculum concavum PCQ (fig. 115) atque inde reflexi curvam ΩAQ tangant, dico integrum radium ex directo LC (qui sumitur ex basi MLQ radiis normali) et ex reflexo CA compositum fore aequalem arcui curvae QA.

Demonstratio. Positis intervallis punctorum $_1C, _2C, _3C$ infinite parvis agantur ex $_2C$ ad $_1C_1L$ vel ex $_3C$ ad $_2C_2L$ etc. normales $_2C_1G$, $_3C_2G$ etc., et similiter ex punctis $_1C, _2C$ etc. ad rectas

${}_1A_1C$, ${}_2A_2C$ etc. normales ${}_1C_1H$, ${}_2C_2H$ etc. Jam ${}_1C_2C$ producatur ultra ${}_2C$ in M; cum, ob intervallum ${}_1C_2C$ infinite parvum, ${}_1C_2C$ latus polygoni indefinitanguli considerari possit ut portio tangentis, ideo anguli incidentiae ${}_1C_2LM$ et reflexionis ${}_1C_2C_1A$ erunt aequales; est autem angulus ${}_2L_1C_2C$ aequalis angulo ${}_2L_2CM$, ergo et angulus ${}_1L_1C_2C$ aequalis angulo ${}_1C_2C_1A$, seu Triangulum T_1C_2C erit isosceles (posito T puncto intersectionis rectarum ${}_1A_2C$ et ${}_1C_1L$), itaque recta ${}_1C_1H$ aequalis rectae ${}_2C_1G$, et proinde et recta ${}_1C_1G$ aequalis rectae ${}_2C_1H$. Jam ex methodo infinite parvorum, quia ${}_1A_1C$ differentiam habent infinite parvam, hinc recta ${}_1C_1H$ nihilo differre censenda est a chorda arcus centro ${}_1A$ radio A_1C descripti, qui rectam ${}_1A_2C$ secare censendus est in ${}_1H$ (demonstrari enim posset, si esset opus, differentiam inter ${}_1C_1H$ sinum et dictam chordam arcus, cujus est hic sinus, esse infinities infinite parvam seu ipsarum infinite parvarum ut ${}_1C_1H$ comparatione infinite parvam sive nullam). Erit ergo ${}_1H_2C$ differentia rectarum ${}_1A_1C$ et ${}_1A_2C$ sive ${}_1A_2C - {}_1A_1C$ erit aequ. ${}_1H_2C$, id est (per praecedentia) ${}_1C_1G$. Jam in recta ${}_1C_1L$ versus ${}_1L$ sumatur ${}_1C_1V$, et in recta ${}_2C_2L$ sumatur ${}_2C_2V$, et ita porro, ita ut $AC+CV$ sit aequalis curvae QA, nempe ${}_1A_1C+{}_1C_1V$ aequ. curvae Q_1A, et ${}_2A_2C+{}_2C_2V$ aequ. curvae Q_2A, ostendam punctum V semper incidere in L. Nempe erit ${}_1A_1C + {}_1C_1V - {}_2A_2C - {}_2C_2V$ aequ. curvae Q_1A — curv. Q_2A, id est aequ. ${}_1A_2A$. Ergo ${}_1A_1C - {}_2A_2C + {}_1C_1V - {}_2C_2V$ aequ. ${}_1A_2A$. Est autem ${}_2A_2C$ aequ. ${}_1A_1H$ (seu ${}_1A_1C$) $+ {}_1H_2C$ (seu ${}_1C_1G$) $- {}_1A_2A$, quem valorem ipsius ${}_2A_2C$ substituendo in valore ipsius ${}_1A_2A$ aequatione proxime praecedente expresso, fiet ${}_1A_2A$ aequ. ${}_1A_1C - {}_1A_1C - {}_1C_1G + {}_1A_2A + {}_1C_1V - {}_2C_2V$, et destructis destruendis fiet ${}_1C_1G$ aequ. ${}_1C_1V - {}_2C_2V$. Similiter erit ${}_2C_2G$ aequ. ${}_2C_2V - {}_3C_3V$, et ita porro. Atque ita rectae CG sunt differentiae perpetuae ipsarum CV; sed eaedem sunt etiam differentiae perpetuae ipsarum CL, nam ${}_1C_1G$ est ${}_1C_1L - {}_2C_2L$, et ${}_2C_2G$ est ${}_2C_2L - {}_3C_3L$, et ita porro. Quod fieri non posset (quaemadmodum demonstratu facile est) nisi CV et CL respondentes perpetuo coincidant. Ergo $AC + CL$ (loco $AC + CV$) aequ. curvae AQ, quod erat demonstrandum. Haec demonstratio Tibi quidem facilis erit, sed non cuivis in his Methodis non versato.

Aus meinem vorigen wird M. Hr. ersehen haben, dass ich viel in dioptricis meditiret und das problema solviren könne: data curva invenire aliam, quae radios parallelos per priorem transeuntes refringat in unum punctum; und dass ich finde, dass M. Hrn. curvae ebenmässig dienen das problema zu solviren: dato speculo concavo invenire aliud speculum concavum, quod radios solares a priore reflexos iterum reflectat ad unum punctum. Herr Hugenius kan diese problemata auch solviren, wie er mir geschrieben, aber wie ich auch glaube auf einen ganz andern Weg. Die curvas ad quas omnes radii sunt perpendiculares, vel quas omnes radii tangant, nennete ich communi nomine Aclasticas; weil ich aber nicht ad particularia komme und sonderlich nur dioptrica als difficiliora damahls untersucht gehabt und mich contentirt generalem methodum zu haben, so bin ich auff dergleichen schöhne theoremata, wie M. Hr. nicht kommen, welches gemeiniglich meine ungedult verursacht, denn indem ich Methodum generalem meine gefunden zu haben, lasse ich es liegen. Diess aber habe ich nicht gewust, dass man so leicht rectas his curvis, so M. Hr. beschrieben, aequales geben könne; muss einmahl untersuchen, ob es in dioptricis auch angehe. Indem ich dieses schreibe, nehme ich die Feder in die Hand solches zu versuchen, und finde dass es auch angehe und kommt ein herrlich theorema generale heraus. Fiat CV ad CL, ut sinus anguli reflexionis vel refractionis ad sinum anguli incidentiae (quae ratio in eodem medio refringente vel licet cum detorsione quadam reflectente semper eadem est) eritque AC + CV aequalis curvae QA. Ubi patet in casu refractionis curvam AA esse trans curvam CC, in casu autem reflexionis ordinariae, cum angulus incidentiae et reflexionis aequales sunt, coincidunt CV et CL, quod est theorema tuum, sed sine quo generale istud mihi non facile in mentem venisset.*)

Quod attinet problemata Methodi Tangentium inversae, ea quamdiu solvere non poterimus, imperfecta censenda est Geometria. Danda autem opera est, ut tum aequationes, tum descriptiones hujusmodi linearum reperiri possint. Nec Tibi assentior, quod hujusmodi problemata sint indeterminata. Nam in illo ipso exemplo Cycloidis quod attulisti, certo calculo invenire possum, curvam AE (fig. 116) cujus arcus aequalis duplae chordae AB, vel ordinatis FG parabolae AG, necessario esse cycloidem. Hoc ipso enim momento calculum tribus fere lineolis peregi et curvae quaesitae

*) Nil refert an CL sint parallelae, an vero ad unum punctum concurrentes, si scilicet $_1L$, $_2L$, $_3L$ etc. coincidant. Bemerkung von Leibniz.

determinationem (si Cycloidem esse ignoravissem) inveni; quoniam tamen methodos istas nondum plane excolui, ideo non semper ita promte rem conficere possum. Non enim semper problemata hujusmodi reducuntur facile ad Quadraturas: neque etiam semper facile est, lineas quae determinantur per quadraturas determinare per descriptiones seu per linearum curvarum in rectas extensiones, denique nec facile est transitus a determinationibus Geometricis per linearum spatiorumve magnitudines ad analyticas per aequationes transcendentes, vel contra. Et haec tamen supersunt ad perfectionem Transcendentis Geometriae.

Curvas, quas radii reflexi vel refracti tangunt, calculo Geometrice determinare non difficile est ea methodo, de qua nuper in literis nescio an ad Te an ad Mariottum scripseram, ponendo puncta $_1L$, $_2L$, $_3L$ designabilem distantiam semper si lubet aequalem habere, et quaerendo per calculum puncta, quibus radii reflexi $_1C_1A$ et $_2C_2A$, item $_2C_2A$ et $_3C_3A$ etc. se secant, denique ponendo quantitatem $_1L_2L$ vel $_2L_3L$ etc. infinite parvam seu nihilo aequalem, evanescet pars calculi, et habebitur quaesitum. Sed non dubito quin egregia compendia pulchrasque constructiones complures deprehenderis, si quidem ei rei incumbere voluisti.

Pulcherrima sunt quae de speculis concavis cupreis communicasti, quae aliquando penitus intelligere gratissimum erit.

Phosphori Process komt hierbey. Solchen werde, so lange M. Hr. mir nicht den ausgang seiner sach meldet, nicht communiciren, zumahlen sie mir noch nicht geschrieben, was sie mir vor curiosa experimenta dafür communiciren wollen. M. Hr. wird solche doch auch leicht erfahren, und werde ich sie also durch ihn bekommen, hat also M. Hr. vom phosphoro nach seinem belieben zu disponiren. Nur dieses muss bekennen, dass das phosphorum zu machen, eine ziemlich beschwehrliche arbeit, und muss man sonderlich bey der letzten arbeit zusehen, dass die retorte nicht springe. Des Mons. Boyle ist etwas kürzer, aber wie ich aus seiner Beschreibung sehe, so fehlet er ihr bisweilen, gibt auch keinen so starken phosphorum, und überdiess so ist er nicht instructif, denn er weiset nicht analysin subjecti et ex qua ejus parte potissimum veniat phosphorus. Zweifelsohne ist M. Boyle darauff gefallen, weil ihm der phosphorus imperfecte communiciret worden. Schicke hiermit beyde processus, sowohl wie ich es gemacht, als wie M. Boyle.

Compositio des Feuers oder pyropi. Habe genommen urin so eine zeitlang gestanden, etwa eine tonne (wiewohl ich zweifle, obsolche fermentation oder putrefaction nöthig sey, weil mein Diener in Coppenhagen den phosphorum noch selbige woche, als er hinkommen, gemacht), kochet es ab bis es beginnet dick zu werden, wie ein dicker sirup, alsdann thut man diesen dicken urin in eine retorte, lässet das phlegma und volatile vollends wegrauchen, und wenn rothe tropfen zu kommen beginnen, leget man einen recipienten vor, und empfängt darinn das oleum urinae. Alsdann schlegt man die retorte in stücken, darinn findet man ein caput mortuum, dessen unter theil ist ein hartes salz, so hieher nicht dienet, das obere theil ist eine schwarze lückere materi, die hebt man auff. Das oleum urinae thut man wieder in eine retorte und ziehet alle feuchtigkeit stark davon ab, so findet man in der retorte eine schwarze lückere materi der ieztgedachten, so in voriger retorte gewesen ganz gleich. Thut sie zusammen und treibt das feuer daraus folgendermassen. Nim eine guthe steinerne retorte, so kein stübgen nicht hält, darin thue etwa 24 Loth von der schwarzen materi oder capite mortuo oleoso, lege einen zimlichen gläsern recipienten vor, so wohl verlatirt, und treibs also in freyen feuer, doch erstlich gelinde bis die retorte wohl glüet, treibs wohl 16 stunden lang, die lezten 8 stunden aber gar stark. Es kommen bald weisse Nebel oder wolcken und sezet sich wie ein schlammigt oel zu boden. Gehet auch wohl etwas von einer materi mit über, die sich ganz hart an das glas anleget, ist wie ein Börnstein, darinn bestehet die beste krafft. Im ..... distilliren ist der recipient ganz hell, und leuchtet im finstern. Was übergangen, ist alles leuchtend, doch das siccum mehr als das humidum. Hieraus ersiehet man, dass das feuer stecke in dem capite mortuo oleoso.

Folgender Process, so mehr confus, ist von Mons. Boyle gebraucht worden. Nim eine ziemliche menge Menschen urin, desselben ein guth theil zum wenigsten eine beharliche zeit lang putreficiret. Hernach die spirituosische theile und übrige wässrigkeit abgezogen, bis zur consistenz eines dicken sirups oder dünnen extracts. Diess mit 3mahl so schwehren reinen weissen sand einverleibet in eine starke retorte, eine weite Vorlage, so ein guthes theil mit wasser angefüllet, vorgeleget. Sorgfältig zusammen latiret, dann ein ofnes feuer per gradus geben 5 oder 6 stunden lang, damit alles phlegma oder volatilisches vollends übergehen möchte, alsdann das feuer vermehret, und bey 5 oder 6 stunden lang so starck und hefftig gemacht, als der ofen, so nicht schlecht seyn muss, immer geben kan, so komt erstlich ein ganzer hauffen weisses rauches, eine weile hernach eine andere arth, die scheinet in der vorlage als ein schlecht bläulicht liecht, wie von den kleinen schwefelstücken. Und lezt als das feuer sehr hefftig war, kam noch eine andere substanz, weit schwehrer als die ersten, so auff den grund der vorlage fiele. Hierauss siehet man, dass Mons. Boyle das sal sowohl als caput mortuum oleosum beysammen gelassen, daher mich nicht wundert dass sein phosphorus wie er gestehet, schwächer gewesen.

Ich weiss keinen process, der auff die vulgata Chymicorum principia, sal, sulphur und mercurium, besser quadrire, als die compositio dieses feuers oder pyropi, denn dieses feuer komt eigentlich nicht aus dem sale fixo, noch aus dem volatili oder Mercuriali, sondern aus dem medio oder oleo vel sulphure. Und deucht mich, dass dieser process kein geringes liecht gebe. Im übrigen beziehe mich ad priora und verbleibe etc.

XIII.

Tschirnhaus an Leibniz.

Paris 27 July 1682.

