Math.
#3.50

Thomas Taylor

MENELAI Alexandrini

SPHÆRICORUM

LIBRI III.

Quos olim, collatis MSS. *Hebræis* & *Arabicis*, Typis exprimendos curavit Vir Cl. Ed. HALLEIUS L.L.D. R.S.S. & Geometriæ Profeſſor Savil. *Oxonienſis*.

Præfationem addidit
G. COSTARD, A. M.

OXONII,
SUMPTIBUS ACADEMICIS,
MDCCLVIII.

BENEVOLO LECTORI.

EUCLIDEM, qui Mathematicorum Agmen ducit, à Viro Doctiſſimo Davide Gregorio, Aſtronomiæ Profeſſore Saviliano longe Celeberrimo A.D. 1703. editum, ſequebantur Apollonii Pergæi Libri de *Sectione Rationis & Spatii*; quos conclamatos habitos, tandem ex Arabico MS. Latine verterat, ac reſtituerat A.D. 1706, Vir omni Laude major Edm. Halleius, Gregorii Collega conjunctiſſimus. * Anno proxime ſequenti, Auctorem hunc exceperunt Theodoſii Sphærica, quorum Editionem curavit Joſ. Hunt, Collegii Balliolenſis Magiſter Digniſſimus.

Preli Oxonienſis exornandi Studio, ad hunc modum excitato, A.D. 1710 ſequebatur Apollonius Pergæus, cum Pappi Alexandrini Lemmatibus, & Eutocii Aſcalonitæ Commentariis locupletatus. His accedebat Serenus Antiſſenſis de Sectione Cylindri & Coni. Horum Editionem curavit Vir ſummus, ſupra memoratus, Edm. Halleius.

Quo Conſilio, & quibus hortantibus, Opus illud nobile ſuſcepit, ipſe ſatis inter præfandum aperuit. Ejuſdem Studiis & Vigiliis *Menelaum* hunc noſtrum debet Reſpublica Mathematica, quem, (licet eo ipſo curante Typis Academicis *integrum* expreſſum) in Lucem nondum prodiiſ-

* A. D. 1707.

ſe in Cauſa fuiſſe dicitur, quod alium ſimilis Argumenti Auctorem Comitem adjungere in Animo habuiſſet Editor celeberrimus, qui tamen interea Fatis conceſſit, nec ſatis pro comperto habemus quemnam ex Antiquis Mathematicis cum Eo una edendum decreverat.

Optandum foret ut Halleius ipſe (qui ſolus potuit) Erudito Orbi præfando expoſuiſſet quo Conſilio, & quibus Auxiliis Codicum MSS, in Auctore noſtro reſtituendo uſus fuerit, ſed cum hoc Ei per Fata (heu nobis quam luctuoſa!) non licuerit, nos *indignum* rati Geometram adeo inſignem diutius Clauſtris concluſum deliteſcere, atque Orbi Literario *iniquum*, Theſaurum hunc Scriniis noſtris reconditum tamdiu invidiſſe, ſtatuimus *Menelaum*, licet nullo Satellitio ſtipatum, e Clauſtris & Tenebris in Lucem tandem proferendum, omnibus bonarum Artium (præſertim Antiquarum) Cultoribus rem gratam, uti ſperamus, futuram.

Quod ad Auctoris Noſtri Ævum, conſtat eum Anno Trajani Imperatoris primo, ſive a *Chriſto* nato 97, Romæ Sideribus obſervandis vacâſſe. Unde Ptolemæo priorem fuiſſe patet, qui Obſervationes [1] ejus quoque memorat, & cum ſuis confert, & a quo denique, quicquid de Sphæricis Triangulis tradit, hauſiſſe contendit Merſennus. [2]

Præter Libros hos tres, ſex alios *de Subtenſis* ſcripſiſſe fertur, [3] vel Bibliothecis latitantes, Verſionibus ſaltem *Arabicis*, aut *Hebraicis*, vel Temporum Injuria omnino deperditos.

1 Syntax. pag. 170. 171. Edit Baſil. 1538. 2 Præfat. in Menelaum. 3 Ricciol. Almageſt. Nov. in Script. Catalog.

Scripſit quoque de Zodiaci Signis maximo Tempore orientibus, ut teſtatur *Pappus Alexandrinus*;[4] ſed Liber periiſſe videtur.

Librum inſuper *Menelao* tribuit *Abulfaragius*,[5] تمييز الاجرام المختلطة *De Diſtinctione (Reſolutione) Corporum mixtorum*, modo ſana ſit Lectio, vel non deceptus Auctor, pro Gentis & Sæculi Genio, ſatis diligens.

An Noſter is ſit *Menelaus* cujus Mentionem fecit *Plutarchus* in Libello de *Facie in Orbe Lunæ*, non liquet. Ratio ſane Temporis & Argumenti minime adverſatur.

Textus *Græcus Menelai* intercidit,[6] vel ſaltem nondum Lucem vidit. Quibus itaque Subſidiis inſtructus ad Auctorem edendum Noſter ſe accinxit, paucis reſtat dicendum.

Traductio hæc ex Codice *Hebræo* facta dicitur.[7] Sciendum eſt itaque, in inſtructiſſima Bibliotheca *Bodleiana* ſervari duos Codices *Hebraice* Manuſcriptos, quorum unus in Catalogo eſt *Hunting*. 6303. 557. Continet *Euclidem*, ſaltem Libros 6 priores cum 11mo. & 12°. tum Theodoſium, Menelaique Sphæricorum Libri primi Partem. Deſinit enim in Prop. 33. nec quidem eo tenus habet omnes Figuras deſcriptas, Spatiis nonnullis relictis, iiſdem inſerendis aptis. Titulum præ ſe fert ספר מילאוס בתמונות הכדוריות העתקת ר׳ אסחק בן חנין i. e. *Codex* Menelai *de Figuris Sphæricis ex Verſione* R. Iſaaci Filii Honaini.

4 Collect. Mathemat. Lib. 6. Prop. 56. 5 Hiſt. Dyn. p. 42. 6 Vid. Schol. Prop. 12. L. 3. hujus, & Geſner. Bibliothec. p. 510. 7 Vid. Pag. 68. hujus.

Quod

Quod ad Isaacum hunc Honaini Filium, Ætatem ejus ad Sæculum 13 primo retulit *Wolfius.*[8] Sed postea seipsum Erroris arguens, Sæculo 9 vixisse fatetur. "Cum enim, inquit ille, Pater Sæ-"culo 9 medio claruerit, Filium non multo re-"centiorem necesse est." Et recte quidem; nam claruit Pater, Teste *Abulfaragio,*[9] regnante *Motawaccelo,* qui interfectus est An. Heg. 247. (Xti. 861.) Duos habuit Filios, Davidem nempe & Isaacum. David Artem medendi professus est; Isaac vero noster خدم على الترجمة وتولاها واتقنها واحسن فيها وكانت نفسه اميل الى الفلسفة i. e. vertente Cl. Pocockio,[10] "*Interpre-"tationi inserviit, eique Operam navans, solide opti-"meque præstitit: fuitque Animo in Philosophiam "propensiore.*" Linguam Græcam calluisse non constat. Traductiones itaque suas ex Lingua Arabica, vel Syriaca factas censendum est; quod satis, ut opinor, monere videtur Bartoloccius.[11] "R. Isaac Ben. Honain, inquit, & R. Moses "Ben Samuelis, Ben Judæ, Aben Tibbon, quin-"decim Libros Elementorum Euclidis ex Lingua "Agarenica in Linguam Hebræam transtulerunt, "quos olim Ibn Korra ex Græco Agarenos fece-"rat." Nec contra facit Bar Hebræus,[12] a quo, Patrem ejus Honainum Græce scivisse dicitur, Filio, in hoc Genere Laudis, (modo talem consequutus esset) minime prætereundo.

8 Bibliothec. Heb. Vol. 3. p. 562. 9 Hist. Dyn. p. 171. 10 Hist. Dyn. p. 174. 11 Bibliothec. Rab. Part. 3. pag. 900. 12 Asseman. Bibliothec. Orient. Tom. 2. p. 271. De Librorum Græcorum Interpretibus Arab. præcipue Philosophiam spectantium vid. Hottinger. Smeg. Oriental. L. 3. part. 2. pag. 216. Nec dubitandum est, quin excussis Bibliothecis, alios, & forsan præstantiores invenias.

Codex

Codex alter, & quo, Indiciis quibuſdam inductus, Uſum præcipue Halleium credo, eſt in Catalogo, *Hunting*. 6270. 524. & continet *Theodoſium*, *Menelaum*, *Thabetem Ebn Korra*, & *Ebn Aphla* de Sphæricis. Scripta duo poſtrema, Commentarii, vel Supplementi Vices gerunt in priora. Et hæc duo forſan, ob Argumenti Similitudinem vertere, *Menelao*que ſubtexere, in Animo habuerat Vir ad magna quævis natus Halleius.

De Thabete Ebn Korra[13] monere in Rem erit, inſignem eum fuiſſe Geometram, qui, Teſte *Abulfaragio*,[14] multa ſcripſit in Diſciplinis Mathematicis, Medicina, & Logica; de Religione quoque *Sabiorum*, quorum Sectæ Nomen ſuum dediſſe fertur. Gratia multum pollebat apud Imperatorem *Almotadedum*,[15] qui Regnum auſpicatus eſt Ann. Heg. 279. (X^ti^. 892.)

Quo vero Sæculo vixerit (ابن افلح) Ebn Aphla non bene liquet, niſi is forſan habendus ſit qui Aſtronomiam, *Moſis Maimonidis*[16] Ævo, nempe circa A.D. 1160 celebrem, *Abulfaragio*[17] Teſte, compoſuit. *Hiſpanum* الاندلسي vocat, ſed an Origine *Hebræus*, an *Arabs*, in Dubio eſt. Nam de Genere ejus nihil habet *Abulfaragius*, nihil *Bartoloccius*.[18] Judæum vero potius fuiſſe, *Maimonidis*[19] Auctoritate fretus, inducor ut credam.

13 Natus eſt An. Heg. 221. (Xti. 835.) mortuus eſt A. Heg. 288. (900.) 14 Hiſt. Dyn. p. 184. 15 Abulfarag. Hiſt. Dyn. p. 178. & Sepher Juchaſin p. 156. Colum. 2. Vid. Weidler Hiſt. Aſtron. p. 211. Pocock Specim. Hiſt. Arab. pag. 377. 16 Weidler, Hiſt. Aſtron. p. 266. 17 Hiſt. Dyn. pag. 305. 18 Bibliothec. Rabbin. 19 More Nebuch. Part II. c. IX.

"Andelo-

" Andelosenos enim, (quos præstantissimos vocat " Mathematicos,) Venerem & Mercurium esse " supra Solem, secundum Principia Ptolemæi, " demonstrasse perhibet. De qua re, inquit, " Librum celebrem conscripsit Ebn Aphlah Hispalensis, cum cujus Filio Familiaritas mihi intercessit." Nullam vero Gratiam, nedum Familiaritatem cum Ishmaelita Judæum inire velle, fidenter statuamus.

Præter Versiones *Menelai*, *Latinam* in Bibliotheca Bod. & alibi conservatam, & *Hebraicam* prædictam, alia insuper *Arabice* extare dicitur, a Thabete Ebn Korra concinnata.[20] Versionem *Arabicam* & vidisse Editorem Cl. & usurpasse,[21] abunde liquet. Inter Mathematicos etiam antiquos, quorum Editionem suscipiendam voluit D. Bernardus, olim Prof. Savil. Oxon. noster fuit *Menelaus*. In quo edendo, MSS. Arab. Seld. & Lat. in Ambul. Bodl. conferenda proposuit.[22] Et duo quidem sunt Codices MSS. in Archiv. Seld. A. N° 5 & 6. Versiones Arabicas *Menelai* complexi, & eorum insuper Tractatuum, quos *Medios* appellarunt Arabes.

Linguis *Hebraica* & *Arabica* minus notis fere conclusum hunc nostrum Auctorem, Mathematicorum Discipulis minus quoque fuisse notum, nemo mirabitur. Sub Literas renascentes, primus, ut videtur, Latine loquentem publice induxit *Maurolycus*, Abbas Messanensis, quem clarissimum Siciliæ Lumen vocat *Ricciolus*.[23] Sed

20 Weidler, ut sup. p. 186. 21 Vid. pag. 15. 23. 38 &c. Huj. 22 Fabrit. Bib. Græc. Vol. 2. pag. 574. 23 Almagest. Nov. Præf. p. 34.

exem-

exemplari Græco, Latino, an Arabico usus sit, non constat. Posterius magis credo. Is enim Cosmographiam edidit A.D. 1543 in cujus Præfatione ad Petrum Bembum Cardinalem scripta, "inter Opera quorum Editionem [24] moliebatur, videre est *Menelai* Sphærica cum *Tebitii* nostrisque (inquit) Additionibus, unde tota sphæralium Triangulorum Scientia scaturit." Sed is *Tebitius* idem videtur cum Thabete Ebn Korra supra laudato, & in Sicilia olim viguisse Linguam Arabicam, notius est quam ut Testes advocemus.

Menelaum postea, simul cum *Theodosii Sphæricis* conjunctum, A.D. 1558 *Messanæ* Typis vulgavit Maurolycus. [25]

Quin *Menelaum*, quem & *Mileum* vocat, iterum A.D. 1644 edidit *Mersennus* in Synopsi sua Mathematica. Quid vero sibi velint quæ Præfatione sequuntur, [26] non bene assequor. "Hos enim, inquit, *Menelai* Libellos, cum ego in antiquis ex Membrana Codicibus invenissem, conatus sum eos, quoniam corruptissimum erat Exemplar, emendare ac restituere; nec non quamplurimis, tum necessariis, tum argutis adaugere Propositionibus." Bene egisset cum Orbe Literato *Mersennus*, modo ubinam Exemplar suum invenisset, aut qua Lingua, *Latine*, vel *Græce*, *Hebraice*, an *Arabice* scriptum dixisset.

In Synopsi sua, nudas tantum Propositiones exhibet *Menelai*, absque ullis omnino Demonstrationibus, nulloque Schemate adjecto. Unde

24 Gesner. Bib. pag. 252. 25 Vid. Weidler, Hist. Astron. pag. 363. 26 Pag. 204.

magis

magis optandum eſſet, ut Exemplar ſuum quam fideliter expreſſiſſet, nullis Adjectionibus auctum. Hoc enim modo, quid *Menelai* eſſet melius conſtaret, a quo, ſaltem prout nunc damus, tam Propoſitionum Numero, quam enunciandi Forma, longiſſime abit: An omnes Libros tres *Menelai* contineret *Merſenni* Exemplar quoque conſtaret; de quo ſaltem Suſpicio ſit, quum Librum ſecundum, *ex Traditione* Maurolyci, inſcribat, duorum reliquorum Traductoris nulla habitâ Mentione.

Quod vero *Merſennus* ait *Menelaum* aliter *Mileum* appellari, "(& ſic vocatur a Luca Gaurico "in Calendario Eccleſiaſtico novo) metuo, inquit "Voſſius,[27] ne Error ſit, ac Meleus, vel Mileus, "Compendio Literarum, ſive, ut vulgo loquuntur, "Abbreviatura, fuerit exaratum, pro eo quod inte- "gre foret *Menelaus*." Ut ut vero id ſit, utriſquè Exemplaribus *Hebraicis* prædictis, מילאוס[28] *Mileus*, & מיליאוס[29] *Milieus* dicitur, ſive compendio Literarum, in Codicibus Græcis, quibus uſi ſunt Traductores, id tribuendum ſit, ſive Orientalium Pronunciationi, & quod ita eorum Aures melius ferrent.

Hæc fere ſunt, quæ ut ſcires, Tua intereſſe credidimus. Vale, & Conatibus noſtris fave.

27 De Matheſ. cap. 34. §. 12. 28 Hunting. No. 16. 29 Hunting. No. 96. Sed duobus illis Codicibus Arabicis Seld. Nomen plenius effertur مانالاوس *Manalaus*.

MENELAI ALEXANDRINI SPHÆRICORUM

Lib. I.

DEFINITIONES.

I. *Triangulum Sphæricum* eſt ſpatium comprehenſum ſub arcubus circulorum magnorum in ſuperficie Sphæræ.

II. Atque hi arcus, qui ſemper minores ſunt ſemicirculo, dicuntur *latera* vel *crura* Trianguli.

III. *Anguli* autem eorum ſunt anguli quos continent circuli magni in ſuperficie Sphæræ.

IV. Et hi *Anguli æquales* dicuntur, quando inclinantur ad invicem plana arcuum eoſdem continentium æquali inclinatione.

V. Et ſi duorum arcuum plana inclinentur ad invicem majori inclinatione quam duorum aliorum arcuum plana inter ſe, erit angulus ab iiſdem arcubus contentus etiam major.

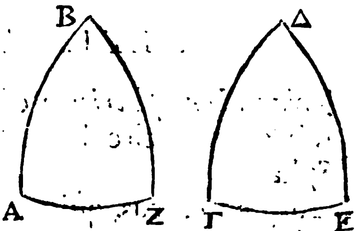
VI. Et ſi plana arcuum contineant angulum rectum, ipſi arcus etiam dicuntur continere angulum rectum.

PROP. I. PROBL.

Ad punctum datum in arcu circuli magni dati in superficie Sphæræ, oporteat angulum facere æqualem angulo dato, sub duobus arcubus circulorum magnorum in ea superficie contento.

SIT punctum datum B in superficie data, arcus autem circuli magni dati sit arcus A B, & angulus datus Γ Δ E: & oporteat construere ad punctum B angulum æqualem angulo Γ Δ E.

Describatur polo Δ & quolibet intervallo arcus E Γ, & polo etiam B eodemque intervallo arcus A Z, & capiatur arcus A Z arcui E Γ æqualis, & transeat per duo puncta B, Z arcus circuli magni B Z: dico angulum A B Z angulo Γ Δ E æqualem esse.



Quoniam duo arcus Γ Δ, Δ E sunt arcus circulorum magnorum per polos circuli Γ E transeuntium, utriusque planum [a] secabit circuli Γ E circumferentiam bifariam & ad angulos rectos, adeoque utraque è communibus sectionibus planorum arcuum Γ Δ, Δ E cum plano arcus Γ E transibit per centrum circuli cujus arcus est Γ E; & [b] intersectio communis planorum arcuum Γ Δ, Δ E normalis erit super planum circuli cujus arcus Γ E, & super quamcunque rectam è centro circuli Γ E eductam: adeoque utraque è rectis, quæ ducuntur è punctis Γ, E ad centrum, normalis erit super communem planorum Γ Δ, Δ E intersectionem. Pari modo constabit rectas, à punctis A, Z prodeuntes ad centrum circuli A Z, normales esse super communem planorum A B, B Z sectionem. Et quoniam arcus Γ E descriptus est polo Δ, & intervallo æquali intervallo quo descriptus est arcus A Z polo B, erit circulus cujus arcus est Γ E æqualis circulo cujus arcus est A Z. & arcus Γ E æqualis fit arcui A Z: quare angulus quem subtendit arcus Γ E ad centrum ejus, æqualis est angulo quem subtendit arcus A Z ad centrum ejus. Normales autem duæ prodeuntes ab eodem puncto in communi

a 15. I *Theod.* b 19. XI *Eucl.*

muni

muni ſectione planorum Γ Δ, Δ Ε in planis Γ Δ, Δ Ε continent angulum æqualem angulo quem ſubtendit arcus Γ Ε ad centrum ejus; pariterque normales duæ, prodeuntes ab eodem puncto in communi ſectione planorum Α Β, Β Ζ in planis Α Β, Β Ζ, continent angulum æqualem angulo quem ſubtendit arcus Α Ζ ad centrum ejus: igitur normales duæ, prodeuntes ab eodem puncto in communi ſectione planorum Γ Δ, Δ Ε, in planis Γ Δ, Δ Ε, continent angulum æqualem angulo contento ſub duabus normalibus ab eodem puncto in communi ſectione planorum Α Β, Β Ζ in ipſis planis prodeuntibus: ac proinde inclinatio plani circuli Α Β ad planum circuli Β Ζ æqualis eſt inclinationi plani circuli Γ Δ ad planum circuli Δ Ε. Anguli autem ſub arcubus circulorum magnorum in ſuperficie ſphæræ contenti (*per def.* 4.) ſunt inter ſe æquales, quum planorum eorundem inclinationes ſunt inter ſe æquales: angulus igitur Α Β Ζ æqualis eſt angulo Γ Δ Ε. Quod erat probandum.

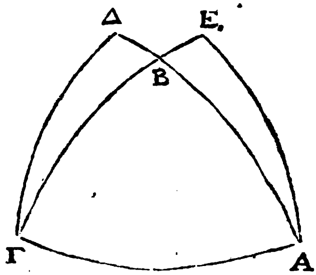
Coroll. Et hinc manifeſtum eſt, ſi conſtituantur ad duo puncta quivis duo anguli contenti ſub duobus circulis in ſphæra magnis, & quolibet dato intervallo deſcripti duo arcus æquales iiſdem ſubtendantur, erunt anguli illi æquales: ac è contra ſi anguli fuerint æquales, æquales erunt quoque arcus.

PROP. II. THEOR.

In omni triangulo Sphærica duo crura æqualia habente, erunt duo anguli apud latus tertium æquales.

Sit Α Β Γ triangulum ſphæricum æquicrure, cujus crura æqualia Α Β, Β Γ: dico duos angulos apud latus Α Γ, nempe angulos Β Α Γ, Α Γ Β, eſſe inter ſe æquales.

Polo Α & intervallo Α Γ deſcribatur arcus Γ Δ, & polo Γ eodem intervallo Γ Α arcus Α Ε; & producantur arcus Α Β Δ, Γ Β Ε. Jam quoniam uterque arcus Γ Β Ε, Α Β Δ æqualis eſt arcui Α Γ, & arcus Α Β æqualis arcui Γ Β: erit igitur reliquus arcus Β Δ æqualis reliquo Β Ε. Deſcriptus autem eſt arcus Γ Δ polo Α, ad intervallum æquale intervallo quo arcus Α Ε polo Γ: erit igitur circulus cujus arcus Γ Δ æqualis circulo cujus arcus Α Ε. Cumque arcus Α Β Δ tranſit per polos circuli Γ Δ, erit rectus super illum; pariterque arcus Γ B E rectus super arcum A E. Jam quoniam super duas diametros duorum circulorum æqualium, quorum arcus A E, Γ Δ, segmenta erecta sunt æqualia, à punctis Δ, E inchoata, nempe arcus Δ B A, E B Γ continuati, in quibus sumuntur portiones æquales B Δ, B E minores semissi eorundem, & recta jungens puncta B, Γ æqualis est jungenti puncta A, B: erit (*per* 11. II^di^ *Theod.*) arcus Γ Δ æqualis arcui A E. Itaque quoniam in sphærâ duo anguli B A Γ, A Γ B continentur sub arcubus circulorum magnorum, & ad duo puncta A, Γ eodem intervallo descripti sunt duo arcus Γ Δ, A E, subtensi duobus illis angulis, & arcus Γ Δ æqualis est arcui A E; erit (per præcedens) angulus B A Γ æqualis angulo A Γ B. Q. E. D.

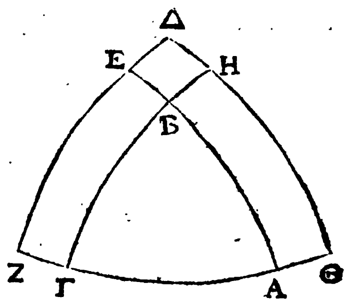


PROP. III. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo anguli fuerint æquales, crura quoque æqualibus angulis opposita erunt æqualia.

In triangulo Sphærico A B Γ, si angulus A fuerit æqualis angulo Γ: dico arcum A B æqualem esse arcui Γ B.

Describantur polis A, Γ arcus circulorum magnorum Δ E Z, Δ H Θ, qui, cum magni sint, transibunt per polum arcus A Γ; sitque polus ille arcus A Γ in Δ; erit igitur arcus Δ Z æqualis arcui Δ Θ, arcusque A B arcui Γ H. Quoniam vero angulus A æqualis est angulo Γ; & ad duo puncta A, Γ æquali intervallo descripti sunt arcus E Z, H Θ, subtensi duobus illis angulis æqualibus: erit (*per Coroll.* 1 *hujus*) arcus E Z æqualis arcui H Θ: atque adeo reliquus Δ E æqualis erit reliquo arcui Δ H. Circulus autem A B E transit per polum circuli Δ E Z; erit igitur



(*per*

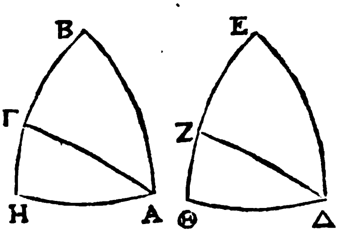
(*per* 15. I. *Theodosii*) arcus ΔEZ rectus super arcum ABE; ac pari modo arcus ΔHΘ rectus est super arcum ΓBH: super diametros igitur circulorum æqualium ABE, ΓBH, ad angulos rectos insistunt segmenta æqualia æqualium circulorum ΔE, ΔH. Communis autem est recta jungens puncta Δ, B; ac proinde (*per* 11^{mam} II. *Theod.*) arcus EB æqualis est arcui BH. Sed arcus AE, ΓH sunt æquales: reliqui igitur AB, BΓ sunt æquales. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.

Si in duobus triangulis Sphæricis angulus aliquis unius æqualis fuerit angulo alterius, arcusque qui continent æquales illos angulos fuerint æquales, singuli singulis; erunt duo reliqui arcus æquales. Quod si duo reliqui arcus fuerint æquales, erunt anguli ab æqualibus arcubus contenti in utroque triangulo æquales.

Sint duo triangula Sphærica ABΓ, ΔEZ; sitque angulus B trianguli ABΓ æqualis angulo E trianguli ΔEZ, & arcus AB æqualis arcui ΔE, arcusque BΓ arcui EZ: dico arcum AΓ æqualem esse arcui ΔZ.

Describatur polo B, intervallo BA, arcus AH; & polo E, intervallo EΔ, arcus ΔΘ. Quoniam angulus B æqualis est angulo E, & arcus AH descriptus est polo B & intervallo eodem quo descriptus est arcus ΔΘ polo E; erit (*per Coroll.* 1. *hujus*) arcus AH æqualis arcui ΔΘ. Quoniam vero arcus BΓ transit per polum arcus AH, erit rectus super illum; pariterque arcus EZ rectus erit super arcum ΔΘ: ob arcum autem BΓ arcui EZ æqualem, & arcum BH ipsi EΘ, (uterque enim æqualis fit ipsi AB) erit arcus reliquus HΓ reliquo ΘZ æqualis. Jam quoniam ad rectos angulos insistunt, super diametros duorum circulorum æqualium, quorum arcus AH, ΔΘ segmenta, æqualia duorum circulorum æqualium, nempe arcus ΘZE, HΓB continuati, & in utroque



seg-

segmento sumuntur æquales portiones dimidio eorundem minores, nempe arcus Θ Z, Γ H; & in æqualibus circulis habentur segmenta æqualia A H, Θ Δ: erit recta jungens puncta Z, Δ æqualis (*per* 12^{mum} II. *Theod.*) jungenti puncta Γ, A; adeoque arcus Z Δ æqualis arcui Γ A.

Quod si fuerit arcus Γ A æqualis arcui Z Δ, erit angulus B æqualis angulo E.

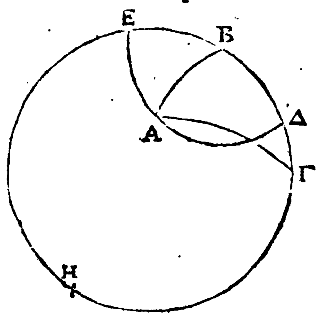
Demonstratio hujus est conversa præcedentis. Nam si arcus Z Δ æqualis fuerit arcui Γ A, erit jungens puncta Z, Δ æqualis jungenti Γ, A. Atqui arcus Θ Z æqualis est arcui Γ H, quorum uterque rectus est super diametrum circuli cui insistit; circuli autem illi sunt æquales: quare (*per* 11^{mum} II. *Theod.*) arcus Θ Δ æqualis est arcui A H, & proinde (*per Coroll.* 1^{mi} *hujus*) angulus E angulo B æqualis. Q. E. D.

PROP. V. THEOR.

Cujuscunque trianguli Sphærici quilibet duo arcus simul sumpti sunt majores reliquo.

Sit A B Γ triangulum Sphæricum: dico quod duo quilibet arcus, è tribus A B, B Γ, Γ A ipsum comprehendentibus, simul sumpti sunt majores reliquo.

Sit B Γ major arcubus reliquis; & polo B, intervallo B A describatur circulus A Δ E, qui occurrat arcui B Γ producto ad E, Δ. Jam quia B polus est circuli A Δ E, & arcus B Γ minor est semicirculo, non erit punctum Γ in polo altero circuli A Δ E. Sit polus ille alter punctum H. Quoniam autem erectum est super diametrum circuli A Δ E segmentum Δ Γ H à puncto Δ inceptum, & arcus Δ H æqualis est arcui H E, quo minor est arcus Γ Δ: erit recta quæ à Γ ad Δ ducitur (*per* 1. III. *Theod.*) brevior quavis alia à puncto Γ ad peripheriam circuli A Δ E ducta: juncta igitur Γ A major est juncta Γ Δ; atque adeo arcus A Γ major arcu Γ Δ. Arcus autem A B æqualis est arcui B Δ; quare duo arcus B A, A Γ excedunt duos arcus

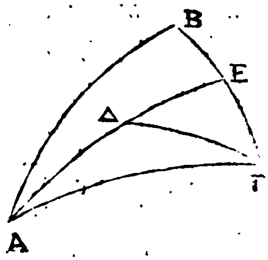


arcus $B\Delta$, $\Delta\Gamma$, hoc est $B\Gamma$: quapropter duo quilibet arcus qui comprehendunt triangulum Sphæricum $AB\Gamma$ simul sumpti majores sunt arcu reliquo. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

Si ab extremitatibus alicujus lateris trianguli Sphærici ducantur duo arcus, concurrentes ad punctum aliquod intra triangulum; arcus illi simul sumpti minores erunt duobus reliquis trianguli lateribus.

Sit $AB\Gamma$ triangulum Sphæricum, & ab extremitatibus arcus $A\Gamma$ prodeant duos arcus $A\Delta$, $\Delta\Gamma$, concurrentes intra triangulum ad punctum Δ: dico duos arcus AB, $B\Gamma$ simul sumptos, majores esse duobus arcubus $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ simul sumptis.



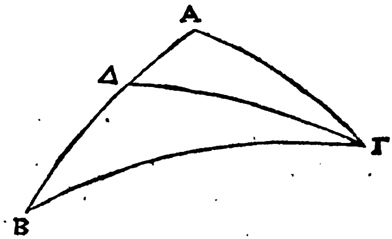
Producatur arcus $A\Delta$ usque dum concurrat cum arcu $B\Gamma$ in puncto E; & erunt (*per 5am hujus*) arcus AB, BE simul sumpti majores arcu AE. Est autem arcus ΓE communis: quare duo arcus AB, $B\Gamma$ simul sumpti excedunt duos arcus AE, $E\Gamma$ simul sumptos. (Sed *per eandem*) arcus ΔE, $E\Gamma$ simul excedunt arcum $\Delta\Gamma$; quare arcus AE, $E\Gamma$ simul excedunt arcus $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ simul sumptos: duo igitur arcus AB, $B\Gamma$ simul multo majores sunt ipsis $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ simul sumptis. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

In omni triangulo Sphærico, si angulus aliquis major fuerit alio; arcus qui subtenditur angulo majori major erit arcu qui subtenditur minori.

Sit $AB\Gamma$ triangulum Sphæricum, cujus angulus Γ major sit angulo B: dico arcum AB majorem esse arcu $A\Gamma$.

Ad punctum Γ cum arcu ΒΓ fiat angulus ΒΓΔ æqualis angulo Β; & erit (*per* 3am *hujus*) arcus ΒΔ æqualis arcui ΔΓ: duo igitur arcus ΑΔ, ΔΓ æquales sunt arcui ΑΒ. Sed (*per* 5tam *hujus*) arcus ΑΔ, ΔΓ majores sunt arcu ΑΓ: quare arcus ΑΒ major est arcu ΑΓ. Q. E. D.

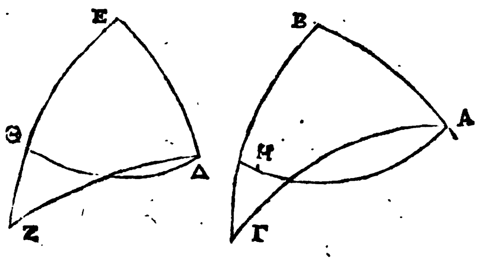


PROP. VIII. THEOR.

Si duo triangula Sphærica habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; angulum autem unius angulo alterius, qui sub æqualibus illis lateribus comprehenditur, majorem: erit arcus qui subtenditur angulo majori major eo qui subtenditur minori; ac si fuerit arcus major, erit etiam angulus major.

Hujus probatio eadem est ac in triangulis rectilineis. Sed & alio modo conficitur ejusdem demonstratio. Sint duo triangula Sphærica ΑΒΓ, ΔΕΖ, sitque arcus ΑΒ æqualis arcui ΔΕ, & arcus ΒΓ arcui ΕΖ: dico quod, si fuerit angulus Β major angulo Ε, erit quoque arcus ΑΓ major arcu ΔΖ; ac si fuerit arcus ΑΓ major arcu ΔΖ, erit etiam angulus Β major angulo Ε.

Polis Β, Ε & intervallis æqualibus ΑΒ, ΔΕ describantur arcus ΑΗ, ΔΘ: cumque arcus ΒΖ æqualis est arcui ΒΓ, & arcus ΒΗ arcui ΕΘ, erit reliquus ΗΓ æqualis reliquo arcui ΘΖ. Quoniam vero segmenta æqualia circulorum æqualium à punctis Η, Θ inchoata, nempe segmenta ΗΓ, ΘΖ continuata, ad angulos rectos insistunt super diametros circulorum æqualium, quorum arcus sunt ΑΗ, ΔΘ, & sumuntur in utroque



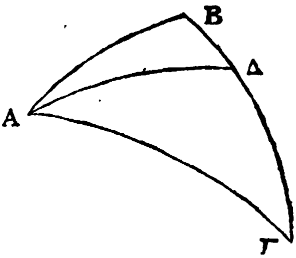
utroque segmento arcus æquales minores eorundem dimidiis, nempe arcus Γ H, Z Θ; ob angulum autem B majorem angulo E, arcus Δ Θ minor est arcu A H: erit igitur (*per* 1^{mam} III. *Theod.*) recta jungens puncta Z, Δ minor junctâ A Γ, adeoque arcus A Γ major arcu Δ Z.

Quod si fuerit arcus A Γ major arcu Δ Z, pari argumento probabitur quod recta jungens Z, Δ minor est jungente puncta A, Γ; unde & arcus Θ Δ minor erit arcu A H, ac proinde angulus B major angulo E. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

In omni triangulo Sphærico major arcus majorem angulum subtendit.

Sit A B Γ triangulum Sphæricum, sitque arcus B Γ major arcu B A: dico quod angulus A major est angulo Γ.



In arcu B Γ fiat Γ Δ æqualis arcui A B, & per puncta A, Δ ducatur arcus circuli magni A Δ. Quoniam igitur duo arcus A B, B Δ simul sumpti (*per* 5^{tam} *huj.*) sunt majores arcu A Δ, & arcus A B æqualis est arcui Δ Γ; erit arcus B Δ Γ major arcu A Δ. Est autem arcus Δ Γ æqualis ipsi A B, & A Γ communis; proinde duo arcus Δ Γ, Γ A æquales sunt duobus B A, A Γ, unusquisque relativo suo. Basis autem B Δ Γ major est basi A Δ: quare (*per præced.*) angulus B A Γ major est angulo A Γ B. Q. E. D.

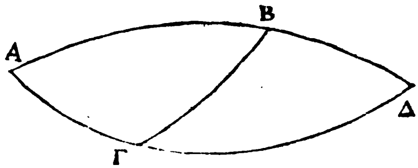
PROP. X. THEOR.

In omni triangulo Sphærico, si duo latera simul sumpta æqualia fuerint semicirculo; producto reliquo latere, angulus exterior æqualis erit interiori & opposito super latus productum. Si vero duo latera simul minora sint semicirculo, tum angulus exterior major erit interiore & opposito super latus productum. Quod si

duo latera simul majora fuerint semicirculo, erit angulus exterior minor interiore sibi opposito.

Sit ΑΒΓ triangulum Sphæricum, & duo latera ejus ΑΒ, ΒΓ simul sumpta sint æqualia semicirculo, & producatur arcus ΑΓ: dico angulum ΒΓΔ exteriorem æqualem esse angulo Α interiori eidemque opposito. Ac si fuerint duo arcus ΑΒ,ΒΓ minores semicirculo, erit angulus ΒΓΔ major angulo Α. Si vero arcus ΑΒ, ΒΓ majores fuerint semicirculo, erit angulus ΒΓΔ minor angulo Α.

Producatur arcus ΑΒ ad occursum arcus ΑΓ, cui conveniat in Δ. Cumque arcus ΑΒ, ΒΓ sint æquales semicirculo, duo autem arcus ΑΒ, ΒΔ sunt etiam æquales semicirculo; erit igitur arcus ΒΔ æqualis arcui ΒΓ, & (*per* 2^dam^ *hujus*) angulus ΒΓΔ angulo ΒΔΓ. Est autem angulus ΒΔΓ æqualis angulo Α; quare angulus ΒΓΔ æqualis est angulo Α.



Sint jam duo arcus ΑΒ ΒΓ simul sumpti minores semicirculo; sunt autem duo arcus ΑΒ, ΒΔ simul æquales semicirculo: quare arcus ΒΔ major est arcu ΒΓ, adeoque (*per* 9^nam^ *hujus*) angulus ΒΓΔ major est angulo Δ. Est autem angulus Δ æqualis angulo Α, eadem enim est inclinatio: quare angulus exterior ΒΓΔ major est interiore Α.

Si vero fuerint duo arcus ΑΒ, ΒΓ simul majores semicirculo: dico angulum exteriorem ΒΓΔ minorem esse angulo interiore Α eidem opposito. Est enim arcus ΑΒΔ semicirculus, ac duo arcus ΑΒ, ΒΓ sunt majores semicirculo; quare arcus ΒΓ major est arcu ΒΔ, ac proinde angulus Δ major est angulo ΒΓΔ. Sed angulus Δ æqualis est angulo Α: angulus igitur ΒΓΔ minor est angulo Α. Q. E. D.

Ac manifesta est hujus conversa: nempe quod si in triangulo Sphærico, producto uno latere, angulus exterior æqualis fuerit interiori & opposito, tum reliqui duo arcus simul sumpti æquantur semicirculo; ac si angulus exterior major fuerit interiore & opposito, erunt reliqui arcus simul minores semicirculo; si vero angulus exterior minor fuerit interiore & opposito, erunt reliqua latera trianguli simul sumpta majora semicirculo.

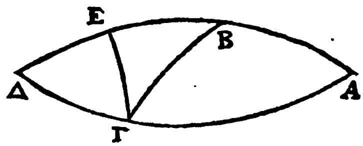
PROP.

PROP. XI. THEOR.

In omni triangulo Sphærico, producto uno latere, angulus exterior minor erit utrisque interioribus eidem oppositis simul sumptis: & tres anguli trianguli simul sumpti majores erunt duobus rectis.

Sit Α Β Γ triangulum Sphæricum: dico quod angulus exterior, arcubus Β Γ, Γ Δ contentus, minor est angulis Α, Β eidem oppositis: quodque tres anguli trianguli Α, Β, Γ simul sumpti excedunt duos angulos rectos.

Fiat ad punctum Γ super arcum Γ Δ angulus Δ Γ Ε æqualis angulo Α, & producatur Α Β ad occursum ipsius Α Γ in puncto Δ. Jam quoniam anguli Δ, Γ sunt æquales, erunt arcus Δ Ε, Ε Γ quoque æquales; & Β Ε, Ε Γ simul sunt æquales arcui Β Δ, ac proinde minores sunt semicirculo: quare (*per præced.*) angulus exterior Γ Β Α major est interiore Β Γ Ε, atque adeo angulus Β Γ Δ exterior trianguli Α Β Γ, minor est angulis Γ Β Α, Β Α Γ simul sumptis. Adjiciatur communis angulus Β Γ Α; & duo anguli Β Γ Δ, Β Γ Α minores erunt angulis Α, Β, Γ. Sed duo anguli Β Γ Δ, Β Γ Α sunt æquales duobus rectis: quare tres anguli Α, Β, Γ simul sumpti excedunt duos rectos. Q. E. D.

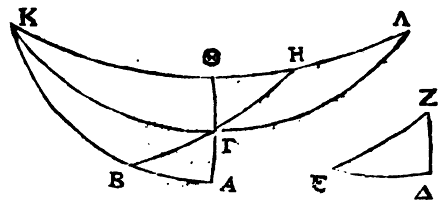


PROP. XII. THEOR.

Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos rectos, ac duos alios angulos æquales quidem, sed non rectos; itemque duos arcus angulis rectis subtensos etiam æquales: erunt & duo reliqui anguli æquales, ac reliqua duo latera, in utroque triangulo, singula singulis æqualia.

Sint Α Β Γ, Δ Ε Ζ duo triangula Sphærica, quorum duo anguli Α, Δ recti, duo vero Γ, Ζ æquales, sed non recti; arcus autem Β Γ sit æqualis arcui Ε Ζ: dico arcum Α Γ æqualem esse arcui Δ Z, & arcum A B arcui Δ E, angulumque B angulo E æqualem.

Producatur B Γ ad H, & fiat Γ H æqualis ipsi B Γ, hoc est ipsi E Z; & producatur A Γ ad Θ, & ponatur Γ Θ ipsi Δ Z æqualis; & descripto circulo magno per puncta H, Θ, producatur usque dum occurrat arcui A B producto in K. Quoniam itaque arcus H Γ est æqualis arcui E Z, & arcus Γ Θ arcui Δ Z, angulusque H Γ Θ angulo Δ Z E (est enim ex hypothesi angulus Δ Z E æqualis angulo A Γ B, cui æqualis est angulus H Γ Θ ad verticem sito) erit igitur (*per* 4tam *hujus*) arcus H Θ æqualis arcui Δ E, & angulus H Θ Γ æqualis angulo Δ. Sed angulus Δ est rectus; quare angulus H Θ Γ est rectus. Et quoniam arcus K Θ H intersecat arcum A Γ Θ ad angulos rectos, transibit (*per* 13m I. *Theod.*) per polos ejus; sicut & arcus A B K erit



per polos ejus: quare punctum K polus est arcus A Γ Θ. Transeat per puncta K, Γ arcus circuli magni, qui producatur ad occursum arcus K Θ H etiam producti in puncto Λ; & erunt utrique arcus Λ Θ K, Λ Γ K semicirculi. Est autem punctum K polus circuli A Γ Θ; quare Λ est polus alter: unde arcus K Γ æqualis est arcui Λ Γ: & arcus H Γ æqualis est arcui Γ B; adeoque duo arcus Λ Γ H Γ æquales sunt duobus K Γ, Γ B, ac angulus H Γ Λ æqualis est angulo K Γ B; quare arcus K B æqualis est arcui Λ H. Verum arcus Λ H Θ æqualis est arcui K B A; reliquus igitur arcus A B æqualis est arcui H Θ. Constat autem arcum H Θ æqualem esse arcui Δ E; quare arcus Δ E æqualis est arcui A B. Porro angulus K B Γ æqualis est angulo Λ H Γ: reliquus igitur angulus A B Γ æqualis est angulo Γ H Θ. Arcus autem H Γ æqualis est arcui Γ B, & arcus H Θ arcui A B; quare arcus A Γ æqualis est arcui Γ Θ. Sed arcus Γ Θ æqualis est arcui Δ Z; quare A Γ æqualis est arcui Δ Z. Demonstravimus autem arcum A B æqualem ipsi Δ E; angulus igitur B æqualis erit angulo E. Q. E. D.

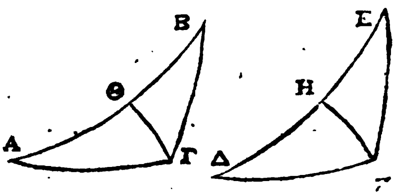
PROP.

PROP. XIII. THEOR.

Si in duobus triangulis Sphæricis, duo anguli æquales fuerint; itemque duo arcus, non continentes angulos illos æquales, unusquisque relativo suo, fuerint æquales; reliqui autem duo anguli non recti [sed uterque vel acutus vel obtusus:] erit arcus reliquus unius æqualis arcui reliquo alterius; & reliqui duo anguli unius reliquis duobus angulis alterius, unusquisque relativo suo, æquales.

In duobus triangulis Sphæricis Α Β Γ, Δ Ε Ζ, sit angulus Α æqualis angulo Δ, & arcus Β Γ arcui Ε Ζ, uti arcus Α Γ arcui Δ Ζ, qui contineant angulos Γ, Ζ æquales; uterque autem reliquus angulus Β, Ε sit recto major vel minor: dico arcum Α Β æqualem esse arcui Δ Ε, angulumq; Γ angulo Ζ, & Β angulo Ε æqualem.

Quoniam angulus Β non est rectus, arcus Β Γ non transibit per polos circuli Α Β. Transeat igitur per punctum Γ, perque polum circuli Α Β arcus circuli magni Γ Θ. Pariterque cum arcus Ζ Ε non transit per polos arcus Ε Δ, transeat per polos ejus punctumque Ζ arcus Ζ Η: erunt igitur anguli Η, Θ recti. Angulus autem Δ non rectus æqualis est angulo Α, sicut arcus Δ Ζ arcui Α Γ: quare (*per* 12^{m} *hujus*) arcus Γ Θ æqualis erit arcui Ζ Η, uti arcus Δ Η arcui Α Θ. Sed & arcus Γ Β æqualis est arcui Ζ Ε, adeoque juncta recta Ζ Ε æqualis est junctæ Γ Β. Insistunt autem super duas diametros circulorum æqualium segmenta æqualia à punctis Θ, Η incœpta, nempe arcus Θ Γ, Η Ζ continuati, in quibus sumuntur portiones æquales minores dimidiis eorundem, nempe arcus Θ Γ, Ζ Η; ac recta jungens puncta Β, Γ æqualis est junctæ Ζ Ε: erit igitur (*per* 11^{m} II. *Theod*) arcus Β Θ æqualis arcui Η Ε. Est autem arcus Δ Η æqualis arcui Α Θ; quapropter arcus Α Β arcui Δ Ε æqualis est. Q. E. D.



Quod si fuerit uterque angulus Α, Δ rectus, transibit arcus Α Γ per polos circuli Α Β, sicut arcus Δ Ζ per polos circuli Ε Δ: insistunt

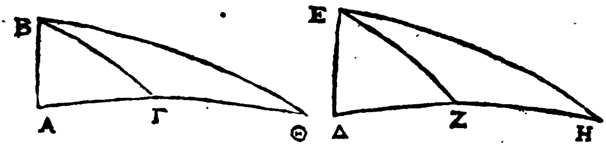
insistunt igitur super diametros circulorum æqualium A B, Δ E segmenta æqualia à punctis A, Δ inchoata, quorum portiones æquales sunt A Γ, Δ Z. Et ob arcum Γ B æqualem arcui Z E, erit juncta recta Γ B æqualis junctæ Z E: quapropter (*per eandem* 11^m II. *Theod.*) arcus A B æqualis est arcui Δ E. Cumque arcus omnes comprehendentes triangula A B Γ, Δ E Z sint inter se æquales, unusquisque relativo suo; manifestum est (*ex* 4^ta *hujus*) angulos etiam eorum æquales esse, unumquemque relativo suo. Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

Si duo triangula Sphærica habeant duos angulos unius duobus angulis alterius æquales, unumquemque suo relativo; itemque arcus, apud quos sunt æquales illi anguli in utroque, æquales: erunt reliqui duo arcus unius æquales duobus reliquis alterius, unusquisque suo relativo, reliquusque angulus angulo reliquo æqualis.

Sint duo triangula Sphærica A B Γ, Δ E Z, quorum angulus Δ sit æqualis angulo A, & angulus Z angulo Γ, arcus autem Δ Z ipsi A Γ æqualis: dico arcum E Δ æqualem esse arcui A B, arcumque Z E arcui Γ B, atque etiam angulum B angulo E.

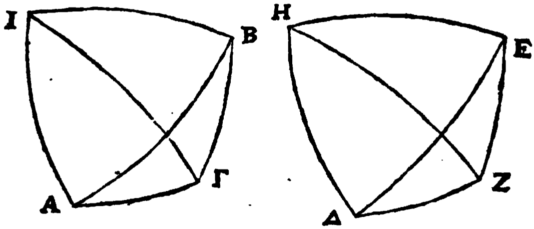
Vel fuerit uterque angulus A, Δ rectus, vel non. Sint primo recti, & sit punctum Γ polus arcus A B, & erit quoque punctum Z polus arcus Δ E; unde manifestum est arcum Γ B æqualem esse arcui E Z, & arcum A B arcui Δ E. Quod si punctum Γ non fuerit polus arcus A B, neque erit Z polus arcus Δ E. Cum autem angulus A sit rectus, arcus A Γ transibit per polos circuli A B; pro-



ducatur itaque A Γ ad polum ejus Θ. Pariterque arcus Δ Z productus transibit per polos arcus Δ E; producatur itaque ad polum ejus H; ac ducantur duo arcus quadrantes circulorum magnorum, Θ B, H E. Quoniam vero arcus Θ A æqualis est arcui H Δ, & arcus A Γ arcui Δ Z; ideo reliquus arcus Θ Γ æqualis erit

erit arcui H Z, sicut Θ B quadrans quadranti B H: angulus autem A Γ B æqualis est angulo Δ Z E: quapropter (*per præcedentem*) arcus B Γ æqualis erit arcui E Z, atque adeo (*per 12m bujus*) arcus A B æqualis est arcui Δ E, angulusque E angulo B æqualis. Q. E. D.

[a] Quod si anguli A, Δ non fuerint recti, manifestum est arcus A Γ, Δ Z non transire per polos arcuum A B, Δ E. Ponamus igitur I polum esse circuli A B, & H polum circuli Δ E, per quos polos transeant arcus circulorum magnorum quadrantes, A I, B I; H Δ, H E: anguli igitur I A B, I B A; H Δ E, H E Δ sunt æquales, quippe (*per 15m I. Theod.*) recti. Ducantur etiam arcus I Γ, H Z. Quoniam autem angulus B A Γ æqualis est angulo E Δ Z; æqualis erit angulus I A Γ angulo H Δ Z. Et arcus A I æqualis est arcui Δ H, sicut A Γ arcui Δ Z; quare (*per 4m bujus*) basis I Γ æqualis est basi H Z, angulusque A Γ I angulo Δ Z H. Sed angulus A Γ B æqualis est angulo Δ Z E: quare & angulus I Γ B æqualis est angulo H Z E. Atqui arcus H Z, H E sunt æquales ipsis I Γ, I B respective, & anguli I B Γ, H E Z sunt utrique vel obtusi vel acuti: arcus igitur reliquus E Z (*per præcedentem*) reliquo B Γ æqualis est; proinde (*per 4m bujus*) arcus E Δ basis trianguli E Z Δ æqualis est arcui A B basi trianguli B Γ A, uti angulus Δ E Z angulo A B Γ. Q. E. D.



a *N. B. Hanc Propositionem in Codicibus* Arabicis *in duas dividi, partemque hanc posteriorem esse XVtam. Nos vero hic & in sequentibus* Hebræi *Codicis numeros retinebimus.*

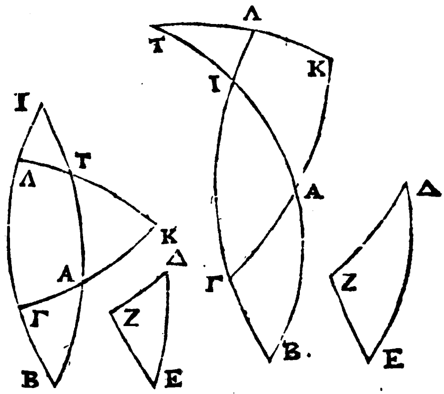
PROP. XV. THEOR.

Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos unius æquales duobus angulis alterius, unumquemque relativo suo; latera vero reliquos angulos in utroque continentia æqualia, unumquodque suo relativo; ac non fuerint Poli reliquorum

liquorum arcuum apud angulos illos reliquos: erunt quoque latera reliqua æqualia.

Sint ΑΒΓ, ΔΕΖ duo triangula Sphærica, & æquales sint duo anguli unius, nempe anguli Α, Γ in triangulo ΑΒΓ, angulis Δ,Ζ trianguli ΔΕΖ; sintque latera angulos Β,Ε continentia etiam æqualia, nempe arcus ΕΖ arcui ΒΓ, & arcus ΔΕ arcui ΑΒ; nec sint puncta Β, Ε poli arcuum ΑΓ, ΔΖ: dico arcum ΔΖ æqualem esse arcui ΑΓ.

Producantur arcus ΑΒ, ΒΓ ad occursum in puncto Ι. Cumque ex hypothesi punctum Β non sit in polo arcus ΑΓ, sit ΑΒ in primâ figura minor, in secundâ major quadrante circuli. In producto arcu ΑΒ fiat arcus ΑΤ arcui ΔΕ æqualis, hoc est ipsi ΑΒ, ac manifestum erit arcum ΑΤ non esse æqualem arcui ΑΙ. Producatur etiam ΑΓ ad Κ, & fiat ΑΚ arcui ΔΖ æqualis; & per puncta Κ, Τ transeat arcus circuli magni ΚΤ, occurrens arcui ΒΓΙ in Λ.



Jam quoniam duo arcus ΚΑ, ΑΤ sunt æquales duobus ΔΖ, ΔΕ; & angulus ΤΑΚ æqualis est angulo ΕΔΖ, quippe angulo ΒΑΓ ad verticem: erit (*per* 4^m *bujus*) arcus ΚΤ æqualis arcui ΖΕ, hoc est arcui ΒΓ; & angulus ΑΚΤ angulo ΔΖΕ, hoc est angulo ΑΓΒ. Quoniam vero angulus ΑΓΒ, exterior trianguli ΚΛΓ æqualis est opposito suo angulo Κ; erunt arcus ΚΛ, ΛΓ simul sumpti (*per* 10^m *buj.*) æquales semicirculo. Sed arcus ΒΓΙ est semicirculus: quare arcus ΒΓΙ æqualis est duobus arcubus ΓΛ, ΛΚ. Jam posito, in figurâ primâ, arcu ΓΛ communi; erunt reliqui arcus ΒΓ, ΛΙ æquales arcui ΚΛ. Arcus autem ΚΤ æqualis est arcui ΒΓ, relinquetur igitur arcus ΤΛ æqualis arcui ΛΙ. At in figura II^da, sublato arcu ΙΓ communi, relinquetur arcus ΒΓ æqualis utrisque ΚΛ, ΛΙ simul; & arcus ΒΓ æqualis est arcui ΚΤ: quare arcus ΚΤ æqualis est arcubus ΚΛ, ΛΙ; & sublato communi arcu ΚΛ, re-

K A, reliquus arcus A T æqualis erit arcui A I; quare angulus A T I æqualis est angulo A I T, hoc est angulus T angulo B: anguli igitur trianguli A B Γ æquales sunt angulis trianguli A K T, quisque relativo suo; & arcus A B æqualis est arcui A T, uti arcus B Γ arcui K T: reliquus igitur arcus A Γ (*per* 4^{m}. *hujus*) æqualis est arcui A K. Sed arcus A K æqualis factus est arcui Δ Z: quare arcus A Γ æqualis est arcui Δ Z. Q. E. D.

SCHOLION.

In hac Propositione merito cavetur ne angulus B *sit in polo arcus* A Γ: *sic enim uterque angulus* A, Γ *foret rectus, & arcus* A B, B Γ *quadrantes; quibus positis arcus tertius* A Γ *indefinitus manet. Porro propositio hæc Corollarium est manifestum* $13^{mæ}$ *hujus, ubi demonstrantur triangula esse per omnia æqualia, si, existentibus angulis* A, Δ *æqualibus, angulis* Γ, Z *fuerint vel simul obtusi vel simul acuti, absque conditione æqualitatis.*

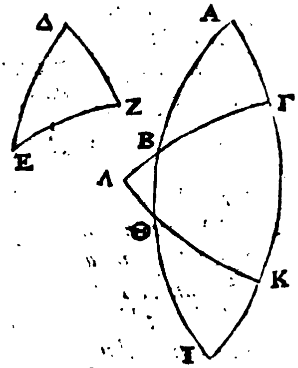
PROP. XVI. THEOR.

Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos unius duobus alterius angulis, singulos singulis æquales; latus vero alteri æqualium oppositum in uno æquale sit lateri relativo in altero; arcus vero, in utroque triangulo, alteri angulorum æqualium oppositi simul sumpti non conficiant semicirculum erunt: tum latera illa in utroque æqualia, tum reliqua latera, reliquique duo anguli æquales.

Sint A B Γ, Δ E Z duo triangula Sphærica, sitque angulus A æqualis angulo Δ, & angulus Γ angulo Z, arcus vero B Γ arcui E Z æqualis; arcus autem A B, Δ E simul sumpti non sint semicirculo æquales; dico arcum A B æqualem esse arcui Δ E, & arcum A Γ arcui Δ Z, angulumque B angulo E.

Producantur duo arcus A B, A Γ ad occursum in puncto I. Cumque duo arcus A B, Δ E non sint semicirculo æquales, atque arcus A I est semicirculus; igitur arcus B I non erit æqualis arcui Δ E: pariterque arcus Γ I non erit arcui Δ Z æqualis. Fiat arcus I Θ arcui Δ E æqualis, & arcus I K arcui Δ Z; & producatur arcus circuli magni per K, Θ ad occursum arcus B Γ in Λ.

Quoniam itaque duo arcus K I, I Θ sunt æquales arcubus Δ Z, Δ E; & angulus Δ æqualis est angulo I (ob angulum I angulo A æqualem, qui ex hypothesi æqualis est angulo Δ) erit (*per* 4ᵐ. *hujus*) arcus Θ K æqualis arcui Z E. Arcus autem Z E æqualis est arcui B Γ; quare Θ K æqualis est arcui B Γ: & angulus Θ K I æqualis est angulo Δ Z E, qui quidem æqualis est angulo A Γ B; quare anguli A Γ B, Θ K I sunt æquales, ac proinde angulus A Γ K angulo A K Γ æqualis; adeoque (*per* 3ᵐ *hujus*) arcus Γ A æqualis est arcui A K. Sed arcus Γ B æqualis est arcui Θ K; quare arcus A Θ æqualis est arcui A B, ac propterea angulus A B Γ æqualis est angulo I Θ K. Angulus autem I Θ K æqualis est angulo Δ E Z; quare angulus A B Γ est æqualis angulo Δ E Z: atque angulus Z ex hypothesi æqualis est angulo Γ, sicut arcus E Z arcui Δ Z; quare (*per* 14ᵗᵃᵐ *hujus*) arcus A B æqualis est arcui Δ E, & arcus A Γ arcui Δ Z. Et jam demonstratum est angulum B æqualem esse angulo E. Q. E. D.



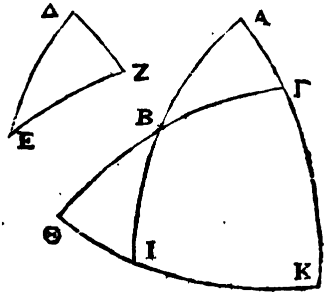
PROP. XVII. THEOR.

Si duo triangula Sphærica habeant tres angulos unius æquales tribus angulis alterius, quemque suo relativo; erunt quoque arcus triangula illa continentes inter se æquales, quisque relativo suo.

Sint A B Γ, Δ E Z duo triangula Sphærica, in quibus angulus A sit æqualis angulo Δ, & angulus B angulo E, sicut angulus Γ angulo Z: dico arcum A B æqualem esse arcui Δ E, & arcum B Γ arcui E Z, arcumque A Γ arcui Δ Z.

Producatur arcus A B ad I, & fiat B I ipsi Δ E æqualis; & producto B Γ ad Θ, fiat B Θ æqualis arcui E Z; & ducatur I Θ arcus circuli magni, qui producatur ad occursum arcus A Γ etiam producti in puncto K. Jam duo arcus Θ B, B I æquales sunt duobus Δ E, E Z, & angulo E æqualis est angulus B: quare arcus I Θ æqualis est arcui Δ Z, & angulus I angulo Δ, qui æqualis

qualis est angulo A; quare angulus I æqualis est angulo A: angulus vero Θ æqualis est angulo Z, qui æqualis est angulo Γ; adeoque angulus Θ æqualis est angulo Γ. Et quoniam angulus Γ exterior trianguli Θ K Γ æqualis est interiori & opposito angulo Θ, erunt (*per decimam hujus*) arcus Θ K, K Γ simul sumpti æquales semicirculo: pariterque cum angulus I exterior trianguli A I K æqualis sit opposito & interiori angulo A, erunt quoque duo arcus A K, K I æquales semicirculo; ac proinde duo arcus K Θ, K Γ sunt æquales duobus arcubus I K, K A. Auferantur utrinque duo arcus communes I K, K Γ, ac reliquus arcus Θ I erit æqualis arcui A Γ. Sed arcus Θ I æqualis est arcui Z Δ; quare arcus Z Δ æqualis est arcui A Γ: & angulus A æqualis est angulo Δ, uti angulus Γ angulo Z: quapropter (*per* 14^{m}. *hujus*) arcus A B æqualis est arcui Δ E, & B Γ arcui E Z. Quod erat demonstrandum.

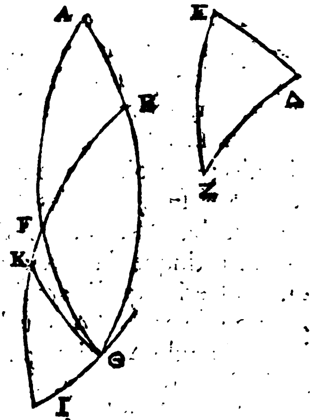


PROP. XVIII. THEOR.

Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos unius æquales duobus angulis alterius, quemque relativo suo; reliquum vero angulum unius majorem reliquo alterius: erit arcus subtendens majorem angulum major subtendente minorem. Si vero fuerit unus reliquorum arcuum unius trianguli, unà cum relativo suo in altero, æqualis semicirculo; erit arcus reliquus in uno æqualis arcui relativo in altero. Si vero fuerint majores semicirculo; erit arcus reliquus trianguli, cujus angulus minor est, major arcu relativo trianguli alterius. At si fuerint minores semicirculo, minor erit eodem.

Sint duo triangula Sphærica A B Γ, Δ E Z, in quibus angulus B æqualis sit angulo Δ, & angulus Γ angulo Z; angulus autem B excedat angulum A: dico quod arcus Z Δ major est arcu B Γ. Ac si arcus A Γ una cum relativo suo E Z simul sumpto sit æqualis semicirculo, erit arcus AB æqualis arcui ΔE. Quod si fuerint AΓ, EZ simul majores semicirculo, erit arcus AB major quam ΔE. Si vero AΓ, EZ minores sint semicirculo, erit etiam arcus AB minor arcu ΔE.

Producatur AΓ ad Θ, ita ut ΓΘ sit æqualis ipsi EZ; atque etiam BΓ ad I, ita ut ΓI sit æqualis arcui ΔZ; & describatur ΘI arcus circuli magni: ac manifestum est eum æqualem esse arcui ΔE, ob angulum Z æqualem angulo Γ.



Sint jam arcus AΓ, EZ æquales semicirculo, adeoque arcus AΓΘ erit semicirculus; quare si producatur arcus AB transibit per Θ. Ducatur ille, sitque arcus BΘ.

Itaque quoniam angulus I æqualis est angulo Δ, & angulus Δ æqualis est angulo B, erit angulus I æqualis angulo B. Est autem angulus B, exterior trianguli BΘI, æqualis interiori & opposito angulo I; quare duo arcus BΘ, ΘI æquales sunt semicirculo. Sed arcus ABΘ semicirculus est; quare arcus ABΘ æqualis est utrisque BΘ, ΘI; & sublato communi arcu BΘ, reliquus AB æqualis erit reliquo ΘI. Est autem ΘI ipsi ΔE æqualis, quare arcus AB æqualis est arcui ΔE.

Dico insuper arcum ΔZ majorem esse arcu BΓ. Etenim angulus ΓΘI æqualis est angulo E, & angulus E major est angulo A; quare angulus ΓΘI major est angulo A. Constituatur (*per* 1^{mam} *huj.*) ad punctum Θ in arcu ΘI angulus IΘK æqualis angulo A. Cumque angulus I, per nuper demonstrata, æqualis sit angulo B, & angulus IΘK æqualis angulo A, ac duo arcus, super quos sunt æquales anguli, æquales; erunt arcus reliqui æquales arcubus reliquis, quisque relativo suo; ac proinde arcus KI æqualis erit arcui ΓB. Arcus vero ΓI major est arcu KI, & ΓI æqualis est arcui ΔZ; quapropter ΔZ major erit arcu ΓB.

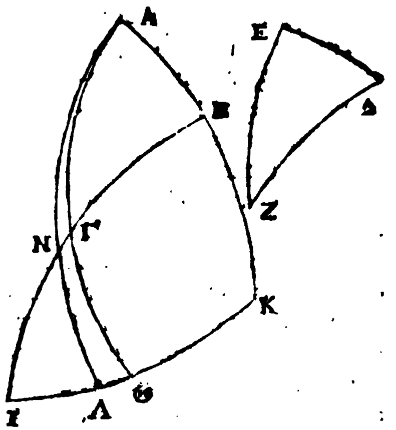
Rursus sint AΓ, ZE simul sumpti minores semicirculo: dico AB esse minorem quam ΔE.

Producantur arcus ΓΘ, ΓI, eo quo fecimus modo in præcedente figura, & ducatur ΘI arcus circuli magni. Quoniam vero arcus

cus

cus ΑΓ, ΕΖ simul minores sunt semicirculo, & ΒΖ æqualis est ipsi ΓΘ, erit arcus ΑΓΘ minor semicirculo. Cumque hic arcus ΑΒ productus transit ultra punctum Θ, producantur ΑΒ, ΘΙ ad occursum in puncto Κ. Demonstratum autem est in præcedentibus angulum Β æqualem esse angulo Ι, quare (*per* 10^{m}. *hujus*) ΒΚ, ΚΙ æquales sunt semicirculo. Quoniam vero angulus ΓΘΙ æqualis est angulo Ε, qui major est angulo Α, erit angulus ΓΘΙ major angulo Α; ac proinde duo arcus ΑΚ, ΚΘ minores erunt semicirculo: quare duo arcus ΒΚ, ΚΙ majores sunt duobus ΑΚ, ΚΘ: & sublatis communibus arcubus ΒΚ, ΚΘ, erit reliquus arcus ΑΒ minor arcu ΙΘ ipsi ΔΕ æquali; quapropter arcus ΑΒ minor erit arcu ΔΕ.

Dico præterea quod arcus ΔΖ major est arcu ΒΓ. Capiatur enim in arcu ΙΘ, quem ostendimus majorem arcu ΑΒ, arcus æqualis ipsi ΑΒ; sitque arcus ille ΙΛ, & ducatur ΑΛ arcus circuli magni, occurrens arcui ΙΓΒ in puncto Ν. Jam quoniam arcus ΙΛ æqualis est arcui ΑΒ, si ponamus duos arcus ΒΚ, ΚΛ communes, manifestum est duos arcus ΑΚ, ΚΛ æquales esse duobus ΒΚ, ΚΙ, qui æquales sunt semicirculo; quare duo arcus ΑΚ, ΚΛ sunt æquales semicirculo, atque adeo angulus exterior ΑΛΙ, in triangulo ΑΚΛ, æqualis est angulo opposito & interiori ΚΑΛ. Ostensus autem



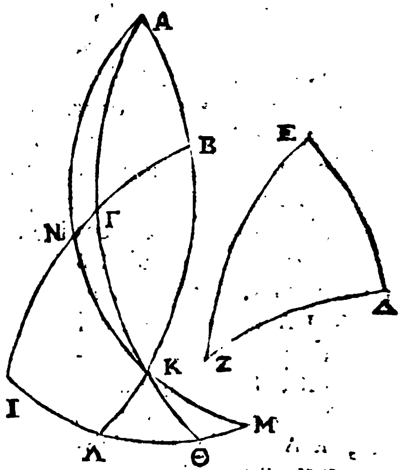
est angulus Ι æqualis ipsi ΑΒΓ, arcusque super quos sunt anguli æquales in duobus triangulis ΑΒΝ, ΛΝΙ, nempe arcus ΑΒ, ΛΙ, sunt æquales; quare (*per* 14^{m} *hujus*) arcus reliqui æquales erunt arcubus reliquis: ideo ΙΝ æqualis erit ipsi ΒΝ, et proinde arcus ΙΓ major erit arcu ΒΓ. Sed arcus ΙΓ æqualis est arcui ΔΖ, adeoque arcus ΔΖ major est arcu ΒΓ. Q. E. D.

Porro sint arcus ΑΓ, ΕΖ simul sumpti majores semicirculo: dico ΑΒ majorem esse arcu ΔΕ.

Producantur arcus ΓΙ, ΓΘ, ut in præcedentibus, & describatur arcus circuli magni ΙΘ. Quoniam autem duo arcus

ΑΓ,

Α Γ, Ε Ζ excedunt ſemicirculum, & Ε Ζ æqualis eſt ipſi Γ Θ; erit arcus Α Γ Θ major ſemicirculo. Cumque arcus Α Β productus occurrat arcui Γ Θ citra punctum Θ, producatur Α Β uſque dum occurrat arcui Ι Θ in Λ, & arcui Α Γ Θ in Κ; & ob angulum Α Β Γ æqualem angulo Γ Ι Θ, erunt (*per* 10m. *hujus*) duo arcus Β Λ, Λ Ι æquales ſemicirculo. Sed arcus Α Β Κ eſt ſemicirculus, quare duo arcus Β Λ, Λ Ι æquales ſunt arcui Α Β Κ; & ſublato communi arcu Β Κ, erit reliquus arcus Α Β æqualis arcubus Κ Λ, Λ Ι. Et quoniam angulus Θ, qui æqualis eſt angulo Ε (*ex hypotheſi*) major eſt angulo Α, & angulus Α æqualis eſt angulo Κ; erit angulus Θ major angulo Θ Κ Λ, quare (*per* 7m *huj.*) arcus Κ Λ major erit arcu Λ Θ, arcuſque Ι Λ, Λ Κ ſimul majores erunt arcu Ι Θ. Oſtendimus autem eos æquales arcui Α Β; quare arcus Α Β major eſt arcu Ι Θ arcui Δ Ε æquali. Q. E. D.



Dico quoque arcum Δ Ζ majorem eſſe arcu Β Γ. Quoniam enim arcus Ι Θ minor eſt arcu Α Β, fiat arcus Ι Θ Μ æqualis arcui Α Β; & per puncta Μ, Κ tranſeat arcus circuli magni, qui productus, ut manifeſtum eſt, perveniet ad punctum Α. Sit ille arcus Μ Κ Α, occurrens arcui Β Ι in puncto Ν. Cumque angulus Ι æqualis eſt angulo Α Β Γ, erunt duo arcus Β Λ, Λ Ι æquales ſemicirculo; & arcus Α Β Κ eſt ſemicirculus, quare arcus Α Β Κ æqualis eſt utriſque Β Λ, Λ Ι: & ablato arcu communi Β Κ, erit reliquus arcus Α Β æqualis duobus arcubus Κ Λ, Λ Ι. Arcus autem Α Β æqualis eſt arcui Ι Θ Μ, quare arcus Ι Λ, Λ Κ ſimul æquales ſunt arcui Ι Θ Μ. Auferatur utrinque arcus Ι Λ, & reliquus arcus Λ Κ æqualis erit arcui Λ Μ, unde (*per* 2dam *huj.*) angulus Μ æqualis erit angulo Λ Κ Μ, hoc eſt angulo Β Α Ν: quare angulus Β Α Ν æqualis eſt angulo Μ, & arcus Α Β æqualis eſt arcui Ι Μ, ſuper quos ſunt anguli æquales; quare (*per* 14m *hujus*) arcus reliqui æquales erunt arcubus reliquis,

liquis, quisque relativo suo: arcus itaque I N æqualis est arcui B N; adeoque arcus I Γ, cui æqualis est arcus Δ Z, major erit arcu B Γ. Q. E. D.

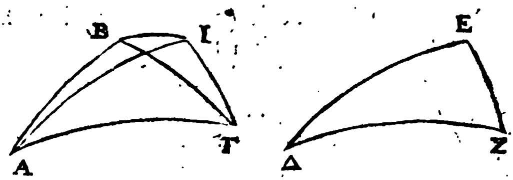
Hanc etiam Propositionem in tres dividunt Arabes, *ita ut sequens XIX*na *apud eos sit Prop. XXII. Unica vero est tam in Codd.* Hebræis *quam* Maurolyco.

PROP. XIX. THEOR.

Si duo triangula Sphærica habeant unum ex arcubus unius æqualem arcui alterius; anguli autem æqualibus arcubus adjacentes ita se habeant, ut alter major sit, alter minor relativo suo; reliqui vero anguli, quibus subtenduntur arcus æquales, non minores sint recto: erunt arcus angulis majoribus subtensi majores arcubus qui minoribus angulis subtenduntur.

Sint A B Γ, Δ E Z duo triangula Sphærica, sitque arcus A Γ æqualis arcui Δ Z, & angulus A major angulo Δ, angulus vero Γ minor angulo Z, nec sit aliquis ex angulis B, E minor recto: dico arcum B Γ majorem esse arcu E Z, & arcum Δ E majorem arcu A B.

Quoniam angulus Γ minor est angulo Z, constituatur ad punctum Γ super arcum A Γ angulus A Γ I, æqualis angulo Z; & fiat arcus Γ I æqualis arcui Z E, & transeat per duo puncta A, I arcus circuli magni A I. Jam quia duo anguli duorum triangulorum Δ Z E, A Γ I sunt æquales, nempe anguli



A Γ I, Δ Z E; arcusque eosdem continentes, nempe arcus A Γ ipsi Δ Z, & Γ I ipsi Z E æquales: erit (*per 4*tam *hujus*) arcus quoque A I æqualis arcui Δ E, & angulus A I Γ angulo Δ E Z. Quoniam autem anguli Δ E Z, A B Γ non sunt minores recto, si ducatur arcus circuli magni B I, necesse est angulos Γ B I, A I B minores esse recto; ac propterea angulus A B I major erit angulo A I B: unde (*per 7*m *hujus*) arcus A I major erit arcu A B. Pariter angulus Γ I B major est angulo Γ B I, adeoque & arcus Γ B major erit arcu Γ I. Sed arcus A I æqualis est arcui

Δ E,

ΔΕ; quare arcus ΔΒ major erit arcu ΑΒ. Arcus autem ΓΙ æqualis est arcui ΕΖ; ac propterea arcus ΓΒ excedet arcum ΖΒ. Q. E. D.

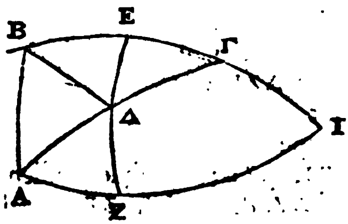
PROP. XX. THEOR.

In omni triangulo Sphærico, si aliquis angulus æqualis fuerit duobus reliquis simul sumptis, ac à majori angulo educatur arcus circuli magni, bifariam dividens arcum angulo illi subtensum; erit arcus ille eductus æqualis dimidio lateris divisi. Ac si fuerit angulus ille major duobus reliquis, erit arcus eductus minor dimidio basis. Si vero minor fuerit duobus illis, tum major erit arcus ille dimidio basis.

Sit ΑΒΓ triangulum Sphæricum, cujus angulus Β æqualis sit duobus reliquis angulis Α, Γ; & dividatur arcus ΑΓ bifariam in Δ, & per puncta Β, Δ ducatur arcus circuli magni ΒΔ: dico arcum ΒΔ æqualem esse arcui ΑΔ vel ΔΓ.

Dividatur arcus ΒΓ bifariam in Ε, & per Ε, Δ transeat arcus circuli magni ΕΔ, qui producatur *ad* Ζ, *ita ut* ΔΖ *sit æqualis ipsi* ΕΔ; *& ducatur arcus circuli magni* ΑΖ, *qui productus* occurrat arcui ΒΓ etiam producto in puncto Ι.

Quoniam arcus ΕΔ, ΔΖ; ΑΔ, ΔΓ sunt æquales, uti angulus ΕΔΓ angulo ΑΔΖ, erit (*per* 4^{m}. *huj.*) basis ΕΓ æqualis basi ΑΖ. qui ΕΓ æqualis est ipsi ΕΒ; quare ΒΕ æqualis est ipsi ΑΖ: & (*per eandem* 4^{tam}) angulus ΔΑΖ æqualis est angulo ΕΓΔ. Addatur utrinque communis angulus ΒΑΔ; & erunt duo anguli ΒΑΓ, ΒΓΑ, hoc est (*ex hypoth.*) angulus ΑΒΓ, æquales angulo ΒΑΙ; quare (*per* 2^{m} *hujus*) arcus ΑΙ æqualis est arcui ΒΙ. Ostensus autem est arcus ΒΕ æqualis arcui ΑΖ, adeoque reliquus arcus ΕΙ æqualis est reliquo ΙΖ: unde & angulus ΙΖΕ æqualis est angulo ΙΕΖ; & angulus ΑΖΕ æqualis angulo ΖΕΒ, *hoc est* ΑΖΔ *angulo* ΔΕΒ. Sed angulus ΑΖΔ æqualis est angulo ΔΕΓ; æquales igitur sunt anguli ΔΕΒ, ΔΕΓ;



ΔΕΓ; arcus autem ΒΕ æqualis est ipsi ΕΓ, & est arcus ΕΔ communis utrique triangulo; quare arcus ΓΔ æqualis est arcui ΒΔ: ΓΔ vero semissis est arcus ΑΓ; adeoque ΒΔ æqualis est semissi arcus ΑΓ. Q. E. D.

Quod si angulus ΑΒΓ major fuerit duobus reliquis angulis: dico ΒΔ minorem esse quam ΔΓ. Eodem etenim argumento probabitur angulum ΖΑΔ æqualem esse angulo ΔΓΕ: ac si adjiciatur angulus ΒΑΓ communis, manifestum est angulum ΒΑΖ, qui æqualis est utrisque ΒΑΔ, ΒΓΔ simul, minorem esse angulo ΑΒΓ; ac proinde angulus ΑΒΓ major est angulo ΒΑΖ; unde arcus ΑΙ excedet arcum ΒΙ. Est autem ΒΕ æqualis arcui ΑΖ, quare reliquus arcus ΖΙ major est reliquo ΕΙ, ac propterea angulus ΖΕΙ major angulo ΕΖΙ; adeoque angulus ΑΖΔ major est angulo ΒΕΔ: sed angulus ΔΕΓ æqualis est angulo ΑΖΔ; quare angulus ΔΕΓ major est angulo ΒΕΔ, & arcus ΒΕ æqualis est arcui ΕΓ, & arcus ΕΔ communis: quare arcus ΔΓ excedit arcum ΔΒ. Sed ΔΓ semissis est arcus ΑΓ: constat itaque propositum, nempe quod si duo reliqui anguli trianguli ΑΒΓ minores fuerint angulo Β, arcus eductus ab angulo Β ad bisectionem lateris eidem subtensi minor erit dimidio ejus.

Ac pari processu demonstraberis quod, si trianguli ΑΒΓ angulus Β minor fuerit duobus angulis Α, Γ, erit arcus ΒΔ major arcu ΔΓ, hoc est dimidio ipsius ΑΓ.

Dico etiam quod, si angulus Β non fuerit major recto, arcus ΒΔ major erit arcu ΔΓ. Etenim tres anguli cujuscunque trianguli Sphærici (*per* 11^{mam} *hujus*) majores sunt duobus angulis rectis; adeoque erunt duo anguli Α,Γ simul majores recto; ac proinde majores sunt angulo Β: & per nuper demonstrata, si fuerit angulus Β minor angulis Α, Γ simul sumptis, erit arcus ΒΔ major arcu ΔΓ.

Coroll. Hinc manifestum est angulum in semicirculo, qui in plano rectus est, in superficie Sphæræ semper majorem esse recto. In hoc autem conveniunt, quod angulus ille sit ubique æqualis duobus reliquis trianguli inscripti angulis simul sumptis.

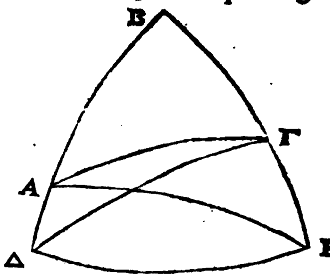
PROP. XXI.

In omni triangulo Sphærico, si angulus aliquis, non minor recto, contineatur sub arcubus quorum uterque sit minor quadrante: erit uterque angulus reliquus acutus.

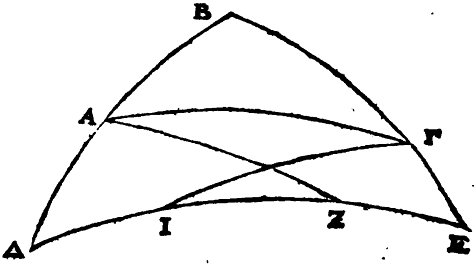
D Sit

Sit A B Γ triangulum Sphæricum, ſitque angulus ejus B non minor recto, arcus vero A B, B Γ ſint minores quartâ circuli: dico utrumque angulum A, Γ minorem eſſe angulo recto

Quoniam enim uterque arcus B A, B Γ minor eſt quadrante; fiant arcus B A Δ, B Γ E circuli quadrantes; & ducatur Δ E arcus circuli magni. Jam quoniam angulus B non eſt minor recto, vel erit rectus, vel recto major. Si vero fuerit rectus, ac ducantur arcus circulorum magnorum Δ Γ, A E; manifeſtum eſt utrumque arcum circuli quadrantem eſſe; adeoque angulus exterior Δ Γ B trianguli Δ Γ E æqualis eſt angulo eidem oppoſito, nempe angulo E. Angulus autem E rectus eſt; quare angulus Δ Γ B eſt etiam rectus: atque adeo angulus A Γ B eſt minor recto. Pari modo conſtabit angulum Γ A B eſſe minorem recto.



Quod ſi angulus B major fuerit recto, erit arcus Δ E major quadrante; arcus vero B Γ E, B A Δ ſunt quadrantes: quare punctum B polus eſt arcus Δ E, atque angulus Δ eſt rectus (ſecat enim arcus B Δ arcum Δ E ad angulos rectos, quia tranſit per polos ejus.) Fiat igitur arcus Δ Z quadrans circuli, & erit punctum Z polus arcus Δ A B. Pariterque ſi fiat E I quadrans, erit punctum I polus arcus B Γ E. Ducantur de punctis Z, I arcus circulorum magnorum A Z, Γ I; ac manifeſtum eſt eos eſſe circuli quadrantes: quapropter duo arcus Δ Z, Z A ſimul ſunt æquales ſemicirculo; ac proinde angulus exterior Z A B æqualis erit angulo Δ eidem oppoſito, atque ideo rectus. Angulus igitur Γ A B minor eſt recto. Nec abſimili modo conſtabit angulum A Γ B minorem eſſe recto. Q. E. D.



PROP. XXII. THEOR.

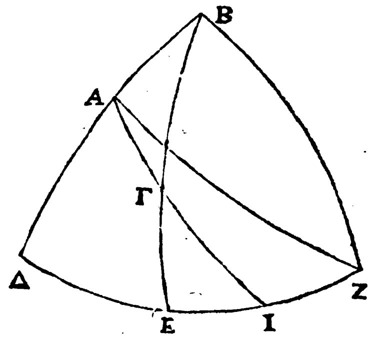
In omni triangulo Sphærico, ſi aliquis ex angulis non fuerit

rit minor recto, ac uterque arcuum alium quemlibet angulum continentium fuerit minor quadrante: erit latus reliquum quadrante minus, & quilibet reliquorum angulorum acutus.

In triangulo sphærico A B Γ sit angulus A non minor recto, arcus autem A B, B Γ sint quadrante circuli minores: dico arcum A Γ minorem esse quadrante circuli, & utrumque angulum B, Γ minorem esse recto.

Quoniam duo arcus A B, B Γ sunt minores quadrantibus, producantur A B ad Δ & B Γ ad E, ita ut B Δ, B E sint quadrantes; & per puncta Δ, E describatur arcus circuli magni, cujus polus, per jam demonstrata, est punctum B: & producantur arcus A Γ, Δ E usque dum conveniant in puncto I.

Quoniam angulus B A Γ non est minor recto, erit vel rectus vel recto major. Sit primum major recto, & ducatur arcus A Z ad rectos angulos arcui B Δ, qui occurrat Δ E I producto in puncto Z: quapropter Z erit polus arcus B Δ. Per puncta B, Z, transeat arcus circuli magni B Z, & erit angulus A B Z rectus, ac proinde angulus A B Γ minor recto. Quoniam vero arcus E I ad rectos angulos insistit super



arcum B Γ E, ac minor est quadrante circuli; erit (*per* 1m III. *Theod.*) recta linea jungens puncta I, E minor jungente puncta I, Γ; adeoque arcus I Γ major erit arcu I E, & angulus Γ E I major angulo E Γ I. Sed angulus Γ E I est rectus, quare angulus E Γ I minor est recto. Est autem angulus A Γ B æqualis angulo E Γ I; quare angulus A Γ B minor est recto. Demonstravimus itaque utrumque angulum B, Γ esse minorem recto. Quoniam vero arcus A Δ insistit ad angulos rectos super ipsum Δ E I, erit juncta recta linea A I minor jungente puncta A, Z; ac propterea arcus A Z major arcu A I. Est autem A Z quadrans, quare arcus A I, & multo magis arcus A Γ, minor erit quadrante.

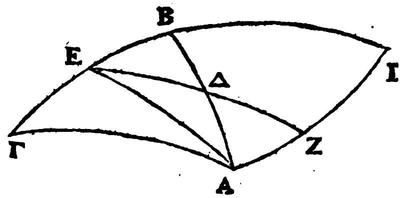
Quod si angulus A sit rectus, manifestum est punctum I devenire polum arcus Δ A B; adeoque (*per præced.*) utrumque gulum B, Γ minorem esse recto. Arcus autem AI est circuli quadrans; arcus igitur AΓ minor erit quadrante. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo qualibet latera dividantur bifariam; erit arcus circuli magni connectens puncta bisectionum major dimidio reliqui lateris.

Trianguli Sphærici ABΓ dividantur latera AB, BΓ bifariam in punctis Δ, E; & per Δ, E transeat arcus circuli magni: dico arcum ΔE majorem esse dimidio lateris AΓ.

Producatur arcus ΔE ad Z, usque dum ΔZ fuerit æqualis ipsi ΔE; & ducatur AZ arcus circuli magni, qui producatur ad occursum ipsius BΓ etiam producti in puncto I. Itaque quoniam arcus EΔ, ΔB sunt æquales ipsis ΔZ, AΔ, & anguli ad verticem sunt æquales, erit arcus EB, hoc est EΓ, arcui AZ æqualis; & angulus ABΓ, exterior trianguli BAI, æqualis erit angulo interiori IAB eidem opposito: quare (*per* 10^{m} *hujus*) arcus AI, IB simul sumpti æquales sunt semicirculo. Adjiciatur arcus BE, & erunt arcus AI, IE majores semicirculo. Ducatur AE arcus circuli magni, & erit angulus ΓEA (*per eandem* 10^{m}) minor angulo EAZ. Sunt autem arcus ΓE, EA æquales arcubus EA, AZ, singuli singulis; quare (*per* 8^{m} *hujus*) arcus ZE major erit arcu ΓA. Sed ΔE semissis est arcus ZE; quare arcus ΔE major est semisse ipsius AΓ. Q. E. D



PROP. XXIV. THEOR.

Si trianguli Sphærici aliquis angulus non minor fuerit recto, ac dividantur latera eundem continentia bifariam; ducatur autem per puncta bisectionum arcus circuli magni: erunt anguli, sub ducto arcu & bisectis lateribus contenti, & respectu anguli non recto minoris interiores, minores

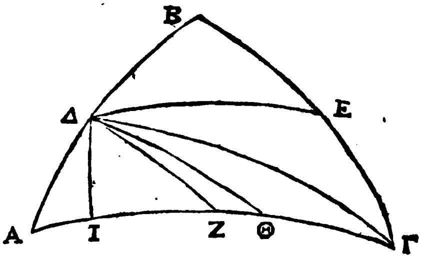
anguli

angulis ipsius trianguli; nempe unusquisque relativo suo ad idem latus constituto minor.

Trianguli Sphærici ΑΒΓ sit angulus Β non minor recto, & dividantur arcus ΑΒ, ΒΓ bifariam in punctis Δ, Ε; & ducatur arcus circuli magni ΔΕ: dico angulum ΒΔΕ minorem esse angulo ΒΑΓ, & angulum ΒΕΔ minorem angulo ΒΓΑ.

Quoniam arcus ΑΒ, ΒΓ sunt latera trianguli Sphærici, minores erunt semicirculo (*per def.* 2^m^.) Est autem ΒΔ dimidium ipsius ΑΒ, & ΒΕ dimidium ipsius ΒΓ: quare uterque ΒΔ, ΒΕ minor est quartâ circuli; & angulus Β non minor est recto; quare (*per* 22^m^ *huj.*) erit uterque angulorum ΒΔΕ, ΒΕΔ minor recto. Jam si neuter angulorum Α, Γ minor fuerit recto, manifestum est angulum ΒΔΕ acutum minorem esse angulo Α obtuso, & angulum ΒΕΔ minorem angulo Γ.

Quod si fuerit uterque angulus Α, Γ minor recto: dico etiam angulum ΒΕΔ minorem esse angulo Γ, & ΒΔΕ minorem angulo Α.



Dividatur enim arcus ΑΓ bifariam in Ζ, ac ducantur arcus circulorum magnorum ΔΖ, ΓΔ. Jam quoniam ΒΕ æqualis est ipsi ΕΓ, ac ΔΕ communis est, atque angulus ΔΕΒ minor est recto, atque adeo minor angulo ΔΕΓ; erit (*per* 8^m^ *hujus*) arcus ΒΔ, hoc est ΔΑ, minor arcu ΔΓ. Angulus autem ΑΖΔ minor est angulo ΔΖΓ; quare angulus ΔΖΑ est minor recto, atque angulus Α est etiam minor recto; quare duo anguli Ζ, Α super arcum ΑΖ constituti sunt singuli minores recto: quapropter arcus circuli magni, de puncto Δ ad angulos rectos super arcum ΑΓ demissus, occurret arcui ΑΖ. Sit ille arcus ΔΙ. Cumque angulus ΑΙΔ rectus, est, atque angulus Α acutus, erit arcus ΑΔ major arcu ΔΙ. Sed arcus ΑΔ minor est quadrante, quare arcus ΔΙ est etiam minor quadrante. Quoniam vero ΔΙ est ad angulos rectos super arcum ΑΓ, & minor est quadrante, erit (*per* 1^mam^ III. *Theod.*) recta jungens puncta Δ, Ι minor quavis alia de Δ ad arcum ΑΓ prodeunte, eidemque propior minor erit remotiore. Sed arcus

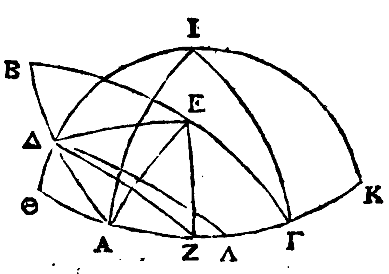
arcus ΔE major est dimidio ipsius AΓ, ut demonstratum est in præcedente 23^{ia}; quare ΔE major est quam AZ: ac si fiat AΘ ipsi ΔE æqualis,& ducatur ΔΘ arcus circuli magni; erit ΔΘ major quam ΔZ. Verum ΔZ (*per* 23^{m} *hujus*) est major dimidio ipsius BΓ, hoc est arcu BE; quare ΔΘ major est quam BE. Est autem AΔ æqualis ipsi ΔB, uti & AΘ ipsi ΔE; basis vero ΔΘ major est basi EB: quare angulus ΔAΘ major est angulo BΔE. Pari argumento probabitur angulum EΓA majorem esse angulo BEΔ. Ostendimus itaque angulum BΔE minorem esse angulo A, angulumque ΔEB minorem angulo Γ. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.

Si trianguli Sphærici aliquis angulus non minor fuerit recto, ac dividatur latus eidem oppositum bifariam; ducantur autem à puncto bisectionis duo arcus circulorum magnorum ad puncta quibus bisecantur reliqua duo latera: erunt anguli, quos continent arcus sic ducti cum lateribus trianguli angulum non recto minorem continentibus, minores quam angulus ille non minor recto.

Sit trianguli Sphærici ABΓ angulus A non recto minor, ac dividatur arcus BΓ bifariam in E, & ad puncta media arcuum AB, AΓ ducantur arcus circulorum magnorum EΔ, EZ. Dico utrumque angulum BΔE, EZΓ minorem esse angulo A.

Quoniam angulus A non minor est recto, vel erit rectus, vel recto major. Si vero fuerit rectus, ostendimus (*Prop.* 11^{ma} *huj.*) tres angulos omnis Sphærici trianguli majores esse duobus rectis; quare duo anguli B, Γ majores sunt angulo A: ac ducto AE arcu circuli magni, constat, (ex demonstratis in Prop. 20.)



arcum AE majorem esse dimidio ipsius BΓ, hoc est, quam BE vel EΓ. Sed AΔ æqualis est ipsi ΔB, & ΔE est communis, basis autem AE major est base EB: quare (*per* 8^{m} *huj.*) angulus

BΔE

Β Δ Ε minor eſt angulo Α Δ Ε, atque ideo minor recto. Quapropter angulus ille minor erit angulo Β Α Γ, recto ſcilicet. Pariterque angulus Ε Ζ Γ minor erit angulo Β Α Γ.

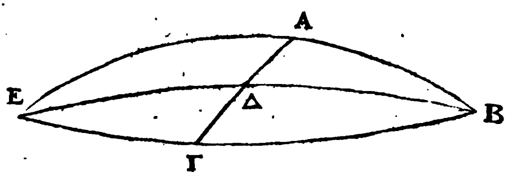
Quod ſi angulus Α major fuerit recto, angulus autem Β Δ Ε minor ſit recto, res manifeſta eſt: nempe quod acutus minor eſt obtuſo Β Α Γ. Sit autem angulus Β Δ Ε major recto: dico quoque illum minorem eſſe angulo Β Α Γ. Quoniam enim uterque arcus Β Δ, Β Ε minor eſt quadrante, atque angulus Β Δ Ε major eſt recto; erit (*per* 22^{m} *hujus*) angulus Δ Β Ε minor recto. Eſt autem Β Δ æqualis ipſi Δ Α, & Δ Ε eſt communis, atque angulus Β Δ Ε major eſt angulo Α Δ Ε; quare (*per* 8^{m} *hujus*) arcus Β Ε major eſt arcu Ε Α. Cumque Β Ε æqualis ſit ipſi Ε Γ, arcus Ε Γ major erit quam Ε Α. Cum autem arcus Γ Ζ æqualis ſit ipſi Ζ Α, & Ε Ζ communis; erit (*per* 8^{m} *hujus*) angulus Ε Ζ Γ major angulo recto. Arcus autem Ε Γ, Γ Ζ ſinguli minores ſunt quadrantibus, quare (*per* 22^{m} *huj.*) angulus Ε Γ Α minor eſt recto. Conſtituantur ad puncta Γ & Α duo arcus circulorum magnorum Α Ι, Γ Ι ad angulos rectos ſuper arcum Α Γ, qui conveniant in puncto Ι; & (*per* 13^{m} I. *Theod.*) erit punctum Ι polus arcus Α Γ. Producatur arcus circuli magni per Δ, Ι ductus, uſque dum occurrat arcui Α Γ producto in punctis Θ, Κ, ab utroque latere puncti Δ; & erit arcus Κ Ι quadrans circuli: unde arcus Κ Ι Δ major erit quadrante circuli, ac multo major quam Δ Θ. Jam ſuper diametrum circuli Θ Α Γ Κ, quæ eſt linea recta jungens puncta Θ, Κ, inſiſtit ad angulos rectos ſemicirculus Θ Δ Κ, diviſus ad Δ in portiones inæquales, quarum minor eſt arcus Δ Θ: recta igitur jungens puncta Δ, Θ (*per* 1^{m} III. *Theod.*) minor erit quâvis aliâ rectâ de puncto Δ ad arcum Θ Γ Κ prodeunte, eidemque propior minor erit remotiore. Arcus autem Ε Δ major eſt dimidio arcus Α Γ, hoc eſt arcu Α Ζ; quare Ε Δ major eſt quam Α Ζ. Fiat Α Λ æqualis ipſi Ε Δ, & ducatur Δ Λ arcus circuli magni, & recta quæ prodit de Δ ad Ζ minor erit junctâ Δ Λ. Recta autem Δ Ζ ſubtendit arcum Δ Ζ majorem dimidio arcus Β Γ, hoc eſt arcu Β Ε; quare arcus Δ Λ multo major eſt arcu Β Ε. Verum arcus Β Δ æqualis eſt arcui Δ Α, & Δ Ε ipſi Λ Α; arcus autem Β Ε minor eſt arcu Δ Λ: quare (*per* 8^{m} *hujus*) angulus Β Δ Ε minor eſt angulo Β Α Γ. Pari argumento probabitur angulum Ε Ζ Γ minorem eſſe angulo Β Α Γ. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXVI. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo quævis latera simul sumpta fuerint semicirculo æqualia, ac ab angulo sub iisdem contento ad latus reliquum ducatur arcus circuli magni dividens angulum illum bifariam: dividet ille arcus latus reliquum bifariam. Ac si dividat latus reliquum bifariam; erit quoque angulus bisectus, & erit arcus eductus circuli quadrans.

Sit Α Β Γ triangulum Sphæricum, cujus duo latera Α Β, Β Γ simul sumpta sint æqualia semicirculo; & ex angulo Β prodeat ad arcum Α Γ arcus circuli magni Β Δ: dico quod, si fuerit angulus Α Β Δ æqualis angulo Γ Β Δ, arcus quoque Α Δ æqualis erit arcui Δ Γ. Ac si fuerit Α Δ æqualis arcui Δ Γ, erit angulus Α Β Δ æqualis angulo Δ Β Γ, atque insuper arcus Β Δ erit circuli quadrans.



Producantur arcus Α Β, Β Δ, Β Γ; ac manifestum est eos concursuros in eodem puncto, quod sit Ε. Quoniam vero Α Β, Β Γ sunt æquales semicirculo, erit (*per* 10^{m} *hujus*) angulus Δ Γ Ε æqualis angulo Β Α Δ. Patet quoque Β Γ æqualem esse ipsi Α Ε, uti Α Β ipsi Ε Γ; & angulus Α Β Δ æqualis est angulo Δ Ε Γ, & latera apud quos sunt æquales illi anguli, nempe Α Β, Ε Γ, sunt æqualia: quare (*per* 14^{m} *hujus*) duo arcus reliqui sunt æquales duobus reliquis respective. Arcus igitur Α Δ æqualis est arcui Δ Γ, & Β Δ arcui Δ Ε. Sed Β Ε est semicirculus; adeoque Β Δ est quadrans circuli.

Quod si ponatur Α Δ ipsi Δ Γ æqualis; dico angulum Α Β Δ æqualem esse angulo Δ Β Γ, & Β Δ esse circuli quadrantem. Est enim angulus Δ Γ Ε æqualis angulo Β Α Δ, & Α Δ æqualis est ipsi Δ Γ, uti Α Β ipsi Γ Ε; quare (*per* 4^{m} *huj.*) arcus Β Δ æqualis est arcui Δ Ε, & angulus Α Β Δ angulo Δ Ε Γ, hoc est angulo Δ Β Γ. Arcus autem Β Ε est semicirculus, & Β Δ dimidium est ipsius Β Ε; quare Β Δ est circuli quadrans. Q. E. D.

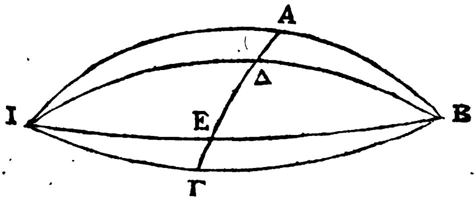
PROP.

PROP. XXVII. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo latera simul sumpta æqualia fuerint semicirculo, & ab angulo sub iisdem contento cadant in latus reliquum duo alii arcus, cum prioribus lateribus æquales angulos continentes: abscindent hi arcus è reliquo latere portiones æquales. Et è contra, si arcus in latus reliquum cadentes absciderint ab eodem duos arcus æquales: continebunt cum lateribus semicirculo æqualibus angulos æquales, arcusque ipsi in utroque casu erunt semicirculo æquales.

In triangulo Sphærico ABΓ sint arcus AB, BΓ simul sumpti æquales semicirculo, & de puncto B prodeant ad arcum AΓ duo arcus circulorum magnorum BΔ, BE, qui contineant cum ipsis AB, BΓ angulos æquales ABΔ, EBΓ: dico quod AΔ æqualis est ipsi ΓE; quodque arcus BΔ, BE simul sumpti sunt æquales semicirculo.

Producantur enim arcus AB, ΔB, EB, ΓB ad occursum; ac manifestum est eos occursuros esse in eodem puncto. Occurrant ad I. Cumque arcus AB, BΓ sunt semicirculo æquales, erit



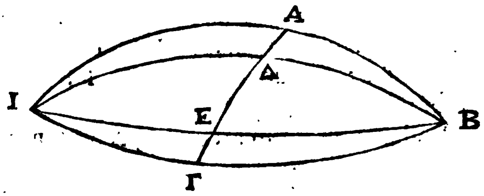
angulus AΓI æqualis angulo ΓAB; & angulus ABΔ æqualis est angulo EBΓ, hoc est angulo ΓIE; arcus autem IΓ æqualis est arcui AB, apud quos sunt anguli illi æquales: quapropter (*per* 14^{m} *hujus*) arcus ΓE æqualis est arcui AΔ, & arcus EI arcui BΔ. Pari modo constabit arcum IΔ arcui BE esse æqualem: quare arcus BΔ, BE simul æquales erunt arcubus ΔI, IE simul sumptis; ac propterea arcus BΔ, BE simul æquales erunt semicirculo. Q. E. D.

Et converso argumento demonstrabitur, quod, si fuerit arcus AΔ æqualis arcui EΓ, angulus ABΔ æqualis erit angulo EBΓ; quodque ΔB, BE simul sumpti erunt semicirculo æquales.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo latera sint inæqualia, & simul sumpta conficiant semicirculum; & ab angulo sub iisdem contento prodeant ad latus reliquum duo alii arcus itidem semicirculo æquales: continebunt hi arcus cum prioribus angulos æquales, simulque abscindent ex arcu reliquo portiones æquales.

In triangulo Sphærico A B Γ sint duo arcus A B, B Γ inæquales, verum simul semicirculo æquales; ac educantur è puncto B duo alii arcus circulorum magnorum B Δ, B E, qui simul sint etiam semicirculo æquales: dico angulum A B Δ æqualem esse angulo Γ B E, arcumque Γ E arcui A Δ.



Quoniam enim A B, B Γ sunt æquales semicirculo; erit angulus E Γ I æqualis angulo B A Δ; & ob arcus B Δ, B E etiam æquales semicirculo, erit angulus A Δ B æqualis angulo B E Δ, hoc est, angulo Γ E I. Punctum autem B non est polus arcus A Γ, quia arcus B Γ non est æqualis ipsi B A; &, per jam demonstrata, arcus A B æqualis est arcui Γ I, uti E I arcui B Δ: habent itaque duo triangula A B Δ, Γ I E duos angulos unius æquales duobus angulis alterius respective; & æquales sunt inter se arcus reliquos angulos continentes; neque sunt B, I poli arcuum reliquorum A Δ, Γ E: erit igitur (*per* 15m *hujus*) arcus reliquus arcui reliquo, & angulus reliquus reliquo angulo æqualis; hoc est, arcus Γ E æqualis erit arcui Δ A, & angulus Γ I E angulo A B Δ æqualis. Sed angulus Γ I E æqualis est angulo Γ B E; quare angulus Γ B E æqualis est angulo A B Δ. Q. E. D.

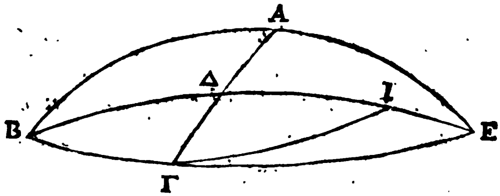
PROP. XXIX. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo latera simul sumpta fuerint minora semicirculo, sive arcus circuli magni angulum sub iisdem

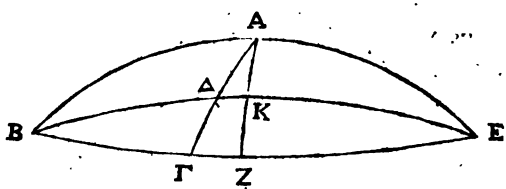
iisdem comprehensum bifariam diviserit, sive transierit per medium lateris reliqui: in utroque casu erit arcus ille eductus minor quadrante circuli.

In triangulo Sphærico Α Β Γ sint duo latera Α Β, Β Γ simul sumpta minora semicirculo, & educatur ex angulo Β arcus circuli magni Β Δ, dividens angulum Β bifariam, vel etiam arcum Α Γ: dico quod arcus Β Δ minor est quadrante circuli.

Dividat primo arcus Β Δ arcum Α Γ bifariam; productisque Α Β Β Γ, Β Δ, manifestum est eos occurrere in eodem puncto, quod sit Ε. Cum autem duo arcus Α Β, Β Γ sint minores semicirculo, erit angulus Α Γ Ε (*per* 10^{m} *hujus*) major angulo Γ Α Β. Constituatur ad punctum Γ, super arcum Γ Α, angulus æqualis angulo Γ Α Β, puta angulus Α Γ Ι; angulus autem Γ Δ Ι æqualis est angulo ad verticem Α Δ Β; arcusque Γ Δ æqualis est ipsi Α Δ, qui quidem duo sunt arcus apud quos sunt duorum triangulorum anguli æquales inter se: ac propterea (*per* 14^{m} *hujus*) arcus Β Δ æqualis erit ipsi Δ Ι. Sed Δ Ι minor est quam Δ Ε; quare arcus Β Ε, qui semicirculus est, major erit duplo ipsius Β Δ: proinde Β Δ minor erit quadrante circuli.



Secet jam arcus Β Δ angulum Β bifariam: dico arcum Β Δ minorem esse quadrante circuli. Quoniam enim duo arcus Α Β, Β Γ minores sunt semicirculo, & arcus Β Γ Ε est semicirculus; erit Γ Ε quam Α Β major. Fiat Ε Ζ æqualis ipsi Α Β, & ducatur arcus circuli magni Α Ζ, occurrens arcui Β Ε in puncto Κ inter Δ, Ε. Sunt autem duo arcus Α Ε, Ε Ζ æquales duobus Β Α, Α Ε; quare duo arcus Α Ε, Ε Ζ sunt æquales semicirculo; ac propterea (*per* 10^{m} *hujus*) angulus exterior trianguli Α Ε Ζ, nempe angulus Β Α Ζ, æqualis est angulo Α Ζ Β interiori



& eidem opposito. Sed & angulus ΑΒΔ æqualis est angulo ΔΒΓ, qui æqualis est angulo ΖΕΚ: quare (*per* 14^{m} *hujus*) arcus ΒΚ æqualis est arcui ΚΕ. Est autem arcus ΒΚ quadrans circuli, quo minor est arcus ΒΔ; quare arcus ΒΔ minor est quadrante circuli. Q. E. D.

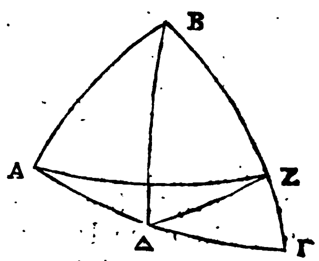
Coroll. Hinc etiam manifestum est, quod, si latera duo trianguli simul sumpta excesserint semicirculum, erit arcus bifariam dividens tum angulum tum latus tertium quadrante major.

PROP. XXX. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo latera fuerint inæqualia, simulque sumpta minora semicirculo; & ab angulo sub iisdem contento educatur arcus dividens illum bifariam: erit latus reliquum in segmenta inæqualia divisum, quorum majus adjacebit majori è lateribus angulum continentibus. Si vero arcus eductus diviserit latus reliquum bifariam: tum dividet angulum in portiones inæquales, quarum major adjacebit minori ex arcubus angulum divisum continentibus.

Sit trianguli Sphærici ΑΒΓ majus latus ΒΓ; sintque ΑΒ, ΒΓ simul minores semicirculo, & ducatur arcus ΒΔ secans angulum ΑΒΓ bifariam, & occurrens tertio lateri ΑΓ in Δ: dico quod arcus ΔΓ major est arcu ΔΑ.

Quoniam ΒΓ major est quam ΑΒ, fiat ΒΖ ipsi ΑΒ æqualis, & ducatur ΔΖ arcus circuli magni. Cum autem ΒΖ æqualis est ipsi ΑΒ, & ΒΔ est communis; angulus vero ΖΒΔ angulo ΑΒΔ æqualis: erit (*per* 4^{m} *hujus*) arcus ΔΖ æqualis arcui ΑΔ, & angulus ΒΖΔ angulo ΒΑΔ æqualis. Anguli autem ΒΑΔ, ΒΓΔ simul sumpti (*per* 10^{m} *huj.*) minores sunt duobus rectis, quia duo arcus ΑΒ, ΒΓ simul sumpti sunt minores semicirculo: quare duo anguli ΒΑΔ, ΒΓΔ minores sunt angulis



ΒΖΔ, ΔΖΓ duobus rectis æqualibus. Auferatur communis angulus

gulus Β Ζ Δ, hoc est Β Α Δ, & restabit angulus Δ Ζ Γ major angulo Β Γ Δ; adeoque arcus Δ Γ major erit arcu Δ Ζ. Sed Δ Ζ æqualis est arcui Α Δ; quare Δ Γ major est arcu Α Δ. Q. E. D.

Quod si arcus Β Δ diviserit arcum Α Γ in portiones æquales: dico angulum Α Β Δ majorem esse angulo Δ Β Γ.

Quoniam enim Β Γ major est ipso Α Β, ponatur Β Ζ æqualis ipsi Α Β, & ducatur arcus Α Ζ. Jam quia duo anguli Γ Α Β, Β Γ Α sunt minores duobus rectis, & angulus Β Α Ζ æqualis est angulo Β Ζ Α; sunt autem duo anguli Β Ζ Α, Ζ Α Γ æquales angulo Γ Α Β: erunt tres anguli Β Ζ Α, Ζ Α Γ, Β Γ Α simul sumpti minores duobus rectis. Verum duo anguli Β Ζ Α, Α Ζ Γ sunt æquales duobus rectis; quare, sublato communi Β Ζ Α, erit reliquus angulus Α Ζ Γ major duobus reliquis Ζ Α Γ, Β Γ Α; ac proinde (*per* 20^{m} *bujus*) erit arcus de puncto Ζ ad bisectionem arcus Α Γ ductus minor dimidio ipsius Α Γ: quapropter arcus Δ Ζ minor est quam Α Δ, & Α Β æqualis est ipsi Β Ζ, Β Δ vero communis: proinde (*per* 8^{m} *bujus*) angulus Α Β Δ major erit angulo Δ Β Ζ. Q. E. D.

Coroll. 1. *Si vero trianguli latera simul sumpta majora sint semicirculo, & ex angulo ab iisdem contento ducatur arcus angulum illum bifariam dividens; è contra, segmentum majus tertii lateris adjacebit lateri trianguli minori, minus majori.*

Coroll. 2. *Quod si, iisdem positis, arcus eductus latus tertium bifariam diviserit; major pars anguli divisi majori trianguli lateri adjacebit, minor minori.*

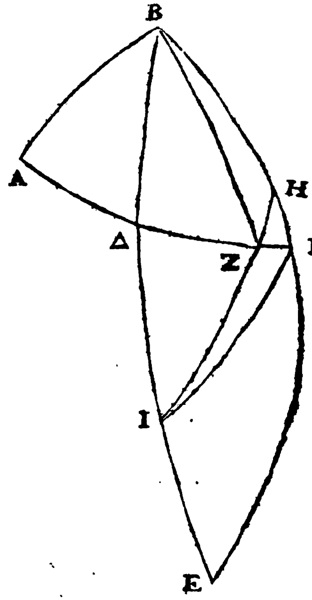
Iisdem positis, sive angulus, sive latus eidem subtensum bifariam secetur arcu ab angulo prodeunte; erunt trianguli latera angulum illum continentia simul sumpta majora duplo arcus bisecantis.

In triangulo Α Β Γ sit primo arcus Α Γ bifariam sectus arcu Β Δ ex angulo Β educto: dico duos arcus Α Β, Β Γ simul sumptos majores esse duplo arcus Β Δ.

Producantur arcus Β Δ, Β Γ ad occursum in puncto Ε, & per jam demonstrata (*in* 29ma *buj.*) erit arcus Β Δ minor quadrante, adeoque Δ Ε major erit quam Β Δ. Fiat Δ Ι æqualis ipsi Β Δ, & ducatur Γ Ι arcus circuli magni. Itaque quoniam arcus Γ Δ æqualis est ipsi Δ Α, & Δ Β ipsi Δ Ι, & duo anguli Α Δ Β, Γ Δ Ι æquales; erit arcus Γ Ι æqualis arcui Α Β. Adjiciatur utrinque

arcus

arcus Β Γ, & erunt Β Γ, Γ Ι ſimul ſumpti æquales arcubus Α Β, Β Γ ſimul ſumptis. Sed Ι Γ, Γ Β ſimul (*per 5^{m} hujus*) majores ſunt arcubus Β Δ, Δ Ι ſimul; quare Α Β, Β Γ majores ſunt ipſis Β Δ, Δ Ι. Arcus autem Β Δ, Δ Ι ſimul ſumpti dupli ſunt arcûs Β Δ; quare arcus Α Β, Β Γ ſimul majores ſunt duplo ipſius Β Δ. Q.E.D.



Quod ſi arcus Β Δ dividat angulum Β bifariam: dico quoque quod Α Β, Β Γ ſimul ſunt majores duplo arcus Β Δ. Quoniam enim Β Δ dividit angulum Β bifariam; erit, per jam demonſtrata, arcus Γ Δ major quam Δ Α. Fiat Δ Ζ ipſi Δ Α æqualis, & ducatur Β Ζ arcus circuli magni, & per puncta Ι, Ζ arcus Ι Ζ Η. Quoniam autem Ζ Δ æqualis eſt ipſi Δ Α, & poſuimus Δ Ι ipſi Β Δ æqualem, angulique Α Δ Β, Ι Δ Ζ ſunt æquales: erit arcus Α Β æqualis arcui Ι Ζ, & angulus Β Α Δ æqualis angulo Δ Ζ Ι. Angulus autem Β Α Δ (*per 9^{m} hujus*) major eſt angulo Β Γ Δ; quare angulus Δ Ζ Ι major eſt angulo Β Γ Δ. Sed angulus Δ Ζ Ι æqualis eſt angulo Γ Ζ Η, quare angulus Γ Ζ Η major eſt angulo Β Γ Δ; & angulus Γ Ζ Β major eſt angulo Γ Ζ Η, adeoque multo major angulo Β Γ Ζ: proinde (*per 7^{m} huj.*) arcus Γ Β major eſt arcu Ζ Β. Verum arcus Ι Ζ, Ζ Β ſimul (*per 5^{m} hujus*) majores ſunt quam Β Δ, Δ Ι; adeoque Ι Ζ, Γ Β multo majores ſunt arcubus Β Δ, Δ Ι. Eſt autem Ι Ζ ipſi Α Β æqualis; quare Α Β, Β Γ ſimul majores ſunt ipſis Β Δ, Δ Ι ſimul. Sed Β Δ, Δ Ι ſunt dupli ipſius Β Δ; quare Α Β, Β Γ ſimul majores ſunt duplo ipſius Β Δ. Q.E.D.

Coroll. E contra vero, ſi latera trianguli ſimul ſumpta majora ſint ſemicirculo; erit arcus, bifariam dividens vel angulum contentum, vel latus tertium, major dimidio laterum continentium ſimul ſumptorum.

Triceſima hæc Propoſitio in duas dividitur in Codd. Arabicis, *apud quos facit Prop.* XXXIII *&* XXXIV.

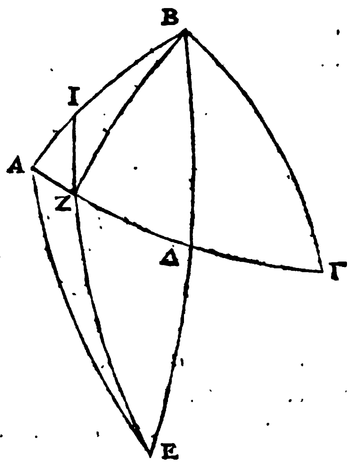
PROP.

PROP. XXXI. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo latera fuerint inæqualia, simulque sumpta minora semicirculo; & ab angulo sub iisdem contento educatur ad latus reliquum arcus circuli magni, qui æqualis sit semissi laterum continentium: dividet ille arcus tum angulum tum latus reliquum in segmenta inæqualia; & utriusque portio major adjacebit lateri trianguli minori, minor vero majori.

Trianguli Sphærici ΑΒΓ sint latera ΑΒ, ΒΓ minora semicirculo, sitque ΒΓ major quam ΒΑ; arcus autem ΒΔ, eductus de Β ad occursum arcus reliqui ΑΓ, sit æqualis dimidio ipsorum ΑΒ, ΒΓ simul sumptorum: dico quod arcus ΑΔ major est ipso ΔΓ, & angulus ΑΒΔ major angulo ΔΒΓ.

Producatur arcus ΒΔ ad Ε, ita ut ΔΕ sit æqualis ipsi ΒΔ, & ducatur ΑΕ arcus circuli magni. Jam arcus ΕΑ, ΑΒ (*per* 5^{m} *huj.*) majores sunt ipsis ΕΔ, ΔΒ; arcus autem ΕΔ, ΔΒ sunt æquales lateribus ΑΒ, ΒΓ, quia ΒΔ est ipsorum dimidium: quare ΑΕ, ΑΒ excedunt duos ΑΒ, ΒΓ; &, sublato utrinque ΑΒ, remanebit ΑΕ major quam ΒΓ. Sed ΒΓ major est quam ΒΑ; quare ΑΒ major est dimidio ipsorum ΑΒ, ΒΓ, nempe ipso ΒΔ; & arcus ΒΔ, ΔΕ sunt æquales, quare ΒΓ major est quam ΔΕ. Possibile igitur est ut ducatur ab Β arcus circuli magni ipsi ΒΓ æqualis, qui cadat inter duo arcus ΑΕ, ΕΔ. Sit ille arcus ΕΖ, qui producatur ad occursum arcus ΑΒ in puncto Ι; & ducatur arcus ΒΖ. Jam arcus ΒΖ, ΖΕ simul majores sunt quam ΒΔΕ, & ΒΔΕ æqualis est ipsis ΑΒ, ΒΓ simul sumptis; quare ΒΖ, ΖΕ excedunt arcus ΑΒ, ΒΓ. Sed ΖΕ æqualis est ipsi ΒΓ; quare reliquus ΒΖ major est quam ΑΒ, ac proinde angulus ΒΑΖ major



jor eſt angulo Β Ζ Α, ac multo major angulo Ι Ζ Α. Angulus autem Ι Ζ Α æqualis eſt angulo Γ Ζ Ε; quare angulus Β Α Γ major eſt angulo Γ Ζ Ε. Addatur utrinque angulus Β Γ Α; & erunt duo anguli Β Α Γ, Β Γ Α majores duobus Γ Ζ Ε, Β Γ Α. Duo autem anguli Β Α Γ, Β Γ Α (*per* 10^{m} *buj.*) ſunt minores duobus rectis; quare anguli Β Γ Α, Γ Ζ Ε ſunt minores rectis: duo igitur triangula Β Δ Γ, Ε Δ Ζ duos habent angulos ad verticem æquales; atque arcus duos alios angulos continentes æquales, nempe arcum Β Δ arcui Δ Ε, & arcum Β Γ arcui Ζ Ε; reliqui vero anguli ſunt minores rectis; quare (*per* 13^{m} *bujus*) arcus reliquus æqualis erit arcui reliquo, ac duo anguli reliqui duobus reliquis reſpective æquales: adeoque angulus Γ Β Δ angulo Ζ Ε Δ, atque arcus Γ Δ æqualis eſt arcui Δ Ζ. Sed arcus Α Δ major eſt quam Δ Ζ, adeoque major quam Γ Δ. Arcus autem Ε Ζ, hoc eſt arcus Β Γ, major eſt arcu Β Α; arcus igitur Ε Ι major eſt arcu Β Α, & multo major arcu Ι Β: quocirca angulus Ι Β Ε, hoc eſt Α Β Δ, major eſt angulo Ι Ε Β, hoc eſt Ζ Ε Δ. Sed angulus Ζ Ε Δ æqualis eſt angulo Γ Β Δ, uti jam demonſtratum eſt; angulus igitur Α Β Δ major eſt angulo Γ Β Δ. Q. E. D.

Coroll. Si vero latera ſimul ſumpta majora fuerint ſemicirculo, contrarium eveniet; & major pars tum anguli tum lateris diviſi adjacebit lateri majori, minor vero minori.

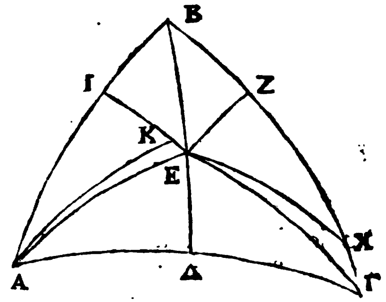
PROP. XXXII. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo latera ſint inæqualia & ſimul ſumpta minora ſemicirculo; & educatur ab angulo ſub iiſdem contento arcus circuli magni, dividens latus reliquum bifariam; & in arcu illo educto capiatur punctum intra triangulum, à quo ad extremitates arcus biſecti ducantur arcus circulorum magnorum: ipſi continebunt cum lateribus trianguli primis angulos inæquales, quorum major erit cum latere minore, minor vero cum latere majore.

In triangulo Sphærico Α Β Γ ſint latera Α Β, Β Γ ſimul minora ſemicirculo, & Β Γ major quam Α Β; & ex angulo Β prodeat arcus circuli magni Β Δ, dividens arcum Α Γ bifariam in Δ; & ſumatur in Β Δ punctum aliquod Ε, à quo ducantur ad extre-

extremitates arcus Α Γ duo arcus circulorum magnorum Α Ε, Ε Γ: dico angulum Β Α Ε, qui adjacet arcui Α Β, majorem esse angulo Β Γ Ε arcui majori Β Γ adjacente.

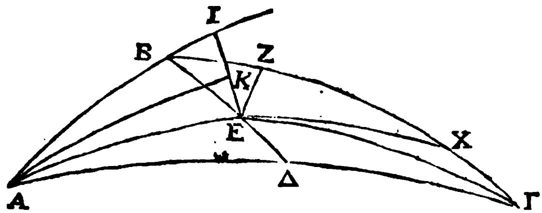
Quoniam enim arcus Β Δ dividit Α Γ bifariam, erit (*per* 30^m *hujus*) angulus Α Β Δ major angulo Γ Β Δ; quare angulus Γ Β Δ est minor recto: atque angulus Α Γ Β minor est angulo Β Α Γ, ac proinde minor recto. Angulo igitur Β Γ Δ existente semper acuto, cadet arcus à puncto Ε ad arcum Β Γ normaliter demissus, inter puncta Β, Γ. Sit ille arcus Ε Ζ. Arcus autem de puncto Ε super arcum Α Β perpendicularis, vel occurret ipsi Α Β, vel non. Occurrat primo inter Α, Β ad modum arcus Ε Ι: anguli igitur Β Ι Ε Β Ζ Ε sunt recti, & angulus Ι Β Ε major est angulo Ε Β Ζ, & arcus Β Ε communis est utrique triangulo; quare (*per* 19^m *hujus*) arcus Ε Ι major est arcu Ε Ζ. Fiat arcus Ι Κ æqualis arcui Ε Ζ. Quoniam vero arcus circuli Α Ι occurrit arcui Ε Ι ad angulos rectos, erit (*per* 1^mam III. *Theod.*) juncta recta Α Ι minima omnium rectarum linearum de puncto Α ad arcum Ε Ι prodeuntium, eidemque propior minor remotiore; quare recta de puncto Α ad Κ ducta minor est recta de puncto Α ad Ε; adeoque arcus Α Κ minor erit arcu Α Ε. Arcus autem Α Ε minor est arcu Γ Ε, quare arcus Γ Ε major est arcu Α Κ. Arcus Α Κ autem major est arcu Κ Ι, quia angulus Ι rectus est; & arcus Ι Κ æqualis est arcui Ε Ζ: quare arcus Α Κ major est arcu Ζ Ε. Fieri igitur potest ut ducatur ab Ε ad arcum Ζ Γ arcus æqualis arcui Α Κ, qui cadat inter puncta, Ζ, Γ. Sit ille arcus Ε Χ. Cum itaque arcus Ζ Ε æqualis sit ipsi Ι Κ, & angulus Ε Ζ Χ rectus æqualis sit recto Ι, uti & arcus Ε Χ ipsi Α Κ æqualis; erit (*per* 13^m *hujus*) angulus Ι Α Κ æqualis angulo Ζ Χ Ε, ac propterea angulus Ι Α Ε major erit angulo Ζ Χ Ε. Sunt autem arcus Α Β, Β Γ simul sumpti minores semicirculo; quare (*per* 6^m *hujus*) arcus Α Ε, Ε Γ simul sunt minores semicirculo: & arcus Α Κ minor est quam Α Ε; quapropter arcus Γ Ε, Α Κ simul, hoc est arcus Γ Ε, Ε Χ simul, multo minores sunt semicirculo. Angulus igitur Ζ Χ Ε (*per*



F 10^m *hujus*)

10^{m} *hujus*) major est angulo Ε Γ Χ. Angulus autem Β Α Ε major est angulo Ζ Χ Ε, adeoque multo major angulo Β Γ Ε. Q.E.D.

Quod si arcus de puncto Ε normaliter demissus ad arcum Α Β non occurrat ei inter puncta Α, Β; sed cadat extra à parte anguli Β, ut in figura secunda: producto arcu minore Α Β, in



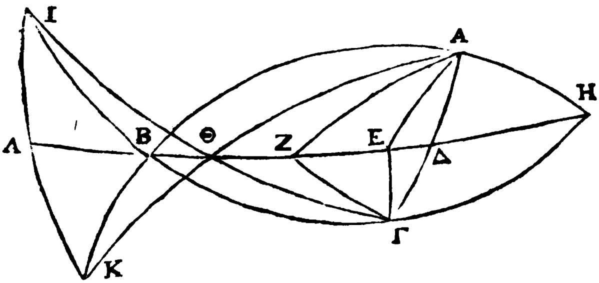
eum demittatur normalis Β Ι; & fiat, ut supra, arcus Ι Κ ipsi Ε Ζ æqualis, & ponatur arcus Ε Χ arcui Α Κ æqualis: & eodem omnino argumento, quo in præcedente casu usi sumus, demonstrabitur angulum Β Α Ε majorem esse angulo Β Γ Ε.

Si vero arcus, normaliter ab Ε demissus ad arcum Α Β, cadat extra à parte anguli Α, res manifesta est. Etenim angulus Ε Α Β major est recto, adeoque & totus angulus Β Α Γ multo major erit recto. Sed, per demonstrata in 10ma hujus, anguli Β Α Γ, Β Γ Α simul sumpti minores sunt duobus rectis; quare angulus Β Γ Α, & multo magis angulus Β Γ Ε, minor est recto. Quapropter angulus Ε Α Β major est angulo Β Γ Ε, obtusus acuto. Q. E. D.

Coroll. Quod si latera Α Β, Β Γ *simul sumpta majora fuerint semicirculo, diviso latere tertio bifariam in puncto* Δ, *producantur arcus* Β Α, Β Γ, Β Δ *ad occursum in puncto* Η; *& in* Β Δ *capiatur* Δ Ζ *ipsi* Η Δ *æqualis*: *& ducantur arcus circulorum magnorum* Γ Ζ, Ζ Α. *Jam* (per 4^{m} hujus) *arcus* Γ Ζ, Η Α; Α Ζ, Η Γ *sunt respective æquales, angulusque* Γ Α Ζ *angulo* Η Γ Α, *uti angulus* Α Γ Ζ *angulo* Η Α Γ *æqualis*: *duo igitur anguli* Η Γ Α, Α Γ Ζ *simul sunt æquales duobus* Η Α Γ, Γ Α Ζ *simul sumptis, hoc est angulus* Η Γ Ζ *angulo* Η Α Ζ; *ac proinde angulus* Ζ Γ Β *æqualis erit angulo* Ζ Α Β. *Jam si capiatur punctum* Ε *inter* Δ & Ζ, *& ducantur arcus* Α Ε, Ε Γ; *per præcedentia, angulus* Ζ Γ Ε *major erit angulo* Ζ Α Ε; *& adjectis utrinque æqualibus* Ζ Γ Β, Ζ Α Β, *erit angulus* Ε Γ Β, *minori lateri* Γ Β *adjacens, major angulo* Ε Α Β *majori* Α Β *adjacente, ut antea.*

E contra vero, si capiatur punctum inter Ζ *&* Β, *ut* Θ: *dico angulum*

angulum Θ A B *majori lateri adjacentem majorem esse angulo* Θ Γ B. *Ductis enim arcubus* Θ Γ, Θ A *qui simul sint minores semicirculo, manifestum est ex præmissis angulum* Z A Θ *minorem esse angulo* Z Γ Θ: *his autem ex æqualibus* Z A B, Z Γ B *sublatis, residuus angulus* Θ A B *major erit residuo* Θ Γ B. *Si vero arcus* Θ A, Θ Γ *simul excesserint semicirculum; productis arcubus* Λ B, A Θ *ad occursum in puncto* K, *arcubusque* Γ B, Γ Θ *ad punctum* I: *erit* B I *æqualis arcui* Γ H, *&* B K *ipsi* A H; *triangulumque* I B K *per omnia æquale erit triangulo* A H Γ; *ac ba-*



sis ejus bisecabitur in puncto Λ *ab arcu* B Δ *producto. Arcus autem* Γ I, Λ K *sunt semicirculi; &* A Θ, Θ Γ *simul excedunt semicirculum; quare reliqui arcus* I Θ, Θ K *simul minores sunt semicirculo; ac proinde angulus* B I Θ *adjacens majori lateri* I B, *juxta jam demonstrata, minor erit angulo* B K Θ: *angulus igitur* Θ A B, *qui quidem æqualis est angulo* B K Θ, *major erit angulo* Θ Γ B *ipsi* Θ I B *æquale & minori lateri* B Γ *adjacente. Quod si arcus* A Θ, Θ Γ *simul conficiant semicirculum, demittantur ad arcus* A B, B Γ *normales de puncto* Θ. *Cumque angulus* A B Θ (per 30^{m} hujus) *major sit angulo* Γ B Θ; *major erit arcus normaliter ad* A B *demissus quam qui ad* B Γ *demittitur. Sunt autem arcus* Γ Θ, Θ K, *qui angulis rectis subtenduntur, æquales; quare angulus* K, *hoc est angulus* B A Θ, *major erit angulo* B Γ Θ.

Quocirca si sumatur punctum Θ *inter verticem* B *& punctum* Z, *erit angulus qui adjacet majori trianguli lateri major eo qui adjacet minori. E contra vero, si capiatur punctum, ut* E, *inter* Z *&* Δ, *major angulus adjacebit lateri minori, minor majori.*

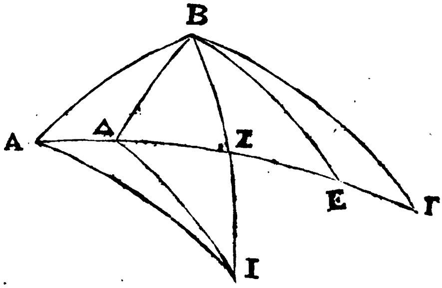
PROP. XXXIII. THEOR.

Si triangulum Sphæricum duo habeat latera inæqualia &

ſimul minora ſemicirculo, & ab utrâque extremitate lateris reliqui abſcindantur duo arcus æquales, & à punctis ſectionum ducantur arcus ad angulum à lateribus ſemicirculo minoribus contentum: tunc ipſi continebunt cum lateribus illis angulos inæquales, quorum major erit apud latus minus, & minor apud latus majus: & erunt arcus ducti ſimul ſumpti minores lateribus trianguli ſimul.

In triangulo Sphærico ΑΒΓ ſint latera ΑΒ, ΒΓ minora ſemicirculo, & ΑΒ minus quam ΒΓ; & in ΓΑ capiantur ΓΕ, ΑΔ æquales, & ducantur arcus ΒΔ, ΒΕ: dico angulum ΑΒΔ majorem eſſe angulo ΕΒΓ; quodque arcus ΒΔ, ΒΕ ſimul ſumpti minores ſunt ipſis ΑΒ, ΒΓ ſimul ſumptis.

Dividatur ΔΕ bifariam in Ζ, & ductus arcus ΒΖ producatur ad Ι, ita ut ΖΙ, ΖΒ ſint æquales: & jungantur arcus ΑΙ, ΙΔ. Quoniam itaque ΒΖ dividit ΑΓ bifariam, (*per 29ᵐ hujus*) minor erit quadrante: cumque ΖΓ, ΖΑ ſunt æquales, & ΒΖ, ΖΙ æquales, uti angulus ΒΖΓ angulo ΑΖΙ; erit arcus ΒΓ arcui ΑΙ æqualis: ac pari ratione arcus ΒΕ ipſi ΙΔ. Eſt autem ΓΕ ipſi ΑΔ æqualis; quare angulus ΓΒΕ æqualis eſt angulo ΑΙΔ. ΑΙ vero ipſi ΒΓ æqualis eſt, & ΒΓ major eſt arcu ΑΒ, quare ΑΙ major eſt arcu ΑΒ: & ΒΑ, ΑΙ ſimul ſunt minores ſemicirculo; ΑΖ autem ſecat arcum ΒΙ bifariam, ſumiturque in eo punctum Δ, & ducuntur arcus ΒΔ, ΔΙ. Quocirca angulus ΑΒΔ major eſt angulo ΑΙΔ ipſi ΕΒΓ æquali: unde angulus ΑΒΔ major erit angulo ΕΒΓ. Præterea arcus ΙΑ, ΑΒ ſimul (*per 6ᵐ hujus*) majores ſunt ipſis ΒΔ, ΔΙ ſimul: & arcus ΙΑ, ΒΓ ſunt æquales inter ſe, uti ΔΙ, ΒΕ; quare ΑΒ, ΒΓ ſimul majores ſunt ipſis ΔΒ, ΒΕ ſimul ſumptis Q. E. D.



Coroll. Si vero latera ſimul ſumpta majora fuerint ſemicirculo: dico angulum majorem adjacere majori lateri; arcuſque ductos ſimul ſumptos majores eſſe lateribus trianguli ſimul.

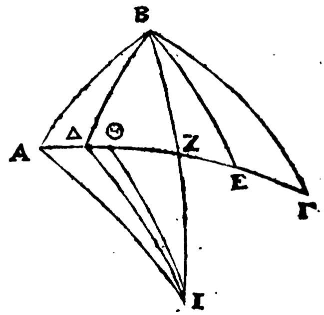
PROP.

PROP. XXXIV. THEOR.

In omni triangulo Sphærico latera habente inæqualia, simul vero minora semicirculo; si ab angulo lateribus illis contento ducantur ad latus reliquum duo arcus, qui contineant cum lateribus trianguli duos angulos æquales: abscindent hi arcus ab utrâque extremitate lateris reliqui portiones ejus inæquales, quarum minor adjacebit minori, major vero majori è lateribus. Et erunt arcus ducti simul sumpti minores lateribus trianguli simul sumptis.

In triangulo Sphærico ΑΒΓ sint latera ΑΒ, ΒΓ minora semicirculo, & ΒΓ majus quam ΑΒ; & ducantur arcus ΒΔ, ΒΕ continentes cum ipsis ΑΒ, ΒΓ angulos æquales: dico quod ΑΔ minor est quam ΕΓ; quodque ΒΔ, ΒΕ simul sunt minores ipsis ΑΒ, ΒΓ simul sumptis.

Dividatur ΑΓ bifariam in Ζ, & producatur ΒΖ ad Ι, ut sint ΒΖ, ΖΙ æquales; & ducantur arcus ΑΙ, ΙΔ. Et, ut in præcedente ostendimus, erit primo ΒΓ ipsi ΑΙ æqualis, & angulus ΖΑΙ angulo ΖΓΒ. Angulus autem ΑΒΔ major est angulo ΑΙΔ; atque angulus ΑΒΔ æqualis est angulo ΕΒΓ: quare angulus ΕΒΓ major est angulo ΑΙΔ. Fiat igitur angulus ΑΙΘ æqualis angulo ΕΒΓ. Demonstravimus autem angulos ΕΓΒ, ΔΑΙ æquales esse, uti arcus ΒΓ, ΑΙ æquales, apud quos sunt anguli æquales: quare (*per* 14^{m} *hujus*) arcus ΑΘ, ΓΕ erunt æquales, atque adeo arcus ΑΔ minor erit quam ΕΓ. Dico quoque quod arcus ΑΒ, ΒΓ simul excedunt arcus ΔΒ, ΒΕ simul sumptos. Nam cum ΒΑ, ΑΙ simul (*per* 6^{m} *hujus*) majores sunt quam ΒΔ, ΔΙ; & arcus ΑΙ, ΒΓ sunt æquales; erunt arcus ΑΒ, ΒΓ simul majores quam ΒΔ, ΔΙ. Angulus autem ΑΖΙ major est recto, ac arcus ΑΙ major arcu ΖΙ; quare (*per* 1^{m} III. *Theod.*) arcus ΔΙ major est arcu ΙΘ, at-



Ι Θ, atque Ι Θ æqualis est ipsi Β Ε: quare Δ Ι major est quam Β Ε, ac proinde Α Β, Β Γ multo excedunt ipsas Β Δ, Β Ε. Q. E. D.

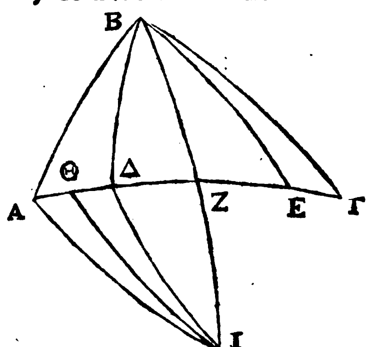
Coroll. Quod si latera trianguli simul sumpta majora fuerint semicirculo; è contra arcus qui adjacet majori lateri major erit; arcusque ducti simul sumpti majores erunt lateribus trianguli.

PROP. XXXV.

In omni triangulo Sphærico, cujus sunt duo latera inæqualia & minora semicirculo, si ducantur, ab angulo lateribus istis contento ad latus reliquum, duo arcus qui simul sumpti æquales sint duobus trianguli lateribus simul; constituent hi arcus cum lateribus trianguli angulos inæquales: abscindent etiam è reliquo trianguli latere arcus inæquales; eritque tum angulus major, tum arcus abscissus major, apud latus trianguli minus.

In triangulo Sphærico Α Β Γ sit arcus Β Γ major quam Β Α, qui simul sint minores semicirculo, & ducantur arcus Β Δ, Β Ε ipsis Β Α, Β Γ simul sumptis æquales: dico quod arcus Α Δ major est quam Ε Γ, angulusque Α Β Δ major angulo Ε Β Γ.

Dividatur Δ Ε bifariam in Ζ, & ducatur Β Ζ arcus circuli magni, qui producatur ad Ι, ita ut sint Β Ζ, Ζ Ι æquales; & jungantur arcus circulorum magnorum Α Ι, Ι Δ. Quoniam itaque arcus Δ Ζ, Ζ Ε; & Β Ζ, Ζ Ι sunt respective æquales, uti anguli ad Ζ æquales; erunt arcus Β Ε, Ι Δ æquales, atque adeo arcus Β Δ, Δ Ι simul æquales arcubus Β Δ, Β Ε, hoc est ipsis Α Β, Β Γ simul: proinde arcus Ι Δ, Δ Β simul sunt æquales ipsis Α Β, Β Γ. Sunt autem Ι Α, Α Β (*per* 6^m *buj.*) majores ipsis Ι Δ, Δ Β; quare Ι Α, Α Β majores sunt quam Α Β, Β Γ: & sublato communi Α Β, erit arcus Α Ι major ipso Β Γ. Et quoniam Β Ζ dividit arcum Δ Ε bifariam, constabit (*per* 30^m *bujus*) arcus Ε Β, Β Δ simul



ΒΔ simul majores esse duplo arcus ΒΖ. Atqui ΒΔ, ΒΕ simul æquales sunt ipsis ΑΒ, ΒΓ; quare ΑΒ, ΒΓ majores sunt duplo ipsius ΒΖ: & ΒΓ major est quam ΑΒ, ac proinde quam ΒΖ. Sunt autem ΒΖ, ΖΙ æquales; quare ΖΙ minor est quam ΒΓ. Verum ΑΙ major est quam ΒΓ, quare possibile est ut ducatur à puncto Ι ad arcum ΑΖ arcus qui cadat inter puncta Α, Ζ, ipsique ΒΓ æqualis. Sit ille arcus ΙΘ; & erit (*per* 4^m *huj.*) ΘΖ æqualis ipsi ΖΓ. Arcus autem ΖΔ ipsi ΖΕ æqualis est. Restabit igitur ΔΘ ipsi ΕΓ æqualis; unde manifestum erit arcum ΑΔ majorem esse arcu ΕΓ. Et (*per* 32^m *huj.*) constabit angulum ΑΒΔ majorem esse angulo ΑΙΔ, multoque majorem angulo ΘΙΔ. Sed angulus ΘΙΔ æqualis est angulo ΕΒΓ (quoniam anguli ΖΒΓ, ΖΙΘ; ΖΒΕ, ΖΙΔ sunt respective æquales, adeoque & reliquus ΕΒΓ reliquo ΘΙΔ æqualis) quare angulus ΑΒΔ major est angulo ΕΒΓ. Q. E. D.

Coroll. Quod si latera trianguli majora fuerint semicirculo, tum angulus major, tum arcus abscissus major, erit apud latus majus. Quæ omnia manifesta erunt, si producantur arcus ΑΒ, ΒΔ, ΒΕ, ΒΓ *ad occursum.*

SCHOLION.

Propositio XXX. *eamque subsequentes quinque, locum habent etiam in triangulis planis rectilineis; id quod proclive esset demonstrationibus propriis in singulis comprobare. In præsentiarum sufficiat indicasse triangula Sphærica minima formam rationemque habere triangulorum planorum; unde manifestum est eadem omnia quæ in dictis propositionibus de Sphæricis demonstrata dedit* Menelaus, *etiam de Planis non minus vera esse.*

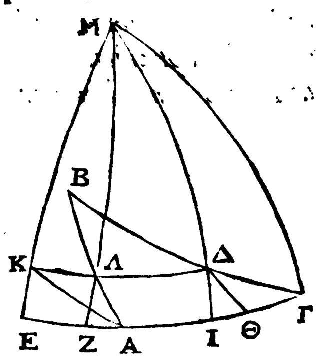
MENE-

MENELAI
ALEXANDRINI
SPHÆRICORUM
Lib. II.

PROP. I. PROBL.

A sumpto puncto in latere trianguli Sphærici obtusanguli, angulo obtuso opposito; ducere arcum circuli magni, qui cum altero ex arcubus, obtusum angulum continentibus, comprehendat angulum eidem obtuso angulo æqualem.

Sit triangulum ΑΒΓ quale descripsimus; ita ut ΑΒ, ΒΓ sint minores semicirculo; & capiatur in arcu ΒΓ punctum Δ: oporteat ducere ad arcum ΑΓ à puncto Δ arcum circuli magni, continentem cum ipso ΑΓ angulum æqualem obtuso ΒΑΓ.



Sit Μ polus arcus ΑΓ, & per puncta Μ, Δ ducatur arcus circuli magni ΜΔΙ; & producatur arcus ΑΓ ad Ε, ita ut ΑΕ, ΓΙ sint æquales; & ducatur ΜΕ arcus circuli magni. Quoniam autem ΓΒ, ΒΑ simul minores sunt semicirculo, erit (*per* 13^{mam} *hujus*) angulus

angulus E A B major angulo Γ. Fiat angulus E A K (*per* 1^m I. *hujus*) æqualis angulo Γ; cumque anguli apud æquales arcus duorum triangulorum Γ Δ I, A K E sint respective æquales; erit arcus E K æqualis arcui I Δ: & arcus E M æqualis est arcui M I; quare arcus M K æqualis est arcui M Δ. Polo igitur M, intervallo M Δ, describatur arcus circuli K Λ Δ, qui arcui A B occurrat in puncto Λ; & ducatur arcus circuli magni M Λ Z. Quoniam autem angulus A est obtusus, erit B Γ major quam A B; adeoque Γ I major quam Λ Z. Ponatur itaque in arcu Γ I arcus I Θ ipsi Λ Z æqualis, & per Δ, Θ transeat arcus circuli magni Δ Θ: dico angulum Δ Θ Γ æqualem esse angulo B A Γ.

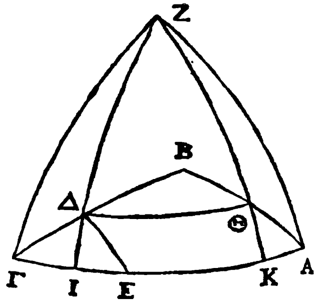
Quoniam enim arcus M Λ Z æqualis est arcui M Δ I, & M Λ ipsi M Δ æqualis; erit arcus Λ Z arcui I Δ æqualis. Fecimus autem arcus Λ Z, I Θ æquales, & anguli Δ I Θ, Λ Z A sunt etiam æquales, quippe recti: erit igitur angulus Δ Θ I (*per* 4^m I. *hujus*) æqualis angulo B A Z: quapropter angulus deinceps Δ Θ Γ æqualis erit angulo B A Γ. Q. E. D.

PROP. II. PROBL.

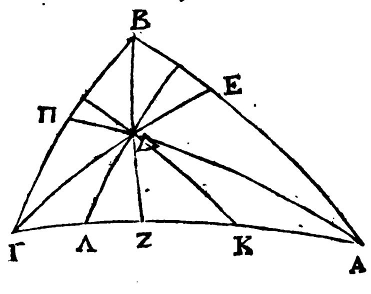
In omni triangulo Sphærico, duos angulos acutos habente, si capiatur punctum vel intra triangulum, vel in aliquo è lateribus angulos illos acutos subtendentibus: possumus ducere è puncto sumpto ad latus trianguli, apud quod sunt duo anguli illi acuti, arcum circuli magni, qui contineat cum eo angulum æqualem angulo contento sub eodem & reliquo latere trianguli.

In triangulo Sphærico A B Γ sit uterque angulus A, Γ acutus, & capiatur primo in altero è lateribus B Γ punctum aliquod Δ: dico possibile esse ducere de Δ arcum circuli magni, qui contineat cum arcu A Γ, a parte puncti Γ, angulum æqualem angulo A.

Quoniam enim uterque angulus A, Γ minor est recto; ex utroque termino A, Γ erigantur arcus Γ Z, Z A ad rectos angulos super A Γ; & manifestum est eos concursuros ultra punctum B. Conveniant in Z, quod polus erit arcus A Γ, & ducatur Z Δ I arcus circuli magni: dein polo Z, intervallo Z Δ, describatur arcus Δ Θ, & per Θ ducatur arcus circuli magni Z Θ K. Jam si fuerit Β Γ major quam Α Β, manifestum est angulum Β Α Γ majorem esse angulo Δ Γ Ι. Est autem angulus Θ Κ Α rectus & æqualis recto Δ Ι Γ, uti arcus Δ Ι arcui Θ Κ; unde manifestum est majorem esse arcum Ι Γ quam Κ Α. Et si adjiciatur arcui Ι Γ arcus Ε Ι ipsi Κ Α æqualis, & fiat, ut factum est in figura primâ, habebimus propositum. Quod si fuerit Β Γ minor arcuum, erit Γ Ι minor quam Α Κ; &, cæteris pari modo peractis, si fiat Ε Ι ipsi Α Κ æqualis, & ducatur arcus Δ Ε; erit angulus Δ Ε Ι æqualis angulo Β Α Κ. Q. E. F.



Si vero punctum non fuerit in latere trianguli Α Β Γ, sed intra illud, puta ad Δ: ducatur per Γ, Δ arcus circuli magni Γ Δ Ε; cumque uterque angulus Ε Α Γ, Ε Γ Α est recto minor, possibile erit ducere ad arcum Α Γ, de puncto Δ in arcu Ε Γ, arcum circuli magni, qui contineat cum eo angulum æqualem angulo Β Α Γ, quemadmodum ostensum est in hujus propositionis præmissis. Sit autem ille arcus Δ Κ: quare angulus Δ Κ Γ æqualis erit angulo Β Α Γ. Ac si velimus ducere, de puncto Δ ad arcum Α Γ, arcum qui contineat cum eo angulum æqualem angulo Β Γ Α, ducatur arcus Α Δ Π; &, per jam dicta, possumus ducere per Δ, ad Α Γ in triangulo Α Π Γ, arcum facientem cum Α Γ angulum æqualem angulo Γ. Sit ille arcus Δ Λ; quare angulus Δ Λ Α æqualis erit angulo Β Γ Α.



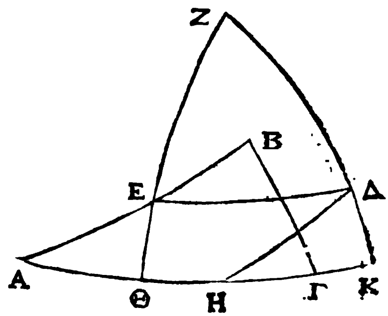
Dico quoque, quod, si arcus Α Β trianguli Sphærici Α Β Γ minor fuerit quadrante circuli, arcus per punctum Δ ductus ad arcum Α Γ, & cum eo continens angulum æqualem angulo Β Α Γ, si producatur, occurret arcui Β Γ inter Β & Γ. Ducatur enim per Δ arcus circuli magni Β Δ Ζ; cumque anguli Α, Γ simul minores sint duobus rectis; erunt arcus Α Β, Β Γ simul (*per* 10^{m} I. *huj.*) minores semicirculo. Quoniam vero arcus Β Ζ cadit

medio

medio inter eos, erit saltem alter ex arcubus A B, B Γ major arcu B Z: ac si fuerit B Γ major arcu B Z, manifestum est A B, B Z simul minores esse semicirculo. Etiamsi vero B Γ non fuerit major quam B Z, supponitur tamen A B minor quadrante, qui quidem major est quam B Z: quare A B, B Z simul sumpti minores sunt semicirculo, atque adeo angulus exterior B Z Γ major est angulo A. Arcus igitur de puncto Δ eductus ad arcum A Γ, ac cum eodem angulum continens æqualem angulo A, cadet inter puncta Z, A; ac proinde arcus K Δ productus occurret arcui B Γ. Q. E. D.

SCHOLION.

Non video quid opus sit tantis ambagibus in re facili & manifesta. Etenim in omni casu, & quocunque modo sumatur punctum Δ, *vel in arcu* B Γ, *vel intra vel extra triangulum, in spatio omni interjacente circulum majorem* A Γ *& minorem ipsi* A Γ *parallelum, quem contingit circulus* A B, *possumus arcum per* Δ *ducere qui cum arcu* A Γ *contineat angulum æqualem angulo* A. *Sit enim* Z *polus arcus* A Γ: *& polo* Z, *intervallo* Z Δ, *describatur arcus circuli minoris, qui, cum inter dictos parallelos sit, necessario occurret arcui* A B, *si opus sit producto. Occurrat in puncto* E. *Dein fiat arcus* Δ H *ipsi* A E *æqualis, & describatur arcus circuli magni* Δ H: *dico angulum* Δ H Γ *æqualem esse angulo* B A Γ. *Demissis enim ad arcum* A Γ *normalibus* E Θ, Δ K; *ex* 12ma I. *bujus, constabit triangula* A E Θ, H Δ K *per omnia æqualia esse.*



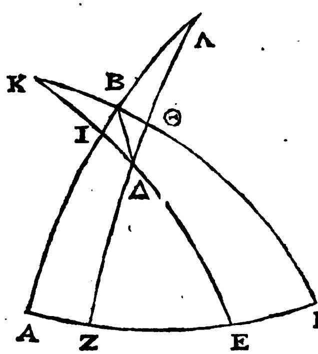
PROP. III. THEOR.

Si trianguli Sphærici angulus aliquis non major fuerit recto, ac fuerit utrumque latus angulum illum continens circuli quadrante minus; ac si capiatur punctum

intra

intra triangulum, per quod ducatur ad latus reliquum angulo illi subtensum duo arcus circulorum magnorum, qui cum eodem angulos angulis trianguli reliquis contineant respective æquales: erit utrumque latus figuræ quadrilateræ apud verticem trianguli, è lateribus ejus à ductis arcubus abscissum, minus latere eidem opposito.

In triangulo Sphærico A B Γ sit angulus B non major recto; utrumque vero latus A B, B Γ sit quadrante minus, & è sumpto puncto Δ educatur (*per præced*) arcus circuli magni Θ Δ Z, qui faciat angulum Δ Z Γ æqualem angulo A; transeat etiam per Δ arcus E Δ I, constituens angulum Δ E Z æqualem angulo Γ: dico quod duo latera quadrilateri Θ B, I B, quæ abscissa sunt è lateribus trianguli, minora sunt lateribus iisdem oppositis; nempe quod arcus B Θ minor est arcu Δ I, & arcus B I minor quam Θ Δ. Conspicuum autem est, quod, si Z Δ, Δ E ulterius producerentur, convenient cum ipsis A B, B Γ supra quadrilaterum, ut in figura videre est.



Producantur itaque Γ B, E I ad occursum in K, & A B, Z Θ ad occursum in Λ, & ducatur B Δ arcus circuli magni. Jam quoniam angulus Δ Z E æqualis est angulo A, erunt arcus A Λ, Λ Z simul sumpti (*per* 10^{m} I. *huj*) æquales semicirculo; adeoque B Λ, Λ Δ simul sunt minores semicirculo: unde (*per* 10^{m} I. *huj.*) angulus I B Δ major erit angulo B Δ Λ. Ac pari argumento, cum B K, K Δ sint minores semicirculo, erit angulus Θ B Δ major angulo B Δ K; adeoque totus angulus Θ B I, quem supponimus recto non majorem, major erit angulo Θ Δ I: ac proinde anguli Θ B I, Θ Δ I simul sumpti erunt minores duobus rectis. Quoniam vero in omni triangulo Sphærico tres anguli (*per* 11^{m} *huj.*) sunt majores duobus rectis, patet quatuor angulos quadrilateri majores esse quatuor rectis: cum autem demonstratum sit duos angulos ad B & Δ minores esse duobus rectis; erunt duo reliqui anguli B Θ Δ, B I Δ majores duobus rectis. Habent igitur duo triangula Θ B Δ, B Δ I arcum B Δ communem utrique; &, per jam dicta, angulus

IBΔ

Ι Β Δ unius major est angulo alterius Β Δ Θ; prioris autem trianguli angulus reliquus apud latus commune, nempe angulus Β Δ Ι, minor est reliquo alterius angulo Θ Β Δ; tertii autem anguli in utroque, nempe anguli Θ & Ι, majores sunt recto: latera igitur, quæ angulis majoribus subtenduntur, erunt (*per* 19^{m}I. *bujus*) majora, quæque angulis minoribus minora: ac proinde arcus Δ Ι major erit quam Β Θ, & Θ Δ major arcu Β Ι. Q. E. D.

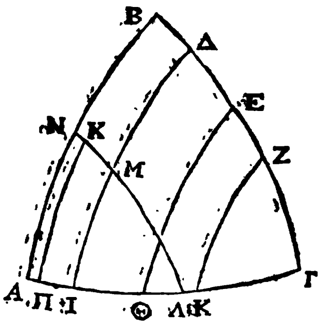
PROP. IV. THEOR.

In triangulo Sphærico, si fuerint duo crura æqualia, & angulus ab iisdem contentus non major recto; & uterque reliquorum angulorum acutus; & si capiantur in uno crurum duo arcus æquales, sive continui sive disjuncti; ac ducantur ab extremitatibus arcuum sumptorum ad basim arcus circulorum magnorum, continentes cum eadem basi angulos æquales angulis trianguli qui ad basim: tum segmenta basis erunt arcus inæquales, quorum ille qui adjacet lateri trianguli indiviso major erit altero ab eodem remotiore: erunt quoque duo arcus extremi (quorum alter adjacet lateri indiviso, alter angulo eidem opposito) simul sumpti æquales duobus reliquis arcubus intermediis. Quod si capiantur ex basi arcus æquales, sive continui sive disjuncti, ac ab eorum extremitatibus ducantur arcus ad alterum crurum, qui contineat cum basi angulos æquales angulo ad basim trianguli: abscindent hi arcus è crure illo segmenta inæqualia, quorum quod propius est cruri indiviso minus erit remotiore: & erit crus indivisum, una cum illo arcu qui adjacet angulo eidem cruri opposito simul sumpto, minus duobus reliquis arcubus intermediis simul sumptis.

In triangulo Sphærico æquicruri Α Β Γ sint crura æqualia Α Β, Β Γ; angulus vero non major recto sit Β; uterque vero reliquorum angulorum Α, Γ sit minor recto; & abscindantur ex arcu Β Γ duo arcus æquales Β Δ, Ε Ζ; & per puncta Δ, Ε, Ζ ducantur ad basim Α Γ arcus circulorum magnorum Δ Ι, Ε Θ, Ζ Κ, continentes

continentes cum ea angulos æquales angulo A: dico quod A I major est quam Θ K; quodque arcus A B, Z K simul sumpti sunt æquales ipsis Δ I, E Θ simul sumptis.

Fiat I Λ æqualis ipsi K Γ: cumque uterque angulus A, Γ est minor recto, erit utrumque crurum A B, B Γ minus quadrante, adeoque arcus è puncto Λ ductus, qui contineat cum A Λ angulum æqualem angulo Γ, occurret arcui A B. Sit ille angulus A Λ M æqualis angulo Γ; & erit I M ipsi K Z æqualis, & M Λ ipsi Γ Z; quia arcus I Λ æqualis est ipsi Γ K, & anguli qui sunt apud arcus æquales sunt etiam æquales. Angulus autem B non est major recto, ac utrumque latus A B, B Γ est minus quadrante, & angulus M Λ I est æqualis angulo Γ, uti angulus M I Λ angulo A; erit igitur (*per præcedentem*) arcus M N major quam B Δ. B Δ autem est æqualis ipsi E Z: quare M N major est quam E Z. Sit M X ipsi E Z æqualis, & ducatur arcus X Π, continens cum A Γ angulum X Π Γ æqualem angulo A. Quoniam vero Γ Z æqualis est ipsi Λ M, & Z E æqualis ipsi M X; erit totus arcus Γ E æqualis toti X Λ. Atqui X Λ est æqualis ipsi X Π, quare X Π æqualis est ipsi Γ E, & Γ E ipsi E Θ; quare arcus X Π æqualis est ipsi E Θ, atque adeo Γ Θ æqualis ipsi Λ Π. Fecimus autem Γ K æqualem ipsi Λ I; quare I Π æqualis erit ipsi Θ K. Sed punctum Π cadit inter A, I; adeoque A I major est quam Θ K. Q. E. D.



Dico jam quod A B, Z K simul æquales sunt ipsis Δ I, E Θ simul sumptis. Quoniam enim B Δ æqualis est ipsi E Z, & Δ E communis est, erit B E æqualis ipsi Δ Z. Adjiciatur utrinque Z Γ; & arcus B E, Z Γ simul æquales erunt arcui Δ Γ. His addatur communis arcus E Γ, & erunt B Γ, Γ Z simul æquales ipsis Δ Γ, Γ E simul. Verum B Γ æqualis est ipsi B A, & Δ Γ ipsi Δ I, & Γ E ipsi E Θ, uti & Γ Z ipsi Z K; quare arcus A B, Z K simul sumpti sunt æquales arcubus Δ I, E Θ simul sumptis. Q. E. D.

Porro si fuerit A I ipsi Θ K æqualis, ac ducantur arcus I Δ, Θ E, K Z, sub eodem angulo quo A B super arcum A Γ: dico quod B Δ minor est quam E Z; quodque arcus A B, Z K simul minores sunt arcubus I Δ, Θ E simul sumptis.

Fiat

Fiat I Λ ipsi K Γ æqualis, & ducatur arcus Λ M N continens cum Α Γ angulum Α Λ M æqualem angulo Γ. Itaque quoniam I Λ æqualis est ipsi Γ K, & anguli qui sunt super arcus æquales, sunt in utroque triangulo Z Γ K, M Λ I respective æquales; erit (*per* 14^m I. *bujus*) Γ Z ipsi Λ M æqualis. Cum autem Γ K, Λ I, & K Θ, Λ I sunt æquales, erit Γ Θ ipsi Α Λ æqualis, adeoque & Λ N ipsi Γ E. At vero Γ Z æqualis est ipsi Λ M; quare M N æqualis est ipsi Z E. Sed (*per* 3^m II. *buj.*) M N major est quam B Δ; quare E Z major est quam B Δ.

Dico quoque quod Α B, Z K simul sunt minores ipsis Δ I, E Θ. Nam cum B Δ minor est quam E Z, adjecto utrinque Δ E, erit totus B E minor arcu Δ Z. Addatur utrinque communis Z Γ, & erunt arcus B E, Z Γ simul minores arcu Δ Γ. His adjiciatur utrinque arcus Γ E, & erunt arcus B Γ, Γ Z simul minores ipsis Δ Γ, Γ E simul sumptis. Sed B Γ æqualis est ipsi B Α, & Γ Z ipsi Z K; uti Δ Γ ipsi Δ I, atque E Γ arcui Θ E: quapropter Α B, Z K simul minores sunt ipsis Δ I, E Θ simul sumptis. Q. E. D.

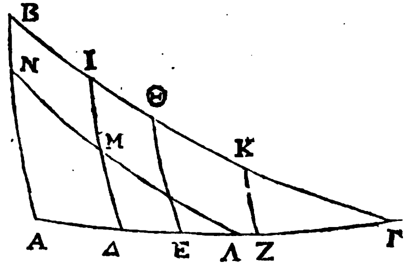
PROP. V. THEOR.

Si in triangulo Sphærico aliquis ex angulis non major fuerit recto; & arcus ipsum continentes fuerint inæquales, nec major eorum excesserit quadrantem; & si capiantur in basi utcunque duo arcus æquales, à quorum terminis ducantur arcus circulorum magnorum ad arcum majorem, continentes cum basi angulos æquales contento sub basi & arcu reliquo: abscindent hi arcus ex arcu majori segmenta inæqualia, quorum majus erit illud quod propius distat à basi. Et erit arcus indivisus, una cum eo qui adjacet angulo trianguli eidem opposito simul sumpto, minor duobus reliquis arcubus intermediis.

In triangulo Sphærico Α B Γ, sit angulus B non major recto, & sit B Γ major quam Α B, sed non major quartâ circuli; & in Α Γ capiantur duo arcus æquales Α Δ, E Z, & ducantur arcus Δ I, E Θ, Z K, continentes cum Α Γ angulos æquales angulo Α. dico quod arcus I B minor est arcu Θ K; quodque arcus Α B, Z K simul minores sunt ipsis Δ I, E Θ simul sumptis.

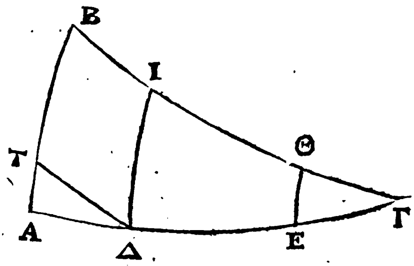
Fiat

Fiat Δ Λ ipsi Z Γ æqualis, & ducatur Λ M continens cum Λ Γ angulum æqualem angulo Γ; & erit Λ M ipsi Γ K æqualis, & Δ M ipsi K Z. Cum autem Λ Δ æqualis sit ipsi Γ Z, & E Z ipsi Δ Λ, erit totus Γ E æqualis toti A Λ; adeoque A N æqualis est ipsi Γ Θ, & A N ipsi E Θ, uti Γ K ipsi Λ M; quare M N æqualis est ipsi Θ K. Sed (*per* 3^m II. *huj.*) arcus M N major est arcu I B; quare I B minor est quam Θ K. Q. E. D.



Dico quoque quod A B, Z K simul minores sunt ipsis Δ I, E Θ simul sumptis. Quoniam enim (*per eandem* 3^m) arcus I M major est arcu B N; adjiciatur utrinque A N, & erunt I M, A N simul majores quam A B. Est autem A N æqualis arcui E Θ, quare A B minor est arcubus I M, E Θ simul sumptis. His adde arcum Δ M, hoc est Z K, utrinque; & erunt A B, Z K simul minores ipsis Δ I, E Θ, simul sumptis. Q. E. D.

Si vero ponantur arcus æquales apud terminos arcus A Γ, ut A Δ, Γ E; & ducantur arcus Δ I, E Θ constituentes angulos cum ipso A Γ æquales angulo A: dico quod B I minor est quam Γ Θ, & A B minor ipsis I Δ, Θ E simul sumptis.



Ad punctum Δ cum arcu A Γ fiat angulus A Δ T æqualis angulo Γ: cumque A Δ æqualis sit ipsi E Γ, & anguli, qui sunt apud arcus æquales in utroque triangulo Γ Θ E, A Δ T, sint respective æquales; erit (*per* 14^m I. *huj.*) arcus A T ipsi E Θ, & Δ T ipsi Γ Θ æquales. Sed Δ T major est quam I B; quare Γ Θ major est quam I B. Cum autem arcus Δ I (*per eandem*) major sit quam B T; si utrinque addatur arcus A T, qui æqualis est ipsi E Θ, erit totus arcus A B minor utrisque Δ I, E Θ simul sumptis. Q. E. D.

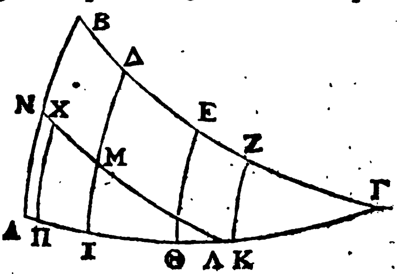
1.) Codd. Arabicis Prop. II. IV. & hæc Quinta in binas partitæ sunt; ita ut apud eos quæ sequitur loco Sextæ Nona sit.

PROP.

PROP. VI. THEOR.

Si in triangulo Sphærico angulus aliquis non major fuerit recto, arcusque ipsum continentes fuerint inæquales, nec eorum major excesserit quadrantem circuli; ac si abscindantur ex uno horum arcuum duo arcus æquales, à quorum terminis educantur ad basim arcus circulorum magnorum, constituentes cum basi angulos æquales angulo quem continet basis cum arcu reliquo: abscindent hi arcus è basi segmenta inæqualia, quorum quod adjacet lateri indiviso majus erit reliquo. Quod si arcus divisus major fuerit reliquo; erit arcus indivisus, una cum arcu educto, qui adjacet angulo eidem arcui indiviso opposito, minor duobus arcubus intermediis simul sumptis. "Si vero arcus divisus minor fuerit indiviso; erit " arcus indivisus, una cum arcu qui adjacet angulo ar- " cui indiviso opposito, major duobus reliquis arcubus in- " termediis.

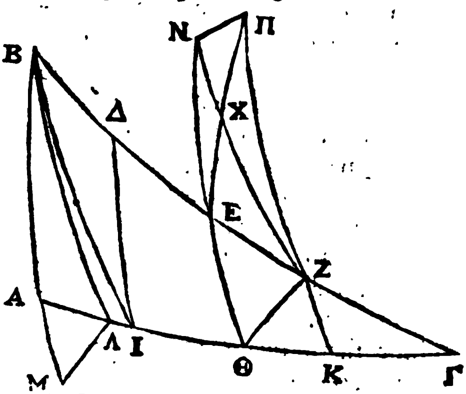
In triangulo Sphærico A B Γ, cujus angulus B non major sit recto, sint crura A B, B Γ inæqualia, nec eorum majus excedat quartam circuli; & capiantur in arcu B Γ duo arcus æquales B Δ, E Z, ducanturque arcus circulorum magnorum Δ I, E Θ, Z K, continentes cum basi A Γ angulos æquales angulo A: dico quod A I major erit quam Θ K; quodque si arcus B Γ, in quo capiantur duo arcus æquales, major fuerit quam A B, erunt A B, K Z simul minores arcubus I Δ, Θ E simul sumptis. "Si vero B Γ " minor fuerit quam A B, " erunt è contra A B, Z K si- " mul majores ipsis I Δ, Θ E simul sumptis.



Ponatur I A ipsi K Γ æqualis, & ducatur arcus circuli magni Λ M N, continens cum Λ A angulum æqualem angulo Γ. Quoniam vero Λ I æqualis est ipsi Γ K, & angulus Γ æqualis angulo M Λ I, angulus vero K angulo M I Λ; erit (*per* 14[m] I. *hujus*) arcus Γ Z æqualis arcui Λ M, & K Z ipsi I M. Cumque arcus A B, B Γ simul minores sint semicirculo; erunt anguli A, Γ simul minores duobus rectis, ac proinde arcus A M occurret ipsi A B. Occurrat ei ad N; & erit M N (*per* 3ᵐ II. *hujus*) major arcu Δ B. Fiat M X ipsi Δ B æqualis, & è puncto X ducatur arcus X Π, continens cum A Γ angulum X Π Γ æqualem angulo A. Quoniam vero M X, Δ B sunt æquales, uti sunt Δ B, Z E æquales; erunt quoque Z E, M X æquales: & Γ Z, A M sunt æquales, quare totus arcus Γ E est æqualis toti A X. Angulo autem Γ æqualis est angulus X A Π, & angulus X Π A æqualis est angulo E Θ Γ; & arcus X Π, E Θ sunt singuli minores arcu A B quadrante minore; quare arcus X Π, E Θ simul non sunt æquales semicirculo: proinde arcus X Π (*per* 16ᵐ I. *hujus*) æqualis est ipsi E Θ. Est etiam Γ Θ ipsi A Π æqualis, uti Γ K ipsi A I; restabit igitur arcus K Θ æqualis ipsi I Π, quo major est A I: adeoque arcus A I major est arcu Θ K. Q. E. D.

Sit jam B Γ major quam B A, & capiantur in B Γ arcus æquales B Δ, E Z, & ducantur Δ I, E Θ, Z K continentes cum A Γ angulos æquales angulo A: dico quod arcus A B, Z K simul minores erunt ipsis I Δ, E Θ simul sumptis.

Primo sit angulus B A Γ non minor recto; & producatur arcus A B ad M, ita ut A M sit æqualis ipsi Z K. Jam autem ostensum est, quod A I major est quam K Θ: fiat igitur A Λ æqualis ipsi K Θ, & ducantur arcus circulorum magnorum M Λ, Z Θ. Quoniam itaque anguli Z K Γ, B A Γ sunt æquales; erit angulus Z K Θ æqualis angulo Λ A M. Et Λ A, A M sunt æquales ipsis K Θ, Z K respective: erit igitur basis Z Θ æqualis basi Λ M, & angulus K Z Θ angulo A M Λ. Cum autem omnis trianguli Sphærici tres anguli sint majores duobus rectis, erunt anguli Θ Z K, Z Θ K, Z K Θ sive E Θ I, majores duobus rectis: quare anguli Θ Z K, Z Θ K, E Θ I majores sunt angulis Z Θ K



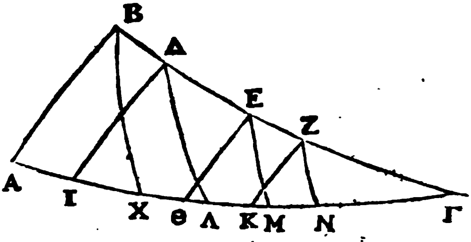
Z Θ E

Z Θ E & E Θ I. Auferantur communes Z Θ K, E Θ I, & reliquus angulus Θ Z K major erit angulo Z Θ E; adeoque angulus Λ M Λ major erit angulo Z Θ E. Fiat arcus Θ E N æqualis arcui M Λ B, & ducatur arcus circuli magni Z N. Quoniam igitur arcus N Θ æqualis eſt arcui B Λ M, uti arcus Λ M arcui Z Θ, & angulus Λ M Λ major eſt angulo E Θ Z; erit (*per* 8ᵐ I. *hujus*) arcus B Λ major arcu Z N. Cum autem Λ B conſtituit cum Λ Γ angulum recto non minorem, erit arcus B I major arcu B Λ; Et B Λ major eſt quam Z N; quare B I major eſt quam Z N. Cum vero arcus Δ I, E Θ conſtituunt cum Λ Γ angulos æquales angulo Λ; erit angulus Θ E B (*per* 10ᵐ I. *hujus*) major angulo I Δ B. Et angulus Θ E B æqualis eſt angulo N E Z: quare angulus N E Z major eſt angulo B Δ I. Fiat angulus Z E X æqualis angulo B Δ I; & erit arcus B I major quam X Z, utpote qui major eſt quam Z N. Sed B I major eſt quam Z E, quia B Δ æqualis eſt ipſi Z E, & B I major eſt quam B Δ: quapropter duci non poteſt, de puncto Z ad arcum E X, arcus circuli magni æqualis arcui I B, qui cadat inter puncta E, X. Cadat igitur extra arcum illum, ſitque arcus Z Π arcui I B æqualis. Jam quoniam in duobus triangulis B Δ I, E Π Z, duo anguli Π E Z, B Δ I ſunt æquales, & æquales ſunt arcus continentes duos alios angulos Π Z E, Δ B I, hoc eſt arcus Δ B ipſi Z E, & B I arcui Z Π æqualis; reliqui vero duo anguli, nempe E Π Z, Δ I B, ſunt minores rectis: erit (*per* 13ᵐ I. *hujus*) reliquus arcus E Π æqualis reliquo Δ I. Ducatur arcus circuli magni N Π. Cumque arcus Π Z, ipſi B I æqualis, major ſit quam Z N; erit angulus Π N Z major angulo N Π Z: quare angulus Π N E multo major erit angulo N Π E, atque adeo arcus Π E major erit arcu E N. Adjiciatur arcus E Θ communis, & duo arcus Π E, E Θ majores erunt duobus N E, E Θ. Sed N E Θ æqualis eſt utriſque B Λ, Z K; & Π E, E Θ ſunt æquales ipſis Δ I, E Θ: quapropter Λ B, Z K ſimul ſumpti minores ſunt ipſis Δ I, E Θ ſimul ſumptis. Q. E. D.

Si vero fuerit angulus B Λ Γ minor recto: dico quoque quod arcus Λ B, Z K ſimul minores erunt quam E Θ, Δ I.

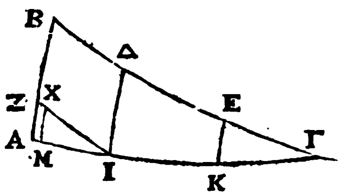
Angulo enim Λ exiſtente acuto, tres anguli Δ I Γ, E Θ Γ, Z K Γ fiunt acuti: adeoque fieri poteſt ut ducantur è punctis B, Δ, E, Z arcus æquales arcubus B Λ, Δ I, E Θ, Z K, qui pariter cadant inter puncta Λ, Γ. Sint iſti arcus B X, Δ Λ, E M, Z N: & erunt omnes anguli B X Γ, Δ Λ Γ, E M Γ Z N Γ obtuſi, æquales vero inter ſe. Quoniam vero in triangulo B X Γ angulus

ΧΒΓ non est major recto, & ΓΒ major est quam ΧΒ, & ΒΓ non major est quadrante; angulus autem ΒΧΓ est obtusus, & arcus ΒΔ arcui ΕΖ æqualis est: erunt duo arcus ΒΧ, ΖΝ simul minores duobus arcubus ΔΛ, ΕΜ; ut ostensum est in proxime præcedentibus. Cum igitur ΒΧ æqualis sit ipsi ΒΑ, & ΔΛ ipsi ΔΙ, & ΕΜ ipsi ΕΘ, & ΖΝ ipsi ΖΚ; erunt duo arcus ΑΒ, ΖΚ simul sumpti minores duobus ΔΙ, ΕΘ simul sumptis. Q. E. D.



Sed in triangulo ΑΒΓ, si capiatur ΒΔ æqualis ipsi ΕΓ, & ducantur arcus ΔΙ, ΕΚ modo superius exposito: dico quod ΑΙ major est quam ΓΚ.

Ad punctum Ι super arcum ΑΙ constituatur angulus ΑΙΖ æqualis angulo Γ: ac manifestum est arcum ΙΖ occurrere arcui ΑΒ, quodque ΙΖ (*per* 3^{m} II. *hujus*) major est quam ΔΒ. Fiat ΙΧ ipsi ΔΒ æqualis, & de puncto Χ ducatur arcus ΧΜ ad basim ΑΓ, ita ut angulus ΧΜΓ sit æqualis angulo Α. Quoniam itaque duo anguli ΕΓΚ, ΕΚΓ trianguli ΕΓΚ sunt æquales duobus ΧΙΜ, ΧΜΙ trianguli ΧΜΙ respective; & arcus ