Leibnizens gesammelte Werke

aus den Handschriften

der Königlichen Bibliothek zu Hannover

herausgegeben

von

Georg Heinrich Pertz.

Dritte Folge

Mathematik.

Siebenter Band.

HALLE,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1863.

Leibnizens mathematische Schriften

herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

Zweite Abtheilung.

Die mathematischen Abhandlungen Leibnizens enthaltend.

Band III.

HALLE,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1863.

Inhalt.

Seite

Initia mathematica. Mathesis universalis. Arithmetica. Algebraica.

Geometrica.

INITIA MATHEMATICA.

MATHESIS UNIVERSALIS.

ARITHMETICA. ALGEBRAICA.

In Betreff des vorliegenden Bandes ist die Bemerkung vorauszuschicken, dass die bisherige Anordnung der Abhandlungen nach der Zeit ihrer Abfassung aufgegeben werden musste, insofern von den noch unedirten der Termin ihrer Entstehung nicht immer genau sich ermitteln liess. Es wurde deshalb auf die Verwandtschaft des Inhalts Rücksicht genommen, und es sind diejenigen, die ihrem Inhalt nach übereinstimmen, zusammengestellt. —

Je tiefer Leibniz in die einzelnen mathematischen Disciplinen eindrang, um so mehr überzeugte er sich, dass ein Aufbau derselben von den ersten Principien an nöthig sei. Dies erfordere nicht nur die Wissenschaft selbst, indem dadurch zugleich an ihrer Vervollkommnung gearbeitet werde, besonders aber sei es für diejenigen von der höchsten Wichtigkeit, die selbstständig in die Wissenschaft einzudringen wünschten, insofern sie kennen lernten, wie nach und nach der Fortschritt von dem Einfachsten zu dem Schwierigeren geschehe; auch erhielten sie so eine Anleitung, aus eigener Kraft neue Wahrheiten zu finden. Es ist namentlich das Letztere, die Erfindungskunst (ars inveniendi), der Leibniz an vielen Stellen seiner Schriften das höchste Lob spendet; er preist sie als das Wichtigste, wonach der Mensch streben müsse, denn von ihrer Vervollkommnung hängt das wahre Glück der menschlichen Gesellschaft ab. Dieser Gedanke beseelte ihn, den Meister in dieser Kunst, sein ganzes Leben hindurch. Unter seinen Papieren befinden sich mehrere Entwürfe mit den Aufschriften: Clavis mathematica arcana, Inventorium mathematicum, Thesaurus mathematicus, worin er die mathematischen Wissenschaften auf solche Weise zu behandeln beabsichtigte. Leibniz hat in den Jahren der rüstigsten Kraft daran gearbeitet, namentlich nachdem er die Principien der höheren Analysis gefunden; sie verdienen hier eine Stelle, um Leibnizens Thätigkeit auf dem Gebiet der Mathematik vollständig kennen zu lernen. Von diesen Entwürfen sind die einen für Anfänger geschrieben, die in die Wissenschaft einzudringen wünschen; andere für die, welche die Mathematik wissenschaftlich fördern wollen. Die Bruchstücke, die unter num. I. bis VI. mitgetheilt werden, geben ein Bild, wie Leibniz den hier besprochenen Gedanken zu verwirklichen gedachte.

Was nun zunächst die Arithmetik und Algebra betrifft, so waren Leibnizens erste wissenschaftliche Studien besonders diesen Gebieten zugewandt. Von seiner Jugendschrift, der Dissertatio de Arte Combinatoria, ist bereits die Rede gewesen. Ferner geht aus den Anfängen seiner Correspondenzen mit Oldenburg und mit Hugens hervor, dass er sich in der ersten Zeit seines Pariser Aufenthalts mit der Summation von Zahlreihen mittelst der Differenzen und mit der Theorie der algebraischen Gleichungen beschäftigte. Nur das Wenigste davon hat er selbst veröffentlicht, bei weitem das Meiste liegt in seinen hinterlassenen Papieren, zum Theil unvollendet und zum Druck nicht geeignet, vergraben. Auch die Eigenschaften der Zahlen entgingen seiner Aufmerksamkeit nicht; eine Notiz darüber ist aus einem Briefe Leibnizens an den Herausgeber des Journal des Savans 1678 bekannt gemacht worden. Von den dieses Gebiet betreffenden Untersuchungen, die in seinem Nachlass vorhanden sind, mögen nur die folgenden hier eine Stelle finden: De primitivis et divisoribus ex tabula combinatoria; Exercitium ad promovendam scientiam numerorum; Invenire triangulum rectangulum, cujus area sit quadratus.

Mit diesen arithmetischen Untersuchungen gingen algebraische Studien Hand in Hand. Bombelli's Algebra diente anfangs als Führer; aber seinem Grundsatz getreu, mit dem Erlernen einer Wissenschaft zugleich auch ihre Erweiterung anzustreben, gelang es Leibniz zuerst in der Auflösung der cubischen Gleichungen mittelst der Cardanischen Formel den sogenannten casus irreducibilis zu beseitigen.*) Besonders aber warf er sich mit der ganzen Kraft jugendlicher Energie auf das berüchtigte Problem, die allgemeine Auflösung der Gleichungen zu finden. Die ersten Versuche dazu

---

*) Siehe die Correspondenz mit Hugens Bd. II. S. 11 ff. — Die diesen Gegenstand betreffende, bisher unedirte Abhandlung Leibnizens ist in diesem Bande abgedruckt.

geschahen bereits um die Zeit, als Leibniz und Tschirnhaus zu Paris gemeinsam arbeiteten. Sie führten nicht zum Ziele, da sie im Wesentlichen darin bestanden, die auf die höchste Potenz folgenden Potenzen der Unbekannten aus der Gleichung wegzuschaffen. Dass es unmöglich sei, auf diesem Wege das Problem zu lösen, erkannte Leibniz sehr bald, und er tadelte Tschirnhaus, als dieser seine ebenfalls darauf basirte Methode in den Actis Eruditorum 1683 veröffentlichte. *) Da die Schwierigkeiten hauptsächlich darin bestanden, dass die für die Coefficienten erhaltenen Ausdrücke in Betreff ihrer Entstehung und Zusammensetzung sich schwer übersehen liessen und vorhandene Rechnungsfehler nur mit Mühe aufgefunden werden konnten, so meinte Leibniz in dieser Hinsicht Abhülfe zu schaffen, wenn er eine andere Bezeichnung der Coefficienten als die übliche durch Buchstaben einführte. Er drückte deshalb die Coefficienten durch fingirte Zahlen aus, so dass z. B. in den Gleichungen

$$10 + 11x + 12y = 0$$
$$20 + 21x + 22y = 0$$
$$30 + 31x + 32y = 0$$

von den fingirten Zahlen 10, 11, 12, 20, 21, 22, 30, 31, 32 jede Ziffer rechts anzeigte, zu welcher der Unbekannten sie gehöre, und jede Ziffer links, in welcher Gleichung, ob in der ersten, zweiten, dritten sie ursprünglich vorkomme. Dadurch wurde es Leibniz zunächst möglich, einen Canon für die Elimination der Unbekannten aus Gleichungen, die den ersten Grad nicht übersteigen, aufzustellen, welchen er sofort auf zwei Gleichungen von höheren Graden, die nur eine Unbekannte enthalten, ausdehnte. Er selbst spricht sich darüber auf einem Zettel, der vielleicht unmittelbar nach der Entdeckung geschrieben ist, folgendermassen aus:

Inveni Canonem pro tollendis incognitis quotcunque aequationes non nisi simplici gradu ingredientibus, ponendo aequationum numerum excedere unitate numerum incognitarum. Id ita habet.

Fiant omnes combinationes possibiles literarum coefficientium, ita ut nunquam concurrant plures coefficientes ejusdem incognitae et ejusdem aequationis. Hae combinationes affectae signis,

*) Siehe die Correspondenz mit Tschirnhaus Bd. IV.

ut mox sequetur, componantur simul, compositumque aequatum nihilo dabit aequationem omnibus incognitis carentem.

L e x s i g n o r u m haec est. Uni ex combinationibus assignetur signum pro arbitrio, et caeterae combinationes quae ab hac differunt coefficientibus duabus, quatuor, sex etc., habebunt signum oppositum ipsius signo; quae vero ab hac differunt coefficientibus tribus, quinque, septem etc., habebunt signum idem cum ipsius signo.

Ex. gr. sit $10+11x+12y=0, 20+21x+22y=0, 30+31x+32y=0,$ fiet

$$\left.\begin{array}{r} +10.21.32 \\ -10.22.31 \\ -11.20.32 \\ +11.22.30 \\ +12.20.31 \\ -12.21.30 \end{array}\right\} = 0$$

Coefficientibus eas literas computo, quae sunt nullius incognitarum, ut 10, 20, 30.

Ope hujus Canonis inveniri poterit alius Canon pro tollenda communi incognita ex duabus aequationibus gradus cujuscunque. Sunto aequationes binae ejusdem gradus: $10+11x+12xx+13x^3+14x^4=0$, et $20+21x+22xx+23x^3+24x^4=0$. Multiplicetur unaquaeque per formulam assumtitiam uno gradu inferiorem, producta ambo componantur in unam aequationem, cujus quilibet terminus sit aequalis nihilo, habemus tot aequationes quot incognitas assumtitias, quae sunt formularum assumtitiarum coefficientes, et unam aequationem praeterea; incognitae autem assumtitiae in simplice gradu consistunt. Itaque canon superior applicari potest. Quodsi duae aequationes literam communem tollendam habentes non sint ejusdem gradus, coefficientes graduum superiorum in aequatione inferiore erunt aequales nihilo.

Veniamus ad exemplum:

$$10+11x+12xx=0 \text{ multiplicetur per } 30+31x$$
$$20+21x+22xx=0 \text{ multiplicetur per } 40+41x,$$

ubi 12, 22, 31 poni possunt $=1$ et $41=-1$. Compositum ex duobus productis erit:

$$\left.\begin{array}{llll} 10.30 & +\,11.30x & +\,12.30xx & \\ & \,10.31.. & \,11.31.. & +\,12.31x^3 \\ 20.40 & +\,21.40.. & +\,22.40.. & \\ & \,20.41.. & \,21.41.. & +\,22.41.. \end{array}\right\} = 0$$

ubi ut destruatur x, fient aequationes tres:

$$10.30+20.40=0,\quad \left.\begin{array}{r} 11.30+10.31 \\ 21.40+20.41 \end{array}\right\}=0,\quad \left.\begin{array}{r} 12.30+11.31 \\ 22.40+21.41 \end{array}\right\}=0$$

nam quarta $12.31 + 22.41 = 0$ per se patet, posito $12, 31, 22 = 1$, et $41 = -1$. Harum trium aequationum ope tolli possunt incognitae assumtitiae 30 et 40;

coefficientes ipsius 30 sunt	10, 11, 12	
40 sunt	20, 21, 22	
neutrius nempe ipsius 1		
coefficientes sunt		0, 10—20, 11—21
seu compendio		0, 51, 52

Habemus combinationes cum suis signis debitis et ex iis aequationem incognitis assumtitiis pariter ac litera x carentem

$$\left.\begin{array}{l} +10.21.52 - 10.22.51 \\ -11.20.52 + 12.20.51 \end{array}\right\} = 0, \quad \begin{array}{l} \text{ubi } 12 \text{ et } 22 = 1\text{, et } 51 = 10-20, \\ \text{et } 52 = 11-21. \end{array}$$

$$\text{Unde fiet } \left.\begin{array}{l} +10.11.21 - 10.10.22 \\ -10.21.21 + 10.20.22 \\ -11.11.20 + 10.12.20 \\ +11.20.21 - 12.20.20 \end{array}\right\} = 0$$

Von dieser Coefficientenbezeichnung, die zuerst in einem Manuscript aus dem Jahre 1678 vorkommt*), so wie von der dadurch

---

*) Unter den Leibnizischen Manuscripten findet sich das folgende, datirt: Junii 1678, mit der Aufschrift: Specimen Analyseos novae, qua errores vitantur, animus quasi manu ducitur et facile progressiones inveniuntur.

Pro literis numeros adhibeo, quoniam ita perpetuo singulis ut ita dicam passibus promotis instituere possum examen per abjectionem novenarii vel etiam summationem. Examen per novenarium sufficit adhiberi continuo, examen autem exactius per summationem satis est singulis stationibus adhiberi. Praeterea adhibitis numeris in proclivi mihi est inter ipsas quantitates sive characteres ordines atque relationes varios exacte exprimere, ita ut statim primo adspectu in progressu appareat, quaenam litera cognita ad quam incognitam pertinuerit aut quam ejus potentiam affecerit, quod in numeris exactissime assequi licet, in literis non item. Haec observatio omnium, quae de calculo fieri possunt, maximi momenti est: ita facile et velut sponte sua se detegunt praeclara theoremata et progressiones, ita ut pleraque sine calculo scribi possint, initiis tantum praelibatis. Sane si quis in exemplo praesenti, datis quatuor literis totidemque aequationibus simplicibus plenis, valorem unius ex ipsis quaerat et literas indistincte gewonnenen bemerkenswerthen Entdeckung hat Leibniz in seinen Untersuchungen, besonders in der Behandlung von Problemen aus der höheren Analysis den ausgedehntesten Gebrauch gemacht; die mathematischen Manuscripte aus der spätern Zeit seines Lebens zeigen zahlreiche Spuren davon. Er selbst hat ausser der ziemlich kurzen Notiz am Schlusse seiner Vertheidigung gegen Fatio's Angriffe nichts darüber veröffentlicht; dagegen hat er in seinen Correspondenzen nicht selten darauf hingewiesen und zu ihrer Vervollkommnung, die ihm ganz besonders am Herzen lag, aufgefordert, vielleicht am ausführlichsten in seinen Briefen an den Marquis de l'Hospital (Bd. II. S. 238 ff.)

Es ist bereits an einem andern Orte darauf aufmerksam gemacht worden, dass wegen des Obigen Leibniz berechtigt ist, auf die erste Entdeckung der in neuester Zeit so wichtig gewordenen Lehre von den Determinanten Anspruch zu machen. Er hat ferner zuerst die Regel gefunden, die um die Mitte der vorigen Jahrhunderts von Cramer bekannt gemacht wurde und nach ihm benannt wird; desgleichen hat er zuerst für einzelne Fälle das Eliminationsverfahren zur Anwendung gebracht, das um ein Jahrhundert später Bezout als ein allgemeines aufstellte. —

Durch eben jene Coefficientenbezeichnung wurde Leibniz höchst wahrscheinlich darauf geführt, dass jede ganze Zahl durch zwei Zahlzeichen ausgedrückt werden könnte; es wäre demnach seine Dyadik lediglich als ein Corollarium jenes Verfahrens zu betrachten.

---

ut solent assumat a, b, x, y etc. ut lubet, confusionem experietur horribilem et laborem immensum, cum nostro more res nullo pene negotio peragatur, ut patebit. Artis ergo characteristicae haec summa regula est, ut characteres omnia exprimant quae in re designata latent, quod numeris ob eorum copiam et calculandi facilitatem optime fiet. Item et in Geometria magni usus est ad situs exprimendos.

I.

PRAEFATIO CLAVIS MATHEMATICAE ARCANAE.

Quoniam interest generis humani artem inveniendi mathematicam hactenus in arcano habitam aut ignoratam perfici atque inter eruditos vulgarem reddi, ut pluribus hoc organo instructis junctisque multorum operis inventa vitae utilia augeantur, ideo libellum hunc ita scribere constitui, ut solus sufficiat ad scientiam mathematicam a primis Elementis ad intima usque arcana intelligendam, et si occasio detur proprio cujusque studio in immensum provehendam. Scio multos esse mathematicae rei amatores, sed in principiis haerere, quia a nemine recte ducuntur. Horum bonae voluntati succurrendum existimavi. Itaque ita scripsi, ut semper videant discentes rationem eorum quae discunt, imo ut ipsa etiam inventorum origo appareat, ac ut perinde omnia intelligant ac si omnia per se invenissent ipsi. Diligentia atque animi attentione opus esse quisque facile judicabit, jucundius tamen aut brevius ista hactenus tractata esse non puto. Nihil enim affero, quin usum quoque ejus monstrem, quod maxime illi desiderant, qui vitae potius quam scholae discunt. Memoria quoque nulla ratione magis juvatur, quam si quis rationes praeceptorum teneat; ita enim quae memoria elapsa sunt, facile meditando eruuntur.

Porro ingentes esse utilitates disciplinarum mathematicarum experimento publico constat; sciunt enim omnes, quanti sit rerum pretia numeris aestimare, agros ac solida liquidaque metiri, tempora et astrorum cursus cognoscere instrumentis, locum ubi agas in longinquis navigationibus et medio mari vel abditis terrae cavernis indicare posse, firmas commodasque substructiones moliri quibus ab aëris hominumque injuriis defendamur, certis quibusdam instrumentis in sentiendo juvari et in agendo dirigi, vires denique nostras machinis in immensum augere. Magna haec sunt, sed majora supersunt, in quibus humano generi mathematica scientia prodesse posset, si satis sciremus Dei beneficiis uti. Usus autem illi etsi nondum experimento sint comprobati, satis tamen agnoscentur ab his qui mecum cogitabunt, physicam nihil aliud esse quam Geometriam materiae applicatam, et posse a nobis tot experimenta sumi circa naturam, imo jam in promtu esse, ut credam sufficientia jam data haberi ad corporum multorum texturas interiores cognoscendas maximo generis humani bono, si sanitatis nostrae curam gerere vellemus, et si geometrae exhaustis artis suae praeceptis jam serio in natura explicanda laborarent, tandemque tot praeclaris experimentis in unum congestis uterentur. Quod nisi faciunt, peribit nobis laborum nostrorum fructus, quos post multa secula vix denique percipiet posteritas.

Haec cum mecum cogitarem attentius, observavi in geometriae applicatione ad naturam aut mechanicam occurrere plerumque problemata longe diversa ab his quae vulgo considerant geometrae, planeque per algebram intractabilia. Unde non nisi maximos geometras in hoc genere specimina alicujus momenti dedisse videbam, caeteris velut a limine repulsis. Agnito ergo algebrae defectu, cogitavi de vera Analysi Mathematica, sive via certa ac determinata, per quam semper ad propositum pervenire possemus. Hanc tandem assecutus mihi videor, quae algebram hodie receptam infinitis transcendit modis; docet enim solvere problemata, quae neque plana neque solida aut supersolida sunt, sed proprie nullius certi sunt gradus, proinde a me transcendentia appellantur, qualia sunt potissima atque utilissima quaeque. Quare qui algebram quidvis praestare posse putat, aut inconsiderate loquitur aut problemata majoris momenti tractare non est expertus.

Hanc ergo artem in Mathematicis inveniendi generalem publicare constitui boni publici amore; gloriae enim fortasse meae magis velificarer, si speciminibus editis methodum supprimerem. Sed supersunt mihi longe majora, et generis humani interest, ut geometrae, quod supra dixi, exhaustis artis suae praeceptis, jam serio cogitent de applicatione ejus ad naturam, ubi si methodum a me hic praescriptam et exemplis illustratam sequentur, non dubito quin detecturi sint non pauca quae nunc ingenio humano impenetrabilia habentur. Tempus credo veniet, nec opinor longe abest, et hoc libello meo fortasse accelerabitur, quo omnis mathematica doctrina non minus vulgata erit inter eruditos, quam nunc arithmetica communis est inter plebejos, nec amplius de geometria (nisi exercendi tironum ingenii causa) sed de usu ejus laborabitur. Unum tamen nondum tradam, quod nec perfecte possem, artem scilicet inveniendi brevissimas atque optimas vias, quanquam et in eo genere non pauca praestiterim et videam progrediendi rationem. Sed nunc quidem contenti sumus habere vias certas ac determinatas propositum assequendi, quod tutius imo et brevius est quam fatigare animum et temere divagari velle, ut casu in meliora incidamus.

Methodum in tradendo hanc sequar. Primum exponam genesin numerorum et characteres, quibus exprimuntur. Deinde explicabo Logisticam seu modum calculandi, id est addendi, subtrahendi, multiplicandi, dividendi et radices extrahendi, idque tum in numeris indeterminate et generaliter sumtis, tum in numeris determinatis per characteres suos expressis, quod vulgo vocant Algorithmum, ubi tradetur et expressio per decimales et tabulae variae numerorum, quibus calculus sublevatur, inter quas est tabula logarithmorum. Inde explicabo Algebram, id est modum inveniendi valores incognitorum numerorum literis expressorum, sive modum logisticae praeceptis ita utendi, ut primum nanciscamur aequationem, quae exprimat relationem inter incognitam et cognitas, deinde ut extrahamus radices ex aequationibus tum exacte tum per appropinquationem in infinitum continuatam seu seriem infinitam idque tum in literis tum in numeris. Algebram sequitur Arithmetica Diophantea, ubi id quod quaeritur non est satis determinatum, sed pro nostro arbitrio porro determinandum, ea tamen arte ut conditiones quas pro arbitrio assumimus aptae sint ad quaestionem reddendam faciliorem. Hanc scientiam quae hactenus in potestate Analytici non fuit, tandem absolvi. Subjiciam specimen Tabularum Analyticarum mirificarum, quibus calculus literalis magis contrahetur, quam calculus numerorum per logarithmos. His tabulis absolutis omnis calculus literalis imposterum ludus jocusque erit. Sequitur Analysis transcendentium seu eorum quae ab aequatione certi gradus non pendent, eaque duplex, una summarum et differentiarum in seriebus, altera exponentium in potestatibus.

Hactenus magnitudines in universum tractavimus velut Numeros, nulla situs ac figurae ratione habita. Nunc ergo agemus de Geometriae Elementis, nempe de situ, de angulo, de natura rectae, circuli aliarumque figurarum quarum generationes et potissimas potestates ita explicabimus, ut caeteras quae per calculum ex his facile ducuntur non attingamus. Inde jungendo calculum cum geometria ostendemus primum, quomodo ea quae per geometriam et ductum linearum sive per motum determinata habentur, exprimi possint per calculum; deinde vicissim quomodo ea quae calculo determinata sunt, construi possint per ductum linearum. Sequitur Geometria transcendentium, nempe de quadraturis figuarum, quo refero dimensiones curvarum et superficierum et inventiones centrorum gravitatis; item de methodo tangentium inversa, quae Geometriae fastigium est. Atque ita absoluta est pars mathematicae doctrinae pura; subjicienda est mixta, quae nihil aliud continet, quam methodum problemata concreta revocandi ad abstracta ejusque exempla, ex quibus simplicissima sunt quae exhibet Optica. Hanc sequitur Mechanica, inde Musica, post Astronomia et Geographia ac Navigandi ars, et Architectonica, et Scientia militaris. Et omnino post Opticam et Mechanicam et Musicam et Astronomiam caetera tractanda eo ordine, quem postulat usus eorum in vita, ut appareat origo inventionis; ea enim cognita mirifice et acuitur ingenium et memoria sublevatur. *)

---

*) Ein der Clavis mathematica arcana ähnliches Werk gedachte Leibniz unter dem Titel: Thesaurus mathematicus, zu verfassen. Ueber den Inhalt desselben äussert er sich folgendermassen: Consilium operis: efficere ut lector attentus sine praeceptore, sine aliis libris proprio marte jucunde et facile non discere tantum pulcherrima atque utilissima mathematicorum inventa paucis comprehensa possit, sed etiam rationes veras atque inventionum origines teneat sciatque, qua ratione non haec tantum ipse si quando forte oblitus sit sibimet reperire denuo regularumque discendarum labore carere, sed et infinita alia ubi opus erit invenire oblataque problemata licet a nemine tractata quantum ad usum sufficit accurate solvere possit.

II.

INVENTORIUM MATHEMATICUM.

Praefatio. *)

Cum usu deprehenderim, agnoscantque nunc primarii geometrae, receptam analysin ad problemata difficiliora non sufficere qualia quotidie occurrunt geometriam ad mechanicen caeterasque artes vitae utiles applicantibus, et mihi ad universalia respicienti quaedam inveniendi artificia obtigerint quae superioris cujusdam scientiae corollaria tantum esse video: specimina haec in publicum exire volui, tum ut excitentur praestantiora ingenia, aperto aditu novo, tum ut illi ab errore liberentur qui cum facilia tantum experti sint proprio marte, putant tamen quidvis analysi sua praestari posse, magno detrimento juventutis, quae vana scientiae opinione inflata remittit a diligentia et progrediendi conatum deponit, cum tamen pulcherrima atque utilissima geometria, qua tum maxime indigemus cum lineas calculumque ad naturae arcana artiumque desiderata applicamus, prope intacta supersit.

Sciendum est autem, problemata difficiliora pleraque aut non omnino aut non nisi singulari artificio ad aequationes reduci posse, quales vulgo quaerunt: multa enim desinunt in aliud quoddam aequationum genus, quas vocare soleo transcendentes, quia non sunt certi gradus, sed vel graduum simul omnium, vel gradus ut ita dicam infiniti, quare problemata quae ab his pendent neque plana neque solida sunt neque suprasolida modo definito, possunt tamen solvi per calculum non minus quam per constructiones lineares. Sed lineae in geometriam recipiendae sunt novae, geometricae quidem, hacte-

---

*) Leibniz hat später hinzugefügt: Praefatio ad provectos. De his quae nova praestitimus. Alia addenda praefatio ad discentes, addendum optare me, ut imposterum de mathematicis abstractis arcana possimus deponere, accedentes ad naturam. — Am Rande des Manuscripts hat Leibniz zur Erklärung der Aufschrift bemerkt: Methodus Mathematica Nova, qua quisque instructus harum scientiarum arcana facile intelligere et per se invenire potest.

nus tamen pro mechanicis habitae etiam a novissimis autoribus, sunt enim transcendentes et analyticam quidem relationem habent omnium punctorum habitudinem perfecte exprimentem, sed quae per naturam rerum non est definiti gradus, possunt tamen describi exacte sine ulla transmutatione curvi in rectum, motu non minus continuo et ab uno principio pendente quam quo conchoides circuli aut parabola describitur, quanquam hic describendi modus non sit notus. Has ergo a geometria excludere nihil aliud est quam modum sibi adimere solvendi maxima atque utilissima problemata, quae demonstratum est aliter solvi non posse.

Unde intelligi potest, incipi a nobis, ubi Vieta et Cartesius desinunt, proportione incrementi longe majoris quam quo ipsi Apollonium ac Diophantum supergressi sunt, et quemadmodum illi problemata altiorum graduum quae plana solidaque excedunt, numeris lineisque tractare docuerunt, ita nos geometriam aequationes ipsorum transcendentem docentes, campum inveniendi aperimus longe immensiorem. Problemata enim quae aequationibus sive planis sive solidis sive utcunque suprasolidis continentur, omnia si recte inspicias tantum rectilinea sunt (etsi curvarum intersectione solvantur) et variis inter datas quaesitasque rectas rationum compositionibus tantum constant; sed cum curvilineae magnitudines calculum ingrediuntur, aut problemata ejus sunt naturae, ut non rationum certa compositione potentiarumve certi gradus aequalitate sed aliis quibusdam habitudinibus quales sunt innumerae determinentur, verbi gratia per angulos aut exponentes incognitos, per tangentium proprietates, per maxima et minima serierum exploratarum, tum vero non potest inveniri ultima quaedam aequatio certi gradus quales vulgo quaerunt, cujus radicibus per numeros lineasve exhibitis problema solvatur, sed aequationibus lineisque transcendentibus opus esse certum est. Itaque ut rem omnem pauois complectar, Veteres geometriam planam ac solidam tantum tradidere, persuasi alias solutiones tantum mechanicas esse; recentiores vero deprehenso eorum errore suprasolidam quidem, sed certi gradus cujuscunque tantum adeoque non nisi rectilineam adjecere, obstruxere vero ipsi sibi progrediendi viam, dum simili plane errore quae hanc legem ab ipsis latam subire non poterant, velut mechanica rejecerunt, cum tamen contemplationes effectionesque haberent pulcherrimas utilissimasque et analytice exprimi possint per aequationes de gradu in gradum transeuntes. Sic ergo haec nobis relicta est provincia vacua, ut geometriam curvilinea metientem et analysin transcendentem eique propria Loca sive lineas effectioni problematum necessarias supplentes, fastigium quoddam scientiae imponeremus. Quae qui cum vulgata hodie methodo contulerit, intelliget neque difficultatis neque amplissimi usus comparationem fieri posse.

Nam quod ad difficultatem attinet, equidem hujus calculi quem Vieta introduxit, et constructionum quas Cartesius adhibuit, apud Veteres multa satis vestigia habentur, ut tantum quae ipsi Veteres inconsulte coërcuerant arctis nimis limitibus paucorum graduum, simili plane ratione ad caeteros producerentur symbolisque enuntiarentur commodis; sed nostri calculi apud Veteres ne vestigium est quidem, ac ne problemata quidem talia apud illos quaeri solita sunt, exceptis tantum paucis quae cognita videntur uni Archimedi, qui tamen suas artes adeo callide texit, ut nemo Veterum eas suspicione assecutus sit, unde nec quisquam Veterum quicquam praestitit in Geometria Archimedea. Recentiores eam ex latebris eruere, excellentes viri Galilaeus, Cavalerius, P. Gregorius, Guldinus, Fermatius, sed summam rei non sunt assecuti. Et vero totum hoc quo Archimedes usus videtur, transcendentis analyseos pars tantum exigua est, unde ad reliqua aditus non patet. Vietam et Cartesium potuisse arbitror aliquid magni praestare, etiam in hoc genere, sed ille nimia modestia (dum quadam antiquitatis reverentia etiam quae potest, se posse non putat solutionesque plane geometricas pro mechanicis habet), hic nimia ingenii sane maximi fiducia (dum ad quae aditum ex calculo suo primo obtutu non videbat, ea pro impossibilibus damnat et ad mechanica relegat) sibi obstitere. Sed in universum dici potest, talem esse calculum nostrum transcendentem, ut non unquam facile in mentem venire possit. Et quamvis profitear excellentissimorum Geometrarum, Hugenii, Huddenii, Heuratii, Pascalis, Slusii, Wrenni, Wallisii, Barrovii, Gregorii, Mercatoris, Neutoni, ingeniosissimis inventis me mirifice adjutum esse, agnoscent tamen opinor hi quoque qui ex illis hodieque superant pro candore suo, praestita esse a me quae fieri posse ipsi fortasse nec expectabant.

Usum vero geometriae hujus novae liber hic satis ostendet: illud tantum hoc loco monere satis erit, eum infinities ejus geometriae usum superare quam supplevit Veteribusque adjecit Vieta vel Cartesius, nam in Opticis, in Astronomia, in Mechanicis et in universum in mathesi quae cum physica concrevit, raro occurret problema utile ad aequationem receptam revocabile, quod ascendat ad suprasolida sive quod per geometriam planam vel conicam solvi non possit aut constructionibus a Cartesio primum introductis indigeat, cum tamen in iisdem scientiis perpetuo incurremus in quaestiones quae ad aequationes receptas reduci non possint, et si quis eas analytice tractare velit, huic analysi transcendente opus erit, nam hactenus egregii viri qui aliquid in hoc genere praestitere, fere ingenii potius sagacitate atque harum rerum usu quam methodo atque analysi quam aliis communicare potuissent sibi viam fecere. Imposterum autem nihil esse arbitror pure mathematicum, quod hac nostra methodo transcendente recte intellecta superari non possit, hoc uno excepto, quod artem inveniendi vias brevissimas, tametsi aditum ad eam videam, nondum in promtu habeam, et nisi mihi aut me felicioribus otium ei rei necessarium suppetat, absolvendam relinquo posteritati.

Caeterum una superest methodus sublimior, qua naturae artisque, quin imo et Metaphysicae et Vitae civilis problemata ad terminos quasi pure mathematicos reduci possint calculoque subjici in tantum certo, in quantum ex datis ingenio humano fieri potest; sed haec pertinent ad Artem inventoriam generalem nondum cuidam scriptorum quantum judico agnitam, et plane diversam ab omni eo quod hi quos legere aut cum quibus conferre memini, sibi figurant aut suspicantur. De quo hoc unum nunc dicere satis erit, habere me demonstrationem ejus, viamque videre infallibilem atque ita designatam, ut in ea persequenda exerrare aliquis non possit certoque sit voto potiturus, sed labore complanandum esse iter temporisque compendium esse quaerendum, conspiratione aliquot virorum huic rei aptorum. Cujus artis Elementis utcunque traditis non dubitem intra viginta annos majora ad humanae vitae usum praestari etiam in scientiis, quae maxime conjecturales sed tanto magis necessariae sunt, quam sueto ratiocinandi atque experimenta instituendi modo, aliquot secula, ne dicam annorum millenarii dabant. Nunc enim jam inopia, jam copia experimentorum atque ratiocinationum laboramus, et uti divitiis nostris non possumus nescimusque saepe, quid possideamus, similes illis qui ingentem apparatum habent, inventarium vero nullum, aut qui semper materiam colligunt, nunquam aliquid exstruunt. Quin etiam saepe cum possemus ex datis aut facile parabilibus experimentis magna quaedam et utilia colligere, si vel artem experimenta recto consilio instituendi teneremus vel si empiricae industriae scientiam analyticam adjiceremus, contenti tamen sumus vel incertas hypotheses comminisci vel ex observationibus conclusiones ducere aliunde jam notas et per se demonstrabiles deplorabili temporis sumtuumque jactura. Quare si sic pergimus, serae tantum posteritati laboramus, cum possemus, si saperemus quidem, ipsi laborum nostrorum percipere fructus. Atque haec quidem illis consideranda commendo, qui altiore genio res agitant, veroque affectu publica bona prosequuntur; an autem fides aliqua tribuenda sit sive votis sive propositionibus meis, his qui libellum hunc intelligent, judicandum relinquo, hoc unum nunc adjicere contentus, duas inventoriae artis partes esse, analyticam et combinatoriam, instrumentum autem inventionis humanae generale esse characteres aptos, quod satis Arithmeticae et Algebrae et Geometriae ipsius exemplo patet: mens enim filo quasi quodam sensibili regenda est, ne vagetur in labyrintho et cum multa simul complecti distincte nequeat, adhibitis signis pro rebus, imaginationi parcit: multum tamen interest, quomodo signa adhibeantur ut res utiliter referrant; et jam nunc profiteor, hoc, quicquid est quod inventioni mathematicae adjeci, ex hoc uno natum esse, quod usum symbolorum quantitates repraesentantium reddidi meliorem.

III.

INITIA RERUM MATHEMATICARUM METAPHYSICA.

Cum insignis Mathematicus Christianus Wolfius nuper in Cursu suo Mathematico Latino meditationes quasdam meas circa Analysin Axiomatum et circa naturam similitudinis attigerit et pro more suo illustrarit (vid. Act. Erudit A. 1714), visum est nonnulla huc spectantia, dudum a me animo concepta, ne intercidant proferre, ex quibus intelligi potest, esse artem quandam Analyticam Mathematica ampliorem, ex qua Mathematica scientia pulcherrimas quasque suas Methodos mutuatur. Paulo ergo altius ordiri placet:

Si plures ponantur existere rerum status, nihil oppositum involventes, dicentur existere **simul.** Itaque quae anno praeterito et praesente facta sunt negamus esse simul, involvunt enim oppositos ejusdem rei status.

Si eorum quae non sunt simul unum rationem alterius involvat, illud **prius,** hoc **posterius** habetur. Status meus prior rationem involvit, ut posterior existat. Et cum status meus prior, ob omnium rerum connexionem, etiam statum aliarum rerum priorem involvat, hinc status meus prior etiam rationem involvit status posterioris aliarum rerum atque adeo et aliarum rerum statu est prior. Et ideo quicquid existit alteri existenti aut simul est aut prius aut posterius.

Tempus est ordo existendi eorum quae non sunt simul. Atque adeo est ordo mutationum generalis, ubi mutationum species non spectatur.

Duratio est temporis magnitudo. Si temporis magnitudo aequabiliter continue minuatur, tempus abit in Momentum, cujus magnitudo nulla est.

Spatium est ordo coexistendi seu ordo existendi inter ea quae sunt simul.

Secundum utrumque ordinem (temporis vel spatii) **propiora sibi aut remotiora** censentur, prout ad ordinem inter ipsa intelligendi plura paucioraque correquiruntur. Hinc duo puncta propiora sunt, quorum interposita ex ipsis maxime determinata dant aliquid simplicius. Tale interpositum maxime determinatum, est via ab uno ad aliud simplicissima, minima simul et maxime aequabilis, nempe recta, quae minor interjecta est inter puncta propiora.

Extensio est spatii magnitudo. Male Extensionem vulgo ipsi extenso confundunt, et instar substantiae considerant.

Si spatii magnitudo aequabiliter continue minuatur, abit in punctum cujus magnitudo nulla est.

Situs est coexistentiae modus. Itaque non tantum quantitatem, sed et qualitatem involvit.

Quantitas seu Magnitudo est, quod in rebus sola compraesentia (seu perceptione simultanea) cognosci potest. Sic non potest cognosci, quid sit pes, quid ulna, nisi actu habeamus aliquid tanquam mensuram, quod deinde aliis applicari possit. Neque adeo pes ulla definitione satis explicari potest, nempe quae non rursus aliquid tale involvat. Nam etsi pedem dicamus esse duodecim pollicum, eadem est de pollice quaestio, nec majorem inde lucem acquirimus, nec dici potest, pollicis an pedis notio sit natura prior, cum in arbitrio existat utrum pro basi sumere velimus.

Qualitas autem est, quod in rebus cognosci potest cum singulatim observantur, neque opus est compraesentia. Talia sunt attributa quae explicantur definitione aut per varias modificationes quas involvunt.

Aequalia sunt ejusdem quantitatis.

Similia sunt ejusdem qualitatis. Hinc si duo similia sunt diversa, non nisi per compraesentiam distingui possunt.

Hinc patet exempli causa, duo Triangula aequiangula habere latera proportionalia vel vicissim. Nam sint latera proportionalia, similia utique sunt triangula, cum simili modo determinentur. Porro in omni triangulo summa angulorum est eadem, cum aequetur duobus rectis; ergo necesse est in uno rationem angulorum respondentium ad summam esse quae in altero; alioqui unum triangulum ab alio eo ipso distingui posset, ex se scilicet seu singulatim spectatum. Ita facile demonstratur quod alias per multos ambages.

Homogenea sunt quibus dari possunt aequalia similia inter se. Sunto A et B, et possit sumi L aequale ipsi A, et M aequale ipsi B sic ut L et M sint similia, tunc A et B appellabuntur Homogenea.

Hinc etiam dicere soleo, Homogenea esse quae per transformationem sibi reddi possunt similia, ut curva rectae. Nempe si A transformetur in aequale sibi L, potest fieri simile ipsi B vel ipsi M, in quod transformari ponitur B.

Inesse alicui loco dicimus vel alicujus ingrediens esse, quod aliquo posito, eo ipso immediate poni intelligitur, ita scilicet ut nullis opus sit consequentiis. Sic ubi lineam aliquam finitam ponimus, ejus extrema ponimus ejus partes.

Quod inest homogeneum, Pars appellatur, et cui inest appellatur Totum, seu pars est ingrediens homogeneum.

Terminus communis est, quod duobus inest partem communem non habentibus. Quae quoties intelligantur partes ejusdem Totius, is terminus communis dicetur Sectio totius.

Hinc patet, Terminum non esse homogeneum terminato, nec Sectionem esse homogeneam secto.

Tempus et Momentum, Spatium et Punctum, Terminus et Terminatum, etsi non sint Homogenea, sunt tamen homogona, dum unum in alterum continua mutatione abire potest.

Locum qui alteri loco inesse dicitur, Homogonum intelligimus, quod si ejus sit pars aut parti aequalis, non tantum homogonus sed et homogeneus erit. Angulus etsi ad punctum sit, non tamen est in puncto, alioqui in puncto magnitudo intelligeretur.

Si pars unius sit aequalis alteri toti, illud vocatur Minus, hoc Majus.

Itaque Totum est majus parte. Sit totum A, pars B, dico A esse majus quam B, quia pars ipsius A (nempe B) aequatur toti B. Res etiam Syllogismo exponi potest, cujus Major propositio est definitio, Minor propositio est identica:

Quicquid ipsius A parti aequale est, id ipso A minus est, ex definitione,

B est aequale parti ipsius A, nempe sibi, ex hypothesi,

ergo B est minus ipso A.

Unde videmus demonstrationes ultimum resolvi in duo indemonstrabilia: Definitiones seu ideas, et propositiones primitivas, nempe identicas, qualis haec est B est B, unumquodque sibi ipsi aequale est, aliaeque hujusmodi infinitae.

Motus est mutatio situs.

Movetur, in quo est mutatio situs, et simul ratio mutationis.

Mobile est homogonum extenso, nam et punctum mobile intelligitur.

Via est locus continuus successivus rei mobilis.

Vestigium est locus rei mobilis, quem aliquo momento occupat. Hinc vestigium termini est sectio viae quam terminus describit, cum scilicet mobile per sua vestigia non incedit.

Mobile per sua vestigia incedere dicitur, cum quodvis ejus punctum extra terminum in locum alterius puncti ejusdem mobilis continuo succedit.

Quodsi Mobile sic moveri non ponatur, tunc Linea est via puncti.

Superficies est via Lineae.

Amplum vel **Spatium** vel ut vulgo solidum est via superficiei.

Magnitudines viarum quibus punctum lineam, linea superficiem, superficies amplum describit, vocantur **longitudo**, **latitudo**, **profunditas**. Vocantur dimensiones, et in Geometria ostenditur non nisi tres dari.

Latitudinem habet, cujus datur sectio extensa, seu quod extenso terminatur.

Profunditatem habet, quod extensum non terminat, seu quod sectio extensi esse non potest, in profundo scilicet est plus aliquid quam quod terminus esse possit.

Linea est ultimum terminans extensum.

Amplum est ultimum Terminatum extensum.

Similitudo vel dissimilitudo in amplo seu spatio cognoscitur ratione terminorum, itaque **amplum**, cum plus aliquid sit quam quod terminus esse possit, intus ubique simile est. Amplaque quorum omnimodae extremitates coincidunt, congruunt, assimilantur, sunt coincidentia, congruentia, similia. Idem est in plano, quod est superficies intus uniformis vel sibi similis, et in **recta**, quae est linea intus sibi similis.

Omnimoda extremitas in Extensis latitudinem habentibus **Ambitus** appellari potest. Sic ambitus circuli est peripheria, ambitus sphaerae est superficies sphaerica.

Punctum (spatii scilicet) est locus simplicissimus, seu locus nullius alterius loci.

Spatium absolutum est locus plenissimus seu locus omnium locorum.

Ex uno puncto nihil prosultat.

Ex duobus punctis prosultat aliquid novi, nempe punctum quodvis sui ad ea situs unicum, horumque omnium locus, id est **recta** quae per duo puncta proposita transit.

Ex tribus punctis prosultat **planum**, id est locus omnium punctorum sui ad tria puncta non in eandem rectam cadentia situs unicorum.

Ex quatuor punctis non in idem planum cadentibus prosultat **Spatium absolutum**. Nam quodvis punctum sui ad quatuor puncta in idem planum non cadentia situs unicum est.

Prosultandi vocabulo utor ad ideam indicandam novam, dum ex quibusdam positis aliquid aliud determinatur eo ipso quod suae ad ipsa relationis unicum est. Relatio autem hic intelligitur situs.

Tempus in infinitum continuari potest. Cum enim totum tempus sit simile parti, habebit se ad aliud tempus, ut pars se habet ad ipsum, et ita in alio majore tempore continuari intelligitur.

Similiter et spatium solidum seu amplitudo continuari in infinitum potest, quandoquidem ejus pars sumi potest similis toti. Et hinc planum quoque et recta continuantur in infinitum. Eodem modo ostenditur, spatium velut rectam, itemque tempus, et in universum continuum in infinitum subdividi posse. Nam in recta et in tempore pars est similis toti atque adeo in eadem ratione secari potest, qua totum, et licet sint extensa, in quibus pars non est similis toti, possunt tamen transformari in talia, et in eadem ratione secari, in qua ea, in quae transformantur.

Sequitur etiam ex his, quovis motu posse assumi celeriorem et tardiorem in data ratione: radio enim rigido circa centrum acto motus punctorum sunt ut distantiae eorum a centro, itaque celeritates variari possunt ut rectae.

Aestimatio magnitudinum duplex est, imperfecta et perfecta; imperfecta, cum aliquid majus minusve altero dicimus, quamvis non sint homogenea, nec habeant proportionem inter se, quemadmodum si quis diceret, Lineam esse majorem puncto, aut superficiem linea. Et tali modo Euclides dixit, Angulum contactus esse minorem quovis rectilineo, etsi revera nulla inter hos toto genere diversos sit comparatio, quin nec homogenea sunt, nec continua mutatione ab uno in alterum transiri potest. In aestimationibus perfectis inter homogenea obtinet haec regula, ut transeundo continue ab uno extremo ad aliud, transeatur per omnia intermedia; sed non obtinet in imperfectis, quia quod medium dicitur heterogeneum est, itaque transeundo continue ab angulo acuto dato ad angulum rectum non transitur per Angulum semicirculi seu radii ad circumferentiam, etsi is angulo recto minor, et quovis acuto major dicatur, id Majus enim hic sumitur improprie pro eo quod intra alterum cadit.

Plures secundum quantitatem dantur relationes; sic duae rectae possunt eam habere Relationem inter se, ut summa earum aequetur constanti rectae. Et infinita possunt dari paria rectarum hanc relationem inter se habentia, nempe x et y, ita ut sit $x+y=a$, si verb. gr. a sit ut 10, possunt x et y esse ut 1 et 9, ut 2 et 8, ut 3 et 7, ut 4 et 6, ut 5 et 5, ut 6 et 4, ut 7 et 3, ut 8 et 2, ut 9 et 1. Sed possunt etiam infiniti sumi fracti infra 10, qui satisfaciunt. Sic datur relatio talis inter duas rectas x et y, ut quadrata earum simul sumta aequentur quadrato dato rectae a, ita fiet $xx+yy=aa$: et talium etiam dari possunt paria infinita, et haec est in Circulo relatio sinus complementi ad sinum vel contra, nam uno posito x, alter est y, radius autem est a. Et tales relationes possunt fingi infinitae, tot quot species linearum in plano describi possunt. Veluti si x sint abscissae ex recta directrice, y erunt ordinatae inter se parallelae ad abscissas applicatae, quae terminantur in Linea.

Sed omnium Relationum simplicissima est, quae dicitur Ratio vel Proportio, eaque est Relatio duarum quantitatum homogenearum, quae ex ipsis solis oritur sine tertio homogeneo assumto. Veluti si sit y ad x ut numerus ad unitatem seu $y=nx$, quo casu x positis abscissis, y ordinatis, locus est recta, locus inquam seu Linea quam ordinatae terminantur. Ex quo etiam patet, si esset aequatio localis cujuscunque gradus velut $lx^3+my^3+nxxy+pxyy=0$, ubi l, m, n, p sint meri numeri, locum ad quem sit aequatio fore rectam et datam esse rationem ipsarum x et y.

Sint datae duae rectae, quae inter se comparentur utcunque. Verb. gr. detrahatur minor ex majore, quoties fieri potest, et residuum rursus ex minore, et ita porro residuum ex illo quod quoties fieri potest est detractum, donec vel sequatur exhaustio, ultimo subtrahendo existente communi Mensura, si quantitates sunt commensurabiles, vel habeatur lex progressionis in infinitum, si sint incommensurabiles. Et eadem erit series numerorum Quotientium, cum eadem est proportio. Nempe si sit a ad b ut

$$l+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\text{etc.}}}}$$ ad unitatem, erit l, m, n, p etc.

series numerorum quotientium. Verb. gr. si a sit 17 et b sit 5, series tantum constabit ex tribus l, m, n, qui numeri erunt 3, 2, 2. Si a et b sint partes rectae extrema et media ratione sectae, erit a major ad b minorem, ut $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}$

ad unitatem; quotientes erunt unitates, et series eorum ibit in infinitum. Sic a et b quaecunque rectae erunt ad se invicem ut $\frac{l}{1}+\frac{m}{2}+\frac{n}{4}+\frac{p}{8}+\frac{q}{16}+$ etc. ad 1, posito l, m, n, p, q etc. esse 0 vel 1, quae series vel finitur vel periodica est, cum numeri sunt commensurabiles.

Ex his sequitur, lineas similes esse in ratione rectarum Homologarum, superficies similes ut rectarum homologarum quadrata, solida similia ut eorum cubos. Sint duo Extensa similia A et L, et homologa homogenea et B et M. Quia A cum B seu A; B simile est ipsi L cum M seu L; M, erit ratio A ad B eadem quae L ad M. alioqui ipsum A; L ab ipso B; M aliter quam per compraesentiam distingui posset; prodibunt enim alii numeri rationem exprimentes. Ergo permutando erit A ad L ut B ad M, ut ponebatur. Sic ostendetur circulos esse ut quadrata diametrorum, sphaeras ut cubos diametrorum. Circuli (sphaerae) erunt A et L, quadrata homologa (cubi homologi) B et M.

Ex his manifestum est, Numerum in genere integrum, fractum, rationalem, surdum, ordinalium, transcendentem generali notione definiri posse, ut sit id quod homogeneum est Unitati, seu quod se habet ad Unitatem, ut recta ad rectam. Manifestum est etiam, si Ratio a ad b consideretur ut numerus qui sit ad Unitatem, ut recta a ad rectam b, fore Rationem ipsam homogeneam Unitati; Unitatem autem repraesentare Rationem aequalitatis.

Notandum est etiam, totam doctrinam Algebraicam esse applicationem ad quantitates Artis Combinatoriae, seu doctrinae de Formis abstractae animo, quae est Characteristica in universum, et ad Metaphysicam pertinet. Sic productum multiplicatione a + b + c. + etc. per l + m + n + etc. nihil aliud est quam summa omnium binionum ex diversi ordinis literis, et productum ex tribus ordinibus invicem ductis, a + b + c + etc. in l + m + n + etc. in s + t + v + etc. fore summam omnium ternionum ex diversi ordinis literis; et ex aliis operationibus aliae prodeunt formae.

Hinc in calculo non tantum lex homogeneorum, sed et justitiae utiliter observatur, ut quae eodem modo se habent in datis vel assumtis, etiam eodem modo se habeant in quaesitis vel provenientibus, et qua commode licet inter operandum eodem modo tractentur; et generaliter judicandum est, datis ordinate procedentibus etiam quaesita procedere ordinate. Hinc etiam sequitur Lex Continuitatis a me primum prolata, qua fit ut lex quiescentium sit quasi species legis in motu existentium, lex aequalium quasi species legis inaequalium, ut lex Curvilineorum est quasi species legis rectilineorum, quod semper locum habet, quoties genus in quasi-speciem oppositam desinit. Et hic pertinet illa ratiocinatio quam Geometrae dudum admirati sunt, qua ex eo quod quid ponitur esse, directe probatur id non esse, vel contra, vel qua quod velut species assumitur, oppositum seu disparatum reperitur. Idque continui privilegium est; Continuitas autem in tempore, extensione, qualitatibus, motibus, omnique naturae transitu reperitur, qui nunquam fit per saltum.

Situs quaedam coexistendi relatio est inter plura, eaque cognoscitur per alia coexistentia, intermedia, id est quae ad priora simpliciorem habent coexistendi relationem.

Coexistere autem cognoscimus non ea tantum quae simul percipiuntur, sed etiam quae successive percipimus, modo ponatur durante transitu a perceptione unius ad perceptionem alterius aut non interiisse prius, aut non natum esse posterius. Ex illa hypothesi sequitur nunc ambo coexistere, cum posterius attigimus; ex hac sequitur ambo extitisse cum prius disereremus.

Est autem in percipiendi transitu quidam ordo, dum ab uno ad aliud per alia transitur. Atque hoc via dici potest. Sed hic ordo cum variari possit infinitis modis, necesse est unum esse simplicissimum, qui scilicet sit secundum ipsam rei naturam procedendo per determinata intermedia, id est per ea quae se habent ad utrumque extremum quam simplicissime. Id enim nisi esset, nullus esset ordo, nulla discernendi ratio in coexistentia rerum, cum a dato ad datum per quodvis iri possit. Atque haec est via minima ab uno ad aliud, cujus magnitudo distantia appellatur.

Haec ut melius intelligantur, nunc quidem abstrahemus animum ab his quae in singulis spectari possunt, de quorum distantia agitur: ita considerabimus ea, tanquam in singulis plura spectanda non essent, seu considerabimus ea tanquam Puncta. Nam punctum est, in quo nihil aliud ei coexistens ponitur, ita ut quicquid in ipso est, ipsum sit.

Ita via puncti erit linea, quae utique latitudinem non habebit, quia sectio ejus quae in puncto fit longitudinem non habet.

Ex uno puncto dato nihil determinatur praeterea. Sed duobus datis punctis determinatur via ab uno ad aliud simplicissima, quam appellamus Rectam.

(1) Hinc sequitur primo, rectam esse minimam a puncto ad punctum, seu magnitudinem ejus esse punctorum distantiam.

(2) Secundo, rectam esse inter sua extrema aequabilem. Neque enim aliquid assumitur, unde reddi possit ratio varietatis.

(3) Itaque oportet, ut unus locus puncti in ea moti ab altero discerni non possit seposito respectu ad extrema. Hinc et pars rectae recta est, itaque intus ubique sibi similis est, nec duae partes discerni possunt inter se, cum suis extremis discerni non possint.

(4) Sequitur etiam, extremis positis similibus aut congruis aut coincidentibus, ipsas rectas similes, congruas aut coincidentes esse. Extrema autem semper sunt similia. Itaque rectae duae quaevis sunt similes, et pars etiam toti.

(5) Tertio ex definitione sequitur, procedere rectam per puncta suae relationis unica ad duo puncta data, quae ratio est maxime determinata. Oportet autem talia dari, alioqui ex duobus datis nihil resultaret novi determinati. Et si daretur aliud punctum eodem modo se habens ad A et B simul sumta ut propositum, nulla esset ratio cur via illa simplicissima determinata per unum potius quam per aliud procederet. Patet etiam hoc ex praecedente, quia dum ostendimus extremis datis rectam esse determinatam seu extremis coincidentibus coincidere rectas.

(6) Quarto sequitur, rectam in omnes plagas se habére eodem modo nec concavum habere et convexum ut curvam, cum ex duobus punctis assumtis A et B nulla ratio diversitatis reddi possit.

(7) Et proinde, si duo assumantur puncta quaecunque extra rectam L et M quae se eodem modo habeant ad duo puncta rectae collective, seu ita ut L se habeat ad A et B, ut M se habet ad A et B, etiam eodem modo se habebunt ad totam rectam, seu L se habebit ad rectam per A, B, ut M se ad eam habet.

(8) Manifestum etiam est, rectam rigidam seu cujus puncta

non mutant situm inter se, duobus in ea punctis manentibus immotis moveri non posse, alioqui enim plura darentur puncta eodem modo se habentia ad duo puncta immota, nempe tam punctum in quo fuit punctum mobile, quam illud ad quod est translatum.

(9) Sequitur vicissim, alia omnia puncta, quae in rectam per A et B transeuntem non cadunt seu quae ipsis A et B non sunt in directum, mobilia esse situ ad A et B servato, ipsis A et B manentibus immotis, cum recta sit locus omnium punctorum unice se habentium ad A et B; caetera ergo variari possunt et quidem in omnes partes, cum recta eodem modo se habeat in omnes partes.

(10) Itaque si Extensum rigidum moveatur duobus punctis manentibus immotis, omnia puncta ejus quiescentia cadent in rectam per puncta immota transeuntem, quodvis punctum mobile describet circulum circa eandem rectam velut axem.

Datis tribus punctis in eandem Rectam non cadentibus, quod inde determinatur est planum. Sint puncta A, B, C non cadentia in eandem rectam, ex A, B punctis determinatur recta per A et B, ex C et B punctis determinatur recta per C et B. Ex quovis puncto rectae per A et B, conjuncto cum quovis puncto rectae per C et B, nova determinatur recta, et proinde datis A, B, C, determinantur rectae infinitae quarum locus vocatur planum.

(1) Itaque primo planum est minimum inter sua extrema. Ambitus enim ejus non constat recta, quia recta spatium non claudit, alioqui pars rectae foret dissimilis toti. Ergo ambitu dato dantur tria puncta in eandem rectam non cadentia, ergo ex solo ambitu dato determinatur planum interceptum. Ergo est minimum.

(2) Secundo planum est aequabile inter sua extrema, quia nulla ratio varietatis ex hac origine ejus deduci potest.

(3) Unde sequitur, planum intus esse sibi simile, ita quod in eo movetur punctum, locum in quo est ab alio loco non distinguit nisi respectu ad extrema. Nec pars plani a parte nisi per extrema discerni potest.

(4) Sequitur et porro, plana quorum ambitus sunt similes aut congrui aut coincidentes, ipsa similia aut congrua aut coincidentia esse.

(5) Tertio ex definitione plani patet esse locum omnium punctorum ad tria data puncta unicorum.

(6) Quarto sequitur planum utrinque se habere eodem modo, adeoque nec concavum habere neque convexum.

(7) Atque adeo puncto se habenti utcunque ad A, B, C simul vel ad planum ex his determinatum, respondens aliud punctum dari posse eodem modo se habens ad tria haec puncta simul sumta, cum nulla sit ratio diversitatis.

(8) Planum autem est latitudine praeditum, nam per lineam rectam secari potest, per bina data ejus puncta transeuntem. Itaque sectio ejus longitudinem habet, cujus autem sectio habet longitudinem, id ipsum habet latitudinem.

Datis quatuor punctis in idem planum non cadentibus resultat profundum, seu id in quo sumi potest aliquid quod Terminus non est, seu quod non potest ei esse commune cum altero nisi pro parte in ipsum immerso.

Sunto quatuor puncta A, B, C, D (fig. 1). Hinc dantur sex rectae AB, AC, AD, BC, BD, CD; sed sufficiunt AB, AC, AD, nam tres reliquae ex his nascuntur. Prosultantibus his tribus rectis, prosultant et omnia earum puncta, et rectae conjungentes duo quaevis diversarum rectarum puncta, locusque adeo harum rectarum omnium. Porro habemus et quatuor plana per A, B, C, per A, B, D, per A, C, D, per B, C, D, quorum duo quaevis sectionem habent rectam communem; verb. gr. plana per A, B, C et per B, C, D habent communem sectionem rectam per B, C. Haec quatuor plana claudent spatium quatuor Triangulis planis ABC, ABD, ACD, BCD, quae spatii ambitum facient. Et recta quaevis EF, duo puncta E et F duorum planorum ABC, BCD conjungens, habet omnia puncta ut G intra hoc spatium, ita ut ex puncto G rectae extremis interjecto nulla recta educi possit, quae non in ambitum cadat. Claudunt autem spatium quae ambitum constituunt plenum, nempe talem, ut linea quaecunque ducta in parte ambitus, ubi pervenit ad ejus partis extremum, continuari possit in alia ambitus parte. Ex. gr. recta AL in parte Ambitus ABC ducta, ubi pervenit ad extremum ejus L, continuari non posset in alia ambitus parte, si abesset triangulum BCD, quod cum caeteris tribus ABC, ABD, ACD spatii claudendi opus absolvit. Ponatur illa recta produci quantum opus est ad punctum H, quod magis absit a puncto G, quam omnia puncta triangulorum ABC, ABD, ACD, BCD. Ex puncto H agantur normales in quatuor plana et itidem ex puncto G, reperietur aliquod ex his planis planum, respectu cujus normales amborum non sint ad easdem partes; aliquod ex his planis debet GK secare in triangulo cujus planum est continuatio; dico rectam GH si opus productam cadere in aliquod ex his planis. Sumatur aliud quodcunque punctum H, ajo rectam GH productam si opus occurrere uni triangulorum quatuor ut ipsi ABD in K, planum per E, F, H secabit plana ABD, ACD, BCD, quae tres rectae constituent triangulum cujus duo latera cadent in duo ex triangulis tribus dictis, et punctum G intra hoc triangulum cadet. Recta ergo quaecunque transiens per G alterutrum ex illis duobus lateribus secabit, ergo et recta GH, ergo recta GH occurrit uni ex triangulis ABD, ACD, BCD in K. Eodem modo ostendetur, et alio extremo occurrere uni ex aliis tribus triangulis. Sed brevius rem ostendemus.

IV.

INITIA MATHEMATICA.

DE QUANTITATE.

Determinantia sunt, quae simul non nisi uni soli competunt, ut duo extrema A, B (fig. 2) non nisi uni competunt rectae.

Coincidentia sunt, quae plane eadem sunt tantumque denominatione differunt, ut via ab A ad B a via a B ad A.

Congrua sunt, quae si diversa sunt, non nisi respectu ad externa discerni possunt, ut quadrata C et D (fig. 3), nempe quod eodem tempore sunt in diverso loco vel situ, vel quod unum C est in materia aurea, alterum D in argentea. Ita congruunt libra auri et libra plumbi; dies hodiernus et hesternus. Punctum quodlibet congruit cuilibet alteri, ut et instans instanti.

Aequalia sunt quae vel congruunt (exempli gratia (fig. 4) triangula EFH, EFG, IKL, LMI, GNE, item rectangula EFGN et

IKLM) vel per transformationem congrua reddi possunt (ut triangulum HEG rectangulo IKLM, quia parte ipsius HEG, nempe EFH, transposita in GNE, quod fieri potest quia congruunt, tunc HEG transformatum erit in FGEN congruum ipsi IKLM; itaque HEG et IKLM aequalia dicentur). Itaque definiri possunt Aequalia, quae resolvi possunt in suas partes diversas singulas singulis alterius congruentes.

Similia sunt, in quibus per se singulatim consideratis inveniri non potest quo discernantur, ut duo sphaerae vel circuli (vel duo cubi aut duo quadrata perfecta) A et B (fig. 5). Ut si solus oculus sine aliis membris fingatur nunc esse intra sphaeram A, nunc intra sphaeram B, non poterit eas discernere; sed poterit si ambas simul spectet, vel si secum membra alia corporis aliamve mensuram introrsum afferat, quam nunc uni nunc alteri applicet. Itaque ad similia discernenda opus est vel compraesentia eorum inter se, vel tertii cum singulis successive. [At in dissimilibus aliqua partium proportio notata in uno, quae non notatur in altero, sufficit ad discernendum sigillatim, de quo postea pluribus].

Homogenea sunt, quae aut similia sunt aut similia transformatione reddi possunt. Duae rectae sunt homogeneae, quia similes; sed recta et arcus circuli homogeneae res sunt, quia circulus in rectam extendi potest. Homogenea etiam definire possumus, quae in aliquo conveniant, et in quo conveniunt alia quae in uno quoque eorum indefinite assumi possunt.

Si plura sint ut A vel B et unum C (fig 6) sintque in aliquo convenientia et in his homogeneum insit ipsis A et B commune, omnia vero in ipsis homogenea sint ipsi C communia; tunc illa plura dicentur partes integrantes, unum illud dicetur totum.

Minus est quod alterius (Majoris) parti aequale est.

Quantitas est id quod rei competit, quatenus habet omnes suas partes, sive ob quod alteri (homogeneae cuicunque) aequalis major aut minor dici sive comparari potest. Quantitas rei ex. gr. areae ABCD (fig. 7) exprimitur per numerum ex. gr. quaternarium, posito aliam rem ut pedem quadratum AEFG sumtum esse pro Mensura primaria seu Unitate reali. Est enim ABCD quatuor pedum quadratorum. Si vero alia assumeretur unitas AHIK, quae est quadratum semipedis AH, quantitas areae ABCD esset 16. Itaque pro eadem quantitate diversus proveniet numerus, prout assumitur unitas. Et proinde quantitas non est numerus definitus, sed materiale numeri seu numerus indefinitus, assumta certa mensura definiendus. Quantitates ergo exprimuntur vel numeris definitis, ut 1, 2, vel indefinitis seu literis aliisve characteribus a, b, ☉, ☽.

Numerus est homogeneum Unitatis adeoque comparari cum unitate eique addi adimique potest. Estque vel aggregatum unitatum qui dicitur integer, ut 2 (seu $1+1$), item 3, 4 (seu $2+1$ sive $1+1+1$), vel aggregatum partium aliquotarum unitatis, qui dicitur Fractus, ut si unitas ex. gr. pes AB sit divisus in quatuor partes, tunc res ut linea BH, quae habet tres quartas pedis seu ter $\frac{1}{4}$, ita exprimetur $\frac{3}{4}$, isque fractus interdum reduci potest ad integrum, ut AB sive 2 est quater AH seu 4 dimidiae sive $\frac{4}{2}$; vel denique numerus est alio quodam modo per relationem ad unitatem determinatus, quae quidem relationes possunt esse infinitae, sed maxime solennes sunt per radices. Nempe sit numerus 4 (pro quadrato ABCD), quaeritur ejus radix quadrata (seu latus AB) id est numerus qui per se ipsum multiplicatus facit 4; is numerus erit 2, itaque cum 2.2 sive aa sit 4, $\sqrt{4}$ ($\sqrt{aa}$) est 2 (a). Atque hoc casu radix reduci potest ad numerum communem seu rationalem. Sed interdum haec reductio non succedit. Ex. gr. quaeritur numerus, qui per se ipsum multiplicatus faciat 2, is neque est integer (alioqui enim, cum necessaria sit minor quam 2, foret unitas, at unitas per se multiplicata facit 1), neque est fractus, quia omnis fractus per se ipsum multiplicatus producit alium fractum, ut $\frac{3}{2}$ producit $\frac{9}{4}$ sive $2+\frac{1}{4}$; itaque non est numerus nisi irrationalis ut vocant, sive potius ineffabilis, ἄλογος, surdus, qui sic scribitur $\sqrt{2}$, vel $\sqrt{q\,2}$, vel $\sqrt[2]{2}$, id est radix quadratica de 2; posito enim hunc numerum esse y, tunc ejus quadratum yy sive y^2 erit 2. Et ut appareat, hunc numerum esse in rerum natura, ducatur (fig. 6) AF diagonalis quadrati AEFG. Sit AG 1, nempe unus pes, cujus quadratum est 1 (nempe ipsum spatium AEFG seu unus pes quadratus), tunc ipsa AF, quam vocabimus y, erit $\sqrt{2}$; nam ejus quadratum yy, AFBM est 2 (nempe duplus pes quadratus), est enim quadratum AFBM duplum quadrati AEFG, nam dimidium ejus triangulum AFB toti AEFG aequale est. Cum ergo numerum definierimus homogeneum unitati, utique debet aliquis esse numerus, cujus ea sit relatio ad unitatem, quae est rectae AF ad rectam AG, sive posito AG esse 1, debet esse numerus quo exprimatur quantitas ipsius AF qui dicetur esse $\sqrt{2}$; AB autem erit 2.

Itaque si sit Scala AB divisa in partes aequales duas, quatuor, octo, sedecim etc. atque ita porro subdivisa quantum libuerit, huic scalae utique recta quaelibet ipsa scala minor applicari adeoque numeris explicari potest, et quidem vel exacte, vel propemodum exacte quidem, quando scilicet incipiens ab initio scalae A incidit in aliquod punctum divisionis L, ut AL, cujus proinde numerus in partibus scalae habetur. Ex. gr. AE existente 1, tunc AL erit $\frac{3}{4}$, et tunc recta AL est scalae commensurabilis, id est datur earum mensura communis seu recta AN ($\frac{1}{4}$), quae repetita tam scalam AB quam rectam AL efficit seu metitur. Propemodum vero numeris recta scalae applicata explicari potest, quando non incidit in punctum divisionis, quantumvis scala subdividatur et quocunque modo instituatur divisio. Et talis recta ut AF est cum scala incommensurabilis, adeoque numeris rationalibus sive effabilibus explicari nequit, nisi propemodum. Quoniam tamen necesse est, ut AF scalae applicata seu translata in AP incidat saltem inter duo divisionis puncta, uti certe incidit inter 11 et 12, posito scalam AB in sedecim partes aequales esse divisam, quarum quaelibet est pars octava unitatis vel pedis AE, hinc si AG vel AE latus quadrati sit pes, tunc diagonalis AF vel AP incidet inter $\frac{12}{8}$ (sive $\frac{3}{2}$) et $\frac{11}{8}$ pedis, adeoque si ipsi AF sive $\sqrt{2}$ vel y attribuas $\frac{3}{2}$, nimium, si $\frac{11}{8}$, parum tribues (nam quadratum a $\frac{3}{2}$ est $\frac{9}{4}$, id est plus quam $\frac{8}{4}$ seu 2 seu yy, et quadratum ab $\frac{11}{8}$ est $\frac{121}{64}$, quod est minus quam $\frac{128}{64}$ seu 2), error tamen erit minor una parte minima, in quam hoc loco unitas in scala divisa est, id est minor quam $\frac{1}{8}$. Et $\frac{1}{8}$ sive AQ erit propemodum mensura communis unitatis sive etiam scalae et ipsius AF. Et quanto magis subdivisa erit scala, eo minor erit error adeoque erit tam parvus quam quis velit, sive minor reddi potest quovis errore assignabili. Itaque AF et AG etsi sint incommensurabiles, sunt tamen homogeneae seu comparabiles, et inveniri potest mensura communis tam prope exacta, ut error seu residuum sit minus data quantitate. Atque hoc est fundamentum appropinquationum, et computandarum Tabularum, itemque Logisticae binariae vel sexagenariae vel etiam decimalis, si quidem scala in decem partes dividatur et earum quaelibet in alias decem subdividatur, idque quantumlibet continuetur. Etsi enim scalae instrumentis satis subdividi non semper possint, mente tamen sive calculo ad summam exactitudinem, quae quidem in praxi optari possit, procedi potest. Quod quomodo fiat, infra apparebit.

Dimensiones sunt quantitates diversae (interdum heterogeneae) quae in se invicem duci intelliguntur, ita scilicet ut una tota applicetur cuilibet parti alterius. Exempli causa (fig. 9) ex ductu latitudinis AB duorum pollicum in longitudinem BC trium pollicum linearium (ita ut anguli A, B, C, e, f semper congruant seu iidem sint, qui dicuntur recti, qui est simplicissimus lineam rectam in rectam ducendi modus) fit rectangulum ABC, quod est duarum dimensionum, et sex pollicum sed quadratorum. Ex ductu longitudinis CB, 2, latitudinis BA, 3, altitudinis AD, 4 in se invicem fit rectangulum solidum CBAD (fig. 10), quod est trium dimensionum seu viginti quatuor pollicum cubicorum (2 in 3 in 4); cuilibet enim ex baseos ABC sex quadratillis seu pollicibus quadratis (ut quadratillo AEF) insistunt quatuor cubuli seu unitates cubicae sive pollices cubici (nempe columna seu prisma FEAD ex quatuor pedibus cubicis sibi impositis constans). Nec vero putandum, ut hactenus crediderunt, dimensionem spectari in solis figuris, adeoque rem altioris gradus seu plurium dimensionum quam trium dimensionum esse imaginariam. Etsi enim spatium per se habeat tantum tres dimensiones, corpus tamen potest habere multo plures, ex. gr. duo corpora, unum aureum, alterum argenteum, habent praeter considerationem molis seu spatii, quod occupant, etiam considerationem gravitatis specificae, quae in qualibet parte molis spectatur. Ita gravitate specifica pollicis cubici argenti posita ut 55, auri ut 99 unciarum (ea enim fere proportio est), erit pondus solidi CBAD, si aureum sit, $2 \frown 3 \frown 4 \frown 99$ (seu $24 \frown 99$ sive) 2376 unciarum; sin argenteum sit solidum, erit unciarum $2 \frown 3 \frown 4 \frown 55$ seu ($24 \frown 55$) 1320 unciarum. Itaque pondera ita sunt quatuor dimensionum, ex ductu scilicet molis seu spatii tridimensi in corpus ipsum seu pondus. Potest etiam praeter pondus mortuum accedere impetus ex descensu gravis aliquamdiu continuatus; unde nascitur percussio, quae est quinque dimensionum, ex mole tridimensa, corporis ponderositate et tempore lapsus in se invicem ductis. Ita si una ulna quadrata panni valeat tres nummos imperiales, duae ulnae valebunt bis tres imperiales seu sex. Et pretium hoc est duarum dimensionum, quod si idem pannus sit quatuor ulnas latus, erit pretium ejus 2. 3. 4 seu 24 imperialium, adeoque trium dimensionum ex ductu in se invicem longitudinis, latitudinis, pretiositatis, id est pretiositatis seu bonitatis intrinsecae in quantitatem seu bonitatem extrinsecam. Ita pretium aggeris est quatuor dimensionum; spectatur enim in eo longitudo quae sit pedum 100, latitudo 12, altitudo 20, et firmitas seu bonitas intrinseca sit talis, ut pes cubicus valeat decem nummos, erit valor ejus $100 \frown 12 \frown 20 \frown 10$ nummorum seu 240000, ut proinde ductus dimensionis in dimensionem sit exhibitio realis multiplicationis mentalis.

Ex his definitionibus sequentia Axiomata duci possunt.

Quae iisdem (vel coincidentibus) determinantur (eodem scilicet modo), coincidunt. Ut coincidunt duae rectae, quarum duo extrema coincidunt.

Quae coincidunt, ea multo magis congruunt, seu idem congruit sibi.

Quae congruentibus determinantur (eodem scilicet modo), congrua sunt. Ut quia triangulum datur, datis tribus lateribus, hinc si tria trianguli latera respondentia respondentibus congruant, congruent triangula.

Quae congruunt, ea multo magis aequalia sunt.

Aequalia eadem sumta mensura eodem numero exprimuntur, sive ejusdem sunt quantitatis; cum enim inter se congrua reddi possint, eidem mensurae primariae, seu unitati eodem modo repetitae, eodem modo congruere poterunt. Unde idem prodit numerus. Aequalia eodem modo secundum quantitatem tractata exhibent aequalia.

Similia similiter tractata exhibent similia. Quae similiter similibus determinantur, similia sunt. Determinari autem intelligo iis conditionibus designari quae simul non nisi in unum cadere possunt. Itaque quod ita determinatur, id plane exhibetur.

Similia et aequalia simul sunt congrua. Nihil enim superest quo discerni possint, sive sigillatim sive simul spectentur, nisi referantur ad externa, ut locum et tempus aliaque accidentia.

Ratio non est nisi inter homogenea; patet ex definitione. Quorum utrum altero majus, minus aut aequale est, homogenea sunt. De aequalibus manifestum est, possunt enim congrua reddi, adeoque et similia. Minus quoque majori homogeneum, quia ejus parti aequale adeoque homogeneum est, pars autem est homogenea toti. Atque ideo non dicemus lineam minorem superficie, aut ejus partem, nec angulum contactus partem rectilinei, aut eo minorem.

Si quis tamen partem latius sumat, pro omni quod quantitatem habet et quantitatem habenti inest, poterit dicere, lineam esse superficie minorem.

Pars minor est toto. Est enim aequalis parti ejus, nempe sibi ipsi.

Totum est aequale omnibus partibus integrantibus, coincidunt enim; vel certe si conjungantur, quia totum componunt, coincidentia reddentur, adeoque et congruent.

Pars partis est pars totius. Adeoque minus minore est minus majore. Nam parti minoris aequale est; ergo et parti majoris, parti scilicet partis majoris.

Duo homogenea habent communem mensuram quantumvis exacte propinquam. Ostendimus supra, cum scalam explicaremus. Si duorum homogeneorum unum altero neque majus neque minus est, erit aequale. In scala supra posita (fig. 8) comparentur AG et AE, appliceturque AG ipsi scalae, et puncto A manente, incidet punctum G inter B et A, posito AG esse minus quam AB. Ponamus jam demonstrari posse quod recta AG translata in AB, manente puncto A, punctum G neque incidat intra E et B, neque inter A et E, id est quod AG nec sit major nec minor quam AE, utique punctum G incidet in ipsum punctum E, adeoque AG erit ipsi AE aequalis. Quod de duabus rectis, idem demonstrari potest de omnibus homogeneis, nam omnia possunt reddi similia, et ubi similia reddita sunt, si nec magnitudine differunt, nullo modo per se discerni poterunt, sed congrua erunt, adeoque cum congrua reddi possint, aequalia sunt.

DE MAGNITUDINE ET MENSURA.

(1) Magnitudo est, quod in re exprimitur per numerum partium, congruentium rei datae, quae Mensura appellatur.

Scholium. Exempli causa lineae magnitudo exprimitur numero pedum vel pollicum, id est partium quarum quaelibet congruit pedi vel pollici in aliqua materia (velut orichalco aut ligno) reapse dato. Sic orgyiae magnitudo (quantum homo brachia extendere potest) ad certum aliquid (velut per aversionem) designandum censetur exprimi numero sex pedum, vel septuaginta duorum pollicum, quia pes duodecim pollicum habetur. Cubiti magnitudo est unius et dimidii pedis, vel unius pedis et sex pollicum, vel octodecim pollicum. Ponimus autem pedis vel pollicis magnitudinem reapse in organo datam esse. Unde patet quoque, eandem ejusdem rei magnitudinem diversis numeris exprimi, prout variatur mensura, imo interdum diversas mensuras conjungi inter se, ut cum cubitus simul designatur per pedem et pollices.

(2) H o m o g e n e a sunt, quorum magnitudines numeris exprimi possunt eandem assumendo pro omnibus mensuram tanquam unitatem.

S c h o l i u m. Ita si pes sit ut unitas, erit pollex ut $\frac{1}{12}$, cubitus ut $\frac{3}{2}$, orgyia ut 6. Sin pollex sit ut unitas, erit pes ut 12, cubitus ut 18, et orgyia 72. Et hoc modo lineae rectae cujusque longitudo exprimi potest numero quidem integro, si mensura aliquoties detracta, verbi gratia pede ter detracto, restet nihil, ita enim recta tripedalis erit. Sed si mensura vel pede quoties fieri potest detracto restet aliquid, ad id quoque mensurandum sumi poterit certa pars pedis, exempli causa decima, quae rursus quoties fieri potest detrahetur ab hoc residuo; exempli causa vicibus septem et pede assumto pro unitate, numerus quantitatis detractae erit fractus 3 et $\frac{7}{10}$ vel $\frac{37}{10}$. Et hoc modo si res mensuranda ita sit exhausta ut restet nihil, is numerus rei respondebit, magnitudinemque ejus exprimet. Sin adhuc supersit aliquid, tunc vel possumus iterum novam assumere mensurae partem, veluti centesimam, eamque detrahere quoties fieri potest; et si e r r o r centesima parte minor nobis satis magni momenti non videatur, contenti possumus esse hac per mensuram et mensurae decimas vel centesimas a p p r o p i n q u a t i o n e, alioqui ad millesimas et ultra progressuri. Solemus autem in praxi adhibere s c a l a m, id est constantem quandam mensurae divisionem in orichalco aut alia durabili materia factam, et quidem per decimas et decimas decimarum seu centesimas et millesimas et porro, quoniam hoc modo fractiones decimaliter expressae tractari possunt instar integrorum, qui nobis decadica progressione, id est per unitates, decades, centenarios, millenarios, myriades etc. exhiberi solent; ita Ludolphus de Colonia calculo longe producto invenit, diametro circuli existente 1, circumferentiam esse

$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000}$ vel (quod in decimalibus licet) conjungendo statim in unam fractionem $\frac{3141592}{1000000}$ etc. usque ad ...... sedem. Sed quoniam appropinquationes hujusmodi, etsi praxi vulgari sufficientes, nullam dant exactam magnitudinis quaesitae cognitionem, ideoque in scientifico progressu tamdiu pergimus, donec appareat series progrediendi in infinitum; et huic fini non adhibemus indistincte decimales, aut alias quaslibet scalae constantes divisiones, sed accommodamus fractiones ad rei naturam, ut scilicet facilius ad legem progressus perveniamus. Atque ita a me repertum est, si diameter sit $\frac{1}{8}$, circumferentiam fore $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \frac{1}{195}$ et ita porro in infinitum, posito fractionum numeratorem esse unitatem, sed denominateres esse qui fiunt ex duobus imparibus 1 et 3, 5 et 7, 9 et 11, 13 et 15, 17 et 19, et ita porro, invicem multiplicatis. Et ea ratione non tantum omnes appropinquationes continuando dabiles simul exprimuntur, sed etiam fieri potest ut error minor sit quovis dato, nam ostendi potest, si circumferentiam dicatur esse $\frac{1}{3}$, errorem fore minorem quam $\frac{1}{5}$; si dicatur esse $\frac{1}{3} + \frac{1}{35}$, errorem minorem fore quam $\frac{1}{9}$; si dicatur esse $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{195}$, errorem fore minorem quam $\frac{1}{13}$, et ita porro, priorem semper ex imparium proximorum combinatione sumendo. Tota autem series infinita exacte naturam circuli exprimit. Sed hoc nos rationibus ex intima natura circuli consecuti sumus; organice autem magnitudo circumferentiae circuli vel alterius lineae curvae per filum obtineri potest, curvae lineae rigidae accommodatum et deinde in rectam extensum et scalae applicatum, vel dum curva linea rigida volvitur in plano, quanquam provolutio illa ad securitatem filo vel catena regenda sit, ne tractio ei misceatur. Motu etiam res obtinetur, dum duo mobilia velocitatis uniformis percurrunt rectam et curvam, nam erunt lineae iisdem temporibus absolutae ut mobilium velocitates. Quodsi res mensuranda sit superficies, pro mensura poterit alia assumi superficies, verbi gratia pes quadratus qui vel cujus determinatae partes a plana superficie quoties fieri poterit detrahentur: quodsi superficies plana non sit, videndum an commode transformari possit in planam. Pro solidi mensura aliud assumetur solidum, veluti pes cubicus, eodemque modo procedetur. Comparari etiam solidorum magnitudines poterunt immergendo in liquorem, et mensurando quantum ille in vase attollatur; sed et ponderando, si ambo ex eadem materia elaborentur, idemque et ad lineas et superficies suo quodam modo potest transferri. Atque ita Galilaeus Cycloidis dimensionem ponderibus investigavit, etsi veram dimensionem scientifica deinde ab aliis ratione repertam hac methodo non fuerit consecutus. Motu etiam superficies et solida interdum commode mensurantur, tanquam vestigia lineae aut superficiei. Generaliter autem omnis aestimatio ex nostra magnitudinis definitione ad mensurae cujusdam repetitionem numeris expressam redit, aut ad numerum rei ascribendum, posito rei alteri datae ascribi unitatem. Eaque ratione etiam non tantum extensiones et difusiones partium extra parte, ut in spatio et tempore, sed etiam intensiones seu gradus qualitatum actionumque, jura etiam, valores, verisimilitudines, perfectiones aliaque inextensa ad numeros revocantur, reperta scilicet mensura cui aut cujus partibus aliquotis congruant, quae in re mensuranda reperiuntur, sed cujus aut cujus partium aliquotarum repetitione magnitudo aestimanda formetur. Quae consideratio quanti sit momenti, et quam in ea consistat vis verae Matheseos Universalis seu artis aestimandi in universum, in Dynamicis nostris speciminibus est ostensum.

(3) *Commensurabilia* sunt inter se, quorum reperiri potest una mensura communis exhauriens, cujus repetitione magnitudines eorum constituantur; sin minus, *incommensurabilia* vocantur, et numerus ei, quod cum mensura pro unitate assumta incommensurabile est, assignandus vocatur *surdus* vel irrationalis; sin commensurabilis sit unitati, *rationalis* appellatur.

Scholium. Si nempe mensuram vel partes aliquotas mensuram sua repetitione constituentes quoties fieri potest detrahendo perveniatur ad exhaustionem, semper haberi potest communis mensura repetitione constituens. Nam tota magnitudo mensuranda exprimitur vel integris vel composito ex integris et fractis. Jam fracti quotcunque reduci possunt ad communem divisorem, atque ita ad communem mensuram. Esto numerus inventus magnitudinem quaesitam lineae exprimens $2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$, reducendo ad communem denominatorem fiet $\frac{17}{6}$; itaque si pes sit 1 vel $\frac{6}{6}$, utique communis mensura rei aestimatae et pedis erit $\frac{1}{6}$, quae quantitas in re aestimata continetur decies septies, in pede sexies. Sed si sexta pars pedis seu bipollicaris linea assumatur pro unitate seu mensura, erit pes ut 6, linea vero aestimanda ut 17, adeoque pes et linea commensurabiles erunt. Sed si fractiones procedant in infinitum, nec in unum numerum assignabilem integrum vel fractum summando colligi possint, magnitudo aestimanda erit ei, cui

unitatem assignavimus, vel partibus ejus aliquotis (hoc est repetendo eam conficientibus) incommensurabilis. Veluti si linea sit quae constet uno pede et duabus decimis pedis et tribus centesimis et quatuor millesimis, et quinque 10000mis, et sic in infinitum, ita ut pede posito ut 1, linea sit ut
$\frac{1}{1}+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{6}{100000}+\frac{7}{1000000}$ etc. vel $\frac{1234567}{1000000}$ etc. vel more decimalium 1.234567 etc. Ita enim nunquam exhaurietur linea quae mensuranda est, et tamen vera ejus magnitudo exacte expressa habetur. Quotiescunque enim numerus est rationalis, ut vocant, seu unitati commensurabilis, toties decimalibus expressus periodo constat, ita ut characteres iidem semper recurrant in infinitum, ut suo loco ostendemus; quod hoc loco non fieri constructio ipsa ostendit. Porro communem mensuram investigandi haec ratio prodita est a Mathematicis, uti suo loco exponemus, ut a majore detrahatur minus quoties fieri potest, Residuum deinde rursus quoties fieri potest ab ipso Minore antea detracto detrahatur, et secundum Residuum a secundo detracto seu primo residuo, et a secundo Residuo similiter tertium; ita necessario vel ad exhaustionem devenietur, eritque ultimum detractum exhauriens ipsa maxima communis mensura toties in prima magnitudine seu comparatarum majore contenta, quoties unitas in producto ex omnibus quotientibus invicem multiplicatis inest; vel si residua supersint in infinitum, incommensurabiles erunt duae primae quantitates, quemadmodum et residua omnia; sed ipsa series quotientium si certa lege constet, qui exprimunt quoties quivis minor a praecedente detrahi possit, comparationem scientificam duarum magnitudinem dabit. Interim fictione quadam possumus concipere, omnes quantitates homogeneas esse velut commensurabiles inter se, fingendo scilicet elementum aliquod infinitesimum vel infinite parvum. Tali fictione constat calculus Logarithmorum, certo aliquo Elemento Logarithmico constituto. Similis fictio locum habet in Geometria, rem concipiendo perinde ac si omnes lineae constarent ex infinitis numero lineolis rectis infinite parvis, et ita perinde ac si lineae curvae essent polygona infinitorum laterum, vel perinde ac si superficies constarent ex infinitis facieculis planis, id est perinde ac si solida concava vel convexa omnia essent polyhedra hedrarum infinitae exiguitatis. Eodem modo fingi potest, omnia solida constare ex corpusculis elementaribus aequalibus infinitis numero et magnitudine infinite parvis. Et haec fic-

tio nullum potest afferre errorem, quia (si rite procedas ex hypothesi) error nunquam fit major particulis aliquot elementaribus, qui nullam cum toto comparationem habet, de quo nostra incomparabilium Lemmata videantur. Unde si pro particulis elementaribus fictitiis seu infinite parvis assumamus veras assignabiles quantumlibet parvas, ostendi potest, errorem qui in ratiocinando admissus videri possit, minorem esse quovis dato errore, id est nullum assignari posse. Licet autem ad commensurabilitatis imitationem concipi possit, infinitesimalia illa seu infinite parva elementa aequalia esse inter se, interdum tamen fingi praestat alia procedere ratione utili ad ratiocinationem juvandam. Quae melius apparebunt ex parte illa interiore Doctrinae magnitudinum seu Matheseos Universalis, qua nempe continetur Scientia infiniti.

DE RATIONE ET PROPORTIONE.

Duarum rerum Ratio inter se habebitur, habita forma comparationis earum secundum quantitatem, et contra. Hinc etsi ambarum quantitates sint incognitae, potest tamen ratio earum esse cognita; licet enim ignorem exempli causa, quot sint nasi aut quot sint oculi in hac civitate, scio tamen numerum nasorum bis repetendum esse ut fiat numerus oculorum.

Comparare duas res secundum quantitatem est quaerere modum inveniendi quantitatem unius ex data sola quantitate alterius. Hic enim finis est comparationis duarum rerum, ut postea sufficiat saltem unam in promptu habere et comparationis meminisse; ita sensu unius et memoria alterius tantum efficimus, quantum sensu utriusque, minore autem pretio constat memoria quam sensus, quia memoria etiam absentium est.

Itaque rationem duarum rerum inter se habere, idem est quod habere modum cognoscendi unam ex data altera sola. Equidem si summam duarum quantitatum sciamus, vel etiam differentiam, etiam unam ex alia cognita invenimus, sed non sola; tria enim occurrunt homogenea, duae scilicet quantitates, v. g. lineae AB et BC (fig. 11) et earum summa (vel differentia) AC et duas noscere necesse est ad inveniendam tertiam. In ratione vero solummodo unam noscere opus est ad inveniendam alteram. Ratio enim ipsa, quam praeterea nosse oportet, non est linea. Itaque si cognoscatur linea D (fig. 12) et praetera ratio ejus ad lineam E (ut si sciatur esse duplam ipsius D), scietur etiam ipsa E.

Quaeritur jam quomodo duas quantitates, quas nunc habemus praesentes, ita possimus comparare, ut postea sufficiat alteram solam praesentem habere, et modi comparationis ad alteram quoque cognoscendam meminisse. Hoc fiet dupliciter, vel nulla nova quantitate homogenea assumta, vel assumta quidem nova ad comparationem, neglecta tamen postquam absoluta est comparatio. Quando nulla nova quantitas assumitur, tunc comparatio duarum quantitatum fit, si consideremus unam esse minorem altera, vel ambas esse aequales. Si ambae sunt aequales, nihil ultra quaeritur, modus enim inventus est habendi unam habita altera. Si sunt inaequales, tunc minor aequalis est parti majoris, ex definitione majoris et minoris. Conferatur ergo minor DG (fig. 13) primum parti EH majoris E sibi aequali, deinde et reliquae HF, et quoniam reliqua pars HF iterum vel minor vel major est; ideo si major est HF, iterum DG parti ejus HL aequalis erit, et si pars reliqua secunda LF adhuc major est quam DG, tunc DG iterum parti ejus LM aequalis erit, et ita porro continuabitur, donec reliqua vel sit nulla vel sit minor quam DG, quod tandem fieri necesse est, siquidem EF finita est, alioqui enim semper ab ea detrahi posset DG adeoque DG inesset ipsi EF infinities, id est ipsa EF infinita contra hypothesin. Porro nulla quidem erit pars reliqua, quando F incidit in M, seu quando EH, HL, LM vel LF ipsi DG aequantur; adeoque minor quantitas DG dicitur mensura majoris, seu dicitur majorem EF metiri sive repetendo efficere, portio autem ut EH majoris aequalis minoris DG dicitur majoris p a r s a l i q u o t a (nempe tertia vel quarta pro numero repetitionum), et major EF vel EM dicitur multiplex minoris DG secundum numerum repetitionum qui dicitur Q u o t i e n s. Si vero pars reliqua tandem fiat minor detrahendo, sive si detracta aliquoties DG vel aequali ejus, ab EF restet MF minor quam DG, tunc DG dicetur M e n s u r a f a l s a ipsius EF, etsi sit mensura vera ipsius EM, et pars reliqua MF, minor quam Mensura, dicitur R e s i d u u m, nnmerus vero repetitionum Q u o t i e n s f a l s u s.

Notandus est ergo quotiens sive verus sive falsus, ut notetur forma comparationis, hoc loco ternarius, quia ter DG aequalis est EM. Sed quia superest adhuc residuum MF, eo casu quotientem notari non sufficit, divisa est enim major EF in duas partes EM et MF, illam quam minor DG metitur, et cujus comparatio cum minore constat ex quotiente, sed residuum MF cum sit nova quantitas homogenea, iterum comparanda est cum reliquis DG et EM. Sufficit autem comparari cum DG, quia si comparata sit cum mensura ipsius EM, satis comparata erit cum ipsa; itaque eodem modo comparetur residuum MF cum Mensura DG, ut Mensura cum quantitate mensurata EF. Et si quidem in secunda hac comparatione ipsius MF cum DG nullum esset residuum, tunc MF esset mensura ipsius DG, ergo erit maxima communis mensura sui ipsius et DG, non potest enim dari major mensura ipsius MF quam ipsa MF. Iam maxima communis mensura terminorum comparationis hujus, MF et DG, est maxima communis mensura terminorum comparationis praecedentis DG et EF. Ea vocetur P, jam si N major quam P mensura ipsarum DG et EF communis, ea foret mensura ipsius EF. Est autem eadem N et mensura ipsius DG ex hypothesi, ergo et ipsius EM (multiplae ipsius EF). Jam mensura totius et unius partis est mensura reliquae partis, ergo N mensura totius EF ex hypothesi, et partis EM per ostensa, erit et mensura ipsius MF; est vero et ipsius DG per hypothesin, ergo N est communis mensura et ipsarum MF, DG, contra hypothesin. Quoniam ergo continuatis hoc modo comparationibus, maxima communis mensura terminorum unius comparationis eadem est quae praecedentis, et praecedentis quae antepraecedentis, et ita porro, erit eadem maxima communis mensura omnium, adeoque primae quae ultimae comparationis. Itaque si continuentur comparationes residuorum cum mensuris, donec nullum supersit residuum; residuum autem ultimum seu quod nullum amplius relinquit residuum, sit maxima communis mensura suae comparationis per superiora; ideo residuum ultimum erit maxima mensura communis terminorum ab initio comparandorum; quotientes autem omnium comparationum ordine notati dabunt formam comparationis. Ita ratio numerorum 63 et 49, itemque 72 et 56 seu forma comparationis eadem est, quia eadem utrobique series quotientium prodit, nempe 1, 3, 2; unde ea est ratio inter 63 et 49 quae inter 72 et 56.

Quodsi semper supersit residuum, tunc duae quantitates sunt incommensurabiles, nec aliter hac methodo notari potest forma comparationis, quam si constet quotientium progressio in infinitum. Unde si sit recta in extrema et media ratione secta, ut vocat Euclides, sive si quantitas AB (fig. 14) sit divisa in duas partes, ut eadem sit ratio minoris AC ad majorem CB, quae est partis majoris CB ad totam BA, tunc progressio quotientium in comparatione partium duarum BC, CA, vel partis CB cum toto AB, erit 1, 1, 1, 1, 1, 1 etc. in infinitum. Nam compendii causa AB appellatur a, et BC vocetur b. Iam b sive BC plus quam semel ab a sive AB detrahi non potest (nam CB major dimidia AB). Eodem modo residuum AC a subtracta BC nisi semel subtrahi non potest, est enim AC ad BC ut BC ad AB, restabitque BD. Jam recta BC in puncto D rursus extrema et media ratione secta est, est enim CD (sive AC) ad CB ut CB ad AB, quae AB in puncto C extrema et media ratione secta est. Atque ita porro: quare semper residuum non nisi semel detrahi poterit, in infinitum. Hanc sectionem vocant divinam, et quoniam perpetuis illis residuorum subtractionibus semel factis oriuntur termini sequentes:

$a \mid b \mid a - b \mid - a + 2b \mid + 2a - 3b \mid - 3a + 5b \mid + 5a - 8b$

qui continuari possunt in infinitum. Si notetur numeros sic progredi:

$$\frac{1}{1} \urcorner \frac{2}{1} \urcorner \frac{3}{2} \urcorner \frac{5}{3} \urcorner \frac{8}{5} \urcorner \frac{13}{8} \urcorner {}^{21} \text{ etc.}$$

seu antepenultimum additum penultimo facere ultimum, hinc patet 1a majorem quam b (ob terminum $a - b$), et 1a minorem quam 2b (ob terminum $- a + 2b$, ubi a 2b detrahitur a), et 3a majorem quam 3b (ob terminum $2a - 3b$, ubi a 2a detrahitur 3b) et 3a minorem quam 5b (ob terminum $-3a + 5b$, ubi a 5b detrahitur 3a) et ita porro. Hinc patet, si a sit 1, tunc b fore minorem quam 1; et si a sit 2, b fore majorem quam 1; et si a sit 3, b fore minorem quam 2; et si a sit 5, b fore majorem quam 3; et si a sit 8, b fore minorem quam 5, et ita porro in infinitum. Eaque hujus progressionis pariter et sectionis divinae proprietas jam apud autores habetur, nec dubito, quin haec comparandi methodus reddi generalior magnosque in contemplando usus habere possit. Finis tamen hujusmodi comparationis non est investigatio seriei quotientium, licet contenti ea esse cogamur quoties quantitates sunt incommensurabiles, sed potius investigatio communis mensurae; hac enim habita, duobus tantum numeris (loco seriei quotientium) res absolvitur, numeris scilicet secundum quos communis mensura metitur, tam unam quam alteram quantitatum comparandarum.

Communi igitur mensura habita, perfecte nota est ratio duarum rerum. Si (fig. 15) una A (exempli gratia) expressa sit per mensuram quinquies sumtam seu 5 pollices, altera B per mensuram ter sumtam seu tres pollices; qua ratione licet tertium quiddam extrinsecum assumtum sit, ipsa scilicet mensura, tamen (praeterquam quod ex comparatione duarum quantitatum per se inventa est) sciendum est, numeris istis semel habitis tertiam illam quantitatem seu mensuram posse eliminari, ita ut nulla amplius pollicis vel alterius mensurae mentione sit opus; quoniam enim suprà ostendimus rationem duarum quantitatum ideo quaeri, ut una sola habita inveniri possit alia, ideo habebitur numerus quo exprimitur una quantitas, posito alteram sumi pro unitate. Itaque A continebit quinque tertias ipsius B, et contra B continebit tres quintas ipsius A, seu B erit ad A ut sunt tres quintae ad quinque quintas seu ad unitatem, et A erit ad B ut sunt quinque tertiae ad tres tertias seu ad unitatem. Patet etiam, quantitatem ipsius A seu numerum ejus indefinitum, divisum per quantitatem ipsius B seu numerum ejus indefinitum, idem exhibere quod numerus 5 divisus per numerum 3. Quaecunque enim denique unitas assumatur, sive pes sive pollex, ad numeros illos indefinitos definiendos, utique semper eadem numerorum provenientium ratio esse debet, quoniam perfectae duarum quantitatum expressiones eandem habent formam comparationis, quam habent ipsae quantitates, ut si A sit 5 pedum, et B trium pedum, utique ratio erit quae 5 ad 3. Sed si assumantur pollices, quorum duodecim ingrediunter pedem, erit A 60 pollicum, et B 36 pollicum; eadem autem est ratio 60 ad 36 quae 5 ad 3, et dividendo 60 per 36, idem prodit quod dividendo 5 per 3, nempe $1 + \frac{2}{3}$. Itaque patet, rationem duarum quantitatum A et B cognitam esse, si cognoscatur $\frac{A}{B}$ seu proveniens ex divisione A per B; et si duae rationes sint eaedem, etiam haec provenientia divisionis eadem esse. His omnibus enim forma comparationis duarum quantitatum cognoscitur. Unde patet etiam, Aequimultiplorum eandem esse rationem, nempe quinquies duodecim esse ad ter duodecim ut 5 ad 3.

Si vero nulla sit Mensura communis exacta duarum quantitatum, nihilominus eodem modo tractari poterunt; numeri enim reperiri poterunt, rationem earum sive exacte sive quam proxime exprimentes, licet illi numeri exacti sint incommensurabiles inter se, adeoque vel alteruter vel etiam uterque sit incommensurabilis unitati. Quoniam enim numerus est homogeneum unitatis, quemadmodum linea recta lineae rectae, hinc aliqua recta sumta pro unitate, necesse est aliquem numerum respondere alteri rectae, qui erit surdus, si quidem duae quantitates sunt incommensurabiles. Numeri autem surdi exprimuntur per radices, tam puras quam affectas, variosque alios calculandi modos, quibus effici potest quantitas rationalis interventu surdae; itaque surdae determinantur per quantitates rationales quas efficiunt, sive per relationes quas ad rationales habent. Ita numerus qui per se ipsum multiplicatus exhibeat 2, neque integer est, neque fractus, ut supra ostendimus, sed ita scribitur: $\sqrt[2]{2}$ vel rq2, isque tum in lineis exhiberi tum etiam quam proxime per rationales exprimi potest. Ita si quantitas extrema et media ratione secanda sit, tunc pars ejus major $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ dimidia radix quadrata quinarii demta dimidia unitate, adeoque major a toto 1 subtrahatur, restabit minor $\frac{3}{2}\ \ \frac{1}{2}\sqrt{5}$ seu tres dimidiae demta dimidia radice quadrata quinarii, debet enim esse $\overset{\text{totum}}{1}$ ad $\overset{\text{majorem}}{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}$ ut $\overset{\text{major}}{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}$ ad $\overset{\text{minorem}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}$, seu 2 ad $\sqrt{5}-1$ ut $\sqrt{5}-1$ ad $3-\sqrt{5}$, seu $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ aequ. $\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$ quod et verum est, nam aequimultiplorum eadem ratio, hinc $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ aequal. $\frac{2\frown\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1,\frown\sqrt{5}-1}$ seu $\frac{2\sqrt{5}-2}{6-2\sqrt{5}}$ seu $\frac{\sqrt{5}\ \ 1}{3-\sqrt{5}}$. Itaque quoniam totum extrema et media ratione secandum a est datum, alterutra autem partium est quaesita (inventa enim una habetur altera, quia est totius et alterius differentia), hinc si invenerimus, a posita unitate, valorem majoris b esse $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ seu $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sive a esse ad b ut $\sqrt{5}-1$ est ad 2, nihil amplius quaerimus. Unde manifestum est, quando quaeritur ratio a ad b, et a est data, b quaesita, nihil aliud quaeri quam v a l o r e m seu numerum ipsius b, posito a esse unitatem, sive duos numeros (integros, fractos aut surdos nil refert) qui eandem habeant formam comparationis sive rationem quam habent a et b. Modum autem inveniendi hos numeros surdos suo loco trademus, hoc uno tantum annotato, methodum quidem comparationis per se quae in continua divisione seu subtractione possibili residuorum consistit, utilem esse quidem ad inveniendas communes mensuras, adeoque et valores exactos terminorum comparandorum quando sunt commensurabiles; sed quando sunt incommensurabiles, non nisi per maximas ambages ducere posse ad numeros veros surdos, qui tamen ex conditionibus problematis alia ratione facile inveniuntur, quod in exemplo praesenti ostendam. Totum a (AB) est ad partem majorem b (BC) ut pars major b (BC) ad minorem a—b (AC); quoniam autem habitis quatuor proportionalibus terminis a, b, b, a—b, factum ex duobus mediis bb aequatur facto ex duobus extremis aa—ab, de quo suo loco. Habemus ergo proportionem transmutatam in aequationem aa—ab aequ. bb seu bb+ab aequ. aa, et quoniam a est cognita, b incognita, habemus bb quadratum ipsius incognitae b una cum ab facto ex ductu cognitae a in incognitam b, aequale ipsi aa quadrato cognitae, quae aequatio dicitur affecta; si enim solum b fuisset cognito aequale, aequatio fuisset simplex. Si quadratum ipsius b nempe bb (vel cubus b^3 aliave potentia) fuisset reperta aequalis cuidam cognitae, tunc aequatio esset quidem exaltata ad aliquem gradum, attamen pura, ut si fuisset bb (vel b^2) aequ. a, tunc extrahendo utrobique radicem quadratam habuissemus b aequ. $\sqrt[2]{a}$, et ita jam inventus fuisset numerus surdus exprimens valorem ipsius incognitae b per cognitam a, adeoque b facta esset cognita. Sed quia hoc loco est bb+ab aequ. aa, arte perveniendum est ad extractionem radicis. Quaerenda est ergo cognita quantitas, quae ipsi incognitae bb+ab adjecta faciat formulam, ex qua extrahi possit radix; talis est $\frac{aa}{4}$ seu quarta pars ipsius aa (quae secundum regulam in Algebra praescriptam in omni hujusmodi exemplo facile invenitur) et habetur $bb+ab+\frac{aa}{4}$ aequ. ($aa+\frac{aa}{4}$ seu) $\frac{5aa}{4}$; adjecta enim utrobique quantitate $\frac{aa}{4}$ manet aequalitas. Extrahendo ergo radicem quadratam ab utraque parte, fiet $b+\frac{1}{2}a$ aequ. $\frac{1}{2}a\sqrt{5}$, nam $b+\frac{1}{2}a$ multipl. per se ipsum dat $bb+ab+\frac{aa}{4}$, ut patet in schemate adjecto*) et $\frac{1}{2}a\sqrt{5}$ multipl. per se ipsum dat $\frac{5aa}{4}$ (quia

*)
$$\begin{array}{r} b+\frac{1}{2}a \\ b+\frac{1}{2}a \\ \hline +\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}aa \\ +bb+\frac{1}{2}ab \qquad \\ \hline bb+ab\ \ +\frac{1}{4}aa \end{array}$$

$\frac{1}{2}$a per $\frac{1}{2}$a dat $\frac{1}{4}$aa, et $\sqrt{5}$ per $\sqrt{5}$ dat 5). Ita quantitas incognita b a quadrato depressa est ad simplicem formam seu primum gradum; quoniam ergo $b + \frac{1}{2}a$ aequ. $\frac{1}{2}a\sqrt{5}$, hinc utrobique auferendo $\frac{1}{2}$a, fiet b aequal. $\frac{1}{2}a\sqrt{5} - \frac{1}{2}a$ sive b est ad a ut $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ est ad 1. Tantum ergo ad habendum valorem ipsius b ex data a quaeritur $\sqrt{5}$, quae sane in lineis accurate exhiberi potest. Sit enim triangulum rectangulum BAD (fig. 16), cujus latus minus BA sit 1, medium AD, 2, tunc maximum BD erit $\sqrt{5}$. Nam quadratum ipsius 1 seu BA est 1, ipsius AD seu 2 est 4; jam quadratum hypotenusae BD aequale est duobus laterum quadratis per inventum Pythagorae; ergo 1 + 4 seu 5 ipsa hypotenusa erit latus hujus quadrati seu $\sqrt{5}$. Si jam igitur recta AB seu 1 extrema et media ratione secanda sit, sumatur dimidium ipsius BD nempe BE, quod erit $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, et ab eo detrahatur EF (aequalis ipsi BG, dimidiae ipsius AB unitatis, adeoque $\frac{1}{2}$), restabit BF aequal. $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, quae per calculum praecedentem erit major pars rectae AB proposito modo secandae. Sumta ergo BC aequal. BF, erit recta AB secta in duas partes BC, CA sic, ut minor CA sit ad majorem BC ut est major pars BC ad totam AB, quae constructio per calculum inventa consentit cum ea, quam exhibuit Euclides in undecima sexti juncta 30ma secundi Elementorum, ubi etiam triangulo rectangulo, cujus unum latus circa rectum alterius duplum est, utitur.

Quomodo autem aliae omnes quantitates vel rationales vel surdae lineis exhiberi possint, suo loco ostendetur; sed quando numeri quaeruntur, sciendum est eos exhiberi posse vel propemodum, nempe per appropinquationem, si inter appropinquandum alicubi subsistatur, vel exacte per seriem infinitam, si investigetur ipsa appropinquationum progressio. Cum enim hoc modo exprimantur omnes appropinquationes simul, manifestum est rem ipsam de qua agitur exacte exprimi, cum enim in singulis error fiat semper minor ac minor, adeo ut exhiberi possit minor data quavis quantitate, in omnibus tandem erit nullus. Ita in recta extrema et media ratione secanda quotientes omnes simul exprimamus hoc modo:

$$\frac{b}{a} \text{ aequ. } \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}} \text{ aequ. } \odot$$

seu b aequ. ⊙, posito a esse 1
BC AB

AC autem seu pars minor erit $1 - \odot$ seu $1 - \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}$.

Ex hac autem aequatione inter $\frac{b}{a}$ et seriem infinitam ⊙ elici possunt appropinquationes semper accuratiores, prout longius progredimur. Nempe si ponatur $\frac{b}{a}$ aequ. $\frac{1}{1}$ posito a aequ. 1, fiet b aequ. 1, qui valor est justo major; proximum est ut, a existente 1, sit b aequ. $\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}$ aequ. $\frac{1}{2}$, qui valor est justo minor; hinc b aequ.

$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}$ aequ. $\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}$ aequ. $\frac{2}{3}$ justo major; inde b aequ.

$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}$ aequ. $\frac{3}{5}$ justo minor; hinc b aequ.

$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}$ aequ. $\frac{5}{8}$ justo major, prodeuntibus ordine

numeris illis supra positis 2, 3, 5, 8, 13 etc. Unde cum $\frac{1}{1}$ sit major quam b et $\frac{1}{2}$ minor quam b, hinc sumendo alterutrum pro vero, error erit minor quam differentia inter $\frac{1}{1}$ et $\frac{1}{2}$ seu minor quam $\frac{1}{2}$, et cum $\frac{2}{3}$ sit major et $\frac{3}{5}$ minor quam b, error his assumtis erit minor quam $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$ seu quam $\frac{1}{15}$, et ita porro, et ob $\frac{5}{8} - \frac{8}{13}$ erit error minor quam $\frac{1}{104}$, et ita poterit esse minor dato quovis numero. Series autem ista

1 1 2 3 5 8 13 21 34

hanc habet proprietatem notabilem, quod terminus ultimus unitate minutus aequalis est omnibus praecedentibus praeter penultimum

(5 − 1 aequ. 1 + 1 + 2, et 8 — 1 aequ. 1 + 1 + 2 + 3, et 13 — 1 aequ. 1 + 1 + 2 + 3 + 5), et quod, ut in progressione geometrica factum ab extremis aequatur facto a mediis, ita si quatuor hujus termini sumantur ut 2, 3, 5, 8, factum ab extremis 2.8 nempe 16 et factum a mediis 3.5 nempe 15 differt unitate. Imo si tres sumantur 5, 8, 13, factum ab extremis $5 \frown 13$ seu 65 differt unitate a quadrato mediae $8 \frown 8$ seu 64.

V.

MATHESIS UNIVERSALIS.

Praefatio.

[Scopus operis tum ad promovendam ipsam Scientiam Mathematicam Generalem artemque in ea inveniendi, tum ad juvandos scientiae candidatos, ut filum quoddam habeant in labyrintho.]

Nisi in re tot jam ingeniis trita multa nova et ad perfectionem artis necessaria dicenda haberem, totiusque scientiae longe diversam a receptis notionibus ideam animo concepissem, nollem ab aliis bene dicta necquicquam retractare. Et sane constitueram initio solam tradere Scientiam infiniti, quae Matheseos Generalis pars est altior et ad naturam rerum penitius noscendam inprimis prodest, quod nulla ejus Elementa extarent egoque ipse novum in ea tractandi calculi genus protulissem approbatum insignibus Viris, quo pars quoque Geometriae Algebram transcendens facta est magis analytica; sed postea mecum ipse reputavi, ne communem quidem Logisticam, quae Algebrae nomine venit, a suis fontibus peti, neque aestimandi modum in universum satis nosci, unde saepe gravissimi errores sunt nati, qualis illorum est qui naturam virium motricium per gradus velocitatum ejusdem corporis metiuntur, ut suo loco constabit. Sed neque quantitatis aut relationis inter quantitates in universum, imo quod mirum videri queat, neque simplicissimae relationum speciei, hoc est rationis ac proportionis naturam satis explicatam haberi, atque ex his causis potissimum factum esse notabam, ut plerique Vietam et Cartesium exscribere contenti nec totius scientiae vim complexi, pomoeria ejus proferre non tentarint. Oportet enim etiam incognitarum regionum praejudicatam quandam notitiam haberi, ut in novas terras expeditiones fiant. Itaque qui supra veteres notiones mentem non attollunt neque in ulteriora prospiciunt, ne suspicione quidem novarum rerum ducuntur. Cui malo inprimis occurrunt illae Scientiarum delineationes, quibus etiam desiderata attinguntur, sed quibus abstinent autores qui videri volunt omnia praestitisse, quod in Cartesio non reprehenderem ob maxima Viri merita, nisi viderem magno Scientiarum detrimento hanc inanem fiduciam in magistrum progressus ingeniorum stitisse. Videbam etiam hujus studii candidatos fortuna magis quam methodo proficere, et cum nihil aliud hic tradi debeat, quam Logica Mathematica, id est ars judicandi atque inveniendi circa quantitates, a plerisque tamen non satis logice, id est cum ratione, tractari calculum algebraicum, quod perinde est atque in labyrintho sine filo versari. Neque enim arbitror satis explicari solere constantem modum Geometrica traducendi in calculum, aut vicissim a calculo redeundi ad constructiones; unde fit ut aestuent tirones nec satis habeant quo se vertant, et ad vulgaris Geometriae vitium redeant ut a casu pendere cogantur, magistris ipsis plerumque more artificum magis in consuetudine longae praxeos artem positam habentibus quam in regulis certis, quas tradere aliis possint. Praeterea considerabam tractatum quidem egregie fuisse, inde ab Euclide, de iis quae eandem habent rationem, sed novam latissimi usus doctrinam superesse de his quae eandem relationem habent. Naturam quoque serierum seu progressionum (quibus loca respondent in Geometria) magis fuisse libatam quam expositam. Ac ne quid nunc dicam de modo solvendi problemata in rationalibus aut in integris (quod magis ad arithmeticam spectare censetur), ubi hactenus fere per tentamenta processum est. Inter ipsius Algebrae desiderata semper habui Tabulas quasdam ac velut series Theorematum sive Canonum, qui si conditi haberentur semel in universum, magno ac taedioso calculandi atque semper in novis exemplis idem saxum volvendi onere nos levarent, praeterquam quod mirifice augerent scientiam et rationem darent multa praevidendi primo aspectu, quae nunc ipso calculi exitu sera sapientia discimus. Sed est in eam rem opus novis quibusdam ex Speciosa illa Generali repetitis artibus, quam et Combinatoriam vocare possis, non quantitatibus alligatam, sed in universum rerum formas seu qualitates tractantem, quando et quantitatum notitiam per qualitates ac similitudines ipsius Geometriae exemplo dirigi necesse est. Ipsa quoque Logica, hoc est generalissima Ars cogitandi, nova nobis subsidia suppeditare debet tum pro inventione universalium ex specialibus et inductione quadam scientifica, tum pro nova quadam Analysi gradaria, ubi vulgaris illa per saltum incedens difficultatem habet, ut alia taceam verae ac realis Logicae parum vulgo cognitae arcana. Quemadmodum autem Logistica vel Generalis de Magnitudine Scientia (cujus pars Algebra est) Speciosae Generali et ipsi postremo Logicae subordinata est, ita vicissim sub se habet Arithmeticam et Geometriam et Mechanicen et Scientias quae mistae Matheseos appellantur. Nam numeri definiti Arithmeticae sequuntur leges numerorum indefinitorum quos Algebra tractat et ipsos suos ex ea operationum canones petunt. Et in Geometria omnis puncti situs magnitudine quarundam rectarum determinatur. Et certis punctis definitis per rectas habentur Loca magis composita punctorum infinitorum eandem legem subeuntium, lineae et superficies, quibus figurae planae vel solidae terminantur, ac corpora denique ipsa. Vicissim locorum compositorum concursu simpliciora definiuntur.

Motus ipse quatenus a causae et potentiae consideratione abstrahitur, Geometricae est tractationis; nam lineae, imo et figurae omnes sunt motuum vestigia, et constituta lege motus, tempus, velocitatem, viam definire, rem purae Geometriae esse censeo. Sed Dynamicen quae tractat de Viribus motricibus corporumque conflictu, altius aliquid spirare, et sua quaedam principia petere comperi ex Metaphysica, cujus est dispicere de causis et de viribus atque actionibus substantiarum in universum, neque enim ista (quemadmodum res matheseos) imaginando consequare. Astronomiam nihil aliud esse quam situum et motuum repraesentationem manifestum est. Optica

[De usu hujus Scientiae, ut qui ejus praecepta teneat, ipse per se facilius invenire possit, quae in Geometria et Mechanica et Mathesi mista traduntur, paucis tantum privatis cujusque scientiae ad hanc subalternae principiis cognitis. Quod nunc magis locum habet, ex quo novum Calculi Algebram Transcendentis hoc primum libro explicati genus ipsa infiniti scientia subiit, quae partem hujus nostrae facit et ad majoris momenti problemata adhiberi debet.]

et Musica praeter physicas quasdam hypotheses experimento comprobatas mera sunt Arithmeticae et Geometriae specimina. Et in universum natura corporum quatenus cognoscitur, Mechanicas Leges subit, itaque physica, quatenus absolvit munus suum, redit ad Mechanicem; vicissim Mechanica tota ad Geometricas aequationes reducitur accedente propemodum solo illo ex Metaphysicis altiore principio quod nuper introduximus de aequalitate causae plenae integrique effectus. Geometria ipsa postremo ad calculum, hoc est ad nostram scientiam revocari potest, cujus praecepta praesentis operis materia erunt. Hujus igitur scientiae praeceptis cognitis, saltem quousque ea hactenus promota est, eousque asserere licet, unumquemque subordinatas illas scientias per se consequi posse, paucis tantum cujusque scientiae privatis principiis memoriae prius mandatis, ita ut magno numero propositionum onerare ingenium necesse non sit. Quae praestare cum hic ostendatur, non temere dicemus Mathesin universalem hoc loco tradi. Nam et in ipsa Geometria, qui pauca theoremata situs tenuerit et calculo recte uti sciverit, calculo consequetur omnia quae apud Euclidem et Apollonium et similes extant, idque partim jam tum ex Vietae et Cartesii inventis. Cum vero nec ista longe satis porrigantur, et praeterea Geometria quaedam sublimior quam nemo fere Veterum praeter Archimedem tractavit, hactenus calculi leges respuerit, imo a calculi autoribus diserte fuerit exclusa, quasi Mechanicum esset quicquid Algebram non patitur, nos huic errori (si quid judico) succurrentes novo calculi genere Scientiam infiniti instruximus, non per series tantum, sed et per summas differentiasque varii gradus, id est per quantitates conflatas et conflantia infinitis replicationibus continui elementa. Ita nunc tandem effecisse videmur, ut quicquid Geometria figuris exhibere potest, nos calculo vel algebraico vel certe nostro isto gradus aequationum algebraicarum omnes transcendente consequamur, ut jam demum asseri possit, totam Geometriam et quicquid in natura et arte leges Geometricas accepit, huic scientiae obsequi. Quod experientia ipsa confirmat, quando methodo nostra expedita sunt nuper quae prius summorum virorum conatus repulere.

MATHESEOS UNIVERSALIS
PARS PRIOR.
De Terminis incomplexis.

(1) **Mathesis universalis** est scientia de quantitate in universum, seu de ratione aestimandi, adeoque limites designandi, intra quos aliquid cadat. Et quoniam omnis creatura limites habet, hinc dici potest, ut Metaphysica est scientia rerum generalis, ita Mathesin universalem esse scientiam creaturarum generalem. Duasque habet partes: scientiam finiti (quae Algebrae nomine venit priorque exponetur), et scientiam infiniti, ubi interventu infiniti finitum determinatur.

(2) Quia autem omnis quantitas determinari potest per Numerum partium congruentium inter se seu repetitionem mensurae, hinc fit ut mathesis universalis simul sit scientia de Mensurae repetitione seu de Numero, unde et generali calculi nomine venire solet.

(3) Agitur autem tam de numero certo seu speciali quem tractat Arithmetica, quam de numero incerto et generali quem exponit Logistica, ut quidam vocant, quam aliqui speciosam, alii denique Algebram appellant. Nam a, b, c; y, x nihil aliud sunt in calculo quam Numeri, ut $a+b=x$ significat $2+3=5$ vel $1+7=8$, vel aliquid simile.

(4) Quodsi de lineis vel aliis rebus invicem addendis agatur, nihilominus tamen non nisi numerorum additio est, nam per lineas, quatenus in iis quantitas consideratur, intelligitur numerus aliquis mensurae veluti pedum. V. g. cum in unum addo a et b ad faciendum $a+b$ seu x, posito a esse lineam unius pedis et b duorum pedum, idem est dicere ex $a+b$ fieri x, quam dicere ex $1+2$ fieri 3 seu ex uno pede et duobus pedibus simul sumtis fieri tres pedes.

(5) Hinc patet, Arithmeticam et Algebram aut Logisticam παραλλήλως tractari posse, imo debere, cum eadem sit objecti natura eaedemque operationes, tantumque interesse quod in Arithmetica sunt numeri speciales, in Logistica vero Numeri generales vel indefiniti.

Et cum ii qui ad Algebram discendam accedunt, jam intelligere soleant Arithmeticam, hinc commode uti possumus praeceptis Arithmeticae ad Algebram translatis. Quemadmodum qui linguam aliquam jam tenet, Grammatica ejus mutatis mutandis utiliter ad alias linguas, praesertim cognatas discendas uti potest.

(6) Praeterea notandum est, omnes scientias a materia sensibili abstractas seu mere rationales habere aliquid analogum logicae, eoque magis quo magis sunt abstractae seu viciniores Logicae, ita ut quasi Logicae quaedam utentes, ut vulgo loquuntur, censeri possint. Quid enim aliud agunt, quam quod rationes generales inducunt in materiam?

Et quemadmodum multi Logicam illustrare tentaverunt similitudine computi ipseque Aristoteles in Analyticis Mathematico more locutus est, ita vicissim et multo quidem rectius Mathesis praesertim universalis, adeoque Arithmetica et Algebra tractari possunt per modum Logicae, tanquam si essent Logica Mathematica, ut ita in effectu coincidat Mathesis universalis sive Logistica et Logica Mathematicorum; unde et Logistica nostra nomine Analyseos Mathematicae passim venit.

(7) In Logica autem sunt Notiones, Propositiones, Argumentationes, Methodi. Idem est in Analysi Mathematica, ubi sunt quantitates, veritates de quantitatibus enuntiatae (aequationes, majoritates, minoritates, analogiae etc.), argumentationes (nempe operationes calculi) et denique methodi seu processus quibus utimur ad quaesitum investigandum.

(8) Porro ut Notiones in Logicis sunt vel Categorematicae vel Syncategorematicae, verb. gr. Homo aut equus est notio categorematica, sed particula et in termino isto: homo et equus, est syncategorematica; ita similiter in Mathesi universali notionibus categorematicis respondent quantitates seu Numeri quae quive designantur notis primariis: 1, 2, 3; a, b, x. Sed notionibus syncategorematicis respondent notae secundariae, et ut ita dicam, connotationes, veluti signa vincula aliaeve notae relationum inter quantitates.

(9) Signa κατ' ἐξοχὴν vocari solent $+$ plus, et $-$ minus, quae sunt notae additionis et subtractionis; ita $2+3$ facit 5, et $5-3$ facit 2; $a+b=c$, $c-b=a$.

(10) Notae multiplicationis sunt $\frown$ vel punctum; interdum etiam simplex ascriptio. $2\frown 3$ vel 2.3 significat bis tria seu 6, ut ex $a\frown b$ simplici ascriptione fit $ab=e$.

Notae divisionis $\frac{a}{b}$ vel $a:b$.

Sic $3 \frown 5$ vel 3.5 mihi significant ter quinque seu 15. Et $15:3$ mihi significat 15 divis. per 3 seu 5.

(11) Nota comprehensionis seu vinculum, ut $\overline{a+b}.c$, significat $a+b$ multiplicari per c, seu fieri $ac+bc$; nam si scripsissemus $a+bc$ longe aliud prodiisset.

Pro vinculo praesertim repetito saepe utor commatibus iisque repetitis; sic $a+b,:,c+d$ mihi significat $a+b$ dividi debere per $c+d$. Sic $\surd,,a+b,:,c+d,,,:,l+m$ mihi significat radicem ex fractione facta divisione ipsius $a+b$ per $c+d$, debere dividi per $l+m$. Quod et sic notare possem $\sqrt{a+b,:,c+d,:,l+m}$; vulgo vero sic notaretur $\sqrt{\dfrac{\dfrac{a+b}{c+d}}{l+m}}$, quod inter alia incommoda nimis spatii in pagina occupat. Utor et interdum parenthesibus, verbi gratia $(a+b)c$, item $\surd((a+b):(c+d)):(l+m)$, qua ratione in valde compositis optime tolluntur aequivocationes. Sed et solis intervallis majoribus minoribusque designari posset, quaenam in unum complexum sint conjungenda, dictae tamen designationes sufficiunt.

(12) Est et nota potentiae, seu ductus in se ipsum; $\boxed{2}\overline{a+b}$ significat quadratum ipsius $a+b$, et $\boxed{3}\overline{a+b}$ significat ejus cubum, $\boxed{4}$ biquadratum, $\boxed{5}$ surdesolidum, $\boxed{6}$ quadratocubum, et ita porro, ubi 2, 3 etc. sunt exponentes. Quanquam et saepe sic solummodo scribo exponentem supra ponendo $\overline{a+b}^2$ vel $\overline{a+b}^3$. Quidam solent exponentem scribere non supra, sed simpliciter post quantitatem per potentias exaltandam, ex. gr. $a2$ idem ipsis est quod aa vel quod a^2; sed cum saepe in calculo numeri ipsi pro literis adhibeantur, nascitur hinc aequivocatio, ut alia taceam incommoda.

(13) Reciprocum ipsius potentiae est Radix, cujus nota est $\surd$, id est r cum productione, ut $\sqrt{ab}$, $\sqrt{aa+ab}$, id est radix quadrata educta ex ab, vel ex aa et ab. $\sqrt[3]{\ }$ est radix cubica, $\sqrt[4]{\ }$ est biquadratica, $\sqrt[5]{\ }$ surdesolida, $\sqrt[6]{\ }$ quadrato-cubica, et ita porro. Reciprocatio inter potentiam et radicem sic intelligitur in exemplo $\sqrt[2]{9}=3$ et vicissim $9=\boxed{2}\,3$ vel $9=3^2$ vel $9=3.3$.

(14) Nota aequalitatis solet esse $=$, ut $a=b$. Cartesius adhibet $\propto$, credo a litera initiali aequalitatis nempe æ.

(15) Nota majoritat $\sqcap$, ut $5 \sqcap 3$ significat 5 esse majus quam 3.

Nota minoritatis $\urcorner$ ut $3 \urcorner 5$ seu 3 esse minus quam 5.

(16) Nota differentiae a Cartesio et Schotenio adhiberi solet $=$, ut $a=b$ significat ipsis differentiam inter a et b, sive excessum ejus quod inter haec duo est majus, cum scilicet ignoramus adhuc utrum sit majus. Verum deprehendi, non esse opus peculiari signo differentiae, sed id contineri sub signis ambiguitatis quae a me sunt uberius exculta.

Itaque differentia inter a et b nihil aliud est, quam alterum horum $+a-b$ vel $+b-a$ seu $-a+b$, unde a me scribi sic solet $\pm a \mp b$, modo intelligatur id quod majus est ex duobus affici signo $+$, alterum verum signo $-$.

Datur et ambiguitas major et quidem triplex, ut si sit
$+a+b$, quod significat vel summam vel differentiam, cum scili-
$+\quad -$
$-\quad -$
cet duas quantitates in unam componendam conjungendas constat, nec tamen adhuc determinatur utrum id sit faciendum per additionem an per subtractionem; et si per subtractionem, quodnam duorum sit subtrahendum ab altero.

Notae quoque peculiares rationis et proportionis adhiberi solent. Sic quidam solent per $a \div b ∺ c \div d$ significare, eandem esse rationem seu proportionem ipsius a ad b, quae est ipsius c ad d. Sed ego deprehendi regulariter non esse opus in calculo peculiaribus signis pro rationibus et proportionibus, earumque analogiis seu proportionalitatibus, sed pro ratione sive proportione sufficere signum divisionis, et pro analogia seu proportionum coincidentia sufficere signum aequalitatis. Itaque rationem seu proportionem ipsius a ad ipsum b sic scribo: $a:b$ seu $\frac{a}{b}$, quasi de divisione ipsius a per b ageretur.

Et analogiam seu duarum proportionum aequalitatem sive convenientiam designo per aequalitatem duarum divisionum seu fractionum. Et cum designo, eandem esse rationem a ad b quae est c ad d, sufficit scribere $a:b = c:d$ seu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Etsi enim in se et formaliter alia sit proportionis quam divisionis natura, attamen quia posito $a \div b ∺ c \div d$, semper est $a:b = c:d$, et vicissim hoc posito sequitur illud; hinc ne superfluas notas adhibeam, ipsam rationem et proportionem statim hoc modo in calculum traduco, praesertim cum infra appariturum sit, omnes Euclideas de Rationibus et

Proportionibus consequentias ex hoc notandi modo sponte nasci, nec opus esse peculiaribus regulis vel praeceptis.

Praeter notationem proportionis et rationis adhibeo etiam interdum notam Relationis in genere. Est enim proportio tantum relationis species, eaque simplicissima. Sed relationes adhuc variari possunt modis innumerabilibus, ex. gr. cum dato sinu recto et sinu verso detur radius, hinc intelligi potest relatio quaedam inter radium r, sinum s, et sinum versum v, quam sic designo $r;\overset{\backsim}{s};v$, et si esset $r;\overset{\backsim}{s};v$ eadem cum $m;\overset{\backsim}{n};p$ seu $r;\overset{\backsim}{s};v \backsim m;\overset{\backsim}{n};p$, id mihi significaret, etiam m, n, p se habere ut radium, sinum et sinum versum.

Unde praeter notam aequalitatis habeo et notam similitudinis $\backsim$, qua et usus sum in exemplo proxime praecedente. Sic si sit $aa-bb=cc$ et $ll-mm\ \ nn$, tunc dico esse $a;\overset{\backsim}{b};c \backsim l;\overset{\backsim}{m};n$ seu relationem inter a, b, c eandem esse respective (seu eodem ordine servato) cum relatione inter l, m, n.

Habeo et notam coincidentiae ∞ seu identitatis. Exempli gratia sit $aax^2+2abx+bb \infty lx^2+mx+n$, hoc mihi non tantum significat aequalitatem inter has duas formulas (quemadmodum si scripsissem $aax^2+2abx+bb=lxx+mx+n$), sed significat etiam coincidentiam, adeoque aequalitatem singulorum terminorum, adeoque erit $l=aa$ et $m=2ab$ et $n=bb$. Itaque quod vulgo vocant comparationem aequationum, revera est identificatio quaedam seu coincidentia.

Quemadmodum etiam $+$ est nota conjunctiva seu cumulationis et respondet τῷ et, ut $a+b$ id est $a+b$ simul, ita datur quoque nota disjunctiva seu alternationis quae respondet τῷ vel, sic $a\,\widehat{v}\,b$ mihi significat a vel b. Idque et in calculo usum habet, nam si sit $xx+ab=\overline{a+b}x$, erit $x=a\,\widehat{v}\,b$ seu x significabit vel a vel b, habebitque adeo valorem ambiguum. Ex. causa si sit $xx+6=5x$, potest x esse 2, sed tamen potest etiam x esse 3. Nam si x sit 2, tunc ex $xx+6=5x$ fiet $4+6=10$; et si x sit 3, tunc ex $xx+6=5x$ fit $9+6=15$. Plures autem incognitae hujus valores seu praesentis aequationis radices dari non possunt, ut suo loco patebit.

Hinc usum quoque habent signa ambigua, et suo loco patebit, ambiguitatem in calculo esse fontem irrationalitatis; itaque cum scribo $x=3+\sqrt{4}$, tunc id potest explicari tam per $3+\sqrt{4}$ seu $3+2$

seu 5, quam per $3-\sqrt{4}$ seu $3-2$ seu 1, adeoque erit $x=5$ v 1. Nam ut tollamus irrationalitatem, sit $x-3=\sqrt{4}$; ergo $xx-6x+9=4$ seu $xx-6x+5=0$ seu $xx+5=6x$, ubi patet satisfacere tam 5 quam 1. Nam si x valeat 5, fiet $25+5=30$; sin x valeat 1, fit $1+5=6$.

Introduxi et novum genus notandi pro calculo differentiali et summatorio. Sit enim series repraesentata per figuram adjectam (fig. 17) ubi abscissae AB, nempe A_1B, A_2B, A_3B etc. significant locum in serie seu numeros ordinales, sed ordinatae BC, uti ${}_1B_1C$, ${}_2B_2C$, ${}_3B_3C$ etc. significant ipsos terminos seriei. Jam AB seu abscissam quamcunque generali appellatione vocemus x, et BC quamcunque seu ordinatam ipsi x respondentem vocemus y si placet, adeo, ut si x sit A_2B, respondens ei y futura sit ${}_2B_2C$. His positis jam porro possumus considerare incrementa quaedam seu differentias tam in abscissis proximis quam in ordinatis. Ex. g. differentia inter duas proximas abscissas A_1B et A_2B est ${}_1B_2B$ seu ${}_1C_2D$, et differentia inter duas proximas ordinatas ${}_1B_1C$ et ${}_2B_2C$ est ${}_2D_2C$. Similiterque differentia inter duas alias proximas abscissas A_3B et A_4B est ${}_3B_4B$ seu ${}_3C_4D$. Et differentia inter duas iis respondentes proximas ordinatas ${}_3B_3C$ et ${}_4B_4C$ est ${}_4D_4C$. Quemadmodum autem quamlibet abscissam velut A_1B, A_2B, A_3B, A_4B etc. generali appellatione vocavimus x, et quamlibet ordinatam velut ${}_1B_1C$, ${}_2B_2C$, ${}_3B_3C$, ${}_4B_4C$ generali appellatione vocavimus y; ita quodlibet incrementum vel elementum abscissae (quo scilicet sequens supra praecedentem crescit) velut ${}_1B_2B$, ${}_2B_3B$, ${}_3B_4B$ generali appellatione vocabimus dx, id est differentiam duarum proximarum x; et similiter quodlibet elementum vel incrementum ordinatae (quo scilicet sequens supra praecedentem crescit) velut ${}_1D_1C$, ${}_2D_2C$, ${}_3D_3C$, ${}_4D_4C$ generali appellatione vocabimus dy, id est differentiam duarum proximarum y.

Adhibuimus etiam notam pro summis; nam si quaelibet harum ${}_1D_1C$, ${}_2D_2C$, ${}_3D_3C$, ${}_4D_4C$ vocetur v, summa omnium (id est ${}_1D_1C+{}_2D_2C+{}_3D_3C+{}_4D_4C$) id est ${}_4B_4C$ a me per compendium vocabitur $\int v$. Hinc patet, ut reciprocae sunt additio et subtractio, tum multiplicatio et divisio, itemque potentia et radix, ita et reciprocas inter se esse summas et differentias. Nam in schemate praecedenti quamlibet ex dictis ${}_1D_1C$, ${}_2D_2C$, ${}_3D_3C$, ${}_4D_4C$ vocavimus v, ita ut v sit DC; sed easdem etiam vocavimus dy, referendo ad ipsas y seu BC, quarum sunt incrementa. Habemus ergo $dy=v$

et vicissim $\int v = y$. Nam summae omnium v vel omnium DC, inde ab initio aequantur ultimae y (seu ${}_1D_1C + {}_2D_2C + {}_3D_3C + {}_4D_4C = {}_4CB_4C$); quia ergo $\int v = y$, et $v = dy$, fiet $\int dy = y$ seu summa differentiarum inter ipsas y reddit ipsum terminum y, prorsus ut in potentiis et radicibus $\overline{{}^{2}|}\,\overline{\sqrt[2]{3}} = 3$.

Cum vero ipsae DC seu v sive dy non minus progressionem vel incrementa aut decrementa differentiasque adeo suas habeant, quam ipsae y, hinc oriuntur differentiae differentiarum seu ddy. Imo dantur et differentiae tertiae, et ita porro, quoad usque est opus.

Reperi autem summatorium calculum imprimis pertinere ad figurarum quadraturas, differentialem vero ad tangentes vel directiones, et differentio-differentialem ad oscula seu flexiones; de quibus omnibus suo loco clariores notiones habebuntur.

Hactenus de Connotationibus seu notis secundariis quibus in calculo utimur; sed nunc ipsae quantitates notis istis vel primariis solis cum simplices sunt, vel primariis et secundariis simul designandae uberius a nobis exponi debent.

Quantitas designari potest litera, ut a, b, item numero vel vero, ut 3 (ternarius), vel fictitio, ut si 13 mihi non significet tredecim, sed potius quantitatem collocatam in formula prima 1, loco tertio 3, quam designo per 13. Unde patet, ne hoc quidem indifferens esse, quam notam simplicem primariam assumere velimus. Qua ratione ingentem Speciosae defectum suppleo, quod nempe assumtae vulgo notae, scilicet literae a, b etc. non satis significant ipsarum quantitatum inter se ordinem et relationem; ita in progressu calculi non apparent pulchrae illae harmoniae, legesque ac theoremata, quae primo statim aspectu designantur, si ordo quidam certus et regularis in notando servetur. Exempli causa si vulgari more $cx^3 + bx^2 + qx + r$ multiplicetur per $gx^2 + px + e$,

$$\text{productum erit} \left\{ \begin{array}{llll} cgx^5 + bgx^4 + qgx^3 + rgx^2 & & & \\ & + cpx^4 + bpx^3 + qpx^2 + rpx & & \\ & & + cex^3 + bex^2 + qex + re & \end{array} \right\}$$

sed si $10x^3 + 11x^2 + 12x + 13$ multiplicemus per $20x^2 + 21x + 22$, ubi nulla nota sine ratione assumta est, nihilque est in assumtis, quod non exprimatur et discriminetur in notis, etiam progressus egregie in producto apparebit. Nempe per notam dextram numeri distinguimus coefficientes formulae primae a coëfficientibus formulae secundae; per notam vero sinistram distinguimus sedem in quavis formula, seu cujusnam potentiae sit coefficiens; sic 21 intelligimus esse in formula secunda coefficientem ipsius x^1 seu x, et 12 intelligimus esse in formula prima coefficientem ipsius x^2.

Jam $10x^3+11x^2$ etc. in $20x^2+21x$ etc.

$$\begin{array}{llllll} \text{dat } 10.20x^5 + 11.20x^4 + 12.20x^3 + 13.20xx \\ \quad + 10.21x^4 \quad 11.21x^3 \quad 12.21xx + 13.21x \\ \quad\quad 10.22x^3 \quad 11.22xx \quad 12.22x + 13.22, \end{array}$$

ubi patet in producto esse omnes combinationes possibiles certa lege atque ordine factas. Nempe in quovis membro coefficientis producti est binio, seu combinatio duorum numerorum fictitiorum. In qualibet harum binionum notae sinistrae sunt eaedem et eodem modo collocatae, nempe 1 et 2 veluti 10.20, aut 11.20, aut 10.21, et ita porro. In omnibus binionibus seu membris coefficientis ejusdem potentiae ipsius x, summa notarum dextrarum conficit idem, nempe numerum qui additus exponenti potentiae dat exponentem summum 5. Veluti coefficiens ipsius x^2 constat ex tribus membris, $13.20+12.21+11.22$, ubi patet $3+0$, itemque $2+1$, itemque $1+2$ facere semper idem nempe numerum 3, qui additus ad 2 (exponentem ipsius x^2) possit facere 5. Unde patet etiam, quot possibilia sint membra cujuscunque coefficientis, tot scilicet quot modis numerus 3 ex binis inferioribus 0, 1, 2 componi potest, et quot cujusque compositionis sunt transpositiones possibiles, veluti $1+2$ et $2+1$ sunt una quidem compositio, sed variant transpositione. Patet etiam hinc, productum hic scribi posse sine calculo, theorematibus hujus modi semel constitutis. Exempli gratia pro termino x primum scribemus

13. et mox supplendo fiet	13.2 et denique absolvendo	$13.20x^2$
12.	12.2	12.21 ..
11.	11.2	11.22 ..
10.	10.2	10.23 ..

Et ita ex primo membro cujusque coefficientis dato (quod determinatur ab ipso potentiae ipsius x gradu) patet reliqua quoque cum sua serie determinari.

Et haec majoris adhuc usus sunt, cum tres vel plures formulae invicem duci debent; nam si adhibeamus notationem regularem et accuratam, non vero ut vulgo arbitrariam, saepe praevidere possumus quid sit proditurum; et semper certa quaedam theormata apta eruimus, facileque etiam errores procavemus aut emendamus.

Hinc etiam prodit ignorata hactenus vel neglecta sub-ordinatio Algebrae ad artem Combinatoriam, seu Algebrae Speciosae ad Speciosam generalem, seu scientiae de formulis quantitatem significantibus ad doctrinam de formulis, seu ordinis, similitudinis, relationis etc. expressionibus in universum, vel scientiae generalis de quantitate ad scientiam generalem de qualitate, ut adeo speciosa nostra Mathematica nihil aliud sit quam specimen illustre Artis Combinatoriae seu speciosae generalis.

Unde patet quoque, quam imperfecta hactenus fuerit Algebra, cum ne modus quidem simplices terminos exprimendi bene fuerit constitutus, ut taceam tot alios in Connotationibus defectus hic suppletos, et alias supplendos. Quemadmodum et ostendam, Arithmeticae notas, quantum ad Theoriam, hactenus male fuisse constitutas, ita scilicet ut relatio numerorum inter se atque ordo non apparuerit, eaque ratione factum est, ut magna verae Arithmeticae pars hactenus sit ignorata, quod in scientia maxime facili et maxime usuali mirum videri possit.

Quantitates quae notantur per literas vel numeros vel alias notas, sunt vel abstractae, vel concretae. Abstractae sunt numeri, vel etiam rationes, quas ipsas (quemadmodum supra dictum) ut numeros fractos concipio. Quantitates concretae possunt esse lineae, figurae, solida, tempora, motus, vires, soni, lux, et omnia denique, in quibus ejusdem mensurae repetitio intelligi potest; de quibus alias pluribus, ut applicatio Calculi generalis ad Geometriam, Dynamicen, Astronomiam, Physicam et alias scientias melius appareat.

Quantitates exprimuntur vel per notam simplicem, modo dicto, velut per a, b numerum; vel per plures notas inter se conjunctas, modum formandi quantitates designantes.

Prima formatio est per signum $+$, ut si ex a et b conjunctis per additionem seu simul sumtis fiat $a+b$, vel $a+b+c$, vel $a+b+c+d$. Fieri autem potest, ut quae hoc modo simul adduntur, habeant quandam relationem inter se, ex quibus simplicissima est, si coincidant; ut si a et b coincidant fit $a+b$ idem quod $a+a$, vel idem quod $2a$, et $a+b+c$ idem quod $a+a+a$ seu idem quod $3a$. Ex quo etiam apparet, quomodo Multiplicatio sit additio quaedam repetita. Et porro, cum habemus $2a$, vel $3a$, vel generaliter ma, vel am, rursus considerare licebit, ipsum numerum m posse aequalem esse numero a, et ex am fiet aa; unde jam nascitur Potentia, eodem in se multiplicato.

Habent autem potentiae suos gradus, nempe si a multiplices per a fit aa seu a^2 seu quadratum; si aa rursus multiplices per a, fit aaa seu a^3 seu cubus.

Tabula potentiarum: a^0 est unitas, a^1 seu a est latus seu quantitas, a^2 est quadratum, a^3 cubus, a^4 biquadratum, a^5 surdesolidum primum, a^6 (seu $a^{2\cdot 3}$) quadrati-cubus, a^7 surdebisolidum seu surdesolidum secundum (nomine surdesolidi vocando omnem potentiam cujus exponens est numerus primitivus supra 3), a^8 seu $a^{2\cdot 2\cdot 2}$ triquadratum, a^9 seu $a^{3\cdot 3}$ bicubus, a^{10} seu $a^{2\cdot 5}$ quadrati surdesolidum, a^{11} surdetrisolidum seu surdesolidum tertium, a^{12} seu $a^{2\cdot 2\cdot 3}$ biquadrati cubus. Sic $a^{3\cdot 3\cdot 3}$ seu a^{27} erit tricubus, et $a^{5\cdot 5}$ seu a^{25} erit bisurdesolidum, et a^{125} seu $a^{5\cdot 5\cdot 5}$ erit trisurdesolidum. Et in universum denominationes designant resolutionem exponentis in suos primitivos.

Quemadmodum porro potentiae nascuntur ex ductis invicem aequalibus, ita si diversae literae vel notae simplices ducantur, oriuntur quae vocare licet rectangula, quoniam in Geometria ab seu multiplicatio a per b repraesentatur optime per rectangulum planum (fig. 18); et abc, seu multiplicatio a per b et producti rursus per c repraesentatur per rectangulum solidum.

Imo etsi in Geometria non dentur nisi tres dimensiones, tamen in rerum natura dantur plures. Sint enim duo rectangula solida abc et lmn (fig. 19), prius ex auro, posterius ex argento, et pondus auri ad pondus argenti sit ut d ad p; patet pondus rectanguli solidi prioris ad pondus rectanguli solidi posterioris fore ut abcd ad lmnp, adeoque etsi spatia non sint nisi trium dimensionum, pondera tamen esse quatuor dimensionum. Quodsi impetus, motus, vires horumque varios gradus aut varias species adjungamus, possunt dimensiones multiplicari in infinitum.

Habemus ergo rectangula haec: birectangulum ab, trirectangulum abc, quadrirectangulum abcd, et ita porro.

Eadem exprimi possunt per combinationes. Nam ab est binio duorum, abc est ternio trium, abcd est quaternio quatuor talium; quae quidem combinatio, cum numerus combinandorum coincidit cum exponente combinationis, non nisi unica est. Alias sunt plures, exempli causa, rerum trium a, b, c sunt biniones tres, nempe ab, ac, bc; rerum quatuor a, b, c, d sunt biniones sex, nempe ab, ac, ad, bc, bd, cd; terniones quatuor abc, abd, acd, bcd; sed de his suo loco.

Cum vero potentiae simplices sint formae ex iisdem sive aequalibus invicem ductis, et rectangula seu combinationes simplices sint formae ex diversis invicem ductis, superest jam ut eas formas seu combinationes spectemus, in quibus partim sunt eaedem literae, partim diversae, quas compositas vocare licet.

Et hae quidem formae variant, pro gradibus: in primo gradu nihil aliud habemus quam unam formam, a vel b etc.

In secundo gradu sunt formae duae: quadratum et binio seu birectangulum aa et ab.

In tertio gradu sunt formae tres: a^3, a^2b, abc, nempe praeter cubum a^3, et trirectangulum vel ternionem abc, occurrit a^2b (vel quod quoad formam eodem redit ab^2) quod possis appellare quadrato-simplex.

In quarto gradu sunt formae: a^4 (biquadratum), a^3b (cubo simplex), a^2b^2 (bibinio), a^2bc (quadratobinum), abcd (quaternio).

In quinto gradu sunt formae: a^5 (surdesolidum), a^4b (biquadrato simplex), a^3b^2 (cuboquadratum), a^3bc (cubobinum), a^2b^2c (bibinio simplex), a^2bcd (quadratotrinum), abcde quinio.

In sexto gradu sunt formae: a^6 (quadraticubus), a^5b (surdesolido simplex), a^4b^2 (biquadratoquadratum), a^4bc (biquadratobinum), a^3b^3 (tribinio), a^3b^2c (cubo-quadrato simplex) a^3bcd (cuboternum), $a^2b^2c^2$ (biternio), a^2b^2cd (bibinobinum), a^2bcde (quadrato quaternum), abcdef (senio).

In septimo gradu sunt formae: a^7 (surdesolidum secundum), a^6b (quadratocubo-simplex), a^5b^2 (surdesolido quadratum), a^5bc (surdesolido binum), a^4b^3 (biquadrato cubus), a^4b^2c (biquadratoquadrato simplex), a^4bcd (biquadrato ternum), a^3b^3c (tribino simplex), $a^3b^2c^2$ (cubobibinum), a^3b^2cd (cuboquadrato binum), a^3bcde (cubo quaternum), $a^2b^2c^2d$ biterno simplex), a^2b^2cde (bibino ternum), a^2bcdef (quadrato quinum) abcdefg (septenio). Atque ita porro ad gradum octavum, nonum et sequentes pergi posset, si esset opus; sed non est necesse his multum morari, etsi libare nonnihil prosit.

Notandum etiam, quadraticubum mihi significare a^6 seu $a^{2\cdot 3}$, nempe quia exponens hujus potentiae 6 est productus ex 2 exponente quadrati et 3 exponente cubi, ubi semper in denominando incipio a numero producente minore. Sed cubo-quadratus, cum scilicet a majore incipio, longe aliud mihi designat, nempe formam productam ex cubo unius literae in quadratum alterius literae, ut a^3b^2, vel b^3a^2, vel quod idem est a^2b^3, ubi in denominando incipio ab altiore; quod observandum est ad aequivocationes evitandas. Itaque quadraticubo-quadratum mihi significabit a^6b^2, et quadraticubo-quadraticubus significat a^6b^6, quod etiam efferri potest sebinio, et quadraticubo-cuboquadratus significat $a^6b^3c^2$.

Ubi etiam notandum, quae sunt ejusdem literae connecti per genitivum, quae diversae per dativum; sic quadraticubus est a^6 seu $a^{2\cdot3}$; nam revera est quadrati a^2 cubus, quia si a^2 ter in se cubice ducatur fit a^6; sed dativus significat transitum a litera in literam, ut cuboquadratus significat a^3b^2, seu cubum ab uno ductum in quadratum ab alio. Licet autem, observato hoc discrimine inter genitivum et dativum, minus sit necessarium observare quid sit praeponendum aut postponendum; nam quadraticubus seu cubus a quadrato idem est quod cubiquadratus seu quadratus a cubo; et quadrato cubus b^2a^3, id est ductum a quadrato alicujus literae b in cubum alterius literae a, idem est quod cubo quadratus a^3b^2, id est cubus alicujus literae a in quadratum alterius b; malo tamen majoris lucis causa praeter distinctionem genitivi et dativi adhibere distinctionem ordinis, ut in exprimendo exponente unius literae praeponam exponentis factores seu productores minores, sed ut in exprimendo combinationes potentiarum a diversis literis praeponam exponentem potentiae altioris.

Denique notandum est, quasdam formas servare legem justitiae, ita ut quaelibet in iis litera se habeat eodem modo, ut fit in rectangulis seu combinationibus simplicibus, nempe binionibus ab, ternionibus abc, quaternionibus abcd, et in harum potentiis seu bibinionibus a^2b^2, tribinionibus a^3b^3 etc., biternionibus $a^2b^2c^2$, triternionibus $a^3b^3c^3$ etc., biquaternionibus $a^2b^2c^2d^2$, triquaternionibus $a^3b^3c^3d^3$ etc., et ita porro.

Ceterae formae leges justitiae non observant nisi plures similes addantur inter se, ex. gr. quadrato simplex a^2b aliter tractat a quam b: si tamen in unum addantur a^2b+ab^2, corrigitur injustitia, et in formula hac composita ambae literae aequali jure utuntur.

Atque haec vel ideo praenotare operae pretium est, quoniam. ut suo loco patebit, justitia (quemadmodum et pietas) ad omnia utilis est, ut etiam in calculo Algebraico ejus simulacrum prosit.

Expositis jam formis simplicibus, considerandum nunc est, posse inde oriri formulas compositas ex. gr. $x+y$, vel x^2+y^2, vel x^3+x^2y, vel $x+y+xx+xy$, vel $2x+3y$, aliisque modis innumerabilibus. Duae autem sunt leges quae in hac compositione observari vel violari possunt: una est Lex Homogeneorum, quam tulit Vieta, altera est Lex Justitiae, quam ego introduxi.

Lex Homogeneorum est, ut quae in unum componuntur, sint ejusdem gradus, ex. gr. $x+y$, vel x^2+y^2, vel $xx+2xy$, vel $2xx+3yy$, posito 2 et 3 esse numeros, hi enim in lege Homogeneorum nihil mutant. Sed si in unum addantur diversi gradus quantitates, tunc violata intelligitur lex Homogeneorum, ut si fiat $x+y+2xx+3xy$.

Et quidem si de numeris vel quantitate mere abstracta agatur, impune lex homogeneorum violari potest; ex. causa $6+15+8=27$, ubi faciendo $2=a$, et $3=b$, et $5=c$ fiet $ab+bc+a^3=b^3$, quod verum est, etsi lex homogeneorum non observetur, seu etsi rectangula plana $ab+bc$ addantur cubo a^3.

Sed cum numeri applicantur rebus, hoc non licet, neque enim addi possunt in Geometria rectangula plana ab et bc ad cubum a^3, neque licet comparationem instituere inter rectangulum solidum spatiale seu simplex διάστημα trium dimensionum, et inter corpus aliquod grave, quod est quatuor dimensionum, ut paulo ante est explicatum.

Interim licet etiam in rebus ipsis recedere a lege homogeneorum, saltem in speciem, subintelligendo aliquam quantitatem pro unitate assumtam, ex. gr. $ab+bc+a^3=b^3$ significabit, 6 pedes cubicos una cum 15 pedibus cubicis et cubo duorum pedum simul aequari cubo trium pedum; seu unitatem 1 adhibendo $1ab+1bc+a^3=b^3$, id est rectangulum solidum 1ab seu ab (quia unitas non multiplicat) cujus altitudo unius pedis (1), latitudo duorum (a), longitudo trium (b) producunt sex pedes cubicos una cum rectangulo solido 1ac seu ac, cujus altitudo unius pedis (1), latitudo duorum 2(a) et longitudo 5(c) producunt 15 pedes cubicos, una cum a^3 cubo duorum pedum seu 8 pedibus cubicis aequari b^3 cubo trium pedum seu 27 pedibus cubicis.

Etsi autem Cartesius soleat non raro studio violare legem homogeneorum introductione unitatis, ego tamen ejus rei non magnum usum reperio, et malo cum Vieta, quoad commode licet, etiam in ipsis numeris legem homogeneorum sequi, quia ita sponte naturae nascitur calculus, maximeque id consentit ordini rerum, erroresque etiam facilius evitantur, cum lex homogeneorum inter examina sit calculi.

Habeo et novam homogeneorum Legem a me introductam pro calculo differentiali et summatorio, ubi praeter potentias et formas paulo ante positas occurrunt differentiae. Ex. causa addx homogenea est cum dxdx, seu quadratum differentiae primi gradus homogeneum est cum rectangulo ex differentia secundi gradus ducta in quantitatem ordinariam facto. Et hanc in rem regulam assignavi generalem, sed cui hoc loco immorari nolo, quia ista profundiora nondum satis intelligi possunt initio hujus tractationis.

Porro lex justitiae etsi minus necessaria sit quam lex homogeneorum, tamen non minus est utilis; non tantum enim inservit ad calculi examen ulterius et exquisitius, erroresque alias facile irrepentes praecavet, sed etiam modum ostendit, id quod de una quantitate per calculum venati sumus, de alia statim scribendi sine calculo, ex principio similitudinis seu ejusdem relationis. Est autem lex justitiae vel communis omnibus literis calculi propositi, vel tantum quibusdam inter se, et aliis rursus inter se. Communis omnibus literis est in formula qualis $x^3+y^3+z^3+2x^2y+2x^2z+2xy^2+2xz^2+2y^2z+2yz^2+5xyz$, ubi soleo magno calculi fructu compendiis uti in scribendo, nam hanc formulam breviter ita exprimo: $\underset{\cdot\cdot}{x^3}+2\underset{\cdot\cdot}{x^2y}+5\underset{\cdot\cdot}{xyz}$, ubi per $\underset{\cdot\cdot}{x^3}$ intelligo omnes cubos ex literis x, y, z, per $\underset{\cdot\cdot}{x^2y}$ omnes quadrato simplices ex iisdem, et ita porro in aliis. Unde multa generalissima theoremata condi possunt, quae locum habent quantuscunque sit numerus literarum, ex. gr. cubus de $x+y+z+\omega$ etc. seu compendiose cubus ipsius $\underset{\cdot\cdot}{x}$ est $\underset{\cdot\cdot}{x^3}+3\underset{\cdot\cdot}{x^2y}+6\underset{\cdot\cdot}{xyz}$. Unde in specie explicando in quatuor literis cubus ab $x+y+z+\omega$ est

x^3+	$3x^2y+$	$6xyz$
y^3	$3xy^2$	$6xy\omega$
z^3	$3x^2z$	$6xz\omega$
ω^3	$3xz^2$	$6yz\omega$
	$3x^2\omega$	
	$3x\omega^2$	
	$3y^2z$	
	$3yz^2$	
	$3y^2\omega$	
	$3y\omega^2$	
	$3z^2\omega$	
	$3z\omega^2$	

Unde si plures essent literae, verb. gr. sex, septem, decem etc., immensa orietur moles membrorum, quae tamen omnis hac brevi formula $\overline{\underline{|3|}}\,\underset{\cdot\cdot}{x} = \underset{\cdot\cdot}{x^3}+3\underset{\cdot\cdot}{x^2y}+6\underset{\cdot\cdot}{xyz}$ sufficienter exprimitur, beneficio justitiae inter literas observatae.

Interdum lex justitiae propria observatur inter literas quasdam, et rursus alia propria inter alias quasdam literas in calculo occurrentes, ut si sit $\left.\begin{matrix}+a\\b\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}+a\\b\end{matrix}\right\} y^3 + abxy$, patet x et y servare justitiam inter se, item a et b etiam servare justitiam inter se, etsi a et x (v. gr.) inter se justitiam non servent.

Aequationes vero, ut id obiter addam, etsi non sit plane hujus loci, duobus modis justitiam servant, uno: si omnibus quantitatibus ab una parte positis et nihilo posito in altera, oritur formula observans justitiam, quae formula est nihilo aequalis; altero modo observatur justitia in aequatione, si quidem aequatione ad formulam redacta ambae literae non tractantur actu ipso eodem modo, quod tamen de una nunc factum est, fieri potest de altera, et vice versa, quod contingit simplice mutatione signorum. Ita si sit $xx + yy = 0$, inter x et y perfecte lex justitiae observatur; sed si sit $xx + x = yy + y$, tunc redacta aequatione ad formulam fit $\begin{matrix}+xx+x\\-yy-y\end{matrix} = 0$, ubi aliter tractatur x quam y, revera tamen ambae literae pari jure utuntur lege justitiae non nisi in speciem violata, quoniam pari jure (mutatis signis) facere licet $\begin{matrix}+yy+y\\-xx-x\end{matrix} = 0$, quemadmodum si ex priore $xx + yy = aa$ faciamus $xx = aa - yy$, lex justitiae etiam in speciem tantum violatur.

Caeterum etsi hactenus quantitates earumque formas simpliciores vel etiam formulas magis compositas tantum formaverimus explicate, seu actu ipso, possunt tamen et formari implicite seu indicative; nam saepe cum formulae sunt in se invicem ducendae, praesertim ubi sunt magis compositae, ductum illum non actu ipso peragimus (quod quomodo fieri debeat, pertinet ad explicationem operationum), sed tantum faciendum esse indicamus. Veluti si a idem sit quod $\overline{x+y}$, et b idem sit quod $x-y$, erit ab idem quod $x+y, x-y$ seu $\overline{x+y}.\overline{x-y}$ seu $(x+y)(x-y)$. Imo si essent tres vel plures formulae, idem locum habet, ut si latera trianguli sint x, y, z, et a sit $+x+y-z$, et b sit $+x-y+z$, et ipa c sit $-x+y+z$, et f sit $+x+y+z$, ita ut tres priores sint excessus duorum laterum super tertium, quarta quantitas sit summa, reperietur, quartam radicis quadraticae ex quatuor invicem ductis seu $\frac{1}{4}\sqrt{abcf}$ dare aream trianguli ex datis tribus lateribus x, y, z, ut constat.

Hactenus non nisi additione, eaque aequalium, seu multiplicatione, eaque per aequalia seu potentia, et horum inter se combinationibus usi sumus, id est calculo directe progressivo, qui quidem semper succedit: nunc tempus est, ut admoneamus dari calculum regressivum, eumque non semper esse in potestate, et hic calculus est pro contrariis additionis, multiplicationis et excitationis potentiarum, nempe pro subtractione, divisione et radicum extractione. Scilicet quodvis licet addere cuivis, quidvis licet multiplicare per quodvis, et ab uno quoque datam potentiam excitare licet; sed non licet vicissim subtrahere quodvis a quovis, nec dividere quidvis per quodvis, nec extrahere quamvis radicem ex dato. Non licet, inquam, scilicet ut Numeri tales inde prodeant, quales hactenus tractavimus, integri scilicet, qui constent ex progrediente mensurae repetitione. Nam non licet subtrahere majus a minore, nec exacte dividere numeros multos v. g. primitivos, nec exacte extrahere radices, nisi ex certis numeris per multiplicationem in se invicem conflatis. Prodeunt tamen succedanea; nempe cum subtractio irrita est, numeri prodeunt **negativi**; cum divisio irrita est, numeri **fracti**; cum extractio irrita est, numeri **surdi**. Idemque est de quantitatibus, quod de numeris. Haec succedanea vere satisfaciunt et exacte, exhiberique etiam in natura actu ipso possunt.

Dantur et quantitates **transcendentes**, ipsis ut ita dicam surdis surdiores, quae tamen in Geometria et natura actu ipso exhibentur; sed de his suo loco clarius dicemus.

Dantur et quantitates **inassignabiles**, eaeque vel infinitae, vel infinite parvae seu infinitesimae, eaeque rursum varii gradus. Quae etsi per se non prosint, prosunt tamen non raro ad quantitates assignabiles per inassignabilium ambages inveniendas; et omnino in omni transcendentia intervenit aliqua consideratio infiniti aut infinitesimi.

Et generaliter, ut etiam initio notatum est, **Mathesin universalem** seu speciosam in duas partes dispesco, unam Algebraicam quae tractat de quantitate finita per finitas investigata, alteram transcendentem, quae tractat de quantitate finita quidem investiganda, sed interventu infinitarum, etsi postremo infinitae illae vel inassignabiles evanescant.

Itaque Matheseos universalis pars superior revera nihil aliud est quam Scientia infiniti, quatenus ad inveniendas finitas quantitates prodest. Unde merito visa est viris ingeniosis aliquid mirabilius, et ut sic dicam divinius in se habere. Et cum inter potissima Matheseos universalis superioris instrumenta sit calculus differentialis a me introductus, de quo suo loco, saltem id nunc notabimus, differentiationem esse etiam operationem progressivam, adeoque semper succedentem, sed summationem esse operationem quandam regressivam quae non est semper in potestate.

Omnes tamen operationes regressivae seu coarctatae semper fieri possunt indicative, per notam scilicet suam propriam, etsi non semper explicate vel actu ipso. Sic $a - b$ significat ab a debere subtrahi b. Similiter $\frac{a}{b}$, vel ut ego scribo, $a:b$ significat a dividi debere per b. Et $\sqrt[2]{ab}$ significat radicem quadratam extrahi debere ex ab.

Utrum vero res per Calculum exacte fieri queat, an vero tantum organice per Geometriam et Naturam, tum demum apparebit, cum accedet literarum explicatio per numeros speciales. Ex. gr. si a sit 2 et b sit 8, ab erit 16, et succedet extractio, scilicet $\sqrt{ab}$ seu $\sqrt{16}$ idem est quod 4; sed si a sit 2 et b sit 3, ab erit 6, et $\sqrt{ab}$ erit idem quod $\sqrt{6}$, quo casu exacta extractio non succedit.

Interdum operatio explicata, ubi non prorsus succedit, saltem tamen proficit ad majorem simplicitatem. Sic si sit $a - b$, et ponatur $a = b - c$, patet $a - b$ fore idem quod $-c$, nam fit $a - b$ idem, quod $b - c - b$ seu $(b) - c\,(+b)$ seu $-c$, destructis scilicet destruendis quod circulis illis vel inclusionibus noto. Et soleo diversas destructiones diversis distincte notatis inclusionibus designare. Ut si sit a idem quod $b - c$, et l idem quod $m - n$, et proponatur $a + l - b - m$, ex hoc fiet $(b) - c\,(+m) - n\,(-b)(-m)$, id est $-c - n$.

Idem est in divisione. Sit enim proposita fractio $a:b$ seu $\frac{a}{b}$, ut vulgo designant; sit $b = ac$, fiet $a:b = 1:c$, seu $a:b = a:ac$, seu $1(a):(a)c$ seu $= 1:c$.

Sed et in extractionibus saepe per explicationem pervenitur si non ad sublationem omnimodam surdae per extractionem perfectam, saltem ad surdam simpliciorem. V. gr. sit proposita radix $\sqrt{ab}$ et a sit 2 et b sit 6, tunc ab erit 12, et $\sqrt{ab}$ seu $\sqrt{12}$ idem erit quod $2\sqrt{3}$, quia 12 idem est quod 4.3 seu quod $\sqrt{4}$ in $\sqrt{3}$ seu quod $2\sqrt{3}$.

Quantitates negativae, cum a minori subtrahi debet majus, saepe oriuntur in calculo, et licet non videantur respondere ad quaestionem, reapse tamen respondent perfectissime, non tantum enim indicant, quaestionem fuisse male conceptam (etsi venia danda sit, quia praevideri non poterat), sed etiam quomodo fuerit concipienda et quid ad eam recte conceptam sit respondendum. Ex. causa quaeritur, quantum Titius habeat in bonis, subducto calculo eorum quae habet et quae debet; reperitur eum non modo nihil habere in bonis (nisi scilicet ipsum debitum, quod significat non habere, uti meritum sceleris), sed etiam habere minus quam nihil, id est acquisitionibus adhuc quibusdam opus ei fuisse ad nihil habendum. Itaque ostendit haec solutio, quaerendum fuisse non quid habeat (habet enim nihil), sed quid accipere eum oporteat, ut omnino liber intelligatur. Et patet, eum qui haeres ejus fiat sine inventarii beneficio, non lucrari, sed perdere tantam summam, quanta est signo — affecta. Itaque dum quis acquirit x seu $a-b$, reperitur autem postremo $a-b$ seu x idem valere quod $-c$, apparet utique eum, qui x acquirit, revera perdere summam c. Unde vicissim patet, eum, si perdat x seu $-c$, lucrari, et judicem qui haeredi talem haereditatem x adimat, revera ipsi adjudicare summam c; atque adeo subtractionem quantitatis negativae esse additionem affirmativae ejusdem molis. Nempe quantitas x seu $-c$ et quantitas $+c$ habent eandem molem c, eritque $-x$ idem quod c, id est $-\,-c = +c$. Et hoc est quod vulgo dicitur, $-$ in $-$ facere $+$.

Similis quaestio in lineis fieri potest; v. gr. quaeritur quantum aliquis per horam progrediatur hinc versus Brunsvigam, si quovis quadrante horae progrediatur primum per passus 100 et mox durante adhuc eodem quadrante regrediatur per passus 150; dico absoluta hora progressum talis viatoris versus Brunsvigam fore passuum -200, seu revera finita hora 200 passibus magis abfore a Brunsviga, quam inde aberat hora incepta, atque adeo non lucratum esse, sed sub progressus specie perdidisse. Et progressus iste poterit appellari falsus, cum revera sit regressus. Tales errores, etsi non tam manifeste absurdi, quotidie contingunt in rebus humanis.

Numeri fracti habent Numeratorem et Denominatorem; et quidem si denominator sit unitas, numerus fractus revera est integer; sit enim fractus $a:b$ et sit $b=1$, fiet $a:b=a:1=a$. Idem contingere potest, si numerator possit exacte dividi per denominatorem, ut sit $a=bc$, fiet $a:b=bc:b=c$.

Unde patet, indicationes regressivas hoc habere, ut explicatione facta saepe possit evanescere signum regressivi, atque adeo sub fractis in speciem contineri integros, sub irrationalibus in speciem vel Radicalibus contineri posse et rationales; quemadmodum et suo loco patebit, sub transcendentibus in speciem contineri etiam posse ordinarias quantitates.

Porro omnis fractus vel purus est, vel integrum habet sub se latentem. Purus est, si numerator sit minor denominatore, ut $2:3$; sed integer admistus est, si numerator sit major denominatore, ut $11:3$, nam 3 detrahendo quoties fieri potest, patet detrahi posse ter, quia est quotiens, et restare 2 adeoque fieri $11:3 = 3+(2:3)$ seu $\frac{11}{3}=3+\frac{2}{3}$.

Surdus vel potius Radicalis seu radice affectus variat tum pro varietate extrahendae radicis, tum pro varietate eorum, ex quibus extrahenda est. Radix extrahenda est duplex, pura vel affecta. Pura est, cum potentia Radicis aequatur datae quantitati; affecta, cum formatum ex pluribus diversis radicis quaesitae potentiis tanquam membris, datae quantitati aequatur. Ex. causa si $x^2=6$ seu si quadratum ipsius x aequatur dato 6, fit $x=\sqrt[2]{6}$, quae est radix pura; idem est si sit $x^5=45$, fit enim $x=\sqrt[5]{45}$. Sed si sit $x^5+3x^2=45$, ita ut non soli surdesolido, sed propter ea triplo ipsius quadrati aequalis sit numerus 45, tunc extractio est non pura, sed affecta.

Et sciendum est, inventam rationem hactenus haberi omnes radices affectas aequationis quadraticae, cubicae et biquadraticae reducendi ad puras; sed hanc methodum non esse ulterius promotam ad aequationes surdesolidas et altiores, de quo suo loco.

Radix pura vel est quadratica vel cubica vel biquadratica vel surdesolida etc. adeoque variat tot modis quot variari possunt potentiae.

Quanquam, ut suo loco dicemus, radices sub potentiis, ut potentiae sub radicibus secundum certas considerationes comprehendi possunt, imo dantur sive potentiae sive Radices extraordinariae quae sub hactenus explicatis non continentur. Sed de his suo loco, nam pertinent ad Transcendentes.

Extractio fieri potest vel semel omnino vel per gradus. Ex. gr. extractio Radicis biquadraticae fieri potest vel extrahendo statim radicem biquadraticam, vel extrahendo primum radicem quadraticam, et ex residuo rursus radicem quadraticam. Ita interdum fit, ut succedat prior extractio radicis quadraticae, sed non posterior; v. gr. si debeat extrahi Radix biquadratica ex 4 seu si quaeratur $\sqrt[4]{4}$, idem est ac si quaeratur $\sqrt[2]{\sqrt[2]{4}}$, id est $\pm \sqrt[2]{2}$.

Radices (purae) variant ratione eorum, ex quibus sunt extrahendae, quae rursus vel sunt quantitates rationaliter expressae, vel quantitates radicales. Et radix quae sub vinculo suo continet plura membra, ex quibus unum ad minimum est radicale, dicitur universalis, ex. gr. $\sqrt{a+\sqrt{ab}}$ seu $\sqrt{(a+\sqrt{ab})}$.

Quantitates surdae, quae nullum continent radicem universalem, vel sunt simplices, quarum scilicet potentia aliqua (pura) est rationalis; vel sunt compositae, constantes ex membris duobus vel pluribus, quarum vel alterutrum est rationale vel ambo sunt irrationalia. De his sub nomine Apotomarum et similibus multum disseruit Euclides in libro decimo, sed quibus post hodiernos exprimendi modos immorari haud est necesse.

Illud notari sufficit, quantitatem potentia rationalem dici, cujus quadratum est rationale, verb. gr. $\sqrt{ab}$, nam ejus quadratum est ab, idque etiam in compositis locum habet. $\sqrt[2]{a+\sqrt{aa-bb}}+\sqrt[2]{a-\sqrt{aa-bb}}$ est quantitas potentia rationalis, nam ejus quadratum est $+a+\sqrt{aa-bb}+a-\sqrt{aa-bb}+2\sqrt{a+\sqrt{aa-bb}}$ in $\sqrt{a-\sqrt{aa-bb}}$; jam $\sqrt{a+\sqrt{aa-bb}}$ in $\sqrt{a-\sqrt{aa-bb}}$ est $\sqrt{bb}$ seu $\pm b$; ergo fit, hoc quadratum esse $+a+\sqrt{aa-bb}+a-\sqrt{aa-bb}\pm 2b$ seu $2a\pm 2b$. Unde $\sqrt{2a\pm 2b}$ idem est quod erat $\sqrt{a+\sqrt{aa-bb}}+\sqrt{a-\sqrt{aa-bb}}$; sed hoc obiter.

Caeterum ne quis putet, omnes quantitates radicales fortasse aliqua nobis incognita hactenus ratione posse fieri rationales, sciendum, Euclidem demonstrasse (quemadmodum et alias vel ex calculo haberi potest) quod multae quantitates sunt incommensurabiles inter se adeoque rationem inter has quantitates exprimi per

Numerum qui dicitur surdus, id est qui est incommensurabilis unitati. Fractus vero est unitati commensurabilis. Quod ita patet: sit fractus quicunque, ut 3 : 5; dividatur unitas in partes 5, patet unam quintam partem unitatis esse mensuram communem tam fractionis $\frac{3}{5}$, quam unitatis, nam $\frac{1}{5}$ in unitate constat contineri quinquies, in $\frac{3}{5}$ contineri ter. Caeterum quomodo continuatis operationibus per integros accedi possit ad fractos, et per rationales ad surdos, suo loco patebit.

Ex irrationalibus oriuntur quantitates impossibiles seu imaginariae, quarum mira est natura, et tamen non contemnenda utilitas; etsi enim ipsae per se aliquid impossibile significent, tamen non tantum ostendunt fontem impossibilitatis, et quomodo quaestio corrigi potuerit, ne esset impossibilis, sed etiam interventu ipsarum exprimi possunt quantitates reales.

Itaque quemadmodum saepe licet liberare formulam a signo — seu quantitate negativa, et a quantitate fracta, aut a surda; ita licet interdum calculum liberare ab imaginaria, idque vel operatione depressiva vel operatione regressiva, seu evolutiva, quod est desideratum, vel saltem operatione involutiva seu progressiva, quod tamen et ipsum suum usum habet, et aliquando ad evolutionem conducere potest. Sed haec tunc erunt explicanda, cum de operationibus agetur.

Nunc tantum nonnulla praelibare oportet, ut variae quantitatum species intelligantur.

Quantitates imaginariae oriuntur, cum radices quadraticae, vel involventes quadraticas extrahendae sunt ex quantitatibus negativis, ex. gr. $\sqrt[2]{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$ (seu $\sqrt[2]{\sqrt[2]{-1}}$), $\sqrt[6]{-1}$ (seu $\sqrt[3]{\sqrt[2]{-1}}$), ad quas reduci possunt caeterae. Nam $\sqrt[2]{-2}$ idem est quod $\sqrt[2]{2}$ multipl. per $\sqrt[2]{-1}$.

Hae expressiones id habent mirabile, quod in calculo nihil involvunt absurdi vel contradictorii, et tamen exhiberi non possunt in natura rerum seu in concretis. Quomodo autem significent quaestionem male esse constitutam, apparet in exemplis, ubi facta debita mutatione in datis, evanescunt imaginariae. Nempe res ostendit, nos quaesiisse punctum in aliqua linea, quod tamen quaerendum erat extra ipsam, vel linea aliter erat assumenda. Res exemplo patebit: Datus sit (fig. 20) circulus ABC, quem tangat recta AE, ex cujus rectae puncto aliquo F educatur normaliter recta

FG occurrens circulo in punctis H et L, patet in casu quo F incidit in φ, ita ut fiat AF vel Aφ aequalis radio circuli, duo puncta occursus H et L coincidere in unicum punctum λ, et ex sectione fieri contactum. Sed si F adhuc magis removeatur ab A, ut si ponatur in (F), tunc ductam (F)(G) nullo modo posse occurrere circulo. Unde $\varphi\lambda$ est omnium FH maxima, et omnium FL minima. His positis, aliquis Analyticus curiosus merito quaerat, quid factura sit natura rerum, ut calculantem eludat, qui sumens AF radio majorem, nihilominus quaerat punctum occursus cum dato circulo, quod punctum tamen est impossibile. Sane idem plane instituitur calculus, sive AF sit major sive minor radio; imo calculus fieri potest generalis; quomodo ergo discemus impossibilitatem? cum nunquam quicquam hic in calculo assumatur, ut adeo prodire possit per se et sua natura absurdum. Sciendum igitur, naturam nihil aliud habuisse, quod inquisitioni impossibili imponeret, quam imaginarias quantitates seu radices ex negativis.

Res clarius patebit, si digressione non inutili ipsum calculum instituamus. Centrum circuli sit K. Jam AF sit x, FH vel FL sit y. Radius KA vel FM vel Kλ vel KH vel KL sit r, et HL bisecetur in medio M, patet esse KM aeq. AF seu x et HM quadrat. — KA quadrat. — KM quadrat. seu HM qu. $= rr - xx$ seu $HM = \sqrt{rr-xx}$, et $FL = FM$ (seu r) $+ LM$ seu HM. Ergo FL seu $y = r + \sqrt{rr-xx}$, seu generaliter $y = r \pm \sqrt{rr-xx}$, ut scilicet diversa puncta H et L uno eodemque calculo ambiguo designentur, quanquam suffecerit scribere $y = r + \sqrt{rr-xx}$, quoniam omnis radix per se ambigua est, de quo suo loco. Hinc si $rr - xx$ sit $= 0$, fit $y = r$ et evanescit irrationalitas adeoque et ambiguitas; et patet in casu cessantis ambiguitatis seu coincidentis utriusque puncti H et L, ipsam AF seu x coincidere cum r (eo ipso dum $rr - xx = 0$ seu $xx = rr$) adeoque et y seu $\varphi\lambda$ fieri aequalem ipsi radio r seu AK. Sed si x vel AF ponatur major quam radius r vel AK, tunc $rr - xx$ est quantitas negativa, quippe residuum post detractionem majoris xx a minore rr. Hic ergo fuit modus, quo natura indicare potuit, y in eo casu quo x est majus quam r, esse impossibile.

Unde discimus, quaestionem non esse bene constitutam, et vel debere circulum ABC sive radium ejus r assumi majorem, vel eodem manente circulo, ipsam x vel AF assumendam minorem, ut quaesitum obtineri possit. Et nisi darentur tales quantitates imaginariae in calculo, impossibile foret institui calculos generales, seu valores reperiri possibilibus et impossibilibus communes, qui sola differunt explicatione literarum.

Superest, ut nonnihil addam de quantitate inassignabili, sive ea sit infinite parva, sive infinita, saltem ut aliqua de illis notitia habeatur; caetera enim suo loco explicabuntur. Recta TC (fig. 21) curvam AC(C) secet in duobus punctis C et (C), ex quibus demittantur ad axem AB perpendiculares CB et (C)(B). Jam ex C in (B)(C) agatur normalis CD, patet CD esse differentiam abscissarum AB et A(B); similiterque D(C) esse differentiam ordinatarum BC et (B)(C). Et si recta TC axi AB occurrat in T, patet triangula TBC et CD(C) esse similia. Sed in casu contactus, cum recta TC curvam AC(C) non secat sed tangit, seu cum puncta C et (C) coincidant vel quod eodem redit, infinite parvo (sive infinitesimo) distant intervallo, patet triangulum CD(C) fieri inassignabile, constans ex lateribus infinite parvis, et CD esse elementum abscissae et D(C) esse elementum ordinatae, et C(C), quemadmodum et suo loco patebit, esse elementum curvae; adeoque Triangulum hoc inassignabile CD(C) simile esse Triangulo assignabili seu ordinario TBC, imo ope hujus Trianguli inassignabilis seu interventu rationis inter quantitates inassignabiles CD et D(C) (quam noster calculus differentialis exhibet per quantitates ordinarias seu assignabiles) inveniri rationem inter quantitates assignabiles TB et BC, adeoque modum ducendi tangentem TC.

Caeterum non tantum quantitatis infinite parvae seu infinitesimae, sed etiam quantitatis infinitae usus est in calculo. Ex. causa constat ex opticis, cum radii diversi veniunt ex eodem puncto, idque punctum ponitur infinite vel inassignabiliter vel ut subinde loqui soleo, incomparabiliter abesse, radios fieri parallelos. Unde radii ex sole venientes finguntur paralleli, et directiones gravium etsi ad idem terrae centrum tendant, tamen ob magnam hujus centri distantiam, pro parallelis habentur, quasi sol aut centrum infinite abessent.

Sed quia mirabitur aliquis, quomodo in calculo assumtis meris quantitatibus finitis, prodire tamen possit aliqua quantitas infinita, sciendum est $\frac{1}{0}$ seu $1:0$ esse quantitatem infinitam, adeoque unitatem esse mediam proportionalem inter nihilum vel quasi et infinitum, adeoque si quantitas aliqua ordinaria dividatur per nihilum, quotientem esse infinitum. Talis autem divisio in calculo contingere potest, quod exemplo ostendam. Sit (fig. 22) angulus rectus KAH, cujus crura utcunque producta intelligantur et in uno ejus latere sumatur recta AH. Descripta sit curva LC talis naturae, ut quocunque ejus puncto sumto, ut C, atque inde ad rectam AH demissa perpendiculari CB, fiat semper rectangulum ABC (seu sub AB et BC) aequale eidem constanti quadrato ab AH, quam curvam ex Conicis constat esse Hyperbolam. Jam AH vocetur a, et HB vocetur x, fiet $AB = a-x$, et BC vocetur y. Ergo ex dicta curvae proprietate, cum sit AB in BC aequ. AH quadr. seu $\overline{a-x}y = aa$, utique fiet $y = aa:, a-x$ seu valor ipsius y sive BC oritur, si aa dividatur per $a-x$. Sed quando B incidit in A, ita ut AB evanescat seu fiat aequalis nihilo, fiet $a = x$, seu $AH = HB$, ergo $a-x = 0$. Ergo in eo casu fiet $y = aa:0$ seu $\frac{aa}{0}$, ergo y est quantitas infinita, adeoque recta normalis ad ipsam AH educta ex A versus Hyperbolam est infinita, et licet continue ad eam accedat, nullum tamen punctum assignari potest, quo ei occurrat, ideoque solet dici Asymptota, quae res multis incomprehensibilis visa est, integrisque olim libris materiam dedit. Sed haec ideo tantum paucis libare placuit, ut infinitae magnitudinis designatio per finitas, ususque hujus designationis intelligeretur.

Superesset transcendentium finitarum uberior explicatio; sed hanc rem in locum convenientiorem rejicere maluimus, ut tandem tractationi de Notione simplici Analyseos Mathematicae, variisque generibus numerorum sive Quantitatum Matheseos universalis tractationi subjectarum, variisque connotationibus quantitates afficientibus, tanquam jacto jam fundamento, finem imponamus.*)

---

*) Am Schlusse des Concepts hat Leibniz hinzugefügt: De Enuntiationibus, Argumentationibus et Methodis postea dicemus.

VI.

PRIMA CALCULI MAGNITUDINUM ELEMENTA DEMONSTRATA IN ADDITIONE ET SUBTRACTIONE, USUQUE PRO IPSIS SIGNORUM + ET —.

(1) **Magnitudo** est quod in re exprimitur per numerum partium determinatarum.

Scholium. Ex. gr. orgyiae (quantum homo brachia extendere potest) magnitudo censetur exprimi numero sex pedum, vel (quia pes 12 pollicum est) per numerum 72 pollicum; Ulnae vel cubiti magnitudo per numerum unius et dimidii pedis, vel per unum pedem et sex pollices.

(2) a, b et similes notae significant numeros rerum exprimentes, qui scilicet ipsis debent assignari, posito aliquam esse rem, cui unitas assignetur, quam **Mensuram** appellamus.

Scholium. Sit pes p, pollex π, orgyia a, cubitus c, p erit 12π, a erit 6p vel 72π, c erit $1p+\frac{1}{2}p$ vel $\frac{3}{2}p$ vel $1p+6\pi$ vel 18π. Hinc si p (pes) sit mensura vel si ei assignetur unitas, a erit 6, c erit $\frac{3}{2}$, π erit $\frac{1}{12}$; sin π (pollex) sit mensura vel unitas, p erit 12, c erit 18, a erit 72. Si l sit latus quadrati, diagonalis d erit ut $l\sqrt{2}$, vel si l sit 1, d erit $\sqrt{2}$.

Homogenea inter se sunt, quorum magnitudines eadem mensura pro unitate sumta per numeros exprimi possunt.

(3) **Aequalia** sunt quorum unum alteri substitui potest salva magnitudine. Et ita designatur $a=b$, id est ipsi a ubique substitui potest b in magnitudinum calculo, et talis enuntiatio dicitur **aequatio**, velut in numeris $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, in lineis pes = 12 pollices vel $p=12\pi$.

(4) **Axioma.** $a=a$.

(5) **Theorema.** Si $a=b$, sequitur esse $b=a$.

Nam quia $a=b$ (ex hypothesi), ergo pro a (per 3) substitui potest b. Substituatur ergo b loco priore ipsius a in aequatione $a=a$ (vera per axioma 3), fiet $b=a$. Quod erat demonst.

(6) **Theorema.** Si $a=b$ et $b=c$, erit $a=c$, vel ut vulgo enuntiant: quae sunt aequalia uni tertio, aequalia sunt inter se.

Nam quia $a=b$ (ex hypothesi priore), poterit in ea substitui (per 3) pro b ipsi aequale (ex hyp. posteriore) c, et ex $a=b$ fiet $a=c$. Q. E. D.

Additio.

(7) Definitio. Si pluribus magnitudinibus simpliciter positis, ut a, b, ex hoc ipso fiat nova ipsis homogenea, ut m, operatio dicetur Additio, nova aequatio dicetur summa et repraesentatio erit talis $+a+b=+m$. Et + vel plus erit signum additionis, id est simplicis positionis. Idem est in pluribus, ut si $+a+b+c=m$.

Scholium. Res scilicet redit ad simplicem additionem numerorum, per quos ob eandem rem pro unitate positam magnitudines exprimuntur.

(8) Theorema. $+a+b=+b+a$.

Patet ex praecedenti, quia ibi nihil refert, quo ordine collocentur; sufficit unum cum alio poni.

(9) Explicatio. Signum + omni notae magnitudinis sine signo sumtae praefigi potest, aut praefixum intelligi. Sed initio saepe omitti solet, itaque $a=+a$ et $a+b=+a+b$. Hinc et $++a=+a$, ut si ponatur $f=+a$, fiet $a=+a=f$ (ex hypoth.) $=+f=++a$.

(10) Explicatio. $+0+a=a$, seu 0 est signum nihili, quod nihil addit.

(11) Theorema. Si aequalibus addas aequalia, fiunt aequalia, seu si sit $a=l$ et $b=m$, erit $a+b=l+m$.

Nam $a+b=a+b$ (per 3), itaque in altero $a+b$ pro a ponendo l (ex hyp. priore) et pro b ponendo m (ex hyp. posteriore) quod licet (per 2), utique ex $a+b=a+b$ fiet $a+b=l+m$. Q. E. D.

Subtractio.

(12) Ab a subtrahere b significat in magnitudine, in qua ponitur a, sumere aequalem ipsi b, eamque tollere, idque indicatur scribendo: $a-b$ vel $+a-b$. Hinc si in magnitudine, in qua est a, nihil aliud esse intelligatur quam b, restat nihil, adeoque $+b-b=0$. Et — (signum denotans minus vel subtractionem) significat id quod positum fuit vel ei aequale, seu uno verbo ejus quantitatem positam rursus tollendo, perinde esse quoad magnitudinem sublatam ac si ponendo eam et rursus tollendo actum esset nihil. Si quid aliud adest, residuum appellatur.

(13) **Theorema.** Si ab aequalibus auferas aequalia, residua sunt aequalia, seu si sit $a=l$ et $b=m$, erit $a-b=l-m$.

Nam $a-b=a-b$ (per 8), in posteriore pro a ponatur l (ex hyp. 1.) et pro b ponatur m (ex hyp. 2.), ergo ex $a-b=a-b$ fiet $a-b=l-m$. Q. E. D.

(14) **Theorema.** Si a quantitatibus duabus auferas aequalia, et residua sint aequalia, ipsae quantitates sunt aequales, seu si sit $a-b=l-m$, et $b=m$, erit $a=l$.

Nam si aequalibus $a-b=$ (ex hyp. 1) $l-m$ addas aequalia (ex hyp. 2.) b et m, nempe priori b, posteriori m, fient (per 11) aequalia $a-b+b=l-m+m$, id est (per 12) $a=l$. Q. E. D.

(15) **Theorema.** Si ab aequalibus auferas duas quantitates, et residua sint aequalia, erunt quantitates aequales, seu si sit $a=l$ et $a-b=l-m$, erit $b=m$.

Nam $a-b=l-m$ (per hyp. 2.), ergo addendo utrobique aequalia $b+m$ et $b+m$, fient (per 11) aequalia $a-b+b+m=l-m+b+m$, ergo (per 12 junct. 8) $a+m=l+b$, a quibus aequalibus si aequalia a et l (per hyp. 1.) auferantur, fient (per 13) residua aequalia $m=b$. Q. E. D.

(16) **Theorema.** Si $a=b+e$, erit $a-b=e$.

Nam ab utroque aequalium auferendo b fient aequalia $a-b=b+e-b$, id est (per 12) $a-b=e$. Q. E. D.

(17) **Theorema.** Si $a=-b$, erit $b=-a$.

Nam quia $a=-b$ (ex hyp.), ergo addendo aequalibus istis aequalia b et b (per 3) fient (per 11) aequalia $a+b=-b+b$, ergo (per 12) $a+b=0$ seu (per 16) $b=0-a$ seu (per 10) $b=-a$. Q. E. D.

(18) **Theorema.** $-a-\overline{-a}=0$.

Nam $-a$ designetur per f seu sit $-a=f$. Jam $f-f=0$ (per 3), ergo pro f ponendo aequale ipsi (ex hyp.) $-a$, fiet $-a-\overline{-a}=0$. Q. E. D.

(19) **Theorema.** $--a=+a$.

Nam $-a--a=0$ (per 18) et $0=-a+a$ (per 12), ergo (per 6) $-a--a=-a+a$, unde utrobique addendo a fient (per 11) aequalia $+a-a--a=-a+a+a$, et proinde (per 12) $0--a=0+a$ seu (per 10) $--a=+a$. Q. E. D.

(20) **Theorema.** $-+a=-a$ aut $+-a=-a$.

Patet ex 9.

(21) Theorema. In omni aequatione licet membrum abjicere ab una parte et signo contrario affectum ponere in altera.

Sit $f+a-b=h$, dico fore $f=h-a+b$. Nam in aequatione (ex hyp. vera) $f+a-b=h$ addatur utrobique $-a+b$, fiet inde $f+a-b-a+b=h-a+b$, id est (per 12) $f=h-a+b$. Q. E. D.

(22) Explicatio. Quod de formula sub vinculo comprehensa significatur, intelligendum est de singulis membris vinculo inclusis, ut $-(+a-b)$ vel $-\overline{+a-b}$ significat $-(+a)-(-b)$ seu (per 9) $-a--b$, id est (per 19) $-a+b$.

(23) Theorema. Addenda ascribuntur signis retentis, seu $f+(a-b)=$ (per 22) $f+a-b$.

Nam $f+(a-b)=f+a+-b=$ (per 20) $f+a-b$.

(24) Theorema. Subtrahenda ascribuntur signis mutatis, $+$ in $-$, et $-$ in $+$, seu $f-(a-b)=f-a+b$.

Nam $f-(a-b)=$ (per 21) $f-a--b=$ (per 19) $f-a+b$. Q. E. D.

Aliter: Sit $a-b=e$, ajo esse $-e=-a+b$ seu $f-e=f-a+b$. Nam $+e-e=+a-b-a+b$ (per 12), ergo ab aequalibus tollendo aequalia, illinc $+e$, hinc $+a-b$, restabunt (per 13) aequalia $-e$ et $-a+b$. Q. E. D.

Applicatio calculi ad res, ubi de toto, parte, majore, minore, positivo et privativo.

(25) Explicatio. Si explicando notas formulae per res ipsas, verbi gratia per lineas rectas sibi addendas vel subtrahendas, evanescat tandem subtractio vel signum $-$, ita ut semper destruendo id quod est signo $-$ affectum (verb. gr. $-b$) per aequalis molis signo $+$ affectum (nempe $+b$), tandem nihil aliud remaneat in formula vel ei aequivalente se, ex. gr. linea, quam quod sit affectum signo $+$: tunc tota formula dicitur designare quantitatem *positivam*; sin contra postremo signum $+$ evanescat, remanente $-$, tunc formula denotat quantitatem *privativam* seu nihilo minorem, hoc est talem, ut ad ipsam addenda sit ipsius *moles*, quo fiat nihil. Exempli causa si esset formula $f+a-b$, et esset $f+a=e+b$, et hae literae omnes forent quantitates positivae, quae explicatae per res, nullum in ultima resolutione deprehenderetur continere signum $-$, patet $f+a-b$ significare $+e$. Nam in hac formula pro $f+a$ substituendo $e+b$, fiet $e+b-b$, id est e. Contrarium esset, si in ultima resolutione nul-

lum remaneret signum +, ut si esset formula $f+a-d$, et esset $d=f+a+g$, tunc $f+a-d$ significabit $-g$. Nam pro $-d$ in formula $f+a-d$ substituendo valorem fiet $f+a-f-a-g$, id est $-g$. Hinc patet, quando duae quantitates signis contrariis affectae conjunguntur, semper alterutrum signorum penitus posse tolli per explicationem unius quantitatis, quatenus continet alteram quantitatem (vid. 12). Patet etiam, ut formula $f+a-d$ (quae quantitatem privativam $-g$ significat) fiat nihil, addi debere g (seu $+g$, ejusdem molis cum $-g$, sed affectum contrario signo) seu esse $f+a-d+g=0$, quia $f+a-d=-g$; jam $-g+g=0$ vel resolutione resumta $f+a-d=f+a-f-a-g$, ergo $f+a-d+g=f+a-f-a-g+g$, id est 0.

Scholium. Inspiciantur figurae duae, ubi in priore (fig. 23) progressus fit per lineam rectam f, et huic in directum adjectam rectam a, regressus autem (per puncta designatus) ab extremo adjectae a, in eadem recta totali $f+a$ fit per rectam b: ita in recta $f+a$ remanet e, adeoque est $f+a-b=+e$. In posteriore (fig. 24) progressus fit ut ante; sed regressus in eadem $f+a$ fit per ipsam rectam d majorem quam $f+a$, et excedentem quantitate g. Unde talis progressus est falsus sive putatitius, et qui sic progredi se putat, revera regressus est quantitate seu mole g, et est $f+a-d=-g$. Itaque signum + designat progressum, signum − regressum, et quod in lineis, idem in aliis augmentis et decrementis intelligi potest, velut in accepto et expenso.

(26) **Definitio.** Si sit $a+b=f$ et sint ipsorum a, b, f quantitates positivae, dicetur f **totum** et a, b dicentur **partes**. Idemque est, si sint plura, ut $a+b+c=f$. Requiritur igitur, ut quantitates sibi addi adimive possint, simulque ut sint positivae.

(27) **Definitio.** **Minus** est, quod aequale est parti alterius nempe majoris, verb. gr. sit $f=a+b$ et $g=a$, dicetur f majus, et g minus, et scribetur $f \sqcap g$ et $g \urcorner f$.

Scholium. Caeterum cautio in definitione totius et partis expressa, adeoque etiam ad majus minusque pertinens, nempe ut a, b, f etc. sint hoc loco quantitates positivae, necessaria est, alioqui si fiat $a+b=m$, non sequitur m esse majus quam a vel b, aut haec esse partes ipsius m, etsi sint **membra** formulae aequalis ipsi m; nam fieri potest, ut b (verbi gratia) sit revera quantitas negativa aequalis ipsi $-d$, posito d esse positivam, et tunc a existente positiva, pro $a+b=m$ fieret $a-d=m$. Unde patet, a fore majus quam m; tantum abest, ut possit esse ejus pars.

(28) Theorema. Pars est minor toto, vel totum est majus sua parte.

Sit $a+b=f$, erit a minus quam f. Nam a aequale est ipsa a (per 3); jam quod aequale ipsi a est minus quam $a+b$ seu quam f (per 27), ergo a est minus quam f. Q. E. D.

(29) Definitio. Homogenea vel comparabilia sunt, quorum unius quantitas ab alterius quantitate semel aut saepius subtrahi potest, ut subtractum relinquat nihil aut aliquid se minus.

(30) Theorema. Duo homogenea tunc sunt aequalia, si alterum altero nec minus sit nec majus.

Nam homogenea sunt (ex hyp.), ergo (per 29) quantitas unius eorum ab alterius quantitate semel subtracta aut relinquit nihil, quo facto erunt aequalia (per 12), aut relinquit aliquid (se rursus minus vel majus), et tunc parti ejus, a quo subtractio facta est, aequale erit (vid. 12) adeoque (per 27) erit minus. Q. E. D.

(31) Theorema. Majus majore est majus minore, seu si $a \sqcap b$ et $b \sqcap c$, erit $a \sqcap c$.

Nam quia $a \sqcap b$ (hyp. 1), erit (per 27) $a=b+l$, et quia (hyp. 2) $b \sqcap c$, erit (per 27) $b=c+m$, qui valor ipsius b substituatur (per 3) loco ipsius b in aequatione inventa $a=b+l$, et fiet inde $a=c+m+l$, ergo (per 27) $a \sqcap c$. Q. E. D.

(32) Problema. Invenire b medium arithmeticum inter a et c, id est ita ut b tanto sit majore a minus quanto est minore c majus.

Constructio. Addantur in unum a et c, et summae dimidium erit b quaesitum.

Nam quia (ex hyp. constructionis) b est dimidium ipsius $a+c$, erit duplum b aequale duobus dimidiis, hoc est toti $a+c$, seu $a+c$ erit aequale duplo b, sive fiet $a+c=b+b$, ergo (per 21) $a-b=b-c$, id est erunt differentiae extremorum a medio b aequales, sive excessus a super b aequatur excessui b super c. Q. E. D.

VII.

CONSPECTUS CALCULI.

(1) Numeri simplices	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2) Literae	0	a	b	c	d	e	f	g	h	k	l
Lineae	N	NA	NB	NC	ND	NE	NF	NG	NH	NK	NL
	A	AB	AC	AD	FL	EL	DL	CL	BL	AL	
	B	BC	BD	etc.							
	etc.	etc.	CE	GL							
	L	KL	etc.								
				HL							

(3) Scala N A B C D E F G H K L

(4) Totum: e, 5, NE. Partes: NB, BE; b, c; 2, 3.

(5) Totum est aequale omnibus partibus, d aequ. b+c; 5 aequ. 2+3; NE aequ. NB+BE.

(6) Majus una, d ⌈ c, 5 majus quam 3.

(7) Pars minor toto, c ⌉ d, 3 minus quam 5.

(8) Additio simplex: si ad 2 addas 3, fiet 2+3 sive 5; b+c sive e; 2a+3a aequ. 5a; NB+BE aequ. NE; sive si ab N progrediaris in B et a B progrediaris in E, progressus eris ab N in E, cadet autem punctum B inter N et E.

(9) Signum +, plus, initio omitti solet, 2+3 aequ. +2+3.

(10) Subtractio simplex: si ab e subtrahas b, fit e—b sive c; 5—2 sive 3; NE—EB aequ. NB; sive si ab N progressus sis in E, et ab E regressus in B (et cadet B inter N et E), progressus eris ab N in B.

(11) Si aequalibus g | 7, et c+d | 3+4 addas (auferas) aequalia e | 5, et b+c | 2+3, fient aequalia. g+e aequ. c+d+b+c seu g+e aequ. b+2c+d. 7+5 aequ. 2+2.3+4 seu aequ. 2+6+4 (g—e aequ. c+d—b—c aequ. +d—b; 7—5 aequ. 4—2)

(12) Nihil, 0, nec addit nec minuit: AN±N aequ. AN; 1+0 aequ. 1—0 aequ. 1; et contra, quod nec addit nec minuit, est nihil. Item si a+n aequ. a—n, tunc n erit 0. Item 0+0 aequ. 0. Et si n+n aequ. n, tunc n erit 0.

(13) Si aequalium unum ab altero subtrahatur, restat nihil, et contra, ut a—a aequ. 0; 3—3 aequ. 0; NC—CN aequ. N;

sive si ab N progressus sis in C et a C regressus in N, progressus erit nullus; $c-a-b$ (aequ. $c-c$) aequ. 0. Et contra, si $c-a-b$ aequ. 0, erit c aequ. $a+b$.

(14) Si majus subtrahatur a minore, restat minus nihilo, ut $+b-c$ (aequ. $\underbrace{+b-b}_{0}-a$) aequ. $0-a$ vel aequ. $-a$, seu $2-3$ est -1. Si tibi debeantur 2, et tu vicissim debeas 3, compensatione facta debebis 1. Si in bonis habeas 200 et debeas 300, tunc patrimonium tuum erit minus nihilo seu $0-100$, et 100 acquirere debebis, antequam liber fias nihilque purum habere incipias. Si ab A duos facias passus antrorsum versus L seu si progressus sis AC, et a C tres facias passus retrorsum CN, progressus tuus ab A versus L erit revera regressus ab A in N uno passu, $+AC-CN$ aequ. $-AN$, cadet autem punctum A inter C et N.

(15) Multiplicatio est additio aequalium, ut $b+b+b$ est $3b$. Numerus repetendus b est multiplicandus, numerus repetitionum 3 est multiplicans, productum $3b$ seu $f \mid 6$, vel quia 3 est c, loco $3b$ scribitur $cb \mid f$ vel $2\frown3$ sive $2.3 \mid 6$. Eodem modo in tribus literis $\underbrace{bc}_{f}\, e \mid 2.\ 3.\ 5 \mid f\ e \mid 6.\ 5 \mid 30$.

(16) In additione et subtractione vel multiplicatione ordo nihil facit, ut $+b+a$ aequ. $+a+b$, $b-a$ aequ. $a-b$, bc aequ. cb, $2\frown3$ idem quod $3\frown2$, bis tria idem quod ter duo.

(17) Dimensionis in dimensionem ductus seu quantitatis, exempli causa latitudinis AB (fig. 25) applicatio ad quamlibet partem longitudinis BE, est realis exhibitio multiplicationis mentalis, et quidem si angulus ubique sit idem, tunc prodit rectangulum planum NBEP, vel compendio NBE (sive NB$\frown$BE) aut etiam NE. Cumque longitudo BE sit 3 pedum linearium, et NE duorum, itaque si ducas ter pedem linearem in bis pedem linearem, ter quidem duces in bis fit 6, et pedem linearem ducendo in pedem linearem fit pes superficialis, nempe quadratus NR. Itaque rectangulum NBE erit 6 pedum quadratorum. $3p$ in $2p$ dat $6pp$, quodsi $3p$ aequ. c et $2p$ aequ. b, fiet $6pp$ aequ. bc. Itaque hoc rectangulum dicitur esse duarum dimensionum, ex latitudine b in longitudinem c. Si jam altitudo NQ (fig. 26), $4p$ vel d ducatur eodem modo in rectangulum NBEP seu $6pp$ vel bc, fit ($12ppp$ vel) $12p^3$ vel bcd, id est rectangulum solidum EPNQ sive BPQ constans 12 pedibus cubicis; cuilibet enim pedi quadrato NR insistit columna NRQ

ex quatuor pedibus cubicis. Itaque hoc rectangulum solidum bcd est trium dimensionum. Neque hoc tantum in lineis, sed et in aliis applicationibus rei unius in quamlibet partem alterius locum habet. Ut si bonitas intrinseca seu pretiositas rei ducatur in quantitatem mercium seu bonitatem extrinsecam inde fit rei valor seu pretium, quod est duarum dimensionum, ut in argento puro vel mixto apparet, eadem enim bonitas intrinseca, sive idem mixturae vel alligationis gradus spectatur in qualibet particula. Idem est in aliis rebus dividuis in partes similes ejusdem pretiositatis cum toto, ubi duplo major quantitas est duplo pretiosior, unde ICti has res vocant quantitates. Secus vero est in illis quas ICti vocant species, qualis est equus, imo et adamans, qui physice quidem semilaris est, at non civiliter, quoniam si rumpatur, partes omnes simul tanti non sunt, quanti erat totum. Quod secus est in argento, vino, frumenti acervo. Itaque in his duplex ista aestimatio quantitatis et pretiositatis conjungenda est, non per additionem, sed per multiplicationem. Exempli causa, si auri bonitas intrinseca seu pretiositas sit duodecupla bonitatis argenti, tunc librae auri pretium duodecuplum erit pretii librae argenti, sed trium librarum auri pretium erit pretii librae argenti ter duodecuplum, ducta pretiositate in quantitatem.

(17) Quando quantitates, quae in se invicem ducuntur, sunt aequales, oriuntur **P o t e s t a t e s**.

a^0	a^1 (vel a)	a^2 (vel aa)	a^3 (vel a^2a)	a^4	a^5	a^6
1	1	1	1	1	1	1
b^0	b^1	b^2	b^3	b^4	b^5	b^6
1	2	4	8	16	32	64
l^0	l^1	l^2	l^3	l^4	l^5	l^6
1	10	100	1000	10000	100000	1000000
Unitas	Radix Latus	Quadratum	Cubus	Biquadratum seu quadrati quadratum	Surde-solidum	Quadrati-cubus
Gradus Nullus,	Primus,	Secundus,	Tertius,	Quartus,	Quintus,	Sextus etc.

(18) $l^b l^c$ (seu l^b in l^c vel $l^b \frown l^c$) aequ. l^{b+c} aequ. l^e, seu $l^2 l^3$ aequ. l^5, seu 100 in 1000 dat 100.000, et 4 in 8 dat 32. Numeri autem qui literae superscribuntur, sunt **i n d i c e s** seu **e x p o n e n t e s** graduum. Uti vero l^{2+3} significat $l^2 l^3$ seu l^5, ita $l^{2 \cdot 3}$ seu l^6 significat l^2 cubice seu ter in se multiplicatum seu $l^2 l^2 l^2$, vel l^3 quadratice sive bis in se multiplicatum $l^3 l^3$. Itaque additio

exponentium significat multiplicationem potestatum, multiplicatio exponentis per alium exponentem significat potestatem potestatis. Ita l^{2+3} est quadratum in cubum, at $l^{2\cdot 3}$ est quadraticubus seu cubi quadratum.

(19) Quadrat. dupli lateris non est duplum prioris, sed quadruplum
tripli triplum noncuplum
quadrupli quadruplum sedecuplum
etc. etc. etc.

Ita (fig. 27) quadratum super recta AB est quadruplum quadrati super recta NB. Quadratum ab AN continet novies quadratum a tertia ipsius AN parte $A\Psi$. Et $\boxed{2}\,\overline{GH}$ aequ. 16 $\boxed{2}\,\overline{G\varphi}$ seu quadr. HM aequ. 16 quadr. $\varphi\Sigma$, quia HG aequ. $4\,G\varphi$. Sit $G\varphi$ pes seu p, et GH sit 4p sive d, $\varphi\Sigma$ erit pp et HM erit dd aequ. 4p 4p seu 16pp, sive 16 pedum quadratorum. Hinc si quis aream HM sternere velit lapidibus quadraticis longitudine AB, quos ponamus esse bipedales, tantum quarta parte lapidum indigebit quos opus haberet, si vellet pedales longitudine AN. Unum enim quadratum bipedale $A\Delta$ tantum spatii occupat, quantum quatuor pedes quadrati TN, NH, HM, MT. Itaque canalis, cujus capacitas sive lumen vel sectio per medium sit $A\Delta$, duplo crassior quam AG quadruplo plus aquae continebit.

(20) Cubi dupli lateris est octuplus, tripli 27plus, quadrupli 64plus etc. Inspiciatur (fig. 28) cubus ABCDEF vel (compendiosius) ACF, nempe super latere AB, et sit alius cubus GHIKLM vel GIM a latere GH dimidio ipsius AB; patet cubum majorem continere octo cubos tales qualis est minor, nempe cuilibet quatuor quadratorum baseos $A\Delta$ insistent duo, ipsi GD insistent GHIKLM et QIΩDYL, super TM duo TGQLVF, SQXYEV, super NH duo NBΩIQS et POCΩXQ, super AG duo ANPQST et RPZXWS. Ita eodem modo si cuilibet quadratillo quadrati AG imponas tres cubulos, habebis 27 cubulos implentes cubum majorem ab AG.

(21) Dimensionum natura hactenus non satis intellecta est, nam licet in spatio per se considerato non dentur nisi tres dimensiones, in corpore tamen dantur multo plures. Etsi enim in solis figuris supra solidum ascendi non possit, non tamen altiores Potestates sive res quatuor aut quinque aut plurium dimensionum imaginariae sunt, ut vulgo putant, quod sic ostendo. Cum dimensio sit realis exhibitio multiplicationis (per superiora), hinc quoties nova quantitas accedit, quae cuilibet prioris parti inest vel appli-

catur, nova accedit dimensio. Sint duo cubi, ACF aureus, cujus latus sit b | 2, eritque ejus moles b^3 sive 8, et GIM argenteus, cujus latus sit a | 1, eritque moles ejus seu contentum a^3 | 1. Sit jam auri gravitas specifica etiam ut b, argenti ut a, id est quia b duplo majus quam a, seu a est 1 et b est 2, et aurum paulo minus quam duplo gravis est argento paris molis seu spatii; ideo ponamus nunc quidem gravitatem specificam auri esse duplam specificae argenti, ergo ducendo b in b^3 gravitatem specificam auri in cubi aurei molem (cuilibet enim particulae haec gravitas inest) fiet b^4 seu 16 pro pondere cubi aurei, et a (gravi. specifica argenti) in a^3 (cubi argentei molem) dabit a^4 seu 1 pondus cubi hujus argenti; habemus ergo duo quadrati-quadrata realia, facta ex quatuor dimensionibus: longitudine, latitudine, altitudine, gravitate specifica. Et iisdem positis si accedat quinta dimensio, nempe impetus, quem labendo acquirerent, ut si aureus labatur duplo tempore diutius argenteo, percussio (quae est quinque dimensionum) ab aureo cubo erit b^5, 32, ab argenteo a^5, 1, et habemus duo surdesolida realia. Et quia motuum proportiones pro arbitrio assumi possunt, manifestum est est ascendi in infinitum.

(22) Unitas non multiplicat in numeris, 1.1 seu 1⌒1 est 1, 1⌒2 seu 1.2 est 2, 1b est b. Multiplicat tamen in rebus ipsis seu attollit dimensiones, quando per Unitatem intelligitur aliqua Mensura pro Unitate assumta, ut pes; nam 1p in 1p dat 1pp seu pp sive pedem quadratum. Ita si a sit 1, tunc a^2 erit 1, sed si 1 significet unum pedem, tunc a erit unus pes linearis, a^2 unus pes quadratus, a^3 unus pes cubus. Itaque unitas subintellecta supplet numerum dimensionum, ut (in fig. 25 supra) rectang. NBE aequ. bc aequ. 2.3 seu 6, intellige 6 unitatum quadratarum seu $6a^2$. Jam 6 aequ. h, ergo bc aequ. h, subintellige bc aequ. ha seu NB⌒BE | 2.3 aequ. NS⌒ST | 6⌒1, linea enim h sive NS rectangulo bc aequalis esse non potest, nisi haec linea NS ducatur in unitatem ST.

(23) Itaque quando calculi non de numeris abstractis, sed de rebus ipsis intelliguntur, servanda est lex homogeneorum quam vocant, id est ea quae comparantur ac sibi adduntur vel auferuntur, debent habere eundem numerum dimensionum, ut b^2 et ha, item b^3, b^2a, bcd; neque enim linea superficiei, superficiesve spatio tridimenso, nec spatium vacuum ponderi corporis, nec pon-

dus mortuum percussioni comparari potest. Et quando non est idem dimensionum numerus, subintelligenda est unitas a, ut si comparentur b^4 et c^2d, hujus loco sumi potest ac^2d. Saepe tamen unitas dissimulatur.

(24) Quantitas ex pluribus dimensionibus formata a me dici solet forma. Sunt autem hae

Grad. I. a.

Grad. II. a^2, ab.

Grad. III. a^3, a^2b, abc.

Grad. IV. a^4, a^3b, a^2b^2, a^2bc, abcd.

etc.

ita b^3c^2e sive $2^3 3^2 5$ significat 8.9.5 seu 360. Et utilissima quidem haec est resolutio numerorum derivativorum in primitivos seu eos, qui in alios (praeter se ipsum atque unitatem) hoc modo resolvi non possunt, ut 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19 etc. Caeteri ex his fiunt, ut 4 est 2^2, et 6 est 2.3, et 8 est 2^3, et 9 est 3^2, est 10 et 2.5, et 12 est $2^2.3$, et 14 est 2.7, et 15 est 3.5, et 16 est 2^4, et 18 est $3^2.2$.

(25) Nihil in multiplicatione facit nihil, seu 0 aequ. 0^2 aequ. 0^3 aequ. 0.a aequ. 0b vel b0. Nam centies nihil est nihil, et nullies centum seu nunquam 100 est etiam nihil. Hinc si scribatur na^2b, et sit n aequ. 0, erit na^2b aequ. 0. Item 0b aequ. 0c, nec tamen ideo b aequ. c. Item quia af—bc aequ. 0 (1.6—2.3), erit etiam baf—b^2c aequ. 0 (seu 2.1.6—2^2.3, id est 12—12).

(26) Si tamen 0 significet rem non quidem nullam, sed infinite parvam, sive finitis nullo modo comparabilem, eaque ducatur in rem infinitam, inde fieri potest quantitas ordinaria seu finita. Infinitum ita designo ∞, eritque 0∞ aequ. 1. Sed hoc intelligendum ex exemplis, ubi consideratio haec utilissima reperietur, quae suo loco afferemus.

(27) b^0 aequ. 1. Nam $b^0 \frown b^c$ (per 18) aequ. b^{0+c}, id est (per 12) aequ. b^c et hoc (per 22) aequ. $1 \frown b^c$. Habemus ergo $b^0 \frown b^c$ aequ. $1 \frown b^c$, ergo (per 20) b^0 aequ. 1. Hinc corollarium b^0 aequ. 1, ergo et c^0 aequ. 1, ergo b^0 aequ. c^0, nec tamen ideo b aequ. c, licet enim alioqui quae eodem modo tractata exhibent aequalia, sint aequalia, tamen per 0 tractari est non tractari.

(28) 1 aequ. 1^0 aequ. 1^1 aequ. 1^2 aequ. 1^3 etc. adeoque 1^y aequ. 1, et, si a aequ. 1; erit a^y aequ. 1 aequ. a^e; et contra si a^y

aequ. 1, et y diversus est ab unitate vel si a^y aequ. a^z et y ac z diversi sunt inter se, tunc erit a aequ. 1.

(29) Aequalium aequimultipla aequalia sunt, et e converso. Sit f aequ. 6, dico esse fd aequ. 6d. Nam $f-6$ aequ. 0 (per 13), ergo $fd-6d$ aequ. 0 (per 25), ergo fd aequ. 6d (per 13), quod erat demonstrandum. Eodem modo demonstratur et conversa, scilicet quorum aequimultipla aequalia sunt, ea ipsamet aequalia sunt. Idem ex axiomate illo generali patet, quod aequalia f et 6, eodem modo tractata, nempe per d multiplicata, exhibent aequalia, nempe fd et 6d.

(30) $++$ est $+$ seu $+1\frown+1$ aequ. $+1$, vel ponere ponens est ponere sive efficere, ut habeas quod alioqui habiturus non esses. Ita qui parientem tibi donat, partum donat; qui tibi jus centum nummorum donat, qui exigi possunt cum voles, is tibi centum nummos donat seu $++100$ aequ. $++100$ aequ. $+100$. Hinc $+1\frown+b$ aequ. $+b$, nam $+b$ aequ. $+1\frown b$ (per 22), ergo $+1\frown+b$ aequ. $+1\frown+1\frown b$, at $+1\frown+1$ aequ. $+1$ hic, ergo $+1\frown+1\frown b$ aequ. $+1\frown b$; at $+1\frown b$ aequ. $+b$ (per 22), ergo $+1\frown+b$ aequ. $+b$. Hinc $+b\frown+c$ aequ. $+bc$. Nam $+b$ aequ. $+1\frown b$, et $+c$ aequ. $+1\frown c$ (per 22), itaque $+b\frown+c$ aequ. $+1\frown b\frown+1\frown c$, et (quia per 16 in multiplicando transponere licet) aequ. $+1\frown+1\frown b\frown c$; jam $b\frown c$ est bc (per 15) et $+1\frown+1$ est $+1$ hic; ergo fit $+1\frown+1\frown b\frown c$ aequ. $+1\frown bc$, id est (per 22) $+bc$. Haec consideratio signi cum adjuncta unitate, sumendo $+$ quasi $+1$, suo tempore usum habebit; proprie etiam non potest $+$ duci in $+$, non enim est quantitas, sed $+1$ in $+1$.

(31) $+-$ est $-$ seu $+1\frown-1$ aequ. -1, seu ponere tollens est tollere seu efficere, ut non habeas quod alioqui habiturus esses, ut si tibi donem animal prorsus nullius pretii ea conditione, ut retineas pascasque, donum meum potius poena erit tanto major quanto voracius erit animal. Ita si in te transferam obligationem qua teneor, seu ut vulgo loquantur debitum passivum centum nummorum, utique hoc ipso centum nummi patrimonio tuo decedunt. Itaque $+1\frown-b$ aequ. $-b$ et $+c\frown-b$ aequ. $-cb$, ut in praecedenti, seu ademtio duorum nummorum ter posita est ademtio sex nummorum.

(32) $-+$ est $-$ seu $-1\frown+1$ aequ. -1. Patet ex praecedenti, nam transpositio licita per 16. Sensus est: tollere ponens est tollere, ut si jus centum nummorum secure exigendorum tibi

adimam, centum nummos ademi seu $-1\frown+100$ est -100; item $-2\frown+3$ est -6, seu si tibi jus trium nummorum bis adimam, sex nummos ademi.

(33) $--$ est $+$, seu $-1\frown-1$ aequ. $+1$, seu tollere tollens est ponere, ut si tibi adimam animal illud inutile et vorax, quod sub conditione alendi recepisti, teque illo onere liberem, tantum donasse videbor, quantum damni illud animal alioqui daturum adhuc fuisset. Et, si obligationem centum nummorum quos alteri debes, tibi ademtam recipiam in me, utique centum nummos tibi dedi. Itaque $-1\frown-b$ est $+b$ et per transpositionem $-b\frown-1$ est $+b$ et (per 29) $\frac{-b\frown-1\frown c}{-c}$ aequ. $\frac{+b\frown c}{+bc}$, ergo $-b\frown-c$ aequ. $+bc$, id est si duae res $|\,b\,|$ tibi adimantur, quarum unaquaeque alioqui tres nummos $|\,c\,|$ tibi ademtura fuisset, reapse sex nummos ea ratione acquisivisti sive nunc hoc modo habes, quos alioqui non esses habiturus.

(34) Divisio est subtractio aequalium. Ut autem in multiplicatione, dato numero rerum repetendarum et repetitionum, quaeritur numerus rerum in universum seu factus, ita in divisione, dato facto sive numero rerum seu dividendo, quaeritur numerus repetitionum alterius rei seu divisoris; is numerus dicitur quotiens. Ita in multiplicatione tres nummi (qui est numerus multiplicandus seu repetendus) bis (qui est multiplicator seu numerus repetitionum) sumti dant 6 (numerum productum), in divisione vero ipsius 6 per 3, is qui antea erat productus, nunc iterum est resolvendus, id est quaeritur quoties ex tribus nummis repetitis factus sit; et respondetur esse bis repetitos ac proinde tres nummos in sex nummis bis contineri, adeoque bis a sex nummis subtrahi posse. Is ergo numerus repetitionum, hoc loco binarius, qui in multiplicatione est datus, in divisione est quaesitus et dicitur quotiens, numerus vero repetite subtrahendus, hoc loco ternarius, dicitur divisor. Idem est si binarius sit divisor, id est subtrahendus quoties fieri potest, et reperietur ipsum ter subtrahi posse. Hinc patet etiam, divisione dividendum dividi in tot aequales partes, quot sunt in divisore unitates, ut sex dividitur per 3 in tres partes aequales, nempe tres binarios, quemadmodum in multiplicatione productus sex componitur ex aequalibus partibus, nempe tribus binariis vel duobus ternariis. Itaque uti $2\frown3$ vel 2.3 aequ. 6, ita $6\smile2$ vel $\frac{6}{2}$ aequ. 3, et

$6 \smile 3$ vel $\frac{6}{3}$ aequ. 2; in literis bc aequ. f, ergo $\frac{f}{b}$ aequ. c vel $\frac{f}{c}$ aequ. b.

(35) $bc \smile c$ vel $\frac{bc}{c}$, item $\frac{b}{c} \frown c$ vel $\frac{bc}{c}$ aequ. b, id est si qua res multiplicetur simul et dividatur per idem, multiplicatio et divisio se mutuo tollent, manebit res prior. Exempli gratia tertia pars tripli est simplum. Itaque quivis multiplicatione productus, ut bce (sive $2 \frown 3 \frown 5$) vel fe (sive $6 \frown 5$) vel $l \frown c$ ($10 \frown 3$) vel $\overline{l+e} \frown b$ (sive $15 \frown 2$) eosdem habet divisores quot factores, nempe bce, 30, dividi potest per 2 et 3 et 5; b et c et e jungendo 2 et 3 per 6 vel f vel bc; jungendo 2 et 5 per 10 vel l vel be; jungendo 3 et 5 per 15 vel l+e vel ce. Patet etiam hinc, quotientem et divisorem reciprocari seu ex quotiente fieri posse divisorem et tunc ex divisore fieri quotientem; $\frac{6}{2}$ aequ. 3 et $\frac{6}{3}$ aequ. 2; item b divisorem, divisores be esse divisorem dividendi bce. Hinc et divisor quotientis est divisor dividendi, quia et quotiens est divisor, $36 \smile 3$ aequ. 12; jam 12 dividi potest per 4, ergo et 36, quia 36 dividi potest per 12, et 12 per 4.

(36) Hinc $\frac{b^2}{b}$ aequ. b aequ. $\frac{b^3}{b^2}$ aequ. $\frac{b^4}{b^3}$ etc.; item $\frac{b^3}{b}$ aequ. b^2 aequ. $\frac{b^4}{b^2}$ aequ. $\frac{b^6}{b^4}$; et generaliter $\frac{b^x}{b^y}$ aequ. b^{x-y} (per artic. 18 et 35). Exempli gratia $\frac{2^6}{2^4}$ aequ. 2^{6-4} aequ. 2^2 seu $\frac{64}{16}$ aequ. 4. Eodem modo $\frac{cb}{b}$ aequ. c seu cb^0, et $\frac{cb^2}{b}$ aequ. cb seu cb^1, et $\frac{cb^3}{b}$ aequ. cb^2 etc. Itaque quando divisor, ut b, in dividendo, ut cb^2, continetur, tunc destruitur, et invenitur quotiens cb simplicior dividendo cb^2. Hinc $\frac{6}{3}$ aequ. 2, quia $\frac{6}{3}$ aequ. $\frac{bc}{c}$ aequ. b.

(37) $\frac{0}{b}$ aequ. 0. Nam $\frac{0}{b}$ aequ. $\frac{0b}{b}$ (quia 0b aequ. 0 per artic. 25) et $\frac{0b}{b}$ aequ. 0 per artic. 35. Hinc 0 dividi potest per 2, item per 3 etc., nam dimidium nihili est nihil, et tertia pars nihili est nihil. Itaque 0 est par, et est ternalis, et quaternalis, et quinalis, et ita porro.

(38) $\frac{b}{b}$ aequ. 1, sive $\frac{3}{3}$ aequ. 1, seu omnis numerus per se ipsum divisus quotientem exhibet unitatem. Nam omnis numerus non nisi semel a se ipso subtrahi potest. Idem calculo ita constat. b aequ. $1\frown b$ (per 22), ergo $\frac{b}{b}$ aequ. $\frac{1\frown b}{b}$ (per axioma generale, quod aequalia eodem modo tractata exhibent aequalia); jam $1\frac{\frown b}{b}$ aequ. 1 (quia in $\frac{b}{b}$ per artic. 35 duo $\frac{b}{b}$ se mutuo tollunt), ergo $\frac{b}{b}$ aequ. 1. Idem aliter: Quantitatum $\frac{b}{b}$ et 1 aequimultipla per b, nempe $\frac{b}{b}\frown b$ (id est b per 35) et $1\frown b$ (id est b per 22) aequalia sunt, ergo (per 29 conversam) ipsae quantitates sunt aequales.

(39) $\frac{b}{1}$ aequ. b, seu unitas dividendo non mutat. Nam $\frac{b}{1}$ aequ. $\frac{b}{1}\frown 1$ (per 22) et $\frac{b}{1}\frown 1$ aequ. b (per 35).

(40) Articulus 38 et 39 ita conjungi possunt breviterque probari. b aequ. $b\frown 1$ (per 22), at omnis multiplicatione productus ut $b\frown 1$ habet (per 35) eosdem divisores, quos factores seu generatores hoc loco b et 1.

(41) Si numerus aliquis integer habeatur expressus per formam unicam constantem ex meris primitivis, tunc omnes divisores invenientur modo sequenti. Sit numerus 360 expressus per formam unicam (nam si expressus sit per formulam compositam ex pluribus terminis, res non procedit) b^3c^2e sive $2^3 3^2 5$, ubi ingredientes b, c, e sive 2, 3, 5 sunt meri primitivi, nam 5 exempli causa non dividi potest nisi per unitatem et se ipsum, ergo 360 dividi potest ante omnia per 1, hinc primo per b (2) et c (3) et e (5); secundo per formas secundi gradus in forma data contentas: b^2 (4), c^2 (9), bc (6), be (10), ce (15); tertio per formas tertii gradus: b^3 (8), b^2c (12), b^2e (20), bc^2 (18), bce (30); quarto per formas quarti gradus: b^3c (24), b^2c^2 (36), b^2ce (60), bc^2e (90); quinto per formas quinti gradus: b^3c^2 (72), b^3ce (120), b^2c^2e (180); sexto forma proposita dividitur per unam formam sexti gradus, nempe per se ipsam b^3c^2e.

(42) Hinc si modus exprimendi numerum datum per primi-

tivos non habeatur, potest numerus datus ad primitivos reduci hoc modo. Ponamus ignorari quod 360 sit b^3c^2e vel $2^3 3^2 5$, hoc ita inveniemus. Percurramus ordine omnes primitivos, quoad opus erit; et quidem omnis numerus dividi potest per 1. Post 1 sequitur 2; dividatur ergo 360 per 2, fit 180, nempe 360‿2 aequ. 180 (seu b^3c^2e‿b aequ. b^2c^2e). Similiter 180‿2 aequ. 90 (b^2c^2e‿b aequ. bc^2e), 90‿2 aequ. 45 (bc^2e‿b aequ. c^2e). At 45 si dividatur per 2, manet residuum, itaque hoc ad scopum nostrum non procedit (nec c^2e‿b procedit ad scopum nostrum). Ergo procedatur a 2 ad proximum primitivum 3, et fiet 45‿3 aequ. 15 (c^2e‿c aequ. ce), 15‿3 aequ. 5 (ce‿c aequ. e). Jam 5 non amplius sine residuo dividi potest per 3, nam si 3 detrahas a 5, restat 2, a quo 3 amplius detrahi non potest. Ergo ulterior divisio per 3 non procedit. Proximus primitivorum post 3 est 5. Hoc si dividatur 5, quod paulo ante provenerat, fiet 5‿5 aequ. 1 (e‿e aequ. 1), unitas autem amplius dividi non potest. Habemus ergo, 360 dividi posse per 2 quidem ter seu per cubum ipsius 2 sive per 2^3, per 3 vero bis seu per quadratum ipsius 3, ac denique per 5 semel, unde fit 360 aequ. $2^3 3^2 5^1$ seu $b^3c^2e^1$. Si quis vero in tali inquisitione occurreret primitivus inapplicabilis seu per quem divisio exacte fieri non possit, is transsilietur sumeturque sequens. Hac methodo etiam apparebit, an numerus aliquis sit ipsemet omnino primitivus, id est per alium praeter unitatem et se ipsum dividi non possit. Nam tentetur, an dividi possit per omnes ordine primitivos, donec perveniatur ad primitivos, per quos dividendo fiant quotientes (neglecto residuo) minores divisore, ut 19 dividatur per 2, prodit (neglecto residuo) 9, et 19‿3 dat 6, et 19‿5 dat 3, ergo ultra pergi opus non est, quia 3 quotiens minor est quam 5 primitivus divisor. Ratio est, quia si per primitivum altiorem, ut 7, procederet divisio, tunc quotiens cum minor sit quam 7, deberet vel esse primitivus minor quam 7, vel certe si non est primitivus, debebit divisibilis esse per primitivum minorem se ipso, adeoque minorem quam 7. Jam si quotiens est exacte divisibilis per aliquem primitivum minorem quam 7, etiam dividendus erit divisibilis per divisorem minorem quam 7 (per artic. 35) contra hypothesin; tentavimus enim jam per omnes. Ergo per primitivum altiorem, ut 7, non potest dividi dividendus, adeoque inutilis est tentatio ulterior. Dantur autem varia compendia pro agnoscendis numeris primitivis, sed ea non sunt hujus loci.

(43) Ex pluribus ejusdem numeri divisoribus seu factoribus illi qui simul eum faciunt, dicantur confactores, ut exempli gratia 12 seu $1+b$ aequ. b^2c aequ. dc aequ. bf. Sunt ergo confactores primo modo b, b, c, secundo d, c (vel b^2, c), tertio bf (seu b, bc). Possunt et dici condivisores.

(44) Si numerus divisibilis sit per primitivum aliquem, tunc aliquis confactorum ejus per eundem primitivum divisibilis erit, ut si 2.6 seu 12 divisibilis est per 3, dico vel 2 vel 6 debere divisibilem esse per 3. Nam si resolvatur numerus 2.6 secundum artic. 42, ut habeatur modus exprimendi eum per primitivos factores, necesse est ut inter eos etiam compareat 3; resolvendo autem hoc modo debet vel 2 vel 6 resolvi vel ambo, itaque 3 debet latere vel in uno vel in utroque, partim enim in uno, partim in altero latere non potest, quia ipsemet est primitivus sive resolvi in plures factores non potest. Et itaque cum 2 non sit divisibilis per 3, neque adeo in 3 resolvi possit, necesse est 6 in 3 resolvi posse; est enim 6 aequ. 2.3, et fiet 12 aequ. 2.2.3 seu $2^2.3$. Si vero divisor non sit primitivus, id necesse non est, ex. gr. 12 seu 2.6 dividi potest per 4. et tamen neque 2 neque 6 per 4 dividi potest: sed ipsum 4 resolvendo in primitivos, fiet 2.2, itaque 4 partim continetur in 2, partim in 6 hoc modo $\frac{2\,.\,6}{2\,.\,2}$, nam unum 2 continetur in uno confactore (2), alterum in altero confactore (6).

(45) Hinc si potentia sit divisibilis per aliquem primitivum, latus erit divisibile per eundem, ex. gr. 6^3 sive 216 dividi potest per 3, ergo cum ejus confactores sint 6, 6, 6, ideo unus ex ipsis, nempe (cum sint aequales assumti) ipsum latus 6 etiam dividi poterit per 3.

(46) Numerus divisibilis per plures primitivos divisibilis est per factum ex omnibus. Ut si numerus 30 divisibilis sit per 2 et 3, necessario divisibilis erit per 6. Necesse est ut enim in resolutione secundum modum artic. 42 appareant ambo, itaque comparebit 2, 3, nempe 30 est 2.3.5.

(47) Si plura aequimultipla additione vel subtractione conjunguntur, compositum cum ipsis aequimultiplum erit, vel quod idem est si plures quantitates divisibiles per eundem numerum conjungantur in eandem formulam, composita formula erit divisibilis per eundem, ex. gr. si conjungantur 6 et 9, ambo divisibiles per 3, compositum 15 erit etiam divisibile per 3. $bc+cc$ (seu

$\overline{b+cc}$ seu ec) utique divisibile est per c, fiet enim $\frac{bc+cc}{c}$ aequ. $b+c$ aequ. e. Similiter: $15-9$ (seu 6) dividi poterit per 3, quia tam 15, quam 9 dividi potest per 3. Ita $ec-c^2$ (seu $\frac{e-c}{b}c$ seu bc) dividi potest per c, fiet enim $\frac{ec-cc}{c}$ aequ. $e-c$ aequ. b, sive $\frac{ec}{e}$ erit integer, et $\frac{cc}{c}$ est integer, ergo $\frac{ec-cc}{c}$ est integer, quae omnia patent ex artic. 35, nam c supra et infra se mutuo tollunt.

(48) Hinc si tota formula divisibilis sit per aliquem numerum et pars per eundem, reliqua pars etiam per eum divisibilis erit. Ita sit 12 aequ. $l+b$, is numerus 12 totus dividi potest per b sive per 2 (per hypothesin) et pars ejus b dividi etiam potest per b (per artic. 38), ajo alteram partem l etiam per b dividi posse. Nam 12 divisib. per b [sive $\frac{12}{b}$ est integer], item b divisibilis per b [seu $\frac{b}{b}$ est integer, ergo $\frac{12}{b}-\frac{b}{b}$, erit $\frac{12-b}{b}$ etiam integer] seu $12-b$ erit exacte divisibilis per b, per artic. 47. Jam $12-b$ $(12-2)$ est aequ. l (10) (quia 12 aequ. $l+b$, ergo subtrahendo utrobique b fit $12-b$ aequ. $\frac{l+b-b}{0}$ aequ. l). Ergo si $12-b$ divisib. per b, etiam aequalis ei, l per b divisibilis erit, quod ostendendum erat. Similiter sit 24 aequ. $31-f$ $(3.10-6)$; $\frac{24}{3}$ aequ. 8 seu $\frac{24}{3}$ est integer, ergo et $\frac{31}{3}$ est integer, nempe 1, ergo et $\frac{f}{3}$ est integer, seu quia tota formula $31-f$ seu 24 dividi potest per 3, et 31 etiam, sequitur et f dividi posse per 3, nam quia 24 aequ. $31-f$, ergo $24+f$ (aequ. $31-f+f$) aequ. 31, ergo $(24)+f$ (-24) aequ. $31-24$; jam 31 divisib. per 3, et 24 etiam, ergo per artic. 47 composita formula $31-24$ seu f divisib. per 3. Hae propositiones sunt principium divisionum, quae in numeris compositis per partes peraguntur.

Hinc e converso, si una pars formulae per aliquam quantitatem vel numerum sit divisibilis, altera vero pars integrans (seu reliquum totam formulam absolvens) per eum divisibilis non sit, tunc ipsa formula per eum divisibilis non erit. Ita 19 non potest dividi per 3, nam discerpi potest in duas partes 18 et 1 (quia $18+1$ aequ. 19) quarum una 18 dividi potest per 3, altera vero 1 minime.

(49) Duo numeri integri per eundem divisibiles dicuntur habere communem Mensuram, id est communem divisorem, ut bc et cc sive 6 et 9 communem habent divisorem c sive 3. Si vero nullum habeant communem divisorem, dicuntur esse primi inter se. Divisor autem exactus merito dicitur mensura, ut 2 est mensura numeri 6, quia aliquoties (nempe ter) repetitus numerus numerum 6 exacte metitur, nullumque residuum relinquit. Ideo 6 et 4 dicuntur habere communem mensuram 2.

(50) Si numerus divisibilis sit per alium, aliquis confactorum numeri dividendi habebit communem mensuram cum divisore. Ita numerus 60 dividi potest per 15, ergo aliquis ex duobus ejus confactoribus vel condivisoribus, nempe 2,30, communem habebit divisorem cum 15. Nam 2.30 resolvi poterit ad modum artic. 41 et 42 ut divisores omnes appareant, nempe inter caeteros etiam 3.5 seu 15. Jam 2 nec in 3 nec in 5 resolvi potest, ergo necesse est 30 ita resolvi posse; itaque 30 et 15 habent communem divisorem 3, imo et communem divisorem 5, quin imo 30 et 15 habebunt communem divisorem 15, nam 30 per 15 dat 2, et 15 per 15 dat 1. Scilicet 60 est 2.30 vel 2.2.3.5 sive $2^2.3.5$. Similiter quia 60 dividi potest per 3 (fit enim $60\smile 3$ aequ. 20), necesse est unum saltem ex duobus confactoribus 2 et 30 habere communem divisorem cum 3, et vero 2 non habet, ideo necesse est, ut 3 et 30 sint condivisibiles, quod et verum est, nam tam 3 quam 30 dividi possunt per eundem 3. Ita quia $3\frown 20$ aequ. 60 et 60 dividi potest per 30, patet hoc loco non alterutrum tantum, sed utrumque tam 3 quam 20 ipsi 30 condivisibilem, nam 3 et 30 dividi possunt per 3, et 20 et 30 dividi possunt per 10. Et generaliter ista patent ex habita forma qua numerus 60 per primitivos exprimitur, ut 60 aequ. $2^2.3.5$ seu 2.2.3.5, quomodocunque enim conjungantur isti factores simplicissimi 2.2.3.5 in confactores compositos, nempe in duos confactores 12 (id est 2.2.3) et 5, item 20 (2.2.5) et 3, item 30 (2.3.5) et 2, item 4 (2.2) et 15 (3.5), item 6 (2.3) et 10 (2.5), et in tres 4 (2.2) 3 et 5, item 6 (2.3) 2 et 5, item 10 (2.5) 2 et 3, item 15 (3.5) et 2 et 2, et denique in quatuor 2.3.4.5; patet quemlibet factorem vel esse primitivorum unum, vel ex parte eorum invicem ductorum fieri; adeoque

divisores ejus esse partem divisorum numeri seu latere in confactoribus simul sumtis, et quidem vel totum in uno confactorum, vel pro parte in uno, pro parte in altero.

(51) Hinc si potentia sit divisibilis per aliquem numerum, necesse est latus et divisorem habere mensuram communem, ut si $b^2c^2d^2$, nullus potest assumi divisor, qui non contineat aliquam ex literis b vel c vel d, itaque habebit literam cum latere bcd communem.

(52) Numerus divisibilis per plures primos inter se, divisibilis est per factum ex omnibus, ut numerus divisibilis per 5 et 6 et 7, divisibilis est per 210 seu 5.6.7. Nam divisibilis est per 5 et per 6, sed quia 5 nihil continet commune cum 6, nihil contribuit ad hoc, ut numerus sit divisibilis per 6; ideo alterum ab altero separatum est, et si divisus sit per 5, adhuc dividi poterit per 6; idemque est de 7. Itaque numerus divisibilis per 5 et 6 et 7 necessario erit 5.6.7. Sed secus est in numero divisibili per 4 et 6, exempl. gr. 36; is enim non est necessario divisibilis per 24, sed solum per $\overbrace{2.\underbrace{3.3}_{6}}^{4}$ seu per 12, quia 2 est communis mensura numerorum 4 et 6.

(53) Si a numero aliquo diminuendo 21 subtrahatur numerus ut 15, et residuum 6 habeat communem divisorem cum subtracto 15, tunc subtractus 15 habebit eundem communem divisorem cum diminuendo 21. Nam in literis, sit 21—ce aequ. cb, ergo 21 aequ. cb + ce, ergo 21 id est cb + ce habet divisorem c, eundem quem habet ce.

(54) Si a numero aliquo dividendo 56 subtrahatur divisor 12, quoties fieri potest, et sit residuus 8, tunc 4 maxima communis mensura divisoris 12 et residui 8 erit maxima communis mensura divisoris 12 et dividendi 56. In literis, sit divisor x et quotiens 4 (quoties scilicet x subtrahi potest a dividendo), residuus h, dividendus 56, utique erit 56 aequ. 4x + h. Ponamus jam x et h habere maximum communem divisorem d, et esse x aequ. cd, et h aequ. bd, fiet 56 aequ. 4cd + bd. Jam duorum numerorum 4cd + bd et cd maximus communis divisor est d, quoniam si major aliquis sumatur divisor ipsius 4cd, nempe m, is non erit divisor ipsius bd (alioqui 4cd et bd haberent communem divisorem m majorem quam d contra hypothesin, posuimus enim d esse

maximum); at omnis divisor ipsius 4cd, qui non est divisor ipsius bd, non potest esse divisor ipsius 4cd+bd per artic. 48. Ergo m non est divisor ipsius 4cd+bd seu ipsius dividendi 56, ergo non datur communis divisor dividendi 4cd+bd (seu 56) et divisoris cd, qui sit major quam d.

(55) Hinc si dividendus dividatur per divisorem, et divisor per residuum, et residuum primum seu divisor secundus per residuum secundum seu divisorem tertium, et ita quousque libuerit, tunc maxima mensura communis ultimi divisoris et ultimi residui erit maxima mensura communis primi divisoris et primi dividendi. Nam quia divisor et residuum divisionis praecedentis fiunt dividendus et divisor sequentis, et per praecedentem communis mensura divisoris et residui est communis mensura dividendi et divisoris, ergo communis mensura divisoris et residui divisionis ultimae est communis mensura dividendi et divisoris divisionis ultimae, ergo divisoris et residui divisionis penultimae, ergo dividendi et divisoris divisionis penultimae, ergo rursus divisoris et residui divisionis antepenultimae, ergo dividendi et divisoris divisionis antepenultimae, et ita porro procedetur usque ad dividendum et divisorem divisionis primae.

(56) Hinc habetur modus inveniendi duorum numerorum integrorum maximam communem mensuram, si quam habent. Dividatur dividendus per divisorem, divisor per residuum, idque continuetur, donec nullum sit residuum, et ultimus divisor erit maxima communis mensura quaesita. Ultimus enim divisor, cum nullum residuum relinquat, erit divisor exactus, omnis autem divisor exactus est maxima mensura communis sui ipsius et dividendi (est enim divisor dividendi, et quilibet numerus est maximus divisor sui ipsius seu quo non datur major sui, ergo nec datur major communis). Ergo ultimus divisor est maxima communis mensura ultimi divisoris et ultimi dividendi, ergo et residui (qui est ultimus divisor) et divisoris divisionis penultimae (qui est ultimae dividendus), ergo per praecedentem omnium divisorum et residuorum, itemque omnium dividendorum et divisorum divisionum praecedentium, adeoque et primae; dividendus autem et divisor divisionis primae sunt numeri dati, quorum communis divisor quaeritur. Semper autem habetur denique ultimus divisor exactus; quoniam residuus est semper integer semperque decrescit, tandem vel invenitur divisor exactus, qui est

maxima mensura communis quaesita, nec opus est ultra pergi, vel devenitur ad unitatem, infra quam descendi non potest, nam nec datur integer minor unitate, et unitas semper ist divisor exactus. Quando autem pergendum est usque ad unitatem, tunc signum est, duos numeros nullam habere communem mensuram nisi unitatem, seu esse primos inter se. Utrumque exemplis declarabo. Sint duo numeri 56 et 12, quorum quaeritur mensura communis; 56 aequ. $4.12+8$ (erit 56 dividendus, 12 divisor, 4 quotiens, 8 residuus), 12 aequ. $1.8+4$ (erit 12 dividendus, 8 divisor, 1 quotiens, 4 residuus), 8 aequ. 2.4 (erit 8 dividendus, 4 divisor, 2 quotiens, residuus 0). Ergo maxima communis mensura 56 et 12 est 4, seu $56 \smile 4$ dat 14, et $12 \smile 4$ dat 3. At 14 et 3 amplius divisorem communem non habent. At 120 et 49 esse primos inter se sic discemus: 120 aequ. $2.49+22$, 49 aequ. $2.22+5$, 22 aequ. $4.5+2$, 5 aequ. $2.2+1$, ergo ultimus residuus est 1, adeoque nulla alia datur mensura communis.

Unusquisque numerus dividi potest per unitatem, secundus quisque per 2, tertius quisque per 3, quartus quisque per 4, et ita porro, incipiendo numerationem ab 0. Ita 0, 3, 6, 9 etc. sunt divisibiles per 3.

Hinc sequitur, productum ex duobus numeris continuis, ut 0.1, vel 1.2, vel 2.3, vel 3.4 etc. esse numerum parem seu divisibilem per 2; et productum ex tribus continuis esse numerum divisibilem per 3, ut 4.5.6 sive 120, vel 5.6.7 sive 210, vel 6.7.8 sive 336; semper enim unus inter eos est ternalis seu divisibilis per 3. Ita productus ex quinque continuis, ut 12.13.14.15.16, semper est divisibilis per 5; nam unus quinalis semper inest, quia quintus quisque est unus ex quinque continuis, nunquam enim intervallorum eorum inter duos quinales plures quam quatuor numeri interpositi esse possunt.

Hinc sequitur, productum ex tribus continuis dividi posse per 6, ut $120 \smile 6$ aequ. 20 et $210 \smile 6$ aequ. 35, quia productum ex tribus continuis est etiam productum ex duobus continuis, ergo dividi potest per 2, idemque quia est ex tribus, dividi potest per 3. Similiter productum ex quatuor continuis dividi potest per 2.3.4 seu per 24, ita $8 \frown 9 \frown 10 \frown 11$ seu 7920 dividi potest per 24. Et ita porro. Unde sumto quocunque numero ut y, cujus continui sunt $\overline{y+1}$ et $\overline{y+2}$ et $y+3$ etc. productus ex omnibus, nempe $y \frown \overline{y+1} \frown \overline{y+2} \frown \overline{y+3}$ etc. dividi potest exacte per $1 \frown 2 \frown 3 \frown 4$ etc. Itaque

$\frac{y.\overline{y+1}}{1.2}$, item $\frac{y.\overline{y+1}.\overline{y+2}}{1.2.3}$, item $\frac{y.\overline{y+1}.\overline{y+2}.\overline{y+3}}{1.2.3.4}$, et ita porro, sunt numeri integri, modo y sit integer. Hinc innumerae consequentiae elegantes duci possunt; exempli causa, quia $\frac{y.\overline{y+1}}{1.2}$ vel $\frac{yy+y}{2}$ est integer, erit $yy+y$ numerus par, a quo si auferatur $2y$, qui est etiam par, residuus $yy-y$ erit par. Itaque si a numero quadrato auferatur latus, residuus erit par, ut $9-3$ est 6, idque etiam ex eo patet, quod fit ex duobus sola unitate differentibus seu continuis $y-1$ et y. Similiter $y.\overline{y+1}.\overline{y+2}$ seu $y^3+3yy+2y$ est ternalis seu divisibilis per 3, ergo auferendo ternalem $3yy-3y$ restabit y^3-y, qui etiam erit divisibilis per 3. Itaque cubus latere minutus semper est ternalis sive exacte divisibilis per 3, modo scilicet latus y sit numerus integer. Imo y^3-y est senalis seu divisibilis per 6, fit enim ex tribus continuis seu sola unitate differentibus $\overline{y-1}.y.\overline{y+1}$. Eodem modo $y-2.\overline{y-1}.y.\overline{y+1}.\overline{y+2}$ seu $y^2-4.\overline{y^2-1}.y$ seu y^5-5y^3+4y divisibilis per 1.2.3.4.5 seu per 120 adeoque et per 30, a quo si auferatur $5y^3-5y$ divisibilis per 30 (nam y^3-y per 6), restabit y^5-y divisibilis per 30. Hinc sequitur, si y neque per 2 neque per 3 neque per 5 dividi possit, tunc y^4-1 etiam dividi posse per 30. Sunt enim numeri y^5-y duo confactores y et y^4-1; jam si y dividi non potest per primitivos 2 et 3 et 5, necesse est per artic. 44 alterum confactorem y^4-1 dividi posse et per 2 et per 3 et per 5, qui cum sint primitivi, necesse est per 46. y^4-1 dividi posse per 2.3.5 seu per 30.

VIII.

DE PRIMITIVIS ET DIVISORIBUS EX TABULA COMBINATORIA.

Combinationum formulae: y^0, $\frac{y}{1}$, $\frac{y.y-1}{1.2}$, $\frac{y-y-1.y-2}{1.2.3}$, $\frac{y.y-1.y-2.y-3}{1.2.3.4}$

Numeri rerum	Nomina: Nullio, indices: 0	Unio 1	Binio 2	Ternio 3	Quaternio 4	Combinationum summae	seu Potentiae Binarii
	Combinationes singulae						
Nihil 0	1					1	2^0 Nullatum
Unitas 1	1	1				2	2^1 Radix
Binarius 2	1	2	1			4	2^2 Quadrat.
Ternarius 3	1	3*	3**	1		8	2^3 Cubus
Quaternar. 4	1	4*	6*	4**	1	16	2^4 Biquadr.

Itaque 3* significat tres esse uniones ternarii, item 3** denotat tres esse biniones ejusdem ternarii, et 6* indicat sex esse biniones quaternarii. Sint enim res quatuor a, b, c, d, erunt earum biniones sex, nempe ab, ac, ad, bc, bd, cd. 4* significat quatuor rerum esse quatuor uniones, nempe a, b, c, d, et 4** significat quatuor esse terniones quatuor rerum, scilicet abc, abd, acd, bcd.

Numeri hujus Tabulae hanc habent proprietatem, ut duae combinationes alicujus numeri (ut binarii) sibi proximae (ut 2 et 1, quarum illa est unio, haec binio binarii) simul sumtae constituunt (3**) combinationem Numeri proxime majoris (ternarii) combinationum priorum (binionis et unionis) majori (nempe binioni) similem (sive erit 3** sive 2+1 binio ternarii, erit unio binarii + binio binarii).

Habent etiam hanc proprietatem Numeri hujus Tabulae, ut combinatio quaelibet (ut binio $\frac{y.y-1}{1.2}$) multiplicata per (y—2) numerum rerum (y) indice (2) minutum, et divisa per (3) indicem (2) unitate auctum exhibeat $\left(\frac{y.y-1.y-2}{1.2.3}\right)$ combinationem proxime majorem ejusdem numeri.

His proprietatibus demonstrandis nunc quidem supersedebimus, sunt enim satis ab aliis demonstratae, sed ex illis ducemus novas, circa Numerorum divisibilitates. Prima autem haec est:

Factus ex nummeris continuis (seu sola unitate differentibus) quotcunque (ut y.y 1.y—2) dividi potest per factum ex totidem continuis incipientibus ab Unitate (1.2.3). Nam $\frac{y.y-1}{1.2}$ vel $\frac{y.y-1.y-2}{1.2.3}$ etc. est numerus combinationis Rerum; est ergo numerus integer. At si numerus aliquis integer exprimatur per modum fractionis, ut $\frac{y.y-1.y-2}{1.2.3}$, necesse est ejus Numeratorem $y.y-1.y-2$ dividi posse per denominatorem 1.2.3 seu 6.

Corollarium. Hinc quilibet Numerus factus ex continuis dividi potest per numerum quemvis, qui non est major numero continuorum; ita $y.y-1.y-2.y-3.y-4.y-5$ dividi potest per 2, item per 3, item per 4, item per 5, item per 6.

Ex his duci possent innumera theoremata circa potentiarum vel aliarum formularum divisibilitates, verbi gratia: $y.y-1$ sive $yy-y$ bifidus seu divisibilis per 2. Ergo omnis Numerus quadratus latere minutus est bifidus. Etiam omnis quadratus latere auctus est bifidus. Et omnis quadrato-quadratus suo quadrato minutus est quadrifidus seu dividi potest per quaternarium, imo per duodenarium. Sed haec nunc persequi non placet. Ne quis autem dubitet an regulae uniusmodi sint universales seu verificentur etiam cum latus est unitas, scire debet, Nullitatem seu Nihil esse numerum exacte divisibilem per quemlibet numerum; itaque etiam Unitatis quadrato-quadratus ipsius unitatis quadrato minutus, nempe 1—1 sive 0, divisibilis erit per 12, nam $\frac{0}{12}$ est 0; sed de his alias.

Si Numerus rerum sit primitivus, combinatio ejus quaelibet per ipsum dividi potest, demta prima et ultima. Sit combinatio v. g. quaternio $\frac{y.y-1.y-2.y-3}{1.2.3.4}$ et sit y Numerus rerum primitivus ex. g. 5, ajo eam dividi posse per 5. Cum enim y sit primitivus, nullum habebit divisorem praeter se ipsum, ideo nihil confert ad divisibilitatem, nisi in combinatione ultima, ubi ipse est inter divisores, sive si $y-1.y-2.y-3$ non sit divisibilis per 1.2.3.4, multiplicatus per y non fiet divisibilis (quia primitivus numerum multiplicans non reddit eum ex non-divisibili divisibilem nisi per se ipsum), at multiplicatus per y, dans $y.y-1.y-2.y-3$, est divisibilis per 1.2.3.4 ex hypothesi, ergo $y-1.y-2.y-3$ est divisibilis per 1.2.3.4, sive $\frac{y-1.y-2.y-3}{1.2.3.4}$ est integer. Is autem prodit, si combinatio proposita $\frac{y.y-1.y-2.y-3}{1.2.3.4}$ dividatur per suum numerum rerum y. Ergo ea divisione prodit integer, et proinde combinatio quaevis (excepta ultima) quae sic exprimitur, id est quaevis praeter y^0 seu nullionem sive primam, est per suum numerum rerum exacte divisibilis, si numerus rerum sit primitivus; ita 7.21.35.35.21.7 combinationes septenarii sunt divisibiles per 7.

Generalius: Quaelibet combinatio, exceptis duabus extremis, divisibilis est per aliquem divisorem sui numeri rerum, sive communem habet cum numero rerum divisorem, et ideo nunquam (exceptis duabus pene extremis, quae coincidunt cum ipso numero rerum) potest esse primitivus. Sit combinatio $y.y-1.y-2.y-3.y-4 \smile 1.2.3.4.5$, quae fit ex $y-1.y-2.y-3\ y-4 \smile 1.2.3.4$ quae est combinatio proxime praecedens numeri proxime minoris quam vocabimus C ducta in $\frac{y}{5}$; est ergo combinatio proposita $\frac{Cy}{5}$, C existente integro. Quodsi jam index 5 coincidit cum Cy seu cum combinatio est ultima, tunc non potest dividi $\frac{Cy}{5}$ per y; sed et ratiocinatio non procedit cum combinatio proposita est prima seu minima, nec datur C. In ceteris casibus debet vel C dividi per 5, quo casu erit $\frac{C}{5}$ integer, ac proinde $\frac{Cy}{5}$ erit divisibilis per y, nam dabit $\frac{C}{5}$ integrum; vel C non potest dividi per 5, tunc si 5 est primitivus, debet y dividi per 5, et $\frac{y}{5}$ erit divisor aliquis ipsius y integer, per quem poterit dividi $\frac{Cy}{5}$, sin esset derivativus, ut $\frac{Cy}{6}$, tunc combinatio proposita $\frac{Cy}{6}$ poterit dividi per aliquem ipsius 6 divisorem. Nam C, quod non potest dividi per 6, vel poterit dividi per aliquem ipsius 6 divisorem, ut 2, tunc poterit neccssario y dividi per alium ipsius 6 condivisorem, nempe 3, ut $\frac{Cy}{6}$ fiat integer, ergo restabit alius divisor ipsius y hac divisione per 6 non sublatus, per quem dividi poterit combinatio $\frac{Cy}{6}$; vel C non potest omnino dividi per ullum ipsius 6 divisorem, et tunc necesse est y vel cum 6 coincidere, quod fit in casu ultimae combinationis jam excluso, vel y dividi posse per 6, restabitque divisor aliquis ipsius y per quem dividetur $\frac{Cy}{5}$. Generaliter ergo omnis combinatio exceptis duabus extremis dividi potest per aliquem divisorem ipsius y, si non per ipsummet y.

Si combinatio proxime praecedens (C) numeri proxime praecedentis divisibilis est per indicem combinationis datae (6), tunc combinatio proposita $\left(\frac{Cy}{6}\right)$ dividi non potest per numerum rerum (y), sin illa non est divisibilis per indicem, tunc haec est divisibilis per suum numerum rerum. Est ergo nota reciproca. Demonstratio patet ex praecedenti demonstratione, ubi eam satis attigimus. Sed ut breviter tamen repetamus: Si $\frac{C}{6}$ est integer, utique $\frac{C}{6}$ y dividi potest per y; sin $\frac{C}{6}$ non est integer, nec $\frac{Cy}{6}$ dividi potest per y. Est enim $\frac{C}{6}$ quotiens divisionis per y factus.

Si combinatio aliqua (C) per suum indicem (4) unitate auctum (5) et ita primitivum dividi potest, tunc ejus numerus rerum (y—1) unitate auctus (nempe y) per hunc primitivum dividi non potest. Et, si ille non potest, tunc hic potest. Est ergo reciproca. Hoc ita demonstratur: Si $\frac{y-1.y-2.y-3.y-4}{1.2.3.4}$ sive C est divisibilis per 5 seu indicem 4 unitate auctum, et 5 est primitivus, necesse est aliquem ex ipsis factoribus Numeratoris, nempe vel $y-1$, vel $y-2$, vel $y-3$, vel $y-4$, esse divisibilem per 5; et contra. Ratio: quia cum sit primitivus, non potest unus factorum dividi per unum divisorem ipsius 5, alius per alium, ut in se invicem ducti faciant aliquod divisibile per ipsum 5. Jam si aliquis ex his multiplicatoribus est divisibilis per 5, necesse est numerum, qui minus quam indice unitate aucto seu quinario a quolibet eorum distat, non esse divisibilem per 5. At y distat a quolibet eorum minus quam 5, nam a maxime remoto $y-4$ distat quaternario. Ergo si aliquis ex his multiplicatoribus divisibilis per 5, tunc y non est divisibilis per 5. Contra si nullus ex his multiplicatoribus est divisibilis per 5, tunc cum sint pauciores unitate quam 5, necesse est proximum ipsis, nempe y, esse divisibilem per 5, quod autem de multiplicatoribus omnibus, et de ipsa combinatione in casu divisoris primitivi verum est. Habemus ergo ostensum, quod proposueramus.

Cum numerus rerum (y) per indicem combinationis primitivum (5) dividi non potest, tunc solum et semper combinatio $\left(\frac{y.y-1.y-2.y-3.y-4}{1.2.3.4.5}\right)$ per ipsum numerum rerum dividi potest. Nam cum numerus rerum y per indicem combinationis primitivum 5 dividi non potest, tunc solum et semper numerus rerum praecedens $y-1$ unitate auctus, id est y, per indicem combinationis praecedentis 4, unitate auctum, primitivum 5 dividi non potest. Cum numerus praecedens $y-1$ per combinationis suae indicem 4 unitate auctum $4+1$ primitivum dividi non potest, tunc solum et semper combinatio illa $\frac{y-1.y-2.y-3.y-4}{1.2.3.4}$ sive C per indicem suum unitate auctum $4+1$ primitivum dividi potest, per propositionem praecedentem convertibilem. Est autem combinatio illa C proxime praecedens numeri proxime praecedentis. Jam cum combinatio proxime praecedens C numeri proxime praecedentis $y-1$ per indicem suum unitate auctum, seu per indicem combinationis propositae 5 dividi potest, tunc solum et semper ipsa combinatio proposita per suum numerum rerum y dividi potest, per propositionem ante praecedentem convertibilem. Ergo cum numerus rerum etc. Q. E. D.

Ex hac propositione patet, solos Numeros Rerum primitivos habere hanc proprietatem, ut quaelibet eorum combinatio per ipsos dividi possit, seu attributum hoc supra de ipsis demonstratum esse convertibile. Nam inter indices combinationum numeri rerum est quilibet numerus ipso minor, ut inter indices quinarii sunt quaternio, ternio, binio, unio (nullionem autem primarii et ipsam ultimam, hoc loco quinionem, in his propositionibus semper exclusimus). Ergo si Numerus rerum est derivativus seu per aliquem primitivum divisibilis, dabitur aliqua ejus combinatio, cujus index erit ille ipse primitivus, sed illa combinatio non est per suum numerum divisibilis, per prop. praecedentem. Ergo omnis Numerus derivativus habet combinationem, quam non dividit.

Antequam pergamus, propositiones quaedam constituendae sunt de modo cognoscendi, quot in data serie continuorum contineantur numeri divisibiles per datum.

Numeri continui quotcunque incipientes cum unitate, tot continent numeros divisibiles per datum, quot in eorum maximi per datum divisi quotiente sunt unitates, ut 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13 continent numeros trifidos seu per ternarium divisibiles quatuor, quia 13 divisus per 3 dat neglecto residuo quotientem 4. Hoc ita demonstro: Si maximus 13 dividatur per ternarium sive per 3, prodit quotiens 4. Ergo ternarius 4 vicibus sumtis seu quadritrifidus non est major quam 13; et continue minuendo quotiente, et ternarius 3 vicibus seu tertrifidus et ternarius 2 vicibus seu bitrifidus, et ternarius 1 vice seu unitrifidus, multo minus sunt majores quam 13. Qui sunt omnes trifidi possibiles non majores quam 13, tot scilicet quot in quotiente 4 erant unitates. Hi autem omnes continentur in numeris omnibus ab unitate usque ad 13 simul sumtis, quia numeri continui incipientes ab unitate continent omnes numeros maximo non majores. Ergo tot continent trifidos, quot in maximi per 3 divisi quotiente sunt unitates.

Numeri continui quotcunque, quorum minimus est proxime major numero divisibili per datum, tot continent Numeros divisibiles per datum, quot totidem numeri continui incipientes cum unitate; ita

B 7.8.9.10.11.12.13 tot continent trifidos quot A 1.2.3 . 4 . 5 . 6 . 7. Nam quilibet priorum seriei ex majoribus constantis vocetur B, quilibet respondens seriei minorum vocetur A, patet fore B aequa. A + 6. Nempe 7 est 1 + 6 et 8 est 2 + 6, et generaliter B quilibet est A senario numero scilicet trifido auctus; ergo B non est trifidus, nisi et A sit trifidus, et contra.

Numeri continui quotcunque, quorum minimus est proxime major numero divisibili per datum, tot continent numeros divisibiles per datum, quot in quotiente numeri ipsorum per datum divisi unitates. Patet ex duabus propositionibus praecedentibus. Nam numeri continui 7.8.9.10.11.12.13, quorum minimus est proxime major trifido, continent tot trifidos, quot totidem continui incipientes ab unitate 1.2.3.4.5.6.7 per praecedentem, hi vero tot quot eorum maximi 7 per 3 divisi quotiens 2 continet unitates. Maximus autem 7 est numerus omnium 1.2.3.4.5.6 7, ac proinde et omnium 7.8.9.10.11.12.13. Ergo numeri continui 7.8.9.10.11.12.13 tot continent trifidos, quot sunt unitates in quotiente 2 numeri multitudinis eorum 7 divisi per 3.

Numeri continui, quorum minimus est divisibilis per datum, tot continent numeros divisibiles per datum, quot in numeri eorum unitate minuti et deinde per datum divisi quotiente unitate aucto sunt unitates.

Sint numeri continui octo quorum minimus 6 est trifidus, 6.7.8.9.10.11.12.13; omittatur minimus, supererunt septem 7.8.9.10. 11.12.13, in quibus numerus trifidorum est quotiens numeri 7 divisi per 3, at numeri initio positi octo unum praeterea trifidum habent, nempe minimum 6. Ergo si sint continui trifidi quotcunque ut 6.7 etc. 13, nempe octo, numerus eorum unitate minuatur, fiet 7; is dividatur per 3, quotiens erit 2. Huic adjectus 1, dabit 3 numerum trifidorum quaesitum.

Regula generalis investigandi Numerum Numerorum per datum divisibilium, qui in serie data Numerorum continuorum comprehenduntur: Numerus maximus dividatur per datum, quotiens residuo neglecto servetur, et numerus minimus proxime inferior etiam dividatur per datum ac quotiens residuo neglecto iterum annotetur; subtrahatur quotiens minor a majori, residuum erit numerus divisibilium quaesitus.

Sit series continuorum data A 8.9.10.11.12.13; compleatur retrorsum usque ad unitatem, fiet series completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13; adjecta erit series continuorum ab unitate seu series complens C 1.2.3.4.5.6.7; quaeruntur omnes trifidi seriei A. Hi erunt omnes trifidi seriei B (tot quot sunt unitates in quotiente numeri maximi 13 per 3 divisi) demtis omnibus trifidis seriei C, qui sunt tot quot unitates in numero maximo seriei C, nempe 7, per 3 diviso, qui numerus 7 minimo seriei A, nempe 8, proxime inferior est. Ergo omnes trifidi seriei A erunt $\frac{13}{3}$ | 4 seu 4 demto $\frac{7}{3}$ seu 2, seu 4—2 id est 2.

Si Numerus maximus seriei continuorum est divisibilis per datum, et numerus minimo proxime inferior est etiam divisibilis per datum, tunc numerus divisibilium per datum in serie data aequivalet numero terminorum diviso per datum, eritque illa divisio exacta.

Sit series data A 7.8.9.10.11.12.13.14.15
et series completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15
et series complens C 1.2.3.4.5.6,

numerus maximus seriei datae 15 est trifidus, ejus minimo 7 proxime inferior 6 est etiam trifidus. Dico numerum trifidorum seriei A aequivalere numero terminorum seriei A, nempe 9, diviso per 3 eamque divisionem esse exactam. Nam numerus trifidorum seriei A aequivalet numero trifidorum seriei B, demto numero trifidorum seriei C. Trifidorum autem seriei B numerus est $\frac{15}{3}$ exactus, et trifidorum seriei C est $\frac{6}{3}$ exactus; ergo numerus trifidorum seriei A erit $\frac{15-6}{3}$ exactus; at 15—6 est numerus terminorum seriei A, ergo numerus terminorum seriei A divisus per 3 dat exacte quaesitum.

Si numerus maximus seriei continuorum est divisibilis per datum, et numerus minimo proxime inferior non est divisibilis per datum, tunc numerus divisibilium per datum in serie data, quotientem numeri terminorum per datum divisi excedit unitate.

Sit series data A 8.9.10.11.12.13.14.15
et series completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15
et series complens C 1.2.3.4.5.6.7,
dico numerum trifidorum seriei A esse $\frac{8}{3}$ (neglecto residuo) + 1 id est 3. Nam trifidi seriei A sunt $\frac{15}{3}$ id est 5, demto $\frac{7}{3}$ neglecto quotiente seu 2. 15 sit exacte divisibilis per 3, non vero 7. Hinc fit, ut detrahendum sit unitate minus, quam fuisset si successisset divisio, itaque non tantum est $\frac{8}{3}$ neglecto residuo, seu $\frac{15}{3}-\frac{7}{3}$ neglecto residuo, sed praeterea 1, quia in $\frac{15}{3}$ ob exactam divisionem nil negligitur, sed negligitur tantum in detrahendo. Clarius: trifidi seriei A sunt $\frac{15}{3}-[\frac{7}{3}-\frac{1}{3}]$ seu demtis $\frac{7}{3}$ neglecto residuo $\frac{1}{3}$ seu $\frac{15}{3}-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}$. Jam $\frac{15}{3}-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}$ est $\frac{8}{3}$ $\frac{2}{3}+1$, et $\frac{8}{3}-\frac{2}{3}+1$ est $\frac{8}{3}$ neglecto residuo + 1. Ergo trifidi seriei A sunt $\frac{8}{3}$ neglecto residuo + 1, seu numerus terminorum seriei A, qui est 8, divisus per 3, neglecto residuo, et addito 1.

Si numerus maximus seriei continuorum non est divisibilis per datum, et numerus minimo proxime inferior est divisibilis per datum, tunc numerus divisibilium per datum in serie data quotientem numeri terminorum per datum divisum aequat.

Sit series data A 7.8.9.10.11.12.13.14.15.16
completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16
complens C 1.2.3.4.5.6,
dico numerum trifidorum seriei A esse $\frac{10}{3}$. Est enim $\frac{16}{3}$ neglecto residuo, demto $\frac{6}{3}$ exacto.

Si numerus maximus seriei continuorum non est divisibilis per datum et numerus minimo proxime inferior itidem non est divisibilis per datum, numerus tamen seriei est divisibilis per datum, tunc numerus divisibilium per datum in serie data quotientem numeri terminorum per datum divisum aequat.

Sit series data A 5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16
series completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 11.12.13.14.15.16
complens C 1.2.3.4
16—4 est numerus terminorum seriei A, et $\frac{16}{3}$ neglecto residuo, demto $\frac{4}{3}$ neglecto residuo, est aequ. $\frac{16-4}{3}$ neglecto residuo, nam $\frac{16}{3}$ neglecto residuo est $\frac{16}{3}-\frac{1}{3}$ et $\frac{4}{3}$ neglecto residuo est $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}$, et

$\frac{16}{3}$ negl. resid. — $\frac{4}{3}$ negl. resid. est $\frac{16}{3} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ seu $\frac{16-4}{3}$.
Quod semper ita contingere ostendam: Sit $y-x$ aequ. bl, sitque y aequ. $al+m$ et x aequ. $cl+n$, erit $y-x$ aequ. $al-cl+m-n$ aequ. bl. Est autem $m \urcorner l$, ergo $m-n$ non est divisibilis per l, ergo $+m-n$ est 0, seu m aequ. n. Semper ergo duo residua se destruent, seu si duorum numerorum differentia est per datum divisibilis, et neuter numerorum est per datum divisibilis, residua sunt aequalia.

Si nec numerus maximus seriei continuorum, nec numerus minimo proxime inferior, nec numerus terminorum seriei per datum exacte dividi possint, recurrendum est ad regulam generalem, quam esse deprehendi hanc: Si serie continuorum data, maximus et minimo proxime inferior (x) per datum (l) dividantur, sitque residuus posterior (n) major (non major) priore (m), numerus divisibilium per datum in serie comprehensorum erit unitate superior (aequalis) quotienti numeri terminorum ($y-x$) divisi per datum (l).

Sit y numerus terminorum seriei completae seu maximus seriei datae, et x numerus terminorum seriei complentis seu minimo seriei datae proxime inferior, et $y-x$ numerus terminorum seriei datae, et sit y aequ. $al+m$, x aequ. $bl+n$, positis a, b quotientibus, m, n residuis. Numerus orthotomorum (ex. gr. trifidorum) seriei completae $\frac{y}{l}$ neglecto residuo sit a, seu $\frac{y}{l} - \frac{m}{l}$; Numerus orthotomorum seriei complentis $\frac{x}{l}$ neglecto residuo sit b seu $\frac{x}{l} - \frac{n}{l}$. Quorum differentia erit $\frac{y}{l} - \frac{x}{l} + \frac{n}{l} - \frac{m}{l}$ seu $\frac{y-x}{l} + \frac{n-m}{l}$, qui est numerus orthotomorum seriei datae. Ergo $\frac{y-x}{l}$ aequ. $a-b+\frac{m-n}{l}$, et quoniam $m \urcorner l$, ergo si $y-x$ dividatur per l, erit $a-b$ quotiens et $m-n$ residuus, posito m esse majorem quam n. Ergo $\frac{y-x}{l}$ neglecto residuo erit aequ. $a-b$, ac proinde Numerus Terminorum seriei datae $y-x$ per l datum divisus neglecto residuo, erit $a-b$ seu erit numerus orthotomorum, idem est, si sit $m-n$ aequ. 0, quia tunc nullum est residuum. Sin contra sit n major quam m, tunc erit $\frac{y-x}{l}+\frac{n-m}{l}$ aequ. $a-b$, eritque $a-b$ major quam $\frac{y-x}{l}$, ergo et major quam $\frac{y-x}{l}$ neglecto residuo, qui tamen excessus ipsius $a-b$ super $\frac{y-x}{l}$ est minor unitate, quia $n \sqcap l$, ergo et $n-m \sqcap l$, ergo $\frac{n-m}{l} \sqcap 1$. Ergo et excessus ejus super $\frac{y-x}{l}$ neglecto residuo, est minor duabus unitatibus; componitur enim ex $\frac{n-m}{l}$ minore quam 1 et ipso residuo ipsius $\frac{y-x}{l}$ etiam minore quam 1. Excessus autem integri $a-b$ super integrum comprehensum in $\frac{y-x}{l}$ seu quotientem numeri terminorum per datum divisi, cum sit aliquis et tamen minor binario, erit 1. Ergo conclusum habemus: Si n residuus numeri x minimo datae seriei continuorum proxime minoris, divisi per datum l est major quam m, residuus numeri y maximi seriei continuorum datae, tunc $a-b$ numerus divisibilium per datum l comprehensorum in seriei data est unitate major quam $\frac{y-x}{l}$ integer (neglecto residuo) quotiens numeri terminorum seriei per datum l divisi; sin vero residuus ille n hoc m non major, sed vel minor vel aequalis, tunc $a-m$ numerus divisibilium per datum in serie data comprehensorum est quotienti numeri terminorum seriei per datum diviso, neglecto residuo, aequalis.

Ex praecedenti propositione apparet etiam, si residuus minimo inferioris in serie data continuorum per datum divisi est major quam residuus maximi divisi per eundem, fore numerum per datum divisibilium in serie data continuorum comprehensorum majorem numero per datum eundem divisibilium comprehensorum in serie totidem continuorum incipientium cum unitate; alioqui vero fore semper aequalem, nunquam vero minorem. Patet, inquam, ex praecedenti, quia is numerus divisibilium comprehensorum in serie totidem incipientium ab unitate, idem est cum quotiente ipsius numeri terminorum per datum diviso.

Si series continuorum incipiat a numero divisibili per datum, et numerus continuorum non sit divisibilis per datum, erit numerus divisibilium per datum in serie comprehensorum unitate major quotiente numeri terminorum per datum divisi, seu numero divisibilium per datum, qui in serie totidem continuorum cum unitate incipientium comprehenduntur.

Sit series 6.7.8.9.10.11.12.13, cujus minimus est trifidus, utique proxime minor 5, divisus per ternarium, relinquet maximum residuum possibilem, nempe 3 — 1. Ergo numerus maximus seriei 13 divisus per 3 relinquet residuum, qui non potest esse major quam prior, erit ergo vel minor vel aequalis. Si aequalis, tunc duobus residuis m et n se destruentibus

erit $\frac{y-x}{l}$ aequ. a—b integro, seu numerus terminorum y—x erit

exacte divisibilis per l; et contra, si sit exacte divisibilis per l,

tunc $\frac{m-n}{l}$ utique destrui debet, ergo m et n aequales. Quando

vero numerus terminorum non est exacte divisibilis per n, ut hoc loco, tunc residui m et n non sunt aequales; est autem n seu 3 — 1 maximus, qui esse potest, ergo m est minor. Hoc autem posito utique numerus divisibilium per datum l comprehensorum in serie data, erit unitate major quotiente numeri terminorum divisi per l, seu numero comprehensibilium in totidem continuis incipientibus ab unitate.

Factus ex numeris continuis quotcunque dividi potest per factum ex totidem continuis incipientibus ab unitate seu $\frac{5.6.7.8.9.10.11.12}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ est integer. Nam numerator continet totidem ad minimum bifidos, totidem trifidos, totidem quadrifidos etc., quot nominator, per propositionem antepraecedentem. Ergo numerator fit ad minimum ex 2 toties in se ducto, 3 toties in se ducto, 4 toties in se ducto, quoties nominator ex illis fit, seu omnes potentiae binarii, ternarii etc. vel alterius primitivi, quae in se invicem ductae constituunt nominatorem, eae in se invicem ductae cum aliis tamen praeterea in ipsos ductis constituunt et numeratorem.

Si factus ex continuis quotcunque divisus per totidem continuos incipientes cum unitate, adhuc dividi potest per proxime majorem divisoribus derivativum, necesse est ut dividi possit praeter priores per quemlibet novi divisoris divisorem. Ut si $\frac{5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5}$ dividi potest per 6, debet dividi posse et per 2 et per 3. Ergo vel habebit numerator plures bifidos quam nominator, si nempe 5—1 divis. per 2 reliquisset majus residuum, quam 9 divis. per 2, quod non est; vel habebit numerator magis bifidos, nempe 8, cubum in numeratore loco quadrati 4 in nominatore. Quoniam autem methodum habemus sciendi, an plures bifidi vel trifidi vel alii quicunque insint numeratori, quam nominatori, superest ut investigemus etiam an pluries. Ubi considerandum, divisibilium per dignitates numeri seriem seu ordinem investigari utile futurum esse. Binarii dignitatum hic est ordo:

2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28.30.32.34.36.38.40.42.44.46.48
divisib. per
2.4.2.8. 2. 4. 2.16. 2. 4. 2. 8. 2. 4. 2.32. 2. 4. 2. 8. 2. 4. 2.16

3.6.9.12.15.18.21.24.27.30.33.36.39.42.45.48.51.54.57.60.63.66.69.72.75.78.81
divisib. per
3.3.9. 3. 3. 9. 3. 3.27. 3. 3. 9. 3. 3. 9. 3. 3.27. 3. 3. 9. 3. 3. 9. 3. 3.81

Sed haec alias prosequemur. Nunc considerandum, si $\frac{5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5}$ dividi potest per 6, adeoque per 2, necessario altiorem potentiam ipsius 2 confici ex bifidis numeratoris, quam nominatoris. Et quia non sunt plures bifidi in numeratore, quam nominatore, videndum, an non sint plures quadrifidi in numeratore quam in nominatore, quod sciri eadem methodo potest, qua id in bifidis scivimus.

IX.

EXERCITIUM AD PROMOVENDAM SCIENTIAM NUMERORUM.

(1) Proponitur problema in rationalibus Numeris: dato numero a, exhibere numerum x, qui faciat, ut $x + \frac{a}{x}$ sit quadratus, aut ostendere impossibilitatem. Is quadratus sit yy, et fiet $xx + a = xyy$.

(2) Si x et y sint integri, etiam a est integer, nam ex aequatione praecedenti est $a = xyy - xx$. Itaque cum a aequetur integro, erit integer.

(3) Si a et y sint integri, etiam x est integer. Esto enim x fractus $z : w$ cujus numerator sit z et denominator w, fractione ad minimos terminos reducta, seu ita ut z et w sint primi inter se. Ita ex aequatione articuli 1 fiet $zz + aww = zwyy$, seu $zz : w = zyy - aw$. Ergo $zz : w$ est integer, quod est impossibile, cum z et w sint primi inter se, nisi w sit 1 seu nisi x sit integer. Hic ex supposito fracto concluditur non fractus.

(4) Sed licet a et x sint integri, nihil prohibet saepe y esse fractum, ut mox patebit.

(5) Si numeri omnes requirantur integri, necesse est, ad hoc ut problema succedat, a esse bc, confactoribus b et c existentibus integris, talibus ut $b + c$ sit quadratus, ipse scilicet yy, alter autem horum confactorum velut b erit x. Quia enim $a = xyy - xx$ per artic. 1, ideo positis a et y adeoque (per artic. 3) et x integris, erit a divisibilis per x. Posito ergo $a = bc$ et $b = x$, fiet $bc = byy - bb$ seu $b + c = yy$, ut asserebatur. Exempli causa si a sit 14, ubi $b = 2$ et $c = 7$ et $2 + 7 = 9$, potest esse $x = 2$, nam $2 + \frac{14}{2} = 9$. Potest etiam esse $x = 7$, nam $7 + \frac{14}{7} = 9$. Nec refert utrum alteruter horum b et c aequetur unitati, alter vero ipsi a. Verb. gratia a sit 15, quia ergo $15 + 1 =$ quadrato 16, ideo potest x esse 1; nam $1 + \frac{15}{1} = 16$; potest etiam x esse 15, nam $15 + \frac{15}{15} = 16$.

(6) Si numeri omnes requirantur integri, habetur solutio, id est, quaesitum quodvis possibile vel impossibilitas. Cum enim dato numero a integro bini haberi possint ejus confactores quoties dari possunt, patet an et quinam confactores possint componere quadratum. Horum jam quilibet potest esse x

quaesitus, summa autem confactorum erit quadratus ipse yy. Quodsi tales confactores non dentur, problema erit impossibile, per artic. praecedentem, et quando $a+1$ est quadratus, ideo cum 1 et a sint confactores ipsius a, x potest esse 1, item a.

(7) Si omnes numeri requirantur integri, non alius primitivus potest esse a, quam 3. Est enim a primitivus, ergo bini confactores non possunt esse alii, quam a et 1. Ergo (per artic. 5) $a+1=yy$ seu $a=yy-1=y+1, y-1$. Ergo (major) $y+1$ est a, et (minor) $y-1$ est 1. Ergo $y=2$. Ergo $y+1$ seu a est $=3$. Et x erit 1 vel 3, nam $1+\frac{3}{1}=4$ et $3+\frac{3}{3}=4$.

(8) Si omnes numeri requirantur integri, et postulentur a et x primi inter se, necesse est, ad hoc ut problema sit possibile, datum a unitate auctum facere quadratum, qui quadratus erit yy, sed x erit 1. Neque enim numerorum primorum inter se unus, nisi sit unitas, alterius factor esse potest; primos autem inter se vocamus, qui non aliam habent communem mensuram quam unitatem.

(9) Si soli a et x requirantur integri, datus scilicet et quaesitus, nec referat, utrum resultans yy sit integer vel non; et y sit $v:w$ fractione ad minimos terminos redacta, et proinde v et w sint integri primi inter se, w abeunte in 1 eo casu, quo y est integer; ponaturque $a=bc$ et $x=bz$, ipso b existente maxima mensura ipsorum a et z et abeunte in 1 eo casu, quo a et x sint primi inter se: his positis dico fore $x=bww$. Nam in aequatione articuli 1, pro x substituendo bz et pro y substituendo $v:w$, fiet $bbzzww+bcww=bzvv$ seu fiet $bzzww+cww=zvv$ seu $bzz+c=zvv:ww$, itaque $zvv:ww$ est integer, cum sit aequalis integro $bzz+c$. Hinc cum zvv dividi possit per ww, sed vv et ww non possint habere communem mensuram (ex hypothesi), necesse est ut z dividi possit per ww. Rursus (eodem argumento) quia $cww:z$ est integer, seu cww dividi potest per z, z autem et c sunt primi inter se (alioqui b non esset maxima communis mensura ipsorum bc et bz contra hypoth.), necesse est ww dividi posse per z. Hinc cum paulo ante ostensum sit etiam z dividi posse per ww, consequens est z et ww esse numeros inter se aequales, et proinde cum posuerimus x esse bz, fiet $x=bww$.

(10) Iisdem positis necesse est, cc esse majorem quam $4bww$. Nam ex aequatione articuli praecedentis pro z ponendo ww fiet $bw^4+c=vv$, seu $c=vv-bw^4$ seu $c=v+ww\sqrt{b}, v-ww\sqrt{b}$. Jam in integris productum ex duobus unitate majoribus est majus pro-

ducente quovis. Ergo c est major quam $v+ww\sqrt{b}$, item c est major quam $v-ww\sqrt{b}$. Ergo et c est major quam horum differentia, quae est $2ww\sqrt{b}$, seu cc major est quam $4bw^4$. Excipitur casus, quo excessus ipsius v seu ipsius $\sqrt{(bw^4+c)}$ super $dew\sqrt{b}$ est minor unitate.

(11) Iisdem positis et posito praeterea a et x esse integros primos inter se, x est quadratus nempe ww, nam cum x sit bww per praecedentem artic., eo casu b abit in 1.

(12) Iisdem positis, si a et x sint integri primi inter se, habebit a duos confactores d et e, quorum differentia erit duplum quadrati et is quadratus erit x. Veluti si a sit 33 et x sit 4, et d sit 3 et e sit 11, erit $11-3=8=2.4=2x$ et $4+\frac{33}{4}=\frac{49}{4}$. Nam ex aequatione articuli 9, ubi erat $bzzww+cww=zvv$, pro z ponendo ww (per artic. 9) et pro b ponendo 1 (ex hyp. articuli praesentis et praecedentis) et pro c ponendo a (nam cum sit $bc=a$, faciendo $b=1$ fit $c=a$) prodibit $w^4+a=vv$ seu $a=vv-w^4=v+ww$, $v-ww$. Sunt ergo duo confactores ipsius a, quorum unus minor, nempe d, sit $v-ww$, alter major, nempe e, sit $v+ww$, et fiet $e-d=2ww$, ipso ww existente x, per praeced.

(13) Si ipsorum a et x maxima communis mensura b sit quadratus $\beta\beta$, tunc c (quotiens ex a divis. per b) habebit binos confactores d et e, quorum differentia divisa per β, radicem quadraticam ipsius b, dabit duplum quadrati, qui quadratus multiplicatus per b, dabit x.

Exempli causa sit a, 729, potest x esse 36, horum maxima communis mensura b est $9=\beta\beta$. Nam $729:9=81=c=de=3.27$, et $e-d$ $(=27-3)$ $=24$ et $24:\beta=24:3=8=2.4=2ww$, et $ww=4$, et $bww=36=x$. Et fiet $36+\frac{729}{36}=\frac{225}{4}$. Nam ex aequatione articuli 9 pro z ponendo ww, et pro b ponendo $\beta\beta$ fit $c=vv-\beta\beta w^4=v+\beta ww$, $v-\beta ww$. Ergo c habebit binos confactores $d=v-\beta ww$, et $e=v+\beta ww$, et $e-d$ erit $=2\beta ww$. Ergo $e-d,:\beta=2ww$ et $e-d,:2\beta,,b=bww=x$. Casus articuli 10 vel 11 sub hoc etiam articulo continetur, cum b adeoque et β est 1.

(14) Si a datus et x quaesitus requirantur rationales integri in aequatione $x+\frac{a}{x}=yy$, nec referat utrum y sit integer an fractus, invenire numerum x quoties est possibilis, aut invenire impossibilitatem, idque per tentationes numero definitas. Primum dispici potest, an

a habeat binos confactores, quorum summa sit quadratus, et habebitur aliqua solutio per artic. 5. Deinde dispici potest, an a divisus exacte per quadratum (qui etiam potest, esse 1) det numerum habentem binos confactores d et e, quorum differentia divisa per radicem dicti quadrati, det duplum novi quadrati. Ita enim habebitur aliqua solutio per artic. 13. Sed generaliter ut omnis solutio possibilis aut impossibilitas inveniatur, quaerantur bini quivis confactores ipsius a, qui vocentur b et c, et pro quibusvis b et c sumatur integer w talis, ut sit $4bw^4$ minor quam cc per artic. 10, tenteturque an x possit esse bww per artic. 9, et cum res succedit, ut hoc modo fiat $x+\frac{a}{x}$ vel quod idem est $bww+\frac{c}{ww}$ vel quod eodem redit bw^4+c aequalis quadrato rationali integro, tunc et non aliter habetur quaesitum. Quodsi nullus w inter limites praescriptos det x succedentem, problema pro numero dato a impossibile est.

Ut melius intelligatur praxis hujus solutionis, subjiciemus aliquot exempla. Cum nempe numerus a datus est integer, et x quaesitus requiritur integer, a datus sit 19, quaeritur an sit aptus ut inveniri possit x integer pro aequatione $x+\frac{19}{x}=yy$.

	b	19	1
	c	1	19
	cc	1	361
w,1	$4bw^4$	76	4
	x = bww	19 succed.	1 non succedit.
w,2	$4bw^4$	. . . .	64
	x = bww	. . . .	4 non succedit.
w,3	$4bw^4$	. . . .	324
	x = bww	. . . .	9 succedit.
w,4	$4bw^4$	. . . .	1024 justo major.

Nempe a posito 19, b est 19 vel 1, et c est 1 vel 19; itaque cc est 1 vel 361. Jam cum b est 19 et c est 1, tunc posito w, 1, fit $4bw^4=76$, qui numerus est justo major, id est major quam cc seu quam 1. Ergo pro b, 19 et c, 1 frustra tentatur major w, nam sic $4bw^4$ fiet adhuc majus excedens. Pergamus ergo ad b, 1 et c, 19, erit cc, 361. Hinc si w sit 1, fiet $4bw^4=4$, qui numerus minor est quam 361. Ergo tentetur, an x=bww=1 succedat; sed non succedit, quia $1+19=20$, qui non est quadratus. Eodem modo res non succedit, cum w sumitur 2, etsi enim $4bw^4$ fiat 64, minor quam 361, tamen x=bww=4 non succedit. Sed si sumatur w, 3, tunc $4bw^4$ erit 324 minor quam 361, et $x=bww$ erit 9. Jam $9+\frac{19}{9}=\frac{100}{9}$, qui est quadratus. Ergo hic casus succedit. Sed posito $w=4$ fit $4bw^4$, 1024 justo major seu maj orquam 361. Ergo frustra assumitur w adhuc major quam 4, et quia non dantur alii b et c (confactores ipsius 19) quam b, 19 et c, 1, vel b, 1 et c, 19, alia solutio haberi nequit.

Sumamus aliud exemplum: postuletur x integer, posito a esse 39, seu quaeritur $x+\frac{39}{x}=yy$.

	b	39	13	3	1	
	c	1	3	13	39	
	cc	1	9	169	1521	
w,1	$4bw^4$	justo maj.	justo maj.	12	4	
	$x=bww$	. . .	. . .	3 succ.	1	non succedit
w,2	$4bw^4$	. . .	. . .	192 just.maj.	64	
	$x=bww$	. . .	. . .	. . .	4	non succedit
w,3	$4bw^4$	. . .	. . .	. . .	324	
	$x=4bw$	. . .	. . .	. . .	9	non succedit
w,4	$4bw^4$	. . .	. . .	. . .	1024	
	$x=bw^4$	. . .	. . .	. . .	16	non succedit
w,5	$4bw^4$	. . .	. . .	. . .	2500	justo maj.

itaque non aliter problema succedit, quam si x sit 3, ubi fit $3+\frac{39}{3}$ seu $3+13=16$.

Postuletur denique x integer, posito a esse 42, seu quaeritur $x+\frac{42}{x}=yy$. Et schema operationis erit tale:

	b	42	21	14	7	6	3	2	1
	c	1	2	3	6	7	14	21	42
	cc	1	4	9	36	49	196	441	1764
w,1	$4bw^4$	j.m.	j.m.	j.m.	28	24	12	8	4
	$x=bww$	.	.	.	7 n.s.	6 n.s.	3 n.s.	2 n.s.	1 n. s.
w,2	$4bw^4$	.	.	.	j. m.	j. m.	192	128	64
	$x=bww$	.	.	.	.	.	12 s.n.	8 n.s.	4 n. s.
w,3	$4bw^4$	.	.	.	.	.	j. m.	j. m.	324
	$x=bww$	.	.	.	.	.	.	.	9 n. s.
w,4	$4bw^4$	.	.	.	.	.	.	.	1024
	$x=bww$	.	.	.	.	.	.	.	16 n. s.
w,5	$4bw^4$	.	.	.	.	.	.	.	justo maj.

Anmerkung. Das Format des Buches gestattete es nicht, das vorstehende Schema genau nach dem Ms. abzudrucken; es mussten, um Raum zu gewinnen, die Worte justo maj. mit j. m. und non succedit mit n. s. wiedergegeben werden.

Itaque cum a est 42 et x requiritur integer, problematis solutionem non succedere ostensum est.

Superest ut solvendi problematis modum quaeramus, cum a datus est fractus, x autem est integer; item cum a est integer, x autem permissus est fractus; ac denique cum a est fractus et x etiam permissus est fractus. Sed haec nunc persequi non vacat. Tantum paucis annotare placet, posito a integro, x autem fracto, positisque integris b, c, q, u, v fore $a=bc$, $x=buu:qq$, $q=v:qu$ et $bu^4+cq^4=vv$, ita tamen ut b possit esse unitas, sed q erit numerus integer unitate major. Erunt autem c et u, b et q, u et q, v et u, primi inter se. Et numeri fracti x et y, ad minimos terminos fractionum reducti, non quidem habent communem denominatorem, habent tamen denominatores, quorum est communis divisor. Numeratores autem ipsius x et ipsius y non possunt habere communem divisorem, nisi si quem habent communem cum ipso a. Itaque dato numero integro $a=bc$, ut haberi possit $x+\frac{a}{x}=yy$, quaeruntur integri u et q, primi inter se, et u primus cum c, et q primus cum b, tales, ut fiat bu^4+cq^4 aequalis quadrato cuidam vv, nec problema solvi potest, quia u et q quales diximus inveniantur. Sufficeret autem inveniri per tentationes numero definitas, ut supra articulo 14.

X.

OBSERVATION NOUVELLE DE LA MANIÈRE D'ESSAYER SI UN NOMBRE EST PRIMITIF.

(Aus einem Briefe Leibnizens an den Herausgeber des Journals des Savans. Février 1678.)

J'ai fait quelques observations sur les nombres primitifs, qui sont de conséquence, à mon avis, pour la perfection de la science des nombres, dont on appelle primitifs ceux qui ne peuvent être divisés, ni produits par multiplication, au lieu que tous les autres peuvent être produits et divisés par ceux-ci. Si leur progression était bien connue, elle servirait à nous decouvrir le mystère des nombres en général: mais elle a paru si bizarre jusques ici, qu'on n'en a pû trouver aucune marque ni proprieté affirmative; et tout ce qu'on en sçait, c'est qu'ils sont indivisibles: encore est-il malaisé de le reconnaitre dans les grands nombres, sans en faire l'essai par une multitude d'autres, ce qui est étrangement prolixe. Je crois avoir trouvé le vrai chemin pour pénetrer dans leur nature: mais n'ayant pas eu encore le loisir de l'achever, je vous donnerai ici une proprieté positive, qui me parait curieuse et utile quoiqu'elle ne soit pas réciproque; car au moins tous les nombres qui ne l'ont pas, seront exclus d'abord. Voici cette proprieté. Tout nombre primitif au dessus de cinq étant diminué ou de 1 ou de 5 disjontivement, est divisible par 6. Par exemple, 7 moins 1 est 6, 11 moins 5 et 6, 13 m. 1 est 12, 17 m. 5 est 12, 19 m. 1 est 18, 37 m. 1 est 36, 101 m. 5 est 96, 103 m. 1 est 102, qui divisé par 6 donne 17, 10007 m. 5 divisé par 6 donne 1667, 510511 m. 1 divisé par 6 donne 85085 etc.

XI.

INVENIRE TRIANGULUM RECTANGULUM IN NUMERIS CUJUS AREA SIT QUADRATUS.*)

Ajo id problema esse impossibile.

Inter varias demonstrandi rationes hanc reperi pulcherrimam, quia per multas alias praeclaras propositiones ducit.

*) Leibniz hat bemerkt: 29. Decembr. 1678.

Propositio I. Si sint duo triangula similia, et latus trianguli unius fit multiplicatione lateris homologi trianguli alterius per aliquem numerum, etiam area illius fiet ex area hujus per ejusdem Numeri quadratum multiplicata.

Nam areae triangulorum similium sunt inter se ut quadrata homologorum laterum, adeoque si latus fit multiplicatione lateris homologi per aliquem numerum, fiet quadratum lateris multiplicatione lateris homologi per quadratum ejusdem numeri. Ac proinde idem est in areis Triangulorum ipsorum.

Propositio II. Si area trianguli rectanguli primitivi in numeris integris, quadratus esse non potest, etiam derivativi in integris, imo et trianguli rectanguli cujuscunque in numeris fractis, area non potest esse quadratus.

Primo. Nam primitivum et derivativum sunt similia, ergo per prop. 1. area primitivi sit ex divisa area derivativi per quadratum numeri derivativum metientis. Ergo si area derivativi est quadratus, etiam quod ea per quadratum divisa sit, nempe area primitivi erit quadratus; quod si impossibile ostendatur, etiam aream derivativi quadratum non esse posse patet.

Secundo. Trianguli rectanguli in numeris fractis latera reducantur ad communem denominatorem, manifestum est tres numeratores fore tria latera homologa alterius trianguli similis in integris; et aream trianguli rectanguli in fractis in quadratum communis illius denominatoris ductam dare aream trianguli homologi in integris per prop. 1, quae si quadratus esse non potest, neque id, quo in quadratum ducto ipsa producitur, nempe area trianguli in fractis, quadratus esse poterit.

Problema III Si in triangulo rectangulo duo latera quaelibet habeant communem mensuram, tertium habebit eandem communem mensuram.

Est enim tertium nihil aliud quam latus summae vel differentiae quadratorum a duobus reliquis. Jam ex hypothesi duo ista reliqua latera habent communem mensuram, ergo et quadrata eorum habent communem mensuram, nempe quadratum communis mensurae laterum. Ergo quadratorum ab ipsis summam vel differentiam metitur communis horum quadratorum mensura, nempe quadratum communis mensurae laterum. Quodsi ergo hoc quadratum summam vel differentiam illam metitur, etiam latus hujus quadrati (scilicet communis mensura duorum reliquorum laterum) latus summae illius vel differentiae, id est latus trianguli tertium metietur.

Propositio IV. Duo numeri integri inaequales, non quadrati, quorum in se invicem ductu producitur quadratus, habent aliquam communem mensuram.

Ut a^2b, b vel a^2b, bc^2, unde fit a^2b^2 vel $a^2b^2c^2$. Nam quivis quadratus producitur ex quadratis factorum lateris. Itaque dividi potest in duos factores non nisi tribus modis, vel enim omnia quadrata divelluntur, uno latere hinc, altero illinc manente, et duo illi factores sunt aequales, nempe radix (v. g. abc, abc); vel nulla quadrata divelluntur, et tunc aliqua quadrata hinc, aliqua illinc, consistunt, et uterque factor est quadratus (v. g. a^2, b^2c^2); vel aliqua quadrata divelluntur, aliqua non divelluntur, et tunc latus ejus quod divellitur, hinc pariter atque illinc consistit (v. g. a^2b, bc^2) ac proinde duo factores divellendo facti habent mensuram communem, nempe hoc ipsum latus. Ergo si duo factores quadrati sint inaequales, et non quadrati, habebunt communem mensuram, numerum scilicet aliquem.

Propositio V. Omnia latera trianguli rectanguli in integris primitivi sunt numeri impares praeter unum latus circa rectum, quod semper est par (si quidem area est integer).

Primum patet, omnia latera non posse esse pares, alioqui triangulum non esset primitivum, quia communis mensura foret binarius. Nec duo quaelibet possunt esse pares, alioqui et tertium foret per prop. 3. Ergo si quod est par, erit unicum tantum ex tribus. Est autem semper aliquod, si quidem area est integer, quia alioqui latere uno in alterius circa rectum dimidium ducto non potest prodire integer. Quid fiat, cum area non est integer, non est hujus loci; quaerimus enim aream in integris, quae sit quadratus.

Propositio VI. Omnibus ut supra positis, latus impar circa rectum et dimidium lateris paris non possunt esse simul quadrati.

Constat et dudum ab aliis demonstratum est, latera trianguli rectanguli in numeris integris omnia sic posse exprimi:

$$\underbrace{x^2-y^2 \mid 2xy}_{\text{latera circa rectum}} \quad \mid \quad \underbrace{x^2+y^2}_{\text{hypotenusa}}$$

Ajo x^2-y^2 et xy non posse simul esse quadratos, posito triangulum de quo agitur esse primitivum. Nam si xy est quadratus, tunc per prop. 4. vel x et y habebunt communem mensuram, vel tam x quam y erit quadratus. Prius fieri hic non potest, alioqui et omnia trianguli latera habebunt communem mensuram, quod est contra naturam trianguli primigenii. Restat ergo posterius, ut tam x quam y sint quadrati. Eodem modo si x^2-y^2 (seu $x+y$ in $x-y$) est quadratus, tunc per prop. 4. vel $x+y$ et $x-y$ habent communem mensuram, vel sunt quadrati ambo. Prius fieri non potest, nam si $x+y$ et $x-y$ essent commensurabiles, nullam possent etiam habere communem mensuram quam binarium, nisi x et y etiam commensurabiles velimus, quod paulo ante explosimus. Sed nec binarium habent pro communi mensura, alioqui essent pares, ergo et factum ex ipsis x^2-y^2 esset par, cum tamen sit impar per prop. 5, quippe cum alterum latus circa rectum $2xy$ sit par. Restat ergo posterius, ut tam $x+y$ quam $x-y$ sint ambo quadrati. Cumque supra ostenderimus, in praesenti hypothesi etiam x et y esse ambos quadratos, habebimus quatuor quadratos y, $x-y$, x, $x+y$, sed hoc quoque impossibile est, quia ita tres haberentur quadrati progressionis arithmeticae, $x-y$, x, $x+y$, differentiam habentes quadratum, quod est absurdum. Ergo impossibile est, latus impar et dimidium lateris paris simul esse quadratos.

Propositio VII. Iisdem positis, iidem non possunt esse aequales.

Sint xy et x^2-y^2 aequales, si fieri potest; ergo y^2+xy aequ. x^2, ergo $y+x$ in y erit quadratus; et x^2-xy aequ. y^2, ergo $x-y$ in x erit quadratus. Ergo duo numeri $x+y$ et y (item $x-y$ et x) per prop. 4. vel erunt aequales, quod esse non potest, vel commensurabiles, quo facto et x et y erunt commensurabiles contra ostensa in demonstratione propositionis praecedentis; vel erunt simul quadrati, sed illic duos $x+y$ et y itemque hic duos $x-y$ et x, et in summa hos quatuor simul esse quadratos impossibile est, alioqui quatuor y, $x-y$, x, $x+y$ simul essent quadrati. Ergo impossibile est. xy et x^2-y^2 hoc loco esse aequales.

Propositio VIII. Area Trianguli Rectanguli primitivi in numeris integris quadratus esse non potest.

In Triangulo rectangulo primitivo, quale dixi, duo latera circa rectum nullam habent communem mensuram (quia per prop. 3. tunc etiam tertium haberet communem mensuram, atque ita non foret triangulum primitivum). Ergo etiam latus unum et alterius dimidium multo magis nullam communem mensuram habebunt (nam si dimidium latus A dividi potest per divisorem seu mensuram lateris B, multo magis ipsum latus A per eum dividi poterit). Jam ex latere uno circa rectum in alterius dimidium ducto fit area Trianguli, ergo area trianguli fit ex duobus numeris, nullam mensuram communem habentibus. Duo autem isti numeri non sunt aequales per prop. 7. nec ambo quadrati per prop. 6, ergo factus ex ipsis non est quadratus per prop. 4; sed factus ex ipsis est area trianguli, ergo ea non est quadratus. Q. E. D.

Propositio IX. Nullius omnino Trianguli rectanguli in numeris integris vel fractis area quadratus esse potest.

Non in integris primitivis per prop. 9; ergo nec in aliis integris vel fractis per prop. 2. Q. E. D.

Corollaria.

Primo. Cubus latere multatus non aequatur quadrato.

Nam x^3y-xy^3 seu area Trianguli Rectanguli in numeris non aequatur quadrato per prop. 9, sed si y aequalis unitati, erit area cubus latere multatus.

Secundo. Tres numeri continui in se invicem ducti non producunt quadratum.

Nam $x-1$, x, $x+1$ producunt x^3-x, qui per coroll: prim. non est quadratus.

Tertio. Differentia duorum quadrato-quadratorum non potest esse quadratus.

Alioqui enim aliquando x^2-y^2 et xy in se invicem possent facere quadratum, posito scilicet tam x quam y esse quadratos, tunc enim xy foret quadratus, ergo si x^2-y^2 etiam quadratus, productum quoque ex xy in x^2-y^2 foret quadratus, quod fieri non potest, quia hoc productum trianguli rectanguli area est. Jam si x et y sunt numeri quadrati, verbi gratia x aequ. ν^2 et y aequ. ω^2, fiet loco $x^2 - y^2$ quantitas $\nu^4 - \omega^4$, quae proinde quadrato aequari non potest.

Quarto. Differentia duarum fractionum sibi ipsis reciprocarum, seu differentia duorum numerorum qui in se invicem ducti faciunt unitatem, non est quadratus.

Nam $x^3y - xy^3$ aequ. $x^2y^2z^2$ est aequatio impossibilis, quia area trianguli aequaret quadrato. Ergo aequatio $x^2 - y^2$ aequ. xyz^2 seu $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ aequ. z^2 est etiam impossibilis*).

XII.

MEDITATIO JURIDICO-MATHEMATICA DE INTERUSURIO SIMPLICE.

Interusurium sive resegmentum anticipationis, vulgo Germ. Rabat, est differentia inter pecuniam in diem certum debitam et praesentem ejus valorem, seu quanto plus petat, qui plus tempore petit, vel quanto minus solvere aequum sit eum, qui post aliquot annos demum debiturus nunc solvit. Hujus quantitas, quae apud Jurisconsultos passim non satis, et apud aliquos non satis recte explicatur, accurato calculo definire potest, duabus suppositionibus ex jure assumtis. Nimirum

I. SUPPOSITIO PRIMA est, quod is, a quo pecunia ante tempus, quo deberi incipit, petitur, vicissim petere potest, ut sibi eo nomine, quovis anno

---

*) Am Rande des Manuscripts hat Leibniz bemerkt: $x^3y - xy^3$ aequ. y^2z^2 impossibilis, ergo x^3 aequ. $xy^2 + yz^2$ impossibilis in numeris, ergo aequatio cubica $x^3 - y^2x$ aequ. yz^2 est indeprimibilis. Ecce usum harum numericarum contemplationum in reducendis aequationibus.

futuro medii temporis, praestetur legitima usura. Exempli causa: post decem annos proximos finitos mihi centum debebis (de quibus interim nullas debes usuras, alioqui sortem jam nunc deberes); ego, qui forte negotium aliquod utile, sed paratae pecuniae indigum gesturus sum, peto et a te obtineo, ut nunc solvas; tu vicissim petere potes, ut eo nomine tibi quovis anno totius decennii proximi finito solvam quinque: nec refert, utrum pecunia, quae ante tempus solvitur, sors sit an usura. Omnis enim usura soluta fit sors; imo cum usurarum petitio per se odiosa sit, magis odiosa erit usurarum petitio ante tempus, et qui nihil eo nomine praestare volet, incidet in quandam usurariam pravitatem: revera enim plus usurae nomine exiget, quam legibus permissum est, quia tempore quoque plus petitur. Itaque usurae exactae ob usuras ante tempus praestitas, quae sortis naturam induere, non nisi vocabulum commune habent cum usuris usurarum non solutarum, quae legibus prohibentur, et tantum abest negotium in vetitum Anatocismum incidere, ut secus fieri regulariter in leges peccatum videatur; regulariter, inquam, nam exceptiones ex natura negotii personarumque sumi possunt (de quibus alias), quae judicis arbitrio permittuntur. Nobis autem in calculo ineundo inspiciendum videtur, quod regulare exactumque est.

II. SUPPOSITIO SECUNDA est ex jure notissimo petita, quod compensatio est quaedam solutio, et qui a pecunia, quam accipit, summam certam sibi detrahi patitur, eam ipsam summam eo ipso tempore solvisse censetur.

III. His adjungo POSTULATUM, quod creditor ac debitor in diem futurum certum de pecuncia nondum caedua nunc statim inter se contrahere possint velintque, ita ut totum negotium simul ac semel inter ipsos (et quidem sine alterutrius laesione) finiatur. Itaque creditor, qui centum post decennium debita nunc anticipat, eoque nomine quovis anno decennii proxime futuri deberet quinque solvere, ut ea molestia se debitoremque liberet totumque negotium finiat, potest pati, ut sibi nunc statim de ipsis centum detrahatur aliquid usurarum futurarum nomine, et quidem non integra 50 seu decies quinque, nondum enim caedua sunt seu nondum dies eorum venit, sed paulo minus aliquid. Proinde minus quam centum accipiet, et quod detrahi sibi patitur, ipsissimum est interusurium nunc determinandum.

IV. Ex his jam ducetur CONCLUSIO PRIMA: Si usura legitima sit vicesima sortis, valor praesens unitatis post annum debitae erit: $\frac{1}{1} - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} + \frac{1}{3200000}$ etc. in infinitum, sive generalius, loco 20 assumendo numerum quemcunque ν, qui quotam usurariam exprimat, $\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^3} + \frac{1}{\nu^4} - \frac{1}{\nu^5}$ etc. Demonstratio simul et explicatio: Statim post annum finitum mihi debebis unitatem seu 1) (ex facto), unum verbi gratia aureum, aut unam decadem aureorum, vel unum centenarium etc. Hanc unitatem sive sortem, si mihi nunc solvas, ejus nomine tibi usuram post annum finitum debebo, nempe vicesimam unitatis seu $\frac{1}{20}$ (per suppositionem artic. 1); quoniam vero placuit, ut negotium inter nos nunc statim finiatur (per postulatum artic. 3), ideo tu vicissim postulas, ut ego tibi hanc summam $\frac{1}{20}$ nunc solvam anticipando. Solutio autem haec fieri potest per compensationem, si tantundem mihi detrahi patiar de summa, quam a te accipere debeo (per supposit. artic. 2), accipio ergo 1 minus $\frac{1}{20}$ seu $1 - \frac{1}{20}$. Sed quia ita ut quoque summam $\frac{1}{20}$ post annum demum caeduam nunc accepisti, eo nomine et tu mihi post annum finitum debebis usuram (per artic. 1), nempe vicesimam de $\frac{1}{20}$, hoc est $\frac{1}{400}$. Et cum negotium statim inter nos sit finiendum (per artic. 3), ea mihi nunc statim dabis praeter summam praecedentem, quae erat $1 - \frac{1}{20}$; dabis ergo mihi nunc $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400}$. Verum ita mihi quoque istam summam $\frac{1}{400}$ post annum demum caeduam nunc statim anticipando dedisti, itaque eo nomine vicissim tibi post annum finitum debebo usuram (per artic. 1), nempe vicesimam de $\frac{1}{400}$, hoc est $\frac{1}{8000}$; et cum negotium statim inter nos sit finiendum (artic. 3), hanc usuram anticipando statim nunc tibi salvam, salva rursus anticipationis consideratione. Solvere autem potero per compensationem (artic. 2) seu statim $\frac{1}{8000}$ a te detrahi patiar de summa praecedente, quam mihi solvere debes, quae erat $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400}$, itaque solves mihi $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000}$. Et sic in infinitum calculum continuatum fingendo semperque anticipando (ut negotium statim finiatur) nulliusque anticipationis resegmentum negligendo (ut neuter laedatur), patet te mihi solvere nunc debere summam seriei infinitae praedictae, cujus termini sunt progressionis Geometricae subvigecuplae, semper enim sequens est vigesima pars proxime antecedentis. Signa autem $+$ et $-$ alternantur.

V. LEMMA ex calculo infinitorum: Fractio $\frac{\nu}{\nu+1}$ est aequalis toti seriei infinitae $\frac{1}{1}-\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{\nu^3}+\frac{1}{\nu^4}-\frac{1}{\nu^5}$ etc. Demonstratio simul et explicatio: Posito ν esse 20, ostendendum est fractionem $\frac{20}{21}$ idem esse quod infinita series $\frac{1}{1}-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}-\frac{1}{3200000}$ etc. Nimirum fractio $\frac{20}{21}$ multiplicata per 21 dat 20, ut patet; et series ista infinita, multiplicata per 21 dat etiam 20, ut mox ostendetur. Jam quorum aequi-multipla sunt aequalia, ea ipsamet sunt aequalia; aequatur ergo fractio et series. Superest tantum ut ostendatur, seriem multiplicatam per 21 seu per $20+1$ dare 20. Operatio ita stabit:

Multiplicetur per	$+1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}-\frac{1}{3200000}$ etc. 20
fiet ☉	$20-1+\frac{1}{20}-\frac{1}{400}+\frac{1}{8000}-\frac{1}{160000}$ etc.
Multiplicetur per	$+1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}$ etc. 1
fiet ☽	$+1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}$ etc.
Ergo ☉ + ☽ aequalia 20	* * * *

VI. CONCLUSIO SECUNDA: Valor praesens unitatis seu sortis post annum debitae est $\frac{\nu}{\nu+1}$, posito ν esse numerum, quotam usurariam exprimentem, seu si ν sit 20, hoc est si usurae sint quincunces sive vigesima sortis, erit $\frac{20}{21}$ seu subsesquivigecupla sortis sive $\frac{100}{105}$ de sorte. Nam valor ille praesens est $1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}$ etc. (per artic. 4), id est (per artic. 5) $\frac{20}{21}$ seu $\frac{100}{105}$, quod probandum erat. Si vero usurae essent 6 in 100, tunc numerus valeret $\frac{100}{6}$ seu $\frac{50}{3}$, et valor praesens sortis foret $\frac{100}{106}$ seu $\frac{50}{53}$ de sorte. Eadem conclusio adhuc alia ratione inveniri et demonstrari potest sine serie infinitorum hoc modo: Post annum debebis mihi summam S; quaeritur quantum mihi solvi aequum sit nunc, ut res eodem recidat. Ponamus te mihi solvere nunc debere Y; itaque debet summa Y esse talis, ut anno finito usura cum sorte aequetur ei, quod mihi debes. Nam dedisti mihi Y nunc indebita, ergo debeo tibi X, et anno finito debebo tibi Y una cum vicesima ipsius Y seu $Y+\frac{1}{20}Y$, quae si aequentur ipsi S summae, quam post annum mihi debes, compensatione facta, debitum tunc ipso jure mutuo tolletur per artic. 2, et negotium initum inter nos finitum intelligi potest, quod desideratur artic. 3. Quoniam ergo $Y+\frac{1}{20}Y=S$, erit $Y=\frac{S}{1+\frac{1}{20}}$ seu erit $Y=\frac{20}{21}$ de S, ut supra. Nam si $\frac{20}{21}$ nunc indebite solvas, post annum inde usuras debebo $\frac{1}{21}$; ergo post annum in summa tibi debebo $\frac{20}{21}+\frac{1}{21}$ seu $\frac{21}{21}$ sive 1. Sed post annum tu quoque mihi debebis 1, unitatem nempe sive sortem; ergo compensatione facta apparet, si pro 1 tunc debendis nunc solvas $\frac{20}{21}$, neutrum alteri quicquam amplius debiturum. Licet autem haec via in hoc casu sit facilior priore, tamen priorem magni momenti esse judico, quia exemplum praebet Analyseos memorabilis, ab Algebra in eo diversae, quod Algebra, ut in posteriore via patet, assumit quantitatem incognitam tanquam cognitam, et inde regrediens eamque cum cognitis aequans, valorem ejus quaerit, prior vero Analysis per meras cognitas procedens valorem incognitum directe obtinet. Quod magnum usum habet, quando impossibile est obtineri valorem incognitae rationalem per Algebram, tunc enim ea nihilominus hac via obtineri potest per seriem infinitam.

VII. CONCLUSIO TERTIA. Iisdem positis valor praesens unitatis seu sortis post biennium debitae est $\frac{1}{1}-\frac{2}{\nu}+\frac{3}{\nu^2}-\frac{4}{\nu^3}+\frac{5}{\nu^4}-\frac{6}{\nu^6}$ etc. Demonstratio. Debebis mihi 1 biennio abhinc: quod si mihi nunc solvas 1 anticipando, inde tibi debebo usurae nomine post annum $\frac{1}{20}$, post biennium rursus $\frac{1}{20}$ in summa $\frac{2}{20}$; quae si statim mihi detrahas per artic. 1, dabis mihi tantum $1-\frac{2}{20}$. Sed quia hoc modo tu quoque priora $\frac{1}{20}$ uno anno, nempe primo, et posteriora $\frac{1}{20}$ duobus, nempe primo et secundo anticipasti; ideo usuram mihi post annum primum tam ob priora, quam ob posteriora $\frac{1}{20}$ primo anno anticipata debebis, nempe bis $\frac{1}{400}$ seu $\frac{2}{400}$, et post annum secundum ob posteriora $\frac{1}{20}$ secundo anno anticipata debebis mihi $\frac{1}{400}$; ergo summa $\frac{3}{400}$, quae si rursus anticipando mihi solvas, dabis mihi $\frac{1}{1}-\frac{2}{20}+\frac{3}{400}$. Sed jam ita ego rursus priora $\frac{1}{400}$ anticipavi anno primo, posteriora vero $\frac{1}{400}$ anno primo et secundo: unde usuram tibi debebo, quae anno primo finito de prioribus $\frac{2}{400}$ erit $\frac{2}{8000}$, de posterioribus $\frac{1}{400}$ erit $\frac{1}{8000}$, summa $\frac{3}{8000}$; anno secundo vero de posterioribus $\frac{1}{400}$ usura erit $\frac{1}{8000}$, et summa usurarum anni primi et secundi $\frac{4}{8000}$, quam si rursus anticipando mihi detrahi patiar, dabis mihi tantum $1 - \frac{2}{20} + \frac{3}{400} - \frac{4}{8000}$. Sed jam ita tu priora $\frac{3}{8000}$ rursus anticipasti anno primo, posteriora $\frac{1}{8000}$ anno primo et secundo, unde usuram mihi debebis, quae anno primo de prioribus $\frac{3}{8000}$ est $\frac{3}{160000}$, de posterioribus $\frac{1}{8000}$ est $\frac{1}{160000}$, summa $\frac{4}{160000}$; anno secundo de posterioribus $\frac{1}{8000}$ est rursus $\frac{1}{160000}$, summaque usurarum anni primi et secundi $\frac{5}{160000}$, quam si mihi statim solvas anticipando (salvo in continuatione calculi anticipationis resegmento) dabis mihi $1 - \frac{2}{20} + \frac{3}{400} - \frac{4}{8000} + \frac{5}{160000}$. Et ita calculum in infinitum continuatum fingendo, prodibit series infinita, quam posuimus.

VIII. CONCLUSIO QUARTA. Pro triennio iisdem manentibus Nominatoribus et signis, Numeratores erunt numeri triangulares, pro quadriennio Pyramidales, pro quinquennio triangulo-triangulares, et ita porro pro pluribus annis altiores numeri, quos figuratos vocant, ego ob usum combinatorios appellare soleo, in infinitum. Hoc cum ad eundem modum ostendi possit, quo praecedentem conclusionem demonstravimus, prolixe hic deducere supersedeo. Numeri ipsi tales sunt:

Numeri figurati seu Combinatorii	Valor praesens sortis debitae	post ann.
Unit. 1. 1. 1. 1. 1.	$\frac{1}{1} - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000}$ etc. $= \frac{20}{21}$	1
Natural. 1. 2. 3. 4. 5	$\frac{1}{1} - \frac{2}{20} + \frac{3}{400} - \frac{4}{8000} + \frac{5}{160000}$ etc. $= \frac{400}{441}$	2
Triang. 1. 3. 6. 10. 15.	$\frac{1}{1} - \frac{3}{20} + \frac{6}{400} - \frac{10}{8000} + \frac{15}{160000}$ etc. $= \frac{8000}{9261}$	3
Pyram. 1. 4. 10. 20. 35.	$\frac{1}{1} - \frac{4}{20} + \frac{10}{400} - \frac{20}{8000} + \frac{35}{160000}$ etc. $= \frac{160000}{194481}$	4
Triang.-Triang. 1. 5. 15. 35. 70.	$\frac{1}{1} - \frac{5}{20} + \frac{15}{400} - \frac{35}{8000} + \frac{70}{160000}$ etc. $= \frac{3200000}{4084101}$	5
etc.	etc.	etc.

IX. Ad inveniendos adhuc aliter hos valores praesentes assumo LEMMA: Valor praesens valoris futuri est valor praesens ipsius summae. Exempli causa, sub finem anni 1685 seu post biennium debebis mihi aliquam summam; vellem nosse quis nunc sub finem anni 1683 ejus summae sit valor praesens. Itaque primum quaero, quis summae post biennium seu sub finem anni 1685 caeduae futurus sit valor post annum seu sub finem anni 1684; is utique erit $\frac{20}{21}$ de summa (per artic. 6), quia unus tantum annus intercedit. Itaque si post biennium mihi debeas unitatem, perinde est quantum ad hunc calculum ac si post annum mihi debeas $\frac{20}{21}$. Sed rursus, si post annum mihi debes $\frac{20}{21}$, perinde est (iterum per artic. 6) ac si mihi deberes nunc $\frac{20}{21}$ de illa summa $\frac{20}{21}$, hoc est $\frac{400}{441}$. Itaque si post biennium mihi debes aliquid, valor praesens erit $\frac{400}{441}$ de illo, seu quadratum numeri $\frac{20}{21}$ acceptum de illa summa tanquam unitate. Et eodem modo apparebit, valorem praesentem unitatis post triennium debitae esse $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ seu cubum numeri $\frac{20}{21}$, id est $\frac{8000}{9261}$. Et ita porro. Atque hoc Lemma nihil aliud est, quam subsumtio illius axiomatis notissimi, quod aequalia uni tertio sunt aequalia inter se; nam $\frac{400}{441}$ nunc aequantur ipsis $\frac{20}{21}$ caeduis post annum, et haec aequantur unitati caeduae post biennium. Ergo et haec unitas aequatur ipsis $\frac{400}{441}$ caeduis nunc. Inde jam patet

X. CONCLUSIO QUINTA. Si numerus quotae usurariae sit ν (id est 20, positis usuris quincuncibus seu vigesima sortis), erit valor praesens summae post aliquot annos caeduae, ad ipsam summam, in ratione ν ad $\nu+1$ (id est subsesquivigecupla seu 20 ad 21) replicata secundum numerum annorum. Hoc est, summae caeduae post annum unum valor praesens erit simpliciter $\frac{20}{21}$ de summa, seu erit ad summam in ratione 20 ad 21. At valor praesens summae caeduae post duos annos erit $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ seu $\frac{400}{441}$ summae, seu erit ad summam in ratione duplicata 20 ad 21 seu ut 400 (quadratum de 20) ad 441 (quadratum de 21). Et valor praesens summae caeduae post triennium erit $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ summae, seu $\frac{8000}{9261}$ summae, seu erit ad summam in ratione triplicata 20 ad 21, seu ut tertia dignitas sive cubus de 20 ad cubum de 21; et ita porro. Idque generaliter exprimendo, sit praesens valor Z, summa debita S, numerus annorum a, et quotae usurariae numerus ν; quibus positis, erit Z=S multiplic. per $\boxed{a}\,\frac{\nu}{\nu+1}$. Sit ν, 20 et S unitas, erit unitatis caeduae post annos

duae post annos	unum,	duos,	tres,	quatuor,	quinque	etc.
valor praesens	$\frac{20}{21}$	$\frac{400}{441}$	$\frac{8000}{9261}$	$\frac{160000}{194481}$	$\frac{3200000}{4084101}$	etc.
id est	latus	quadratum	cubus	biquadratum	surdesolidum	etc.

qui numeri vel multiplicando, vel tantum eorum logarithmos addendo, continuari poterunt ad quotlibet annos, utileque erit fractiones decimaliter enuntiari. De usu horum in quibusdam juris quaestionibus apud egregios autores non satis recte definitis, aestimandisque reditibus ad vitam (ubi interusurio composito locus est) alio schediasmate disseremus.

Caeterum ut meditationis hujus usus sit in promptu, operae pretium, ipso praesertim Nobilissimo Autore invitante, facturos nos rati sumus, constructa Tabella, in qua (posita sorte 100000, et usura vicenaria), quantum pro quoque annorum (ad quadraginta usque) numero, deducto legitimo interusurio relinquatur, sive quanti sors anticipato aestimanda veniat, exponeretur; unde porro, beneficio regulae proportionis, quamcunque sortem datam, ad quantamcunque anticipationem aestimare planum foret, cum alias calculus futurus esset longe impeditissimus, iis saltem, qui Logarithmorum destituuntur praesidio.

Tabula sortium anticipato accipiendarum, posito debito 100000.

Ann.	Sors anticip.	Ann.	Sors anticip.
1	0. 95238	11	0. 58468
2	0. 90703	12	0. 55684
3	0. 86384	13	0. 53032
4	0. 82270	14	0. 50507
5	0. 78353	15	0. 48102
6	0. 74622	16	0. 45811
7	0. 71068	17	0. 43630
8	0. 67684	18	0. 41552
9	0. 64461	19	0. 39573
10	0. 61391	20	0. 37689
Ann.	Sors anticip.	Ann.	Sors anticip.
21	0. 35894	31	0. 22036
22	0. 34185	32	0. 20987
23	0. 32557	33	0. 19987
24	0. 31007	34	0. 19035
25	0. 29530	35	0. 18129
26	0. 28124	36	0. 17265
27	0. 26785	37	0. 16444
28	0. 25509	38	0. 15661
29	0. 24294	39	0. 14915
30	0. 23138	40	0. 14205

XIII.

DE REDITIBUS AD VITAM.

Do tibi centum, ut quinque annua recipiam. Victurus sum adhuc triginta annos, quibus ego communi jure usuras perciperem ipse, sequentibus autem temporibus heredes mei. Volo autem ego frui anticipando etiam illis reditibus qui ad heredes meos essent perventuri, libensque patiar r e s e g m e n t u m, quod vulgo vocant rabat. Hoc in eo consistit, ut quantitas ejus, quod interest ab ea summa, quam justo maturius accipio, resecetur. Exempli gratia, si mihi debeas quinque post annos triginta eaque jam nunc desiderem, perinde est ac si mihi quinque nunc mutuo des in annos triginta, finitis illis reddenda. Unde singulis annis unam quartam partem nummi tibi debebo, si vicesimae usurae sint sive quinque in centum. Sed cum parum rationi consentaneum videatur, omnes reditus totius meae posteritatis in infinitum me anticipando percipere velle, cum raro nomina ob revolutiones rerum humanarum ultra aliquot saecula durent; hinc satis superque sufficiet, si trecentorum annorum reditus ego his triginta annis percipiam, quanquam mihi calculus ostenderit, parum interesse trecentorum tantum annorum, an vero totius aeternitatis futurae reditus anticipare quis velit, quod paradoxum quidem est, verissimum tamen. Cum autem velim aequalem quantitatem percipere in singulos annos, hinc trecenti isti anni in hos triginta reliquae meae vitae sic partiendi sunt, ut pro quolibet anno vitae sit aequalis anticipatio. Itaque necesse est nos partiri trecentos annos in triginta partes. Erit una quaeque decem annorum, sive habebimus triginta denarios annorum, et quolibet anno vitae meae decem annorum reditus percipiam, ita tamen, ut hi decem anni, quos primo anno percipio, aeque distent a primo anno ac sequentes decem anni a sequenti anno. Quare sequitur istos decem annos non esse sumendos continuos, sed triginta annorum intervallo discretos; nempe primo anno percipiam usuras primi primorum triginta annorum seu anni primi et primi secundorum triginta annorum seu anni trigesimi primi et primi tertiorum seu anni sexagesimi primi, et ita porro usque ad primum decimorum seu ultimorum triginta annorum sive usque ad 271^{mum}. Similiter secundo anno omnium (qui numero decem sunt) secundorum annorum usuras percipiam, et tertio omnium tertiorum cujusque tricenarii, ac denique ultimo sive trigesimo anno meae vitae percipiam usuras omnium postremorum seu trigesimorum annorum cujusque ex decem tricenariis.

Sufficit ergo ut constituamus, quid mihi primo anno debeatur; et sane si nullum esset resegmentum, primo anno plenae decem annorum usurae, id est a centum nummis in singulos quinque, adeoque primo statim anno quinquaginta nummi deberentur. Sed cum id manifeste iniquum sit, sequitur resegmentum esse adhibendum, et quidem tanto majus, quanto major est anticipatio; itaque ex decem annis, quorum usuras statim simul percipio, primus quidem est ipse annus primus primorum triginta annorum, itaque ratione ipsius nulla est anticipatio, sed usurae primi anni sequentium triginta annorum seu anni trigesimi primi triginta annis anticipantur, et usurae primi anni ex tertio tricenario anticipantur annis sexaginta, et ita porro. Itaque decem annorum qui simul percipiuntur, haec anticipatio est:

	anni 1mi	2di	3tii	4ti	5ti	6ti	7mi	8vi	9ni	10mi
anticipatio est annorum	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

primos quinque aureos sub finem primi anni integros accipio quippe jam debitos, de secundis anno 31mo demum debitis in annos triginta usuras vicesimas solvere debeo, de tertiis anno 61mo demum debitis in annos sexaginta, et ita porro, de ultimis anno 271mo debitis in annos 270. Sed cum neque ego tamdiu victurus sim, neque cum posteritate mea ullum de ea re negotium esse velimus, ideo has usuras vicesimas nummorum justo maturius solutorum ego vivus solvam aut quod eodem redit compensando detrahi mihi patiar. Verum si successu temporis eas solvere volo, ut solent usurae annuatim persolvi, utique mihi plus sequentibus quam primis annis vitae meae sive solvendum, sive quod eodem redit, eo nomine detrahendum erit. Nam tertio anno finito usuras persolvere debebo a nummis tum primo anno tum etiam secundo justo maturius acceptis, idemque multo magis in annis sequentibus continget; quod quidem incrementum quale esset futurum, et quomodo ego vivus solvere usuras anticipationis etiam annorum diu postventurorum deberem, peculiari calculo non indignum esset. Verum id nunc a nobis rejicitur; nam hoc modo minus esset resegmentum anni primi quam secundi, et secundi quam tertii, quod est contra propositum, volumus enim usuras ad vitam in singulos annos esse aequales. Itaque necesse est, ut ego primo statim anno solvam sive detrahi mihi patiar omnes usuras ob anticipationem hoc anno peractam debitas, alioqui sequentibus annis solvendas. Sed hoc modo, ut ego tibi usuras anticipationis solvo, ita tu mihi etiam usuras anticipationis debebis ob ipsas usuras prioris anticipationis anticipatas. Quin imo quaelibet anticipatio novam pariet anticipationem, dabiturque resegmentum resegmenti semper replicatum; quae omnia uno calculo complectenda sunt, si primi anni usuram justam post omnia resegmenta constituere velimus.

Primum itaque anno primo post contractum percipio quinque nummos ob primum hunc annum (qui etiam primus est primi trecenarii) elapsum, idque sine resegmento; deinde simul percipere volo usuras anni primi de secundo tricenario seu trigesimi primi, qui tunc quidem futuri essent nummi quinque, nunc autem detrahendum est resegmentum, ob usuram, quae ab his quinque nummis in triginta annos a me debetur et nunc per anticipationem solvenda est. Jam secundo anno elapso ob hos quinque nummos anticipatos deberem tibi $\frac{5}{20}$, quos si jam nunc solvam elapso statim primo anno, et ita tu hanc summam $\frac{5}{20}$ uno anno anticipes, hinc anno secundo elapso mihi debebis partem eorum vigesimam seu $\frac{5}{20^2}$ nomine usurae. Quod cum ego iterum statim anticipem, debebo rursus tibi inde $\frac{5}{20^3}$, et ita porro in infinitum. Itaque summa omnium resegmentorum ratione usurae primi anni de quinque nummis anticipatis debitae sic ineunda erit, ut mihi ob quinque nummos triginta annis justo maturius acceptos, ratione usurae primi anni de his quinque nummis debitae, detrahenda sint: $\frac{5}{20} - \frac{5}{20^2} + \frac{5}{20^3} - \frac{5}{20^4}$ etc. in infinitum, id est $\frac{5{,}20}{20+20^2}$ aequ. $\frac{5}{1+20}$. Porro tertio anno elapso, ob quinque nummos anticipatos deberem etiam $\frac{1}{4}$ seu $\frac{5}{20}$. Quos si sub finem secundi solvere debeam, ob unius anni anticipationem debebo tantum (prorsus ut in praecedenti) $\frac{5}{20} \frown \frac{20}{1+20}$ seu $\frac{5}{1+20}$. Sed cum hos $\frac{5}{20} \frown \frac{20}{1+20}$

rursus uno anno anticipem, quia sub finem primi anni solvere debeo, hinc solvam tantum $\left.\frac{20}{1+20}\right\}\boxed{2}, \frac{5}{20}$. Et pro quarto anno $\left.\frac{20}{1+20}\right\}\boxed{3}, \frac{5}{20}$, et ita porro. Et pro trigesimo et uno denique anno qui est primus secundi tricenarii debebo solvere $\frac{5}{20}, \boxed{30}\left\{\frac{20}{1+20}\right.$. Summa autem omnium horum numerorum, nempe $\frac{20}{1+20} +$ $\boxed{2}\frac{20}{1+20} + \boxed{3}\frac{20}{1+20}$ etc. usque ad $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$ multiplicata per $\frac{5}{20}$, sic inibitur. In serie progressionis geometricae est summa maxima a ad terminum maximum l, ut terminus maximum l ad differentiam maximam r, seu a aequ. $\frac{ll}{r}$. Est autem hic l aequ. $\frac{20}{1+20}$ et r aequ. $\frac{20}{1+20} - \boxed{2}\frac{20}{1+20}$ aequ. $\frac{20}{\boxed{2}\,1+20}$. Ergo a aequ. $\boxed{2}\frac{20}{1+20} \smile \frac{20}{\boxed{2}\,1+20}$ sive a aequ. 20. Et quoniam a ad b ut l ad m, erit b aequ. $\frac{20\,.\,20}{1+20}$. Et autem f ad p ut b ad l, ergo f aequ. p $\frac{b}{l}$, et p ultimus terminus aequ. $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$. Ergo f aequ. $\boxed{30}\frac{20}{1+20} \frown \frac{20\,.\,20}{\boxed{1}\,1+20} \smile \frac{20}{1+20}$. Ergo f aequ. 20, $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$. Jam summa omnium terminorum l, m, n etc. usque ad p aequ. a—f. Ergo summa omnium Numerorum $\frac{1}{1+20} + \boxed{2}\frac{1}{1+20}$ etc. usque ad $\boxed{30}\frac{1}{1+20}$ erit aequ. 20—20., $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$, qui numerus multiplicatus per $\frac{5}{20}$ dabit summam resegmentorum omnium ob quinque nummos tringinta annis anticipatis adhibendorum, sive resegmentum integrum a quinque nummis primo secundi tricenarii anno elapso demum debitis, et jam elapso primo primi tricenarii persolvendis detrahendum, seu 5—5, $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$. Hoc autem si detrahas a 5, restat 5, $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$, usura primorum annorum cujusque tricenarii primo primi tricenarii accipienda. Idem brevius concludere potuissemus. Nam si quinque post triginta annos solvenda sint, quaeraturque quantum nunc solvendum, ajo nunc solvendum esse y, quantitatem quae usuris in sortem computatis post 30 annos exhibeat 5, id est fiet y, $\boxed{30}\,\frac{1+20}{20}$ aequ. 5, sive y aequ. 5, $\boxed{30}\,\frac{20}{1+20}$. Eodem modo pro quinque nummis in sexaginta annos anticipatis nunc solvendum 5, $\boxed{60}\,\frac{20}{1+20}$. Et ita porro usque ad 5, $\boxed{270}\,\frac{20}{1+20}$, quorum decem terminorum ineunda est summa. Sit series progressionis geometricae $1+x+xx$ etc. $+x^9$, ejus summa est $\frac{1}{1-x}-\frac{x^{10}}{1-x}$ seu $\frac{1-x^{10}}{1-x}$. Ergo summa erit

$$5,\ \boxed{30}\,\frac{20}{1+20}\ \text{in}\ \frac{1-\boxed{300}\,\frac{20}{1+20}}{1-\boxed{30}\,\frac{20}{1+20}}.$$

Est autem $\boxed{30}\,\frac{20}{1+20}$ circiter 0.231 seu paulo minus quarta parte unitatis; at $\boxed{300}\,\frac{20}{1+20}$ est circiter $\frac{2037}{4632000000}$ adeoque pro nihilo computari potest, perinde ac si quis reditus suae posteritatis in infinitum anticipare vellet; adeoque fiet summa quaesita $5 \frown 0.231 \frown \frac{1}{1-0.231}$ sive circiter 1.501 seu etiam $\frac{5}{3}$. Qui numerus $\frac{5}{3}$ si addatur numero 5 aureorum, qui a primo anno sine resegmento accipiuntur, habebimus $5+\frac{5}{3}$ seu $6+\frac{2}{3}$ nummos pro reditu ad vitam ex centum nummis, si fingamus creditorem adhuc 30 annis a contractu victurum et posteritatis suae reditus anticipare velle, usuram autem communem vicesimam esse; quodsi minus diu victurus ponatur, patet ei plus deberi.

XIV.

DE RESOLUTIONIBUS AEQUATIONUM CUBICARUM TRIRADICALIUM, DE RADICIBUS REALIBUS, QUAE INTERVENTU IMAGINARIARUM EXPRIMUNTUR, DEQUE SEXTA QUADAM OPERATIONE ARITHMETICA.

Tametsi pro insigni admodum invento haberi non possit, ostendere hominibus, quae longe quaerunt, jam tum in eorum potestate esse, utile est tamen, tum ut sciant uti suis possessionibus, tum ut frustraneo labore absistant. Idque in Aequationum Cubicarum Triradicalium resolutione faciam, ubi primum earum naturam paucis explicüero.

Sciendum est scilicet aequationem omnem aut possibiles habere radices omnes, aut impossibiles omnes, aut quasdam possibiles, alias impossibiles. Impossibiles autem radices cum Analytice exprimuntur, imaginarias appellamus. Omnis aequatio simplex sive primi gradus (loquor autem non nisi de aequationibus rationalibus, in quibus scilicet enuntiandis nulla irrationalis adhibetur) ut $x - d \sqcap 0$ vel $x + d \sqcap 0$ est realis. Aequatio quadratica duas habet radices, easque aut reales ambas, aut imaginarias ambas. Ut si sit aequatio $x^2 - bx + c^2 \sqcap 0$, erunt radices duae $x \sqcap + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$ et $x \sqcap \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$, ubi quantitas $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$ erit realis, si $\frac{b}{2}$ major quam c, at imaginaria, si minor, eoque casu aequatio proposita erit impossibilis. Unde patet vera origo aequationum impossibilium, et radicum imaginariarum, quod scilicet ex quantitate negativa radix quadratica extrahi non potest, neque analytice neque geometrice, ut si sit $b \sqcap 2$ et $c \sqcap 2$, erit $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2} \sqcap \sqrt{-3}$. Quod si jam aequatio simplex ducatur in quadraticam, oritur aequatio cubica, quae habet vel tres radices reales si quadratica est possibilis, vel duas imaginarias unamque tantum realem, si quadratica sit impossibilis. Aequatio quadrato-quadratica possibilis aut duas habet radices reales, aut quatuor, quia ex duabus quadraticis facta intelligi potest. Potest autem semper reduci ad cubicam, quod primus jam superiore seculo invenit Ludovicus Ferrariensis, Cardani et Tartaleae aequalis, et observavi, cum quatuor habet radices reales, tunc reduci ad cubicam triradicalem; cum duas, tunc ad cubicam unius radicis revocari.

Sit jam aequatio cubica: $y^3 * \mp qy - r \sqcap 0$ (omnes enim ad hanc formam revocari possunt), ex regula Scipionis Ferrei a Tartalea et Cardano publicata, radix ejus una eaque semper realis erit:
$$y \sqcap \sqrt[(3)]{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[(3)]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}},$$
ex qua data reliquas duas radices quadratica aequatione investigare facile est, quae possibilis est, si reliquae duae radices sunt reales; impossibilis vero, si sint imaginariae. Dixi autem hanc unam minimum semper realem esse. Ubi vero sese objicit difficultas ingens. Nimirum evenit aliquando ut quantitas $\sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}$ sit impossibilis, tunc scilicet cum signum ambiguum $\mp$ valet $-$ et $\frac{q^3}{27}$ est major quam $\frac{r^2}{4}$, tunc enim quantitas $\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}$ est negativa adeoque quantitas $\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$ imaginaria. Quomodo ergo fieri potest, ut quantitas realis, qualis est radix aequationis propositae, exprimatur interventu imaginariae? Hoc ipsum enim mirum est, talem quantitatum imaginariarum interventum in illis aequationibus cubicis tantum (ut calculus ostendit) observari, quae nullam habent radicem imaginariam, sed omnes reales sive possibiles, idque per trisectionem anguli ab Alberto Girardo aliisque ostensum est. Videatur imprimis Schotenius in appendice Com. ad Geom. Cartes. Haec difficultas omnibus hactenus Algebrae scriptoribus crucem fixit, nec quisquam eorum est, qui non professus sit regulas Cardani in hoc casu exceptionem pati. Primus omnium Raphael Bombelli, cujus Algebram perelegantem Italico sermone jam superiore seculo Bononiae editam vidi, invenit, eas servire posse ad eruendas radices veras rationales sive numeris exprimibiles, quando tales habet aequatio; sed quando radices illae rationales sunt falsae sive negativae, tunc nesciebat ille etiam ex irrationalibus erui posse, adeoque aliam methodum praescripsit e Cardano sumptam, quae tamen reapse ad aequationis divisionem per $y +$ vel $-$ aliquo ultimi termini divisore (ut stylo Cartesii utar) reducitur, etsi alia longe phrasi utatur Cardanus. A me vero deprehensum est, eadem me-

thodo, nonnihil tamen pro re nata immutata, etiam ex irrationalibus Cardanicis erui rationales falsas seu negativas. Quanquam autem haec observavit Bombellus, nondum tamen illud asseruit, nedum demonstravit, ipsas radices Cardanicas irrationales interventu imaginariarum expressas esse quantitates reales ac aequationi resolvendae sufficientes. Quod vero a me liquido evincetur, ut appareat, alias imposterum radices aequationum Cubicarum triradicalium frustra quaeri, et habere nos quicquid in eo genere optari cum ratione potest.

Hoc cum a me aliquot abbinc mensibus inventum esset, nolui tamen explicare, donec alia quaedam memoratu digna in Algebraico negotio deprehenderem, ne inventum parum speciosum sine socio derideretur. Nunc vero cum originem talium regularum intime inspexerim et viam ad altiores aequationes repererim, deprehensa sectione potestatum generali, memorabilium admodum theorematum tabulam non mediocriter utilem complexa, et formulas quarundam aequationum dederim per omnes gradus in infinitum euntes, quaeque per irrationales sui gradus resolvuntur; hoc, inquam, cum praestiterim quicquid illud est circa Aequationum Triradicalium resolutiones, sive inventum a me sive si mavis observatum, protrudere post tot alia non contemnenda specimina non amplius erubesco.

Utile autem erit commemorare, qua via ad rem penitus eruendam excitatus sit animus. Incideram aliquando in duas aequationes ejusmodi: $x^2+y^2 \sqcap b$ et $xy \sqcap c^2$, unde sequebatur $x^2 \sqcap \frac{c^2}{y^2}$, adeoque $\frac{c^2}{y^2}+y^2 \sqcap b$ et $y^4-by^2+c^2 \sqcap 0$, sive $y^2 \sqcap +\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}$ et $y \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$. Ergo pro $x^2+y^2 \sqcap b$, substituto valore ipsius y^2, scribebam $x^2-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2} \sqcap 0$ sive $x \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$. Erat autem c major quam b, adeoque $\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}$ erat quantitas imaginaria. At vero constabat mihi aliunde, saltem summam incognitarum $x+y$ esse quantitatem realem et aequari cuidam lineae d, quod me valde perplexum reddidit, cum enim ex calculo praecedenti deduxissem $d \sqcap x+y \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}+\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$, non capiebam, quomodo ejusmodi quantitas posset esse realis, in quam exprimendam imaginariae sive impossibiles ingrederentur. Relegere ergo calculi vestigia coepi, errorem suspicatus, sed frustra: eadem enim perpetuo prodiere. Tandem venit in mentem, operationem instituere, quam hic subjiciam: $d \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}+\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$ sive $d \sqcap A+B$, ergo quandrando utrobique

$$d^2 \sqcap \overbrace{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}^{+A^2}+\overbrace{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}^{+B^2}+\overbrace{2c}^{+2AB},$$

nam rectangulum AB sive $\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$ in $\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$ facit c, ut calculus ostendet; erit ergo $d^2 \sqcap b+2c$ adeoque $d \sqcap \sqrt{b+2c}$. Aequando ergo inter se duos valores ipsius d, fiet $\sqrt{b+2c} \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}+\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$; unde si in numeris faciamus $b \sqcap 2$ et c etiam $\sqcap 2$, fiet $\sqrt{6} \sqcap \sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$. Qua observatione nullam facile in tota analytica singularem magis et paradoxam a me memini notatam, nam me primum arbitror radices irrationales, in speciem imaginarias, ad reales etiam sine extractione reduxisse. Et notabile est, **sextum nos habituros Operationis sive Arithmeticae sive Analyticae genus**; nam praeter additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem, radicum extractionum habebitur *Reformatio* seu *Reductio* expressionum imaginariarum ad reales. Nimirum additio et subtractio composita reducunt ad simplicia seu partes ad totum, vel contra; multiplicatio causas ad effectum; divisio et extractio contra: divisio fractos ad integros, extractio surdos ad rationales, denique *Reformatio* imaginarios ad reales.

Ad exemplum enim hujus theorematis, sive aequationis inter realem et in speciem imaginariam, alia exempla concinnari possunt infinita, etiam pro altioribus radicum irrationalium gradibus, modo earum exponentes sint progressionis geometricae duplae, ut $\sqrt{(4)}$, $\sqrt{(8)}$, $\sqrt{(16)}$ etc., imo et nonnunquam pro aliis ut $\sqrt{(6)}$, ut multis exemplis ostendere possum. Sed generaliter ejusmodi composita radicum ex binomiis et residuis non nisi tunc cum radicum exponentes sunt progressionis geometricae duplae, reduci possunt analytice. In caeteris vero, ut $y \sqcap \sqrt{(3)\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}+\sqrt{(3)\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$, reductio ejusmodi non admittitur per naturam rerum, quoniam scilicet radices irrationales cubicae non statim tolluntur cubando, ut quadraticae quadrando. Sit enim $y^3 \sqcap A^3 + B^3 + 3ABy$; est autem $3AB \sqcap q$, ut calculus ostendet, et $A^3 + B^3 \sqcap r$. Unde fit aequatio non pura (ut in quadratica supra habueramus $d^2 \sqcap b+2c$), sed affecta $y^3 \sqcap +3qy+r$, quod impedit, quominus istae quantitates alia adhuc ratione et sine imaginariis exprimi possint, ut in quadraticis successerat. Sed tametsi Reductio quantitatum in speciem imaginariarum ad reales non semper enuntiatione quadam expressa palpabilis reddi possit, non eo tamen minus hae in speciem imaginariae reapse sunt reales habendae. Itaque de hac operatione sexta Reformationum dicendum est, quod de operatione quinta extractionum, esse scilicet quantitates reales, quae tamen non nisi imaginariarum interventu exprimantur; quemadmodum sunt radices, quas surdas vocamus, quae non nisi per suas potestates enuntiantur. Quanquam autem exemplum radicum quadraticarum in speciem imaginariarum validam satis suspicionem moveat altiores quoque reales esse, quoniam tamen minime convenit, in hujusmodi quaestionibus, ubi accurata veritatis indagatio in humanae mentis potestate est, nos conjecturis duci, ideo demonstrandum putavi, expressiones illas semper esse rectas et admittendas, etiam tum cum interveniunt imaginariae, ut in cubicis triradicalibus usu venit. Quod antequam faciam, ostendam paucis, contrarium sensisse doctissimos viros et habuisse graves sane dubitandi rationes. De Cardano et Tartalea qui regulas illas publicavere primi, non est cur moneam. Bombellus, quem dixi observasse primum, quod ex his radicibus erui possint saltem radices rationales verae seu affirmativae, si quae sunt, credidit tamen in caeteris casibus, cum scilicet radices rationales sunt negativae aut etiam cum non sunt rationales, exceptionem pati regulas. Exempli causa proposita aequatione $y^3 - 12y - 9 \sqcap 0$, quae triradicalis est, haec, inquit, aequatio resolvi non potest per regulas propositas; ideoque utitur alia methodo, eamque dividit per $y+3$, unde fit aequatio quadratica, quam resolvit. Sed non noverat ille, ipsam quantitatem negativam -3 esse radicem licet falsam, aut certe non putabat irrationales eam continere. Idem putat, aequationes ejusmodi in quibus scilicet terminus penultimus est negativus et quadratum semissis termini ultimi est minus cubo trientis penultimi, tunc cum ultimus terminus est affirmativus, non posse resolvi. Unde proposita aequatione $y^3-6y+8 \sqcap 0$ ait, questa agguagliatione risolutamente non si può agguagliare, e la proposta tratta dell' impossibile, in quo sine dubio deceptus est; scimus enim hodie, omnem aequationem cubicam esse possibilem et habere vel unam radicem realem vel tres. In quo eum errasse tanto magis miror, quod jam tum scivit, Trisectionem Anguli ad aequationem cubicam, quae per regulas Cardani tractari non posse credebatur, reduci. Sed error inde ortus, quod nondum satis eo tempore notum erat, aequationes provenire ex radicibus in se ductis, quod a Cartesio, si non inventum, saltem in clara luce positum est. Unde non miror, alicubi Bombellum asserere, non videri sibi unam quaestionem plures una veras responsiones sive radices habere posse. Albertus Girardus, qui primus quod sciam usum Trisectionis Anguli in hoc negotio accurate explicuit, Cardani regulas satis aperte exclusit. Quem secutus est Cartesius. Nam Vieta radices irrationales rarius attigit, et cum methodum tradidit sane pulcherrimam extrahendi radices aequationum in numeris rationalibus, non est usus extractione ex radicibus irrationalibus.

Quod superest ergo summi viri Renati Cartesii ac doctissimorum ejus discipulorum Huddenii et Schotenii mentem explicare suffecerit. Cartesius libro tertio Geometriae radices Cardani diserte non nisi illis aequationibus applicandas censet, in quibus imaginariae quantitates evitantur, et tunc cum imaginariae interveniunt, novum notae algebraicae genus introducere conatur, ut scilicet quantitas incognita non per extractionem radicis sive sectionem rationis, sed per sectionem anguli explicetur, in quo mihi non satisfacit. Nam aliae sunt notae Analyticae, aliae Geometricae; illae serviunt ad quantitatem incognitam enuntiandam relatione ad quasdam operationes arithmeticas, quales sunt additiones, subtractiones, multiplicationes, divisiones, radicum extractiones et (quae a me adduntur) imaginariarum reformationes, hae vero enuntiant quantitatem incognitam relatione ad quasdam operationes geometricas ductusque linearum. Et aequationem resolvisse aliud est, quam construxisse: resolutio rei naturam detegit, incognitas simplicissime enunciat, earumque omnes recessus patefacit; constructio quaesitam quantitatem exhibet instrumento; tametsi ultro largiar Geometriam ad ostendendam realitatem quantitatum in speciem imaginariarum, imo et surdarum adhiberi debere, ne scilicet pro figmentis inanibus humanae mentis habeantur. Quare Cartesii ratiocinationi non assentior, cum nobis est persuasum (ut scilicet jacturam soletur, quam ex defectu regularum Cardani nos pati credidit), aeque clare, imo clarius ac distinctius nos concipere incognitam per relationem ad subtensas arcuum, quarum triplum est datum, quam per relationem ad latera cuborum quorum contentum est datum. Faterer si de Geometrica constructione ageretur, sed analytici est incognitas exprimere per notas, quae ad calculum sint aptae; manifestum est autem, notam Cartesianam, qua incognitae cubicae per relationes ad arcus exprimerentur, ad calculum servire non posse aut certe inter calculandum semper mansuram invariatam, cum contra radices cubicae irrationales nonnunquam extrahi, semper tolli possint et in se invicem aut in alias duci, aliasque atque alias formas induere, quibus earum natura et problematis constitutio detegatur. Neque enim Cartesius ex nota sua ad anguli trisectionem nos referente duceret unquam radices rationales aequationis, neque illud demonstraret sane memorabile, omnem aequationem cubicam deprimibilem habere radicem rationalem; uti ex irrationalibus Cardanicis, etiam tum cum imaginariae interveniunt, egregie patet, quod infra denuo attingere operae pretium erit.

Denique concludit Cartesius, naturam radicum cubicarum non pati, ut terminis exprimantur simplicioribus, nec ut per constructionem aliquam, quae una et generalior et simplicior sit,[1] determinentur. Quae Schotenius iisdem verbis repetit in praefatione Commentariorum in librum tertium et rursus pag. 297 Com. ad lib. I., usque adeo ea illi placuere. De constructione non repugno; at quod ad expressionem attinet, ajo, Cardanicam et simplicissimam et generalissimam esse, omnesque omnino casus complecti, secus quam Cartesio videbatur. Schotenii mens ex his aliisque multis locis satis patet; at de ingeniosissimo Huddenio miror, quo neminem unquam profundius in analyseos purae et a geometria abstractae mysteria penetrasse scio. Is Epistola ad Schotenium prima pag. 504 regulae, inquit, quarum ope quartum dam cubicarum aequationum radices investigantur, quas Cardanus autori Scipioni Ferreo asscribit etc. Et regula 21 exemplo quarto cum agnovisset ex irrationalibus Cardanicis erui posse radices rationales, subjicit: excepto tantum uno casu, quando termino penultimo existente negativo cubus trientis ab ipso major est quadrato semissis ab ultimo.

Utile vero erit etiam rationem adjicere, quae doctissimis viris persuasit, regulas Cardani esse limitatas. Primum Cardanicae radices in casu toties dicto speciem habent impossibilium sive imaginariarum, sed regeri poterat, non ideo imaginarias sive impossibiles habendas, imo necessario esse reales, quoniam ex aequatione data (quae utique possibilis est) consequantur; ex vero autem non sequi nisi verum. Ad hanc objectionem parata illis replicatio fuit, radices Cardanicas ex aequatione cubica data non sequi necessario, sed niti quadam suppositione; ea autem suppositione tunc cum ad impossibile ducit, esse abstinendum. Hujus responsionis vis ac momentum eleganter apparet ex calculo, quem instituit doctissimus Huddenius. Esto aequatio data $x^3 \mp qx - r \sqcap 0$. Ponatur incognita $x \sqcap y + z$; haec suppositio utique semper permissa est; ergo erit $x^3 \sqcap y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$, adeoque ex aequatione data $x^3 \sqcap \pm qx + r$ aequando duas ipsius x^3 valores, fiet $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 \sqcap \pm qx + r$. Cum vero plures habeamus quantitates indeterminatas quam aequationes, nam indeterminatae sunt tres x, y, z, aequationes tantum duae $x \sqcap y + z$ (sive $x^3 \sqcap y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$) et $x^3 \sqcap \pm qx + r$, ideo (regulariter) licebit novam pro arbitrio fingere aequationem. Fingamus ergo $y^3 + z^3 \sqcap r$, et restabit in aequatione superiore $3y^2z + 3yz^2 \sqcap \pm qx$, cujus uno latere diviso per x, altero per $y + z$, ipsi x aequivalentem, fiet $3yz \sqcap \pm q$. Unde ut verba in compendium contraham (cetera enim clara sunt) fiet denique $x \sqcap \sqrt[(3)]{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} \pm \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[(3)]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} \pm \frac{q^3}{27}}}$.

Quodsi ergo $\pm$ valeat — (id est si $\mp$ sit $+$) et sit $\frac{q^3}{27}$ major quam $\frac{r^2}{4}$, venimus ad aliquod impossibile, adeoque suppositio a nobis pro arbitrio facta, qua fecimus $y^3 + z^3 \sqcap r$, eo casu admittenda non est, quare et valor hic ipsius x ex aequatione data necessario non ducitur. Haec ratiocinatio recta est et solida, quatenus concludit ex aequatione directe deduci nec necessario calculo formulam

Cardanicam sic quidem deduci, ac certe nisi aliunde deprehendissem radices Cardanicas generatim esse admittendas, ex hoc certe calculo solo asserere non auderem, ob intervenientem ut dixi suppositionem.

Opus est ergo, ut sine ulla ejusmodi suppositione demonstrem, radicibus Cardanicis omnem generaliter aequationem cubicam recte resolvi. Incipiam a clarioribus exemplis earum, quae radicem habent rationalem, ut facilius intelligatur postea demonstratio generalis de irrationalibus. Sit quantitas aliqua $2b$, poterit eadem et sic enuntiari: $b + \sqrt{-ac} + b - \sqrt{-ac}$. Qanquam enim $\sqrt{-ac}$ sit quantitas imaginaria, summa tamen ideo non minus est realis, quoniam imaginariae destruuntur. Dividatur haec formula in duas partes, binomium $b + \sqrt{-ac}$, et residuum $b - \sqrt{-ac}$, et utriusque separatim investigetur cubus, erit ipsius $b + \sqrt{-ac}$ cubus hic $\begin{array}{l} + b^3 - ac\sqrt{-ac} \\ -3bac + 3b^2 \ldots . \end{array}$ et ipsius $b - \sqrt{-ac}$ cubus erit $\begin{array}{l} b^3 + ac\sqrt{-ac} \\ -3bac - 3b^2 \ldots \end{array}$

adeoque erit

$$\sqrt[(3)]{\begin{array}{l} + b^3 - ac\sqrt{-ac} \\ -3bac + 3b^2 \ldots . \end{array}} + \sqrt[(3)]{\begin{array}{l} + b^3 + ac\sqrt{-ac} \\ -3bac - 3b^2 \ldots . \end{array}}$$

$$\text{vel } \left.\sqrt[(3)]{\begin{array}{l} + b^3 + \sqrt{-a^3c^3} \\ -3bac + 6a^2c^2b^2 \\ -9b^4ac \end{array}} + \sqrt[(3)]{\begin{array}{l} + b^3 - \sqrt{-a^3c^3} \\ -3bac + 6a^2c^2b^2 \\ -9b^4ac \end{array}}\right\} \sqcap 2b$$

sive $b + \sqrt{-ac} + b - \sqrt{-ac}$. Quodsi ergo ex tali binomio ejusmodi semper extrahi posset radix cubica, quemadmodum ex hoc quidem potest, utique junctis inter se binomio et residuo semper tolli posset imaginaria. Sed quoniam data ejusmodi expressione:

$\sqrt[(3)]{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[(3)]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}}$, qualem exhibent cubicae aequationes, non semper extrahi potest, id est, quia non semper quantitas data $\frac{r}{2}$ in duas $b^3 - 3bac$ nec quantitas data $\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}$ in tres $-a^3c^3 + 6a^2c^2b^2 - 9b^4ac$ dispesci a nobis sine alia aequatione, aeque ac data difficili, potest; ideo fit ut ex quantitatibus realibus non semper possimus imaginarias eliminare.

Exempla autem in numeris rationalibus proponere utile erit. Sit aequatio, qua et Albertus Girardus utitur: $x^3 * - 13x - 12 \sqcap 0$, cujus radix vera est 4. Ex formulis autem Scipionis Ferrei sive

Cardani erit $x \sqcap \sqrt{(3)\,6+\sqrt{\frac{-1225}{27}}}+\sqrt{(3)+6-\sqrt{\frac{-1225}{27}}}$. Quam expressionem rectam esse et realem, et admittendam sic demonstrabo. Ponatur $x \sqcap 2+\sqrt{-\tfrac{1}{3}}+2-\sqrt{-\tfrac{1}{3}}$, erit utique $x \sqcap 4$, uti aequatio postulat. Videamus nunc an inde derivari possit formula Cardanica. Nimirum cubando et superiorem formulam $b+\sqrt{-ac}+b-\sqrt{-ac}$ huc applicando, faciendoque $b \sqcap 2$ et $ac \sqcap \tfrac{1}{3}$ habebimus pro cubo ipsius $2+\sqrt{-\tfrac{1}{3}}$ formulam hanc:

$$\begin{array}{l} +8 \\ -3,2,\tfrac{1}{3} \sqcap -2 \end{array} + \sqrt{\left\{\begin{array}{l} -\tfrac{1}{27} \\ +6,\tfrac{1}{3},4 \sqcap \tfrac{72}{27} \\ -9,16,\tfrac{1}{3} \sqcap -\tfrac{1296}{27} \end{array}\right.}$$

sive summando $6+\sqrt{\frac{-1225}{27}}$. Eodem modo cubus a $2-\sqrt{-\tfrac{1}{3}}$ erit $6-\sqrt{\frac{-1225}{27}}$, ac proinde $\sqrt{(3)\,6+\sqrt{\frac{-1225}{27}}}$ erit $2+\sqrt{-\tfrac{1}{3}}$ et $\sqrt{(3)-\sqrt{\frac{-1225}{27}}}$ erit $2-\sqrt{-\tfrac{1}{3}}$, ac jungendo binomium residuo erit x sive $\sqrt{(3)6+\sqrt{\frac{-1225}{27}}}+\sqrt{(3)6-\sqrt{\frac{-1225}{27}}}$ idem quod $2+\sqrt{-\tfrac{1}{3}}+2-\sqrt{-\tfrac{1}{3}}$, id est erit, 4, ut ostendere propositum erat.

Unum adhuc exemplum adducere operae pretium erit, cum radix rationalis in irrationalibus Cardanicis latens est falsa sive negativa, quoniam variatur nonnihil calculus, et video Raphaelem Bombellum, egregium certe artis analyticae magistrum, hic haesisse: nam ut supra dixi, radices rationales veras extrahere potuit, falsas non potuit.

Exemplum esto $x^3 \cdot -48x-72 \sqcap 0$, cujus radix falsa est $x \sqcap -6$. Erit ex regula $x \sqcap \sqrt{(3)36+\sqrt{-2800}}+\sqrt{(3)36-\sqrt{-2800}}$; ostendendum est ergo harum duarum irrationalium summam nihil aliud facere, quam -6. Quem in finem ponemus $x \sqcap \dfrac{-3+\sqrt{-7}}{\odot}\quad\dfrac{-3-\sqrt{-7}}{☽}$ sive $x \sqcap \odot+☽$ vel $x \sqcap \sqrt{(3)\odot^3}+\sqrt{(3)☽^3}$. Resumta ergo formula superiore, qua erit $\odot \sqcap b+\sqrt{-ac}$ et $☽ \sqcap b-\sqrt{-ac}$, ac nunc pro b substituendo -3 et pro ac sumendo 7, erit

$$\odot^3 \sqcap \begin{array}{l} -27 \\ +3,3,7 \sqcap 63 \end{array} + \sqrt{\left\{\begin{array}{l} -343 \\ +6,49,9 \sqcap 2646 \\ -9,81,7 \sqcap -5103 \end{array}\right.}$$

sive summa inita $\odot^3 \sqcap 36+\sqrt{-2800}$; eodem modo ostendetur esse $☽^3 \sqcap 36-\sqrt{-2800}$. Cum ergo sit $x \sqcap -6 \sqcap \sqrt{(3)\odot^3}+\sqrt{(3)☽^3}$, prit $x \sqcap \sqrt{(3)36+\sqrt{-2800}}+\sqrt{(3)36-\sqrt{-2800}}$, ut regula Cardani eerscripserat, quod ostendendum proponebatur.

Tametsi autem radices cubicae semper ex binomiis et residuis ejusmodi analytice extrahi non possint, patet tamen semper in illis inesse, et operatione Geometrica inveniri, quemadmodum aliae radices surdae: ac proinde imaginarias semper destrui ac summam duarum hujusmodi radicum cubicarum semper esse realem, tametsi destruendi modus non sit semper enuntiabilis. Ne qua tamen ansa dubitandi relinquatur, duplici demonstratione generali rem conficiemus, quae rationales irrationalesve non moretur. Prior demonstratio huc redit: Formula Cardanica satisfacit aequationi cubicae triradicali; omnis formula quae satisfacit aequationi cuidam, est ejus radix; ergo formula Cardanica est aequationis cubicae triradicalis radix. Omnis porro radix aequationis cubicae triradicalis est quantitas realis (ex hypothesi ideo enim triradicalem vocamus, quod tres habet radices reales, qualem illam esse, quae regulas Cardani respuere credebatur, dudum ostensum est; videatur inprimis Schotenius in appendice de aequationum cubicarum resolutione; neque vero plures quam tres habere potest radix cubica ulla). Ergo formula Cardanica (etiam tum cum ex cubica triradicali ducitur) est quantitas realis. Superest ergo tantum, ut ostendamus formulam Cardanicam etiam aequationi cubicae triradicali satisfacere, quod apparet, si in aequatione ejusmodi ut $x^3 * - qx - r \sqcap 0$ substituendo valorem ipsius x, nempe

Semper ergo formula Cardanica satisfacit, nec refert, major minorve sit $\frac{q^3}{27}$ quam $\frac{r^2}{4}$.

Altera demonstratio haec est: Sit aequatio dat $ax^3 * - qx - r \sqcap 0$; ajo, radicem seu valorem ipsius x esse

$$\overbrace{\sqrt[(3)]{\frac{r}{2} + \sqrt{+\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}}}^{A} + \overbrace{\sqrt[(3)]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}}}^{B},$$

quanquam sit $\frac{q^3}{27}$ major quam $\frac{r^2}{4}$. Probo, quia tunc semper erit $A \sqcap \frac{x}{2} + \sqrt{-ac}$, $B \sqcap \frac{x}{2} - \sqrt{-ac}$, sumta pro ac quantitate quamcunque calculus obtulerit, ac proinde summa utrius radicis cubicae seu $A+B$ erit x, ut proponebatur. Assumtum sic ostendo: Ponatur A vel B major minorve esse quam assignata quantitas, et excessus vel defectus sit $\mp d$; erit ergo $A \sqcap \frac{x}{2} \mp d + \sqrt{-ac}$, et $B \sqcap \frac{x}{2} \mp d - \sqrt{-ac}$, nam calculus ejusmodi binomiorum ostendit, quantitates reales in binomio pariter ac residuo esse easdem, nec differentiam nisi in signis quantitatis imaginariae intervenientis esse debere. Compendii autem causa ponamus $\frac{x}{2} \mp d \sqcap b$, fiet $A \sqcap -b + \sqrt{-ac}$ et $B \sqcap b - \sqrt{-ac}$

$$\begin{aligned}
x^3 \sqcap{} & A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\
{} \sqcap{} & \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}} + {}^{*}q\sqrt[(3)]{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}} + {}^{*}q\sqrt[(3)]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}} + \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}} \\
-qx \sqcap{} & -q\sqrt[(3)]{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}} - q\sqrt[(3)]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}} \\
-r \sqcap{} & -\frac{r}{2} - \frac{r}{2} \\
\hline
\sqcap{} & 0 \qquad \sqcap 0
\end{aligned}$$

---

*) Nam $AB \sqcap \frac{q}{3}$ ut facile calculo ostendi potest.

$$\text{et } A^3 \sqcap \begin{matrix} +b^3 & -ac\sqrt{-ac} \\ -3bac & +3b^2\ldots \end{matrix} \quad \text{et } B^3 \sqcap \begin{matrix} +b^3 & +ac\sqrt{-ac} \\ -3bac & -3b^2\ldots \end{matrix}$$

$$\sqcap \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}} \qquad \sqcap \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}$$

Habemus ergo $b^3-3bac \sqcap \frac{r}{2}$. Aliunde autem scimus, radicem ipsius $\frac{q^3}{27}$ differentiae quadratorum partium binomii vel residui dati $\frac{r}{2}$ et $\mp\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}$ aequari ipsi b^2+ac differentiae quadratorum partium binomii vel residui quaesiti $b\mp\sqrt{-ac}$ seu radicis binomii vel residui dati $\frac{r}{2}\mp\sqrt{-ac}$. Quod theorema demonstratum extat apud Schotenium in appendice Commentariorum, tametsi originem inventionis, quae ad altiores quoque gradus porrigitur, non attigerit, quam alias forte explicare poterimus. Habemus ergo aequationes duas $b^3-3bac \sqcap \frac{r}{2}$, et alteram $\frac{q}{3} \sqcap b^2+ac$, ex quarum posteriore erit $ac \sqcap \frac{q}{3}-b^2$, quem valorem inserendo in priore habebimus $b^3+3b^3-qb \sqcap \frac{r}{2}$ vel $8b^3-2qb-r \sqcap 0$. Quae aequatio cum per omnia coincidat datae, excepto quod pro x habetur $2b$, et pro x^3 habetur $8b^3$, ideo necesse est $2b$ esse x, adeoque b esse $\frac{x}{2}$. Posueramus autem supra $b \sqcap \frac{x}{2}\mp d$, erit ergo $\mp d \sqcap 0$. d autem significabat excessum aliquem aut defectum; is ergo erit nullus, adeoque exacte A sive $\sqrt[3]{\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$ erit $\sqcap \frac{x}{2}+\sqrt{-ac}$ et B sive $\sqrt[3]{\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$ erit $\frac{x}{2}-\sqrt{-ac}$. Ergo denique $\sqrt[3]{\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$ erit $\frac{x}{2}+\sqrt{-ac}+\frac{x}{2}-\sqrt{-ac}$, id est x, quod ostendendum sumseramus.

Cum ergo satis opinor evicerimus, repetitas toties radicum irrationalium formulas esse reales sine ullo aequationis cubicae discrimine, superest, ut de earum usu nonnulla dicamus. Ac primum haec est sententia mea, generatim in eo consistere perfectionem Algebrae, ut radices irrationales aequationum cujuscunque gradus inveniantur. Nam resolutio aequationis est, invenire valorem incognitae quantitatis, sive aequationem ex affecta et elata reddere puram et simplicem, quod generaliter in quolibet gradu fieri non potest nisi per irrationales illius gradus, accedentibus subinde et irrationalibus graduum inferiorum. Inventa formula generali radicum irrationalium alicujus gradus, habetur quidquid in eo gradu optari potest, limites ac determinationes, possibilitates atque impossibilitates, numerus radicum, expressio earum simplicissima, ac depressiones atque extractiones, quibus problema ad simplicissimos terminos reduci possit. Denique si de constructionibus quaeratur, habebitur revocatio omnium problematum ab aequationibus pendentium ad duo tantum, sectionem scilicet rationis aut anguli.

Eadem et priorum Algebristarum sententia fuit. Sed video, summum virum Renatum Cartesium aliam institisse viam atque ab ipso pariter ac doctissimis ejus commentatoribus radicum irrationalium usum atque inventionem plerumque elevari. Sed ita sumus homines, ut nostra tantum admiremur. Cartesius enim cum resolutionem aequationum per irrationales sive veram atque analyticam radicum inventionem promovere posse desperaret, rem ad geometricam constructionem traduxit per varia curvarum genera, praeclaram certe et summo ejus ingenio dignam, sed qua ut supra quoque dixi non mens illustratur, sed manus dirigitur. Si quis enim lineam quaesitam mihi exhibeat materialem instrumento aliquo, ut circuli aut parabolae sectionibus determinatam, praxin absolvit, animo non satisfacit, qui tum demum conquiescit, cum quaesitae quantitatis valorem simplicissima ad datas relatione expressum habet, qua intima ejus natura detegitur et omnes problematis recessus patefiunt. Videbat scilicet Cartesius, semper esse in potestate curvas invenire construentes (tametsi ut alibi dixi instrumentum aliquod simplex ac generale mentem non sustulerit), sed non esse hactenus in potestate invenire valores; certis enim ad valores irrationales inveniendos artibus est opus ac suppositionibus mira quadam ratione excogitatis, in quas non incidat animus, nisi aut immenso labore omnia pertentet aut singulari quodam artificio regatur, quod non ab Algebra, sed a superiore quadam scientia proficiscitur. Fateor cubicarum atque quadrato-quadraticarum radices facilius fuisse repertas, illas a Scipione Ferreo, has a Ludovico Ferrariensi, quoniam ob calculorum simplicitatem paucasque admodum combinationes variis modis ad idem perveniri solet. Ego certe decem minimum modis inter se diversis ad Scipionis Ferrei, tribus aut quatuor rationibus in Ludovici Ferrariensis regulas perveni, idque aliquando cum alia quaererem. At qui regulas quinti sextique gradus universales invenerit, eum certe laudabo, totum enim fere ingenio atque industriae, vix quicquam fortunae debebit. Hoc ergo agere debent, quicunque Algebram a se promotam gloriantur.

Cartesii methodus analytica hoc tantum ac ne vix quidem praestat, ut sciamus an aequatio aliqua rationalis dividi possit per aliam rationalem. Et ad id ipsum investigandum opus est calculis immensis, nam ut Huddenius ostendit, ut sciamus exempli causa, an aequatio aliqua sexti gradus per aequationem cubicam secundi termini rationalis dividi possit, opus est aequatione gradus decimi quinti, cujus divisores sed simplices tantum ac rationales quaerendi sunt. Fateor, Huddenium summo ingenio ac miris artibus immensoque labore tabulam inde eruisse, cujus ope omnia pertentando sciri possit, an aequatio aliqua rationalis quinti sextique gradus sit divisibilis; sed quis tanti putabit ullam aequationem, ut per tot examina incredibili labore ducat, et quid futurum putamus in altioribus, ubi tabula ipsa ad hunc constructa modum immensae magnitudinis futura esset, praeterquam quod ita aequationes illae, in quibus irrationales supersunt, non possunt examinari. Neque enim sine exaltatione aequationum semper tolli possunt irrationales: exaltationes autem illae plerumque ducunt ad gradus, de quibus regulas nondum habemus. At formula irrationalium radicum suo gradui generaliter accommodatarum, ingentis tabulae instar una habet, nec aequationes illas moratur, in quibus sunt irrationales, et hoc nobis praestat, ut depressiones omnes certa securaque ratione sine tot tentaminibus inveniantur per extractiones radicum quando fieri possunt. Divisorum enim inquisitio res est varia et multis tentaminibus obnoxia, praesertim cum de divisoribus irrationalibus agitur; at radicum inventio certa est semper ac determinata, sive literales sive numerales sint aequationes.

Sed usum radicum irrationalium uno atque altero tantum exemplo illustrare utile erit. Cartesius asserit, si aequatio cubica proposita rationalis dividi nequeat per incognitam plus minusve aliquo divisore rationali termini ultimi (nam irrationales infiniti sunt nec tentari possunt), tunc pro certo haberi debere, problema esse solidum, adeoque omnem aequationem cubicam rationalem deprimibilem habere radicem rationalem. Quae assertio merebatur demonstrationem; quidni enim possit aequatio esse deprimibilis, et habere radices planas quidem, sed irrationales, nempe quadraticas? At hujus Theorematis veritas ex irrationalium Cardanicarum contemplatione manifestum est, ac nescio, an Cartesius aliunde emerit. Nimirum sit aequatio $x^3 . - qx - r \sqcap 0$, cujus radix $x \sqcap \sqrt{(3)\,\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}} + \sqrt{(3)\,\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}}$. Patet, si radicem habeat, partem unam A habituram et alteram B; item si radix ab A sit binonium ut $b + \sqrt{\mp ac}$, tunc radicem ex B fore residuum respondens $b - \sqrt{\mp ac}$. His adjicio, si radix cubica erui possit ex binomio A vel residuo B, tunc eam semper habere partem unam b rationalem, nec posse componi ex duabus irrationalibus, quod ita probo. Omne binomium vel residuum, cujusque partium quadratorum differentia habet radicem cubicam rationalem, ejus binomii radix est ex parte rationalis; patet ex dictis a Schotenio in appendice Commentariorum, ubi de methodo extrahendi ex residuis et binomiis, et potest si opus accuratius demonstrari. Jam binomium vel residuum Cardanicum semper tale est; ejus enim partes sunt $\frac{r}{2}$ et $\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$, quadrata partium sunt $\frac{r^2}{2}$ et $\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}$, quorum differentia $\frac{r^2}{4}, - \frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$, id est $\frac{q^3}{27}$, cujus radix cubica est rationalis, nempe $\frac{q}{3}$. Cum ergo b sit rationalis quantitas et x quandocunque, ex A et B radix cubica extrahi potest. Sit $b + \sqrt{\mp ac} + b - \sqrt{\mp ac}$ sive $x \sqcap 2b$, patet x fore semper rationalem, quandocunque aequatio cubica deprimi potest.

Deberet jam explicari Methodus extrahendi radices cubicas ex his binomiis vel residuis etiam tum cum imaginariae ingrediuntur. Raphael Bombellus id praestat tentando, intra certos tamen limites, quoniam scilicet methodus illa ingeniosissima, quae a Schotenio sub finem Commentariorum adjecta est, nondum haberetur. Quoniam autem requirit methodus haec, ut binomii ejusmodi vel residui valor in numeris inveniatur vero propinquus, ut postea exacte reperiri possit; ideo fit ut imaginariis intervenientibus directe adhiberi nequeat; quis enim exempli causa in numeris rationalibus vero propinquis exhibeat valorem quantitatis hujusmodi $\sqrt{(3)1+\sqrt{-1}}$? Cui malo remedium inveni ac methodum detexi, per quam sine tentamentis, ex talibus binomiis etiam non obstante imaginaria radices extrahi possint, non cubicae tantum sed et surdesolidae, et aliae altiores quaecunque.

Nititur illa inventio cuidam singulari, quod aliquando explicabo. Nunc regulas quasdam adjiciam ex irrationalibus contemplatione ductas, quanquam in illis nulla fiet irrationalium mentio, per quas radix rationalis ex ipsis tentando facile extrahitur.*)

XV.

NOVA ALGEBRAE PROMOTIO.

Hactenus Algebra admodum imperfecta mansit, etsi qui eam non satis callent, ad summum fastigium provectam arbitrentur: quemadmodum fere fit, ut tanto quisque plus suae scientiae tribuat, quanto scientiae minus habet. Nimirum nemo hactenus aliquid generale attulit circa resolutionem Aequationum quae assurgunt ultra quartum gradum, quae tamen non usque adeo raro occurrunt, in problematibus etiam quae adeo difficilia non videntur. Exempli causa triangulum partiri in quatuor partes aequales ope duarum rectarum inter se perpendicularium problema est, quod ascendit ad aequationem octavi gradus. Taliaque occurrunt aliquando in Analysi versantibus.

Resolutionem autem Aequationis Algebraicam vel in Numeris indeterminatis tunc haberi putandum est, cum habetur Valor seu Expressio Analytica radicis, per quam nimirum et exacte et finite et in generalitate debita valores radicum exhibentur. Habemus quidem casus speciales, in quibus aequationes altiores deprimi

---

*) Die Abhandlung bricht hier ab.

aut etiam sine depressione ab affectis ad puras radices sui gradus transferri possunt; sed in generalibus terminis, ita ut coefficientes terminorum secundi, tertii, quarti etc. velut p, q, r etc. nullam habeant relationem inter se praescriptam, rem nondum quisquam praestitit; nisi quam aequatio altior revera cadit in inferiorem, potentia ejus incognitae loco assumta, velut in aequationibus gradus binarii, ubi soli extant termini gradus binarii, et in aequationibus gradus ternarii, in quibus soli extant termini gradus ternarii, et ita porro.

Habemus valores generales Radicum in aequationibus altioribus latentium per appropinquationes, sed qui non sunt exacti; habemus et exactos, sed non nisi infinitaliter exprimendos, quales sunt valores quos praebent series infinitae, qui valores mente quidem intelligi, sed numeris definitis exhiberi non possunt. Habemus denique Radices exacte et finite exhibitas, at modo organico, non per expressiones, cum scilicet locis geometricis seu lineis curvis continuis, id est per motum descriptis earumque intersectionibus vel etiam aliquo organo conveniente incognitae lineae radicibus aequationis inservientes exhibentur, sed hic modus exhibendi organicus revera non est analyticus et dat quidem quantitatem, sed non ejus valorem.

Exemplo discrimina haec illustrabo. In quadrato ABCD (fig. 29) habeo lineam Diagonalem organice, possum enim eam reapse exhibere ducta recta AC quae est diagonalis, sed non ideo habeo ejus valorem, nisi sciam ejus relationem analyticam ad quadrati latus AB. Ea autem nobis nota est, nam si super AC describatur quadratum ACEF et producamus AD in E et CD in F, patet ACEF continere quater triangulum ADC, sed ABCD continet idem triangulum bis, ergo ACEF quadratum a diagonali est duplum ipsius ABCD quadrati a latere. Itaque si AB vocetur a, et AC vocetur x, fiet $xx=2aa$ seu $x=a\sqrt{2}$ seu x est ad a ut $\sqrt{2}$ est ad 1, qui est valor seu expressio Analytica exacta finita ipsius diagonalis. Atque hoc est quod vulgo dici solet, diagonalem esse incommensurabilem lateri, nam ejus valor non potest exacte et finite exprimi, nisi per numerum surdum $\sqrt{2}$. Et quoties valores sunt incommensurabiles vel simul comprehendunt tam commensurabiles quam incommensurabiles, in casu generalitatis desideratur hujusmodi aliqua expressio per numeros surdos.

Habeo quidem expressionem valoris ipsius $\sqrt{2}$ rationalem et exactum, sed per seriem infinitam hoc modo, ut dicam esse

$$\sqrt{2}=\frac{23}{16}-\frac{5}{2^{6};1.2}+\frac{7}{2^{7};1.2}-\frac{7.9}{2^{9};1.2.3}+\frac{9.11}{2^{10};1.2.3}-\frac{9.11.13}{2^{12};1.2.3.4}$$
$$+\frac{11.13.15}{2^{13};1.2.3.4}-\frac{11.13.15.17}{2^{15};1.2.3.4.5}+\frac{13.15.17.19}{2^{16};1.2.3.4.5}$$
$$-\frac{13.15.17.19.21}{2^{18};1.2.3.4.5.6}+\frac{15.17.19.21.23}{2^{19};1.2.3.4.5.6}\text{ etc.}$$

ubi quanto magis continuatur series, tanto minus erratur, cum error semper sit minor eo termino qui terminum per quem finivimus sequitur. Tota autem series rationalis infinita exacte aequalis est valori irrationali quaesito $\sqrt{2}$. Sed patet subsidiarias esse tales expressiones, utiles quidem in praxi pariter et theoria, non tamen continere quod desideramus.

Habemus etiam Expressiones varias appropinquativas, quales tum ex praecedenti serie hauriri possunt, tum etiam per modum receptum extrahendi radicem ex numero, postquam multae ciphrae nullitatis indices ei sunt adjectae, veluti cum appropinquandum est ipsi $\sqrt{2}$, extrahendo radicem quadraticam decimaliter ex 2.000000000, ubi fit $\sqrt{2}=1.414213$. Ubi si dicamus $\sqrt{2}$ esse $\frac{14}{10}$, ideo ob sequentem numerum 1 error erit minor quam $\frac{1+1=2}{100}$ seu $\frac{1}{50}$; si dicamus $\sqrt{2}$ esse $\frac{141}{100}$, error erit minor quam $\frac{4+1=5}{1000}$ seu $\frac{1}{200}$; si dicamus $\sqrt{2}$ esse $\frac{1414}{1000}$, error erit minor quam $\frac{2}{10000}$, et ita porro. Quodsi ante continuationem operationis daretur continuatio in infinitum notarum decimalium, haec appropinquatio transiret in casum praecedentis paragraphi seu in valorem exactum per seriem infinitam, et quidem in meris integris, quod hactenus pro irrationalibus praestitum non est. Franciscus Vieta primus hoc extractionis genus a radicibus puris promovit ad radices affectas. Radicem puram vocamus, cum incognita vel ejus potentia aequatur quantitati rationali, ex. gr. $xx=2$, vel $x^3=3$, vel $x^4=3$, ita enim radix pura est $x=\sqrt{2}$, vel $=\sqrt[3]{3}$, vel $=\sqrt[4]{3}$. Sed radix erit affecta, si sit $xx=ax+bb$, cum aequatio est plus quam bitermina, et plures dignitates ejusdem incognitae ad eam formandam concurrunt. Eleganter ergo ostendit Vieta in libro De Numerosa Aequationum resolutione, etiam radices affectas simili quadam ratione extrahi posse, eaque methodo prodire ipsas in Numeris Radices aequationum, quoties ese Radices sunt rationales; si minus, prodire decimaliter valores quantumlibet appropinquantes.

Post Vietam Thomas Harriotus Anglus non tantum resolutionem Vietae numerosam excoluit, sed etiam notionem a Vieta tantum subindicatam utiliter prosecutus est, quod scilicet aequatio posita nihilo aequalis prodeat ex aequationibus radicalibus etiam nihilo aequalibus in se invicem ductis; qualis est $x-2=0$, posito radicem unam aequationis seu valorem ipsius x esse; et quod summa radicum aequetur termino secundo aequationis, summa binionum (seu rectangulorum) ex radicibus termino tertio, summa ternionum (seu rectangulorum solidorum) ex radicibus termino quarto, et ita porro. Illud etiam sane pulcherrimum observavit primus, quod tot sint mutationes signorum in aequatione nihilo aequali ordinatim scripta, quot radices affirmativae, et tot consecutiones signorum, quot radices negativae.

Cartesium inventis Harrioti usum dubitari vix potest usque adeo ut dimidia fere pars libri tertii Geometriae Cartesianae ex Harrioto transcripta videatur, ne illo quidem palmario de mutationibus et consecutionibus signorum excepto, quod non facile alicui in mentem venire poterat, qui non diu in hujus calculi experimentis erat versatus. Harriotus enim hanc regulam inductione, non ratione animadvertit, et hactenus neque Cartesius neque Cartesianorum quisquam ejus rationem reddere potuit. Hoc tamen Cartesius praeclare addidit Harrioto, quod consideravit concipi posse radices imaginarias seu impossibiles, quarum ope universalia redduntur, quae Harriotus limitate ad possibiles dixerat.

Caeterum Cartesius cum numerosam Aequationum Resolutionem animadverteret a Vieta occupatam et viam pedum nullam videret ad id quod maxime desiderabile non poterat ignorare, id est ad valores Radicum analyticos generales exactos per radices irrationales gradui aequationis convenientes; transtulit sese ab Analysi ad Geometriam, a valoribus ad constructiones, a ratiocinatione mentem illustrante ad effectionem manus atque organa gubernantem, et loca a Veteribus coepta prosecutus, ostendit quomodo per intersectiones linearum motu continuo per organa descriptilium radices quaesitae exhiberi queant. In quo sane ingens operae pretium fecisse Cartesium negari non debet, etsi postea Fermatius nonnulla ejus praecepta emendarit, Slusius etiam totum hoc negotium tractabilius reddiderit, loco ultimae aequationis quius incognitae adhibendo binas duarum incognitarum.

Porro Cartesius, vir erat haud dubie praeclarissimus, cui mirifice obstricta est haec scientia, in eo tamen nocuit progressui, quod hoc egit omni studio et arte, ut crederetur praestitisse aut certe viam ostendisse ad praestandum, quicquid poterat in ea desiderari. Qua ratione factum est, ut plerique ejus discipuli vix animum altius attollerent aut quicquam adderent inventis magistri. Nam si Slusium et Huddenium excipiamus, nihil magni momenti ad Algebram adjecere Cartesiani. Cartesius igitur, cum videret difficillimam rationem esse inveniendi valores radicum affectarum irrationales generales, hanc inquisitionem contemsisse visus est et ut nec orginem indicare dignatus regulae pro Radicibus aequationum cubicarum a Scipione Ferreo et Nicolao Tartalea inventae, ita etiam locutus est tanquam nihil interesset inter tales expressiones, quae sunt per latera cuborum datorum, et eas quibus indicaretur lineas quasdam rectas exhiberi trisectione Anguli, cum tamen manifestum sit priorem expressionem ad calculum inservire, posteriorem minime.

Sciendum ergo est, quod primarium Analyseos Algebraîcae officium attinet, exprimere radices aequationum per valores; quicquid in eo genere hactenus praestitum est, ultra aequationes quadraticas (quas jam Graeci et Arabes resolvere norant) Italis deberi. Primus ergo Scipio Ferreus qui Bononiae paulo post initia seculi a Christo nato decimi sexti Mathesin docuit, elegantissimo invento deprehendit valorem Radicum Aequationis cubicae generalem, quod idem postea invenit Nic. Tartalea, cum Scipionis regula ab ejus discipulis tegeretur, ut Cardanus narrat, qui artem a Tartalea acceptam primus publicavit. Etsi autem vulgo putetur et ab ipsis etiam inventoribus creditum sit, excludi a regula eas cubicas aequationes, in quibus sunt tres radices possibiles: a me tamen dudum animadversum est, non obstante imaginariarum quantitatum interventu regulam valere; manet enim expressionis veritas, etsi non sit apta ad constructionem.

Reductio deinde aequationis quadroquadraticae ad cubicam debetur Ludovico Ferrariensi, juveni admodum ingenioso, qui Cardani discipulus fuit, et praematura morte spes majores de se conceptas destituit, ut ipse Cardanus nobis refert. Vieta et Cartesius inventum Ludovici tantum repetiere, etsi uterque inventorem verum dissimularit; Cartesius etiam perinde locutus sit, ac si rem ipse proprio marte invenisset, Methodo inventoris nonnihil mutata.

Ab eo tempore nihil mentione valde dignum in hac Analysi praestitum est a quoquam, quantum constat; etsi nonnulli .....*)

Constat Tabulas Numerorum in Mathematicis haberi multas et perutiles, quibus fit ut calculus semel ab uno peractus imposterum serviat omnibus. Ita extant Tabulae multiplicationum, Pythagorico quem vocant Abaco continuato; Tabulae numerorum ex primitivis derivatorum per multiplicationes; Tabulae numerorum Quadratorum, Cuborum, Triangularium aut aliter figuratorum vel denominatorum; sed celebratissimae omnium Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium ac Logarithmorum vel absolutorum vel ad Tabulas Sinuum ac Tangentium relatorum, ut alias taceam vel conditas vel magno cum fructu adhuc condendas in pura vel in mista Mathesi.

Harum exemplo saepe consideravi, rem magni usus fore Analyticam in Mathesi artem Calculo quem Speciosum vocant vel literalem exercentibus, si Canones et Canonum Tabulae conderentur pro illis calculi operationibus quae saepe occurrunt, ut in oblato casu statim ad Canonem recurri possit nec actum millies agere sit opus, praesertim cum illi ipsi Canones Canonumque Tabulae simul Theoremata pulchra, imo series quasdam Theorematum praebeant, in infinitum constanti lege progredientes.

Reperietur autem hoc attentaturis, nihil aliud esse Calculum circa magnitudines Analyticum, quam exercitium artis Combinatoriae sive Speciosae generalioris, formas seu quantitates (quatenus scilicet distincte concipiuntur) et relationes harumque similitudines tractantis per notas, quam Algebra literalis a Vieta introducta applicat ad habitudines quantitatum atque adeo Arti Combinatoriae subordinata est. Speciosa autem generalis ipsa est Ars characteristica, in unam cum Combinatoria disciplinam confusa, per quam rerum relationes apte characteribus repraesentantur. Et pro certo habendum est, quanto magis effe-

*) Schluss fehlt.

cerimus ut characteres exprimant omnes relationes quae sunt in rebus, eo magis nos in iis reperturos auxilium ad ratiocinandum, ut ita quemadmodum de scriptura eleganter dixit poëta Gallus, colorem et corpus cogitationibus rationibusque inducamus, non tantum in memoriae usum ad retinendum cogitata, quod scriptura praestat, sed etiam ad vim mentis augendam, ut incorporalia velut manu tangat. Sed nobis nunc in rem praesentem veniendum est post praefationem (ut opinor) non inutilem, quoniam, uti mox patebit, in notis Algebraicis defectus ingens superfuit hactenus, cujus tollendi rationem trademus.

Algebra ut nunc recepta est quantitates oblatas notis quibusdam designat, eamque in rem literis, tanquam maxime familiaribus utitur. Et sane quoties ipsarum quantitatum adhibitarum nullae considerantur relationes inter se invicem, quibus distinguantur, parum interest quas adhibeamus notas. Esto igitur ex quantitatibus simplicissimo modo, id est per additionem composita quantitas, exempli gratia

$$\begin{aligned} \text{sit } x&=a+b+c+d \text{ etc.}\\ \text{et sit alia } y&=k+l+m+n \text{ etc.}\\ \text{et rursus } z&=q+r+s+t \text{ etc.}\end{aligned}$$

ubi nullum est discrimen inter literas valoris ejusdem, distinguuntur tamen inter se literae divisorum valorum. Et erit xy summa omnium binionum possibilium ex literis valorum x et y simul formatorum, et xyz summa omnium ternionum ex literis valorum x et y et z simul, et ita porro. Si plures sint valores, ea scilicet tantum lege combinationis servata, ut ne in eodem membro plures ex eodem valore literae concurrant.

$$\begin{aligned} \text{Jta } xy=\ & ak+al+am+an \text{ etc.}\\ & bk+bl+bm+bn \text{ etc.}\\ & ck+cl+cm+cn \text{ etc.}\\ & dk+dl+dm+dn \text{ etc.}\\ & \text{etc. etc. etc. etc.}\end{aligned}$$

ubi patet seriem horizontalem multiplicari per eandem literam ex valore x, et verticalem multiplicari per eandem ex valore y; sed in horizontali id quod multiplicetur esse valorem y, et in verticali valorem x. Pro xyz omittamus brevitatis causa literas d, n, t, ut sit $x=a+b+c$, $y=k+l+m$, $z=q+r+s$, et fiet ....

$$
\begin{aligned}
xyz = & akq + akr + aks \\
& alq + alr + als \\
& amq + amr + ams \\
& anq + anr + ans \\[1ex]
& bkq + bkr + bks \\
& blq + blr + bls \\
& bmq + bmr + bms \\[1ex]
& ckq + ckr + cks \\
& clq + clr + cls \\
& cmq + cmr + cms,
\end{aligned}
$$

quod quidem melius repraesentaretur rectangulo solido ut praecedens xy rectangulo plano; sed in plano sufficit haec trirectanguli expositio, praesertim cum $xyz\omega$ tanquam quadro-rectangulum, si ita loqui licet, aut altiora ne in solido quidem exhiberi queant. Patet autem simul et ordo in dispositionibus literarum, quem persequi nihil attinet. Satis est notari: prolixae repraesentationis actualis compendium fieri enuntiatione superiore per biniones, terniones etc. dicendo productum ex valoribus quotcunque esse summam combinationum possibilium, quas una tantum ex quovis valore quantitas ingrediatur. Comprehenditur autem sub additione subtractio, si litera ponatur esse quantitas negativa, ut si $c = -f$, idem erit $a + b - f$ quod $a + b + c$.

Jam consideremus non tantum adhiberi posse in valoribus formulas illas simplices, sed etiam magis compositas, ubi literae assurgunt ad potentias, vel ducuntur in se invicem. Maxime autem insistemus casui simpliciori et magis usitato, ubi non nisi unius literae tanquam capitalis potentias adhiberi opus est, sed variis coefficientibus affectae, ad quas omnia ordinentur. Ut si x esset $7 + 2\nu + 3\nu\nu + 6\nu^3$, ubi ut res generaliter tractetur, cum numeri possint esse quicunque, poterimus facere $y = a + b\nu + c\nu^2 + d\nu^3$; sed praestabit (ob mox dicenda) adhibere numeros supposititios sive fictitios qui significent idem quod a, b, c etc. et facere

$$
\begin{aligned}
x &= 10 + 11\nu + 12\nu^2 + 13\nu^3 + 14\nu^4 \text{ etc.} \\
y &= 20 + 21\nu + 22\nu^2 + 23\nu^3 + 24\nu^4 \text{ etc.} \\
z &= 30 + 31\nu + 32\nu^2 + 33\nu^3 + 34\nu^4 \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

Atque ita jam exprimimus notis Algebraicis hujusmodi non tantum coefficientes quantitates, sed etiam omnes eorum relationes inter se ex datis nascentes, adhibendo pro literis numeros suppositilios, quorum notae dextrae designabunt quarum potentiarum ipsi sint coefficientes, et sinistrae ostendent quarum ipsi literarum valores ingrediantur. Sic 32 ob 2 afficit ν^2, et ob 3 reperitur in valore tertiae nempe literae z.

Continetur etiam in his Expressionibus potentia quaedam virtualis, cujus subintellectione intelligi potest servari legem homogeneorum. Exempli causa si fingamus 1, 2, 3 in notis dextris designare potentiam, sed exponentis negativi, ita ut 10, 11, 12, 13 idem significent quod a^{-0}, b^{-1}, c^{-2}, d^{-3}, et ita porro, vel quod idem est $\frac{1}{a^0}$, $\frac{1}{b^1}$, $\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{d^3}$; hoc pacto omnes termini erunt ejusdem gradus, nempe nullius perinde ac si x vel y esset non linea aut alia res, sed numerus, qui etiam intelligitur gradus nullius; ita $10 + 11\nu + 12\nu^2 + 13\nu^3$ etc. darent $1 + \frac{1}{b}\nu + \frac{1}{c^2}\nu^2 + \frac{1}{d^3}\nu^3$ etc. qui omnes termini sunt homogenei primo, nempe unitati vel $\nu^0 : b^0$ seu $\frac{1}{b^0}\nu^0$.

Dici autem vix potest, quantum ista usum habeant etiam ad evitandos Calculi errores, ita ut ipse calculus quodammodo comprobationem suam ferat secum, quemadmodum et alias legis homogeneorum observatio multos calculi errores excludit. Hic vero cum non pauca alia indicentur, et serie quadam certa progrediamur, multo adhuc tutius agimus. Et quod potissimum est, continue theoremata condimus inter operandum, multo magis et extantius quam in calculo literali recepto, quoniam semper videmus quorsum pertineant datae quantitates, aut qua lege inter se combinentur, quod in calculo communi literali non apparet.

Equidem possemus simile aliquod comminisci per literas pro Numeris sive potentias ipsis tribuendo, ut paulo ante dictum est (sed quod tamen ut mox patebit, cum numeri suppositilii plurium sunt quam duarum notarum, non sufficit) sive potius faciendo quod Graeci aut alii populi solent, nempe literis designando numeros, ita pro 32 scribetur latine cb vel graece $\gamma\beta$. Sed numeris nostris magis sumus assueti et praeterea cautione opus esset ne, ut alias in literis, habeatur cb pro ducto ex c in b, sed ut tanquam una aliqua litera consideretur. Itaque fortasse poterimus numeris esse contenti, ita tamen, ut sua hic libertas cuivis relinquatur.

Ex posito jam valore ipsarum x et y fiet

$$
\begin{array}{lllll}
xy = 10.20 & + 10.21\nu & + 10.22\nu^2 & + 10.23\nu^3 & + 10.24\nu^4 \\
 & 11.20 & 11.21 & 11.22 & 11.23 \\
 & & 12.20 & 12.21 & 12.22 \\
 & & & 13.20 & 13.21 \\
 & & & & 14.20
\end{array}
$$

unde eodem modo prodiret xz mutando tantum notas sinistras 1, 2 in 1, 3, seu retento in iis 1, mutando 2 in 3. Et yz fieret mutando notas sinistras 1, 2 in 2, 3, nempe 2 in 1 et 2 in 3 vel quod eodem redit hoc loco, mutando 1 in 3, retento 2.

Sed nec minus facile prodit productum ex tribus seu erit

$$
\begin{array}{lllll}
xyz = 10.20.30 & + 11.20.30\nu & + 12.20.30\nu^2 & + 13.20.30\nu^3 & + \text{ etc.} \\
 & 10.21.30 & 10.22.30 & 10.23.30 & \\
 & 10.20.31 & 10.20.32 & 10.20.33 & \\
 & & 11.21.30 & 12.21.30 & \\
 & & 11.20.31 & 12.20.31 & \\
 & & 10.21.31 & 11.22.30 & \\
 & & & 11.20.32 & \\
 & & & 10.22.31 & \\
 & & & 10.21.32 & \\
 & & & 11.21.31 &
\end{array}
$$

ubi generaliter dici potest, productum ex formulis quotcunque generalibus per unam literam ν rationaliter integre expressis esse formulam ex ν rationalem integram, in qua termini cujusque coefficiens sit summa combinationum possibilium facta ex coefficientibus initio datis formularum producentium omnium, ea lege combinationis servata, ut in quovis membro idem sit gradus potentiae formalis qui totius est producti, et idem gradus potentiae virtualis, qui est gradus potentiae ipsius ν, ad quam pertinet membrum. Unde tot sunt in membro numeri supposititii invicem ducti, quot invicem ductae sunt formulae, ex quavis nempe formula numerus unus, et numerorum supposititiorum notae ultimae facient summam aequalem exponenti potentiae ipsius ν. Sic in coefficiente ipsius ν^2 quodlibet membrum verb. grat. 12.20.30 vel

11.21.30 habet numeros tres et notas quidem priores 1, 2, 3, quae indicant ex qua formula producente venerint, sed notas posteriores (gradum virtualem designantes) ita comparatas ut simul faciant 2; nam $2+0+0$ est 2, et $1+1+0$ est 2.

Hinc etiam licet contractius scribere haec producta, nempe compendiosiore expressione combinationum, dum pro omnibus similibus inter se scribitur una cum vocula etc. vel cum suppositis punctis ut.. Ita pro $10.22+12.20$ scribetur $\underset{\cdot\cdot}{10.22}$, pro $11.21.30+11.20.31+10.21.31$ scribetur $\underset{\cdot\cdot}{11.21.30}$, et fiet

$$\begin{array}{llllll}
xy=10.20 & +\underset{\cdot\cdot}{10.21}\nu & +\underset{\cdot\cdot}{10.22}\nu^2 & +\underset{\cdot\cdot}{13.20}\nu^3 & +\underset{\cdot\cdot}{14.20}\nu^4 & +\underset{\cdot\cdot}{15.20}\nu^5 \text{ etc.}\\
 & & +\underset{\cdot\cdot}{11.21} & \underset{\cdot\cdot}{12.21} & \underset{\cdot\cdot}{13.21} & \underset{\cdot\cdot}{14.21}\\
 & & & & \underset{\cdot\cdot}{12.22} & \underset{\cdot\cdot}{13.22}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
xyz=10.20.30 & +\underset{\cdot\cdot}{11.20.30}\nu & +\underset{\cdot\cdot}{12.20.30}\nu^2 & +\underset{\cdot\cdot}{13.20.30}\nu^3 & +\underset{\cdot\cdot}{14.20.30}\nu^4 & +\underset{\cdot\cdot}{15.20.30}\nu^5\\
 & & \underset{\cdot\cdot}{11.21.30} & \underset{\cdot\cdot}{12.21.30} & \underset{\cdot\cdot}{13.21.30} & \underset{\cdot\cdot}{14.21.30}\\
 & & & \underset{\cdot\cdot}{11.21.31} & \underset{\cdot\cdot}{12.22.30} & \underset{\cdot\cdot}{13.22.30}\\
 & & & & \underset{\cdot\cdot}{12.21.31} & \underset{\cdot\cdot}{13.21.31}\\
 & & & & & \underset{\cdot\cdot}{12.22.31}
\end{array}$$

Sed ex hac contracta F o r m a r u m scribendi ratione, dum pro tota forma ex membris omnibus similibus formata scribitur membrum unum, aperit se majus aliquid ac memorabilius: nempe modus canone generali seu una formula exprimendi productum ex formulis rationalibus integris quotcunque unam l i t e r a m c a p i t a l e m (seu ad quam ordinantur) ut hoc loco ν, potentiasve ejus continentibus. Nam posito $x=10+11\nu+12\nu^2$ etc. et $y=20+21\nu+22\nu^2+$ etc. et $z=30+31\nu+32\nu^2+$ etc. et $\omega=40+41\nu+42\nu^2+$ etc. et ita porro, fiet omissis duobus punctis supponendis, cum semper jam subscripta intelligantur,

$$\begin{array}{llll}
 & xyz\omega \text{ etc.} = 10.20.30.40 \text{ etc.} + 11.20.30.40 \text{ etc. } \nu & & \\
+12.20.30.40. \text{ etc. } \nu^2 & +13.20.30.40.50. \text{ etc. } \nu^3 & +14.20\ 30.40.50.60. \text{ etc.} & \nu^4\\
11.21.30\ 40. \text{ etc...} & 12.21.30.40.50 \text{ etc...} & 13.21.30.40.50.60. \text{ etc.} & ..\\
 & 11.21.31.40.50 \text{ etc...} & 12.22.30.40.50.60. \text{ etc.} & ..\\
 & & 12.21.31.40.50.60. \text{ etc.} & ..\\
 & & 11.21.31.41.50.60. \text{ etc.} & ..
\end{array}$$

ubi variae sunt ejusdem formae significationes; exempli causa 12.21.30 etc. significat vel $\underset{\cdot\cdot}{12.21}$ id est $12.21+12.22$, si duae tantum sint producentes x et y adeoque 30 negligatur aut unitati aequetur; vel significat $\underset{\cdot\cdot}{12.21.30}$ (si sint tres, x, y, z) id est

12.21.30 + 11.22.30 + 12.20.30 + 11.20.32 + 10.22.31 + 10.21.32; vel significat 12.21.30.40 (si sint quatuor x, y, z, ω), quod distincte scriptum daret membra 12, tot scilicet quot sunt rerum quatuor biniones duplicatae; vel significat 12.21.30.40.50, quod distincte scriptum daret membra 20; atque ita porro. Quae autem abest multiplicans formula, ut si absit valor ipsius ω, ejus coefficientes, ut 40, 41 etc. possunt pro unitatibus haberi in canone generali, et multo magis coefficientes sequentium, ut 50, 51 etc.

Id autem commode contingit, quod numerus formarum finitus est in quolibet gradu, quantuscunque sit numerus producentium formularum, adeoque et in quolibet potentiae cujuslibet coefficiente. Ex. gr. in gradu quarto non sunt formae nisi hae a^4, a^3b, a^2b^2, a^2bc, $abcd$,

quibus respondent: 14.20.30.40, et 13.21.30.40, et 12.22.30.40, et 12.21.31.40, et 11.21.31.41, nam 50 et 60 accedentia nil mutant in numero formarum combinationis, etsi in numero membrorum ejusdem combinationis multum mutent. Tot scilicet sunt formae in gradu quot sunt exponentis divulsiones. Nam numerus $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$; divulsionibus autem computatur ipse integer numerus, quasi essent univulsio una, bivulsiones duae, trivulsio una, quadrivulsio una Etsi autem pluribus formulis invicem ductis plures conjungantur numeri suppositilii quam sunt unitates in exponente gradus, veluti 4, pro coefficiente ipsius ν^4; tamen necesse est ut reliqui numeri concurrentes praeter quatuor semper habeant notam ultimam 0, quia notae ultimae simul additae non debent facere nisi 4.

Possemus jam progredi ad multiplicationes formularum plures literas capitales habentium, ut si sint duae literae tanquam capitales m et n, et sit

$$
\begin{array}{lllll}
\nu = 100 + & 100m + & 111mn + & 121m^2n + & 122m^2n^2 \\
 & 101n & 120m^2 & 112mn^2 & 131m^3n \\
 & & 102n^2 & 130m^3 & 113mn^3 \\
 & & & 103n^3 & 140m^4 \\
 & & & & 104n^4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\text{et } x = 200 + & 210m + & 211mn + & 221m^2n + & 222m^2n^2 & \text{etc.} \\
 & 201n & 220m^2 & 212mn^2 & 231m^3n & \\
 & & 202n^2 & 230m^3 & 213mn^3 & \\
 & & & 203n^3 & 240m^4 & \\
 & & & & 204n^4 &
\end{array}
$$

ubi numeri suppositii sunt trinotales pro literis capitalibus duabus m et n et quadrinotales pro capitalibus tribus etc., initiali scilicet nota tantum designante ex quo numerus valore sit sumtus ipsius ν an ipsius x etc., reliquis notis designantibus potentiam literae capitalis, ita ut prima post initialem notam sedes referatur ad m, secunda ad n, etc. Ita 230 praefigitur ipsi m^3, et 2 significat id fieri in valore secundo seu ipsius x, 3 proxime sequens notat m assurgere ad cubum, 0 notat n abesse; sed 212 notat m^1n^2 seu mn^2 eodem valore secundo. Sed ut talia invicem multiplicentur, praesertim si res sit reddenda generalis pro literis quotcunque capitalibus valores ingredientibus, constituendi sunt prius ductus formarum in se invicem, de quibus infra.

Nunc satis in multiplicatione diversarum formularum in se invicem versati. Demus et canonem pro divisione, praesertim cum illic contenti esse possimus dividere formulam aliquam generalem rationalem integram secundum aliquam literam capitalem per aliam formulam rationalem integram secundum eandem capitalem, sive succedat exacte, sive secus; quo casu per canonem etiam residuum exhibetur, vel si malimus series infinita. Unde patet, quantus sit usus Canonum generalium, ut sponte praebeant rem antea abstratissimam et nostra demum aetate productam.

Sit formula $10x^8+11x^7+12x^6+13x^5+14x^4+15x^3+16x^2+17x+18$ dividenda per formulam $-20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25$, ubi loco 20 assumo -20, cujus ratio mox ex calculo patebit, ut scilicet evitemus signum $-$ inter calculandum. Ponamus jam quantitatem ex divisione provenientem quaesitam esse

$$30x^3+31x^2+32x+33+\frac{34x^4+35x^3+36x^2+37x+38}{-20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25}$$

compositam ex quotiente integro et residuo fracto. Hanc multiplicemus per divisorem $-20x^5+21x^4+$ etc., proveniet formula coincidentianda cum dividendo initio posito, quod ut fiat commodius tam quoad signa, quam quoad legem homogeneorum, et notas numerales 5, ponamus dividendum datum seu initio positum, itemque numeratorem quotientis multiplicatum esse per -00, supponendo tamen $-00=1$ seu $00=-1$, ita enim nihil hac multiplicatione mutatur. Multiplicatio ita stabit:

$$
\begin{array}{llllllllll}
-20.30x^8 & -20.31x^7 & -20.32x^6 & -20.33x^5 & -00.34x^4 & -00.35x^3 & -00.36x^2 & -00.37x & -00.38 \\
+21.30 & +21.31 & +21.32 & +21.33 & & & & & \\
 & 22.30 & 21.31 & 22.32 & +22.33 & & & & \\
 & & 23.30 & 23.31 & 23.32 & +23.33 & & & \\
 & & & 24.30 & 24.31 & 24.32 & +24.33 & & \\
 & & & & 25.30 & 25.31 & 25.32 & +25.33 &
\end{array}
$$

quae formula coincidere debet dividendo initio dato per —00 multiplicato

$$-00.10x^8-00.11x^7-00.12x^6-00.13x^5-00.14x^4-00.15x^3-00.16x^2-00.17x-00.18$$

Jam ut coincidentiatio reapse praestetur, aequandus est terminus termino ejusdem gradus seu fiet $-20.30=-00.10$ et $-20.31+21.30=-00.11$, et ita porro, quas voco aequationes coincidentiatorias. Unde jam reperiemus valores quaesitorum coefficientium tam Quotientis quam Residui. Nempe fiet pro Quotiente

30	31	32	33
aequ.	aequ.	aequ.	aequ.
00.10:20	$\left.\begin{array}{l}+00.11\\21.30\end{array}\right\}:20$	$\left.\begin{array}{l}+00.12\\21.31\\22.30\end{array}\right\}:20$	$\left.\begin{array}{l}+00.13\\21.32\\22.31\\23.30\end{array}\right\}:20$

et fiet pro Residuo

$$\begin{array}{ccccc}
34 & 35 & 36 & 37 & 38 \\
\text{aequ.} & \text{aequ.} & \text{aequ.} & \text{aequ.} & \text{aequ.} \\
\left.\begin{array}{r} +00.14 \\ 21.33 \\ 22.32 \\ 23.31 \\ 24.30 \end{array}\right\} :00 &
\left.\begin{array}{r} +00.15 \\ 22.33 \\ 23.32 \\ 24.31 \\ 25.30 \end{array}\right\} :00 &
\left.\begin{array}{r} +00.16 \\ 23.33 \\ 24.32 \\ 25.31 \end{array}\right\} :00 &
\left.\begin{array}{r} +00.17 \\ 24.33 \\ 25.32 \end{array}\right\} :00 &
\left.\begin{array}{r} +00.18 \\ 25.33 \end{array}\right\} :00
\end{array}$$

ponendo semper 00=—1.

Lex progressus, quotcunque sit graduum dividendus aut divisor, satis patet ex aspectu. Nempe omnis valor coefficientis in Quotiente habet denominatorem 20, in Residuo denominatorem 00; deinde sine discrimine Quotientis aut Residui

Numerator valoris pro	30	31	32	33	34	35	etc.
habet membrum	00.10	00.11	00.12	00.13	00.14	00.15	etc.

Et de caetero membra sunt omnes biniones possibiles formatae ex coefficiente aliquo divisoris initio dato cum coefficiente aliquo provenientis jam invento, sic ut semper gradus virtualis (seu summa notarum posteriorum) aequetur gradui virtuali (seu notae posteriori) coefficientis jam inventi. Ita numerator in valore ipsius 33 praeter 00.13 habet 21.32+22.31+23.30 ubi 1+2, et 2+1, et 3+0 semper facit 3; et in aequatione 33=00.13+21.32+22.31 +23.30, : 20 seu 20.33=00.13+21.32+22.31+23.30 servatur lex homogeneorum tum formalis, quodlibet enim membrum est velut rectangulum ex duabus quantitatibus, tum virtualis, quo semper ascenditur ad gradum 3.

Obiter hic addo, hanc designationem 00.10:20 mihi significare divisionem ipsius 00.10 per 20, seu ab:c idem mihi esse quod $\frac{ab}{c}$, idque commoditatis causa praesertim ad impressionem adhibere soleo, cum ita typorum positus non turbetur nec spatium perdatur. Rationem quoque a ad b ut c ad d sic exprimo a:b=c:d, ut ita non opus sit peculiaribus notis pro analogia exprimenda, sed sufficiant notae divisionis et aequalitatis. Unde etiam ex tali scribendi modo omnes rationum regulae statim demonstrantur. Sed ut communiter scribi solet a.b::c.d, non tantum novus character :: sine ratione introducitur, ex quo nihil duci potest nisi ad meum illum redeas, sed etiam in ambiguitatem incurritur, nam si adhibeantur numeri, ut 20.33 quales hic, simplex interpositio puncti potius multiplicationem significat, itaque 20.30=00.10 apud me non est rationem 20 ad 30 eandem esse vel aequalem rationi 00 ad 10, sed potius factum ex 20 in 30 aequari facto ex 00 in 10. Quodsi peculiare quoddam signum multiplicationis, quale quibusdam est $\times$, hic adbibere vellem, occurreret nimis crebro, ut taceam affinitatem cum litera x. Commate autem aut parenthesi interdum evitare malo lineam superducendam aut subducendam, verb. gr. $00.11+21.30, :20$ vel $(00.11+21.30):20$ mihi idem est quod alias $\dfrac{00.11+21.30}{20}$ vel $\overline{00.11+21.30}:20$. Sed haec attuli, non ut aliis formam calculandi praescriberem, sed ut mei usus rationem redderem. Interea ipse saepe et linea superducta pro vinculo, et subducta subscriptoque nominatore pro divisione vel fractione utor, prout commoditas suadet.

Quodsi quis non tantum Canonem in exemplo repraesentari, sed etiam universaliter oculis subjici velit, huic ita satisfiet:

Sit Dividendus $+10x^e+11x^{e-1}+12x^{e-2}$ etc.

Divisor $-20x^n+21x^{n-1}+22x^{n-2}$ etc.

Provenientis

Quotiens $+30x^{e-n}+31x^{e-n-1}+32x^{e-n-2}$ etc.

Residuus

$$\frac{3(e)+3(e-1)x+3(e-2)x^2 \text{ etc. usque ad } 3(e-n+1)x^{n-1} \text{ inclusive}}{-20x^n+21x^{n-1}+22x^{n-2} \text{ etc.}}$$

ubi (e) vel (e−1) etc. significat notam ultimam coefficientis, ut si e sit 8, uti in exemplo paule ante posito, 3(e) fiat 38, et 3(e−1) fiat 37, et ita porro. Idem erit mox in 1(e) id est 18, vel 1(e−1) id est 17. Et cum n in eodem exemplo fuerit 5, utique 2(n) erit 25 et 3(e—n) erit 33. His positis prodibit coefficientium quidem in quotiente valor qui paulo ante, quoniam e indefinita eum non ingreditur; sed in residuo coefficientium valor ita proveniet: $3(e) = 00.1(e)+2(n).3(e-n), :00$ et $3(e-1) = 00.1(e-1) +2(n-1).3(e-n)+2(n).3(e-n-1), :00$ et $3(e-2)=00.1(e-2) +2(n-2).3(e-n)+2(n-1).3(e-n-1)+2(n).3(e-n-2), :00$, et ita porro pergendo usque ad $3(e-n+1)$ inclusive.

Ex eo autem quod pro coefficientibus quaesiti quotientis idem se dat valor, quicunque sit gradus dividendi aut divisoris, illud egregium consequimur, ut eadem opera possimus vel finitum exhibere quotientem cum suo residuo, vel neglecto residuo et continuata divisione in infinitum quotientem invenire in formula quidem rationali integra, sed in infinitum procurrente, id est per seriem infinitam, prorsus ut in communi calculo decimali, sed majore longe fructu pro analytico, quod serierum hic datur progressus facilis, qui non aeque in fractionibus decimalibus in promtu est; unde hic non tam appropinquationes quam veri valores, licet serie infinita expressi exhibentur.

Sed ut hoc melius obtineamus, inverso ordine incipiamus ab inferioribus terminis et ponamus Dividendum esse $10 + 11x + 12x^2 + 13x^3 + 14x^4$ etc. et Divisorem esse $-20 + 21x + 22x^2 +$ etc., provenientem autem quotientem (neglecto vel dissimulato Residuo) esse $30 + 31x + 32x^2 +$ etc. Ducendo eum in divisorem fit

$$\begin{array}{llll} -20.30 & -20.31x & -20.32x^2 & -20.33x^3 \text{ etc.} \\ & +21.30 & +21.31 & +21.32 \\ & & +22.30 & +22.31 \\ & & & +23.30 \end{array}$$

quae formula coincidentianda est cum sequenti, posito 00 significare -1

$$-00.10 - 00.11x - 00.12x^2 - 00.13x^3 \text{ etc.}$$

et patet eosdem qui prius pro 30, 31, 32, 33 etc. prodire valores. Hinc si poneremus 11, 12, 13, 14 etc., item 22, 23 etc. aequari nihilo, seu terminos quorum sunt coefficientes abesse, redibitur ad exemplum jam cognitum, seu 10 debet dividi per $-20 + 21x$, et 30 erit $00.10 : 20$, et $31 = 21.30 : 20$ seu $00.10.21 : 20^2$, et $32 = 21.31 : 20$ seu $00.10.21^2 : 20^3$, et $33 = 21.32 : 20$ seu $00.10.21^3 : 20^4$. Hinc si sit $20 = -a$ et $21 = 1$ et $10 = 1$, perinde est ac si 1 dividi debeat per $a + x$, et pro 00 ponendo 1 fiet $30 = +1 : a$ et $31 = -1 : a^2$ et $32 = +1 : a^3$ et $34 = -1 : a^4$ et ita porro, seu $\dfrac{1}{a+x} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{1}{a^3}x^2 - \dfrac{1}{a}x^3$ etc., quod aliunde quidem constabat dudum, sed adductum tamen est, ut Methodi successus appareret. Quam vero alia innumera, et quam facile ita obtineantur, patet. Illudque palmarium est, hinc consequi ut eadem ratione vel verum provenientem integrum, quoties datur, aut quotientem finitum cum residuo, si placet, vel sine residuo per seriem infinitam, si malimus, eruamus.

Si quis tamen postremo velit, valores quaesitorum 31, 32, 33 etc. non exprimi per valores quaesitorum praecedentium jam inventos (nempe 31 per 30, et 32 per 30, 31, et 33 per 30, 31, 32 etc.) sed per initio datos solos, nempe per 10, 11, 12, 13 etc. et

20, 21, 22, 23 etc. (cujus indagatio est multo implicatior, res tamen ipsa maxime absoluta), id quoque per combinandi artem consequemur hoc modo. Sit

Dividendus	$+10+11x+12x^2+13x^3+14x^4$ etc.
Divisor	$-20+21x+22x^2+23x^3+24x^4$ etc.
Proveniens Quotiens	$+30+31x+32x^2+33x^3+34x^4$ etc.

erit

$-30=10:20 \qquad -31=10.21+11.20, :20^2$

$$-32=\left.\begin{array}{lll} 10.20.22 & +11.20.21 & +12.20^2 \\ 10\cdot 21^2 & & \end{array}\right\} :20^3$$

$$-33=\left.\begin{array}{llll} 10.20^2.23 & +11.20^2.22 & +12.20^2.21 & +13.20^3 \\ (2)\,10.20.21.22 & 11.20.21^2 & & \\ 10\quad 21^3 & & & \end{array}\right\} :20^4$$

$$-34=\left.\begin{array}{lllll} 10.20^3.24 & +11.20^3.23 & +12.20^3.22 & +13.20^3.21 & +14.20^4 \\ (2)\,10.20^2.21.23 & (2)\,11.20^2.21.22 & 12.20^2.21 & & \\ 10.20^2.22^2 & 11.\ 21^3 & & & \\ (3)\,10.20.21^2.22 & & & & \end{array}\right\} :20^5$$

et ita porro, ea servata lege combinationis, ut in unum addantur omnia membra possibilia, quorum gradus formalis seu numerus coefficientium ab initio datorum pro membro constituendo invicem ducendorum unitate vincat gradum virtualem coefficientis quaesiti cujus valorem constituunt, et quorum gradus virtualis (summa notarum ultimarum indicatus) gradui virtuali dicti coefficientis quaesiti aequetur, sed ita ut una sola quantitas ex invicem ducendis in membro sit coefficiens dividendi, reliquae vero sint coefficientes divisoris. Sic membrum quodlibet in valore ipsius 33 constat ex quantitatibus $3+1$ invicem ductis, ex quibus una est ex dividendo, tres ex dividente, et summa notarum ultimarum ex omnibus est 3, verbi gratia 12.20 20.21 habet 12 ex dividendo, 20. 20. 21 ex divisore, et $2+0+0+1$ est 3. Notatu etiam dignum est, in uniuscujusque quaesiti, exempli gratia in ipsius 32 valore numeratorem constare ex duabus partibus, una nova, quae continet primum coefficientem dividendi (nempe $10.20.22+10.21.21$), altera formata ex numeratore qui est in valore quaesiti proxime praecedentis (veluti 31), tantum pro 10, 11, 12, 13 etc. respective ponendo 11, 12, 13, 14 etc. (ita ex ipsius numeratore in valore ipsius 31, qui est $10.21+11.20$, fit $11.21+12.20$).

Quodsi in divisore dato sit $20=0$ (vel aeque 20 et 21 sit

$=0$, vel aeque 20 et 21 et 22, et ita porro), tantum concipiendu est ac si fuisset divisor $-21+22x^2+23x^3$ etc. (vel $22x^2+23x$ $+24x^4$ etc. vel $-23x^3+24x^4+25x^5$ etc. et ita porro). Deind proveniens idem erit qui supra, tantum pro 20, 21, 22, 23, 24 et respective ponendo 21, 22, 23, 24, 25 etc. (vel 22, 23, 24, 25, 2 vel 23, 24, 25, 26, 27, et ita porro) et totum deinde dividendo p x (vel per x^2, vel per x^3, et ita porro). Idque locum habet, si valoribus ipsorum 31, 32, 33, 34 etc. utamur contractis prius pos tis, ubi 31 reperitur ex jam reperto 30, et 32 ex jam repertis 3 et 30, et 33 ex jam repertis 32, 31, 30, et ita porro, sive valor bus eorum utamur explicatis seu per solas initio datas quantitat 10, 11, 12 et 20, 21, 22 etc.

Ut coefficientium etiam Residui valores explicati inv niantur, commodum erit redire ad exemplum superius. Sit

Dividendus $+10x^8+11x^7+12x^6+13x^5+14x^4+15x^3+16x^2+17x+1$
Divisor $-20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25$
Quotiens $+30x^3+31x^2+32x+33$
Residuus $\dfrac{+34x^4+35x^3+36x^2+37x+38}{-20x^5+22x^4+22x^3+23x^2+24x+25}$

et fient valores coefficientium Quotientis, nempe 30, 31, 32, 33 et eodem modo expressi ut ante, nempe -30 erit $10:20$, et -3 erit $10.21+11.20,:20^2$, et ita porro, ut proxime in alia licet hy pothesi, cum iidem coefficientes infimis qui nunc summis potesta tibus ascripti essent. Valores autem coefficientium in Residuo ipsi fient iidem, perinde ac si coefficientes in Residuo essent con tinuati coefficientes in Quotiente, hoc uno tantum excepto, quo ubique pro 20 quod poneretur in Quotiente, ponitur in Residu 00, id est -1. Itaque in praesenti exemplo valores sic stabunt

$$-30=10:20 \qquad -31=10.21+11.20,:20^2$$

$$-32=\left.\begin{array}{l}10.20.22+11.20.21+12.20^2\\ 10.21^2\end{array}\right\}:20^3$$

$$-33=\left.\begin{array}{l}10.20^2.23+11.20^2.22+12.20^2.21+13.20^3\\ (2)\,10.20.21.22\quad 11.20.21^2\\ 10.21^3\end{array}\right\}:20^4$$

$$-34=\left.\begin{array}{l}10.00^3.24+11.00^3.23+12.00^3.22+13.00^3.21+14.00^4\\ (2)\,10.00^2.21.23\quad (2)\,11.00^2.21.22\quad 12.00^2.21^2\\ 10.00^2.22^2\\ (3)\,10.00.21^2.22\end{array}\right\}:20$$

vel pro 00 ponendo -1

$+34 = -\ 10.24 \quad -\ 11.23 \quad -12.22 \ -13.21 + 14$
$\quad + (2)\ 10.21.23 + (2)\ 11.21.22 + 12.21^2$
$\quad\quad 10.22^2$
$\quad - (3)\ 10.21^2.22$

et ita porro eadem lege servata explicate habebuntur -35, -36, -37, -38 vel (loco 20 ponendo 00 sive -1) $+35$, -36, $+37$, -38. Tantum adhuc opus est, ut in valoribus istis explicatis ipsorum 30, 31, 32, 33, 34 etc. pro quotiente aut residuo, aut uno verbo pro proveniente divisionis adhibitorum occurrentes Numeri veri (quos unitate excepta ut melius a fictitiis seu supposititiis assumtis distingueremus, parenthesi inclusimus, ut (2), (3) etc.) determinentur. Id cum non paulo sit prioribus difficilius, ita consecuti tamen sumus: Membrum propositum sit $f^m\ g^n\ h^r\ k^s$, per f, g, h, k intelligendo aliquos ex coefficientibus divisoris, nempe ex 21, 22, 23, 24 etc. neglectis coefficientibus dividendi, nempe 10, 11, 12 etc. quae in membro occurrunt, neglectis etiam 20 vel 00. His positis exponantur fractiones sequentes, et ex iis numerus verus praefigendus membro, si solum adsit m, erit unitas; sin adsit m et n, erit fractio prima; m et n et r, factum ex prima et secunda; si adsit m, n, r, s, factum ex fractione prima, secunda et tertia, et ita porro

$$\frac{m+1,\ m+2 \text{ etc. usque ad } m+n}{1.2.3 \text{ etc. usque ad } n},$$

$$\frac{m+n+1,\ m+n+2 \text{ etc. usque ad } m+n+r}{1.2.3 \text{ etc. usque ad } r},$$

$$\frac{m+n+r+1,\ m+n+r+2, \text{ etc. usque ad } m+n+r+s}{1.2.3 \text{ etc. usque ad } s.}$$

In exemplum sit membrum 10.20.21.22, rejectis 10 et 20, restant 21.22, et m est 1, itemque n est 1; sed r, s etc. absunt; itaque sufficit prima fractio $\frac{m+1,\ m+2, \text{ etc. usque ad } m+n}{1.2.3 \text{ etc. usque ad } n}$, id est hoc loco $\frac{1+1}{1} = 2$. Sic si membrum sit $10.20^2.21.23$ vel $10.00^2.21.23$, rejectis 10 et 20 vel 00, restat $21^1.23^1$, et m est 1 et n est 1, et prodit quod ante, nempe 2. Sin membrum sit $10.20.21^2.22$ vel $10.00.21^2.22$, tunc rejectis rejiciendis fit $21^2.22$, et m est 2, et n est 1, et ex prima fractione (qua sola opus) fit $\frac{2+1}{1} = 3$.

Post multiplicationem et divisionem sequuntur Potentiae et Radices. Et quidem si potentias habeamus generaliter, eadem opera nanciscemur et radices; nam radix est velut potentia cujus exponens est numerus fractus. Ut autem multiplicationes coepimus a simplicibus polynomiis velut $a+b+c$ etc. et postea perreximus a formulas velut $a+by+cy^2$ etc., ita nunc in potentiis quoque faciemus. Cum olim considerarem, binomii $a+b$ potestates jam haber per numeros combinatorios, cogitavi quomodo res ad trinomia quadrinomia etc., denique generaliter ad polynomia quaecunqu produci posset. Ita quadratum ab $a+b$ est $a^2+2ab+b^2$, et cubus ab eodem est $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, et biquadratum est a^4+4a^3b $+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, et ita porro. Ita numeri prodeunt $1,1$ et $1,2,1$ et $1,3,3,1$ et $1,4,6,4,1$ etc., qui sunt numeri combinatorii Exponentis, ut constat, nam 1 est quatuor rerum nullio, 4 sunt quatuor rerum 1niones, 6 sunt quatuor rerum 2niones, 4 sunt quatuor rerum 3niones, 1 est quatuor rerum 4nio, et coincidunt cum illis numeris qui dici solent figurati. Sed incipiendum est ab Unitatibus et Naturalibus, inde pergendum ad Triangulares, Pyramidales, Bitriangulares, Pyramido-triangulares, Bipyramidales etc. Tabula rem subjicit:

	0. Unitates	1. Naturales	2. Triangulares	3. Pyramidales	4. Bitriangulares	5. Triangulo-pyramidales	6. Bipyramidales	
Nullius	1	1	1	1	1	1	1	etc.
Unius	1	2	3	4	5	6	7	etc.
Duarum	1	3	6	10	15	21	28	etc.
Trium	1	4	10	20	35	56	84	etc.
Quatuor	1	5	15	35	70	126	210	etc.
Quinque	1	6	21	56	126	252	462	etc.
Sex	1	7	28	84	210	462	924	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	
Rerum	Nulliones	Uniones	Biniones	Terniones	Quaterniones	Quiniones	Seniones	

Modus autem construendi hos numeros duplex est, unus per continuam additionem: nam ex unitatibus inde ab initio sumtis conflantur naturales, ex naturalibus triangulares, ex triangularibus pyramidales, et ita porro; alter per continuam multiplicationem, et hic cum sit a Tabula independens, a Fermatio, Pascalio et aliis jam traditus ita habet, sed quem ad unam expressionem pro omnibus ita redegi: Sit Exponens combinationis e, ita ut pro nullionibus, 1nionibus, 2nionibus, ternionibus etc. e sit respective 0, 1, 2, 3 etc., dico combinationem secundum e seu enionem fore

$$\frac{e, e-1, e-2, e-3, e-4, \text{ etc. usque ad } e-(e-1) \text{ seu usque ad } 1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\ \text{etc. usque ad } e}$$

hinc per singulas eundo

$$1\text{nio} = \frac{e}{1} \qquad 2\text{nio} = \frac{e, e-1}{1.2} \qquad 3\text{nio} = \frac{e, e-1, e-2}{1.2.3} \text{ etc.}$$

Est igitur combinatio (enio) productus numerorum inde ab e exponente combinationis descendendo, divisus per productum totidem numerorum inde ab unitate ascendendo, ita ut ascensus finiatur in e, descensus in 1, alter in principio alterius.

In his autem numeris, ut obiter dicam, ad instar Trianguli Arithmetici quod dedit Blasius Pascalius, vir ingeniosissimus, observavi Triangulum Harmonicum. Nempe ut in Triangulo Pascaliano basin dant Arithmetici, ita in meo basin dant Harmonici.

Triangulum Arithmeticum.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&1&&&&& \\
&&&&1&&2&&1&&&& \\
&&&1&&3&&3&&1&&& \\
&&1&&4&&6&&4&&1&& \\
&1&&5&&10&&10&&5&&1& \\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1
\end{array}$$

Triangulum Harmonicum.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&\frac{1}{1}&&&&&& \\
&&&&&\frac{1}{1}&&\frac{1}{1}&&&&& \\
&&&&\frac{1}{1}&&\frac{1}{2}&&\frac{1}{1}&&&& \\
&&&\frac{1}{1}&&\frac{1}{3}&&\frac{1}{3}&&\frac{1}{1}&&& \\
&&\frac{1}{1}&&\frac{1}{4}&&\frac{1}{6}&&\frac{1}{4}&&\frac{1}{1}&& \\
&\frac{1}{1}&&\frac{1}{5}&&\frac{1}{10}&&\frac{1}{10}&&\frac{1}{5}&&\frac{1}{1}& \\
\frac{1}{1}&&\frac{1}{6}&&\frac{1}{15}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{15}&&\frac{1}{6}&&\frac{1}{1}
\end{array}$$

Nempe ut basis in Triangulo Arithmetico sunt naturales seu numeri progressionis Arithmeticae 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc., ita basis in Triangulo Harmonico sunt reciproci naturalium, qui sunt progressionis Harmonicae, scilicet $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ etc. Hi enim sunt reciproce ut naturales, verb. gr. $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{5}$ ut 5 ad 2. Et ita generaliter numeri trianguli Harmonici sunt reciproci numerorum trianguli Arithmetici. Dico, ut summam naturalium dant triangulares, et summam triangularium dant pyramidales, et ita porro, ita contra reciprocos naturalium seu harmonicos dare summam reciprocorum triangularium, et reciprocos triangularium dare summam reciprocorum pyramidalium, et ita porro:

1	1	1	1	1
2	3	4	5	6
3	6	10	15	21
4	10	20	35	56
5	15	35	70	126
6	21	56	126	252
Numeri	Summae	Summae Summarum	Summae Tertiae	Summae quartae
	Numeri	Summae	Summae Summarum	Summae tertiae
		Numeri	Summae	Summae Summarum
			Numeri	Summae

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{56}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{126}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{126}$	$\frac{1}{252}$
Summae quartae divis. per $\frac{5}{1}$	Summae tertiae divis. per $\frac{5}{2}$	Summae Summarum divis. per $\frac{5}{3}$	Summae divis. per $\frac{5}{4}$	Numeri
Summae tertiae divis. per $\frac{4}{1}$	Summae Summarum divis. per $\frac{4}{2}$	Summae divis. per $\frac{4}{3}$	Numeri	
Summae Summarum divis. per $\frac{3}{1}$	Summae divis. per $\frac{3}{2}$	Numeri		
Summae divis. per $\frac{2}{1}$	Numeri			

Summmae autem, ut constat, exhibentur pro Numeris quidem trianguli Arithmetici hoc modo: Quaeritur summa numerorum in coumna quadam inde ab initio usque ad terminum datum ultimum nclusive, numerus columnae proxime sequentis, termino dato repondens, erit summa quaesita. Ita omnes naturales ab initio ad ; sunt 21, omnes triangulares ab initio ad 21 sunt 56, et mnes pyramidales ab 1 ad 56 sunt 126. Et ita porro. Sin ummam columnae ab aliquo termino usque ad alium velis, ut n columna triangularium a 6 ad 21, sumenda est differentia iner terminum columnae sequentis ultimo summandorum respon- entem et terminum ejusdem columnae sequentis primum sumnandorum antecedentem seu $56-4=6+10+15+21$.

At pro numeris trianguli Harmonici summandis contrariae inistendum est viae. Nam Summae columnae sequentis continentur n antecedente, et praeterea summantur in antecedente termini omnes columnae, non ab initio sumti, sed sumti a fine, id est infiniti. llud tamen interest quod columna continet summas sequentis non implicite, sed constanti numero multiplicatas. Nempe

olumna reciprocorum a	continet summas	reciprocorum a	divisas per
naturalibus		triangularibus	$\frac{2}{1}$
triangularibus		pyramidalibus	$\frac{3}{2}$
pyramidalibus		bitriangularibus	$\frac{4}{3}$

taque si velis summam columnae in triangulo harmonico decresentis in infinitum seu usque ad 0 inde ab aliquo termino, sume erminum columnae praecedentis respondentem primo termino sumnandorum, eumque

si sit in columna	1	2	3	4	etc.
multiplica per	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	etc.

t habebis quaesitum. Sic si velis summare columnam secundam b 1 in infinitum, erit terminus primus 1, cui in columna praeceente respondet 1, qui multiplicatus per $\frac{2}{1}$ dat $\frac{2}{1}$ summam quaeitam. Itaque

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} \text{ etc. infinitum} = \frac{1}{0} \text{ infinito}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15} \text{ etc.} = \frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15} \text{ etc.} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15} \text{ etc.} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}$$

etc.

$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}$ etc. $= \frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}$ etc. $\quad \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}$

$\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}$ etc. $= \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}$

etc.

$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}$ etc. $= \frac{1}{1}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

$\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}$ etc. $= \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}$

$\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}$ etc. $= \frac{1}{10}\cdot\frac{4}{3}$

etc.

Eademque opera apparet, quomodo definitus numerus terminorur columnae trianguli Harmonici (excepta semper prima) summetu Exempli causa quaeritur summa 100 fractionum seu Reciprocorur triangularium ab $\frac{1}{1}$ usque ad $\frac{1}{4950}$. Sumatur in columna antecedent nempe reciprocorum naturalium, terminus (hoc loco $\frac{1}{1}$) responden primo summandorum; sumatur et in eadem columna antecedent terminus proxime sequentium qui respondet ultimo sumandorur hoc loco $\frac{1}{4950}$, qui est $\frac{1}{101}$, et $\frac{1}{1}-\frac{1}{101}$ multiplicata per $\frac{2}{1}$ se $\frac{200}{101}$ erit exacte summa omnium fractionum $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+$ etc usque ad $\frac{1}{4950}$ inclusive. Haec in Gallia olim reperta per occa sionem adjicere visum est.

Sed ad potestates Polynomiorum formandas redeamus, qua scilicet indigent Numeris combinatoriis, ut mox patebit. Constar autem semper ex formis ejusdem gradus, quibus numeri ex com binatoriis multiplicando formati praefiguntur. F o r m a m voco ho loco summam omnium membrorum ex aliquot literis similiter for matorum. Ita $a+b+c$ etc. est forma primi gradus; at formae se cundi gradus sunt $a^2+b^2+c^2$ etc. et $ab+ac+bc$ etc., et forma tertii gradus sunt $a^3+b^3+c^3$ etc. et $a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2$ etc et $abc+abd+bcd$ etc. Compendio autem, ut jam monui, sic de signo, ut $\underset{.}{a}$ mihi significet a vel $a+b$ vel $a+b+c$ vel etc., et $\underset{..}{a}$ significet a^2 vel a^2+b^2 vel $a^2+b^2+c^2$ vel etc., et $\underset{..}{ab}$ significet ve ab vel $ab+ac+bc$ vel $ab+ac+ad+bc+bd+cd$ vel etc., et $\underset{..}{a}$ erit a^3 vel a^3+b^3 vel $a^3+b^3+c^3$ vel etc., et $\underset{.\ .}{a^2b}$ erit a^2b+ab vel $a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2$ vel $a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+a^2$ $+ad^2+b^2c+bc^2+b^2d+bd^2+c^2d+cd^2$ vel etc., et $\underset{..}{abc}=abc$ vel ab $+abd+bcd$ vel etc., itaque

$$a+b+b \text{ etc.} = \underset{..}{a}$$

$$\text{et quadratum ab } a+b+c \text{ etc.} = \underset{..}{a^2} + 2\underset{..}{ab}$$

$$\text{cubus} \qquad = \underset{..}{a^3} + 3\underset{.\ .}{a^2b} + 6\underset{..}{abc}$$

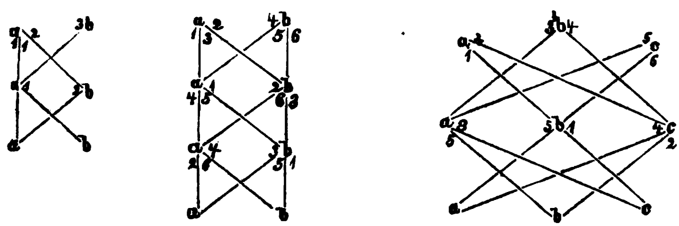
$$\text{biquadratum} \qquad = \underset{..}{a^4} + 4\underset{..}{a^3b} + 6\underset{..}{a^2b^2} + 12\underset{.\ .}{a^2bc} + 24\underset{..}{abc}$$

Ut jam investigemus numeros coefficientes formis praescriptos, consideremus tot modis prodire quodvis formae membrum in potestate, quot transpositiones literarum in eo membro dari possunt; ita in cubo ab $a+b$ formae a^2b+ab^2 membrum, ut a^2b, prodit ter, quia tres ejus transpositiones seu conflationes; sic in biquadrato ipsius a^2b^2 formationes sunt sex, et in cubo de $a+b+c$ ipsius abc transpositiones sunt sex

1	aab	1	aabb	1	abc
2	aba	2	abab	2	acb
3	baa	3	abba	3	bac
		4	baab	4	bca
		5	baba	5	cab
		6	bbaa	6	cba

Id lineis ductis numeros eosdem ascriptos habentibus sic apparebit:

pro aab pro aabb pro abc



Quot vero sint transpositiones literarum Formae, nondum quod sciam determinatum extat, cum tamen inter primaria sit problemata Combinatoriae Artis. Id aliquando cum potestatibus polynomiorum aliisque hujusmodi in navi per otium sum consecutus. Multo post Cl. Joh. Bernoullius me admonente hanc eandem quam nunc dabo regulam, etsi paulo aliter expressam invenit. Igitur in exemplum, quod sit regulae intelligendae sufficiens, esto forma $a^5b^4c^3d^3e^2f^1g^1$, quaeritur quot modis ejus elementa transponi possint. Est autem gradus $5+4+3+3+2+1+1$ seu decimi noni. Dico numerum transpositionum esse proditurum, si multiplicentur invicem continue numeri Combinatorii (supra expositi) qui designant quot sint 19 rerum 4niones, 19—4 rerum 3niones, 19—4—3 rerum 3niones, 19—4—3—3 rerum 2niones, 19—4—3—3—2 rerum 1niones, 19—4—3—3—2—1 rerum 1niones. Quod etiam per productos continuorum sic poterit enuntiari, ut Numerus Transpositionum formae $a^5b^4c^3d^3e^2f^1g^1$ sit

$$\frac{19,19-1,19-2,19-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \;„\; \frac{19-4,19-4-1,19-4-2}{1\,.\,2\,.\,3} \;„$$

$$\frac{19-4-3,19-4-3-1,19-4-3-2}{1\,.\,2\,.\,3} \;„\; \frac{19-4-3-3,19-4-3-3-1}{1\,.\,2},$$

$$\frac{19-4-3-3-2}{1} \;,\; \frac{19-4-3-3-2-1}{1}.$$ Ita a^2b^2 habebit transpositiones $\frac{4,4-1}{1\,.\,2} „ \frac{4-2,4-2-1}{1\,.\,2} = \frac{4.3\,,\,2.1}{1.2\,,\,1.2} = 6.$

Porro omnis Numerus Transpositionum Formae, quem et Productum combinatoriorum appellare possis, cum alias habet proprietates memorabiles, tum hanc imprimis egregiam, ut ipse et exponens gradus, ad quem forma assurgit, non possint esse primi inter se. Unde sequitur, si exponens gradus sit numerus primitivus, necesse esse ut dividat numerum transpositionum formae in gradu, ubi tamen intelligo transpositionem quae varietatem pariat, qualis non est forma cujus elementa coincidunt ut a^2, a^3. Unde in his numerus situum non est nisi unitas. Hinc porro consequitur, ut si nomina sint numeri rationales, potestas polynomii post detractam formam invariabilem ejusdem gradus residuum relinquat, ita comparatum, ut ipsum et exponens gradus non possint esse primi inter se: et ideo cum exponens est primitivus, necessario residuum divisibile sit per exponentem. Nempe si e, item a, b, c etc., sint numeri integri et $x=a+b+c+$ etc., tunc $x^e-\underset{\cdot\cdot}{a}^e$ et e nunquam sunt primi inter se, et ideo si e sit primitivus, erit $x^e-\underset{\cdot\cdot}{a}^e$ divisibilis per e. Supra autem exposui, per $\underset{\cdot\cdot}{a}^e$ me intelligere $a^e+b^e+c^e+$ etc. seu summam ex potestatibus omnium partium ipsi x assignatarum.

Quodsi a, b, c, sint unitates erit $a^e=a=1$ et $\underset{\cdot\cdot}{a}^e=\underset{\cdot\cdot}{a}=x$, ergo x^e-x et e nunquam sint primi inter se, et proinde si numerus e sit primitivus, erit x^e-x divisibilis per e. Quae Numeri Primitivi proprietas Reciproca esse reperitur, ut si e non sit primitivus, etiam x^e-x per e dividi non possit, sed tantum habeant aliam communem mensuram.

Hinc tandem duci potest aliquid hactenus Analyticis incognitum, aequatio nempe generalis pro Numero primitivo, nempe quoties et solum quoties haec aequatio datur in integris $n^y-n=fy$ vel (si n non sit divisibilis per y) $n^{y-1}-1=gy$, tunc numerus y est primitivus. Et pro n substitui potest numerus integer quicunque atque adeo totidem proprietates reciprocae numeri primitivi habentur. Cumque ex numeris simplicissimus omnium (post unitatem cujus potestates non sunt hujus loci) sit 2, ideo simplicissima pro primitivo aequatio erit $2^y - 2 = fy$ vel $2^{y-1} - 1 = gy$. Hinc cum aequatio ista sit transcendens, nullius scilicet certi gradus quando quidem ipsa quantitas y quae exponentem ingreditur, indeterminata est; hinc mirum non est, neminem prius dedisse aequationem generalem exprimentem naturam numeri primitivi: nam nos ipsi primum hoc aequationum transcendentium genus in Analysin introduximus, mentione ejus facta cum nostram Magnitudinis Circuli expressionem per simplicissimam seriem in Actis Eruditorum Lipsiensibus ederemus, cujus deinde magnum in Geometria interiore usum ostendimus ad aequationes complurium Linearum ex Geometria non bene exclusarum Locales exhibendas et tangentes earum aliasque proprietates Calculo quem exponentialem appellavi, non minus commode inveniendas, quam si Algebraicae, id est certi gradus essent.

Obiter etiam notare operae pretium est, si n sit 10 et y primitivus nec sit 2 nec 5, adeoque non dividat 10, tunc cum locum habeat aequatio supradicta $10^{y-1} - 1 = gy$, consequens esse, ut 99999 etc. tam diu continuando, donec numerus ipsorum 9 sit $y-1$, quoties et solum quoties y est primitivus, succedat divisio. Hoc interim non prohibet minorem numerum 999 etc. per y dividi posse, ut si y sit 13, potest numerus 999999 dividi per 13; unde consequens est, etiam constantem ex 9 duodecies repetito posse dividi per 13, ut debet. Multa etiam ex his circa numeros perfectos et partes aliquotas colliguntur, quae persequi non est hujus loci.

Hactenus data est potestas polynomii simplicis, ut $a+b$ vel $a+b+c$ vel $a+b+c+d$, et ita porro. Progrediamur jam ad polynomium affectum potentiis alicujus quantitatis, ut $a+bx$ vel $a+bx+cx^2$ vel $a+bx+cx^2+dx^3$ etc. id est ad Formulam rationaliter integre formatam ex x, nempe ad hanc quantitatem primariam, assumtis secundariis coefficientibus a, b etc. Unde si sit $y = a+bx + cx^2$ etc., soleo dicere y dari ex x relatione rationali integra, ubi tamen saepe non refert utrum ipsae quantitates secundariae (quae, cum x variatur, constantes intelliguntur) numeris integris, an fractis vel etiam surdis sint aliquando exprimendae. Manifestum autem, potestatem affecti polynomii a potestate simplicis non differre, nisi quod quantitas secundaria semper ducta intelligitur in potentiam ipsius x, quam afficit. Verbi gratia cum quadratum ipsius $a+b+c$

fuerit $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, manifestum est ipsius $a+bx+cx^2$ quadratum fore $a^2+b^2x^2+c^2x^4+2abx+2acx^2+2bcx^3$, eadem ergo membra et praefixos membris numeros manere, tantum si secundum x ordinanda sit producta potestas, divelli a se invicem quae antea in eadem forma cohaerebant, cum x abesse vel unitati aequalis intelligeretur. Ita ex quadrato ordinato secundum x fiet

$$a^2+2abx+2acx^2$$
$$\qquad\qquad b^2x^2+2bcx^3+c^2x^4.$$

Sed quo promtius appareat ordinatio, redibimus ad numeros pro literis, faciemusque

$$y = 10+11x+12x^2+13x^3+14x^4+15x^5+16x^6,$$

$$\begin{array}{lllllll}
\text{fiet } y^2 = 10^2 & +2.10.11x & +2.10.12x^2 & +2.10.13x^3 & +2.10.14x^4 & +2.10.15x^5 & +2.10.16x^6 \\
 & & +1.11.11 & 2.11.12 & 2.11.13 & 2.11.14 & 2.11.15 \\
 & & & & 1.12^2 & 2.12.13 & 2.12.14 \\
 & & & & & & 1.13^2 \\
y^3 = 10^3 & +3.10^2.11x & +3.10^2.12x^2 & +3.10^2.13x^3 & +3.10^2.14x^4 & +3.10^2.15x^5 & +3.10^2.16x^6 \\
 & & 3.10.11^2 & 6.10.11.12 & 6.10.11.13 & 6.10.11.14 & 6.10.11.15 \\
 & & & & & 6.10.12.13 & \\
 & & & 1.11^3 & 3.11^2.12 & 3.11^2.13 & 6.10.12.14 \\
 & & & & & 3.11.12^2 & 3.10.13^2 \\
 & & & & & & 3.11^2.14 \\
 & & & & & & 6.11.12.13 \\
 & & & & & & 1.12^3
\end{array}$$

ubi apparet progressus ad potestates altiores aperta lege combinationis, quae haec est, ut in valore ipsius y (polynomii affecti seu formulae) membrum quodlibet coefficiens habeat gradum formalem aequalem gradui potestatis ab y et gradum virtualem aequalem gradui potestatis ab x ad quam refertur, numeri autem veri praefixi sint numeri transpositionum quem recipiunt elementa membri. Exempli causa in y^3 membra sunt 10^3, $10^2.11$, $10^2.12$, 10.11^2 etc., quae omnia habent gradum formalem 3tium, quia constant ex quantitatibus tribus 10.10.10, vel 10.10.11 etc., Sed quia gradus virtualis fit ex summa notarum ultimarum quas habent Numeri assumtitii, hinc in $10.10.10x^0$ gradus virtualis est $0+0+0=0$, in $10.10.11x^1$ est $0+0+1=1$, in

$10.10.12x^2$ est $0+0+2=2$, in $10.11.11x^2$ est $0+1+1=2$, in $10.10.13x^3$ est $0+0+3=3$, in $10.11.12x^3$ est $0+1+2=3$, et ita porro. Numeri autem praefixi sunt paulo ante explicati, nempe ipse $10^2.11$ vel 10.11^2 praefigitur 3, ut supra formae a^2b, et ipsi $10.11.12$ vel $10.12.13$ vel $11.12.13$ praefigitur 6, ut supra formae abc.

Sed ecce Theorema Generale pro potestate quacunque, nempe posito

$$y=10+11x+12x^2+13x^3+14x^4+15x^5 \text{ etc.}$$

$$\text{et } y^e=20+21x+22x^2+23x^3+24x^4+25x^5 \text{ etc.}$$

$$\text{erit } 20=10^e \text{ et } 21=e.10^{e-1}.11 \text{ et } 22=e.10^{e-2}.12+\frac{e,e-1}{1.2}10^{e-2}.11^2$$

$$\text{et } 23=e.10^{e-1}.13+e,e-1,10^{e-2}.11.12+\frac{e,e-1,e-2}{1.2.3}10^{e-3}.11^3$$

$$\text{et } 24=e.10^{e-1}.14+e,e-1,10^{e-2}.11.13+\frac{e,e-1}{1.2}10^{e-2}.12^2$$

$$+\frac{e,e-1}{1.2},e-2,10^{e-3}.11^2.12+\frac{e,e-1,e-2,e-3}{1.2.3.4}10^{e-4}.11^4$$

et ita porro, ubi membrorum quidem combinatoria formatio ea est quam paulo ante exposuimus ita ut membri gradus quidem formalis semper sit e, gradus vero virtualis ipsius in valore ipsorum 20, 21, 22 etc. sit respective 0, 1, 2 etc. Sic $10^{e-3}11^2.12^1$ habet gradum formalem $e-3+2+1=e$, gradum virtualem $0(e-3)+1.2+2.1=4$, nam reperitur in valore ipsius 24. Numeri autem praefixi sunt numeri transpositionum, quas membri elementa recipiunt, seu producti combinatoriorum, sed generaliter expressi. Ex. gr. $10^{e-3}11^2.12^1$ habet gradum formalem e, itaque praefigendus fit, si invicem ducantur e rerum 2niones $\left(\frac{e,e-1}{1.2}\right)$ et $e-2$ rerum 1niones $\left(\frac{e-2}{1}\right)$ secundum regulam supra explicatam.

Quodsi in valore ipsius y, nempe $10+11x+12x^2+13x^3$ etc. esset $10=0$, nihilominus quidem formula haec generalis nostra pro valore ipsius y^e locum haberet: etsi enim 10 fiat 0, non tamen omnes quantitates per potestates ipsius multiplicatae evanescent, quanquam ita prima fronte videatur, nam supersunt ii, in quibus exponens ipsius 10 fit 0, quoniam 0^0 non est 0, sed 1. Quoniam tamen maxima saltem pars evanescit, praestat nullam mentionem fieri ipsius 10; itaque ex valore praescripto generali ipsius y^e fiet alius pro 10, 11, 12, 13 etc. substituendo respective 11, 12, 13, 14 etc. et deinde totum multiplicando per x^e, fietque valor ipsius y^e is qui esse debet si sit $y=11x+12x^2+13x^3+14x^4$ etc. Quodsi absint simul 10 et 11 (vel 10 et 11 et 12, et ita porro), eo casu in valore ipsius y^e praescripto pro $10+11x+12x^2+13x^3$ etc. loco 10, 11, 12, 13 etc. substituantur respective 12, 13, 14, 15 etc. (vel 13, 14, 15, 16 etc.) et totum multiplicetur per x^{2e} (vel x^{3e}), habebiturque valor ipsius y^e posito y esse $12x^2+13x^3+14x^4$ etc. (vel y esse $13x^3+14x^4+15x^5$ etc. aut ita porro).

Tradita jam ratione excitandi potestates ex formula, superest ut contra ex formula radices extrahamus. Sunt autem radices duplices, purae aut affectae. Purae dicuntur, cum valor potestatis datur absolute et pure, unde ex valore radicis, extrahendo radicem puram habetur latus potestatis seu quantitas. Veluti si valor ipsius yy detur per meras cognitas seu per formulam $10+11x+12x^2$ etc., habebitur y extrahendo ex formula radicem quadraticam. Sed si plures ipsius y potestates simul concurrant in aequatione ut si sit $y^2+gy=ah$, posito a, g, h significare formulas per x, tunc valorem ipsius y invenire est extrahere radicem affectam, seu extrahere radicem non ex quantitate aliqua cognita (quanquam res interdum eo reducatur) sed ex aequatione. Incipiemus a radicibus puris tanquam facilioribus.

Hic vero illud praeclare evenit, ut methodus extrahendi radicem ex formula, in methodo generali excitandi potestatem formulae jam contineatur. Nam si quidem e sit numerus integer, erit y^e id quod vulgo vocant potestatem, nempe unitas, latus, quadratum, cubus, biquadratum etc. prout e est 0 vel 1 vel 2 vel 3 vel 4 etc. Sed si e sit fractus, y^e est radix ex x, veluti si sit $e=\frac{1}{m}$, erit $y^e=\sqrt[m]{y}$. Itaque in theoremate nostro potestatum continentur etiam radices, cum e est fractus, cujus numerator est 1, denominator vero numerus integer. Quin et si numerus e sit, ut ita dicam, semifractus, id est cujus tam numerator quam denominator sit integer major unitate, quo casu y^e idem valet quod $y^{n:m}$, quae est potentia radicum seu $\boxed{n}\sqrt[m]{y}$ vel radix potentiarum $\sqrt[m]{y^n}$, nihilominus locum habebit theorema. In exemplo simplicissimo ponamus $e=\frac{1}{2}$ seu $y^e=\sqrt[2]{y}$; si jam sit $y=10+11x+12x^2+13x^3$ etc., et $\sqrt[2]{y}=20+21x+22x^2+23x^3$ etc. ponaturque facilitatis causa, quod semper effici potest, ut 10 sit 1, fiet $20=10$ et $21=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{\sqrt{10}}$

et $22=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{\sqrt{10}}-\frac{1}{4,1.2}\,\frac{11^2}{10\sqrt{10}}$ et $23=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{\sqrt{10}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{11.12}{10\sqrt{10}}$ $+\frac{1.3}{8,1.2.3}\cdot\frac{11^3}{10^2\sqrt{10}}$. Et ita porro 24, 25 etc. habebuntur.

Possunt vel ex hoc solo Theoremate extractionis Radicis Quadraticae per seriem infinitam nullo negotio inveniri dimensiones arearum Circuli, Ellipseos, Hyperbolae, et arcuum quoque, per seriem scilicet infinitam. Sit exempli causa Circuli radius 1, sinus x, sinus complementi y, erit $y=\sqrt{(1-xx)}$. Fit $10=1$ et $11=0$ et $12=-1$ et 13 vel 14 vel 15 etc. $=0$. Sit $y=20+21x+22x^2$ $+23x^3$ etc., fiet $20=1$ et $21=0$ et $22=-\frac{1}{2}$ et $23=0$ et $24=-\frac{1}{4,1.2}$ et $25=0$ et $26=\frac{1.3}{8,1.2.3}$ et $27=0$ et $28=-\frac{1.3.5}{16,1.2.3.4}$. Atque adeo tandem erit

$$y=\sqrt{(1-xx)}=1-\frac{1}{2,1}x^2-\frac{1}{4,1.2}x^4-\frac{1.3}{8,1.2.3}x^6-\frac{1.3.5}{16,1.2.3.4}x^8-\frac{1.3.5.7}{32,1.2.3.4.5}x^{10}-\frac{1.3.5.7.9}{64,1.2.3.4.5.6}x^{12}\text{ etc.}$$

et

$$\int ydx=x-\frac{1}{2,1,3}x^3-\frac{1}{4,1.2,5}x^5-\frac{1.3}{8,1.2.3,7}x^7-\frac{1.3.5}{16,1.2.3.4,9}x^9-\frac{1.3.5.7}{32,1.2.3.4.5,11}x^{10}\text{ etc.}$$

quae est area zonae circularis, quam ductus radio parallelus sinus complementi abscindit, quaeque adeo praeter radium et sinum complementi etiam sinu recto et arcu continetur. Sed arcus ipse erit

$$x+\frac{1}{2,1,3}x^3+\frac{1.3}{4,1.2,5}x^5+\frac{1.3.5}{8,1.2.3,7}x^7+\frac{1.3.5.7}{16,1.2.3.4,9}x^9\text{ etc.}$$

Operae pretium etiam est, Canonem generalem Polynomii affecti contrahere ad Canonem generalem Polynomii simplicis, ponendo $x=1$, perinde ac si fuisset $y=10+11+12+13$ etc. Sed ita pro membro simplice Canonis polynomii affecti ponenda est forma integra in Canone Polynomii simplicis, quoniam enim x abest, non amplius divelli necesse est a se invicem membra ejusdem formae. Exempli causa in Canone Polynomii affecti non possunt in unum conjungi $10^{e-1}12$ et $10^{e-1}13$ et $11^{e-1}12$, quoniam cum x primum dat $10^{e-1}12x^2$, secundum $10^{e-1}13x^3$, tertium $11^{e-1}12x^e$, quod postremum in Canone polynomii affecti non occurrit nisi latenter: nisi malius adjicere illi jam tum eas formulas, quas in casu 10, vel 10 et 11, vel 10 et 11 et 12 simul evanescentium substituendas tantum praescripsimus, quod utique sano sensu permissum est. Sed in Canone polynomii simplicis statim possunt conjungi membra omnia, ut adeo quodammodo in speciem magis sit compositus Canone affecti. Sed operae pretium erit utriusque Canonis initia comparare inter se, aspectui subjiciendo.

Sit $y=10+11x+12x^2+13x^3+14x^4+15x^5$ etc.

$$\begin{array}{llll}
y^e=10^e+e.10^{e-1}.11x & +e.10^{e-1}.12x^2 & +e.10^{e-1}.13x^3 & +e.10^{e-1}14x^4 \text{ etc.} \\
 & \frac{e,e-1}{1.2}10^{e-2}11^2\ldots & e,e-1,10^{e-2}.11.12.. & e.e-1,10^{e-2}11.13.. \\
 & & \frac{e,e-1,e-2}{1.2.3}10^{e-3}11^3.. & \frac{e,e-1}{1.2}10^{e-2}.12^2.. \\
 & & & \frac{e,e-1}{1.2}.e-1,10^{e-3}11^2.12.. \\
 & & & \frac{e,e-1,e-2,e-3}{1.2.3.4}10^{e-4}.11^4..
\end{array}$$

Sit $y = 10+11+12+13+14+15$ etc., poterimus tantum in proximo valore ipsius y^e omittere x cum suis potentiis tanquam posito x vel x^2 vel x^3 etc. esse 1 et cuivis membra subscribere.. vel etc., exempli causa pro $e.10^{e-1}.11x$ scribendo $\underset{..}{e.10^{e-1}.11}$, vel $\underset{\text{etc.}}{e.10^{e-1}.11}$, omittendo in sequentibus quae jam in forma semel posita continentur; itaque valor polynomii ita stabit

$$y^e = 10^e+\underset{\text{etc.}}{e.10^{e-1}.11}+\underset{\text{etc.}}{\frac{e,e-1}{1.2}10^{e-2}.11^2}+\underset{\text{etc.}}{e,e-1,10^{e-2}.11.12}$$

$$+\underset{\text{etc.}}{\frac{e,e-1,e-2}{1.2.3}10^{e-3}.11^3}+\frac{e,e-1}{1.2}.e-1,10^{e-3}.11^2.12+e,e-1,e-2,10^{e-3}.11.12.13$$

et ita porro; vel quia non amplius indigemus numeris fictitiis ad polynomium simplex, quando cessantibas potentiis ipsius x, cessant potentiae virtuales ad eas relatae, ideo faciendo

$y = l + m + n + p +$ etc., fiet

$$y^e = l^e \quad + \; e l^{e-1} m$$

$$\frac{e,e-1}{1.2} l^{e-2} m^2 + e\,,\, e-1\; l^{e-2} mn$$

$$\frac{e,e-1,e-2}{1.2.3} l^{e-3} m^3 \quad \frac{e,e-1}{1.2}\,,\, e - 2\, l^{e-3} m^2 n + e, e-1, e-2\, l^{e-3} mnp$$

$$\frac{e,e-1,e-2,e-3}{1.2.3.4} l^{e-4} m^4 \quad \frac{e,e-1,e-2}{1.2.3}\,,\, e - 3 l^{e-4} m^3 n \quad \frac{e,e-1}{1.2} . e-2, e-2-1 l^{e-4} m^2 np + e,e-1,e-2,e-3\, l^{e-4} mnpq$$

$$\frac{e,e-1}{1.2}\,,\, \frac{e-2,e-3}{1.2} l^{e-4} m^2 n^2$$

Unde si quaeratur speciatim potestas binomii seu si sit $y = l + m$, canon pro potestate quacunque erit

$$y^e = l^e + \frac{e}{1} l^{e-1}.m + \frac{e,e-1}{1\,.\,2} l^{e-2} m^2 + \frac{e,e-1\,,e-2}{1\,.\,2\,.\,3} l^{e-3} m^3 + \frac{e,e-1,e-2,e-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} l^{e-4} m^4 + \text{ etc.}$$

quod sufficiebat ad valorem quantitatis $\sqrt{(1-xx)}$ ejusque summatricis seu areae circularis (posito $e = \frac{1}{2}$) vel etiam arcus circuli (posito $e = -\frac{1}{2}$) per seriem infinitam, ita ut supra, exhibendum.

Dignissimum etiam consideratu est, quomodo series (quae generaliter sumta infinita vel potius indefinita est) finiat se ipsam, quando communi modo succedit extractio. Ut si sit $y = a^2 + 2abx + b^2x^2$, fiet $10 = a^2$ et $11 = 2ab$ et $12 = b^2$, et radix quadratica de $a^2 + 2abx + b^2x^2$ seu $y^{1:2}$ vel $\sqrt[2]{y}$ dabit $\pm a \pm bx$ et termini altiores x^3, x^4 etc. evanescent. Nam quia $e = \frac{1}{2}$, ideo coefficiens ipsius x erit $+ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{aa}}.bb - \frac{1}{4}.\frac{1}{1.2}\;\frac{1}{aa\sqrt{aa}} 4aabb = 0$ et coefficiens ipsius x^3 erit $- \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{aa}}.2ab.bb + \frac{1}{8}.\frac{1.3}{1.2.3}\;\frac{1}{a^4\sqrt{aa}} 8a^3b^3 = 0$, similisque destructio in altioribus deprehendetur. Ita simul et quantitatem ordinariam habebimus si datur, et extraordinariam (per seriem infinitam) si ordinaria non datur.

Atque ita absoluta est excitatio potestatum pariter ac purarum radicum extractio. Nunc pergendum est ad illud quod in Algebra olim difficillimum habitum est, extractionem radicum ex aequationibus, quas et vocare solemus Radices affectas. Constat Vietam excogitasse modum radices extrahendi ex aequationibus numerice datis saltem per appropinquationem, sed perplexis admodum praeceptis. At per series nostras infinitas semper valor radicis habetur, etiamsi aequatio sit literalis. Aequatio generalis data cujus incognita est z sit: $0 = 10y - 11z + 12z^2 + 13z^3 + 14z^4 + 15z^5$ etc., quaeritur valor ipsius $z = 21y + 22y^2 + 23y^3 + 24y^4$ etc. Ne diutius teneam, reperietur esse $21 = 10 : 11$ et $22 = 12.21^2 : 11$ et $23 = 2.12.21.22 + 13.21^3, : 11$ et $24 = 12.22^2 + 2.12.21.23 + 3.13.21^2.22 + 14.21^4, : 11$ et ita porro hac lege combinationis, ut in quovis valore quaesitarum 21, 22, 23 etc. denominator sit 11, numerator vero sit summa omnium membrorum possibilium quae formantur ex una quantitate ab initio data (quales sunt 01, 10, 11, 12 etc.) et reliquis jam inventis (21, 22, 23 etc.) ita ut gradus virtualis facti ex combinatione jam inventarum membrum ingredientium sit idem qui gradus virtualis quantitatis cujus valorem ingreditur membrum, et gradus formalis ejusdem combinationis (nempe jam inventarum) sit idem qui gradus virtualis quantitatis ab initio datae in membro. Numeri autem veri praefigendi cuivis membro erunt numeri transpositionum, quas recipiunt quantitates jam inventae in dicta combinatione. Exempli causa in valore ipsius 24 membrum ut $13.21^2.22$ habet unam ab initio datam quantitatem 13, et reliquarum jam inventarum combinatio est 21.21.22, cujus gradus virtualis est $1+1+2=4$ (summa notarum posteriorum) idem qui quantitatis quaesitae 24; sed ejusdem combinationis gradus formalis est 3 (sunt enim tres quantitates invicem ductae) idem cum gradu virtuali ipsius 13.

Hujus Theorematis maximus usus est non tantum ad extractiones radicum ex aequationibus finitis, sed etiam ex infinitis, cum valor quantitatis ut y datur per aliam x ope formulae rationalis integrae infinitae seu per infinitam seriem, quaeriturque vicissim valor ipsius x ex ipsa y. Exempli causa Numeri dati $1+x$ logarithmus (qui sit y) potest intelligi $\frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ etc. ut Nicolaus Mercator primus in Logarithmotechnia sua demonstravit, quaeritur vicissim dato logarithmo y quis sit numerus $1+x$. In

canone nostro z	01	11	12	13	14	15 etc.
erunt x	-1	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{5}$ etc.

Si ergo $x = 21y + 22y^2 + 23y^3 + 24y^4 +$ etc., fiet $21 = 1$, $22 = \frac{1}{1.2}$, $23 = \frac{1}{1.2.3}$, $24 = \frac{1}{1.2.3.4}$, et ita porro. Ac proinde dato logarithmo y, numerus $1+x$ erit $1 + \frac{1}{1}y + \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3 + \frac{1}{1.2.3.4}y^4$ etc., quod alia quidem via non una olim facilius deprehendi, quanquam jam ante me a Newtono et Jacobo Gregorio aliisque observatum, sed tamen hinc quoque ut patet derivatur. Et hanc viam insistendo, unde tam elegans eventus minus expectetur, eo ipso pulchra theoremata sese offerunt, dum scilicet multitudo illa quantitatum, etsi finitarum, valde tamen in progressu crescentium, semper summam tam simplicem praebet. Alia via cujus ope ex Numero Logarithmus, ex sinu vel sinu complementi aut tangente aliave functione arcus circuli, et vicissim ex Logarithmo Numerus, ex arcu sinus aut sinus complementi aut tangens aliave functio per seriem infinitam a me inventa est, ducta ex aequationibus differentialibus, jam a me exposita est olim in Actis Eruditorum Lipsiensibus; cujus usus etiam ad alia est maximus, cum per eam constructio habeatur aliqua lineae transcendente non tantum per rectarum tangentium aut circulorum osculantium, sed etiam differentialium altiorum proprietates datae.

XVI.

DE CONDENDIS TABULIS ALGEBRAICIS, ET DE LEGE DIVISIONUM.*)

Tabulas Algebraicas condendas saepe cogitavi, quemadmodum Arithmeticas habemus; sed Algebraicae debent esse generales, quarum duplex erit usus, unus ut quousque porrigitur Tabula non amplius calculo prolixo sit opus in exemplis specialibus, sed sim-

*) Leibniz hat bemerkt: 5. Januar. 1694.

plici substitutione; alter ut detegatur lex progrediendi. Porro Additionum et Subtractionum Tabulas condere non admodum refert, nam ubi addenda concordant inter se, res redit ad additiones unitatum prodeuntque Numeri ex Arithmetica communi. Ubi vero addenda non concordant, nihil aliud fieri potest, quam ut juxta se invicem scribantur, velut a+b. Idemque est dicendum de subtractione. Sed in multiplicatione, etsi nihil commune habeant termini dati, tamen novi prodeunt termini quaesiti, nempe datorum producti dimensionum altiorum; ut si a+b ducas in l+m, prodit al+am +bl+bm. Nihil aliud ergo erit multiplicationum generalissimarum tabula, quam repraesentatio combinationum cujuslibet termini unius aggregati vel formulae cum quolibet termino alterius formulae; itaque si aggregata fiant ex solis quantitatibus simplicibus sibi additis (quod est simplicissimum et generalissimum, quia talis quantitas simplex vel litera pro quacunque alia utcunque composita supponere potest), erit multiplicatio duorum aggregatorum ex simplicibus inter se invicem, aggregatum binionum ex omnibus literis datis, demtis binionibus literarum ejusdem aggregati; et multiplicatio trium aggregatorum ex simplicibus inter se invicem erit aggregatum ternionum ex omnibus literis datis, demtis ternionibus continentibus duas ejusdem aggregati literas. Et generaliter Multiplicatio in se invicem quotcunque aggregatorum seu formularum simplicibus seu literis sumtis velut inter se diversis, erit aggregatum combinationum exponentis ejusdem cum numero formularum seu Multiplicantium, demtis combinationibus continentibus plures literas ejusdem formulae. Ceterum si coincidant quaedam literae, ut cum diversae formulae invicem coincidunt inter se ex toto vel parte, excitanturque potentiae, vel aliae formulae regulares vel quantitates figurae; tunc ex hac regula diversorum generali ducitur regula consentientium. Semper enim in Characteristicis casus identitatis in generali regula diversitatis continetur. Sic nihil prohibet, ut exemplo utar, pro 2a seu pro a+a intelligi a+b, ubi b supponit pro a. Jam a+b reducitur ad regulam generalem. Hinc igitur potentias tam aequales, ut quadratos, cubos etc., quam et pronicas, velut Triangula, Pyramides, aliasque id genus formulas licebit excitare, et legem earum derivare ex regula generali. Licebit et nostram exponere Tabulam Formularum,*) et varia inde

*) Ueber ormularum hat Leibniz geschrieben: Formarum.

resultantia Theoremata perelegantia, quorum ex potissimis est regula mea generalis pro Excitatione Potestatum ex Polynomiis, et regulae prodeuntes, si adhibeas a, aa, a^3, a^4 etc. item ab, abc, abcd etc. vel literas pro ipsis assumtas. Sed specialiter utiles sunt Tabulae, ubi eadem servatur litera ut x ejusque potentiae in terminis omnibus occurrunt, ceterae vero sunt hujus coefficientes. Aptissima enim et compendiosissima ratio numeros exprimendi fit per Terminos ejusdem radicis in progressione Geometrica sumtos eorumque coefficientes. Hic ergo speciatim multiplicationes, ut et alias operationes peragere convenit; et operationes communis Arithmeticae sunt tantum casus speciales unius methodi generalis. Et quidem plures formulas ad eandem literam ordinatas simplicium coefficientium invicem multiplicando Tabulam perutilem dabit. De divisione aliisque operationibusque mox dicam.

Ceterum ut hae operationes procedant melius, Tabulaeque sint magis ordinatae et ad progressionum Leges detegendas aptae, consideravi Vulgarem Speciosam hoc defectu laborare, quod literas assumit indistinctim iisque utitur, et proventus calculi considerat, ipsarum autem literarum originarias quasdam in calculo suppositas relationes non exprimit, sed tantum subintelligendas relinquit. Unde fit, ut quia characteres datorum non exprimunt omnes datorum inter se relationes, etiam in proventu calculi ex datis ducti pulcherrimae in rei natura persaepe latentes harmoniae non facile animadvertantur. Exemplum esto: Sint duae aequationes in se invicem ducendae $x^3+ax^2+bx+c=0$ et $x^2+dx+e=0$, prodit

$$\begin{array}{l} x^5+ax^4+bx^3+cxx+dex+ec=0, \\ \quad +dx^4+adx^3+dbxx+ebx \\ \qquad\quad +ex^3+eaxx \end{array}$$

ubi parum ordinis atque harmoniae apparet, et si qua apparet, nascitur ex nostro monito imperfecte observato, dum literae alphabeticae eo ordine collocantur in formula, quo noscuntur dispositae in Alphabeto. Sed ut perfectus sit ordo, nihilque artificii characteristici omittatur, quod nos in consideratione producti juvare possit, loco unius formulae ponamus $10x^3+11x^2+12x+13x=0$, et loco alterius $20x^2+21x+22=0$, adhibendo pro literis numeros fictitios ad quantitates coefficientes designandas. Ita enim ex solo charactere coefficientis inspecto agnoscere possumus, quicquid de coefficiente quaeri potest, nempe tum ad quam formulam pertineat, tum cujusnam ipsius x potentiae sit **coefficiens. Habet enim character hic seu numerus duas notas, dextram et sinistram. Sinistra** indicabit formulam, dextra potentiam ad quam **refertur. Sic 21** est coefficiens ipsius x seu x^1 ob notam sinistram 1, et quidem in formula secunda ob notam dextram 2. Hoc modo etiam conservatur lex Homogeneorum, in quavis formula coefficienti eam ascribendo dimensionem, quam nota ejus dextra indicat. Ita quivis terminus formulae prioris erit tertiae, quilibet posterioris secundae dimensionis. Jam productum intueamur

$$\left.\begin{array}{llllll} 10.20x^5 & +11.20x^4 & +12.20x^3 & +13.20x^2 & & \\ & +10.21 & +11.21 & +12.21 & +13.21x & \\ & & +10.22 & +11.22 & +12.22 & +13.22 \end{array}\right\} = 0$$

In eo omnia sunt mire ordinata et harmonica, ita ut extemporanea scriptione exhiberi possint sine calculo et meditatione. Lineae horizontales multiplicantur per eundem numerum formulae unius, prima per 20, secunda per 21, tertia per 22. Lineae transversales (ut 10.20, 10.21, 10.22) multiplicantur per eundem formulae alterius, prima per 10, secunda per 11, tertia per 12. In ejusdem columnae quolibet membro idem est aggregatum notarum dextrarum, quod exponenti potentiae x in eadem columna supplemento est ad exponentem potentiae supremae, scilicet hic quinarium. Quin amplius tot sunt ejusdem columnae seu termini membra, quot sunt modi id aggregatum conficiendi. Quodvis autem membrum est combinatio numeri ex una et numeri ex alia formula. Denique si numeri supponant pro quantitatibus ejus dimensionis, cujus exponens est nota ipsorum dextra, etiam in producto lex homogeneorum observatur. Ut alia taceam, quae aspectus subministrat. Si productum ex pluribus consideremus, multo adhuc manifestior est usus. Unum illud Theorema, quo Vieta suum opus clausit, Cartesius cepit, ex **ordinata illa multiplicatione statim** resultans; quanti sit usus ad constitutionem aequationum indagandam, jam ab aliis est explicatum. **Nempe si in se invicem ducas** **x+1, x+2, x+3, x+4** etc., fiet

$$\begin{array}{llllll} x^n & +1x^{n-1} & +1.2x^{n-2} & +1.2.3x^{n-3} & +1.2.3.4x^{n-4} & \text{etc.} \\ & \;\;2 & \;\;1.3 & \;\;1.2.4 & \;\;\text{etc.} & \\ & \;\;3 & \;\;1.4 & \;\;2.3.4 & & \\ & \;\;4 & \;\;2.3 & \;\;\text{etc.} & & \\ & \;\;\text{etc.} & \;\;2.4 & & & \\ & & \;\;3.4 & & & \\ & & \;\;\text{etc.} & & & \end{array}$$

ubi secundus terminus omnes uniones, tertius omnes biniones, quartus omnes terniones absolutorum in radicibus continet, et ita porro.

Sed pergendum est ab Multiplicationibus ad Divisiones, in quibus Resultantia magis sunt implicata. Peculiares schedas calculis in eam rem implevi. Nempe dividendos $20, 20x+21$, $20x^2+21x+22$, $20x^3+21x^2+22x+23$, $20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$, et ita porro, dividendo per divisores nempe 10, $10x+11$, $10x^2+11x+12$, $10x^3+11x^2+12x+13$, et ita porro, reperientur regulae seu harmoniae tales: Numerator in omni quotiente divisionis componitur ex residuis anterioribus ejusdem divisionis, et ita quidem ut coefficiens primi termini quotientis fiat ex quotiente primi termini primi residui, coefficiens secundi termini quotientis ex coefficiente primi termini secundi residui, et ita porro, tantum multiplicando coefficientem per potentiam ipsius 10 sublatam ad eum gradum, qui aequetur gradui potentiae cujus in quotiente debet esse efficiens. Ita si dividas $20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25$ per $10x^2+11x+12$, erit quotiens

$$\begin{array}{llll}
10^3.20x^3 & +10^3.21x^2 & +10^3.22x & +10^3.23 \\
 & & & -10^2.11.22 \\
 & -10^2.11.20 & -10^2.11.21 & -10^2.12.21 \\
 & & -10^2.12.20 & +10.11^2.21 \\
 & & +10.11^2.20 & +(2)10.11.12.20 \\
 & & & -11^3.20
\end{array}$$

divis. per 10^4, cujus numeratoris coefficientes fiunt sic: nempe coefficiens ipsius x^3 ex 20 mult. per 10^3, et coefficiens ipsius x^2 ex $10.21-11.20$ multipl. per 10^2, et ita porro. Est autem 20 residui initium in divis. $20x+21$ per $10x^2+11x+12$, et $10.21-11.20$ est residui initium in divis. $20x^2+21x+22$ per idem $10x^2+11x+12$, et ita porro.

Stante expressione nostra, manenteque eodem divisore, Quotientes sequentes seu dividendorum altiorum quoad coefficientes scilicet ejusdem in ordine termini continent quotientes inferiorum, adeoque, manente eodem divisore, quocunque existente dividendo, idem est in omnibus quotientibus coefficiens termini primi, idem est in omnibus quotientibus coefficiens termini secundi, et ita porro. Sic in omnibus divisionibus factis per $10x^2+11x+12$ coefficiens termini primi in quotiente est $20:10$, et coefficiens termini secundi in quotiente est $10.21-11.20,:10^2$, coefficiensque termini tertii est $10^2.22-10.11.21-10.12.20+11^2.20,:10^3$, et ita porro.

Atque ita ejusdem divisoris Quotientes inferiores fiunt ex superioribus, quorum scilicet dividendi sunt altiores, eo ipso scilicet dum membra quotientis altioris continentia characteres dividendi altioris, in inferiore deficientes, in quotiente inferiore evanescunt. Hoc praevideri poterat, revera enim eodem modo dividitur, manente eodem divisore, quantumcunque descendat dividendus, nec discrimen est nisi in gradibus ipsius x, non vero in coefficientibus, ut sive $20x^3+21x^2+22x+23$ sive $20x^2+21x+22$ dividas per $10x+11$, nihil refert in quotientibus quoad coefficientes.

Similis est nexus inter Residua, anteriora et posteriora, non tamen ejusdem divisoris, nec ejusdem dividendi, sed earum divisionum, quarum Residua sunt similia, seu in quibus eadem est differentia inter Exponentes potentiae ipsius x in termino primo divisoris et dividendi. Ita si dividas $20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$ per $10x^2+11x+12$, vel si dividas $20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25$ per $10x^3+11x^2+12x+13$, residui terminus primus primo, secundus secundo coincidet, sed tertius terminus qui est in posteriore divisione, non habet locum sed evanescit in priore, quia ubique ingrediuntur characteres 25 vel 13, qui in priore divisione absunt. Et generaliter, cum eadem est differentia exponentum terminorum maximorum ipsius x, divisiones inferiores continentur in superioribus tanquam casus speciales quoad quotientes pariter et residuos. Idque praevideri poterat, nam

$$\frac{20x^4+21x^3+22x^2+23x+24}{10x^2+11x+12} \text{ nascitur ex}$$
$$\frac{20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25}{10x^3+11x^2+12x+13},$$

ponendo tam 25 quam 13 esse nihilo aequales.

In omni divisione Residuus est quaedam continuatio Quotientis suae divisionis. Nam si continuari posset divisio, terminus primus Residui daret novum quotientem, quod proinde fit in dividendo altiore.

Hinc eodem existente divisore, inter se consentiunt (in Numeratoribus scilicet et Coefficientibus) Terminus primus Residui in Divisione et Terminus ultimus Quotientis in Divisione proxime altiore.

Sic dividendo per $10x^2+11x+12$, terminus primus residui in divisione residui ubi dividendus est $20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$ consentit cum termino ultimo residui in divisione, ubi dividendus

$20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25$, utrobique scilicet prodit $23-10^2.11.22-10^2.12.21+10.11^2.21+(2)10.11.12.20-11^3.20$. e hic consensus est omnimodus, non ut paulo ante, quasi ı in altero per modum casus generalis in regula speciali conetur.

Residuus nascitur ex Quotiente suae divisionis. Idque fit hoc : Ultimus terminus quotientis multiplicetur per totum divisorem, ltimus seu secundus a fine per divisorem summo seu primo no minutum, antepenultimus seu tertius a fine per divisorem us summis seu primo et secundo minutum, et ita porro. raliter: Terminus quivis quotientis multiplicatur respective per orem tot terminis ab initio minutum, quot ipse terminus quos abest ab ultimo; aggregatum horum productorum subtur a totidem novissimis terminis dividendi, quot sunt ipsa ucta; atque ita prodit Residuus.

Tota dividendi ratio reducitur ad sublationem incognitarum licium, tanquam casus specialis ad generalem. Exhibeamus in exemplo.

Sit Divisor	$10x^2+11x+12$,		
Dividendus	$20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$,		
Operatio contracta	$30x^4+31x^3+32x^2+33x+34$,		
Quotiens purus	$30x^2+31x+32,:10$,		
tio adhaerens cujus		Lex Operationis	
erator est Residuus	$33x+34$,	$10.20=10.30$	
miuatur est Divisor	$10x^2+11x+12$	$10.21=10.31+11.30$	
		$10.22=10.32+11.31+12.30$	
		etc. etc. etc.	

Unde tollendo ordine incognitas 30, 31 etc. habetur cujusque ex his incognitis valor, et ex his Quotiens pariter ac Residuus.

Superest ut demonstremus valorem Quotientis ac Residui, ıque aequationes in Lege Operationis contentas. Itaque tota npli Operatio explicita exhibeatur, ordinatione tali quae comlissima visa est:

Ordinatio Divisionis Characteristicae.

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0		Quotiens purus
Operatio contracta	30	+31 .	+32 . .	+33 . . .	+34		
Dividendus	20	+21 .	+22 . .	+23 . . .	+24 . . .	.	$+20\frac{x^2}{10}$
Operatio		−11.20 10	−12.20.	. . . . . .	. . . . . .	.	.
			−10.11.21 +11.11.20 10^2	−10.12.23. +11.12.20.	. . . .	. .	+10.21 −11.20 $\frac{x^1}{10^2}$
				−10.10.11.22 +10.11.12.20 +10.11.11.21 −11.11.11.20 10^3	−10.10.12.22 +10.12.12.20 +10.11.12.21 −11.11.12.20	. . . .	+10.10.22 −10.12.20 −10.11.21 +11.11.20 $\frac{x^0}{10^3}$
				Residuus			

Divisor $+10x^2$ $+11x$ $+12$

Hic $30=20$, $31=+21+\frac{-11.20}{10}$, $32=22+\frac{-12.20}{10}+\frac{-10.11.21+11.11.20}{10^2}$

$$33=23+.+\frac{-10.12.21+11.12.20}{10^2}+\frac{-10.10.11.22+10.11.12.20+10.11.11.21-11.11.11.20}{10^3}$$

$$34=24+.+.+\frac{-10.10.12.22+10.12.12.20+10.11.12.21-11.11.12.20}{10^3}$$

Stellulae replendae forent (quae loca vacua designant) si divisor esset altior, et in eo esset etiam 13, si scilicet esset $10x^3+11x^2+12x+13$.

Jam valores ipsarum 30, 31, 32, 33, 34 consideremus:

$30=20$, $31=21-\frac{11.20}{10}$ seu $31=21-\frac{11.30}{10}$ seu $10.21=10.31+11.30$

$32=22-\frac{12.30}{10}-\frac{11.31}{10}$ seu $10.22=10.32+11.31+12.30$

$33=23-.-\frac{12.31}{10}-\frac{11.32}{10}$ seu $10.23=10.33+11.32+12.31$.

Evanescit hic 13.30, quia 13 abest. Et ita porro. Habemus ergo aequationes in Lege Operationis contentas. Apparet etiam ex nuda inspectione, valores Quotientis et Residui esse quales assignavimus.

Quoniam ergo Aequationes in Lege Operationum contentae simplici admodum regularitate procedunt, et earum incognitae sunt simplicis gradus, hinc regula divisionum reducitur ad regulam jam a me inventam tollendi simplices incognitas, ejusque harmoniis suas proprias seu speciales addit. Sed placet adjicere modum inveniendi valores Terminorum Operationis 30, 31 etc. maxime proprium et analysi convenientem, qui consistit in comparatione successus cum quaesito. Nempe Quotientis partem puram $30x^2+31x+32$ multiplicabimus per divisorem $10x^2+11x+12$, producto addamus residuum $33x+34$, et proveniet formula coincidens cum dividendo $20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$. Unde habebuntur aequationes comparatitiae, easdem quas ante $10.20=10.30$, et $10.21=10.31+11.30$, et $10.22=10.32+11.31+12.30$, et $10.23=10.33+11.32+12.31$, et $10.24=10.34+*+12.32$, ubi ex natura residui in ultima aequatione contingit hiatus per stellulam expressus, nempe abest 11.33. Cujus rei ratio est, quod Termini Operationis, qui residuum constituunt, hoc loco 33 et 34, non nisi per 10 multiplicantur, non vero per 11 et 12. Secus fuisset, si continuata fuisset divisio. In calculi executione fingere licebit, quasi etiam adesset 11.33, ascribendo ei notam seu includendo, ut regularitas melius servetur. Ex his etiam habebitur series infinita pro Quotiente inveniendo sine Residuo, continuata divisione. Item inquisitio maximi communis divisoris, si rursus divisorem dividas per residuum, ubi $10x^2+11x+12,:,33x+34=40x+41,:33,,+42:,33x+34$. Ubi si continuando nulla prodit communis mensura, sequitur sublatio literarum in aequationibus, et ultimus residuus, ut hoc loco 42, fit $=0$. Ita prodibunt omnes aequationes simplices necessariae ad sublationem literarum.

XVII.

DIVISIONES FORMULARUM REPERIRE.

Divisores formulae sunt ejusdem Generatores. Itaque magni ad analysin momenti est, ad inveniendas analogias, extractiones, depressiones, aliosque usus eruere latentes divisores formularum, sive literalium sive numericarum, quas assumta litera pro unitate possumus reducere ad literales. Formula autem hic utiliter considerari potest instar aequationis, quoniam divisores aequationis etiam formulae sunt divisores. Ex aequatione tollantur irrationales, et quidem quantum sine exaltatione aequationis licet. Aequatio secundum literam aliquam ordinetur, qualis x, quae vocetur **litera ordinalis.** Quodsi aequatio sit divisibilis per formulam, a qua litera ordinalis absit, oportet ut ultimus terminus aequationis et reliqua ejus pars habeant divisorem communem (facile nota methodo reperiendum) qui erit divisor aequationis, adeoque formulae datae. Deinde videbimus an aequatio divisibilis sit per formulam, in qua ipsa contineatur litera ordinalis, quae erit simplex vel quadratica vel cubica vel biquadratica etc. veluti $h+x$ vel $h+kx+xx$ vel $h+kx+lxx+x^3$ vel $h+kx+lxx+mx^3+x^4$, et ita porro. Id vero an fieri possit, et quomodo, sic investigabimus.

Ante omnia praeparetur aequatio data liberando eam a fractionibus, et summum ejus terminum a coefficiente, quod notum est semper fieri posse multiplicando radicem aequationis. Praeparata jam aequatione, investigetur an habeat radicem rationalem, seu an sit divisibilis per formulam simplicem $h+x$, ita enim habebitur valor rationalis ipsius x seu erit $x=-h$. Inventum jam est ab Harrioto, quantitatem h quaesitam fore unum ex divisoribus ultimi termini aequationis datae. Esto **aequatio data** $p+qx+rxx+sx^3+tx^4+x^5$; quaerantur divisores rationales integri ipsius p. Unus ex ipsis debebit esse 10, et si quaesitum succedit, unoque ex iis assumto pro 10, tentandum erit an $10+x$ dividat aequationem datam. Sed quia ubi plures sunt divisores (tam affirmativi quam negativi) saepius tentanda esset divisio, ideo minuatur vel augeatur radix aequationis datae, pro x ponendo $y+e$ eumque valorem substituendo in aequatione data, habebitur aequatio nova secundum ordinalem y, cujus terminus ultimus erit $p+qe+ree+se^3+te^4+e^5$, nam reliquos ejus terminos investigare, nihil nunc quidem necesse est. Quodsi aequatio data est divisibilis, erit etiam nova divisibilis eodem modo, et cum datae divisor quaesitus debeat esse $h+x$, novae divisor erit $h+e+y$. Itaque $h+e$ debet esse unus ex divisoribus ultimi termini aequationis novae, qui vocetur (h), ergo $(h)-h=e$, ac proinde ex divisoribus ultimi termini aequationis datae seligatur ille, cujus differentia ab aliquo divisore termini ultimi aequationis novae sit quantitas assumta e. Quodsi plures divisores ex aequatione data hoc praestent, varietur quantitas assumta, pro e ponendo f et ex succedentibus divisoribus rursus deligatur is, qui ab aliquo divisore aequationis novae secundae differet quantitate altera assumta f. Et tam diu continuabitur variatio, donec divisor omnis, qui non constanter succedit, excludatur. Ita reperto h, tentanda est divisio per $h+x$. Quae si non succedit vel si nullus divisor non excluditur, impossibilis erit divisio quaesita, et aequatio data non habet radicem rationalem. Ut autem calculus facilior, loco ipsius e vel f vel g etc. quantitatis assumtae assumatur 1a vel 10a vel 100a vel —1a vel —10a vel —100a, literam a habendo pro unitate. Atque haec quidem jam habentur apud alios, repetenda tamen erant, ut caetera facilius intelligerentur.

Sed si aequatio sit divisibilis per formulam alicujus gradus, adeoque reducibilis licet non per valorem radicis rationalem, haec methodus nondum applicata habetur; reperi autem olim posse eam huc quoque promoveri magna facilitate nec minore fructu. Et quidem semper verum manet, ultimum terminum aequationis datae fore divisibilem per h, ultimum vel infimum terminum formulae dividentis quaesitae. Quodsi ea jam sit quadratica, nempe $h+kx+xx$, in ea pro x substituatur $e+y$ et terminus infimus novae secundum y prodeuntis erit $h+ke+ee$, quae quantitas sit (h) ut ante, unus nempe ex divisoribus termini ultimi aequationis novae, fiet $(h)-h$ divisibilis per e. Idem est in altioribus formulis, nam si esset cubica $h+kx+lxx+x^3$, pro x substituatur $e+y$, et ultimus terminus formulae novae erit $h+ke+lee+e^3$, id est (h) unus ex divisoribus ultimi termini aequationis novae, itaque rursus $(h)-h$ erit divisibilis per e. Generaliter ergo, ut investigetur an aequatio data alicujus rationalis integra sit divisibilis per talem formulam rationalem inferiorem secundum eandem literam ordinalem, velut x, notentur omnes divisores ultimi termini aequationis datae, et pro x ponendo $y+e$, notentur divisores ultimi termini aequationis novae, et ex divisoribus prioribus seligantur illi quorum differentia a posterioribus sit divisibilis per assumtam quantitatem e, utcunque e varietur; ita facile excludentur divisores non succedentes, cum quaevis variatio ad excludendum servire possit. Quodsi nullus non excludatur divisor ultimi termini aequationis datae, non potest ea aequatio vel formula dividi per formulam talem inferiorem, cujuscunque sit gradus, idque adeo praeclarum huic methodo inest, quod omnes gradus una eademque opera excluduntur. Sed si post quotcunque variationes ipsius e aliquis supersit divisor (duos autem minimum superesse necesse est, sibi respondentes seu ultimum terminum producentes), ex hypothesi poterunt etiam inveniri caeteri coefficientes formulae dividentis k, l, m etc., prout ea scilicet minus aut plus assurgit. Et licet diversa nonnihil operatione opus est pro graduum diversitate, est tamen communis processus, ut mox patebit.

Incipiamus a Formula dividente quadratica $h+kx+xx$, quae transformata, pro x ponendo $e+y$, dabit formulam novam, cujus ultimus terminus erit $h+ke+ee=(h)$. Ob inventas jam h et (h) notamque e, unam ex assumtis, cui respondet (h), habebitur et $k=(h)-h-ee,:e$, qui est integer, adeoque habebitur et formula dividens quaesita $h+kx+xx$, et porro quantitatem $(h)-h-ee,:e$ quia recurret, per compendium vocabimus 110.

Si formula dividens sit cubica $h+kx+lxx+x^3$, fiet $h+ke+lee+e^3=(h)$ et, quia $(h)-h-e^3$ dividi potest per e, proveniens compendio appellabimus 310 et fiet $k+le=310$. Sed pari jure pro e assumendo f, loco (h) sumatur (2h) et loco $(2h)-h-f^3,:f$ assumatur 311, fiet $k+lf=311$, ergo fiet $l=310-311,:,e-f$ $=320$, et fiet $k=310-320\,e$.

Si formula divideus sit biquadratica $h+kx+lxx+mx^3+x^4$, fiet $h+ke+lee+me^3+e^4=(h)$ et $(h)-h-e^4,:e=410$, adeoque $k+le+mee=410$, et pari jure faciendo $(2h)-h-f^4,:f=411$, fiet $k+lf+mff=411$; vocetur 420 et $\begin{matrix}+el+eem\\-f\ -ff\end{matrix}=410-411$, et $410-411,:,e-f$ vocando 420 fiet $l+\begin{matrix}em\\f\end{matrix}=420$. Sed pari jure faciendo $(3h)-h-g^4,:g=412$, et $410-412,:,e-g=421$, fiet $l+em=421$; habebimus $(f-g)m=420-421$, fiatque $420-421,:$
g.

$,f-g=430$;: proditque $m=430$ et $l=420=(e+f)430$, et $k=410 - 420e + 430(e+f)e - 430ee$, et fiet $k=410-420e+430ef$.

Si formula dividens sit surdesolida $h+kx+lxx+mx^3+nx^4+x^5$, fiet $h+ke+lee+me^3+ne^4+e^5=(h)$. $(h)-h-e^5$,: $e=510$, adeoque $k+le+mee+ne^3=510$, et pari jure $k+lf+mff+nf^3=511$. Sit $510-511$,:, $e-f=520$, fiet $l+m(e+f)+n(ee+ef+ff)=520$, et pari jure ob g, fiet $l+m(e+g)+n(ee+eg+gg)=521$, unde $m(f-g)+ne(f-g)+n(ff-gg)=520-521$, et posito $520-521$,:,$f-g=530$, fiet $m+n(e+f+g)=530$ et pari jure $m+n(e+f+\gamma)=531$ et $n(g-\gamma)=530-531$. Sit $530-531$,:,$g-\gamma=540$, et fiet tandem $n=540$ et $m=530-540(e+f+g)$ et $l=520-530(e+f)+540(ee+2ef+ff+eg+fg)-540(e+ef+ff)$ seu fiat $l=520-530(e+f)+540(ef+eg+fg)$ et

$$k=510-520e+\begin{array}{l}530e(e+f)\\-530ee\end{array}\begin{array}{l}-540e(ef+eg+fg)\\+540ee(e+f+g)\\-540e^3\end{array}$$

seu $k=510-520e+530ef-540efg$.

Sit ergo formula dividens aequatione data inferior eamque dividens quaecunque veluti $h+kx+lxx+mx^3+nx^4+x^5$, pro x substituatur $e+y$, fiet aliqua formula secundum y, cujus infimus terminus (h) erit $h+ke+lee+me^3+ne^4+e^5$, cujus maximus terminus quicunque e^c posito c exponentem gradus formulae dividentis, uti c hoc loco $=5$, fiat $(h)-h-e^c$,: $e=910$, adeoque erit $910=k+le+mee+ne^4$. Similiter pro e ponendo f, et pro (h) ponendo $(2h)$, fiat $(2h)-h-f^c$,: $f=911=k+lf+mff+nf^3$, quarum duarum aequationum ope tollendo k, et faciendo $910-911$,:,$e-f=920$, fiet $920=l+m(e+f)+n(ee+ef+ff)$; pro f assumatur g, cui respondeat $(3h)$, et ita fiet $(3h)-h-g^c$, : $g=912=k+lg+mgg+ng^3$ et $910-912$,:,$e-g=921$, prodibit $921=l+m(e+g)+n(ee+eg+gg)$, et fiet $920-921=m(f-g)+ne(f-g)+n(ff-gg)$. Sit $920-921$,: ,$f-g=930$, prodibit $930=m+n(e+f+g)$. Ita habetur et m, sed quia adhuc superest invenienda litera n, opus est adhuc una variatione, itaque loco ipsius g assumatur Θ, et fiat $931=m+n(e+f+\Theta)$, et tollendo m fiet $930-931=n(g-\Theta)$, et sit $930-931$,: ,$g-\Theta=940$ et fiet $n=940$; itaque $m=930-940(e+f+g)$, $l=920$

$$-930(e+f)+940\begin{array}{l}(e+f,e+f+g)\\-940(ee+ef+ff)\end{array}$$

seu $l=920-930(e+f)+940(ef+eg+fg)$;

$$\text{denique } k = 910 - 920e + 930e\,(e+f) - 940e\,(ef+eg+fg)$$
$$\qquad\qquad + 930ee \qquad + 940ee(e+f+g)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - 940e^3$$

seu $k = 910 - 920e + 930ef - 940efg$.

Generale ergo theorema huc redit: Quaeritur formula aequ tione data inferior eamque dividens $h + kx + lxx + mx^3 + nx^4 +$ e Ponamus h esse divisorem ultimi termini aequationis datae m thodo superiore inventum, reliqui coefficientes k, l, m, n etc. sic i venientur: posito quantitates assumtas variandae aequationi dat fuisse e, f, g, Θ etc. nempe pro x ponendo $y+e$ vel $\nu+f$ vel $\omega+$ vel $z+\Theta$ etc. et divisores ultimi termini convenientes in quav variatione fuisse (h) vel (2h) vel (3h) vel (4h) etc., erit

$$\begin{array}{lllllll}
k = & 910 & -920e & +930ef & -940efg & +950efg\Theta \\
l = & & +920 & -930e & +940ef & -950efg \\
 & & & f & eg & ef\Theta \\
 & & & & fg & eg\Theta \\
 & & & & & fg\Theta \\
m = & & & +930 & -940e & +950ef \\
 & & & & f & eg \\
 & & & & g & e\Theta \\
 & & & & & fg \\
 & & & & & f\Theta \\
 & & & & & g\Theta \\
n = & & & & +940 & -950e \\
 & & & & & f \\
 & & & & & g \\
 & & & & & \Theta \\
u & & & & & +950
\end{array}$$

posito non procedi variando ultra e, f, g, Θ, λ, seu non esse for mulam dividentem plus quam quinque dimensionum, columnae e valores tot adjicientur (dementur) quot gradus accedent (decedent formulae.

Postremo 910, 920, 930 etc. sunt integri quorum valores si prodibunt:

$910 = (h) - h - e^c$,:l	$911 = (2h) - h - f^c$,:f	$912 = (3h) - h - g^c$,:g	$913 = (4h) - h - \Theta^c$,:$\Theta$
$920 = 910 - 911$,:,e-f	$921 = 910 - 912$,:,e-g	$922 = 910 - 913$,:,e-Θ	
$930 = 920 - 921$,:,f-g	$931 = 920 - 922$,:,f-Θ		
$940 = 930 - 931$,:,g-Θ			

et continuando quot aequationes accedent uni columnae horum novissimorum valorum, tot etiam caeteris adjicientur.

XVIII.

DE ORTU, PROGRESSU ET NATURA ALGEBRAE, NONNULLISQUE ALIORUM ET PROPRIIS CIRCA EAM INVENTIS.

Algebram esse scientiam praestantissimam summique usus, dubium nullum est; sed cum multum adhuc absit a perfectione, nihil magis progressus ejus impedit, quam quod iis, qui non nisi vulgatis quibusdem problematis sunt exercitati, aut nondum in ejus arcana penetrarunt, absoluta creditur. Errant etiam qui ab ea quidvis sibi pollicentur et de viribus ejus sentiunt immoderati et pro arte inveniendi atque analysi in universum ac scientiarum principe habent. Algebra certe sive Numerosa sive Speciosa, quam nonnulli pro recondita admodum arte venditant, per se nihil aliud est quam Scientia Numerorum indefinitorum seu generalium, et eundem plane modum procedendi habet quam Arithmetica communis, si recte advertas, potestatem vero majorem, quia enim numeros indefinitos perinde tractat ac certos, nullo discrimine datorum seu cognitorum et ignotorum seu quaesitorum. Hinc non tantum ad habitudines datorum et quaesitorum ostendendas variaque problemata indirecta solvenda inservit, sed et generalia detegit, et ipsius Arithmeticae communis fontes aperit. Exemplo facili res erit illustrior.

Sit numerus 12 seu $10+2$, vel $a+b$ (posito 10 esse a et 2 esse b) multiplicandus in se ipsum; conferantur jam varii processus:

I. communis	II. communis explicatus	III. Algebraicus per Numeros distincte processum exhibentes
12	1^0+2	$10+2$
12	1^0+2	$10+2$
24	2^0+4	$10.2+2.2$
12	$1^{00}+2^0$	$10.10+\quad 10.2$
144	$1^{00}+4^0+4$	$10.10+(2)10.2+2.2$

IV. Algebraicus per literas

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline ab+bb \\ aa+\ ab\quad\ \ \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

ubi processus III et IV ostendit, productum Numero ex duabus partibus a, b vel 10 et 2 constante, per semet multiplicato, sive quadrato, constare ex duobus quadratis partium aa et bb (seu 10.10 et 2.2), itemque duplo ab seu duplo facto ex partibus 10 et 2. Ex quo theoremate ducta est extractio radicis quadraticae in communi Arithmetica usitata. Patet autem hinc, Algebram ipsam literis alligatam non esse, pro literis enim scribi possunt aliae notae, adeoque et numeri quicunque, modo numeri instar literarum tractentur, hoc est tanquam notae generales, non tanquam numeri communes. Itaque multiplicando 10 in 2 algebraice, non scribo 20, sed 10.2, et multiplicando 2 in 2 scribo 2.2, non 4; unde bis 10.2 non scribo 40, sed (2)10.2, ubi (2) est numerus verus, 10 et 2 sunt supposititii seu generales, stantes pro numeris quibuscunque, ut appareat, quis non pro his tantum, sed et pro aliis omnibus debeat esse processus, cum alias in processu I vel II theorema illud generale, quod ex processu III et IV elucet, non deprehendatur. Utile autem saepe animadverti pro literis vulgo usitatis, ut in processu IV, adhibere numeros supposititios, ut in processu III, tum multas alias ob causas, tum quia hoc modo calculum algebraicum continue examinare possum in numeris imo per abjectionem novenarii, quod artificium cum egregii sit usus et summae facilitatis, miror tamen nondum fuisse usurpatum. Si igitur problema proponatur, Algebra potest semper literas vel etiam numeros supposititios (quod alias communiter tantum in regula falsi faciunt, sed processum literali similem non observando) assumere pro veris quaesitis, modo procedam ut in processu III aut IV. Verbi gratia postulatur a me numerus talis naturae, ut subtractus a suo quadrato relinquat triplum sui. Ponamus illum numerum esse 2, et cum eo procedamus, quemadmodum procederemus cum numero vero, si daretur, ut disceremus an satisfaciat, modo interim recordemur ipsum forte non esse verum, sed supposititium adeoque non actualiter addendum, subtrahendum, multiplicandum, sed tantum designative, ut in processu III. Sumamus igitur numerum 2, eumque subtrahamus a suo quadrato 2.2 fiet 2.2—2, qui debet esse aequalis triplo numeri seu (3).2, ubi 3 includo parenthesi quia est numerus verus, cum reliqui sint supposititii. Quoniam ergo 2.2—2 est aequale (3)2, hinc considerando an talis aequatio reddi possit simplicior, observo dividi posse utrumque latus per 2, fietque 2—(1) aequale (3), ergo addendo utrobique (1) ut numerus supposititius ab uno latere solus habeatur, fiet 2 aequ. (3)+(1) seu 2 aequ. (4). Invenimus ergo numerum supposititium per verum, nempe 2 quaesitus seu suppositus valet (4), quod verum esse deprehenditur. Nam numerus 4 subtractus a suo quadrato 16 relinquit triplum sui, nempe 12. Breviter: 2.2—2 aequ. (3)2; ergo 2—(1) aequ. (3) adeoque 2 aequ. (4). In literis ita staret: aa—a aeq. 3a, ergo a—1 aequ. 3 adeoque a aequ. 4. Ex his paucis totius Algebrae fontes recte consideranti apparere arbitror.

Hinc autem causa apparet, cur Algebra seu Scientia numerorum generalium tractet de quantitate in universum. Id enim ideo accidit, quia revera omnis quantitas seu magnitudo exprimitur numero partium rei; ita magnitudo ulnae exprimi potest bipedalitate seu binario pedum, quia ulna ex duobus pedibus constat. Quoniam vero numerus partium rei quantitatem exprimens variat, prout alia atque alia unitas seu mensura assumitur, nam ejusdem ulnae magnitudo exprimetur per 24, si mensura seu unitas sit digitus sive pollex; hinc numerus quantitatem rei exprimens est indefinitus. Algebram autem de numeris indefinitis agere jam ostendimus, ergo et de rerum quantitatibus in universum. Hinc si numerus quantitatem ulnae exprimens sit *v*, quadrata ulna exprimetur per *vv*, duae ulnae per 2*v*, quadratum vero cujus latus sint duae ulnae erit 4*vv*, quod deprehendetur verum, qualiscunque assumatur unitas; nam s unitas sit pes, *v* valebit 2, ergo 4*vv* erit 16, itaque quadratum cujus latus sint duae ulnae, erit 16 pedum quadratorum. Sin unitas sit pollex, *v* valebit 24 et *vv* seu quadratum de 24 erit 576, et 4*vv* erit quater quadratum de 24 seu 2304, ac proinde quadratum cujus latus sint duae ulnae, erit 2304 pollicum quadratorum, quod cum 16 pedibus quadratis coincidit, et utraque significatio vel etiam alia quaecunque exprimetur per 4*vv*.

Interim Algebra cum Mathesi universali non videtur confundenda. Equidem si Mathesis de sola quantitate ageret sive de aequali et inaequali, ratione et proportione, Algebram (quae tractat quantitatem in universum) pro parte ejus generali haberi nihil prohiberet. Verum Mathesi subesse videtur quicquid imaginationi subest, quatenus distincte concipitur, et proinde non tantum de quantitate, sed et de dispositione rerum in ea tractari. Itaque duae ni fallor sunt partes Matheseos generalis, Ars combinatoria de rerum varietate ac formis sive qualitatibus in universum quatenus distinctae ratiocinationi subjiciantur, deque simili ac dissimili, et

Logistica sive Algebra de quantitate in universum. Sane ars deciphrandi, ars ludendi latrunculis, similiaque quae ad Mathesin pertinere judicantur, magis Combinatoria quam Algebra indigent, et ipsa Algebra quatenus quantitates certis formulis exprimit, quae relationes quantitatum varias significant, arti combinatoriae subordinatur et per eam promoveri potest, ut suo loco ostendam. Longeque differt relatio quantitatum in genere ab ea specie, quae dicitur ratio seu proportio. Ita in circulo datur quaedam relatio (non vero proportio sive ratio) semper eadem inter sinum et sinum complementi, sed ad eam exprimendam assumendum est tertium quid nempe radius, interdum et alia plura, cum tamen ad proportionem intelligendam sola relata inter se comparari sufficiat.

Multo magis aberrant, qui Algebram pro arte inveniendi habent et tanquam omnium Scientiarum humanarum principem venerantur, quasi scilicet omnes relationes rerum per Algebram exprimi possint, quae tamen de solis agit relationibus numerorum in genere et aliarum rerum quatenus numeri in iis considerantur. Tantumque abest ut cum Algebra coincidat illa Logicae pars praestantissima, ut potius videamus ipsam hactenus Algebram haerere in suismet praeceptis inveniendis et superioris artis auxilio indigere, multum enim adhuc abest a perfectione, veluti mox patebit. Quidam etiam Algebram cum Analysi, aut Analysin cum arte inveniendi confundunt, quorum utrumque erroneum est; quaedam enim operationes Algebraicae sunt syntheticae, ut quando certas aequationum formulas per genesin sive synthesin ex suis radicibus excito et deinde oblatam aequationem in harum Tabula quaero. Et longe differt Ars inveniendi ab Analysi, scilicet ut genus a specie, nam ut ex hoc exemplo apparet, quaedam per synthesin felicius inveniuntur. Et Tabulae, series, loca, revera instrumenta sunt syntheseos. Itaque si problema aliquod difficile soluturus incipiam a casibus facilioribus ejusdem problematis, aut ab aliis problematibus cognatis, ut scilicet progressionem aliquam deprehendam aut alioqui mihi viam ad quaesitum sternam, revera synthesin exerceo, et si integram aliquam Scientiam vel scientiae partem tractans secundum combinatoriae artis leges omnia problemata potiora percurram a simplicioribus ad magis composita procedens, et ita solutionem problematis alicujus quaesiti inter caetera quasi aliud agendo reperiam, id per synthesin invenisse censebor. Sed quatenus problema aliquod ita tracto ac si nullum aliud problema jam solutum vel ab alio vel a me ipso uspiam terrarum extaret, eatenus analytice procedo, reducens scilicet problema propositum ad alia faciliora, et haec rursus ad alia adhuc faciliora, donec ad prima postulata reducatur, quae per se in potestate sunt; sed methodus pure analytica valde rara est, et vix in mortalium potestate, et plerumque aliquid syntheseos seu theorematum vel problematum praeinventorum admiscetur. Et sunt quaedam quae nisi per tabularum jam conditarum subsidia sive per quandam inductionem demonstrativam non invenientur. Est autem analysis rursus vel per saltum vel per gradus; posterior pulchrior est, sed nondum satis explicata, prior vulgo analyticis usitatior est, sed non aeque menti satisfacit, et saepe ad prolixos calculos ducit.

Sed et Calculus in universum et ars characterum longissime distat ab Algebra; imo certum est, ne omnem quidem calculum Mathematicum ab Algebra et a Numeris pendere. Dantur enim Calculi quidam ab hactenus usitatis plane diversi, ubi notae sive characteres non quantitates sive numeros definitos vel indefinitos, sed alias plane res, verbi gratia puncta, qualitates, respectus significant. Exempli gratia (ut taceam calculum figurarum et modorum in Logica, ubi literae significant propositionum quantitates et qualitates) datur analysis quaedam peculiaris calculusque sui generis Geometriae proprius a me excogitatus, ab omni hactenus recepto toto coelo diversus, non quantitates sed situs directe exprimens, cum calculus Algebraicus situm ad magnitudinem detorqueat, adeoque in ambages abducat. Unde prolixi calculi algebraici nonnunquam oriuntur, ex quibus vix multo studio exculpitur apta constructio, quam aliquando situs inspectio communi Geometrarum Methodo nullo negotio exhibuisset. Verum quia communis illa Methodus attentione ad figuras imaginationem fatigat, et in implicationibus aegre ad exitum pervenit, hinc ipsamet quoque sui generis calculo sublevari potest; eique conjungenda est analysis Veterum per Data et Loca, cujus apud Euclidem, Apollonium, Pappum, Marinum vestigia reperiuntur.

Quoniam autem Algebra multos habet recessus non satis hactenus cognitos (neque enim insignis haec scientia satis comprehensa hactenus et in artis formam reducta est), placet ideam ejus aliquam paucis delineare. Soleo autem eam comparare cum Logica, et quemadmodum in Logica habemus Terminos simplices, Terminorum habitudines, hoc est propositiones, deinde syllogismos quibus comprobantur propositiones, et ipsam denique Methodum quae omnes istas operationes mentis ordinat ad scopum praefixum: ita in Algebra considero Numeros, Numerorum habitudines seu quasi propositiones Algebraicas (quarum potissimae sunt aequationes et analogiae), modum unam habitudinem ex alia derivandi seu syllogismos Algebraicos, et denique Methodum quae praecepta ad inventionem quasi ordinat. Numeri seu Termini simplices Algebraici sunt vel positivi vel privativi, integri (iique simplices aut figurati) vel fracti, rationales vel surdi, et impuri vel affecti, sunt etiam numeri communes vel transcendentes, et denique possibiles vel imaginarii seu impossibiles, et generantur per operationes quae sunt vel syntheticae (additio, multiplicatio, potestatis ex radice excitatio) vel analyticae (subtractio, divisio, extractio radicis) et vel actu fiunt vel aliquando tantum faciendae designantur, quod in analyticis operationibus non semper evitari potest, quia non semper actualis analysis habet locum. Magnaque hujus analyticae pars in hoc consumitur, ut quando fieri potest fracti reducantur ad integros, surdi ad rationales, surdi affecti ad puros, imaginarie expressi ad possibiles, transcendentes ad communes; sed haec interventu sequentium fiunt. Nihil etiam prohibet inter terminos simplices integram seriem vel integrum locum plurium numerorum aut quantitatum simul spectari, quando de quolibet termino vel quantitate seriei aut loci accipi potest quod asseritur, praesertim cum etiam indefinitos numeros hic considerari jam monuerimus. Habitudines numerorum sunt aequalitas (Algebristis aequatio), majoritas et minoritas (seu limites), homogeneum, proportio, commensurabilitas, analogia proportionum, aliaeque relationes magis compositae, cum ad relationem duarum quantitatum exprimendam opus est tertiam ullam vel plures ipsi homogeneas assumi, ubi magni sus est dispicere quaenam sint Homoeoptata seu similiter relata, ut enim analogia seu similitudo proportionum est ad proportionem, ita homoeoptosis ad relationem; ex. gr. sinus rectus et sinus complementi in circulo sunt homoeoptata ad radium Syllogismi Algebraici sunt collectiones unius harum habitudinum ex alia, verbi gratia transformationes, emendationes, depressiones proportionum, aequationum et analogiarum, introductio vel abrogatio legis homogeneorum, ablegata vel adhibita unitate, inventio communis mensurae, conversio aequationis in analogiam vel contra, limites aequationum seu collectio majoritatis ex aequalitate, et contra; reductio plurium aequationum ad unam ultimam vel saltem ad pauciores seu sublatio literarum, et contra dispersio unius aequationis in plures assumtis literis novis, denique extractio radicum ex aequationibus per inventionem valoris puri, quantum licet simplicis, quae est aequationum absolutissima. Methodus autem ipsa quae oeconomiam calculi totius dirigit, ostendere debet, quibusnam terminis, habitudinibus et habitudinum transformationibus et quo ordine sit utendum, ut ex datis quaesitum obtineatur, idque vel exacte (per expressiones quas natura rei patitur) vel per appropinquationes: ubi et considerandum est quaenam problemata sint definita, cum definitate ambigua (qui fons est irrationalitatis) vel plane indefinita; quo facto interdum satisfacit integra aliqua series seu locus (modo ad ipsum quoque definiendum conditiones adsint sufficientes) vel in eo maximum vel minimum. Interdum in nostra potestate est assumere aliquid cum certa quadam cautione determinante, et sane interdum dantur conditiones quaedam definientes quae admodum exoticae sunt nec ad aequationes aut alias habitudines communes facile, imo aliquando nullo modo revocari possunt, ut fit in multis problematis Diophanteis itemque in problematis Geometriae transcendentis. His denique subjici posset Usus Algebrae in Geometria et aliis partibus Matheseos, ubi inprimis ostendenda sunt haec duo nondum satis explicata, quomodo Geometricae conditiones ad calculum Algebraicum quam optime reducantur, ne postea depressionibus opus sit et contra quomodo ex absoluto jam calculo rursus constructiones Geometricae commode eliciantur, quorum prius est transitus a Geometria ad Calculum, posterius vero est reditus a Calculo ad Geometriam. Atque haec demum idea Algebrae mihi dignitati ipsius respondere videtur, quam nescio an hactenus animo satis complexi sint vel saltem prodiderint, qui de ea scripserunt.

Nunc de Historia Algebrae paucis. Platonem Pappus ait primum Methodo usum esse quaesitum assumendi tanquam inventum, quae potissimum in Algebra adhibetur. Literas vel alias notas sive species pro magnitudinibus exprimendis earumque habitudinibus intelligendis assumi nihil novum est, quid aliud enim fecit Euclides toto libro quinto? Qui Diophantum, imo qui Archimedem et Apollonium legit, ne dubitare quidem potest, quin Veteres calculo usi sint qualis in Algebra speciosa (a speciebus sive literarum notis dicta) hodie usurpatur, licet artem suppresserint. Primi

Arabes ejus Elementa quaedam videntur publicasse, forte ex libris quibusdam Graecis amissis, nisi suspicari malimus Sinensium aliorumve Indorum aut etiam Aegyptorum quaedam ad ipsos pervenisse. Scholastici quidam maxime Angli moliti sunt singulares quosdam calculos admodum subtiles circa intensiones et remissiones qualitatum et formarum, viresque ac motus, quos miror plane fuisse neglectos, ut ne quidem celeberrimus Wallisius licet ipse Anglus in sua Algebraicarum rerum historia eorum meminerit, cum tamen subsit aliquid solidi et specimen praebeatur quasi Metaphysicae cujusdam Mathematicae. Princeps eorum fuit Johannes Suisset dictus Calculator, cui addendi Thomas Bradwardinus, Nicolaus Ovem, et alii. Arabum porro Algebra circa Friderici II. tempora videtur et ad Europaeos pervenisse maximeque ab Italis primum fuisse exculta, quibus et inventio Computisticae Mercatoriae debetur. Regiomontanum nostrum intellexisse Algebram et in Geometria quoque exercuisse intelligi potest ex quibusdam problematis Geometricis, quae ipse ait se solvere posse per artem cosae, non vero Geometrice, id est in numeris, non in lineis. Circa tempora Typographiae repertae aut paulo post florebat quidam Frater Lucas de Burgo, cujus scripta Algebraica typis editorum prima sunt, etsi alios ante ipsum scripsisse ex ipsomet appareat. Porro hactenus eo res perducta erat, ut aequationes quadraticae possent solvi, quod jam habet et Diophantus. Primus mortalium Scipio Ferreus circa initium opinor superioris seculi altius ascendit modumque invenit resolvendi aequationes cubicas, neque enim ullum vel vestigium talis inventi ante ipsum hactenus apparet. Artem autem arcanam habuit dum vixit, nec nisi paucos discipulos docuit. Quorum unus forte in certamen doctrinae descendens cum Nicolao Tartalea Mathematico ingeniosissimo, proposuit ei problemata quae ad aequationes hujusmodi reducebantur. Tartalea aemulatione accensus et vinci impatiens, summa animi contentione idem inventum proprio marte feliciter extudit. Quod cum increbuisset, Hieronymus Cardamus, homo maximi ingenii et vastissimae doctrinae, invento diu inhiavit frustra, donec autoritate Gubernatoris Tartaleam Mediolanum acciri curavit, ab eoque demum artificium expiscatus est. Quo semel cognito rem variis additionibus et applicationibus locupletatam publicavit in libro, cui titulum dedit Artis magnae, ita tamen ut sibi inventionem non tribueret. Ex hoc Cardani opere apparet, sublationem secundi termini aliasque emendationes et transformationes aequationum, imo et artem comparandi aequationes cum aliis similibus Cardano non fuisse omnino ignotam. Fuit autem juvenis quidam Bononiensis Cardano familiaris, cui nomen Ludovico Ferrario, cujus florente adhuc aetate extincti vitam scripsit ipse Cardanus, quae inter opera ejus extat. Hic Ferrarius praeclaro invento Algebram uno adhuc gradu promovit, primusque omnium invenit resolutionem quarti gradus seu aequationis quadratoquadraticae, docuitque eam reduci posse ad quadraticam interventu cubicae. Originem inventi totumque processum distincte exposuit Raphael Bombellus in Algebra, Italico sermone jam superiore seculo edita. Itaque fatendum est, Algebram totam quanta nunc habetur, quatenus in perfecta aequationum resolutione seu inventione generalis radicum valoris consistit, revera Italis deberi. Neque enim Vieta aut Cartesius vel hilum adjicere potuerunt, idque adeo verum est, ut ne nunc quidem quisquam dederit aliquid unde spes sit, generaliter aequationes surdesolidas seu quinti gradus atque altiores perveniri posse. Tantum adhuc abest ut Algebra perfecta dici possit. Unde etiam intelligi potest, tantum abesse ut Algebra sit ars inveniendi, ut contra ipsismet Algebristis haereat aqua, donec auxilio superioris alicujus artis aliquando expediantur. Ea autem est Combinatoria, per quam aditum demonstratum habeo ad generales aequationum resolutiones, quantum possibile est, de quo aliquando plenius, ubi calculos exsequi licuerit, quanquam illi per ipsam hanc artem mire contrahantur: nam Scipionis Ferrei et Ludovici Ferrarii artes sunt peculiares suis gradibus, in altioribus cessant. Cartesii quoque methodus pro quarto gradu (quae est Ferrariana transformata) quasi casu tantum succedit in hoc gradu, at pro sexto et aliis paribus minime; et m e t h o d i tales valde i m p e r f e c t a e sunt, quoniam qui eas aggrediebatur, praevidere non poterat se per eas exitum consecuturum esse. Quod in tenebris micare est.

Debet quoque nonnihil Algebra Ludovico Nonio Lusitano, qui de ea superiore seculo non male scripsit, observavitque ni fallor radicem esse divisorem ultimi seu absoluti termini, quod fortasse aliis occasionem dedit longius pergendi. Literas quoque pro numeris jam Algebraici superioris seculi usurpabant, inprimis quando occurebant secundae radices quas vocant, id est quando plures incognitae erant supponendae, quin et Gulielmus Gosselinus Cadomensis in sua Algebra Lutetiae 1575 edita literis utitur pene ad

Vietaeum morem. Nihilominus Franciscus Vieta, Consiliarius et Magister libellorum supplicum Regis christianissimi, Algebrae Speciosae quae nunc frequentatur, verus parens merito habetur; is enim calculum a numeris tam cognitis quam incognitis sic ad notas sive species traduxit, ut jam certae semper formulae generales et quasi Canones habeantur, et ita artis combinatoriae usus esse possit in Algebra, nam revera auxilio hujus artis (quae de formulis earumque similitudine et habitudinibus in universum agit) debetur quicquid Speciosa super communem Algebram praestitit, quanquam eadem per numeros supposititios instar literarum adhibitos multo adhuc majore fructu consequi liceat, ut alias ostendam. Hinc jam facile fuit Vietae sua praecepta de legibus Homogeneorum aequationumque examine condere, quin et Geometriam ex Algebra et rursus hanc ex illa illustrare, dum magnitudines per lineas rectas, potestates autem per rectas in continua progressione geometrica, assumtas exprimit. Idem Vieta egregium inventum primus dedit, analysin scilicet aequationum generalem numerosam, ut scilicet radices quadraticae, cubicae, biquadraticae, surdesolidae, et affectae ex termino absoluto aequationis numericae perinde extrahantur ac vulgo radicem puram quadraticam, cubicam etc. ex numero extrahere solemus vel exacte vel quantum satis per appropinquationem, quando exacta radix non datur. Ipse autem Analysi Algebraicae per se (abstrahendo animum ab applicatione ad numeros definitos et lineas) nihil Vieta adjecit nisi quod radices plures ejusdem aequationis et genesin aequationum ex multiplicatione radicum in se invicem cognovit, ut ex ejus Sectionibus angularibus, item et Tabula sub finem operis posita intelligi potest. Caeterum Vietaea prosecuti sunt Alleaumius Andersonus, Alb. Girardus, Oughtredus, qui eleganter contraxit et plana reddidit aliasque notas compendiosas adjecit. Nec dubito quin praeclara quaedam ad Algebrae illustrationem pertinentia lateant in schedis Joachimi Jungii Lubecensis, viri excellentis (si quid ego judicare possum) cum Galilaeo et Cartesio conferendi, inter . . . .*) Algebraici habentur.

Porro novam lucem Algebrae attulit Th. Harriotus Anglus; is occasione eorum ut arbitror quae ex Nonio de divisoribus ultimi termini et ex Vieta de pluribus radicibus ejusdem aequationis

*) Schadhafte Stelle des Manuscripts.

paulo ante retulimus, cogitavit aequationes posse concipi tanquam formulas aequales nihilo, et ita produci altiores ex inferioribus in se invicem ductis, adeoque ex multiplicatione tot aequationum radicalium in se invicem, quot dimensionum est aequatio, ipsam aequationem generari. Hinc praecepta de numero radicum aequationis, de discernendis radicibus positivis et privativis, de radicum auctione et diminutione, multiplicatione et divisione, de depressione aequationum per divisionem, itemque de Aequationibus Canonicis seu generalibus, ex quarum signis et terminis datae aequationis natura, constitutio et genesis, numerusque radicum realium, positivarum, privativarum cognosci possit. Quae quidem omnia non nominato Harrioto in sua Geometria exhibuit Cartesius, Wallisio aliisque multis Harriotum exscripsisse non immerito visus, usque adeo enim omnia consentiunt ut in difficilioribus quae Harriotus inexplicata reliquit etiam Cartesius substiterit. Circa eadem tempora..... Fermatius in suprema curia Tolosana Senator feliciter prima fundamenta jecit pulcherrimae Methodi de maximis et minimis, quibus postea Huddenius et Slusius, excellentes Geometrae, inaedificaverunt; ego vero ni fallor edito in Actis Eruditorum schediasmate nuper mense... anni... colophonem imposui effecique invento novo calculi differentialis, ut jam fractas, irrationales et transcendentes non moretur quarum alias sublatio calculi laborem in immensum auget, praeterquam quod transcendentes non semper tolli possunt, quem fructum meae methodi nuper Joh. Craigius Scotus in erudito de Quadraturis libro agnovit et praedicavit.

Is status erat Algebrae, quando in scenam prodiit vir utique insignis Renatus Cartesius, edita Geometria quae licet sit egregia, tamen longe infra opinionem posita est, quam de ea vulgus concepit. Nam ipsi quidem Algebrae nihil plane quod sciam adjecit alicujus momenti, nisi forte quod comparationem aequationum (Vietae et anterioribus non ignotam) reddidit expeditiorem ac frequentius inculcavit. Circa applicationem tamen Algebrae ad Geometriam id unice in Cartesio laudo, quod linearum curvarum etiam altiorum graduum naturas aequationibus expressit. Poterat hoc et Vieta, quis dubitat? sed ille Veterum praejudicium secutus constructiones quae earum ope fiunt, tanquam parum Geometricas spernebat, quanquam et Cartesius postea eundem errorem erraverit, dum lineas illas Geometria exclusit, quae Algebrae communis calculo exprimi non possunt, et perinde locutus est ac si omnia

Geometriae problemata ad aequationes certi gradus revocari possent. Ex Cartesianae Methodi sectatoribus nemo quod sciam aliquid valde memorabile adjecit Algebrae, praeter Johannem Huddenium et Renatum Franciscum Slusium. Huddenii duae Epistolae perbreves magnam profundarum inquisitionum vim complectuntur. Slusius evitata ultima aequatione unius incognitae docuit facilius solvi problemata per loca seu per duarum incognitarum aequationes duas, Veterum artificia ad novas methodos recte accommodans. Cum vero interim et inventa Geometrica Cavalerii, Gregorii a S. Vincentio ac Guldini increbrescerent, quibus Archimedeae artes detectae sunt, mox in illis alii analytices Algebraicae beneficio multo longius processere, ex quibus excellunt Fermatius, Robervallius, Torricellius, Hugenius, Pascalius, Wallisius, Wrennus, Brounkerus, cum Heuratio Neilius, Jac. Gregorius, Barrovius, quorum praeclara inventa cum fere Geometrica potius sint quam Algebraica, nunc non membro. Nisi quod Wallisius edita Arithmetica infinitorum aliis egregiis meditationibus praelusit, quae antequam persequar, redeundum mihi est ad Johannem Pellium Anglum, Mathematicum plane insignem, qui jam antequam Cartesius increbresceret Algebraicum calculum suo quodam peculiari modo ordinavit pulchra et commoda ratione, cujus specimina extant in eleganti Algebra Joh. H. Rahnii Helvetii Germanice edita. Eundem Pellium audio habere modum aequationes omnis generis eo reducendi ut solvi possint per Tabulas Sinuum et Logarithmorum, quod si commode fieri potest, ego magni faciendum putarem, vereor tamen ut semper procedat. Novam porro lucem Algebrae et Geometriae attulit Methodus per series infinitas, cujus primus quod sciam specimen insigne dedit Nicolaus Mercator Holsatus, Geometra et Astronomus plane eximius, in Logarithmotechnia; sed longius rem provexit Johannes Neutonus Anglus, praestantissimi ingenii Mathematicus, qui ex quacunque aequatione radicem extrahit ope seriei infinitae. Ego vero ad series infinitas diversa plane ratione perveni, specimenque satis hodie notum dedi circa Circuli magnitudinem. Aliaque habeo, quibus series infinitae ni fallor in immensum promoventur. Multa etiam circa summas serierum vel progressionum sive finitarum sive infinitarum exhibendas reperi aliisque variis modis Algebram locupletavi. Pro literis Numeros (sed supposititios sive fictos) postliminio in Algebram reduxi multiplici fructu, quorum unus est quem supra tetigi quod ita semper calculum in numeris possum examinare, imo per abjectionem novenarii, quod continue ad quamvis novam operationem faciendo, errores calculi, quibus nihil est molestius, mirifice praecaventur. Excogitato calculo differentiali......*) Tetragonisticum voco, Theoremata........... circa tangentes et quadraturas et his cognata, quae alii per lineas difficulter extuderunt, nullo negotio per singularem calculandi rationem antea ignotam exhibeo et in immensum augere possum, eaque ratione ni fallor Geometriam illam abstrusiorem ad alium plane statum traduxi. Deinde ut meam Machinam Arithmeticam taceam, quae a Baculis Neperianis toto genere differt, et multiplicationes (verbi gratia) nullis intervenientibus additionibus exhibet, aliud reperi diversae naturae instrumentum mire simplex et admodum parabile, quo omnes aequationes utcunque affectae sive lineares sive numericae, quae pro magnitudine instrumenti certum gradum non excedunt, solvuntur. Proposui et modum condendi certas Tabulas, quae idem quodammodo praestarent in Algebra quod Tabulae sinuum et logarithmorum in Trigonometria, et laborem calculi valde levarent, iisque habitis multa primo aspectu dignoscerentur. Praeterea novum plane aditum aperui Algebrae transcendentis, hactenus incognitae, in qua quantitates etiam quas communis calculus exprimere non potest designantur per aequationes finitas quidem, sed gradus indefiniti, ubi ipsa quantitas incognita ingreditur in exponentem. Verbi gratia $x^x + x$ aqu. 30, cui aequationi (quae gradus est indefiniti) satisfacit x aequ. 3, quia tertia potestas de 3 addita ad 3 facit 30. Sed plerumque valor nisi in transcendentibus impossibilis est, licet per Geometriam transcendentem, imo et per numeros appropinquantes exhiberi possit. Multa etiam alia in hoc studiorum genere habeo, sed quae nunc enumerare longum foret. Et jam finiendum est, ubi illud tantum subjecero, Carolum Renaldinum, apud Patavinos Professorem Medicum, multiplicis et accuratae doctrinae virum, duo volumina in folio, ut vocant, bonae frugis plena edidisse de Resolutione et Compositione Mathematica, quibus et communem et speciosam Algebram complexus est. Sed et Joh Kersey Anglum laudata industria quoddam Algebrae corpus edidisse, cui vellem ex Joh. Collinii, non tantum in his studiis versatissimi, sed et ad instar Mersenni cujusdam Angli aliorum in-

*) Das Manuscript ist an dieser Stelle schadhaft.

dustriam excitantis et inventa conservantis promoventisque instructissima penu non vulgaria hujus artis locupletamenta accessissent. Novissime Historiam Algebrae inspersis praeceptis variisque inventis suis, justo opere dedit celeberrimus Wallisius, cui quemadmodum jam supra notavimus, haec studia multum debent. Quae nos hic cogitatis ejus et narrationibus adjecerimus, conferendo intelligentur.

XIX.

REMARQUE SUR UN ENDROIT DES NOUVEAUX ELEMENS D'ALGEBRE DE Mr. OZANAM.

L'Algèbre de Mr. Ozanam, que je viens de recevoir, me paroit bien meilleure que la plûpart de celles qu'on a vûes depuis quelque temps, qui ne font que copier Descartes et ses Commentateurs. Je suis bien aise qu'il fasse revivre une partie des préceptes de Viete, inventeur de la Spécieuse, qui méritoient de n'être point oubliés. On y trouve de plus quelques adresses très utiles dans les problêmes à la mode de Diophante. C'est fort bien fait aussi qu'il cherche de pousser les divisions, qui se doivent faire par des Polynomes irrationels, ou d'ôter l'asymmetrie du Dénominateur d'une fraction, en le multipliant aussi-bien que le Numerateur, par une formule, laquelle, avec le Dénominateur, fait un produit rationel, et par conséquent de résoudre ce problême très utile: Trouver une formule, par laquelle multipliant un Polynome irrationel donné, le produit devienne rationel. Mais il s'est arrêté en beau chemin, ayant crû (p. 77) que cela n'allait que jusqu'aux Quadrinomes dans les racines quarrées. C'est pourquoi je veux en donner la solution dans le Pentanome ou Quinome, comme il l'appelle, afin de l'encourager, ou quelqu'autre qui en aura le loisir à achever cette recherche qui le mérite assez.

Soit un Quinome $a+b+c+d+e$, où j'entends par ces lettres des quantités dont les quarrés sont rationels, par exemple $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}$. Multiplions le Quinome proposé par $a+b+c-d-e$, et il vient $2ab+2ac+2bc-2de+mm$, supposant

$mm = aa + bb + cc - dd - ee$. Il est vrai que ce produit est encore un Quinome en effet; mais nous corrigerons ce défaut dans la suite. Multiplions ce produit par $2ab + 2ac + 2bc + 2de - mm$, et il proviendra $-n^4 + 4mmde + 8abc(a + b + c)$, supposant $n^4 = m^4 - 4aabb - 4aacc \quad 4bbcc + 4ddee$. Ainsi ce produit nous est venu en multipliant le Quinome proposé par $a + b + c - d - e$, et en multipliant ce qui en vient, encore par $2ab + 2ac + 2bc + 2de - mm$, ou en multipliant le Quinome proposé tout d'un coup par $(a + b + c - d - e)(2ab + 2ac + 2bc + 2de - mm)$. Mais si au lieu de cela on multiplioit le Quinome proposé par $(a + b + c - d - e)(2ab + 2ac + 2bc + 2de - mm) - 8abc$, il est visible qu'il proviendroit $-n^4 + 4mmde + 8abc(a + b + c) - 8abc(a + b + c + d + e)$, c'est-à-dire $-n^4 + 4mmde - 8abc(d + e)$. Ce qui est un Quadrinome, et nous avons gagné. Mais qui plus est, ce Quadrinome a l'avantage de pouvoir être reduit d'abord au binome, en employant la seule multiplication par son contraire, sans passer par le trinome: et ainsi nous rattrappons ce que nous avions été obligés de perdre au commencement par une multiplication qui n'avançait pas d'abord. Car multipliant ce produit par $-n^4 + 4mmde + 8abc(d + e)$, il nous viendra $p^8 - 8q^6de$, supposant $p^8 = n^8 + 16m^4ddee - 64aabbcc(dd + ee)$, et $q^6 = mmn^4 + 16aabbcc$. Et ce produit étant enfin multiplié par $p^8 + 8q^6de$, nous aurons une quantité délivrée de l'asymmetrie, qui est $p^8 - 64q^{12}ddee$. Ce qu'il fallait faire. Et ce produit nous vient en multipliant le Quinome $a + b + c + d + e$ par le produit de ces trois quantités: $(a + b + c - d - e)$, $(2ab + 2ac + 2bc + 2de - mm) - 8abc$, $-n^4 + 4mmde + 8abc(d + e)$, $p^8 + 8q^6de$.

Il y a démonstration que tout polynome, quelque puisse être le nombre et quelle que puisse être l'espèce des racines, pourra toûjours être multiplié par une telle formule, que le produit soit rationel. Et en poussant le calcul des canons, on y trouvera une progression réglée qui nous épargnera la peine d'aller plus loin. J'appelle Canons, des formules générales, qui donnent d'abord ce qu'on demande. Par exemple, à l'égard des racines quarrées, il y aura

dans le Binome	$a + b$,	$a - b$	$= aa - bb$	
dans le Trinome	$a + b + c$,	$a^3 - aab + 2abc$	$= a^4$	$- 2aabb$
	b^3	abb	b^4	$2aacc$
	c^3	aac	c^4	$2bbcc$
		acc		
		bbc		
		bcc		

Et non pourra calculer des canons semblables pour le Quadrinome, Quinome etc., ce qui donnera enfin la règle de la progression, qui est le canon des canons. J'ai coutoume de me servir d'expressions abrégées; par exemple, en disant dans le trinome a,a^3—aab+2abc=a^4—2aabb.

XX.

MONITUM DE CHARACTERIBUS ALGEBRAICIS.

Quoniam variant Geometrae in characterum usu, nova praesertim Analysi inventa, quae res legentibus non admodum provectis obscuritatem parit; ideo e re visum est exponere, quomodo Characteres adhibeantur Leibnitiano more, quem in his Miscellaneis secuturi sumus.

Literae minusculae a, b, x, y solent significare magnitudines, vel quod idem est, numeros indeterminatos; majusculae vero, ut A, B, X, Y puncta figurarum; ita ab significat factum ex a in b, sed AB rectam a puncto A ad punctum B ductam. Huic tamen observationi adeo alligati non sumus, ut non aliquando minusculas pro punctis, majusculas pro numeris vel magnitudinibus usurpemus, quod facile apparebit ex modo adhibendi. Solent etiam literae priores, ut a, b, pro quantitatibus cognitis vel saltem determinatis adhiberi, sed posteriores, ut x, y, pro incognitis vel saltem pro variantibus.

Interdum pro literis adhibentur Numeri, sed qui idem significant quod literae, utiliter tamen ursurpantur relationis exprimendae gratia. Exempli causa, sint binae aequationes generales secundi gradus pro incognita x, eas sic exprimere licebit: 10xx+11x+12=0 et 20xx+21x+22=0. Ita in progressu calculi ex ipsa notatione apparet quantitatis cujusque relatio, nempe 21 (ex gr.) per notam dextram quae est 1 agnoscitur esse coefficiens ipsius x simplicis, at per notam sinistram 2 agnoscitur esse ex aequatione secunda. Sed et servatur lex quaedam homogeneorum. Et ope harum duarum aequationum tollendo x prodit aequatio, in qua similiter se habere oportet 10, 11, 12 et 12, 11, 10; item 20, 21, 22 et 22, 21, 20; et denique 10, 11, 12 se habent ut 20, 21, 22, id est si pro 10, 11, 12 substituas 20, 21, 22, et vice versa, manet eadem aequatio. Idemque est in caeteris. Tales numeri tractantur ut literae, veri autem numeri, discriminis causa, parenthesibus includuntur vel aliter discernuntur. Ita in tali sensu 11.20 significat numeros indefinitos 11 et 20 in se invicem ductos, non vero significat 220, quasi essent numeri veri. Sed hic usus ordinarius non est, rariusque adhibetur.

Signa, Additionis nimirum et Subtractionis, sunt $+$ plus, $-$ minus, $\pm$ plus vel minus, $\mp$ priori oppositum minus vel plus. At $(\pm)$ vel $(\mp)$ est nota ambiguitatis signorum, independens a priori, et $((\pm))$ vel $((\mp))$ alia independens ab utraque. Differt autem Signum ambiguum a Differentia quantitatum, quae etsi aliquando incerta, non tamen ambigua est. Sic $\pm 5 \mp 3$ (ubi signa adhibentur ambigua) significat vel $+5-3$, id est 2, vel $-5+3$, id est -2. Sed si differentia exprimenda sit inter a et b, non sufficit scribere $\pm a \mp b$; si enim sic pro a et b substituas 5 et 3, patet hoc modo non semper prodire differentiam $+2$, sed vel $+2$ vel -2. Sed differentia inter a et b significat $a-b$ si a sit majus, et $b-a$ si b sit majus, quod etiam appellari potest moles ipsius $a-b$, intelligendo (exempli causa) ipsius $+2$ et ipsius -2 molem esse eandem, nempe $+2$; ita si $a-b$ vocemus c, utique mol. c seu moles ipsius c erit $+2$, quae est quantitas affirmativa, sive c sit affirmativa sive negativa, id est sive sit c idem quod $+2$, sive c sit idem quod -2. Et quantitates duae diversae eandem molem habentes semper habent idem quadratum.

Multiplicationem plerumque significare contenti sumus per nudam appositionem; sic ab significat a multiplicari per b. Numeros multiplicantes solemus praefigere; sic 3a significat triplum ipsius a. Interdum tamen punctum vel comma interponimus inter multiplicans et multiplicandum, velut cum 3, 2 significat 3 multiplicari per 2, quod facit 6, si 3 et 2 sunt numeri veri; et AB, CD significat rectam AB duci in rectam CD atque inde fieri rectangulum. Sed et commata interdum hoc loco adhibemus utiliter, velut $a, b+c$, vel $AB, CD+EF$, id est, a duci in $a+b$, vel AB in $CD+EF$; sed de his mox, ubi de vinculis. Porro propria nota Multiplicationis non solet esse necessaria, cum plerumque ap positio, qualem diximus, sufficiat. Si tamen utilis aliquando si adhibebitur potius $\frown$ quam $\times$, quia hoc ambiguitatem parit, et it AB $\frown$ CD significabit AB duci in CD.

Divisio significatur interdum more vulgari per subscriptio nem divisoris sub ipso dividendo, intercedente linea; ita a divi per b significatur vulgo per $\frac{a}{b}$; plerumque tamen hoc evitar praestat, efficereque ut in eadem linea permaneatur, quod fit inte positis duobus punctis, ita ut a:c significet a dividi per b. Quod a:b rursus dividi debeat per c, poterimus scribere a:b,:c v (a:b):c. Etsi enim res hoc casu (sane simplici) facile aliter ex primi posset, fit enim a:(bc) vel a:bc, non tamen semper divisi actu ipso facienda est, sed saepe tantum indicanda, et tunc prae stat operationis dilatae processum per commata vel parenthese indicari.

Cum idem multiplicatur per se ipsum, prodeunt Potentia earumque notae seu Exponentes. Ita pro aa scribi etiam pot est a^2, et pro aaa scribetur a^3, et ita porro. Interdum et scribi tur: qu. AB, idque idem est quod quadratum rectae AB se AB,AB; et cub. AB idem est quod AB, AB, AB vel $(AB)^3$. Et expo nens interdum lineolis includitur hoc modo $\lfloor 3 \rfloor$ (AB + BC), qu significatur cubus rectae AB + BC. Exponens etiam interdum es indeterminatus, et significatur per literam, velut a^e, ubi non de terminatur utrum e significet 2 an 3 vel alium numerum quemvis et talis exponens interdum fit compositus, exempli gratia si a multiplices per a^n, productum erit a^{e+n}, et utiliter interdum lineol subducitur, ne literae exponentiales aliis confundantur; posset etiar scribi $\lfloor e+n \rfloor$ a.

Contrarium potentiarum sunt Radices, nam ut $\lfloor 3 \rfloor$ a est a^3 ve aaa, ita $\sqrt[3]{(a^3)}$ vel $\sqrt{(3)}(a)^3$ rursus est a. Nota $\sqrt{\ }$ significat radicem et si simpliciter scribimus nullo numero adjecto, significat radicer quadraticam, velut $\sqrt{2}$ significat radicem quadraticam ex numero 2 sed $\sqrt[3]{2}$ vel $\sqrt{(3)}2$ significat radicem cubicam ex eodem numer et $\sqrt[e]{2}$ vel $\sqrt{(e)}2$ significat radicem indeterminati gradus e ex 2 ex trahendam. Interim notandum est, certo sensu radices posse su potentiis comprehendi, ut numeri fracti continentur sub numeri Et generaliter, si sit potentia data a^e et e significet numerum ne gativum, prodit divisio; ponatur enim e idem esse quod $-n$, utique a^e vel a^{-n} vel $\boxed{-n}\,a$ idem erit quod $1:a^n$. Quodsi e sit idem quod $1:n$ seu a^e idem quod $a^{1:n}$, fiet a^e idem quod $\sqrt{(\hat{n})a}$, adeoque hoc idem est quod $\boxed{1:n}\,a$.

His notis formantur varii termini, nempe integri iique affirmativi aut negativi; fracti item, ac denique surdi. Sed quia hi omnes sunt vel simplices vel variis modis compositi et ex membris conflati, hinc opus est vinculis quibusdam ad compositionem indicandam. Pro vinculis vulgo solent adhiberi ductus linearum, sed quia lineis una super alia ductis saepe nimium spatii occupatur, aliasque ob causas commodius plerumque adhibentur commata et parentheses. Sic $a, \overline{b+c}$ idem est quod $a, b+c$ vel $a(b+c)$, et $\overline{a+b}, \overline{c+d}$ idem est quod $a+b, c+d$ vel $(a+b)(c+d)$, id est $+a+b$ multiplicatum per $c+d$. Et similiter vincula in vinculis exhibentur. Ita $a,\overline{bc+e\overline{f+g}}$ etiam sic exprimetur $a(bc+e(f+g))$, et $\overline{a\,\overline{bc+e\overline{f+g}}+hlmn}$ potest etiam sic exprimi $(a(bc+e(f+g))+hlm)n$. Quod de vinculis multiplicationis, idem intelligi potest de vinculis divisionis; exempli gratia

$$\frac{\dfrac{a}{\dfrac{b}{c}+\dfrac{e}{f+g}}+\dfrac{h}{\left(\dfrac{l}{n}\right)}}{n}$$ sic scribetur in una linea

$(a:((b:c)+(e:,f+g).+h:(l:m))):n$, nihilque in his est difficultatis, modo teneamus, quicquid parenthesin aliquam implet pro una quantitate haberi, tanquam litera vel numerus pro eo poneretur; idemque est de parenthesi aliam parenthesin includente, ut fit in radicibus quam universales olim vocabant exprimendis. Idemque igitur locum habet in vinculis extractionis radicalis. Sic $\sqrt{a^4+bc\sqrt{e\overline{f+g}}}$ idem est quod $\sqrt{(a^4+bc\sqrt{(e(f+g))})}$ vel $\sqrt{(a^4+bc(e,f+g))}$, et pro

$$\frac{\sqrt{aa+b\sqrt{cc+dd}}}{e+\sqrt{f\sqrt{gg+hh}+kk}}$$ scribi poterit

$\sqrt{(aa+b\sqrt{(cc+dd)})}:,e+\sqrt{(f\sqrt{(gg+hh)}+kk)}$.

Hactenus notas exposuimus, quibus termini, id est numeri vel quantitates formantur, tanquam subjecta aut praedicata in veritatibus. Sequuntur notae quae explicant modum praedicationis, seu quomodo quantitates quae Terminos constituunt in propositiones conjungantur; potissimum autem de iis enuntiatur, Aequales esse, vel **majores** vel **minores** aliis; itaque $a=b$ significat a esse aequale ipsi b, et $a \sqsupset b$ significat a esse majus quam b, et $a \sqsubset b$ significat a esse minus quam b.

Sed et **Proportionalitas** vel analogia de quantitatibus enuntiatur, id est rationis identitas, quam possumus in Calculo exprimere per notam aequalitatis, ut non sit opus peculiaribus notis. Itaque a esse ad b sic ut l ad m sic exprimere poterimus $a:b=l:m$, id est $\frac{a}{b}=\frac{l}{m}$. Nota continue proportionalium erit $\div\!\!\div$, ita ut $\div\!\!\div$ a. b. c etc. sint continue proportionales.

Interdum nota **Similitudinis** prodest, quae est $\backsim$; item nota similitudinis et aequalitatis simul seu nota congruitatis $\simeq$. Sic $DEF \backsim PQR$ significabit Triangula haec duo esse similia, at $DEF \simeq PQR$ significabit congruere inter se. Hinc si tria inter se habeant eandem rationem quam tria alia inter se, poterimus hoc exprimere nota similitudinis, ut $a;\ b;\ c \backsim l;\ m;\ n$, quod significat esse a ad b ut l ad m, et a ad c ut l ad n, et b ad c ut m ad n.

Praeter aequalitatem, proportionalitatem et similitudinem occurrit interdum et ejusdem relationis consideratio quam significare licet nota $::$; exempli causa si sit $aa+ab=cc$ et simili forma $ll+lm=nn$, dici potest a, b, c habere inter se eandem relationem quam habent l, m, n, seu $a;\ b;\ c :: l;\ m;\ n$, id est, datur quaedam relatio inter a, b, c, in qua si pro his respective substituas l, m, n, vera manet enuntiatio. Unde patet, relationis convenientiam ad certam quandam referendi formam pertinere neque omnimodam semper in ipsis terminis relationum similitudinem inferre, ex. gr. si a, b, c se habeant invicem ut sinus totus, sinus rectus et sinus complementi, et l, m, n se itidem hoc modo inter se habeant, dici ob eam rem poterit esse $a;\ b;\ c :: l;\ m;\ n$. Sed hoc relativum est ad certum modum referendi.

Quas exposuimus Notas, ad Analysin communem pertinent seu ad Scientiam Finiti; sed novae adjectae sunt Notae, per detectam nuper **Scientiam infiniti** seu **Analysin infinitesimalem** quae potissimum versatur in differentiis et summis. Hic dx significat elementum, id est incrementum vel decrementum (momentaneum) ipsius quantitatis x (continue) crescentis. Vocatur et **differentia**, nempe inter duas proximas x elementariter (seu inassignabiliter) differentes, dum una fit ex altera (momentanee) crescente vel decrescente; similiter d(xy) est tale elementum quantitatis xy (continue) crescentis, quod explicatum dat $xdy + ydx$. Porro ddx est elementum elementi seu differentia differentiarum, nam ipsa quantitas dx non semper constans est, sed plerumque rursus (continue) crescit aut decrescit. Et similiter procedi potest ad $dddx$ seu d^3x, et ita porro; imo potest occurrere d^ex, cum exponens differentiae est indeterminatus.

Contrarium ipsius Elementi vel differentiae est summa, quoniam quantitate (continue) decrescente donec evanescat, quantitas ipsa semper est summa omnium differentiarum sequentium, ut adeo $d\int ydx$ idem sit quod ydx. At $\int ydx$ significat aream quae est aggregatum ex omnibus rectangulis, quorum cujuslibet longitudo (assignabilis) est y aliqua, et latitudo (elementaris) est dx ipsi y ordinatim respondens. Dantur et summae summarum, et ita porro, ut si sit $\int dz \int ydx$, significatur solidum quod conflatur ex omnibus areis, qualis est $\int ydx$, ordinatim ductis in respondens cuique elementum dz.

XXI.

EXPLICATION DE L'ARITHMETIQUE BINAIRE, QUI SE SERT DES SEULS CARACTÈRES 0 ET 1, AVEC DES REMARQUES SUR SON UTILITÉ, ET SUR CE QU'ELLE DONNE LE SENS DES ANCIENNES FIGURES CHINOISES DE FOHY.

Le calcul ordinaire d'Arithmétique se fait suivant la progression de dix en dix. On se sert de dix caractères, qui sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui signifient zero, un et les nombres suivans jusqu'à neuf inclusivement. Et puis allant à dix, on recommence, et on écrit dix par 10, et dix fois dix ou cent par 100, et dix fois cent ou mille par 1000, et dix fois mille par 10000, et ainsi de suite.

Mais au lieu de la progression de dix en dix, j'ai employé depuis plusieurs années la progression la plus simple de toutes, qui va de deux en deux, ayant trouvé qu'elle sert à la perfection de

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	2
0	0	0	0	1	1	3
0	0	0	1	0	0	4
0	0	0	1	0	1	5
0	0	0	1	1	0	6
0	0	0	1	1	1	7
0	0	1	0	0	0	8
0	0	1	0	0	1	9
0	0	1	0	1	0	10
0	0	1	0	1	1	11
0	0	1	1	0	0	12
0	0	1	1	0	1	13
0	0	1	1	1	0	14
0	0	1	1	1	1	15
0	1	0	0	0	0	16
0	1	0	0	0	1	17
0	1	0	0	1	0	18
0	1	0	0	1	1	19
0	1	0	1	0	0	20
0	1	0	1	0	1	21
0	1	0	1	1	0	22
0	1	0	1	1	1	23
0	1	1	0	0	0	24
0	1	1	0	0	1	25
0	1	1	0	1	0	26
0	1	1	0	1	1	27
0	1	1	1	0	0	28
0	1	1	1	0	1	29
0	1	1	1	1	0	30
0	1	1	1	1	1	31
1	0	0	0	0	0	32

etc.

la science des Nombres. Ainsi je n'y employe point d'autres caractères que que 0 et 1, et puis allant à deux, je recommence. C'est pourquoi deux s'écrit ici par 10, et deux fois deux ou quatre par 100, et deux fois quatre ou huit par 1000, et deux fois huit ou seize par 10000, et ainsi de suite. Voici la Table des Nombres de cette façon, qu'on peut continuer tant que l'on voudra.

On voit ici d'un coup d'oeil la raison d'une proprieté célébre de la progression Géométrique double en Nombres entiers, qui porte que si on n'a qu'un de ces nombres de chaque degré, on en peut composer tous les autres nombres entiers au dessous du double du plus haut degré. Car ici, c'est comme si on disait par exemple, que 111 ou 7 est la somme de quatre, de deux et un, et que 1101 ou 13 est la somme de huit, quatre et un. Cette proprieté sert aux Essayeurs pour peser toutes sortes de masses avec peu de poids et pourroit servir dans les monnoyes pour donner plusieurs valeurs avec peu de piéces.

100	4
10	2
1	1
111	7

1000	8
100	4
1	1
1101	13

Cette expressions des Nombres étant établie, sert à faire très facilement toutes sortes d'opérations.

Pour l'Addition par exemple.	110	7	101	5	1110	14
	111	6	1011	11	10001	17
	..		....			
	1101	13	10000	16	11111	31
Pour la Soustraction.	1101	13	10000	16	11111	31
	111	7	1011	11	10001	17
	110	6	101	5	1110	14

Pour la Multiplication. ⊙

11	3	101	5	101	5
11	3	11	3	101	5
11		101		101	
11		101		1010	
1001	9	1111	15	11001	25

Pour la Division.

15	$\cancel{1}\cancel{1}11$	101	5
3	$\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}1$		
	$\cancel{1}1$		

Et toutes ces opérations sont si aisées, qu'on n'a jamais besoin de rien essayer ni deviner, comme il faut faire dans la division ordinaire. On n'a point besoin non plus de rien apprendre par coeur ici, comme il faut faire dans le calcul ordinaire, où il faut savoir, par exemple, que 6 et 7 pris ensemble font 13, et que 5 multiplié par 3 donne 15, suivant la Table d'une fois un est un, qu'on appelle Pythagorique. Mais ici tout cela se trouve et se prouve de source, comme l'on voit dans les exemples précédens sous les signes ☽ et ⊙.

Cependant je ne recommande point cette manière de compter, pour la faire introduire à la place de la pratique ordinaire par dix. Car outre qu'on est accoutumé à celle-ci, on n'y a point besoin d'y apprendre ce qu'on a déjà appris par coeur: ainsi la pratique par dix est plus abregée, et les nombres y sont moins longs. Et si on étoit accoutumé à aller par douze ou par seize, il y auroit encore plus d'avantage. Mais le calcul par deux, c'est-à-dire par 0 et par 1, en récompense de sa longueur, est le plus fondamental pour la science, et donne de nouvelles découvertes, qui se trouvent utiles ensuite, même pour la pratique des nombres, et surtout pour la Géométrie, dont la raison est que les nombres étant reduits aux plus simples principes, comme 0 et 1, il paroit partout un ordre merveilleux. Pour exemple, dans la Table même des Nombres, on voit en chaque colonne régner des périodes qui recommencent toujours. Dans la première colonne c'est 01, dans la seconde 0011, dans la troisième 00001111, dans la quatrième 0000000011111111, et ainsi de suite. Et on a mis de petits zéros dans la Table pour remplir le vuide au commencement de la colonne, et pour mieux marquer ces périodes. On a mené aussi des lignes dans la Table, qui marquent que ce que ces lignes renferment revient toujours sous elles. Et il se trouve encore que les Nombres Quarrés, Cubiques et d'autres puissances, item les Nombres Triangulaires, Pyramidaux et d'autres nombres figurés, ont aussi de semblables périodes, de sorte qu'on en peut écrire les Tables tout de suite, sans calculer. Et une prolixtié dans le commencement, qui donne ensuite le moyen d'epargner le calcul et d'aller à l'infini par règle, est infiniment avantageuse.

Ce qu'il y a de surprenant dans ce calcul, c'est que cette Arithmétique par 0 et 1 se trouve contenir le mystère des lignes d'un ancien Roi et Philosophe nommé Fohy, qu'on croit avoir vécu il y a plus de quatre mille ans et que les Chinois regardent comme le Fondateur de leur Empire et de leurs sciences. Il y a plusieurs figures linéaires qu'on lui attribue, elles reviennent toutes à cette Arithmétique; mais il suffit de mettre ici la Figure de huit Cova comme on l'appelle, qui passe pour fondamentale, et d'y joindre l'explication qui est manifeste, pourvû qu'on remarque premièrement qu'une ligne entière — signifie l'unité ou 1, et secondement qu'une ligne brisée -- signifie le zéro ou 0.

000	0	0
001	1	1
010	10	2
011	11	3
100	100	4
101	101	5
110	110	6
111	111	7

Les Chinois ont perdu la signification des Cova ou Linéations de Fohy, peut-être depuis plus d'un millenaire d'années, et ils ont fait des Commentaires la-dessus, où ils ont cherché je ne sçai quels sens éloignés, de sorte qu'il a fallu que la vraie explication leur vint maintenant des Européens. Voici comment: Il n'y a guères plus de deux ans que j'envoyai au R. P. Bouvet, Jésuite Français célèbre, qui demeure à Pekin, ma manière de compter par 0 et 1, et il n'en fallut pas davantage pour lui faire reconnaitre que c'est la clef des figures de Fohy. Ainsi m'écrivant le 14 Novembre 1701, il m'a envoyé la grande figure de ce Prince Philosophe qui va à 64, et ne laisse plus lieu de douter de la vérité de notre interprétation, de sorte qu'on peut dire que ce Père a déchiffré l'enigme de Fohy, à l'aide de ce que je lui avois communiqué. Et comme ces figures sont peut-être le plus ancien monument de science qui soit au monde, cette restitution de leur sens, après un si grand intervalle de tems, paroitra d'autant plus curieuse.

Le consentement des figures de Fohy et ma Table des Nombres se fait mieux voir, lorsque dans la Table on supplée les zéros initiaux, qui paroissent superflus, mais qui servent à mieux marquer la période de la colonne, comme je les y ai supplées en effet avec des petits ronds pour les distinguer des zéros nécessaires, et cet accord me donne un grande opinion de la profondeur des méditations de Fohy. Car ce qui nous paroit aisé maintenant, ne l'étoit pas tout dans ces tems éloignés. L'Arithmétique Binaire ou Dyadique est en effet fort aisée aujourd'hui, pour peu qu'on y pense, parce que notre manière de compter y aide beaucoup, dont il semble qu'on retranche seulement le trop. Mais cette Arithmétique ordinaire pour dix ne paroit pas fort ancienne, au moins les Grecs et les Romains l'ont ignorée et ont été privés de ses avantages. Il semble que l'Europe en doit l'introduction à Gerbert, depuis Pape sous le nom de Sylvestre II, qui l'a eue des Maures d'Espagne.

Or comme l'on croit à la Chine que Fohy est encore auteur des caractères Chinois, quoique fort altérés par la suite des tems; son essai d'Arithmétique fait juger qu'il pourroit bien s'y trouver encore quelque chose de considerable par rapport aux nombres et aux idées, si l'on pouvoit déterrer le fondement de l'écriture Chinoise, d'autant plus qu'on croit à la Chine, qu'il a eu égard aux nombres en l'établissant. Le R. P. Bouvet est fort porté à pousser cette pointe, et très capable d'y réussir en bien des manières. Cependant je ne sçai s'il y a jamais eu dans l'écriture Chinoise un avantage approchant de celui qui doit être necessairement dans une Caractéristique que je projette. C'est que tout raisonnement qu'on peut tirer des notions, pourroit être tiré de leurs Caractères par une manière de calcul, qui seroit un des plus importans moyens d'aider l'esprit humain.

XXII.

DE DYADICIS.

§ 1. Definitio. Numerus dyadice expressus est dcba, si idem significet quod simul sumti $\left\{\begin{array}{r} a \\ b0 \\ c00 \\ d000 \end{array}\right.$ et b0 idem sit quod bis b, et c00 idem quod bis bina c seu quater c, et d000 idem quod bis quaterna d seu octies d, et ita porro.

§ 2. Itaque 10 est 2, et 100 est 4, et 1000 est 8, et 10000 est 16, et ita porro. Patet ex praecedenti, si pro a, b, c, d ponatur 1, 1, 1, 1, et generaliter Numerus progressionis Geometricae a binario incipientis exprimitur dyadice per unitatem tot nullitatibus praefixam, quot sunt unitates in progressionis Geometricae exponente seu $2^e = 10^e$, Tabulaque ita stabit:

1	1	$= 2^0$
10	2	2^1
100	4	2^2
1000	8	2^3
10000	16	2^4
100000	32	2^5
1000000	64	2^6
10000000	128	2^7
100000000	256	2^8
1000000000	512	2^9
10000000000	1024	2^{10}

§ 3. Omnis Numerus dyadice potest exprimi, nullas alias adhibendo notas quam 0 et 1. Nam cum omnis numerus fiat additione continua unitatum, et unitas unitati addita faciat 10, ut nempe 0 scribatur in sede ultima, et 1 in penultima seu penultimae addatur, ibi ergo scribetur, si illic sit 0 seu si vacet. Sed si ibi jam 1 inveniat, rursus mutabit in 0 facietque tantum 1 addi in antepenultima, ut prius in penultima, et ita porro de sede in sedem. Unde patet, si semel incipiamus ab 1, uti faciendum sane est, non posse alias prodire notas quam 0 et 1, promota tantum sede.

§ 4. Quoties unitas transferenda seu addenda est sedi sequenti ex praecedente, memoriae ergo in sequenti sede notetur punctum, verb. gr. si 11 et 1 (seu 3 et 1) in unum addi debeant, utique in sede ultima 1 et 1 est 10, scribatur 0, notetur 1 per punctum in sede sequenti. Rursus in sede penultima 1 et 1 (nempe quia punctum ibi significat 1) fiet 10, scribatur 0 et notetur 1 in sede antepenultima. Jam in sede antepenultima non est nisi punctum seu unitas translata, quod significat 1 et fiet 100.

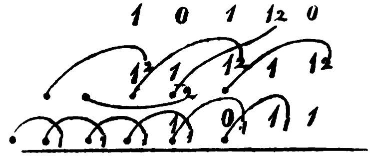
11
· · 1
100

§ 5. Exhibeatur Generatio Numerorum per additionem unitatis continuam ab 1 ad 16:

0	0
1	1
1	
1	
10	2
1	
11	3
· 1	
100	4
1	
101	5
· 1	
110	6
1	
111	7
· · 1	
1000	8
1	
1001	9
· 1	
1010	10
1	
1011	11
· · 1	
1100	12
1	
1101	13
· 1	
1110	14
1	
1111	15
. 1	
10000	16

§ 7. **Generalis praxis Additionis.** Si sint quotcunque unitates in una sede expressae numero dyadico edcba, pro quavis ex his notis a, vel b, vel c, vel d, vel e etc. unitatem significante notetur punctum in sede tantum remota sinistrosum à sede praesente, quantum sedes notae remota est ab ultima, colligantur autem in ipsa sede praesente per ascriptas ultimae unitati cujusque progressionis duplae notas numerales vulgares. Hoc etiam observabo ut punctum in quavis columna fiat in primo loco, si est a columna proxime praecedente, in secundo si in altera, in tertio si in tertia, et ita porro, ita enim semper dignosci potest, unde punctum sit ortum, quod prodest revisioni nec possunt plura uno puncta incidere in eundem locum; praefero autem primum locum ab imo ascendendo. Pro notis numeralibus adhibere etiam licebit ⌐ vel ⌐⌐. Sit exemplum

```
      1 0 1 1 1
        1 1 1 1
      1 1 0 1 1
      1 0 1 12 0
```

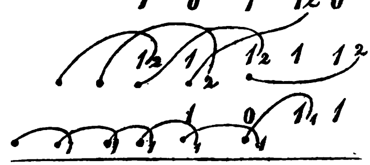


```
1 0 0 0 0 0 0 1
```

Lineas hic duxi a punctis ad numeros ex quibus oriuntur, ut rationem redderem processus, non quod his ductibus sit opus in praxi.

vel

```
      1 0 1 1 1
        1 1 1 1
      1 1 0 1 1
      1 0 1 12 0
```



```
1 0 0 0 0 0 0 1
```

Praestat pro ⌐⌐ vel ⌐⌐⌐ scribere 2 vel 3, sed malo ⌐ quam 1, ne confundatur 1 significans notam collectionis cum ipsa columnae unitate.

In columna ultima sumantur primum unitates maximi qui adest numeri progressionis duplae, nempe 4, et quartae seu ultimae ascribatur 2 (ob $4 = 2^2$) quod notat punctum signandum in columna abhinc secunda (nempe antepenultima), et quidem loco secundo seu inter notam ejus secundam et tertiam. Superest nullus amplius numerus progressionis duplae, sed 1, itaque debet 1 notari sub columna infra lineam sub omnibus columnis ductam. In columna penultima rursus ascribatur 2 unitati quartae et 1 secundae post hanc, nam $4=2^2$ et $2=2^1$. Et ob 2 notetur punctum in loco secundo columnae abhinc secundae, et ob 1 notetur punctum in loco primae columnae abhinc primae, et sub columna 0, quia nihil superest. In antepenultima seu 3tia eadem contingunt; in penantepenultima seu quarta rursus eadem, in antepenantepenultima seu quinta rursus eadem. In sextа occurrunt duae unitates, ergo secundae ascribo 1, et punctum signo in loco primae columnae primae abhinc, et sub columna sexta scribo 0. Eadem prorsus fient in 7^{ma} columna. At in octava nil superest nisi 1, quae sub ea scribitur, et prodit 10000001.

§ 8. Subtractionis praxis haec est, ut si plura sint subtrahenda, vel subtrahantur sigillatim, vel prius addantur in unum, deinde summa subtrahatur. Utroque modo non nisi unius numeri subtractione est opus. Quo facto subtrahatur nota a nota ejusdem sedis, et si nota subtrahenda sit 1, sed ea a qua debet subtrahi sit 0, scribetur residuum 1, sed signetur punctum ad notam subtrahendi proxime sequentem, et si is jam sit unitas, iterum ad sequentem, et ita porro. Itaque ubi binae occurrunt unitates in subtrahendo, habentur pro 0, fietque subtractio non nisi 0 ab 1 vel 1 ab 1, ex quibus prior relinquit 1, posterior 0. Exempli gratia

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

§ 9. Praxis Multiplicationis. Haec est facillima, quia notae multiplicantes sunt 0 et 1. Jam 0 in numerum multiplicandum facit 0, et 1 relinquit qualis erat. Sed 1 in sede secunda cum sit binarius, duplicat numerum multiplicandum, id est promovet in sedes proxime sequentes. Et 1 in sede tertia, cum sit quaternarius, quadruplicat numerum multiplicandum, id est promovet in sedes tertias, et ita porro.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & e & d & c & b & a \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & e & d & c & b & a \\
 & e & d & c & b & a & 0 \\
e & d & c & b & a & &
\end{array}$$

1 1 0 1	13
1 0 1	5
1 1 0 1	
. . . .	
1 1 0 1 0	
1 0 0 0 0 0 1	65

Nam 1000000 est 64 et 1000001 est 64+1.

Hinc in Multiplicando Dyadice non opus est Tabula quam vulgo Pythagoricam appellant, et quam memoriter ediscere oportet; nec de ea adhibemus nisi initium, nempe quod semel unum est unum.

§ 10. Praxis Divisionis non minus et facilis, quia quotiens non potest esse major quam 1. Itaque tantum opus est exemplo, ubi majoris claritatis causa vulgari methodo procedo.

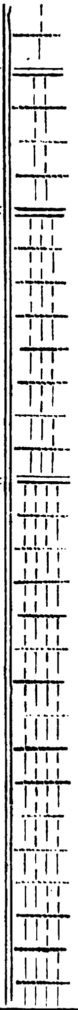
1111	
1000001	1101
101111	
1000	
11	

§ 11. Series Numerorum naturalium ab 1 ad 64. Possunt omitti 0, quas non praecedit 1, adjecimus tamen ut progressus periodorum magis appareret.

0 0 0 0 0 0	0				
0 0 0 0 0 1	1	0 1 0 1 1 0	22	1 0 1 0 1 1	43
0 0 0 0 1 0	2	0 1 0 1 1 1	23	1 0 1 1 0 0	44
0 0 0 0 1 1	3	0 1 1 0 0 0	24	1 0 1 1 0 1	45
0 0 0 1 0 0	4	0 1 1 0 0 1	25	1 0 1 1 1 0	46
0 0 0 1 0 1	5	0 1 1 0 1 0	26	1 0 1 1 1 1	47
0 0 0 1 1 0	6	0 1 1 0 1 1	27	1 1 0 0 0 0	48
0 0 0 1 1 1	7	0 1 1 1 0 0	28	1 1 0 0 0 1	49
0 0 1 0 0 0	8	0 1 1 1 0 1	29	1 1 0 0 1 0	50
0 0 1 0 0 1	9	0 1 1 1 1 0	30	1 1 0 0 1 1	51
0 0 1 0 1 0	10	0 1 1 1 1 1	31	1 1 0 1 0 0	52
0 0 1 0 1 1	11	1 0 0 0 0 0	32	1 1 0 1 0 1	53
0 0 1 1 0 0	12	1 0 0 0 0 1	33	1 1 0 1 1 0	54
0 0 1 1 0 1	13	1 0 0 0 1 0	34	1 1 0 1 1 1	55
0 0 1 1 1 0	14	1 0 0 0 1 1	35	1 1 1 0 0 0	56
0 0 1 1 1 1	15	1 0 0 1 0 0	36	1 1 1 0 0 1	57
0 1 0 0 0 0	16	1 0 0 1 0 1	37	1 1 1 0 1 0	58
0 1 0 0 0 1	17	1 0 0 1 1 0	38	1 1 1 0 1 1	59
0 1 0 0 1 0	18	1 0 0 1 1 1	39	1 1 1 1 0 0	60
0 1 0 0 1 1	19	1 0 1 0 0 0	40	1 1 1 1 0 1	61
0 1 0 1 0 0	20	1 0 1 0 0 1	41	1 1 1 1 1 0	62
0 1 0 1 0 1	21	1 0 1 0 1 0	42	1 1 1 1 1 1	63

§ 12. Collatio designationis nostrae cum ea quam reliquit Fohy, antiquissimus Sinarum Rex. Quod nos per 0, designavit ille per — — lineam fractam seu interruptam, et quod nos per 1, ille per lineam integram —.

0	0
1	1
00	0
01	1
10	2
11	3
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15



Simili ratione characterum suorum Tabulas Fohius continuavit usque ad 64, easque modo in circulum, modo in forma quadrati disposuit. Cumque Dyadicas meas notas explicuissem per literas R. P. Bouveto, Societatis Jesu missionario ad Sinas, ille statim con-sensum cum Fohianis characteribus animadvertit et ad me perscripsit, Tabula simul transmissa qua 64 characteres Fohiani tum in quadrato, tum rursus in circulo circumscripto continentur, hoc tantum discrimine, quod in quadrato ordinem nostrum sequantur, in circulo vero semicirculus unus a summo descendens in sinistro latere continet characteres a 0 ad 31, sed alter semicirculus rursus a summo descendens in dextro latere continet characteres a 32 ad 63, ita enim sibi opponuntur e regione in eadem altitudine ii characteres qui non differunt nisi quod sinistrarum prima nota est 0 seu ¦, dextrarum vero 1 seu |. Ex. gratia 0 et 32, 1 et 33, 2 et 34

0	000000	100000	32
1	000001	100001	33
2	000010	100010	34
	etc.	etc.	

Ita mirum accidit, ut res ante ter et amplius annos nota in extremo nostri continentis oriente, nunc in extremo ejus occidente, sed melioribus ut spero auspiciis resuscitaretur. Nam non apparet, antea usum hujus characterismi ad augendam numerorum scientiam innotuisse. Sinenses vero ipsi ne Arithmeticam quidem rationem intelligentes nescio quos mysticos significatus in characteribus mere numeralibus sibi fingebant.*)

---

*) Leibniz hat bemerkt: Caetera alias prosequar, ostendamque generaliter summas seriei periodicae dare seriem periodicam, et columnas alterius columnae summatrices habere periodum, hoc modo, ut ad minimum periodus primae columnae summatricis sit longitudine dupla periodi summandae, secundae longitudine quadrupla, tertiae longitudine octupla etc. Tunc enim semper 0 incidit in columnae summatricis et summatricium praecedentium simul cum fine periodi, ita omnia ab integro prodeunt ut ante. Hinc apparet statim periodus naturalium. Ostendam et addendo in unum duas columnas periodicas fieri periodicam. Ergo addendo in unum quotcunque periodicas orietur periodica. Hinc demonstro numeros naturales et progressionis arithmeticae, et polygonos quosque, tum etiam quadraticos, cubicos etc. periodicas series dare.

XXIII.

DEMONSTRATIO, QUOD COLUMNAE SERIERUM EXHIBENTIUM POTESTATES AB ARITHMETICIS AUT NUMEROS EX HIS CONFLATOS, SINT PERIODICAE.*)

Omnis series numerorum rationalium, qui sint arithmeticorum potestates ejusdem gradus (exempli gratia series omnium x^4, posito x esse progressionis Arithmeticae numeros), continuatis quantum opus differentiationibus dat differentiam constantem.

Idem est, si series exprimi possit per formulam analyticam integram ex potestatibus conflatam, verbi gr. $4x^4+6x^2-7x+11$.

Idem est, etsi formula habeat numeros in denominatore, modo termini sint numeri integri. Nam multiplicata per denominatorem communem dabit differentiando seriem arithmeticorum, ergo et non multiplicata, id enim aequalitatem differentiae non mutat. Exempli gratia numeri $\frac{xx+x}{2}$ sunt semper integri; itaque horum series aliquam differentiam (hoc loco secundam) habet constantem, primae vero differentiae sunt progressionis Arithmeticae.

Hinc etiam omnes series Figuratorum continuatis differentiationibus dabunt seriem Arithmeticorum. Et generaliter omnis series Numerorum integrorum, qua Analytice expressa per formulam, incognita non cadit vel in denominatorem (ut fit in progressione Harmonica) vel in Exponentem (ut in Geometrica) continuatis quantum opus differentiationibus dat seriem Arithmeticorum, vel quod idem est, vice versa omnis hujusmodi series produci potest per summationem arithmeticorum replicatam. Omnis enim series ex suis differentiis cujuscunque gradus continuatis summationibus conflatur.

Hinc jam pergo ad Numerorum expressionem per proportiones Geometricas sive Dyadicam sive decadicam aut aliam quam-

---

*) Auf dem Entwurf, der dieser Abhandlung zu Grunde liegt, hat Leibniz bemerkt: Berolini Novembr. 1701. Haec Dn. Angicourt demonstravi.

cunque. Et cum omnes series Arithmeticorum, sed manifeste primis dyadice expressae, habeant columnas periodicas, sequ omnes series potestatum vel Numerorum figuratorum vel alio supra dictorum habere columnas periodicas, ubi ostensum fu omnem seriem summatricem periodicae esse periodicam. Nam et summatrix summatricis periodica erit. Imo ex hoc sequ quod praesupposueramus, Arithmeticam seriem esse periodi cum sit summatrix seriei constantium, quae utique periodica

Ut ostendatur, summatricem seriei periodicae e periodicam, quod sit Lemma I, consideremus initio separ quamlibet columnam summandae seriei, tanquam ipsa haec lumna sola esset summanda. Dico: Si series summanda perio unius esset columnae, seriem summatricem habituram esse om columnas periodicas, ex. g. seriei summandae constantis ex colu

N M L	A	
0 0 0 0	0	
0 0 0 1	1	
0 0 1 0	1	
0 0 1 0	0	
0 0 1 0	0	
0 0 1 1	1	
0 0 1 1	0	
0 1 0 0	1	⊙
0 1 0 0	0	
0 1 0 1	1	
0 1 1 0	1	
0 1 1 0	0	
0 1 1 0	0	
0 1 1 1	1	
0 1 1 1	0	
1 0 0 0	1	☽

A series summatrix constet ex columnis LMN dico, quia A est periodica, etiam L, M, N etc. periodicas. Nempe ubi evenit, ut periodo (sim vel replicatae) columnae A respondeat 0 in col nis summatricibus, omnia in iisdem columnis deunt ut ante. Id pro columnis L et M fit in ⊙, ubi simplex columnae A periodus finitur. pro columnis L, M, N id fit in loco ☽, ubi fin duplicata columnae A periodus, quae etiam ipsa se integram periodum constituit. Praevideri au potest, quota replicatione periodi columnae A inci 0 in summatricem. Nam constat, quot perio simplex summandae A habeat unitates, v. g. hoc l 4. Jam semel 4 dat 100 dyadice adeoque 0 prima et secunda columna summatrice; sed colun duarum periodorum columnae A seu bis 4 est 1000 dyadice, est, dat 0 etiam in tertia columna summatrice etc. Si perio simplex habuisset unitates tres, tunc fuisset

semel 3 bis 3 ter 3

$1.3 = 11$ et $2.3 = 110$ et $3.3 = 1001$ et $4.3 = 1100$ etc.

Et ita primae columnae summatricis periodus foret dupla peri columnae summandae, secundae columnae summatricis perio foret quadrupla periodi columnae summandae, tertiae foret octu etc. idque contingit, quoties summa periodi ipsius A est nume impar.

Assummo jam **Lemma** alterum: **Duae vel plures columnae periodicae in unum additae, ita ut addatur terminus termino respondenti, dant seriem periodicam.** Nam si duae sint columnae addendae D, E, semper addetur aut 0 et 0, aut 0 et 1, aut 1 et 1. Primo casu prodit 0 in seriei conflatae F, G prima columna F, secundo casu 1, tertio 0 seu 10; id esto cum translato 1 in columnam sequentem G; nec ex duabus D, E conflatis prodeunt columnae nisi binae F et G, et utraque harum sequitur periodum columnae ex duabus prioribus longissima periodo praeditae, quae hic est E. Nam semper post hanc redeunt priora. Suppono enim, ut semper in nostris Dyadicis, periodum majorem continere minorem, esse scilicet ejus duplam vel quadruplam vel octuplam etc. [quanquam si una alteram non metiretur, tamen periodus communis tandem haberetur facta ex numeris periodicis, ut si una periodus esset terminorum 3, altera 4, periodus communis foret terminorum 12]. Hinc sequitur rursus etiam tres vel plures alias columnas in unum conflatas ita scilicet, ut termini respondentes in unum addantur, dare seriem periodicam, cum utique tertia columna periodica sit addenda conflato ex duabus prioribus, quod uti jam ostendimus, ex columnis periodicis constat.

G	F	E	D
	0	0	0
	1	1	0
1	0	1	1
1	0	1	1
	1	1	0
	1	1	0
	1	0	1
1	0	1	1

Hactenus diximus de sola columna A summanda; nunc consideremus seriem summandam datam posse constare ex pluribus columnis A, B, C etc. et quamlibet suas habere summatrices, ut A ipsas L, M, N etc., B ipsas λ, μ, ν etc., et C ipsas ל, מ, נ etc.; ipsam autem seriem summatricem habere columnas X, Y, Z etc.; dico X fore L, sed Y fieri ex λ et M, et Z fieri ex ל, μ, N; et ita porro. Vel ut clarius res exprimatur: ipsius columnae A summatrices columnae L, M, N habeant terminos designatos per circellos, ipsius columnae B summatrices columnae λ, μ, ν habeant designatos per triangula, et ipsius C summatrices, nempe ל, מ, נ, habeant designatos per quadratula; patet X constare ex meris circellis columnae L, Y conflari ex circellis columnae M et triangulis columnae λ, Z denique conflari ex circellis columnae N, triangulis columnae μ

C	B	A
·	·	·
·	·	·
·	·	·
·	·	·
·	·	·
et	caet.	

		Z	Y	X
	·	·	·	·
etc.	·	·	·	·
etc.	·	·	·	·
etc.	·	·	·	·
etc.	·	·	·	·
	et	caet.		

N M L
etc. 0 0 0
0 0 0 Ex A
0 0 0
0 0 0

ν μ λ
etc. Δ Δ Δ
Δ Δ Δ Ex B
Δ Δ Δ
Δ Δ Δ

כ מ ל
etc. □ □ □
□ □ □ ex C
□ □ □
□ □ □

Z Y X
fit per
0 0 0
etc. Δ Δ
□
0 0 0
Δ Δ
□
0 0 0
Δ Δ
□
0 0 0
Δ Δ
□

et quadratis columnae ל, et ita porro. Vel si verbis enuncies: X prima columna seriei summatricis XYZ constat ex L (columna prima summatrice primae columnae summandae A), sed Y secunda columna seriei summatricis conflatur ex M (secunda columna summatrice primae columnae summandae A) et ex λ (prima columna summatrice secundae columnae summandae B), et Z tertia columna seriei summatricis conflatur ex N (tertia columna summatrice primae columnae summandae A) et ex μ (secunda columna summatrice secundae columnae summandae B) et denique ex ל (prima columna summatrice tertiae columnae summandae C), et ita porro.

Cum autem (per Lemma 1) singulae columnae conflantes sint periodicae, etiam conflata erit periodica per demonstrationem praecedentem seu per Lemma 2, et licet inter conflandum rursus aliquid rejiciatur in columnas sequentes), manifestum tamen est, id ipsum quoque esse periodicum, adeoque id addendo caeteris periodicis columnas tandem periodicas constitui debere. Q. E. D.

XXIV.

ZWEI BRIEFE LEIBNIZENS AN JOH. CH. SCHULENBURG.

I.

Etsi Dom. Sanderus plus petierit meo nomine quam ipse ego fuissem ausus, qui tempore Tuo abuti nollem, plurimum tamen lucri inde ad me pervenit literis a Te acceptis humanissimis et muneribus etiam quibus plurimum sum delectatus, et gratias debeo singulares. Utraque dissertatio, quam misisti, argumenti mihi pergrati est. Nam urnae repertae sub tumulis, de quibus *Blumianae Theses*, antiquitates harum regionum illustrant. Calculi vero Mathematici applicatio ad usum, ac praeterea ratiocinia in Metaphysicis Semi-Mathematica, quae utraque in Knolleanis reperi, plane sunt ad palatum meum. Velim delineatas haberi urnas, caeteraque quae praefatione memoras, et Dom. Knolleum pergere optem in his quae ornare coepit studiis illustrandis. Ejus meditatio Metaphysica habere mihi visa est aliquid pulchri et profundi et si hoc quoque addere licet congrui ad sensus meos.

Nimirum fines seu limites sunt de essentia creaturarum, limites autem sunt aliquid privativum consistuntque in negatione progressus ulterioris. Interim fatendum est, creaturam, postquam jam valorem a Deo nacta est qualisque in sensus incurrit, aliquid etiam positivum continere seu aliquid habere ultra fines neque adeo in meros limites seu indivisibilia posse resolvi. Ac proinde etiam ex ipsiusmet thesium Autoris puto sententia postulatum, ex quo resolutionem in meros fines seu mera indivisibilia infert, ad creaturam cum valore sumptam applicari non posse. Atque hic valor, cum consistat in positivo, est quidam perfectionis creatae gradus, cui etiam agendi vis inest, quae ut ego arbitror substantiae naturam constituit, adeo ut valor ille a Deo tributus revera sit vigor seu vis indita rebus, quam quidam frustra negant, non animadvertentes sese ita praeter opinionem incidere in doctrinam Spinosae, qui Deum solum facit substantiam, caetera ejus modos.

Atque haec est origo rerum ex Deo et nihilo, positivo et privativo, perfectione et imperfectione, valore et limitibus, activo et passivo, forma (i. e. entelechia, nisu, vigore) et materia seu mole per se torpente, nisi quod resistentiam habet. Illustravi ista nonnihil origine numerorum ex 0 et 1 a me observata, quae *pulcherrimum est Emblema perpetuae rerum creationis ex nihilo, dependentiaeque a Deo.* Nam adhibita progressione simplicissima, nempe dyadica loco decadicae vel quaternariae, omnes numeri exprimi possunt per 0 et 1, ut in Tabula adjecta patebit, in qua genesi numerorum, quae maxime naturae convenit, multa latent mira ad meditationem, imo et ad praxin, etsi non pro usu vulgari.

0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8

Caeterum rogo, ut Dom. Knolleum data occasione etiam meo, si tanti videtur, nomine horteris, uti in praeclaris istis meditationibus pergat, qualium similes saepe ab ipso videre velim sive in Mathematicis, sive in Philosophia illa altiore. Excitandum etiam putem ad colendam illam sublimiorem Mathesin, quae continet Scientiam Infiniti, cujus elementa quaedam a me sunt prodita, novo calculi genere proposito, quem Hugenius aliique praestantes viri non sine plausu excepere et quem nunc illustrarunt inprimis Dom. Bernoullii fratres et peculiari etiam dissertatione Dom. Marchio Hospitalius Gallus. Et compertum est, non alia melius ratione aperiri aditum a Geometria ad Naturam, quae per infinitos gradus intermedios in omni mutatione, ut ego arbitror, progrediens characterem habet Autoris infiniti. Quae olim mihi de nostro solis incolatu ex praeclari Astronomi Dom. Eimmarti placitis indicari curaveras, verissima arbitror, si intelligamus tellurem esse inter planetas seu satellites solis; sin altius aliquid subest, fatebor mentem Autoris mihi non esse perspectam. Newtonus, Mathematicus excellens, astrorum vortices tollendos putat, sed mihi, ut olim in Actis Lipsiensium prodidi, non tantum conservari posse, sed etiam pulcherrime procedere videntur circulatione harmonica, cujus admirandas deprehendi proprietates.

De observatis Eimmartianis vellem aliquando nosse distinctiora, ac Tuis etiam doctissimis cogitationibus frui; sed agnosco occupationes Tuas laboriosas, et valetudini etiam parum firmae indoleo, meliora precatus sperausque, modo in tempore Tibi prospicias, quod faciendum puto. Vale. Dabam Hanoverae 29. Martii 1698.

II.

Valde Tibi obstructus sum non minus pro egregiis dissertationibus Tuis, quam pro elegantibus delineationibus urnarum, vellemque vicissim aliqua re demereri posse. Mentem meam circa progressionem dyadicam optime assecutus es, et praeclare etiam observasti, quam pulchra illic omnia ratione procedant. Puto autem. et utilitatem habituram ad augendam scientiam, etsi alioqui non sit transferenda ad communem usum calculandi. Certa etiam lege procedere deprehendentur notae pro variis proprietatibus numerorum. Nam regula generalis est: Ubicunque principia sunt ordinata, omnia etiam derivata ordinate progredi,

quo jam hic meditari dudum coepi. Et pri-
m patet, numeros naturali ordine dispositos ita
cedere, ut nota prima dextra sit 01 etc., se-
da 0011 etc., tertia 00001111 etc., quarta
0000011111111 etc., quinta 0 (sedecies) 1 (se-
es), et ita rursus. Atque hoc modo apparet,
rima sede periodum semper redeuntem esse
riam 01, in secunda esse quaternariam 0011,
ertia octonariam, in quarta sedenariam, et sic
ro. Verum quod notatu dignissimum est, eadem
ordinis observatur, si sumas non omnes ordine
neros, sed uno omisso alterum quemque, nam
c proveniunt vel omnes pares vel omnes impa-
; imo amplius, si sumas tertium quemque seu
nes ternarios sive divisibiles per 3; itemque in
nibus quaternariis, et quinariis, et ita porro, ut
iodi eaedem sint quae naturalium. Ecce terna-
in exemplum, ubi in sede dextra prima 01
aria periodus, secunda 0110 quaternaria, tertia
01101 octonaria, quarta 0001110011100011 sede-
ia, quinta 0000001111110000001111110000011111,
ta porro.

Et notandum, hic dimidiam cujusque periodi
per habere notas oppositas notis respondentibus al-
dimidiae ejusdem periodi, v.g. 0001110011100011
stat ex 00011100 } ubi permutatio inter 0 et 1.
ex 11100011 }

Has aliasque id genus observationes prose-
endo via aperietur ad novas et miras atque etiam
les numerorum proprietates. Et ut verbo dicam,
et in his quaedam novi generis Arithmetica theo-
ica, quam Tecum possimus divinam dicere, cu-
tantum primos adhuc aditus videmus. Nec du-
m est, etiam quadratos et cubos et alios nume-
figuratos certas quasdam suae progressionis
ges esse habituros.

Et si haec a viginti ac amplius annis jam in
ente habuerim, ita raro tamen animum huc ad-
ci, ut de nominibus imponendis non cogitaverim,

0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15
etc.	

0000000	0
0000011	3
0000110	6
0001001	9
0001100	12
0001111	15
0010010	18
0010101	21
0011000	24
0011011	27
0011110	30
0100001	33
0100100	36
0100111	39
0101010	42
0101101	45
0110000	48
0110011	51
0110110	54
0111001	57
0111100	60
0111111	63
1000010	66
1000101	69
1001000	72
1001011	75
1001110	78
1010001	81
1010100	84
1010111	87
1011010	90
1011101	93
1100000	96
1100011	99
etc.	

quia potius soleo enuntiare ad morem vulgaris Arithmeticae 10 per decem, 100 per centum, etsi significent 2 et 4. Obiter adjiciam, ex hac expressione sine ulla demonstratione sequi, cur nummi et pondera progressionis Geometricae duplae apta sint, ut paucissimis datis caetera possint componi. Ex. gr. quinque ponderibus unciarum 1, 2, 4, 8, 16 combinatis confici potest pondus quodcunque unciarum infra 32. Hinc monetarum examinatores hac progressione in ponduscculis suis utuntur. Ejus rei rationem varii indagarunt, et Schotenius inter alios in Miscellaneis, sed per ambages; hic verum primo obtutu patet, ex. gr. quia 29 est 11101, etiam 10000+1000+100+1 erit 16+8+4+1.

Cartesianos praejudicia vetera novis mutasse, dubium nullum est. Recte quidem illi omnia phaenomena specialia corporum per Mechanismos contingere censent, sed non satis perspexere, ipsos fontes Mechanismi oriri ex altiore causa, quanquam interim Malebranchio, Sturmio aliisque insignibus viris non assentiar, putantibus nihil esse virtutis actionisque in materia. Scilicet non satis percepere, quae sit natura substantiae valorisque, quem Deus contulit rebus qui in se involvit perpetuam actionem. Meo judicio longe aliud est in corporea substantia quam extensio et loci repletio, nempe cogitandum est, quid sit illud quod locum replet. Spatium, quemadmodum et tempus, nihil aliud sunt quam ordo possibilium existentiarum, in spatio simul, in tempore successive, realitasque eorum per se nulla est, extra divinam immensitatem atque aeternitatem. Vacuum nullum esse pro certo habeo. Interim materiae non tantum extensionem, sed et vim seu nisum adscribo. Latentque in his alia multo majoris momenti. Fateor olim mihi interstitiola vacua placuisse, hodie contra sentio, etsi ut dixi materiae naturam non collocem in extensione. Puto etiam a me monstratum, non esse verum quod ajunt, corpus eam quam perdit quantitatem motus alteri dare. De potentia tamen motrice id verum deprehendi. Et sane potentia aliquid reale est; motus vero nunquam existit, cum nunquam existat totus, non magis quam tempus. Reveraque etiam ex alio capite imaginaria involvit motus. In quo consistat unio animae et corporis commerciumque diversarum substantiarum, problema est quod puto me solvisse. Qua de re aliquando amplius. Atque haec ad Tuas dissertationes volui annotare paucis, unum hoc addens, causam parheliorum ab intersectione halonum a Gassendo allatam mihi quoque placuisse.

Et in parheliorum explicanda ratione Cartesium non recte versatum, apparebit credo quando Dioptrica Hugenii, posthumum opus, prodibit.

Specimina calculi infinitesimalis sive differentialis et summatorii a me propositi ante annos complures extant in Actis Eruditorum, ubi primum edidi Anno 1684. Inde Bernoulli Helvetii, Craigius Scotus, Marchio Hospitalius Gallus miro successu sunt secuti. Nieuwentyt Batavus partim carpere, partim in se mutatis notis transferre voluit: utrumque frustra, praesertim cum non satis intellexerit, nec aliquid per se in ea re potuerit praestare. In Germania neminem adhuc satis in haec ingressum esse sum miratus. Desunt nobis juvenes spei singularis; messis multa est, operarii autem pauci. Et cum Mathematicae artes liberaliter alant cultores suos, plerique etiam se discere velle profiteantur quae *πρὸς τὰ ἄλφιτα* faciunt, tamen magis magisque haec studia inter nostros homines sterilescunt, credo quod nunc plerique inania aut in speciem adornata sectantur quae delibare sufficit, a veris autem laboribus, quibus peritus excolendus est animus, abhorrent. Sed Tuo hortatu atque exemplo et paucorum Tui similium meliora imposterum spero. Vale. Dabam Hanoverae 17. Maji 1698.

GEOMETRICA.

In dem fünften Bande sind die Abhandlungen Leibnizens, die sich auf die Characteristica geometrica und auf die Analysis situs beziehen, zusammengestellt; von den hier folgenden enthalten die ersten noch einige Beiträge in Betreff des Ursprungs und der Anwendung dieser von Leibniz neugeschaffenen Disciplin. Von dem Inhalt der Abhandlung I: De constructione, ist bereits die Rede gewesen*); sie ist insofern von Interesse, als Leibniz darin über die Veranlassung und über die ersten Versuche, eine der Geometrie eigenthümliche Analysis zu schaffen, referirt. — Die Abhandlung II: Specimen Geometriae luciferae, beabsichtigte Leibniz in der vorliegenden Form nicht zu veröffentlichen; in ihrem Aeussern gleicht sie einem im schnellen Fluge hingeworfenen Tableau, durch das Leibniz die Ueberzeugung gewinnen wollte, wie aus den einfachsten Fundamentalbegriffen und mit Hülfe seiner geometrischen Charakteristik ein lichtvolleres Gebäude der Geometrie aufgeführt werden könnte, als bisher geschehen.

Die Nummern III und IV können als Probe dienen, dass Leibniz nicht verschmähte, auch den elementarsten Lehren eine eingehende Aufmerksamkeit zu widmen, wenn es darauf ankam, sie auf eine den Forderungen der Wissenschaft angemessene Weisee zu

*) Bd. V. S. 135 ff.

behandeln. Nach seiner Ueberzeugung war dies zugleich der beste Weg, sie der grössern Menge zugänglich zu machen. Eine ähnliche Tendenz verfolgt Leibniz in der Abhandlung V, in welcher er die Geometrie gegen die Angriffe des unwissenden Haufens in Schutz nimmt.

Die folgenden Abhandlungen sind von Leibniz selbst veröffentlicht worden.

I.

DE CONSTRUCTIONE.

Ex quo Algebram ad lineas accommodare Vieta inprimis et Cartesius seculum docuere, agnitum est a plerisque omnibus, ad solvenda in Numeris problemata in quibus rectarum quarundam comparatione cum aliis rectis designatarum valor ac descriptio quaeritur, nihil fingi posse praestantius, cum omnis difficultas problematis una aequatione inclusa sit, cujus tantum radices quaeruntur. Sed illud tamen semper a praestantibus Geometris objectum est, constructiones Geometricas calculi vestigiis nixas plerumque ab illa simplicitate atque elegantia longe abesse, qua Veteres implicata saepe problemata per synthesin absolvere. Exemplo nobis esse potest constructio problematum solidorum ope Circuli et Parabolae quam Cartesius tradidit, ubi aequationis quadrato-quadraticae aut cubicae secundum terminum tolli postulat, quo facto constat non mediocriter intumescere aequationem etiam suapte natura simplicissimam. Et ea tamen formula construendi Cartesio tantopere placuit, ut omnium quas quis exoptare possit perfectissimam et generalissimam affirmaverit.

Haec cum inter veteres novosque Geometras studio partium calentes agitarentur, moderatiores quanquam imperfectionem cognitae analyseos literalis in constructionibus apparere agnoscerent, non ideo tamen repudiandam putavere, tum ob ingentia commoda in ipsa inveniendi arte, quae nullis Veterum Datis supplerentur, tum quod spes esset posse aliquando ex ipsa Analysi aditum reperiri ad artem syntheseos, qua constructiones elegantes et veteribus dignae redderentur.

Mihi quaenam in hoc quoque argumentum incumbendi fuerit ratio, dicam vel ideo, quod plurimum inde lucis instituto meo accessurum arbitrer. Desarguesius et Pascalius filius, praestantes omnium consensu Geometrae, rem Veteribus, quantum ex servatis eorum scriptis judicari possit, intactam aggressi erant, universalia Conicorum demonstratione complecti, qua et harmonia sectionum coni appareret, et proprietates communes observarentur, et constructiones problematum quae in his lineis efficienda proponerentur fierent universales. Hoc illi institutum si absolvissent, totam nobis Geometriam solidorum sive secundi gradus perfectam insigni compendio dedissent. Sed quoniam synthetica methodo per theoremata praedemonstrata ad propositum eniti voluerant, mirum non est, aditum ad problemata difficiliora reperisse nullum, destituente eos patientia in ea itineris asperitate et anfractuum multitudine, quae schemata contemplantes et Conum mente versantes fatigabat. Quanquam autem opus imperfectum reliquissent, inimitabile tamen reddidisse visi sunt multis. Nam quas ipsi in solido et per synthesin generaliter demonstraverant Conicarum Linearum Harmonias, eas Analytici postea secuti re in planum traducta (quod fateor ingenti labore imaginationem absolvit) nondum exhibuere, ne ipso quidem summo Viro Johanne Wittio excepto, qui tamen Analysin Conicam omnium longissime promovisse videtur.

Hoc cum mihi de Analyseos ac Syntheseos comparatione sententiam dicenti nuper illustris Carcavius objecisset, agnoscentem vera dici ad tentandum excitavit, qua ratione eousque produci posset Analysis quo Synthesin perventuram pro desperato habebatur. Aggressus negotium vidi novis quibusdam characteribus opus esse, quibus variae signorum ambiguitates exprimerentur; vidi indivisibile atque infinitum calculo analytico misceri debere, quod unum non satis observasse videtur profundissimus caetera Cartesius; denique modum reperi analyticum, quo sectiones conicae perinde tractari possint, ac si unicum extaret figurae cujusdam genus sectionis conicae nomine, cujus figurae natura aequatione universali explicata centra, axes, vertices, focos, abscissas, ordinatas, tangentes, perpendiculares, nulla specierum Hyperbolae, Parabolae, Ellipseos, Circuli, Rectae mentione, statim prodat; unde theoremata universalia innumerabilia in promptu fuere, et ad omnium problematum conicorum aequationibus comprehensibilium solutionem communem mihi strata est via.

Restabat fastigium operis, problema scilicet problematum id genus omnium generale: Formulam reperire, unam sectionibus Conicis et Aequationum formis omnibus communem, construendi problema solidum quodlibet ope sectionis conicae datae et circuli. Hac enim formula reperta, problemata conica omnia (modo sursolida non sint) solo circulo et recta planorum instar construi, et quod non minoris est momenti, solutione Conicis omnibus communi comprehendi possunt. Sin desideretur, nec Universalia Conica ad finem perducta censeri possunt. Quod ut appareat, exemplum afferri utile est. Esto problema propositum: ex puncto dato D (fig. 30) minimam sive perpendicularem DY ducere ad Conicam datam AY. Patet hoc problema multos complecti casus, nam et quinque sunt Linearum Conicarum genera, Recta, Circularis, Ellipsis, Hyperbola et Parabola, et in qualibet trium inprimis posteriorum linearum specie quinque aut minimum quatuor habentur subdistinctiones pro vario situ puncti dati D; unde si quis problema plene solvere volet, in omnibus linearum specierum generibus et punctorum datorum casibus, ei novem minimum calculis constructionibusque separatis opus erit, et frustra sperabit absoluto uno calculo supplere caeteros conjectura: cum a me quidem calculo non magis operoso, quam si in uno tantum ex casibus difficilioribus fuisset laboratum, unica communis omnibus lineis casibusque aequatio reperta sit. Hanc jam aequationem communem, quae generaliter loquendo quadrato-quadratica est, fingamus esse:

$$y^4 + ly^3 + amy^2 + a^2n + a^3p \sqcap 0,$$

valore scilicet linearum l, m, n, p ambiguo, ut alibi a me docebitur, patet opus esse formula construendi hanc aequationem generali, quae neque signa neque valores terminorum moretur, adeo ut quivis ex terminis cognitis l, m, n, p possit intelligi major minorve alio vel etiam nihilo aequalis; alioquin formula non esset omnibus problematis casibus communis. Praeterea formula opus est, quae sit omnibus Conicis communis, ita ut ope ejus centrum radiusque circuli, cujus intersectione cum conica data solvi debet problema, una eademque methodo investigetur, qualiscunque etiam sectio conica in problemate data sit.

Formulam autem hujusmodi, si dicendum quod res est, hactenus prodidit nemo. Cartesiana enim formula Parabolae propria est; Amplissimus Huddenius aliam pro Hyperbola dedit non minus elegantem; uterque tamen opus habet praeparatione aequationis, quod calculos plerumque reddit prolixos. Inter eos quorum extant in hanc rem meditationes, longissime omnium progressus est Illustris Slusius, cui si in mentem venisset quaerere, quod ego mihi hoc loco proposueram, utique elegantius multo absolvisset; is ergo unam dedit formulam omnibus aequationum formis communem, nec praeparatione indigentem, sed non omnibus Conicarum speciebus: coarctatur enim ad intersectionem parabolae datae et circuli cujusdam inventi. Unde intelligi potest, rem constructionum non ita perfectam esse, uti nonnullis auditu potius aut superficiaria lectione quam attenta meditatione talia aestimantibus videri posset.

Mihi ergo necessarium visum est rem de integro red-ordiri. Quod dum facio, novisque artibus characterum ambiguorum usus institutum urgeo, primum in vias incidi jam impeditas ut pene de exitu desperarem; formulas enim prolixiores pro nihilo ducebam, nec nisi simplicibus atque elegantibus uti decreveram. Hoc me admonuit, non esse statim irrumpendum in calculum, sed accurata meditatione digerenda primum subsidia esse, unde aptiora eligi possint; alioquin evenit, ut in ipso limine superando defatigati aut resiliamus irriti coeptorum, aut non nisi recollecta mente novis viribus sumtis, sero ad exitum producamur. Nolo errationum mearum vestigia describere, quanquam id quoque profecto usus habiturum esset non contemnendos, nisi prolixitas deterreret; suffecerit hoc loco itinerarium dare cogitationum mearum, ex quo in veram viam coorta subito luce redierant.

C o n s t r u c t i o est determinatio puncti quaesiti ductu linearum; ergo c o n s t r u c t i o eo censeri debet e l e g a n t i o r, quo l i n e a e quas ducere necesse est s i m p l i c i o r e s p a u c i o r e s q u e sunt. Simpliciores autem censentur Geometricae mechanicis, et inter Geometricas eae quae gradus sunt inferioris, superioribus. Si duae sint ejusdem problematis constructiones, quarum altera paucioribus, altera simplicioribus lineis utatur, posterior praeferenda plerumque est; malim enim profecto decem describere circulos, quam conchoeidem unam, cum re accurate considerata ad descriptionem conchoeidis infinitis circulis, id est motu circuli integri per spatium, opus sit, cujus infinita vestigia pro totidem descriptis circulis haberi possunt. Hinc patet, non esse utendum linea superiore ad problema inferius, nisi ea linea superior jam tum adsit sive quod data sit in problemate, sive quod alia ex causa describenda fuerit. Exempli causa, si quaestio sit de ratione inveniendi punctum flexus contrarii in conchoeide, constat problema sua natura esse solidum, sive sectionibus conicis efficiendum; quia tamen omnia problemata inferiora lineis superioribus solvi possunt, ideo rectius solvetur per conchoeidem datam et circulum; satius enim conchoeide jam descripta uti, quam novam curvam conicam describere.

Ex his intelligi potest, regulas constructionum elegantium easdem esse cum praeceptis parsimoniae ex arte oeconomica petitis, ne scilicet inutilibus utamur, aut ne quibusdam utilibus in nostra potestate sitis non utamur. Unde intelligitur data omnia minutim examinanda, ut appareat quid inde erui possit in rem nostram; datae autem sunt tum figurae sive lineae, tum quantitates sive valores quaesitarum linearum earumve potestatum. In datis lineis utique mutari potest nihil; sed quoniam constat, ad eandem lineam quaesitam dati valoris variis modis posse deveniri, pro vario datarum linearum usu, ideo quaeritur electio modi cujusdam prae caeteris facilis atque elegantis, id est valor simplicior dato factus ex dato linearum datarum facili in alias transmutatione. Sed quoniam ad ista non ante veniendum est, quam valor linearum pure habeatur, et vero saepe non ipsius lineae, sed potestatis ejus potestatumve diversarum aggregati valor habetur, ideo aequationis inde natae quaerendae sunt radices id est valores unus pluresve, qui lineae quaesitae tribuendi sunt ut aequationi datae respondere possit, iisque valoribus inventis, tum demum de ratione cogitandum est, qua reddi queant simplices. Verum quia saepe valores linearum quaesitarum puri per calculum exacte haberi non possunt, Geometria succurrit defectui Analyseos, et quod ista nominare non potest, efficit intersectione quarundam linearum. Hinc apparet, duo esse summa genera constructionum in Geometria, quemadmodum duo sunt genera operationum in Arithmetica: Algorithmum quem vocant quatuor specierum (qui additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem et horum combinationes varias complectitur) et Extractionem Radicum. Nam si sit $x \sqcap a - b + \frac{bc}{a} + d + \sqrt{da}$, patet ad habendam x additione quatuor quantitatum, subtractione unius b, multiplicatione ipsius b per c et divisione producti per a, ac denique radice ex da opus esse. Quae ut quam compendiosissime fiant, variae artes tum ab ips calculo, tum a Geometria suppeditantur: a calculo, ut si addenda sint $1a+2a+3a+4a+5a \sqcap x$, ponendo numerum terminorum $5 \sqcap d$ et proxime majorem $6 \sqcap d+1$, fiet summa $\frac{ad^2+da}{2} \sqcap x$ seu $15a$; a Geometria, ut si addenda sint b^2+c^2, tantum rectae b extremo uno altera c normaliter imponatur, punctisque reliquis duobus extremis alterius cujusdam lineae ductu, erit hujus lineae quadratum aequale duorum quadratorum datorum summae: quam sane praxin non calculus, sed Geometriae pars a calculo independens docet, sed artis foret. Ex quo intelligi potest, Geometriam, quanquam calculo Algebraico subordinata sit scientia, suam tamen quandam peculiarem analysin habere, qua theoremata ipsi propria demonstrentur, et constructiones ultimae, calculo quantum licet contracto, tandem in lineis efficiantur.

Hanc Analysin Geometriae propriam videntur agnovisse ac tenuisse Veteres, cum in eorum scriptis agnoscere mihi videor vestigia quaedam, Algebrae praeterquam ubi de numeris agebatur nulla. Et vero quas illi hac arte detexere propositiones, nisi dudum haberemus, aegre quibus nunc utimur methodis inveniremus. Ejus artis prima lineamenta mihi videor assecutus rationemque reperisse, qua inventis symbolis aptis constitutisque principiis quibusdam caetera quadam calculi imitatione fieri possint, ne lineas imaginatione persequi necesse sit, quod nescio an habuerint Veteres. Intelligo, Clarissimum Aleaumium, Vietae aequalem, peculiarem quandam sibi fecisse characteristicam, qua amici ab eo mira praestari agnoscebant, sed cujus post ejus mortem vestigia superfuere nulla.

Ego cum Euclidis elementa nuper attente legerem, quod fateor a me fieri perraro, aut potius si de integro libro quaestio sit, factum hactenus nunquam, tria esse vidi propositionum genera: aut enim ex calculo pendent, quales sunt quae de rationibus ab eo demonstrantur, ac de quadratis, atque incommensurabilibus nonnullae; aut ex linearum ductu, quales sunt quae prioribus libris habentur pleraeque, de angulis, de perpendicularibus, de parallelis; aliae denique ex utrisque subsidiis inter se junctis. Hae propositiones aut theoremata aut problemata sunt. Theorematum elegantium calculi pariter ac Geometriae haec est natura, ut non possint nisi casu inveniri, nisi quis omnes ordine combinationes notionum (delectu tamen aliquo fateor habito quod peculiaris quoque artificii est) instituere velit, quo facto eum in theoremata insignia omnia incidere necesse est; at Problematum diversa est ratio, dato enim problemate desideratur ars quaedam solvendi certa, ita ut semper in nostra potestate sit exitum reperire; sin minus, nota est scientiae imperfectae. Animadverti autem, multa problematum calculi genera esse in nostra potestate, at problematum Geometriae purae nulla: nam exempli causa problema illud simplicissimum, rectam lineam invenire cujus quadratum datarum duarum linearum rectarum quadratis sit aequale, quis solveret quaeso, nisi theorema Pythagoreum jam extaret? Unde intelligitur, horum aliorumque multorum Geometriae purae problematum solutionem non arti ac methodo, sed memoriae nostrae deberi, Veterum autem ingenio ac felicitati; nam forte nec illis methodus fuit. Ingenium autem et felicitatem jugenda esse constat, quando methodus deest; methodus enim hominem mediocrem, quantum ad exitus certitudinem, aequat ingenioso qui de suo invenire possit, aut experto qui memoria ab aliis inventorum polleat, etsi tempore semper distinguantur, quod inexercitatus, ac hebes, sed methodo instructus sibi majus suo quodam jure postulat. Fatendum est ergo, Analysin Geometriae hactenus perfectam non esse, cum sint problemata quorum solutio non nisi per synthesin habetur. Fortasse nulla sunt problemata (de iis semper loquor, quae possunt aequatione comprehendi) quae ex iis quae per synthesin habentur in Geometria pura, accedente Analysi calculi, solvi non possint; sed elegantissimas omnium constructiones eligere ex calculo dato, res est non nisi ab illa quam supra tetigi arte symbolica, Geometriae peculiari, expectanda.

Hoc loco vero Symbolicam illam novam non attingemus, cum peculiaris sit operae speculatio, nec valores calculo invenire nec inventos contrahere docebimus: sed unum nunc explicabimus, quomodo radices aequationum, etiamsi analytice extrahi non possint, Geometrica constructione commode definiantur, ejusque artis specimen dabimus, prodita methodo generali construendi problema solidum quodlibet utcunque affectum sectione conica data circuloque invento, quam eo pluris faciendam arbitror, quo rariore connubio universalitatem junxit elegantiae ac brevitati.

Quaerimus Constructionem Aequationis solidae cujuscunque ope sectionis conicae cujuscunque et circuli. Quaeritur ergo linea, quae simul ad sectionem conicam indefinitam et circulum ordinata esse possit, ac proinde duos habeat valores duabus aequationibus duas easdem incognitas habentibus seu duobus locis expressos; unde una denique unius incognitae fiat aequatio, similis datae, cum singuli termini, singulis terminis aequationis datae collati, definiant totidem lineas arbitrarias in locis exprimendis assumtas. Unde intelligitur, utile esse multiplicare numerum linearum arbitrariarum quoad ejus fieri commode potest, nam si quae post omnes aequationes collatitias resolutas supersint, poterunt a nobis definiri pro arbitrio; unde apparent modi infiniti construendi problema idem formula eadem, ex quibus elegantiores eligi possunt. Ut autem lineae arbitrariae multiplicentur, locus ad Conicam circulumve assumendus ille est, qui plurimas lineas recipit.

Quemadmodum inter multa ad eandem curvam loca quidam est simplicissimus, ita vicissim alius omnium maxime compositus habetur; quemadmodum autem ille ad naturam curvae concipiendam, demonstrandas proprietates, inveniendasque dimensiones, ita alter ad problematum constructionem utilior haberi debet. Lineae conicae simplicissimus locus hac ni fallor aequatione universali, conicis omnibus communi, exprimitur: $2ax \pm \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, posito a latere recto, q transverso. Omissa Parabola, Hyperbolae atque Ellipsis communis aequatio simplicissima haec est: $a^2 \pm \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, et circuli: $a^2 - x^2 \sqcap y^2$. Compositus maxime locus ad sectionem conicam tali aequatione exprimitur: $\pm \frac{a}{q}x^2 + bx + ca \sqcap y^2 + dy$, cui respondet talis aequatio ad circulum:

$$-x^2 + cx + \Theta a \sqcap y^2 + \lambda y.$$

Facile autem cuivis Analytices perito ex ipso harum aequationum intuitu patet, nullas alias magis compositas ad sectionem conicam circulumve esse in natura rerum, cum harum quidem omnia loca sint completa, et ad gradus altiores ascendere non liceat. Tantum ergo peculiaris horum locorum descriptio determinatioque exhibenda est, ut ipsarum x et y pariter ac caeterarum b, c, d situs cognoscatur

Hoc autem via analyseos regia sic obtinebitur, si aequatio composita data reducatur ad simplicissimam; duos enim terminos dy et ca tollere in nostra potestate est, quia duas etiam incognitas pro arbitrio explicare possumus, nempe x et y. Quod ideo monere volui, quia viam aperit universalem ad loca altiorum etiam curvarum examinanda. Hac enim arte facile intelligi potest, quae loca possint esse ad eandem curvam quorum scilicet unus ex alio fieri potest; unde methodus apparet exhibendi loca curvarum altioris cujusdam gradus simplicissima, unde certus quoque earum numerus innotescet. Eadem methodo aperitur via ad investigandos modos describendi curvam datam: sane enim finitus est numerus locorum, si rectae incognitae x et y parallelae inter se intelligantur. Sed quoniam varios alios earum situs comminisci licet, ut si in Triangulum coeant circa focos quosdam rotatile, ut fit cum Ellipsis aut Hyperbola ex focis quibusdam describitur, hinc fit ut infinita possint intelligi loca ad eandem curvam, quorum tamen pleraque ad constructiones problematum inepta sunt, ubi duabus curvis sese intersecantibus necesse est y incognitas non tantum ubique easdem, sed et x inter se parallelas esse, et coincidere y, vel contra. Est et alia locorum per abscissas ordinatasque explicatorum praerogativa, ut ad dimensiones inveniendas utilia sint.

Reliqua tamen loca ad descriptiones curvarum organicas usui esse possunt, puncta enim curvae cujusdam datae non tantum relatione ad quandam directricem per perpendiculares sive ordinatas, sed et relatione rectarum ad certa quaedam puncta ductarum designari possunt: quae sane expressio longe priore simplicior est, cum non nisi una saepe ordinata opus habeat. Data jam curva punctum quoddam unum plurave invenire, ad quod omnia curvae puncta relationem habeant adeo simplicem, ut una incognita exprimi possit, problema credo fuerit supra vires humanas, nisi Synthesis succurrat Analysi laboranti, nimirum quod supra dixi Theoremata elegantia vi quadam subita eruere non est in nostra potestate, sed si per combinationes idearum minutim procedas, ipsa sese ordine offerunt meditanti. Ergo primum cogitabimus, si una recta a quolibet curvae puncto ad idem punctum duci possit, eam esse circularem; si a quolibet curvae puncto ad duo quaedam puncta rectarum ductarum summa vel differentia sit cuidam rectae datae aequalis, lineam esse Ellipsin vel Hyperbolam; si a quolibet curvae puncto dato duae ductae lineae brevissimae, altera ad punctum quoddam, altera ad rectam quandam, sint inter se aequales, curvam fore Parabolam. Unde sumtis jam pluribus punctis, aliae possunt combinationes institui, quibus ordine omnes curvas Geometricas exhiberi posse non est dubitandum; idque ad Geometriae perfectionem plane necessarium est, ut habeatur ratio omnium commodissima describendi curvam. Quo perfecto de caeteris describendi modis infinitis non erit laborandum, nisi si qui peculiares quosdam usus habere possint. Quales sunt describendi rationes eccentricae, quibus portiones curvarum longissime a centro focove distantes exiguis tamen machinis perfici possint, quale quiddam in circuli sphaeraeve portionum eccentrica tornatione habetur, et memini Johannem Ottium, Analyseos peritissimum, simile quiddam nobis in Ellipsi, Hyperbola et Parabola promittere, quod ad altiores curvas generali methodo produci posse non dubito. Mihi rem consideranti, aptissimus ei usui videtur conus; habita enim exigua trianguli portione sufficiente, etiam coni sufficiens portio describi potest, ex quo secari potest portio curvae, utcunque focus ejus longissime absit; idem ad circulum traduci potest, quia circulus ex cono aliter etiam quam parallele ad axem secari potest, cum scilicet subcontraria quam vocant sectio est. Porro cum eadem sectio aliquando ex pluribus possit secari conis, eligendus est commodissimus in rem nostram. Addenda sunt in eam rem quae Hookius de descriptione eccentrica superficiei sphaericae explicuit; item quam Wrennus invenit admirabilem Hyperbolae proprietatem, ostendit enim in Conoeidis Hyperbolici superficie infinitas duci posse rectas, idque ad ejus descriptionem applicuit; demonstrationem dedit Wallisius libro de Motu. Caeterum videndum est, possitne reperiri Conoeidis genus, ex quo omnes aut certe plurimae secundi generis curvae secari possint. Et credibile est, ex trium Conoeidum, Parabolici, Hyperbolici, Elliptici, sectionibus omnes curvas secundi gradus effici posse. Addo, quemadmodum ex cono secari potest non tantum Parabola, Ellipsis, sed et recta et circulus, ita ex Conoeide quodam altiore, ut Hyperbolico, forte inferiores quoque lineas, ut ipsas conicas, imo et rectam circulumque posse secari, uti de recta id Wrennus ostendit. Haec utique non sunt usu vacua; neque enim despero posse aliquando sectiones conicas, imo et conoeidicas mechanismis quibusdam tolerabilibus exhiberi quantum satis est ad sphaericorum vitrorum speculorumve effectus repraesentandos.

Sed redeundum est ex diverticulo in viam, a locis ad descriptionem utilibus ad loca constructionibus aptiora. Dixi locum ad sectionem conicam maxime compositum reduci posse ad simplicissimum arte analytica tollendi terminos duos dy et ca. Sed hoc quidem necesse non est, nunc quidem, quoniam jam habetur descriptio loci ad sectionem conicam, neque simplicissimi neque compositissimi, ad quem noster nullo negotio reducitur; id vero est:

$$\mp \frac{a}{q} z^2 + \aleph z \sqcap v^2 + \beth v \sqcap \text{ ad sectionem conicam indefinitam,}$$

$$\text{et} \quad -w^2 + \gimel w \sqcap y^2 + \daleth y \sqcap \text{ ad circulum.}$$

Quarum descriptio haec est: Sit sectionis conicae datae centrum B, Axis seu latus transversum primarium duos vertices oppositos conjungens ABC. Centro eodem B rectangulum DEFG sectioni conicae inscribatur, ita scilicet ut aliquod ejus latus DE axi AC parallelum sit et anguli quatuor D, E, F, G in ipsam lineam terminentur. Sumto jam quolibet in linea puncto ut H, si perpendicularis inde in rectam DE, productam si opus est, demittatur, nempe HL, erit rectangulum DLE ad rectangulum MLH, ut sectionis conicae latus rectum RS ad ejusdem latus transversum AC. Quod in circulo fig. 31, Ellipsi fig. 32, Hyperbola fig. 33, Parabola fig. 34 non minus quam in ipsa recta fig. 35 verum esse constabit examinanti; demonstrationem enim generalem quae prolixiuscula est, nunc quidam afferre alienum est ab instituto praesenti. Tantum in circulo considerandum est, quoniam latus rectum et transversum aequalia sunt, etiam haec duo rectangula aequari, quod et in certa Hyperbolae specie, quam circularem appellare possis, in qua scilicet latus rectum transverso sive axi aequatur, verum est; adde et in angulo rectilineo ERF, qui et ipse sectio superficiei conicae censeri potest, quando rectus est. In Hyperbola considerandum est harmoniae causa duas oppositas sectiones pro una figura habendas, cujus aliquod centrum B cogitari potest, non minus ac Ellipseos vel Circuli, etsi in his oppositae portiones concurrant in lineam in se redeuntem, quae in Hyperbola anguloque rectilineo divergunt. Angulus autem rectilineus eo tantum ab Hyperbola differre intelligi potest, quod latus ejus rectum transversumque sunt infinite parva, et puncta R, S, A, B, C concidunt. At Parabola considerari potest quantum in rem praesentem velut Hyperbola, sed cujus centrum et sectio opposita sint alterius mundi, id est infinite distent abhinc; neque enim aliter Parabola ab Hyperbola differt, quam quod latus illius transversum est infinitum; etsi ergo puncta B, C, D, G in Parabola exhiberi non possunt, nec linea DE vel AC duci queat, calculus tamen nihilo secius procedit.

In fig. 35. $EN^2 \sqcap \frac{a}{q} RN^2$; erit ergo $EN \sqcap RN\sqrt{\frac{a}{q}}$, et LM seu 2EN erit $2\,RN\sqrt{\frac{a}{q}}$, et $DE \sqcap 2RN$. Esto jam $EL \sqcap x$, erit $HL \sqcap x \frown \frac{RN}{RN}\sqrt{\frac{a}{q}}$ sive erit $HL \sqcap x\sqrt{\frac{a}{q}}$. Rectangulum DLE erit $\sqcap 2RN+x, \frown x$ sive $2RNx + x^2$; rectangulum vero MHL erit $\sqcap 2RN\sqrt{\frac{a}{q}} + x\sqrt{\frac{a}{q}}, \frown x\sqrt{\frac{a}{q}}$ sive $2RNx\frac{a}{q} + x^2\frac{a}{q}$; erit ergo Rectangulum DLE ad rectangulum MHL ut q ad a.

II.

SPECIMEN GEOMETRIAE LUCIFERAE.

Saepe notatum est a viris acri judicio praeditis, Geometras verissima quidem et certissima tradere, eaque ita confirmare ut assensus negari non possit, sed non satis illustrare animum, neque fontes inveniendi aperire, dum lector se captum quidem et constrictum sentit, capere autem non satis potest, quomodo inciderit in has casses, quae res facit ut homines Geometrarum demonstrationes magis admirentur quam intelligant, nec satis ex illis percipiant fructus ad intellectus emendationem, in aliis quoque disciplinis profuturam, quae tamen mihi potissima videtur demonstrationum Mathematicarum utilitas. Cum igitur de his rebus saepe meditanti plurima inciderint, quae ad reddendas causas fontesque recludendos facere videntur, eorum specimen placet exscribere familiari sermone ac liberiori structura, prout nunc in mentem venit, severiore illa exponendi ratione in aliud tempus servata.

Utuntur vel uti possunt Geometrae variis notionibus aliunde sumtis, nempe de eodem et diverso seu de coincidente et non coincidente, de eo quod inest vel non inest, de determinato et indeterminato, de congruo et incongruo, de simili et dissimili, de toto et parte, de aequali, majori et minori, de continuo aut interrupto, de mutatione, ac denique quod ipsis proprium est de situ et extensione.

Doctrina de coincidente aut non coincidente est ipsa doctrina logica de formis syllogismorum. Hinc sumimus quod quae coincidunt eidem tertio coincidunt inter se; si duorum coincidentium unum tertio non coincidat, nec alterum ei coincidere. Ita Geometra ostendit, punctum quo duo diametri circuli (id est rectae circulum secantes in duas partes congruas) se secant, coincidere cum puncto, quo duae aliae diametri ejusdem circuli se secant. Vid. fig. 36.

Doctrinae de eo quod inest alteri, partem aliquam etiam demonstrationibus complexus est Aristoteles in prioribus Analyticis, notavit enim praedicatum inesse subjecto, scilicet notionem praedicati notioni subjecti, quanquam etiam contra individua subjecti insint individuis praedicati. Et plura adhuc demonstrari possint universalia de continente et contento seu inexistente, utilia futura tam in Logicis quam Geometricis. Quorum et specimen dedi, ubi demonstravi, si A sit in B et B sit in C, etiam A esse in C fig. 37; item si A sit in L et B sit in L, etiam compositum ex A et B fore in L fig. 38; item si A sit in B, et B sit in A, coincidere A et B fig 39. Problemata etiam solvi, ut plura invenire numero quotcunque talia ut nihil ex ipsis componi possit novum, quod fit si ea continue in se invicem insint, ut si A sit in B et B in C et C in D etc. nihil ex his componi potest novum; quod et aliis modis praestari potest, ut si sint quinque A, B, C, D, E, et A$\oplus$B coincidat C, et A sit in D, et denique B$\oplus$D coincidat E, tunc nihil ex iis componi potest novi, utcunque combinentur. Unde etiam ostendo, quomodo plura dati numeri quoad coincidentiam et inexistentiam sese habere debeant, ut inde institui possint combinationes utiles ad componendum aliquid novum. Et in his versatur pars Scientiae Combinatoriae generalis de formulis universe acceptis, cui non Geometriam tantum, sed et Logisticam seu Mathesin universalem de Magnitudinibus et Rationibus in genere tractantem subordinari alias ostensum est.

Sequitur doctrina de determinato et indeterminato, quando scilicet ex quibusdam datis quaesitum ita circumscriptum est, ut nonnisi unicum reperiri possit, quod his conditionibus satisfaciat. Datur et semideterminatum, cum non quidem unicum, sed plura, certi tamen numeri seu numero finita exhiberi possunt, quae satisfaciunt. Sic datis duobus punctis A, B determinata est recta AB (fig. 40) seu via minima ab uno ad aliud; sed si in plano quaeratur punctum C, cujus distantiae a punctis A et B datis sint magnitudinis datae, problema est semideterminatum, nam duo puncta in eodem plano reperiri possunt, nempe C et (C) quae satisfaciunt quaesito. At non nisi unicus reperiri potest circulus cujus circumferentia per data tria puncta A, B, C transeat. Et proinde si duo circuli sint propositi, et inter ratiocinandum reperiatur, unumquemque eorum per tria proposita puncta transire, certum est circulos nomine tenus duos revera esse unum eundemque seu coincidere. Utrum putem conditiones datae sint determinantes, ex ipsismet cognosci potest, quando tales sunt, ut rei quaesitae generationem sive productionem contineant, vel saltem ejus possibilitatem demonstrent, et inter generandum vel demonstrandum semper procedatur modo determinato, ita ut nihil uspiam relinquatur arbitrio sive electioni. Si enim ita procedendo nihilominus ad rei generationem vel possibilitatis ejus demonstrationem perveniatur, certum est problema esse penitus determinatum.

Hinc porro multa insignia Axiomata maximique usus deduxi, quae tamen non satis video observata. Ex his potissimum est, quod determinantia pro determinato aliud rursus determinante, in hac nova determinatione possunt substitui, determinatione hac salva. Sic si rectam indefinitam per duo puncta A et B (fig. 41) transeuntem dicamus esse locum omnium punctorum determinate se habentium ad A et B seu sui ad A et B situs unicorum, demonstro inde duobus aliis punctis in eadem recta sumtis ut C et A (facilitatis nunc et brevitatis causa unum ex duobus prioribus hic rursus assumando) etiam eandem rectam ad haec duo puncta C et A esse determinatam, seu quodlibet punctum in eadem recta esse sui situs unicum ad A et C. Demonstratio est talis: Sit recta per A et B, cujus punctum quodcunque ut L est sui ad A et B situs unicum, ita ut non possit adhuc aliud punctum inveniri eodem modo se habens ad A et B (quod est proprietas rectae), seu A. B. L. un. (sic enim scribere soleo determinationem) sumaturque in eadem recta aliud punctum C, dico quodlibet punctum rectae, ut L, etiam esse sui situs unicum ad A et C, seu A. C. L un. Nam A. B. L. un. (ex hyp.) et A. B. C. un. (quia C est in recta per A, B); jam in determinatione posteriore tollatur B ope determinationis prioris, pro B substituendo A, L (per hoc praesens axioma, quia B determinatur ex A. L); itaque in posteriori determinatione pro A. B. C. habebimus A. A. L. C. un. Sed repetitio ipsius A hic est inutilis, seu si A. A. L. C. est un., etiam A. L. C est un. seu L est sui situs unicum ad A et C, quod demonstrandum proponebatur.

Unde videmus ex hoc exemplo nasci novum genus calculi hactenus a nemine mortalium usurpati quem non ingrediuntur magnitudines, sed puncta, et ubi calculus non fit per aequationes, sed per determinationes seu congruitates et coincidentias. Determinatio enim resolvi potest ope congruitatis in coincidentiam hoc modo: A. B. L. un. id est si situs A. B. L congruat cum situ A. B. Y, coincident L et Y. Soleo autem coincidentiam notare tali signo ∞, et congruitatem tantum tali signo ∽. Et proinde A. B. L un. idem valet quod propositio conditionalis sequens: Si sit A. B. L ∽ A. B. Y, erit L ∽ Y, ubi literam Y adhibeo pro puncto indefinito, ad imitationem Algebraistarum quibus ultimae literae, ut x, y, significare solent magnitudines indefinitas. Nam quodcunque punctum assumas, ut Y, quod eodem modo se habeat ad puncta A et B, quo L se habet ad puncta A et B, id necesse est coincidere ipsi L, posito scilicet situm L ad A et B esse unicum, seu L esse in recta transeunte per A et B.

Transeamus igitur ad explicandas congruitates. Congrua sunt, quae nullo modo discerni possunt, si per se spectentur, ut in fig. 40 triangula duo ABC et AB(C) quorum unum nihil prohibet alteri applicari, ut coincidant. Sola igitur nunc positione discernuntur seu relatione ad aliquod aliud jam positione datum, ut aliquo puncto L dato fieri potest, ut ABC aliter se habeat ad L, quam AB(C) se habet ad L, verbi gratia si L sit propius ipsi C quam ipsi (C). Necesse est tamen, ut aliud L inveniri possit, quod eodem modo se habeat ad AB(C) quo L se habet ad ABC, ita ut congrua sint ABCL et AB(C)(L), alioqui si tale quid fieri non posset pro AB(C) quod fieri potest pro ABC (ita ut non posset (L) inveniri pro illo, ut L pro hoc), eo ipso discerni possent ABC et AB(C) seu non forent congrua. Et hoc ipsum est maximi momenti axioma, ut si duo sint congrua ABC et AB(C) et aliquid reperiatur L se certo modo se habens ad unum ABC, etiam aliquid detur seu possibile sit (L) quod eodem modo se habeat ad alterum AB(C). Designo autem ita (fig. 42) A. B. C ∽ L. M. N, quod significat eodem modo inter se sita esse tria puncta A, B, C, quo tria puncta L, M, N. Hoc autem intelligendum est respective secundum ordinem praescriptum, ut scilicet cum congruere seu coincidere seu sibi applicari posse intelliguntur A. B. C et L. M. N, coincidat A ipsi

L, et B ipsi M, et C ipsi N. Hinc si sit A.B.C ∞ L.M.N, sequitur etiam A.B ∞ L.M, et ita in caeteris. At vero ut colligamus A.B.C ∞ L.M.N, opus est prius probari A.B ∞ L.M et A.C ∞ L.N et B.C ∞ M.N, tum demum enim licebit secure componendo dicere A.B.C ∞ L.M.N. Ita videmus (fig. 43) licet triangula ABC et LMN duo latera aequalia habeant, AB ipsi LM et AC ipsi LN, tamen quia tertia aequalia non habent, BC et MN, non esse congrua. Quomodo autem in universum congruitas combinationum gradus altioris possit colligi ex congruitatibus combinationum gradus inferioris, et quod non opus sit omnibus ternionibus ad inveniendam congruitatem quaternionis, sed tribus tantum, et ad colligendam congruitatem quinionum, quinque ternionibus; senionum, septem ternionibus, et ita porro in infinitum, infra apparebit, cum de similitudinibus dicemus.

Patet autem quoque generaliter ex respective congruis omnibus combinationibus unius gradus semper colligi posse congruas esse omnes combinationes alterius gradus, verbi gratia ex omnibus binionibus omnes terniones, quia ex omnibus combinationibus unius gradus, verbi gratia ex omnibus binionibus quatuor rerum congruis, colligi potest ipsa quatuor rerum combinatio totalis seu quaternio A.B.C.D congrua cum L.M.N.P. Jam ex congruitate combinationum totalium sequitur quaelibet combinatio inferior seu quaevis ternio respondenti congrua, ergo ex omnibus binionibus omnes terniones.

Discimus ex his insigne discrimen congruitatum a coincidentiis et inexistentiis seu comprehensionibus. Nam (fig. 44) si recta AB coincidat cum recta LM, et simul recta AC coincidat cum LN, etiam recta BC coincidet cum recta MN. Eo ipso dum coincidunt AB et LM, coincidunt etiam puncta A cum L, et B cum M; et eo ipso dum coincidunt AC et LN, coincidet etiam punctum C cum puncto N; cum ergo puncta A, B, C ipsis L, M, N respective coincidant, adeoque B, C cum L, M, etiam rectae BC et MN coincident. Ex natura rectae quoad inexistentias alibi ostendi, si A insit ipsi L, et B ipsi M, etiam $A \oplus B$ inesse ipsi $L \oplus M$, et si $A \oplus B$ insit ipsi $L \oplus M$, et $A \oplus C$ ipsi $L \oplus N$, etiam $A \oplus B \oplus C$ inesse ipsi $L \oplus M \oplus N$, quem argumentandi modum in congruitatibus et similitudinibus imitari non licet.

Ex his jam quae diximus de discrimine inter coincidentias et congruitates, ratio porro profluit, cur congrua sint triangula ABC et (L)(M)(N) (fig. 44), si latera AB et (L)(M) itemque AC et (L)(N) congrua sint, licet de tertiis AC et (M)(N) nulla fiat mentio, modo anguli ad A et (L) congrui sint. Nam si recta (L)(M) sit congrua rectae AB, et recta (L)(N) rectae AC, et angulus quoque ad (L) angulo ad A, tunc possunt rectae (L)(M) et (L)(N) transferri in AB et AC, salvo suo situ, adeoque (L)(M)(N) potest applicari ad ABC, ita ut coincidant AB et LM, item AC et LN; ergo ex natura coincidentiae coincident etiam BC et MN; itaque si tam rectae comprehendentes quam anguli earum sint congrui, etiam bases erunt congruae, totumque adeo triangulum triangulo.

Et ex hoc ipso exemplo insigne hoc Axioma magnique usus illustrari potest: quae ex congruis eodem modo determinantur, ea sunt congrua. Sic quia generaliter ex duabus rectis magnitudine datis, et angulo eorum positione et magnitudine dato, determinatum seu positione datum est triangulum, hinc si duo sint triangula ABC, (L)(M)(N) data, habentia crura AB cum (L)(M), et AC cum (L)(N) congrua, itemque angulum quem comprehendunt congruum, angulum A angulo (L), congrua erunt triangula ipsa. Similiter quia ex tribus rectis magnitudine datis, trianguli etiam anguli magnitudine dati sunt, adeoque omnia determinata sunt, quae diversa congruentiam impediunt; hinc si duo triangula tres rectas habeant respective aequales, ac proinde congruas (rectae enim aequales congruae sunt), ipsa triangula congrua erunt. Et haec attentius considerata deprehendetur coincidere cum methodo superpositionum Euclidea.

Sunt et alia axiomata huc pertinentia, ut quae congrua sunt eidem, congrua sunt inter se; et quae congrua sunt inter se, eorum unum si tertio incongruum sit, etiam alterum tertio incongruum erit, quae tamen corollaria sunt tantum axiomatum de eodem et diverso. In iis enim quae congrua sunt, omnia eadem sunt, praeter positionem, ita ut solo differant numero. Et in universum quicquid de uno congruorum fieri dicive potest, id de altero quoque fieri potest et dici, hoc uno excepto, quod ea quae in uno adhibentur, numero differunt seu positione ab iis quae in alio adhibentur. Ita congruere intelligemus non tantum duas ulnas seu duos pedes, sed et duas libras, abstracte sumtas, duas horas, duos aequales gradus velocitatis. Notandum est etiam si duorum corporum ambitus congrui sint, etiam ipsa corpora esse congrua, quia si termini actu congruant seu coincidant, etiam corpora coincident. At non necesse est superficies et lineas coincidere aut congruas esse, quarum extrema coincidunt aut congrua sunt. Illud tamen in universum dici potest, duo extensa coincidere aut congrua esse, si coincidant aut congrua sint ea in ipso quae ab externo attingi possunt, seu ipsi cum externo possunt esse communia. Hinc superficies et lineae cum ubique ab externo attingi possint, non vero solida, terminos earum congruos esse aut coincidentes non sufficit. In genere autem ea est natura spatii, extensi (adeoque et corporis quatenus nihil aliud quam spatium adesse in eo concipitur), ut in internis sit ubique congruum et indiscernibile (ut si in media aqua agam aut in mediis tenebris palpem nec quicquam offendam) tantumque per ea discerni possit, quae ab externo attingi possunt, seu ipsi cum alio (cum quo nullam licet partem communem habet) communia sunt. Hinc quoque si duae superficies reperiantur uniformes aut lineae, extremis congruis aut etiam actu congruentibus, ipsae congruae erunt vel actu coincident.

Ex congruis oriuntur aequalia. Nempe quae congrua sunt, aut transformatione si opus sit congrua reddi possunt, ea dicuntur aequalia. Sic in fig. 45 triangula BAD, BCD, BCE, BFE sunt congrua, ideoque aequalia; quia et triangulum EBD aequale est quadrato ABCD, licet enim congrua non sint triangulum et quadratum, tamen hoc casu ex triangulo transpositione partium fieri potest quadratum priori congruum, nam si trianguli EBD unam partem BCD transferas in congruam BFE, manente altera parte ECB, tunc ex BFE et ECB fit quadratum BCEF congruum quadrato ABCD. Solemus autem aequalitatem designare signo $=$, hoc est $A=B$ significat A et B esse aequalia.

Aequalia etiam dici possunt quorum eadem est magnitudo. At magnitudo est attributum quoddam rerum, cujus certa species nulla definitione potest determinari nullisque certis notionibus, sed opus est fixa quadam mensura quam liceat consulere, et proinde si Deus universum orbem cum omnibus partibus proportione eadem servata redderet majorem, nullum esset principium id notandi. Una tamen re fixa sumta, tanquam mensura, hujus applicatione ad alias res adhibitisque repetitionum numeris magnitudo quoque aliarum cognosci potest. Atque ita magnitudo determinatur per numerum partium, quae inter se sunt aequales, vel certa quadam regula inaequales. Et licet aliqua res sit incommensurabilis respectu mensurae vel respectu rerum, quibus mensura repetita exacte congruit, tamen continuata in infinitum subtractione quoties fieri potest rei ex mensura vel mensurae ex re, residuique ex eo quod subtractum est, tunc ex progressione numerorum repetitiones exprimentium cognoscitur rei quantitas respectu mensurae. Et proinde aequalia sunt quae eodem modo se habent ad eandem mensuram respectu repetitionis, eaque eo ipso patet fieri posse congrua, cum in partes congruentes singulas singulis eodem modo resolvantur.

Ex his etiam intelligitur, quid Mathematici vocent rationem seu proportionem. Si enim duo sint A et B, et unum A accipiatur pro mensura, tunc alterius B magnitudo exprimetur per numerum aliquem (vel numerorum seriem certa lege procedentem) posito A exprimi per unitatem. Sed si neutra sit mensura, tunc numerus exprimens B per A, quasi A esset mensura seu unitas, exprimit rationem seu proportionem ipsius A ad B. Et in universum expressio unius rei per unam aliam homogeneam (seu in res congruas resolubilem) exprimit unius rationem ad aliam, ut proinde ratio sit simplicissima duorum quoad magnitudinem relatio, in qua scilicet nihil assumitur tertii ipsis homogenei ad magnitudinem unius ex magnitudine alterius suo valore exprimendam. Verbi gratia sint duae magnitudines A et B (fig. 46) velimusque earum rationem ad se invicem determinare, ponamus A esse majus et B minus, igitur ab A detrahamus B quoties id fieri potest, verbi gratia 2 vicibus, et restare C; hoc C necessario minus est quam B, ideoque a B ipsum C rursus subtrahatur quoties fieri potest, ponamus autem subtrahi posse 1 vice et residuum esse D, et a C detrahi posse D rursus 1 vice et residuum esse E, denique a D posse detrahi E 2 vicibus et residuum esse Nihil. Patet fore $A=2B+C(1)$ et $B=1C+D(2)$; ergo pro B in aequ. 1. substituendo valorem expressum in aequ. 2. $A=2C+2D+1C(3)$ seu $A=3C+2D(4)$. Rursus $C=1D+E(5)$; ergo (ex aequ. 4 et 5) $A=5D+3E(6)$, et (ex aequ. 2 et 5) $B=2D+E(7)$. Denique $D=2E(8)$. Ergo (ex aequ. 6 et 8) fiet $A=13E(9)$ et (ex aequ. 7 et 8) $B=5E(10)$. Unde videmus E esse communem omnium mensuram maximam, et posita E unitate, fore $A=13$ et $B=5$. Quaecunque autem assumatur unitas, tamen A et B esse inter se ut 13 et 5 numeros, et A fore tredecim quintas ipsius B seu $A=\frac{13}{5}B$ (id est $A=\frac{13}{5}$ si B esset unitas) nempe A est 13E, est autem E quinta ipsius B; contra B fore quinque decimas tertias ipsius A seu $B=\frac{5}{13}A$, nam

B=5E, at E est una tertia decima ipsius A. Patet autem qua titates homogeneas ipsis A et B hic provenientes ordine es

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ 13E & 5E & 3E & 2E & 1E \end{array},$$ at numeros subtractionum seu qu tientes esse 2, 1, 1, 2. Quodsi non possimus pervenire ad ult mum aliquod (ut E hoc loco) quod caetera omnia sua repetitio exacte metiatur, ita ut A et B in partes ipsi huic mensurae co gruentes, atque adeo inter se, resolvi nequeat, tunc non quidem valores hujusmodi numeris expressos quos sola unitatum repeti efficit, perveniemus, attamen ex ipsa progressione quotientium c gnoscere possumus et determinare speciem rationis; ut enim h loco data serie quotientium 2, 1, 1, 2 datur ratio inter A et B u detractionibus factis talis quotientium series prodit, ita etiamsi seri progrediatur in infinitum, quod fit in iis magnitudinibus quae int se dicuntur incommensurabiles, tamen modo seriei progressio da sit, eo ipso ratio magnitudinum erit data, et quo longius continu bimus seriem, eo propius accedemus.

Sed tamen dantur infiniti alii modi exprimendi magnitudin sive per series sive per quasdam operationes aut quosdam motu Sic a me inventum est quadrato diametri existente $\frac{1}{1}$, circulum es $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. hoc est si quadratum diametri ponat esse pes quadratus (diametro existente pede), Circulum esse qu dratum diametri semel, demta (quia nimium sumsimus) ejus tert parte, adjecta (quia nimium demsimus) ejus quinta parte, dem (quia nimium readjecimus) septima parte, et ita porro secund seriem numerorum imparium continuatim intelligendo, series is circuli magnitudine minus differt quam quaevis quantitas data, ac proinde ei coincidit. Nam si dicamus $1-\frac{1}{3}$, error minor est qua $\frac{1}{5}$, alioqui addito $\frac{1}{5}$ non adderemus nimium; et rursus si dicam $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, error minor est quam $\frac{1}{7}$, alioqui detracto $\frac{1}{7}$ non detrah remus nimium, et ita porro. Semper ergo aliquousque continuan error minor est quam fractio proxime sequens; at si data sit qua titas quaevis utcunque parva, reperiri potest fractio aliqua exp mens adhuc minorem.

Sed inprimis ad usum communem calculandi in numeris praxin confert expressio magnitudinum per numerum partium pr gressionis Geometricae, verbi gratia decimalis. Sed quia ipsa exigua figura bene exprimi non potest, adhibeamus Bimalem, qu et naturaliter prima et simplicissima est. Nempe rectam AB fig. 47 dividamus in duas partes aequales seu duas dimidias, et quamlibet dimidiam rursus in duas partes aequales, habebimus quatuor quartas, et quartas rursus bisecando habebimus octo octavas, et ita porro sedecim sedecimas etc. Eodem modo possimus rectam dividere in 10, 100, 1000, 10000 etc. partes. Sit jam quantitas CD aestimanda per scalam partium aequalium et geometrica progressione descendentium quam fecimus. Applicemus ipsam CD scalae AB et C quidem ipsi A, videamusque quorsum in scala nostra cadat altera extremitas D. Et primum conferamus D cum punctis majorum divisionum, inde gradatim progrediendo ad minores. Et cum CD sit minor quam scala AB (nam si major esset, prius ab ea detraxissemus scalam quoties id fieri potuisset) cadet D inter A et B; videmus autem esse $CD=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ et adhuc aliquid praeterea, minus tamen quam $\frac{1}{32}$; itaque si scala non sit ulterius subdivisa, expressio ista sufficiet saltem ad hoc, ut error sit minor quam $\frac{1}{32}$. Quodsi adhuc semel subdiviserimus, poterimus per scalam AB talem habere expressionem ipsius CD, ut error minor quam $\frac{1}{64}$. Et ita porro. Ita similiter, si scala divisa sit in partes 10, 100, 1000, 10000, et ita porro, efficere possumus ut error sit minor quam $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ etc.

Hac methodo insigne oritur commodum, ut omnes quantitates quae per fractas essent exprimendae, quantumlibet exacte in integris exprimantur. Sit enim septima pars pedis, aut quaecunque alia portio vel fractio. Sumamus 100000 etc. idque dividamus per 7 continuando quoad lubet, prodibit 1428571428571428 etc. seu $\frac{1}{7}=\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{8}{10000}$ etc. seu $1x+4x^2+2x^3+8x^4$ etc. posito $x=\frac{1}{10}$, et x^2 esse $\frac{1}{100}$ seu quadratum de $\frac{1}{10}$, et x^3 esse cubum de $\frac{1}{10}$, et ita porro. Semperque error minor est quam una ex portionibus ultimis, ubi destitimus, hoc loco minor quam $\frac{1}{10000}$, ubi id praeterea summe notandum est, quod semper prodit periodus, cum quantitas unitati propositae est commensurabilis, ut hoc loco 142857 recurrit in infinitum. Unde perfecte cognoscitur natura progressionis. Patet autem haec locum habere, sive per calculum sive actuali applicatione ad scalam propositam magnitudinem aestimemus. Progressio autem Bimalis hoc habet insigne, quod coefficientes seu numeri per quos potentiae x, x^2, x^3 etc. multiplicantur, sunt tantum 1 vel 0.

Sunt adhuc alii modi exprimendi magnitudines, licet enim ipsae sint incommensurabiles unitati, fieri tamen potest, ut quaedam earum potentiae seu aliqua ex ipsis enata unitati seu scalae commensurari possint. Quod ut exemplo appareat, inspiciatur fig. 48, ubi recta est AB, verbi gratia pes, ejusque quadratum seu pes quadratus est ABCD. Sit alia recta BD aequalis ipsi AB, ita ut angulus ABD ad B sit rectus, et ducatur recta AD. Et super recta BD ($=$ AB) sit quadratum BEFD, aequale quadrato ABCD (seu AC) ac denique super recta AD sit quadratum ADGH. Jam constat non tantum ex Euclideis Elementis, sed etiam ex ipsa inspectione figurae, quadratum ADGH esse duplum quadrati AC seu aequari quadratis AC et BF simul sumtis. Ductis enim diagonalibus AG, DH, se secantibus in L, resolutum erit quadratum ADGH in quatuor triangula ALD, DLG, GLH et HLA, aequalia et congrua inter se, at quadratum AC ducta diagonali DB resolvitur in duo hujusmodi triangula; est ergo quadratum ADGH duplum quadrati AC, et proinde quadratum seu potentia rectae AB (nempe quadratum AC) quadrato seu potentiae rectae AD (nempe quadrato ADGH) commensurari potest. Sed videamus jam an ipsae rectae AB et AD commensurari possint, sive ambo per numeros exprimi, rationales scilicet numeros, qui per repetitionem unitatis seu certae alicujus portionis aliquotae ipsius unitatis (quae repetitione sua unitatem exhaurit) exprimi possunt. Ponamus ergo AB esse 1 (nempe unum pedem), quaeritur quid sit AD; is debet esse numerus qui multiplicatus per se ipsum (seu quadratus) producat 2, duplum scilicet ejus quod AB quadratus producit. Verum talis numerus non potest esse integer. Nam debet esse minor quam 2 (quia 2, 3 vel alii majores quadrati seu in se ducti producunt plus quam 2, nempe 2 in 2 dat 4, et 3 in 3 dat 9 etc.), sed tamen debet esse major quam 1 (quia 1 in 1 dat 1, non 2), cadit ergo inter 1 et 2, ideo non potest esse integer, sed fractus. Verum nec ullus numerus fractus id praestat. Quia omnis numeri fracti quadratum est numerus fractus, at vero 2 est integer qui debet esse quadratum ipsius AD, ideo AD neque est numerus integer neque fractus, adeoque nec rationalis, sed surdus. Et ideo vel exprimitur Geometrice ductu linearum, ut in figura, vel calculo et quidem vel mechanice per approximationem, vel exacte, ut si dicam esse $\frac{1414}{1000}$ seu 1414 millesimae pedis vel accuratius $\frac{14142136}{10000000}$ (seu 14142136 decimo-millesimo-millesimae), nam haec fractio in se ducta dabit $\frac{20000001}{10000000}$ et paulo plus, ita ut differentia ejus a 2 sit minor una millesimo-millesima. Exacte exprimitur AD vel in numeris communibus per seriem infinitam, vel in numeris surdis. Quomodo per seriem infinitam exprimatur AD ex AB, hic exponere prolixius foret. Algebraice vel in surdis exprimitur AD per notam faciendae extractionis radicis quadraticae ex 2, seu posita $AB = 1$, erit $AD = \sqrt[2]{2}$, hoc est radix quadratica de 2, seu numerus cujus quadratum est 2. Quae nota surda utilis est in calculo, quia per multiplicationem in se ipsam evanescit, quod de Nota Trisectionis Anguli vel aliqua alia cum calculo nihil commune habente dici non aeque potest.

Operae pretium autem hoc loco erit verum aperire fontem quantitatum incommensurabilium, unde scilicet ipsae in rerum natura oriantur. Horum igitur causa est ambiguitas, seu cum quaesitum ex datis est semideterminatum (de quo supra) ita ut plura (numero tamen finita) satisfaciant, nec datis aliqua ratio applicari possit unum ab altero discernendi. Quod in hoc ipso exemplo praecedentis paragraphi ostendamus, ubi quaerebamus numerum qui in se ipsum ductus faciat 2. Sciendum autem est tales numeros semper esse binos, nam 4 tam ex $+2$ in $+2$, quam ex -2 in -2 ducto produci potest. Itaque $\sqrt[2]{4}$ est numerus ambiguus, significatque tam $+2$ quam -2; similiter $\sqrt[2]{9}$ est numerus ambiguus significatque tam $+3$ quam -3. Ergo et $\sqrt[2]{2}$ est numerus ambiguus, tamque satisfacit $+\frac{1414}{1000}$ quam $-\frac{1414}{1000}$. Sua natura igitur seu generaliter $\sqrt[2]{a}$ non potest reduci ad quiddam rationale quia omne rationale est determinatum; per accidens tamen, hoc est in quibusdam numeris qui scilicet per talem involutionem sunt orti, procedit extractio. In lineis etiam ostendi potest ambiguitas. Sit (fig. 49) circulus cujus diameter BM sit 3 et portio ejus AB sit 1. Ex puncto A educatur ad angulos rectos ipsa AD occurrens circulo in D, erit $AD = \sqrt[2]{2}$ seu quadrat. AD erit 2. Nam ex natura circuli quadratum ab AD aequatur rectangulo sub BA seu 1 et sub AM seu 2, quod rectangulum est 2. Verum haec ipsa constructio ostendit pari jure quo punctum D invenimus, potuisse etiam inveniri punctum (D) rectam ab A educendo via contraria, et ideo si AD est $+\frac{1414}{1000}$, erit A(D) $-\frac{1414}{1000}$. Quae causa etiam est cur talia problemata non possint per solas rectas solvi, quia recta rectam tantum in uno puncto secat, at circulus a recta secatur in duobus punctis, ac proinde problemata hujusmodi ambigua solvit.

Imo hae surdae expressiones nobis etiam viam praebent quantitates impossibiles seu imaginarias calculo exprimendi. Nam recta quidem omnis aliam rectam ejusdem plani (nisi parallelae sint) secat; at circulus rectam cujus distantia a centro major est circuli radio, non secat, et problema quod per talem intersectionem solvi deberet, est imaginarium seu impossibile, scilicet in qnantitatis quaesitae valore occurrit $\sqrt[2]{-aa}$ (vel simile quid) cujus quadratum est $-aa$, quod ideo impossibile est quia talis numerus $\sqrt[2]{-aa}$ non est positivus neque privativus, seu linea quae quaeritur neque motu antrorsum neque motu retrorsum exhiberi potest. Sive enim positivus esset sive privativus, tamen quadratum ejus foret positivum, ut jam ante monuimus, cum tamen quadratum ejus negativum fiat. Inserviunt tamen etiam imaginariae istae quantitates ad reales exprimendas adeo ut reales quaedam calculo exprimi non possint, nisi interventu imaginariarum, ut alibi ostensum est, sed tunc imaginariae virtualiter destruuntur.

Sed nos explicata satis natura magnitudinis atque mensurae redeamus ad aequalitatis considerationem, ubi notandum est posse duo etiam ostendi aequalia, si ostendatur, unum neque minus neque majus esse altero, et tamen ea esse homogenea, seu unum transformari posse in aliud. Sic sphaerae Archimedes aequalem exhibet cylindrum quendam, parabolae aequale triangulum; patet autem utique sphaeram transformari posse in cylindrum, si liquidum sphaeram implens in cylindrum effundatur. Parabolam in triangulum transformari posse, seu triangulum et parabolam homogenea esse ostendi potest, quia eorum ratio potest inveniri eadem quae rectae ad rectam. Hoc ita probo: Sint (fig. 50) prismata seu cylindriformia corpora duo AE et LQ, unius AE basis seu sectio horizonti parallela sit parabola ut CDE (vel aliae ei congruae), alterius LQ basis sit triangulum NPQ. Ponatur prius AE esse liquore plenum usque ad altitudinem AB, qui si inde effundatur in LQ, ponamus hoc impleri usque altitudinem LM; portionem ipsius LQ impletam LMR aequalem esse portioni ipsius AE eodem liquore prius impletae, nempe ABF. Jam quantitates talium cylindriformium portionum fiunt ex altitudine ducta in basin, seu sunt in composita ratione altitudinum et basium, ergo cum aequales sint portiones, erunt bases reciproce ut altitudines seu CDE parabola ad NPQ triangulum erit, ut recta LM ad rectam AB; quodsi ergo aliud fiat triangulum, quod etiam sit ad triangulum NPQ ut recta AB ad rectam LM, quod per communem Geometriam fieri posse constat (et primo etiam mentis obtutu intelligitur ex natura similium triangulorum, de qua mox), patet dari aequale triangulum huic parabolae, seu parabolam in triangulum posse transformari.

Etiam ex generatione seu motu cognoscimus magnitudines, ut hoc loco ex motu baseos per altitudinem, qua cylindriforme corpus generatur, datur ratio tale corpus aestimandi; sic ex ductu rectae in rectam aestimatur rectangulum sub duabus rectis comprehensum. Hac methodo superficies quoque et solida rotatione genita aestimantur, et huc pertinet praeclarum illud theorema, quod generatum motu alicujus extensi aequatur generato ex ipso extenso ducto in viam centri gravitatis, cujus ampliationes quasdam satis miras alibi dedi. Possunt tamen hae veritates demonstrari reductione ad absurdum, vel adhibita praecedenti methodo, dum ostenditur aliquid neque majus neque minus esse posse quam dicitur.

Methodus quoque per indivisibilia et infinita, seu potius per infinite parva, seu infinite magna, seu per infinitesima et infinitupla praeclari est usus. Continet enim resolutionem quandam quasi in communem mensuram, licet data quantitate quavis minorem, seu modum, quo ostenditur negligendo aliqua, quae errorem faciunt minorem quovis dato adeoque nullum, duorum quae comparanda sunt, unum in aliud esse transponendo transformabile. Sciendum est autem non componi lineam ex punctis, nec superficiem ex lineis, neque corpus ex superficiebus; sed lineam ex lineolis, superficiem ex superficieculis, corpus ex corpusculis indefinite parvis, hoc est ostenditur duo extensa posse comparari, resolvendo ipsa in particulas aequales vel inter se congruas, utcunque parvas, tanquam in communem mensuram, erroremque minorem esse semper una ex talibus particulis, vel saltem finitae ad ipsam rationis constantis aut decrescentis; unde patet errorem talis comparationis esse quovis dato minorem. Pertinet etiam huc Methodus Exhaustionum, nonnihil diversa a priore, quanquam tandem in radice conveniant. Ubi ostenditur quomodo series quaedam magnitudinum infinita sit, quarum haberi potest prima et ultima, quae continue ad quandam propositam accedunt, ita ut discrimen tandem fiat minus dato, adeoque in ultimo nullum, sive exhaustum sit. Itaque ultima seriei hujus magnitudo (quam haberi diximus) aequatur propositae Magnitudini; sed haec attingere tantum hoc loco visum est.

Nondum definivimus quid sit majus et minus, quod omnino faciendum est. Dico ergo, Minus aliquo esse quod parti ejus aequale est, seu (fig. 51) si duo sint A et B, et sit p pars ipsius A aequalis ipsi B, tunc A appellamus Majus, et B Minus. Hinc statim demonstratur celebre illud Axioma, totum esse majus sua parte, assumto tantum alio axiomate per se vero seu identico, quod nimirum unaquaeque res quantitate praedita tanta est quanta est, seu sibi ipsi aequalis est, seu quod omne tripedale est tripedale etc. Demonstratio uno syllogismo comprehensa talis est: Quicquid aequale est ipsi p parti totius A, id est minus est quam totum A (ex definitione minoris); jam p pars totius A aequalis est ipsi p parti totius A, nempe sibi ipsi (per Axioma identicum seu per se verum), ergo p pars totius A est minor quam totum A, seu totum est majus parte.

Sed hic jam opus est, ut nonnihil explicemus quid sit totum et pars. Equidem manifestum est partem toti inesse seu toto posito eo ipso partem immediate poni, seu parte posita cum quibusdam aliis partibus eo ipso totum poni, ita ut partes una cum sua positione sumtae tantum nomine tenus a toto differant, ac nomen totius compendii causa pro ipsis tantum in rationes ponatur. Sunt tamen et aliqua quae insunt, etsi non sint partes, ut puncta quae sumi possunt in recta, diameter qui sumi potest in circulo; itaque pars debet esse Homogenea toti; et proinde si sint duo A et B homogenea et ipsi A insit B, erit A totum, et B pars, adeo que demonstrationes a me alibi datae de continente et contento seu inexistente possunt transferri ad totum et partem. Quid autem Homogeneum sit, partim attigimus, partim amplius explicabimus.

Ex his autem definitionibus aequalis, majoris, minoris, totius et partis complura axiomata demonstrari possunt, quae ab Euclide sunt assumta. Totum esse majus sua parte jam ostendimus. Totum aliquo modo ex partibus componi posse, seu assignari posse partes quae simul sumtae ipsi coincidant, patet ex dictis paragrapho praecedente, ex natura scilicet inexistentium. Minus minore est minus majore, seu si A sit minus B, et B minus C, erit A minus C, seu $A+L=B$ et $B+M=C$, ergo $A+L+M=C$. Axiomata autem illa, quod aequalibus addendo vel detrahendo aequalia, fiant aequalia, aliaque hujusmodi ex eo statim demonstrantur, quod Aequalia sunt quae sunt magnitudine eadem, seu quae sibi mutuo substitui possunt salva magnitudine, et si eodem modo respectu magnitudinis tractentur (secundum omnes modos tractandi determinatos, quibus unicum tantum producitur) aequalia prodeunt. Hinc statim apparet, aequalia aequalium additione, subtractione, multiplicatione fieri aequalia; verum si ab aequalibus radices ejusdem denominationis extrahantur, sive purae, sive afflictae, non necesse est statim prodire aequalia, quia problema extrahendi radices sua natura et absolute loquendo est ambiguum. Itaque non licet dicere, quae in se ducta vel cum iisdem producant aequalia eodem modo, ea esse aequalia. Ita duo possunt dari numeri inaequales (nempe 1 et 2) quorum cujusque residuum a ternario (2 vel 1) ductum in ipsum numerum (1 vel 2) faciat aequale nempe 2.

Nunc tempus est, ut postquam de magnitudine et aequalibus diximus, etiam de specie seu forma et similibus dicamus; maximus enim similitudinis in Geometria est usus, natura autem non satis explicata habetur, unde multa per ambages demonstrantur, quae primo statim intuitu recte consideranti patent. Constat ex Euclidis libro Datorum, quaedam esse data positione, quaedam magnitudine, quaedam denique specie. Si quid ex quibusdam datis positione detur, tunc aliud quod ex iisdem eodem modo (determinato) datur, erit priori coincidens seu idem numero; si quid ex quibusdam magnitudine detur, et aliud ex iisdem vel aequalibus eodem modo (determinato) detur, erit priori aequale; si quid ex quibusdam specie detur, et aliud ex iisdem vel similibus eodem modo determinato detur, erit ejusdem speciei cum priore seu erit simile. Denique quae similia et aequalia sunt, ea congrua sunt. Et quae magnitudine pariter et specie data sunt, ea dici potest exemplo vel typo data esse, ita ut quae ejusdem typi vel exempli sunt, id est pariter qualitatis seu formae et quantitatis, ea congrua dicantur. Porro quae nullo modo discerni possunt, neque per se neque per alia, ea utique eadem seu coincidentia sunt, et talia in rebus quarum nihil aliud quam extensio consideratur, sunt quae eandem habent positionem seu quae eidem loco actu congruunt. At sunt aliqua quae per omnia conveniunt seu ejusdem typi sive exempli sunt, et tamen differunt numero, ut rectae aequales, duo ova per omnia similia, duo sigilla in ceram uniformem ex eodem typo expressa. Haec manifestum est si per se spectentur, nullo modo discerni posse, etsi conferantur inter se. Solo erga situ ad externa discernuntur. Ut si duo ova perfecte sint similia et aequalia, et juxta se locentur, saltem notari potest unum alio orientalius aut occidentalius, vel septentrionalius aut meridionalius, vel superius aut inferius esse, vel alteri alicui corpori extra ipsa posito esse propius. Et haec dicuntur congrua, quae talia sunt, ut nihil prorsus de uno affirmari possit, quod non possibile sit etiam circa aliud intelligi solo discrimine numeri seu individui, seu positionis quae certo aliquo tempore cuique est, quia nec plura eodem tempore sunt in eodem loco, nec idem in pluribus. At similia sunt, quorum species seu definitio est eadem, seu quae ejusdem sunt speciei infimae, ut quilibet circuli sunt ejusdem speciei, et eadem definitio cuilibet competit, nec subdividi potest circulus in diversas species, quae aliqua definitione differant. Etsi enim alius possit esse circulus pedalis, alius semipedalis etc., tamen pedis nulla dari potest definitio, sed opus est typo aliquo fixo et permanente, unde mensurae rerum ex durabili materia fieri solent, et ideo quidam proposuit ut pyramides Aegypti, quae tot jam seculis durarunt et diu adhuc verisimiliter duraturae sunt, adhiberentur. Sic quamdiu ponimus nec globum terrae, nec motum siderum notabiliter mutari, poterit eadem investigari a posteris quantitas gradus terreni, quae a nobis. Si quae species eandem toto orbe et multis seculis magnitudinem servarent, ut cellae apum facere quibusdam videntur, hinc quoque sumi posset constans mensura. Denique quamdiu ponimus in causa gravitatis nihil mutari notabiliter, nec in motu siderum, poterunt posteri ope penduli discere mensuras nostras. At si quemadmodum alibi jam dixi Deus omnia mutaret proportione eadem servata, perisset nobis omnis mensura, nec possemus scire quantum res mutatae sint, quoniam mensura nulla certa definitione comprehendi adeoque nec memoria retineri potest, sed opus est reali ejus conservatione. Ex quibus omnibus discrimen inter magnitudinem et speciem, seu inter quantitatem et qualitatem elucere arbitror.

Itaque si duo sint similia, ea per se sigillatim discerni non possunt. Exempli causa duo circuli inaequales non discernentur, quamdiu unusquisque eorum sigillatim spectatur. Omnia theoremata, omnes constructiones, omnes proprietates, proportiones, respectus, qui in uno circulo notari possunt, poterunt etiam in alio notari. Ut se habet diameter ad latus polygoni cujusdam regularis inscripti vel circumscripti in uno, ita etiam se habebit in altero; ut circulus unus se habet ad quadratum suum circumscriptum, ita etiam alius ad suum; unde statim patet permutando circulos esse ut quadrata diametrorum, nam quia A est ad B ut L ad M (fig. 52) erit permutando A ad L ut B ad M. Et generaliter hinc patet, superficies similes esse ut quadrata homologarum rectarum, et corpora similia ut cubos homologarum rectarum. Hinc et Archimedes assumsit, centra gravitatis similium figurarum similiter sita esse. Itaque ut duo similia, verbi gratia duo circuli, discernantur, non opus est eos tantum sigillàtim spectari, et memoria rem geri, sed opus est ut simul spectentur sibique realiter admoveantur, vel communis aliqua realis mensura ab uno ad alterum delata ipsis applicetur, vel aliquid per applicationem realis mensurae jam mensuratum aut mensurandum. Atque ita demum apparebit utrum congrua sint vel non. Nam si duorum similium aliqua homologa sint congrua, v. g. diametri duorum circulorum, aut parametri duarum parabolarum, necesse est ipsa similia etiam plane congrua adeoque et aequalia esse. Illud verum non est, si similibus addantur similia aut detrahantur, provenire similia, nisi addantur aut detrahantur eodem modo utrobique. Et generaliter quae ex similibus similiter seu eodem modo determinantur, ea sunt similia; quod si semideterminentur, cum problema ambiguum est, saltem cuilibet semideterminatorum ab una parte respondebit unum ex semideterminatis ab alia, quod ipsi simile erit. Quod et de aequalibus, congruis et coincidentibus dici potest. Si duorum similium duo homologa coincidant, duo similia erunt congrua tantum, nam quae coincidunt, ea congrua sunt, at homologis similium congruis existentibus ipsa congrua sunt.

Porro similitudinem notare soleo hoc modo $\sim$ et $A \sim B$ significat A sim. B. Ex sigillatim autem similibus non licet ut dixi colligere etiam composita similia esse, et licet sit $AB \sim LM$ et $AC \sim LN$ et $BC \sim MN$, non tamen licet concludere $ABC \sim LMN$, alioqui cum quaevis recta cuivis sit similis, concludi posset quamlibet figuram cuivis esse similem, cum tamen in congruitatibus procedat talis argumentandi ratio. At in ternionibus et altioribus combinationibus talis argumentatio procedit, quod est notabile. Nempe si similes sint omnes terniones ab una parte omnibus ternionibus ab altera parte, etiam quaterniones, quiniones etc. inde conflatae erunt similes, seu si sit (fig. 53) $ABC \sim LMN$ et $ABD \sim LMP$ et $ACD \sim LNP$ et $BCD \sim MNP$, erit $ABCD \sim LMNP$. An autem una ternionum omitti possit seu ex caeteris concludatur, videamus, verb. gr. an omitti possit $BCD \sim MNP$. Sumamus triangulo ABC simile LMN et ipsi ABD simile LMP, patet dato ABCD et LMN (quod specie datum est) assumto magnitudine et positione pro arbitrio dari et LMP specie et magnitudine, cumque LM habeatur et positione (ob assumtam LM in LMN) patet P cadere in circulum triangulo LMP circa LM tanquam axem moto descriptum. In plano tamen hoc non nisi bis assumi potest P manentibus L et M, nempe vel in P vel in π (quia circuli hujus circumferentia planum in duobus punctis perforat). Ex quibus tamen P eligi debere excluso π, ostendit tertia similitudo, nam $ACD \backsim LNP$, neque enim est $ACD \backsim LN\pi$. Itaque in plano hoc modo omnia sunt determinata, seu ex solis tribus similitudinibus ternionum respondentium colligitur etiam similitudo quartae ternionis adeoque et quaternionis totalis, cumque in figura ascripta A, B, C, D sint in eodem plano, erunt utique etiam L, M, N, P in eodem plano. Sed absolute, in spatio si A, B, C, D utcunque posita intelligantur, videamus quid sit futurum similitudinibus ternionum ad colligendam similitudinem totalium quaternionum. Itaque cum ex duabus prioribus similitudinibus duo habeamus, LMN (assumtam positione et magnitudine, datam specie) et circulum axe LM puncto P axi firmiter cohaerente circa axem rotato descriptum, hinc ex $ACD \backsim LNP$, cum habita jam LN, detur LP et NP, dabitur etiam circulus axe LN puncto P axi cohaerente circa ipsum rotato descriptus. Qui duo circuli non sunt in eodem plano, sunt tamen ambo in planis ad planum LMN rectis, seu sunt ipsi ambo recti ad planum LMN. Debent etiam necessario sibi occurrere, alioqui quaesitum esset impossibile, quod tamen esse possibile aliunde constat (ex generalibus postulatis, quod cuique ubique simile haberi possit), itaque hi duo circuli sibi occurrunt. Sed duo circuli ad planum in quo centra sua habent recti, eodem modo se habent respectu plani, tam supra hoc planum quam infra planum, ergo cum occurrunt sibi, occurrent sibi tam supra quam infra planum, adeoque in punctis duobus. Superest jam $BCD \backsim MNP$, ubi cum MN detur positione, et MNP specie, utique dabitur MNP typo seu magnitudine et specie, seu iterum dabitur circulus axe MN a puncto P descriptus. Cumque quemlibet eorum secet in duobus punctis, et una minimum intersectio cum utroque coincidat, seu incidat in punctum ubi duo circuli priores sese ipsi secant, alioqui problema foret impossibile, necesse est ut ambae intersectiones coincidant cum duabus prioribus intersectionibus. Unde tertius circulus nihil exhibet novi, et sufficiunt proinde tres terniones ad concludendam quartam; sed problema est semideterminatum, et res eo recidit ac si propositum fuisset datis distantiis unius puncti a tribus punctis, invenire illud quartum, quod problema est semideterminatum. Modus autem quo id hoc loco demonstravimus, egregius est et mentalis, methodusque ipsa qua inde ratiocinationem ad similia instituimus, etiam egregia est, cum prius tria puncta partim assumimus, partim obtinemus qualia oportet, unde problema pro quarto est determinatum, ut quaternio sit quaternioni similis. Pro quinione alteri simili invenienda inveniatur primum quaternio una similis, quod fit tribus triangulis seu ternionibus. Superest ad hoc unum punctum, idque plane ex datis determinatum est, datis scilicet distantiis ejus ex his quatuor punctis; itaque tantum duabus adhuc opus est ternionibus seu triangulis, quas novum punctum ingrediatur. Nempe ut ostendimus,

sint ipsis	ABC	ABD	ACD,	erit ABCD	adeoque et BCD
similia	LMN	LMP	LNP,	simile ipsi LMNP	simil. MNP

Quaeritur, ex quibus praetera concludatur ABCDE simile ipsi LMNPQ. Invenimus prius aliquod LMNP simile ipsi ABCD, hinc cum LMNP detur positione, adeoque magnitudine multo magis, et LMNPQ detur specie (quia datur ei simile ABCDE), necesse est LMNPQ dari etiam magnitudine, seu rectas LQ, MQ, NQ, PQ magnitudine dari; ergo punctum Q datur positione, nam ostensum alias est, punctum dato suo ad quatuor puncta non in eodem plano posita situ esse determinatum seu unicum. Sed ut ad terniones nostras redeamus, sufficit prioribus tribus ternionum similitudinibus addi has

ut sint ipsis ABE, CDE,	ut fiat ABCDE
similia LMQ, NPQ,	simile ipsi LMNPQ,

ita enim ob ABE∽LMQ, quia datur ABE et LM, dabitur et LQ et MQ, et ob CDE∽NPQ, quia datur CDE et NP, dabitur NQ et MQ. Pro duabus ABE∽LMQ et CDE∽NPQ potuissemus etiam adhibere ACE∽LNQ et BDE∽LPQ, vel ADE∽LPQ et BCE∽MNQ, observando semper ut in duabus similitudinibus quas conjungimus non nisi E et Q sint communia. Hinc patet etiam ex similitudine trium quaternionum dari similitudinem quinionis. Nam ex his quinque similitudinibus ternionum ita colligo tres quaterniones,

ex ABC, ABD, ACD	ex ABE, ACE, BCE	ex ACE, ADE, CDE
simil. LMN, LMP, LNP	simil. LMQ, LNQ, MNQ	simil. LNQ, LPQ, NPQ
colligit. ABCD∽LMNP	coll. ABCE∽LMNQ	coll. ACDE∽LNPQ

Nam tribus minimum quaternionibus opus est, ut quinque terniones ad quinionem sufficientes quas lineola subducta notavimus, obtineantur. Pro senionum similitudine si velimus ut ABCDEF fit

$\sim$LMNPQR, faciamus ipsi ABCDE$\sim$LMNPQ, ad quod opus est quinque ternionibus supra dictis. Deinde quia omne punctum ex situ suo ad quatuor alia dato satis determinatum est, tantum opus est ut inveniamus LR, MR, NR, PR, quod fiet eodem modo quo supra assumtis tantum binis ternionum similitudinibus, nihil praeter F et R commune habentibus, nempe ut sint ipsis $\frac{\text{ABF},}{\text{LMR},}$ $\frac{\text{CDF},}{\text{NPR}}$ unde similia

junctis quinque similitudinibus superioribus colligitur senio ABCDEF$\sim$LMNPQR. Itaque ex tribus ternionibus seu triangulis similibus colligi potest quaternionum duarum seu pyramidum ex ipsis conflatarum similitudo; ex quinque ternionibus seu triangulis similibus (vel ex tribus pyramidibus similibus) colligi potest duarum quinionum seu pentagonorum solidorum inde conflatorum similitudo; ex septem ternionibus seu triangulis similibus colligitur duorum hexagonorum solidorum ex ipsis conflatorum similitudo, et ita porro in infinitum, supponendo plura quam tria ex punctis non esse in uno plano. Ex ternionibus seu triangulis similibus

semel, ter, quinquies, septies, novies etc.
colligitur similitudo duarum ex ipsis conflatarum
ternionum, quaternionum, quinionum, senionum, septenionum etc.
seu solidorum tetragonorum, pentagonorum, hexagonorum, septa-
sive pyramidum gonorum etc.

ubi nota, ex numero angulorum solidorum non statim definiri numerum hedrarum. Operae pretium autem erit etiam progressionem indagare, qua ostendatur quomodo altiores combinationes ex quaternionibus seu pyramidibus, et ex quinionibus seu pentagonis solidis, et ita porro colligantur sufficienter quod ope ternionum sufficientium jam inventarum constituere nunc in proclivi est.

Verum illud hic potissimum notandum est, eadem quae de similitudinibus diximus circa altiorum combinationum similitudines colligendas ex ternionibus, quaternionibus, quinionibus etc., ea prorsus applicari posse ad congruitates. Eodem enim modo invenitur LMPN congruum ipsi ABCD (fig. 53) quo invenitur LMPN simile ipsi ABCD, hoc solo discrimine quod cum ad simile inveniendum possit assumi primum recta LM pro arbitrio, pro congruo inveniendo debet assumi LM aequalis ipsi AB, habita jam ipsa LM, unde jam triangulum LMN habetur typo (quippe simile dato ABC) quod deinde assumi potest positione, et locari ubi placet.

Unde jam cum distantiae puncti P a punctis L, M, N sint datae, haberi potest punctum P, fitque LMNP (solidum pyramidale) simile, vel etiam congruum ipsi ABCD. Et notanda est haec methodus, quae enim sufficiunt ad aliquid construendum secundum praescriptam conditionem, hoc loco similitudinem vel congruitatem, ea etiam sufficiunt ad colligendam ex ipsis illam ipsam conditionem. Illud saltem privilegium habent congruitates, quod etiam ex congruitatibus binionum seu rectarum colligi possunt, at pro similitudinibus novis ex similitudine binionum seu rectarum nihil potest colligi, sunt enim omnes rectae similes inter se; at ex similitudinibus triangulorum seu ternionum colligi possunt similitudines aliorum polygonorum etiam solidorum. Et quia ad tetragonum in plano aut tetragonum in solido simile concludendum totidem similitudinibus triangulorum opus est, forte et in altioribus polygonis sive in plano sive in solido similibus colligendis, eodem numero similium triangulorum opus erit, quod nunc discutere non vacat.

Caeterum ut duae figurae similes sint, angulos earum congruos esse opus est, quod ita ostendo, quoniam alioqui si angulos respondentes seu homologos non haberent aequales adeoque congruos, tunc per se sigillatim possent discerni, nam si (fig. 54) angulus A non congruat angulo (A), hinc in AC sumendo AD=AB et jungendo DB, similiterque in (A)(C) sumendo (A)(D)=(A)(B) et jungendo (D)(B), non erit eadem ratio DB ad AB quae (D)(B) ad (A)(B), ergo vel hinc discerni possunt ABC et (A)(B)(C). Contra si anguli omnes sint iidem, triangula ipsa esse similia ita ostenditur, quia ex datis uno latere et omnibus angulis datur triangulum, sunt autem latus lateri simile (recta scilicet omnis omni rectae) et angulus angulo congruus, ergo triangula ex similibus et congruis eodem modo determinantur, adeoque similia sunt. Ad Tetragona, Pentagona etc. similia efficienda (sive in plano sive in solido) non tantum opus est omnes angulos esse aequales, quia ex dato uno latere et angulis omnibus non statim datur polygonum trigono altius, et ideo quot lateribus opus est ad tetragonum, pentagonum etc. cum omnibus angulis datis determinandum, eorum laterum etiam ratio eadem assumi potest quae in tetragono et polygono alio dato, atque inde angulis existentibus iisdem similis est figura, quoniam ex his lateribus et angulis etiam construi potest figura; et in universum sive omnia latera omnesque anguli, sive aliqua tantum latera et aliqui anguli modo data sufficientia sint ad construendam figuram, et problema ex ipsis sit vel penitus determinatum (vel ita semideterminatum ut plura satisfacientia sint congrua aut similia inter se), tunc sufficit in his datis nullam posse notari dissimilitudinem, atque adeo angulos utrobique esse aequales, latera autem respondentia data utrobique proportionalia, ut figurae utrobique similes oriri cognoscantur. Quodsi autem duorum figurarum similium homologa aliqua vel semel sint congrua, reliqua omnia esse congrua jam supra notatum est. Ex coincidentia autem una homologorum coincidentia omnimodo colligi non potest, sed pro natura figurarum pluribus paucioribusve homologorum coincidentiis est opus ad omnimodam coincidentiam colligendam.

Hac jam arte dum anguli similium figurarum respondentes necessario sunt aequales adeoque congrui, effecere Geometrae ut non opus habeant peculiaribus praeceptis de similitudine atque adeo ut omnia quae de similitudinibus asseri possunt in Geometria possint demonstrari per congruitates. Quod quidem ad demonstrationes quae intellectum cogunt prodest, sed ita saepe opus est magnis ambagibus, cum tamen per considerationem ipsius similitudinis brevi manu, et simplici mentis intuitu eadem praenoscere liceat, analysi quadam mentali a figurarum inspectione atque imaginibus minus dependente.

Porro eodem fere modo quo ex congruis nascuntur aequalia, etiam ex similibus nascuntur Homogenea, quod notare operae pretium est, ut enim aequalia sunt quae vel sunt congrua vel transformando possunt reddi congrua, ita Homogenea sunt, quae vel sunt similia (quorum homogeneitas per se manifesta est, ut duorum quadratorum inter se, vel duorum circulorum inter se) vel saltem transformando possunt reddi similia; quae transformatio autem fit, si nihil auferatur nec addatur et tamen fiat aliud, ubi quaedam transformatio fit partibus quibusdam servatis, ut cum quadratum ABCD (in fig. 10) secamus in duo triangula ABD et BCD, eaque aliter reconjungendo (verbi gratia ABD transferendo in BCE) inde formamus triangulum DBE; quaedam vero transformatio nullas servat partes, ut cum recta transformanda est in curvam, superficies gibba in planum, et omnino rectilineum in curvilineum vel contra; tunc ergo sola minima servantur, et transformatio est cum ex uno fit aliud, saltem minimis iisdem manentibus idque in perfecta transformatione reali per flexile aut liqudum ita servatur. At in transformatione mentali pro minimis adhiberi possunt quasi minima, id est indefinite parva, ut fiat quasi transformatio, quoniam et pro curvilineo adhibetur quasi curvilineum, nempe polygonum rectilineum; numeri laterum quantumlibet magni quodsi igitur quasi transformatio quam quaerimus hoc modo succedat; vel error seu differentia inter quasi transformationem et veram semper minor atque minor prodeat, ut tandem fiat minor quovis dato, concludi potest vera transformatio. Et quoniam aequalia sunt, quorum unum ex alio fieri potest transformando, patet etiam Homogenea esse inter se quae ipsa sunt similia, vel quibus aequalia saltem sunt similia.

Patet etiam Homogenea esse quae ejusdem rei continuo incremento aut decremento generantur, exceptis saltem minimis et maximis seu extremis. Ita si ponamus motu puncti continue crescere viam seu lineam, lineae ab uno puncto descriptae sunt homogeneae inter se, quin et lineae a diversis punctis generatae, licet enim sint dissimiles, patet dissimilitudinem illam oriri a peculiaribus quibusdam impedimentis quae non possunt mutare homogeneitatem. Idemque est de his quae motu lineae aut superficiei describuntur. Intelligendus autem est motus, quo punctum unum describens non incedit per vestigia alterius puncti describentis. Quin et continue imaginari possumus homogenea ex se invicem fieri, ut circulus transmutatus continue in ellipses alias atque alias transire potest per ellipses infinitas omnium specierum possibilium. Et in universum in Homogeneis locum habet illud axioma, quod transit continue ab uno extremo ad aliud transire per omnia intermedia; quod tamen ad angulum contactus non pertinet, qui revera medius non est, sed alterius planeque heterogeneae naturae.

Euclides Homogenea aliter definit, quorum scilicet unum ab alio subtrahendo et residuum rursus a subtracto idque semper continuando restat vel nihil vel quantitas data minor. Verum quia ista quantitas data, qua minor restare debet, etiam prius compertae homogeneitatis esse debet, compertae autem erit homogeneitatis, si sit similis alterutri, vel si alterutram repetendo metiatur. Itaque si duabus datis quantitatibus quasi mensura communis inveniri potest minor vera mensura alterutrius utcunque parva assumta tunc dici potest duo illa inter se esse homogenea, quae definitio vera quidem est, et utilis ad demonstrationes cogentes conficiendas, sed non aeque mentem illustrat, quam ea quae ex similitudinum consideratione sumitur. Et vero altera ex altera consequitur, tali enim quasi resolutione in mensuram quasi communem ostenditur posse unum in aliud transformari, vel saltem in aliquid ei simile ita ut error quovis dato minor. Nam omnia quae mensuram communem habent, ea utique ita transformari posse, ut alterum alteri simile fiat, manifestum est.

Caeterum et de Continuo aliquid dicendum est et de Mutatione, antequam ad Extensum et Motum (quae eorum species sunt) explicandum veniamus. Continuum est totum, cujus duae quaevis partes cointegrantes (seu quae simul sumtae toti coincidunt) habent aliquid commune, et quidem si non sint redundantes seu nullam partem communem habeant, sive si aggregatum magnitudinis eorum aggregato totius aequale est, tunc saltem habent communem aliquem terminum. Et proinde si ab uno transeundum sit in aliud continue, non vero per saltum, necesse est ut transeatur per terminum illum communem, unde demonstratur, quod Euclides tacite sine demonstratione assumsit in prima primi, duos circulos ejusdem plani, quorum unus sit partim intra partim extra alterum, sese alicubi secare, ut si circulus unus (fig. 55) describatur radio AC, alter radio BC, sintque AC et BC aequales inter se et ipsi AB, manifestum est aliquid B quod in una circumferentia DCB est, cadere intra circulum alterum ACE, quia B est ejus centrum, sed vicissim patet D, ubi recta BA producta circumferentiae DCB occurrit, cadere extra circulum ACE, itaque circumferentia DCB, cum sit continua et partim reperiatur intra circulum ACE partim extra, ejus circumferentiam alicubi secabit. Et in genere, si linea aliqua continua sit in aliqua superficie, sitque partim intra partim extra ejus superficiei partem, hujus partis peripheriam alicubi secabit. Et si superficies aliqua continua sit partim intra solidum aliquod partim extra, necessario ambitum solidi alicubi secabit. Quodsi sit extra tantum, vel intra tantum, et tamen peripheriae vel termino alterius occurrat, tunc eum dicitur tangere, hoc est intersectiones inter se coincidunt.

Hoc autem aliquo calculi genere etiam exprimere possumus, ut si alicujus extensi pars sit $\overline{Y}$ (fig. 56) et unumquodque punctum cadens in hanc partem $\overline{Y}$ vocetur uno generali nomine Y, omne autem punctum ejusdem extensi cadens extra eam partem vocetur uno generali nomine Z, adeoque totum extensum extra illam partem $\overline{Y}$ sumtum vocetur $\overline{Z}$, patet puncta in ambitum partis $\overline{Y}$ cadentia esse communia ipsi $\overline{Y}$ et ipsi $\overline{Z}$ seu partim posse appellari Y et Z, hoc est dici posse aliqua Y esse Z et aliqua Z esse Y. Totum autem extensum utique ex ipsis $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ simul componitur seu est $Y(+)Z$, ut omne ejus punctum sit vel Y vel Z, licet aliqua sint et Y et Z. Ponamus jam aliud dari extensum novum, verbi gratia AXB existens in extenso proposito $\overline{Y}(+)\overline{Z}$, et extensum hoc novum vocemus generaliter $\overline{X}$, ita ut quodlibet ejus punctum sit X, patet ante omnia omne X esse vel Y vel Z. Si vero ex datis constet aliquod X esse Y (verbi gratia A quod cadit intra $\overline{Y}$) et rursus aliquod X esse Z (verbi gratia B quod cadit extra $\overline{Y}$ adeoque in $\overline{Z}$), sequitur aliquod X esse simul et Y et Z. Unde cum alias in genere ex particularibus hoc modo nihil sequatur, tamen in continuo ex iis tale quid colligitur ob peculiarem continuitatis naturam. Ut igitur consecutionem in pauca contrahamus: Si sint continua tria $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ et omne X sit vel Y vel Z, et quoddam X sit Y, et quoddam Y sit Z, tunc quoddam X erit simul Y et Z. Unde etiam colligitur, $\overline{X}(+)\overline{Y}$ novum aliqud continuum componere, quia quoddam Y est Z seu quoddam Z est Y.

Possumus continuum aliquod intelligere non tantum in simul existentibus, imo non tantum in tempore et loco, sed et in mutatione aliqua et aggregato omnium statuum cujusdam continuae mutationis, v. g. si ponamus circulum continue transformari et per omnes Ellipsium species transire servata sua magnitudine, aggregatum omnium horum statuum seu omnium harum Ellipsium instar continui potest concipi, etsi omnes istae Ellipses non sibi apponantur, quandoquidem nec simul coexistunt, sed una fit ex alia. Possumus tamen pro ipsis assumere earum congruentes, seu componere aliquod solidum constans ex omnibus illis Ellipsibus, seu cujus sectiones basi parallelae sint omnes illae Ellipses ordine sumtae. Si tamen concipiamus sphaeram ordine transformari in aequales Sphaeroeides, tunc non possumus exhibere aliquod continuum reale ex omnibus istis sphaeroeidibus hoc modo conflatum, quia non habemus in sola extensione plures quam tres dimensiones. Si tamen velimus adhibere novam aliquam considerationem, verbi gratia ponderis, possumus quartam exhibere dimensionem, et ita reale solidum exhibere sed heterogeneum seu partium diversi ponderis, quod suis sectionibus eidem basi parallelis repraesentet omnes sphaeroeides. Verum ne opus quidem est ascendi ad quartam dimensionem aut pondera praeter extensiones adhiberi, tantum enim pro sphaeroeidibus sumamus figuras rectas ipsis proportionales, quod utique fieri potest, et planum inde conflari poterit, cujus sectiones basi parallelae erunt sphaeroeidibus ordine respondentes proportionales atque adeo repraesentabunt continuam sphaerae in sphaeroeides transmutationem. Nam sufficit nobis assumi posse aliquam rectam AX (fig. 57) quae percurratur a puncto aliquo mobili X, incipiendo ab A, et ponamus cuilibet portioni rectae seu abscissae ut AX respondentem exhiberi posse statum sphaerae continue in sphaeroeides transmutatae salva magnitudine, repraesentatum per rectam XY seu ut rectae ordinatae XY sint ordine sphaeroeidibus respondentes, seu ut sit ordine XY ad AB ut rationes axium conjugatorum (per quas data magnitudine quae hic semper eadem est sphaeroeides determinatur) sunt ad unitatem (nam in sphaera est ratio aequalitatis). Sic enim patet, quomodo per rectam AX et lineam BY seu per planam figuram BAXYB repraesentetur mutatio continua, sed si non magnitudine retenta mutata fuisset species, sed retenta specie magnitudo, ipsae XY forent ipsis magnitudinibus seu statibus proportionales. Nunc vero ubi species mutatur, saltem proportionales sunt cuidam speciem determinanti. Verum re expensa sufficit sola recta AX, ita ut concipiamus cuilibet logarithmo rationis axium conjugatorum respondentem sumi posse portionem rectae, quae in A seu casu aequalitatis evanescit. Si vero non logarithmis, sed rationibus velimus respondentes sumere abscissas, tunc abscissa pro casu sphaerae vel circuli assumi debet CA, repraesentans unitatem, quae continue crescet, dum rationes axium crescunt. Continue autem decrescit cum rationes decrescunt, evanescit autem in C, quando circulus in Ellipsin vel sphaera in sphaeroeidem transformatur longitudinis infinitae parvae. Atque haec si in transmutando fit mutatio secundum unam tantum considerationem, ut hoc loco, sola mutatur ratio axium, quia Ellipses servata magnitudine non nisi uno modo variari possunt, sed si variare jubeamur circulum, infinities infinitis modis, nempe tam secundum magnitudinem, quam secundum speciem, ita ut transire debeat per omnes Ellipsium typos, tunc mutatio ista repraesentanda erit non per rectam seu lineam, sed per aliquam superficiem; idem est si servanda fuisset magnitudo circuli, sed transformari debuisset in Ellipses secundi gradus, quarum non tantum infinitae sunt species, sed et infinita genera, et sub quovis genere infinitae species, adeoque species infinities infinitae. Quod si jubeas circulum non tantum per omnes Ellipsium secundi gradus species transmutari, sed et magnitudinem variare, adeoque transire per omnes typos Ellipsium secundi gradus, tunc status circuli erunt infinitis vicibus infinities infiniti, et mutationes omnes repraesentandae sunt per aliquod solidum. Quodsi circulus transire debeat per omnes typos Ellipsium sive Ovalium tertii gradus, non possunt exhiberi omnes variationes in uno continuo nisi per quartam dimensionem, adhibito verbi gratia pondere, vel alia heterogeneitate extensi. Et ita porro. Necesse est autem hoc modo uno momento infinitas, imo aliquando et infinities infinitas fieri mutationes, alioqui una aeternitas omnibus variationibus percurrendis non sufficeret.

Itaque ex his etiam mutationis continuae natura intelligitur, neque vero ad eam sufficit, ut inter status quoslibet possit reperiri intermedius; possunt enim progressiones aliquae excogitari in quibus perpetuo procedit talis interpolatio, ut tamen non possit inde conflari aliquod continuum, sed necesse est ut causa continua intelligi possit, quae quovis momento operetur, vel ut cuivis rectae alicujus indefinitae puncto respondens aliquis status assignari possit quemadmodum dictum est. Et tales mutationes intelligi possunt in respectu loci, speciei, magnitudinis, velocitatis, imo et aliarum qualitatum, quae hujus considerationis non sunt, ut caloris, lucis. Hinc etiam Angulus contactus nullo modo homogeneus est angulo communi, imo ne ei quidem est συγγενής, ut punctum lineae, sed se habet ad eum quodammodo ut angulus ad lineam; neque enim aliqua continua generatio certae legis excogitari potest, quae aeque transeat per angulos contactus et angulos rectilineos. Idem est de angulo osculi a me invento, aliisque altioribus. Angulus nimirum sectionis duarum linearum se secantium idem est qui rectarum eas tangentium, angulus contactus duarum linearum se tangentium idem est qui angulus contactus duorum circulorum lineas osculantium, ut alibi ostendi.

Antequam hinc abeamus, etiam aliquid dicendum est de Relatione sive habitudine rerum inter se, quae multum a ratione seu proportione differt, quippe quae tantum una aliqua ejus species est simplicior. Sunt autem relationes perfectae seu determinantes, per quas unum ex aliis inveniri potest; sunt relationes indeterminatae, quando quid ita se habet ad aliud, ut tamen notitia ejus habitudinis ad unum ex alio dato determinandum non sufficiat, nisi accedant novae res aut novae conditiones. Interdum autem tantum accedunt novae conditiones, interdum vero et novae res. Potest etiam in relationibus spectari homoeoptosis et heteroeoptosis. Nimirum si sit relatio quaedam inter res homogeneas A, B, C, et una quaeque harum trium rerum eodem modo se habeat, ita ut permutando eorum locum in formula, nihil aliud a priore relatione oriatur, tunc relatio erit absoluta quaedam Homoeoptosis; potest tamen et fieri, ut quaedam tantum rerum homogenearum in relationem cadentium se habeant homoeoptote, verbi gratia A et B, licet C aliter quam A vel B se habeat. Atque haec Homoeoptosis maximi est in ratiocinando momenti. Fieri etiam potest ut sit relatio quaedam inter A et B (ubi tamen oportet adhuc alia ipsis homogenea relationem ingredi) ubi ipsum A ex dato B sit determinatum, at vero B ex ipso A sit tantum semideterminatum, imo ut sit indeterminatum prorsus. Exemplo haec illustrare placet. Sit quadrans circuli ABCYA (fig. 58) cujus radii AC vel CB vel CY magnitudo vocetur a, at sinus recti YX magnitudo vocetur y, sinus autem complementi CX magnitudo vocetur x. Patet quadratum ipsius CY aequari quadratis de CX et de YX simul, seu aequationem haberi $xx+yy=aa$, quae exprimit relationem inter has tres res homogeneas x, y et a, cujus ope ex dato a et x seu ex dato radio et sinu complementi haberi potest y seu sinus rectus. In hac relatione patet x et y se habere homoeoptote, at a se habere modo ab ipsis diverso. Patet etiam relationem esse semideterminantem quoad positionem, etsi sit absolute determinans quoad molem; nam $y=\sqrt{aa-xx}$, quod est ambiguum et significat tam $y=+\sqrt{aa-xx}$ quam $y=-\sqrt{aa-xx}$, quorum priore significante XY, posterius significat X(Y). Sunt tamen XY et X(Y) congruae seu mole aequales. Patet etiam a seu magnitudinem radii esse constantem seu eodem modo se habere, et quaelibet x et y indefinita, quemadmodum enim ex dato CX et XY habetur radius (extrahendo radicem ex quadratorum ab his summis) ita ex C_2X et $_2X_2Y$ eodem modo habetur radius. Quales constantes magnitudines eodem modo se habentes ad alias indefinitas parametri solent appellari.

Quemadmodum vero hic exposuimus relationem punctorum quadrantis ut Y ad puncta recta X, seu modum quomodo data radii magnitudine et punctis A, B, C datis positione, ex puncto X rectae possit inveniri punctum respondens Y circuli (licet gemino modo seu semideterminate), ita poterimus etiam relationem aliam dare simpliciorem, quomodo ex punctis unius rectae positione datae puncta respondentia alterius rectae, etiam positione datae, in eodem plano ordine determinari possint, quae relatio reperietur multo simplicior. In fig. 59 sint rectae $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ ejusdem plani sese secantes in puncto A, ita ut aliquod X sit A, et aliquod Y sit etiam A, eoque casu sit $X \infty Y$. Jam datis positione rectis X et $\overline{Y}$ et puncto communi A, dabitur et angulus quem faciunt, adeoque et ratio rectarum AX et XY posito XY esse ordinatam normalem ad AX; ea ratio exprimatur per numerum aliquem n eritque aequatio AX ad XY (seu x ad y) ut 1 ad n seu ut unitas ad hunc numerum fietque $y=nx$. Unde patet relationem istam inter x et y tam esse simplicem, ut non opus sit assumi tertium aliquod ipsis homogeneum, seu alia aliqua linea, multo minus extensio altior; nam n quod assumsimus est numerus tantum seu magnitudo nulla indigens positione, sed sola specie seu notione determinata nec rectis illis homogenea. Et haec simplex relatio duarum Homogenearum magnitudinum nihil aliud est quam ratio, hoc est data est relatio inter duas has rectas, in eodem plano dato existentes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, quia si una ex ipsis positione sit data, et datum sit punctum commune ipsis A, ratio denique inter XY et AX seu inter ordinatam y et abscissam x eadem quae inter n numerum et 1 unitatem; data erit positione etiam altera recta.

Omnem autem relationem inter duas homogeneas solas seu inter duas tantum res magnitudine praeditas homogeneas ita ut nihil aliud praeterea accedat quam numeri, esse rationem sive proportionem, etsi aliquando involuta sit ut alterius naturae appareat, exemplo ostendam. Sit aequatio $x^2+2xy=yy(1)$, quam nulla alia magnitudo realis ingreditur, quam hae duae inter se homogeneae x et y, quas ponamus esse rectas, ergo scribamus $\frac{y}{x}=n(2)$ ita ut n sit ratio ipsius x ad y, vel saltem quotiens seu numerus relationem illam exprimens. Jam ex aequ. 1. divisa per xx prodibit: $1+\frac{2y}{x}=\frac{yy}{xx}(3)$ hoc est (per aequ. 2.) $1+2n=nn(4)$; res ergo reducta est ad solam rationem, seu numerum eam exprimentem inveniendum; adeoque ex aequatione 1. nihil aliud datur, quam ratio inter y et x, licet illa hoc loco detur surde seu ambigue, fit enim $nn-2n+1=2(5)$ seu extrahendo radicem $-n+1=\sqrt[2]{2}$ seu $n=1\pm\sqrt{2}(6)$. Unde talis modus deduci potest, ex data x seu magnitudine ipsius CX (fig. 60) invenire y seu magnitudinem ipsius

CY vel ipsius C(Y). Fiat triangulum rectangulum isosceles CXA cujus basis sit $CX=x$, et centro A radio AX describatur circulus X(Y)Y rectam CA productam bissecans, nempe in Y et in (Y), dico rectam CY vel C(Y) esse quaesitam seu ejus magnitudinem exprimere y in aequatione $xx+2xy=yy$. Si CX sit x, tunc CY vel C(Y) fore y; est enim CY ad CX ut $\sqrt{2}+1$ ad 1 et C(Y) ad CX ut $\sqrt{2}-1$ ad 1, seu CX posita unitate sive 1 erit CY $=CA(\sqrt{2})+AY$ (seu 1) $=\sqrt{2}+1$ et $C(Y)=CA(\sqrt{2})-A(Y)$ (seu $-1)=\sqrt{2}-1$. Itaque posita x unitate, erit y summa vel differentia ex his duabus $\sqrt{2}$ et 1, ubi tamen notandum, radicem unam debere intelligi privativam seu falsam, id est etsi moles ipsius C(Y) sit $\sqrt{2}-1$, tamen huic praefigendum esse signum —, ut fiat $-\sqrt{2}+1$. Unde y est vel $1+\sqrt{2}$ vel $1-\sqrt{2}$. Patet etiam hinc porro, locum omnium punctorum Y esse rectam CY, si locus omnium punctorum X sit recta CX, modo talis sit rectarum angulus, ut ducta quacunque parallela ipsi primae XY jam inventae ut ${}_2X_2Y$ semper sit etiam C_2X ad C_2Y, quemadmodum diximus, seu secundum rationem quam aequatio 1 vel ratio inventa in aequ. 6. exprimit. Possunt autem relationes diversarum linearum inter se non tantum exprimi per rectas parallelas ab una ad aliam ductas, sed et per rectas ad unum punctum convergentes, et una saepe relatio alia est simplicior. Ita si (fig. 61) sit Ellipsis, cujus duo oci sint A et B, sumaturque quodlibet in Ellipsi punctum Y, tunc ea proprietas est Ellipseos, ut semper $AY+BY$ sit aequalis constanti rectae, nempe CD axi majori Ellipseos, atque adeo ut $AY+BY$ et $A(Y)+B(Y)$ sint aequales inter se.

Porro ut lineae AYB (fig. 59) natura commode exprimi duabus rectis normalibus YX et YZ ex uno ejus puncto Y emissis ad duas quasdam rectas positione datas, inter se normales CA et CB, ita (fig. 62) lineae Y(Y) in nullo certo plano manentis natura exprimi potest, si ex puncto ejus quocunque ut Y in sublimi posito tres rectae normales in tria plana CXA, CZB, CVD inter se normalia ducantur, nempe YX, YZ, YV, quas vocabimus x, z, v. Quodsi jam duae dentur aequationes, una verbi gratia inter x et z, altera inter x et v, satis determinata erit natura lineae Y(Y). Prior aequatio exprimet naturam lineae Z(Z) a linea Y(Y) in planum CZB projectae, posterior naturam lineae V(V) ab eadem linea Y(Y) in planum CVD projectae. Possunt tamen tria plana esse non tantum normalia inter se, sed et qualiacunque anguli dati, unde si duo saltem assumantur plana normalia, tertium vero ut CVD anguli indefiniti, possumus invenire utrum non tota linea Y(Y) cadat in aliquod planum, quod fiet si planum CVD arbitrarium tale sumi possit, ut linea V(V) et linea Y(Y) coincidant, seu ut rectae v fiant infinite parvae sive evanescant.

Hinc patet etiam natura locorum, nempe si punctum V (fig. 59) in plano positum sit denturque distantiae ejus YX et YZ a duabus rectis indefinitis CX et CZ in eodem plano positione datis, problema est determinatum, licet ambiguum, hoc est dantur certa puncta numero quatuor in eodem plano, quae satisfacere possunt. Si vero distantiae ipsae non sint datae, sed tantum relatio earum inter se invicem, cujus ope una ex alia data determinatur, tunc problema est indeterminatum, seu fit locus, verbi gratia in fig. 59. circulus, dicimusque puncta Y omnia esse ad circulum, si talis sint naturae, ut ductis a quocunque eorum ordinatis conjugatis normalibus YX et YZ ad duas rectas normales inter se CX et CZ, quadrata ordinatarum conjugatarum simul sumta semper tantundem possint seu eidem quadrato constanti aequentur, talium enim punctorum locus erit ad circulum, cujus centrum est C, radius vero est potentiae seu quadrati constantis latus. Similiter in solido (fig. 62) si puncti Y distantiae YX, YZ, YV a tribus planis CXA, CZB, CVD sint datae, determinatum est problema, licet ambiguum, certa enim puncta numero finita (nempe quatuor) satisfaciunt. Sciendum autem est, datas esse magnitudines assumta aliqua unitate, si tot sint datae aequationes, quot sint quaesitae; itaque si pro tribus rectis x, z, v inveniendis tres etiam dentur aequationes (a se invicem independentes), ipsae datae intelligentur, problemaque erit determinatum; quodsi vero duae tantum dentur aequationes, problema est indeterminatum primi gradus seu punctum quaesitum Y determinate non habetur, sed $\overline{Y}$ seu locus omnium Y seu linea Y(Y) cujus omnia puncta his conditionibus satisfacient. Si vero pro tribus illis magnitudinibus seu rectis inveniendis tantum data sit nobis una aequatio quam hae tres rectae ingrediuntur, tunc problema est infinities indeterminatum, seu est indeterminatum secundi gradus, et locus est ad superficiem seu superficies aliqua determinata habetur (vel semideterminata seu ambigua, nempe gemina, aut tergemina, aut quadrigemina etc.) cujus omnia puncta satisfaciunt huic conditioni sive relationi per hanc aequationem expressae. Unde jam intelligimus, quid sint loca ad punctum, lineam, superficiem, et quomodo datis aequationibus sive relationibus per aequationes expressis puncta, lineae, superficies determinentur.

Haec eadem per compositiones motuum rectilineorum quoque explicari possunt. Nam (fig. 63) si per rectam $\overline{X}$ incedat regula RX in eodem semper plano et eodem semper angulo servato et interea in ipsa regula moveatur punctum aliquod Y, ita ut si in puncto A seu X seu Y incipiat motus utriusque, et deinde regula perveniente in ${}_2X, {}_3X$ etc. punctum perveniat in ${}_2Y, {}_3Y, {}_4Y$ (id est si in primo situ A_1R quievisset regula, in ${}_2Z, {}_3Z, {}_4Z$) linea aliqua $\overline{Y}$ seu ${}_1Y_2Y_3Y$ etc. composito hoc motu describetur, cujus data est natura ex data relatione inter AX et AZ respondentes; exempli causa si AZ sint ipsis AX proportionales seu si sit A_2X ad A_2Z (seu ad ${}_2X_2Y$) ut A_3X ad A_3Z, et ita porro, seu si sint A_2X, A_3X, A_4X ut A_2Z, A_3Z, A_4Z, linea AYY seu $\overline{Y}$ erit recta; si AZ sint in duplicata ratione ipsarum AX seu ut earum quadrata, linea $\overline{Y}$ erit parabola quadratica, si in triplicata, erit parabola cubica etc. Si AZ sint reciproce ut AX seu A_2X ad A_3X ut A_3Z ad A_2Z, idque ubique, linea $\overline{Y}$ erit Hyperbola, cujus Asymptotae sunt $\overline{X}$ et $\overline{Z}$. Atque ita porro aliae atque aliae lineae oriri possunt, quae persequi hujus loci non est.

Illud in genere notare praestat, quomodo ex hoc motu intelligatur, ad quas partes linea cavitatem aut concavitatem vertat, utrum habeat flexum contrarium, verticem seu punctum reversionis, maximasque aut minimas ejus periodi abscissas vel ordinatas. Primum ponamus in fig. 64 velocitates regulae seu ipsa abscissarum AX incrementa momentanea ${}_2X_3X, {}_3X_4X$ etc. (quae indefinite parva sunt) ipsis velocitatibus respondentibus puncti seu abscissarum conjugatarum AZ (seu ordinatarum XY) incrementis momentaneis ${}_2Z_3Z, {}_3Z_4Z$ etc. proportionales, tunc AYY est recta; sin minus, linea erit curva. Quodsi jam (fig. 63) ponamus velocitate regulae manente uniformi seu abscissarum AX incrementis momentaneis ${}_2X_3X, {}_3X_4X$ etc. manentibus aequalibus velocitatem puncti crescere seu incrementa abscissarum conjugatarum seu ordinatarum AZ incrementa momentanea ${}_2Z_3Z, {}_3Z_4Z$ etc. crescere, vel velocitate regulae crescente velocitatem puncti quae antea cum velocitate regulae eadem faciet, magis crescere; seu incrementis momentaneis abscissarum crescentibus incrementa momentanea ordinatarum magis adhuc crescere, tunc linea AYY (fig. 63) convexitatem obvertit directrici AX, si ambo simul, tam abscissae scilicet quam abscissae conjugatae seu recessus a puncto fixo A tam regulae quam puncti mobilis in regula crescunt; quod ab initio supponendum est, si quidem initio tam regula quam punctum in ea mobile ab A recedere intelligantur. Itaque idem est si contra ambo tam regula quam punctum in regula continue accedere intelligantur ad A et velocitas ipsius regulae seu appropinquationes momentaneae ad A eaedem maneant, vel minus crescant quam velocitates seu incrementa momentanea ipsius puncti in regula. Sed cum hoc modo punctum tantum priorem viam relegere intelligatur, hoc annotare nihil attinet imposterum. Quodsi contingat fig. 65 velocitatibus regulae seu incrementis momentaneis abscissarum, ipsis scilicet ${}_2X_3X$ etc. decrescentibus, velocitates puncti in regula seu incrementa momentanea ordinatarum ${}_2Z_3Z$ etc. uniformia manere, vel crescere, vel saltem minus decrescere quam ipsa ${}_2X_3X$ etc., tunc etiam curva AYY ipsi directrici AX obvertit convexitatem.

Ex his jam contra statim patet, si incrementa momentanea abscissarum magis crescant, vel minus decrescant, quam incrementa momentanea abscissarum conjugatarum seu ordinatarum, tunc curvam concavitatem obvertere directrici (seu rectae in qua abscissae sumuntur) si modo ponamus curvam tam a directrice AX quam directrice conjugata AZ recedere, seu ad eam accedere, hoc est tam in una directrice quam in altera recedere a communi eorum puncto A vel ad id accedere, patet hoc inquam ex praecedentibus, si modo in fig. 63 vel 65 mutemus directricem et abscissas ejus in directricem conjugatam et abscissas conjugatas vel contra; manifestum enim est si curva uni directrici obvertit concavitatem, conjugatae ejus obvertere convexitatem et contra, quando scilicet simul recedit ab ambabus.

Hinc patet porro, quomodo oriatur curvae flexus contrarius. Nam fig. 66 si X punctis directricis ab A recedentibus etiam respondentia Z puncta directricis conjugatae ab A recedant, et cum antea ${}_2Z_3Z$ etc. incrementa abscissarum conjugatarum magis crevissent vel minus decrevissent, quam abscissarum principalium incrementa ${}_2X_3X$ ab A usque ad ${}_3Y$, at in ${}_3Y$ incipiat fieri contrarium, ibi linea habet flexum contrarium et ex concava fit convexa, quoad easdem partes. Hoc est si ponamus rectangulum ${}_4X_4Z$ secari a linea A_3Y_4Y in duas partes $A_4X_4Y_3YA$ et $A_4Z_4Y_3YA$, tunc cum lineae secantis pars A_3Y concavitatem obverterit parti spatii posteriori, altera pars ${}_3Y_4Y$ convexitatem obvertet parti spatii priori, hoc est cum recta seu chorda quaevis in lineae parte A_2Y ut A_2Y, $_2Y_2Y$, ceciderit in spatii partem posteriorem, nunc chorda quaevis in lineae parte $_3Y_4Y$ cadit in partem spatii priorem.

Quodsi vero porro ponamus vel ambarum abscissarum, principalis scilicet et conjugatae, vel alterius saltem incrementa continue decrescere, sumamusque eam quae sola vel saltem magis decrescit, ejusque velocitatem ponemus tandem evanescere, atque ita porro continuata mutatione mutari in contrariam, hoc est lineam curvam respectu ejus abscissae non amplius recedere ab A, sed ad A potius accedere, ibi habemus puncta reversionum. Exempli causa fig. 67 velocitas ipsius X decrescit usque ad $_4X$, ubi evanescit, nempe $_1X_2X$, $_2X_3X$, $_3X_4X$ quae velocitates repraesentant continue decrescunt, donec evanescant in $_4X$, ubi velocitas progrediendi mutatur in regressum, et X a $_4X$ tendit in $_5X$, $_6X$ rursusque accedit ad A, crescente rursus (aliquamdiu saltem) velocitate regressus, interea vero Z uniformi velocitate progreditur; ordinata autem $_4X_4Y$ ex loco reversionis puncti X, nempe ex $_4X$ ducta ad curvam, eam tangit in $_4Y$. Potest fieri ut puncta X et Z simul revertantur versus A, sed hoc singulare admodum est, eoque casu curva in puncto reversionis infinitas habet tangentes, ut fig. 68 patet, curvam AYH simul tangi a duabus rectis ad se invicem perpendicularibus XY et ZY; unde patet cum tota curva cadat intra rectangulum XZ, ideo omnem rectam per Y ductam extra triangulum cadentem, curvam tangere, et dubitari videtur posse, an sit una curva an potius duae AY et HY se secantes in H; verum cum tales generationes pro una curva excogitari possint, et exemplum habeamus in cycloidibus secundariis, nihil prohibet, quin totum AYH pro una curva habeatur. Quodsi autem curva non habeat infinitas tangentes, seu non X et Z simul revertantur, seu si in fig. 68 linea AY non tendat ad H, sed ad L, tunc patet, una ordinata ab X, nempe XY, curvam tangente in Y, alteram ZY, quae utique ipsi XY adeoque tangenti est perpendicularis, ipsi quoque curvae AYL esse perpendicularem, adeoque esse maximam vel minimam ordinatarum hujus periodi, maximam quidem quando curva in Y ipsi AZ directrici obvertit concavitatem, minimam vero cum ei obvertit convexitatem.

Jam porro inter se conjungamus ambas variationes lineae, unam quae est secundum convexum et concavum, alteram quae est secundum accessum et recessum respectu directricis. Equidem potest linea tam accedere quam recedere respectu directricis, cui concavitatem aut convexitatem obvertit, ut fig. 69 in (H) concava recedit, in (B) concava accedit, in (C) convexa recedit, in (D) convexa accedit; verum si duabus directricibus simul conferatur, tunc quando ab ambabus recedit, uni obvertit concavitatem, alteri convexitatem, ut in (H) et in (C); quando vero uni accedit, ab altera vero recedit, tunc ambabus concavitatem vel ambabus convexitatem obvertit, ut in (B) et (D). Atque ideo ad casum nunc veniendum est, quo linea ab una directrice recedit, ad alteram vero accedit, seu quo X quidem ab A recedit, at Z ad A accedit, ubi linea Y ambabus directricibus obvertit concavitatem vel convexitatem, convexitatem quidem ut in fig. 70 si ${}_2X_3X$ ad ${}_3X_4X$ recedendo ab A minorem rationem habeat, quam ${}_2Z_3Z$ ad ${}_3Z_4Z$ accedendo ad A, seu si velocitatibus recedendi in una directrice aut crescentibus aut manentibus aut decrescentibus, velocitates accedendi in altera minus crescunt aut magis decrescunt. Contra in fig. 71 concavitatem linea utrique directrici obvertit, si ${}_2X_3X$ ad ${}_3X_4X$ recedendo ab A majorem rationem habet quam ${}_2Z_3Z$ ad ${}_3Z_4Z$ accedendo ad A, seu si velocitatibus recedendi in una directrice crescentibus aut manentibus aut decrescentibus, velocitates accedendi in alia magis crescunt aut minus decrescunt.

Hinc intelligitur, quomodo fieri possit, ut linea quae antea directrici obvertit convexitatem, nunc ei obvertat concavitatem, vel contra, licet non habeat flexum contrarium, sed maneat ad easdem partes cava, quando scilicet in ea directrice occurrit reversio ut fig. 72 si motus ipsius X sit ${}_3X_4X$ recedens ab A et ${}_4X_5X$ accedens ad A, ubi patet ex (H),(B),(C),(D),(E),(F),(G),(K), quam variis modis fieri possit reversio, ut eidem rectae AX, cui concavitas prius obversa fuerat, postea convexitas obvertatur, vel contra, ubi patet in (H) et (B) linea recedente ab AX et ab AZ et in reversionis puncto recedente adhuc ab AX, sed accedente jam ad AZ, prius convexitatem postea concavitatem ipsi AX obverti; idem est in (B), ubi linea prius accedit ad AX, deinde semper ab eo recedit, accedit in 1, recedit in (B) et in 2, et ab AZ recedit usque ad (B), deinde ab eo recedit. Verum in (C) ad 1 prius concavitas obvertitur ipsi AX, deinde ad 2 convexitas, et utrobique receditur quod obtinetur ope ventris, qui unum continet regressum respectu AZ, sed binos regressus respectu AX. Tale quid etiam in (D) inclinate posito. Caeterum ventre in punctum evanescente ex (C) fit (E), et ex (D) fit (F), et ideo reversiones tam secundum AZ quam secundum AX ibi coincidunt, unde in puncto illo infinitae possunt esse tangentes, quale quid jam attigimus supra. At si idem venter simul contineat flexum contrarium, ut in (G) et (K), tunc ventre illo evanescente ut inde nascatur (L) vel (M) vel (N), atque ita flexu contrario coincidente cum puncto reversionis fit ut non obstante reversione linea convexitatem aut concavitatem ei obvertat cui prius, cum enim duplex concurrat causa mutandae obversionis, se mutuo tollunt et manet obversio qualis ante erat ad directricem AX, scilicet (L), (M), (N) ipsi tam ante quam post regressum obvertunt concavitatem; si inverterentur, tam ante quam post regressum obverterent ei convexitatem.

Caeterum hinc intelligitur, quod duplex causa est cur linea mutet obversionem, et quae ante concavitatem directrici AX obverterat, nunc obvertat convexitatem: una, regressus puncti X in illa directrice moti (ut fig. 73), linea YY a $_3$Y ad $_4$Y obvertit ipsi AX convexitatem, at post regressum in $_4$Y obvertit ei concavitatem in $_5$Y, quia punctum X ab A recedit a $_3$X ad $_4$X, sed ad A accedit item seu regreditur a $_4$X ad $_5$X; altera vero causa est flexus contrarius, cum ipsa linea revera ex convexa fit concava, vel contra, ut in fig. 74, ubi linea in $_4$Y habet flexum contrarium, ita ut recta tangens cum prius cecidisset ad unum latus curvae post $_4$Y cadat in aliud latus, in ipso autem puncto $_4$Y tangens est nulla vel potius tangens et una secans coincidunt, nam (fig. 75) recta tangens lineam flexu contrario praeditam in L secat eandem alibi in M, cumque continue magis magisque sibi admoveri possint L et M, fit ut tandem coincidant in N, ubi nulla est tangens, aut potius eadem simul est certo respectu tangens et secans, unde et in puncto flexus contrarii tria curvae puncta alioqui diversa in unum coincidunt, duo ob tangentem (omnis enim tangens intelligitur secare lineam in duobus punctis coincidentibus), unum ob secantem. Et apparet in puncto flexus N duarum partium LN et MN coincidere, quemadmodum si duae curvae diversae LNS, MNR obversis convexitatibus se tangerent in N, unde transeundo ex una in alteram fieri potest flexa LNM vel flexa RNS.

Ex his autem duobus modis inter se diversis, quibus obversio lineae ad aliquam directricem mutatur, poterimus definire periodum intra quam intelligitur aliqua esse maxima aut minima, cum enim curva multos flexus contrarios multaque puncta reversionis habet, diversas habet maximas aut minimas pro sua quaque periodo.

Nimirum (fig. 76) linea Y recedit a sua directrice AX usque ad B, inde rursus accedit, ordinata igitur ad B est maxima (si ibi curva directrici obvertit concavitatem); porro linea a B accedit directrici AX, simulque recedit a directrice AZ usque ad C, ubi est punctum reversionis, seu ubi accedit quidem adhuc ad AX, sed non amplius recedit ab AZ; sed a C (ubi ordinata ad AX tangit curvam) usque ad D accedit simul directrici AX et directrici AZ, ubi iterum incipit recedere a directrice AX, sed adhuc pergit accedere ad AZ usque in E, ubi tam ab AZ quam ab AX iterum recedit. Periodos igitur faciunt puncta reversionis, quae obversionem mutant. Sic prima periodus est ABC qua linea directrici AX obvertit concavitatem, cujus periodi maxima est ordinata ad B, altera periodus est CDE, ubi linea directrici AX obvertit convexitatem cujus minima est ordinata ad D. Porro linea CDE producta seipsam secare potest in F. Et si totus venter coincidere intelligatur in punctum, ibi coincidit duplex reversio respectu directricis AZ cum simplici respectu directricis AX. Atque ita quia duplices reversiones se mutuo tollunt, hoc modo fieri potest ut linea (Y)(B)(F)(G) (in eadem fig. 76) quae a (B) usque ad (F) recessit ad directricem AX, post (F) rursus ab ea recedat, sine ullo flexu contrario pariter ac sine ulla reversione respectu alterius directricis conjugatae AZ, quorum tamen alternatio alias opus est, ut linea a directrice ad quam accessit iterum recedat. Sed redeamus ad priorem lineam AYBCDEFG, et post duas periodos ABC et CDE quaeramus tertiam EGH a puncto novissimo reversionis E ad punctum flexus contrarii proximi H, cujus periodi maxima est ordinata ad G. Quarta periodus est HJK a puncto flexus contrarii H ad novum punctum reversionis K, cujus periodi minima est ad punctum J. Ubi notandum est, etsi duae periodi sibi immediatae, quarum quaelibet suam habet maximam aut minimam respectu ejusdem directricis AX, inter se distingui debeant vel puncto aliquo reversionis respectu directricis conjugatae AZ vel puncto aliquo flexus contrarii in ipsa curva, tamen neque punctum reversionis directricis conjugatae neque punctum flexus contrarii statim periodum facere quae maximam vel minimam habeat, imo nec plura puncta flexus contrarii facere necessario periodum novam, ut patet ex serpentina KLM, verum plura nova puncta reversionis ad directricem conjugatam AZ necessario faciunt periodum novam aut periodos novas maximarum aut minimarum pro hac directrice AX, si flexus contrarii in curva absint. Quod ita demonstro, quoniam punctorum reversionis ad directricem conjugatam sunt ordinatae maximae et minimae ad directricem conjugatam, hinc si plura dentur puncta reversionis ad directricem conjugatam, dantur plures ordinatae tales ad directricem conjugatam, ergo et periodi maximarum aut minimarum pro directrice conjugata, quia quaevis maxima aut minima habet propriam periodum; hae autem periodi ad directricem conjugatam AZ necessario limitantur vel per puncta flexus contrarii vel per puncta reversionis ad directricem primam AX, absunt autem hic puncta flexus contrarii ex hypothesi, ergo adesse debent puncta reversionis respectu directricis AX, adeoque et maximae et minimae atque adeo et periodi respectu directricis AX, quod asserebatur. Denique notandum est, periodos (ad eandem directricem) regulariter tales esse ut maxima et minima sese alternis excipiant, exceptio tamen est in casibus quibusdam, ut in linea (Y)(B)(F)(G) eadem figura 76 sese immediate excipiunt duae maximae, ordinata a B ad AX et ordinata a G ad AX (nisi ordinatam ex F simul velimus computare, quae tamen periodum propriam nullam habet, quippe quae evanuit), cujus ratio est quod ibi duo puncta reversionis tacita sunt seu sese mutuo supprimunt, quae si expressa intelligantur numerenturque, vera manet regula alternationis. Similiter fieri potest ut punctum reversionis et flexus contrarius coincidant, et ita alternatio. Ut si in eadem figura N nova sit periodus KLMNP a puncto reversionis K ad punctum flexus contrarii P, ejusque periodi maxima sit ordinata ex N ad directricem AX, et rursus nova periodus PQR a P puncto flexus contrarii ad R punctum reversionis, cujus periodi maxima est ordinata ex puncto Q ad directricem AX, inde rursus nova periodus RST a puncto reversionis R ad punctum T (quod quale sit ex continuatione lineae patere deberet) cujus periodi maxima est ordinata ex S ad directricem AX. Et hactenus quidem semper servatur alternatio maximarum et minimarum; sed si totus venter VPQRV evanescere ponatur in unum punctum V, tunc ordinata ex V ad AX non poterit dici maxima aut minima ordinatarum, quia lineam NVST non secat, sed tangit; ergo periodi MNV maximam ordinatam, nempe ex N in directricem AX, excipit statim periodi VST maxima ordinata, nempe ex S ad directricem eandem, scilicet quia R et Q puncta reversionis et flexus contrarii in unum coincidentia sese mutuo compensant et tollunt.

Atque ita hic semina quaedam jecimus, ex quibus generalia quaedam curvarum elementa enasci, curvaeque a sua forma in certas quasdam classes dispesci possint. Possunt multa alia ex his principiis demonstrari, ut quod eadem est directio puncti curvam describentis, quae rectae tangentis; possent etiam elementa explicari curvarum linearum quae in solido describuntur compositione trium motuum, dum scilicet (fig. 62) planum unum CD incedit in alio CB a CE versus BF, et in plano CG movetur regula CG, accedit ad ED vel inde recedit, et in regula CG movetur punctum C versus G vel recedit a G. Potest et ex his modus quoque duci curvarum ducendi tangentes inveniendique maximas aut minimas; sed non id hoc loco agimus, nec plenam tractationem, sed gustum quendam atque introductionem damus.

Tantum hac vice.

III.

Quaerebam*) aliquando demonstrare **Theorema Pythagoricum** ex natura triangulorum similium. Itaque hoc usus sum

---

*) Leibniz hat auf dem Manuscript bemerkt: Hic specimen dare placuit Analyseos Anagogicae a vulgari Algebristis usitata, quam Metagogicam seu transsultoriam vocare possis, diversae, in demonstrando theoremate reductione continua ad alia theoremata simpliciora per gradus, cum vulgaris Analysis eat per saltum. Et cum Pappus dixerit, quaesitum vel demonstrandum assumi in Analysi pro vero, atque inde deduci alias enuntiationes donec incidatur in jam notas, quod Conringius et alii reprehendunt, volui hic evidenti specimine ostendere quod olim Conringio respondi, etsi alias ex vero falsum duci posset, nihil tale hic esse metuendum, quia non adhibentur nisi ratiocinationes reciprocae; itaque hic modum loquendi mutavi nec dixi ut initio volebam, ex Pythagorico Theoremate sequi articulum (6), ex hoc (supposita triangulorum similium proportionalitate laterum) sequi articulum 10 aliunde jam demonstratum vel demonstrabilem, sed malui dicere et ostendere verum fore Theorema Pythagoricum, si verus articulus (6), et hunc rursus, si verus articulus (10). Ita Analysis ista non minus rigorose demonstrat quam ipsa Synthesis.

processu Analytico: Assumo quaesitum et video unde possit duci. Erit autem verum (1) $AB^2+BC^2=AC^2$ (fig 77), si (2) $AB^2=AC^2-BC^2$, seu si (3) $AB^2=AC+BC, AC-BC$. Jam centro C radio CA describatur circulus secans rectam BC productam in D et in E, et erit (4) $BE=AC+BC$ et (5) $BD=AC-BC$. Ergo (3) erit verum per (4 et (5), si verum (6) AB esse med. prop. inter BD et BE. Theorema ergo propositum reduximus ad hoc, quod in circulo ordinata est media proportionalis inter segmenta diametri. Hoc vero rursus verum erit, si (7) angulus DAB = ang. AEB, ita enim triangula rectangula ABD et EBA erunt similia adeoque DB ad BA ut BA ad BE, uti habet articul. (6). Jam quia (8) ang. AEB + ang. EAB = recto (ex eo quod trianguli rectanguli EBA tres anguli sunt 2 rectis aequales) et (9) ang. DAB + ang. EAB = ang. DAE, ergo erit verus artic. (7) per (8) et (9) si (10) ang. DAE (in semicirculo) sit rectus. Nam per (10) et (9) erit (11) ang. DAB + ang. EAB = recto. Ergo per (8) et (11) erit DAB = ang. AEB, ut habebat artic. (7). Res reducta est ergo articulo (10) ad hoc theorema, quod angulus DAE in semicirculo est rectus. Quod sic ostendemus. Ex centro C in AE agatur normalis AF. Ergo si verum sit (12) esse angulum ad centrum ACE duplum anguli ad circumferentiam ADC, ideo cum (13) sit angulus ECF dimidius anguli ACE, erit per (12) et (13), (14) angulus ADE aequalis angulo ECF. Ergo (15) rectae AD, FC sunt parallelae. Ergo (15) cum ex constructione angulus CFE sit rectus, erit (16) etiam angulus DAE rectus, ut habebat articulus (10) Res ergo iterum ad aliud theorema reducta est est in articul. (12), cujus itidem facilis est demonstratio. Nam (17) ang. DCA + ang. CDA=2 rect., ut per se patet. Sed (18) ang. DCA + ang. CDA + ang. CAD = 2 rect., ergo per (17) et (18) erit (19) ang. ACE = ang. CDA + ang. CAD. Jam (20) ang. CDA = ang. CAD, ergo ex (19) et (20) sequitur artic. (12) seu angulum ad centrum (DAE) esse duplum anguli ad circumferentiam (ADC), ubi tantum assumsimus artic. (18) trianguli tres angulos esse 2 rectis aequales. Quod ipsum si quis demonstratum velit, ita facile satisfiet. Ex C ponatur duci CF parallela ipsi DA, erit (21) ang. FCE = ang. ADC, sed rursus (22) ang. CAD = ang. ACF cum sint alterni. Ergo ex (21) et (22) fit (23) $FCE+ACF=ADC+CAD=$ (24) ACE. Ergo per (44) et (17) habetur artic. (18) seu demonstratum est, in Triangulo tres angulos esse 2 rectis aequales. Quodsi adhuc desideretur demonstratio artic. (22) seu theorematis, quod alterni aequales, id facillime fiet. Producantur CA in G, et BA in H. Ob parallelas AH et CF sunt (25) anguli ACF et GAH aequales. Sed (26) aequales sunt oppositi GAH et CAD. Ergo per (25) et (26) aequantur alterni ACF et CAD, ut habebat artic. (22). Omnia ergo reduximus ad veritates evidentes, quales sunt: Triangula similia habere latera proportionalia (ad 7), CF normalem ad AE bisecare angulum ACE in triangulo ACE, quod ob circulum cujus centrum C est isosceles (ad 13 et 20), item angulos qui sibi deinceps DCA et ACE aequari 2 rectis (ad 17 et 24), parallelas ad eandem facare angulos aequales ad easdem partes (ad 16 et 25).

IV.

EPISTOLA AD VIRUM CELEBERRIMUM, ANTONIUM MAGLIABECCIUM, UBI OCCASIONE QUORUNDAM PROBLEMATUM A BATAVIS FLORENTIAM MISSORUM DE USU ANALYSEOS VETERUM LINEARIS ET IMPERFECTIONE ANALYSEOS PER ALGEBRAM HODIERNAE DISSERITUR, NOVUMQUE TRIGONOMETRIAE SINE TABULIS INVENTUM ATTINGITUR.

Vorbemerkung. Von einem Ungenannten waren den Mathematikern zwölf Aufgaben vorgelegt worden, an deren Behandlung der Neapolitaner Antonio de Monforte sich versucht hatte. Er veröffentlichte seine Lösungen in einem an den berühmten Magliabecchi gerichteten Schreiben, das „Neapoli nono Cal. Janu. an. 1676“ datirt ist. Dieses Schriftchen gerieth in die Hände Leibnizens; er machte, wie er zu thun gewohnt war, seine Bemerkungen darüber und stellte sie in dem folgenden ebenfalls an Magliabecchi gerichteten Schreiben zusammen.

Das Programm, in welchem der Ungenannte die zwölf Aufgaben bekannt machte, lautet wie folgt:

Geometra post tabulam latens, quae sequuntur Problemata, Matheseos Professoribus resolvenda proponit.

1. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet alterutrum laterum circa verticem ad differentiam eorundem, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

2. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet laterum aggregatum circa verticem ad lineam aliquam datam, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

3. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet aggregatum laterum circa verticem recta data multatum, ad rectam aliquam itidem datam, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

4. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet differentia laterum circa verticem ad alterutrum laterum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

5. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet rectangulum sub lateribus circa verticem ad datum planum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

6. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet quadratum unius e lateribus circa verticem auctum rectangulo sub iisdem, vel plano utcunque ejusdem multiplici ad quadratum alterius lateris, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

7. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet laterum aggregatum circa verticem ad alterutrum e lateribus, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

8. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet quadratum lateris alterutrius circa verticem ad rectangulum sub aggregato ex differentia praedicta et latere minori et sub eadem quoque differentia, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

9. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet quadratum aggregati ex praedicta differentia et latere alterutro circa verticem ad excessum, quo idem supererat quadratum praedictae differentiae, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

10. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet aliquota pars rectanguli sub lateribus circa verticem, datum planum assumens ad aliud datum itidem planum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

11. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet aggrėgatum quadratorum e lateribus circa verticem ad datum planum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

12. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet quadratum aggregati laterum circa verticem, assumens datum planum ad datum itidem planum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

Viro Celeberrimo

Antonio Magliabeccio.

Incidit*) nuper in manus meas inscripta Tibi Epistola doctissimi ut apparet Antonii Monfortii. Quam cum evolvissem, vidi duodecim problemata Trigonometrica Lugduno Batavorum summissa ab eo tractari, quae Geometra nescio quis, qui se post tabulam latere ait, Mathematicis solvenda proposuit, quibus omnibus hoc commune est, ut in Triangulo quaesito detur differentia segmentorum baseos, et angulus aliquis ad basim. Dantur praeterea in probl. 1. ratio lateris circa verticem ad differentiam eorundem, probl. 2. ratio aggregati horum laterum ad rectam datam, probl. 3. ratio ejusdem aggregati recta data multati ad rectam datam, probl. 4. ratio differentiae horum laterum ad alterutrum laterum, probl. 5. (secundum ordinem solutionis) ratio aggregati ad latus alterutrum, probl. 6. (secundum ordinem solutionis) ratio rectanguli sub dictis lateribus ad planum datum, probl. 7. (secundum eundem solutionis ordinem) ratio quadrati unius lateris rectangulo laterum aucti ad quadratum alterius lateris, probl. 8. ratio quadrati lateris minoris (semper circa verticem intelligo) ad rectangulum sub aggregato ex data differentia segmentorum basis et latere minore et sub ista data, probl. 9. ratio quadrati ab aggregato istius datae dictae, et lateris majoris ad excessum hujus quadrati supra quadratum ejusdem datae, probl. 10. ratio aliquotae partis rectanguli sub lateribus dato plano aucti ad datum planum, probl. 11. ratio aggregati quadratorum a lateribus ad datum planum,

*) Leibniz hat auf dem Manuscript bemerkt: optimum erit non nominari Monfortium, quia laudari non potest.

probl. 12. ratio quadrati ab aggregato laterum dato plano aucti ad datum planum. Quanquam autem problemata ipsa plane in potestate sint hominis analytica docti, qualia ego quidem aggredi non soleo cujus in eo potius versatur studium, ut ipsa Analyticae artis pomoeria proferam ad ea quae Algebram transcendunt, quoniam tamen Tibi inscripta video et Monfortianae solutiones quibusdam animadversionibus indigent, credidi veniam apud Te pariter et Cl. Monfortium libertati meae paratam fore, si providere studeam ne quid Mathematica exactitudo dissimulatione nostra detrimenti capiat, eaque occasione alia quaedam majoris momenti admoneam, quibus Geometriae contemplatio pariter et usus magnopere augeri possit. Et primum quanquam exiguum hoc sit, moneo tamen (ne imposterum in allegando confusio oriatur) in programmate proponentis, ut edidit Monfortius, problema septimum esse id quod solvit Monfortius loco quinto, ideo quintum et sextum proponentis sunt sextum et septimum Monfortii; caetera consentiunt. Illud vero magis notari meretur, problema primum et quartum esse unum et idem, nec differe nisi verbis, quod miror non animadvertisse Cl. Monfortium, quemadmodum alia incongrua quae mox ostendam. Primum enim problema est: Data differentia segmentorum baseos una cum ratione quam habet alterutrum laterum circa verticem ad differentiam eorundem datoque alterutro angulorum ad basin, reperire triangulum; problema quartum est: Data differentia segmentorum baseos una cum ratione quam habet differentia laterum circa verticem ad alterutrum laterum datoque alterutro angulorum ad basin, reperire triangulum. Haec duo problemata in eo solum differunt, quod in primo datur ratio lateris alicujus ad laterum differentiam, in quarto vero ratio differentiae laterum ad aliquod latus, cum tamen nemo ignorare possit, data una ratione quae directa est, utique dari et alteram quae reciproca est. Quid est frustra problemata multiplicare, si hoc non est? Non tamen video, quomodo alicubi (pag. 22) Cl. Monfortius velit, omnia problemata duodecim reduci posse ad unum, cum constet, ut mox ostendam, pleraque quidem ex illis esse plana, nonnulla tamen solida, quae utique diversi sunt generis a planis. Caeterum sunt et alia, quae mihi in ipso modo quo problemata haec concepta sunt, displicent. Exempli causa in probl. 2. datur aggregati laterum ratio ad rectam datam, notum autem est, cujus ratio ad datum datur, id dari ipsummet. Cur non ergo proponens dixit potius, dari ipsum aggregatum quam aggregati rationem? an detorquendo nonnihil problema credidit se id difficilius reddere? Idem est de problemate tertio, quod si recte inspicias, nihil differt a secundo. Nam in tertio datur aggregati laterum recta data multati ratio ad rectam datam; cujus autem ratio ad datum datur, id ipsummet datur. Datur ergo aggregatum laterum recta data multatum. Quod vero dato multatum datur, id ipsummet datur; datur ergo aggregatum laterum. Redimus ergo ad problema secundum. Eodem modo in probl. 6. datur ipsum rectangulum laterum. Similia ut ita dicam *ἀγεωμετρήματα* in probl. 9, 10, 11, 12 notari possunt. Et quidem problema decimum non nisi specie verborum differt a sexto secundum ordinem Monfortii vel quinto secundum ordinem proponentis. Nam si datur ratio aliquotae partis rectanguli sub lateribus datum planum assumentis ad datum planum, dabitur haec aliquota pars datum planum assumens; ergo datur ipsa aliquota pars. Data aliquota parte rectanguli sub lateribus, dabitur ipsum et recidimus in problema sextum.

Venio ad ipsas solutiones doctissimi Monfortii, quibus tamen nescio an satisfactum sit Geometrae proponenti. Primum enim videtur is, qui simpliciter proponit problemata Geometrica, postulare solutiones Geometricas, non vero Arithmeticas, lineas scilicet seu lineares constructiones, non numeros. Deinde videtur is, qui proponit problemata generalia, postulare etiam solutiones problematis generales; Monfortius autem certos casus pro arbitrio assumit, in quibus problema est rationale, eosque solvit. Et sane tertio foret hoc aliquid, si methodum generalem exposuisset solvendi haec problemata in numeris rationalibus, quoties fieri potest; sed ille si quid credi potest sumsit exempla aliunde nota, eaque in speciem tantum methodo analytica investigavit. Quomodo autem infinita exempla reperiri possint, quibus problemata trigonometrica hujusmodi (quae scilicet non aliae rectae ingrediuntur, quam latera, segmenta baseos, perpendicularis et ex his orta, nempe summae, differentiae, rationes, rectangula etc.) in numeris rationalibus exhiberi queant, id quoniam Cl. Montfortius non docuit, et usum tamen saepe habere potest, exponam quia facile est. Nimirum (fig. 78) si duo sint in numeris rationalibus triangula rectangula ADB et CDB habentia unum latus circa rectum BD commune seu aequale, ex illis in unum compositis fiet triangulum ABC, quod non latera tantum, sed et altitudinem et segmenta baseos, adeoque et quae ex bis oriuntur rationalia habebit: sed quomodo habebimus duo triangula rectangula rationalia latus circa rectum commune habentia? Respondeo, id quoque facillimum esse; datis enim duobus triangulis rectangulis rationalibus quibuscunque, inde bis fabricari poterunt duo alia triangula rectangula rationalia latus circa rectum commune habentia. Exempli causa duo sunt simplicissima triangula rectangula rationalia in numeris integris, nempe unum cujus latera circa rectum 3 et 4, hypotenusa 5, alterum cujus latera circa rectum sunt 5 et 12, hypotenusa 13. Quodsi volumus inde facere duo triangula rectangula latus unum circa rectum commune habentia, multiplicemus per crucem, triangulum 3, 4, 5 per 5 et fiet 15, 20, 25, et triangulum 5, 12, 13 per 3 et fiet 15, 36, 39. Idem aliter praestare possumus ex iisdem assumtis, multiplicando

triangulum 3, 4, 5 per 4 et fiet 12, 16, 20,
triangulum 12, 5, 13 per 1 et fiet 12, 5, 13.

Possunt tamen et aliis modis reperiri duo triangula latus circa rectum commune habentia, scilicet generaliter quot modis fieri potest in numeris rationalibus, ut sit ab aeq. cd, vel ut sit aa—bb aequ. cc—dd, vel denique ut sit 2ab aequ. cc—dd, habebuntur enim duo triangula rectangula rationalia quorum latera

$$2ab, \quad aa-bb, \quad aa+bb$$
$$2cd, \quad cc-dd, \quad cc+dd$$

habentia unum latus circa rectum commune, tot igitur etiam modis haberi potest triangulum rationale, cujus altitudo et segmenta basis sint rationalia. Et sumto ex infinitis ejusmodi triangulis quocunque, quodcunque ex problematis a Cl. Monfortio hic solutis eodem modo solvi poterit, quo ab illo factum est; quod sane nulla analysi indiget, cum ea ratione jam tum notum sit quod quaeritur, licet tractetur perinde ac si ignotum adhuc et quaerendum esset.

Sed nunc a nobis jure postulari videbitur, ut solutiones geometricas exhibeamus. Quod ut cum fructu aliquo fiat, in re alioqui sterili, placet modum ostendere quomodo pleraque solvi queant sine calculo, et viam inire, quae praebeat specimen analyseos cujusdam linearis, ab analysi algebraica sive calculatoria plane diversae; ita simul fortasse lucem aliquam analysi Veterum affundemus, quae consistebat in usu Datorum, cui juvando etiam librum suum de Datis Euclides scripserat, in quem extat Marini, veteris philosophi, ὑπόμνημα. Problemata igitur primum et (Monfortiano ordine) quintum haec sunt: Data differentia segmentorum baseos AD, DC (fig. 79), ratione lateris AB ad differentiam vel aggregatum laterum AB et BC et denique angulo A, invenire triangulum ABC. Quod sic vestigabimus: In segmento majori AD sumatur DE aequalis minori segmento DC, erit AE differentia segmentorum data; jungatur BE. Datur ratio lateris AB ad differentiam (aggregatum) laterum AB et BC, ergo datur ratio laterum AB, BC inter se, quemadmodum notum est. Et ob datum angulum A datur ratio BD ad AB; jam datur ratio AB ad BC (ut paulo ante ostendimus), ergo datur ratio ex his composita BD ad BC, ergo datur angulus C. Datis jam trianguli duobus angulis A et C, datur et tertius ABC. Omnes ergo trianguli quaesiti ABC angulos habemus. Porro datur angulus CBD, supplementum ipsius inventi C ad rectum; ergo et datur angulus EBD (ipsi CBD aequalis, quia ED et CD aequales), datur et angulus ABD (supplementum ipsius dati A ad rectum), a quo si inventus angulus EBD auferatur, habebitur residuus ABE. Trianguli ergo BAE habebuntur anguli duo, A et ABE, ergo et tertius AEB. Habentur ergo omnes anguli trianguli BAE, habetur et unum ejus latus AE (differentia segmentorum baseos data), ex quibus habitis habetur ipsum triangulum BAE (et geometrice quidem, ut ostendam in solutione sequenti), ergo et latus ejus AB, ergo et trianguli ABC, cujus etiam omnes anguli habentur; habetur unum latus AB, habetur ergo ipsum Triangulum ABC quaesitum, quod desiderabatur. Ex hac analysi lineari, quemadmodum alias ex calculatoria, facile fuisset constructionem elicere, eamque synthetice demonstrare, dissimulata analysi seu inveniendi ordine; sed haec non tam problematis, quod tanti non est, quam analyseos causa attulimus.

Problema quartum nihil differt a primo: problemata secundum et tertium non differunt inter se, ut ostensum est. Solutio eadem quoque methodo facile habebitur, sine ullo calculo, per solam analysin linearem. In triangulo ABC (fig. 80) dato angulo C, et data FC differentia inter AD et DC, segmenta baseos, datoque CH aggregato (vel etiam differentia, quanquam id inter problemata proposita non sit) laterum AB, BC circa verticem, quod aggregatum CH habetur si in producta CB sumatur BH aequal. AB, quaeritur triangulum. Jungatur FH. In triangulo FCH datur angulus C et duo latera CH, CF, ergo datur triangulum et quidem non tantum trigonometrice seu per Tabulas, sed et geometrice, nam ex F ducta FG perpendiculari ad CH, habemus duo triangula rectangula FGC et

FGH, et in priore dato uno latere FC et uno angulo C, dantur reliqua ut constat, nempe latera FG, GC. Habita jam recta GC, detrahatur a data CH, habebitur HG. Habitis HG et FG, habetur FH. Habemus ergo trianguli FCH tria latera CH, CF, FH geometrice, ex dato angulo et duobus lateribus, quod jam in problematis primi solutione assumseramus. Ergo datur et angulus ejus FHC. Jam triangulum HBF est isosceles (quia tam BH quam BF aequales ipsi AB, ergo cum detur angulus ejus FHB (sive FHC), dabitur et ei aequalis HFB. Datis ergo trianguli HBF duobus angulis et basi FH, dabitur ipsum, et geometrice quidem ad modum eorum, quae proxime ostendimus. Datur ergo et latus HB vel BF, id est AB. Quod si auferatur a dato CH, dabitur residuum BC. Habemus ergo AB, BC et angulum A, unde caetera statim habentur. Solvimus ergo problemata secundum et tertium, quae huc redire ostendimus. Et alia eis similia, si scilicet differentia aggregato substituatur. Problema quintum solventis Monfortii seu septimum proponentis solutum est cum primo.

Quod sexto loco a Cl. Monfortio tractatum est, ejus calculum assurgere ad quadrato-quadratum ostendit ipse Monfortius, ac proinde innuit sua natura esse solidum, etsi in quibusdam casibus facilioribus studio quaesitis, qualem exhibet Monfortius, deprimi queat. Inuere autem videtur sequentia sex esse etiam solida, quia negat se plus quam sexies eandem methodum ponere velle. Et sane in speciem talia sunt, sed non animadvertit omnia deprimi posse et esse plana demto uno decimo, quod coincidit cum sexto. Et sane, si quid judico, a Cl. Monfortio problematum solutionem aggredienti expectandum saltem erat, ut quae plana, quae solida essent, judicaret. Quod certe aut omnino non fecit, aut non recte fecit. Ego vero deprehendi omnia esse plana praeter dicta duo, quod in singulis ostendam. Nonum itaque, ut hinc neglecto ordine incipiam, etsi solidi speciem habeat et calculum ad quadrato-quadratum attollat, tamen planum esse sic ostendo: In eo duo sunt quadrata, unum ab uno latere recta data aucto, alterum a recta data. Et dicitur ratio dari prioris ad excessum suum supra posterius, sive dicitur dari ratio unius ad differentiam ab altero. Jam vero quoties hoc fit, toties datur ipsa duarum quantitatum ratio inter se. Datur ergo ratio quadrati ab uno latere recta data aucto, ad quadratum rectae datae. Sed data ratione duorum quadratorum, datur et ratio laterum, ergo datur ratio lateris recta data aucti, ad rectam datam; et redivimus ad problema planum, omnium hactenus tractatorum facillimum. Nam cujus datur ratio ad datum, id ipsum datur, datur ergo unum latus recta data auctum. Quod autem dato auctum datur, id simpliciter datur. Datur ergo unum latus. Problema ergo 9. reductum est ad hoc: Dato uno angulo ad basin, uno latere ad verticem, et differentia segmentorum baseos, invenire Triangulum, quod utique facillimum est. Nam si datum latus AB (fig. 81) sit ad datum angulum A, dabitur utique et (ob angulum datum) ratio AD ad datum AB, ergo datur et AD; unde caetera habentur. Quodsi detur angulus A et latus BC, tunc in basi si opus producta sumatur DF aequal. AD, erit CF differentia segmentorum baseos data. Jungatur BF quae erit aequalis ipsi AB, et angulus F angulo A dato. Itaque in triangulo BFC datur angulus F et duo latera BF, CF, ergo datur triangulum geometrice per supra ostensa. Ergo dabitur et latus BF seu AB, unde ob datum angulum A habebitur et AD, adeoque et AC, id est dupla AD ademta data CF.

Eodem fere modo et problema duodecimum sive ultimum solvetur. Nam datur in eo ratio quadrati ab aggregato laterum, plano dato auctum, ad planum quoddam datum. Datur ergo quadratum ab aggregato laterum plano dato auctum. Ergo datur ipsum quadratum ab aggregato laterum. Dato autem quadrato dabitur id cujus est quadratum. Datur ergo aggregatum laterum, et recidimus in problema 2. supra solutum. Sed et probl. 8. planum esse comperietur: Nam datur in eo ratio quadrati a latere minori circa verticem ad rectangulum sub data et sub eodem latere eadem data aucto. Ergo datur ipsum latus per constructionem planam, quod sequi sic ostendo. Posito enim id latus esse y, datam esse a, dabitur ratio: yy ad $y+a$ in a seu ad $ya+aa$, eadem cum data ratione b ad a, ergo fiet $yy : ya+aa :: b : a$ seu yy aequal. $by+ba$, quae aequatio plana est, cujus constructio simplicissima et satis nota. Habemus ergo latus y. Dato autem latere uno trianguli circa verticem, angulo uno ad basin, et differentia segmentorum basis, dari triangulum paulo ante ostendimus. Habetur ergo solutio problematis 8. Quod de latere minori ostendimus, eodem modo praestari potest et in majori. Unde proponens problema incongrue de solo minori concepit.

Quin imo et problema septimum (Monfortiano ordine, at sextum proponentis) quod maximam solidi speciem habet, planum esse comperi. Datur enim in eo ratio quadrati lateris unius cum rectangulo sub lateribus, ad quadratum lateris alterius. Sed hinc ajo dari rationem laterum inter se. Sunto enim latera z et y, erit ratio $zz+zy$ ad yy eadem datae b ad a. Sumatur alia recta e quae sit ad a, ut z ad y, fiet: z aequ. $\frac{ey}{a}$ eritque $\frac{eeyy}{aa}+\frac{eyy}{a}:yy::b:a$ et fiet $ee+ae$ aequ. ab; habetur ergo e per constructionem planam simplicissimam jam satis notam, adeoque et ratio ejus ad datam a, ac proinde etiam ratio z ad y, seu ratio duorum laterum circa verticem. Recidimus ergo in problema 1. Ergo et problema septimum solutum habetur.

Postero inveni et problema undecimum planum esse, in quo datur aggregatum quadratorum laterum circa verticem. Insistendo literis Cl. Monfortii sit (fig. 82) AB, z et BC, y et CD, x et differentia inter AD et CD data sit a, nempe AF vel AG, et angulus A vel GAF etiam datus. Hinc data quoque ratio AB ad AD seu z ad $x+a$ sive AG seu a ad AH seu b. Denique datum aggregatum laterum $zz+yy$, quod sit aequ. cc quadrato a recta data c vel AL Ex natura trianguli differentia quadratorum laterum $zz-yy$ est aequalis $2ax+aa$ sive rectangulo sub intervallo segmentorum a et basi AC, $2x+a$. Ergo $2zz$ est aequ. $2ax+aa+cc$, seu zz aequ. $ax+\frac{aa+cc}{2}$. Est autem z aequ. $\frac{a}{b}\overline{x+a}$, ergo x aequ. $\frac{b}{a}z-a$. Habemus ergo: zz aequ. $bz-aa+\frac{aa}{2}+\frac{cc}{2}$ seu zz aequ. $bz+\frac{cc-aa}{2}$. Unde facilis constructio est, nam si triangulum rectangulum fiat cujus latera circa rectum sint dimidia AH, et alia recta quae possit dimidium excessus quadrati ab AL super quadratum ab AF, ejus trianguli hypotenusa, assumens dimidiam AH, erit latus AB trianguli quaesiti ABC, unde caetera habentur.

Restant duo tantum problemata, sextum ordine solventis Monfortii (quod proponenti quintum est) itemque decimum, sed supra ostendimus decimum ab hoc sexto reapse non differre. Ipsum autem sextum, qui generaliter solvere volet, solidum esse deprehenderet, cum scilicet praeter segmentorum baseos differentiam et unum ad basin angulum datur rectangulum sub lateribus circa verticem. Servatis enim iisdem literis eodemque (qua licet) calculo, quem paulo ante adhibuimus, habemus: $zz-yy$ aequ. $2ax+aa$,

x aequ. $\frac{b}{a}z - a$ ob data omnibus problematis nostris communia, unde fit: $zz - yy$ aequ. $2bz - 2aa + aa$ sive $zz - yy$ aequ. $2bz \quad aa$. Jam ob data hujus problematis propria esto rectangulum zy aequale plano dato cc, fiet: y aequ. $\frac{cc}{z}$ et yy aequ. $\frac{c^4}{zz}$, quem valorem substituendo in aequ. praecedenti fiet: $zz - \frac{c^4}{zz}$ aequ. $2bz - aa$, tollendoque fractionem atque ordinando $z^4 - 2bz^3 + aazz$ aequ. c^4. Quae aequatio (tractabilior Monfortiana) licet sit quadrato-quadratica, cum tamen sit admodum simplex, nec proinde ullo praeparationis artificio indigeat, facillime per Circulum et Parabolam, vel per Circulum et Hyperbolam construi potest secundum methodos vulgo notas. Itaque immorari istis supervacuum foret. Quod autem problema generaliter ac per se sit solidum, ita ostendemus: Pro z substituatur $\frac{cc}{y}$, habebitur $\frac{c^4}{yy} - yy$ aequ. $\frac{2bcc}{y} - aa$ seu $y^4 - ayy + 2bccy$ aequ. c^4, quam generaliter et per se solidam esse sic demonstro. Omnis aequatio quae in aliquo exemplo est solida, ea generaliter sumta seu per se solida est, vel quod idem est, generalem depressionem non patitur. Utique enim alias generalis illa depressio speciali exemplo accomodaretur contra hypothesin. Nostra autem novissime dicta exemplum habet, quo indubitabiliter solida est. Ponatur enim primum in casu aliquo speciali esse b aequ. $\frac{1}{cc}$, tunc $2bcc$ erit aequ. 2, et loco proximae aequationis habebimus: $y^4 - aayy + 2y$ aequ. c^4. Rursus in eodem exemplo ponamus praeterea esse a aequ. 0, et c etiam aequ. 0, tunc evanescent termini $aayy$, item c^4, et restabit tantum: $y^4 + 2y$ aequ. 0 sive y^3 aequ. -2, quod problema est solidum, nam radix ejus negativa est una duarum mediarum proportionalium inter 1 et 2, sive habetur per duplicationem cubi. Problema igitur sextum adeoque et decimum sua natura solidum est. Atque ita praestitimus circa haec problemata omnia quicquid poterat desiderari. Quae solida sint, talia esse demonstravimus, eaque aequatione tam simplici expressimus, ut notis et apud Cartesium Slusiumque extantibus regulis brevissime construi possint a quovis Tirone, itaque constructionem ipsam huc transcribere foret tempore abuti. Caetera et plana esse demonstravimus, et quomodo ex aliis problematibus jam datis dentur, ostendimus, ut nihil praeterea addere operae pretium sit. Addidimus tamen, quomodo exempla solutionum in numeris rationalibus infinita nullo negotio habeantur. Caetera praestare tironis exercitationi magis conveniet.

Velim autem in his problematis quae plana ostendimus, animadverti usum analyseos linearis Veterum, qui sane tantus est, ut si quis ea neglecta sine discrimine solam recentiorum algebram adhibeat, in calculos ingentes se induere possit. Saepe enim altissime assurget et anxius inquirere cogetur depressiones, nisi paulo ante problema profundius inspiciat; plerumque etiam in constructiones incidet contortas et minime naturales, quas evitabit si cum Veteribus subinde usum Datorum adhibebit et cum analysi recentiorum opportune miscebit. Sciendum enim est, quod pauci animadverterunt, duplicem esse analysin, unam qua problema unumquodque resolvitur per se, et incognitae habitudo ad cognitas investigatur, alteram qua problema propositum reducitur ad aliud problema facilius, quod fit usu Datorum, quando ostenditur uno dato haberi et aliud. Et prior quidem Methodus Algebraica est, quam a Vieta et Cartesio maxime celebratam, recentiores hodie solam analysin esse putant, cum tamen altera methodus et Veteribus usitata fuerit, quod multis exemplis ostendi posset, et suas quoque certas et constantes regulas habeat, et difficultatem magis dividat in partes, atque ideo soleat feliciores exhibere solutiones magisque naturales, et intellectum non per symbola sed ipsas rerum ideas ducat. Unde aestimandum tibi relinquo, Vir Clarissime, quam longe adhuc absit analysis, quae hodie passim in usu est, a perfectione vulgo jactata.

Quod vero Cl. Monfortius ad te scribit se problemata haec aggressum, ut vim analytices experiretur in his quoque, ubi inter data habetur angulus, quibus casibus Ghetaldus et Beaugrandius Analysin Speciosam haerere putent; item hinc disci posse artem solvendi problemata trigonometrica sine usu tabularum, id meo judicio admitti non potest. Quanquam enim non meminerim, quae sit horum scriptorum sententia, illud tamen scio, Geometras cum negant calculum circa angulos in potestate esse, non intelligere angulos ita datos, ut hoc loco cum Monfortio et aliis assumsimus, cum scilicet angulus rectus determinatur (ut cum positione dantur rectae AB, AC (fig. 83) angulum A comprehendentes, vel cum datur ratio laterum AB, AD in triangulo rectangulo ADB) et nihil aliud quaeritur, quam aliae rectae ex datis rectis, sed tum demum Geometras difficultatem agnoscere, cum angulus datur per numerum graduum, sive per rationem arcus BE cui ex centro A insistit, ad totam circuli circumferentiam, et quaeruntur inde latera seu rectae, vel contra cum lateribus datis vel rectis determinantibus numerus graduum seu ratio arcus ad circumferentiam desideratur, tunc enim Geometrae hactenus omnes ad tabulas quas vulgo Sinuum vocant, recurrere coacti sunt, fassi neque Algebram neque Geometriam constantes solvendi regulas praebere. Quod adeo verum est, ut asseram ego algebram in his non tantum imperfectam sed et impossibilem esse, sive ut rem exemplo explicem, dato sinu toto AE et BD sinu anguli BAE, ajo impossibile esse per algebram invenire sinum FG anguli FAE, posito arcum FBE esse ad arcum BE, ut diagonalis quadrati est ad latus. Tale enim problema, quemadmodum facile demonstrare possum, neque est planum neque solidum, neque tertii aut quarti aut quinti, aut ullius alterius gradus, nec proinde per ullam earum curvarum, quas solas Cartesius in Geometriam recipi voluit, construi potest. Quod rursus signum est, non tantum analysin Geometricam (quae sola algebra nititur) esse imperfectam, sed et alias adhuc curvas Geometricas excogitari debere, quae Algebraicae quidem non sint (nec proinde relationem habeant ordinatae ad abscissam ex axe, aequatione quadam certi gradus explicabilem), possint tamen motu continuo describi. Ubi vero curvas excludo, cycloidi similes, etsi enim accurate describi possint, tamen assumunt curvae materialis applicationem ad planum tangens vel quod eodem redit extensionem fili curvae materiali applicati in rectum, quod perinde est ac si quis Geometra sphaeram aqua replens et eandem aquam mox inde in rectangulum solidum effundens, se sphaeram cubasse dicat. Hujusmodi enim constructiones a Geometris non desiderantur, etsi rectae sint, et probae, et nonnunquam adhibendae donec meliores inveniamus. Assero autem posse inveniri novum curvarum Geometricarum genus, quae solo rectarum materialium seu regularum motu constante et ab uno principio dependente, continuo tractu describantur, ac proinde aeque sint Geometricae ac ulla earum quas Cartesius exhibet; his curvis ajo problemata algebram transcendentia solvi posse perficique Geometriam. In locum quoque Aequationum Algebraicarum, quae scilicet sunt certi gradus, ut planae, solidae, sursolidae etc., novum plane calculum introduco problematibus transcendentibus inservientem, adhibitis aequationibus infinitis. Quod inventum, cum sit inter praestantissima censendum, maximique in tota re Mathematica usus, exemplo illustri declarabo: Anguli BAE vel arcus BE sit tangens EH, secans AH; hanc tangentem EH vocabo t, radium AB vocabo r, et arcum BE vocabo a; ajo hanc aequationem haberi a aequ. $t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \frac{t^{11}}{11t^{10}}$ etc. in infinitum. Ope hujus aequationis in Triangulo rectangulo AEH ex datis lateribus habebuntur anguli, sine ullis tabulis, calculo tam exacto quam quis velit, modo radius r sit latus circa rectum majus et tangens t minus, et quidem aequatione ejusmodi exactus continetur valor arcus, quia continentur in ea omnes appropinquationes simul in infinitum. Nam si terminos priores quotlibet ut $t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4}$ assumas, error semper erit minor termino proxime sequenti ut $\frac{t^7}{7r^6}$, ergoque tam parvus quam velis, nam posito t esse minorem quam r, patet terminos istos t, $\frac{t^3}{rr}$, $\frac{t^5}{r^4}$, $\frac{t^7}{r^6}$ etc. continue decrescere in progressione geometrica; quae autem sic decrescunt, ea satis promte evanescere constat. Arcu autem in numeris quantumlibet exactis hac ratione invento, dabitur etiam ratio ejus ad circumferentiam numeris Ludolphi Coloniensis expressam; ergo quantitas anguli seu numerus graduum t et r, seu AE et E(H) sunt aequales, quod fit cum arcus (B)E est quadrans circuli, tunc loco aequationis prioris (B)E seu a aequ. $t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4}$ etc. fiet (B)E aequ. $r - \frac{r}{3} + \frac{r}{5} - \frac{r}{7}$ etc. ac proinde, si radius circuli sit 1, erit arcus quadrantis $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc., vel si quadratum diametri sit 1, erit area circuli $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. Quod a me inventum theorema summos Geometras, quibus ostendi, mirifice delectavit. Nec puto in numeris rationalibus simpliciorem atque elegantiorem magnitudinis circuli expressionem reperiri posse. Appropinquatio autem subita non ab his, sed a generali theoremate petenda est, assumendo arcum quadrante minorem, cujus data sit ratio ad circumferentiam, ut tangens quoque in numeris quantum satis est exactis habeatur. Quodsi Ludolphi Coloniensis tempore nota fuisset haec methodus, ne centesima quidem laboris parte ipsi opus fuisset.

Contra ex datis angulis et uno latere reliqua latera investigaturus alia opus habet aequatione infinita, quae neque facilitate neque elegantia priori cedit: eam vero alias exponam, nunc specimen dedisse contentus, unde intelliges, quanta hinc geometriae etiam practicae accessio habeatur. Cum enim nihil sit trigonometricis problematibus frequentius atque utilius, quae hactenus sine tabulis satis exacte expediri non possunt, tabularum autem libros per terras et maria circumferre non sit in potestate; nos inventis regulis facillimis, et quarum semel perceptarum ne oblivisci quidem possis si velis, et quibus nullo negotio etiam ultra ipsam tabularum exactitudinem ire liceat, scientiam tam indecora servitute absolvimus, ac nunc denique effecimus, ut Geometra ingenio fretus libris carere possit.

Atque haec quidem, Vir Celeberrime, ideo tibi scribenda putavi, primum ut tuo judicio probata, quod multorum instar est, per te, si tanti tibi videntur, ad alios perveniant, in Italia inprimis vestra doctos viros, quorum sententias libenter audiam, deinde ut illi qui sibi persuasere Analysin Mathematicam nihil ab Algebra differre, aut jam ad vestigium pervenisse, noxio scientiae augmentis errore liberentur. Scio summos in Italia esse Geometras, Romae Riccium et Grandium, quibus P. Honoratus Fabry et si adhuc ibi agit Joh. Alphonsus Borellus addi posse videntur, Florentiae Vivianum, Petavii Renaldinum, ut alios taceam. Hi etsi Algebrae intelligentissimi, mecum tamen opinor persuasionem damnabunt, quam in quibusdam locis maxime inter eos qui Cartesiani appellantur, invalescere video, quasi in Algebra, quam vocant Speciosam, inprimis qualem Cartesius tradidit, omnium problematum solutio contineatur, quoniam scilicet Cartesiani vulgo fere non nisi minoris momenti ususque problemata attingunt, qui si vel trigonometriam recte considerassent, aliter sentirent.

Porro vera Algebrae incunabula Italiae jam a superiori seculo debentur. Primarius enim finis Algebrae est, invenire valorem incognitae quantitatis, sive formulam quandam si licet finitam, qua exacte exprimatur radix aequationis. Et quidem ejusmodi formula jam satis habebatur ex Veteribus, quando aequatio non excedebat quadratum. Sed quando aequatio est cubica, primus formulam radicis invenit Scipio Ferreus et post eum Nicolaus Tartalea, a quo didicit Cardanus. Nam si aequatio cubica generalis a secundo termino liberata sit

$$x^3 + px \text{ aequ. } q,$$

radix generalis erit

$$x \text{ aequ. } \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}},$$

quod inventum ego inter praestantissima censeo. Proximum est inventum Ludovici Ferrarii Bononiensis, qui Cardano familiaris fuit, et cujus vita etiam extat inter Cardani opera. Is primus invenit modum reducendi aequationem quadrato-quadraticam quamlibet ad cubicam. His duobus inventis omnia problemata solida per algebram absoluta habentur, et revocantur vel ad trisectionem anguli, vel ad inventionem duarum mediarum proportionalium inter duas datas. Neque quisquam hactenus generalem pro altiori aliqua aequatione radicis formulam dedit, quanquam ego aditum ad eam rem reperisse mihi videar, cujus et specimina habeo, sed prolixi calculi necessarium taedium devorare nondum vacavit. Vieta autem et Cartesius cum ultra progredi non facile possent, alio flexere, ille quidem ad Exegesin numerosam, hic vero ad linearem. Quod vero proprie Algebraicum esset, nihil admodum adinvenere, etsi summos fuisse Geometras et usum inprimis Algebrae in Geometria eos pro parte aperuisse non negem. Quae ideo adjeci, Vir Clarissime, ut populares tuos autoritate tua excitem ad colendam porro scientiam, quam majores eorum tantis incrementis auxerunt. Vale.

V.

DISSERTATIO EXOTERICA DE STATU PRAESENTI ET INCREMENTIS NOVISSIMIS DEQUE USU GEOMETRIAE.*)

Quae cum saepe mihi cum variorum studiorum hominibus communicatio est, audire subinde fecit querelas de vanitate Geometriae, quibus illa frustra opponat demonstrationes suas, quando

---

*) Leibniz hat später darüber geschrieben: De usu Geometriae Statu praesenti ac novissimis ejus incrementis.

non de veritate, sed usu quaeritur. Scilicet non inepte jactatur, laborare nos intemperantia studiorum, unde nihil redundet in vitam; utilia pleraque dudum inventa esse, aut si qua supersint, non esse speranda a Geometria. Pro Scholasticorum nugis (sic enim illi vocant, nescio an jure) nunc passim explosis alias introduci nugas, magis speciosas, sed et magis difficiles. Parum accessurum generi humano, si duae proportione mediae inveniantur inter duas datas, nisi forte redeunte oraculo Delphico pestem aliquando accurata cubi duplicatione depelli regionibus posse credamus. Illam vero toties imprudenter jactatam, toties vane promissam circuli Quadraturam, quid tandem producturam putemus, an forte aurum philosophicum sive Lapidem illum mirificum quatuor Elementorum velut lateribus in unius circuli circumferentiam coeuntibus indissolubiliter compaginatum, quemadmodum disserebat Michael Mayerus Chymista, Rosae-Cruciorum assecla, peculiari tractatu de circulo quadrato. Sunt qui vix risum contineent si de parabolis aut hyperbolis loquare; quid facerent si scirent, geometras ad quartas dimensiones et sursolida ascendere, quae adeo nusquam sunt, ut nec intelligi possint. Campum aliquem metiri, aut horologium solare describere, aut castelli formam delineare, in eo omnem Geometriae laudem sitam putant. Algebrae vero sunt qui nec nomen ferre possint, quemadmodum de se ait Fortinus de la Hoguette in testamento. Scilicet crucem ingeniis figi, et novas excogitari scientias, quasi non satis veteres praebeant, quod agamus, aut quasi vita longa sit, ars brevis. Et memini egregios quosdam viros mirari Cartesium de se fassum, quam male ut multis videri possit tempus collocaverit, sex septimanis integris in una Pappi quaestione consumtis. Alii quando Geometras ad naturae opera explicanda accedere vident, et de apum cellis aut sexangula nivis forma, aut aquae salientis limen ratiocinari, Aristophanis jocos renovant, qui Socratem introducit pulicum saltus curiose metientem. De mechanicis autem ita sibi aliisque persuadent, parum profici Geometrarum subtilitatibus, quibus materia reluctetur: inutilem eorum diligentiam fuisse, qui Cartesii autoritate aut rationibus persuasi, hyperbolas polire aggressi sunt, et inventa pulcherrima casui potius aut superficiariis ratiocinationibus quam Mathematicorum profunditati deberi testimonio esse posse tubi optici concinnatorem primum hominem literarum expertem. Denique Cartesium ipsum in flexu aetatis, versis ad physicam studiis, Geometriae solenniter renuntiasse. Haec et his fortiora dicuntur passim a viris etiam doctis et prudentibus, dum vero inprimis clam causas irarum habent, ut Scaliger in Clavium et Vietam, nec abnuo subesse aliquid veri, et saepe plus promittere geometras, quam praestare possit Geometria, et magna theorematum farragine memoriam obrui et acriore figurarum contemplatione animi vigorem labefactari, qui rebus agendis servari debet; quare operae pretium erit paucis exponere quantum ab accuratis rerum aestimationibus ....*) quis sit verus ejus in vita usus, et quousque ab homine indulgendum videatur scientiae pellaci.

Geometrae nomen, ut hinc ordiar, semper latius apud eruditos, quam apud vulgus patuisse. Geometria enim plerisque videtur scientia figurarum tantum, de Lineis, de Triangulis, de Circulis, de Solidis, de Cylindro, Cono, Sphaera. Docti vero ita judicant, unam eandemque esse scientiam illam quae per omne rerum genus diffusa accuratas et in longum protractas ratiocinationes exercet. Quemadmodum enim Oceanus idem est, qui prout varia litora alluit, nunc Atlanticus, nunc Aethiopicus, nunc Indicus appellatur, ita eadem sciendi ars omni argumento apta variorum theorematum velut sinus facit. Unde constat Veteres cum Apollonium geometrae nomine velut praecipuo honestassent, omnibus doctrinae solidioris laudibus a se cumulatum credidisse: et hodieque si quem hoc nomine homines in his studiis versati appellent, ab ingenio illo mathematico laudare quod per longinqua et difficilia non tentandi arte aut divinandi felicitate, sed quodam animi vigore sibi viam facit; itaque et Aristotelis Analytica geometrice scripta dicere ausim, quae in demonstrationes redigere non difficile, et si quis res Metaphysicas pari rigore tractaverit, ei Geometrae laudem non abnuerim, etsi nec aequationes unquam nec figuras cogitarit. Diophantum quoque fateor et Fermatium in mediis numeris Geometras egisse, et Archimedem ac nostro tempore Galilaeum non minora in Mechanicis quam in Tetragonisticis aut Centrobarycis Geometriae specimina dedisse, Cartesium autem magno ingenio id egisse, ut physica ipsa quantum licet Geometrica esset. Nec dubitem de eo quod justum aut utile est, de numero habitantium, de pretio rerum, de re mercatoria aliisque multis dici posse quae Geometriam sapiant,

---

*) Schadhafte Stelle des Manuscripts.

certitudine pariter dogmatum et eruendi difficultate. Geometriam ergo tueri idem est ac ratiocinandi severitatem defendere, quae longo mentis itinere characterum aut figurarum auxilio incorrupta recurrat. Unde sunt aliqui qui se geometras esse ignorant ipsi, cum severe tamen et profunde in eo quod intelligunt argumento ratiocinentur.

Ego qui me non ante autores capere arbitror, quam origines intelligam fontesque unde egregia cujusque inventa manarint, duo eorum qui inventores habentur summa genera notavi, aliisque ingenia geometrica, aliis combinatoria esse. Qui geometrico sunt ingenio, eorum inventa difficilia sunt et profunda, et multa meditatione expressa. Qualia nec facile enuntiantur nec statim a quovis auditore aut spectatore intelliguntur. Exemplum elegans habemus in machina textrice, nunc passim frequentata, Scoti cujusdam invento, quod novennio integro occupavit autorem suum, aut in arithmetico instrumento, quod omnem animi laborem in rotas transfert.

Combinatoria ingenia plus habent felicitatis, minus laboris; simplicia sunt inventa eorum et paucis verbis tota dicuntur, ut plerumque animadversione potius quam meditatione indigeant ac levi magis animi ictu, quam subtili indagatione parentur. Petuntur enim fere ex rebus e medio positis, certa quadam relatione connexis, aut experimentis quae hactenus pro sterilibus habita, felici conjunctione subito usum inveniunt. Acus magneticae vim directricem, credibile est, diu incultam jacuisse opinione inutilitatis, donec genius aliquis non vulgaris vidit, quanti esset notam semper habere mundi plagam. Quid facilius quam vaporem e rebus calore sublatum in corpus densare, exempla balneorum ante oculos erant, nemini tamen Graecorum Romanorumque in mentem venit spiritum e vino elicere, quamvis testatus esset Galenus, quantum illi debiturus esset qui separationem partium vini docere posset, qualis lactis jam tum habebatur. Quod nuper prodiit artificium motus aequabilis pure mechanicum, felicis tantum combinationis opus est, ut mirari queas nulli in mentem venisse, fieri posse ut dum elateria per vices agunt, prima in eundem semper statum restituantur, antequam ad ipsa revertatur ordo, quo fit ut post breves admodum periodos ad eandem plane formam machina redeat, adeoque idem quoque redeat effectus periodique fiant aequidiuturnae. Unde intelligi potest, aliquando homines longinqua perspicere, quae ante pedes sunt non videre. Saepe tamen non combinatione simplici, sed experimento opus est, ut aliquid egregium eruatur, quo casu manifestum est, fortunam venire in partem juris, tantum enim quisque invenisse videbitur, quantum praejudicare potuit ante tentamentum: et hujus generis inventa fuere quorundam Alchymistarum qui saepe frivolis admodum rationibus ducuntur et destituti non ideo absistunt, quod si aliquando in nonnullis quae ipsi non quaerebant eventus respondeat conjecturae, tum illi vero mirifice triumphant et prudentiam venditant suam, cum misericordiam potius naturae parentis laudare deberent, quae tam assiduos sui cultores noluit esse perpetuo infelices.

Sed illi prae caeteris apti ad indagationem veritatis, pariter et inventa vitae utilia in lucem producenda, qui combinatorio ingenio studium acre Geometriae et profundae meditationis aut etiam si materia postulet experiundi patientiam junxere. Nam si paucae quaedam ac faciles paratu combinationes tot praeclara nobis inventa dedere, dubitari non debet, majora erutum iri, cum interiores rerum latebrae excutientur. Medicam certe artem nemo speret nisi ab ingenio utrumque complexo valde augeri posse: subtilior est causarum implicatio, quam ut levi inspectu detegi possit, et nisi in natura rerum, geometrarum exemplo theoremata condantur, et morosa diligentia consequentiae in longinquum producantur, semper in cortice haerebimus. Unitemur summos viros, Pythagoram, Democritum, Hippocratem, Aristotelem, Archimedem, Galilaeum, Cartesium, Pascalium, quibus habet quos addat tempus praesens. Geometriam exemplo Conditoris in ipsa natura exerceamus, consideremus quantum illa Copernico profuerit et Keplero, quantum a Scheinero et Cartesio incrementi acceperit optica, quid mechanici Stevino debeant et Galilaeo, quam ipsis medicis Sanctorius praeluxerit. Cochleae cylindriceae sive ut vulgo vocant fine carentis utique fortissimae potentiarum usus uniformitate ejus nititur, qua fit, ut sibi per omnia congruat; alioqui enim nec moveri posset cochlea, nisi linea ejus in suis ipsa vestigiis labi posset, quod praeter ipsam soli linearum rectae ac circulari datum est. Hoc vero consideratio utique geometrica erat. Pulcherrimum antliae genus cochleiforme, in qua corpora ipso in speciem descensu attolluntur, ad Archimedem fama publica refert, quanquam memorabile sit quod de Mediolanensi quodam cive refert Cardanus, qui prae nimio gaudio in delirium incidit, quod primum a se inventam putaret. Speculorum urentium miracula etsi fama inferiora, magna tamen nec nisi geometriae operatricis effecta sunt. Graphicen qui imaginationi potius felici quam geometriae tribuit, videat quantum inter nostratum et Chinensium delineationes intersit. Chinensibus natura favens colores admirandos suppeditat, quorum gratiam facile nostri arte vincunt: arte, inquam, filia geometriae. Graeci non ante artes coluere, quam geometriam, et Arabes tum maxime in his studiis excelluere, cum potentia Asiam atque Africam complexi sine aemulis floruere; et non ante barbaries desiit in occidente, quam redux ab exilio Geometria, etiam architecturam et pictoriam et statuariam adduxit. Astronomia autem quid nisi sphaericae doctrinae translatio est ad mundum, et planetariae hypotheses geometrica ratiocinia sunt, quo motus astrorum calculo subjicerentur; quod vero trigonometria mirabilius, cujus........ nemo indoctus, utcunque summo ingenio praeditus intelligat. Quis enim credat, campum mensurari posse ex duabus stationibus dati intervalli, aut quis Indis persuasisset, Columbum ex Ephemeridibus potius quam coelesti instinctu eclipsin praedixisse? Certum est, solam fuisse geometriam astronomiae habitu indutam, quae Christianis aditum aperuit in Sinas, et si Martinio credimus, nihil magis affecerat ingeniosos quosdam Mandarinos, quam inviolabilis certitudo geometricorum quorundam theorematum, quae apud Societatis Jesu patres didicerant. Quid navigatoriam scientiam et velificatoriam artem memorem, perpetuum exercitium geometriae cujusdam nonscriptae? Limenereutica longius fortasse provecta esset, quam quidam sperant, si praesidiis geometriae quantum licet uteremur. Hoc enim unius geometriae officium est, quae ex datis duci possint docere: cum ostendat quaenam problemata determinata sint, et ex ipsis indeterminatis aliquid eliciat certum, locum scilicet cujus omnia puncta satisfaciant, quo fit, ut datis binis solutionibus aut aliquando pluribus imperfectis inter se diversis, una perfecta inveniatur. Quanti hoc sit, sciunt talium intelligentes. Mihi certe semper ita visum est, notum jam et Veteribus artificium de Locis inter humanae subtilitatis specimina censeri debere. Quid pulchrius aut utilius hydrostatica Archimedis, quam Torricellius et Pascalius geometrae tantis accessionibus auxere. Circa pneumaticen autem egregius Gerickius nostras antliae aëreae autor primus, et qui fertilis ingenii felicitate nulli facile cesserit, celeberrimus Boylius, saepe ratiocinia vere geometrica et irrefragabiles demonstrationes dedere. Quod ipsi nobis supra objeceramus, telescopium hominis plebeji mathematica indocti opus esse, non aeque certum est ac quidam putant. Certe Metius ille quem Cartesius memorat, in re optica speculisque ac lentibus conficiendis erat diu versatus, ut credibile sit, radiorum naturam et opticas demonstrationes intellexisse, mathematicis enim non inepti sunt etiam aliarum literarum imperiti. Sed aliud habeo quod de hoc negotio dicam, vel ideo memorabile quod a paucis video adverti. Keplerus in Epistola ad Galilaeum, qua Nuntio Sidereo respondet, haec narrat, Rudolphum Imperatorem, qui ut constat his studiis mire delectabatur, jam dudum antequam de telescopio quicquam auditum esset, ostendisse sibi descriptionem machinae duobus vitris instructae, inter Portae collectanea repertam, obscuriuscule traditam; hanc se obiter considerasse, ait Keplerus, et familiari eruditis fastidio, quoties aliena et suspecta inventa offeruntur, statim rejecisse: nunc vero poenas dare temeritatis et judicii praecipitati. Quae cum ita sint, credibile est, telescopii ideam esse foetum optici rationalis, sed cujus conatibus, ut solet, fortuna non respondit: unde cum aliis forte communicasset laborem, ex quo nihil amplius speraret, quid vetat consilii rationem aeque in primi executoris ac Portae manus venisse. Certe Porta jam a decimo octavo aetatis anno se devoverat conquisitioni arcanorum, omni librorum genere lustrato, itineribusque susceptis. Porro microscopium, quantum intelligere potui, inventum est summi artificis Cornelii Drebelii Alcmarensis. Satis ergo vindicasse videbor industriam geometrarum, ubi unum chronometron adjecero. Mirum est, omnium hominum oculos ad Galilaeum usque adeo fuisse ἀγεωμετρήτους, ut de isochronismo oscillationum penduli, quo nihil frequentius oculis observatur, nemo somniaret. Galilaeum autem non conjectura quadam levi inductum, sed rationali via progressum mirabile usque adeo arcanum produxisse, patet ex illa quam tenuit inquirendi ratione. Scilicet a motu uniformi et uniformiter accelerato orsus arcana descensus gravium aperuit primus; quae cum plano inclinato applicuisset, ingeniosissime pervenit ad praeclarum illud theorema, quod chordis quotcunque intra circulum ductis ad idem punctum in imo concurrentibus, descensus a circumferentia circuli ad punctum imum per chordam quamlibet minorem majoremve sit isochronus. Unde sequebatur, cum oscillationes pendulorum exiguae essent, circuli autem quos describerent magni, descensum in chorda a descensu in ipsa circumferentia sensibiliter non differre. Huc usque rem produxit Galilaeus, duoque posteritati absolvenda reliquit, applicationem penduli ad horologium, quo numerandi abesset labor, et inventionem lineae curvae, cujus evolutione alia rursus curva describeretur a pendulo, quae chordarum circuli proprietatem haberet, id enim arcus circuli praestare non poterat, unde repetitae diu vibrationes pendulorum haud dubie erroneae fiebant. Porro alterum praestare combinatorii, alterum geometrici ingenii erat, utrumque immortali opere Hugenius pulcherrime absolvit.

Satis experientia praeteritorum confirmasse videor usum in vita geometriae profundioris; nunc paucis addam superesse illi etiamnum, quod agere possit, ne quis sibi persuadeat trigonometriam aut sinuum canonem ad egregia praestanda sufficere. Sane non est dubium, elateres et sonos et ipsam musicen geometricis legibus subjici, et artem projiciendi perfici posse, et tempus venturum quo ignis ipse jugum subibit, quod caetera elementa jam patiuntur Multa restant dicenda de motu liquidorum, quae geometram expectant, sed et in solidis detrimenta, quae machinae a frictione patiuntur, aliaque quae vulgo experientiae committuntur, aestimationem ferunt, quae ubi absoluta erunt, perfectum de machinarum vi judicium in nostra potestate erit: nunc enim illud saltem possumus, ne nimium promittamus, tunc licebit machinas calculo subjicere ad instar numerorum, ubi primum experimenta quaedam fundamentalia diligenter capta erunt. Porro observavi, problemata pleraque mechanicae subtilioris, ubi ad geometriam puram reducta sunt resolvi in quadraturas et certorum quorundam spatiorum curvilineorum dimensionem. Unde necessitas quaedam nobis imposita est hanc geometriae partem imprimis perficiendi, vel ideo quod nondum in calculi potestate est, nec ex Cartesii inventis pendet.

Duplex est geometriae utilitas, nam una ad augendas vitae commoditates pertinet, altera in ipsa mentis perfectione consistit. De priore tantum diximus hactenus: quam quivis capit, posteriorem non nisi intelligentes aestimabunt. Illam geometrae omnibus communicant, hanc servant sibi, ut scilicet sit aliquod illis pretium operae, etiamsi nemo gratiam haberet. Nemo dubitare potest, potissimum unicuique esse mentem ejus; qui vero profundius ista contemplantur, etiam illud ajunt quod nos ipsos esse dicimus, id mentem esse. Perfectio ergo nostra potissima eadem est cum perfectione mentis, praesertim cum mens perpetua sit, corpus visibile dissolvatur. Perfectio mentis vera et solida consistit in inveniendi atque judicandi facultate maxime aucta. Utramque puram et in se reductam pulcherrimis speciminibus perficit geometria. Nam et si quid inveniendum sit, ostendit quantum sit in potestate, quave sit eundum via, et ubi de demonstratione ac judicio agitur, severissimae ratiocinationis exempla praebet. Geometria una omnium formas illas medias et in caduca licet materia aeternas ac per se subsistentes contemplatur, quarum ideae menti nostrae velut insitae perire non possunt, etsi omnis scientia historiarum et experimentorum extingueretur. Potest enim in eum mens nostra venire statum, ut experimenta sumere non possit, aut eorum nullam habeat rationem quae in hac vita sumsit, sed ut extensionis et motus aliarumque formarum separatarum ideas exuat, fieri nullo potest modo. Itaque inventum de circulo ad omnem mentis statum pertinet; contra experimenta naturae corpori ac sensibus illigatam supponunt animam, certumque est, neque colores neque sonos nisi cum relatione ad sentientis organa intelligi posse, et aliis alia apparere. Ex quibus facile intelligi potest, ad perfectionem mentis perpetuam non conferre quae memoriam nostram locupletant, sed quae cogitandi facultatem cogitant. Quod mirifice facit geometria. Ea vero ratio est, ni fallor, cur Veteres tanti putaverint sejunctas a materia formas contemplari, et cur prope indignum facinus duxerint, res divinas in mortales usus prostitui. Nam Pythagoras et Socrates persuasi erant de immortalitate animi, de insitis ideis incorruptibilibus, unde Platonem Archytae pene indignatum ajunt, quod geometriam in machinis exerceret, et Archimedem referunt non nisi aegre Hieronis precibus ad ea quae in communi usu versantur descendisse. Ego qui motus ideam inter formas illas aeternas censeo (nam et circa motum non minus quam circa figuram demonstrationes habemus) machinae elegantis inventionem inter pulchra theoremata numerari posse puto, nec video cur minus memorabilis sit generatio parabolae per motum projectorum, quam per coni planique sectionem: et naturae indagationem (quae in perpetua geometriae applicatione consistit) ad perpetuam quoque mentis perfectionem pertinere arbitror, nam quoties divina illa artificia penitus intelligimus, quibus admirandos quosdam effectus praestitit autor rerum, non tantum admiratione ejus percellimur et amore inflammamur quod ad voluntatem regendam pertinet, sed et artem inveniendi discimus a summo praeceptore, intellectusque nostri facultatem augemus. Illud enim pro certo habendum est, naturam rerum simplicissimas problematum constructiones semper elegisse. Physica ergo, quatenus perficere mentem potest, desinit in geometriam, nec ante ullum phaenomenon penitus in corporibus intelligimus, quam ex primis figurae motusque ideis derivavimus. Haec non tantum a maximis viris, Galilaeo et Cartesio, ne Democritum et Aristotelem memorem, inculcata sunt, sed et agnita illustri viro Francisco Bacono, cui illud tamen concedo, physicam experimentis solis comprehensam, utcunque mentem non afficiat, tamen et sensus recreare et plurimum ad vitae commoditates posse, et quemadmodum contemplationes ad amorem Dei referuntur, ita experimenta utilia caritatis illius quam homo homini debet instrumenta esse. Certe medicinam plane rationalem reddere, non nostri certe, forte nullius seculi felicitas erit; ego semper semi-empiricam fore credo, in tanta causarum complicatione, quas etsi intelligeremus fortasse, non possemus calculo subjicere ob nimiam prolixitatem, tametsi illud pro certo habeam, ab hominibus sagacibus et severe atque ordine et ut ita dicam geometrice ratiocinantibus, et experimenta non casu sed consilio sumentibus, plus effici posse uno decennio, quam multorum decursu seculorum actum sit.

Ut hanc ergo concludam tractationis nostrae partem, magni usus Geometriam esse arbitror, non tantum ob ingentia beneficia, quae inde accepit aut expectat humana vita, sed et quod animum ad altiora et divina et a materia sejuncta elevat et accuratis rationibus assuefacit. Credo esse homines qui nunquam quicquam in vita certo et accurate sibi persuasere praeter sensibilia, defectu geometriae, quod vel ideo periculosum, quoniam unicuique et autor rerum Deus, et natura animae et officia virtutum, non impulsu quodam fortuito aut consuetudine, sed firmis rationibus explorata esse deberent, quales in rerum natura esse, illi qui geometriam nunquam salutavere, ne capiunt quidem. Etiam qui mathematicas artes vulgari modo discunt, usus tantum causa, illi fere pulcherrima geometrarum theoremata casu et experimentis reperta arbitrantur, sed et magnae certe eruditionis vir Josephus Scaliger sibi persuasit ab Archimede quadraturam parabolae tentando repertam. Qui sic animati sunt, geometriam non alia probatione indigere putant, quam perpetuo successu, demonstrationibus vero nec si exhibeas afficiuntur. Qui mentis habitus metaphysicis sive divinis contemplationibus ineptus est, quibus tamen, ex Veterum quoque sententia, vera et duratura continetur perfectio animae, ad quam paulatim elevat geometria. Nam filum labyrintho de compositione continui deque maximo et minimo ac indesignabili atque infinito non nisi geometria praebere potest, ad metaphysicam vero solidam nemo veniet, nisi qui illac transiverit. Cum ergo ratio dictet, ut quisque naturae suae perfectionem curet, quantum in ejus potestate est, perfectio autem nostra sit inprimis perfectio ejus quod in nobis potissimum est, id est mentis, mentis autem vim ac judicandi atque inveniendi potestatem egregie augeat geometria, consequens est homini cui vitae ratio meditationem permittit, geometriae interioris rationem habendam; at in ea non magis quam in dialectica quiescendum esse, cum ipsa media scientiarum hinc ad divina et sublimia aditum faciat, illinc ad humanas artes et compendia vitae jucundo admodum suavique descensu mentem demittat.

VI.

MEDITATIO NOVA DE NATURA ANGULI CONTACTUS ET OSCULI, HORUMQUE USU IN PRACTICA MATHESI AD FIGURAS FACILIORES SUCCEDANEAS DIFFICILIORIBUS SUBSTITUENDAS.

In lineae cujusque partibus infinite exiguis considerari potest non tantum directio sive declivitas aut inclinatio, ut hactenus factum est, sed et mutatio directionis sive flexura, et quemadmodum linearum directionem mensi sunt Geometrae simplicissima linea in eodem puncto eandem directionem habente, hoc est recta tangente, ita ego flexuram lineae metior simplicissima linea in eodem puncto non tantum directionem eandem sed et eandem flexuram habente, hoc est circulo curvam propositam non tantum tangente, sed et quod amplius est osculante, quod mox explicabo. Est autem ut recta linea aptissima ad determinandam directionem, quia eadem ubique ejus directio est, ita circulus aptissimus ad determinandam flexuram, quia ubique eadem unius circuli est flexura. Circulus autem ille lineam propositam ejusdem plani in puncto proposito osculari a me dicitur, qui minimum cum ea facit angulum contactus. Ex infinitis enim circulis lineam, ubi ad easdem partes cava est, tangentibus in proposito puncto semper determinari potest unus, qui maxime ibi lineae assimilatur et cum ea longissime quasi repit, hoc est, ut Geometrice loquar, ita ad eam accedit, ut inter ipsum et curvam propositam nullus alius arcus circuli curvae in puncto proposito occurrens describi possit. Et hunc minimum angulum contactus circuli ad lineam propositam voco angulum osculi, uti miminus angulus rectae ad lineam vocatur angulus contactus. Ut enim inter rectam et lineam, angulum contactus facientes, nulla cadere potest recta, ita inter circulum et lineam, angulum osculi facientes, nullus cadere potest arcus circuli. Ut autem habeatur et modus inveniendi circulum osculantem, sciendum est, quemadmodum tangentes inveniuntur per aequationes quae habent duas radices aequales seu duos occursus coincidentes, et flexus contrarii per tres radices aequales, ita circuli vel aliae quaevis lineae datam osculantes inveniuntur per quatuor radices aequales seu per duos contactus in unum coincidentes. Et quemadmodum duae lineae, quae eandem habent rectam tangentem, se tangunt, ita eae, quas idem osculatur circulus, se osculantur. Itaque ut linea quaevis eundem ad lineam sibi occurrentem censetur facere angulum communem seu rectilineum, quem faciunt in puncto occursus earum tangentes rectae, quia differentia consistit in angulo contactus qui respectu anguli rectilinei est infinite exiguus, imo nullus; ita quando duae rectae tangentes duarum linearum curvarum sibi occurrentium coincidunt, seu quando duae lineae se tangunt, tunc linea ad lineam occurrentem eundum censetur facere angulum contactus, quem faciunt in puncto occursus earum osculantes circuli, quia differentia consistit in angulo osculi qui respectu anguli contactus duorum circulorum est infinite parvus, imo nullus. Ex quo intelligi potest, angulum communem seu duarum rectarum, angulum contactus duorum circulorum, et angulum osculi (primi gradus) quodammodo se habere, ut corpus, superficiem et lineam. Non tantum enim linea est minor quavis superficie, sed et ne quidem pars est superficiei, sed tantummodo minimum quoddam sive extremum. Quodsi tres contactus coincidant, aut quatuor, aut plures (radicibus sex aut octo aut pluribus existentibus), oriuntur osculationes secundi tertiive gradus, aut adhuc altiores, in tantum perfectiores osculo primi gradus, in quantum prima osculatio perfectiorem contactum continet quam contactus communis. Porro circulus rectam tangere potest, osculari non potest; si circulus circulum osculetur, non erunt diversi, sed coincident. De caetero omnem lineam ejusdem plani osculari poterit circulus, et in genere, ut sciri possit, quonam contactus vel osculi gradu linea lineae conjungi possit, considerandum est, in quot punctis possit eam secare. Haec porro insignem habent usum in praxi. Ut enim ex consideratione, quod idem sit angulus, eadem inclinatio, vel directio linearum, quae est rectarum tangentium, insignes consequentiae in mechanicis, catoptricis et dioptricis ductae sunt; nam si corpus motu composito feratur, directio ejus est in recta tangente lineae, quam describit, et si sibi relinquatur, continuat motum in tangente, et radius incidens eundem angulum facit ad superficiem excipientem, quem faceret ad planum eam tangens: ita ex consideratione quoque linearum osculantium insignes praxes duci possunt. Si enim linea aut figura egregiam quandam atque utilem habens proprietatem inventa sit, sed quam sive torno sive alia ratione in materiam introducere sit difficile, licebit pro arcu ejus (scilicet non nimis magno, tamen ad praxin suffecturo) substituere arcum quasi coincidentem lineae alterius descriptu facilioris, eam quam perfectissime licet tangentis sive osculantis, maxime autem circuli, qui omnium descriptu est facillimus. Et hinc jam oritur, quod in praxi catoptrica et dioptrica circulus est succedaneum parabolae, hyperbolae aut ellipseos, suosque ad earum imitationem habet quasi focos. Nam circulus cujus diameter aequatur parametro sectionis conicae, et cujus centrum in axe intra curvam sumitur, circumferentia autem per verticem transit, sectionem conicam in vertice osculatur, adeoque assumpto arcu quantum satis est parvo, ab ea non differt ad sensum. Quae causa est, cur focus speculi concavi circularis absit a speculo quarta parte diametri, quia focus parabolae a vertice abest quarta parte parametri, et focus parabolae atque circuli osculantis coincidunt. Eadem in omni alio linearum et utilium proprietatum genere pro re nata locum habent. Quae quantum conferant ad subtilitates Geometricas in usum vitae transferendas, nemo talium intelligens non videt. Nobis vero aditum aperuisse, ne forte periret haec meditatio, nunc quidem satis fuit. Nec injucundum erit considerare, quomodo ita tandem controversia Geometrarum de angulo contactus, quae plerisque inanis visa est, in veritates desierit solidas et profuturas..

VII.

DE LINEIS OPTICIS, ET ALIA.

Versanti mihi dudum in longinquo satis itinere, quod Serenissimi Principis mei jussu suscepi, et passim monumenta in Archiviis et Bibliothecis excutienti, oblati sunt ab amico quodam Actorum Lipsiensium menses, unde jamdiu novorum librorum expers discerem, quid in Republica Literaria ageretur. Inspicienti igitur Junium anni 1688 occurrit relatio de Principiis Naturae Mathematicis Viri Clarissimi Isaaci Newtoni, quam licet a praesentibus meis cogitationibus longe remotam avide et magna cum delectatione legi. Est enim vir ille ex paucorum illorum numero, qui scientiarum pomoeria protulere, quod vel solae illae series docere possunt, quas Nicolaus Mercator Holsatus per divisionem erat assecutus, sed Newtonus longe ampliore invento extractionibus radicum purarum pariter et affectarum accommodavit. A me, ut obiter hic dicam, methodo serierum promovendae, praeter transformationem irrationalium linearum in rationales symmetras (voco autem rationales, quarum ordinatae semper ex abscissis haberi possunt in numeris rationalibus) excogitata est ratio pro curvis transcendenter datis, ubi ne extractio quidem locum habet. Assumo enim seriem arbitrariam, eamque ex legibus problematis tractando, obtineo ejus coefficientes. Porro a praesenti opere Newtoniano praeclara quaeque expecto, et ex relatione Actorum video, cum multa prorsus nova magni sane momenti, tum quaedam ibi tradi, a me nonnihil tractata; nam praeter motuum coelestium causas, etiam lineas catoptricas vel dioptricas et resistentiam medii explicare aggressus est. Lineas illas Opticas Cartesius habuit, sed celavit, nec suppleverunt commentatores; neque enim res communi analysi subest. Eas postea ab Hugenio (sed qui nondum edidit) et nunc a Newtono inventas intelligo. Etiam mihi, sed per diversam, ut arbitror, viam innotuere. Et habebam quidem methodos generales dudum, sed proprias perelegantes eruendi occasionem dedit egregium inventum Dn. Tschirnhausii nostri in Actis publicatum, qui integras lineas tanquam focos considerat. Quid inde consecutus sum, exemplo explicabo, unde reliqua intelligantur. Sit punctum A (fig. 84) et linea data BB, reflectens radios AB, quaeritur linea CC, radios ABC iterum reflectens in unum commune punctum D. Solutio primae aggressionis haec est. Data linea BB, ejus respectu constat dari puncti A confocum linearem seu lineam EE. Rursus datis duobus confocis, uno lineari EE, altero puncto D, constat inveniri posse aliquam lineam CC, cujus sunt foci, quae erit quaesita. Meliores autem constructiones prodeunt, nam $A_1B + {}_1B_1E +$ arc. ${}_1E_2E = A_2B + {}_2B_2E$ et $D_2C + {}_2C_2E +$ arc. ${}_2E_1E = D_1C + {}_1C_1E$, unde tota $AB + BC + CD$ semper est aequalis uni constanti rectae. Si filum circumligatum sit lineae EE simulque alligatum puncto D, tunc evolutione curvae EE stylus filum intendens describet lineam CC. Sin filum idem altero extremo alligatum sit puncto A, stylus filum intendens describet lineam BB. Sed dissimulata curva EE, prodit constructio simplicissima talis: a data recta constante (aequal. $AB+BC+CD$) detrahatur quaevis data AB, residuae sumatur aequalis BF ita ducta, ut ad PB curvae BB vel ejus tangenti perpendicularem in B faciat angulum FBP ipsi ABP aequalem. Jungatur DF, et ex puncto ipsius DF medio G normaliter educta GC occurret ipsi BF in quaesito puncto C, et quidem patet, GC esse lineae CC tangentem. Rotetur porro figura haec circa axem AD, et quae in lineis diximus, etiam in superficiebus genitis locum habebunt. Eadem et dioptricis applicari possunt. Lineam EE voco Acampton, quae radios ABE sine reflexione et refractione accipit. Dantur et Aclastae, quae eosdem non refringunt et tamen reflectunt, et sunt illae, quae ipsius EE evolutione simplici describuntur, quod primus licet alio fine consideravit Hugenius. Talis est FF, posita CF (in producta BC) = CD. Si pro A aut D punctis, aut alterutro, foci lineares darentur, aut punctum infinite abesset, ubi radii fierent paralleli, eadem suo modo locum haberent.

Quae de resistentia medii peculiari scheda complexus sum, jam pro magna parte Parisiis duodecim abhinc annis eram assecutus, et illustri Academiae Regiae nonnulla ex illis communicavi. Denique cum mihi quoque meditationes inciderint de causa physica motuum coelestium, operae pretium duxi peculiari schediasmate nonnullas ex illis in publicum proferre. Decreveram quidem premere, donec mihi liceret leges Geometricas diligentius conferre cum phaenomenis novissimis Astronomorum; sed (praeterquam quod alterius plane generis occupationibus distinguor, quae vix quicquam tale sperare, patiuntur) excitavit me Newtonianum opus, ut haec qualiacunque extare paterer, quo magis collatione rationum excussae emicent scintillae veritatis, et ingeniosissimi viri acumine adjuvemur.

VIII.

GENERALIA DE NATURA LINEARUM, ANGULOQUE CONTACTUS ET OSCULI, PROVOLUTIONIBUS, ALIISQUE COGNATIS, ET EORUM USIBUS NONNULLIS.

Cum nihil mihi sit gratius quam qualiacunque tentamina mea Viris egregiis digna videri quae perficiantur, perplacuere quae clarissimus Basileensium Professor Bernoullius de linearum osculis nupero Martio in Actis Erud. publicavit*). Cumque animadverterem cogitationes quidem nostras in summa ipsi probari, nonnulla tamen aliter constituenda judicari, quod adeo non aegre fero, ut quoties doceor, in lucro ponam; meum esse putavi, rem denuo examinare paratissimo ad retractandum animo, si monitis contrariis doctissimi viri locum dari posse deprehendissem.

Statueram ego, *contactum* continere duas intersectiones coincidentes, *osculum* continere plures contactus coincidentes, et osculum quidem primi gradus esse, quando coincidunt contactus duo seu intersectiones quatuor, osculum secundi gradus, quando coincidunt intersectiones sex aut contactus tres etc., et circulum osculantem sive maximum aut minimum tangentium intra vel extra in proposito puncto circulorum (qui scilicet omnium tangentium proxime ad curvam accedit) esse curvedinis mensuram

---

*) Leibniz bezieht sich hier auf die Abhandlung von Jac. Bernoulli: Additamentum ad solutionem curvae causticae Fratris Joannis Bernoulli, una cum meditatione de Natura Evolutarum et variis osculationum generibus.

et definire quantitatem anguli contactus, ita ut angulus contactus duarum linearum se tangentium sit idem qui circulorum ibi eas osculantium. Et in lineis, quas circulus in pluribus punctis secare potest, altiora etiam oscula posse oriri, cum omnes intersectiones in unum coalescunt, atque ita aliquando in casu maximae vel minimae curvedinis seu transitus a curvedine crescente ad decrescentem vel contra coincidere oscula duo seu contactus quatuor, intersectiones octo. Observavi etiam postea centrum circuli curvam propositam osculantis semper cadere in lineam, quae evolutione fili propositam generare potest, et unicam (suae seriei) esse perpendicularem illam, quae ex centro osculantis circuli ad lineam duci possit, sive unicam esse unicam, hoc est unicam esse maximam vel minimam ex eodem puncto ad curvam educibilem, cum ex aliis punctis intra curvam plures et duae saltem perpendiculares, id est in sua serie maximae vel minimae seu duae suae seriei unicae ad curvam duci possint. Et cum constet aliam atque aliam lineam evolutione describi, prout filum producitur longius, animadverteram olim (ut hoc obiter dicam) eas quas Dn. Bernoullius nuper vocavit condescriptas esse parallelas inter se, ita ut una sit ab alia ubique aequidistans (seu aequalis ubique minimi intervalli, quod est recta minima ab una ad aliam ducenda) vel ut recta perpendicularis ad unam sit alteri quoque perpendicularis, quae dudum mihi fuit definitio parallelismi in genere sumti. Hanc nostram curvedinis mensuram, usumque Evolutarum, etiam primo Evolutionum Inventori celeberrimo Hugenio placuisse, ex solutione catenariae lineae animadverti. Porro cum tres intersectiones circuli et curvae coincidant, notavi flexum oriri contrarium, id est contactum sumtum cum intersectione, quemadmodum et coincidentes intersectiones quinque dant contactum cum flexu contrario coalescentem seu intersectionem cum osculo primi gradus, et intersectiones septem coincidentes dant flexum contrarium cum simplici osculo seu osculum secundi gradus cum intersectione coalescens. Unde intelligitur, quotcunque intersectiones coincidentes in contactus, oscula aut flexus contrarios resolvi posse. Et quidem in contactu vero atque osculo recta vel circulus lineam ab utraque parte tangit extrorsum vel ab utraque parte introrsum, sed in flexu contrario unam partem tangit extrorsum, alteram introrsum, et ita compositum non tangit, sed secat.

Causam quoque cur linea evolutione generans locus sit centrorum omnium circulorum lineam propositam osculantium, ita explicare mihi videbar: Sumantur duo puncta curvae A et B, et ducantur rectae ad curvam perpendiculares in A et in B, earum intersectio communis C dabit centrum circuli, qui radio CA descriptus tanget curvam in A, radio vero CB descriptus tanget eam in B, sed si coincidant A et B sive inassignabiliter distent, hoc est ubi duae perpendiculares concurrunt, coincidunt duo contactus duoque circuli tangentes abeunt in unum, qui curvam osculabitur; sed per hunc ipsum concursum perpendicularium inassignabiliter differentium inveniuntur et lineae evolutione generantes, ut ex Hugeniano de Pendulis opere patet. Porro circulus, cujus centrum est in recta arcui ad easdem partes cavo perpendiculariter occurrente, per punctum occursus descriptus arcum non secat, sed tangit. Itaque sicubi secat, necesse est ibi punctum adesse flexus contrarii, seu non esse lineam ad easdem partes cavam. Recte autem animadvertit Dn. Bernoullius, intersectione simplici ad contactum simplicem vel ad osculum seu contactum multiplicem accedente, contactum mutari in sectionem; sed hinc manifestum est, cum circulus curvam osculatur, regulariter (id est excepto flexus contrarii puncto) coincidere quatuor intersectiones seu duos contactus, adeoque hanc ipsam esse naturam osculi primi gradus, quandoquidem id osculum definimus ordinaria osculatione circulorum, quae in quocunque curvae puncto regulariter locum habere potest, seu circulo curvedinem mensurante, qui scilicet proxime ad curvam accedit.

Et in universum dici potest, intersectionum circuli cum alia linea numerum regulariter esse parem. Itaque non video, quomodo primi gradus osculum tribus intersectionibus explicari queat, ita scilicet ut tale osculum trium radicum sit regulare, et tota curva diffusum, at osculum quatuor radicum seu quatuor coalescentium intersectionum pro secundo et singulari habeatur, nec nisi in punctis curvae determinatis contingat. Contra enim se res habet, et quatuor intersectiones seu duo contactus osculo cuique regulariter insunt, et in solo casu extremo, qui est flexus contrarii, nascens, ut ita dicam, vel moriens osculatio tribus intersectionibus contenta est. Unde nolui ex casu trium intersectionum peculiarem osculi gradum facere, cum praesertim ex contactu (cujus perfectior species osculum est) in intersectionem degeneraret. Eademque ratione et in altioribus osculatio sua natura paris est numeri radicum, nec nisi in flexus contrarii puncto in numerum imparem abit. Et sane cum circulus post contactum in puncto proposito curvam adhuc in duobus praeterea punctis secat, necesse est has intersectiones promoto circuli centro continue ad dictum contactum appropinquantes, tandem ambas simul contactui coalescere, nam cum quamlibet in eum pervenire necesse sit, ideo si alterutra sola ad contactum perveniente, circulus fiat proximus curvae seu oscularis, sequitur ambabus intersectionibus separatim pervenientibus ad coalitionem cum contactu proposito, duos dari circulos diversos lineae proximos, seu osculantes per idem ejus punctum propositum transeuntes, quod est impossibile, nisi scilicet linea ibi secet semet ipsam, quo casu duarum vice fungitur, adeoque circuli illi duo revera lineas duas osculantur, licet unius partes, de quo hic non agitur. Facile etiam hinc intelligitur, si circulus post contactum internum secare curvam rursus (utrinque) possit, tunc in casu osculi (ubi duae sectiones contactui coalescunt) circulum osculantem esse extra curvam; et contra ex contactu externo mox in casu coalescendi cum duabus reliquis sectionibus fieri osculum internum, et ita transitum circuli, a contactu sectionem adjunctam habente ad osculum, esse transitum in oppositam curvae partem.

Sed, et hoc notandum est, minimam curvedinem et maximam obtusitatem esse in puncto flexus contrarii, et recte dixit Dn. Bernoullius, circulum osculantem eo casu degenerare in rectam; radius enim est infinitus, seu centrum cadit in lineae evolutae concursum cum sua asymptoto, quoniam antequam duae proximae ad curvam perpendiculares sibi occurrentes hactenus ad plagam propositam fiant sibi occurrentes ad plagam oppositam, seu ex convergentibus divergentes, debent fieri parallelae, quo casu earum concursus infinite abesse debet. Fieri tamen et aliunde potest, ut lineae generatae curvedo sit minima seu maxima obtusitas, non quidem absolute, sed in toto aliquo arcu ad easdem partes cavo, seu in certa progressione, cum scilicet talis est natura curvae per sui evolutionem generantis, ut evolutio continuari ultra certum punctum, et filum generans ulterius extendi nequeat, uti contingit cum curva evolvenda ex duabus convexitates sibi obvertentibus ac sese tangentibus composita est. Eodem modo prodibit maxima curvedo seu minima obtusitas, ut lineae curvedo ex crescente rursus incipiat fieri decrescens, veluti si curva generanda non intra duos arcus generantes convexitate obversa se tangentes, sed extra earum angulum cadat. Neutro tamen modo generata linea per continuam fili evolutionem producitur.

Haec autem ut notarem, eo facilius adductus sum, quod linearum naturam in universum illustrant, mihique proferunt non tantum ad finiendam illam celebrem de angulo contactus controversiam, sed et a vaga logomachia ad usus solidos ac profuturos transferendam, et video nuper Dn. Eisenschmid dissertationem suam contra Dn. Lagnium defendentem ac de diametro umbrae in eclipsi Lunae loquentem ex hypothesi terrae ovalis, adhibuisse diametrum circuli qui ovalem osculatur seu cum ea angulum osculi (angulorum contactus minimum) facit atque ita quam proxime ad illam accedit, eo consilio, ut ex diversis proportionibus diametri umbrae ad diametrum lunae definiatur vera figura globi terrae. Quod quantum praestare possit, observationibus committo.

Cum haec scripsissem, venere in manus meas Acta mensis Maji, in quibus nova quaedam Bernoulliana legi,*) et lineae illius, cum qua rectae convergentes ad datum punctum eundem constantem angulum (sed obliquum) faciunt, proprietatem elegantissimam ibi detectam, non sine voluptate observavi, aliaque video notata, quae generalem curvarum naturam illustrant. Plurimum igitur linearum doctrinam hodie promotam habemus tum explicata flexus natura, tum adhibitis ad earum generationem provolutionibus pariter atque evolutionibus. Interiorem naturam flexus seu curvitatis aperuisse nonnihil visus sum detecta mensura anguli contactus, ope scilicet circuli curvam osculantis seu maxime ad eam accedentis eundemque cum ea in puncto osculi flexum habentis, de quo tum antea tum etiam hoc loco dictum est.

Quod ad provolutionem attinet, Galilaeus ut arbitror primus de lineis per eam generatis cogitavit, et simplicissimam ex iis cycloeidem, quam clavus rotae in plano incedentis describet in aëre, considerare coepit, de qua multa a viris doctis sunt demonstrata. Romerus Danus, astrorum imprimis scientia clarus, cum in observatorio Regio Parisino versaretur, elegantes ut audiri proprietates detexit cycloeidis altioris, cum rota scilicet sive circulus incedit super circulo, de quo tamen nihil ad me perve-

---

*) Lineae cycloidales, evolutae, ant-evolutae, causticae, anti-causticae, peri-causticae. Earum usus et simplex relatio ad se invicem. Spira mirabilis. Aliaque. Per Jac. Bernoulli. Act. Erudit. Lips. 1692.

nit. Newtonus nuper de cycloeidibus iisdem egregia et universalia dedit.

Evolutionem curvarum generatricem primus illustravit Hugenius. Eam cogitationem promovit Tschirnhusius, adhibitis (ut ego appellare soleo) coëvolutionibus, animadversoque quomodo tales lineae coëvolutae ut foci spectari possint et radiorum quoque concursu generentur, considerata inprimis caustica, quae formatur radiis parallelis a speculo reflexis. Ego inde longius progressus sum, usumque reperi ad solvenda problemata (quorum in gratia potissimum suscipitur speculatio) lineasque opticas inveniendas, quarum ope radii redderentur ad datum punctum convergentes vel divergentes aut etiam inter se paralleli, quod alia etiam ratione praestitere Newtonus in Principiis, Hugenius in libro de Lumine. Observavi quoque eadem opera dari figuras Acamptas, quae etsi opacae et politae sint, radios tamen non reflectunt, et Aclastas, quae licet sint transparentes seu ex materia radios refringente, vi formae tamen suae et positionis ad Solem radios sine refractione transmittunt. His nunc observationes singulares Bernoullius adjecit. Caeterum ab Hugenio in tractatu de Lumine et Tschirnhusio in Actis notatum est, causticam illam a speculo concavo sphaerico radios solares reflectente formatam simul esse cycloeidalem, provolutione circuli super circulo generatam. Postremo a me nuper proposita est nova linearum formatio per concursum curvarum ordinatim datarum, cum antea tantum radiorum seu rectarum concursus adhiberentur, cujus formationis ad problemata quaedam solvenda egregium usum comperi.

Eximia quaedam inesse videntur illis, quae de figura veli a vento tensi Cl. Bernoullius nuper disseruit*), tametsi de tota re (in qua non desunt scrupuli) ob molem aliorum negotiorum non expensa pronuntiare non ausim. Ex reperta a me mensuratione loxodromiarum per logarithmos equidem non parum practici fructus duci potest, difficilem tamen arbitror cursus aestimationem, quae longitudinibus definiendis sufficiat. Cum de deviatione navis Geometrica acribia agitur, non velorum tantum, sed et navis

---

*) Jac. Bernoulli Curvatura veli. Act. Erudit. Lips. an. 1692 mens. Maj.

spectanda esset figura. Denique quod innuit, se fratremque in calculo meo plurimum profecisse, id agnosco gratulorque non illis magis quam mihi. Valde autem nosse velim, an ultra metas illas sint provecti, ad quas ego perveni; id si ab ullis, certe ab ipsorum ingenio aliquando expecto, et gaudebo plurimum si intellexero, praesertim cum mihi vix amplius in talibus ea qua prius intentione animi versari liceat. Caeterum a me quoque non difficulter solvitur illud problema: invenire lineam, cujus arcu aequabiliter crescente elementa elementorum, quae habent abscissae, sint proportionalia cubis incrementorum vel elementorum quae habent ordinatae, quod in catenaria seu funiculari succedere verissimum est. Sed quoniam id jam a Bernoulliis est notatum, adjiciam, si pro cubis elementorum ordinatarum adhibeantur quadrata, quaesitam lineam fore logarithmicam; si vero ipsa simplicia ordinatarum elementa sint proportionalia elementis elementorum seu differentiis secundis abscissarum, inveni lineam quaesitam esse circulum ipsum.

IX.

DE NOVO USU CENTRI GRAVITATIS AD DIMENSIONES ET SPECIATIM PRO AREIS INTER CURVAS PARALLELAS DESCRIPTAS SEU RECTANGULIS CURVILINEIS, UBI ET DE PARALLELIS IN UNIVERSUM.

Pappus subindicaverat, quod Guldinus expressius ostendit, aream motu debito generatam aequari facto ex ductu mobilis generantis in viam ejus centri gravitatis. Hac regula potissimum usi sunt Geometrae in motu rotationis circa certum quendam axem pro metiendis solidis ac superficiebus quae sic generantur. Sed non minus succedit negotium, si axis vel centrum continue mutetur durante motu generantis, ut fit in evolutionibus curvarum et superficierum. Itaque si curva AB (fig. 85) ope fili DAB evolvatur, tunc pars fili, id est initio recta DA, describet aream DA(A)(D) vel brevius designando D(A), duabus curvis parallelis condescriptis D(D) et A(A) comprehensam, quae aequabitur rectangulo sub recta

AD et recta aequali curvae E(E) (iisdem parallelae) a centro seu puncto rectae AD medio E descriptae. Quin amplius, etiamsi pars ipsius mobilis successive quiescat et moveatur, tamen productum ex toto in viam centri gravitatis totius, areae generatae aequatur, quod et hic locum habet. Nempe totius fili DAB centrum gravitatis sit G in statu primo, et (G) in statu seu situ ultimo, cum filum totum in rectam B(D) abiit. Sit linea G(G) locus continuus hujus centri, dico B(D) filum in G(G) aequari DAB(D)D. Horum ut recordarer, fecit elegans theorema Dn. Joh. Bernoullii, qui notavit, duorum arcuum evolutione condescriptorum ut D(D) et A(A) differentiam si convexitatem vertant ad easdem partes, summam si ad contrarias aequari arcui AH sectoris circularis intercepti inter duos radios DA, DH aequales filo vel regulae extremis suis punctis binos illos arcus describenti, et parallelos ipsis DA et (D)(A) extremis sitibus fili. Videantur Acta Augusti 1695. His cum meo theoremate conjunctis, sequitur differentiam (vel collatis oppositis evolutionibus summam) duorum (ut sic dicam) rectangulorum (bicurvilineorum) condescriptorum velut D(K) et L(A), modo sint aequialta (nempe si DK = LA), posse mensurari ope dimensionis circuli. Nam collocetur ipsi DK vel LA aequalis MN in recta DA, medio loco inter D et A, et describantur simul parallelae M(M) et N(N). Jam DL=KA, et DL in M(M)=D(L), et KA in N(N)=K(A). Ergo D(L) - K(A) id est D(K)—L(A)=DL in M(M)—N(N)=DL in NP, posito NP esse arcum circularem centro M dicto modo descriptum, scilicet ut sit MP parallela et aequalis ipsi (M)(N). Unum adhuc addam: Quae de parallelis nostro more, id est generaliter acceptis diximus, tam universalia esse, ut non tantum parallelis evolutione descriptis, sed et rectis ac circularibus quadrant, licet in circularibus linea evolvenda evanescat in punctum, et pro rectis hoc punctum concipiendum sit infinite remotum. Generaliter autem **parallelas** definio (lineas vel superficies), quarum intervalla (minima scilicet) ubique sunt aequalia. Et cum **rectangulum** (late sumtum) figura sit, quae solos angulos rectos habet, consequens est, figuram hic inter duas parallelas earumque intervalla extrema (minima) contentam ut D(K) merito rectangulum appellari. Caeterum ut hoc quoque adjiciam: **Datae lineae** (curvae vel rectae) **parallelam ducere lineam**, problema est, quod etiam sine evolutione construi potest. Nempe ducatur recta perpendicularis ad lineam datam, et ex puncto ejus aliquo tanquam centro ac pertingente ab eo ad curvam perpendiculari tanquam radio, describatur circulus lineam datam tangens, qui si volvatur super ipsa, describet centro suo lineam datae parallelam. In eo tamen praestat evolutio, quod ejus ope duci potest parallela datae per punctum datum. Tantum enim opus est ex hoc puncto duci tangentem ad generatricem datae, quae simul et generatrix erit quaesitae, tangente ducta partem fili faciente.

X.

DE LINEAE SUPER LINEA INCESSU, EJUSQUE TRIBUS SPECIEBUS, MOTU RADENTE, MOTU PROVOLUTIONIS, ET COMPOSITO EX AMBOBUS.

Linea ad lineam incedit, si illa spectata ut mota, hac ut quiescente, altera alteram durante motu contingat, et quiescens dicitur basis.

Si linea eodem modo semper puncto suo super alia incedat, non nisi radere ipsam dicitur, velut si super linea ABCD (fig. 86) incedat linea LMN, puncto M in basi ABCD persistente. Abradet enim eminentiolas, si quae ponuntur basi adhaerere; cum alias linea, quae continue suum mutat punctum contactus, adeoque provolvitur, eatenus non tam abradat has eminentiolas, quam deprimat; et cum linea super linea tantum provolvitur, dici potest alteram ab altera lambi.

Si linea radens angulum LMC vel NMB ad basin ABC faciat assignabilem, fieri potest ut inter radendum circa punctum radens M tanquam centrum titubet, adeoque non incedat sibi parallela, veluti si LMN situ ad priorem parallelo emota ponatur inter procedendum, punctum tamen M in basi remaneat.

Sed si linea radens KLMNP angulum nullum assignabilem faciat ad basin ABCD, id est si ambo polygona constituant curvas in puncto M radente se mutuo contingentes neque plus quam unam in puncto contactus rectam tangentem habentes, necesse est lineam radentem suis vestigiis ubique parallelam incedere. Ponamus enim punctum radens esse M, in quo basis pars BC tangatur. Et quoniam ambae lineae ABC et LMN sunt curvae, quae se mutuo tangunt, habebunt etiam eandem rectam tangentem, eamque ex hypothesi unicam, quae adeo ad curvam angulum assignabilem non faciet. Itaque et curvae ad se invicem angulum assignabilem non constituent. Hinc vero sequitur, curvam KLMN puncto eodem M per basin ABC incedentem non posse nutare seu angulum inter ambas curvas factum assignabilem variare, adeoque nec angulos earundem plani lineae mobilis rectarum in alium locum transeuntium, quibus immotam FGH respiciebant, hac translatione assignabiliter diversos fieri ab iis, qui fuere in priore situ. Sit enim in plano curvae radentis, quod una cum ipsa moveatur, punctum J, et jungatur recta JK; dico, hanc sibi manere parallelam durante motu. Assumatur enim immobilis recta HG in plano immobili, per quod ipsum planum mobile semper incedat. Producta recta KJ usque dum ipsi HG (productae, si opus) occurrat in F, dico si motus sit radens, angulum HFK non posse variari, licet KLMP aliorsum transferatur. Nam curvas rursus concipiamus ut Polygona, immobile ABCD, mobile KLMP. Cum ergo totum KLMP rigidum censeri possit, non potest nutare, seu rotari circa M, nisi alius fiat angulus LMC. Sed cum is sit infinite parvus, non sufficiet ad assignabilem nutationem, ut LM sese convertens circa M applicetur ad CB, sed ulteriori rotatione opus erit. Ita vero si ponas amplius nutare lineam radentem, necesse est ut punctum M erigatur a basi, punctis L et K successive ad basin depressis, quibus et successive tanquam sustentantibus centris innitetur radens linea, ac circa ea gyrabit, cum tamen supposuerimus, punctum M continue basi manere applicatum. Idem est, si rotatio fieri ponatur in contrariam partem, ut non L, sed N ad basin deprimatur. Utroque igitur modo angulus LMC vel NMB assignabiliter mutari nequit, quantumcunque duret motus, modo punctum M semper in basi manere debeat, adeoque non recta KJ ipsi lineae radenti rigide connexa seu cum ea mobilis ad rectam HG (ipsi immobili lineae ABCD rigide connectibilem seu cum ea immobilem) angulum KFH assignabiliter variare potest.

Hactenus de motu radente potissimum diximus. Sed si iisdem positis curva KLM super curva BCD velut basi ea lege incedat, ut punctum M dictam lineam KLM sustentans (seu quo ea basin tangit) non idem incedat per plura baseos puncta, sed mutetur, alio continue puncto curvae mobilis ad illud punctum basis, parsque, alia parte mobilis ad aliam partem basis applicata; necesse est ut curva KLM rotetur circa punctum sustentans M, donec aliud, nempe L, basin attingat. Ita hoc jam erit punctum sustentans novum, super quo facta gyratione prius M a basi elevabitur in alteram partem. Hoc motu continuato dicetur curva super basi nonnisi provolvi, dicetur etiam altera alteram lambere, et tunc continget partes baseos ac partes mobilis curvae, quae provolutione jam defunctae sunt, inter se aequari; pars enim parti, latus polygoni lateri alterius polygoni congruit, nec una pars unius plusquam uni alterius congruenter applicatur. Insuper si punctum aliquod constans, exempli gratia, curvae provolutae in eodem plano annexum ponatur, illud describet Trochoidem J(J), cui normalis erit recta MJ a puncto sustentante ad punctum describens ducta. De quo motus genere jam multa apud Geometras habentur, potissimaeque ejus species sunt, quae dant lineas Cycloidales et Epicycloidales.

Denique curva mobilis KLM super basi BCD incedere potest motu composito ex radente et provolvente, si dum M procedit in BC versus D, simul LMN mutet et gyretur circa M, donec L attingat BCD et loco ipsius M subeat puncti sustentantis vicem, et mox itidem (ut prius fecerat M) simul et procedat in basi et tamen centrum sit gyrationis curvae KLM, per quam nunc M a basi elevetur. Et ratio inter celeritates gyrationis et motus radentis seu paralleli determinabit speciem hujus incessus, in quo nec motus est parallelus, ut in puro radente, neque arcus baseos et curvae mobilis contactu defuncti inter se sunt aequales, ut in puro provolvente: nam quantitas motus radentis incessui huic immisti est longitudo, qua arcus curvae incedentis deficit ab arcu baseos percurso. Punctum autem constans in plano curvae mobilis designatum ut J non jam Trochoidem describet, sed lineam factam compositione ex motu parallelo seu aequali cum motu radente puncti sustentantis (qui motus toti plano mobili communis est) et ex proprio motu gyrationis, quem exercet punctum describens J circa punctum sustentans, qui motus nonnisi eis plani punctis communis est, quae tantundem a puncto sustentante absunt.

Hic motus plerumque a rotis exercetur, cum simul trahuntur et volvuntur, quod fit praesertim cum axis non satis est lubricatus, quae causa est aliquando, ut pene tanta sit difficultas in gyrando, quanta in procedendo: unde etiam rotae non sunt fidum satis medium longitudinem itineris suis conversionibus mensurandi: Ideoque etiam si quis puram provolutionem desideret, id est si quis Cycloidem accurrate describere velit, vel Epicycloidem (cum circulus super circulo volvitur) vel etiam Trochoidem, aliam quamcunque, non sufficit rotam libere incedere, sed necesse est filum vel catenulam rotae circumdari, quae inter provolvendum evolvatur et extensa remaneat in basi, veluti si rotae pars TV (fig. 87) provoluta per QR ibi reliquerit funis QRX partem QR, dum pars RX adhuc rotae sit affixa, continuata vero provolutione similiter applicari debeat dicta pars RX basi reliquae RS.

Porro curva, quae basin nonnisi radit adeoque vestigiis suis parallela incedit, singulis punctis plani sui mobilis describet lineas basi similes et aequales seu congruentes. Nam (fig. 88) rectae $_1N_2N$, $_2N_3N$ respective parallelae et aequales sunt ipsis $_1M_2M$, $_2M_3M$, id est rectis AB, BC, idemque est de motu puncti L, quod de motu punctorum M et N. Et si quis agnoscat, quaevis plani mobilis puncta ut L et N describere lineas congruas inter se, idem ei dicendum erit de puncto sustentante M, nempe describere lineas prioribus congruas, cum punctum N ipsi inassignabiliter vicinum assumi possit, adeoque in ipsum tandem incidere intelligatur. Quia autem M describit basin, utique lineae a punctis L et M descriptae basi congruent.

Mechanice efficiemus, ut curva in basi non incedat nisi radente motu, si ex puncto J (fig. 86) recta $J\lambda$ educta sit, quae ipsi HG normaliter occurrat ad β, crassitie ipsius rectae materialis HGF cadente infra planum paginae et crassitie ipsius $J\lambda$ cadente supra, et praeterea ex recta rigida $J\lambda$ exeat normaliter alia recta rigida seu regula $\beta\alpha$, cadens semper inter ipsas rigidas immobiles GH, $\gamma\mu$ inter se parallelas, per $H\gamma$ connexas nec magis invicem remotas quam ut $\beta\alpha$ exacte inter eas labi seu ultro citrove ire possit. Ponamus regulam $\beta\alpha$, servato angulo recto, posse ascendere et descendere in ipsa $J\lambda$. Ita $\beta\alpha$ libertatem habebit duplicis motus, unius horizontalis (si placet) quo incedit secundum ipsam GH, alterius verticalis quo prorsum et retrorsum ire potest in recta $J\lambda$. Cum ergo recta $\alpha\beta$ maneat semper sibi in directum, et recta $J\lambda$ sit semper ei normalis, utique recta $J\lambda$ semper suis vestigiis parallela erit, adeoque et curva KLMN motu parallelo movebitur, dumque interim semper applicatur basi, radet eam eodem semper puncto M. Si basis esset circulus, figura super basi incedens radendo moveretur eo motu, quem Hobbius olim vocavit circularem simplicem et de quo quaedam ingeniose jam tum observavit in Elementis de Corpore et in Problematibus, et inter alia, quod dum quaelibet recta in plano sic moto designata manet suis vestigiis parallela, necessario durante motu quaevis puncta plani describant lineas inter se aequales et similes. Sed nos addimus, eundem esse hunc motum cum motu curvae aliam uno puncto suo radentis.

Caeterum sive motus sit pure radens, sive pure provolutorius, sive ex utroque compositus, nihil refert utrum sit obradens an subradens, obvolutorius an subvolutorius, id est utrum curva mobilis convexam an concavam faciem curvae immobilis radat vel lambat. Convexa autem facies curvae ab alterius curvae convexa, et concava, sed concava et recta non nisi a convexa tangi potest, adeoque et radi vel lambi.

Porro notandum est, motum evolutionis, quem excogitavit Hugenius, et motum coevolutionis, quem addidit Dn. de T.*) et cujus utilitates ad construenda optica et alia problemata ego primus ostendi, esse casus speciales motus purae provolutionis. Nam idem est ac si ponas rectam rigidam super basi volvi simulque filo affixo regi, ne radere possit basin. Ponamus (fig. 87) filum QRX extremo quidem X curvae TVX affixum esse, extremo autem Q rectae QRS seu regulae WQRS; curvam autem (contra quam ante) esse basin immobilem, supra qua incedat recta rigida seu regula WQRS. Haec primum in situ (W)(Q)(R)(S) posita tangat basin in puncto X, in quo incidit (S), filo toto adhuc existente in regula, quae deinde volvatur super basi curvilinea XVT, per arcum ejus XV, donec puncto suo R eam tangat in puncto ejus V, relicta parte fili XR in dicto basis arcu XV, reliqua fili parte RQ manente in regula QS. His positis manifestum est, dum regula super basi circulari provolvitur, simul huic ipsi basi obvolvi filum, eumque motum obvolutionis esse tantum contrarium motui evolutionis, et punctum in regula sumtum ut hac provolutione regulae vel obvolutione fili describere curvam W(W): quae eadem curva etiam per evolutionem describetur, dum

*) Tschirnhaus.

(remota regula vel manente, ut lubet) filum WQ continuo tensum et curvam VS tangens, ita movetur, ut portio ejus RX a curva VX devolvatur. Pro motu autem coevolutionis simili ratione repraesentando opus est duas regulas rigidas filum inter se partiri, ita tamen ut de una in aliam transire possit, sed ope styli ad ambas regulas in puncto, ubi se secant, implicitum teneatur. Et quamvis duae rigidae rectae se proprie secare (sua nempe crassitie) non possunt, aequivalens tamen effici potest, dum una sub alia transit, et superioris ima, inferioris summa recta pro ipsa regula rigida assumuntur, filumque semper ad duarum istarum rectarum intersectionem stylo applicitum tenetur.

Postremo, quotiescunque una eademque linea rigida movetur in eodem plano, diversisque suis sitibus tanquam totidem curvis concurrentibus intelligitur formare novam curvam omnes illos situs tangentem perinde est ac si curva rigida mobilis incedat super ea, quam suorum situum concursibus format, tanquam basi, motusque erit modo pure radens, modo pure provolvens, modo denique, ut plerumque fit, compositus prout conditiones a nobis praescriptae observabuntur.

Si fingeretur (fig. 86) curva mobilis KLMN dentibus intercisa, basi vero esset obvoluta fili loco catena, cujus articuli dentibus responderent, ita ut inter volvendum dentes articulis insererentur, catenula solo motu radente volutioni admisto propelleretur, vel potius traheretur in basi: quod etsi ad Mechanismum accuratum non sit aptum, inservit tamen ad distinctionem motus radentis et provolutorii melius intelligendam. Pars enim baseos, quam extremitas catenulae protractae percurrere intelligitur, detracta a toto arcu baseos, dabit arcum baseos, arcui curvae mobilis incessu jam defuncto aequalem, modo ab extremo catenae inceperit incessus. Haec dudum meditata ut ederemus, occasio invitavit.

XI.

ADDITIO G. G. L. OSTENDENS EXPLANATIONEM SUPERFICIEI CONOIDALIS CUJUSCUNQUE, ET SPECIATIM EXPLANATIONEM SUPERFICIEI CONI SCALENI, ITA UT IPSI VEL EJUS PORTIONI CUICUNQUE EXHIBEATUR RECTANGULUM AEQUALE, INTERVENTU EXTENSIONIS IN RECTAM CURVAE, PER GEOMETRIAM ORDINARIAM CONSTRUENDAE. *)

Superficies Coni recti jam ab Archimede explanata est, et aequalis ei circulus assignatus. Coni Scaleni superficiem Veteres, quod constet, non attigere. Aegidius Robervallius me juvene ajebat, ejus explanationem sibi esse notam, sed qualem habuerit non dixit, nihilque ea de re inter ejus schedas repertum accepi. Equidem hodie ad eum modum, quo processum est in Schediasmate praecedenti, possumus facile dare figuras planas easque per Geometriam ordinariam construendas, non tantum quae aequentur superficiebus coni Scaleni, sed etiam cujusque Conoeidis generati recta BH (fig. 89) per punctum B constans in sublimi transeunte et circumlata per curvam quamcunque H(H) in plano subjecto AHC positam. Nam cum BC sit normalis ad planum subjectum, adeoque ad rectam AC, quae sit directrix ipsarum HG normaliter applicatarum ex curva Hh et ipsi AC occurrentium in G, patet $BC = \sqrt{(BC.BC + GC.GC)}$ fore normalem ad HG, atque adeo BH fore $\sqrt{(BG.BG + GH.GH)}$. Datur autem GH ex AG per naturam curvae, et BC, AC sunt datae, et CG est summa vel differentia ipsarum CA, AG; habetur ergo et BH ex AG. Ergo et ratio datur incrementi momentanei seu elementi ipsarum BH, nempe ipsius Hk (si ponatur ex h demissa in BH normalis hk) ad HV elementum ipsarum AG. Quodsi jam quadratum ipsius Hk detrahatur a quadrato ipsius Hh elementi arcus curvae, supererit quadratum

*) Vorstehendes schrieb Leibniz als Zusatz zu der Abhandlung Varignon's: Schediasma de dimensione superficiei coni ad basin circularem obliqui ope longitudinis curvae, cujus constructio a sola circuli quadratura pendet, welche in Miscell. Berolinens. Tom. III. zugleich mit diesem Zusatz abgedruckt ist.

ipsius hk, cujus rectae adeo etiam dabitur ratio ad HV incrementum ipsius AG, quae ratio vocetur $r:a$, posita a constante quacunque pro arbitrio semel assumta et r determinata ex AG. Erit ergo $hk=(r:a)dAG$. Sed dimidium rectanguli ex BH in hk est aequale triangulo BHh, id est elemento superficiei Conoeidis; ergo si recta $(r:2a)BH$ (nempe quae sit ad BH ut r ad 2a) accommodetur ad dAG id est ad Gg, seu sumatur semper in ipsa GH ex G versus H, fiet figura curvilinea, cujus elementum erit $(r:2a)BH.dAG$ idem cum elemento superficiei conoeidis. Itaque ipsius hujus Figurae portio rite sumta aequabitur respondenti superficiei Conoeidis portioni, binis rectis ex puncto in sublimi et arcu basis comprehensae, et proinde quaevis superficies Conoidalis explanari potest, adhibita figura plana ei aequali, per Geometriam ordinariam construenda, si ipsa AHh basis Conoeidis sit figura Geometriae ordinariae.

Sed quia Archimedes Circulum vel Circuli portiones superficiei coni recti vel ejus portionibus aequales exhibuit, Circuli autem vel ejus portionum area vel conversio in figuram rectilineam facillime habetur per extensionem curvae (nempe ipsius arcus circularis) in rectam: hinc a Viro Celeberrimo Petro Varignone quaesitus est inventusque modus elegans paulo ante positus, quo figura plana aequalis superficiei coni scaleni etiam mensurari potest per extensionem curvae alicujus in rectam. Cum vero curva illa quam exhibet non sit ordinaria, sed transcendens, quamvis non nisi tetragonismo Circuli seu rectificatione arcus circularis ad constructionem indigeat, placuit mihi quaerere curvam ordinariam quae idem praestet, seu cujus rectificatione exhibeatur superficiei Coni Scaleni vel ejus portioni cuivis aequalis figura rectilinea. Hoc ita sum consecutus.

Iisdem quae antea positis, a puncto G versus D sumatur GW, quae sit ad AG ut CD ad radium DO, et jungatur BW, quae erit $\sqrt{(ccrr-2rfgx+ffxx)}:r$.*) Pono autem A esse extremum diametri AD remotius a B. Ex puncto H ad rectam AC ducatur HJ, ita ut ex O ducta ad HJ normalis $O\psi$ sit ad HO radium ut dimidia BW ad rectam constantem, quae sit major dimidia BA; et recta HJ ipsam $O\varphi$ ex centro O perpendiculariter ad CO eductam

---

*) Es ist $AB=c$, $f=OC=r+a$, $AC=g=2r+a$, $AG=x$ gesetzt.

ad partes H secet in φ. Eadem omnia fiant ad puncta h et g, ut ducatur BW, ducatur et hi, quae ipsam $O\varphi$ secet in (φ). Jam ipsis $O\varphi$, $O(\varphi)$ etc. aequales $J\Omega$, $i\omega$ etc. ordinatim applicentur normaliter ad OJ, Oi etc. ut fiat curva $\Omega\omega$, cujus tangens ΩT occurrat ipsi AC in T. Tandem in AC ex J sumatur JX ad partes ad quas convergunt JH, ih, quae JX sit ad JO ut TJ ad TO, et ex puncto X quovis, hoc modo reperto, normaliter educta XY, occurrens respondenti rectae positione datae HJ in Y, erit ordinatim applicata curvae novae Y(Y), cujus sub arcu elementari inter puncta Y et (Y) praescripta ratione determinanda intercepto, et sub constante supradicta, non minore quam $\frac{1}{2}$ BA, comprehensum rectangulum aequabitur triangulo BHh, nempe elemento superficiei coni scaleni: atque adeo evolutione seu extensione debita curvae Y(Y) in rectam, filo evoluto ducto in ipsam constantem supradictam, exhibebitur rectangulum aequale ipsi ABDHA superficiei dimidiae coni scaleni vel ejus portioni (rectis scilicet binis ex B et arcu basis comprehensae) cuicunque.

LEIBNIZ

AN DEN

FREIHERRN VON BODENHAUSEN.

Als Leibniz auf seiner italienischen Reise längere Zeit in Florenz verweilte, machte er die Bekanntschaft eines deutschen Edelmanns, des Freiherrn von Bodenhausen, der unter dem Namen eines Abbé Bodenus als Erzieher des Erbprinzen am toskanischen Hofe lebte. Er war ein eifriger Verehrer der mathematischen Wissenschaften, und in Folge dessen entstand sehr schnell eine innige Freundschaft zwischen beiden Männern. Leibniz selbst unterrichtete Bodenhausen in den Elementen der höheren Analysis, und überliess ihm die weitere Redaction des grösseren Werkes, das er über die Dynamik während seines Aufenthalts in Italien ausgearbeitet hatte*). Ohne Zweifel gab dies die nächste Veranlassung zu der Correspondenz zwischen beiden Männern, die bis zu dem Tode Bodenhausen's ununterbrochen fortdauerte. Da letzterer mit unermüdeter Ausdauer in den tieferen Sinn der höheren Analysis einzudringen und namentlich die Lösungen der Probleme zu verstehen suchte, welche Leibniz und seine Freunde vom Jahre 1690 an sich gegenseitig vorlegten und durch die die Ausbildung der höheren Analysis mächtig gefördert wurde, so konnte nicht fehlen, dass Bodenhausen über Zweifel und Schwierigkeiten aller Art bei Leibniz um Auskunft bat. Trotz seiner Vielbeschäftigung kam ihm dieser mit ausführlichen Mittheilungen bereitwilligst entgegen; ich will nur die gründliche Auseinandersetzung über das von Viviani vorgelegte sogenannte Florentinische Problem (problema de templo

*) In Bodenhausen's Papieren, die nach seinem Tode in den Besitz Leibnizens kamen und unter den Manuscripten des letztern auf der königlichen Bibliothek in Hannover aufbewahrt werden, finden sich noch die Blätter, auf welchen Leibniz seinen Freund in den Operationen der Differential- und Integralrechnung unterwies. Auch ist die sorgfältige Reinschrift der Dynamica Leibnizens von Bodenhausen's Hand noch vorhanden.

hemisphaerico quadrifenestrato quadrabili) und über die Lösung des Problems der Kettenlinie hervorheben. Leibniz verlässt hier die knappe Darstellung, die er in der Regel in den von ihm veröffentlichten Abhandlungen beobachtet und durch die er den Gang seiner Behandlung künstlich verhüllt*); in seinen Briefen an Bodenhausen zeichnet er den Weg, auf dem er die Lösung der Aufgabe fand, insofern nach seinem Dafürhalten dieser der geeignetste ist zu einem wahren Verständniss zu gelangen. — Ausserdem sind die Mittheilungen Leibnizens über die Werke, die er herauszugeben gedachte, über seinen Calculus situs, über seine Characteristica, durch die er die Analysis physica weiter zu bringen gedachte, so wie sein Urtheil über die neu erschienenen Schriften von vielfachem Interesse.

Bodenhausen hielt die Briefe Leibnizens wie einen kostbaren Schatz; ihr wissenschaftlicher Inhalt diente ihm als Grundlage und Richtschnur seiner Studien. Er machte davon eine besondere sorgfältige Zusammenstellung, aus welcher das Folgende entnommsn ist.

---

*) Diese Eigenthümlichkeit findet sich in fast allen Leibnizischen Abhandlungen; er will in seine Kunstgriffe andere nicht einweihen. Es ist aber guth, schreibt er an Bodenhausen, dass wann man etwas würklich exhibiret, man entweder keine demonstration gebe, oder eine solche, dadurch sie uns nicht hinter die schliche kommen.

Invenire figuram Clepsydrae uniformis MCAEF (fig. 90), in qua altitudo aquae AL uniformiter (seu aequalibus temporibus aequaliter) decrescat effluendo per coniformis figurae universae apicem A.

Sit linea ACM ex genere paraboliformium, cujus vertex A et Axis ABL, et ordinatarum BC quadrata sint in subduplicata ratione abscissarum AB seu ordinatae in subquadruplicata abscissarum; et trilineum ALMCA circa axem AL rotatum generabit figuram clepsydrae quaesitae.

Manifestum enim est, ipsis AB altitudinibus aquae aequaliter aequali tempore decrescentibus ipsa decrementa altitudinum aquae esse ut elementa temporis. Jam decrementa aquae sunt in ratione composita elementorum temporis et velocitatum quibus aqua effluit, ergo in ratione composita decrementorum altitudinis et velocitatum. Et eadem decrementa aquae sunt in ratione composita decrementorum altitudinis et summarum aquae superficierum seu circulorum centris B radiis BC descriptorum. Ergo velocitates quibus aqua effluit sunt ut circuli radiis BC descripti seu ut quadrata radiorum BC. Sed velocitates quibus aqua effluit sunt in subduplicata ratione altitudinum aquae AB (per prop. 35 cap. de Causa et Effectu Tract. Dynam.); ergo quadrata ordinatarum BC sunt in subduplicata ratione abscissarum AB, seu ordinatae in subquadruplicata abscissarum.

Analysis. Sit aqua a, altitudo aquae AB, x, ordinata BC, y, tempus t, velocitas v, decrementa et elementa d, erit dx ut dt, da ut dt v; ergo da ut dx v. Jam da ut dx yy, ergo v ut yy. Jam v ut $\sqrt{x}$ (per prop. 35), ergo yy ut $\sqrt{x}$ seu y^4 ut x seu y ut $\sqrt{x}$.

Was Dn. Guglielmini in seinen ersten 3. Büchern de Mensura aquarum currentium schreibet, kan in den ströhmen und andern grossen wercken nicht statt haben, wie er selber bekennet, denn das incrementum velocitatis, welches freylich bekandter massen in subduplicata ratione altitudinum descensus sich verhält, wird im fliessen und hinbrütschen des wassers gäntzlich alteriret, und kan nicht appliciret werden, man nehme dann dazu, was ich de Resistentia ambientis angewiesen. Es ist kein Zweifel, dass alle diese Dinge Geometrice zu determiniren und in potestate seyn; wolte Gott dass die physicae rerum causae, als morborum und dergleichen, so leicht auszufinden als motus Aquarum und andere mechanica, da wir die data haben, anstatt dass solche in physicis erst errathen werden müssen. Ich hoffe aber dermahleins mit hülff unser Characteristicae die Analysin physicam auch etwas weiter zu bringen als sie ietzo ist. Und nachdem ich vermeyne Scientiam dynamicam ad leges purae Geometriae nunmehr gebracht zu haben, dass alle casus scientifice entschieden werden können, ope hujus solius principii Metaphysici, quod Causa integra et Effectus plenus sint ejusdem potentiae, so habe ich ursach grössere progressus in physicis zu hoffen; denn es ist wohl zu consideriren, dass nicht müglich die physica zu decidiren, wie ich vorerst vermeynet hatte als ich vor mehr als 20 Jahren meine Theoriam Motus herausgeben, und die leges motus per solam compositionem conatuum herauszubringen vermeynet; ich habe aber hernach befunden, dass solche das obgedachte principium Metaphysicum praesupponiren, und sich also endlich resolviren in sapientiam divinam, welche eandem quantitatem virium, nicht aber (wie Cartesius gemeynet) eandem quantitatem motus conserviret. Welche meditationes meines ermessens fast eben so wichtig seyn als die Scientia dynamica selbsten; und wil ich eins und anders davon entweder per modum praefationis oder per modum dialogi unsern dynamicis beyhefften.

Ich habe ope principiorum Mechanicorum vorlängst etwas curioses und generales in Geometria ausgefunden circa tangentes curvarum per umbilicos datarum. Sint tres umbilici A, B, C (fig. 91) filumque in se rediens AHECBEKA, welches vermittelst des styli E allzeit gespannet und durch herumbführung des styli die linea EE beschrieben wird; quaeritur lineae Tangens.

Centro E, radio quocunque EF describatur circulus secans lineas AE, EB, EC, si opus productas, in punctis F, G, H; horum punctorum F, G, H quaeratur centrum gravitatis commune P (ea tamen cautione, ut punctum F ponatur uno ex reliquis duplo gravius, quia filum EA est duplicatum), et juncta PE erit perpendicularis ad curvam seu ejusdem tangentem. Eademque Methodus valet pro focis seu umbilicis quotcunque.

Hr. Tschirnhaus hat in seinem buch, genandt Medicina Mentis, eine andere aber unrechte Regel, weiss nicht aus was für einem unstern, gegeben, und sich durch special exempel verleiten lassen. Ich habe darauf der sache nachgedacht, und diese wunderliche general Regel per centrum gravitatis ausgefunden. Die erläuterung davon solte nicht übel bey unsern dynamicis als ein Appendix stehen, si tibi ita videtur.

Ich bin bedacht, meinen calculum situs in form zu bringen, weilen wir bissher nur calculum magnitudinis gehabt, und daher unsere Analysis nicht perfecta, sed ab Elementis Geometriae dependens gewesen. Mir aber müssen die Elementa selbst per calculum herauskommen, und gehet gar artlich von statten. Von dieser analysi dependiret alles, was imaginationi distinctae unterworffen.

Ich hoffe ferner gradum ad ea zu promoviren, quae imaginationi non subsunt, ut omnis humana ratio genus quoddam calculi seu characteristicae expressivae accuratae subeat. Et quando ex datis conclusio vel solutio non habetur, debet saltem determinari posse gradus probabilitatis ex datis.

Betreffend expressionem Curvarum Transcendentium per aequationes, ecce specimen in cycloide quod desiderasti:

Sit semicirculus AEH (fig. 92), semicycloeides linea ACK, EC $=$ AE arcui, ut constat. Sit AB, x; BC, y; BE, v; Radius 1; GD, $\overline{dx}$; DL, $\overline{dv}$; GL $=\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dv}^2}$; fit $v=\sqrt{2x-xx}$ et $\overline{dv}=\overline{dx},\ \overline{1-x}:\sqrt{2x-xx}$ ex legibus calculi nostri. Jam arcus Circuli AE seu EC $=\int\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dv}^2}$ et $\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dv}^2}=dx:\sqrt{2x-xx}$; ergo fit AE vel EC aequ. $\int\overline{dx}:\sqrt{2x-xx}$, et BC seu $y=BE+EC$, ergo $y=\sqrt{2x-xx}+\int\overline{dx}:\sqrt{2x-xx}$, quae est aequatio ad Cycloidem desiderata, unde omnes ejus proprietates deduci possunt, exempli causa Tangentes. Nam fit $\overline{dy} = \overline{dv} + \overline{dx} : \sqrt{2x - xx}$, unde pro $\overline{dv}$ substituendo valorem supra positum fit $\overline{dy} : \overline{dx} :: \overline{2 - x} : \sqrt{2x - xx}$, seu dy est ad $\overline{dx}$ sive PF ad FC (posito PC esse perpendicularem curvae) ut $2 - x$, hoc est HB, ad $\sqrt{2x - xx}$ seu ad BE. Et proinde cum HB sit aequ. PF, etiam aequabitur FC ipsi BE, et PC ipsi HE, quod aliunde jam habetur inventum, sed ita calculo quoque analytico obtinetur, perinde ac si de linea vulgaris Geometriae ageretur, cum tamen fassus sit Cartesius suam Tangentium Methodum huc non porrigi.

Hr. Bernoulli*) hat einigen dubiorum circa Schediasma de resistentia solidorum, so denen Actis inseriret, solutionem von mir begehret; ich habe ihm ausführlich geantwortet. Und weil dubitiret werden können, ob die tensiones chordarum oder fibrarum seyen ut vires tendentes (welche hypothesis nicht allerdings gewiss), so habe ich ihm gewiesen, quod notandum, dass solche proportion möge seyn wie sie wolle, dennoch die resistentiae der rectarum AB (fig. 93) seyen in duplicata ipsarum rectarum ratione; daher meine demonstrationes de figuris aequiresistentibus doch wahr bleiben. Habe ihm auch erkläret, wie die figura aequiresistens beschaffen seyn müsse, wenn sie nicht nur proprio, sed et simul alieno ponderi incumbenti ubique aequaliter resistiren soll, welches ich in meinem damahligen Schediasmate übergangen, und er nicht wohl finden können, weil es auch auf analysin extraordinariam ankommt. Galilaeus hat zwar auch de resistentibus figuris gehandelt, aber alio sensu und abstrahendo ab ipsarum pondere proprio, auf welchen fall die sache gantz leicht, und nur ein problema ist analyseos ordinariae.

Was die lineam Catenariam anlanget, so habe ich in des P. Pardies Traité des forces mouvantes nachgeschlagen, befinde dass seine suppositiones recht, auch sonsten bekandt, nemblich von n. 72 biss 75 inclusive. Er sagt aber nur dass die linea keine

---

*) Jacob Bernoulli.

parabola sey; alleine was es für eine seyn müsse, sagt er (deucht mich) nicht, sondern kommt auf eine andere supposition, wenn die chorda des ponderis expers consideriret wird und gewisse pondera oder forces darauf appliciret werden. Videatur n. 76. seqq. Und wenn er n. 81 sagt: les cordes tendues sont effectivement courbées en hyperboles, so redet er abermahls nicht von unserem casu, sondern von einem andern, wenn nehmlich die chorda sich dehnet, quand les cordes se courbent en se rallongeant, welches gantz eine newe und mehr componirte frage gibt, da ich sehr zweiffele ob die Hyperbola statt habe; ich supponire hingegen, dass der faden oder vielmehr die Kette ihre länge behalte.

Joachimus Jungius, so einer der besten Analyticorum und Philosophorum nostri seculi gewesen, und noch ante Cartesium viel herrliche gedancken gehabt, hat sich über das Problema sehr bemühet, aber nichts anders finden können, als dass keine parabola statt habe. Ich finde dass die curva catenaria sehr notable proprietates habe; data ipsius descriptione kan man leicht geben tangentes, quadraturam areae, dimensionem curvae, superficies ejus rotatione genitas etc. Ihre description aber supponiret logarithmorum constructionem, und daher vice versa, posita descriptione hujus curvae physica, kan man pulcherrime die logarithmos ausfinden und construiren, und also kan man ope curvae catenariae quotcunque medias proportionales inter duas rectas datas geben. Et ita haec curva est una ex virtuosissimis totius Geometriae und über dieses summae in construendo facilitatis, wenn man nur einen faden hat, der sich sufficienti facilitate bieget und proprio pondere nicht notabiliter dehnet. Dieses aber de logarithmis sage ich andern noch nicht, damit sie vor der Zeit nicht wissen, ob die curva sey ex numero ordinariarum, an vero Transcendentium.

Mons. Tschirnhaus hat diesen Sommer*) ein Schediasma für die Acta Lipsiensia gegeben, darüber sich Hr. Hugenius ein wenig beschwehret, dass er nehmlich ihn in etwas compiliret. Mons. Tschirnhaus aber setzet dabey (mir vermuthlich zum angehöhr), einige gäben vor, dass gewisse arth problematum eine sonderliche analysin erforderten, seye aber nichts, solche problemata (als Tangentium inversa etc.) seyen inter simplicissima totius Matheseos zu

---

*) v. Bodenhausen hat bemerkt: 1690.

zehlen, nur allein dass man einen weitläufftigen calculum dazu brauche. Reimt sich wol zusammen. Es scheinet aber, er habe sie noch nicht recht betrachtet, und wollen wir sehen, ob er die curvam catenariam finden wird, denn in meinem Schediasmate habe ich nominatim erwehnet, dass ich auch hierinn ein specimen seines Methodi erwarten wolle, zumahlen hier nicht sowohl prolixo als artificioso calculo von nöthen habe.

Hr. Hugenius hat mir ein Exemplar seines trefflichen operis de Lumine zugeschickt, darinn er meines erachtens Cartesii rationes gantz ausgethan. Er hat sowohl in der praefation, als im opere selbst einiger meiner documenten erwehnet. Schreibt, er wolle meine newe Analysin untersuchen, und proponiret mir 2 curvas ex data tangentium proprietate zu suchen, so ich ausgefunden. Er bekennet, dass wenn meine Analysis dergleichen praestiren könne, seye es etwas ungemeines, wiewohl er, Hr. Hugenius selbsten, schohn ein gutes theil dieser dinge auf seine weise praestiren kan. In mea tamen methodo quaedam sunt singularia, remque omnem ab imaginatione ad analysin revocant; daher ich mich mir weiter als alia via zu kommen getrawe, und in gewissen Dingen zweifele ich dass andere so leicht dazu gelangen sollen; doch was curvam catenariam und dergleichen betrifft, die sind eben nicht von den schwersten, und wil daher erwarten, ob Hr. Tschirnhaus auch werde können drauff kommen.

Tractatum meum de Resistentia solidorum etc. davon der erste theil zwar guth scheinet, wiewol ich zu einem völligen examine nicht zeit gehabt, credo esse Galilaeana dilatata; aber liber 2dus, da er handelt de solido utrinque sustentato, stehet meines erachtens auf schlechten füssen uud dürffte ehe brechen als die solida; ich habe ihn zwar eine geraume zeit her nicht angesehen, mich düncket aber, dass gleich anfangs in demonstrationibus hujus libri 2. bey mir ein zweifel ereignet.

Ich bin selbst der meynung, dass in problematibus Geometriae communis die Methodus Veterum, et Analysis cujus vestigia quaedam extant apud Pappum, einige gewisse avantagen habe supra Analysin Algebraicam, daher ich auch glaube gegen M. H. Hrn. erwehnt zu haben, dass noch eine Analysis geometriae propria übrig, toto coelo ab Algebra diversa et in multis longe Algebra compendiosior utiliorque.

Man könte umb deren willen, so analysin verachten, einige specimina in das Giornale etc. geben, so eben nicht gemein. Die Maximae et minimae, die quadraturae, die centra gravitatis, die Tangentes, die extensiones curvarum in rectas sind darzu bequem. Es ist aber guth, dass wann man etwas würcklich exhibiret, man entweder keine demonstration gebe, oder eine solche, dadurch sie uns nicht hinter die schliche kommen. Zum exempel man köndte geben meine quadraturam absolutam des segmenti transversi Cycloidis und dabey sagen, man wolle nicht die demonstrationem hujus theorematis geben per methodum dadurch sie erfunden, sondern per aliam magis ad captum communem, wie ich dann solche hier beyfüge, quae nil nisi jam notum supponit: (fig. 94) AFCSA $\overset{(1)}{=}$ AFB + ABC + ACSA $\overset{(2)}{=}$ AFBHA + AHBCSA (ex figura). Sed ABC $\overset{(3)}{=}$ AFBHA (ut constat, quia BC = AHB), et AHBCSA $\overset{(4)}{=}$ bis AFB (ex aliorum inventis de cycloide), ergo denique ACSA $\overset{(5)}{=}$ AFB. Q. e. d.

Die curvam catenariam zu suchen, könte man zugleich publice proponiren, welche einige falso pro parabola gehalten, und wie ich mich besinne Galilaeus selbst, da es doch nothwendig eine curva transcendens. Man könte dabey erwehnen de vera differentia Methodi vere Analyticae a Methodis vulgaribus, dass nehmlich diese in vielen tentamentis bestehen, welche nur in facilioribus zu gerathen pflegen, in schwehreren aber gemeiniglich fehlen, und wenn man lange den saxum Sisyphi volviret, so weiss man auf die letzte nicht, ob es problema planum oder solidum oder sursolidum, oder gar omnem gradum transcendens; da hingegen die analysis, in so weit sie perficiret, uns via regia infallibili ad exitum führen oder impossibilitatem demonstriren muss, und gleichsam ein filum in labyrintho giebt. Welches artificium die Veteres bereits in etwas gehabt, aber vertuschet, Vieta und Cartesius resuscitiret, aber nur in Geometria ordinaria rectilineari, dahin ich problemata plana, solida alteriusve gradus rechne, etiamsi enim variis lineis opus sit, tamen ad quaevis earum puncta determinanda non nisi relatione inter rectas opus est; aber ad Analysin pro Geometria sublimiore, quae curvilineorum dimensiones aliaque problemata tractat, ubi ipse gradus problematis vel nullus est vel non nisi per solutionem cognoscitur, habe ich vielleicht zuerst den analytischen weg geöffnet, und kan auch curvas, quas Cartesius male Mechanicas vocabat, quia calculo suo submittere non poterat, ad nudas calculi leges revociren, und das gemüth auch hierinnen a tentamentorum anxietate et incertitudine befreyen, wiewohl noch ein und anders hierinn sowohl als in Geometria ordinaria (da man ultra radices generales aequationum 4ti gradus nicht kommen) zu erfinden übrig.

Man könte auch wohl proponiren Tangentem einer curvae zu suchen, wie diejenige, so ich in Actis bey meiner Methodo calculi differentialis gesetzet, doch etwas auf eine andere weise. Man könte auch geben meiner seriem, per quam invenitur arcus ex data tangente.

Ich habe gefunden dimensionem curvae per circuli evolutionem descriptae, wenn ein faden umb den circkel ABE (fig. 95) gewunden wäre, aber aufgethan und extendiret würde, also dass der aufgethane faden BC allzeit gleich arcui circulari AB, so würde BC tangiren arcum AB oder perpendicular seyn ad AC lineam extremo C descriptam. Et arcus AB est media proportionalis inter diametrum AE et curvam AC.

Hiebey schicke die solutionem des problematis Galilaei circa veram figuram Catenae vel Funis pendentis, welche mir umb viel desto mehr gefallen, dass sie uns die logarithmos gibt, also dass man mit einer subtilen kette alle problemata per logarithmos expedienda praestiren köndte, wie aus der beygefügten figur und erklärung zu sehen. Wenn ich ein problema Transcendens dahin reduciret, dass es a logarithmis vel arcubus circuli, und also Tabulis Canonicis, oder quod eodem redit, quadratura Circuli et Hyperbolae dependiret, so halte ich es pro absoluto, und kan ein mehreres darinn nicht geschehen, weilen nicht müglich, diese beyden quadraturas indefinite, id est, pro data quavis portione Circuli vel Hyperbolae zu finden, wie man sie sucht. Ich habe dabey gefunden, nicht nur dimensionem curvae Catenariae seu extensionem ejus in rectam (welches leicht), sondern auch dimensionem areae und (welches am schwersten) die centra gravitatis sowohl lineae als areae, und zwar alles durch sehr kurtze constructiones. Catenula schicket sich besser als funis, weilen funis sich extendiren kan, catena aber ihre länge beständig behält. Die linea logarithmica so dabey gezeichnet, wird gefunden per quotcunque mediarum proportionalium quarum una est (fig. 96) $N\xi$ vel $(N)(\xi)$ inventionem inter ΘA et ${}_3N_3\xi$ oder ΘA et ${}_3(N)_3(\xi)$. Das eintzige habe ich verschwiegen, was ${}_3N_3\xi$ zu ΘA, oder quod idem est, ΘA zu ${}_3(N)_3(\xi)$ vor eine proportion, א ad ב, haben, als welche allezeit beständig seyn muss, damit diejenige so in diesen materien nicht genugsam versiret und doch meynen, sie köndten alles vor sich leicht finden etc. Es verhalten sich aber die 3 linien ${}_3N_3\xi$, ΘA und ${}_3(N)_3(\xi)$ wie diese drei numeri: 0.3678794, 1.0000000, 2.7182818. Geometrice aber (welches M. H. Hrn. ins Ohr sage) müssen die linien also beschaffen seyn (posito Θ_3N ut et $\Theta_3(N)$ esse aequalem ipsi ΘA), dass die gezogene gerade lini von ${}_3N$ auf A, oder von Θ auf ${}_3(\xi)$ die logarithmische lini nicht durchschneide, sondern nur anrühre.

Diejenigen so die Analysin novam verachten und vor ein giocolino halten, können ihr heil an diesem problemate versuchen; wiewohl nunmehr post exhibitam solutionem nichts leichter vor einen der den calculum verstehet, als rationem finden; aber ipsam solutionem zu finden, soll einer wohl bleiben lassen, der nicht meinen oder einen aequivalentem calculum hat.

Ich habe Hrn. Alberti zu Rom auf begehren einige rationes communiciret, warumb nuda extensio naturam materiae nicht mache, und gebethen, er möchte es doch M. H. Hrn. communiciren. Es wird aber nun vielleicht in das Journal des Sçavants zu Paris gesetzet werden, weil ich es einem guten freund dahin communiciret.

---

ch bin bedacht, meine Arithmetische Machinam, so vorlängst elaboriret und auch exequiret, ins feine bringen zu lassen. Arnaldus, Hugenius und Thevenot, so sie vor alters zu Paris gesehen, haben mich etlichemahl daran erinnern lassen.

Ein specimen meiner Analyseos novae situs zu geben, ist mir anjetzo ein bissgen schwehr, weil ich gantz von forn darüber meditiren muss; doch werde mich einmahl daran geben. Es ist gewiss, dass die Algebra, indem sie alles a situ ad solam magnitudinem reduciret, dadurch offt die Natur der sache sehr verwickele. Sie hat zwar den vortheil, dass sie allemahl (in Geometria ordinaria) zum ende kommen kan, hingegen gehet sie bissweilen durch grosse umwege; ist eben als wenn einer alle problemata ejusdem gradus per eundem datum circulum vel eandem constantem parabolam solviren wolte, so zwar allzeit thunlich, aber nicht allzeit am besten.

Hr. Bernoulli hat gar schöne specimina des Calculi differentialis herausgeben, und unter andern observiret, dass wo dx:dy omnium possibilium minima vel maxima, allda sey in curva punctum flexus contrarii. Er hat auch die solutionem curvae catenariae seu funicularis proprio Marte recht getroffen, und bemühet sich jetzo sehr meinen Methodus auf allerhand problemata zu appliciren, welches mir sehr lieb, denn ich kan ja selbst nicht alles thun, bin auch gantz nicht jaloux oder reservé darinn. Es sind ja noch so viel andere dinge darinn und sonst zu thun, dass ich allzeit materi behalten werde. Er hat gefunden, dass die curva dependire a quadratura Hyperbolae, doch hat er sie nicht applicirt auf Logarithmos, welches ich doch vors beste halte. Meine sowohl als seine und Hrn. Hugenii solution ist nun in Actis Lips. Doch hat Hr. Hugenius nicht observiret, dass die sache reducibel ad quadraturam Hyperbolae, sondern hat ein quadraturam curvae magis compositae angegeben, denn ob er schon aliquid analogum meae Methodi hat, so scheinet doch, dass er bey weiten damit so bequem nicht könne zu recht kommen, sondern mehr ad figuras gebunden.

Was das problema betrifft: Datis positione Circulo BE(E) (fig. 97), recta indefinita GH et puncto A, rectam ita ducere per A, ut si circulo et rectae occurrat in E et H, sit EH intercepta omnium possibilium minima, welches freylich ad 8 dimensiones steiget (so viel ich primo obtutu abnehmen kan), so kan solches ope circuli dati und curvae rationalis 4ti gradus absolviret werden. Gesetzt AF sey a, CF sey f, GF sey p, $CE^2 - CA^2$ sey $\beta\alpha$, und letzlich die beyden indeterminatae seyen AV, v und VE, n, so haben wir 2 aequationes, die eine ad Circulum datum welche ist: $vv + nn = \beta\beta - 2fn + 2av$; die andere ad curvam rationalem 4ti gradus, welche ist

$$v = \frac{\begin{array}{l} +ppa^2\beta - 2ppfan - ppann + an^4 \\ \qquad -2paa\beta. + 2paf.. \end{array}}{\begin{array}{l} -2ppaa + 2paan - fn^3 \\ -ppa\beta + ap\beta. \\ \qquad +ppf. \end{array}}$$

Solcher curvarum rationalium (nemlich darinn eine indeterminata ex data rationali altera allezeit rationaliter gefunden werden kan) bediene ich mich gern, weilen dergestalt puncta curvae quotcunque in numeris leichter gefunden werden können; die intersectio circuli et hujus curvae gibt das punctum E.

Was die inventionem curvarum ex data tangentium proprietate betrifft, so halte dafür, dass in tota Geometria nichts importanter als dieses; daher bitte M. H. Hrn. diese inquisition ferner zu verfolgen, so viel seine Zeit leidet; ich möchte wünschen, dass es die meinige lidte. M. H. Hr. ist auf sehr guten wege, und sein specimen gar artlich. Das erste wäre, dass man allzeit determiniren könndte, ob müglich curvam ordinariam satisfacientem zu finden; das nächste dass man finde specimen Transcendentiae, oder was es eigentlich für eine Transcendens sey. Gemeiniglich sind die curvae quaesitae possibiles und gar selten imaginariae. Es werden nicht nur von dem proponenten, sondern auch von der Natur und dem problemate selbsten die curvae offt also verlarvet, dass die limitation (wenn keine verlarvung nicht mit fleiss geschehen) nicht statt habe.

Die Methodus per inscripta et circumscripta oder dergleichen apagogice zu demonstriren lässet sich allezeit anbringen, und wolle M. H. Hr. nur die lemmata incomparabilium consideriren, so ich in dem Tentamine de Causis Motuum coelestium beygefüget, so wird er leicht sehen, wie dergestalt, wenn man infinite parva nur ad incomparabiliter parva reduciret, der error dato minor, id est nullus, zu machen. Weil Cavalerius solches nicht genugsam consideriret, ist er mit seinen indivisibilibus nur in primis viis blieben, gleichwie auch die meisten andern in Italien und Frankreich. Denn man ist an keine solche limitationes gebunden, die er und andere pro salvanda methodi indivisibilium certitudine sich machen müssen.

Mit der Tangente Spiralis hat es diese beschaffenheit ad modum aliarum linearum, dum radius (fig. 98) CR ex CA egressus tendit versus C_1V, C_2V etc., punctum mobile P, manens in radio, ex centro C egressum tendit ad ${}_1P$, ${}_2P$ etc.

Ex natura spiralis sunt arcus AV ut rectae CP, et D_1P ut CP in ${}_1V_2V$. Sed ${}_1V_2V = d\overline{AV}$, ergo ${}_1V_2V$ ut $d\overline{CP}$. Sed $d\overline{CP} = D_2P$, ergo ${}_1V_2V$ ut D_2P. Ac proinde D_1P ut CP in D_2P. Ergo datur constans F talis, ut sit F in $D_1P = \overline{CP}$ in $\overline{D_2P}$, seu $CP : F :: D_1P : D_2P$ adeoque $:: TC : CP$ seu $TC = \overline{CP}$ quad. : F. Unde constructio: Recta constans sit CG normalis ad CP; junge GP, ea erit normalis ad spiralem PP seu ad ejus tangentem.

Ipsa CG pulchre respondet simili constanti in parabola inter ordinatam et curvae normalem in axe interceptae. Id interest, quod CP sunt in parabola parallelae, in spirali convergentes.

Memini P. Gregorium a S. Vinc. in magno suo Opere Tetragonistico bellam comparationem instituere inter Spiralem et Parabolam et (quod mihi non improbabile videtur) statuere ex cognitis proprietatibus parabolae Archimedem in spiralis naturam penetrasse.

Solutum est problema*) illo ipso die quo mihi redditum est, nimirum 27. Maji, ita ut statim proximo cursore remiserim. Nec solvi tantum modum, sed et ostendi modum solvendi problema infinitis modis, et efficiendi ut superficies hemisphaerica demtis fenestris seu foraminibus residua seu quadriforaminata sit aequalis

---

*) Aenigma de templo hemisphaerico quadrifenestrata quadrabili

dato quadrato; simplicissimas quoque adjeci solutiones, ubi aequatur quadrato diametri. Es kan wol seyn, dass man bey ihnen geglaubet, es lauffe bey meiner gerühmten Analysi ein wenig aufschneiderey mitunter, und hat sie damit auf die Probe stellen wollen. Ich möchte wündschen, dass man mir nie schwerere problemata proponirte, denn dieses erfordert keine weitläufftigkeit in calculiren oder construiren, sondern nur eine adresse in applicatione Methodi, und dass sind eben die problemata die mir wohl gefallen. Es reduciret sich dieses problema auf quadraturam Carbasi, wie ich es nenne, vel Lunulae (ut ita dicam) sphaericae, quae ad veli seu Carbasi instar inflata est.

Nimirum sit (fig. 99) Hemisphaericae superficiei quadrans PDQSAP; in eo ducatur linea PλLA talis naturae, ut si per P tanquam polum et punctum lineae L ducatur Meridianus PNLG, occurrens ipsi QSA quadranti aequatoris, in S; sit SF sinus rectus graduum QS, aequalis ipsi PB sinui verso graduum (arcus meridiani) PNL; dico trilineum PNLAP aequari rectangulo QKF, et Carbasum partialem PλLNP aequari rectangulo KQF, et totam Carbasum PλLAP aequari quadrato radii. Atque ita totum templum Hemisphaericum, cujus superficies sit ex quatuor istis carbasis composita, et fenestrarum quatuor unaquaeque sit figura cornuta PDQALλP, aequari quadrato diametri.

Analysis Problematis de Templo Hemisphaerico quadrifenestrato quadrabili; accessit constructio, in qua quatuor fenestrae sunt concinnae seu ambidextrae, et a basi et fastigio remotae, imo si placet, plane insulatae sive undique more fenestrarum solito a muro cinctae.

Elementum Quadrantis superficiei sphaericae PβBHAψP (fig. 100) est quadrilineum LMN vel LN, cujus aestimatione habita viam reperiemus ad mensurandas partes superficiei. Jam LN est factum ex LM in MN; hos duos ergo arcus elementares, id est rectas ab ipsis inassignabili errore differentes metiamur.

Ex analysi infinitorum constat $LM \overset{(1)}{=} SQ, CP:QM$. Rursus MN ad HG ut QM ad CG seu ad CP, seu $MN \overset{(2)}{=} HG, QM:CP$. Ergo fit LM in $MN \overset{(3)}{=} SQ.HG$. Ergo trilineum elementare PLMNKP $\overset{(4)}{\text{aequatur}}$ ipsi PQ in HG. Porro ad instar aequationis 1. est $HG \overset{(5)}{=} EF.CP:GE$, et fit $PLMNKP \overset{(6)}{=} EF$ in $PQ.CP:GE$. Itaque si $PQ \overset{(7)}{=} GE$, fit

PLMNKP[8] $=$ CP in EF, et aggregata talium trilineorum elementarium componentia superficiem sphaericam itidem habentur. Nam trilineum sphaericum PVTRNKP (comprehensum inter arcus PVT et PKN) aequatur[9] rectangulo sub CP in XF, et Carbasus PΩTRNKP quae est bilineum, comprehensum linea PΩTRN (per polum P et extrema arcuum ducta) et ultimo arcu aliquo PKN, aequatur[10] rectang. CP in BF seu rectang. CBF. Quodsi linea sit producta per π usque ad A, nempe PΩTRNπA, seu si ultimus arcus sit ipse quadrans PψA, Carbasus P$\Omega\pi$AψP aequatur[11] quadrato a CP seu a radio sphaerae; itaque si quatuor tales carbasi componant parietes templi hemisphaerici cujus basis BAO bis (sive circulus a radio BC), zenith vero P, et PβBHANΩP sit una ex quatuor fenestris, habetur quaesitum. Sed si quis nolit templum in quatuor punctis A quiescere, remedium in promtu est, quod et jam indicare memini. Nempe arcus PNH bisecet quadrantem basis BHA, patet ex dictis trilineum PKNπAψP aequari rectang. BCF. Ex puncto N ducatur linea NξB congrua et similiter posita ipsi NπA, patet quadrilineum P$\beta\xi$NπAψP (duplum trilinei PKNπAψP) aequari rectang. sub OB et CF. Hinc si B fiet zenith et AP basis, utique hoc quadrilineum erit quarta pars templi hemisphaerici, cujus fenestra erit trilineum BξNπAHB; idem est si A sit zenith et BP sit basis.

Sed jam omissis specialibus, quae inaedificavimus casui numeri 7, nunc generalia persequendo redeamus ad aequ. 6, et BE sit x, CP sit a, GE seu y erit[12] $\sqrt{2ax - xx}$, et EF[13], dx, et HG[14], dx, a:y, et PQ, v, PLMNKP[15] $= dx\, va : y$[16] $= dx\, va : \sqrt{2ax - xx}$. Hinc si sumamus valorem ipsius v per x, sic ut $dx\, va : \sqrt{2ax - xx}$ sit quantitas summabilis, habetur quadratura portionis superficiei sphaericae secundum talem legem formatae. Sic si sit[17] $v = a - x$, utique res succedit, nam fit $a \int \overline{a - x}\, dx : \sqrt{2ax - xx}$[18] $= \sqrt{2ax - xx}$. Sic et res succedit, si fiat $v = \sqrt{xa}$, nam $aadx : \sqrt{2aa - x}$ est summabilis.

Jam uti quaesivimus supra (aequ. 4) dimensionem trilinei elementaris PLMNKP, ita possumus et quaerere dimensionem residui quadrilinei elementaris, nempe LMGHNK, quod est aequ.[19] CQ in HG. Ergo si CQ$=$GE (id est arcus PM ipsi GA), eodem modo habetur quadratura ut ante in casu aequ. 7. Figura autem erit diversa a priore, linea scilicet curva fiet BδP et paries erit BδPψAHB, fenestra erit PβBδP.

Possemus autem adhuc magis Methodum variare resolvendo superficiem sphaericam non sectionibus per verticem in trilinea elementaria PKLP vel quadrilinea elementaria NHGM, sed sectionibus basi parallelis in zonas elementares ut βNMLK$\alpha\beta$. Nam quia KLMN seu LM in MN aequ. SQ.EF.CP:GE per aequ. 5 et 3, hinc servata eadem SQ, utique zona βNMLKβ erit aequ. $\overline{\text{BE.SQ.CP:GE}}$, seu posito PQ, v et SQ, dv, fiet haec zona (de a)$=x\,a\,dv:\sqrt{2ax-xx}$; unde si v sumatur talis, ut haec quantitas sit summabilis, habebitur quadratura compositi ex zonis. Et ita fieri potest, ut quadretur superficies corniculata PβBHAΩP, carbasus autem PΩNAψP fiat fenestra. Si ae fiat $=ha+a\sqrt{2ax-xx}\,x:a^n$, habebitur v, modo n sit numerus integer affirmativus quicunque, ut ex calculo patet. Et summa zonarum seu conflata figura quadranda erit ae.

Sed si fenestram velimus in pariete supra infraque clausam (fig. 101) nec ad basin vel apicem templi pervenientem, eamque concinnam seu ambidextram, ut ΩM$\varphi\mu\omega\zeta\Omega$ in templi quadrante PφAGBζP, id quoque obtinere licet, duas priores methodos conjungendo. Nempe arcus quadrantalis P$\Omega\omega$H bisecet templi quadrantem in duos octantes quorum unus sit P$\Omega\omega$HGAφP. Jam efficiamus, ut tam ΩPφMΩ, quam ωHGA$\varphi\mu\omega$, id est octans demta semifenestra sua sit quadrabilis, inque eam rem quaeramus lineam ΩM$\varphi\mu\omega$ (congruentem cum reliqua dimidia alterius octantis, nempe cum $\Omega\zeta\omega$) talem ut prodeat quadrabilitas. Ex M et μ in CP ductae normales sint MQ, μq, et posita BE, x et CP seu CB, a, sit PQ $\overset{(20)}{=}$ Cq $=\frac{1}{2}\sqrt{ax}$. Ita ex puncto φ ducta normalis φכ bisecabit CP in ב; jam quia PQ seu v $\overset{(21)}{=}\sqrt{ax}:2$, et per 16. est $\int$, $dx\,va:\sqrt{2ax-xx}$ $\overset{(22)}{\text{aequa-}}$lis trilineo ΩPφMΩ, si scilicet x sumatur a BF usque ad BC. Itaque explicando v per 21, fiet ex 22. $\int$, $dx\,aa:2\sqrt{2aa-ax}$ (ab x, BF usque ad x, BC) $\overset{(23)}{\text{aequ.}}$ ΩPφMΩ, quae summa potest haberi. Nimirum ducatur (fig. 102) linea 567A ita ut sit F6 (vel E7) $\overset{(24)}{=}\sqrt{2aa-ax}$, scilicet ut posito x esse BF (vel BE), sit F6 media proportionalis inter OF (seu 2a—x) et inter CB; ita prima ordinata B5 erit $a\sqrt{2}$ et ultima CA est a. Similiter ducatur linea 8 9 10 11 talis ut (posito BF vel BE esse x) sit F9 (vel E10) $\overset{(25)}{\text{aequ.}}$ $aa:2\sqrt{aa-ax}$, patet aream ut F 9 10 E $\overset{(26)}{\text{aequari}}$ trilineo ΩPM, et aream F 9 10 11 C $\overset{(27)}{\text{aequari}}$ trilineo ΩPφMΩ. Hujus areae ergo quaeratur quadratura. Reperietur autem ex calculo differentiali generaliter esse

$\int, dx\, aa : 2\sqrt{2aa - ax}$ [28] aeq. $aa\sqrt{2} - a\sqrt{2aa - ax}$, nam differentiando utrinque prodit identica aequatio. Adeoque per 28. fit B 8 9 1 0 E [29] aequ. rectang. sub CB et differentia inter B5 et E7, scilicet in 28. sumendo x a 0 usque ad BE, et similiter B 8 9 F [30] aequ. rectang. sub CB et differentia inter B5 et F6, et denique eodem modo B 8 9 10 11 C [31] aequ. rectang. sub CB et differentia inter B5 et CA seu inter $a\sqrt{2}$ et a. Jam F 9 10 11 C [32] aequ. B 8 9 10 11 C—B 8 9 F ex constructione; ergo (per 31, 30) rectang. sub CB et differentia inter F6 et CA [33] aequ. F 9 10 11 C, id est (per 27) trilineo $\Omega P\varphi M\Omega$. Jam CA est a, et BF est $a - a : \sqrt{2}$, posito H bisecare quadrantem BHA, et F6 (per 24) est $\sqrt{2aa - ax}$, posito BF esse x; ergo fiet F6 = $= \sqrt{2aa - aa + aa : \sqrt{2}}$ [34] $= a\sqrt{1 + 1 : \sqrt{2}}$, media scilicet proportionalis inter CB radium et OF compositam ex a radio et CF semilatere quadrati inscripti. Et factum sub hac media proportionali et radio [35] aequabitur trilineo $\Omega P\varphi M\Omega$. Sed idem trilineum supra fenestram [36] aequatur hoc loco quadrilineo infra fenestram, quod est $\omega HGA\varphi\mu\omega$, quod ex constructione sic ostendo. Nempe per 4. patet trilin. $\Omega P\varphi M\Omega$ [37] aequari summatis PQ in HG inter H et A; et similiter per 19. patet quadrilineum $\omega HGA\varphi\mu\omega$ [38] aequari summatis CQ in HG itidem inter H et A. Jam ex constructione hoc loco est CQ aequ. PQ per 20, ergo cum singula summanda singulis sint aequalia et eadem sint utrobique, erit totum toti aequale, trilineum scilicet quadrilineo, adeoque vera est aequ. 38. Unde sequitur per 35, totum octantem demta semifenestra (compositum scilicet ex dictis trilineo et quadrilineo) aequari facto sub diametro sphaerae et media proportionali inter CB radium sphaerae et OF compositem ex OC radio et CF semilatere quadrati inscripti, ejusque octuplum aequabitur templo. Q. E. F.

Postremo si cui displiceat, quod fenestra quaevis hujus novissimae constructionis tangitur a vicinis fenestris, malitque fenestras non tantum a basi et fastigio esse remotas, et concinnas seu ambidextras, id poterit ex hac constructione obtinere; descripta scilicet fenestra $\zeta\Omega M\varphi\mu\omega\zeta$ in superficie sphaerae jam aliter formet quadrantem templi, ut scilicet zenith non sit P, sed aliud punctum trans P, sumtum in arcu quadrantem bisecante $H\omega\Omega P$ producto trans P; ita basis non erit arcus quadrantalis BHA, sed huic parallelus propior fenestrae bisectus et ipse ab arcu $H\omega$, vel quod eodem redit, in hoc ipso figurae nostrae quadrante retento (cum superficies sphaerica undique sibi congruat) transferatur fenestra $\zeta\Omega M\varphi\mu\omega\zeta$ deorsum versus BHA, sic tamen ut arcus HP per ejus medium transeat ut ante. Sed hoc modo fenestra non pertinget ad quadrantis extrema, sed insulabitur in quadrante, quorum quatuor conjuncti templum component.

Ich habe in der (vorhergehenden) solution angewiesen, quod cuivis curvae secundum Geometriam quadrabili respondens solutio nostri problematis zu assigniren etc. Dadurch wir gleich methodice finden dasjenige, darauf einen andern seine series meditationum gebracht.

Ich glaube das V.*) mehr wisse als er weiss, das ist, er wisse seine wissenschaft nicht in methodum zu bringen. Denn ich bin gewiss, dass man auch eine eigene analysin ad formam methodi Veterum machen köndte, die ihre besondere avantagen über die Algebram hätte, ob sie ihr schon in einigen andern dingen weichen muss, aber es fehlet diesen leuten die Ars Artium, das ist die Kunst Künste zu machen. Sie haben eine gewisse routine, etwas auf ihre weise zu erfinden, so in der that analysis ist, aber sie wissens selbst nicht, können auch nicht damit weit kommen, haben so zu sagen nur eine analysin naturalem, wie die bauern eine arithmeticam naturalem, aber damit sollen sie keine cubische wurtzel extrahiren.

Ich schreibe sonst dem Euclidi, Apollonio, auch dem V. nicht nur eine Historische Geometri, sondern ein weit mehreres zu, aber seine scholaren bleiben Historici nudi.

De locis solidis könte wohl was gutes noch gesagt werden, nehmlich wer eine seriem schöner theorematum gebe, wie die Veteres bereits gethan und angefangen. Ich gestehe, dass ich gantz nicht zufrieden mit dem was Fermatius, Cartesius, Schoten, de Wit und andere in doctrina locorum gethan; sie demonstriren wohl, das oder jenes sey ein locus planus, was Apollonius dafür ausgeben, aber sie weisen nicht, wie Apollonius oder andere vor ihm auf den Catalogum locorum planorum gekommen, idemque est de solidis.

*) Wahrscheinlich Viviani.

Es stecket noch ein und anders in den Veteribus verborgen, so verlohren; ich sehe gar wol, dass sie ihre künste zurückgehalten, und dass wir sie nicht alle wissen; hingegen wissen wir anderwerts mehr als sie, und wolte ich mit ihnen nicht gern tauschen. Man kan in Conicis noch viel ungethanes thun; hätte ich selbst 20 köpffe oder vielmehr 20 gute freunde, so wolte ich einen (der sich auf dergleichen hauptsächlich legen wolte) bitten, die universalia Conica zu tractiren, wie des Argues und Mr. Pascal angefangen, deren gedanken la Hire zum theil herausgegeben.

Solutio Problematis a Galilaeo primum propositi de Natura et Usu Lineae, in quam Catena vel Funis (extensionem non mutans) se proprio pondere curvat.

Catenariae lineae FCA(C)L (fig. 96) latitudo C(C) est Logarithmus ΘN duplus; altitudo NC vel ΘB est media arithmetica inter duos ejusdem Logarithmi numeros Nξ et (N)(ξ), quorum scilicet media Geometrica est unitas ΘA, ita ut, si $\Theta_3 N = \Theta A$, sit ΘA ad $_3N_3\xi$ in ratione certa hic exposita ב ad א.

Hinc ope catenae vel funiculi sine omni calculo licet invenire Logarithmos ex numeris et numeros ex Logarithmis. Praeterea pro tangentibus, dimensione lineae, spatii et centris grav. utriusque inveniendis sunt: $\Theta R = \Theta B$; $\Theta R - AR = N\xi$; $\Theta R + AR = (N)(\xi)$; Triangula ΘAR et CBT sunt similia; AR$=$AC; $\psi\omega =$ CA(C)$=$ bis AC, rectang. RAΘ $=$ spat. AΘNCA. Sint G, P, Q centra grav. CA(C), AC, AΘNCA, et erit $\Theta\vartheta + \Theta B =$ bis $\Theta G =$ quater $\Theta\beta$, et AE$=$GP$=\beta$Q.

Analysis Problematis Catenarii.

AB, x; BC, y. Jam ex natura curvae, posito arcus seu catenae A_1CC centrum gravitatis esse P, demissa in AJ Tangentem verticis A perpendiculari PE, tunc juncta CE tanget curvam in C. Ex C normalis demittatur CJ, erit JE$=$xdy$:$dx, et EA seu e erit $\overset{(1)}{=}$ y$-$xdy$:$dx. Rursus quia P centrum arcus AC qui vocetur n, et n $\overset{(2)}{=} \int\sqrt{dx^2+dy^2}$, et momentum arcus ex axe AB est $\int\overline{ydn}$, et momentum hoc divisum per ipsum arcum n dat distantiam centri arcus ab axe seu GP sive AE, ideo fit e $\overset{(3)}{=}$ y$-$xdy$:$dx $\overset{(4)}{=} \int\overline{ydn}:n$, et fit $de \overset{(5)}{=}$ (ex 3) $x\overline{ddy:dx}$. Rursus $de \overset{(6)}{=}$ (ex 4) $ydn:n - dn\int\overline{ydn}:nn$, ubi aequando duos valores ipsius de, et pro $\int\overline{ydn:n}$ substituendo valorem $y - xdy:dx$, destructis destruendis fit $-\overline{ddx:dy}:\overline{dx:dy} \overset{(7)}{=} dn:n$. Unde sequitur $dx:dy \overset{(8)}{=} n:a$, seu (per aequ. 2) $dx:dy \overset{(9)}{=} \int\overline{\sqrt{dx^2+dy^2}}:a$, ubi a oritur tanquam assumenda unitas ad homogeneorum legem implendam. Et aequationem 8. differentiando fit $dn:a \overset{(10)}{=} ddx:dy$, posito dy esse semper constantem seu ipsas y crescere uniformiter seu ddy esse $\overset{(11)}{=} 0$, quod in arbitrio est sic assumere. Jam quia est $dn^2 = dx^2 + dy^2$ (per aequ. 2), fit $dn\,ddn = dx\,ddx + dy\,ddy$, et quia $ddy = 0$, fit $dn\,ddn \overset{(12)}{=} dx\,ddx$, et tollendo ddx ex aequ. 10 per aequ. 12 fit $ddn = dy.dx:a$, et quia dy constans, inde fit (summando) $dn \overset{(14)}{=} dy\,x:a + dy$, nam dy posita constante (seu $ddy = 0$) utique differentiando aequa. 14 redit aequ. 13. Porro ex aequ. 14 per aequ. 2, sublato dn, fit $dx\,a:\sqrt{2xa+xx} \overset{(15)}{=} dy$, et faciendo $x \overset{(16)}{=} z - a$ seu $z = \Theta B$, fit $dz\,a:\sqrt{zz-aa} \overset{(17)}{=} dy$, ubi $\Theta A = a$. Jam quia $dz \overset{(18)}{=} dx$, fit per aequ. 8 $dy:dz \overset{(19)}{=} a:n$, ergo conferendo aequ. 17 et 19, fit $n \overset{(20)}{=} \sqrt{zz-aa}$, quae est extensio curvae in rectam. Porro ex aequ. 14 per aequ. 16 fit $dn:dy \overset{(21)}{=} z:a$, ergo jungendo aequ. 19 et 21 fit $dy; dx; dn :: = a; n; z$, seu dy, dx, dn adeoque CB, BT, TC se habent inter se ut a, n, z seu ut ΘA, AC, ΘB; et quia sumto $\Theta R = \Theta B$ seu z, fit $AR = \sqrt{zz-aa}$, ergo (per 20) fit $AR = n =$ arcui AC, ergo CB, BT, TC se habent ut ΘA, AR, $R\Theta$ seu triangula CBT et ΘAR sunt similia. Ita habemus proprietatem tangentium curvae. — Quadratura areae sequitur ex aequ. 21, quia $\int\overline{zdy} \overset{(23)}{=} an$. Porro ponatur $z + n \overset{(24)}{=} aa:\omega$. Unde (per 20) $z - n \overset{(25)}{=} \omega$, et ita tollendo z et n ex aequ. 21 per aequ. 24 vel 25 (et harum differentiales) fit $dy \overset{(26)}{=} -d\omega a:\omega$, seu si ω sint ut numeri (unitate minores ob signum —), erunt y Logarithmi. Adeoque si $A\Theta$ seu a aequ. Θ_3N, et a sit parameter Logarithmicae seu si juncta A_3N tangat Logarithmicam $A\xi_3\xi$ in A, et inter ΘA et ${}_3N_3\xi$ inveniantur quotcunque mediae proportionales, per quarum extrema ξ, ${}_3\xi$ etc. transeat curva logarithmica $A\xi\xi$, tunc ΘN seu BC seu y erit Logarithmus et $N\xi$ seu $\Theta\omega$ erit numerus ω unitate (a seu ΘA) minor, et posita $\Theta(N) = \Theta N$, erit $(N)(\xi)$ numerus unitate ΘA seu a major, et ΘB seu NC seu z (per 24 et 25) erit $\overline{N\xi + (N)(\xi)}:2$ seu media arithmetica inter $N\xi$ et $(N)(\xi)$. Et his fere omnia quae de hac curva inveni continentur exceptis centris gravitatis, quae nunc brevitatis causa omitto.

Was die begehrte aequationem curvae logarithmicae betrifft, damit diene folgender gestalt: Gesetzt (fig. 103) AB sey $=BC=1$, also dass 1 parameter logarithmicae, und BG sey x, FG sey y, und DA sey b, so ist $y=b^x$, quae est aequatio transcendens exponentialis; sunt autem aequationes exponentiales omnium transcendentium perfectissimae, quando possunt obtineri. Es haben aber BC und AD oder 1 und b allezeit eine beständige proportion zusammen, so in allen Curvis Logarithmicis bleibet, et juncta AC tangit curvam in C. Weilen aber die Transcendentes auch per aequationes differentiales zu exprimiren, so kan man es also thun: Natura Logarithmicae bringt mit sich, ut sumto puncto quocunque F atque inde educta tangente FT, occurrente ipsi Asymptoto BA in T, sit recta GT constans seu aequalis semper eidem, nempe ipsi parametro AB vel BC vel 1. Quod si jam BC (vel 1) vocemus a, fiet TG seu a ad GT seu y ut dx ad dy, seu fiet aequatio $ady=ydx$, seu posito $a=1$, fiet $dy=ydx$, quae est aequatio differentialis naturam Logarithmicae exprimens, maximae utique simplicitatis, uti certe logarithmica omnium transcendentium simplicissima est.

Das fundamental assumtum, naturam Curvae Catenariae zu bringen ad aequationem, ist dasjenige, was Hugenius, P. Pardies und andere vorlängst annotiret circa proprietatem tangentium curvae, dass nemblich die tangentes $C\pi$ (fig. 104) und $_1C\pi$ einander treffen in puncto π, so gerade stehet unter $\aleph$ centro gravitatis arcus C_1C; daher wenn AE ist tangens verticis A, und tangens puncti C den tangentem puncti A antrifft in E, so muss E gerade stehen unter P centro gravitatis arcus AC, das ist, AE ist distantia centri gravitatis arcus AC ab axe AB, oder AE in AC est momentum arcus seu catenae AC ex axe. Ex hac consideratione kan man nun ad aequationem differentialem kommen, durch deren verfolgung man endlich alle die von mir gesetzte theoremata herausbringen kan.

Wie die Tangens curvae, cujus aequatio: $\sqrt{xx+yy}+\sqrt{aa-2ax+xx+yy}+\sqrt{bb-2bx+xx+yy}=c$, und dergleichen zu finden per compendium, so setze man $\sqrt{xx+yy}=l$, $\sqrt{aa-2ax+xx+yy}=m$, $\sqrt{bb-2bx+xx+yy}=n$, also $c=l+m+n$, so wird sein $dn=xdx+ydy-bdx,:n$, und also dergleichen hat man auch dm und dl. Weil nun $dc=0$, so wird $0=dl+dm+dn$, et substituendo valores atque ordinando fiet aequatio $dy:dx = \overline{-x:l+\overline{a-x}:m+\overline{b-x}:n},:,\overline{y:l+y:m+y:n}$. Unde fit (fig. 105) $TE = \overline{-AE:AF+BE:BF+CE:CF},:,\overline{1:AF+1:BF+1:CF}$. In Numeratore iis quae sunt ab una parte ipsius E, praefigitur —, reliquis +. Et idem Canon valet pro focis quotcunque. Ich vermuthe dass man aus diesen Calculo generali leicht die regulam per centrum gravitatis würde demonstriren können.

Ich muss bekennen, dass caeteris paribus ich mehr von den constructionibus per motum, als per puncta halte, und wenn der motus seine gebührende simplicität hat, so halte ich das nicht pro Mechanico, sondern pro Geometrico. Die designatio per puncta pfleget zwar commodior pro calculo analytico zu seyn, sed de eo proprie non agitur in Geometria. Will Er selbst den calculum machen, so wird er ..... Methodum cujus specimen dedi leicht können suchen, was für eine quadratura oder $\int \ldots dx$ erfordert werde pro dimentiendo Velo Viviani, und da wollen wir denn sehen, ob solche quadratura ex nostris artibus dabilis sey. Wiewohl ich freylich noch nicht zeit gehabt die Canones quadraturarum zu prosequiren und die sache dahin zu bringen, ut omnes quadraturae saltem infra certum gradum sint in potestate, quoad possibile est, wiewohl ich den weg dazu genungsam sehe. Ebenmässig wird Er per calculum elementum curvae determiniren können und daher finden, was die linie (curva in superficie sphaerae per intersectionem cylindri axi sphaerae paralleli in construct. Viv.) für relation habe ad elementa curvae Ellipseos. Es hat Paschalius in literis sub nomine Dettonvillaei editis die curvas cycloeidum secundariarum mit den curvis Ellipsium conferiret.

Meine Quadratura Arithmetica beweiset sich ohne demonstration. Osannam, ein Algebriste zu Paris, hat weiss nicht wie weit, die brüche zusammen gerechnet, weil er vermeynet, er wolte einen irthum finden; er hat sie aber müssen glauben, als er den success gesehen. Nicht nur Hr. Hugenius, sondern auch Wallisius in einem opere Anglico de Algebra haben meine quadraturam Arithmeticam approbiret, andere zu geschweigen.

Die Kunst ex data quadratura totius quadraturam partium zu finden, kan Hr. Tschirnhaus nicht, ist auch nicht müglich. Es gehören bissweilen gantz andere dinge dazu, quae in casu speciali, qualis est casus totius, evanesciren. Eben darüber war ein streit zwischen Hr. Tsch. und mir. Er hatte gesetzet in Actis, dass er hiemit einen Methodum gebe, damit quadraturae ausgemacht und sogar impossibilitas quadraturae circuli bewiesen. Der Methodus gienge aber nicht weiter an, als so weit er von mir gesetzet und ihm längst communiciret worden war, nehmlich per differentias, und das seinige folgte gar nicht daraus. Seine meynung war, quotiescunque in figura analytica pars per ordinatam absecta est quadrabilis seu segmentum, tunc figuram esse infinite quadrabilem, seu quodlibet ejus segmentum curva et recta vel rectis comprehensum esse quadrabile. Auf die instantiam de Cycloide, deren certa segmenta solis rectis et curva comprehensa Hugenius und ich quadriret, antwortet er, Cycloidalis linea sey nicht analytica, quod est verum; da erdachte ich ihm eine andere instanz; ich nahme die lunulam Hippocratis (fig. 106), applicirte alle deren ordinatas bc ad rectam, nempe transferendo in (b)(c), da kommt eine newe figur heraus, cujus totum AD(c)A aequatur lunulae, ideoque est quadrabile, sed partes quaelibet non item. Durch diese instanz war M. Tsch. embarassiret, zumahl weil ich ihm originem lineae A(c)D ex lunula nicht expliciret, und auch die quadraturam totius nicht expliciret habe. Endlich quod felix faustumque sit, war er endlich drauf ohngefehr gefallen, und hatte originem ex lunula gefunden, also auch quadraturam; da war nun quaestio de effugio; das bestund darinnen, er sagte, lunula sey auch indefinite quadrabilis, eo scilicet modo, wie M. Hr. in seinem brieff gesetzet; aber darvon war die quaestio nicht, lunula est composita ex duabus curvis, aber in der figura AD(c)A ist das totum quadrabile, und wird er doch nimmermehr indefinitam quadraturam partium finden. Daher fallet auch sein ratiocinium hin, damit er impossibilitatem quadraturae totius circuli bewiesen zu haben vermeynte. Ich glaube, der modus secandi lunulam in partes quadrabiles oder dergleichen sey auch bey dem Vincentio Leotaudo in Amoeniore Curvilineorum contemplatione. Im übrigen zweifele nicht, dass ihn Hr. Tsch. de suo gefunden. Ist das Theorema richtig, so wird es M. Hr. per calculum leicht also finden. Demonstrandum est (fig. 107) ADEA esse $= CAM$. Ergo $d\overline{ADEA} = d\overline{CAM}$, hoc est $DE(E)(D) = CM(M)$. Ob nun dieses wahr, wird der calculus analyticus zeigen. M. Hr. darff nur analytice determiniren aream elementarem DE(E)(D), quod fit quaerendo aream CD(D), atque inde detrahendo aream CE(E), concipiendo ipsas D(D) et E(E) ut rectas elementares; so wird sich die sache selbst weisen. Et haec est, ni fallor, clavis optima talium, ut ex areis rem transferamus ad earum elementa seu differentias, in quibus ut se veritas prodat necesse est, quoties de theorematibus talibus indefinitis demonstrandis agitur. Sed quando quis mihi proponit theorema definitum in quadraturis, non possum semper ejus promittere demonstrationem, quia tunc cessat hoc subsidium, et prius perficienda est ars quadraturarum. Ist Hr. Viviani discurs ein theorema indefinitum, so ist M. Hr. versichert, dessen veritatem per calculum finden zu können. Die definita aber, das kan nicht versichern, sondern nur dieses sagen, dass wenn die sache ad terminos calculi analytici methodo speciminis mei reduciret wäre, so könte ich sehen, was darinn zu thun.

Freylich ist es, wie M. Hr. saget, dass die theoremata circa ductus und dergleichen beim Gregorio a S. Vincentio sich methodo nostra gleichsam von selbsten ergeben, welches specimen nicht undienlich wäre Methodi meae utilitatem zu zeigen.

Ein Handwerks Man hat diesen Sommer einen Spiegel gemacht, von harten Holtz, damit kan er an der Sonnen würste braten und dergleichen thun. Defectum politurae supplet magnitudo, adeoque copia radiorum. Man muss es aber noch nicht gemeine machen. M. Hr. könnte es als etwas rares dem GP. (Grossprinzen?) communiciren. Ist res facile parabilis; potest esse magnae utilitatis.

Circulus proprie loquendo non habet focum; interim pro succedaneo foco in reflexione est focus parabolae, in refractione focus Ellipseos vel Hyperbolae, quam circulus in vertice osculatur. Osculatur autem circulus curvam ille, qui est omnium circulorum intus tangentium maximus. Ich habe die Oscula zuerst in Geometriam introduciret in Actis Eruditorum. Ut recta tangens in puncto contactus habet eandem cum curva directionem, ita circulus osculans in puncto osculi habet eandem cum curva flexuram seu curvedinem. Recta mensurat directionem, quia ipsa est uniformis directionis; circulus mensurat curvedinem, quia ipse est uniformis curvedinis. Ex omnibus circulis angulum contactus cum curva in puncto proposito facientibus circulus osculans facit angulum contactus minimum, quem voco angulum osculi. Hinc circulus osculans quam proxime ad curvam accedit et cum ea quasi repit. Itaque si in axe parabolae intra parabolam sumas punctum quod a vertice distet magnitudine semilateris recti, et hoc puncto velut centro, distantia a vertice velut radio describas circulum, is parabolam in vertice osculatur, et hujus circuli focus vel potius quasi-focus erit idem cum foco parabolae. Hinc jam patet punctum, in quo radii a longinquo puncto venientes adeoque pro parallelis habendi post reflexionem conjunguntur. Pro refractione, loco parabolae, adhibeatur Ellipsis quae in vertice suo circulum osculatur, vel Hyperbola, prout effectus est quem desideramus. Ita omnia quae Cartesius efficit Ellipsibus vel Hyperbolis, circulo praestantur practice seu succedanee pro radiis parallelis, convergentibus aut divergentibus. Also dass aus dieser einigen consideration alles leicht zu definiren, auch loca imaginum etc. zu haben: Lineae osculantes in praxi possunt esse succedaneae earum quas osculantur. Wenn man also locum repraesentantem punctum seu primum focum per primam refractionem gefunden, so consideriret man dieses punctum wieder ut radians, und findet dessen focum secundum, et ita si placet tertium.*)

---

*) Antwort auf die Frage de foco 3. lentium ultimo. Bemerkung Bodenhausen's.

So viel ich dessen modum procedendi verstehe, so düncket mich auf diese weise wollen sich die areae oder summationes nicht finden lassen. Die ars ist noch nicht ausgemacht. Es gehören viel praeparatoria dazu; biss die fertig, muss man sich mit allerhand vortheilen behelffen. Mit dem exemplo proposito ist es leicht. Denn weil $xdx = dxx:2$, so kann man anstatt xx setzen ay, und anstatt $dxx:2$ setzen $day:2$ oder $ady:2$. Ergo kan anstatt $axdx:\sqrt{aa+xx}$ gesetzet werden $aady:2\sqrt{aa+ay}$, welches denn wieder leicht ad simplicius zu reduciren. Denn anstatt $a+y$ kan man setzen v, also anstatt dy bleibt dv; ergo anstatt $aady:2\sqrt{aa+ay}$ komt $aadv:2\sqrt{av}$. Nun ist bekandt ex nota quadratura Hyperboloeidum vel Paraboloeidum das $aa\int dv:2\sqrt{av} = a\sqrt{av}$, ergo $= a\sqrt{aa+ay} = a\sqrt{aa+xx}$, hoc ergo $= a\int xdx:\sqrt{aa+xx}$. Man wird es auch in der Probe befinden, denn man darff nur differentiren $\sqrt{aa+xx}$, so wird man bekommen $xdx:\sqrt{aa+xx}$.

Mit peculiaribus hypothesibus, dass ich x zum exempel setze $\frac{1}{2}a$ oder dergleichen, gehen die summationes nicht an, glaube auch nicht solche gebraucht zu haben; omnis summatio tetragonistica comprehendit infinitas x diversas; darff ich also sie nicht auf die assumtionem unius certae x gründen; aber wenn ich einmahl die summationem per calculum indefinitum gefunden, da kan ich es denn ad casus speciales appliciren, und x oder y expliciren; vorhero aber ists nicht zugelassen und werden dergestalt freylich impossibilia mit hauffen herfürtreten; also in summatione darff man x pro constante nicht nehmen.

Der Regressus in Calculo differentiali a d ad $\int$, nehmlich dass man die quadraturas entweder absolute finde oder ad simpliciores v. g. circuli et hyperbolae etc. reducire, item dass man die curvas per proprietatem tangentium datas reducire ad quadraturas oder gar ad aequationes ordinarias: das sind dinge, so Kunst erfordern, und noch nicht ad perfectam methodum gebracht. Ich habe zwar die wege dazu, aber solche wege zu gehen und die nöhtige canones auszucalculiren, dazu habe ich keine Zeit; ich müste an einem orth seyn, da junge curiose leute wären, die sich auf diss studium rechtschaffen appliciren und etwas rechtschaffenes darinn thun wolten, die könten inter exercendum sese solche Dinge ausmachen; ich kan die Zeit auf lange calculos nicht wenden. Mir gehet es wie dem tiegerthier, von dem man sagt, was es nicht im ersten, andern oder dritten sprung erreiche, das lasse es lauffen.

Ich habe unlängst Actis Lipsiensibus inseriren lassen einen newen wunderlichen motum, der gantz richtig und regular, aber vor den in Geometria gebräuchlichen motibus gantz unterschieden, durch welchen ich per viam generalem alle quadraturas zu construiren auf einmahl weise. Die occasion dieses motus hat mir feu Mons. Perrault (Medicus zu Paris, so den Vitruvium ediret) gegeben, als er mir ein problema Mechanicum zu solviren proponiret. Ich habe also diese invention schon vor 20 Jahr. Weil aber unlängst auf affine aliquid gefallen, so habe ich gut befunden, damit herfür zu wischen, wiewohl ich nicht besorge, dass man leicht darauf solte kommen seyn. Allein aus dieser construction kan man eben nicht urtheilen, ob die quadratura quaesita nicht auch per Geometriam communem zu verrichten, welches wo es geschehen kan, braucht man die viam extraordinariam nicht.

Quaeritur mensuratio portionis Lunulae ADEA (fig. 108). Quod ut fiat, quaerendum est ejus elementum ac summandum. Id elementum est ED(D)E, id est Triang. CD(D)— triang. CE(E). Est autem $CD(D) = D(D)$ in $\frac{1}{2}\overline{CT}$. AG sit x; GD, y; JF, z; FE, V. AB seu BC seu BD, a; CE, $\sqrt{2aa}$; D(D), $dx\,a:y$. Sit BL parallela et aequal. DT, patet triangula BLC et BGD congrua esse seu aequalia et similia. Itaque $CL = DG$. Itaque $CT = a + y (= DH)$. Ergo $CD(D) = \overline{a+y},\ adx:2y$. Sed $x = a - \sqrt{aa - yy}$, ergo $dx = ydy : \sqrt{aa - yy}$, et $CD(D) = ady\sqrt{a+y,:,a-y}:2$. Quaeramus jam et $CE(E) = E(E)$ in $\frac{1}{2}CE$. Est antem $E(E) = dz\sqrt{2aa}:v$, ergo $CE(E) = dz\,aa:v$. Quaeramus ergo z et v per y. Nempe ob triangula similia DHC et EFC fiet EF (seu v) : DH (seu $a+y$) :: CE (seu $\sqrt{2aa}$) : CD. Est autem $CD^2 = DH^2 + CH^2$ seu $CD^2 = a^2 + 2ay + yy + aa - yy$, ergo $CD = \sqrt{2aa + 2ay}$; ergo fit $v = \sqrt{aa + ay}$. Jam $vv + CF^2 = 2aa$ seu $aa + ay + CF^2 = 2aa$, ergo $CF = \sqrt{aa - ay}$. Ergo z $(\sqrt{2aa} - CF) = \sqrt{2aa} - \sqrt{aa - ay}$, et hinc $dz = ady : 2\sqrt{aa - ay}$. Ergo CE(E) seu $dz\,aa : v = aa\,dy : 2\sqrt{aa - yy}$. Ergo $CD(D) - CE(E) = \overline{aa + ay}dy - aady,: 2\sqrt{aa - yy} = ay\,dy : 2\sqrt{aa - yy}$ $= ED(D)(E)$. Sed $\int \overline{ED(D)(E)} = ADEA$, et $\int$, $ay\,dy : 2\sqrt{aa - yy}$ =

$\frac{1}{2}a$, $a-\sqrt{aa-yy}=\frac{1}{2}ax=$ Triang. CAG; ergo CAG=ADEA, ut erat propositum. Si omnia fuissent explicata per x (loco y), facilior fuisset summatio: nam $aydy:2\sqrt{aa-yy}$ dat $\frac{a}{2}dx$, adeoque ED(D)(E) aequ. triang. CG(G).

Itaque propositum Theorema succedit, nempe quod triang. CAG aequatur lunulae portioni ADEA, quod est specimen elegans Methodi nostrae, quae docet calculo invenire demonstrationes theorematum in curva ubique succedentium, etiamsi contineant quadraturas vel aliquid ejusmodi quod Cartesius sua Geometria vel analysi excluserat. Si ab alio propositum sit theorema, non opus est summatione, sed sufficit ipsius trianguli CAG elementum quaeri seu ipsius $\frac{1}{2}ax$, quod utique coincidit cum CD(D)(E) elemento Lunulae.

Die aequationem ad circulum pro aequ. 5 vel 6 dimensionum constituendis zu finden, solte ich eben vor so schwehr nicht halten. Cartesius hat ein gross wesen daraus gemacht; indem ich aber diss schreibe, versuch ich und finde die sache gar leicht. Zum Exempel, ich soll aequ. 5. vel 6. gradus per circulum et parabolam cubicam solviren, so nehme ich zwey aequationes locales an, eine ad circulum, nehmlich $xx+yy+cx+ey+f\overset{(1)}{=}0$, die andere ad parabolam cubicam $x+s\overset{(2)}{=}hz^3$, und nehme dann $z\overset{(3)}{=}y+t$, so wird aus aequ. 2 per aequ. 3 entstehen $x+s\overset{(4)}{=}hy^3+3htyy+3htty+ht^3$; wir nun per compend. (5) nennen $ht^3-s=p$, $m=3ht$, $n=3htt$, so wird aus aequ. 4 werden $x\overset{(6)}{=}hy^3+myy+ny+p$. Solchen valorem substituirt in der aequ. 1, so komt eine aequ. 6ti gradus:

$$\begin{array}{llllllll} hhy^6 & +2hmy^5 & +2hny^4 & +2hpy^3 & +2mpyy & +2npy & +pp & \overset{(7)}{=}0 \\ & & mm.. & 2mn.. & nn..+ & cn.+ & cp & \\ & & & ch.. & 1..+ & e.+ & f & \\ & & & & cm.. & & & \end{array}$$

Gesetzt nun aequatio data sexti gradus per circulum et parabolam cubicam construenda sey $y^6+5y^5+6y^4+7y^3+8y^2+9y+10\overset{(8)}{=}0$, allda 5, 6, 7 etc. bedeuten so viel als literas coefficientes datas qualescunque oder so viel als a, b etc. Diese aequ. 8 gemultipliciret durch hh, komt $hhy^6+5hhy^5+6hhy^4+7hhy^3+8hhyy+9hhy+10hh\overset{(9)}{=}0$; diese aequ. compariret mit der aequ. 7, so haben wir 6 terminos comparandos (denn die ersten treffen ohne den zusammen) und also auch 6 aequationes comparatitias, quarum ope die literae quaesitae c, e, f, s, h, t zu finden, welche ad constructionem circuli et parabolae cubicae erfordert werden. Es ist aber dieses keine sache die meritire dass man sich damit aufhalte. Man braucht ja solcher constructionum wenig. Dass ich aber gesagt, Vietam vel Cartesium in analysi ordinaria nihil circa radices aequationum adjecisse majorum inventis, das verstehe ich nicht de constructione per lineas, sondern de expressione analytica per radices irrationales, gleichwie wir in gradu cubico et quadrato-quadratico haben ex inventis Scipionis Ferrei et Ludovici Ferrarii, jam superiore saeculo editis. Wenn einer diess promoviren wolte, müste er tales formulas radicum irrationalium geben pro aequationibus 5ti vel 6ti gradus.

Die difficultät die M. Hr. sich macht, dass man inter summandum arbitrariam als b addiren kan, wird sich selbst aufheben, wann er die mühe nehmen wil, figuram gegen den calculum zu halten. Zum exempel, wenn ich summiren soll dx, so kan ich schreiben x+b, weiln diese formula rursus differentiata ja gibt dx, indem das b verschwindet. Diss zeigt auch die figur 109. Gesetzet AB oder BC sey x, und D(C) sey dx, und EB sey b, so sieht man ja dass DC sey die differentz nicht nur zwischen BC und (B)(C), sondern auch zwischen EC und (E)(C) und wenn man alle dx will zusammen summiren zwischen C und A, so macht ihre summa so viel BC oder AB oder x; will man sie aber zusammen summiren von C an biss nacher K, so macht ihre summa EC oder KE oder x+b; liegt es also daran wo man anfangen und aufhören will. Eine gleiche bewandtniss hat es auch mit dem signo —; denn gesetzet KE oder EC heisse z, so wird D(C) heissen können dz, und die summa von allen dz von C an biss K ist z, nehmlich EC oder KE, aber von C biss A ist sie z—b, nemlich AB vel BC. Wenn man anstatt KE oder AB annehme QE und solches nennete v, und dv adhibirte, und QK nennete c, so würde auf gewisse masse (C)D seyn —dv, weil alle die EC wachsen wenn die QE abnehmen und die summa von —dv würde seyn c—v; liegt also diese variation nur an dem modo incipiendi vel finiendi summationem, und daher ist bey $\int aadx:\sqrt{2aa-ax}$ nicht mehr schwürigkeit als bey $\int aadx:\sqrt{2aa+ax}$, und wenn ich demnach gesaget, dass die Kunst noch nicht ausgemacht, so verstehe ich es von dergleichen nicht.

Quadratura Hyperbolae ope lineae logarithmicae ist ohne difficultät, und von P. Gregorio a S. Vincent. in effectu schon ausgemacht. Unser calculus aber gibt sie ohne caeremoni; denn es ist ja in Hyperbola $y=aa:x$. Sumamus a pro unitate, ergo quaeritur $\int dx:x=z=\int ydx$. Dico z esse ordinatam ad curvam logarithmicam, posito x esse abscissam; quod sic ostendo: $dz=dx:x$, ergo $xdz=dx$. Ponamus dz esse constantem, erunt z progressionis Arithmeticae seu uniformiter crescentes; at vero x erunt proportionales ipsis dx (ob aequ. $xdz=dx$, quia dz constans proportionem non mutat), ergo x sunt proportionales suis differentiis; sed termini proportionales suis differentiis sunt progressionis Geometricae; ergo si z sint progressionis arithmeticae, erunt x progressionis Geometricae, adeoque si x sint numeri, z erunt logarithmi. M. Hr. conjungire damit meine constructionem catenariam per logarithmos, wird er alles leicht finden. Es erfordern diese dinge nur attention, massen sie ausgemacht. Item in dem schediasmate, da ich zuerst Elementa calculi differentialis gesetzt, solvire ich eine curvam Cartesio nequicquam quaesitam, und weise dass es sey Logarithmica.

Weil sich M. Hr. so geneigt erbothen mit einigen inquisitionibns mir oder vielmehr der scientz zu assistiren, so habe ich beykommendes vorschlagen wollen. Es komt nehmlich alles darauff an, dass man die Aequationes differentiales von ihren differentialitatibus liberiren kann. Will demnach von denen anfangen, da dx oder dy nicht zur potenz steiget, sondern simplicis gradus bleibet, und diese aequationes haben wieder ihre gradus, nachdem x und y selbst hoch hinauff steigen. Der erste gradus ist da x und y selbst über den gradum simplicem nicht kommen, und wäre dessen aequatio generalis: $aadx+bbdy+c^3xdx+d^3ydy+q^3xdy+r^3ydx\overset{(1)}{=}0$, da dann aa, bb etc. sint quantitates datae. Solche zu resolviren, nehme ich eine aequationem differentialem resolubilem und zwar diese zureichende $dz:\overline{g+fz}\overset{(2)}{=}dv:\overline{1+ev}$, als welche per logarithmos zu solviren, denn $\frac{1}{f}$ logarith. $\overline{g+fz} \overset{(3)}{=} \frac{1}{e}$ log. $\overline{1+ev}$, es wäre denn dass e oder f wäre $=0$, so wäre der log. nur auf einer seite, als wenn $f=0$, so würde es heissen $\frac{1}{g}z \overset{(3)}{=} \frac{1}{e}$log. $\overline{1+ev}$ und dergleichen. Nun setze ich ferner, es sey $z \overset{(4)}{=} hx+ky$ und $v \overset{(5)}{=} nx+py$; als explicando wird aus aequ. 2 per 4 und 5 werden

$$\begin{matrix} +hldx & +kldy & +ehnxdx & +ekpydy & +eknxdy & +ehpydx \\ +gn.. & gp.. & fhn.. & fkp.. & fhp.. & fkn.. \end{matrix} \overset{(6)}{=} 0.$$

Solche aequ. 6 comparirt mit der aequ. 1 data finden wir die valores literarum $l, g, h, p, kn, e:f$. Dann aus denen Terminis dx und dy wird $g \overset{(7)}{=} aak-bbh,:,nk-hp$ (oder $g = \frac{aak-bbh}{nk-hp}$ vel $g = \frac{bbh-aak}{hp-nk}$) und $l \overset{(8)}{=} aap-bbn,:,-nk+hp$ (vel $l = bbn-aap,:,nk-hp$). Ferner aus den terminis xdx und ydy wird man bekommen, aus xdx zwar $h \overset{(9)}{=} c^3:,ne+nf$, aus ydy aber wird man bekommen $p \overset{(10)}{=} d^3:,ek+fk$. Folgt endlich xdy und ydx: aus xdy, wenn man h und p vermittelst der valorum 9 und 10 abschaffet, komt $kn \overset{(11)}{=} q^3:2e+\sqrt{q^6ee+2q^6ef+q^6ff-4efc^3d^3}:,2ee+2ef$; aber aus ydx komt auf gleiche weise $kn \overset{(12)}{=} r^3:2f+\sqrt{r^6ee+2r^6ef+r^6ff-4efc^3d^3}:,2ff+2ef$. Wenn man nun diese beyde valores aus den aeqq. 11 und 12 mit einander vergleichet, so komt $q^3ff-r^3ee+q^3fe \overset{(13)}{=} e\sqrt{r^6ee+\text{ etc.}}-f\sqrt{q^6ee+\text{ etc.}}$ Wenn man nun diese aequationem evolviret und die irrationales abschaffet, wird man endlich finden valorem $\overset{(14)}{\text{ipsius}}$ $e:f$ oder rationis e ad f, also dass wenn man f und n pro arbitrio annimt oder unitati gleichschätzet, oder wie es sich sonst am besten schicket, so kan man ope aequ. 12 haben k und ope aequ. 14 haben e, und sind also alle literae quaesitae ad construendum necessariae in aeqq. 2, 4, 5 gefunden, und wäre also die aequatio data 1 solviret. Wäre also gut, dass der calculus gantz ausgemacht und ab ovo (damit nicht etwa ein irrthumb einschleiche) resumiret, und sonderlich die aequ. 13 evolvirt würde, da ich dann ferner anweisen kondte, wie höher hinauff zu steigen.

Weil ich dabey bin, so will ich noch einen Calculum vorschlagen, der sehr nützlich seyn würde, weil M. Hr. ja die gütigkeit haben will sich damit zu exerciren. Es läufft in die Methodos Diophanteas hinein, hätte aber auch grossen usum in unserer Geometria altiore, wie ich zeigen werde. Gesetzt es sey ⊙⊙ + ab☽☽ $\overset{(1)}{=}$ ☿^{4}, und ⊙ sey $\overset{(2)}{=} ac + ex + \frac{f}{a}xx$, ☽ $\overset{(3)}{=} g + \frac{h}{a}x + \frac{k}{aa}xx$ et ☿ $\overset{(4)}{=} m + \frac{n}{a}x$. Solche valores nun aus den aeqq. 2, 3, 4 substituirt in der aequ. 1, so komt aequ. (5) welche zu identica zu machen oder in welcher die termini lateris unius seu valoris ⊙⊙ + ab☽☽ mit den terminis respondentibus des andern lateris seu valoris ipsius ☿ zu compariren, und mit hülffe dieser comparationen die valores literarum quaesitarum c, e, f, g, h, k, m, n zu suchen, weilen ich supponire, dass a und b allein datae; da dann nichts nachzufragen, ob die valores rationales oder irrationales seyn, worumb man sonst in methodo Diophantea sich bekümmert.

Was $\int, axdx : \sqrt{aa+xx} \overset{(1)}{=} az$ betrifft, wenn M. Hr. belieben wird die figur aufzureissen, wird er besser sehen, worumb die cautiones nöhtig so ich gegeben, dass man nemlich zusehe, wo man in summando anfange. Sit $xx \overset{(2)}{=} ae$ et $a + e \overset{(3)}{=} v$, fit $de \overset{(4)}{=} dv$, $xdx \overset{(5)}{=} \frac{1}{2}ade$ et $z \overset{(6)}{=} \frac{3}{2}\int dv : \sqrt{av}$. Gesetzt y sey $\overset{(7)}{ax} : \sqrt{aa+xx}$, und ω sey $\frac{1}{2}aa : \sqrt{av}$, so ist zwar $\int \omega dv = a\sqrt{av}$, aber das ist zu verstehen, wenn man die v anfanget zu nehmen ab initio wenn die kleinste v ist 0, allein hier fangt man an da die kleinste x ist 0 oder da die kleinste e ist 0, und per consequens da die kleinste v ist a. Gesetzt CA (fig. 110) sey e, so würde FA seyn v, posito FC esse a. Daher wenn man aus $\int \omega dv$ finden will $\int ydv$, muss man von $a\sqrt{av}$ abziehen $a\sqrt{aa}$ oder aa, nehmlich das theil von von $\int \omega dv$, welches zwischen F und C oder über CD fället. Und solches giebt jedesmahls der Calculus selbst, weil man ja daraus siehet, ob beyde als e und v oder x und e zugleich verschwinden oder zu nichts werden, oder was dem einen überbleibt, wenn das andere zu nichts wird. Diese Dinge einmahl vor allemahl gründlich zu fassen, muss man die calculos gegen die figuren halten; wenn man aber den grund einmahl hat, ists weiter eben nicht von nöthen, als in einigen schwehren fällen. Wird also hier seyn $d,a\sqrt{av-aa} = d,a\sqrt{aa+xx-aa} = axdx : \sqrt{aa+xx}$.

Was den andern calculum *) belanget, so komt es darauf an, dass ope aequationum comparatitiarum ob x^4, x^3, x^2, x^1 auch 5 literae gefunden werden vor deren assumtitiis c, e, f, g, h, k, m, n; daraus zu sehen, dass deren 3 übrig, so indeterminat bleiben und selbst pro arbitrio commode zu determiniren. Nun m et n sind bereits depechiret, dieweil wir haben valorem m:n und valorem mn, positis reliquis; oder wir könnens bey valoribus ipsorum m^4 et n^4 lassen; haben hierinnen die wahl. Sind also damit duae aequationes comparatitiae depechiret, und bleiben noch 3 zu solviren; aus so vielen kann man 3 der bequemsten wehlen; ich solte fast wehlen

$3\gamma\gamma = 2\beta\delta$ oder $\overline{3,aef+bhk^2} \overset{(1)}{=} 2,aff+bkk,\ 2acf+aee+2bgk+bhh$

$3\zeta\zeta = 2\Theta\delta$ oder $\overline{3,aec+bhg^2} \overset{(2)}{=} 2,acc+bgg,\ 2acf+aee+2bgk+bhh$

$\gamma\zeta = 4\beta\Theta$ oder $aef+bhk,aec+bhg \overset{(3)}{=} 4,aff+bkk,\ acc+bgg$;

denn aequ. 3 ist justitiaria per se und aequ. 1 et 2 sunt justitiariae si simul sumantur. Mit hülffe der 3 aequationen könten glaub ich zuförderst e und h gesuchet werden; denn darinnen observiret man abermahls justitiam, denn die beyden allein haben eine praeferentz vor den andern incognitis, als welche aus den mittel; ja findet sich auch dass sie am wenigsten steigen, nemlich nur auf den quadratum, da sonst f, k, item c, g ad cubum kommen. Wenn man nun der literarum e und h valores hat, und solche aus der letzten aequation weggebracht, bleibt eine aequatio ultima, so ziemlich hoch seyn muss, darinnen sind literae f, k, item g, welche die justitz observiren müssen und zwar auf eine doppelte Weise: nemlich wie sich c verhält respectu f; g, k, so muss sich f verhalten respectu c; k, g, und wiederumb wenn man fingiren wolte b=a (ob es schon nicht ist) so müssen c und f stehen wie g und k respective, welches pro examine calculi dienet, wozu ich considerationem justitiae vel homoeoptoseos nützlich finde, ander nutzen zu geschweigen. Weilen aber die letzte aequation nur eine incognitam erfordert, und doch 4 arbitrarias hat, so kan man das übrige pro arbitrio, doch mit vortheil annehmen, die aequationem dadurch zu deprimiren und eine von den literis also zu erlangen, dass also allem eine gnüge geschehe. Besser wäre es wenn man ein baar

---

*) Siehe oben.

von den arbitrariis c, f, g, k in antecessum mit nutzen determiniren könte, umb dadurch den calculum altiorem zu praecaviren. Also stünde zu untersuchen, ob man nicht mit nutzen assumiren könte $2,aff+bkk \overset{(4)}{=} aef+bhk$, et $2,acc+bgg \overset{(5)}{=} aec+bhg$. Denn per 4 et 5 invicem ductas redit aequ. 3; daher es schon scheinet, als ob wir zwey sumtiones gethan, ist es doch reapse nur eine, denn die andere folget per aequ. 3 von sich selbsten, und bleibt also die justitz; und aus aequ. 1 wird per 4 entstehen: $3,aef+bhk \overset{(6)}{=} 4,2acf+aee+2bgk+bhh$, und aus der aequ. 2 wird per 5 entstehen: $3,aec+bhg \overset{(7)}{=} 4,2acf+aee+2bgk+bhh$. Daraus wird per 6 et 7 werden: $aef+bhk \overset{(8)}{=} aec+bgh$, und folglich per 4, 5, 8 wird: $aff+bkk \overset{(9)}{=} acc+bgg$. Hat also diese eintzige supposition grosse depressiones gemacht, wenn wir nur nicht dadurch zuletzt in incommoda verfallen. m wird dadurch $\overset{(10)}{=}$ n, welches noch thunlich. Hat man also simplicissimas aequationes 6, 8 et 9, quae sufficiunt quaesito absolvendo, si modo sic licet. Ex aequ. 8 haberi potest valor ipsius e vel ipsius h; eligatur h, fiet $h \overset{(11)}{=} e,a\overline{c-f}:b\overline{k-g}$. Hic valor ipsius h in aeq. 11 substituatur in aequ. 4 et fiet: $e \overset{(12)}{=} aff+bkk,k-g,:a\overline{ck-fg}$. Unde ex lege justitiae pare jure absque calculo praevidemus fore $h \overset{(13)}{=} aff+bkk,f-c,:b\overline{fg-ck}$, quanquam hoc et prodeat ex aequ. 11 per 12. Hos valores e et h ex 12 et 13 substituamus in alterutra aequ. 6 vel 7; eligamus 6 et evolutionibus factis oportet destrui quaecunque impediunt justitiam, et prodibit aequatio (14), in qua a, c, f; b, g, k sibi respondebunt, quemadmodum et c ipsi f et g ipsi k; quemadmodum talis justitia duplicata etiam observatur in aequ. 9. Jam habemus duas residuas aequationes, nempe 9 et 14, in quibus extant literae c, g, f, k, quarum ope si inveniamus valorem unius literae veluti k per ipsas c, g, f, et ejus ope tollamus k ex alterutra aequatione, prodibit aequ. (15) in qua extabunt solum c, g, f. Ubi alterutra ex ipsis c vel g videtur adhuc determinari posse, ut contrahatur calculus, vel assumi potest quaecunque nova determinatio apta. Sed hoc jam dissimulato, sufficit nos habere jam aequ. 15, cujus ope habetur f ex a, c; b, g; unde ex lege justitiae similiter habetur (16) k per b, g; a, c, ita ut aeqq. 15 et 16 non differant nisi hac transpositione. Assumta ergo relatione aliqua inter a, c; b, g, quae et ipsa legem justitiae servet, qua contrahatur alterutra aequ. 15 vel 16, contrahetur et altera similiter. Et tandem inventi valores substituentur in ⊙ et ☽ et ☿, et postremo instituetur comprobatio, id est, substitutis valoribus in ⊙⊙ + ab☽☽ = ☿^{4}, explorabitur an omnia succedant, qui erit finis finalis.

Quodsi res succederet, nec forte occulto naturae eludentis artificio incongrua emergant, quae Hypothesin 4. non permittendam ostendant, vel etiam sine hypothesi 4, si saltem solvi possent aeqq. 1, 2, 3, licet prolixius, haberetur res maximi post quadraturam Circuli et Hyperbolae in Geometria Tetragonistica seu sublimiore momenti, nisi me omnia fallunt. Denn ich habe Mittel ausgefunden, dass die applicatio Calculi Diophantei ad Geometriam treffliche bisher unbekandte vortheile brächte, und ist bey dieser applicatione Calculi Diophantei die bequemlichkeit, dass man quoad valorem quantitatum determinatarum als c, e etc. an rationales nicht gebunden, sondern wohl zufrieden, ob man sie schon in surdis erlanget, wenn nur die indeterminatae als x, y und similes extra vincula oder irrationalitates bleiben.

Es ist in effectu dasjenige, was ich hier suche, nichts anders als ⊙ et ☽ ita explicare per x, ut ⊙⊙ + ab☽☽ aequetur quadratoquadrato. Ebenmässig wäre mir folgendes problema trefflich nützlich, wenn ichs dicto modo solviren könte: Ipsi x talem dare valorem rationalem per y, ut $x^4 + abxx + a^3c$ aequetur quadrato. Ex. gr. fiat $x = \frac{amy + a^2n}{py + aq}$, et hic valor substituatur in $x^4 + abxx + a^3c$, desideratur ut reductis omnibus ad communem denominatorem qui est quadratus ab $yy + py + ay$, fiat et numerator quadratus, id est, assumtitiae m, n, q sic explicandae sunt ut hoc succedat. Nam unam ut p omitto, quia non auget libertatem, sed tantum adhibita est aequilibrii causa. Quodsi valor assumtus non sufficeret, assurgendum esset ad $\frac{x}{a} = \frac{lyy + amy + a^2n}{pyy + aqy + aar}$. Haec si haberi possent, essent maximi momenti inter omnia, quae hactenus in negotio Tetragonistico quaesivi, si nempe semper sic applicari posset Methodus quasi-Diophantea, et haberemus novum plane Analyseos ut sic dicam genus ad determinandum quae in quadraturis sunt possibilia. Nam Diophanteae Methodi ad Geometriam applicationem excoli inprimis optarem. Quaeruntur autem hic semper solutiones indefinitae, sed vicissim in ipsis definitis literis non moramur aut refugimus irrationalitates, quod secus est apud Diophantum.

Hieraus siehet M. Hr. was an den überschickten Calculis ad analysin sublimiorem gelegen; der eine dienet ad Methodum Tangentium inversam und gibt deren ersten gradum, der andere dienet ad Analysin Tetragonisticam promovendam, welches erwehne nicht nur, weil es an sich selbst considerabel, sondern auch damit Sie sehen, dass ich nicht ohne wichtige ursach auf Dero so gütiges erbieten beruhen wollen, und noch ferner die freyheit genommen de perficiendo calculo zu consultiren, welches dafern ichs temere gethan habe, würde ich, der so viel in diesem brieff de justitia Algebraica in calculis servanda, und mehr als vielleicht davon in einigem buch gedacht werden, geschrieben, in der that eine injustitiam moralem begangen haben.

Es ist gantz nicht nöthig ad summandum, dass die dx oder dy constantes und die $ddx=0$ seyen, sondern man assumiret die progression der x oder y (welches man pro abscissa halten wil) wie man es gut findet. Und das ist eben auch eines der avantagen meines calculi differentialis, dass man nicht sagt die summa aller y, wie sonst geschehen, sondern die summa aller ydx oder $\int\overline{ydx}$, denn so kan ich das dx expliciren und die gegebene quadratur in andere infinitis modis transformiren und also eine vermittelst der andern finden. Als gesetzt x sey gleich $zz:a$, so ist $dx=2zdz:a$, also auch ydx wird $2yzdz:a$, und aus $\int\overline{ydx}$ fit $2\int\overline{yzdz}:a$. Es hat sich auch schon der Gregorius a S. Vincentio dieses vortheils bedienet, denn indem er in Hyperbola die abscissas partes asymptoti in progressione Geometrica angenommen, hat sich ergeben, dass die quadratura Hyperbolae sich reduciret auf die logarithmos, welches auch unser Calculus zeiget, wie M. Hrn. bereits bewust.

Ich bin selbst derjenige der die relation von des Osanna Dictionario Mathem. in die Acta zu Leipzig setzen lassen und entworffen, und als ich Hrn. Tschirnhaus theoremata extemporaneo calculo wahr gefunden, solches dabey notiret. Da hingegen der gute Osannam daran gezweifelt, als der einer von den gästen ist, die was sie nicht verstehen, gern eleviren.

Hr. Bernoullius junior, nunmehr Prof. Mathes. zu Gröningen, hat ein aus der massen schön Problema proponirt und ausgefunden ope Methodi nostrae: Datis duobus punctis A, B (fig. 111) invenire lineam ADB, per quam grave C ab A ad B brevissimo tempore pervenire potest. Denn es ist zu wissen, dass die via directa per rectam AB bey weitem nicht facillima oder promtissima sey, und habe ich ea occasione dieses leichte, doch (meines ermessens) schöne Theorema gefunden: In Triangulo rectangulo Pythagorico (fig. 112) (ut quidam κατ᾽ ἐξοχὴν sic vocant) id est, cujus latera uti 3, 4, 5, ita erecto ut latus minus sit verticale, grave eodem tempore perveniet ab A ad C, sive tendat recta per hypotenusam AC sive per AB, BC latera circa rectum; in praxi tamen, ne grave descendens in B impingat et repercutiatur, debet angulus B nonnihil intus rotundari, interposita portiuncula quantulacunque curvae cujus tangentes sint AB, CB; ita sine ulla resistentia transibit ex AB in BC. Utile etiam erit, angulum ABC tantillum fieri obtusum, ut globulus descendens innitatur inter descendendum nec cadendo impingat. Die demonstration ist leicht: Producatur BC in E, ut BE sit aequ. duplae AB; ergo tempus quo grave descendit per AB, est aequale tempori quo motum continuat (quaesito in B impetu) per BE. Jam tempus per BC est ad tempus per BE seu per AB, ut BC ad BE, seu ut 4 ad 6 seu ut 2 ad 3. Ergo tempus per AB + temp. per BC est ad tempus per AB ut 3+2 seu 5 ad 3. Sed tempus per AC est ad tempus per AB ut AC ad AB, seu etiam ut 5 ad 3. Ergo aequalia sunt tempora per ABC et per AC. Quodsi BC ad AB majorem habeat rationem quam 4 ad 3, tunc promptior erit via per latera quam per hypotenusam, sin minorem, contra.

Ich hatte fast lust dieses Theorema mit der demonstration im fall es nicht etwa schon bekandt, mit sambt dem problemate welches wohl gewiss von niemand bissher resolviret, den Hrn. Welschen communiciren zu lassen, so in dem Diario Mutinensi vielleicht geschehen köndte; habe auch gegen Hrn. Magliabecchi darvon gedacht. M. Hr. (nach dessen bekandten gütigkeit zu mir) würde vielleicht nach gutbefinden belieben es zu entwerffen und mit Magliabecchi zu concertiren, wie die sache in ihr Giornale zu bringen. Inzwischen könte man doch ihre Hrn. Florentiner und Pisaner darüber vernehmen. Haec omnia tuo judicio et benignitati committo.

Meine philosophica abstractiora, dergleichen ich mit Hrn. Arnaud, Hrn. P. Malebranche, Hrn. Sturmio zu Altorff und einigen andern agitiret, theils auch etwas davon in das Journal des Sçavans zu Paris setzen, weil die Frantzosen von dingen etwas mehr werks machen als zumahl die teutschen, werde ich einmahl wils Gott zusammenfassen, zumahl wenn ich zeit hätte meine Theodicaea auszuarbeiten, darinnen ich die Knoten de fato et contingentia, gratia et libertate, et jure Dei aufzulösen vermeyne, und weisen werde, wie sogar die Mathematick in dergleichen zwar analogice, doch also helffe, dass man von den Dingen genauere notiones bekommt.

Was ich de justitia Analytica gedacht, ist zwar nicht eben de necessitate, aber vielleicht ad melius esse, wie man redet, dienlich. Diese arth von justitz inzwischen in etwas zu erklären, so verstehe solche: wenn gleichwie in der justitz gegen Menschen kein acceptio personarum, also hier die literae auf gleichen fuss tractirt werden, und zwar zu zeiten ohne unterschied, zu zeiten etliche mit ihres gleichen und andere wieder mit ihres gleichen.

Repetamus tres aequationes ex tuis, quibus justitiae quiddam inesse notaveram:

$$3(aef + bhk)^2 \overset{(1)}{=} 2,aff + bkk,\ 2acf + aee + 2bgk + bhh$$

$$3(aec + bhg)^2 \overset{(2)}{=} 2,acc + bgg,\ 2acf + aee + 2bgk + bhh$$

$$aef + bhk,\ aec + bhg \overset{(3)}{=} 4,aff + bkk,\ acc + bgg.$$

(1mo) in aequ. 3 habent sese a, e, f, ut b, h, k respective

(2do) a, e, c, ut b, h, g

(3tio) f, k, ut c, g.

(4to) in aequatione 1 singulatim sumta, vel in aequ. 2 singulatim sumta habent locum tam habitudo articuli 1 quam articuli 2, sed non articuli 3.

(5to) itaque aeqq. 1 vel 2 non sunt perfecte justitiariae, quia non eodem modo tractant f, k, ut c, g.

(6to) sed aequ. 3 est perfecte justitiaria, quia hunc defectum supplet, cum calculus integer ostendat f, k; c, g debere pari jure uti.

(7mo) aeqq. 1 et 2 simul sumtae etiam sunt perfecte justitiariae, ut ipse calculus integer, velut aequ. 3 quae calculo integro justitia non cedit.

(8vo) Et si nova aequatio ex ipsis 1 et 2 inter se eodem modo conjunctis fiat, ea erit etiam perfecte justitiaria.

Nachdem ich aber dergestalt wieder etwas tieff in die schrifft dieser aequationum kommen und mich mit meditiren so weit darinn eingelassen, so habe versuchen wollen, ob ich uns ein vor allemahl davon erlösen könte, welches auch endlich, doch nicht ohne mühe und zeit, folgender massen angangen. Compendii causa scribam (1mo) 3☉☉ = 2♂,$\overline{♃+2♄}$, et (2do) 3☽☽ = 2♀,$\overline{♃+2♄}$, et (3tio) ☉☽ = 4,♂♀, ubi patet quid ☉, ☽, ♂, ♀, sed per ♃ intelligo aee+bhh, et per ♄ intelligo acf+bgk. Post multas autem ambages reperi tandem (4to) fg = ck seu k = fg : c, qua explicatione ipsius k satisfit aequationi 1, ut haberi possit pro expedita; eo ipso enim reducitur ad aequationem 2. Restant ergo solvendae aeqq. 2 et 3. Ob 4 fit (5to) ☉ = ☽f : c, et (6to) ♂ = ♀ff : cc, hinc sublatis ☉ et ♂ aequ. 3 fit (7mo) ☽ = 2♀$\sqrt{f:c}$. Rursus per 4 sublato k ex valore ipsius ♄, fit (8vo) ♄ = ♀f : c, ergo ex aequ. 2 et (9mo) 3☽☽ = 2♀,♃ + 2♀f : c, unde per aequ. 7 tollendo ☽ et explicando ♃, fiet (10mo) 4♀f : c = aee+bgh, sed ex aequ. 7 pro ☽ ponendo ejus valorem initialem, fit ace + bgh = (11mo) 2♀$\sqrt{f:c}$. Unde per aeqq. 10 et 11 calculo vulgari et facili nec ultra planum assurgente, habentur e et h per a et b datas et ipsas e, f, g, k (quae etiam latent ex parte in ♀) pro arbitrio assumendas, modo fiat k : f = g : c seu fg = ck. Et hoc modo tribus aequationibus propositis est satisfactum.

Es wäre auch gut, wenn der valor ipsarum e et h ex aeqq. 10 et 11 evolutus dazu käme. Er ist leicht zu finden. Ich habe nicht wenig mühe gehabt, zumahlen weil ich wegen distraction des gemühtes meinem löblichen gebrauch nach etlichmahl falsch gerechnet, biss ich den clavem, nehmlich fg = ck gefunden, durch dessen herausbringung aber ist alle schwührigkeit gehoben gewesen.

Ich*) hoffe es werde Hrn. Viviani sonderlich wohl gefallen haben, wenn er wird erfahren haben, dass die vulgaris linea Cycloidalis selbst die linea brevissimi descensus sey. Wir haben es alle (die wir nemlich Calculum differentialem gebrauchen) uno consensu gefunden, doch haben Hr. March. Hospitalius und Hr. Prof.

---

*) 30. September 1697.

Bernoullius zu Basel etwas mehr mühe gehabt als ich, ehe sie dazu gelanget, denn es mir nur etliche stunden gekostet; sie hatten viele Monath gewartet, biss sie endlich dahinter kommen. Doch ist des Hrn. Jacobi Bernoullii methodus, so er in den Actis erkläret, von der meinigen nicht viel entfernet, wiewohl er etwas mehr umbschweiff nimt. Ich schicke M. Hrn. das fragmentum Actorum selbst, weilen es von importanz.

Was die demonstrationes syntheticas betrifft, so bestehet freylich des Vietae weg öffters darinne, dass er per substitutiones und viele Lemmata der sache hilfft; doch ist einige Kunst gleichwohl darinnen, dass man so viel thunlich immer per propositiones elegantes procedire, oder doch deren underschiedene einmische, und das pflegte Vieta zu thun. Schotenius hat etwas de syntheticis demonstrationibus ex Analysi eliciendis, ist aber nicht viel besonders. Unsere Calculos infinitesimales ad demonstrationes rigorosas zu bringen, darff man nur meine Lemmata incomparabilium consideriren, die ich einsmahls in Actis gegeben; bestehet nehmlich in der gemeinen Geometria, nur dass man in unserm calculo auslässet, was in der construction inconsiderabel oder unvergleichlich klein, als dasjenige, so man stehen lässet; denn man kan allezeit weisen, dass solches elidendum minus quovis dato more Archimedeo.

Es soll Hr. la Hire ein buch de Epicycloidibus vel lineis quae describuntur circulo voluto super circulo herausgegeben haben, darinn er einige dinge, so Hr. Hugenius, Hr. Tschirnhaus und ich gefunden, more Veterum demonstriret; ich wil ihm die ehre gern gönnen, und mag wohl leiden, dass jemand die mühe mit unsern inventis nehme, inzwischen so hat Hr. la Hire nicht unrecht einige fehler des Hrn. Tschirnhaus geahndet, welcher bissweilen ein wenig zu geschwind gehet und doch dabey gar hoch spricht; ich möchte ihm aber candorem dabey wündschen, den er zwar offt recommendiret, aber nicht allemahl selbst übet.

Es *) wird gewiss Hrn. Viviani nicht übel gefallen, dass die linea cycloidalis diese schöne proprietät hat, ut sit tam brachisto-

*) 6. Decbr. 1697.

chrona wie hier erwiesen, quam tautochrona, wie von Hugenio erwiesen worden. Vielleicht gefället ihm auch nicht weniger, dass die Cycloidalis zugleich sey linea segmentorum circuli, wie die Quadratrix ist linea sectorum seu arcuum. Das würde Keplero wohl angestanden haben, wenn ers gewust, denn er viel mit dem problemate zu thun gehabt, wie man datae magnitudinis segmentum vom Circkel abschneiden solle und folglich Ellipsis portionem magnitudine datam pro motu planetarum, weilen sich ziemlich findet, supposito motu Elliptico, esse tempora ut areas Ellipticas, dessen rationem physicam ich in Actis ex Circulatione Harmonica illustriret.

Mit dem calculo der 3 aequationum evolvendarum halte sich M. Hr. nicht länger auf, ich habe ihn längst ausgemacht. Der andere (aequationum differentialium) meritirte es vielleieht mehr, weilen dadurch viel aequationes differentiales primi gradus seu Tangentium universae ad quadraturas zu reduciren, und solcher methodus ad altiores zu prosequiren; doch alles bei M. Hrn. guter gelegenheit.

Es ist mir lieb dass des Hrn. Marquis de l'Hospital buch zu handen kommen, und wird es nicht wenig dieneu zu erläuterung dessen so in Actis Eruditorum enthalten. Dass er aber de Summis nicht gedacht, ist die ursach, weilen er nur partem primam Calculi nostri, nemlich differentiationem illustriren wollen, wiewohl ex differentiis die summa allein zu finden, eben wie analysis potestatum ex genesi zu deduciren.

Mein buch de Scientia infiniti ist noch zur zeit ein blosses project; ich hätte wohl materi es anzufüllen; es gehet mir aber wie dem Hrn. Viviani. Wenn in der nähe ein wackerer Kopf wäre, der sich zu diesen meditationibus schickte, so wäre viel thunlich, allein ich weiss noch keinen in gantz Teutschland. Hr. Tschirnhaus hat genug mit seinen eigenen erfindungen zu thun, die aber bey ihm gar zu fest sitzen und nicht heraus wollen. Ich weiss von keinem methodo locorum die er mir communiciren zu haben sagt. Als er einsmahls durchreisete, erzählte er mir allerhand theoremata specialiora die er hoch hielte, ich kondte aber deren sonderbaren Nutzen nicht sehen, weniger einen methodum locorum daraus finden. So hat er auch die Curvas a Dn. Joh. Bernoulli propositas gar nicht finden können, die doch Hr. Jac. Bernoulli und andere mit mir gefunden. Meine Methodus ist viel weit aussehender und wichtiger, als die deren die Hrn. Bernoulli sich bedienet, wie Hr. Joh. Bernoullius selbst bekennet. Entstehet ex consideratione radicum diversarum ejusdem aequationis, und darff ich nur eine curvam finden, deren aequationem secundum x et y conjungendo cum aequatione secundum x et y curvae problematis propositi localis, quae quaesitam in punctis desideratum effectum praestantibus secare debeat, prodeat aequatio unius incognitae talis, ut in ea radices habeant inter se relationem propositam, v. g. ut earum summa sit aequalis datae quantitati etc. Dergestalt gehet es an nicht nur vor 2 puncta, wie mit Hrn. Bernoulli, sondern auch pro punctis quotcunque. Diss Artificium ist mir schon vor vielen Jahren beygefallen occasione cujusdam loci Fermatii in Epistolis Cartesii, da Fermatius aliquid tale zu praestiren gedencket, aber nicht sagt, wie; ich habe es aber nie practiciret, biss mir Hr. Bernoullius gelegenheit dazu geben. Dadurch ist auch die Analysis communis umb ein grosses promoviret.

Was meinen Calculum situs betrifft, so kan er von mir ja nicht ediret werden, so lange er auch nur in Idea bestehet, und nicht appliciret worden. Wolte Gott, dass ich mit jemand coram davon conferiren könte; per literas ist es etwas schwehr; denn die sach ist allzu weit von den gemeinen weisen entfernet.

Was die Loca Veterum plana et solida betrifft, so haben meines ermessens Fermatius und Cartesius und andere dabey nicht gethan was ich verlange, nemlich haben wohl gewiesen, dass dasjenige, was Pappus erzehlet, wahr und von ihnen zu demonstriren, haben aber ferner nicht gewiesen, wie die Veteres darauf kommen. Denn obschon ingenii vis viel thut, so steckt doch gemeiniglich ein principium inveniendi analyticum darinn, so diejenigen offt selbst nicht observiren, die es doch brauchen, so ich auch vom Hrn. Viviani sagen möchte.

BRIEFWECHSEL

ZWISCHEN

LEIBNIZ UND CHRISTIAN WOLF

AUS DEN HANDSCHRIFTEN

DER KOENIGLICHEN BIBLIOTHEK ZU HANNOVER

HERAUSGEGEBEN

VON

C. I. GERHARDT.

MIT EINER FIGURENTAFEL.

HALLE,

DRUCK UND VERLAG VON H. W. SCHMIDT.

1860.

DER

KOENIGLICHEN

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITAET

ZU

BERLIN

AM TAGE

IHRER VOR EINEM HALBEN JAHRHUNDERT
ERFOLGTEN GRUENDUNG

GEWIDMET.

BRIEFWECHSEL

ZWISCHEN

LEIBNIZ UND CH. WOLF.

1

In dem letzten Jahrzehnt seines Lebens wurde Leibniz von Missgeschick aller Art heimgesucht. Der erste Schlag traf ihn am härtesten; es starb den 1. Februar 1705 die geistreiche Königin von Preussen, Sophie Charlotte. Sie war für Leibniz mehr als eine hohe Beschützerin, sie hatte ihn zu ihrem väterlichen Freunde und Berather erkoren. Als hannöversche Prinzessin vermittelte sie, dass an beiden Höfen, in Berlin und Hannover, sein Einfluss von höchster Bedeutung war. Durch ihr unerwartetes, frühes Hinscheiden wurde denn auch Leibniz, zu dessen Lebensbedarf gewissermassen gehörte, in den Strahlen der fürstlichen Höfe sich zu sonnen, so tief erschüttert, dass er nur mit Mühe eine ruhige Fassung wieder gewinnen konnte; er fühlte sofort, dass es um seine einflussreiche Stellung am preussischen Hofe geschehen sei, wo er als Ausländer von den leitenden Personen immer mit einem gewissen Misstrauen aufgenommen worden war. Nicht besser erging es ihm am hannöverschen Hofe; hier hatte er zuletzt allein in der alten Kurfürstin Sophie eine Stütze, die ihm aber auch wenige Jahre vor seinem Tode (sie starb den 8. Juni 1714) entrissen wurde, gerade als sich ihm eine Aussicht eröffnete, von Hannover, wo er sich seit langer Zeit nicht mehr heimisch fühlte, in einen grösseren Wirkungskreis versetzt zu werden. Für diese grossen Verluste waren die Gnadenbezeugungen, mit welchen ihn der kaiserliche Hof in Wien überhäufte, und die Auszeichnung, dass er durch den Kaiser Karl VI. zum Reichshofrath ernannt wurde, nur ein schwacher Ersatz. Dazu kamen körperliche Leiden, welche seine geistige Thätigkeit hinderten, gelehrte Streitigkeiten nach allen Seiten hin, die nicht zum Austrag gebracht werden konnten, da es ihm wegen Vielbeschäftigung an Zeit gebrach — kurz, Leibniz befand sich zuletzt in einer solchen Lage, dass es fast schien, als sei der Glanz seines Namens im Niedergehen begriffen.

Diess musste vorausgeschickt werden, einmal um die Zeit zu charakterisiren, in die der Briefwechsel zwischen Leibniz und Christian Wolf fällt, sodann aber auch um namentlich das Verfahren der deutschen Gelehrten Leibniz gegenüber zu erklären, das sie, die ihn bei seinen Lebzeiten als ihren Mittelpunkt umschwärmt hatten und durch ihn in jeder Hinsicht gefördert worden waren, nach seinem Tode beobachteten. Als der mächtige Löwe todt war, dessen Reich in seinen Grundfesten zuletzt erschüttert schien, galt es für sie nur, den möglichst grössten Theil von seinen Errungenschaften in Sicherheit zu bringen und als Eigenthum in Anspruch zu nehmen. Keiner in Deutschland dachte daran, den grossen Todten zu feiern und seine von Ausländern angegriffene Ehre zu vertheidigen; vielmehr liessen alle die, für die er sich so warm interessirt, für deren leibliches und geistiges Fortkommen er so angelegentlichst gesorgt hatte, ihn geflissentlich der Vergessenheit anheimfallen, um mit seinen Federn desto ungestrafter sich zu schmücken. So war es in der Mathematik *), so in der Philoso-

*) Auf schamlose Weise verfuhr namentlich Johann Bernoulli. Er beanspruchte als der Entdecker der Integralrechnung zu gelten, obwohl ihm Leibniz nur darin zu Willen gewesen war, dass die Rechnung, die er ihrem Ursprung gemäss „calculus summatorius“ nannte, den von Joh. Bernoulli aufgestellten Namen „calculus integralis“ tragen sollte (Sieh. Leibnizens mathematische Schriften, Bd. III. S. 115 f.). Man hat ihn auch bis auf die neueste Zeit allgemein dafür gehalten. Erst dadurch, dass ich auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover das Manuscript auffand, in dem Leibniz den Algorithmus der höheren Analysis einführt und aus dem erhellt, dass die Entdeckung der Integral-

phie. Es ist bekannt, dass Wolf es sehr übel vermerkte, als die Meinung laut wurde, dass er als Philosoph sich auf die Schultern des grossen Leibniz gestellt habe; er war auf seine vermeintliche Originalität in der Philosophie eifersüchtig genug, öffentlich zu versichern, dass er ganz durch sich selbst, mit Leibniz zugleich, auf dieselben Ergebnisse und Philosopheme gelangt sei*). Merkwürdiger Weise wurde er in dieser Zuversicht dadurch bestärkt, dass ihm gewisse Aeusserungen Leibnizens zu Gesicht kamen, die dieser in Briefen an verschiedene Gelehrte in Betreff seines Verhältnisses zu Wolf abgegeben hatte und die nun der letztere zu seinen Gunsten zu deuten verstand**).

Diesen Aeusserungen gegenüber bietet die bisher unedirte Correspondenz zwischen Leibniz und Wolf ausreichendes Correctiv; nicht nur erhellt daraus, dass es mit der Anknüpfung des Verhältnisses zu Leibniz anders sich verhält, als von Seiten Wolf's entweder absichtlich oder in Folge eines Gedächtnissfehlers in sei-

---

rechnung der der Differentialrechnung voranging, ist jene Anmassung vollständig beseitigt worden. Doch dies ist nicht alles. Joh. Bernoulli verleugnete wiederholt in mehreren wenige Jahre nach Leibnizens Tode geschriebenen Briefen sein eigenes Urtheil, das er über Newton in Betreff der Erfindung der Fluxionsrechnung abgegeben hatte und das von Leibniz in einem fliegenden Blatte (S. Leibnizens mathematische Schriften, Bd. V. S. 410) bekannt gemacht worden war; er compromittirte dadurch die Zuverlässigkeit Leibnizens, von dem er überhaupt in einem sehr herabwürdigenden Tone spricht, lediglich um den Zorn Newton's zu beschwichtigen. Diese drei Briefe Joh. Bernoulli's an Newton aus den Jahren 1719 bis 1723 finden sich in Brewster, Memoirs of the life, writings, and discoveries of Sir Isaac Newton. Voll. II. p. 502 sqq.

*) Guhrauer, Leibniz. Theil 2 S. 263.

**) In einem Briefe an Remond de Montmort (Jul. 1714) schreibt Leibniz: Mr. Wolfius est entré dans quelques-uns de mes sentimens, mais comme il est fort occupé à enseigner, sur tout les Mathématiques, et que nous n'avons pas eu beaucoup de communication ensemble sur la Philosophie, il ne sauroit connaitre presque de mes sentimens que ce que j'en ai publié.

ner eigenen Lebensbeschreibung *) dargestellt wird, besonders aber geht daraus hervor, wie sehr Leibniz es sich angelegen sein liess, belehrend und zurechtweisend auf die Studien Wolf's einzuwirken, was denn auch der letztere im ausgedehntesten Masse zu benutzen und auszubeuten verstand, von ihm jedoch in der eben erwähnten Lebensbeschreibung ganz mit Stillschweigen übergangen wird.

Christian Wolf (geb. den 24. Januar 1679 zu Breslau) zeigte frühzeitig eine entschiedene Vorliebe für philosophische und mathematische Studien. Leider war es auf den Schulen seiner Vaterstadt, auf welchen er seine Vorbildung erhielt, mit dem Unterricht in der Mathematik schlecht bestellt. In Bresslau, erzählt er selbst in seiner Lebensbeschreibung S. 118 f., hatte ich zwar grosse Lust die Mathesin zu erlernen, allein keine Gelegenheit dazu, indem ausser dem usu Globorum coelestis et terrestris und den Zeichnungen der geometrischen Figuren nichts gelehret ward. In meiner Kindheit ehe ich das zehende Jahr erreicht hatte, bekam ich des Gemmae Frisii Arithmeticam in die Hand, wie ich erst etwas lateinisch zu verstehen anfing, und daraus erlernete ich vor mich das rechnen, selbst die extractionem radicum, sowohl cubicarum als quadratarum. Einige Jahre darauf kam mir Horchens Rechenkunst in die Hand, daraus ich den calculum literalem erlernte und eine obzwar sehr schlechte idée von der Algebra bekam, wovon sonst kein Buch konnte zu sehen bekommen, als auf der Bibliothek Clavii opera. In der Geometrie konnte ich nicht recht fortkommen, weil mir die Lust bald vergieng, da nicht sah, wozu ich die Propositiones gebrauchen sollte. Und da Clavii Euclidem hatte, waren mir die demonstrationes zu weitläufftig, in-

*) Christian Wolff's eigene Lebensbeschreibung, herausgegeben von H. Wuttke. Leipzig 1841.

dem ich allzuhitzig war, eine Sache bald zu begreiffen. — Nicht viel besser war es in dieser Hinsicht auf den deutschen Universitäten. In Leipzig und Halle lagen die mathematischen Studien ganz darnieder; es war kaum ein Docent vorhanden. Wolf begab sich deshalb, ebenso wie früher Leibniz, nach Jena, wo durch Erhard Weigel, zu dessen Zuhörern Leibniz gehört hatte, einiger Sinn für die Mathematik geweckt worden war. Nach Weigel's Tode hielt daselbst ein gewisser Hamberger mathematische Vorträge. Wir erfahren von Wolf selbst, worüber sich diese im Jahre 1699 — also nachdem bereits 15 Jahre seit der Bekanntmachung der Differentialrechnung durch Leibniz verflossen waren — erstreckten: Hamberger las über die „Mathesin Enucleatam Sturmii, it. hujus Mathesin compendiariam und ej. Physicam conciliatricem" (Wolf's Lebensbeschreibung, S. 120). Jedoch, erzählt Wolf selbst weiter (S. 122), da Herr Sturm die Deutlichkeiten des Euclides im demonstriren nicht in acht genommen und daher der Methodus Euclidea, auf den sonderlich meine Absicht gerichtet hatte, mir nicht daraus bekannt wurde, blieb mir noch immer viele Dunkelheit übrig, ausser wo es auf den calculum literalem ankam, den ich schon vor mich in Bresslau mir bekandt gemacht hatte und mir jetzo wohl zu statten kam, da meine Commilitones die meiste Schwierigkeit dabey fanden. Weil der Herr von Tschirnhausen in dem Unterrichte der Mathematik und Physick zu studiren des Tacquets Elementa Euclidis recommendirte, so schafte ich mir dieselbe an und nahm daraus Gelegenheit die Corollaria des H. Sturms als propositiones zu demonstriren, welche demonstrationes ich auch einigen von meinen commilitonibus communicirte und dadurch, was sie nicht recht begriffen hatten, weiter erklärte. Hierdurch bekam ich das erste Licht von der methodo demonstrandi veterum. — Wolf erging es demnach in Jena ebenso, wie wir es von Leibniz wissen, als dieser 30 Jahre früher die mathematischen Vorträge in Leipzig besuchte; beide mussten sich über die Schwierigkeiten selbstständig aufklären.

Wolf blieb bis zum Jahre 1703 in Jena; alsdann begab er sich nach Leipzig, um daselbst als Docent der Mathematik aufzutreten, wozu er bereits ein Jahr vorher die nöthigen Vorbereitungen getroffen hatte. Er schrieb zu diesem Behuf die beiden Dissertationen: Philosophia practica universalis, mathematica methodo conscripta, und De algorithmo infinitesimali differentiali, von welchen er die letztere auf Anrathen Mencke's Leibniz zueignete. Dies wurde die Veranlassung zu seiner Correspondenz mit Leibniz *).

Sogleich in dem ersten Briefe Wolf's, mit welchem er die zuletzt genannte Dissertation an Leibniz übersandte, begegnen wir einem Bekenntniss, das den wahren Charakter von Wolf's Bestrebungen enthüllt; es sind die Worte: Utut nondum sim is, qui Mathematici aut Philosophi titulum mihi vindicare valeam, operam tamen sedulam navaturus, ut, si novis inventis frustra invigilem, aliorum inventa familiaria mihi reddam. Und gewissermassen ergänzend hierzu bemerkt er in einem spätern Briefe: Varia notavi, ad quae quia non satis attendunt Viri alias magni (cum quibus ut me comparem nunquam mihi sumam) vel quia ipsis non vacavit vel quia non libuit ad tam levia attendere,

*) In seiner Lebensbeschreibung stellt Wolf das Obige ganz anders dar; er erzählt S. 133: Meine Dissertationem de Philosophia practica universali censirte H. Mencke als Professor moralium. Weil er nun sahe, dass ich dieselbe methodo mathematica geschrieben hatte, ich auch nicht bey der alten Leyer verblieb, sondern weiter zu gehen suchte, so fragte er mich, ob ich die Mathesin studirt hätte, indem seine Absicht war, mich bey den Actis zu gebrauchen. Er schickte deshalb dieselbe ohne mein Wissen an den Herrn von Leibnitz, um sein Urtheil von mir zu vernehmen, welches aber so geneigt ausfiel, dass ich schamroth wurde, als er mir dieselbe aus der Antwort vorlass und zugleich einen Brief von dem H. von Leibnitz überreichte. — Wolf erwähnt mit keinem Worte, dass er seine Dissertation: De algorithmo infinitesimali differentiali, Leibniz gewidmet, ebenso wenig, dass Leibniz zu seiner Berufung nach Giessen mitgewirkt habe.

in varios incidunt errores, aut meditata sua non concinno satis ordine proponuntur aut non sufficienter exponunt. Wolf's Absicht ging demnach dahin, die Erfindungen Anderer sich zu eigen zu machen und ihnen die Form zu geben, welche die Wissenschaft verlangt. Deshalb kam es ihm vor allen Dingen darauf an, das grösstentheils in Zeitschriften zerstreute Material möglichst vollständig zusammenzubringen, was sowohl in Betreff der Mathematik als der Philosophie mit nicht geringen Schwierigkeiten verknüpft war. Seine nächsten Briefe beweisen, dass er, wenigstens was die Mathematik anlangt, keine Mühe scheute. Demnächst aber musste sein Bestreben darauf gerichtet sein, über die Grundbegriffe, die er in Ordnung zu bringen und zu verarbeiten gedachte, sich Klarheit zu verschaffen, und in dieser Hinsicht kommt ihm Leibniz auf das willfährigste entgegen. Nicht nur unterzieht er sich der Mühe, die ersten Schriften Wolf's aufs sorgfältigste durchzugehen, und theilt ihm seine Bemerkungen und Berichtigungen mit, sondern er giebt ihm auch, als sich z. B. herausstellt, dass Wolf noch keine Kenntniss von der Lehre der prästabilirten Harmonie hat, die Grundzüge derselben im Zusammenhang. Wahrlich eine Aufopferung von Seiten Leibnizens, die seinen so oft verdächtigten Charakter im schönsten Lichte zeigt. Auch wird dies von Wolf in dem Briefe vom 13. Mai 1705 anerkannt; er schreibt: Multum in expoliendo hoc argumento me adjuvisse Excellentiae Vestrae ad Philosophiam meam Practicam communicatas correctiones, ingenue confiteor. Nec is solus est, quem inde reportavi; fructus. Video enim mihi accensam esse facem, quae doctrinas morales per hoc aestivum tempus in gratiam juvenum quorundam generosioris animi paulo altius repetituro insigniter praelucebit. Wie stimmt nun aber hierzu die Angabe Wolf's in seiner Lebensbeschreibung S. 142: Der Herr von Leibnitz wollte haben, dass ich nach dem Exempel des H. Bernoulli mich allein auf die höhere Geometrie legen und seinen calculum differentialem excoliren sollte: allein ich hatte mehr Lust die Philosophie zum Behufe der obern Facultäten in bessern Stand zu bringen. Daher ich mit ihm in dessen Philosophicis nicht correspondiren mochte! Allerdings erhält Wolf von Leibniz einmal den Rath*), tüchtig Mathematik zu studiren, aber nur um dadurch eine gute Grundlage für seine philosophischen Studien zu gewinnen. Wolf bemühte sich auch dieser Weisung zu folgen, denn seine nächsten Briefe sind angefüllt mit mathematischen Studien, aus denen indess hervorgeht, dass es ihm nicht gelingen wollte, sich auf die Höhe der Wissenschaft zu schwingen.

Gegen Ende des Jahres 1706 erhielt Wolf, ebenfalls auf besondere Verwendung von Seiten Leibnizens, die Professur der Mathematik an der Universität Halle. Ueber sein Auftreten und sein Wirken daselbst berichtet er in seiner Lebensbeschreibung das Folgende (S. 146): Als ich nach Halle kam gegen das Ende des 1706ten Jahres, fand ich den Zustand anders, als ich ihn gewünscht hätte. Die Mathematik war eine unbekandte und ungewohnte Sache, von der Solidität hatte man keinen Geschmack und in der Philosophie dominirte H. Thomasius, dessen sentiment aber und Vortrag nicht nach meinem Geschmack waren. Daher liess ich mich die ersten Jahre mit der Philosophie gar nicht ein und lass nur über Sturm's Tabellen in der Mathematik, über die Algebra nach meinen MSC., ingleichen über die Baukunst und die Fortification privatissime. Als aber in kurtzer Zeit der H. Hoffmann nach Berlin als Leibmedicus ging, welcher vorher die collegia experimentalia gehabt hatte, schaffte ich mir Instrumente an und lass anfangs über die Physicam experimentalem, nach diesem auch über die Physicam dogmaticam. Und weil alsdann einige waren, die

*) Siehe den Schluss des Briefes vom 8. December 1705: Caeterum suadeo, ut dum in vigore es aetatis, magis Physicis et Mathematicis quam philosophicis immoreris, praesertim cum ipsa Mathematica potissimum juvent philosophantem, neque ego in Systema Harmonicum incidissem, nisi leges motuum prius constituissem, quae systema causarum occasionalium evertunt. Quae tamen non ideo dico, ut Te deterream a philosophando, sed ut ad severiorem philosophiam excitem.

mich aufmunterten, ich möchte auch über die andern Theile der Philosophie lesen, so bequemte ich mich auch dazu. — Wolf folgte demnach dem Beispiel Leibnizens; er beschäftigte sich mit Philosophie, Mathematik, Physik, Naturgeschichte — für die geistige Befähigung Wolf's zu Verschiedenartiges. Ein getreues Abbild dieser Vielbeschäftigung bieten denn auch seine Briefe aus dieser Zeit; sie enthalten durch einander Mittheilungen über mathematische Untersuchungen, physikalische Experimente, naturhistorische Studien; aber in Keinem vermochte Wolf sich zu irgend welcher Höhe zu erheben. Konnte er mit einer Sache nicht zu Stande kommen, so ist immer seine Zuflucht zu Leibniz, der nicht ermüdet, mit Rath und Hülfe bei der Hand zu sein. Diese grosse Unselbstständigkeit Wolf's in wissenschaftlichen Dingen zeigt sich besonders auch darin, dass als ihm von der Redaction der Acta Eruditorum die neuesten Erscheinungen der mathematischen Literatur zur Besprechung aufgetragen wurden, er stets seine Anzeigen, bevor deren Abdruck geschah, Leibniz zur Einsicht vorlegte, der nicht selten weitere Bemerkungen hinzufügte. Durch diese unausgesetzte, sehr lebhafte Correspondenz, und dass Wolf eben in Folge seiner Betheiligung an den Actis Eruditorum über die neuesten Vorgänge in der Literatur regelmässige Mittheilungen an Leibniz machen konnte, erklärt sich leicht, dass er nach und nach für den letzteren gewissermassen unentbehrlich wurde. Zugleich erkannte Leibniz, dass eine solche Hülfe, wie Wolf ihm zu jeder Zeit zu leisten bereit sich zeigte, für seine damaligen Verhältnisse, besonders in den Jahren 1711 bis 1714, von der höchsten Wichtigkeit war, denn er lebte in dieser Zeit entfernt von Hannover am kaiserlichen Hofe in Wien. In dieser für Leibniz äusserst ungünstigen Lage geschah es, dass der Streit über den ersten Entdecker der Differentialrechnung mit grösster Heftigkeit von neuem ausbrach; ja es schien als sollte von Seiten der Engländer der letzte, vernichtende Streich gegen ihn geführt werden. Die Königliche Societät zu London veranstaltete eine Sammlung Originaldocumente und liess sie unter dem Titel: Commercium epistolicum Joh. Collinsii aliorumque de Analysi promota, veröffentlichen, um dadurch aufs unzweideutigste die Rechte Newton's als ersten Erfinder der höhern Analysis darzuthun. Die erste Nachricht von dem Erscheinen dieser Schrift erhielt Leibniz durch Wolf. Er erkannte sofort, dass in dieser Angelegenheit von seiner Seite etwas geschehen müsse; aber er war entfernt von seinen Papieren, die ihm allein die Beweise für sein gutes Recht darbieten konnten. In dieser Verlassenheit wandte er sich zuerst an Johann Bernoulli und bat um sein Urtheil. Auf Grund dessen entwarf er eine kurze Entgegnung und sandte sie an Wolf, der sie als fliegendes Blatt drucken liess *). Ebenso gingen auch durch Wolf's Hände alle übrigen Anzeigen, die Leibniz, um die Angriffe der Engländer zurückzuweisen, in den damaligen Zeitschriften bekannt machte.

Dieser ununterbrochene Verkehr mit Leibniz, welcher die Bekanntschaft vieler andern Gelehrten, mit denen Leibniz in Verbindung stand, nach sich zog, so wie die Betheiligung an der Herausgabe der Acta Eruditorum, für die damalige gesammte gelehrte Welt ein Centralorgan, verschafften Wolf sehr bald eine gewisse Berühmtheit, die er durch seine ausserordentliche schriftstellerische Thätigkeit nicht wenig zu erhöhen verstand. Er trachtete darnach alle Gebiete des Wissens nach mathematischer Methode zu behandeln und verlieh dadurch seinen Schriften einen Schein der Neuheit. Deshalb wurde auch Wolf von seinen Zeitgenossen als ein Praeceptor totius generis humani gefeiert. Indess die Nachwelt hat anders gerichtet; Wolf's Schriften werden gegenwärtig nicht mehr gelesen, sie sind verschollen; dagegen bieten noch jetzt die philosophischen Speculationen Leibnizens, zu denen Wolf sich nicht erheben konnte **),

*) Sieh. Leibnizens mathematische Schriften. Bd. V. S. 411 f.

**) Wolf schreibt an den Grafen von Manteuffel den 13. December 1743: Dass er (Prof. Bose) die belles lettres überall einmengen will, hat mir nicht gefallen und ist heut zu Tage nirgends mehr der Ge-eine reiche Fülle von Problemen, die den menschlichen Verstand unausgesetzt beschäftigen.

Bis zum Jahre 1707 ist die Correspondenz zwischen Leibniz und Wolf vollständig mitgetheilt, um das Verhältniss, in dem Wolf zu Leibniz stand, genau kennen zu lernen. Aus der spätern Zeit sind die Leibnizischen Briefe, so weit sie sich auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover vorfanden, unverkürzt beibehalten, dagegen von den an Inhalt oft sehr unbedeutenden Wolf's nur so viel, als zum Verständniss der erstern nöthig erschien.

---

schmack davon, als in Holland. Daher nehme ich mir nicht die Gedult, was dahin gehöret zu lesen, sondern übergehe es: wie ich auch aus dieser Ursache des H. von Leibnitz Theodicée nicht gantz durchlesen können, sondern vielmehr nur oculo fugitivo durchblättert habe, ob ich gleich davon die recensionem in die Acta gemacht, indem ich mir das herausgenommen, was zur Sache gehört: worinnen ich ihm auch selbst ein Gnügen gethan. — Ch. Wolff's eigene Lebensbeschreibung, herausgegeben von Wuttke, S. 83.

I.

Wolf an Leibniz.

Cum mihi nihil antiquius esse debere unquam duxerim, quam in omnibus actionibus ad Numinis non minus gloriam, quam publicum respicere commodum; ea quoque sectatus sum studia, quae ingenium quam maxime excolunt, solidamque discentibus doctrinam certo promittunt. Quoniam itaque Matheseos ac Philosophiae studio huc usque ita incubui, ut in instituenda juventute studiosa me non tempus male collocaturum confidam, Mecaenates quaerendos consultum duxi, qui me ad talem spartam evehere valent. Unice vero cum Perillustris Excellentia Tua mihi sufficiat, ut voti compos reddar, levi hoc specimine tanto Mecaenati innotescere volui, ea, qua est, animi submissione precatus, ut ne importunum hunc clientis ausum aegre feras, sed data potius occasione ad docendi quoddam munus promoveas. Utut enim nondum sim is, qui Mathematici aut Philosophi titulum mihi vindicare valeam, operam tamen sedulam navaturus, ut, si novis inventis frustra invigilem, aliorum inventa familiaria mihi reddam atque in officio constitutus semper meminerim, me ab Illustri Leibnitio Principibus conmmendatum. Deum interea Optimum Maximum supplex exoro, ut Perillustrem Excellentiam Vestram diu servet incolumem, quo sub patrocinio Tuo server et ego etc.

Dabam Lipsia d. 20. Dec. 1704.

Beilage.

Die erste Mittheilung in Bezug auf Wolf erhielt Leibniz durch das folgende Schreiben Mencke's, dessen Inhalt auch in anderer Hinsicht von Interesse ist.

Mencke an Leibniz.

Hirauf habe berichten sollen, dass gestern Dero relation von des Hrn. Newton zweyen Algebraischen tractaten endlich bey mir eingelaufen, undt sage ich dafür gehorsamsten Danck. Ich möchte wündschen, dass von dem hauptwerck de Coloribus auch eine relation dabey were, den ich niemanden alhier habe, der zugleich der materie undt Englischen Sprache mächtig were. Indessen hoffe ich ja auch ein exemplar von dem buche selbst zu bekommen, weil die Verleger meine correspondenten seyn. Ein hübscher Mensch ist sonst alhier, L. M. Wolf, welcher in omni parte Matheseos, auch in Algebraicis, gar wol versiret ist, auch ein gut lateinisch concept machet; aber der Sprachen ist er noch nicht mächtig, wiewol er sich deren auch mit der Zeit bemächtigen wird. Vielleicht sendet er Meinem hochgeehrtesten Patron nechstens ein specimen. Verbleibe u. s. w.

Leipzig d. 12. Nov. 1704.

Als Leibniz den obigen Brief Wolf's erhielt, wandte er sich, wie aus einem noch vorhandenen Schreiben hervorgeht, an Mons. de Camezki, Conseiller de la Chambre de S. A. S. Mgr. le Landgrave de Hesse-Darmstat, um Wolf für die erledigte Professeur der Mathematik an der Universität Giessen zu empfehlen. In diesem Schreiben bemerkt Leibniz, dass Wolf als Privatlehrer der Mathematik zu Leipzig mit grossem Beifall fungire.

II.

Leibniz an Wolf.

Non tantum auctus, sed et ornatus Tuo munere, dudum respondere debebam literis humanissimis et gratias agere pro dedicatione honorifica Algorithmi Tui infinitesimalis. Sed dum omnibus septimanis a binis pene mensibus hinc discedo domum, distuli scribendi officium in quietiorem locum: donec postremo adhuc morantem deprehendit tristissimus nuntius, qui Reginae Borussorum, incomparabilis sane Principis, mihique inprimis faventis, mortem Hanoveram attulit. Inde novae morae, quas nunc rumpo utcunque, et do ad Te literas, non quas postulat argumentum, sed quas patitur locus.

Ac primum valde gaudeo esse in Germania, qui novum nostrum Calculum infinitesimalem, ubi natus est, ornare velit; hactenus enim praeter Helvetios atque Britannos tantum in Gallia aliqui huc animum adjecere. Itaque si ope esse possum ad praeclara tendenti, operam Tibi dabo lubens.

Percurrens dissertationem, annotabo quaedam, fortasse Tibi non displicitura, ad calculi nostri usum in posterum. Primum divisionem commode mecum ita aliquando exprimis $a:b$, id est $\frac{a}{b}$, quod facio ut spatium lucrer. Eandem ob causam commatibus et parenthesibus lineae supraducendae necessitatem vito, ex. gr. loco $\frac{a-y}{a}$ vel $\overline{a-y}:a$ scribo $a-y,:a$ vel $(a-y):a$. Hoc observare pertinebit ad claritatem paginae Tuae 5.

Cum dicitur, si infinitesima per infinitesimam multiplicetur, productum erit infinitesimae infinitesima, subintelligo si producto ordinariae per ordinariam comparetur, aut etiam cum ordinaria aliqua assumitur pro unitate.

Ad pag. 7 noto in conjunctione 4 specierum seu a, s, m, d, plurimum facere non tantum combinationem, sed et ordinem; a, d erit ex. gr. $a+b,:c$, sed d, a erit $(a:b)+c$.

Signo : : pro analogia in calculo vix utor, quia non est opus, res enim reducitur ad aequalitatem. Exempli gratia a . b : : c . d ego sic scribo a : b = c : d, id est $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Sic et punctis simplicibus ad rationem significandam non utor, et pro B . 1 : : A . A : B (pag. 6) scriberem ego B : 1 = A : (A : B). Contra puncto simplici uti soleo pro notanda multiplicatione nec signum $\times$ adhibeo, ut amphiboliam literae x evitem; sic pro $\overline{y + x} \times \overline{v - z}$ scriberem $\overline{y + x} . \overline{v - z}$, si lineas superductas retinerem. His tamen commodius careo et tali designatione utor: y + x, v — z vel (y + x) (v — z); et ipsius zy : a differentia mihi erit zdy + ydz, : a, et pro a : $\overline{b + c}$ scribo a :, b + c vel a : (b + c).

Quoad rem ipsam observo cap. 2, non esse opus ut una ex differentiis v. g. dx habeatur pro constanti, ut si differentianda sit xdx : dy nec expressum quae sit constans, scribemus dy dx dx + dy x ddx — x dx ddy, : dy dy.

Ad cap. ult. §. 4 noto pro Quadratura parabolae non esse opus ut utamur theoremate, quale Barrovii, talia enim theoremata omnia ex calculo nostro deducuntur. Nam generaliter, quia $dx^e = e . x^{\overline{e-1}} dx$, erit vicissim $x^e : e = \int x^{\overline{e-1}} dx$, quia $\int$ et d, summae et differentiae, sibi sunt reciprocae. Posito ergo $x^{\overline{e-1}} = y$, habetur $\int ydx$ seu quadratura figurae, cujus ordinata y; itaque si sit e — 1 = 2, fiet $y = x^2$ et e = 3, ergo $x^3 : 3 = \int xxdx$; si e — 1 esset $\frac{1}{2}$, foret $y = \sqrt{x}$ et e = 3 : 2 et fiet $2x^{\overline{3:2}} : 3 = \int x^{\overline{1:2}} dx$ seu $(2 : 3)\, x\sqrt{x} = \int \sqrt{x}\, dx$. Vides itaque Calculum Summatorium (quem quidam vocant integralem) nihil aliud quam differentialis reciprocum esse, nec alio indigere artificio, quam ut notemus quando procedat regressus.

Optime notas in fine, etiam rem moralem aestimationis mathematicae esse capacem. Hoc inprimis locum habet in gradibus probabilitatum. Regula de efficacia attractionis in ratione duplicata reciproca distantiarum mea est, quam mihi suggessit observata dudum aliis eadem regula circa illuminationes. Circa motus et vires multa id genus a me sunt detecta.

Quod ad Corollaria tua attinet, non ausim absolute dicere, syllogismum non esse medium inveniendi veritatem.

Nescio an velis ex Ethica proscribi doctrinam de felicitate vera.

Cartesii (vel Anselmi Archiepiscopi Cantuariensis) demonstratio existentiae Dei geometrice procedit, si unum supponas, nempe Deum esse possibilem, ut alicubi memini notare in Actis Lipsiensibus.

Venio ad tuum Specimen philosophiae practicae Mathematice conscriptae, ejusque caput primum.

Voluptatis definitionem nominalem dare non possumus, nec notior est suavitas, quam voluptas; realem tamen definitionem voluptas recipit, et puto nihil aliud esse quam sensum perfectionis. Idem est in aliis ideis claris, sed confusis; ita coloris viridis datur definitio non nominalis quidem, sed tamen realis, causam continens, ut scilicet sit compositum ex caeruleo et flavo.

Beatitudinem non puto dari posse in creatura, quae sit omnimoda votorum fruitio, sed potius veram creatae mentis beatitudinem consistere in non impedito progressu ad bona majora. Nec satis est animo contento et tranquillo frui, id enim etiam stupidorum est.

Quod Deus omnia dirigat ad suam gloriam, idem est ac dirigere eum omnia ad summam rerum perfectionem, in eo enim vera gloria consistit, optime agere. Puniuntur non qui perfectionem rerum impediunt, id enim summatim impossibile est, sed per quos non stat, quominus impediatur. Hi ipsa poena sua conferunt ad rerum perfectionem.

In dominio definiendo explicandum esset, quid sit habere ut suum. Rem meam esse, et me dominum esse, aeque clara sunt.

Putem esse etiam sine superiore obligationem, uti aliqua esset etiam apud Atheos obligatio, cum scilicet alienum bonum pars est nostri. Tunc enim aliis nos obliget ipsa recta ratio seu prudentia, recteque Aristoteli virtus habitus agendi est, ut vir prudens definiverit. Et bonum mentis naturale, quoties voluntarium est, simul erit morale. Nolim igitur obligationem unice a metu poenae et spe praemii peti, cum sit aliquod non mercenarium recte faciendi studium sumtum ab ipsa nostra voluptate, quae inprimis in exercitio Justitiae locum habet. Nam si paucas animas consuetudine prava affectibusve corruptas aut turbatas eximas, res grata est prodesse. Quae etiam attigi nonnihil in Praefatione Codicis Juris Gentium Diplomatici, ubi Justitiam sumo ex caritate sapientis; sed ibidem tamen adjicio, supremum Rectorem complementum dare Justitiae, cui servire libertas voluptasque summa est.

Malo deducere ex definitionibus Axiomata, quam assumere. In Axiomate 3. nonnihil dubii est, saepe enim nos poenitet etiam recte factorum, sed cum recte nos egisse ignoramus aut etiam credere desinimus, mutata per affectus in deterius mente. Ax. 4. noto queri interdum homines de se ipsis ac sibi indignari etiam, cum nullae imprudentiae sibi conscii sunt, sed tantum infelicitatis. Hoc ipsum enim displicet infelicem esse. Et Sulla ac Caesar magis sibi de sua felicitate quam sapientia gratulabantur. Interim fateor neminem debere indignari fortuitis, idque cum injuria in sapientissimum rerum autorem conjunctum, et vel si nullus fingeretur, ineptum esse.

In Axiomate quoque sexto est difficultas. Si perfectionem integram sumas et absolutam, fateor non posse totum esse perfectum, nisi quaevis pars sit perfecta. Secus est si respective accipias, ita enim totum erit perfectum, modo partes in eo perfectae sint, in quo ad totum concurrunt. Veluti societas lucri causa inita perfecta erit, si componatur ex hominibus ad amussim factis ad lucrum procurandum, etsi illi forte vitiis quibusdam corporis aut animi laborent, quae cum hac societate nihil habeant commune. Quodsi perfectionem accipias pro actu ad perfectionem promovendi, manifestum est, posse simul unius partis perfectionem augeri et alterius minui, ita ut totius perfectio augeatur in summa. Atque ita fit ut possimus laeti esse in doloribus, praevalente alio bono.

Perplacent illa Tua generalia problemata. Interim noto ad probl. 1. constitutionem alicujus finis ultimi non esse arbitrariam. Neque hoc Tibi obest, video enim problemate 7. a Te ostendi, qualisnam sit constituendus. Et ad probl. 3, quod docet fine quaesito semper potiri, observo id ipsum, quod suades fieri ut quaesito potiamur, jam ante faciendum esse bona ex parte, ut constituamus an is sit quaerendus, nempe ut sciamus quousque sit in potestate.

Theoremata Tua valde probo, nisi quod in primo pro p o t e s t ponerem d e b e t. Unum tamen addo: bonum nostrum, bonum publicum, et gloriam Dei, non esse distinguenda ut media et fines, sed ut partem et totum, idemque esse vera bona nostra quaerere, et publico Deoque servire; felicitatem cujusque finem ipsius ultimum non posse non esse; eam vero in ea voluptate consistere quam exercitium virtutis continet; virtutum autem maxima est pietas, quae summus est gradus justitiae universalis, in qua virtutes omnes continentur, quae melius ex praefatione illa mea intelliguntur.

Has notationes meas spero Tibi non ingratas fore, quod magis ad promovenda, quam emendanda cogitata Tua pertineant. Certe iniquus sim, nisi valde probem atque extollam egregia haec specimina non ingenii tantum, sed et animi tui, et valde gaudebo, si porro intelligam progredi Te in tramite laudabili, et dari mihi occasiones, in quibus commodare rebus tuis possim. Nec Tibi speciminibus praesertim mathematicis magis magisque clarescenti deerit hominum applausus aut virtutis praemia negabuntur. Video enim passim quaeri Matheseos professores, nec facile inveniri quales quaeruntur. Et nuper amicus, qui apud Studii Patavini Generalis Curatores, primarios ex Nobilitate Veneta Viros, autoritate pollet, a me petiit nominari aliquem qui cum in caeteris partibus Matheseos, tum in calculo novo nostro probatus haberetur. Nominavi Cl. Hermannum, qui cum prius dubitaret, tandem intellecto modeste se gerenti religionem non obstituram, accepit conditionem.

Quod superest, vale ac me ama, et si videtur subinde me quid agas doce, nosse enim velim, quam aliam ut loquantur facultatem studiis philosophiae matheseosque, ut fieri solet, conjunxeris.

Dabam Berolini 21 Febr. 1705.

III.

Wolf an Leibniz.

Quanto Per-illustris Excellentiae vestrae litterae gaudio me perfuderint, sine difficultate percipiet, qui iis perlectis intelliget, quam insigniter studia mea Mathematica et Philosophica per eruditissimas et utilissimas in geminam dissertationem meam commentationes promota fuerint, quamque certa spes non de iisdem solum, sed et omnibus salutis meae generibus reliquis in posterum promovendis mihi illuxerit. Tantis equidem beneficiis indignum me esse quam lubentissime fateor; indignus tamen cum sim, ut collatam semel clementiam clienti perpetuam esse jubeat Excellentia Vestra, summopere rogo. Obedientiae vero, quam debeo, specimen exhibiturus studiorum meorum rationem reddo. Quemadmodum igitur eruditio mihi semper visa fuit in Mentis perfectione consistere, atque hanc inprimis ab intellectus cultura pendere arbitratus sum; studium quoque Mathematicum, Analyseos inprimis, summa cum cura pertractandum esse duxi. Quamobrem cognitis rudimentis Matheseos in collegio, quo Dn. Hambergerus Jenae universam Mathesin explicat, ejusdem opera usus sum in perlegenda Sturmii Mathesi Enucleata et Tabularum Astronomicarum fundamentis percipiendis. Ast cum ea animum sciendi cupidum minus explerent, proprio Marte perspecta mihi reddidi Elementa Euclidis cum selectis Archimedis theorematibus Tacqueti opera excusis, conjunctis subinde demonstrationibus Clavii prolixioribus. Mox Bernhardi Lamy atque Johannis Prestet Elementa Matheseos perlegi, et hinc Cartesii Geometriam et ejus Commentatores consului. Addidi lectiones Elementorum Algebrae per Ozanamum conscriptae et operis tam brevioris, quam prolixioris Philippi de la Hire de Sectionibus Conicis, nec Abrahami de Graf Analysin neglexi. Cum itaque Analyseos finitorum praecipuas leges mihi familiares reddidissem, Marchionis Hospitalii Analysin de Infinite parvis, Nieuwentitii Analysin infinitorum et Barrowii Lectiones Geometricas cum Craigii Tractatu gemino de Quadraturis meditationibus meis subjeci. Inde Wallisii scripta evolvi: maximopere vero desideravi tum scripta Algebraica et Geometrica de Kinghuysen, tum Tractatum, quem de Calculo integrali edidit Carré, unde gaudeo, quod spes mihi facta sit certissima propediem haec nanciscendi. Optarem quoque ut mox in Bibliopoliis nostris compareret A Treatise of fluxions by Charles Hayes, cujus operis lectio tamdiu mihi a Dn. Menckenio conceditur, donec commoda offeratur occasio, qua id Per-illustri Excellentiae Vestrae transmittere possit. Autorum illorum sensum probe percipio: sed calculi integralis leges nondum satis teneo, nescio enim cur non semper pateat a differentialibus regressus, nec criteria novi, unde certus esse possim, quando pateat. Cumque in Tractatu illo Anglico videam, totum negotium huc redire, ut fluxioni assignetur fluens, nondum capio, cur non quavis fluxione data (liceat enim jam uti Anglorum phrasi) possit assignari fluens ei competens, quemadmodum datae fluenti extemplo assignatur fluxio. Quodsi occasio detur, qua Per-illustris Excellentia Vestra dubium hoc citra suum incommodum animo meo eximere possit, novum hinc clementiae ipsius depraedicandae argumentum capiam. Vellem omnino speciminibus Mathematicis aliis innotescere, modo constaret, qualia sint eligenda, cum Lipsiae vix inveniantur, qui in Disputationibus Mathematicis Respondentium munere fungantur. Reliquas Matheseos partes quoque non negligo; indefesso studio scripta, quae possideo, Riccioli, Bullialdi, Kepleri, Hugenii, Newtoni, Wardi, Petavii, Casati, Sturmii, Zahnii, Goldmanni, Comitis de Pagan, Boeckleri, Scamozzi, Varenii, Pardies, Strauchii, Pitisci, Schotti etc. et inprimis Mundum Mathematicum Dechales evolvo. In Philosophia reliqua et quidem Rationali, Illustri de Tschirnhauseo, Lockio, Malebranchio, et Mariotto; in Naturali, Malpighio, Borello, Hugenio, Cartesio, Bergero, Honorato Fabry, Franc. Baylio, Rob. Boylio, Hartsoekero, Santvorto, Rohalto, Perraltio, Mariotti, Sturmio, Hamelio, Baglivio, Connore, Bernoullo, Willisio, Bumetio, Neh. Grew etc.; in Practica, Cumberlando, Grotio, Puffendorfio; in Metaphysica, Cartesio, Ludovico de la Forge, Malebranchio, Poiretio utor. Cum Mathesi et Philosophia studium conjunxi Theologicum: non tamen arridet Theologia scholastica tricis et rixis plena, sed magis juvat, quae ea forma comparet, qualem reperi apud Coccejum, Baxterum, Gürtlerum, Pearsonium, Heideggerum etc. Quoniam vero reipsa expertus mihi videor, judicii acumen per studium Matheseos purae, Analyseos inprimis, certo acquiri, atque aurea mihi polliceor secula, si eruditis omnibus verum adsit judicii acumen et studium summam et sui et reliquorum hominum perfectionem acquirendi, nil certe magis in votis habeo, quam ut mihi occasio suppeditetur, si non utrumque promovendi, saltem alios ad id promovendum incitandi. Unde licet non desit facultas insigni cum facilitate ac plebis etiam applausu alique (absit janctantia verbis) pro suggestu verba faciendi, mallem tamen, si Deo ita visum fuerit, ut eos docere contingeret, qui alios rursus docturi sunt. Studium scilicet Mathematicum ac Philosophiae sanioris ut in Germania nostra efflorescat, quam maxime opto. Certe quod mearum est partium, nihil praetermittam, quod ad bonum publicum promovendum proficuum judicaverim, modo sit in potestate mea positum. Malo parce ac duriter vivere, ut culturae Mentis publici boni gratia rectius vacare queam, quam laute ac opipare vivere vel cum levi ejus detrimento. Nullae mihi suppetunt opes propriae; sed quam pro collegiis mercedem modice solvunt paucissimi Philomathae, ea victito, ea mihi libros comparo, quibus studia mea juvari posse intelligo. Dn. Magistrum Junium melior sors mansit, quam me, utut is soli calculo Astronomico omne tempus tribuat, nec studiosae juventuti ulla ratione prosit, immo Dn. Lic. Oleario Euclidem interpretari ac prima Analyseos rudimenta exponere veritus fuerit. Titulis tamen superbit, stipendiis alitur. Sed utitur Patronis, quibus ego hucusque destitutus fui. Unde cum Per-illustris Excellentia Vestra de patrocinio suo me certum esse jusserit, meliora quoque in posterum fata mihi polliceor. Ut vero aliquatenus saltem dignus videar, qui ab Excellentia Vestra commendetur, id inprimis enixe rogo, ut rationem studiorum, quam ineundam posthac censet, mihi aperiat, nullus enim erit tantus labor, cui humeros meos subducam, modo viribus haud sit major. Caeterum Numen Ter Optimum maximum imploro, ut omni bonorum genere Per-illustrem Excellentiam Vestram constanter ornet, ita enim et spem de me ornando certissimam concipiam etc.

Dabam Lipsiae d. 4 April. 1705.

IV.

Wolf an Leibniz.

Duo fuere, quae mihi circa regressum a differentiali ad integralem scrupulum injecere, utut meditarer ea, quae ab Excellentia Vestra in litteris nuper ad me datis (quae me summa voluptate perfuderunt) hanc in rem eruditissime monita sunt. Legi nimirum in historia Academiae Regiae Scientiarum anni 1700 doctissimum Fontenellium asserere, calculum differentialem nullos habere limites, integralis si evaderet illimitatus, Geometriam ultimum perfectionis gradum assecuturam. Unde concludebam, dari fortassis casus aliquot, ubi de summatione Algebraica desperatur, cum tamen ea sit possibilis. Quamobrem ulterius facile mihi persuadebam, tale criterium, ex quo de summationis possibilitate certo judicari possit, utut aliis ignotum sit, Illustri tamen calculi summatorii Autori non fore ignotum. Nec vanam fuisse spem a me conceptam, litterae Excellentiae Vestrae me docuere. In opinione mea confirmabar, quia videbar mihi invenisse casus, in quibus summatio Algebraica videtur impossibilis, possibilem tamen esse methodi aliae adhibitae testantur. Ex. gr. si fuerit aequatio Curvae naturam exprimens $y^2 = x^4 + aaxx$, erit quadratura $\int dx \sqrt{x^4 + aaxx}$, cujus summatio Algebraica mihi videbatur impossibilis, cum tamen esse debeat juxta Craigium de Quadraturis p. 5. $x^2 + a^2, . \sqrt{x^2 + a^2}, : 3.$ Sed libenter fateor, me commisisse errorem alias mihi tam exosum, atque a propria ignorantia ad rei impossibilitatem conclusisse. Quare valde gaudeo, quod ab errore hoc liberatus in ulteriori progressu non amplius impediar. Sperabam equidem eundem facilitatum iri per lectionem Tractatus Quadrati: sed ab ejus lectione jam destiti; cum nihil in eo deprehenderim, quod mihi nondum fuerit notum. Immo nec Carolus de Hayes mihi satisfacit, contuli enim ipsum cum Hospitalio, Craigio, Quadrato et Nieuwentiitio atque deprehendi, ipsum in unum saltem volumen congessisse, quae in istis continentur, immo saepius Autorum verba Anglica tantum reddidisse, ex. gr. Nieuwentiitii in doctrina de Tangentium methodo inversa, suppressis tamen semper Autorum nominibus. Aliqua reperi problemata in istis non extantia, sed dubio procul aliunde transcripta. Quare desiderium, quod inspectio libri fugitivo oculo facta, titulus atque praefatio excitaverant, fere extinctum. Vellem, ut specimina quaedam novarum inventionum communicare valerem: verum hactenus propter labores corporis sustentandi et librorum comparandorum gratia suscipiendos vix tantum superfuit temporis, ut praeclara aliorum inventa mihi familiaria reddere potuerim. Utinam tale nanseiscerer munus ut studiis hisce unice vacare liceret! Multum diuque meditatus sum, num motus atque materiae conceptum aliquem formare possem, ne demonstrationes physicas nude perceptis superstruere cogerer: et aliqua quidem mihi reperisse videor, sed nondum tamen ex asse satisfaciunt. Concipio equidem, corpus aliquod, ut in eodem maneat loco, a lateribus oppositis aequaliter urgeri debere, ut locum deserat, ab uno latere fortius, quam ab altero urgendum esse, consequenter cum omne corpus constanter aut sit in eodem loco aut locum mutet (seu ut vulgo loquimur, vel quiescat vel moveatur) motum materiae esse essentialem; atque in ea dari nisum quendam, quo se corpora mutuo urgent. Unde porro conjicio, nisum hunc ingredi debere conceptum materiae. Sed qua in re nisus iste consistat, definire non valeo. Praeterea mihi occurrunt difficultates circa motus projectorum continuationem, certe non solubiles, quam primum genesis istius nisus perspecta non est. Ut vero Excellentiae Vestrae pateat, utrum in physicis recto incedam tramite, necne, commoda hac occasione transmittere placuit specimen aliquod Physico-Metaphysicum ante annum et quod excurrit in Academia nostra publice propositum. Felix mihi fuisse videor in excogitanda demonstratione de Veritate religionis Christianae vel ipsis Scepticis persuadenda, quae in compendio huc redit. Primo ex intima Mentis perceptione, qua seipsam percipit, ejus existentiam stabilio modumque concludendi noto, ut simili evidentia conclusiones reliquae omnes inferantur. Hinc ex quibusdam praesuppositis de Mente, quorum ipsamet sibi conscia existit, Dei existentiam seu Entis alicujus, quod propria virtute existit, demonstro. Ex conceptu Entis propria virtute existentis perfectiones et operationes divinas nec non generalia de creaturis theoremata deduco, atque inter alia evinco, quod non solum Deus omnes suas actiones ad summam sui ipsius perfectionem intra se et summam creaturae cujuslibet in suo genere perfectionem extra se dirigat, sed quoque velit, ut ad eundem scopum actiones suas dirigat homo. Hinc principiis experientiae in subsidium vocatis ostendo, hominem potius tendere ad gloriae divinae obscurationem et sui ac creaturarum reliquarum destructionem, atque hujus mali originem monstro, ut miseria humana manifesta evadat. Hac cognita evinco, medium liberationis, si quod detur, nobis non posse innotescere nisi per immediatam revelationem divinam. Quare ulterius haec esse medii illius criteria confirmo, ut scilicet sit miseriae tollendae sufficiens, h. e. ignorantiae ac impotentiae humanae medeatur poenaeque reatum tollat: sit praeterea perfectione Numinis summa dignum, h. e. Sapientiae, Potentiae, Justitiae, Bonitatis etc. studiique divini gloriam suam illustrandi certissimum praebeat argumentum. Addo, quod revelatio illud medium continens iis, quae de summa Dei perfectione et ipsius ad creaturas relationibus ex principiis rationis demonstrantur, contradicere non debeat, quod vero gloriae divinae illustrationem et actionum hominis directionem ad summam sui ipsius et creaturarum reliquarum perfectionem urgere debeat. Tandem clare admodum doceo, quod talis revelatio sit, quam Prophetis et Apostolis factam esse praedicant Judaei ac Christiani, quodque medium liberationis in ea propositum habeat criteria requisita. Tantum vero abest, ut in demonstratione hac prolixiori, quae epistolae terminis non coarctari potest, ex ipsis Theologorum principiis imperiose philosopher, ut potius concatenato nexu ex talibus principiis conclusiones meas deducam, quae ab ipsis Scepticis pertinacissimis Mundum hunc visibilem pro meris apparentiis habentibus lubentissime concedentur. Utut enim Dn. Malebranche in Dialogis Metaphysicis p. m. 196 sibi demonstrasse videtur, quod corporum existentia argumento quodam Metaphysico demonstrari nequeat, quia inter eam et perfectiones divinas nullus detur necessarius nexus; ego tamen contrarium demonstro, atque inter corporum existentiam et perfectiones divinas nexum ostendo, hoc saltem experientiae principio supposito, quod habeamus rerum corporearum perceptiones. Multum in expoliendo hoc argumento me adjuvisse Excellentiae Vestrae ad Philosophiam meam Practicam communicatas correctiones, ingenue confiteor. Nec is solus est, quem inde reportavi fructus. Video enim mihi accensam esse facem, quae doctrinas morales per hoc aestivum tempus in gratiam juvenum quorundam generosioris animi paulo altius repetituro insigniter praelucebit. Verum venia precanda est patientia Excellentiae Vestrae abutenti: atque patrocinium, quo mihi frui datum est, denuo humillime exorandum etc.

Dabam Lipsiae d. 13 Maji 1705.

V.

Wolf an Leibniz.

Equidem jam alias de otii penuria conquestus sum, et tanto majori jure conqueri poteram, quod praeter 7 per diem horas collegiis impendendas aliquam quoque diei partem in perdiscenda lingua Anglicana hucusque consumserim. Hoc tamen non obstante de specimine nuper meditari placuit, quo Per-Illustri Excellentiae Vestrae ostenderem, quales in calculo differentiali hactenus fecerim progressus. Cumque meditanti occurrerit aliquod, ejus perscribendi veniam mihi datum iri arbitratus sum. Excogitavi scilicet novum quoddam Curvarum genus (an enim quisquam idem consideraverit, mihi non constat) investigavique methodum ope calculi differentialis determinandi earum Tangentes, quadrandi spatia inter ipsas et circulum genitorem, qui in earum genesi elementi fixi vicem subit, contenta, eas denique rectificandi, et tum praedictorum spatiorum ad aream, tum Curvae ad peripheriam circuli genitoris rationem definiendi. Concipio scilicet ex centro circuli genitoris C (fig. 1) eductos radios CN, CP, CA etc. ita prolongari in F, B, D etc., ut relatio arcuum AK, AP etc. ad partes radiorum continuatas KF, PB etc. exprimatur per aequationem, quae naturam Curvae cujusdam alterius ex. gr. Parabolae definit; evidens enim est novam hac ratione describi Curvam AFBD, cujus Tangentem GF ita determino:

Intelligatur GK ad KF normalis, itemque CN ipsi CF infinite propinqua et ex N demittatur perpendicularis NL. Jam cum elementa Curvarum sint lineolae rectae infinite parvae, portionem FN assumo pro arcu radio CF descripto. Quare erit $CK : MK = CF : FN$, h. e. si sit $CK = b$, $KF = y$, $AK = x$, adeoque $MK = dx$ et $LF = dy$, $b : dx = y + b : \frac{ydx + bdx}{b}$. Est vero porro propter similitudinem $\triangle$ FNL et FGK, $LF : FN = KF : FG$, h. e. $dy : \frac{ydx + bdx}{b} = y : \frac{yydx + ybdx}{bdy}$, ut adeo sit $dy : dx = \frac{yy + by}{b} : GF$.

Quodsi jam aequationis Curvae naturam definientis differentialis resolvatur in analogiam, cujus duo termini primi sint dy et dx, termini posteriores in analogia praecedenti substituti determinari faciunt Tangentem FG, ex. gr. aequatio pro Parabola communi suppeditat $dy : dx = a : 2y$, adeoque producit Tangentem $FG = 2y^3 + 2byy, : ab =$ (substituto valore yy) $2xy : b + 2x$. Ita aequatio pro omnibus Curvis Algebraicis $Kx^m + cy^n + fx^p y^q + r = 0$ dat $FG = -ncby^{n+1} - nbcy^n - qfx^p y^{q+1} - qbfx^p y^q, : bmkx^{m-1} + bpfy^q x^{p-1}$.

Quadrantur spatia arcubus circularibus AK et Curva AF comprehensa, quaerendo differentialem areae FKMN inventamque integrando. Resolvo igitur eam per rectam FN in duo Triangula, quorum dantur bases $EF = ydx + bdx, : b$ et $MK = dx$, nec non communis altitudo $KF = y$. Unde habetur differentialis areae $yydx + ybdx, : 2b + \frac{1}{2} ydx$. Jam si sit aequatio pro Parabola, erit $dx = 2ydy : a$, unde substituto valore hoc dx in differentiali areae ante inventa, prodit ea $y^3dy : ab + 2yydy : a$, cujus integralis $y^4 : 4ab + 2y^3 : 3a =$ (ob $yy = ax$) $ax : 4b + \frac{2}{3} y, . x$ adeoque area circuli ad aream modo inventam $\frac{1}{2} bx : \frac{axx}{4b} + \frac{2xy}{3}$, h. e. $6bb : 3y + 4b, . y$, substituendo nimirum valorem ipsius ax.

Rectificatio Curvae facilima: Cum enim $EF = ydx + bdx : b$, ex aequatione speciali substituo valorem ipsius dx et quod prodit, integro. Ex. gr. si aequatio pro Parabola, erit $dx = 2ydy : a$, adeoque elementum Curvae $2yydy + 2bydy : ab$, cujus integralis $2y^3 : 3ab + yy : a =$ (substituto valore yy) $2xy : 3b + x$. Quare Curva ad Peripheriam circuli $2xy : 3b + x$ ad x, seu $2xy + 3bx$ ad $3bx$ vel $2y + 3b$ ad $3b$. Nescio num hoc problema Actis nostris insertum possit facere quicquam ad mei commendationem. Utinam suppeteret otium, alia daturus essem his meliora et utiliora! Mox in natione Silesiaca vacabit Collegiatura, quam vocant: si eadem mihi conferretur, tot per diem collegia habenda non forent. Illi quidem ex Professoribus, penes quos non stat hoc beneficium in me conferre, varia mihi suppeditarunt consilia, quibus me juvarent in illa obtinenda, atque inter alia nonnulli proficuum mihi fore arbitrati sunt, si ambirem titulum Socii Academiae Regiae Scientiarum Berolinensis ab Excellentia Vestra Per-Illustri conferendum; sed memor tenuitatis meae ac otii deficientis tantum arrogantiae mihi non sumo. Spes mihi facta est ante aliquot hebdomadas Professionis Mathematum in Academia Gissensi obtinendae a Magnif. Dn. Rechenbergio: an speratam sim obtenturus, dies docebit. Quamvis vero non multum mihi supersit otii ad nova invenienda, in posterum tamen daturus sum operam, ut unum alterumque ingenii mei subinde specimen prodam. Interea summo Excellentiae vestrae favori me ea, qua fieri par est animi submissione commendo etc.

VI.

Leibniz an Wolf.

Gratias pro Tuis Dissertationibus ago de Rotis Dentatis et de Loquela. Utrobique video, si otium Tibi esset, praestari a Te non vulgaria posse. Interim quaedam pro jure quod concedis moneo. In Diss. de Rotis Dendatis statim initio hoc Axioma assumis: In corporibus homogeneis centrum gravitatis idem esse cum centro magnitudinis; sed addi debet limitatio: si scilicet quantitas centrum magnitudinis habeat. Sciendum enim est (quod sane mirabile est paradoxum) omne quidem corpus, omnem superficiem, omnem lineam habere centrum gravitatis, sed non semper centrum magnitudinis. Exempli gratia in semicirculo et hemisphaerio centrum magnitudinis inveniri non potest. Est autem centrum magnitudinis punctum, per quod quaevis recta vel planum quodvis secant corpus, superficiem vel lineam in partes aequales; sed centrum gravitatis est, per quod secant in momenta aequalia. Quae de potentiis habes, pro parte ad eas tantum pertinent, quas mortuas seu Embryonatas si mavis voco. Agis de rotis dentatis in genere, figuras tamen solis illis applicas quas stellatas vocant, stern-räder; de illis vero non agis, quas coronarias nostri artifices appellant. Non etiam agis de rotis, quarum dentes sunt interrupti, quales illae sunt, quarum ope efficitur, ut motore licet eunte prorsum et retrorsum per modum penduli, rota tamen movenda circumeat semper in eandem partem. Multa sunt in hac materia subtilia et utilia, et optandum sane foret totam rem Automatorum Herodicticorum a viro docto et perito bene explicari. Non memini videre Gobertum Gallum, cujus librum de Viribus motricibus in praefatione citas. Ample tractaturo de Rotis Dentatis non omittenda esset optima dentium figura. Invenit autem Olaus Römerus eam esse Epicycloidalem, quod in Mechanicam suam, suppresso licet inventoris nomine, inseruit la Hirius. Atque in praxi quidem non est opus hac figura, si dentes sint breves; sed si paulo sint longiores, omnino talis figura adhibenda foret. Rotis dentatis etiam adjungendae erant rectae dentatae, hae enim saepe rotas ducunt, aut ab iis ducuntur. Helix etiam cylindrica cylindrum dentatum facit.

Quod attinet dissertationem de Loquela, Respondens in praefatione defendit sententiam Malebranchii et aliorum quorundam Cartesianorum recentiorum de Causis occasionalibus; sed a me allata est alia Hypothesis, quam in Diariis Gallice Parisiis et in Batavis editis exposui, et de qua collationem inter Dn. Baylium et me in Diario Batavo et in ipsius Baylii Dictionario v. Rorarius videbis. In Tuae dissertationis initio repetis Regulam Cartesii, quorum conscii sumus ad mentem, caetera ad corpus pertinere; sed hanc regulam quoad posterius alicubi refutavi. Sentio in confusis nostris cogitationibus multa inesse quorum conscii non sumus, quoniam confusa cogitatio consistit ex innumeris perceptionibus exiguis, quas ob multitudinem distinguere non licet, etsi earum resultatum agnoscamus. Maximi momenti hanc observationem esse alibi ostendi. Ad ea quae de genuino mentis conceptu habes, non pauca essent addenda ex principiis a me detectis, per quae haec omnia in clarissima, ni fallor, luce collocantur. Quod ad Actionem Spirituum in se invicem attinet, mea sententia est, nullum spiritum creatum esse, qui sit unquam a corpore penitus separatus, quae etiam Veterum Ecclesiae Doctorum sententia fuit, itaque majorem esse difficultatem de Angelorum, quam de hominum loquela.

In commercio inter corpus et animam explicando non magis ad solum Numen confugiendum est, quam in commercio corporum inter se per mechanicas operationes. Utrobique enim motus distincte explicari potest, alioqui ad miraculum recurretur. Video ex iis quae habes ibi, Hypothesin meam vel Systema Harmoniae praestabilitae vobis nondum innotuisse. Loquendi per visum modos supponere ais loquelam per verba. Ita sane res se habet in plerisque; secus tamen in characteribus Sinensium, ubi modi sensa mentis significandi ad vocabula omnino non referuntur, ut nonnulla etiam Chymicorum et Astrologorum signa, sed quibus Sinensia longe praestant varietate et ingeniositate. Clavem eorum adhuc desideramus, promiserat Andreas Mulerus. Verum et vortices aëris sonum causantes non esse similes illis circulis, quos lapillus aquae injectus parit. Meam rei explicationem attigit nonnihil ex literis meis Dn. Schelhammerus in libro suo de *Auditus modo et organis*, etsi non satis videatur ingressum in ea habuisse, a quibus quae dicis non videntur abhorrere, etsi a me forte paulo distinctius explicentur. Circa ea quae habes §. 30 sqq. multa magni momenti notanda essent. Caeterum de modo surdos loquelam docendi, vidi librum Hispani, qui primus eo de argumento scripsit non male. Ad §. 34 noto, possibile esse Geometriam sine figuris tradere, sed res facilior est per figuras ad captum vulgi. Interim si haberetur Analysis illa situs, cujus per modum calculi specimina excogitavi, qua non magnitudinis (ut in recepta hactenus Analysi) sed situs Elementa continerentur et figurae sine figuris repraesentarentur, promoveri posset Geometria et Mechanica longe ultra praesentem suae perfectionis statum. Circa Grammaticam rationalem, de qua agis §. 35, monita habeo majoris longe momenti et utilitatis, quam quae äutor *de la Grammaire raisonée* aut Dn. Lamy attulere. Eleganter notas §. 36, quomodo cogitationes nobis ex corde procedere videantur. In §. 37 argumentum, Dn. Lamy non satis probat machinae loquentis impossibilitatem, et habita sunt quaedam...... specimina. Non est opus canalibus pro combinationibus sonorum, sed potius partibus mobilibus, ut in ore nostro.

Nunc ad literas Tuas venio, et primum quidem ad priores de 13 Maji. Calculus summatorius non potest eo modo reddi universalis, quo calculus differentialis, prorsus quemadmodum omnis quidem lateris rationalis exhiberi potest quadratum rationale, sed non vicissim omnis quadrati rationalis latus rationale. Igitur ad succedanea interdum recurrendum est. Interim nondum satis explicatum est, quando detur regressus, praesertim cum proponuntur aequationes differentiales affectae regrediendumque est ab iis ad carentes differentialibus vel saltem ad differentiales puras, prorsus ut in communi Algebra nondum habetur modus ab affectis aequationibus transeundi ad puras seu ex omnibus aequationibus eliciendi radices irrationales. Habetur quidem res in gradu 2do, 3tio et 4to, sed nondum in 5to et altioribus, quanquam ego aditum quendam aperuerim ibi quoque, sed nondum extantem in iis quae publicavi, multa enim supprimo, quia digerere non vacat.

De materia multa recte, multa non recte vulgo habentur. Ex sola vulgari notione corporis, sive pro re extensa sive pro re impenetrabili habeas, non potest reddi ratio legum naturae circa motum, ut adeo completa substantiae corporeae notio rem dynamicam involvere debeat.

Quantum ex iis, quae de Tuo quodam specimine demonstrandae religionis in Epistola affers, judico: non male procedis circa Ens propria virtute existens, seu (quod idem est) cujus Essentia involvit existentiam, recteque colligis omnia ad Dei gloriam seu ad divinae perfectionis manifestationem esse referenda. Quod corpora attinet, de quorum cum divinis perfectionibus nexu Malebranchius dubitat, ego Tecum contra sentio, usque adeo ut credam nullum dari spiritum creatum a materia separatum. Interim puto, Massam materialem proprie loquendo non esse substantiam, sed aggregatum, complementumque materiae accedere ab animabus.

Superest posterior Tua Epistola, quam nuper accepi, sed cui dies quo data, non est ascriptus. Video et ex ea non difficile Tibi fore, si vacet, nova detegere in Geometria, et Analysi infinitesimali bene uti. Et licet, quantum judico in eo quod affers specimine, alii Te praevenerint, non ideo minus acumen Tuum agnoscendum laudandumque est. Nimirum lineae, de quibus agis, revera sunt quales spirales, quarum simplicissimam proposuit Archimedes, cujus imitatione complures et inter alios Stephanus de Angelis tales quoque tractavere. Concipitur nimirum compositio duorum motuum inter se certam relationem habentium, radii alicujus circa centrum et puncti alicujus interim in radio procedentis; simplicissimus casus est spiralis Archimedeae, ubi uterque motus est aequabilis, unde fit, ut progressus puncti in radio sit motui angulari radii circa centrum proportionalis. Possumus deinde concipere, puncti in radio progressus esse in ratione duplicata vel subduplicata gyrationis ipsius radii vel puncti in radio fixi. Sed et aliae pro arbitrio relationes possunt fingi. Verum hae lineae regulariter transcendentes sunt, quia unius motus ab altero dependentia non potest obtineri organice, nisi per extensionem curvi in rectum.

Spero desiderio Tuo Collegiaturae satisfactum iri, et velim profecto eximi Te a necessitate illa, quam oeconomicae rei ratio imponit, collegiis habendis omne pene tempus terendi, quod in altioribus Te bene collocare posse video. Non est quod dubites de promotione ad munus, in quo melius Tibi ipse vacare possis, obtinenda sive Giessae sive alibi; video enim non abundare nos Tui similibus, et passim desiderari qui Mathesin cum applausu docere possint.

De loco in Societate Regia non possum commode agere, antequam Berolinum redeam. Interea vale etc.

Dabam Hanoverae 20 Augusti 1705.

Cum sis Silesius, Lipsiensisque Academia per nationes quatuor aequali propemodum jure utentes distinguatur soleantque non multi adesse vestrates, non contemnendam habes prae multis aliis praerogativam. Credo Dn. Lic. Cyprianum, conterraneum Tuum, amicum meum veterem, etiam Tibi amicum fore et auxiliatorem. Rogo eum data occasione a me salutes, testerisque gavisurum me non mediocriter, si intelligam optime eum adhuc valere. Audio aliquando dissertationem scripsisse de Sensu brutorum, quam videre nondum potui.

VII.

Wolf an Leibniz.

Cum intellectus perfectione nihil unquam antiquius duxerim, cognitionis veritatis in voluntatem influxum optimum esse ad prudentem actionum directionem medium certissime persuasus, adeoque proficiendi occasione haud quaquam gratius quid mihi offerri possit; quantam mihi voluptatem attulerint litterae I. E. V. profundiori eruditione plenissimae, quibus verbis exprimam non reperio. Enimvero quo appareat, num semina foecunda agro non prorsus infoecundo fuerint commissa, qualemque seges inde enata messem polliceatur; pace I. E. V. quasdam meditationes occasione primarum litterarum habitas summatim perscribam, alia quaedam ingenii specimina insimul indicaturus. Et primo quidem cognovi, bonum publicum, privatum et gloriam Dei perperam in Philosophia mea Practica Universali distingui ut finem et media. Nam cum legem naturae fundamentalem ex Numinis et creaturae rationalis natura directe deducere conarer, hanc reperi, creaturam rationalem actiones suas ad summam sui ipsius perfectionem dirigere debere, eamque ex mera Numinis bonitate fluere notavi. Dicam igitur, quemnam mihi formaverim bonitatis divinae, quemnam perfectionis creaturarum conceptum. Demonstrata existentia necessaria Entis a se, non quidem immediate, sed mediate deducebam, Deum per creaturarum productionem et conservationem perfectionum suarum, consequenter et Sapientiae, intendere demonstrationem. Ex Sapientiae igitur notione, quam Enti a se competere jam demonstraveram, ulterius inferebam, quod is singulis creaturarum speciebus suos praefigere debeat fines, hosque fines inter se ita ordinare, ut ad earundem conservationem tendant: immo fines unius finibus reliquarum subordinare, ut singulae universi partes conspirent ad conservationem totius. Quo igitur creaturae ad fines ipsis perscriptos via brevissima et certissima pertingant, tales ipsis largitum fuisse essentias, quales ad illos consequendos requiruntur. Et talem habere essentiam juxta me est summam in suo genere possidere perfectionem. Deum vero, quatenus hanc summam perfectionem creaturae cuilibet tribuit, bonum dico. Cum adeo is summam creaturae cujuslibet intendat perfectionem, ut creatura libera ad summam sui ipsius perfectionem actiones suas dirigat, non potest non velle. Jam quoniam perfectio creaturae in harmonia proprietatum essentialium cum finibus a Sapientia divina ipsi constitutis consistit, demonstrari autem potest, inter eos quoque recenseri debere, ubi sermo de creatura rationali, perfectionum divinarum agnitionem et aestimium, bonique publici promotionem: clare hinc mihi constabat, eo ipso, dum creatura intelligens ac volens actiones suas ad summam sui ipsius perfectionem dirigit, acquirere quoque eam illustrandi gloriam divinam et promovendi bonum publicum promptitudinem, consequenter hanc esse perfectionis nostrae partem. Et quia beatitudo non impeditum ad majorem indies perfectionem progressum dicit in mente creata, obsequium legi naturae praestitum verum esse beatitudinis mentis creatae medium cognovi. Cumque porro sensus perfectionis voluptatem excitet, beatitudinem constantem causari intellexi voluptatem. Ex his meditationibus non solum per omnem Philosophiam Moralem, sed et Politicam generales admodum deduxi conclusiones, quae ad infinitos fere casus cum fructu applicari posse et plurimis, quae ab aliis pro intricatis habentur, sine mora enodandis sufficere mihi videntur. Praeterea hujus theoriae insignem prorsus notavi in Physicis usum. Fluit enim hinc methodus aestimandi perfectionem rerum naturalium, itemque Sapientiam Numinis. Scilicet per experientiam investigandi sunt usus rerum naturalium ex collatione plurium effectuum circa eas observatorum. Cum enim nihil a creatura proficisci queat, quod a Deo non fuerit intentum, usus quoque rerum a Deo intentus recte mihi dici videtur, consequenter is ubi fuerit detectus, statim quoque prodere debet finem. Hinc examino fabricam corporum sive per Anatomiam, sive per observationes microscopicas, siquidem ea oculis vel nudis vel armatis subjici potest; aut ex collatione plurium effectuum eandem concludo. Tandem fabricam cum fine confero, atque istius cum hoc harmoniam intueor. Immo eadem ratione partium quoque finem inquiro, et earundem perfectionem aestimo. Mox fines partium inter se et cum fine totius compositi compono, ut finium quoque harmoniam intueri liceat. Dici vero haud quaquam potest, quantum placeat talium harmoniarum observatio. Quodsi itaque pulchra dicenda sunt, quae per naturam placent, corporum naturalium positivam pulchritudinem in complexu praedictarum harmoniarum consistere, inter partium scilicet structuram ac earundem fines, inter fines partium ac finis totius, itemque inter structuram totius compositi et finem ejus totalem, facile asseruerim. Plus tamen mihi involvere videtur pulchritudinis corporum naturalium notio, optimam nempe partium singularum tum inter se tum ad totum propositum proportionem, optimumque illarum situm juxta leges Staticas atque Mechanicas determinandum. Praecipua haec meo, si quid valet, judicio Physicorum esse debebat opera: ast mihi nondum ocurrit, qui ad haec respexerit. Dum vero haec meditabar, fieri non poterat, quin mirarer Anglos nonnullos Antesignanum suum secutos, qui in haereses Physicas debachantes Physicam officio suo satisfecisse arbitrantur, ubi conjunctis cum principiis experientiae principiis Mathematicis vires corporum naturalium accurate determinaverit. Mihi consultissimum videtur, utramque in Physicis philosophandi methodum conjungere, h. e. explorandam censeo rerum naturam, talem concipiendo, ut effectus observati ab ea proficisci posse concipiantur; sed hanc ipsam explorationem praecedere debere accuratam virium aestimationem. Unde saepe doleo, quod Matheseos in experimentando tam raro habeatur ratio. Sentio enim ob hunc defectum plurima experimenta ad conclusiones accuratas, satisque certas eliciendas non conducere. Quamobrem jam dudum animum induxi meum, si Deus otium ac facultatem concesserit, de manifestiori Matheseos, divinae inprimis Analyseos, ad objecta physica applicatione, quam hucusque factum, cogitare.

Sed ad eas accedo litteras, quas nuperrime per Dn. Menckenium accepi. Fateor dissertationem meam de Rotis dentatis admodum esse imperfectam, et ruborem mihi fuisse incussum, quoties transmissae recordabar. Quae vero I. E. V. de Spirituum in se mutuo actionibus disserit, non satis capio. Utut enim supponam Spiritus corporibus junctos, nondum tamen perspicio, quomodo unusquisque cum suo corpore commercium exerceat, si ejus modus distincte explicari debet, nec ad Nutum Numinis confugiendum. Systema Harmoniae praestabilitae mihi nondum innotuit. Utut Acta nostra, Diarium Gallicum et Novellas Reip. litterariae cum cura evolverim, illud tamen reperire non potui. Vehementissime autem scire desidero, ubinam extet. Caeterum mihi quoque nonnulla ad Grammaticam Rationalem spectantia innotuere, principiis de Mente humana Metaphysicis superstructa, quae majoris momenti judico, quam quae Autor Grammaticae Rationalis et Lamy attulere. Et sane dubius sum, utrum Analysin Vocum Philosophicam, cujus fundamenta jam quaedam posui, quibus multa superstruere potero, ubi otium fuero nactus, ad eandem referre debeam, an ab eadem distinguere. Minimum non erravero, si eam ex ista fluere asseram. Intelligo vero per Analysin vocum Philosophicam methodum investigandi notiones, quas unusquisque cum vocibus in contextu alicujus orationis jungit: quae si perficeretur, insignem habitura usum videbatur in interpretandis aliorum scriptis dictisve, ac inprimis in tollendis omnis generis controversiis omne ferret punctum. Cum hujus Analyseos, uti monui, jam quaedam a me jacta sint fundamenta, specimen quoddam ejus apponere decreveram, sed scribendi prolixitas a proposito desistere jubet. Meditor quoque notionum quandam Analysin, immo et Analysin conclusionum: certum enim est, nec notiones, nec conclusiones omnes cognosci per simplicem intuitum, sed eas plerumque ingredi alias simpliciores, quae denuo componuntur ex aliis adhuc simplicioribus. Utilis ergo foret methodus determinandi notionum primitivarum irresolubilitatem et compositarum resolutionem sufficienter persequendi, donec scilicet ad primitivas deveniatur. Idem judicium esto de propositionibus. Meditor denique possibilitatis Analysin, rerum nempe possibilium in prima possibilia, perfectiones divinas. Quoniam enim omnium creaturarum actiones ab earundem essentiis, essentias vero a decreto divino, decretum divinum ab ipsius perfectionibus pendere demonstrari potest, radix omnis possibilitatis erunt perfectiones Entis quam maxime possibilis. Poterat quidem Analysis possibilitatis pro parte Analyseos conclusionum haberi, sed eam ideo ab hac distinguo, quia ad obtinendam omnimodam alicujus conclusionis certitudinem haud quaquam opus est, ut in ipsas perfectiones divinas resolvatur, potius sufficit, ut resolutio fiat in tales propositiones, quarum possibilitas cognita notionum, quae ipsas ingrediuntur, possibilitate per intuitum placet. Pauculas illas quae a laboribus ordinariis vacant, horas meditationibus de Arte inveniendi et dijudicandi veritatem lubentissime tribuo, cum pro comperto habeam, frustra in aliis scientiis me operam collocaturum, nisi prius illa satis mihi fuerit exculta. Nec steriles fuisse meditationes meas huc usque deprehendi. Varia enim notavi, ad quae quia non satis attendunt Viri alias magni (cum quibus ut me comparem nunquam mihi sumam) vel quia ipsis non vacavit, vel quia non libuit ad tam levia attendere, in varios incidunt errores, aut meditata sua non concinno satis ordine proponuntur, aut non sufficienter exponunt. Per sequentem hiemem meditatiunculas meas admodum interruptas in ordinem quendam redigere constitui, ubi mihi veniam exorabo unum alterumque censurae I. E. V. subjiciendi. Magni fit Cartesiana ingenii directio in Opusculis posthumis extans; sed minime mihi satisfacit multa in eadem desideranti. Notarunt jam alii, regulas suas de methodo ex Arithmetica transcripsisse Cartesium. Enimvero methodum multo specialiorem pro resolvendis problematibus omnis generis scientiarum ex Arithmetica deduxi, majoris longe usus, quam nimis generalis illa Cartesii, quaedam etiam singularia continentem. Destinaveram eandem specimini alicui Academico, sed majori dein pretio dignam judicavi, quam quo talia specimina haberi solent, aequos rerum judices rarissime invenientia. Dubitabam litteras I. E. V. perlegens, me in dissertatione de Loquela scripsisse, Geometriam non posse doceri sine figuris; familiarissimum enim mihi jam saepe fuit exercitium, quando noctes obtigere insomnes, Geometriam meditari sine figuris et ex ipsis figurarum notionibus deducere conari, quae alias ex figurarum intuitu assumuntur; verum dissertationem praedictam evolvens didici, me per praecipitantiam posuisse, in quorum veritatem nondum inquisiveram. Incidi vere in tales meditationes, dum expendi scientiam perfectam ab operationibus imaginationis prorsus sejungendam esse. Unde inferebam, multos Mathesi studentes perfectam rerum Mathematicarum non acquirere scientiam, quia multa ex figurarum intuitu transsumunt. Atque hinc rationem nunc reddo, cur multi in Mathesi multum versati nimium adhuc tribuant imaginationi, dum in scientiis aliis occupantur, et producta per operationes intellectus puri a productis per imaginationem non eadem semper felicitate destinguant. Utile igitur exercitium meditandi Geometrica sine figuris repeto, cum sit medium certissimum mentem in distinguendis operationibus intellectus puri ab operationibus imaginationis perficiendi, ipsiusque capacitatem amplificandi. Quin ad eundem finem conducere arbritror per ratiocinationes exprimere, quae in calculo Analytico per characteres expressa eruuntur. Nescio utrum huic scopo convenientior sit Analysis Geometrica seu nova et vera methodus resolvendi tam problemata Geometrica, quam Arithmeticas quaestiones, Autore D. Antonio Hugone de Omerique Sanlucarense, necne. Videre eam nondum potui, sed in Transactionibus Anglicanis legi, Autorem usitatam Analysin ideo carpere, quod ratiocinationes intellectus in eliciendis conclusionibus non satis fideliter exprimat. Linearum spiralium, quarum simplicissimam jam olim dedit Archimedes, genesin non ignoro, sed nondum perspicio, quomodo ea istis applicari possit, in quibus nuper specimen aliquod calculi differentialis exhibui; siquidem istam genesin nonnisi eo in casu concipere valeo, ubi partes a radio circuli abscissae, non autem ejus ultra circulum continuationes arcubus circularibus in ea ratione existunt, in qua abscissae sunt ad ordinatas alterius cujusdam Curvae. Incidit his nundinis in manus meas libellus 3 saltem plagulis constans, cui titulus: Memoires sur l'inverse generale des Tangentes proposez à l'Academie Royale des Sciences par M. Rolle de la même Academie. A Paris 1704 in 4. In eodem Autor sequentia solvit problemata, nempe 1. Invenire limites aequationis generatricis (vocat autem generatricem integralem differentiali propositae respondentem) tum dimensionum, tum terminorum; 2. data formula cum dimensionibus incognitarum aequationis generatricis, invenire hanc aequationem; 3. data formula quacunque invenire aequationem generatricem, aut ostendere, quod sit impossibile. Charactere utitur insueto, nempe pro dx ponit v et z pro dy.

Quod mearum rerum statum concernit, nondum certus sum, utrum Professionem Mathematicam sim obtenturus, necne. Spem tamen lactat Dn. D. Rechenbergius. Dissuadet quidem Dn. Menckenius, sed studiis meis consultum iri, modo illam obtinere possem, video. Certe Lipsiae spes nulla mihi superest, tum quia Patronis in aula destituor, tum quia M. Junius per mandatum Regis constitutus est Substitutus Professoris Mathematum, ipsique praeterea facta sit spes Professionis Physicae, utut huic excolendae se nunquam dederit, nec praeter Calendarii et Ephemeridum aliquot annorum conscriptionem ullum ediderit specimen. Fert quoque titulum Mathematici et Calendariographi Regii salario 500 thalerorum conjunctum. Mihi ne quidem spes Collegiaturae post spatium annuum vacaturae obtinendae relinquitur. Dn. Cyprianus mihi favet, qui sua studia I. E. V. commendat; sed non est in Collegio Mariano, cum sit saltem Polonus, non vero Silesius. Deo igitur et patrocinio I. E. V. res meas commendabo, sic quoque suo tempore fore persuasus, ut commoda Deo et publico deserviendi, meque ipsum magis perficiendi occasio non desit etc.

Lipsiae d. 15 Octobr. 1705.

VIII.

Leibniz an Wolf.

In novissimis Tuis pulchre omnia ad mentem meam, circa potissima certe. Nisi beatitudo in progressu consisteret, stuperent beati. Finium contemplatio etiam ad inveniendum facit: hinc in specimine aliquo Actorum Lipsiensium legem Opticae, Catoptricae et Dioptricae communem ex fine deduxi, dum efficiens controversa est. Nam saepe nos efficientes latent, effectus patent ex quibus finis agnoscitur. Hoc consilium meum in Optica Anglice edita valde laudavit Molineusius. Anatomiam quoque animalis finium methodo tractandam putem, ex. gr. considerando corpus humanum ut machinam propagandae sapientiae causa excogitatam, inde tum cognitionis organa, tum conservatio animalis et speciei.

Dissertatio Tua de Rotis Dentatis minime est spernenda, etsi multa addi possint.

In Diario Parisino et Historia Operum Eruditorum apud Batavos prodeunte non pauca habentur de systemate meo Harmoniae praestabilitae. Loca pleraque reperies citata a Dno. Bayle in Dictionario voce Rorarius. Ibi enim ea de re mecum amice et cum multa ac pene nimia honoris significatione disputat. Sententiae meae haec summa est, hic scopus: Cartesius agnovit animam non dare novas vires corpori, quoniam eadem semper virium quantitas servetur in mundo. Hoc recte, etsi in eo peccaverit, quod quantitatem motus cum quantitate virium confudit; quoniam ergo anima non potest mutare vim, saltem putavit eam posse mutare directionem corporum, atque ita cursum spirituum animalium moderari; ingeniose magis quam vere, nam tunc adhuc ignorabatur quod demonstravi, etiam summam directionis semper eandem manere, non minus quam virium summam. Itaque ad tuendam rerum perfectionem ordinisque observationem neutram legem ab anima violari fatendum est. Quid ergo? dicemus animam et corpus esse instar duorum Horologiorum diversissimae quidem constructionis, sed a summo tamen artifice ita temperatorum, ut dum unumquodque suas leges sequitur, perfecte inter se conspirent. Itaque si per absurdum nulla essent corpora, tamen omnia in animabus ut nunc apparerent, et vicissim in corporibus ac si omnes animae abessent', Deo ab initio harmoniam praestabiliente in structura quam materiae, et natura quam animae dedit. Quo agnoscit Baylius, sapientiam Dei exaltari ultra omne id quod hactenus cogitatum est. Veretur tamen ne ita usque ad impossibilia extendatur: ego vero in responsione manuscripta ad ea quae in novissima Dictionarii editione habet, ostendi etiam ab hominibus fieri machinas ita praestabilitas, ut cum ratione agere videantur. Sed nec possibilis aliter res est, nisi ad perpetuum miraculum confugias cum autoribus causarum occasionalium. Hinc autem nova et hactenus incognita divinae existentiae demonstratio veteribus additur, quia Harmonia substantiarum mutuo influxu carentium non potest esse nisi ex communi causa. Caeterum ego totam naturam corporibus organicis et animas habentibus plenam puto, quin omnes animas interitus esse expertes, imo omnia animalia, quippe quae generatione et morte tantum transformantur. Rationales autem Animae semper etiam personae suae leges morales servant et in optima Republica versantur sub Monarcha Deo. Neque angelos aliter concipiendos puto, nisi quod animorum et corporum vigore et subtilitate nos multis parasangis praecellunt, et fortasse ipsas transformationes suas aliqua ratione in potestate habent. Itaque apud me magna uniformitate naturae omnia ubique in magnis et parvis, visibilibus et invisibilibus, eodem modo fiunt, soloque gradu magnitudinis et perfectionis variant. Habes quandam systematis mei adumbrationem, sed fusius rem expositam leges dictis locis. Itaque vix mihi amplius difficultates restant in generali Philosophia.

Ad Grammaticam philosophicam pertinet non tam vocabulorum peculiarium analysis, quam communium, id est particularum, flexionum et regiminum, quanquam in lingua philosophica ipsa vocabula ex particulis, ut sic dicam, exoritura essent. Methodus notiones vocum receptarum investigandi procedit ab exemplis, et habet aliquid simile cum derivatione hypotheseos ex phaenomenis.

Possibilitatis et Notionum distinctarum Analysis eadem est, idemque sunt primae possibilitates cum divinis perfectionibus.

Posthuma Cartesii nondum habeo: si Lipsiae prostant, indica quaeso Dn. Lic. Menckenio, ut mihi per occasionem mittantur. Etsi quaedam ex iis jam olim scripta habuerim, inter alia Methodum veritatis inquirendae, sed quae in paulo generalioribus consistit, specialia autem arithmeticae fere tantum propria habet, ut recte notas. Non est cur vereare Tua meditata includere Academicis dissertationibus; docti eas suo pretio aestimare sciunt et suo tempore omnes librum componere possunt.

Ad perfectionem Geometriae promovendam novum plane instrumentum Mentis excogitavi. Id voco Analysin situs. Toto coelo differt ab Analysi magnitudinis, quae sola hactenus extat et in Algebra et infinitesimali Logistica usurpatur. Ejus non minus mira ratio est et promittit egregia, dum imaginationem sublevat. Sed haec nisi viva voce aut prolixis verbis explicare difficile est. Antonii Hugonis Sanlucarensis, quem memoras, nihil unquam nisi relatum vidi, et vereor ut ille haec satis assequatur. Errat, si putat Algebram non bene rationis vestigia sequi in magnitudine exponenda, etsi multa adhuc desint ad ipsius Algebrae perfectionem et Algebra a scientiis anterioribus dependeat. Sed non optime Algebra versatur in exponendo situ, quem Geometria involvit. Caeterum habet et Arithmetica peculiaria sua auxilia praeter Algebram seu doctrinam magnitudinis in universum. Nam Arithmetica certam jam mensuram assumit, nempe unitatem, quaecunque ea sit, ad quam omnia determinate refert.

Amici mihi Gallia scribunt, Rollium esse merum jactatorem, id agere ut nostra aliis verbis sibi vindicet, specimina methodorum quibus se venditat dare non posse. Certe miseras objectiones contra nostra edidit, in quibus candor non apparet.

Raro Deus dat malis aliquid egregii praestandi facultatem. Sunt quidam abitiosuli, in plagia intenti: quicquid his dicas, dudum norunt. Ubi ad rem ventum lapidemque lydium scientiae, haerent. At qui agnoscunt ea, quibus profecerint, candideque et grato animo agunt, si se ad inveniendum convertant, successu destitui non solent. Ego tantum abest ut me jactem autodidactum, ut potius aliorum inventis excitatum me agnoscam ad nova inventa.

De statione non magnopere solicitus esse debes; video enim non defore qui vocent, et propemodum deesse qui vocari possint.

Dn. D. Cypriani diss. de Sensu Brutorum vidi citari, ipsam non vidi. Mihi pergrata foret. Ego ipsum valere gaudeo. Vale Tu quoque etc.

Dabam Hanoverae 9 Novembr. 1705.

Memini ex Te quaerere, quis sit Gobertus Gallus, cujus librum de Viribus motricibus in Diss. de Rotis citas.

IX.
Wolf an Leibniz.

Systema Harmoniae praestabilitae mire placet, inprimis quod et Philosopho magis dignum quam ad immediatum Numinis nutum provocatio, et ad illustrandam gloriam Numinis, praesertim Sapientiam ejus, recte judicante doctissimo Baylio, pietatemque (quod addo) promovendam plurimum facit. Equidem cum Dei nutu omnia subsistant, non negaverim, ab initio me credidisse, in contemplatione causarum secundarum deveniendum tandem esse ad nutum Numinis immediatum; illa tamen provocatio non ante concessa nunc mihi videtur, quam ubi rerum naturae perfecte cognitae effectui explicando non sufficiunt, qui ab iis proficisci observatur. Sed quod Cartesianorum erraverim errorem, inde factum postea cognovi, quod originem essentiae rerum ab origine existentiae earundem non satis distinxerim. Videor enim mihi demonstrasse, originem essentiae rerum deberi intellectui divino, existentiam voluntati, ut adeo, ubi de existentia sermo est, semper tandem deveniendum sit ad Numinis nutum immediatum, ubi de essentia, quaestio proposita ultimo resolvatur in cognitionem ab intellectu divino ex intuitu perfectionum essentiae suae, nostro quidem concipiendi modo, haustam. Scilicet dum Deus contuitus est perfectiones suas sibique concepit modos omnes, quibus eas extra se repraesentare posset, et vi sapientiae suae eos elegit, quibus ista repraesentatio optima ratione obtinetur, essentias creaturarum fundavit. Dum vero voluit, ut ista perfectionum suarum repraesentamina actu praesentia fierent, essentiis rerum existentiam superaddidit. Rerum itaque essentiae et ab iis profluentia non sunt arbitraria, sed necessaria: talia enim sunt, quia Deus haec et non alia habet attributa. Haec omnia cum systemate harmoniae praestabilitae stare posse arbitror. Ast illud nondum perspicio, qua ratione origo mali ex eodem deducatur, et num eidem consona sint, quae ego hanc in rem meditatus fui. Libertas voluntatis cum multum difficultatis facessat Philosophis, mihi fere nullam parit. Cogitationes in mente non minus necessaria ratione se subsequi puto, ac motus rotarum in machina, modo mens ad cogitandum determinetur. Libertas adeo mihi est potentia, qua mens seipsam ad objectum aliquod cogitandum determinat, dumque determinationem continuat, attentionem suam conservat. Utut itaque judicium evidenter verum, si mens id intueatur, voluntatem ad agendum vel omittendum necessario inclinet; ista tamen volitio coacta dici nequit, quia in homine datur ob factam a se sui ipsius determinationem ad cogitandum ea, ex quibus judicium volitionem producens fluebat. Malum igitur oritur ex perverso liberi arbitrii usu, qui in eo consistit, quod mens ad ea cognoscenda se non determinat, quibus actionum ad summam nostrummet perfectionem directio continetur.

Veniam nuper exoravi mea de methodo inveniendi cogitata censurae I. E. V. subjiciendi. Initium itaque in praesenti facturus sum. In methodo inveniendi naturam veritatis et falsitatis primo loco cum D. d. T.*) explicari perplacet: sed tamen non sufficere mihi videtur dixisse, verum esse, quicquid concipi potest; falsum, quicquid concipi nequit. Nempe in omni propositione (ad earum enim veritatem unice collimat regula ista) duo distinguo, hypothesin atque thesin, et utriusque intueri nos debere notiones claras et distinctas statuo, si eam concipere aut non concipere velimus. Ut igitur propositio sit vera, duo itidem requiro, nempe hypotheseos possibilitatem, et theseos cum ista necessarium nexum, ut ita mens thesin hypothesin jungat, quo istius contradictorium cum eadem conjungere nequeat. Veras igitur dum concipimus propositiones, cogitatio una ponit alteram; falsas dum concipere conamur, una alteram tollit vel evertit. Quodsi de hypotheseos possibilitate solliciti non simus, sed unice ad nexum ejus cum thesi attendamus, propositiones, quas concipimus, erunt saltem hypothetice verae; quas concipere non possumus, hypothetice falsae. Atque nunc intelligo, cur I. E. V. asserat, Cartesianam de existentia Numinis demonstrationem ἀκρίβειαν Geometrarum aemulari, si supponatur, ens perfectissimum esse possibile: quae ab initio capere non poteram, sed meditantem ad ea perluxerunt, quae modo exposui.

Dum de Existentia Numinis loquor, mentem subit aliqua ejus demonstratio, quam juxta exposita principia rite procedere arbitror. Evinco nimirum, dari quaedam entia, cumque nullum eorum loco nihili seipsum praesens sistere potuerit, minime ens unum a se erit. Est adeo ens a se possibile. Adverto autem ens a se non posse concipi nisi ut necessario existens. Quare cum cogitatio omnis existentiam involvens sit de re singulari, nequaquam de specie aliqua aut genere, conceptus entis a se erit conceptus entis

*) Dn. de Tschirnhaus.

singularis. Tale autem ens est possibile. Ergo quoque existit. Ergo datur Ens unicum a se, h. e. Deus. Hac demonstratione admissa, quae de Deo cognovi aut ab aliis hucusque cognita sunt, omnia ex unico entis a se conceptu deducere valeo.

Quando I. E. V. ad Dn. Lic. Menckenium litteras datura est, insignis beneficii loco habiturus sum, siquidem vel in schedula aliqua tribus saltem verbis mihi indicare dignata fuerit, qualis numerus assumi debeat pro a in serie Schediasmatis Actis Lipsiensibus anni 1691 p. 179 inserta, si ex. gr. arcus statuatur 25^0, ut seriei aliquot termini in unam summam collecti exhibeant sinum in Tabulis obvium.

Dn. D. Cyprianus dissertationem de Sensu Brutorum conscripsit, cum secunda vice pro Loco disputaret, ut adeo haberi non amplius possit. Ex Dn. Menckenio autem didici, nihil in eadem contineri, nisi quae in omnibus Scholasticorum libellis prostant. Posthuma Cartesii se non habere nec procurare posse asseruit Dn. Menckenius. Non tamen dubito, quin futuris nundinis adipisci eadem liceat.

Gissensis Professio Mathematica adhuc vacat. Num mihi conferenda sit, decretum hucusque non est. Nollem de statione adipiscenda multum esse sollicitus, modo non cum experirer rerum mearum statum, ut, dum collegiis habendis 8 per diem horas insumserim, iis exceptis, quas praeparatio ad nonnulla requirit, vix tamen suppetarit, unde parce ac duriter vivam, plerisque leve, quod posco, pretium ex animo ingrato subducentibus. Helmstadii vacare ajunt Professionem Physicam; sed cum Medica conjunctam fuisse alias audio, ut dubitem, num separetur. Cur Academia Hallensis, quae tantopere floret, Professore Matheseos destituatur, miror, inprimis cum plures ibi fore Mathematum cultores audiam, quam Lipsiae, ubi Mathesis quid sit fere ignoratur, adeoque nonnisi paucissimi ejus desiderio flagrant. Sed dabit etiam Deus per providum I. E. V. huic curae statuto tempore finem. Quare nil magis in votis habeo, quam ut Deus I. E. V. per plures adhuc annos in mei etiam solatium ac patrocinium salvam atque incolumem servet, ut tanto Patrono gloriari concedatur etc.

Dabam Lipsiae d. 2 Dec. 1705.

X.

Leibniz an Wolf.

Hanover 8 Decbr. 1705.

Gratum est quod Systema meum Harmoniae substantiarum expendisti, eique applausisti. Videbis necessario ad id deveniendum, si neque miraculosa neque ἄῤῥητα seu intellectu carentia ducere velimus. Nam systema causarum occasionalium necesse est statuat leges corporum a Deo violari occasione mentium.

Recte ais, Essentiam creaturarum ab intellectu divino pendere, Existentiam a voluntate. Interim divina voluntas rursus ab intellectu regulam accipit. Deus enim non vult, nisi quod optimum esse ejus intellectus cognoscit.

Origo mali est a limitatione creaturarum.

Quod mens sese ad unum potius quam ad aliud cogitandum determinat, non oritur ab arbitrio purae indifferentiae, sed suas rursus rationes habet. Interim dicendum est, mentem maxime spontaneam rem esse, quod ex meo demum systemate apparet.

Verum est, Ens a se necessario existere, et nisi daretur, nec Entia ab alio extitura. Sed non ita facile est accurate demonstrare, Ens a se esse Deum, seu esse omniscium et omnipotens et unicum. Lucretius dicet, omnes Atomos suas esse Entia a se; alia ergo ratiocinia sunt adjungenda, sed quae pleraque jam habentur.

Si ex arcu a quaeras sinum vel sinum complementi, patet arcus magnitudinem debere esse datam. Quodsi ergo datum sit, arcum esse 25 graduum, patet fore $\frac{5}{72}$ circumferentiae. Ipsa autem circumferentia est 3.14159 etc. si quidem in numeris res exprimere velis qua licet, posito radium esse $\frac{1}{2}$; sed si radius sit 1, erit $a = 2 \cdot \frac{5}{72} \cdot 3.14159$ etc. Ita invenire sinum arcus 25 graduum ope regulae meae poteris, si ponas eum sinum aliunde Tibi notum non esse, aut si Tabula sinuum non sit ad manus, et potes ad quantamcunque exactitudinem pervenire.

Si mihi significes, a quibus potissimum pendeat Giessensis professio, fortasse rationem invenio per amicos efficiendi, ut negotium illic pro Te acceleretur.

Physica apud Helmstadienses alicui jam promissa est, qui idem et Medicinam colit.

Caeterum suadeo, ut dum in vigore es aetatis, magis Physicis et Mathematicis quam philosophicis immoreris, praesertim cum ipsa Mathematica potissimum juvent philosophantem, neque ego in Systema Harmonicum incidissem, nisi leges motuum prius constituissem, quae systema causarum occasionalium evertunt. Quae tamen non ideo dico ut Te deterream a philosophando, sed ut ad severiorem philosophiam excitem.

XI.

Wolf an Leibniz.

Quod I. E. V. petito meo tam prompte annuere voluerit, gratias habeo debeoque maximas. Ipsas series pro inveniendo ex dato arcu sinu et contra per applicationem calculi integralis et methodi serierum eruere tentavi, tentantique feliciter successit negotium. Sed fuerat, qui pro comperto asseverabat, ad praxin series istas non facere, cum quaesitum non exhibeant. Video vero ipsum applicationem non rite instituisse, et fortassis arcum in numero graduum, non partium radii assumsisse. De Methodo serierum infinitarum dissertationem conscripsi, praeterita hebdomade publice ventilatam, quam cum Dn. Foerstero, Bibliopola Hannoverano, mittam. Dn. Lic. Menckenio schediasma de Motuum coelestium causis reddidi per occasionem remissuro. Quodsi id factum non fuerit, Dn. Foerstero similiter tradam. Alterum de Motu radente et lambente typis jam exscriptum, mensi nempe Januario anni 1706 insertum. Qualis libertatis formandus sit conceptus, libenter nossem: ejus enim cognitio multum me juvaret. Quemadmodum et de Numinis demonstratione laboro, quae non hypothesibus superstruatur, quales sunt fere omnes, quae hactenus apud Autores reperire licuit, sed ex principiis evidentibus fluat. Entis perfectissimi possibilitatem demonstare nondum valeo. Multa in demonstrationibus Philosophicis ab attributis divinis pendent. Quare taedet, quod circa existentiam Numinis adstruendam vacillandum. Consilium de non anxie conquirendis Artis inveniendi praeceptis generalibus perplacet. Video enim Analysin Mathematicam a nemine cum fructu addisci posse, nisi regulas paucissimas ad plura statim problemata resolvenda applicet; nec regulas speciales innotescere posse, nisi per generales jam detectae fuerint veritates nonnullae; immo quo plures veritates deteguntur, eo magis quoque Analysin perfici. Quamobrem pro certo habeo, idem in Philosophia etiam reliqua fieri debere. Unde nil magis in votis habeo, quam ut Deus praeter vires ingenii ac corporis otium quoque largiatur, quo me ad veritates utiles investigandas atque jam investigatas in ordinem redigendas conferre, quidque possint ingenii vires, explorare valeam. Cum adeo me voti mei compotem redditum iri arbitrer, si Professio aliqua Mathematica vel Philosophica mihi conferatur, ubi I. E. V. negotium Giessense in mei gratiam urgere voluerit, hoc tantum patrocinium ad cineres usque animo grato deprecaturus sum etc.

Dabam Lipsiae d. 30 Decembr. 1705.

XII.

Wolf an Leibniz.

In eo eram, ut Schediasma de Motuum coelestium causis I. E. V. remitterem, addita dissertatione mea de Seriebus infinitis, cum ex litteris I. E. V. intelligerem, quod iter Berolinum meditetur Quare illud remittere nolui, aliam commodiorem occasionem expectaturus. Caeterum quoniam dudum in votis habui, ut cum I. E. V. coram colloqui daretur, siquidem veniam impetrarem, sine mora Berolinum accederem, modo constaret, quonam tempore adventus meus I. E. V. maxime commodus foret. Praesentes igitur litteras eum unice in finem scripsi, ut ni molestum accidat, illud mihi indicetur. Jussus statim adero et afferam, quae ex ratione ante dicta mittere neglexi, quo opere ipso ostendam, me esse etc.

Dabam Lipsiae d. 14 Jan. 1706.

XIII.

Wolf an Leibniz.

Schediasma de Motuum coelestium causis dudum remisissem, nisi litterae de itinere Berolinensi dubium me reddidissent, quorsum mitti deberet. Tradidi igitur illud Dn. Foerstero, I. E. V. reddendum. Addidi exemplar dissertationis de Seriebus infinitis, in gratiam tyronum conscriptum, ut haberent regulas in collegio privato pluribus exemplis ad captum ipsorum illustrandas. Volupe autem fuerit meliora edoceri. In Coroll. 6 mechanismi mentis memini, quem in analogia modi operandi in mente cum modo operandi in machinis constituo, et inter disputandum sic explicavi. Quemadmodum plures in machinis dantur partes, quarum una ad motum excitata seu determinata in motum partis alterius juxta certas motus leges necessario influit; ita similiter in mente plures dantur facultates seu Potentiae, quarum una ad cogitandum determinata juxta certas cogitandi leges in cogitationem alterius necessario influit. Corollarium ultimum in eorum gratiam adjeci, qui Scripturam sacram interpretaturi non in notiones Spiritus inquirunt et ex earum consideratione eruenda eruunt, sed praejudicia propria pro conclusionibus....... venditant, et acquisitam aliunde notitiam in Scripturam inferunt, atque in eos, qui ipsorum placitis adversa statuunt, impetuose invehuntur. Ejus veritatem ita demonstrare soleo. Cum certum sit Scripturam sacram non ineruditis minus, quam eruditis informandis destinari ex intentione divina, talia etiam a Deo adhibenda fuere media, quae scopo huic consequendo inserviunt, vi sapientiae ipsius. Quando itaque Scriptura sacra ex rerum naturalium contemplatione ad majestatis divinae cognitionem ac laudem homines excitare intendit, eo id facere debet modo, qui Philosophis pariter atque plebi sive doctae sive indoctae convenit. Jam duplex datur ad perfectionum divinarum notitiam ex rerum naturalium consideratione perveniendi via, nempe phaenomenorum recensio et eorundem resolutio. Ista cum nitatur observationibus sensualibus, sensibilia autem sensu percipere possit et Philosophus et plebs, docta pariter atque indocta, omnibus quoque Scripturae lectoribus convenit. Ast altera cum intellectum requirat purum in possibilibus concipiendis multum versatum, et per Coroll. 7 Dissert. intimiorem Geometriae, Arithmeticae ac utriusque Analyseos notitiam qualis nec in docta nec indocta plebe datur; omnibus Scripturae sacrae lectoribus non convenit. Quamobrem prae posteriori priorem eligere debuit Spiritus Sanctus. Hactenus in studio Architectonico occupor et ejus regulas ad certa fundamenta revocare conor. Cum cura evolvi Vitruvium cum Notis Perraltii, Rivii in eum Commentarios, Serlium, Vignolam cum Notis Davilierii, Scamozzum, Goldmannum, Perraltii opus de Columnis, Blondelli Cursum Architectonicum aliosque, quos una cum istis possideo; sed praecepta Architectonica non satis ad captum, nec sufficienter explicari, multo minus demonstrativis fundamentis superstrui adverti, inprimis in doctrina de 5 Ordinibus. Nec successu mihi meae caruisse videntur meditationes; finium enim methodum optime Architectonicae scientiae applicari didici et problematibus Architectonicis resolutiones adscribere in potestate est iis similes, quae ad problemata Geometriae practicae cernuntur. Unde quae in Gymnasio Goettingensi a Mathematico praestanda sunt, praestare satis valeo: nam delineationem Militarium et Civilium conficiendarum modum expeditum et accuratum novi, praxes quoque campestres subinde cum Auditoribus meis exercere soleo. Sed nollem tempus omne, saltem praecipuum iis terere. Scire tamen liberet, quale constitutum sit Professioni isti salarium. In nostra Academia nactus est Dn. Pfautzius inscius, immo non sine dolore, substitutum, hominem ambitione nemini secundum, fastu importuno intolerabilem, principiorum Euclidis, immo definitionum Astronomicarum ignarum, ut qui in Programmate inaugurali parallaxin per fallaciam visus, qua objecta remotiora minora, viciniora majora comparent, explicat; ex Tabulis quas non intelligit, loca siderum unice computare valentem. Quod ad Professionem Gissensem I. E. V. me commendaverit, grato animo agnosco. Hisce nundinis Bollii Elementa Algebrae nactus sum, sed non nisi vulgaria sub pomposis loquendi formulis et insuetis subinde dictionibus proponi adverto.

Facta mihi quoque est Matheseos Gottignianae copia; verum perfectio Analyseos ab hoc Autore tentata magis ad suos limites coarctandos eandemque non necessariis difficultatibus implicandam facere mihi videtur. Dn. Bernoullio Dissertationem desideratam misi. Gratum mihi est tanto viro innotuisse; sed magis gratum, quod uti datum etc.

Dabam Lipsiae d. 5 Maj. 1706.

XIV.

Leibniz an Wolf.

Schediasma meum de Motuum coelestium causis, et Dissertationem Tuam de Seriebus infinitis recte accepi, et gratias ago. Generaliora pro summandis seriebus tam finitis quam infinitis reperies in Schediasmate quodam meo, quod continet resolutionem Fractionum compositarum in simplices, insertumque fuit Actis Lipsiensibus paucos intra annos. Multa tamen nondum adhuc summare possumus, veluti seriem numerorum fractorum, quorum numeratores sunt unitates et denominatores sunt quadrati aut cubi aut aliae potentiae a numeris progressionis Arithmeticae, vel hi numeri ipsi.

Bene notas ad illustrandam doctrinam Harmoniae praestabilitae prodesse, ut conferamus partes machinarum corporearum cum diversis animae ejusdem facultatibus; revera tamen quaecunque in Anima universim concipere licet, ad duo possunt revocari: expressionem praesentis externorum status, Animae convenientem secundum corpus suum; et tendentiam ad novam expressionem, quae tendentiam corporum (seu rerum externarum) ad statum futurum repraesentat, verbo: perceptionem et percepturitionem. Nam ut in externis, ita et in anima duo sunt: status et tendentia ad alium statum. In mentibus autem expressiones cum conscientia sunt conjunctae, cum animarum omnium commune sit expressio multitudinis in Unitate, quod cum Cartesiani et in mentibus agnoscere cogerentur et tamen non satis distincte considerarint nec a conscientia sejunxerint, animam et mentem confudere. Natura et animalium et animarum, sed non mentium plena est, seu dominantium animarum, quae personam habeant in divina civitate; Cartesiani autem non aliam considerabant notionem, quam conscientiam, qua animam metirentur, non attendentes, esse multas in nobis perceptiones vel expressiones, quarum conscii non sumus, adeoque posse animas esse, quae conscientia omnino careant, uti nos ea caremus, etsi nunquam perceptione destituamur.

Cum Giessa nihil certi intelligam, etsi spes prolixa facta sit, res autem Goettingensis nondum satis sit constituta, ego vero de Te provehendo data occasione cogitem, ut par est, significandum putavi, quod nuper ad me perscriptum est. Novam Academiam Biponti fundat Rex Sueciae: illinc vir in autoritate positus ad me scribit, quaeritque de professoribus viris doctis et locum ornaturis, sed addit Historiae et Mathesi jam prospectum esse. Ego putavi a Te non minus lucis afferri posse philosophiae quam Mathesi, itaque respondi, Te qui Lipsiae cum laude doceas, pulchre satisfacturum, sive de re morali, aut logico-metaphysica, aut etiam physica agatur. Recepi simul in me, ad Te scribere, quod nunc facio. Interim vides expectandum mihi esse responsum, antequam aliquid certi polliceri possim. Mallem Te nobis propiorem, sed vides Tui commodi honorisque potissimam a me rationem haberi.

Recte de Gottignio Jesuita Belga, sed Romae mortuo judicas: non contemnendus erat in observationibus Astronomicis, sed Analysin tractans quaerebat nodum in scirpo. Interim si attulisset rigidas demonstrationes, non aspernarer. Relinquendum hoc est iis qui inveniendi fortuna carent, ut accuratis demonstrationibus exhibitis suppleant, quod inventores morae hujus impatientes prolixius agere dedignantur.

Haud dubie autores sacri locuti sunt de motu Astrorum, ut nos loqueremur in Historia quantumvis Copernicani. Interim nec eorum diligentiam aspernor, qui in ipsa sacra scriptura interioris doctrinae vestigia vestigant. Et nuper Dn. Reiherus ad me misit Capita suae Matheseos Biblicae, cujus altera pars ultra Mosaicam progreditur.

Operae pretium facies praeceptis Architectonicis ad rationes revocatis, quanquam eae saepe sint magis convenientiae quam necessitatis; sed hoc sufficit in tali argumento. Vale.

Dabam Hanoverae.

XV.

Wolf an Leibniz.

Milite Suedo circulos turbante nostros cum fugam pararent omnes, fugam et ipse paravi. Suadente itaque Dn. Reckenbergio Gissam profectus, statum Academicum cogniturus. Honorifice equidem exceptus a Dominis Professoribus, spesque mihi ab iisdem facta certissima, fore ut intra paucas hebdomadas vocationem ad Professionem Mathematicam obtineam. Enimvero si vel maxime spes eventu non destituatur, haud tamen majus temporis spatium meditationibus propriis permittetur, quam occupationes Lipsienses concedebant. Etenim salarium perexiguum, victus tamen majori fere pretio, quam Lipsiae comparandus. Numerus studiosorum exiguus itidem. Plerique juribus student, et ex aliis Academiis Gissam veniunt, ut Philosophiae ac Matheseos parum habeant rationis. Theologi nescio quo consilio Theologiae studiosis Philosophiae ac Matheseos studium exosum tanquam inutile reddiderunt. Qui rebus suis optime consulunt, ducta uxore rei oeconomicae gnara villicos agunt. Putabam tamen urgente necessitate acceptandam esse conditionem qualemcunque, cum litterae I. E. V. ipso fugae die acceptae liberationis spem faciant, procul dubio longe certissimam. Sed dum Halae vocationem expecto, incidit consilium quoddam, quo melius rebus meis et de praesenti et de futuro prospici posse videbatur. Vidi enim deesse Halae, qui Mathesin profitetur, deesse, qui profitetur Physicam, immo reliquam quoque Philosophiam melioris notae. Didici, non defore Matheseos Auditores, Architectonicarum inprimis Scientiarum, Mechanicae atque Hydraulicae, modo haec studia commendentur a Dn. Stryckio; non defore Physices Auditores, si opera mea in hoc argumento commendetur a Dn. Hofmanno: immo applausum facile obtentum iri, si per publicas lectiones inclarescendi ansa praebeatur. Nec difficile fore arbitror aliorum exempla intuens, ut Professionem Matheseos ordinariam Halae obtineam, modo Dn. Stryckius atque Hofmannus in aula significarent, Professorem Matheseos esse Academiae necessarium, atque I. E. V. confirmaret, me posse cum fructu huic Professioni praeesse. Nec prorsus desperari poterat de salario; abit enim Hala Altdorfum Gundlingius, invita Facultate hactenus Professione Juris Naturalis ordinaria extra ordinem defunctus, et extraordinarium salarium meritus. Quodsi difficultas de constituendo aliquo salario oriretur, poteram tamdiu salario carere, donec moriatur, qui pinguiori salario hactenus fuit gavisus. Etenim ex. gr. Dn. Cellarius, vir morti vicinus, 600 quotannis accipit imperiales: quale praemium litteris humanioribus post ipsius mortem non decernetur, ut commode in salarium geminum abire queat. Aulam non esse restituram, vel inde intelligo, quia promiscue quibuscunque Professorum extraordinariorum titulos concedunt; Academiam vero non refragari, Stryckio et Hofmanno volentibus, certum est; hi vero cur adversentur, causam habeo nullam. Immo religioni sibi ducent reclamare, I. E. V. causam meam agente. Hoc meum consilium ne in malam partem interpretetur I. E. V., quin potius, quam primum fieri potest, significet, utrum approbandum, nec ne, enixe rogo ad cineres usque futurus etc.

Dabam Halae d. 26 Sept. 1706.

XVI.

Wolf an Leibniz.

Equidem religioni mihi duco tam crebris litteris tot creare molestias Illustri Excellentiae Vestrae; cum tamen salutem meam eidem cordi esse certissimus sim, non aegre laturam esse mihi persuadeo, quod denuo ardua negotia interpellare audeam. Adibam his diebus Dn. Stryckium, cumque de statu meo percontaretur, dixi me hactenus Lipsiae per 5 fere annos Mathesin cum applausu docuisse, nunc mihi oblatam esse Professionem Gissensem, quae quidem non satis opima existat, spem tamen factam esse ab I. E. V. alius vel in Goettingensi Gymnasio illustri, vel in Academia Bipontina obtinenda. Mox regessit, Hallensi Academiae deesse Mathematicum, seque velle, ut in ea permaneam, acturum sese cum cura, quicquid in hoc negotio ab ipso proficisci possit. Nec ullo modo de successu desperare, modo I. E. V. addat litteras commendatorias, in iisque significet, malle se, ut Hallensi potius, quam Gissensi Academiae operas meas praestem, suadeatque, ut cum Fiscus Fridericianus salario constituendo non sufficiat, interea aliquod quantulumcunque salarium extraordinarium constituatur, donec alius in Facultate locus reddatur vacuus. Sibi ne minimum superesse dubii fore, ut salarium 200 thalerorum obtineam: cum multum sit in Aula consilii I. E. V. momentum. Suadebat insuper, ut adirem Magnificum Dn. Pro-Rectorem Hofmannum, non tamen quicquam de ipsius consilio dicerem. Secutus Patroni tam inopinati consilium ad Magn. Dn. Hofmannum propero, qui laetus me vidisse, de quo jam multa audiverat, sine ullo meo petito praevio, affirmabat, non Gissensem, sed Halensem Academiam locum esse debere, in quo Mathesin profitear. Et statim rem confectum iri affirmabat, si litteras commendatorias in aula exhibendas huc quantocyus mitteret Excellentia Vestra, ut iis atque litteris Dni. Pro-Rectoris Academiae nomine perscriptis (quibus addere potero litteras Dni. Stryckii) instructus Berolinum proficiscerer. Quoniam itaque omnia redeunt ad litteras I. E. V., ea qua par est animi submissione rogo, ut ne iis deesse mihi velit: rogat ipse Dn. Pro-Rector Hofmannus, qui consuetudine mea multum delectatur. Sancte promitto, me in Professione obeunda semper memorem futurum commendationis Leibnitianae, ut ea dignum me gerere omni modo allaborem, quaeque ad utilitatem ac splendorem Academiae faciunt, pro virili promoveam. Anxius expecto I. E. V. auxilium, tum ut quid Gissensibus rescribendum sit constet, tum ut, si Halae docendi munus obtineam, auditores futuri interea aliis collegiis nomina sua non dent, quae finitis nundinis Lipsiensibus inchoantur. Interea spes me lactabit certissima, fore ut I. E. V. inter tot alias arduas curas pro salute regionum Electoralium conceptas meae quoque salutis gerat curam, qua per omne tempus non desit causa laetandi etc.

Dabam Halae d. 3 Octobr. 1706.

Hierauf folgt ein Brief Wolf's, d. Halae 16 Octobr. 1706, von unwesentlichem Inhalt; er dankt darin für die erhaltenen Empfehlungsschreiben Leibnizens, und meldet dass er im Begriff sei, nach Berlin damit abzugehen.

XVII.

Wolf an Leibniz.

Incubui demonstrationi theorematis de numero radicum realium in qualibet aequatione investigandae: sed negotium aggredienti suspicio de impossibilitate demonstrationis generalis per omnes casus omnium graduum in infinitum subnata est. Deprehendi enim in hypothesi hujus theorematis unice respici ad numerum radicum, ast dispositionem signorum pendere et a numero et a quantitate radicum. Id manifestum est ex theorematibus, quae prorsus a priori pro explicanda natura omnium aequationum cubicarum completarum deduxi. Sunt autem sequentia: I. Si aequatio 3 habuerit radices veras, terminus secundus erit negativus, tertius positivus, ultimus negativus. II. Si 2 veras et unam falsam veris majorem, secundus et ultimus erunt positivi, tertius negativus. III. Si 2 veras et unam falsam istis minorem, sit tamen una vera minor falsa; vel si singulae verae excedant falsam, differentiaque falsae a vera minore superet falsam; vel singulis veris falsam excedentibus differentia falsae a vera minore sit minor falsa et differentia verarum minor vera minore; secundus et tertius erunt negativi, ultimus positivus. IV. Si 2 veras et unam falsam habeat, et singulae verae excedant falsam, differentia tamen falsae a vera minore sit minor falsa, et differentia verae minoris a majore sit major vera minore; secundus erit privativus, duo reliqui positivi. V. Si 2 falsas et unam veram, fueritque vera major falsis sive singulis sive junctim sumtis; omnes tres termini sunt negativi. VI. Si 2 falsas et unam veram, sitque vera falsis simul sumtis minor, una tamen falsarum major; vel singulae falsae excedant veram et differentia verae atque falsae minoris superet veram; vel singulis falsis veram excedentibus, differentia verae a falsa minore sit quidem minor vera, differentia tamen falsarum minor falsa minore; terminus secundus erit positivus, duo postremi privativi. VII. Si duas falsas et unam veram et singulae falsae excedant veram, differentia verae a falsa minore sit minor vera et differentia falsae minoris a majore major falsa minore; terminus secundus et tertius erunt positivi, ultimus privativus. Haec theoremata (quorum demonstrationem brevitatis causa non addo) omnes casus Aequationum Cubicarum accurate definire vel inde liquet, quod omnes combinationes signorum possibiles comprehendant. Et ex iis etiam apparet, regulam Cartesianam vel Harriotti non fallere in Aequationibus Cubicis, eamque intelligendam esse de aequationibus meras radices reales habentibus, quemadmodum jam contra Rollium notavit Prestet lib. 8. Vol. 2 p. 364.

Tentavi etiam resolutionem problematis in Diario Trevoltiensi propositi de invenienda natura Curvae a centro gravitatis globi filo tensibili alligati in descensu ex B in E (fig. 2) descriptae. Cum massa globi maneat invariata, in descensu autem ex B in E ipsius augeatur celeritas; pono tensiones esse ut celeritates. Jam celeritates juxta Gallilaeum augentur secundum numeros impares: ergo et incrementa longitudinis fili DC, EK, FL crescunt secundum numeros impares. Porro rectae AG, GH, HJ respondent altitudinibus, per quas singulis momentis descendit globus. Quare cum momenta sint aequalia ex hypothesi, erunt spatia ut celeritates, adeoque et ipsa crescunt secundum numeros impares; consequenter DC, EK, FL erunt inter se ut AG, GH, HJ, et inter abscissas AG, AH, AJ et differentias fili tensi DC, MK, NL a non tenso AB constans dabitur ratio. Sit haec ratio $= c:b$. Sit porro $AB = a$, $AG = x$, $GC = y$, erit $AH = 4x$, $AJ = 9x$, $DC = cx:b$, $MK = 4cx:b$, $FL = 9cx:b$, adeoque

$$\overline{GC}^2 = aa + 2cax:b + c^2x^2:b^2 - x^2$$
$$\overline{AK}^2 = aa + 8cax:b + 16c^2x^2:b^2 - 16x^2$$
$$\overline{AL}^2 = aa + 18cax:b + 81c^2x^2:b - 81x^2 \text{ etc.}$$

Ex antecedentibus autem demonstratu haud difficile, quadratum cujusvis ordinatae constare ex quadrato constantis a, facto ex dupla differentia fili tensi a non tenso in non tensum et quadrato hujus differentiae, demto quadrato ex abscissa. Unde si indeterminate vocetur abscissa x, semiordinata y, erit aequatio generalis curvae propositae naturam definiens: $y^2 = aa + 2cax:b + c^2x^2:b^2 - x^2$.

Pergratum erit resciscere, quid I. E. V. de hac resolutione judicet etc.

Dabam Halae d. 26 Decembr. 1706.

XVIII.

Leibniz an Wolf.

Verum est, quod theorema Harrioti non procedat nisi in radicibus realibus, quod jam notavit et Schotenius. Sed quia succedit ex solo numero radicum utcunque quantitas radicum varietur, utique necesse est dari modum demonstrandi theorema universale. Nec refert quod in ipsis cubicis non nisi per enumerationem eo pervenire potuisti. Fortasse enim res obtineri potest sine enumeratione. Fortasse etiam in ipso enumerandi continuato ad altiora progressu se deteget universalitas. Et perinde res est ac si quis Arithmeticus ex eo quod ipsi non apparet veritas alicujus theorematis nisi per inductionem, hinc sibi suspicionem subnasci diceret impossibilis demonstrationis universalis. Sed non est putandum, paulo profundiora tam facili negotio confici posse.

Vereor etiam ne solutio problematis Trivultiani majore attentione indigeat, quam nunc adhibere potuisti. Linea EK quantitas seu fili tensio nova non pendet a celeritate qua descenderet globus per CE, si tensio abesse poneretur, sed partim a declivitate ipsius EK, partim ab impetu globi a successu prioris tensionis collecto, partim denique a resistentia elastica fili contra novam tensionem, quae cum ipsa tensione perpetuo augetur. Nam si abstraheremus animum ab omni descensu fili (velut si filum semper perpendiculare esset horizonti), tamen peculiari progressu cresceret continue tensio fili et descensus globi ex hac tensione ortus, quem casum simpliciorem ubi prius accurate consideraveris, videbis quantum Tua solutio absit a composito, ubi descensus fili cum tensione ejus complicatur.

XIX.

Wolf an Leibniz.

Introductio mea finitis feriis facta est, quia Dn. de Dieskau spem quidem certam, sed non satis propinquam salarii obtinendi facere videtur, ut pessime rebus meis consulerem, si a collegiis abstinere deberem, donec certitudinem obtinerem. Pessimus Halae futurus videtur rerum mearum status; faxit Deus, ut sim vanus vates. Multa recensere poteram obstacula, quae mihi undiquaque ponuntur; sed nolo scribere, quae mihi ipsi taedio existunt. Ceterum quia ex litteris Haenischii, amici mei I. E. V. non ignoti, intelligo, litteras meas sub finem anni praeteriti ad I. E. V. perscriptas non fuisse traditas, culpa dubio procul Dn. Hofmanni, qui jam Lipsiae animi gratia agit, earundem summam denuo hisce inserere placet. *) — Quaesivi etiam libellum illius Arithmetici, de quo nuper dixi, et quaesitum inveni. Habet omnino regulam generalem resolvendi aequationes gradus cujuscunque, et demonstrationem in alio Tractatu promittit, qui num prodierit mihi non constat. Radices per eam inventae, bonae deprehenduntur per omnia examina, quae vi naturae aequationum institui possunt. Ita ex. gr. aequationis $x^6 - 4x^5 - 16x^4 + 48x^3 + 57x^2 + 4x - 6 = 0$ radices reperiuntur $-2 + \sqrt{2}$, $-2 - \sqrt{2}$, $2 + \sqrt{7}$, $2 - \sqrt{7}$, $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$. Similiter radices aequationis $x^7 - 8x^6 - x^5 + 132x^4 - 265x^3 - 64x^2 + 377x - 92 = 0$ inveniuntur $2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$ et -4. Et radices aequationis $x^8 - 14x^7 + 6x^6 + 21x^5 + 441x^4 + 540x^3 + 412x^2 - 1547x + 588 = 0$ deprehenduntur $-1\frac{1}{2} + \sqrt{-1\frac{3}{4}}$, $-\frac{1}{2} - \sqrt{-1\frac{3}{4}}$, $2\frac{1}{2} + \sqrt{3\frac{1}{4}}$, $2\frac{1}{2} - \sqrt{3\frac{1}{4}}$, $\sqrt{15+3} + \sqrt{17 + \sqrt{540}}$, $\sqrt{15+3} - \sqrt{17+\sqrt{540}}$, $-\sqrt{15+3} + \sqrt{17-\sqrt{540}}$, $-\sqrt{15+3} - \sqrt{17-\sqrt{540}}$. Ipsam regulam, non admodum prolixam, ad examen revocare nondum

*) Es folgt hier der Brief vom 25 December 1706.

licuit, nec multum libuit, quia facilius hoc fieri posse confido, si demonstratio Autoris sit ad manus. Legi his diebus responsiones Cheynaei ad Animadversiones Moivraei in ipsius Tractatum de Methodo fluxionum inverva; sed miratus, Mathematicum tam scurriliter adversarium suum tractare tantumque in refutatione affectibus tribuere. Judicium I. E. V. de meis qualibuscunque meditationibus humillime expeto etc.

Dabam Halae d. 8 Jan. 1707.

Leibniz hat bemerkt: Ex responsione: Significa, quaeso, nomen autoris et regulam ex libro excerptam communica.

XX.

Wolf an Leibniz.*

Quoniam ex litteris, quas nuper accepi, longe gratissimis conjicio, I. E. V. adhuc per aliquod temporis spatium Berolini commoraturam, exemplar Programmatis Lectionibus publicis ac privatis ex more praemissi mittere libuit. Quod vero regulam attinet generalem ex aequationibus altioris gradus radicem extrahendi, ea exstat in scripto Germanico Hamburgi 1694 in 8. edito sub titulo: Herrn Heinrich Meissners A. 1679 herausgegebener so genannter Arithmetischer Kunst-Spiegel. Daneben eine bequeme und leichte Kunstregel angewiesen, wie man aus den höheren cossischen Aequationibus die Valores Radicum, wenn solche auch in Irrational-Zahlen fallen, mit leichter Mühe finden könne, welchem noch beygefüget ein künstlicher Appendix, darinn die neu-erfundene General-Regul enthalten, durch welche man die cossische bilancen auf alle und ieden Zahlen ihre unendliche Aggregate finden kann .... Denen Kunstübenden zum ferneren Nachsinnen vorgestellet von Paul Halcken, Schreib- und Rechen-Meister in Buxtehude.

Regula, quemadmodum ex ipsius exemplo primo conjicere licet, huc redit: 1. Aequationem propositam ($x^6 - 4x^5 - 16x^4 + 48x^3 + 57x^2 + 4x - 6 = 0$) mutat in aliam, ita ut radices falsae abeant in veras, et verae in falsam (nempe in $x^6 + 4x^5 - 16x^4 - 48x^3 + 57x^2 - 4x - 6 = 0$); 2. Aequationem mutatam resolvit per aliquot numeros (4. 5. 6. 7.) sed tales, qui pro quantitate incognita substituti relinquunt numeros positivos (1914. 13524. 48678. 132756); 3. Facta haec resolvit in suos factores et a seriei primae singulis terminis subtrahit 0, in secunda quadratum 1, in tertia quadratum binarii 4, in quarta quadratum ternarii 9 etc.

1914	F.	1	(2)	3	6	11	22	(29)	33	58	66	etc.		
13524	F.	3	4	6	7	12	14	21	23	28	42	46	92	etc.
		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
		2	3	5	(6)	11	13	20	22	27	(41)	45	91	
48678	F.	6	7	14	19	21	38	42	57	61	122	etc.		
		4	4	4	4	4	4	4	4	4	4			
		2	3	(10)	15	17	34	38	(53)	57	118			
132756	F.	13	23	26	37	39	46	52	69	74	78	92	etc.	
		9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9		
		4	(14)	17	28	30	37	43	60	(65)	69	83		

4. Ex seriebus residuis excerpit progressiones Arithmeticas, in quibus terminorum differentia major 1, nempe

2	6	10	14	differ.	4
29	41	53	65	„	12
33	45	57	69	„	12

5. Inde format aequationes quadraticas, quarum ultimi termini sunt termini primi progressionales, quantitates vero cognitae secundi termini differentiae terminorum progressionalium:

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$
$$x^2 - 12x + 29 = 0$$
$$x^2 - 12x + 33 = 0$$

6. Ex his aequationibus extrahit radices ($2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$, $6+\sqrt{7}$ et $6-\sqrt{7}$, $6+\sqrt{3}$ et $6-\sqrt{3}$), et ab iis subtrahit numerum (4), per quem prima facta est resolutio: residuas dicit esse radices desideratas ($-2+\sqrt{2}$, $-2-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{7}$, $2-\sqrt{7}$, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$).

Ex altero tamen ipsius exemplo colligitur, ipsum hanc regulam non stricte observare in omni casu. Aequationem resolvendam $x^6 - 12x^5 + 47x^4 - 56x^3 - 41x^2 + 100x - 23 = 0$ mutat in hanc $x^6 + 12x^5 + 47x^4 + 56x^3 - 41x^2 - 100x - 23 = 0$, eamque resolvit per 1. 2. 3, ut relinquantur facta -48, $+1261$ et $+8272$, quae una cum termino ultimo -23 resolvit in factores et subtractione debita peracta,

$$\begin{array}{rlllllllllll}
23 & \text{F.} & (1) & 23 \\
48 & \text{F.} & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 12 & 16 & 24 & 48 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & (5) & 7 & 11 & 15 & 23 & 47
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlll}
1261 & \text{F.} & 13 & 97 \\
 & & 4 & 4 \\
\hline
 & & (9) & 93
\end{array}$$

$$\begin{array}{rllllllllll}
8272 & \text{F.} & 11 & 16 & 22 & 44 & 47 & 88 & 94 & 176 & \text{etc.} \\
 & & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\
\hline
 & & 2 & 7 & (13) & 35 & 38 & 79 & 85 & 167
\end{array}$$

inde elicit progressionem 1. 5. 9. 13, ubi terminorum differentia 4, quae suppeditat aequationem $x^2 - 4x + 1 = 0$, per quam dividit resolvendam $x^6 - 12x^5 + 47x^4 - 56x^3 - 41x^2 + 100x - 23 = 0$, ut prodeat $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 23 = 0$. Hanc tanquam quadraticam considerat et ex ea addita unitate utrinque extrahit radicem quadratam $x^2 - 4x - 1 = \sqrt{24}$, unde ulterius elicit radices quadraticas $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{2}-\sqrt{3}$, item $2+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Ex aequatione vero $x^2-4x+1=0$ extrahit similiter radices binomias $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$. Sic radices ait esse inventas, quia nimirum resolutio prima facta est per 1. Regulae hujus inventor Halke ait, Meisnerum im Stern und Kern der Algebra (cujus libri spes mihi quoque facta est) non multo dissimilem proposuisse regulam, sed quae insigni aliqua praerogativa gaudeat prae sua, et illius demonstrationem promittit in der dreyfachen Schnur, quod scriptum an prodierit nondum constat. Si ipse liber desideretur, copiam ejus facturus sum. Ceterum constanter futurus etc.

Halae d. 22 Jan. 1707.

XXI.

Leibniz an Wolf.

Regula Halkii non nisi particularis esse potest et propria iis aequationibus altioribus quae deprimi possunt, et ex quadraticis aequationibus in se invicem ductis producuntur. Itaque ad id quod quaero non servit. Et idem per Huddenianas regulas obtineri potest. Si tamen vel in hoc casu satis apta et generalis esset, laudem mereretur. Vereri facit, quam ipse observasti, variatio. Noto, si aequationem datam $0=x^6-4x^5-16x^4+48x^3+57x^2+4x-6$ mutes ut jubetur, idem fore ac si facias $x=-z$, et fiet $0=z^6+4z^5-16z^4-48z^3+57z^2-4z-6$. Sit deinde $y=x+4$, et tres aequationes ab Halkio assignatae scribantur secundum incognitam y, erunt $yy-4y+2=0$, $yy-12y+29=0$, $yy-12y+33=0$. His positis observo, si pro y substituatur valor $x+4$, prodituras ex his tribus has sequentes $xx+4x+2=0$, $xx-4x-3=0$, $xx-4x+1=0$, quae sunt tres aequationes quaesitae, quibus in se invicem ductis prodit aequatio initio data. Hinc si quis porro inquirat, putem aditum ad originem regulae reperiri posse, si modo aliquid solidi ipsi inest, neque ad speciem tantum exemplis jam notis accommodata, ut non raro ab Arithmeticis minorum gentium fieri solet. Si saltem in multis succederet, posset fortasse prodesse sub quadam limitatione.

Pro eleganti et docto Programmate Tuo gratias ago. Quaedam annoto, pace Tua. Ad pag. 3: credo Veteres et ad Geometrica aliquid Algebrae simile applicasse, etsi dissimularint. Vieta jam ante Cartesium Algebram ad quaestiones pure geometricas resolvendas adhibuit, hoc satis ostendunt ejus Sectiones Angulares. Backerus, la Hire, Ozannam parum aut nihil ad constructiones contulere; minutula sunt et exigui usus quae de constructionibus aequationum solidarum per parabolam afferunt, cum et facillime inveniri potuerint, ego vix talibus chartam implessem, quae isti hic dedere. Incomparabiliter praestantiora Slusius adhibuit, cujus artes Parisiis Ozannamo miranti ostendi. Ad pag. 4 noto, principium meum de Circulis osculantibus Linearum Conicarum, quas in vertice osculantur, succedaneis Davidi Gregorio integri libelli dioptrici materiam dedisse, etsi me dissimularit. Ad pag. 5: circa leges virium in Astronomicis Dav. Gregorius tantum repetiit Newtono dicta. Leges virium centrifugarum Hugenio, non Hospitalio debentur. Nec Varignonium et multo minus Parentium (qui semper novitates jactat) circa leges motus generales aut frictiones machinarum aliquid admodum singulare praestitisse puto. Circa Leges propagati luminis majora Hugenio quam mihi debentur. Ad pag. 6: Pardiesius cum aliquid audisset de Hugeniana propagatione luminis per undas, praevenire eum speravit, sed frustra, nam profundiora erant Hugeniana, quam ut Pardiesius ea divinare posset, ut satis ex Angonis Optica patet, qui posthuma Pardiesii dedit. Microscopiorum globularium usum Leewenhoekius egregie promovit, quem Muschenbroek est imitatus; nescio an hic aliquid insigne a Bonanno (?). Hugenius et Reita et Divinus et Campanus et Borellus egregios Tubos construxere, sed Hookius, Newtonus et Hartsoekerus quod sciam tantum spem fecere. Ad pag. 7: Dn. de Tschirnhaus observationes quas memoras communicari optarem. Observatores egregii Hevelius, Hugenius, Cassinius, Horroxius, Piccartus, Flamstedius, Römerus, Kirchius, la Hirius, addes et Blanchinum. Circa instrumenta promisit multa, sed vix quicquam praestitit Hautefeuille, ne Hookius quidem spei respondit. Ad pag. 8: Bullialdus, Paganus et Wardus conati sunt rem Ellipticam revocare ad circulos, non optime. Vereor ut sextus ordo Sturmii nomen inveniat. Ad pag. 9: non puto machinas Veterum bellicas nobis esse valde ignotas. De Frictione aestimanda non primus Parentius. Ego ipse eam rem alicubi attigi, alii alias.

XXII.

Wolf an Leibniz.

Cum ex litteris Dn. Hofmanni his diebus intellexerim, Excellentiam Vestram Berolini commorari, nec quae sub initium hujus anni Hannoveram per amicum misi Elementa Aërometriae in usum ...... Physicae a me edita, sed (quod denuo doleo!) ob absentiam meam vitiosissime impressa, adeo accipere potuisse, cum iis vero una miserim recensionem Historiae Academicae Regiae Scientiarum A. 1707, quam Dn. Menckenius mensi Martio inseri lubenter vellet; ideo in praesentibus litteris memoratam relationem denuo communicare volui, ut hora subcisiva eandem perlegere et si quae notanda occurrant, eidem adjicere non dedignetur. Praeterita hebdomade per studiosum quendam ab amico quodam Baruthi degente, sed ne nomine quidem adhuc noto oblata est schedula, in qua mihi dubia quaedam solvenda proponebat ipsi occasione cujusdam schediasmatis ab E. V. Actis Lipsiensibus inserti enata. Quaerebat scilicet, unde constet (quod E. V. a se primum detectum affirmet) $\int \frac{dx}{x^2+1}$ pendere a quadratura circuli, et quomodo inde series pro circuli $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ etc. deducatur. Cum igitur variis modis formulam istam ex circulo elicere tentassem, tandemque in geminam (ut mihi videtur) viam incidissem, sequentia respondi. Dixi, $dx : (x^2 + 1)$ esse differentialem sectoris circuli, cujus dimidii arcus tangens sit x, radius vero 1. Si enim fuerit (fig. 3) tangens arcus dimidii $AB = x$, radius $AC = a$, fore tangentem arcus dupli $AD = \frac{2aax}{aa - xx}$, unde reperiatur secans $DC = a^3 + ax^2, :, aa - xx$ et hinc porro $DE = 2ax^2, :, aa - xx$; jam cum sit $DC : DA = EC : EF$, inveniri sinum $EF = 2a^2x :, a^2 + x^2$. Porro per theorema Pythagoricum elici Sinum complementi $FC = a^3 - ax^2, :, aa + xx$, et hinc tandem Sinum versum $AF = 2ax^2 :, a^2 + x^2$. Jam si differentialium ipsarum AF et EF, nempe $\frac{2a^4dx - 2a^2x^2dx}{(a^2+x^2)^2}$ et $\frac{4a^3xdx}{(a^2+x^2)^2}$ quadrata colligantur in unam summam $\frac{4a^8dx^2 + 8a^6x^2dx^2 + 4a^4x^4dx^2}{(a^2+x^2)^4}$ et ex ea extrahatur radix $\frac{2a^2dx}{a^2+x^2}$, fore eam differentialem arcus AE, quae ducta in $\frac{a}{2}$ seu semiradium producat differentialem sectoris circularis $ACE = a^3dx :, a^2 + x^2$. Quodsi jam ponatur $a = 1$, fore idem elementum sectoris circularis $dx : (1 + x)$. Patere adeo $\int dx : (x^2 + 1)$ pendere a quadratura circuli. Si ergo porro $1 : (1 + x^2)$ vel more Mercatoris per communem divisionem in seriem resolvat, reperiri $dx : (x^2 + 1) = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ etc., cujus integralis $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11}$ etc. exprimat aream sectoris, cujus arcus dimidii tangens sit x. Jam quamprimum tangens AB aequalis fiat radio BC, sectorem degenerari in quadrantem circuli tumque ex hypothesi assumta evadere $x = 1$, consequenter aream quadrantis $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. Gratum faciet E. V., ubi corrigere dignata fuerit, si quae in hac responsione non rite se habeant: ego autem constanter futurus etc.

Dabam Halae Saxonum d. 29 Jan. 1707.

P. S. Cum in aerario Academico nunc supersint 200 thaleri, quae per favorem aulae in augmentum salaris cedent uni ex ordine Professorio; scripsi nuper ad Dn. de Danckelman, ut mei Patronum ageret coram Rege: qui etsi aliqualem spem fecerit, credo tamen ut votis meis prorsus annuat, per commendationem Excellentiae Vestrae facile effici posse.

XXIII.

Wolf an Leibniz.

Nullus dubito, quin I. E. V. litteras meas una cum Programmate Lectionibus publicis praemisso acceperit, in quibus nominavi Autorem regulae universalis pro extrahenda radice ex aequatione quacunque. Copiam libri faciet amicus meus Hoenischius ex Silesia propediem redux, qui eundem nactus est. Mihi accuratius in regulae fundamentum inquirenti visus est Autor ex quibusdam exemplis (quoad radices irrationales) eam deduxisse, in quibus radices aequationis jam ante constabant, tanquam arbitrario assumtae; minime autem promiscue omnibus aequationibus applicari posse judico. Cum in Lectionibus publicis per aestatem Hydraulicam interpretari constituerim, calculum Analyticum ad problematum quorundam Hydraulicorum solutionem applicare libuit, in quorum solutione duo lemmata suppono, alterum ex Mariotto, alterum ex Commentariis Academiae Scientiarum.

Lemma 1. Si nulla spectetur resistentia tuborum fuerintque diametri eorundem aequales, quantitates aquae per eos effluentis sunt in ratione duplicata altitudinum; si altitudines fuerint aequales, in ratione duplicata diametrorum; si nec altitudines, nec diametri aequales, in ratione composita duplicatae altitudinum et duplicatae diametrorum.

Lemma 2. Resistentiae, quas aqua per canales fluens experitur, consequenter diminutiones aquae effluentis, sunt in ratione superficierum.

Scholion. Equidem non ignoro, Mariottum quoque diminutionem aquae effluentis ab affrictu in orificio tubi facto et resistentia aëris externi petere; cum vero ipse fateatur, has causas esse admodum irregulares, nec multum mutationis inducere, eas in praesente non considerabo.

Problema 1. Datur longitudo canalis cujusdam; quaeritur quanta esse debeat longitudo alterius eandem cum priore diametrum habentis eandemque aquae quantitatem eodem tempore effundentis.

Sit altitudo unius canalis a, alterius x, aqua effluens ex uno y, erit per Lem. 1. $aa . xx :: y . \frac{yxx}{aa} =$ quant. aquae per tubum alterum effluentis. Sit imminutio aquae in Tubo uno $\frac{y}{n}$, erit vi Lem. 2. $a . x :: \frac{y}{n} . \frac{xy}{an} =$ diminut. aquae in tubo altero. Quare $y - \frac{y}{n} = \frac{yxx}{aa} - \frac{yx}{an}$; reductione facta, reperietur $x = \frac{a}{2n} + \sqrt{aa - \frac{aa}{n} + \frac{aa}{4nn}}$. Quodsi desideretur, ut ex Tubo altero effluat multiplum vel submultiplum aquae ex dato uno effluentis, erit $my - \frac{my}{n} = \frac{yxx}{aa} - \frac{yx}{an}$; reductione facta reperietur $x = \frac{a}{2n} + \sqrt{maa + \frac{aa}{4nn} - \frac{maa}{n}}$.

Problema 2. Dantur diametri duorum canalium una cum unius longitudine; quaeritur quanta sit alterius altitudo, ut aequali tempore aequalis quantitas aquae per utrumque effluat.

Sit diameter unius a, alterius b, altitudo unius d, alterius x, quantitas aquae ex uno effluens y, reperietur quantitas aquae ex altero effluentis $\frac{bbyxx}{aadd}$, et posita diminutione aquae in Tubo uno $\frac{y}{n}$, diminutio aquae in Tubo altero $\frac{byx}{adn}$, ut adeo sit $y - \frac{y}{n} = \frac{bbyxx}{aadd} - \frac{byx}{adn}$; reductione facta, reperietur $x = \frac{ad}{2nb} + \sqrt{\frac{aadd}{bb} + \frac{aadd}{4nnbb} - \frac{aadd}{nbb}}$. Quodsi desideretur, ut ex Tubo uno effluat mutiplum aquae ex altero effluentis seu submultiplum, erit $my - \frac{my}{n} = \frac{bbyxx}{aadd} - \frac{byx}{adn}$, reperietur $x = \frac{ad}{2nb} + \sqrt{\frac{maadd}{bb} + \frac{aadd}{4nnbb} - \frac{maadd}{nbb}}$.

Problema 3. Dantur altitudines duorum canalium una cum diametro unius; quaeritur quanta sit diameter alterius, ut aequali tempore aequalis aquae quantitas per utrumque effluat.

Sit altitudo unius a, alterius b, diameter unius d, alterius x, denuo reperietur $x = \frac{ad}{2nb} + \sqrt{\frac{aadd}{bb} + \frac{aadd}{4nnbb} - \frac{aadd}{nbb}}$.

Problema 4. Data diametro unius canalis, invenire alios quotcunque minores isti longitudine aequales, per quos eodem tempore eadem quantitas aquae effluat, quae per majorem effluit.

Sit diam. maj. a, diameter unius ex minoribus x, numerus minorum p; quantitas aquae ex majore effluens y, erit $y - \frac{y}{n} = \frac{pyxx}{aa} - \frac{pxy}{an}$; reperietur $x = \frac{a}{2n} + \sqrt{\frac{aa}{p} + \frac{aa}{4nn} - \frac{aa}{pn}}$, vel si multiplum desideretur $x = \frac{a}{2n} + \sqrt{\frac{maa}{p} + \frac{aa}{4nn} - \frac{maa}{pn}}$.

Problema 5. Datur diameter unius canalis cum longitudine ejus; determinare longitudines aliorum quotcunque eandem diametrum habentium et eandem aquae quantitatem aequali tempore cum dato effundentium.

Sit diameter can. *a*, long. can. max. *b*, minimi x, different. long. *d*. Crescant longitudines in ratione Arithmetica, erit ultimi $x + md - d$, posito numero canalium *m*. Sit quantitas aquae effluentis ex maximo y, erit quantitas aquae effluentis ex reliquis

$$\frac{y}{bb} \times mxx + dx \times \overline{2+4+6+8+\text{etc.}} + dd \times \overline{1+4+9+16}\ \text{etc.}$$

Sit imminutio aquae in maximo $\frac{y}{n}$, erit diminutio aquae in reliquis simul sumtis $\frac{myx}{bn} + \frac{mmdy}{2bn} - \frac{mdy}{2bn}$; quare $y - \frac{y}{n}$

$$= \frac{y}{bb},\ mxx + dx \times, 2+4+6+8\ \text{etc.} + dd \times, 1+4+9+16\ \text{etc.}$$

$$- \frac{myx}{bn} - \frac{mmdy}{2bn} + \frac{mdy}{2bn},$$ reperietur $x = d \times \overline{1+2+3+4}$ etc.

$$- \frac{mb}{2n} + \sqrt{d \times \overline{1+2+3+4\ \text{etc.}} - \frac{mb^2}{2n} + \frac{bb}{m} - \frac{bb}{mn} - \frac{dd}{m} \times \overline{1+4+9+16}\ \text{etc.} + \frac{mbd}{2n} - \frac{bd}{2n}}.$$

Cum nuper Status convenissent, statutum mihi est salarium ducentorum thalerorum, immediate ex ipsorum aerario ab auspicio Professionis solvendum. Caeterum cum Sturmianos libellos scopo meo in collegiis non satis idoneos judicem, ipse de conscribendo compendio aliquo Mathematico in usum Auditorum meorum meditor, in quo omnium disciplinarum palmarias praxes cum debitis theoriis clare ac perspicue exponam, Matheseos applicationem ad disciplinas Philosophicas reliquas et usum vitae humanae constanter commonstrem, et quae ex Mathesi pro cultura ingenii petere licet, ubique fideliter annotem. Sub finem Analyseos utriusque compendium addam, in quo per omnes disciplinas iturus ostendam, quomodo ejus ope, jactis levibus fundamentis, ad altiora progredi detur. Gratum erit cognoscere, num E. V. talem laborem necessarium judicet et quid ipsamet de forma talis compendii statuat. etc.

Dabam Halae d. 20 Maji 1707.

XXIV.

Wolf an Leibniz.

Litterae E. V. praeterlapso die Jovis ad me fuerunt allatae Merseburgo; quare nunc demum respondere datur. Hofmannus noster jam sibi satisfactum credit per experimentum, de quo nuper coram dixit, nullo alio opus judicet. Semel assertis pertinaciter inhaeret. Finito jam Pro-Rectoratu de Urinae specifica gravitate et pulsus celeritate se observationes consignaturum ait; sed vellem ego, ut ne memoriae omnia tribueret, quam tantum non quotidie infidam experitur. Fortassis nec fructu careret, si suas de pulsu observationes cum observationibus Abercrombii de variatione pulsus Londini 1685 editis conferret. Sed talia ipsum monere non audeo, cum aliorum labores spernat, per quos ipsemet profecit, ne per eos profecisse videatur: quemadmodum jam me praesente pro suo invento jactitare nullus dubitat, febrim esse affectum generis nervosi, quod tamen ex I. E. V. auditum cum primus ipsi referrem, falsum pronunciare non verebatur. Ego per aliquot hebdomades ope microscopiorum Muschenbroekianorum aliorumque magis adhuc exactorum tum ad lucem Solis primam et secundam, tum ad lumen lunae atque candelae vapores in aëre agitatos observavi: unde multa theoriam vaporum explanantia consequuntur. Observationes ea cum circumspectione institui, ut ex ipsis historicae relationis earundem circumstantiis colligi possit, omnem abesse visus fallaciam. In singulis casibus per 16 lentes gradu inter se differentes observationes reiteravi, inter quas minima vix milii granulum adaequat et institutas extemplo consignavi, sed integras ob prolixitatem litteris inserere non licet. Dicam in compendio, quae observata sint. Semper in aëre deprehenduntur globuli et tubuli. Globuli vel ex asse pellucidi sunt, vel nonnisi pellucidum habent nucleum, eumque exiguum, zona latiore ac obscuriore cincti, quam extus zona alia contractior et magis perspicua ambit. Duplicem hanc differentiam ipsi etiam tubuli admittunt. Sed utrumque tubulorum genus aut insertos habet hinc inde globulos plerumque pellucidos, rarissime compositos, aut nullis globulis interstinctum. Praeterea situs tubulorum vel ad Horizontem parallelus, vel perpendicularis. Constanter vero varie inflexos et in miros gyros contortos deprehendi. Illud quoque notatu dignum, quod circa candelam nonnisi globulorum compositorum congeriem, rarissime globulos pellucidos intra flammam agitatos observaverim. Ast multo magis notatu dignum existit, quod nudis etiam oculis vapores in aëre volitantes observare liceat. Geminam hactenus expertus sum methodum. Una in vulgus nota et ideo insuper mihi habita, inprimis cum ad certum unice tempus restringatur. Una intra paucos admodum dies animadversa semper succedit et pleraque detegit, quae microscopiis pervia existunt. Majore tamen industria observationes per eam instituendae et accurate annotandae sunt, antequam plura de eadem dicam.

Novorum librorum nihil ad me perlatum, excepto compendio Matheseos Universae Sturmiano, quod nonnisi maxime vulgaria continet eaque non satis accurate tradita. Multa ex parentis Mathesi Juvenili transscribuntur. Praefationes duae, quas promittit Autor, ipsius animi interiora sensa manifestant, in Mathesi profectus candide exponunt, affectum dominantem palam faciunt. Unum pro reliquis notatu dignum, quod, cum ingenue fateatur, se Opticam scientiam, quia non est de pane lucrando, semper hucusque neglexisse, Mathematicos tamen carpat, quod demonstrationes opticas juxta rigorem Geometricum concipiant, quoniam rigor demonstrandi Geometricus perperam adhibeatur, ubi natura in effectibus producendis eum non observat. Ipse igitur illis praefert, quae per nudum schematismorum delineatorum intuitum, facta, si opus fuerit, instrumentorum Geometricorum applicatione, addiscere licet. Paucula illa praecepta, quae parens ipsius in Mathesi Enucleata de Algebra tradit, exscribit cum nonnullis aequationum simplicium et quadraticarum exemplis, et multum gloriatur, quod duo ipsemet proprio Marte invenerit.

Halae d. 3 Jul. 1707.

XXV.

Leibniz an Wolf.

Quae de globulis et tubulis in aëre volitantibus habes, valde probo. Et licet non possent animadverti oculis, tamen ratione colligentur. Fluida ex partibus flexilibus et quasi membranulis persaepe constare easque persaepe cavas esse, et alia fluida subtiliora continere, naturae ipsorum consentaneum est. Habent enim semper aliquid tenacitatis. Itaque olim bulbulis usus sum in ratiocinando, quae non semper sunt rotundae, nec semper ubique clausae: sufficit foramina esse arctiora, quam ut inclusum facile exire possit. Et fieri potest, ut inclusum frigidiore tempore facilius exeat, quam calido, si inclusum calore intumescit: aut ut contra facilius exeat calido si includens calore diducatur. Si certas reddere potes observationes Tuas, poteris amplum habere campum eas variandi, observando scilicet vapores non tantum temere in aëre volantes, sed etiam ex corporibus prodeuntes vel per se vel calore aut alio adjumento. Id serviet ad melius cognoscendas corporum emittentium particulas.

Suaserim ut celeberrimo Dno. Hofmanno nostro demonstres experimentum quale jam proponam. Est enim simplicissimum et facile ejus praejudium absterget. Sumi poterit Tubus vitreus capax et longiusculus quantum haberi poterit ad manus, uno extremo apertus, altero clausus. Is aqua impleatur, et plumbum vel globi vel potius cylindri forma in eo demittatur, quod panni vel corii frustulo muniri poterit, ne impetu suo fundum vitri frangat. Cylindrum talem manu formare licet plumbi laminam convolvendo; porro antequam immittatur plumbum, Tubus aqua plenus librae bilancis uni lateri appendatur, alteri lanci imponatur pondus aequale. Tum immisso plumbo res ipsa monstrabit, aequilibrium parum mutari durante descensu (nisi quantum aqua nonnihil resistit et impetum aliquem a descensu impressum recipit), donec plumbum ad fundum perveniat. Manifestum autem est, si plumbum initio appensum fuisset vitro (quod perinde est ac si in eo ope alterius corporis sustinentis natasset), aequilibrium valde fuisse immutaturum, non minus ac tunc facit, cum fundum attingit. Ita intentum consequimur, sine machinamento innatantis et mox fundum petenti s.

XXVI.

Wolf an Leibniz.

Quin' E. V. litteras meas, in quibus de quibusdam vaporum observationibus scripsi, acceperit, nullus dubito. Sine microscopiis illi observantur, si per exiguum foraminulum ope acus in charta efformatum versus aërem liberum aut candelam accensam respiciatur. Varia meditatus sum circa aequationes curvarum ex quadraturis datis eruendis, ubi duplicem deprehendi casum. Aut enim problema est determinatum, ex. gr. si detur $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, aut indeterminatum, ex. gr. si detur $\frac{m}{n}xy$. Ast ea jamdudum ab aliis exposita satis arbitror. Praeterea inveni regulam, ex qua punctum O (fig. 4) determinare licet, in quo recta EO cum Tangente TM ex dato puncto E parallela ducta Curvae occurrit. Scilicet puncti O determinatio a quantitate rectae AR tota pendet. Haec vero inveniri potest, quia pervenire datur ad aequationem, applicatae OR valorem bis inveniendo, nempe ex similitudine $\Delta\Delta$ EOR et TMP, et ex data per naturam Curvae ratione Potentiarum PM et OR. Ex. gr. sit in Parabola $AP = x$, $AR = v$, $EA = b$, erit $TP = 2x$, $PM = \sqrt{ax}$; $\overline{OR}^2 = av$, et propter $\Delta\Delta$ similitudinem $TP(2x) . PM(\sqrt{ax}) :: ER(b+v)$. $OR = \frac{b\sqrt{ax} + v.\sqrt{ax}}{2x}$. Habetur itaque $4vx = bb + 2bv + vv$. Unde valor ipsius v non amplius latere potest.

Videbatur mihi quoque in promptu esse regula, data quadratura ex Curva data resecandi segmentum OMS, quod habeat ad Curvae aream rationem datam. Etenim ob datam quadraturam et rationem segmenti OMS ad aream Curvae datur valor Trapezii AOSQ. Sed idem resolvitur in trilinea AOR, OSW et OQ, quae, posita $AR = v$, singula nominetenus dantur. De spatiis OSW et OQ satis constat, nec minus manifestum est, data quadratura Curvae indefinita dari etiam quadraturam spatii OSW. Pervenitur itaque ad aequationem, in qua nulla est incognita praeter v. Eam tamen talem non deprehendi, ut simplicem puncti O determinationem exhiberet.

Incidit hisce diebus in manus meas Papini Ars nova ad aquam ignis adminiculo efficacissime elevandam. Describit machinam, qualem jam ante dedit Savery Anglus, sed quam Saveriana praestantiorem judicat. An vero eum in praxi habitura sit usum, quem ille intendit, de eo valde dubito. Descriptionem ejus exactam Lipsiam misi, ut Actis inseratur.

Pervenerunt quoque ad me Cluveri Disquisitiones Philosophicae, quarum singulae plagulae singulis anni praeteriti hebdomadibus sub titulo: Historische Anmerkungen über die nützlichsten Sachen der Welt, editae. In iis Mathematica nonnulla habentur, sed pleraque admodum obscura. Invehitur in calculum differentialem, et suam praedicat Analysin infinitorum similium, quam in rationum compositione ac divisione consistere ait, aequationibus multum praestante. Video in Actis Lipsiensibus dudum hujus Analyseos principia promissa esse, nec tamen rescire licuit, num ab Autore unquam edita fuerint. Quaedam ipsius theoremata per

Analysin communem erui, eamque satis brevem ob artificium quoddam in reductione observatum, ab omnibus Analystis in casibus similibus dudum usurpatum. Reliqua quin similiter per vulgarem Analysin exerceri queant, non dubito. Methodos Tangentium receptas carpit, quod in iis non simul secantium, istis ad angulos rectos insistentium, habeatur ratio. Singularia quaedam habet de primis notionibus Metaphysicis ex numerorum Scientia eruendis.

Dabam Halae d. 24 Jul. 1707.

XXVII.

Leibniz an Wolf.

Non satis intelligo, qualesnam velis aequationes eruere ex datis quadraturis. Res applicanda esset exemplo alicujus problematis.

Problema Tangentium est quodammodo casus problematis rectae quae curvae bis vel etiam pluries occurrat. Nam cum puncta concursus coincidunt, recta fit tangens. Et hac Methodo usus est Cartesius, ita enim fiunt radices aequales. Caeterum problema inveniendi puncta, quibus recta datae Tangenti parallela occurrat curvae, sic etiam proponi poterit: A curva data ABC abscindere arcum talem DBE per rectam FG ex dato puncto F eductam, ut sagitta BH (seu maxima latitudo segmenti DBED) cadat in punctum curvae datum B. Nam patet rectam FE tantum esse debere tangenti in B parallelam. Problema autem Tuum ad hoc reducitur: Inveniri puncta D, E, quibus recta data FG occurrat curvae; nam FG parallela tangenti datae, transiens per punctum datum F, est data. Quae de abscindendo segmento datae ad aream curvae generaliter quadrabilem rationis habes, dubitatione carent.

Cluverius doctrina et ingenio non caret, sed interdum mire sibi indulget, vel singularitate sententiarum, vel etiam sesquipedalibus verbis in rebus parvi momenti. Si tangentes habemus, facile etiam secantes ad angulos rectos habebimus, mirumque est quod peculiarem in ea re difficultatem collocat. Vale.

XXVIII.

Wolf an Leibniz.

Quae nuper de natura Curvarum ex quadraturis eruenda scripsi, huc redeunt. Sit ex. gr. invenienda aequatio curvam definiens, cujus area $\frac{x^2+a^2}{3}, \sqrt{xx+aa}$. Ejus differentialem $\frac{1}{3}x^3dx + aaxdx : \sqrt{xx+aa} + \frac{2}{3}xdx\sqrt{xx+aa}$ divido per dx, erit $\frac{1}{3}x^3 + a^2x : \sqrt{x^2+a^2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x^2+a^2} = y$, hoc est, $x^4 + a^2xx = yy$, quae est aequatio quaesita. Exemplum hoc facile. Ceterum me fugit, utrum jam data sit a quoquam methodus in differentialibus tollendi quantitates irrationales, ut integrabiles evadant, necne. Mihi innotuit particularis, sed ad multos omnino casus accommodanda, cujus simplex admodum propono exemplum. Sit ex. gr. differentialis $dx\sqrt{xx+ax}$. Pono $x = \frac{zz}{2z+a}$ et rursus $2z+a = v$, indeque reperio $dx\sqrt{xx+ax} = \frac{vdv - 2aav^{-1}dv + 4a^4v^{-3}dv}{4}$. Quodsi cognovero, me non inanem operam sumere, eum ulterius excolere non pigebit etc.

Dabam Halae d. 31 Aug. 1707.

XXIX.

Wolf an Leibniz.

Mitto ex nundinis Lipsiensibus programma Germanicum, quod more nostro Hallensi Collegio Mathematico per hiemem habendo praemisi. Dn. Wagnerus, Excell. Vestrae non ignotus, hic commoratur et scriptum acerrimum contra Dni. Thomasii Tentamen de Spiritu edidit idiomate vernaculo consignatum. Miror vero, quod animam rationalem pro vi habeat ex combinatione plurium potentiarum materialium oriunda et in doctrina de Deo cum Spinosa sentiat, utut se eum nunquam vidisse affirmet. Caeterum cum hactenus in publicis Lectionibus Hydraulicam explicaverim, continuationem fluxus aquae per syphones a nemine eorum, quos evolvere licuit, rite demonstrari animadverti. Videor vero mihi veram invenisse demonstrationem huc redeuntem. Suppono 1. gravitatem atmosphaerae esse vim determinatam adeoque et producere effectum determinatum, vim ex. gr. imprimendo aquae ad altitudinem 31′ ascendendi. 2. Vim impressam decrescere in ratione partium spatii, per quod ascendit, ita ut, si aqua ad altitudinem 11′ ascenderit, restet adhuc vis ad 20′ ascendendi. 3. Aquam, dum delabitur, acquirere vim reascendendi ad eam altitudinem, a qua descendit. Ponamus itaque syphonis crus minus esse 11′ altum. Aqua igitur cum polleat vi ad altitudinem 31′ ascendendi per supp. 1, ubi ad summitatem cruris minoris pervenit, praedita adhuc est vi ascendendi ad 20′ altitudinem per supp. 2. Jam cum ad orificium cruris longioris atmosphaerae gravitate sua resistat, quae aequipollet vi, per quam aqua ad 31′ altitudinem ascendere valet per suppos. 1, ut resistentia superetur, per altitudinem 11′ paulo majorem aqua adhuc descendere debet per suppos. 3. Quare cum crus majus superet minus, aqua per syphonem continuo fluit. Ex his principiis optime reddere licet rationem, cur si aqua per attractionem elevetur ex vase A in B (fig. 5), altitudo tubi CD, per quem aqua ex vase C defluit, aequari debeat altitudini tubi AB: immo aliarum quoque machinarum hydraulicarum, quarum effectus insufficienter vulgo demonstrantur.

Halae Saxonum d. 11 Oct. 1707.

XXX.

Wolf an Leibniz.

Quod responsionem diutius distulerim, quam par erat, non in malam partem interpretabitur Excellentia Vestra. Causa fuit, quod structuram mobilis alicujus perpetui mihi adinvenisse videar, cumque in demonstratione nullum deprehendere queam paralogismum et nactus sim nonneminem in machinarum ideis elaborandis optime versatum, nunc demum scribere decreveram, ubi idea perfecta successum ad oculos demonstraret. Enimvero cum vix spes supersit, ut ante festum Nativitatis Christi machina absolvatur, propositum meum mutandum esse censui.

Quod itaque Dn. Schurtzfleischium attinet, totum illi salarium B. Cellarii oblatum fuit; neque enim id fuit nisi 400 thalerorum. Hofmannus de Academia nostra magnifica mihi loquebatur, quae alia prorsus deprehendo, postquam ejus statum intimius introspicere datum. Experimentum controversum ipse instituere non vult, nec mecum communicare cupit idonea quae possidet instrumenta. Equidem ipse globum cereum aliquot drachmarum addita paucula arena in aqua descendere feci, eandemque inter descensum in vitro sesquipedali gravitationem ad bilancem notavi, quam cum in fundo quiesceret. Enimvero cum globus eandem fere cum aqua gravitatem specificam obtineret adeoque vim insensibilem ad descendendum per demonstrationes hydrostaticas adhiberet, reperi omnino ex hoc experimento dirimi non posse, utrum corpora inter descendendum graviten, necne. Nempe quia saltem eam vim ad descendendum adhibet, qua fluidi gravitatem specificam superat, assumi debebat globus aquae gravitatem notabiliter superans. Ast tum deerat vitrum sufficientis longitudinis. Caeterum notabile est experimentum, quod Dn. Hofmannus his diebus in cane instituit, ad refellendam vim balsami Dippeliani in vulneribus lethalibus sanandis. Etenim clavum per totum caput ipsumque cerebrum adegit, ac per integrum horae quadrantem mensa affixum detinuit canem; vulnus tamen intra paucos dies sanatum, pauculo vini Rhenani nonnisi semel infuso, nec ullum in cane laesionis vestigium superest.

Cum nunc in lectionibus publicis hydrostaticam interpreter, generale commentus sum theorema, ex quo omnes propositiones hydrostaticae facillime eruuntur. Sit scilicet massa unius corporis P, alterius p; moles unius M, alterius m; densitas unius D, alterius d; erit $P . p :: MD . md$, adeoque $Pmd = pMD$. Unde deducitur $M . m :: Pd . pD$. Sit jam ulterius densitas unius fluidi F, alterius f; pars ponderis a corpore P in fluido F amissa A, pars ponderis corporis p in fluido f amissa a, erit

$$M . m :: Pd . pD$$
$$\underline{M . m :: Af . aF}$$

adeoque $M^2apDF = m^2APdf$. Q. e. i.

Quodsi enim hanc aequationem in analogias resolvo, totidem habentur theoremata casuum compositorum, ex quibus derivari possunt simpliciores, ponendo primos analogiae terminos aequales, donec tandem ad simplicissimum omnimodae scilicet aequalitatis perveniatur. Successum machinae meae referam, quam primum potero.

Dabam Halae d. 20 Nov. 1707.

XXXI.

Wolf an Leibniz.

Credo E. V. Manfredii de calculo integrali scriptum accepisse. Misit etiam ad me exemplar unum Dn. Menckenius, ut ejus in Actis mentionem facerem. Si quae igitur sint, quae in recensione libri moneri velit E. V., ut ea mihi perscribat est quod rogo. Caeterum quod modos attinet, quibus utuntur artifices ad diversas formas aquis salientibus induendas, de iis quaedam meditatus sum, cum praeterlapsa aestate Hydraulicam in lectionibus publicis interpretarer. Vidi autem omnia, quae hic fieri possunt, redire partim ad figuram et magnitudinem, partim ad situm luminum seu aperturarum per quas aqua prosilit. Aqua enim prorumpens luminum assumit figuram eorumque sequitur directionem. Si lumina circularia nec nimis exigua, aqua figuram assumit cylindricam; si circularia eaque valde exigua, pluviae subtilis (eines Staub-Regens) formam aemulatur; si linearia eaque recta protensa, veli expansi figuram induit; si linearia in gyros contorta, flammam fluctuantem repraesentat. En quasi Alphabetum Hydraulicum, quorum combinatio, accedente inprimis diverso situ, varios fontium ornatus parit.

Contra Varignonii Manometron dubia quaedam moveri ab E. V. memini. Alius mihi succurrit densitatem aëris aestimandi modus, qui iis, ni fallor, caret. Scilicet assumantur duo globi cuprei mole aequales, quorum interior cavitas $1\frac{1}{2}$ circiter pedem cubicum capiat. Ex uno educatur aër, eoque educto ipse globus contra novi accessum cum cura muniatur. Suspendantur hi globi ex communi jugo ac aequilibrentur. Evidens est, densitate aëris aucta globum apertum graviorem fieri, consequenter praeponderare. Erunt vero incrementa ponderis notabilia. Etenim cum pondus unius pedis cubici aërei sit $1\frac{1}{18}$ unciae, erit pondus aëris in globo contenti $1\frac{1}{2}$ circiter unciae, h. e. 3 L. Ergo si densitas augeatur parte una vigesima quarta, incrementum ponderis erit $\frac{3}{24}$ h. e. $\frac{1}{8}$ L. Si jam jugo affigatur semicirculus metallicus, poterit ita fieri divisio, ut index monstret, quanta sui parte aucta fuerit densitas aēris vel imminuta: quae ut clarius explicem non opus est.

Denique mentionem nuper injeci theorematis Hydrostatici generalis a me detecti. Quoniam vero id gravitationem corporum in fluidis specifice levioribus unice respiciebat, simile excogitavi pro gravitatione corporum specifice leviorum in fluidis specifice gravioribus.

Sit scilicet unius corporis	alterius corporis	
Massa $= G$	massa $= g$	erit $G \,.\, g :: Md \,.\, md$
Moles $= M$	moles $= m$	$G \,.\, g :: PF \,.\, pf.$
Densitas $= D$	densitas $= d$	Consequenter
Pars fluido immersa $= P$	pars fluido immersa $= p$	$G^2 g^2 :: MDPF \,.\, mdpf$
cujus densitas $= F$	cujus densitas $= f$	adeoque $G^2 mdpf = g^2 MDPF.$

Ex hoc theoremate non solum eruere licet, quidquid de gravitatione corporum in fluidis specifice gravioribus cogitari potest, sed non minus, quam theorema nuperum praesentissimi usus existit, quotiescunque hoc argumentum concernens quidpiam sciri desideratur. Ex. gr. quaeratur ratio partium immersarum, si duo corpora aequiponderantia eidem fluido specifice graviori immittantur. Quoniam est $G = g$ et $F = f$ per hypoth., erit $mdp = MDP$. Et quia quaeritur ratio ipsius P ad p, reperitur $P \,.\, p :: md \,.\, MD$. Aliis theorematis usibus recensendis nunc supersedeo: id adhuc noto, me animadvertisse, quod hydrostatica non inelegantem suppeditet regulam ex duabus massis, quarum una tertia quadam specifice levior, altera specifice levior, componendi massam, quae sit dati ponderis et eandem cum tertia habeat gravitatem specificam, vel sit ad datam in data ratione. Quod superest, favori E. V. me commendo.

Dabam Halae d. 9 Febr. 1708.

XXXII.

Wolf an Leibniz.

Urget Dn. Menckenius recensionem scripti Manfrediani de constructione aequationum differentialium primi gradus, quia Autor petiit, ut eadem quantocyus Actis insereretur; eandem tamen inseri nolo, antequam intellexero, num I. E. V. quaedam sint, quae circa eruditum Autoris laborem moneri velit. Mearum igitur partium fuit efflagitare, ut I. E. V. mecum communicare velit, quae monenda duxerit.

Nuper ex me nonnemo per litteras quaesivit methodum dolia non plena dimetiendi, seu potius inveniendi soliditatem liquoris in dolio non pleno, quam Autores negligunt, qui de Geometria practica scribunt. Equidem geminam a Keplero descriptam reperio, alteram in editione Latina, alteram in Germanica Stereometriae Dolii Austriaci; sed quemadmodum prioris defectum in editione Germanica fol. 95 ipse agnoscit, ita valde vereor, ne et posteriorem in eundem cum priore censum referant Geometrae rigidiores, utut ille nimis confidenter fol. 86 pronunciat: ich wil erwarten, ob iemand mir den Grund hierzu umstossen oder einen gewissern fürbringen wolle. Utramque vero capacitati practicorum non satis respondere nimiumque intricata prolixitate taediosam esse fatebitur. Rem igitur ipse de ovo, quod ajunt, agressus facile vidi, totum negotium huc redire ut inveniantur segmenta conica per sectionem axi paralleliter factam prodeuntia, si assumatur (id quod vulgo assumi solet) dolia esse corpora ex duobus truncis conicis composita, vel segmenta conoidica aut sphaeroidica per similem sectionem orta, si vel cum Oughtredo truncorum Sphaeroidicorum, vel cum Keplero subinde Hyperbolicorum ac fusi parabolici, vel denique cum aliis Conoeidium Parabolicorum figuram aemulari dolia ponantur. Illorum igitur segmentorum cubationem investigaturus deprehendi, cubationem segmentorum conicorum haberi non posse, nisi per quadraturam hyperbolae, sive pro basi eorundem assumatur planum sectionis quae est hyperbola, sive segmentum circulare ex basi coni. Ast segmenta Conoidis Parabolici et Fusi Parabolici perfectam cubationem admittunt. Sit enim pro segmento Conoidis Parabolici ACD (fig. 6) parabola genitrix, cujus parameter r, FEGMF planum sectionis. Si fiat $AJ = a$, $JE = b$, $AD = x$, $DC = y$, erit $DJ = x - a$, $HC = y - b$ et ex natura Parabolae $JE = \sqrt{ar}$, $DC = \sqrt{rx}$, adeoque $FH^2 = BH \times HC = rx - ar = EH \times r$. Constat ergo sectionem esse parabolam, quae eandem cum generatrice parametrum habet, consequenter ejus aream $= \frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}ay$, h. e. $\frac{2y^3}{3r} - \frac{2ay^3}{3}$. Habemus adeo differentiale segmenti Conoidici FECGHF $= \frac{2y^3dy}{3r} - \frac{2aydy}{3}$, unde obtinetur pro soliditate ejusdem $\frac{y^4}{6r} - \frac{ay^2}{3} = \overline{yy - 2ar} \times \frac{1}{6}x = \overline{DC^2 - 2DH^2}, \times \frac{1}{6} AD$. Jam in praxi doliorum datur DC, itemque DH et EH, sed non AD, quae ex proprietatibus Parabolae ita eruitur. Est nimirum Parameter $= \frac{BH \times HC}{EH}$ et $x = \frac{yy}{r}$. Ergo $AD = \frac{\overline{DC}^2 \times EH}{BH \times HC}$ *).

Dabam Halae d. 25 Mart. 1708.

XXXIII.

Leibniz an Wolf.

Percurri Manfredianum Opus, et doctum ingeniosumque reperi. Vellem mihi communicares recensionem Tuam, ita enim fortasse quod in rem videbitur monere possem: idemque utiliter fiet

*) Das Folgende ist unrichtig und wird deshalb ausgelassen. Vergl. den folgenden Brief Leibnizens.

in aliis hujusmodi scriptis, quae ad novam Analysin pertinent. Cum enim mihi a multis annis exploratum sit, quid quisque praestiterit, optime suum cuique tribuere possum, quod saepe non satis fieri video.

De doliorum mensura in schedis meis reperio, Oughtredum adhibuisse frusta Sphaeroidis oblongi, atque inde tale ipsi theorema enatum; duplicatam aream circuli maximi adde areae circuli summi seu minimi, et quod provenit multiplica per tertiam partem distantiae eorum, et habebis contentum. Sed reperi etiam ibidem Caswellum quendam notasse, magis accedi ad veritatem, si adhibeatur fusum parabolicum, quod prodit rotatione Parabolae circa ordinatam axi normalem. Nempe a Trilineo parabolico CDAC per rectam axi CD parallelam EJ abscinde segmentum EJDCE, id rotatum circa basin DJ dabit fusi parabolici frustum, cujus soliditatem Caswellus ita assignat, ut duplo circulo maximo (radio CD) addas circulum minimum (radio EJ) et a summa detrahas duas quintas circuli, cujus radius differentia sit inter CD et EJ, et quod superest multiplices per tertiam partem ipsius DJ. Sed ut verum fatear, mallem rem examinari experimentis considerarique curvaturam tabarum seu secamentorum, quae nostri fass-tauben vocant, ut constet an satis eis accedat arcus aliquis Ellipticus vel Parabolicus praesertim osculans, et quis magis. His cognitis etiam constituetur deinde rectius dimensio portionum, cum vasa non sunt omnino plena. Interim eam in rem inspexi calculum tuum. Assumo figuram tuam et literarum significationem. Parabolae vertex esto C, Axis CD, semiordinatae sunt HE, DA, circa DA rotatur trilineum parabolicum CDAEC, ut habeatur Fusum parabolicum. Hoc solidum secetur plano transeunte per EH, normali ad BC, quaeritur qualis sit sectio EFGE. Parameter parabolae esto r, et AD, a, et EH, y; itaque DC vel DB erit $aa:r$, et HC erit $yy:r$. Jam HG qu. $=$ BH . HC ex natura circuli, et $BH = BC - HC$; sed $BC =$ bis $DC = 2aa:r$, ergo $BH = 2aa - yy, : r$, et fiet $BH . HC = 2aa - yy, yy : rr$, adeoque $HG = \sqrt{(2aa - yy)}y : r$; sed tu fecisti

BH = $aa + yy, : r$ et HG = $\sqrt{(aa + yy)}\, y : r$. Sed praeter difficultatem in calculo invenio longe majorem in ratiocinatione, quam nunc persequi non vacat. Procedis tu quidem hic paulo festinantius confidentiusque quam harum rerum natura patiatur. Sed si solidam scientiam quaeris, et peritorum quam vulgi plausum mavis, et meditandum est diutius et in meditando procedendum circumspectius; id si feceris, tum demum assequeris quod nullus adhuc in Germania, et ad Bernoulliorum Hermannique laudem aspirare possis, quod ego quidem a tuo ingenio proficisci posse puto, si par studium accedat. Haec ab amico moneri Te commodo Tuo non aegre opinor feres. Praestat serius inventorem esse quam maturius apparere.

Hanoverae 10 April. 1708.

XXXIV.

Wolf an Leibniz.

Me nuper nimis festinantem errorem in calculo admisisse omnino agnoscere debeo, fontemque erroris detexi, confusionem scilicet 2 linearum in applicatione theorematis circuli naturam explicantis. Cumque adeo elementum curvae evadat $\sqrt{(2aa - yy)}\, ydy : r$, satis intelligo ejus summam ea methodo haberi non posse, qua nuper in integrando $\sqrt{(aa + yy)}\, ydy : r$ usus sum. Ipsius vero $\sqrt{(aa + yy)}\, ydy : r$ summa cur esse nequeat $aa + yy, \sqrt{(aa + yy)} : 3r$, nondum capio. Nec erroneam esse puto, inprimis cum videam Craigium in Tract. de Quadraturis p. 4 et 5 per suam methodum Curvae aream producere $yy + aa, \frac{1}{3}\sqrt{(aa + yy)}$, cujus semiordinata $\sqrt{(aa + yy)}\, y$. Aliter vero se res habet, si quaeratur summa ipsius $\sqrt{(aa + yy)}\, dy : a$. Tunc enim si fieret $aa + yy = v$, foret $dy = vdv : y$, nec adeo elementum propositum hac ratione integrabile redderetur.

Quodsi tamen et in his me errare contingat, gratum faciet E. V. si saltem uno verbo fontem erroris indigitaverit: nec minus gratum foret, si mihi aperiretur quanam in re pro ingenii mei modulo et temporis ratione operam meam utiliter collocare possim. Notas Analyticas E. V. jam semel in dissertatione quadam mea adhibui earumque praestantiam evici: receptas vero repetere libuit, quia plerique omnes iisdem assueti. Placet tamen consilium eas in posterum per Acta introducendi. Peto igitur, ut mihi indicetur, quomodo nova ratione notari possit $\overline{aa+yy}^m$, num ejus loco poni queat $(aa+yy)^m$: et numne consultius sit, ut non modo in divisionibus prolixioribus mos solitus observetur, sed et in iis seriebus, in quibus divisores legem continuationis manifestant, quale quid E. V. amare ex Actis auguror.

Puerum ingeniosum, qualem E. V. quaerit, nullum novi: ast Studiosum novi, ingenii satis excitati, in calculo Algebraico exercitatum, nec in differentiali prorsum hospitem, solidiorum studiorum exquisitiorem cognitionem anhelantem, laboriosum, ab omni lucro maxime alienum, sua semper sorte contentum, nempe M. Haasium, Augustanum, qui curriculo studiorum Academicorum absoluto hactenus maximam temporis partem modestae puerorum quorundam nobilium institutioni Lipsiae impendere coactus fuit. Callet etiam artem delineandi. Quoniam vero ignoro, num fortassis juris civilis notitia ab eo potissimum requiratur, num is intentioni E. V. respondeat ignoro. Vellem igitur, ut paulo clarius mihi explicetur, quaenam in subjecto quaesito desiderentur et quaenam ipsius futura sit conditio: tum enim facillimum mihi erit quendam nominare, qui eandem ex voto amplectatur.

Dabam Halae Saxonum d. 29 Apr. 1708.

P. S. Quoniam intelligo, M. Haasium de nova quadam conditione acceptanda cogitare; ut E. V. recensionem scripti Manfrediani remissura significet, num eodem uti ad nutum queat est quod rogo.

XXXV.

Leibniz an Wolf.

Remitto Recensionem Manfrediani Operis, sane solita judicii ἀκριβείᾳ a Te scriptum; gratias etiam ago, quod mei benevole memineris. Quaedam tamen adjeci, pro concessa a Te potestate, atque etiam nonnulla delevi. Bene adhibes $(aa+yy)^m$ substituendo parenthesin lineae. Monendi essent typothetae, ut pro exponentibus superponendis minutas literas, quas corpus vocant, adhiberent. Ita non esset opus inutili distantia linearum.

Verum quidem est, ipsius $\sqrt{(aa+yy)}ydy$ summationem esse $aa+yy, \sqrt{(aa+yy)}:3$; sed licet (respiciendo ad figuras nostras priores) FH vel GH foret $y\sqrt{(aa+yy)}:r$, non ideo tamen procederet ratiocinatio. Similiter licet revera FH sit $y\sqrt{(aa-yy)}:r$, possitque et hoc per dy multiplicatum summari, est enim ni fallor $-(aa-yy)\sqrt{(aa-yy)}:3r$; non tamen ideo sectio, qua agitur et quae elementum constituit fusi parabolici, sic habebitur. Quod ut appareat, ducatur in plano hujus sectionis recta LMN parallela ipsi FHG, occurrens ipsi RP in puncto M et circulo circa RP basi parallelo ipsique curvae sectionis in punctis L et N, oporteret LM eandem habere relationem ad EM, quam FH ad EH, seu posito EM, v, deberet LM esse $v\sqrt{(aa-vv)}:r$, atque ita sectio tota utique haberetur per $\int v\sqrt{(aa-vv)}dv:r$. Sed hoc non reperitur verum, aliaque longe invenietur relatio generalis inter LM et EM quascunque. Et hoc est quod dixi, non tam errorem calculi (facile emendandum) conclusioni tuae obesse, quam errorem ratiocinationis, ortum ex falso praesupposito, quasi ex speciali relatione inter EH et FH judicari possit de relatione inter quamvis similem abscissam et ordinatam sectionis, quod in conoide parabolico revera succedit, eoque facilius in fuso fefellit. Generaliter reperio, si HM vocetur v, et LM vel MN vocetur w, fore quadratum a w aequale differentiae inter quadrata rectarum $aa - vv, : r$ et $aa - yy, : r$; quia autem recta y seu EH pro dimensione sectionis ENFGLE consideranda est ut constans, solaeque sunt variabiles hoc loco w et v, ideo compendii causa $aa - yy, : r$ vocemus f, et fiet $rrww = v^4 - 2aavv + a^4 - rrff$; unde non est facile invenire $\int wdv$, nam foret $\int \surd(v^4 - 2aavv + a^4 - rrff)dv : r$. Si quaeras vdw, quod etiam dabit dimensionem sectionis, fiet $\int vdw = \int dw \surd(aa - r\surd(ww - ff))$, quod non est priore tractabilius. Itaque non satis commode metiemur fusum parabolicum per sectiones ad axem parabolae perpendiculares, sed melius per sectiones axi parallelas ad ordinatam normales, quae sunt circuli. Et patet, fusum parabolicum se habere ad summam quadratorum a KP ipsi AD ordinatim applicatorum, ut circulus se habet ad quadratum radii. Posito autem DK vel QP esse v, ut ante, fiet $KP = DC - QC = aa - vv, : r$, cujus quadratum erit $a^4 - 2aavv + v^4, : rr$; id ordinatim applicando ad AD seu ducendo in dv, et omnia talia summando fiet $\int dv$. qu. $KP = a^4v - \frac{2}{3}aav^3 + \frac{1}{5}v^5 : rr$, quod (posito hanc v seu ultimam v esse DJ, et primam fuisse 0) erit ad partem fusi parabolici factam rotatione quadrilinei CDJEC circa basin DJ, ut quadratum radii est ad circulum. Ita habemus fragmenti a fuso parabolico dimensionem doliis integris accommodatam. Sed si jam Tecum longius procedere, et solidum comprehensum parte superficiei fusi planisque FGEF, FGCF a semifuso detrahere velimus, quaerenda est summa omnium segmentorum circularium ad HE ordinatim applicatorum, qualium unum est LNPL. Quod etsi non sit facile; plus tamen tractabilitatis haec summa sectionum, quarum quaevis circularis est, quam summa sectionum, quarum quaevis quadraturam requirit magis compositam circulari. Sed in hoc nunc amplius inquirere non vacat. Interim quia ope serierum infinitarum segmentum circulare quadrari potest, quam voces propinque, putem hinc etiam commode duci posse summam talium segmentorum satis vere propinquam, Canonesque practicos utiles constitui; de quo amplius per otium cogitabis.

Quod de M. Haasio significas, gratum est, nec fortasse occasio aspernanda; itaque rogo eum quasi sponte Tua horteris ut scribat ad me. Fortasse etiam aliquam Disputationem jam scripsit, vel simile specimen dedit. Mihi nunc ad historicos labores maxime adjutore opus est, nam Dn. Eccardus, quo per complures annos domui meae usus sum, nunc factus et Professor Helmstadiensis.

XXXVI.

Wolf an Leibniz.

Litteras E. V. utrasque recte accepi, quodque in prioribus fontem erroris desideratum ostendere voluerit, gratias habeo maximas. Diffiteri profecto non possum, me rem arduam nimis festinanter tractasse. Caeterum mihi enatum est dubium circa quandam propositionem, quam nonnulli Autores tanquam principium per se evidens assumunt, quod scilicet densitates corporum ejusdem molis sint reciproce ut massae. Mihi universaliter vera non videtur. Suppono enim mensuram massae esse aggregatum ex spatiolis a particulis minimis, ex quarum combinatione corpus resultat, occupatis; mensuram vero densitatis aggregatum distantiarum istarum particularum. Concipiamus jam seriem 12 globulorum aequalium, quorum distantiae aequentur diametris eorundem. Erit seriei longitudo 23, assumta pro unitate diametro globuli, aggregatum distantiarum 11. Sint porro 16 istiusmodi globuli ac seriei totius longitudo denuo 23, erit aggregatum distantiarum 7. Ergo densitates sunt ut 7 ad 11, massis existentibus ut 12 ad 16 seu ut 3 ad 4. Alia igitur ratio densitatum, alia massarum. Quod vero massam per globulos aut, si mavis, cubulos, densitatem per distantiam earundem repraesentare liceat, ulteriore explicatione nunc equidem indigere non videtur. Gratissimum foret, si E. V. mihi significaret, quid de hoc dubio ipsi videatur.

Nec minus gratum est, quod E. V. recensiones librorum Mathematicorum et Philosophicorum ante perlegere decreverit, quam Actis inserantur, suaque inventa addere constituerit, cum non solum ego, sed quotquot sublimiorem rerum notitiam aestimant, multum ad eam perveniendi adjumentum hinc sibi promittere debeant. Nunc vero nullus mihi ad manus est istiusmodi liber. Equidem Cl. Hermannus significavit per litteras his diebus ad me delatas prodiisse in Italia Pisis jam A. 1703 Guidonis Grandi libellum de Quadratura Circuli et Hyperbolae per infinitas Hyperbolas et Parabolas Geometrice exhibita, in quo calculo differentiali uti incipiat variaque ejus ope egregie demonstret; idem asseverat se certum esse, quod in P. Reyneau Analysi demonstrata (in qua et vetus et Cartesiana et recentior E. V. Analysis exponitur) quam plurima egregia contineantur. In Histor. Acad. Scient. commendatur Guinaei Applicatio Algebrae ad Geometriam; denique aliunde constat, in Anglia Whistonum A. 1707 edidisse Arithmeticam Universalem seu Elementa Algebrae a Newtono quondam in gratiam praelectionum publicarum olim conscripta, cum adhuc munere Professionis in Academia Cantabrigiensi fungeretur: nullus tamen horum librorum ad me pervenit. Videtur Dn. Menckenius libros Mathematicos non satis curare: plerosque enim, quos hactenus in Actis recensui, meis sumtibus mihi comparavi.

Denique quod M. Haasium attinet, certus sum, quod in explicandis Historiae ac Geographiae fundamentis in gratiam juvenum nobilium curae ipsius commissorum hactenus occupetur, ut adeo nullus dubitem quin in excerpendis argumentis Historicis eodem uti possit E. V. Sique labor improbus omnia vincit, nihil fore spero, quin ab ejus industria proficiscatur.

Halae d. 8 Jul. 1708.

XXXVII.

Wolf an Leibniz.

Accepi tandem Elementa Algebrae Newtoni, de quibus nuper scripsi. Perlegi, atque ex iis excerpsi, quae digna judicavi, ut Actis insererentur. Antequam tamen id fiat, excerpta censurae E. V. submitto, tum ut intelligam, num forte nova non sint, quae mihi alibi nondum exstare videntur, tum ut addere hinc inde queam, quae ipsamet E. V. assecuta est inventa ad amplificationem Algebrae tendentia. Nuperrima Eclipsis Solaris duplo fere major exstitit, quam calculus Astronomorum Berolinensium ferebat. Cum enim juxta hunc non prorsus 4 digitos adaequare deberet, ego eandem $6\frac{1}{2}$ digitos superare deprehendi: id quod etiam Lipsiae a Dn. Rivino observatum. Dn. Teuberus Cizae magnitudinem ad 6 digitos 16 minuta; Hambergerus Jenae ad 6 digitos 20′ extendit. Hinc etiam eclipsin multo diutius durare contigit, quam calculus Berolinensis permittebat. Mirabar primum ejus a coelo dissensum, sed mirari desii, postquam vitiosum esse didici.

Quodsi E. V. significare voluerit, quomodo vis materiae intendi possit, massa immutata, ex. gr. per lapsum deorsum, et quomodo concipi debeat vis illa derivativa, quae ex uno corpore in aliud migrare valet; rem mihi longe gratissimam fecerit. Etenim non video, quomodo evitari possit, ne in hac virium communicatione et intensione tandem cum Cartesio ad immediatum Numinis nutum provocare opus habeamus.

Dabam Halae d. 1 Oct. 1708.

XXXVIII.

Leibniz an Wolf.

(Im Auszuge)

Remitto cum notulis recensionem Newtoniani de Algebra Operis. Regula extrahendi radicem ex rationali et irrationali (vel etiam ex duobus irrationalibus) jam est apud Schotenium. Etsi quaedam egregia sint in hoc libro, desunt tamen quae maxime optassem. Et fortasse ipse haec daret multo praestantiora, si vacaret ipsi talia retractare.

Non dicis, quinam sint illi Astronomi Berolinenses, quorum calculus a coelo discrepat in nupera Eclipsi solari. Nam Dn. Kirchius edit Calendaria Astronomica, edit etiam Ephemerides Dn. Hofmannus, et quisque hac in re consilio utitur, nec ipsi inter se vel cum aliis communicant; dicendus ergo erit error Kirchii vel Hofmanni, non Astronomorum Berolinensium, quorum nomine nihil quod sciam prodiit.

Quaeris ut Tibi explicem, quomodo concipienda sit vis derivativa in materia, quae ex uno corpore in aliud migrare valet, neque enim te videre, quomodo evitari possit recursus ad immediatum Numinis nutum. Ego vero nunquam dixi, vim derivativam ex uno corpore in aliud migrare, sed sequentem in unaquaque substantia nasci ex praecedente alterius substantiae occasione atque ut ita dicam conspiratione. Et ut difficultatem tuam satis intelligam eique satisfaciam, opus est ut eam ipse prius explices atque ostendas, quomodo ex meis traditis immediatum Dei concursum (diversum haud dubie ab illo communi Dei ad omnia creata concursu) sequi putes. Objectio distincte proposita occasionem mihi dabit ad eam distincte resolvendam, alioqui frustra divinare tentavero, quid tibi scrupulum injiciat, et fortasse dixero, quae scopum Tuum non ferient.

XXXIX.

Wolf an Leibniz.

Recensionem Disquisitionum Mathematicarum Dn. Parent vel ideo cum E. V. communicare debui, quia in iisdem nonnullae continentur contra Systema Harmoniae praestabilitae objectiones. Verba ipsius ita habent: M. Leibnits ne dit pas plus que tous ces derniers (Cartesiens), lorsqu'il établit que Dieu crée pour chaque corps une ame qui de sa nature doit passer par les mêmes changemens qu'il prévoit devoir arriver au corps, et dans le même temps, en sorte que ses dispositions ayent continuellement une exacte correspondance avec celles du corps, sans que Dieu soit obligé de produire actuellement tous ces changemens dans l'une et dans l'autre. Au contraire M. Leibnits dit bien moins que les Cartesiens, puisqu'ils admettent comme luy la prescience de Dieu tant à l'égard de l'ame, qu'à l'égard du corps, et que M. Leibnits ne nous dit pas qui est ce qui produira ces changemens tant dans l'ame que dans le corps. Mais les Cartesiens et tout homme de bon sens étant persuadés que ces changemens ne sçauroient proceder que de l'action immediate de Dieu et de la creation continuelle de l'ame et du corps, ils ont raison d'établir que c'est Dieu seul qui fait cette correspondance mutuelle que M. Leibnits admet pour la seule union de l'ame et du corps. Outre que la comparaison que M. Leibnits objecte aux Cartesiens des deux horloges, qui vont toujours l'une comme l'autre, a lieu aussi contre luy, puisqu'il ne fait consister l'union de l'ame et du corps, que dans la correspondance de leurs changemens comme font les Cartesiens, donc l'autorité de M. Leibnits ne fait rien contre le sentiment de ceux-cy; outre qu'on en pourroit tirer deux fâcheuses consequences, c'est qu'il fait de l'ame une espece de machine fort semblable au corps, et qu'il fait àgir cette machine comme d'elle même, et independamment de l'action immediate de Dieu, ce qu'on ne peut pas catholiquement penser; mais cecy soit dit sans vouloir choquer le merite ny là réputation de cet excellent Philosophe. — Similiter cum ea recenset quae de principio Optico in Act. A. 1682 dedit E. V. sequentia addit: L'Auteur tâche d'accommoder le principe Méchanique de refraction dont M. Descartes s'est servi avec le sien. Or la conclusion que M. Descartes tire du sien est, comme on le sçait, que le sinus etc. .... ce qui est à la verité également conforme à l'experience journaliere, mais directement opposé à la conclusion de nôtre Auteur. Pour sauver donc cette opposition, il est obligé d'établir ce principe: In casu luminis a resistentia medii etc. Mais il me semble avec toute l'estime qui est due à ce grandhomme, que cela ne sauve nullement la contradiction, puisque la question ne tomba pas sur le nom qu'on doit donner aux milieux, mais uniquement sur le plus ou moins de chemin que la lumière fait en droite ligne dans ces differens milieux en même temps. Or il est constant qu'afin que la principe de notre Auteur subsiste, la lumière doit faire plus de chemin en droite ligne dans l'air que dans l'eau en même temps, et au contraire afin que la proportion des sinus et des resistances que M. Descartes établit subsiste, il faut que la lumière fasse plus de chemin en droite ligne dans l'eau que dans l'air. Haec in recensione non attingere libuit, donec intelligerem, num I. E. V. quaedam ad has objectiones responderi velit, suo quoque loco (si ita visum fuerit) inserenda. Similiter principium illud universale, ex quo Autor leges motus se demonstraturum promittit, cum eo mihi concidere videtur, quod ante biennium Berolini mihi explicabat E. V., utut ejusdem non satis recorder. Forsan igitur utile fuerit de illo quaedam hac occasione commemorari. Ego certe illius notitiam anxius desidero ut habeam rei tam arduae firmum ac inconcussum fundamentum. Caeterum quod mihi circa Specimen Dynamicum Actis Lipsiensibus insertum enatum est dubium, pace E. V. ita expono. Nihil mihi certius videtur, quam materiae adscribendam esse aliquam vim, ex qua mutationes ipsius sequantur.

Jam vero cum vis illa in continuo nisu concipienda sit, necesse est ut certam habeat directionem nisus. Adversus quamnam igitur plagam illa tendit? Num forte quaquaversum, ut vis aëris elastica? Porro certum est, massa corporis immutata, vim ejus intendi. Ita ex. gr. vis lapidis intenditur, dum cadit deorsum. Unde igitur illud virium incrementum? quomodo concipiendum? Numne aliquid superadditur materiae, quod antea non habebat? An id quod habet, saltem efficacius redditur, seu magis potens? Denique conflictus corporum testantur, quod decrementum virium in uno corpore pariat incrementum earundem in alio. Quid igitur tum dicendum? Num aliquid ex uno corpore migrat in alterum? An Deus occasione impetus in uno corpore aliquid annihilat, in altero idem creat? Nullus dubito, haec dubia ex non satis intellecta theoria Dynamica ortum trahere. Quare si E. V. hasce nebulas dispellere voluerit, gratissimum mihi faciet, qui constanter futurus etc.

Dabam Halae d. 6 Novembr. 1708.

P. S. Mors Dn. de Tschirnhausen cum concursu creditorum facta dubio procul jam innotuit.

XL.

Leibniz an Wolf.

Gratias ago quod mecum Parentii recensionem communicasti, cui quae vides initio et fine permissu tuo addo *). Magna in eo est philautia, et libido contradicendi et novorum inventorum, sed parum succedens affectatio. Ego ipsi respondere operae pre-

---

*) Siehe die Beilage.

tium non puto. Suffecerit obiter quaedam in recensione (ut factum est) attingi et declarari. Meum principium legum motus ab hujus autoris doctrina diversum puto, qui nihil credo de iis habet, quod non ex Hugenio hauserit.

Quod tuam attinet dubitationem circa Specimen meum Dynamicum, ita sentio, nullum esse in materia nisum, nisi cum motu conjunctum, et ideo nullam esse dubitationem, quin corporum vis nisusque directionem certam habeat; nec omnia corpora in eandem plagam, sed alia in alias tendunt; nec virium incrementum concipio sine incremento motus. Haec autem intelligenda sunt de viribus derivativis, quae sunt primitivarum modificationes. Non est opus concipi hic aut annihilationem aliquam aut creationem, aut transitum accidentis de subjecto in subjectum, non magis quam cum figurae aut destruuntur aut producuntur, aut ex una materia in aliam transferuntur; nam vires derivativae ut dixi non minus quam figurae in rei alicujus perseverantis modificatione consistunt. Sed qui non distinxerunt vires derivativas a primitivis, motumque aut nisum instar rei alicujus substantialis concepere, non mirum est si in difficultates circa originem translationemque nisus inciderunt, cum tamen nisus non minus sit modificatio formae (seu virtutis primitivae) quam figura est modificatio materiae.

Illustris Viri Ehrenfridi Waltheri Tschirnhusii obitum non sine magno dolore meo intellexi. Utinam inventa ejus posthumaque scripta serventur. Rogo igitur ut inquiras et mecum intellecta communices. Spero Regem et Principem Gubernatorem non permissuros, ut creditorum concursu memoriae ejus injuria inferatur. Vale etc.

Dabam Brunswigae 18 Novembr. 1708.

Beilage.

In der oben erwähnten Recension von Parent's Recherches de Mathematique ist der Anfang bis zu den Worten „et Hugeniana inventa ignoranti contigisse" von Leibniz hinzugefügt; desgleichen hat Leibniz das Folgende am Schlusse bemerkt: Autor occasione harum meditationum Systema celebre Harmoniae praestabilitae impugnare aggreditur. Etsi nondum omnia satis in vulgus prostent quae ad ejus illustrationem pertinent, sane autor noster contendit, nihil in eo systemate dici quod non dictum sit a Cartesianis; sed inventor systematis hoc discrimen dedit, quod Cartesiani agnoscunt quidem ab anima vim corporum non mutari, quia eadem vis semper servatur in natura corporea, putant tamen secundum animae desideria mutari corporum directionem, sed inventor novi Systematis Harmoniae praestabilitae ne hac quidem mutatione opus habet, imo eam quoque non admittendam probat ex regulis motus, quae non solum eandem vim, sed eandem quoque directionem corporum summatim manere confirmant. Quae res si tempore Cartesii explorata fuisset, haud dubie ipse Cartesius in systema harmoniae praestabilitae incidisset, ita enim agnovisset, animae causa corpus nullo modo mutari, sed suas perpetuo leges inviolatas sequi et tamen animae desideriis respondere, quia machina corporum ita a Deo in ipsa creatione ordinata sit, ut hoc praestet certo modo: quod magis sapientiae Dei conforme est, quam ut in progressu rerum continue violet leges corporum, ut ea miraculoso modo, id est operatione a legibus eorum diversa, animae accommodet. Interim inventor systematis harmoniae praestabilitae non negat immediatum Dei concursum (quod autor noster de eo suspicatur), sed potius diserte statuit omnes creaturarum perfectiones perpetuo a Deo produci, negat tantum in commercio animae et corporis explicando concursu miraculoso opus esse, ad quem autores systematis causarum occasionalium confugere coguntur.

XLI.

Wolf an Leibniz.

Prius ad litteras E. V. respondissem, nisi recensionem Analyseos demonstratae una mittere constituissem. Opus profuturum judico iis, qui ad utriusque Analyseos cognitionem via brevi pervenire cupiunt, quamquam tyrones plura desiderabunt exempla. Nihil autem in eo deprehendere potui, quod non ab aliis jam sit dictum. Nec quas novas praeceptorum Analyticorum demonstrationes attulerit reperio. Ego nuperrime in quandam hyperbolae aequilaterae proprietatem incidi, quam ab aliis hucusque (quantum publice constet) non animadversam arbitror. Scilicet si semiordinatae sumantur pro tangentibus angulorum in serie naturali progredientium, et semidiameter curvae pro sinu toto, erunt abscissae portiones secantium eorundem angulorum extra circulum, seu differentiae secantium a sinu toto. Hinc 1. fluit genesis admodum facilis hyperbolae aequilaterae. Etenim semidiametro Curvae transversae AB (fig. 7) jungatur ad angulos rectos recta indefinita AT et ductae quotcunque BT applicentur normaliter ad rectam AT in punctis T, erunt puncta M in hyperbola aequilatera. 2. Loca ad Hyperbolam aequilateram reducuntur adeo ad circulum. Si enim fuerit $ax + xx = yy$, radio ($\frac{1}{2}a$) describatur quadrans ACB (fig. 8), et ex B excitetur indefinita BT, erunt omnes $BT = y$, omnes $TM = x$. Si vero fuerit $xx - aa = yy$, fiat $BC = a$, erit $BT = y$, $TC = x$.

Similiter si in hyperbola aequilatera abscissae sumantur pro subtangentibus parabolae, cujus parameter est parametri illius dupla, erunt semiordinatae Tangentes respondentes. Possunt adeo loca, quae ad hyperbolam aequilateram existunt, etiam ad parabolam reduci. Sit enim $ax + xx = yy$. Describatur Parabola, cujus parameter $2a$, erit subtangens $= x$, tangens $= y$. Ast si fuerit $xx - aa = yy$, parametro $4a$ describatur parabola, eritque subtangens $= x - a$, tangens $= \sqrt{(xx - aa)}$.

Quae Cassinus junior in Commentariis Academiae Regiae Scientiarum de oneratione sclopetorum tradidit, vulgaria sunt ex iis satis explorata, qui arma tractare solent. Praecipuum censeri debet, quod, si plus pulveris pyrii supra quam infra globo extet, globi expulsi nulla sit efficacia. Eorum, quae Vaubanius de cuniculis subterraneis notavit, non satis recordor. Quare cum liber jam non sit ad manus, scribam de iis alio tempore.

Cum nuperrime Lipsiae essem, vidi Hipparchum Kepleri MSC. apud Hanschium, sed molem adhuc indigestam et rudem dixeris, cui efformandae alter Keplerus necessarius videtur. Miror Hanschium qui Astronomiae nondum limina salutavit, in se editionem hujus operis suscipere, quam epistola publice edita Astronomis significare non dubitavit. Vidi autem in iis tradi hypothesin Lunae physicam et doctrinam Eclipsium, optandumque foret ut Astronomiae ac Geometriae satis peritus meditationibus Kepleri in ordinem redigendis et hinc inde lacunis (quae in schedis conspiciuntur) supplendis operam impenderet. Sed aegre alteri MSC. tradet possessor qui, si aliquid praestare vellet, in Astronomicis ante erudiri deberet, quam labori adeo difficili vacaret, pro praesenti rerum statu ipsi utique insuperabili, cum ne communes quidem Astronomiae terminos satis norit.

Quae circa Anemometron meum moneri posse scribit E. V., dubio procul resistentiam machinae concernunt. Sed quae in axiomatibus dubia sint, conjicere nequeo. De iis itaque certior fieri opto.

Dabam Halae d. 5 Mart. 1709.

PS. Memini, E. V. aliquando dixisse, se non reperire in Newtoni Elementis Algebrae, quae maxime vellet. Quodsi mihi significare voluerit, quaenam ea sint, quae in iis desideret, faciet mihi longe gratissimum. Pergratum enim mihi est ea cognoscere, quae in Scientiis adhuc desirantur ad earundem perfectionem a Viris summis.

XLII.

Wolf an Leibniz.

Ad iteratas litteras tardius respondit Menckenius, se responsorias ad Medicum Viennensem misisse et relationes Politicas mensi Majo destinasse, utrumque jam E. V. significasse: id quod in causa fuit, cur non citius ad binas recte traditas responderim. Adjungo hisce relationem de machina Melliana, E. V. dubio procul jam nota, si qua forte sint, quae circa eam moneri velit, cum Autor in titulo insinuet, dubia a Societatibus Anglicana et Borussica mota esse. Mihi quidem omnis illa disquisitio parum Mathematica videtur, nec augustum hoc saeculum satis decere. Newtoni judicium utique extemporaneum tanquam de re exigui momenti, si scilicet consideremus, eam tanquam ob difficultates insuperabiles dudum desertam. Sed Autor vim ejus non satis percipere videtur.

Cum occasione hiemis rigidioris praeterlapsae in actionem radiorum solarium inquirerem, visi mihi sunt radii obliqui idem planum minus calefacere perpendicularibus, tum ob raritatem, tum ob ictus obliquitatem. In casu primo deduxi esse vires radiorum obliquorum in idem planum exercitas in ratione duplicata reciproca Cosecantium seu (quod perinde est) Sinuum angulorum incidentiae, in posteriori autem in ratione eorundem sinuum, vel per prop. 64 Borelli de vi percuss. Unde tandem concludebam, vires radiorum solarium in idem planum exercitas esse in ratione triplicata Sinuum angulorum incidentiae. Ergo determinatio actionis Solis per diem integrum pendet a quadratura ungulae, cujus basis est arcus diurnus, perpendiculares vero super eo erectae sunt ut cubi sinuum angulorum incidentiae. Sed cum in Actis evolverem, quae Hallejus de hoc argumento commentatus est, reperi eum tantum ad obliquitatem ictus respicere, adeoque actionem Solis diurnam in calefaciendo plano ad quadraturam ungulae cylindricae reducere. Quoniam vero mihi raritas radiorum minime negligenda videtur, E. V. ea de re judicium experiri libuit, quod tanto gratius erit, quia in conscribenda dissertatione Physico-Mathematica hiemis praeterlapsae versor, a Studioso hinc propediem abituro sub meo praesidio publice defendenda. Ceterum favori ulteriori me commendo.

Dabam Halae d. 20 Apr. 1709.

XLIII.

Wolf an Leibniz.

Dissertationem de hieme proxime praeterlapsa reddet ipse Respondens cum hisce litteris, juvenis doctus et modestus, ad Batavos nunc excurrens. Villemotus de linea motus, quam Planetae describunt, non sollicitus, nullamque adeo elliptici rationem reddit. Plerumque in generalibus subsistit. Accepi heri librum cui titulus: Essay d'Analyse sur les jeux de hazard, in quo Autor Anonymus illud pensum absolvere satagit, quod sibi constituerat Bernoullus νῦν ἐν ἁγίοις in Arte conjectandi, de quo proxime plura. Quod superest, me favori E. V. commendo.

Dabam Halae Saxonum d. 19 Jun. 1709.

XLIV.

Wolf an Leibniz.

Citius responsurus eram, nisi addere hisce constituissem recensionem Analyseos de ludis fortunae Autoris Galli*). Mihi quidem lemma Hugenianum (a quo totum negotium pendet, forsan etiam tota Ars conjectandi Bernoulliana) supponere videtur, quod falsum deprehenderetur, si omnis causarum nexus perspectus haberetur. Quin imo ipsa experientia suppositi falsitatem loquitur. Etenim ludentibus notum est, intra horam, imo et intra diem eundem casum saepius occurrere et fortunam illi favere saepissime, cujus per calculum lemmati indicato superstructum casus sunt plures minus favorabiles quam favorabiles. Quare huic arti hactenus parum tribuo, nec quid in praxi negotiorum vitae humanae commodi ab ea expectari possit video. Lubenter tamen mentem meam mutabo, si contrarii convincar et me forte a vero aberrasse contigerit. Accepi hodie cum litteris Dn. Bernoulli dissertationem inauguralem a fratris ipsius Nicolai filio habitam de usu artis conjectandi in jure etc.

Dabam Halae d. 17 Aug. 1709.

XLV.

Leibniz an Wolf.

(Im Auszuge)

Aestimatio qualis Hugeniana non de rerum veritate, sed de verisimilitudine seu judicandi prudentia accipienda est. Ita pru-

*) Essay d'Analyse sur les jeux de hazard, par Remond de Montmort.

denter judico facilitatem duobus cubulis aleae conficiendi 7 puncta triplam esse ejus, quae conficeret 12 puncta, quia confici potest tribus modis, per 6 et 1, per 5 et 2, per 4 et 3; at 12 non nisi uno modo, per 6 et 6. Etsi enim forte per rerum connexiones eventurum sit, ut nunc etiam saepius ludendo non cadat 7, sed 12, verisimilius tamen est casurum 7, et si pignore certandum sit, potius pro eo aliquid deponi posse, qui 7nario indiget, quam qui 12nario. Revera quoque, si diu continuaretur alea, nempe multis millibus jactuum computatis, numerarenturque septenarii contra duodenarios, circiter illi tandem horum triplum futuri essent; eoque propior futurus esset eventus aestimationi, quantum ratione judicare fas est. Itaque in hac conjectandi ratione perinde se res habet, ut in omnibus incertis, velut in bello, in medicina, in ludo conversionum (verkehren), ubi ratio casusque miscentur, ut aliquando prudenter agendo fallamur et imprudenter agendo successum habeamus. Interim crebrius contingit, ut successus ejus sit, qui prudenter agit.

Dn. Bernoullii juvenis dissertatio non inelegans etiam ad me transmissa est. Talia a me agitata sunt non pauca ante annos complures, cogitavique de Logica verisimilium excolenda, quae maxime in deliberationibus necessaria est, inprimis in re politica, militari et medica, saepe etiam in juridica, ubi probationes, praesumtiones et indicia, et probationes plenae, semiplenae, et plus minusve quam semiplenae merito distinguuntur. Sed haec video Dn. Bernoullium non attigisse, cum tamen inprimis tractari mereantur.

XLVI.

Wolf an Leibniz.

Accepi his diebus litteras a Johanne Keilio ex Anglia ad Meneckenium missas, sed ad me directas. Respondet in iis, ut ex acclusa scheda liquet, ad objectionem, quam in Elementis Aërometriae contra ipsius demonstrationem pro existentia vacui formaveram. Theorema, quod pondus sit massae seu quantitati materiae proportionale, de materia cohaerente seu corpori propria interpretatus fueram, neque enim aliud evincit ipsa Autoris demonstratio. Quare cum in corollario idem ad materiam quoque interlabentem poris applicet, in illatione paralogismum committi asserueram, qui ut clarius eluceret, ostendi quod materia interlabens pondus nequidem augere possit, etiamsi gravis esse ponatur, cum simul corpus circumfluat. Ipse vero nunc ex aequali descensus corporum velocitate in medio non resistente adstruere conatur, materiam quoque interlabentem gravitare debere, si quidem talis detur. Supponit vero, eam cum corpore una moveri, quod quidem mihi manifesto falsum videtur. Etenim experimenta syphonum tam capaciorum, quam capillarium abunde me docuerunt, eaque in variis fluidis sumta, ipso etiam argento vivo, positis reliquis ad motum requisitis, nec ductuum obliquitatem et curvitatem, nec eorundem quemcunque motum, fluidorum per eos motum impedire. Cum adeo materia interlabens libere circulari possit per corpora quomodocunque mota, nec motum eorundem participabit, nec quoniam ipsa gravis non est, pondus eorum ullo modo augebit. Utut vero haec mihi satis evidentia videantur, placet tamen E. V. de iis experiri judicium, antequam per ferias subsecuturas responsionem mediter. Inprimis nondum succurrit evidens satis demonstratio, quod gravitas non sit vis primitiva, sed ex motibus nascatur. Autor equidem Anglus mensuram virium facit communi errore factum ex celeritate in massam, non ex quadrato celeritatis in massam, unde et theorema ipsius secundum, et calculus de velocitate vasis aqua pleni descendentis fallit; sed is error in praesentem controversiam non influit. Sub finem objicit, me non rite aestimare vim ad 2 hemisphaeria cuprea evacuata divellenda requisitam. Fateor equidem communiter tantum rationem haberi columnae ABCD (fig. 9), quod quidem valeret, si fluidum sola vi gravitatis premeret, quanquam et in hoc casu justo major foret calculus ordinarius, quia plerique radii in superficiem sphaerae oblique incidunt, adeoque non eadem sit vis pressoriorum (ut sic loquar) radiorum, quam si perpendiculariter inciderent. Puto enim in pressione quoque, non modo in ictu, obliquitatem lineae directionis attendendam esse. Ego vero considerans aërem esse elasticum, adeoque non modo se applicare ad singula superficiei sphaerae puncta, sed et vi elateris premere juxta quamlibet directionem quae conceditur; in singulis punctis contactus pressionem fieri supposui versus centrum, consequenter moleculas aëris tota sua vi premere versus centrum hemisphaeriorum undiquaque. Et huic supposito calculum superstruxi. Quodsi E. V. mihi significare voluerit, quidnam de meis hypothesibus sentiendum sit, infinitis modis me devinctum profitebor.

Dabam Halae Saxonum d. 14 Decembr. 1709.

XLVII.

Leibniz an Wolf.

Gratum est quod Dn. Keilii responsionem ad objectionem tuam contra demonstrationem vacui mecum communicas. De re ipsa sic mihi videtur dupliciter Keilianae ratiocinationi responderi posse. Unus modus est ad hominem, quem ex parte videris secutus, concedendo materiam poris interlabentem etiam esse gravem, veluti si aër aliquis poris corporum insit. Hoc posito aër ille posset esse tantae tenuitatis, ut ejus gravitas specifica nihil sensibile a gravitate corporum in eo versantium detraheret, atque ita corpora in eo perinde ac in vacuo nobis descendere viderentur, et hoc puto etiam ad Dn. Keilii replicationem duplicari posse. Altera responsio est negando gravitatem esse primitivum materiae datae attributum, eamque qualitatem in ea derivando a motu materiae gravificae data subtilioris, quae sane gravitatem quam ipsa efficit non habebit. Itaque etsi omnia plena essent, non tamen omnia, quae in poris corporis continentur, ad ejus gravitatem conferrent. Asserentium est demonstrare materiam ex se gravem esse, sed illi ni fallor ea sententia magis ut hypothesi utuntur. Ego vero talem hypothesin non admitto, quae in prima principia rationis offendit. Licet enim ex principiis mathematicis refutari non possit, pugnat tamen cum magno illo Principio Metaphysico (si ita lubet appellare), quod nihil sine ratione sive causa fiat, nempe necesse est ut ratio sit, cur corpora sint gravia aut cur multa ad unum aliquod corpus tendant; quae etsi a nobis inveniri non posset (quanquam non spernendae conjecturae habentur), talis tamen esse debet, ut a nobis intelligi posset, si ab aliquo genio eam nobis explicari fingeretur, quod ille non praestaret, nisi per ea quae in corpore nobis notiora sunt distinctiusque concipiuntur, nempe magnitudinem, figuram, motum. Hoc principio sublato, reducentur qualitates occultae eaeque perpetuae et necessariae occultationis, et omnis sublata erit causas quaerendi necessitas, et pari jure fingere licebit, planetas sponte sua et primitivo quodam instinctu libero coelo orbitas describere, aliaque id genus, et quidvis cuivis attribui fas erit. Unde etiam sunt hodie qui materiae cogitationem affingunt. Quod superest vale etc.

Dabam Hanoverae 23 Decembr. 1709.

XLVIII.

Wolf an Leibniz.

In Historia Academiae Scientiarum A. 1708 varia occurrunt paradoxa Physica et Mathematica. Quam ob rem e re fore arbitratus sum, si recensionem cum E. V. communicarem *). Elasticitas aëris impugnatur, sed non sufficientibus, ut mihi videtur, rationibus. Etenim expertus sum, globos vitreos, nisi carbones contingant, sed calori exhalanti tantum admoveantur, insigni cum fragore dissilire, utut solo aëre repleantur. Immo fieri curavi globum cupreum satis spissum et firmissime afferruminatum (mit Schlagelothe gelöthet), qui solo aëre plenus cum carbonibus candentibus imponeretur, tanto fragore disruptus, ut tormentum explodi crederetur. Sed accuratius adhuc proxime eam in rem inquiram. Rollius in genere taxat Geometras recentiores, quod multa sine demonstrationibus assumant atque hinc fundamentis minus firmis methodos suas superstruant. Sed mirum profecto foret, si quae contra Slusianam methodum in specie urget, vera essent. Exempla, quae probationis loco adducit, examinare nondum licuit, cum totus nunc sim in edendis Matheseos Universae Elementis sermone vernaculo, quibus in Collegiis ad erudiendam juventutem

---

*) Zu der erwähnten Recension hat Leibniz hinzugefügt: Ad haec quidam verentur, ne Dn. Rollii objectiones contra Methodum Slusianam non sint fortiores, quam quas olim dedit contra Methodum Leibnitianam, dudum a viris insignibus dissolutas. Laudandus interim est, quod difficultates proponit, quae enodari merentur, etsi ab ipso forte pro insolubilibus habeantur. Credibile etiam est doctrinam de vi Elastica receptam non oppugnari Dn. Parentii objectionibus, nam plurimi eam per motum rapidum materiae aetheriae partes corporum crassiorum disgregantis dudum explicarunt. Nec mirum est, quod aër humidus calore magis dilatatur, quia aquam ei inclusam vi caloris vapores elasticos emittere constat.

uti queam. Edidit Thomasius noster Cautelas (quas vocat) circa praecognita Jurisprudentiae, in quibus inter alia deliramenta Mathematicos pessime traducit, quamvis idiota summus in iis, quae oggannit. Misera profecto rerum facies, quod studia solidiora non modo contemnantur, sed ad infamiam usque a nugivendulis traducantur, juvenumque segnitei, voluptati, protervitati ac impietati unice litent doctores nostri. Ast abrumpendum est filum, ne videar recordatus, quod sim etc.

Dabam Halae Saxonum d. 20 Apr. 1710.

XLIX.

Leibniz an Wolf.

(Im Auszuge)

Rectius faceret Rollius, si suppleret demonstrationes quas recentioribus Geometris deesse ait, et in eam rem prius eas intelligere studeret, quam reprehenderet. Nam ejus reprehensiones plerumque ex mediocritate intelligendi oriuntur, et nonnihil tironem in altioribus sapiunt. Miror, quod talia Commentariis Academiae Regiae inseri patiuntur ii quos ea res pertinet. Sed patiamur hominem abundare sensu suo, qui semet ipse ulciscitur. Vellet conviciis a nobis extorquere ea quae ignorat.

Idem (non tamen per omnia) dixero de Mathematico-mastigibus qui de rebus non intellectis ridicule pronuntiant; judicia eorum non transeunt Salam et Albim. Nolim tamen his annumerare Dn. Thomasium (cujus acre ingenium ex aliis speciminibus cognovi), donec ipsa ejus verba inspexero. Spero enim limitationibus quibusdam circumscripsisse eum sua de Mathesi aut Mathematicis judicia. Et putabam eum Tibi speciatim favere: nescio quis enim mihi dixit, suasisse eum quoque olim, ut inter Hallenses Doctores reciperaris. Recte facies, si dignitatem Matheseos data occasione tuebere, sed ita tamen ut magis rem ipsam quam Thomasium tangere videare, quia praestat eum amicum vel certe non inimicum habere, etsi enim argumentis Te vincere nequeat, alia tamen ratione Tibi incommodare potest. Vellem experimenta institui de vi aquae calore dilatatae, quae coepit sumere Mariottus, prosecutus est Papinus.

L.

Wolf an Leibniz.

Si mica salis in Scriptis Rüdigerianis extitisset, non modo ea in Actis Lipsiensibus dudum recensuissem, sed et E. V. scripta ipsa per occasionem misissem. Ne tamen non spernenda sprevisse videar, pauca quaedam de viri conditione et Philosophia exponam. Per longum temporis spatium Rüdigerus Lipsiae commoratus et Magistri legentis munere functus, non tamen felici satis successu, ita ut maximam temporis partem in docenda lingua Gallica consumeret: quae collegia pauperiores frequentabant, quod vile pretium solvendum esset. Utut autem studio Theologico deditus fuisset, Doctoris tamen Medicinae gradum Halae ambiit et obtinuit, cum videret, spem promotionis ad dignitatem vel Theologicam vel Professoriam ..... nullam superesse. Ingruentibus turbis Suecicis Halam concessit, cumque olim Thomasii famulum hic egisset tamque mores docentium ac discentium in hac Academia perspexisset, ad eosdem se componens omnia aliorum dogmata scurriliter traducere, seipsum supra omnes, quotquot hactenus extiterunt, Philosophos extollere, omnium inventionem sibi soli tribuere, Mathesin, quam ignorat, taxare meraque mysteria nemini huc usque explorata jactare coepit. Applausum juvenum vi principiorum moralium hujus loci (quod optimum temperamentum sit eorum, quibus ambitio et voluptas dominatur, utpote excellentissimum judicium denotans, exinde autem agnoscendum, si quis aliorum cogitata risui juvenum exponere valeat; pessimum autem Melancholicum, Mathematicis proprium, vim imaginandi abundantem, sed omnis judicii defectum arguens) nactus A. 1707 propriis sumtibus Lipsiae publicavit Philosophiam suam Syntheticam de Sapientia, Justitia et Prudentia, seu cursum quendam Philosophicum. In isto libro Philosophiam definit, quod sit cognitio veritatis ejus, quae non cuilibet statim manifesta, omnibus tamen perutilis. Paradoxa ipsius Logica, quae in libro de sensu veri et falsi uberius explicavit, haec sunt: 1. quod Syllogismus possit habere quatuor terminos (e. gr. Omnis affectibus indulgens male judicat. Omnis avarus est affectibus indulgens. Omnis qui male judicat, male ratiocinatur. E. omnis avarus male ratiocinatur); 2. quod medius terminus totus ingredi possit conclusionem (ex. gr. Omnis recta ratio est a Deo. Recta ratio ab aliis contemta est recta ratio. E. Omnis recta ratio ab aliis contemta est a Deo); 3. quod Syllogismus possit habere duos terminos (ex. gr. qui Deum cum creaturis confundit est Atheus. E. quidam Atheus Deum cum creaturis confundit); 4. quod ex particularibus meris aliquid sequatur (ex. gr. quod fluidum est leve. Quod corpus est fluidum. E. quod corpus est leve); 5. quod omnis propositio particularis possit converti in universalem (ex. gr. quidam homo est albus, sc. homo. E. Omnis albus homo est homo): 6. quod ratiocinatio Mathematica sensualis sit, non idealis, adeoque ἀσυλλογίστως fiat, in eo consistens, quod homo et intelligat et doceat sensuales quasdam circumstantias, quas intellectus minus attentus facile praeterit et e quarum tamen collectione veritas aliqua resultat. Hinc Mathematicos Logicos magno esse promissores hiatu, corvos vero deludere hiantes. Fundamenta Physica haec sunt, Materiam primam esse substantiam extensam a Deo ex nihilo creatam. Ex ea primum facta fuisse tria, aetherem scilicet, aërem et spiritum. Aetherem instructum esse motu a centro ad peripheriam seu expansione, aërem motu a peripheria ad centrum seu contractione, spiritum virtute ideas a sensu recipiendi seu intellectione. Ex conjunctione aetheris et aëris factum esse corpus, ex aethere et spiritu mentem, ex spiritu et aëre Archeum. Corporis accidens esse elasticitatem, mentis cogitationem, Archei puram intellectionem seu idearum receptionem. Corpora dividit in aërem atmosphaericum et ignem; in illo principium contractivum, in hoc expansivum praedominari. Ex aëre atmosphaerico per privationem aetheris, aliqualem quoque aëris factum esse sal, metalla esse corpora ex aëre et aethere pari proportione virtutis elementaris mixta; aurum ex aëre centrali terrae et aethere centrali solari componi, et ita porro. Visionem fieri per conflictum radiorum ex oculo emanantium cum radiis in oculum ab objecto illapsis; sonum esse motum non aëris, sed aetheris. In hisce voculis subsistit, quarum tamen nullam habet notionem distinctam. Quodsi E. V. ita visum fuerit, ex nundinis Lipsiensibus per Dn. Foersterum libros ipsos mittam.

Ego, quod me attinet, nunc totus occupor in Elementis Matheseos Universae sermone patrio edendis. Quam primum labor hic absolutus fuerit, ad alias meditationes severiores revertar. Nunc plura addere prohibeor, excepto quod sim etc.

Dabam Halae d. 27 Apr. 1710.

LI.

Wolf an Leibniz.

Ad ultimas E. V. nuper jam respondi. Quodsi fieri potest, ut a taediis, quibus ferendis me vix parem reperio, tandem ex voto liberarer, multum mihi gratularer. Sed quod fata volunt, vota non tollunt. Parendum igitur. Mitto hic scripta Rüdigeriana, ut jubentis dicto audiens agnoscerer. Amicus ex Anglia redux mihi significavit, Whistonum novae editioni Theoriae suae Telluris subjunxisse Tractatum de Arianis, in quo eorundem partes aperte tuetur, nec ab Episcopo Londinensi monitus eas deserere cupit. Scandalum tanto majus habetur, quod pietatis ac eruditionis fama hactenus gavisus fuerit Autor. Librum ipsum nondum vidi. In Anglia excuditur corpus omnium Poëtarum veterum, et Hallejus in edendo Graeco textu Apollonii Pergaei occupatur. Quod superest, data quacunque occasione annitor ut reperiar etc.

Dabam Halae Magdeburgicae d. 20 Maj. 1710.

LII.

Wolf an Leibniz.

Cum in Anglia caput altum extollat hypothesis de vi attractiva corpusculorum, ejus ad Chymicas operationes applicationem a Medico quodam Oxoniensi factam ante cum E. V. communicandam esse duxi, quam Actis Lipsiensibus inseratur, rogans ut, si quae de ea monenda occurrant, benevole suppeditare dignetur.

Non sine voluptate his diebus expertus sum, per vitrum plano-convexum, cujus diameter erat 30 pedum, objecta ad duo fere milliaria Germanica remota distinctissime apparere, etiamsi vitrum $1\frac{1}{2}$ pedes longum, $\frac{3}{4}$ latum (figuram enim parallelogrammi habet) prorsus non obtegeretur neque tubo includeret, solisque splendor Meridianus oculos percelleret. Notavi quoque, in quadam ultra focum distantia objectum remotum apparere geminatum et (uti notum) inversum. Totus vero nunc sum in ea persuasione, non aliud artificium fuisse Campani, quod jactavit et summo studio celavit, uti alicubi in Actis ante biennium fere refertur.

Dabam Halae Saxonum d. 6 Jun. 1710.

Aus der Antwort Leibnizens, datirt Hamburgi 24 Jul. 1710 — er befand sich auf einer Reise nach Holstein, um die Manuscripte des Marquard Gude für die Wolfenbüttler Bibliothek anzukaufen — geht hervor, dass ihm Wolf die Recension von Joh. Freind's Praelectiones chymicae übersandt hatte; dazu hatte Leibniz folgenden Zusatz gemacht:

Verum enimvero Dn. Keilius eo ipso redit reapse ad occultas qualitates, quales apud scholae Philosophos sympathia et antipathia fuere, dum statuit vim quandam attractricem primitivam, quae si primitiva est omnique materiae erga omnem materiam essentialiter competit, utique per rationes mechanicas explicari nequit, atque adeo vel erit aliquid absurdum, vel resolvetur in Dei voluntatem extraordinariam seu in miraculum, ad quam in physicis sine necessitate confugiendum non esse convenit inter intelligentes. Quodsi aliter procedimus, et fictionibus indulgemus, reditur ad philosophiam quandam phantasticam seu etiam Enthusiasticam, qualis Fluddi fuit. Ita uno ictu subvertuntur in Anglia ipsa, quae Robertus Boylius et alii viri insignes de rebus naturalibus mechanice explicandis magno studio stabiliverunt, quae Boylius etiam diserte ad chymica applicuit.

Sed haec omnia sine qualitate illa occulta attractrice verae philosophiae principia confundente, et in antiquum chaos redeunte, commode explicari possunt, partim etiam a viris doctis jam explicata sunt, statuendo plurimas materiae particulas sphaera quadam magnetica fluidi subtilioris esse circumdatas, cujus motu (ut in magnetibus majoribus fieri videmus) attrahant sese aut repellant et ad situm invicem convenientem disponant, quoties scilicet libertatem aliquam sunt nacta. Ut alios multos modos mechanicos taceam, a pulsu ortos, quibus (sine attractione proprie dicta) explicari potest, cur corpora ad se invicem accedant, ut attrahi videantur, veluti cum aqua per suctionem in tubos asurgit vel cum guttae duae ejusdem liquoris ex contactu in unam subito coalescunt; itaque ad aliquid precarium et minime intelligibile confugere necesse non est et talibus semel admissis, aperta fingendi licentia, mox erunt qui alias hujusmodi qualitates occultas seu absolute inexplicabiles comminiscentur, et paulatim ad vetera ignorantiae asyla sub novis et speciosis nominibus redibunt. Si datur vis attrahendi seu sympathia, dabitur pari jure et vis repellendi seu antipathia, dabitur antiperistasis, dabuntur qualitates emissae per modum specierum sensibilium cum suis actu-potentialitatibus, dabitur funiculus Lini a Boylio refutatus, dabitur in materia eadem variatio extensionis non apparentis tantum sed et verae, ejus denique materiae accurata in majus volumen distensio aut in minus volumen compressio sine aliena materia introadmissa vel expulsa, seu rarefactio et condensatio proprie dicta Scholasticorum tanquam vis elasticae mater, aliaque omnia monstra Scholastica studio Baconis, Galilaei, Jungii, Cartesii, Hobbii, Torricellii, Pascalii, Boylii profligata, velut agmine facto per posticum iterum in philosophiam irrumpent.

LIII.

Wolf an Leibniz.

Accepi nuper litteras E. V. una cum Bernoullianis. Quae acutissimus Bernoullius circa Aërometriam meam notat, perlegi; sed quaedam in iis reperio, quae me non feriunt, cum ex non satis intellecta mente mea proficiscantur. Tale est primum, quod contra resistentiam fluidi a me assertam urget. Utut enim dixerim, resistentiam fluidi oriri, quod vis aliqua ad partium contiguitatem tollendam requiratur, non tamen hic solum me ad tenacitatem, sed etiam ad molem fluidi respexisse vel exinde liquet, quod in ea aestimanda monuerim respici debere ad motum partium separatarum vim tanto majorem requirentem, quo fluidum specifice gravius et quo majore celeritate separatio contingit. Illud autem prorsus non capio, cur vires aquarum molendina circumagentium inter vires mortuas collocet. Notum enim est, aquam cum quodam celeritatis gradu inpingere in rotam, non vero instar ponderis lente trahentis aliquem tantummodo nisum adhibere. Hactenus autem fateor, non aliud inter vires vivas et mortuas discrimen agnovi quam quod hae in solo nisu acquiescant, illae autem cum quodam celeritatis gradu effectum ipsum consequantur. Quodsi itaque notioni meae error adhaereat, cum si E. V. corrigere dignata fuerit, mihi longe gratissimum erit.

Cum in Anglia hypothesis de vi attractiva particularum minimarum materiae, cujus ex Transactionibus Anglicanis leges a Keilio traditae, in Acta Lipsiensia translatae, quamque Newtonus in Latina Optices editione prolixe asseruit, sed, quantum mihi videtur, non sufficienter probavit, nunc invalescat; cum E. V. recensionem Praelectionum Chymicarum Johannis Freind iis principiis superstructarum communicare debui, ut, si quae circa hanc hypothesin monita necessaria occurrerent, suppeditaret. Nullus itaque dubito, quin E. V. eandem acceperit. Libri Crausiani pretium justum excedunt et in bibliopoliis viliori emuntur. Pauca quaedam schediasmata accepi, quae mitto. Optassem ut alia gratiora mittere libuisset.

Plures jam elapsi sunt menses, ex quo in experimentum quoddam incidi, ab aliis nondum tentatum, Medicis tamen quibusdam non improbatum, quibuscum id communicavi. Curavi scilicet fieri ex lamina ferrea stanno obducta vas cylindricum AB (fig. 10), cui tubus gracilis CD afferruminatus erat. Orificium A vesica obduxi, vase repleto. Quo facto cum etiam tubus frigida repleretur, vesica intumuit, et per poros ejus aqua profluxit, si exterior vesicae paries aquam lamberet. At nihil tale observatum, si interior eidem obverteretur. Hoc experimentum excogitavi ad dirimendam litem de poris vesicae introrsum, non vero extrorsum hiantibus. Una autem observavi, quamdiu intumescentia durat, faciliorem multo tunicarum ex quibus vesica constat, solis fere digitis fieri posse, quam ullo cultro Anatomico peragitur et in plures tunicas ab aqua vesicam premente dispesci, quae pro unica haberi vulgo solent. Idem tentavi in ventriculo bovis cum eodem successu et posthac in aliis partibus membranaceis. Iteravit, me monente, experimentum Dn. Pauli, Professor Medicinae Lipsiensis, in Anatomia multum versatus, mecumque nunc sentit, utut sub initium dubia quaedam moveret, cum ipsum experimentum sumere nondum licuisset.

Qui nuper de obscuritate mea conquestus est, me legentem nunquam audivit, cumque sit homo ad quodvis voluptatis ac libidinis genus protervus severiora studia nunquam degustavit. Ex elementis quae imprimi curavi, percipiet E. V., quanam methodo utar et in praefatione specimen addam ejus methodi, qua in docendo utor. Nullus enim affirmare dubito, majore perspicuitate Mathesin doceri non posse, quam qua ego utor et tanta hactenus neminem usum esse; quod non modo ego expertus sum, sed etiam fatentur, qui aliis Doctoribus usi sunt. Ipsa Mathesis apud nos pessima audit, quidque sit ignoratur etc.

Dabam Halae Saxonum d. 16 Jul. 1710.

LIV.

Leibniz an Wolf.

Verum est quod ais, vim vivam esse, quoties corpus concepto aliquo impetu in aliud impingit, mortuam in solo conatu consistere recedendi a loco, quae infinite parva est, si priori comparetur; sed de applicatione ad molendina dispicere nunc non vacavit. Ipse omnia facile consequeres, si distincte Tibi rem proponas. Nam cum molendinum aqua vel vento circumagitur, concipi potest, quasi magna globulorum multitudo instar grandinis aequali numero aequalibus temporis intervallis (scilicet si vis eadem perstet) in alam impingat. Id verum est, vim a quolibet eorum separatim impressam esse perexiguam, et effectu quadammodo ad mortuam accedere. Ipsa enim gravia descendere concipi potest ob innumeras hujusmodi, sed multo adhuc magis exiguas materiae tenuissimae impressiones.

Perplacet experimentum Tuum, quo partes membranaceas examinare et ἀναλύειν doces. Fortasse aliquando distincta ejus descriptio poterit Miscellaneis futuris Berolinensibus (inseri).

LV.

Wolf an Leibniz.

Cheynaeus in libro, cujus recensionem cum E. V. communicare vel ideo libuit, quod Tentamen de motuum coelestium causis culpet, figmento de vi attractiva materiae nimis indulget. Et certe Newtonus ipse in Latina editione Optices satis operose eam cum aliis nugis congeneribus adstruit, quod miror. Ita p. 313 adstruit vasta illa spatia corporibus mundi totalibus interjecta ab omni prorsus materia esse vacua, et aetherem materiam fictam et commentitiam vocat. Nihil aliud, inquit, facere posset istiusmodi materia, nisi ut magnorum illorum corporum motus interturbaret et retardaret efficeretque ut naturae ordo languesceret, et in occultis corporum meatibus nihil aliud quam sisteret partium suarum motus vibrantes, in quibus calor ipsorum et vis omnis actuosa constitit. Porro ut ad nullam rem utilis est istiusmodi materia, e contrario autem impediret operationes naturae; ideo penitus rejicienda est. Spatium universum sensorium vocat p. 315 entis incorporei, viventis et intelligentis, quod res ipsas cernat et complectatur intimas, totasque penitus et in se praesentes perspiciat, quarum id quidem, quod in nobis sensit et cogitat, imagines tantum in cerebro contuetur. Radios luminis exigua esse corpuscula ait e corporibus lucentibus emissa et refracta attractionibus quibusdam, quibus lumen et corpora in se mutuo agunt. Corpora pellucida agere in radios luminis per intervallum aliquod interjectum, cum eos refringunt, reflectunt et inflectunt, radiique vicissim corporum istorum particulas per interjectum aliquod intervallum agitant ad ea calefacienda. Atque haec (addit) actio et reactio, quae est per intervallum aliquod interjectum, ad vim attrahentem valde admodum videtur similitudine accedere. P. 322 quaerit: Annon exiguae corporum particulae certas habent vires, quibus per interjectum aliquod intervallum agant non modo in radios luminis, verum etiam mutuo in se ipsae, ad producenda pleraque phaenomena naturae? Satis enim notum est, corpora in se invicem agere per attractiones gravitatis, virtutisque magneticae et electricae. Atque haec quidem exempla naturae ordinem et rationem, quae sit, ostendunt, ut adeo verisimillimum sit, alias etiam adhuc esse posse vires attrahentes. Etenim natura valde consimilis et consentanea est sibi. Subdit tamen: Qua causa efficiente hae attractiones peraguntur, in id vero hic non inquiro. Quam ego attractionem appello, fieri sane potest ut ea efficiatur impulsu vel alio aliquo modo nobis ignoto. Multa vero statim exempla ex Chymicis maximam partem petita per vim illam attractivam explicat, ubi rationes phaenomenorum quaeruntur. Ita p. 335 causam cohaesionis vim attractivam pronuntiat. P. 338: In Mechanicis, inquit, ubi attractio desinit, ibi vis repellens succedere debet, cujus existentiam probat per radiorum reflexionem et emissionem luminis ab ea fieri statuit. Mox p. 339 phaenomena elateris in aëre per eandem vim explicat. P. 340 eidem vi repellenti tribuit, quod muscuae in aqua inambulant, nec tamen pedes suos madefaciant. Sed plura huc congerere taedet.

Dabam Halae d. 17 Aug. 1710.

LVI.

Leibniz an Wolf.

Gratissimas Tuas recte accepi, et quaedam ad recensionem operis Cheynaei subinde annotavi ad explodendas illas novas qualitates occultas profutura, quibus nunc quidam fascinantur. Existentiam numinis probare argumentis frivolis nocivum est. A finibus seu rerum ordine et ab origine animalium sumtum, etsi non sit metaphysicae necessitatis, praebet tamen certitudinem moralem. Sed infirmum est quod ab insufficientia mechanismi ducitur, quo eodem, et eodem fere modo quo Cheynaeus, etiam Henricus Morus usus erat.

Cum Newtonus loco a Te allegato concedat, attractionem ab impulsu oriri posse, eo ipso videtur agnoscere admitti posse fluidum subtile impellens, et adeo sibi nonnihil eum adversari, dum vacuum iis argumentis probat, quibus fluidum hujusmodi excludere conatur. Caeterum vires illae quas affert admitti possunt, si ponantur ut phaenomena seu effectus, non ut causae, eo modo quo gravitatem admittimus, etsi gravitatem primigeniam seu a causa mechanica independentem non admittamus. Mirum vero est, quomodo concipiat spatium posse esse sensorium substantiae incorporeae supremae, cum spatium a nobis concipiatur ut res immutabilis. Apud nos qui talia doceret, ei a Theologis negotium facesseretur.

LVII.

Wolf an Leibniz.

Nullus dubito, quin E. V. recensionem Miscellaneorum Berolinensium acceperit, cumque audiam, novum eorundem Tomum ad praelum parari, experimenti mei hydrostatico-anatomici descriptionem consignabo, si adhuc tanti videatur, ut iis inseri possit. Mitto jam recensionem novae editionis Ephemeridum Barometricarum Ramazzini, quam jubente E. V. adornavi ut corrigantur et addantur, quae ex re visa fuerint. Illustr. Comes ab Herberstein ad me deferri curavit suam circulorum diatomen, cujus ratio ex schedula adjecta patebit. Addidi schema quadraturae circuli, de qua nuperrime gloriatus est Ludolffus, Prof. Erfurtensis, sed ex vano, ut mihi videtur. Heri in manus meas incidit Listeri dissertatio de humoribus, Amst. 1701 (ut titulus pro se fert) excusa, in qua Keilii virium attractricium hypothesin operose refellit et in praefatione Medicos perstringit, qui in Medicina Geometricis calculis utuntur, cum nondum sit ejus status, ut cum fructu id fieri possit. Enim vero serio librum evolvere nondum licuit etc.

Dabam Halae Saxonum d. 25 Oct. 1710.

LVIII.

Wolf an Leibniz.

Quod litterae quaedam meae, quibus recensio Miscellaneorum Berolinensium continebatur, perierint, doleo, imprimis cum in iisdem de quibusdam informari ab E. V. ea, qua par est, animi submissione rogabam. Scilicet in Miscell. Berolinens. p. 23 E. V. affirmat, esse superiorem Mathematica scientiam, parem certitudine, majorem virtute atque efficacia, ubi rationes ideales non tantum a sensibus, sed etiam ab imaginibus sejunguntur: quae verba quamprimum legi, statim animum incessit cupiditas notionis hujus scientiae adipiscendae, nec diffidebam fore, ut E. V. precibus meis annuens aliquam mecum communicaret. Praeterea nuper addiderat

E. V. recensioni operis Cheynaeani, ex meditationibus Leibnitianis patere, omnia in natura Mechanice fieri, principia Mechanismi vero ab altiori principio per rationes finales oriri. Avebam igitur scire, num quodnam sit illud altius principium et quomodo ab eodem Mechanismi leges deriventur, alicubi jam ostensum sit ab E. V., num forte in quodam opere, quod Msc. vidi et nunc in Belgia prodiisse intelligo. Denique explicaturus in Collegiis Physicis communicationem motus secundum mentem E. V. quasdam adhuc difficultates reperio, quas ut tolleret, debita devotione oravi, nec dubito, quin exorassem, si litterae meae redditae fuissent. Scilicet si vires derivativas pro modificatione primitivarum habendae, reddenda tamen est hujus modificationis ratio eaque intelligibilis, quemadmodum figurae in extensione mutatae ratio conceptibilis reddi potest: illam autem me nondum assequi posse lubens fateor. Mentionem in recensione Misc. Berolinensium (quam denuo mitto) injicio machinae Arithmeticae Poleni, sed jam tum monui, me ejus schema litteris adjungere non posse, propterea quod admodum perplexa adeoque delineatio nimis molesta. Quod E. V. me in Societatem Scientiarum recipere dignata fuerit, grata mente agnosco daboque, ubi factum fuerit, operam ut honor non inanis in me collatus esse videatur, imprimis autem omnem lapidem movebo, ut emoriar etc.

Dabam Halae Saxonum d. 8 Nov. 1710.

P. S. Nuper jam calculum circa quadraturam circuli Ludolfianam institui, atque, ni fallor (calculum enim ipsum nec reperire, nec repetere nunc vacat) reperi esse ut 100 ad 359, ita diametrum ad peripheriam, quae proportio justo major.

LIX.

Leibniz an Wolf.

Esse superiorem quandam (scientiam) Mathematica nec minus certam, Tibi ipsi dubium esse non potest. Logicae pars de figuris et modis agens exiguum quoddam ejus specimen est. Certe in ipsa Algebra et Numeris animus ab imaginibus abstrahitur; sed de formis et similitudinibus non minus accurate et utiliter tractari posse quam de quantitatibus et aequationibus ostendit ipsa Algebra, cum ad formulas reducta Combinatoriae subordinata apparet.

Principia rei Mechanicae pendere ex altioribus, aliquoties admonui in Actis. Tale est Axioma, effectum integrum causae plenae aequivalere, quod utique metaphysicum est, sed fundamentum ultimum habet in sapientia divina, convenientissimum eligente.

Ratio modificationum vis primitivae est eadem utique cum ratione legum motus. Ea autem, ut dixi, intelligibilis quidem est, sed non ex meris mathematicis. Poleni libellum habeo; in ejus machina una operatio fit post aliam, adeoque prolixe, cum in mea omnes fiant simul.

LX.

Wolf an Leibniz.

Quae nuper E. V. ad dubia mea rescripsit, perplacent et in plerisque satisfaciunt. Unicum saltem adhuc circa modificationem vis primitivae superest. Scilicet cum vim primitivam ab essentia materiae non diversam concipiam, non capio, quomodo augeri possit, quantitate materiae immutata, et quomodo per leges conflictus fieri possit, ut quicquid virium ab uno corpore perditur, id alteri acquiratur; quod quidem locum habere poterat, si instar alicujus entis conciperetur per materiam diffusi et ex una quantitate ejus in aliam proruentis. Haec vero mihi absona videntur.

Caeterum cum nuper considerarem axioma, effectum plenum causae plenae aequivalere, videor mihi inde deduxisse demonstrationem perfacilem theorematis E. V. de aestimandis viribus vivis. Ponamus enim corpus A (fig. 11) moveri per CD celeritate simpla, B vero per EF dupla, erunt singuli impetus (pono enim $A = B$) corporis B dupli ipsius A. Ergo in $EL = \frac{1}{2}CD$ tantundem motus producetur a B, quantum in CD producitur ab A. B igitur in tempore subquadruplo eundem effectum producens, quem A producit per CD. Quare ejus vires sunt quadruplae virium hujus.

Cum opus E. V. in causa Dei conscriptum una plures recensiones mereatur, primam nunc mittere debui, ut certior evadam, num in omnibus mentem ipsius fuerim assecutus.

Dabam Halae Saxonum d. 31 Decembr. 1710.

LXI.

Leibniz an Wolf.

Si de Materia prima, seu mere passivo sermo sit, sive de eo quod in nuda resistentia consistit, vis primitiva non est de Essentia Materiae, etsi sit de Essentia corporis. Necesse est conatus et impetus actionesque quae ex iis sequuntur, cum sint accidentia, esse modificationes cujusdam substantialis, seu permanentis, quod ipsum debet esse activum, ne in modificatione plus insit quam in modificato. Itaque a me appellatur Entelechia primitiva, vel etiam Entelechia simpliciter. Hujus ergo Activi substantialis seu vis primitivae modificationes sunt vires derivativae, uti figurae sunt modificationes passivi substantialis, nempe materiae.

Sciendum autem est vires non transire de corpore in corpus, quia corpus quodlibet vim quam exerit, jam in se habet, etsi ante modificationem novam eam non ostendat, nec ad motum totius convertat. Ex. gr. cum globus quiescens ab alio percutitur, movetur per vim insitam, nempe elasticam, sine qua non esset percussio. Vis autem Elastica in corpore nascitur ex motu intestino nobis invisibili. His autem mechanicis seu derivativis ipsa Entelechia primitiva respondens modificatur. Itaque dici potest, omni corpori jam vim inesse, eamque tantum modificatione determinari. Caeterum vis prima revera nec augetur nec minuitur, sed tantum varie determinatur.

Ratiocinatio Tua de aestimandis viribus distinctius paulo evolvenda esset. Ponamus (inquis) corpus A moveri per CD celeritate simpla, corpus vero B ei aequale per EF celeritate dupla. Pergis, fore singulos impetus corporis B duplos singulorum impetuum corporis A, ergo in EL, dimidia EG vel dimidia CD, tantum motus produci a B in EL, quantum ab A in CD. Hoc postremum quidem verum est, si per motum intelligas actionem motricem, sed debet probari, et si rem per gradus celeritatis seu impetus aestimes, ut facis, et ut solent facere qui motus quantitatem celeritatis proportione aestimant, nihil tale conficies, quia ad tempus applicari debent isti gradus. Nempe esto tempus TP et cuivis ejus momento veluti M assignetur pro corpore quidem A impetus MA simplus, pro corpore vero B impetus MB duplus. Omnes impetus corporis A durante tempore TP simul sumti constituent rectangulum TQ, et omnes impetus corporis B etiam simul sumti constituent rectangulum TR, quod est duplum prioris. Nempe hoc sensu impetus nihil aliud sunt quam velocitates. Et bisecta EF in G et EG in L, non potest dici, debere in EL dimidia ipsius CD tantum motus produci quantum in CD, nam in CD percurrenda producitur rectangulum TQ, sed in EL percurrenda producitur tantum rectangulum TN, quarta scilicet temporis parte. At TN non aequale est ipsi TQ, sed ejus dimidium. Dices impetum non esse applicandum tempori, sed spatio percurrendo seu lineae, nempe effectui; sed probandum erat hoc licere; tempus enim est res ab impetibus independens, at spatium percursum minime, cum a tempore et impetu pendeat; unde merito dubitatur an impetus iterum spatio applicare liceat. Neque sequitur hoc ex illo axiomate, quod causa aequetur effectui, nam in hoc axiomate intelliguntur effectus causam absorbentes, nec curatur velocitas. Sed in actionibus istis puris actiones sunt in ratione composita effectuum et velocitatum, quod verum quidem est, sed demonstrari debet, non supponi, cum sit demonstrabile. Et ecce argumentum, etsi mirae simplicitatis, profundum tamen, quod ante multos annos communicavi Dn. Joh. Bernoullio, nescio an et Tibi. Est et ipsum mere, ut sic dicam, metaphysicum seu a gravitate, Elastro, motus obliqui compositione aliisque physicis rebus abstractum; unde altius ascendit quam quae a physicis istis et posterioribus sumuntur. Demonstratio igitur talis est: Eodem existente corpore mobili, 1) Actio uniformis, qua percurritur linea L tempore T, est dimidia actionis uniformis qua percurritur linea bis L tempore bis T. Hoc per se patet. 2) Actio uniformis, qua percurritur linea bis L tempore bis T, est dimidia actionis uniformis qua percurritur linea bis L tempore T. Hoc assumitur, ubi nulla effectus, sed solius temporis ratio habetur, effectu existente eodem. 3) Ergo Actio qua percurritur linea L tempore T, est quarta pars actionis qua percurritur linea bis L tempore T. Ita demonstratur aestimatio actionis per effectum, ex suppositione quae nullam effectus rationem habebat, sed solius temporis. Hinc jam consequens est quod assumsisti, actionem per EL in tua figura aequari actioni per CD. Hinc conficitur, Actiones non esse aestimandas ex impetibus seu celeritatibus et temporibus, sed esse in ratione composita effectuum et velocitatum, loquendo de effectibus puris seu vim non absorbentibus, qualis est percursio lineae in plano horizontali. Secus est de effectibus vim absorbentibus (ut in gravibus et elastris), ubi vires sunt ut effectus, a quibus absorbentur. Calculum igitur virium purarum seu actionum talem instituo: Sit spatium s, tempus t, velocitas v, corpus c, effectus e, potentia p, actio a; in motu aequabili erit tv ut s, e ut cs, tp ut a. Atque haec quidem sine demonstratione assumi possunt. Accedat jam demonstratum ev ut a. Hinc porro plurima theoremata demonstrari possunt, ex. gr. esse p ut cvv. Nam tp ut ev, sed e ut cs, et s ut tv, ergo e ut ctv, et ev (seu tp) ut $ctvv$, ergo p ut cvv. In motu inaequabili res etiam procedit, sed ordinatim invicem ducenda sunt quorum rationes componuntur, et in elementaribus summa dat aestimationem totalem. Et in his continetur pars meorum Dynamicorum abstracta maxime a rebus sensibilibus.

LXII.

Wolf an Leibniz.

Accepi hodie litteras a Secretario Societatis Regiae Scientiarum, quibus significatur, me in eam receptum esse: quod tamen se mittere ait diploma, inter reliqua non comparet. Quoniam vero satis intelligo, id honoris me unice favori Excellentiae Vestrae debere, ea quoque, qua par est, animi submissione eandem veneror et humillimas gratias persolvo. Cum autem non constet, utrum Dn. Secretario honorarium aliquod sit persolvendum necne, et an epistola ad Societatem sit perscribenda, qua eidem quoque pro receptione facta gratias decentes agam, ut Excellentia Vestra haud gravatim mihi significet, quid facto opus sit, est quod rogo.

Quodsi etiam consultum videatur, ut methodum meam quasdam partes corporis animalis felicius dissolvendi, quam post multas macerationes cultro Anatomico factum reperio in novissima Anatomiae Verhegeni editione, speciminis loco communicem; eam in ordinem redigam et quae posthac ulterius detexi, adjiciam. Nimirum cum ad partes minores distendendas vis aquae juxta methodum alias communicatam non sufficiat, ope antliae efficio, ut pressio aëris in ejus locum succedat: immo reperi quoque, si antlia utamur, intra substantiam ex. gr. vesicae aërem ita allici posse, ut cultri Anatomici munere fugatur et partes heterogeneas difflando separet. Caeterum non dubito, quin E. V. ultimas meas acceperit, in quibus paulo distinctius proposui, quae mihi circa demonstrationem theorematis Dynamici videantur. Gratum mihi erit E. V. de ea judicium.

Dabam Halae Saxonum d. Martii 1711.

LXIII.

Wolf an Leibniz.

Accepi heri litteras E. V., sed nullo sigillo munitas. Scripsi hodie ad amicum quendam Jenensem, ut quam proxime me certiorem reddat, num ibi Ruhlmannus adhuc degat. Anno praeterito apud nos degebat, sed sine applausu et clanculum docens (quod Facultas Philosophica non satis decenter petenti docendi privilegium gratis concedere nollet) diutius hic loci subsistere non poterat. Cum famulum apud Dn. Menkenium ageret, studio historico cum cura incubuit, quod et postea excolere non neglexit. Multa ex scriptoribus antiquis historiae patriae congessit et ejus quoddam compendium praelo destinaverat, sed bibliopola non videtur satis remunerari voluisse operas ejus. Jactabat etiam methodum breviori temporis spatio, quam vulgo fieri solet, linguam latinam perfecte addiscendi a se inventam et (ut ajebat) cum successu jam aliquoties tentatam, sed quam publicare nolebat sperans fore, ut ea munus quoddam in scholis mereatur. Genus tamen scribendi, quo ipse utebatur, Latina callentibus non arridebat.

Dn. Hartsoekerus magis contemtim de Newtono loquitur, quam de Dn. Bernoullio et mirum profecto, quod scribere non vereatur: Le systeme de Mr. Newton fait grand bruit dans le Monde, puisqu'il y a une douzaine de Sçavans en Europe, qui ayant établi une espece de commerce des louanges reciproques, le louent avec excez et qu'un grand nombre de gens, qui ne sont que les échos des autres, le louent avec autant d'excès, non parce qu'ils l'entendent, mais seulement pour faire croire dans le monde qu'ils sont aussi initiez dans ces mysteres. Nuper amicus quidam, qui in itinere per Germaniam ipsum convenerat, referebat, quod de summis in Analysi inventis contemtim locutus fuisset et suos in Physicis conatus Geometrarum laboribus multum praetulisset.

Accepi quoque a Dn. Hermanno litteras, quibus se ad Professionem Francofurtanam obeundam venturum promittit, si salarium 500 thalerorum constituatur. Plura etiam ipse scripsit ad Dn. Gunonem. Caeterum significat, P. Grandum secundam dedisse editionem libelli sui de Quadratura circuli et hyperbolae per series infinitas priore auctiorem cum variis appendicibus de dimensionibus et transformationibus curvarum. Prodiisse quoque ejusdem opusculum de infinitis infinitorum, quo multis adversus Varignonium circa spatia plusquam infinita Wallisii disputat. Incidit in manus meas Essay de Perspective par Gravesande, Docteur en droit. Hoc ipso anno impressus est libellus, et varias continet methodos novas facillimis demonstrationibus munitas. Quod superest, favori E. V. me commendo.

Dabam Halae Saxonum d. 16 April. 1711.

LXIV.

Wolf an Leibniz.

In eo eram, ut ad E. V. litteras darem, tum ut gratias agerem humillimas pro singulari favore nuper mihi praestito, tum ut quaererem, num E. V. objectionibus Muysianis quaedam opponere velit. Sed ecce! Tum epistola E. V. mihi redditur cum responsionibus desideratis, quae tanquam ab Anonymo transmissae Actis inserentur. Miror profecto tam jejunam principiorum physicorum in opere tam vasto pertractationem; miror exiguum rationum pondus, quibus utitur et quas pro demonstrationibus venditat, ex. gr. dum gravitatem non esse vim primitivam sibi demonstrasse videtur, exinde quod corpus grave filo suspensum, resecto filo delabatur, cum tamen in quiete permanere deberet, vi axiomatis quod corpus unumquodque statum suum conservet, donec a causis externis inde deturbetur. Explicationes quoque terminorum abstractorum mihi non satisfaciunt. Vehementer itaque opto, ut E. V. (ni grave fuerit) mecum communicet veras essentiae, attributi et modi notiones. Ego hactenus essentiam concepi per modum, quo unaquaeque res possibilis; attributum per id, quod ex essentia in se specta profluit; modum vero per id, quod ex essentia unius rei cum essentia alterius collata derivatur. Responsiones E. V. contra objectiones Muysianas mihi abunde satisfaciunt; sed id adhuc difficultatis mihi restat, quod non satis distincte concipere valeam, quomodo vis primitiva modificetur, dum ex. gr. motus in gravi descendente acceleratur. Mutationes in extensione per imminutum partium aut augmentatum numerum variatumque ipsarum situm clare ac distincte concipiuntur: sed quid accidat vi primitivae, dum ex. gr. globus A impingit in globum B, nondum capio, aut dum globum A manu projicio. Porro ego hactenus vim primitivam, in cujus modificatione impetus consistit, non distinxi a vi inertiae, qua corpus B resistit impetui alterius A. Resistentiam enim concepi pro reactione vi unius ejusdemque, quae corpori inest, quatenus nempe contrariam habet directionem directionis impingentis. Neque adeo vim illam ab eo, quod est, extensum distinxi, quoniam ex illo ipso conatu progrediendi secundum aliquam directionem visa mihi est fluere impenetrabilitas materiae et hinc porro extensio, hoc est, partium extra partes positio. Sed facile video, me mentem E. V. nondum satis assequi; quin potius diversos parumper fovere conceptus. Gratum igitur erit, immo gratissimum, ubi rem apertius intueri dabitur.

Dabam Halae Saxonum d. 26 Jun. 1711.

P. S. Conscripsi dissertatiunculam de siphone meo anatomico et observationibus ei debitis: scire itaque velim, ad quemnam ea mittenda, si Miscellaneis Societatis inserenda.

LXV.

Wolf an Leibniz.

Mitto praecipua momenta, quae in recensione operis Muysiani attingere visum est, ut, si forte E. V. e re ducat, quaedam hinc inde moneri, illa adscribere dignetur. Divisionem materiae in infinities infinitum mihi parum firmo argumento probare videtur, ut et pleraque alia. Sed, ut lubens fateor, quae mihi hactenus innotuere argumenta, eadem labe infecta videntur, ex Geometria enim desumta, cujus hac in re subsidium mihi suspectum. Cartesianum vero ab extensione petitum falsa ipsorum hypothesi nititur. Non tamen dubito, quin E. V. firmius argumentum mecum communicare valeat, quo probetur, extensum finitum actu infinitas partes continere.

Inviderunt etiam his diebus in manus meas Elementa Scientiae naturalis Joa. Regii, Med. Dr. et Phil. Prof. in Acad. Franequerana, ibi loci hoc anno in 8 edita, ubi Autor, licet minime Cartesianus, p. 99 contra conatum corporis haec scribit: Male quoque corpori tribuitur conatus aut impetus ad motum, cujus vi de loco in locum transfertur: talis enim impetus, cum in ipsa corporis natura nihil activi reperiatur, a motore in corpus deberet transire; sed cum ille impetus modus sit, in subjectum transire nequit, et si transire posset, corpus substantia mere passiva non foret idoneum ejus subjectum, neque modus adventitius ex subjecto passivo activum facere potest. Possent, si ita visum fuerit, per modum appendicis ad responsiones Muysio datas, quaedam ad hoc argumentum reponi.

Halae Saxonum d. 1 Jul. 1711.

P. S. Dn. Hermannus jam tertia vice ad me scripsit, ut ipsum edoceam, quo in statu negotium E. V. satis notum sit positum. Litteras quoque ait se ad E. V. dedisse, sed multum vereri, ne interciderint. Videntur plures in Italia ipsi infensi, ut adeo apud nos degere mallet. Nascentur dubio procul ipsi lites cum Mathematico quodam Bononiensi, Verzaglia, ut partim ex ipsius litteris, partim ex Diario Veneto colligo.

LXVII.

Leibniz an Wolf.

Ut ad Physica Elementa veniam, optime recensuisti Generalia illa Muysiana. Aspersi notulas inclavatas hoc modo [ ] sed ita, ut Recensitor non tam suam dicat sententiam, quam referat, quid a quibusdam sentiatur.

Quaeris, quomodo vis primitiva modificetur, verbi gratia cum motus gravium descensu acceleratur; respondeo, modificationem vis primitivae, quae est in ipsa Monade, non posse melius explicari, quam exponendo quomodo mutetur vis derivativa in phaenomenis. Nam quod in phaenomenis exhibetur extensive et mechanice, in Monadibus est concentrate seu vitaliter. In gravibus (exempli causa) accelerationem fieri constat percussione continua gravis nova, velut si quovis determinato exiguo intervallo temporis a globo aliquo aut globulis percuteretur. Porro sciendum est, omnem vim derivativam novam produci interventu Reactionis. Reactio autem ista in se indefinita est, et pendet ab alio agente, cujus directioni, ut certe mones, contraria est reagentis directio. Hinc porro nascitur in percussis compressio, et rursus exercitium vis Elasticae seu Compressi restitutio. Ea autem vis (perinde ac vis reagendi) est insita corpori (oritur enim a perfluente liquido insensibili) et per se indefinita determinatur ipsa quantitate percussionis adeoque compressione resistentis et restitutione compressi. Quod autem per reactionem resistentis et restitutionem compressi exhibetur Mechanice seu extensive, id in ipsa Entelechia (ut jam dixi) concentratur dynamice et monadice, in qua mechanismi fons et mechanicorum repraesentatio est; nam phaenomena ex Monadibus (quae solae sunt verae substantiae) resultant. Et dum mechanica ex circumstantiis externis determinantur, eo ipso in fonte ipso Entelechia primitiva harmonice modificatur per se, quia dici potest, corpus omnem vim suam derivativam habere a se ipso. Quod cum etiam in ipsis compositis seu phaenomenis verum deprehendatur (dum corpori computatur liquidum continue affluens), multo magis in Monadibus, ipsisque adeo substantiis erit dicendum. Substantiae autem tot sunt, quot Machinae naturales seu corpora organica; aggregata autem hinc resultant, qualia sunt omnia non organica, et ipsa fragmenta organicorum. Caeterum Reactio praesupponit omnis resistentiae fontem seu antitypiam, nec corpora resisterent, si penetrabilia essent instar spatii vacui. Itaque prior est impenetrabilitas. Quod enim dicis, videri ex conatu progrediendi sequi impenetrabilitatem, non capio. Nam si dicis, aliquid conari aut progredi, quaero, quid sit illud quod progreditur, seu quid sit essentiale in eo, cui progressus est accidentalis; seu quid insit progredienti praeciso sive separato per mentem progressu. Cogeris, ni fallor, fateri inesse ipsi jam antitypiam cum vi quadam indefinita agendi, prout occasiones ex percussionibus offerentur. Horum essentialium diffusio seu iteratio extensionem corporum facit.

Essentiam nosci, cum rei possibilitatem intelligimus, exposui olim in Actis Eruditorum, ubi de Veritate et Ideis. Attributa voco praedicata primaria, sed derivativa voco affectiones. Modum esse variationem in limitibus ejus, quod essentiam constituit, aliquoties dixi; nec opus est, ut modificationes in una re semper oriantur ex alia, quia in Monade oriuntur ex ipsamet. Nam Monades cum sint in statu fluendi, habent vim. Et una Monas non dependet ab alia per influxum physicum, sed per idealem, dum autor rerum initio unam alteri accommodavit. Quodsi modificatio aliud quiddam foret praeter varietatem limitum rei substantialis per se indefinitae, utique adderet vel detraheret rebus aliquam positivam et absolutam realitatem, adeoque in modificatione esset creatio vel annihilatio, ut Baylius alicubi velle videbatur, qui hinc volebat, accidentia differre a substantiis. Sed creationis necessitas tantum locum habet quoad ingredientia mere positiva, quae cum substantiis manent, limites vero in accidentibus variantur, ita etiam ea in re quod figurae exhibent extensive, Entelechiae continent concentrate, et quod in illis est mechanicum, in his est vitale.

Si Dn. Stahlius vester percepisset meam de exacto consensu Mechanicorum et Vitalium sententiam, Mechanismum vitalibus non ita opposuisset. Et vitalis illa Medicina Helmontii, si rem ad animas affectusque earum referas, in corporibus mechanismo perficitur, etsi quoties affectus ad valetudinem conferunt, vitalia nobis sint mechanicis notiora. Itaque utiles subinde sunt Helmontii et Helmontianorum (quibus Dn. Stahlium computo) meditationes, sed peccant illi et in chimaeras incidunt, dum mechanismum subesse negant. Quod superest, vale etc.

Dabam Hanoverae 9 Julii 1711.

LXVII.

Leibniz an Wolf.

(Im Auszuge)

Non probo materiae divisionem in partes infinitesimas et multo minus in infinities infinitum. Et uti infiniti sunt numeri fracti assignabiles, alii aliis majores, ut tamen non sit necesse venire ad infinite parvos, ita idem de lineis sentio. Geometria non probat dari quantitates infinitesimas, sed extensionem semper dividi posse manifestum est, v. gr. cum rectae omnes sint similes et pars rectae sit recta, non minus secabilis erit pars quam totum; sed ego ex physicis vel potius metaphysicis addo, quodlibet extensum esse actu subjectum, seu constare ex partibus diversos motus habentibus.

Dn. Johannes Regius, quem memoras, optime vidisse videtur, conatum vel impetum, cum sit rei modus, debere esse modificationem rei substantialis activae; unde si materiae competeret, facturum ex subjecto passivo activum, et ipsummet fore rem adventitiam, contra naturam modi. Sed sine probatione supposuit, in ipsa corporis natura nihil activi reperiri. Itaque hactenus valet ejus argumentatio, ut vel nullus sit impetus, vel in corpore sit aliquod activum substantiale, quod per impetum modificari possit. Atque hoc credo facilius admittetur a considerante (cum tot aliae rationes concurrant), quam impetus negabitur, quem philosophi facilius admisere, postquam experimentis compertus est motus impressus a motore translato, de quo extat Epistola Gassendi, in qua ostendit, sagittam ex navi velocissime remis acta sursum missam versum zenith cum navi progredi et in eam recidere in eum fere locum, unde emissa fuit. Equidem ex his solis metaphysico rigore non probatur existentia impetus contra eos qui immediate ad Deum confugiunt, sed tamen impetus observandi occasionem dedere. Illa enim advocatio immediati concursus divini praeter necessitatem paucis credo probabitur.

LXVIII.

Wolf an Leibniz.

Scripsi ad Dr. Rühlmannum et percontatus sum, quando liberum ipsi fuerit Hannoveram venire. Quamprimum responsorias accepero, eas ad E. V. deferri curabo. Equidem ad litteras mihi longe carissimas ob varia ad recte philosophandum necessaria, quae continent, non respondere decreveram, antequam illas obtinerem, inprimis cum mihi adhuc unum alterumque dubium supersit, quod ut clarius evadat, integra mea philosophandi methodus cum meis ea de re hypothesibus explicanda videtur; quoniam tamen E. V. in nuperis scribit, se ad Dn. Hermannum litteras quasdam daturum, atque interea temporis ipse quasdam ad E. V. dederit meis inclusas, consilium mutare coactus fui. Nihil tamen nunc addo, nisi quod gratias agam maximas pro multiplici veritatum rarissimarum et fertilissimarum genere, quibus cognitionem meam locupletare dignata est E. V.

Dabam Halae Saxonum d. 15 Jul. 1711.

LXIX.

Leibniz an Wolf.

(Im Auszuge)

8 Decembr. 1711.

Cum inspicerem nuper Novembrem Actorum Lipsiensium hujus anni, reperi quaedam in Tua contra definitionem motus objectione, in quibus haereo, ut cum ais, quod est reale in motu, nempe nisum corporis, non minus in quiescente quam in motu deprehendi, allegasque globum gravem ex filo pendentem, qui nisum exercet. Sed ego censeo globum in hoc statu revera non quiescere; si sensibus possemus assequi naturae subtilitatem, videremus globum esse in perpetua deorsum ac sursum vibratione, ut cum appenditur filo alicui orichalcino helicali, ubi aliquamdiu eum reciproce descendere et ascendere videmus. Etsi autem ista oscillatio ad sensum cesset, nunquam tamen cessat revera.

LXX.

Wolf an Leibniz.

. . Maximas ago gratias, quod E. V. ingeniosam paradoxi circa scientiam infiniti demonstrationem sub epistolae ad me forma Actis Eruditorum *) inserere decreverit. Quemadmodum vero mira naturae lex, ad quam E. V. provocat, multum et admirationis et voluptatis in me excitavit, ita simul incitamento mihi fuit, ut tentarem, annon in aliarum serierum summis similiter observetur. Quamobrem seriem $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ etc. per alios nume-

*) Act. Erudit. Lips. Suppl. Tom. V. ad an. 1713.

ros explicavi, nec sine jucunditate statim animadverti fractionibus $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ etc. respondere progressiones Geometricas alternis signis affectas et sive in integris sive in fractis in infinitum continuatas. Est nempe $\frac{1}{3} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64$ etc. in infinit. vel $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$ etc. in infinit. $\frac{1}{4} = 1 - 3 + 9 - 27 + 81$ etc. in infinit. vel $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81}$ etc. in infinit. Et ita porro. Non minus vero paradoxum, esse ex. gr. $\frac{1}{3} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64$ etc. quam $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ etc. Patet enim, crescente numero terminorum, crescere quoque excessum summae supra $\frac{1}{3}$, si ultimus fuerit positivus, aut defectum ab $\frac{1}{3}$, si negativus. Impossibile igitur primo intuitu videtur, ut excessus in infinitum crescens tandem evadat $\frac{1}{3}$. Sed hunc nodum eodem modo solvi posse, quo Grandianus solutus, mihi manifestum videtur. Scilicet primum animadverti, has series non posse fieri fractionibus aequales, nisi ultimus positivus cum ultimo negativo idem ponatur. Si enim ex. gr. utrobique terminus ultimus sit m, erit summa omnium positivorum $\frac{m-1}{3} + m$, summa negativorum $\frac{m-2}{3} + m$, adeoque differentia $\frac{1}{3}$. Assumo igitur in infinito confundi ultimum et antepenultimum, seu potius cum evanescat ultimum, evanescere quoque rationem penultimi ad ultimum. Quare si in serie finita negativa terminus ultimus ponatur m, in positiva vero n, erit in infinito $m = n$. Terminetur itaque series termino positivo sitque ultimus negativus $= m$, erit ultimus positivus $= 2m$, summa positivorum $\frac{8m-1}{3}$, summa privativorum $\frac{4m-2}{3}$, adeoque differentia $\frac{4m+1}{3}$. Terminetur series termino negativo sitque positivus ultimus $= n$, erit ultimus negativus $2n$, summa positivorum $\frac{4n-1}{3}$, summa privativorum $\frac{8n-2}{3}$, adeoque differentia $\frac{-4n+1}{3}$. Jam cum in infinito nulla sit ratio, cur series potius numero positivo, quam negativo terminari fingatur et cur plures admittantur casus in quibus prodit $\frac{4m+1}{3}$, quam alii, in quibus $\frac{-4n+1}{3}$;

sumendum est ex regula E. V. medium arithmeticum $\frac{2m-2n+1}{3}$. Sed in infinito $2m = 2n$; ergo summa $= \frac{1}{3}$. Haec demonstratio generaliter procedit in omnibus istis seriebus, calculo universali adhibito: immo locum habet non modo si series in integris progrediantur, sed et si progrediuntur in fractis. Et his modum solvendi paradoxum Grandianum ab E. V. adhibitum egregie confirmari arbitror.

Examinavi quoque circuli quadraturam Anglicanam, sed cum major Archimedea 7 : 22 prodeat ratio diametri ad peripheriam, falsam judico; in confesso enim est, Archimedeam esse justo majorem. Calculum, quo usus sum, integrum adscribo. Sit (fig. 12) diameter circuli $AF = 1$, erit $AC = \frac{1}{2}$, $AB = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $DC = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$, $ED = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $8ED = \frac{8}{2} - \frac{8}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = 4 - 4\sqrt{\frac{1}{2}} = 4 - 2\sqrt{2}$. Jam ex hypothesi Autoris peripheria est $2AD + 8ED$. Ergo in numeris $6 - 2\sqrt{2}$. Est vero $\sqrt{2} = 1.4142$ etc., quare peripheria $6.0000 - 2.8284 = 3.1716$, quae jam in centesimis ternario differt a Ludolphina. Ponamus jam cum Archimede diametrum 7, erit juxta Anglum peripheria $42 - 14\sqrt{2} = 42.0000 - 19.7988 = 22.2012$, quae utique Archimedea major. Alteram rationem ad numeros ita revocavi. Si AC ponatur radius circuli dupli, erit $= \sqrt{\frac{1}{2}}$, unde $AD = DC = \frac{1}{2}$ et $ED = \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$, $ED^2 = \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{2}}$, adeoque $AE^2 = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$, cui si addatur $AB^2 = \frac{1}{2}$ in circulo simplo, habetur ex mente Angli area ejusdem $\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}$, quae divisa per $\frac{1}{4}$ dat peripheriam ut supra $6 - 2\sqrt{2}$.

Schelhammerus in Ephemeridibus Naturae Curiosorum contra experimentum E. V. circa mutationes barometri tria potissimum urget Ramazzino respondens: nempe 1. nubes aut guttulas aqueas in medio aëre suspensas esse, corpus vero in experimento superficiei innatare; 2. per illud experimentum non omnes mutationes salvari posse, quae circa descensum ☿ observantur; 3. corpus D ex capillo suspensum non potuisse premere aquam, dum ergo secto capillo per eam descendat, alterum librae brachium nonnihil attolli, quia ex altero corpus D non amplius suspendebatur, adeoque id pondere levabat. Cum Ramazzinus, qui aeque ac Schelhammerus, principiorum hydrostatices non satis gnarus videtur, ἀκύρως respondere soleat, cum venia E. V. in Actis Lipsiensibus breviter responderi poterat, nempe concedendo secundum, cum jam in Actis anni superioris annotatum sit, E. V. praecipuam causam in eo non quaerere, sed alias insuper assignare ibi recensitas; circa primum autem et tertium ostendendo ex hydrostaticis, quod corpus specifice gravius eodem modo augeat pondus, sive in superficie sive in medio haereat, etiamsi ex filo suspendatur; specifice levius vero superficiei incumbens et non suspensum integrum sui pondus aquae addat; in specie vero circa tertium monendo, quod pondus in librae brachium eodem modo gravitet, sive filo ex eo suspendatur sive fundo vasis ex eodem suspensi adhaereat.

Bibliothecam Germanicam Hallensem Gundlingius nunc conscribit, qui etiam recensionem promisit, non quod in aliis Eruditorum Diariis nulla extet, sed quod, quae ab aliis datae sunt, ipsi videantur insufficientes ac obscurae, scilicet quia nec vidit nec legit sibique solus sapere videtur. Quantum vero hac in re ab eo sperandum sit, ex recensione operis Raphsoniani de Deo intelligere datur.

Epistolam E. V. qua Budeo respondetur, cum multis jam communicavi. Hortantur me Dni. Thomasius et Ludwigius, ut quae generatim ibi dicuntur, specialius a me deducantur, ne fastum impune ferat hypocrita ambitiosus. Ego vero respondi, me nescire utrum E. V. venia id fieri possit, necne; haud difficulter alias ipsorum voto me locum daturum.

Rogavi, ni fallor, jam aliquoties, num studiosus Holsatus circa festum Paschatis Hannoveram abiens reddiderit Analysin Hugonis d'Omerique, et quid de ea videatur E. V.; sed nullum responsum ferens anxius haereo, num forte reddita non sit.

Dabam Halae Saxonum d. 12 Jun. 1712.

LXXI.

Leibniz an Wolf.

Respondissem citius, si prius vacasset elegantissimam tuam meditationem considerare attentius, qua ostendere aggrederis, ut $1-1+1-1$ etc. in infinit. est $\frac{1}{2}$, ita $1-2+4-8+16-32$ etc. esse $\frac{1}{3}$, et $1-3+9-27+81$ etc. esse $\frac{1}{4}$, et ita porro; in quo ego haesi, quia summationes serierum infinitarum solent postulare decrescentiam terminorum. Decrescentium autem velut limes est $1-1+1-1+1-1$ etc. Ut ergo videamus an satis fidi possit ratiocinationi, sequentia consideranda propono: Primum an, ut in illo $1-1+1-1$ etc. $=\frac{1}{2}$, possit et in reliquis res comprobari per demonstrationem linearem. Deinde an etiam in Tuis terminorum finitorum summatio det aliquid ad rem faciens et vel plane consentiens cum serie infinita vel saltem continue ad eam accedens. Tertio an ipsa Tua demonstratio satis accurate procedat. Primum Tibi amplius examinandum relinquo. Secundum, ni fallor, non succedit. Ex. gr. medium inter $1-2$ et $1-2+4$ seu inter -1 et $+3$ est 1, et medium inter $1-2+4-8$ et inter $1-2+4-8+16$ seu inter -5 et $+11$ est 3, et medium inter $1-2+4-8+16-32$ et $1-2+4-8+16-32+64$ seu inter -21 et $+43$ est 11. Ita vides, hoc crescere in infinitum nec accedere ad $\frac{1}{3}$. Et quod tertio ad demonstrationem attinet, nec summa videtur esse bene assignata, nec video cur differentiam inter terminatum per negativum et per positivum adhibeas. Nec hic licet ne in infinito quidem assumere $m=n$, cum semper sit $n=2m$. Itaque rogo ut rem accuratius inspicias, ita ipse Tibi facile satisfacies. Ego cum rem non nisi obiter inspexissem, jam ingenio tuo gratulari putabam, opto enim ut detegas aliquid Te et scientia dignum; sed re inspecta pedem referre coactus sum, etsi praeoccupatus Dn. Hermanno jam scripserim, Te cogitationem meam egregie promovisse.

Nescio an Dn. Consiliarius Aulicus Hofmannus ad vos redierit: facturum ajebant. Ego magnopere doleo, Berolini eum diutius consistere non potuisse; plurimum enim ab eo nobis et Reipublicae literariae polliciebar.

Posses haud dubie perpulchre retundere censorem libelli mei Jenensem, multumque Tibi debeo, quod ea de re cogitas. Sed ego vellem prius Theologos nostros sententiam suam aperire de paradoxo Dn. Buddaei, quod (ex sententia supralapsariorum) nulla sit naturalis actionum moralitas nullumque adeo proprie jus Naturae, sed quod omnis justitia pendeat a divino arbitrio. Unde revera Deo justus appellandus non esset. Idem statuit, nihil esse possibile quod non actu fit, quod olim in Abaelardo fuit improbatum. Et hanc sententiam renovavit Hobbius, manifesteque hinc sequitur omnia necessario fieri.

Gratias ago, quod pseudotetragonismum examinasti. Dudum me Tibi significasse putabam, Hugonem de Omerique mihi recte redditum; quodsi nondum ideo gratias egi, id nunc facio. Misi schedam ad Dn. Schrökium inserendam continuationi Ephemeridum Curiosorum, ubi Dn. Schelhammero respondetur. Quod superest etc.

Dabam Hanoverae 13 Julii 1712.

LXXII.

Wolf an Leibniz.

Quod responsum tamdiu distulerim, non mihi, sed morbo imputandum, qui denuo meditationes ac labores meos ordinarios interrupit. Etsi non admittatur, esse $1-2+4-8+16$ etc. in infinitum $=\frac{1}{3}$ (quod tamen eodem modo sequitur, quo alterum $1-1+1-1+1-1$ etc. $=\frac{1}{2}$, etenim et in hac divisione si series terminatur, addendum est loco ultimo $\frac{1}{2}$, sicuti in altera $\frac{1}{3}$); lex tamen E. V. applicari potest ad series in Geometrica ratione decrescentes, ita ut eodem modo ostendatur esse $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ etc. $=\frac{1}{4}$, et ita porro, quo E. V. ostendit, esse $1-1+1-1+1$ etc. $=\frac{1}{2}$. Cl. Hermannus loquitur de seriebus terminatis, ubi utique terminus ultimus toti seriei aequivalet, antecedentibus se mutuo destruentibus, id quod et ipse P. Grandus in demonstratione Theorematum Hugenianorum dudum agnovit. Sed mihi quidem durius videtur, in infinito statuere terminum ultimum et de serie infinita pronunciare, quod de finita quacunque enunciatur.

Addidi recensionem controversiae P. Grandi cum Portio, si forte ea de re E. V. occurrat, quod utiliter moneri possit.

Dn. Menkenius misit ad me epistolam Marchetti, in qua P. Grandi paradoxum impugnat, cum E. V. communicandam, si forte tanti videatur, ut cum monitis quibusdam in Actis ejus mentio fiat. Cum Italica nondum satis intelligam, ego quidem discere non potui, quanti ponderis sint ejus argumenta.

Halae d. 28 Sept. 1712.

LXXIII.

Wolf an Leibniz.

Accepi heri ex dono Societatis Regiae Londinensis Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de Analysi promota, jussu Societatis sub finem anni superioris in lucem editum: quod cum E. T. tangat, de eo ut statim scriberem consultum duxi. Scilicet omne scriptum eo tendit, ut ostendatur, de seriebus infinitis calculoque differentiali nihil ab E. T. proditum esse quod non ante communicatum sit per litteras ab Oldenburgio, immo quod mirum, ipsam seriem pro circulo infinitam a Gregorio repertam et E. T. ab Oldenburgio communicatam asserunt scripti illius Autores. Verbo non obscure hinc inde insinuant, morem E. T. esse aliorum inventis inhiare, ita ut ubi recensetur, quae de lineis opticis, de resistentia medii et motu projectilium in medio resistente causisque coelestium motuum in Actis Eruditorum prodidisti, hanc tandem notam subjiciant: Hac licentia concessa, autores quilibet inventis suis facile privari possunt. Viderat Leibnitus epitomen libri in Actis Lipsicis. Per commercium epistolicum, quod cum viris doctis passim habebat, cognoscere potuit propositiones in libro illo contentas. Si librum non ividisset, videre tamen debuisset, antequam suas de isdem rebus in itinere scriptas compositiones publicaret. Dicunt aliqui falsas esse Tentaminis propositiones 11, 12 et 15, et Dn. Leibnitium ab his per calculum suum deduxisse propositiones 19 et 20 ejusdem Tentaminis. Talis autem calculus ad propositiones prius inventas aptari quidem potuit, non autem inventorem constituere. Item p. 98 scribunt illi arbitri a Societate constituti: methodum differentialem Moutoni D. Leibnitius habuit 1673 et suam esse voluit, methodum aliam differentialem nondum habuit. Series postea habuit, sed quas anno 1675 ab Oldenburgo accepit, ab aliis prius accipere potuisset. Methodum generalem perveniendi ad ejusmodi series anno proximo ab Oldenburgo petiit, a Newtono accepit, antea non habuit. Methodum extrahendi radices in speciebus a Newtono simul accepit, qua methodus ejus per transmutationem figurarum nondum generalis in methodum quandam generalem evasit, sed inutilem: per extractiones solas res citius peragitur. A. 1677 methodum novam differentialem habuit, ac tantam methodi hujus antiquitatem Editores (sc. Actorum Lipsiensium) jactant, majorem non asserunt. Methodum generalem vel serierum, vel differentialem Leibnitium vel primum vel proprio marte invenisse, Newtonus nondum agnovit publice. P. 104: Certe methodum Newtoni ante annum 1671 inventam fuisse Leibnitius ex litteris ejus intellexerat, sed in Actis Lipsicis hoc nunquam agnovit. Sic et se ab Oldenburgo series Newtonianas et Gregorianas ineunte anno 1675 accepisse statim oblitus est, et methodum serierum se ab Oldenburgo postulasse et a Newtono accepisse statim oblitus est, et problemata tangentium inversa ab aequationibus et quadraturis pendere se primum negasse et subinde a Newtono didicisse statim oblitus est. Alia non addo, quibus candorem E. V. non in dubium vocant, sed aperte labefactare conantur illi iniqui satis arbitri, nisi quod tandem concludant: Quibus perpensis, D. Newtonum primum esse hujus methodi inventorem arbitramur, atque ideo D. Keillium eandem illi asserendo nullo modo D. Leibnitium calumnia aut injuria affecisse. Miror profecto decretoriam Sententiam a Societate Regia pronunciatam esse et publicatam. Ceterum non latere volo E. T., exemplar mihi destinatum ad manus meas pervenisse per Dn. Vaterum, Medicum Wittenbergensem, juniorem, qui ante biennium in Anglia commoratus et ex cujus litteris accepi, quod multa exemplaria a membro quodam Societatis ad eum missa fuerint, ut ea Mathematicis per Germaniam ex dono Societatis Regiae distribueret. Collectores quoque Actorum passim notantur tum in hoc scripto, tum in epistola quadam Transactionibus nuper inserta, quod E. T. sint faventiores et tribuant aliena. Immo in Transactionibus ridentur, quod instar Numinis colant E. T., quam satis inepte traducunt. Rogo denique, ut E. T. significet occasionem commodam, qua scriptum illud mitti possit.

Halae Saxonum d. 1 Jul. 1713.

P. S. Dubius sum, an hujus scripti mentio fieri possit in Actis, antequam E. T. responsio prodierit. Interest quoque Collectorum ut se a studii partium vitio purgent.

LXXIV.

Wolf an Leibniz.

Fama de lue Viennae vehementer grassante impedivit, quo minus exemplaria desiderata de controversia circa calculi differentialis inventum miserim: in ea enim opinione fui, fore ut E. T. huc advolet. Sed quia video adventum tardari, ideo quatuor ad Dn. Münchium misi, ut ea ad E. T. deferri curet. Dn. Hermannus ante paucas hebdomades Halae me invisit eumque adhuc Berolini commorari arbitror, quia Dn. de Printzen ab aula usque ad festum D. Michaëlis abest. Ceterum ex eo intellexi, Dn. Bernoullium aeque ac me ignorare, quid responderi debeat Anglis inventionem seriei pro circulo $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ etc. Gregorio seniori tribuentibus, cum proferant litteras sub initium anni 1671 ad Collinsium a Gregorio scriptas, in quibus eadem jam habetur et quas cum E. T. communicatas esse ab Oldenburgio ex hujus quibusdam literis docere conantur. Ignoro itaque, utrum literae istae pro supposititiis habendae sint an vero concedendum, Gregorium quoque ad eandem seriem proprio Marte pervenisse. Miror tamen Anglos Transactionibus suis seriem istam ex Actis Lipsiensibus inseruisse tanquam inventum E. T., cum multo tempore ante ex litteris Gregorii idem publicare potuissent: immo miror Gregorium juniorem, cui patrui dubio procul inventa non ignota fuere, in suo Tractatu de Dimensione figurarum eandem seriem E. T. adscribere. Accedit quod Collinsius Gregoriana cum Newtonianis communicaverit, Newtonus vero in litteris suis agnoverit, neminem quantum constet eandem ante dedisse. Ipsum vero calculum differentialem quod attinet, nullum sane indicium contra E. T., nullum pro Newtono inde desumi potest, ut adeo nonnisi imperitis glaucoma facere possint Angli nullo argumento pugnantes. Video in Diario Parisino (Journal des Sçavans) mentionem injici hujus controversiae, sed addunt ejus Autores, se non credere, quod in sententia decretoria Societatis Anglicanae E. T. sit acquietura, adeoque responsum aliquod exspectari, unde plus lucis controversiae huic affundatur. Puto igitur e re esse, ut ex nundinis Lipsiensibus aliquot exemplaria ad Dn. Bernoullium mittantur, quo cum amicis exteris ea communicare possit. Si quo alio tempore, hoc praesertim opto, ut E. T. valeat.

Dabam Halae Saxonum d. 15 Sept. 1713.

LXXV.

Wolf an Leibniz.

Controversiae de inventione calculi differentialis mentio facta est tum in Diario Parisino, tum in Novis litterariis, quae idiomate Gallico Hagae Comitum ab aliquo tempore eduntur, sed ita ut in hac Analyseos parte et scriptis recentioribus versati judicare debeant, E. V. sibi attribuisse inventum alienum, quod per litteras Oldenburgii communicatum fuerat. Scribunt E. V. magnam controversiam hactenus extitisse cum Newtono circa hoc inventum, sed cum inter vos convenire non potueritis, E. V. provocasse ad judicium Societatis, quasi in ejus sententia acquietura, quae vero re examinata pronunciaverit Newtonum esse primum inventorem et E. V. ab iis pro inventore habitam fuisse, quibus non visae sint litterae, in quibus hoc inventum per Oldenburgium a Collinsio communicatum fuit. Haec etiam in Diaria gemina Germanica (den BücherSaal und die deutschen Acta Eruditorum) translata sunt. Exemplaria schediasmatis, quod jussu Tuo dudum imprimendum curavi, nonnisi ad eos misi, quos in Germania accepisse scriptum Anglorum acceperam. Nescio tamen, qui factum fuerit, ut Lipsiae Actis Eruditorum Germanicis fuerit insertum quasi ante sententiam decretoriam Societatis editum. Multi desiderant controversiae hujus expositionem et cum ad Menckenium tum ad me ea de re scripserunt. Ego igitur consultum judicarem ut vera enarratio ejusdem occasione scripti Anglici fieret atque ex illo schediasmate adjungerentur, quae contrarium ostendunt. Antequam tamen id facerem, ad E. V. scribendum esse duxi, ut pace Tua id fieret. Spero me paucas intra hebdomades novam editionem Newtoniani operis accepturum: amicus enim quidam in vicinia, qui in Angliam ejus gratia scripsit, propediem id expectat mihique promisit, se ubi acceperit statim ad me missurum. In ea demonstratum esse ajunt a Newtono, gravitatem esse vim primitivam, nec per ullas rationes mechanicas explicabilem. Vale etc.

Halae Saxonum d. 11 Decembr. 1713.

LXXVI.

Leibniz an Wolf.

Gratias ago quod mei defendendi curam geris. Male me habet quod nondum Commercium Epistolicum ab Anglis editum vidi; ita enim non bene scio quidnam moveant aut quibus argumentis sit satisfaciendum. Valde rogo, ut videas an mihi exemplum ab eo qui plura ex Anglia acceperat procurare possis. Videbo domum redux an omnes illae in Commercio editae literae ad me olim pervenerint, et an non habeam plures ibi non extantes. Et dabo fortasse Commercium Epistolicum meum illo auctius. Interim quod hic Gallice adjicio *), posset mitti ad editorem vel librarium Diarii novi Gallici, quod Hagae edi scribis, et versio ejus Germanica ad Germanicos Diarnalistas, qui Hagiensia repetivere. Cum non viderim quod Londini editum est, haud satis scio, an et quomodo Societas Regia litem suam fecerit. Si verba nonnulla magis ad rem facientia ex edito mihi communicare Tibi vacaret, melius judicare possem. Si quid alicubi edendum Tibi judices, rogo ut mihi communices.

Nunquam demonstrabit Newtonus, gravitatem esse vim primitivam.

LXXVII.

Wolf an Leibniz.

Pervenere ad me Andalae Dissertationes Philosophicae, in quarum prima definitionem substantiae vulgarem contra ea vindicare nititur, quae E. T. in Actis Eruditorum de emendanda prima Philosophia dudum edidit simulque vim activam impugnat. Affectibus magis quam veritati litat et sub finem vehementer optat, ut viri istiusmodi celebres solas res mathematicas meditentur, materias autem mere physicas aut metaphysicas, quibus ingenium ipsorum (ipsa Andalae verba recito) minus forte est aptum vel assuetum, aliis tractandas committerent, non enim omnia possumus omnes. Dn. Menckenius mallet, in recensione placita Autoris non notari, sed per modum epistolae Actis inserere suadet, quae contra hominem semidoctum dicenda. Mearum itaque partium esse judicavi, mentem E. T. ea de re exquirere. Quodsi non dignus videatur, cui Vir summus respondeat, ego ipsi respondebo, communi-

*) Siehe Leibnizens mathematische Schriften Bd. V. S. 414 ff.

cata tamen prius tum recensione tum responsione. Gratum igitur erit quantocyus rescire, quid ea de re videatur E. T. Grundlingius noster judicium E. T. de Puffendorfio in collegiis traducit et thesibus suis typo descriptis quaedam ea de re inseruit, sed more suo sine probatione. Missu Dn. Hermanni accepi librum Poleni de vorticibus coelestibus ab Autore mihi destinatum; sed nullas addidit literas, suntque qui ajunt eum ad amplectendam Professionem Francofurtanam non venturum, quod omnino mirarer. Certe nec Academiae nec Aulae placet, quod adventum minime maturet. Rumor his diebus percrebuit de valetudine E. T. non satis firma, qui me valde anxium tenet, sed opto et spero falsum fuisse. Supplex enim veneror supremum Numen, ut E. T. per plurima lustra salvum ac incolumem servet, ut de tanto Patrono adhuc gloriari possim.

Dabam Halae Saxonum d. 21 Dec. 1713.

LXXVIII.

Wolf an Leibniz.

Animadversionem Gallicam in controversiam de inventore calculi differentialis ad editorem novi Diarii, quod Hagae Comitum edi coepit, misi, simulque Lipsiam versionem Diario Germanico inserendam. Mitto jam recensionem et excerpta uberiora ex Commercio Epistolico, ex quibus satis constabit, Societatem Regiam litem prorsus suam fecisse: unde et in Diario Hagiensi disertis verbis monetur, sententiam pro Newtono latam tanquam ipsius Societatis accipiendam esse. Accedit, quod Societas non modo sumtu suo Commercium Epistolicum imprimi curaverit, sed et (ut singulis exemplaribus adscriptum est) ex dono Societatis per Galliam, Italiam, Bataviam et Germaniam distributum. Immo quorum nomina

Societati cognita fuere, illa quoque libello praemissa fuere. Ita ex. gr. in Gallia singulis Academiae Regiae Scientiarum membris nominatim distributa sunt ex dono Societatis exemplaria, et ego quoque unum accepi, cui adscriptum est nomen meum. Habeo quoque penes me exemplar E. V. reddendum, quod obtinui a Cl. Vatero, cui cura libellum inter Mathematicos Germaniae distribuendi erat commissa. Ego sane valde necessarium judico, ut aliqua hujus controversiae in Actis mentio fiat, neque enim deesse video etiam apud nostros, qui calumniantur, Actorum Collectores non optime sibi conscios esse et tacentes agnoscere, quod E. T. plus tribuerint, quam par erat. Sed qualia reponi debeant, ex iis quae mitto excerptis abunde constabit. Novam editionem Principiorum Newtoni vidi et cum priore contuli, sed parum eandem a priore differre deprehendi, ut fere dubitem, an pretio 5 thalerorum quod... statuitur, redimi mereatur. Quodsi tamen E. T. voluerit, ut emam, faciam id quam lubentissime.

Halae Saxonum d. 6 Febr. 1714.

LXXIX.

Wolf an Leibniz.

Non dubito, quin E. T. acceperit exempla uberiora ex Commercio Collinsiano epistolico, quae ante festum Paschatos per veredarium publicum Viennam misi. Nunc cum juvenis quidam eo tendat, qui hactenus apud nos studiis operam dedit, Commercium ipsum mitto. Diarii Hagiensis Collectores non modo schedam Gallicam, sed et Latinam, quam anno superiore ab E. T. acceptam imprimi curavi, in Gallicum idioma translatam, mutatis tamen in utroque dictionibus acerbioribus, quae Anglos irritare posse ipsis visa sunt. Promiserunt enim mihi, quod nec ex Anglia quicquam accipere decreverint nisi sub eadem conditione. Versio tamen prioris Germanica inserta est Actis Eruditorum, quae ab aliquo tempore lingua Germanica Lipsiae eduntur. Animos Anglorum adversus Germanos valde exacerbatos esse nonnemo ex Anglia redux mihi significavit, qui cum pluribus Sociis Societatis Regiae collocutus: quod quidem eo facilius fidem meam meruit, quia etiam Hagiensis Diarii collectores scribunt, Anglos hanc controversiam non tractare ut controversiam inter Anglum et Germanum, sed ut inter Britanniam et Germaniam. Cum nunc Amstelodami recudatur nova editio Principiorum Philosophiae naturalis Newtoni, exemplaria editionis Anglicae a bibliopolis Batavis et nostris non comparantur. Puto itaque, E. T. perinde futurum, sive editione Batava sive Anglica potiatur. Quamprimum itaque prodierit (quod mox fieri debere confido), librum emam et occasione data ad E. T. mittam. Quas hactenus adversitates nullo meo merito ab hominibus perfidis expertus fuerim, flagitiorum quodvis genus non invita aula impune perpetrantibus, juvenis ille coram edisseret, qui litteras has reddit. Quod superest, E. T. me plurimum commendo, futurus usque ad cineres etc.

Dabam Halae Saxonum d. 20 April. 1714.

LXXX.

Leibniz an Wolf.

(Im Auszuge)

Diligentem libelli Collinsiani lectionem differre cogor in reditum ad chartas meas, ubi conferre potero. Nihil in rem afferunt qui edidere, ut probent calculum differentialem prius innotuisse quam mihi, nec fere nisi seriebus infinitis occupantur, quarum inventionem libenter etiam Nicolao Mercatori Germano eripere vellent, si possent. Mea serierum infinitarum cognitio admodum tenuis initio fuit, aliis intento, praesertim cum vix Geometriam interiorem attingere coepissem. Sed mox inveni viam illam quae calculo differentiali nixa multis post annis in Actis Eruditorum a me edita est, quae longissime alias Methodos Mercatori, Newtono et Gregorio notas post se relinquit, cum sit universalis. Fortasse ego ipse Commercii mei Epistolici volumen edam, cui literae non tantum quas publicaverunt Wallisius et editor Collinsianorum, sed et aliae inserentur. Et poterunt accedere nonnulla ad vanas cavillationes hujus editoris elidendas, quantum operae pretium videbitur. Non omnes Angli, imo nec omnes ex Societate Londinensi ineptias editoris Collinsianorum et sophismata colludentium probant, exterorum autem nemo mihi notus. Si quis Anglis vicem reddere vellet in Germanos iniquis, uberem inveniret materiam, ostensurus quam male adulatores Roberti Boylii egerint cum insigni viro, Ottone Gerikio, indubitato autore Machinae vacui, et quam ipse Boylius in Germanos parum gratus fuerit, quibus in Chemicis integrorum libellorum materiam sublegit, ut alia id genus taceam, velut quae contra Hugenium et Heuratium sunt moliti. Collectores Lipsienses Actorum Eruditorum semper faciles ac pene nimii fuere in Anglis aliisque exteris laudendis, sed mala gratia redditur.

Significatum mihi est ex Gallia, credo ex Dn. Hermanni communicatis, confectum a Te esse scriptum Germanicum de anima, in qua a meis sententiis non abhorreas, Quid ejus sit, a Te discere potero.

Thomasium suadeo ut amicum habere studeas, neque enim refert quod fortasse in dogmatibus dissidetis, id enim

incolumi licuit semper amicitia.

Habet acumen, doctrinam, dignitatem, quae omnia faciunt ut favorem ejus Tibi conciliatum velim. Et vero cum ipse aderam, a Te ornando non alienus videbatur. Quid agit Hofmannus, quid Superintendens vester, quid Ludovicus et Gundlingius? Stahlium ajunt Gundelshemio absente et favente Berolini sanitatis Principum curam habere debere. Vale.

Dabam Viennae.

LXXXI.

Wolf an Leibniz.

Accepi (prout nuper monueram) epistolam Keilii, quam opposuit Animadversionibus in recensionem controversiae de inventore calculi differentialis ab E. T. publicatis: eam igitur ut statim communicarem, e re esse duxi. Miror hominis impudentiam, miror quoque jactantiam, cum tamen constet ex litteris a Moyvraeo ad Varignonium datis (quemadmodum me certiorem reddit Hermannus) ipsum non propriis, sed Newtoni armis instructum pugnare; ipsius tamen ingenio tribuenda esse judico, quae pueriliter adversus argumentum a litteris punctatis sumtum excipit. Neque vero ego video, qui dici possit, in demonstratione quadraturae curvarum Newtoniana calculum differentialem, qui per modum algorithmi exercetur, contineri; etsi concedam, principiis illius demonstrationis etiam locum esse in applicatione calculi differentialis ad quadraturas et alias quaestiones inde pendentes. Forsan non inutile foret, si E. T. responsionis loco veram calculi differentialis originem ostenderet et naturam ne quidem iis, qui eo quotidie cum successu utuntur, satis perspectam explicaret.

Caeterum mihi pergratum foret cognoscere, quomodo E. T. perfectionem definire soleat. Variae quidem mihi definitiones succurrunt, sed vel eas ingrediuntur notiones usus aut finis, vel alia ex ratione non satisfaciunt. Vale etc.

Halae Saxonum d. 3 Octobr. 1714.

LXXXII.

Leibniz an Wolf.

Gratias ago quod Keiliana nova ad me misisti, quanquam etiam aliunde ad me pervenerint: nihil alicujus momenti prioribus addit. Ego vero excerptum accepi ex Diario Societatis Regiae, quo illa declarat, opinionem et relationem eorum quibus Societas rem commiserat, non esse habendam pro sententia definitiva Societatis.

Cogito de meo circa hanc materiam Commercio Epistolico edendo, ut nostra controversia fructum aliquem in publicum ferat. Si datur otium absolvendi adhuc quaedam quae ad Calculi differentialis promotionem pertinent, ejus expositionem uberiorem dabo, ut verae ejus origines melius appareant.

Perfectio, de qua quaeris, est gradus realitatis positivae, vel quod eodem redit, intelligibilitatis affirmativae, ut illud sit perfectius, in quo plura reperiuntur notatu digna.

LXXXIII.

Wolf an Leibniz.

Definitionem perfectionis in multis jam reperi scopo meo respondentem: etsi autem adhuc in nonnullis haeream (ex. gr. an in corpore sano plura observabilia occurrant quam in aegroto, cum tamen sanum perfectius judicetur aegroto), facile tamen mihi ipsi satisfaciam, ubi accuratius eam meditari datum fuerit. Praevideo enim inter observabilia referenda esse, quae ullo modo ex supposito rei statu consequuntur.

Cum Keilius in epistola responsoria Diario Hagiensi inserta, quam mature circa festum D. Michaëlis communicavi, autores schedarum Commercio epistolico oppositarum ignorantiae arguat, quasi nescirent inter rem et signa distinguere, nec argumenta Anglorum discutere valerent; vereor sane ne, qui argumenta ipsa examinare valeant, criminationibus hisce fidem habeant et ex silentio concludant, argumenta Anglorum revera invincibilia esse. Unde novi optare etiam alios, ut plenius respondeatur et expressius, praesertim cum etiam nonnulli, quorum non postrema est in Mathematicis auctoritas, argumenta Anglorum ad speciem composita esse videantur.

Halae Saxonum Febr. 1715.

LXXXIV.

Leibniz an Wolf.

Post honorificam prensationem qua Regio nomine Dn. de Prinzen erga Te usus est, non ausim suadere ut Hallis discedas*). Quin potius arbitror hoc intellecto alios qui Tibi subinde adversati sunt cautius acturos, quod intelligent, si Tibi dent querendi causas, paratam ex aula reprehensionem fore.

Keilio homini impolito ut respondeam, a me impetrare non possum: vix lectu digna habui ac ne vix quidem quae effudit. Si quid notasti quod responsionem mereri aut Tibi aut aliis videatur, fac quaeso ut sciam. Ita enim dabo operam ut amicis satisfaciam. Ne speciem quidem argumenti notavi, unde appareat notitiam inventi Calculi infinitesimalis a Newtono ad me pervenisse. Quin

---

*) Wolf beabsichtigte nach Wittenberg zu gehen; er wurde aber durch Verleihung des Hofraths-Titels und durch Erhöhung seines Gehaltes bewogen, in Halle zu bleiben.

potius est cur judicemus, Newtono ipsi ante mea edita non satis cognitum fuisse.

Gratum est intelligere, quod mea generalissimà perfectionis definitio non displicet. Ex Actis notavi, Te nonnulla mea oretenus accepta, praesertim circa definitionem similitudinis atque usum, et circa Analysin Axiomatum in identicas propositiones et definitiones, insigni Tuo operi inseruisse quod adeo non displicet, ut potius gratias eo nomine agam.

In corpore sano plura esse observabilia quam in aegro, dubitandum non est. Si omnes aegri essent, multae praeclarae observationes cessarent, quae scilicet cursum naturae ordinarium constituunt, qui morbis turbatur: quanto plus ordinis, tanto plus est observabilitatis. Imperfectiones sunt exceptiones, quae regulas id est observationes nempe universales turbant. Si multae essent regulae, nihil esset observatione dignum, chaos merum. In Theodicaea notavi, sapientem semper agere per principia seu regulas, nunquam per exceptiones, nisi cum regulae concurrunt inter se, et altera alteram limitat. Itaque dici etiam potest, perfectius esse quod est magis regulare seu plures recipit observationes nempe generales. Itaque sic distinctius exprimitur mens mea, observationis enim nomen vulgo etiam exceptionibus accommodatur. Multitudo autem regularitatum parit varietatem. Ita uniformitas seu generalitas et varietás conciliantur.

Heineccius eruditione non caret, vellem esset et gravitas quae Theologum commendat etiam apud vulgus. Quid Thomasius, Ludovicus, Gundelingius agunt? Non carent illi ingenio, neque doctrina, sed sunt in sententiis ferendis paulo promtiores, atque ideo retractationibus obnoxii. Non dubito quin incipiant de rebus Mathematicis judicare sanius, etsi forte dissimulent.

Stahlium Gundelshemius Berolinum attraxit, ut magis Hofmanno aegre faciat. Stahlii artem curandi maximam in eo consistere arbitror, ut nihil agat nisi in speciem, caetera naturam sibi relinquat. Harvaeus quidam nuperus librum edidit ante annos aliquot de Arte curandi morbos expectatione, satyricum quidem nonnihil, sed tamen haud nimis a vero alienum. Hi Medici possunt ursurpare quod olim Cancellarius Jena Ratisbonae dicere solebat, nihil faciendo neminem timeas. Politica tamen ipsorum ars est, dissimulare hanc artem, quae si innotesceret, subito aurifera flumina siccarentur. Quid agit optimus Hofmannus noster? Generoso animo spernere videtur fortunam adversam, in quo recte facit. Nec credo ipsi deesse aestimatores.

Fac quaeso ut subinde discam, quid in usum publicum vel privatum moliare; tum quid alii agant praesertim vestri aut vicini. Vale.

Dabam Hanoverae 2 Aprilis 1715.

LXXXV.

Wolf an Leibniz.

Scripsit aliquoties ad me Hermannus et quaesivit, ubi E. V. commoretur: cum enim opus ipsius de motu solidorum et fluidorum sit propemodum totum impressum, Dedicationem ad E. V. eidem praefigere decrevit, sed ignorat dignitatum titulos, quos nec ego ipsi hactenus significare potui. Rogo igitur, ut E. V. eas ad me perscribat, quas tanquam aliunde acceptas ad Hermannum mittam. Ex ejus litteris cognovi, Gallos fortiorem judicare epistolam Keilianam in Diario Hagiensi, quam ut a Keilio proficisci potuerit: arbitrantur itaque Newtonum ipsum argumenta suppeditasse. Iidem optant ut E. V. distinctius ad eadem respondeat, et Hermannus arbitratur, quod E. V. in necessitate aliqua reponendi nunc constituatur. Sed quaenam tum illi, tum hic responsione potissimum digna judicent, non constat. Mihi quidem necessarium videretur ostendere, quod in demonstratione quadraturarum Newtoniana, quae etiam in Actis A. 1712 p. 75 legitur, ipse calculus differentialis nondum contineatur, etsi ea et hic communi quodam fundamento nitantur. Deinde scire velim, quid E. V. reponat ad accusationem, quod in Tentamine de Causis physicis motuum coelestium differentias secundas rite aestimare non noverit, cumque propterea in errorem inciderit, errorem A. 1706 in Actis correctura ob ejus fontem non animadversum duplicem alium commiserit. Sane cum Keilius adeo audacter provocet Autores Schediasmatum, contra quos calamum stringit, et argumenta Anglorum tanta evidentia niti asseveret, ut nec ipsa E. V. aliqua reponere ausura sit; plurimi sane ex silentio concludent bonam Anglorum causam. Videtur autem speciem aliquam habere hoc argumentum, quod Newtonus in epistola descripserit eos methodi suae characteres, qui nulli alii nisi calculo differentiali conveniunt, et quod exempla dederit, unde ingenium mediocre adhibita illa descriptione ipsam methodum hariolari potuerit, praesertim cum una exhibita fuisse dicatur series omnes differentias possibiles quantitatis variabilis cujuscunque complexa. Bernoullium prorsus silere miror, qui ad retractationem parum honorifice provocatur a Keilio.

Hactenus non multa mihi meditari licuit, cum nondum prorsus absolverim Tomum alterum meorum Elementorum. Incidi tamen nuper in regulam geminam inveniendi logarithmum summae atque differentiae duorum numerorum sive rationalium sive irrationalium, sive integrorum sive fractionum, atque potentiarum eorundem. Prior, quam etiam Hermanno ante perspectam fuisse ex litteris ejus cognovi, ex ipsa indole numerorum petita. Sit nempe inveniendus logarithmus ipsius $a \mp b$. Quoniam $a \mp b = \left(1 \mp \frac{b}{a}\right) a$, ope logarithmorum facile invenitur $\frac{b}{a}$ cum parte proportionali et inde porro $l(a \mp b)$. Mihi quidem haec regula sub initium displicebat ob partem proportionalem quaerendam, sed Hermannus eam admodum commodam in praxi se reperisse scribit, id quod tamen tentare nondum licuit. Missa igitur ista, latera trianguli rectanguli consideravi instar radiorum numerorum aggregandorum et inde per trigonometriam elicui hypotenusam: unde regulam ad praxin satis commodam retentuque facilem obtinui. Nec multo absimili modo reperi logarithmum differentiae a — b. Cum regula in praxi subinde habeat usum, miror de ea hactenus non cogitasse Autores. Equidem in Miscellaneis Societatis Leopoldinae quidam Muschel talem dedit, ut postea reperi; sed fundamentum est admodum perplexum et e longinquo petiit, quod ante pedes erat. Reperi quoque facillimam hyperbolae descriptionem, ita ut facilius multo quam parabola aut ellipsi per innumera puncta determinari possit. Sit (fig. 13) BA axis hyperbolae transversus, f et F foci hyperbolarum oppositarum. Ducatur recta fK utcunque et ex f intervallo BA describatur arcus HG, ut fG = BA. Ex eodem centro f ducatur arcus quicunque alius PK et intervallo GK ex foco F intersecetur arcus PK in M; erit M punctum hyperbolae. In constructione adeo aequationum cubicarum et quadratoquadraticarum hyperbolam parabolae atque ellipsi praefero.

Perfectionis notione ad moralia tractanda opus habeo. Cum enim videam, actiones alias tendere ad nostram aliorumque perfectionem, alias vero ad nostram aliorumque imperfectionem, sensus vero perfectionis voluptatem, imperfectionis nauseam quandam excitet; atque affectus, quibus tandem mens inclinatur vel reclinatur, esse modificationes voluptatis atque nauseae istius: obligationis naturalis genesin ita explico. Quamprimum perfectio, ad quam tendit actio quamque indicat, in intellectu repraesentatur, voluptas oritur, quae efficit ut actioni contemplandae magis inhaereamus. Animadversis itaque boni in nos vel alios redundantis circumstantiis, voluptas modificatur et in affectum transit, quo ipso tandem mens ad appetitionem inclinatur. Atque ex hac obligationis indole omnem praxin moralem satis commode deduco. Inde vero etiam emergit regula generalis seu lex naturae: actiones nostras esse dirigendas ad summam nostri aliorumque perfectionem. Ad hanc quippe, non ad aliam directionem natura humana obligat. Notione adeo perfectionis opus habeo, ut principia in aprico ponantur.

Cum moralia per hiemem docuerim, multa mihi sese obtulerunt, quae non vulgaria videntur; sed ea hic exponere non necessarium judico. Inprimis autem fundamentum et discrimen obligationis civilis a naturali apertius inde docui et limites amoris aliorum certiores constitui, ut nempe demonstrari possit in casu particulari, quinam alteri sit a nobis praeferendus, quando omnibus una satisfieri nequit. Sed cum ad praesentem casum transferrem notionem perfectionis E. V., visa mihi fuit pluralitas observabilium non sufficere; determinatione aliqua adhuc opus esse judicavi, in qua assignanda haereo. Ex. gr. ostendendum mihi est, intellectum divinum esse summe perfectum. Suppono jam, intellectum divinum esse repraesentationem omnium possibilium simultaneam et adaequatam; videoque omnino in eodem plura observari, quam in intellectu alio vel ratione objecti vel ratione modi seu formae limitato. Interim tamen opus mihi esse videtur ut evincam, in intellectu divino omnia observari, quae in intellectu illimitato concipi possunt, et illimitatum esse perfectiorem limitato. Equidem E. V. nunc aliquam limitationem addit, ut nempe observabilia aestimentur ex regularitate; sed quomodo regularitas aestimari debeat, non constat. Ex. gr. unde aestimanda est regularitas intellectus? Mihi videbatur perfectio consistere in pluralitate observabilium in essentia: essentiam vero pro possibilitatis synonymo habeo adeoque ideam essentiae ab idea distinctae possibilitatis non distinguo. Sed ea tamen limitatio non distincte mihi exhibuit omni in casu, quae inde concludere debebam. Alia nunc addere prohibeor. Vale etc.

Halae d. 4 Maji 1715.

LXXXVI.

Leibniz an Wolf.

Mirifice gaudeo Te simul honore et emolumento auctum. Uret ea res nonnihil eos qui scientias quas Tu colis spreverunt, et apud studiosos pariet doctrinae Tuae autoritatem. Interim non dubito quin pro prudentia Tua, quantum licebit, offensiones sis evitaturus.

Non est cur Tu et celeberrimus Hermannus noster dubitetis, quo mittendae sint literae, quae mihi destinantur. Ubicunque sim locorum, sufficit eas mitti Hanoveram, ut recte ad me perveniant. De titulis non multum sum solicitus; quia tamen eo me dignatur honore Dn. Hermannus, ut librum suum inscribere mihi velit, significare ei potes cum multa a me salute, esse me Consiliarium Imperialem Aulicum et Magnae Britanniae Regis Principisque Electoris Brunsvicensis Consiliarium Intimum.

Cum Keilius scribat rustice, ego cum tali homine litigare nolim. Qui sola ejus asseveratione et jactatione moventur, iis frustra scribitur, neque enim rem examinant. Qui examinabunt, videbunt, nullum esse errorem in Schediasmate motuum coelestium, sed phrasin postea a me redditam commodiorem circa vim centrifugam. Utique enim vera sunt et manent, quae ostendi, ex Circulatione Harmonica cum gravitate conjuncta prodire Ellipses Keplerianas. Videbit etiam, qui examinabit, quadraturas Newtonianas jam ex Barrovii et similibus Notitiis derivari potuisse. Ego cogito aliquando rebus refellere hominem, non verbis. Caeterum si methodus differentialis eadem est cum his, quae Newtonus olim dedit in Epistolis, cur suam Methodum Fluxionum, quae utique praeludium quoddam est Calculi differentialis, aenigmate tegere voluit? putavit ergo ipse, rem plane diversam. Dubito an Dn. Bernoullius Keilianam dissertationem viderit. Interim gratias ago, quod monuisti, in quo difficultas esse videatur, et si quid adhuc incidet cujus rationem haberi velles, indica quaeso: alii talia saepe melius pervident, quam nos ipsi. Et ego animadversa Keilii ruditate, nondum ejus schediasma accurata lectione sum dignatus.

Valde probo quae ad praxin commodiorem reddendam pertinent. Itaque Tua applicatio Logarithmorum nova videtur mihi perutilis. Vellem hoc problema solvi posset: Dato uno Numero minore et alterius Numeri majoris Logarithmo, invenire eorum divisorem communem exactum, posito constare aliunde non esse primos inter se, et divisorem communem habere. Pono scilicet alterum numerum esse tam magnum, ut logarithmus quidem ejus commode haberi et tractari possit, ipse numerus autem non aeque. Si hoc problema posset solvi, haberemus Analysin numerorum, seu dato numero non-primitivo, possemus reperire ejus divisores. Et sane possemus obtinere hoc quaesitum, si dato uno minore Numero et alterius Majoris Logarithmo possemus exacte obtinere Residuum divisionis, ponendo Majorem dividi a minore. Hoc enim residuo habito, quod utique ipso Numero minore dato minus, tantum opus foret quaerere numeri minoris dati et hujus residui divisorem communem, qui foret quaesitus. Problema ergo huc reductum erit: Dato Numero minore et dato alterius majoris Logarithmo, invenire exacte in veris numeris integris Residuum, quod prodiret si numerus Major divideretur per Minorem. Pono autem, ut dixi, Numerum Majorem esse tantae magnitudinis, ut nimis laboriosa futura sit ipsius exhibitio et tractatio, Logarithmus tamen ejus commode haberi et tractari possit. Digna haec foret inquisitio ingenio Tuo. Nempe dato Numeri Fracti Logarithmo et ejus divisore, opus est invenire differentiam inter hunc numerum fractum et integrum proxime minorem, etsi ipse numerus fractus aut integer proxime minor ob nimiam magnitudinem non habeantur. Inventa haec differentia per divisorem multiplicata dabit residuum quaesitum.

Verum est, quod ais, Hyperbolas constructionibus problematum solidorum ut vocant esse aptiores, quam Parabolas et Ellipses. Parabolae enim sunt omnes unius speciei, at Hyperbolae specierum infinitarum. Unde major datur copia eligendi quod est aptius. Ellipsis autem omnis est finita, at Hyperbola in infinitum procurrit. Atque haec quidem generatim vera sunt; sed saepe aliae conicae aliis problematibus sunt aptiores, et natura quasi pro iis solvendis factae. Nondum hactenus a quoquam data est apta constructio hujus problematis: A dato puncto ad datam sectionem conicam ducere minimam. Pono autem punctum et conicam esse in eodem plano. In parabola eleganter hoc praestitit Hugenius ope parabolae datae et circuli. Etsi enim problema sit solidum, possunt tamen solida per parabolam datam et circulum solvi. Equidem facile est calculo invenire modum, quo problema hoc in Hyperbola et Ellipsi solvitur per lineam datam, ad quam ducenda est minima, et circulum; sed ex illo calculo commodam derivare constructionem haud facile est. Placet Tua constructio Hyperbolae per puncta; aliae habentur plures itidem faciles. Exempli causa, si secantes transferantur in ordinatim applicatas circuli, seu sumantur in sinibus productis, terminabuntur in Hyperbolam. Sit in figura (fig. 14) arcus AR, secans CRS, sinus XR, compleatur rectangulum SAXH, erunt puncta H ad Hyperbolam, sed ad eam tantum cujus latus rectum et transversum sunt aequalia, posito axe pro diametro. Sed tua constructio dabit Hyperbolam quamcunque.

Postremo non est quod putes in definienda perfectione me a priore sententia discessisse. Explicatio est tantum et illustratio prioris, quod nuperrime scripsi. Cum perfectius dico, in quo plus est observabilitatis, intelligo observationes generales seu regulas, non vero exceptiones, quae potius constituunt imperfectiones. Plus observabilitatis esse in re, est plures in ea esse proprietates universales, plus harmoniae; ergo idem est perfectionem quaerere in essentia, et quaerere in proprietatibus quae ex essentia fluunt.

Miror quod quaeris quid sit regularius, cum jam ostenderim id esse, quod plures praebet regulas seu observationes universales. Nihil est regularius intellectu Divino, qui fons est omnium regularum, et producit systema mundi regularissimum seu perfectissimum et quam maxime harmonicum, adeoque plurimarum observationum universalium capax.

Vides etiam hinc, quomodo voluptatem pariat sensus harmoniae seu observatio consensuum, quia juvat perceptionem redditque faciliorem, et ex confusione extricat. Hinc scis placere consonantias, quia in iis consensus facile est observabilis. Videntur igitur mihi omnia pulcherrime conspirare in theoria et praxi, nec vel minimum esse difficultatis. Consensus quaeritur in varietate, hic placet eo magis, quo facilius observatur, et in hoc consistit sensus perfectionis. Perfectio autem in re ipsa est tanto major, quanto major est consensus in majore varietate, sive a nobis observatur vel non. Huc ergo redit ordo et regularitas. Haec non intellexit Spinosa, quando perfectionem a rebus rejecit, tanquam chimaeram nostrae mentis, sed non minus, imo magis pertinet ad Divinam mentem. Sunt et Bruta cujusdam quasi voluptatis capacia, quia observant consensus, quamvis hoc faciant Empirice, non vero ut nos a priori sic ut rationem reddere possint. Illimitatum esse perfectius limitato, nescio an simpliciter dici possit. Illimitatum est chaos aliquod, sed observatio ejus molestiam afferet, non voluptatem. Si intellectus Divinus aeque bona ac mala produceret, illimitatus maneret, perfectus non maneret. Perfectius est existere ex possibilibus sola meliora, quam indiscriminatim bona et mala aeque existere. Est tamen et intellectus quoad optimum illimitatus in suo genere, quia infinitas producit harmonias.

Finem in moralibus constituo (ut nostri) Felicitatem, quam definio statum laetitiae durabilis. Laetitiam definio praedominium insigne voluptatum. Possumus enim in media laetitia sentire dolores aliquos, sed qui prae voluptatibus parum considerantur, ut si alicubi ambitioso podagra laboranti praeter spem regnum deferatur. Oportet autem ut laetitia sit durabilis, ne forte subsequente majore tristitia sit redimenda. Voluptas porro est sensus perfectionis. Perfectio est harmonia rerum, vel observabilitas universalium, seu consensus vel identitas in varietate; posses etiam dicere esse gradum considerabilitatis. Nempe ordo, regularitas, harmonia eodem redeunt. Posses etiam dicere esse gradum essentiae, si essentia ex proprietatibus harmonicis aestimetur, quae ut sic dicam faciunt essentiae pondus et momentum. Hinc pulchre etiam patet, Deum esse perceptione et quidem maxima praeditum seu mentem summam; alioqui non curaret Harmonias. Quod superest vale et fave.

Dabam Hanoverae 18 Maji 1715.

LXXXVII.

Leibniz an Wolf.

Non dubito quin novissimas meas acceperis. Nunc scribo ob duplicem causam. Primum enim a Te peto curare velis, ut scheda adjecta in Actis Eruditorum recensioni libri Domini Pfaffii adjiciatur. Quod si forte jam recensitus sit, poterit tamen sequenti alicui Mensi inseri.

Deinde notare quaedam volui ad praeclara Tua Matheseos Elementa, in quibus Arithmeticen forte inspiciens ab initio statim observavi calami vel typographi lapsu pag. 21, pro B unum poni A unum. Aptius mens mea sic exprimetur: Si quis dicat, A esse H, et B esse H, et A et B esse idem, eo ipso dicit unum H, ita ut definitio unius reducatur ad definitionem ejusdem.

Quod appellas probationem, qualis est per abjectionem Novenariam, Germani eine Probe, malim latine appellari Examen; et potest Examen definiri tentamen refutationis. Sane etsi tentamen refutationis non succedat, non tamen sequitur id quod examinatur esse verum, nisi quis omnia vel saltem sufficientia tentamina instituerit. Interim utilia sunt examina, si sint facilia et plerosque errores excludant. Non adjecisti usum Examinis per Novenarii abjectionem in Multiplicatione et Divisione, ubi maxime utile est. Ego reperi abjectionem Undenarii aeque propemodum facilem esse ac Novenarii, et si conjungantur, rarum fore errorem qui non detegatur.

Numerum in genere, qui integrum, fractum, surdum et transcendentem comprehendat, potuisses etiam definire. Est scilicet nihil aliud quam Homogeneum unitati. Nempe si unitas respondeat rei A, Numerus respondebit rei B, quae sit homogenea ipsi A.

Scripsit ad me quidam Dn. Farenheit *), qui se Tibi notum esse testatur, sed non indicat, quomodo ei responderi possit.

Perplacent quae habes p. 29, ubi demonstras ad mentem meam, quae vulgo pro Axiomatibus habentur. Cum olim Elementa Calculi demonstrarem, reperi (quod videtur esse contra n. 86 Tuae Arithmeticae) non semper verum esse hoc: Si $ab = ac$, sequitur $b = c$, etsi hoc semper verum sit: Si $b = c$, etiam erit $ab = ac$. Multa alia in rebus, quae vulgo clarissima habentur, observanda essent, si ad vivum resecarentur, quibus neglectis errores etiam in praxi oriuntur.

Quod superest vale etc. Dabam Hanoverae 11 Jul. 1715.

*) Aus einem Briefe Wolf's geht hervor, dass es derselbe ist, der das Farenheit'sche Thermometer construirt hat. Er beschäftigte sich damals mit der Anfertigung eines Perpetuum mobile.

LXXXVIII.

Wolf an Leibniz.

Keilius consueta rusticitate in Transactionibus Anglicanis suggillat solutionem Bernoullianam problematis inversi de vi centrali, quam in Commentariis Academiae Regiae Scientiarum A. 1711 exhibuit, narrante amico. Insolescere videtur, postquam sibi persuadet, ipsi responderi non posse: responsionem enim postulaverunt a me Diarii Hagiensis Collectores. Unde consultum judicarem, si cui novitio tela suppeditarentur, quae in hominem insulsum vibraret.

Quae de perfectione rerum ad me scripsit E. T., ea nondum satis digerere potui.

Halae Saxonum d. 28 Jul. 1715.

Leibniz hat hierzu bemerkt: Nescio an mihi conveniat respondere Keilio, qui scribit ruditer et inciviliter. Cum talibus conflictari meum non est. Volo Antagonistam ita scribere, ut disputatio inter nos sit cum voluptate conjuncta. Si qui ex silentio meo sinistrum judicium capiunt, eorum judicium parum moror.

Suppeditavi modum ostendendi demonstrationem Keilii pro vacuo esse inanem.

LXXXIX.

Wolf an Leibniz.

Litterae E. T. recte mihi traditae sunt, tum priores in quibus Keiliana temeritas notabatur, tum posteriores, quae opus Hermannianum dignis encomiis praedicant.

Postquam hisce diebus ex Anglo quodam, qui me inviserat, intellexi, Keilium ob mores sceleratos (cum studiosis enim curae ac fidei ipsius commissis cauponas et lupanaria frequentavit, lucrum insigne in ebrietate et fornicatione ponens) ab officio Professorio remotum id agere, ut controversiis inclarescat morum pravitate infamis, nec mihi consultum videtur cum istiusmodi homine congredi et litem, quae plerisque videbitur, de lana caprina movere. Neque hoc rerum statu probare possem, si E. T. ad objectiones hominis insulsi responderet. Interim tamen e re Reipublicae litterariae mihi videretur, si Commercium aliquod epistolicum E. T. in publicum prostaret.

Opus profundae eruditionis Hermannianum cum in titulo proferat annum 1716, mensi demum Januario anni sequentis inseri poterit. Cum illud munere autoris celeberrimi ex nundinis Lipsiensibus exspectem, ipsum mihi nondum comparavi: visa tamen recensione ab amico id in usum aliquot horarum petii et plagulas duas priores, etsi alteram non integram, perlegi. Videtur tamen mihi in nonnullis solita desiderari ἀκρίβεια, quae in opere tantae ac tam diuturnae meditationis requirebatur. Nam theorema de pondere massae proportionali non videtur mihi demonstratum, quia tota vis demonstrationis redit ad cor. prop. 1. §. 29, quod tamen ex illa propositione non sequitur, sed partem propositionis indemonstratam ampliat. Nimirum non aliud evincitur, quam causam gravitatis non agere in solam superficiem ab horizonte aut, si mavis, a centro Telluris aversam: unde quidem inferri potest, eam agere etiam in partes interiores, non tamen liquet, quod agat in omnes. Multo minus autem sequitur quod in singula elementa aequalia aequali vi agit, ut taceam, nec ideo effectum in singulis fore aequalem, quia vis applicata eadem. Immo satis apparet, ipsum ingeniosissimum Autorem pro ea, quae ipsius est, perspicacia advertisse, corollarium suum non sequi ex propositione sua, unde cum vellet ut lector hanc consequentiam sibi persuaderet, addidit verba (quae alias superflua forent) nullius corporis pondus in omni positione etc., quod si demonstrasset, non opus fuisset theoremate primo. Similiter vacillare mihi videtur demonstratio theorematis

Torricelliani §. 43, quia ibi supponitur, si vis aliqua agat secundum rectam CE (fig. 15) quantitate ut CE et aequipolleat viribus secundum CD et CB agentibus quantitatibus ut CB et CD; completo parallelogrammo ABCD, rectam CE productam fore diagonalem ipsius CA ipsique CE aequalem, cujus ipse tantum inversam §. 41 demonstravit. Neque theorema Archimedeum sine vitio demonstratum: sed circulus re vera admittitur. Etenim ex citationibus apparet, in demonstratione tandem supponi lemma §. 44. Quantum vero ego judico, in demonstratione lemmatis supponitur theorema Archimedeum. Mihi sane non constat, quod quae ibi supponuntur, sine isto theoremate ostensa hactenus fuerint. De reliquis mihi judicare nondum licet, quia legere nondum vacavit. Haec vero non eum in finem scribo, ut invido dente arrodere velim opus encomiis maximis dignum; etenim antequam prodiret, publicis idem exornavi cum in Elementis meis, tum in Diario Hagiensi: sed ut appareat, ἀκρίβειαν methodi perperam ab iis, qui altiora sapiunt, pro re puerili haberi. Quodsi vero E. T. crediderit me in his animadversionibus a vero aberasse, grata mente agnoscam, si errores proprii, quos alteri tribuo, redarguantur. Interim quotidie, quantum per alia negotia licebit, in lectione operis doctissimi pergam et quae mihi dubia visa fuerint annotabo, ut in veritatibus tanti momenti confirmer, iisque olim, ubi plus otii nactus fuero, ad alia forte detegenda uti possim etc.

Halae Saxonum d. 1 Octobr. 1715.

XC.

Leibniz an Wolf.

(Im Auszuge)

Audiveram ego quoque Keilii mores non admodum laudari, sed ignorabam eo rem processisse, ut ab officio fuerit depositus.

Fortasse id contigit ante multos annos, et jam censetur expiatum; idque ex eo suspicor, quod eum intelligo nunc in locum Walleri demortui factum esse Secretarium Societatis Regiae secundum et Hallejo adjunctum, quod suis in nos latratibus videtur apud Newtonum et alios ejus factionis meruisse.

Recte mones, Dn. Hermannum videri in demonstrando aliquando procedere indulgentius quam par sit. Praestat assumere propositiones quasdam per modum postulati, ut fecit Euclides, quam insufficienter demonstrare. Ipsemet eum monui, theorema de pondere massae proportionali non esse demonstratum, nam modo materia aequalis gravitatis specificae per totum volumen sit aequabiliter distributa, situs, a quo ipse argumentum petit, nullum discrimen faciet.

Demonstratio theorematis Robervalliani, Torricellio propositi, fortasse non difficulter perfici posset. Theorema Archimedeum accuratius ostendi merebatur. Sane si assumamus compositiones tendentiarum pro sufficiente aestimatione virium, fateor hinc facile sequi theorema Archimedeum; sed ista assumtio rigorose demonstrari secundum Geometrarum methodos non potest, et succedit tantum in viribus mortuis, non in vivis, nisi singulari quadam cautela. Itaque bene Archimedes demonstrationem aequiponderantium aliunde petivit. Nescio etiam, an Dn. Hermannus rigorose satis demonstravit, quam in appendice probare aggressus est, demonstrationem Existentiae Centri gravitatis in extenso figurae cujuscunque, et alia quae a Galilaeo, Torricellio et aliis demonstrata fuisse negat, suoque modo demonstrare aggreditur. Mihi ista examinare non vacat; itaque ne alios decipiamus, ex monitu tuo verba quaedam in Recensione mutanda vel moderanda putem hunc (si Tibi videtur) in modum: In fine §. paucos habemus libros etc. poni potest: caeterum brevitatis causa quaedam interdum in demonstrationibus supposuisse videtur, quae in eorum gratiam, qui in his non satis sunt versati, fusius doceri mererentur. In §. librum primum etc. pro inopinato incidit ponatur: inopinate se incidisse ait, et pro verbis: theorema demonstrat ex quo ponatur: theorema exhibet ex quo, et pro verbis: 7 Sept. 1693 editum ponatur: 7 Sept. 1693 editum et demonstratum. Et in §. sectione secunda pro: hanc regulam generalem ostendit §. 141, ponatur: hanc regulam generalem profert in omni hypothesi §. 141. Et in §. tractat etiam etc. versus finem pro: generaliter in omni hypothesi probatur, poni poterit: generaliter in omni hypothesi constituitur. Et §. antequam finiat etc. versus finem pro: autor noster hic probat, ponatur: autor noster hic approbat. Et in §. sectio tertia pro: autor ostendit §. 439, ponatur: autor docet §. 439. In §. in appendice sub initium pro: aliter quam Wallisius probat, ponatur: aliter quam Wallisius constituit. In fine ejusdem §. pro: at autor noster demonstrat, poni poterit: at autor noster modum ostendit, quo ex prioribus hoc demonstrari posse judicat.

XCI.

Wolf an Leibniz.

Multis adhuc negotiis impedior, ut de resolutione problematis cogitare non possim. Tentavi equidem eandem duobus modis et in aliquam incidi; sed in utraque methodo prodeunt duae aequationes locales ad hyperbolam. Per duas autem hyperbolas constructionem elegantem jam dedit van Kinckhuysen. Interea animadverti, perpendicularem ex puncto dato ad lineam quamcunque in plano descriptam ductam esse omnium minimam, quod de recta sola ostenditur in elementis, atque adeo reduxi problema ad inventionem normalis a puncto dato ad sectionem conicam datam ducendae: quo in casu calculo differentiali opus non est. Sed, ut dixi, eaedem hic prodeunt quas obtineo aequationes, dum E. T. methodo de maximis et minimis utor. Quamprimum vero vacabit (id quod tamen ante finem Januarii vix accidet), serio de resolutione cogitabo.

Rogatus ab Hermanno, monueram et ego me circa demonstrationem theorematis de gravitate massae proportionali haerere. Rescripsit ille, se mordicus eam defendere nolle, quamvis non deessent, quae si adderentur, probationem saltem probabilitatis summae speciem habituram. Addam tamen, quae in posterum, ubi ad lectionem operis redire licebit, dubia alia mihi suboritura, cum ea sibi grata fore ultro significaverit.

Quod E. T. Elementa mea pariter ac officia, quae a me proficisci possunt, sane tenuia non displiceant, grata mente agnosco et praedico, tantum abest ut me aliquam gratiam mereri arbitrer. Vale etc.

Halae Saxonum d. 19 Dec. 1715.

XCII.

Leibniz an Wolf.

Ita est ut observas: perpendiculares ad curvam sunt certo sensu minimae ex puncto dato. Certo sensu, inquam, non absolute, ut ad rectam. Nam opus est ut punctum sit extra curvam seu a parte convexa; alioqui potius maximae sunt. Et ne sic quidem res absolute efferri potest: nam sunt quidem maximae minimaeve sui ordinis seu inter vicinas, sed non omnium quae ad curvam duci possunt. Nam cum curva habet plures ordines seu quando eae quae ad ipsam duci possunt ex puncto dato plus semel crescunt vel decrescunt, plures maximae minimaeve duci possunt.

Et rem ita acceptam putem demonstrari posse. Veteres, quam nos non male perpendicularem vel etiam Maximo-miniman dicimus, appellabant μοναχὴν, unicam seu solitariam, ubi geminae vel etiam plures in unam evanescunt. Cui considerationi suam de radicibus aequalibus Methodum Cartesius inaedificavit.

Miror cur Kinkhusius problema de Maximo-minima ad Conicam per binas Hyperbolas solverit, cum facillime solvatur per unicam Hyperbolam combinatam cum Conica data, quae eam secet in illo ipso puncto aut potius (persaepe) in illis ipsis punctis, in quo aut quibus Minimae ex puncto dato Conicae datae occurrunt. Sed deprehendere mihi olim visus sum, non posse dari generali constructione circulum qui curvam conicam datam secet in omnibus illis punctis, ubi ex puncto dato eductae minimae ipsi occurrunt. Et hoc est quod problema reddit paulo difficilius. Nihilominus puto problema solvi posse per Circulum et Conicam datam. At puncta, in quibus circulus conicae occurret, non erunt illa ipsa, in quibus Conicae occurrunt Minimae ex puncto dato, sed quae inservient tamen ad illas determinandas.

In propositionibus Dn. Hermanni admitto ego gravitates ad sensum esse massae proportionales in corporibus homogeneis, sed non inde sequitur quamlibet partem gravis seu in ejus volumine comprehensam esse gravem; sufficit enim partes graves et non-graves esse aequabiliter distributas per volumen. Dn. Hermannus hic nimis Anglis obsecutus videtur. Sed illi hoc parum grate agnoscunt. Ajunt enim jam Keilium nescio quas in eum stricturas edidisse. Isti homines alios ferre non possunt. Urit eos quod responsione ipsos non dignor. Itaque crambem commercii in Transactionibus recoxerunt et versionem transactionis inseri curarunt Diario Hagiensi literario. Et quo magis me ad respondendum permoverent, etiam mea principia Philosophica ibidem aggressi sunt, ut audio. Sed ibi quoque dentem solido illident. Serenissima Princeps Walliae quae Theodicaeam meam legit cum attentione animi eaque delectata est, nuper pro ea cum quodam

Anglo Ecclesiastici ordinis accessum in aula habente disputavit, ut Ipsa mihi significat. Improbat illa, quod Newtonus cum suis vult, Deum subinde opus habere correctione suae machinae et reanimatione. Meam sententiam, qua omnia ex praestabilito bene procedunt nec opus est correctione, sed tantum sustentatione Divina, magis perfectionibus Dei congruere putat. Ille dedit Serenitati Suae Regiae schedam Anglico sermone a se conscriptam, qua Newtoni sententiam tueri conatur meamque impugnare; libenter mihi imputaret Divinam gubernationem tolli, si omnia per se bene procedant, sed non considerat Divinam gubernationem circa naturalia in ipsa sustentatione consistere nec debere eam sumi ἀνθρωποπαθῶς. Respondi nuperrime et responsionem meam ad Principem misi. Videbimus an ille sit replicaturus. Gratum est quod materiam antagonista attigit, quae non resolvitur in considerationes Mathematicas, sed de qua ipsa Princeps facile judicium ferre potest. Vale et fave.

Dabam Hanoverae 23 Decembr. 1715.

P. S. Felicia festa precor.

XCIII.

Wolf an Leibniz.

Ita est, quod occuper in Dictionario Mathematico conscribendo: quem laborem nolens volens suscipere debui rogatu Menckenii, commodis Soceri sui velificaturi. Sed cum jam litteram T fere absolverim, spero fore, ut propediem ad umbilicum rem perducam. Tomi tertii Matheseos mentionem injeci in praefatione secundi in gratiam bibliopolae metuentis, ne forte liber in Batavia recudatur: sed de eo vix cogitabo. Opto enim otium, ut de promovendo Philosophiae studio serio mihi cogitare liceat, quo fides oculata convincat incredulos, Mathesin ad Philosophiam rectius tractandam praeparare animum eidemque insueta suppeditare adminicula. Postquam Professio Physices mihi nuper demandata fuit, cogitandum etiam erit de Physica per experimenta promovenda et Mathesi ad eam applicanda. Animus inprimis est, per aestatem nonnulla circa vegetationem experiri. Biennium fere effluxit, cum in rationem inquirerem, cur subinde ex unico granulo frumenti ingens aristarum numerus enascatur, tumque in avena sumto experimento didici, si nodi aristae terram contingant, singulos nodos radices agere, et binas aristas novas protrudere, ita ut hac ratione vegetatio continuo procedat, etiamsi aristae priores ad maturitatem pervenerint: qua ratione ex unico granulo enatae sunt granorum avenae myriades nec nisi frigus vegetationi finem imposuit. Unde didici, causam genuinam non esse liquorem quendam, in quo frumentum maceratum plura evolvat, quae in ipso continentur quam vulgo fieri assolet. Haec experimenta studiosius repetere aliaque addere libet, ac imprimis agitabo, num aliquid inde in usum humanum emolumentum redundare possit. Phases eclipseos solaris anni superioris ab Heckero Dantisci observatae in Actis anni praesentis mense Januario jam leguntur, quamvis nomen Observatoris non fuerit expressum, et cum schematismus, tum alia quaedam notatu digna sint omissa. Notata etiam sunt nonnulla de observatione Warsaviensi. Vix itaque fieri poterit, ut denuo, quamvis melior, inseratur. Litteras ad Dn. Teuberum, quamprimum dabitur, mittam: heri enim ex itinere quodam redux eas demum accepi. Quae Keilius in Actis Anglicanis contra Philosophica E. T. objecit, nullius sunt ponderis, immo ne nomine objectionis digna: recenset enim tantum nonnulla, in quibus E. T. dissidet a Newtono, quasi vero Newtoniana adeo sint manifesta, ut erronea censenda sunt, quae cum iis non conveniunt. Miror autem, quod homo insulsus asserere non erubescat, The editors of the Acta Eruditorum have hold the World, that Mr. Newton denies, that the cause of gravity is mechanical... and Mr. Leibniz hath accused him of making

Gravity a natural or essential property of bodies, and an occult quality and miracle. And by this sort of railery they are perswading the Germans, that Mr. Newton wants judgment, and was not able to invent the infinitesimal method. Diserte enim Newtonus ait, causam gravitatis non agere pro quantitate superficierum particularum, in quas agit, ut solent causae mechanicae, et vi spiritus cujusdam subtilissimi corpora crassa pervadente et in iisdem latente particulas corporum ad minimas distantias se mutuo attrahere etc. Immo ipsimet Angli (forsan ipse Keilius) in Diario Hagiensi p. 217 scribunt de Newtono, il demontre, que la gravité n'est pas purement mechanique. Sed quam sit perfrictae frontis in asserendis manifesto falsis, vel exinde apparet, quod asserat, Brounkerum primum dedisse quadraturam Hyperbolae per seriem infinitam, quam paulo post per Wallisii divisionem demonstraverit Mercator, cum tamen in Transactionibus Anglicanis A. 1668 mense Martio dicatur, Mercatoris Logarithmotechniam jam sub praelo sudare mense autem Aprili Brounckeri quadratura exhibeatur et Wallisius, visis Brounkerianis, in iisdem mense Augusto litteris ad Brounkerum datis Logarithmotechniam et inprimis quadraturam hyperbolae Mercatoris valde probet atque commendet, quemadmodum sub voce series infinita in Dictionario Mathematico notavi. Historica enim inspergo et sedes doctrinarum indico, ne in nudis nominibus exponendis cum taedio sit versandum. Vale et fave etc.

Dabam Halae d. 15 Martii 1716.

P. S. Observationem Heckerianam cum aliis, quae adhuc penes me sunt, data occasione remittam.

XCIV.

Leibniz an Wolf.

(Im Auszuge)

Gaudeo etiam physicam professionem Tibi demandatam esse, et nosse velim qua id ratione actum: nam Stahlium sibi servasse putaram, quem Gundelsheimius odio Hofmanni Berolinum attraxerat. Nescio an fama praxeos speculationibus respondeat. Quia physicis admotus es, optem ut de eo cogites ante omnia, quod post virtutem unum omnium maxime necessarium est, de Medicina id est sanitate tuenda vel recuperanda. Et quia non satis de causis constat, vellem incipi ab effectis, id est observationibus potissimis. Suspicor medicamentum generosa prodesse semivenenatum qualitate, id est irritando, nec Corticem Peruvianum febris typum tollere, nisi quia valde perturbat. Non sunt spernenda quae Regius, Cranius aliique Medici Batavi Cartesiani protulere, sed sufficientia non sunt, nec verum est omnia mala ab obstructionibus nasci, nam et humores admodum immutari arbitror. Et in humoribus, crassiores intelligo, puto sitas esse magis remotas morborum causas, in subtilioribus per solida sparsis propiores.

Suadeo ut aliquando breviora quaedam Medicinae compendia consulas, velut Walaei (cum notis Welschii Augustani), Waldschmidii patris, Oligeri, Jacobai. Tschirnhusius etiam noster non spernendus est, etsi in judicando sit paulo promtior, sed hoc, si modeste facias, non est improbandum in re tam conjecturali. Nescio an legenda dederim, quae aliquando inter me et Stahlium Canstenio mediatore sunt disputata, etsi pauca controversiae nostrae ad medicinam pertineant. Quia de vegetatione cogitas, mittam alia occasione (ne nunc nimius sit fasciculus) quae Leeuwenhoekius observata in eam rem singularia nuper ad me misit.

Quid de Ratisbonensibus promissis sentis? suspicor inesse aliquid aequivocationis, etsi possit subesse quod non spernas.

XCV.

Wolf an Leibniz.

Gratias ago quas possum et debeo maximas, quod E. T. nuper me invisere dignata fuerit. Cl. Hermanno jam ante significavi, problema Anglorum potissimum causa propositum esse: dumque respondit, se a publicanda solutione sua abstinere velle. Interim tamen non video, quid obstet, quo minus publice significetur, ipsum solutionem habere, sed in gratiam aliorum publicationem differre.

Cum ex nuperrimo discursu intellexerim, E. T. non perlectam esse methodum tangentium Barrowii; ut judicare detur, quaenam cognatio ipsi cum calculo differentiali intercedat, lubet eam exemplo parabolae illustrare.

Jubet ergo Barrowius, arcum Mm assumi indefinite parvum (ita enim loquitur) et reliqua fieri, uti notum. Vocat (fig. 16) $mR = a$, $MR = e$, $PT = t$. Unde si $AP = x$, $PM = y$, erit $Ap = x + e$, $pm = y + a$, et posita parametro $= r$ ex natura parabolae $y^2 + 2ay + aa = rx + re$. Jubet hinc abjici aequalia y^2 et rx, deinde potentias indefinite parvorum, qualis hic aa, et in aequatione residua $2ay = re$ pro a substitui y, pro e vero t, quia hae quantitates sibi mutuo proportionales. Et sic habetur $2yy = rt$, sive $t = 2yy : r$.

Hoc tamen calculo non utitur in quadraturis, sed ad eas absolvendas methodo Gregorii a S. Vincentio demonstrat theoremata quaedam, quae nullo negotio ex calculo differentiali sequuntur: veluti si (fig. 17) AMC normalis sit MR et curvae LNO semiordinata $PN = PR$, fore spatium $APNL = \frac{1}{2} PM^2$; solidum ex MP in PN sub altitudine AP esse $= \frac{1}{3} PM^3$, immo in genere ex P^n in PN $= \frac{P^{n+2}}{n+2}$ etc. Similiter si fuerit (fig. 18) $QN = PT$ subtangenti, fore spatia RQN et AMP aequalia. Sane integras lectiones Geometricas Barrowii quas tanti faciebat Tschirnhusius, veluti ea continerent, unde ad altiora pateat progressus, ope calculi differentialis ad paucas lineas reducere licet, primo statim intuitu manifestas. Tschirnhusius autem calculo Barrowiano utendum esse censebat etiam in altioribus, monstravitque aliquando, uti nuper dixi, exemplum in evolutis curvarum determinandis: sed calculus erat valde perplexus, ut adeo eum non magni fecerim, verum sponte oblivioni tradiderim. Mihi in istis lectionibus placet, quod generalia curvarum symptomata ex notionibus generalibus demonstraverit. Et forte non inconsultum foret, scribere quoque elementa curvarum, qualia Euclides dedit in rectilineis, in quibus generalia et utilia theoremata continuo nexu demonstrarentur. Non ingratum foret, quin immo longe gratissimum, si E. T. mihi significare dignaretur, qualia et quaenam in istiusmodi elementis pertractari deberent. Forsan enim in hoc argumento utiliter ego versarer. Quod superest, vale etc.

Dabam Halae Saxonum d. 19 Jul. 1716.

XCVI.

Leibniz an Wolf.

In Barroviana Tangentium quam excerptam transmisisti methodo nihil invenio quod non jam sit Fermatio (autori methodi de maximis et minimis), Robervallio, Slusio aliisque usurpatum. Itaque cum Barrovianas lectiones vidi (Anno Domini 1675 quantum recordor), nihil in hac methodo attentione dignum reperi, praesertim cum meam uberiorem jam haberem. Nervus veri calculi differentialis est, unamquamque quantitatem habere sua elementa, et elementum tanquam affectionem quandam seu functionem quantitatis ipsius considerari posse, ne literae incognitae praeter necessitatem multiplicentur, atque inde certa quadam calculandi ratione pendere, algorithmo proprio comprehendenda, idque locum habere, sive elementa sint comparabilia quantitatibus, ut in seriebus numericis seu quantitatibus discretis, sive incomparabiliter minora, ut in quantitatibus continuis, ubi compendium est majus. Dn. Tschirnhusius de mea methodo dicere solebat, esse compendium compendii, sed ni fallor plus quam compendium praebet, etiam Hugenio judice, maxime utique idoneo.

Ad rem curvarum generatim tractandam etiam phorographia generalius tractanda foret.

XCVII.

Leibniz an Wolf.

(Im Auszuge)

Angli qui subitam solutionem minati erant, nunc quantum hactenus intelligo silent et ut arbitror quaerunt adhuc viam methodumque, qualem ego primus olim detexi et per literas Dn. Joh. Bernoullio significavi, qui ea praeclare usus est ad hoc problema; neque enim vulgaris ars differentiandi, qualem post me publicavit Hospitalius, hic sufficit. Ubi mihi post finitos historicos labores nonnihil temporis superfuerit, spero adhuc dare aliquid magni momenti ad promovendam Scientiam infinitesimalem ultra ea quae Newtoniani hactenus vel ex suis vel ex nostris norunt.

Russis *) subvenire etiam absentes possumus et melius fortasse quam praesentes, cum positis elementis disciplinarum qualia

*) Wolf hatte einen Antrag erhalten, nach Russland zu kommen, und hatte gegen Leibniz die Absicht ausgesprochen diesem Ruf zu folgen.

ego meditor vel potius animo designo a Te potissimum et paucis aliis Tui similibus conficienda. Puto autem id agendum inter alia, ut Veterum phrases et dogmata quantum commode retineantur, quo intelligantur melius scripta anteriorum; neque enim non necessariam in vocabulis artium innovationem probo, quae nunc passim invalescit audacia ac non raro etiam ignorantia recentiorum quorundam haud satis vetera vel curantium vel silentium. Quae res confusionem..... parit, ut qui hodie sic frena sibi laxant, nec ab aliis nec invicem intelligantur. Ego certe cum nuper Rudigeri (?) opus novum inspexissem, vidi labore et studio mihi opus fore ut intelligere possem, quae intellecta vereor ne inania deprehendantur.