Derselbige hette sich die mühe nicht geben dürffen, eine demonstration meines Theorematis zu übersenden, den als M. Hrn. kenne, so habe keinen zweifel dass ein eintziges Theorema könne gegeben werden, dessen demonstration Sie nicht sollten finden, wenn Sie sich nur hierzu applicïren wolten; meine demonstration, als Sie leicht gedenken können, ist nicht different von selbiger, wie anwesend zeigen wihl, und auch so universal, dass sie alle casus in sich schlüsset, die lineae convergiren oder sind parallel. Methodus Tangentium mea circa Mechanicas est utique specialis saltem casus, sed non credo tam universalem posse concipi, ut non possim eadem methodo qua haec derivavi, eandem determinare. Dass foci in transcendentibus curvis (wie sie M. Hr. nennet) ist meines wiessens noch von niemanden nachgewiessen worden; ist auch nicht nöthig loco linearum rectarum seu filorum curvilineas assumere ad hoc determinandum, prout judicas; wie wohl es ist so leicht zu wiessen, wen man darauff reflectiret, dass wen es eröffnen werde, alle weld sagen wird, sie haben es lange gewusst, welches doch gewiess bin, dass es nicht ist; den es haben viele bereits solche focos in Mechanicis determiniret, sie haben aber nicht gewusst, dass dieses foci und eben dasselbige was wir in Geometricis focos nennen, und dass ich mich mitt einem wort erklähre: Cyclois sibi ipsi focus est; curvae omnes, quae juxta meum Theorema per intersectiones reflexorum radiorum fiunt, sunt foci curvarum, a quibus radii paralleli incidentes reflectuntur, et idem repraesentant quam punctum, quod in Parabola focum vocamus. Si hoc Hugenius vidisset, quod Evolutae essent foci curvarum, quae ex evolutione describuntur, tunc nobis multo praestantiora exhibuisset. Hinc vero quam praestantia deduco ex sola hac consideratione, videbis in Tractatulo meo de indaganda Veritate, et facile jam ipse ex iis, quae retuli, concludes; hinc enim non solum facillima descriptio omnium curvarum conceptibilium patet, sed et harum Tangentes nova et facillima methodo determinantur, imo ex eadem hac descriptione curvarum mensura infinite infinitis modis quantum possibile habetur; et hinc facile quoque concipies qua ratione curvas concipio duorum focorum in mechanicis. Sint enim (fig. 117) duo circuli F et G vel si placet quaecunque curvae, quibus filum DBEKD involutum, describatur hinc curva ABC; foci erunt circuli F et G; et tangens statim determinatur, diviso enim angulo DBE bifariam, linea hinc ducta occurrit Tangenti ad angulos rectos. Sed non opus erit Tibi haec prolixius explicare cum ut ego firmissime credo, nullus in rebus hisce Tibi in mundo aequalis habetur. Admiror quam pauci jam sint in tanta occasione perplurima addiscendi, qui cognitionem aliquam extraordinariam possident, et eo majoris similes aestimo.

XIV.

Tschirnhaus an Leibniz.

Dass sonsten bieshero in den Actis eines und das andere inseriren lassen, ist geschehen, dass sie zu Paris sehen, wie das in meinen studiis fortgehe, und das zugleich auch andern innotescire; doch achte dieses letztere auch so gross nicht, wen keinen andern nutzen davon habe, als dass man meinen nahmen nennen lernet. Was den methodum anlanget, die Radices ope ablationis intermediorum terminorum zu determiniren, ist gar leicht zu demonstriren, dass er richtig; wo es gewiesse rationes nicht verhindern, die ich habe, so wihl solches publice auch in 5to gradu darthun; aber dass diesen methodum selbst nicht so gross achte, ist dass hierdurch Radicum expressiones hervor kommen, die aliquid imaginarii scheinen zu haben; sonsten dass ich als ein specimen methodi nur die cubicas radices zu determiniren gewiessen, ist gewessen, dass die richtigkeit dieses methodi durch ein exempel klar würde, das bereits bekand; den sonsten eadem via procedendi in quocunque gradu, in superioribus aber sehr weitläufftig; das zu ..... es würde dem drucker viele mühe gegeben haben, quanquam hisce brevibus sat multa mihi indicasse videor. Es ist mir aber sehr lieb, dass mich vorerst ad radices cubicas zu determiniren gewendet, den hierdurch bin gefallen in genuinam methodum omnes radices exhibendi, quae non per ablationem terminorum peragitur, da ich zweyfele quod melior possit exhiberi, saltem omne quicquid possibile aut impossibile circa hoc determinandi hinc derivatur, und da habe lernen erkennen, was die ursache dass in radicibus cubicis ordinariis imaginariae quantitates nothwendig kommen, dahergegen meine genuinae expressiones radicum cubicarum, die nuhmero determiniret, keine imaginariae quantitates in sich schliessen, und also alle radices cujuscunque gradus.

Neundorff d. 25 August 1683.

XV.
Leibniz an Tschirnhaus.

Nunciatur mihi Lipsia nescio quod scriptum Tuum illuc allatum esse, quo quereris, me in partem cujusdam inventi Geometrici a Te editi venire velle. Ego quidem spero adhuc nihil in eo contineri ab urbanitate tua, sed maxime ab illis quae mihi saepe coram et per literas contestatus es, alienum, neque enim ita de Te meritus sum, praesertim cum mature id egerim ut hoc quicquid est subusculi evitaretur. Nam cum intelligerem ex tuis literis Te Methodum quadraturarum edere velle, dissuasi tum quod esset adhuc imperfecta, tum quod aliquid mihi quoque in ipsam juris esset, tum quod satius esset specimina quam Methodos publicare ad continendos in officio nonnullos qui origine inventorum intellecta jactant hoc se quoque potuisse. Et scis, nisi ista me retinuisset causa (ut alias taceam), et hanc methodum et alias complures, quas prope a decennio habeo, a me potuisse publicari; sed Tu neglecto amici desiderio, quod commune nobis erat publicum fecisti, et me silentium abrumpere coëgisti, ne forte aliquando rem a tot annis meam adhibens ab aliquibus, quasi ea Tibi sublecta, plagii accusarer. Equidem nescio, utrum neges mihi Methodum ante Te notam fuisse an tantum Te a me didicisse; sane adjecisse Te non contemnenda nec facilia fateor lubens et agnosco me Aequationes illas, quas exhibes, condendas potius censuisse, quam conditas habuisse, itaque hactenus consilium meum, tuam executionem esse, quae peringeniosa est et ut spero (nondum enim examinavi) errorum vacua erit, sed plura largiri non possum, nisi contra conscientiam meam tuamque. Equidem qui videbit, quae jam multo ante ad complures scripsi, facile judicabit me ista non potuisse ignorare, forte et de tua manu erunt quae id firmabunt. Vim sane methodi hujus et limites quoque dudum perspexi, neque enim adhuc eam habet perfectionem, cujus scio esse capacem, et si quemadmodum alias monitis meis in viam Te revocari passus fuisti, ita nunc monentem audivisses, nunquam suscepisses solutionem problematis de quadratura Circuli, quemadmodum in scripto edito tentata frustra impossibilitatis demonstratione fecisti. Vellem nosse quid figurae a me propositae respondeas, quae quadrabilis est et secundum regulas tuas non esset; item an tandem habeas promissam radicem generalem Aequationis cubicae sine imaginariis, de quo magnae rationes me dubitare cogunt; denique an ope Methodi tuae pro radicibus aequationum omnium exhibueris tandem radices aequationis surdesolidae tam diu speratas, nam inferiores dudum per alias methodos habemus.

Haec scribere volui (quanquam responsum ad eas quas hoc vere dedi, jure meo potuissem exspectare) idque non tantum ut hortatui communium amicorum obsequerer, sed et (utcunque res a Te accipiatur) ut conscius essem ipse mihi nihil a me neglectum esse, quod ad amici officium pertineret. Vale etc.

Hierauf erhielt Leibniz ein Schreiben von Tschirnhaus, datirt 31 August 1684, das nur Entschuldigungen in Betreff der in Rede stehenden Veröffentlichungen enthält. Zugleich wurde ihm von Mencke Tschirnhaus' Entgegnung zugesandt, welche derselbe zur Aufnahme in die Acta Eruditorum entworfen hatte. Sie hat die Aufschrift: Responsio ad objectionem, quae impressa mense Maji praesentis anni circa inventum, quod mense Octobris anni praeteriti publicatum, ubi insinuatur Methodus datae figurae Geometricae aut quadraturam aut impossibilitatem determinandi per D. T. Nur die folgende Stelle, in welcher Tschirnhaus seine Methode zu rechtfertigen sucht, verdient daraus hervorgehoben zu werden: Sit enim curva AFB Geometrica, et sit jam demonstratum mea methodo, quod curva AHD (fig. 118) quae talis ut rectangulum AGHJ sit semper aequale spatio AFG, non possit esse Geometrica, sed Mechanica, non statim sequitur, quod omnia spatia AFG hujus curvae AFB non possint absolute quadrari; dantur enim (quod maxime notandum) infinitae curvae Mechanicae AHD, ubi aliquae ex ordinatim applicatis GH geometrice possunt mensurari, et per consequens non obstante quod AHD sit curva Mechanica, probabile videtur, quod quandoque spatium aliquod AFG poterit absolute quadrari. Si quis exemplum desideret: sit AFB cyclois, curva quadratrix AHD erit Mechanica et hujus ope interim spatium aliquod cycloidis, prout a Nobilissimo Hugenio primo observatum, absolute quadratur. Requiritur itaque, ut quis qui praetendit se methodum exhibuisse datae curvae Geometricae aut quadraturam aut impossibilitatem determinandi, adhuc insuper demonstret, quod existente AFB curva Geometrica, loco AHD nulla talis curva Mechanica unquam possit exoriri, hoc est ubi aliquae ex ordinatim applicatis GH sit Geometrice mensurabilis, adeoque hoc quidem fieri posse, si curva AFB sit quoque Mechanica, nunquam autem si geometrica existat; hanc autem demonstrationem, quam a nullo alio quoque didici, Lector suo loco videbit. Hoc ipsum vero ab Authore harum objectionum mihi absolute jam negatur; sed videamus num contrarium hujus rei probet. Dicit primo: Fieri enim potest, ut aliqua certa portio quadrantis Circuli vel etiam totus quadrans quadrari possit, etiamsi non detur quadratura generalis cujusvis portionis etc. Quae objectio utique ingenio suo digna et idem prorsus est, quod modo insinuavi, quod nimirum probabile videatur, si curva AFB sit quadrans circuli, quia in publicatione hujus methodi demonstravi, curvam AHD, ope cujus portio quadrantis AFB semper quadratur, esse Mechanicam, et inter Mechanicas curvas infinitae dantur, ubi aliquando aliqua ordinatim applicatarum est Geometrice designabilis (veluti modo declaravi) quod, inquam, probabile sit, forte hinc aliquam portionem quadrantis AFG aut etiam integrum quadrantem ABC fore quadrabilem, utut AHD sit Mechanica. Verum hoc, quod ab initio objicit his verbis „Fieri enim potest" per me non aliter interpretari potest, quam quod probabile videatur; nullibi enim hoc demonstrat, adeoque nihil adhuc primo hoc in loco meae sententiae contrarium affertur, et suo loco ostendam, veluti modo promisi, generaliter si curva AFB sit Geometrica, nunquam accidere posse.

Secundo ulterius progreditur: ponatur etenim $AG = x$ et $FG = z$ et $AC = h$, dicit posito curvae AFB naturam talem esse ut sit $4zz - 8hz + \frac{4hhxx - 4hx^3 + x^4}{hh - 2hx + xx} = 0$, curvae hujus quadratrix Geometrica AHD haberi non potest, quia cum Theoremate, quod alias exhibui:

$$\begin{matrix} bzz + caz & + eaa \\ + 2dxz & + 2fax \\ & + 4gxx \end{matrix} + \frac{ddeaaxx + ccgaaxx + bffaaxx - cdfaaxx - 4begaaxx}{\begin{matrix} 4beaa + 4bfax & + 4bgxx \\ - ccaa - 2cdax & - ddxx \end{matrix}} = 0$$

non potest conferri; sed bone Deus! quam miram hic collationem instituit; dicit enim: Manifestum est, collationem non procedere, deberet enim $4hh - 4hx + xx$ coincidere cum aa in $dde + ccg + bff - cdf - 4beg$, indeterminatum cum determinato etc. Quis unquam hominum ipsi docuit hac ratione comparationem instituere; certe qui hac ratione procedent, mihi multa absurda admodum injuste affingent, nec credo quod ullus, qui comparationem aequationum ex Cartesio probe didicit, non statim primo intuitu absurdam hanc applicationem hujus methodi perspiciat, et sane dum haec vel primum spectavi, cogitavi mecum: Quandoque bonus dormitat Homerus.

Tertio objicit: et tamen aliunde ..... trilineum propositum esse quadrabile, quod denuo non probat; ubi ipsum rogo ut hoc prius mihi demonstret, dum ego comparationem instituam inter hanc suae curvae exhibitam naturam et meum Theorema, prout nimirum decet, et tunc videbimus num curva AHD erit Mechanica aut Geometrica; jam etenim quia res haec aliquo modo prolixa, laborem molestum aggredi non vacat, ubi exitus forte nullius usus et utiliora negotia prae manibus habeam exequenda......

Caeterum reliqua quae Author in objectione hac recenset, me meaque non spectant, cum ego transcendentali calculo (prout ille loquitur) nullatenus utar, nec de illo plus minusve non sciam, quam quod ille in exponente indeterminatarum quantitatum, quae relationem curvae ad rectam aliquam exhibent, literas, non vero numeros veluti Cartesius et post ipsum reliqui Analystae, adhibeat; quanquam hoc non obstante et quod plurium me non participem fecerit, omnia illa calculo meo Algebraico possum praestare quae ibi refert; nam quod curvas quae Cartesius Mechanicas vocat, aeque analytice possum tractare ac Cartesius Geometricas, satis in illo specimine Anni 1682 ostendi, ubi docui quod eo ipso, dum Cartesius Tangentem alicujus curvae Geometricae designat, ego semper regula perquam generali et expedita non solum illius curvae Geometricae, sed una et eadem opera infinitarum curvarum ex Mechanicis Tangentes determino. Porro eodem calculo Algebraico, si curva quadratrix curvae alicujus Geometricae sit Mechanica, perfacile possum ipsius naturam aequatione algebraica comprehendere, non solum circuli et hyperbolae, sed omnium curvarum Geometricarum Mechanicas quadratrices, easque simplicissimas omnium (cum infinitae tales existant) quae in rerum natura existunt, quod etiam annotatione sexta in publicatione hujus methodi satis indigitavi, ubi insuper singularem harum Mechanicarum quadratricium proprietatem a nemine quod sciam productam insinuavi, quod nimirum certa spatia harum aequalia semper sint spatiis curva Geometrica terminatis. Addam jam quod etiam curva haec quadratrix Mechanica, ope dati spatii curva Geometrica terminati, potest mensurari; quae quidem hic non ideo refero, quod credam cogitationes hujus ingeniosissimi Viri, quas circa calculum transcendentalem formavit, parvi esse faciendas, potius nova prorsus et singularia mihi hinc promitto, cum observem talia a Tanto Viro magni fieri. Verum haec hoc loco recensere eam ob causam coactus quodammodo fui, quia circa finem suae objectionis perhibet, quod harum suarum cogitationum me participem fecerit, quo proinde aliis quoque innotescat, quaenam hac de re sciam, quodque has speculationes nunquam ullo modo prosequuntur quia meae inclinationi illo tempore nec etiamnum incongruentes esse observavi; ego vero nulla studia soleam tractare, nisi ad quae propria inclinatione me incitari sentio. Gaudio interim non levi perfundor, dum re ipsa sic cognosco, quod pleraque quae tam illustris Vir se praestare posse perhibet, ego quoque methodo mea licet diversa et forte non tam ingeniosa assequi valeam.

XVI.

Leibniz an Tschirnhaus.*)

Novissimas meas acceperis, opinor, hortatu Lipsiensium amicorum ad Te scriptas, ut colendae ac conservandae necessitudinis nostrae me paratum ostenderem. Interea redditae mihi sunt tuae quoque, ex quibus libentissime intellexi eandem Tibi sententiam esse. Cum vero adjeceris scriptum illud Apologeticum, quod prius Lipsiam miseras, fateor id non sine quadam admiratione mihi lectum esse nec aliam rationem reperire excusandi candoris tui, quam ut memoriam accusem. Profecto enim methodum meam per differentias serierum inveniendi summas aut quadraturas monstravi Tibi saepissime, quin et indicavi, quomodo generalibus formulis quaerendo curvarum generaliter expressarum figuras differentiales, semper determinare possem an data figura inter differentiales illas possibiles contineretur adeoque quadrabilis esset. Memini tamen ea Tibi satis tunc quidem arrisisse eo obtentu, quod calculus esset prolixior, et quod alias vias sperares longe meliores; itaque cum nunc ad ea recte postliminio rediisti, fieri potest, ut oblitus sis tot post annis, quanam occasione in has cogitationes deveneris. Credo me adhuc schedas habere, ex quibus ostendi posset Tibi talia communicata. Legisti etiam Epistolam meam ad Oldenburgium Parisiis scriptam occasione Neutonianarum literarum, in quia ea continebantur, unde ista satis clare constarent. Et cum novissime hac transires ac vel verbo hanc methodum tangere coepisses, statim dixi, esse hanc ipsissimam meam, nec vel olim vel tunc in solis generalibus verbis substiti dicendo rem me habere in potestate, sed ea protuli, ex quibus procedendi modus non difficulter appareret; saltem scio Te dubitare non posse quin mihi dudum innotuerit, quod secundum Methodos Calculi mei differentialis quem nosti fugere me non poterat. Equidem facillima res est,

*) Leibniz hat bemerkt: ist nicht abgangen.

data curva Algebraica invenire aliquam aliam figuram Algebraicam, ejus ope quadrabilem, sed viam qua quis retrorsum ire et datae figurae quadrabilitatem inventa quadratrice ejus determinare possit, non inde quivis statim agnoscat; qui vero mecum tantum considerat, quadratricem datae inveniri inveniendo lineam, cujus differentialis sit ipsa data, et datae differentialem ex calculo tangentium semper haberi posse (seu quadraturas et tangentes figurarum invenire, esse invenire summas et differentias serierum, seriesque summandas esse summatricium differentiales), is statim videt, inter differentiales figuras generalibus formulis expressas etiam datam, si quadrabilis est, contineri debere. Ex hac methodo differentialis calculi scis me alia magni momenti ducere, inprimis evitationem sublationis irrationalium in calculo tangentium aliaque innumera circa Geometriam sublimiorem, nec quisquam opinor ista ante me tam efficaci generalique ratione concepit. Ipse quoque Parisiis, cum ultima vice ibi esses, me scribens tunc cum jam haberes methodum quadrandi nostram, fateris, Te non habere in potestate Methodum Tangentium inversam seu inventionem curvae data Tangentium proprietate, quae tamen et ipsa ex hac eadem Methodo Calculi differentialis, per generales formulas tractati, eodem modo sequitur, quo methodus quadraturarum, imo methodus quadraturarum nil nisi ejus exemplum est: nimirum sume formulas curvarum generales, earumque quaere differentiales aequationes seu tangentes, easque aequationes conjungendo cum data aequatione differentiali, habebis aequationem assumtae coincidentem. Ex quo Methodum Tangentium inversam Tute nunc statim potes perspicere, et potuisses dudum, sed non omnia per nos animadvertimus et subinde opus est ut ab aliis admoneamur. Quia deinde in scripto tuo calculum meum transcendentem paulo arctius accipere videris, scito ejus nomine designari a me omnem calculum, quo tractantur transcendentes curvae vel quantitates, hoc est, ubi incognita vel indeterminata non potest exprimi per aequationem certi gradus. Et cum ego ni fallor primus admonuerim, quas Cartesius Mechanicas vocat, non minus Geometricas esse, putavi appellandas Transcendentes, quia primus animadverti adhibendum pro illis esse calculum, in quo incognita non sit certi gradus; inveni et prodire novas quasdem affectiones, scilicet praeter potentias et radices, nempe y, yy, y^3, $\sqrt[2]{y}$, $\sqrt[3]{y}$ etc. adhiberi aliquando $d\overline{y}$, $d\overline{dy}$ vel $\int\overline{y}$, $\iint y$, et horum rursus potentias vel radices. Unde novus oritur calculus plane mirabilis, quem voco differentialem, cujus usus est maximus servitque ad ea paucissimis lineis calculi exhibenda, quae vix maximis figurarum circuitionibus communi Methodo exprimuntur. Et quemadmodum in communi Algebra insignis est usus calculi vel ideo quoniam altiores gradus non nisi per ambages in figuris exhibentur, tametsi aliquis veteri Geometriae assuetus et novae methodi obtrectator dicere possit se omnia vel etiam communi via exhibere per plures proportionales, et sane inferiora, ut yy, y^3, per plana aut solida facile exhibentur, ita in hoc calculo transcendente, etsi dy vel $\int y$ per tangentes aut quadraturas exprimantur, tamen altiores affectiones, ut $\int\int y$, $\int\int\int y$, ddy, dddy, aut horum variae complicationes non sine multis ambagibus exprimuntur in figuris aut in communi calculo algebraico, sed nec nisi istis affectionibus dy, $\int y$ etc. adhibitis aequationes curvarum ex tangentibus pendentes ad duas incognitas x et y reduci possunt, quod tamen ad exprimendas curvarum naturas requiritur. Generaliter autem Calculus Transcendens mihi est triplex. Est enim adhibenda aequatio quoad numerum terminorum vel infinita vel finita; si infinita, tunc proveniunt series infinitae, quas jam et alii ante me adhibuere, etsi in illis nova quaedam magni momenti detexerim. Si aequatio numerum terminorum habeat finitum, tunc rursus vel adhibet quantitates infinitas infiniteve parvas (tangentium tamen ope in ordinariis repraesentabiles), quod speciatim facit Calculus meus differentialis, vel adhibet quantitates ordinarias, sed tunc necesse est ut incognitae ingrediantur exponentem, et hanc ultimam expressionem omnium Transcendentium censeo perfectissimam, hanc enim ubi semel nacti sumus, finitum est problema. Calculus differentialis ostendit non tantum quicquid ab aliis circa tangentes et quadraturas hactenus repertum est, sed et innumera, in quae quis nisi calculo meo usus (cujus nuper initia quaedam Lipsiam publicanda misi) non facile incidet, quia isto calculo omnia mira brevitate et claritate oculis ac menti objiciuntur. Facile tamen unumquemque patiar abundare suo sensu et inventa fruge glandibus vesci. Vides ergo meum calculum transcendentem non consistere in sola illa incognitarum translatione in exponentem, de quo fateor me non nisi pauca Tibi monstrasse, nempe regulam pro numeris primitivis quam inde duco, et modum quem habebam jam Parisiis, per aequationem finitam ordinariis quantitatibus constantem exprimendi quadratricem circuli, sed calculi differentialis mei fundamenta saepissime Tibi a me monstrata exemplisque etiam aliquando illustrata non poteris diffiteri. Methodus tangentes exhibendi transcendentium, meae generalis methodi corollarium est adeo facile, ut per se pateat intuenti, imo methodus mea calculi differentialis a transcendentibus et algebraicis abstrahit. Quod ais Te posse curvam transcendentem Algebraicae quadratricem, licet transcendens sit, metiri seu in rectam extendere per spatiorum alterius curvae Algebraicae dimensionem, id in meo calculo differentiali tam facile est ut vix moneri mereatur. Nam si ordinata figurae quadrandae seu differentialis sit z, tunc ordinata figurae, cujus spatia serviunt ad curvam quadratricis seu summatricis metiendam, erit $\sqrt[2]{aa+zz}$: scilicet talia quae Tibi magni momenti visa sunt, apud me facillima sunt et levis armaturae. Illud laudarem mirifice, si posses efficere facili aliqua ratione, quod ego nondum praestiti, ut liceat quadraturas reducere ad dimensiones curvarum, seu ut semper curvae Algebraicae reperiri possent, ex quarum dimensione posset datae figurae Algebraicae haberi quadratura. Hoc ego inventum maximi facerem, et si aliquid apud Te possem, mi Amice, hortarer potius ut vere nova aggredereris, quam actum ageres, nam praeter illa quae de focis praeclara dedisti et summo ingenio tuo digna, in caeteris quae probo nihil quod mihi quidem novum sit agnosco. Fateor tamen, si demonstrare potes, quod in scripto tuo apologetico asseris et ad tuendum Methodi tuae ...... necessarium esse agnoscis, nempe si Figurae Algebraicae, cujus quadratrix Algebraica (seu quadratura indefinita sive generalis) non datur, ejusdem figurae nec quadraturam specialem ullam dari posse, Te aliquid magnum ac mihi ignotum praestitisse, eoque casu retractabo lubens, quae contra methodum tuam sive eam improbando, sive quod in ea probum est mihi quoque ascribendo dixi, fatebor enim hoc modo et probam et unice tuam esse. Offertque mihi ea res occasionem, qua si placet Tibi publice satisfacere et utriusque existimationi, si tanti est, consulere possim; profitebor enim id ipsum ut in scheda hic adjecta vides, eamque si consentis poterit in Actis imprimendam curare Dn. Menckenius.*) Scribis denique Te non parum miratum, cur publice Tibi contradicere in animum induxissem, quod Tibi officere poterat; sed purgare me non difficile erit. Primum enim rogaveram et coram et per literas, ut in Methodo publicanda, in

*) Es ist dies die Additio ad Schedam „De Dimensionibus Curvilineorum."

quam et mihi aliquid juris esse putabam, velles communi consilio uti; cum vero ne respondisses quidem et viderem Schediasma tuum comparere in Actis Eruditorum, coactus sum juris mei vel ideo meminisse (quod honestissimis verbis a me factum vides), ne si aliquando uterer eadem methodo tanquam mea, mihi ab ignaris plagii crimen intentaretur. Itaque nihil me ab officio alienum fecisse puto. Spero Te quoque, mi Amice, suum cuique ingenue tribuendo effecturum ut amicitia nostra, si quidem ea Tibi tanti videtur quanti videtur mihi, in solido collocata nullis suspicionibus labefactetur.

P. S. Si quando vacat, quaeso ut mihi processus illos mihi pro phosphoro a Parisiensibus communicatos denuo mittas, in quibus erat auri volatilisatio; scripsi enim me schedas perdidisse.

Wie schon bemerkt, legte Leibniz dieses ausführliche Schreiben zurück und übersandte an Tschirnhaus folgenden Auszug:

Leibniz an Tschirnhaus.

Novissimas meas acceperis hortatu Domini Licentiati Menckenii scriptas, ut colendae ac conservandae amicitiae nostrae me paratum ostenderem; interea et accepi tuas, ex quibus libenter intellexi, eandem Tibi sententiam esse. Certamen nostrum non magis amori mutuo officere debet, quam duorum inter se chartulis ludentium commotiunculae. Caeterum ego qui certus sum Tibi jam Parisiis monstrasse Methodi quam publicavimus substantiam, cum Te video contra asserere quod per Te in eandem incideris, non tam candorem tuum, quam memoriam in dubium revoco; haud dubie enim Tibi saepe methodum summandi series, vel quadrandi figuras per differentias monstravi, dum scilicet generalibus calculis figuras differentiales seu quadrandas possibiles determinari posse ostendebam, sed memini Te tunc alias meliores methodos sperare, quae neque calculo implicato, qualis sane iste est, nec tangentibus (coincidunt enim tangentium et differentiarum inquisitiones) niterentur. Unde factum pie credo, ut tunc animum non attenderis, et cum multo post tempore ad eandem methodum postliminio rediisses, non distincte memineris, per quem profecisses. Paravi responsionem longiorem ad Schedam a Te Lipsiam missam mihique proximis tuis literis communicatam; hanc responsionem vicissim communicabo, ubi opus erit; eam his verbis finio: „In calculo differentiali, cujus „fundamenta et specimina amicissimo Viro saepissime communi-

„cavi, quicquid hactenus circa Curvilineorum dimensiones et tan-„gentes inventum est, alia multa nondum hactenus inventa conti-„nentur; sane quod ait exempli gratia se posse curvam transcen-„dentem Algebraicae quadratricem metiri seu in rectam extendere „per spatiorum alterius curvae Algebraicae dimensionem, id in meo „calculo differentiali tam est facile ut vix moneri mereatur. Nam „si ordinata figurae algebraicae quadrandae seu differentialis sit z, „tunc ordinata figurae, cujus spatia serviunt ad curvam quadra-„tricis metiendam, erit $\sqrt[2]{aa+zz}$, scilicet istiusmodi. Omnia (inter „quae etiam est quod ait se infinitarum curvarum Transcendentium „tangentes eo modo quo algebraicarum exhibere) quae Amico magni „momenti visa sunt, apud me facillima sunt et levis armaturae. „Illud laudarem mirifice, si posset efficere, quod ego nondum prae-„stiti, ut liceat quadraturas reducere ad dimensiones curvarum seu „ut semper curva Algebraica reperiri possit, ex cujus dimensione „supposita posset datae figurae algebraicae haberi quadratura. Hoc „ego inventum maximi facerem et si quid possem apud illustrem „Amicum, hortarer eum potius, ut vere nova aggrederetur, quam „uti hactenus saepe facere visum est, actum ageret, nam praeter „illa quae de focis praeclara habuit et summo suo ingenio digna, „in caeteris quae probo, nihil quod mihi quidem novum sit „agnosco." Atque haec in responsione mea continentur, quae ideo hac transcribo, ut Te ad egregia et mihi nondum pervestigata excitem. Fateor etiam, si demonstrare potes, quando generalis quadratura algebraica seu quadratrix algebraica non procedit, nec procedere quadraturam specialem, quemadmodum in tua defen-sione promittis, fatebor profecto Te rem magnam effecisse et Me-thodum istam longissime provexisse; imo si putas officere Tibi posse, quod in Actis publicari curavi, libens hoc quicquid est damni reparabo, statim fatendo publice, si ita postulas, Te ubi hoc demonstraveris, vere aliquid magnum et mihi ignotum circa hanc methodum praestitisse, imo magnum illud problema quadraturae Circuli quoad modum solvendi vulgo quaesitum demonstrata alge-braicae solutionis impossibilitate absolvisse; imo ut videas prompti-tudinem inserviendi meam, ecce Schedam adjicio, quae Actis Lip-siensibus, si quidem Tibi probatur, inseri potest.

XVII.

Tschirnhaus an Leibniz.

Dessen angenehmes vom 16 Decembr. de dato Hannover habe den 12 Januarii alhie erhalten, über dessen contente höchlich erfrewet bin worden. Dass selbter aber annoch die verlangte processe, die volatilisation des goldes und das sal vegetans nicht erhalten, wundert mich nicht wenig, den sobald verstanden, dass selbiger die von mir zwar einmahl communicirten processe verlanget, aber nicht wieder finden können, so habe solche gleich an Hrn. Findekellern in Dressen communicirt ....

Dass Mr. Hugens annoch bey leben und die dioptrique in druck geben wird, welche er so lange zeit versprochen (bereits in Commentariis der Geom. des des Cartes) erfrewt mich sehr; zweifle nicht daran dass es was sonderbahres sein werde, wie sein schöner Tractat de Lumine et Gravitate, welches inhalt selbst ad Acta Lipsiensia referiret, und war erfrewt dass bereits etliche sachen vorher schon ad Acta communiciret, ehe seinen Tractat erhalten können, den sonst würde er ohne zweifel gedacht haben, dass etwas von ihm erborget, wiewohlen auch andere Proben habe, die gantz evident eben dieses ..... können. Sonsten bin gleichfals in diesen intent die Opticam zu perficiren, nicht sowohl was die Theorie anlangt als die praxin, da sehr zweifle ob leicht iemand auff dieses gefallen was mir hierinne bekand worden. Die Telescopia zu bereiten weiss ungemeine sachen, dass ob sie schon von unglaublicher grösse, dennoch gantz accurat können fabricirt werden, und wen ein vornehmer Herr die Kosten wolte dran wegen, ich wolte ein objectivum lieffern, das auff 1000 Fuss so accurat elaborirt, als wir bieshero Tubos haben von 6 schuen; aber solches mit menschen henden zu verfertigen, ist plane unmöglich. Was die Microscopia betrifft, habe angemerkt dass wie wir Telescopia können machen, so indefinite mehr und mehr die entfernten sachen entdecken, so könne es gleichfals mit diesen Microscopiis geschehen, dass wir indefinite immer mehr und mehr die nahen sachen entdecken, und zwar nicht wie bieshero geschehen, dass man nur kleine theile von grossen objectis, sondern dieselbige gantz betrachten könne. Das licht weiss auch sowohl in Telescopiis als in Microscopiis zu augiren, dass ob es gleich sehr dunkel wetter, man doch durch selbige viel klährer und heller als der tag selber ist sehen kan. 'Endlich den 3ten effect den wir bieshero in opticis gehabt, ein sehr gross augmentum caloris zu machen und dahero alle cörper auff allerhand art vel accidentaliter vel essentialiter quoque zu verendern habe so hoch gebracht, als bieshero nicht gesehen, davon Sie etwas in Actis Lipsiensibus werden gesehen haben. Habe auch bereits dergleichen glässer 2....., deren eines Ihro Keyserliche Majestät offerirt, welches den Pater Menegoti sehr oblectirt, und Unsern ietzigen Churfürsten, wie den hiervor sehr ansehnlich regalirt worden.

Diesen winter habe mir vorgenommen die materie de quadraturis zu acheviren, dieweil auff zwey wegen, die universal und leichter sind, als alles was wihr bieshero gehabt, gefallen, und habe bieshero sonderbahre sachen hierinne entdeckt, als zum exempel: datum spatium ADBC (fig. 119) curva Geometrica ADB terminatum per aliam curvam AEB in spatia ADBE et AEBC secare, quae non solum in ratione ut numerus ad numerum sint, sondern auch ut linea ad lineam datam; spatii autem ADBC mensura darff nicht bekand sein, und viel andere sachen noch habe entdeckt, die von weit grösser wichtigkeit als dieses.

In Physicis bin so weit avancirt, dass es unmöglich gedenken darff, den alle weld hielte mich vor einen auffschneider; es sind auch viele sachen, die nicht anders als cabalistice kan offenbahren; den ich bin ietzo der gedanken, dass man durch die cabalam zu den grössten geheimnissen gelangen kan. Sat sapientii.

Kiesslingswalda d. 13 Januar 1793.

Luminis natura düncket mich kan nicht klährer dargethan werden als per pressionem vividam materiae, viel leichter als per undas; darauss dan eben klar folget, dass luminis motus non instantaneus sey, und auch alle colores gar leicht meines bedünckens, sowohl die fixi als apparentes.

XVIII.

Leibniz an Tschirnhaus.

Dero erwündschtes antwortschreiben vom 13 Januar habe zurecht erhalten, und nebenst meldung Dero vielen und herrlichen gedancken sowohl M. Hrn. gesundheit und wohlwesen, als auch beharrende gewogenheit daraus erfreulich verstanden, wündsche beständigen und langwierigen verfolg Dero vollkommenen vergnügung von Herzen.

Wegen der verlangter Chymischen Experimenten, so Sie mir von Paris mitgebracht, so ist nicht ohne, dass ich das sal vegetans bekommen, welches ich auch unlängst unter meinen schrifften gefunden, aber die Volatilisationem Auri habe nicht finden können. Erinnere mich wohl dass sie aus dem Honig gangen, doch möchte den rechten Process gern wissen. Man nimt sonst vermittelst des Honigs dem ☉ fluminanti seine schlagende Kraft, daraus glaub ich dieses erfunden worden, indem man so lange abgestiegen, biss man den rechten ...... gefunden, so zwischen dem schlag und fixität das mittel hält, welches ist die volatilität. Werde also verbunden seyn, dafern M. H. beliebt, seinem geneigten erbieten nach mir solche wieder zuschicken.

Was Sie in opticis gethan, schätze gewisslich überauss hoch, zumahl nicht ein ieder im stande, auch nicht fähig ungemeine Dinge zu finden und die schöhne demonstration zu werck zu richten. Was M. H. circa Telescopia und Microscopia verspricht, sind treffliche sachen, so zu bereiten ich wegen des grossen daher erwartenden Nutzens Sie selbst höchlich ersuche. Was mag besseres erdacht werden, als den Microscopiis zugleich Vergrösserung, liecht und ein grosses feld geben. Ich schätze diess höher als einen neuen nuntium sidereum, wiewohl auch solcher so rühmlich als wichtig seyn würde. Hr. Hugenius wird sich darüber zum höchsten verwundern, wenn ich etwas in meinem schreiben an ihn davon melden darff, welches ohne zulassen nicht thun will. Es scheinet inzwischen dass diesse instrumenta von der natur daher begrenzet, weil endtlich die stäubgen in der lufft alzu sichtbar werden und die objecta bedecken würden. Doch wenn wir nur noch so weit es thunlich uns diesen grenzen nähern köndten, wäre es schohn genug, zumahlen auch bei den Microscopiis noch zur zeit nicht so wohl wegen der vergrösserung, als liecht und feld sorge zu machen, massen jene freylich weit genug bisher zu treiben gewesen, aber mit abgang dieser beyden.

Was die theoriam luminis betrifft, so sind die undae Hugenianae nichts anders als ein gewisser modus pressionem considerandi, doch mit dieser besonderheit dass ein ieder erleuchtete punckt wiederleuchtet. Mir hat sehr gefallen, dass dadurch die lex refractionis so artlich herauss komt secundum sinus. Der guthe Pater Pardies oder auss ihm der P. Ango in seiner dioptrica haben schlecht bestanden, als sie auss ihrer vermeinten art die undas bey den liechtstrahlen zu brechen, die Hauptpunckt herausbringen wollen. Ich wündschte die colores fixos recht erkläret zu sehen ad minimum ex hypothesi apparentium. Nehmlich man nehme von.... an die farbe die ein tropfen oder das prisma gibt, die endtliche ursach dahinstellend, und frage weiter, wie mit deren hülfe beständige durchgehende farben zu wege zu bringen. Ich achte solches thunlich und von grosser wichtigkeit.

Ich zweifle nicht, dass noch trefliche vortheil circa quadraturas auss zufinden, und mein hochverehrtister Herr darinn..... Dero problema: Trilineum datum ADBC ducta curva AEB secare in ratione data, finde gar schöhn zu seyn; ich habe mich daran gemacht und auch sofort einen weg dazu entdecket. Als gesezt, das Trilineum datum sey der Quadrant eines Zirkels, und AEBC (fig. 120) solle seyn zu ADBC wie n zu 1 (da n bedeutet was für eine zahl man will, so hier kleiner als die unität) so nehme man eine lini G, welche sey zu FD wie 1 zu 1 — n und dann G, CF, DE in continua proportione, so wird man haben E und also die gesuchte lini AEB, welches nicht seze als ich mich gleichsam rühmen wolte alles finden zu können, das M. H. Hr. in diesen Dingen erfunden, denn da fehlet es weit an, sondern nur umb einen versuch zu thun. Ich möchte wündschen vollkommene allgemeine und kurze wege die problemata Tangentium conversa allezeit wenigstens auff quadraturas zu bringen, und dann die quadraturas auff extensiones curvarum in rectas, denn ja natürlicher ist spatia zu messen per lineas, als contra.

Ich habe viel wunderliche grillen in vielen Dingen gehabt, aber die Historico-politica nehmen mir viel zeit weg, wollen doch auch gethan seyn, zumahl wenn man in bedienungen stehet. Ich vermeyne iezo meine Arithmetische Machinam einsmahls recht verfertigen zu lassen. Herr Arnaud, Hugens und andere haben mich etliche mahl deswegen erinnert.

Weil M. H. Hr. so viel liecht in der Naturkundigung erlanget, so bitte ich sonderlich auch auff Medicinam Corporis mit mehreren zu gedencken, und darinn den überschwencklichen nuzen und gebrauch Medicinae mentis zu zeigen. Was Sie sonst de Cabbala gedencken, verstehe ich de Cabbala sapientium, das ist Characteristica, deswegen Sie meine gedancken wissen. Sollen Sie aber noch eine andere Cabbalam meinen, so werde erläuterung des verstandes erwarten. Sonst wäre freylich zum höchsten zu wündschen, was Sie gedencken, dass ein forum sapientiae wäre, welches nicht weniger bestehen würde als die leipzigische Messe. Ein baar arcana lucrifera wären guth dazu, aber darauff muss man nicht warten. Inzwischen können briefe auch etwas thun, aber die solche schreiben können, wie mein hochwerther Herr, deren sind wenig oder vielleicht niemand in Teutschland. Ich zweifle nicht, es werden nach der zeit, da M. Hrn. ich nicht gesehen, Sie noch ein viel grösser liecht erlanget haben, zumahl in physicis und da steckts am meisten. Köndte man dermahleins einige guthe abreden nehmen, so zu unser vergnügung und gemeinen nuz dienen möchte, so wündsche dazu gelegenheit von Herzen. [Den guthen alten Hrn. Krafft hoffe bei Uns anzubringen, massen bey Churfürstliche Durchl. ihn vorzuschlagen mich erkühnet, darauff seine gedancken angehöhret und ziemlich wohl aufgenommen worden. Schade ist, dass er nicht zwanzig Jahr jünger; doch ist er noch frisch genug. Er hat grosse Experienz in vielen Dingen]. Es ist schade, dass man so wenig auff das nöthigste dencket, man stifftet eine Academie oder Schuhle über die andere, aber die darinn eigentlich realia tractirt würde, soll noch fundiret werden. Schade ists, dass vor etlich hundert jahren einem vor heilig gehaltenen Mann nicht im sinn gekommen aus dem gründ der christlichen liebe, umb die arme Krancke umbsonst zu versehen, einen Orden der Erzte oder Naturkündiger zu stifften. Dem Orden würde die welt offen und zu Dienste stehen, zumahl wenn trefliche leute darinn wären, die ihr gemüth auff nüzliche entdeckungen richteten und natürliche wunder thun köndten. Aber was halt ich mich auff mit wündschen. M. H. Hr. als eine zierde unserer zeit scheinet solche Dinge dermahleins leisten zu können, die ich kaum mit wündschen erreiche. Gott erhalte ihn dazu viele und lange jahre bey vollkommenen kräfften, und gebe mir das glück und die vergnügung, dessen hochgeschäzte Freundschafft noch lange und viel und so es müglich näher und öffter zu geniessen, der ich etc.

XIX.

Tschirnhaus an Leibniz.

. . . . . melde also, dass die Kabalam nur schertzweise angeführet, als Eine der grössesten wiessenschaften, dadurch man ohne mühe zu den verborgensten geheimnissen gelangen kan, weil die Juden solches vorgaben; ich aber auf solche weise interpretire: Cabala ist so viel als traditio; da gelehrte leute einander was sie mitt vieler mühe erfunden, und manchmahl wegen der so vielen ignoranten, die doch grosse leute sein wollen, nicht eben so publick machen, einander oretenus und ohne alle ambages communiciren....

Was den methodum quadraturarum anlangt, auff den vor ettlich wenigen Jahren gefallen, so erfordert solcher keinen grossen verstand, au contraire es ist solcher leichter als alles was bieshero gelessen oder selbst erfunden, und durch solchen kan alles bisher erfundene gantz leicht resolviren, ja dergleichen sachen, die durch keine gebrauchte manier weiss zu entdecken; dessen habe ein specimen communiciret, in dem gesagt: Sit quaecunque curva Geometrica ABC (fig. 121) 1. sive spatium ABCE sit quadrabile sive non, 2. nicht durch viele unterschiedene curvas ADC (wie Wallisius, Gregorius Prop. 62 Geometriae suae Universalis und mein hochgeehrtister Herr ietzo praestiren, da stets eine andere curva producirt wird, nachdem die proportio spatii ABCD ad spat. ADCE anders und anders ist), 3. nicht allein da proportio spatii ABDC ad ADCE wie numerus ad numerum angegeben wird (welches bieshero in circulo, der spirali und vielen andern curvis praestiret worden), sondern auch da proportio ist ut linea data ad datam lineam, idque 4. infinitis modis facillime praestare, welches hier weitläufftiger deduciret, damitt Sie meinen mentem assequiren, den vielleicht zu anderer zeit gar obscur werde exprimirt haben.

Leipzig d. 7 Maj. 1693.

XX.

Leibniz an Tschirnhaus.

Dass selbiger die güthigkeit gehabt mich mit dem verlangten Chymischen process zu begünstigen, deswegen bin dienstlich verbunden. Weilen Mons. du Clos todt, und die anderen bey der Academie Royale nichts davon wissen wollen, so würde ich ohne diese hülff den schaden, so eine Mauss meinen papier gethan, nicht haben ersetzen können.

Ich zweifle nicht, der Methodus Quadraturarum, dessen M. Hr. gedenket, werde von grosser Wichtigkeit seyn, und auch noch viel wichtigere Dinge nach sich ziehen, als die sectionem Trilinei in data ratione, welches zwar auch sehr important und zu zeiten dienen kan ad quadraturas, wenn nehmlich die linea data und die linea secans con-quadrabiles seyn.

Mein Methodus serierum infinitarum, der unlängst in die Acta kommen, ist zwar bey mir uralt, und habe ihn bereits in dem tractatu Quadraturae Arithmeticae, welchen Mein hochgeehrtister Herr in Paris gelesen, in der that gebrauchet, habe ihn aber immer verschoben herauszugeben, weil ich einsmahls gemeinet etwas ausführliches von diesen Dingen herfürzubringen. Nachdem aber meine mehr und mehr anwachsenden distractiones wenig hofnung dazu mir übrig lassen, und gleichwohl diese Methodus universalissima, und ad praxin ipsam perficiendam gerichtet, also ad utilitatem publicam gereichet, so habe sie endlich gemein machen wollen.

Ersehe nunmehr was Sie durch ihre Cabbalam gemeinet, und muss bekennen, dass dienliche anstalt diessfals wohl zu wündschen wäre. Denn die publicatio der besten Dinge offtmahls bedencklich, ich auch selbst nicht alzu gern noch geschwind dazu komme; es giebt freylich nicht nur leute, so ein und ander wohl gemeintes übel aufnehmen, sondern auch etliche undankbare gesellen die sich mit frembden federn schmücken, und wenn sie einmahl etwas von den Methodis secretioribus erschnappet, sich damit gross machen wollen, gleich als ob alles von ihnen herrühre. So hat es unser Hr. Ozannam gemacht, der sich nicht entsehen, die demonstrationem meines Theorematis Quadraturae Arithmeticae, die Mein verehrtister Hr. (habender guther macht nach) ihm oder anderen zu Paris mitgetheilet, in seinen Tractatum Geometriae practicae einzurücken, allwo er nicht einmahl den inventorem des Theorematis meldet, und von der demonstration wesen macht, als ob er sie gefunden, da er doch nicht einmahl die darinn enthaltenen propositiones fortsetzen und deren gebrauch erweitern können, wie leicht es auch an sich selbsten ist.

Alleine zu rechtem gebrauch der Cabbalae würde gehöhren eine Societät rechtgelehrter und wohlgesinter leute; ich verstehe aber eine Societät nicht wie sie insgemein seyn, auch wie die Englische und Naturae Curiosorum ist, so kein festes band, auch keinen Nachdruck noch Dauer haben, noch die von grosser Herrn besoldungen unterhalten werden, wie die Universitäten, Collegia und die Academie Royale zu Paris, denn da werden gemeiniglich durch die hofleute allerhand Personen hineingeschoben, die nicht auss guthem eifer und lobesbegierde, sondern umbs geld arbeiten, ja hernach aus faulheit und neid das guthe verhindern, sondern eine solche societät die ihren eigenen fundum hätte, wie die Clöster und Orden der Römischen Religion. Nun ist zwar bei den Evangelischen nichts dergleichen, doch wär es nicht ohnmüglich, wenn einige Reiche und lachende Erben habende von verständigen, wohlgesinten, ehrliebenden Personen beredet werden köndten, das ihrige zum theil oder gänzlich zu einem so wichtigen werck zu wiedmen, vermittelst dessen ich versichert bin, dass zum besten des menschlichen geschlechts in 10 jahren mehr auszurichten, als sonst in hunderten nicht geschehen wird. Ich bin vor vielen jahren mit diesem Einfall schwanger gangen und sehe fast allein die ersteren übrig etwas rechtes auszurichten, nachdem der andere an sich selbsten leichtere, nehmlich einen grossen Fürsten, der dem werck allein gewachsen, dazu zu vermögen bey gegenwärtigen elenden Zeiten, da sie fast selbsten alle mit einander in weitläuftigkeiten vertieffet, nicht zu hoffen; dieser vorschlag aber ist so bewand, dass er mit einem geringen den anfang nehmen und bald zu etwas ansehnliches erwachsen köndte, denn etliche Exempel andere aufmuntern würden. In Holland glaub ich solten sich dergleichen leute finden, wiewohl auch Teutschland einige an hand geben möchte. Ich weiss, wie sehr M. H. H. sich allgemeinnüzige Dinge angelegen seyn lassen und wie leicht alles begreiffen, habe also dieses noch in vertrauen Dero erwegung und urtheil unterwerffen wollen; bitte die gedancken darauff gehen zu lassen und mich einsmahls mit wiederantwort zu erfreuen, der ich Dero etc.

XXI.

Leibniz an Tschirnhaus.

Janvier 1694.

Je profite de la coustume de la nouvelle année pour vous asseurer de mon zele, et je prie Dieu, qui fait tout pour le bien, de vous donner un si grand nombre d'années heureuses, que vous puissiés augmenter considerablement les vrais tresors du genre humain, c'est à dire les sciences. Il convient encor aux philosophes de prier Dieu, car bien que tout soit écrit là haut, il est encor écrit dans ce grand livre des destinées, que les prieres des bons seront considerées.

Ma Machine Arithmetique dont vous avés veu l'echantillon, sera bientost mise à 12 chifres.

Vous aurés vû ma construction generale des Quadratures, mise dans les Actes de Leipzig, par ce mouvement, dont feu Mons. Perraut m'avoit fait la proposition. Il me semble qu'il vous en avoit parlé aussi. Cela joint à mon autre machine, dont vous avés vû le dessein, qui sert à construire toutes Equations, n'avance pas mal dans la Geometrie.

Mais il est quasi temps que nous commencions à tourner nos pensés à la physique. Vous ne m'avés rien repondu à une pensée dont je vous avois parlé d'une societé ou communication au moins, mais un peu autrement reglée que celle, où il y a trop de mercenaires qui ne font ses choses que par maniere d'acquit pour gagner leur pension, ou trop de curieux volages qui considerent les sciences non pas comme une chose tres importante pour le bien des hommes, mais comme un amusement ou jeu. Vostre Cabale m'en avoit donné l'occasion, mais vous aviés brisé la dessus. Je vous supplie de me donner un peu de part de temps en temps de vos excellentes pensées et de me croire etc.

P. S. Vous aurés vû les echantillons de l'Historia Annalis Medica, que Mons. Ramazzini, Medecin de Modene, a accordée en partie à mes exhortations. Il est important, qu'on imite ce dessein partout. On l'a inserée dans les Ephemerides des Medecins d'Allemagne avec ma lettre.

XXII.

Tschirnhaus an Leibniz.

.... Höhre sehr gerne dass Dero machina Arithmetica zu grösser perfection kombt, und wird wohl schon genug seint, wen solche bies auf 12 Zieffern kommt, da in praxi nicht leicht dergleichen exempel vorkommen. Ich bin auch auff eine dergleichen machinam gefallen, habe aber solche noch nicht gäntzlich acheviret, ist aber in totum diversa ab hac, denn bey dieser keine rotae; gehet auch alles aus einem andern fundament. Was die Curven anlangt, darzu Mons. Perault anlass gegeben und die schöne inventa so bieshero darauss deriviret, so hatt Herr Hugenius mir davon erwähnung zu Paris gethan. Ich considerirte aber solche nicht hoch noch aestimirete dieselbigen dermahlen; aber ietzo aestimire dieses nur daran, dass selbige desswegen hoch zu aestimiren, dieweil auff diese art alle curvae una et eadem generatione formari possunt; weil nun alle generationes hoch zu aestimiren, so sind absonderlich dieselbige von grosser wichtigkeit, so generationes infinitarum, ja omnium curvarum exhibiren; aber dass alle quadraturae hernach herauss folgen, ist nothwendig; den wer mir alle curvas formirt, der giebt mir auch alle quadraturas, welches Meinem Herrn nicht unbekandt sein kann, ob es gleich nicht ein ieder weiss und also rede von der sache in se considerirt; wan ich aber respective dieselbe ansehe, das ist ob wir eine bessere formationem omnium curvarum haben, so achte solche nicht hoch; den es ist gewiess dass die formatio omnium curvarum per centra seu focos auff die arth wie solche in der Medicina Mentis vorgestellet, viel vortrefflicher sey und habe alda sonderbahre effecta derselbigen nur dessentwegen erzehlet, damitt einige auffmerksam würden und der sache besser nachdencken lerneten und sich auch darauff applicirten, wie Mein Herr und die Bernoulli bereits schon etwas gethan haben; den hier kommen nicht allein alle quadraturae auff die leichste art herauss, sondern sachen, die quantivis pretii, und deren gantz unerwähnet und die bieshero kein Mensch noch nicht inventirt; ja Circuli Quadratura wo sie möglich kombt absolute herauss, wie es den eine grosse apparent hatt auss dem was bieshero entdeckt, dass solche, und alle quadraturae möglich, licet curva clausa sit nec ne; wass hierin vor sonderbahre sachen entdecket, wird kein Mensch glauben; ja in Conicis Sectionibus habe circa dimensionem gantz neue und schöne Theoremata und eine Methode, da una et eadem via ac circulus Archimedea ratione quadratus alle curvae quadrirt werden, und welche nicht möglich durch diesen weg zu quadriren, da habe gleich ein indicium infallibile, dass es nicht sein kan; den hierdurch finde nur alle quadraturas, die curvam tam quoad totum quam omnes partes quadriren; hernach habe eine andere Methode, dadurch finde alle specielle quadraturen, das ist wen zum exempel nur gewiesse Theile einer Curve quadrabiles wehren, also wen der Circulus zum exempel vielleicht gantz und etwan ein Theil absolute quadrabel, so muss es nothwendig herauss kommen. Diese Methode ist sonderbahr, welches Sie darauss schliessen werden; ich muss umb eine Curvam zu quadriren, 4 Curvas haben; zum exempel wen ich die Parabolam Archimedeam quadrire, so kommen 4 Parabolae herauss, und durch deren hülffe werden nur partialia spatia von derselben quadrirt; wen ich den Circul oder Ellipsin nehme, so kommen 3 Ellipses herauss und eine Curve 4ti gradus die sonderbahr ist. Aber dieser weg ist so unbetreten, finde auch nicht die geringsten vestigia darvon, dass also sehr lente fortgehe, indem mir viele sachen hier zu eruiren sind, die man bieshero nicht gehabt, wen solche vorhanden, so würde es sehr leicht zu thun sein.

Mein Herr sey so gutt und sehe doch nach, wie Ihm dies Theorema gefält: Sit (fig. 122) Curva data ACE, sit B punctum fixum, ducantur rectae BC et BE quae distent intervallo indefinite parvo, describatur arcus CD Radio BC: jam curva sit invenienda FGH hujus conditionis, ut GJ et HK sint perpendiculares ad curvam, et sit GJ = BC, HK = BE, et tandem sit GH = CD. Ich bekomme zwar ein sehr schön Theorema, dadurch diese sache determinirt wird, aber es kombt mir vor als wen es nicht der rechte weg sey, den solcher solte auss der sachen natur gantz leichte sein. Biette mir Dero gedancken zu communiciren, so Sie was leichtes rencontriren.

Kiesslingswalde d. 27 Febr. Anno 1694.

XXIII.

Leibniz an Tschirnhaus.

Hannover 21. Martis 1694.

Dero Geehrtes vom 27 Febr. habe zu recht erhalten und die laidige confirmation dessen so mir nach abgang meines vorigen von Dero schmertzlichen unfall zu ohren kommen, darauss vernehmen müssen. Die menschliche natur ist also bewand, dass dergleichen trauerfälle *) sie nothwendig rühren, also dass auch ich nicht wenig theil daran nehme. Weilen aber Gott Meinen Hochgeehrtesten Herrn mit solchen hohen Verstande und auffgerichteten Gemüht begabt, dass ihm dergleichen nicht nieder drücken kan, so hat man bey dieser harten Probe, seiner gemühtsgabe wegen ihm mitten in der condolenz zu gratuliren; wie dann auch mitten im schmerzen eine lust daher entstehet, dass man sich..... befindet, denselben zu überwinden. Gott erhalte uns M.H.H. selbst noch lange zeit und zwar bey solcher gemüthsruhe, davon wir sämtlich den Nutzen empfinden können.

Ich komme von diesen traurigen gedanken auff die schöhnen und angenehmen Dinge so in Dero schreiben enthalten. [Solte Dero projectirte Machina Arithmetica sine rotis eben dass thun, was die meinige, so wolte ich lieber die meinige zum stillschweigen vardammen]. **) Als ich gegen den P. Grimaldi zu Rom von der meinigen gedachte (welche er mit nach China, daher er kommen, und wohin er als vom Monarchen daselbst zum Mandarin und Praesident des Mathematischen Tribunals benennet, wiedergehen wolte, zu nehmen wünschte, wenn sie fertig gewesen wäre) sagte er mir, dass er etwas per Logarithmos vorgehabt, aber dass ist eine andere sache gleichwie auch alles dasjenige, so von dem Neperianischen fundament hehrrühret, einer andern Natur ist. Es ist auch in dem proportional Zirckel ein principium multiplicandi et dividendi. Solte aber M.H.H. fundament ganz von diesen unter-

*) Tschirnhaus hatte seine Frau und seinen ältesten Sohn durch den Tod verloren.

**) Diese eingeklammerte Stelle sollte wahrscheinlich in der Abschrift wegleiben.

schieden seyn, und der würkung des meinigen dennoch näher kommen, wäre es billig hoch zu schätzen. Ich erinnere mich vor alters meine Constructionem Generalem aequationum per Machinam gezeiget zu haben, seither denn habe sie ad praxin accommodatiorem gemacht.

Wenn M. H. H. in den Actis meiner Constructionem Generalem omnium quadraturarum per motum gesehen haben wird (so nicht leicht zu finden gewesen, und weder Hrn. Hugenio noch den Hrn. Bernoullis zu Gemüth kommen, nachdem sie doch schohn von den Tractoriis gewust), wird er bekennen, dass bey dieser cōnstruction etwas sonderliches. Es sind zwar viel constructiones deren iede alle curvas geben kan, aber nicht alle constructiones sind bequem ad inveniendos regressus seu ad construendas quaesitas seu propositas curvas, sind zwar bequem ad synthesin, aber nicht allemahl ad analysin. Zwar durch die aequationes generales müste alles herauss kommen, aber man verfält in calculos immensae prolixitatis, wenn nicht erst Tabulae vel Canones gemacht werden. In übrigen bin ich damit einig, dass wenn man die quadraturas per meras evolutiones Hugenianas vel coëvolutiones Tchirnhausianas Linearum ordinariarum zu geben gewisse anweisung hätte, solches zu gewissen absehen höher zu schätzen als der Tetragonismus per motum generalis Leibnitianus. Denn dadurch erhielten wir diess desideratum dass wir alle quadraturas köndten bringen auff rectificationes, und also omnem dimensionem superficiei ad dimensionem solius Lineae, worauff ich denn längst mit success bedacht gewesen [habe es hernach völlig gefunden]. Inzwischen hat mein Tetragonismus dieses, dass er von der Natur gleichsahm destiniret, das Verlangte ohne praecepta, alsbald und ohnmittelbar darzugeben. Ich zweifle nicht, dass vor andern constructionibus in Methodo per focos vel coëvolutiones grosse mysteria stecken; wenn darin ein indicium infallibile quadraturarum tam quoad totum quam quoad partes, wäre es desto schöhner. Ich zweifle nicht, dass Sie nicht, weil ganz unbetretene wege gangen, dadurch etwas treffliches zu ergründen. Ich kann wohl auch sagen, dass ich offt sehr wunderliche einfälle in solche sachen gehabt und die grosse Dinge geben müsten so man sie verfolgte, aber wenn ich sie annotiret, so lege ich sie hin und verfolge sie nicht, denn deren menge und meine distraction sind zu gross. Es heisset inopem me copia fecit. Die perfectio Analytica quadraturarum bestünde meines ermessens darinn, dass man sie durch aequationes transcendentes finitas a quantitatibus differentialibus vel summatoriis liberatas geben köndte, alda aber die incognita vel indeterminata in den exponenten hinein fiele. Allein ich aestimire nicht so hoch die quadraturas, als die conversam tangentium, davon die quadraturae nur ein casus simplicior seyn. Möchte gern pro conversa Tangentium auch eine solche construction haben, wie pro quadraturis; habe zwar dergleichen in allerhand fällen, aber nicht so general noch so leicht. Damit ich aber M. Hochgeehrtesten Herrn nicht nur de Methodis meis, sondern auch etwas ex ipsis methodis schreibe, und also vertraulich verfahre, so will ich einen von den generalesten und importantesten wegen kürzlich melden, welcher rem a compositis ad simpliciora analysi anagogica transferiret. Sie wissen wie alle curvas ad seriem infinitam zubringen von mir in Actis generalissima Methodo angewiesen, wenn ich nun dergestalt valorem ordinatae (y) per seriem infinitam habe, und zwar also, dass ich inter calculandum von allen destructionibus vel contractionibus astrahire, so kann ich diese seriem infinitam compositam resolviren in series infinitas simplices componentes, deren entweder eine gewisse zahl oder eine unendliche zahl. Ist es eine gewisse zahl, so bin ich fertig, dan die constructio curvae quaesitae dependirt also a constructione aliquot curvarum simpliciorum, quas series istae componentes indicant, et haberi jam suppono. Bestehet aber die series composita ex componentibus simplicibus numero infinitis, so suche summam cujusque ex istis componentibus saltem transcendenter, welches ich praesupponire thunlich zu seyn, weilen praesupponir, dass man alle series infinitas simplices in potestate habe. Dergestalt habe ich tot terminos, quot antea habui series, und bekomme also valorem incognitae quaesitae (y) per seriem novam infinitam priore infinities simpliciorem, et vel simplicem vel simili methodo repetita tandem reducendam ad simplicem. Ich habe gantz kein bedenken meine Methodos und inventa, wie sie nahmen haben mögen, dahin zu communiciren, woher ich wiederumb liecht hoffe. Diese Methodus ist mir von den wichtigsten und glaube ich, wenn eine ist, so sey es diese, dadurch man könne der Geometri loss werden, wie wohlen noch immer ad melius esse, viel schönes den posteris zu erfinden übrig bleiben wird. Meines Hochverehrtesten Herrn problema reducire ich auff dieses folgende, und finde also das es gehöre ad conversam Tangentium: Data relatione inter GI et FG (fig. 123) invenire curvam vel data rationis inter Elementum curvae FG et respondens elementum perpendicularis GI determinatione ex ratione perpendicularis GI ad constantem a invenire curvam.*) Bey dessen Beleuchtung sehr nachdrückliche Dinge fürkommen, wer nur sie zu verfolgen Zeit hätte. Mein Hochverehrtester Herr und Ich hätten juvenes vonnöthen, die lust hätten etwas rechtes in diesen studiis zu thun und die sich und Uns zugleich helffen köndten. Wüste ich dergleichen so magnae spei und in vulgari Mathesi bereits weit kommen, so wüste ich vor einen solchen wohl eine avantageuse und honorable stelle. Aber ich weiss wenig excitata ingenia, so in tanta luce seculi zu verwundern.

Was Sie mir ehemahlen und ietzo in opticis und sonst überschreiben, das communicire ich niemals, denn ob Sie schohn nichts als nur titulos inventionum gemeldet, so weiss ich doch wohl das viele leute sich nur dadurch ärgern. Ich wünsche zum höchsten dass Sie in Physicis die trefliche Gabe anwenden. Es ist ewig schade das Cartesius, der solches vorgehabt, darin abgehalten worden. Sie differiren nicht zu lange. Freylich ist der weg per Mathesin in Physicis noch alzu weit entfernet, mich deucht aber auch nicht dass man es recht angriffe umb solchen zu verkürtzen. Productionem argillae et aliorum ejusmodi per artem aestimire ich billig hoch. Ich bin der meinung, dass ein grosses in physica particulari zu thun, auch ante notitiam generalis, doch ists mit dieser desto besser. Mit porcellan ist ein grosses in England geschehen; allein die indianischen sind nun selbst sehr wohlfeil. Die perfection der Spiegel oder vielmehr lentium tam ad urendum quam videndum ist freylich von grosser wichtigkeit zumahl bey denen so es verstehen. Ueber alles aber wäre M. H. Hrn. ars rejuvenescendi vel saltem roborandi, das solte mir mehr nützen als M. H. H. mein Codex diplomaticus, welchen Hr. Lic. Mencken schicken wird. Ich habe vielmehr desswegen von M. H. H. reprochés gefürchtet, dass ich etwas Zeit auf solche Dinge wende so freylich ausser der praefation nichts als ad populum phalerae sind. Betreffend das letzte und wichtigste de comparandis auxiliis, so war Cartesii modus nicht guth, er wolte nur mercenarios operarios und geld dazu haben, aber darin stack eine heimliche ambition, dass er alles allein wolte.

---

*) Hoc problema semper per Geometriam communem solvi potest, quia Circuli positione dati sunt, quorum concursu seu intersectionibus ordinatim sumtis habetur curva.

gethan haben. Man siehet es aus seinen Episteln. Leute so alle qualitäten hätten, so M. H. H. meldet, sind hienieden nicht zu finden. Muss man also mit einem theil zufrieden seyn. Und ist das Vornehmste ardor aliquid egregii praestandi conjunctus cum animo erga alios aequo und muss man ihnen den stimulum gloriae dabey lassen, qui etiam sapientissimis novissimus exuitur. Wenn bey denen (so nicht ad summum sapientiae gradum kommen) gloriae amor nicht ist, so sinds mercenarii oder carnales. Wolte Gott ich wüste deren viele, bey denen amor gloriae in laudabilibus quaerendae. Cicero sagt, dass die philosophi so contra gloriam geschrieben, ungern gesehen haben würden, wenn man ihre Nahmen nicht gewust hätte, war also bey ihnen protestatio factis contraria. Mit societäten ist es freylich auch schwehr, nehmlich wie wir es wündschen, es fehlet meist am anfang; diese zeiten lassen wenig von grossen Herrn hoffen, so sonst wohl intentioniret seyn möchten. M. H. Hrn. methodus mit den Brenngläsern ist sehr guth pro initio fundi. Steckte etwas bey dem: hic Plato quiescere jubet, so sie bey der mentione des diamanten angehänget, wäre es noch besser pro hominum captu, ich dencke auff ein novum et mirificum commercii genus, dadurch ein grosses zu thun, wenn man sich nur verduppeln köndte, dass ist, wenn man nur iemand an hand hätte, dessen man sich in so wichtigen dingen bedienen köndte, vel hoc solum toti negotio sufficeret, ist ganz leicht und absolute in potestate, tantum opus amico fido et intelligente, denn wan man gebunden, so will wieder die prudenz noch wohlstand dergleichen entreprisen leiden, so prima fronte wunderlich scheinen. Ich kann leicht erachten, dass die nachricht von dem Jure suprematus Sie unter Hrn. Schillers seel. briefen gefunden. Vale et rem praeclare gere, id est tantum vale et caetera adjicientur. Ich verbleibe etc.

Was Sie de recuperata quadam praestantiore imaginatione post mortem schreiben und vergewissern, davon möchte rationem sehen. Die Crystallisatio fusorum per Vitrum Causticum, et refrigeratorum confirmirt meine suspicionem, dass viel larvae rerum mineralium a vera fusione, davon ich einen eignen discours aufgesetzet, auch etwas in Actis gemeldet sub tit. Protogaea.

XXIV.

Leibniz an Tschirnhaus.

20 Octobr. 1694.

Zweifle nicht Sie werden zu Leipzig glücklich angelanget seyn, wündsche offt angenehme Zeitung von Dero zustand zu vernehmen. Hiebey komt wieder zurück was unlängst bey mir blieben, welches mich sehr wie alle das ihrige vergnüget.

Dürffte ich wohl umb ein stückgen von ihren mit dem Brennglass geschmolzenen porcellan bitten, darauff angeflogen gold, dabey man siehet wie es gleichwohl dem glass die farbe mittheilet. Von dem artificiali möchte auch eine probe wündschen, zumahl wenn man etwas darauff machen köndte, darauff zu sehen, dass er Europaeisch, wie auch Hr. Settala gethan haben soll. Hätte wohl auch umb eines von den schöhnen weissen Kügelgen bitten mögen; habe aber dessen fast bedencken, und stelle es alles in Dero gefallen. Wegen des aufgetragenen werde schohn die gelegenheit beobachten. Anietzo will mit weitläufftigen Schreiben nicht aufhalten, da Sie in der Mess ohnedem viel zu thun haben werden. Nur will ich gedencken, dass ich eine schwührigkeit in Dero Weise des Hrn. Bernoullis problema zu solviren finde, und daher sie wohl nicht recht begriffen haben werde. Denn mich deucht es sey alles so beschrencket, dass ungeacht drey indeterminatae zulezt in der aequation bleiben, man doch nicht wohl macht habe etwas neues anzunehmen, weil sie schohn ihre gewissen relationes unter einander haben, so man eben in assumendo treffen müste, welches ob es durch die divulsion geschehe, verstehen muss. Ich will meinen process nach ihrer weise hehr sezen, darauss Sie abnehmen werden, ob ich Dero meinung erreichet. AB, x (fig. 124); BC, y; EF, v; BD, z; nehmlich wo mir recht, wenn der lini AC tangens ist CT und AB abscissa, BC ordinata, so soll BT und CF ein ander gleich seyn; item die Trilinea ABDA und AEFA, woraus folget, dass AG und DB ein ander gleich seyn müssen, welches ausser zweifel bewusst, kan es aber zum überfluss leicht beweisen. Gesetzet EF sey v, und BD sey z, weil nun die Trilinea allezeit gleich, so sind auch ihre Elementa ein ander allezeit gleich. Wir wollen umb geliebter kürze willen das Elementum von x nennen dx, und von y es nennen dy. So ist des Trilinei ABDA Elementum zdx und des Trilinei AEFA elementum ist vdy, ist also zdx gleich vdy, oder es ist z zu v wie dy zu dx. Nun ist aber AG zu AT oder zu v auch wie dy zu dx, ist also z so viel als AG. Wenn man demnach die Lini AC suchet, deren proprietät erfordere, dass CG sey zu AG, wie constans r zur unität, derowegen weil GE zu EC oder zu x, wie AG oder z zu AT oder v, so ist GE, $\frac{xz}{v}$; ergo quadr. GC ist $xx + \frac{xxzz}{vv}$, also GC oder $\frac{x}{v}\sqrt{vv+zz}$ zu AG oder z wie r zu 1, oder es wird $xxvv + xxzz = rrvvzz$. Wolte man das x abschaffen, und dafür das y brauchen, so kann es geschehen, dann GE ist $\frac{xz}{v}$ und auch $y-z$, ergo ist $x = \frac{yv-zv}{z}$. Solches vor x substituirt, giebt

$$yyv^2 - 2yzv^2 + v^2z^2 + y^2z^2 - 2yz^3 + z^4 = rrz^4.$$

Wenn man nun die quantität darinn z nur einerley dimension hat, evanesciren machen köndte, umb dadurch zu einer neuen aequation zu gelangen, so dürffte man sagen $yy + vv = 0$, welches aber ohnmöglich. Wolte man das vv aufzuheben sagen: $yy - 2yz + zz = 0$, oder $y = z$, so würde folgen das x wäre 0, welches absurd. Kan ich also den verlangten success darinn nicht finden. Solten Sie aber eine regulam divellendi geben können, so wäre es treflich. Zweifle nicht Sie werden gleichwohl etwas sonderbares darinn beobachtet haben, weilen ihm durch einen dergleichen weg des Marchionis Hospitalii construction auch herauss kommen.

Wegen Hrn. Fritschen stelle ich zu Dero guthen gelegenheit bey ihm einen grund zu näher kundschafft mit mir zu legen. Solte er etwa wegen der hiesigen Buchhändler bedencken haben, mit denen er etwa besorgen möchte dergestalt zu zerfallen, so dienet darauff, dass ich genug vorhabe umb mehr als eine wichtige Materien an hand zu schaffen.

Der Churfürst wird sich zu seines Hrn. Bruders Herzogs zu Zell Durchlaucht begeben, und alda etliche wochen mit der jagt sich biss der frost komt, erlustigen. Nach der rückkunfft werde ich das bewuste zu ...... trachten. Es würde wohl guth seyn, dass ich wüste wie bald Hr. Morenthal hierdurch passiren wird. Solte es sobald noch nicht geschehen, so stende dahin, ob solche abrede zu nehmen, dass man sich wegen der zeit darnach richten köndte.

Wenn er das Ms. Cartesii bey sich hätte, möchte ich es alsdann wohl sehen. Die Epistolam Cartesii ineditam, da er lehren will, wie man die Aequationes pares ad proxime inferiores impares generaliter reduciren soll, will ich auch aufsuchen. Wie mich aber bedüncket, so gehet es also nicht an. Doch Sie werden besser davon urtheilen. Ich wündsche alle vollkomne Vergnügung, und das ist stete und herrliche progressus, doch nicht sobald de globo in globum und verbleibe etc.

Boyle hat probirt, dass Edelsteine sonderlich Diamanten eine starke vim Electricam haben; er hält es vor eine der höchsten proben. Habe es erwehnen wollen, umb darauff zu dencken.

XXIV.

Tschirnhaus an Leibniz.

Dass vorietzo die gelegenheit nehme an Selbige zu schreiben, ist vorerst dass wohl gerne wiessen möchte, wie Sie sich Ihrer Orthen wegen wieder neuer verenderung der herrschafft befinden, und ob etwas ad emolumentum bonarum scientiarum dahero zu hoffen sey; vor dass andere so habe in Dero letztem Schreiben gesehen, dass Sie sich gewiesser Theorematum nicht erinnern können, welche in meiner letzteren durchreise nach Hanover erwähnet; so wihl hiermitt eines erwähnen, dadurch Sie sich leicht der andern erinnern werden: Sit (fig. 125) quaecunque sectio Conica DAFHCB; ducantur duae rectae AB et DC se intersecantes in E; jam ducantur Tangentes FG et HG his rectis DC et AB parallelae, concurrentes in G; dico rectang. AEB esse ad rectang. DEC ut quadrat. GH ad quadrat. FG.

Hinc patet, quia in Circulo FG et HG aequales, rectangula fore aequalia, et contra: si desideretur curva talis, ubi rectangula aequalia, haecce a priori per hoc Theorema statim possit determinari.

Von solchen Theorematibus habe damahl gesagt, dass es dergleichen vor alle curvas Geometricas gebe und dass die mathematici solche vor allen andern .... helfen eruiren solten, und dass allezeit dergleichen Theoremata universal vor einen gantzen gradum, wie auch eines producirct, dass pro tertio gradu war. Die-

weilen aber den methodum dergleichen Theoremata a priori zu eruiren bereits in Actis Eruditorum publiciret, so wihl hiervon nichts weiter gedencken, aber hierdurch wird klar sein, dass also curvae a priori können entdecket werden, cujus producta segmentorum AE, EB, DE, EC secundum quasvis potestates sint aequalia. Dass dritte, was hierbey vor diessmahl zu gedencken vor nöthig erachtet, bestehet hierin: Es ist mir vor weniger Zeit in Leipzig communiciret worden des Hrn. Johan. Bernoullii Modus genuinus Arcus Parabolicos inter se comparandi, da den viele sachen angetroffen, da er mich angreifet und sehr viel falsa affingiret. Nun wundere ich mich zwar gar nicht seines verfahrens, den haben die Brüder selbst publice so scharff einander angegriefen, so werden sie fremde nicht schonen, und besonders da dieser Joh. Bernoully klar zu erkennen gegeben, dass sein vornehmbster zweck sey Gloria: so ist mir alzubekand, dass dergleichen Leute aller ander Inventa suchen zu verkleinern und ihre eigen zu extolliren, und mit was vor circumspection also mitt solchen persohnen umbzugehen sey, massen mir gewiess bekand, dass nicht bald eine schändlichere Passion, sowohl vor die eigene Tranquillität sey, als auch vor den augmentum scientiarum, wie klährlich in der Medicina Mentis angewiessen . . . .
Diese (Antwort gegen Joh. Bernoulli) nun würde ohngefähr also lauten: Ich habe bey vergangener Newen Jahres Messe in Leipzig bereits den modum des Hrn. Bernoulli gesehen, die Arcus Parabolicos zu compariren; nun hette zwar ex tempore gleich darauff antworten können, obschon mediis Aulae occupationibus et diverticulis damahl abgehalten zu seyn schiene, doch nicht praecipitanter zu verfahren, so habe erwartet bies zu meinen ordinären otio vor die Studia gelanget; da annoch gleicher gedancken bin, dass nehmlich vorerst dessen inventum, die Arcus Parabolicos zu compariren absolute falsum sey, und dan, dass er mir unterschiedene sachen affingiret, welche mir niehmahls in sinn gekommen. Das erste wihl ich so klar darthun, dass es niemand wird leügnen können, der nur aliqualem cognitionem in hisce studiis hatt. Sit (fig. 126) CFJLN hyperbola aequilatera, cujus Asymptoton AM Angulum CAO bifariam dividens; dupla AC tanquam latere recto describatur Parabola ARSTV. Notum est vel ab Heuratii tempore, rectangl. ex recta CA in curvam AS aequari semper spatio Hyperbolico CAQJ; 2do ist auch bekand, si duo spatia sint hy-

perbolica FDGJ et LKMN hac ratione in se posita, ut AD sit ad AG sic AK ad quartam proportionalem AM, spatia haec fore aequalia, welches auch gantz leicht per methodum indivisibilium Cavalerii zu demonstriren. Wir wollen nun setzen, dass der Arcus Parabolicus RS sey aequalis x und der Arcus TV sey ex. gr. duplus prioris, sit AB $=$ a $=$ BC, AD $=$ b, AG $=$ c, AK $=$ f, AM $=$ g, $\sqrt{\text{area}}$ $=$ k.

Dieweilen nun spatium ex AC in RS und TV aequalia sind den spatiis hyperbolicis PFJQ und TLNO, und ex his spatiis gantz leicht zu deriviren die spatia FDGJ und LKMN, ponamus haec jam aequalia et obtinebitur aequatio talis $f^4 = \frac{bbccff + a^4ff}{cc} + \frac{4kbbccffx}{c^4 - bbcc} - \frac{a^4bb}{cc}$, in welcher ad determinandam f nihil obstat quam quantitas x seu Arcus Parabolici mensura; aber diesen ist leicht zu helffen, nam quia ad determinandas AN et AO a Dn. Bernoullio aequatio inventa, ubi Arcus Parabolicus non comprehenditur, ope duarum harum aequationum non solum determinabitur Arcus duplus, sed etiam absoluta mensura Arcus Parabolici dati (quia duae aequationes Joh. Bernoullii et haec mea, et duae hic incognitae sunt Arcus RS $=$ x et AK $=$ f). Adeoque certo hinc sequitur vel spatii Hyperbolici mensura hactenus desiderata, vel quod methodus quam nobis exhibuit falsa sit, et quia ipse prius neget (quadraturam nimirum hyperbolae) hinc impetrari, suspicor calculi lapsum, Authori inanimadversum, alicubi haerere, prout expertissimo circa similia facile accidere potest. Und kan diese methode (so ich bieshero gebraucht) gantz leicht durch einen Generalem calculum verificirt werden, dass man multiplicire datum arcum wie man wihl, niehmahls das intentum Geometrice kan obtiniret werden, ohne die quadraturam Hyperbolae, ausser wan Arcus aequales desideriret werden, aber alsdan kombt Arcus ab altera Parabolae parte existens herauss, welches wohl kein novum inventum zu nennen eo respectu, dass es nicht bieshero bekand, aber doch novum ea ratione ist, wan man demonstriren kan, dass ohne die quadraturam hyperbolae dergleichen nicht zu erhalten, wie vorietzo gethan, wiewohl einen gantz andern weg weiss, solam naturam curvaë Parabolicae considerando, ohne einzige reflexion auff die hyperbolam zu haben, da den eben diess conclusum herauss kombt, und ea ratione glaube dass es noch weniger unrecht als aliquid novi vormahls erwähnet habe. Wie den mein methodus universalis non ejusdem saltem curvae, sed qua quarumvis diversarum curvarum inter se comparandarum non absolute kan geschehen, wie mir affingiret wird, sondern nichts anders anweiset, als wie weit es möglich oder unmöglich, wie der Hr. Bernoulli ingleichen vorietzo in der Parabola intendiret hatt zu thun, obschon infelici successu.

Ferner habe niehmahlen irgendswo gesaget, dass secare curvam rectificationis ignotae et secare spatium curvilineum quadraturae ignotae, ejusdem difficultatis res sit, sehe also nicht auss was vor ursachen mir dergleichen affingiret wird. Wie mich endlich auch nicht wenig gewundert, dass der Herr Bernoulli mir die hierauff folgenden objectiones macht, dan ob zwar schon von des Cavalerii zeiten an das bekandt ist, was er hierbey saget, dass man nehmlich ex. gr. Ellipsin per infinitas Ellipses, und so alle spatia curva per curvas ejusdem generis dieselbige in data ratione dividiren kan, ob auch gleich einer, der bloss den titulum meines inventi ansehe, auff diese gedancken gerahten kondte, so dächte doch nicht, dass wen er die sache selber ferner deduciret sehe, und die curvas so produciret und da besonders des Hrn. Gregorii Scoti 62 Propos. seiner Geometriae Universalis citiret, dass, sage ich, niemand mir dies objiciren kondte, den hierdurch werden nicht curvae ejusdem gradus gefunden, sondern diversae naturae, die aber sehr nahe beykommen, wie dan in der Hyperbola und Circulo curvae können gegeben werden, deren indeterminatarum dimensio saltem ad 3 dimensiones ascendit; aber hierauff antwortet der Hr. Bernoulli, se non videre quid me permoverit ad indagandum per aliena et remota, quod in ipso statim vestibulo nulli non obvium; dieweilen aber durch meine methode, die spatia in data ratione zu seciren, allezeit zugleich die quadratura spatii, wan es möglich, herausskombt, welches, wie bekand, durch den vorigen weg nicht erhalten wird, so ersiehet man leicht, was mich dies zu indagiren bewogen, und dass dieses non cuilibet obvium sey, und also noch wohl Eruditi Orbis conspectum meritiret. De Circulo habe dergleichen auch nirgendswo gesagt, dass solche per lineas rectas in data ratione seciren kan, und also können die letzteren worte auff mich nicht gerichtet sein, wie zwar alle Lectores nicht anders dencken werden. Den auss meiner methode klar folget, dass die allergeringste curva Geometrica, dadurch wir solches thun können, ad tertium gradum gehöre, und also solches unmöglich sey; welches ein fein specimen, quanti momenti haec methodus sey, zumahlen es cuivis curvae kan appliciret werden. Dieses wehre also, was ich, wie gesagt, den Actis zu inseriren vorhatte, wihl aber solches zu Dero überlegung vorher communiciren, und auss Dero antwort sehen, was hierbey zu thun sein wird. Was die Cycloidem anlangt, ist demselbigen und mir lange bekand gewesen, wie die singularis proprietas Hugenii gar leicht zu demonstriren, wie auch Pardies publice gethan, und in Actis Anglicanis längst dergleichen etwas publiciret.

Endlich köndte auch mit wenigen meinen zustand gedencken, doch der Brieff ist über verhoffen zu lang gerahten, gedencke also mitt wenigen dass nuhnmero in kurtzen durch hülffe Ihro Durchlaucht von Fürstenberg, so ein Herr von ungemeinen herrlichen talent ist, in dem stande zu sein, was guttes pro publico zu effectuiren, wovon dan und wan in Actis bericht geben werde; vorietzo werden Spiegel fabriciret, die in der länge über 4 Leipziger Ellen und in der breite über 3 ellen halten, dergleichen Venedig und Frankreich nicht zu wege gebracht. Diess wehre also eine schöne sache vor eine Academie pro scientiis zu establiren, viel besser als des Weigelii, durch ein Universal Calendarium (welches schwer zu erhalten sein wird), besonders wen ich meine machinam (auff welche nicht glaube leicht die exteri fallen werden) hierzu communicirte, dergleichen grosse glässer zu schleifen; vermeine auch specimina genug hierdurch praestiret zu haben, indem glässer von 1½ bis 3 Centner schwere zu perfecten lentibus sphaericis fabriciret, davon eines in Leipzig bei Hrn. George Bosse, einem Kauffman, zu sehen etc.

Kiesslingswalda d. 8 Martii 1698.

XXVI.

Leibniz an Tschirnhaus.

Dero werthes habe zu recht erhalten und dem Hrn. Bernoulli zu Gröningen sofort davon nachricht geben, dass Sie ihn eines in seiner sectione lineae parabolicae vermuthlich eingeschlichenen irrthums erinneren wollen, daher auch vor guth gehalten, dass deren publication annoch verschoben 'würde. Dero Schreibens Extract habe ihm aber sogleich nicht mittheilen können, weilen ich solchen selbst zu machen nicht Zeit gehabt und niemand bey der Hand gewesen, der die copey in dergleichen materi wohl machen können. Darauf aber ist bald ein Schediasma novum von dem Hrn. Bernoullio eingelauffen, bloss seinen calculum zu verificiren, ohne einige berührung des ihrigen, welches ich auch auff sein begehren Hrn. Lic. Menckenio zugeschicket. Ich möchte wündschen, dass man die materi de sectionibus curvarum et comparationibus arearum nonquadrabilium fortsezete, denn zweifelsohne die natur mit den Areis conicarum nicht aufhöhren wird eine relationem unter den areis darzugeben, sondern es wird in einer gewissen progression fortgehen. Von einer area figurae partem imperatam abzuschneiden, ist zwar an sich selbst nicht schwehr, wenn Sie es aber, wie Sie es wehnen, also praestiren köndten, dass darauss impossibilitas vel possibilitas Quadraturarum erhellen köndte, wäre es wichtig. Ihres Theorematis, quod in conica a segmentis duarum rectarum utcunque ductarum facta rectangula sint ut quadrata Tangentium parallelarum, habe noch nicht erinnert, finde es aber überschöhn; erinnere mich der andern auch nicht, und wird mir deren communication allezeit sehr lieb seyn. Denn ich habe das gemüth alzusehr mit andern Dingen angefüllet, umb solche, obschohn gar feine Theoremata, die man mir etwa einmahl gesagt, zu behalten. Ich pflege auch lieber methodos zu suchen, dadurch man problemata resolviren könne. Doch verachte ich theoremata nicht, und schätze solche sonderlich hoch, welche eine progression geben. Inzwischen ist die erfindung der problematum bey weitem durch solche theoremata nicht ausgerichtet, wenn man gleich deren eines pro quolibet gradu gebe, und müste man deren unzehlich viel haben. Hoffe also, Sie werden von der methodo pro quotcunque punctis solvendi problemata, die ich vor vielen jahren ausgefunden und dadurch ich Hrn. Bernoulli problema so leicht solvirt, ganz anders als von solchen particular Theorematibus urtheilen.

Ich will zwar glauben, dass Hr. Bernoulli sein absehen mit auff die glori habe, denn wie M. H. H. am besten selbsten weiss, so hilfft sie viel in der welt bey andern Menschen; doch habe ich bey ihm noch zur zeit noch nicht gespüret, dass er andrer inventa zu verkleinern suche; denn er hat selbst gar schöhne dinge ausgefunden, und wer das kan, der hat nicht nöthig, sich durch andrer verachtung gross zu machen; thut es auch nicht, wenn er verstand hat. Was aber in specie Dero controvers mit ihm betrifft, bekenne ich dass ich sie gründtlich zu untersuchen die zeit nicht gehabt, will doch hoffen, er werde wie bishehr sich gegen Sie alles glimpfes gebrauchen, wozu ich dann allezeit rathe.

Freue mich sonderlich zu vernehmen, dass Sie Hofnung haben durch vornehme Assistenz nun etwas grosses auszurichten. Wenn ich bedencke, was Ihre und meine zeit almählig dahin gehet, und allerley hindernisse verursachen, dass wir dasjenige so sonst in unser macht, wenn requisita vorhanden, nicht zuwerck richten und also zu besorgen, dass viel sachen verlohren gehen werden, so nicht leicht sobald zu ersezen, wenn, sage ich, dieses bedencke, so finde nöthig, dass wir einmahl mit mehrerem ernst auff bessere anstalt dencken. Meine gegenwärtige labores betreffend die jura und interessen der Herrschafft halten mich zwar sehr ab, doch hoffe sie auch nun bald zu stande zu bringen, und alsdann freyer zu seyn. Wündsche dass Sie in vollkommener gesundheit noch lange Zeit mit schöhnen inventis fortgehen, und sonderlich was ad Medicinam gehöhret, noch besser excoliren mögen, denn daran wäre wohl am meisten gelegen. Verbleibe etc.

P. S. Wie gehts weiter mit ihren edelen steinen?

XXVII.

Tschirnhaus an Leibniz.

Ich hatte in willens diese Messe in die Acta Eruditorum specimina meines Methodi Generalis cujusvis curvae partes inter se comparandi absque ut ad ullam quadraturam respectus habeatur, aber ich habe noch den calculum zu revidiren nicht zeit gehabt. Durch diese methode können partes in quavis data ratione gegeben werden, quatenus possibile; ist auch allezeit, excepto circulo, data subtensa alicujus arcus curvae, alia subtensa alterius arcus curvae dabilis, ita ut differentia curvarum sit absolute quadrabilis; davon ein specimen in Ellipsi geben werde, den in der Parabola ist es sehr leicht; manchmahl geschieht es dass auch summa Arcuum ejusdem curvae quadrabilis, und alsdan ist curvae Rectificatio verrichtet; sonst diversarum curvarum (ex. gr. Parabolarum) summas und differentias zu quadriren, ist ex sola mea descriptione curvarum per focos nach der Medicina Mentis bekand, und bedarff nur eine kleine reflexionem. Uebrigens unterlassen Sie ja nicht dass gutte moment, da man zu Berlin vorhatt eine Academiam ad Mathesin et Physicam excolendam zu stabiliren; vielleicht kombt was hierauss, so sich Exteri nicht imaginiren, den die Teutsche Nation ist sehr laborieus, wen sie auff die rechten Principia gerahten. Wan ich mit Sie mündlich hierauss zu conferiren gelegenheit, ich wolte vielleicht viel dienliche vorschläge zu deren conservation beytragen.....

Leipzig d. 16 October 1700.

Observatio Flamstadii, quod Diameter Orbis magni in respectu stellarum fixarum sensibilem parallaxin habe, ist quantivis pretii.

XXVIII.

Leibniz an Tschirnhaus.

Hanover 17 April 1701.

Sie werden zweifelsohne von Hrn. Licentiat Menken bereits vernommen haben, dass Dero werthes vom 16 Octobr. vorigen Jahres mir erst kürzlich zukommen, indem selbiger wegen meiner abwesenheit die überschickung verschoben, darüber es hernach gar in vergessen und endtlich wieder zum vorschein kommen. Inzwischen werden Sie meine antwort auf das vorige hochgeneigte Schreiben erhalten haben, und ist ihr herrliche teutsche Einleitung zur Mathematik durch meine veranstaltung in den hiesigen Monathlichen Auszügen gebührend recensiret und guthentheils excerpiret worden, damit die hochnüzliche Lehre mehr und mehr ausgebreitet werde.

Auff Dero jüngstes nun zu kommen, erfreue ich mich zuförderst, dass Sie sich meiner so güthigst erinnern, und möchte ich eine conversation von etlichen tagen wohl höchlich wündschen, bin darinn unglücklich gewesen, dass es neulich nicht geschehen mögen.

Ihre Entdeckung, deren solches Schreiben meldung thut, von vergleichung der krummen Linien, dadurch man allezeit zu einem gegebenen bogen einen andern in eben derselben Lini finden könne, dergestalt dass der unterschied beyder absolute zu messen, wird von grosser wichtigkeit seyn und ein neues liecht geben.

Ich habe in meinem vorigen vor der Chur Brandenburg. nunmehr Königl. Societät bereits erwehnung gethan, welche der König in Preussen zu fundiren sich voriges Jahr entschlossen, da Seine Majestät sich meiner wenigen gedancken hierbey bedienen und mir das directorium dabey allergnädigst auftragen wollen. Nun ist der zweck zwar wohl begriffen, aber mit der vollstreckung kan es wegen grosser bekandter hindernisse und ander angelegener ausgaben nicht so geschwind von statten gehen. Weil man demnach die Königl. Kammer und Einkünffte zu beladen nicht gemeinet, so hat man sich zuförderst des monopolii der Kalender auff mein erinnern bedienet, so man sonst einigen privatis nach den Königl. Pohlnsch. Chur Sächsisch. Exempel überlassen haben würde; allein weil solches zu was rechtes nicht zulänglich, habe ich allerhand andere vorschläge gethan, so man auch approbiret, als unter andern, dass der Societät das privilegium der Schlangensprüzen (?) vor alle Königl. Lande gegeben worden. So habe ich auch auff einteichung der Moräste und dergleichen gedacht (welches absehen aber noch nicht bekand gemacht), so alles zu seiner zeit geschehen kan. Sollte Ihnen etwas dienliches und thunliches beyfallen, wird Dero guther rath mir sehr angenehm seyn.

Das erste absehen ist auf ein observatorium hauptsächlich gerichtet gewesen; ich habe aber dafür gehalten, dass mathesis und physica insgemein zu beobachten, ja nachdem Ih. Majestät selbst guth gefunden, dass was in der franz. Academie des Sciences und Academie Françoise de la Langue in eines gezogen, mithin die teutsche Sprache besorget würde, hat man vor nöthig geacht die zierlosen studia und die Histori nicht auszuschliessen. Ich habe insonderheit vorgeschlagen, dass die zusammentragung der Kunstworthe im teutschen den scienzen und der Sprache zugleich zum Aufnehmen gereichen würde.

Was aber insonderheit die Astronomi anbelanget, so düncket mich dass etwas mehreres als bissher zu thun. Herrn Flamstead observation, dass die Fixsterne eine merkliche veränderung nach der veränderung im diametro orbis magni zeigen, ist freylich wichtig, wenn man sich nur derselben genugsam versichern kan. Denn wenn es auf so kleine theile in observationibus ankomt, ist die sach misslich, gleich wie schohn bei Hrn. Hookii auch dahin gerichteter observation der Verfolg ermangelt. Daher ich vermeyne, dass solches alles, wenn es richtig, wohl sensibler zu machen. Ausserdem werden M. Hoch. Herrn vortrefliche inventa optica ein grosses liecht und hülffe geben, damit Teutschland den frembden etwas nichtiges entgegensezen, und den Ruhm der vorfahren erhalten könne. Ich befehle Sie etc.

XXIX.

Tschirnhaus an Leibniz.

Man hatte alhier vor eine Academie des scienses auffzurichten; ich solte auff Königlichen Befehl ein Project davon entwerfen, worzu auch einen anfang gemacht, weilen es aber hernach nicht starck urgiret wurde, so bin auch piano hierinne gangen.

Leipzig d. 23 April 1704.

XXX.

Leibniz an Tschirnhaus.

Ecrivant maintenant à la Reine de Prusse par la poste qui part avant midy, et luy parlant de vos belles pierres, capables de garnir un cabinet, il m'est venu dans l'esprit, de vous demander, Monsieur, si vous me pourriés peutestre marquer quelques particularités, pour savoir si on en a à vendre et à quel prix, pour en informer sa Majesté.

Il faut que je vous dise en même temps, Monsieur, que des personnes de grande consideration m'ont demandé encor maintenant mon avis sur une Academie des Sciences icy. J'avois repondu déja autresfois à une semblable demande, que la chose me paroissoit tres faisable et tres utile dans ce pays cy et même j'en avois donné mes avis. Mais à present j'ay repondu qu'ayant appris de

Vous, Monsieur, que vous aviés mis la chose en tres bon train, ou n'avoit qu'à suivre et executer vos bons projets, et que bien loin de vouloir troubler vos cercles, je me ferois un plaisir d'y contribuer.

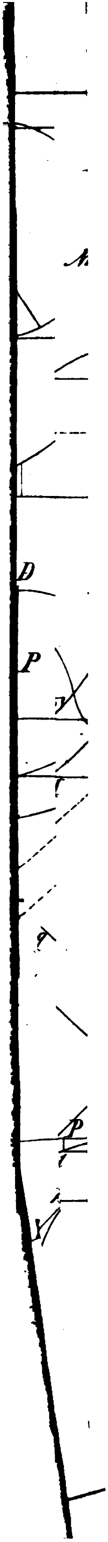
Dresde (wahrscheinlich zu Ende des Jahres 1704 geschrieben, als Leibniz in Dresden war, und mit Tschirnhaus in gegenseitigem Ideenaustausch, wie die vorhandenen Papiere beweisen, verkehrte).

XXXI.

Tschirnhaus an Leibniz.

Was die Etablirung bewusten Werkes zu des Publici besten concerniret, so stehet es annoch in besten Terminis, und habe bereits schon alles abgethan, was dass wichtigste hierin zu sein schiene. Besonders habe den tempo der anwesenheit des Serenissimi sehr wohl emploiiret, und weilen sehr offte gute gelegenheit hierzu in geheim hierüber als auch den Hrn. Stadhalter zu conferiren, ohne dass der Tertius solches verhindern kan, so habe meinen grösten Ernst sein lassen, alles auffs bestmöglichste zu perfectioniren, wovon suo tempore plura. Ich habe reflexion gemacht, gleichfalls den Hrn. Bernoulli, welcher zu Gröningen, anhero zu ziehen; möchte Dero meinung hierüber wohl vernehmen, indem ich plenariam potentiam zu choisiren habe, wehn ich wihl, und expressen hohen befehl und anordnung dass mir keiner auffgedrungen solle werden.

Dresden d. 6 Febr. 1705.


D
P
P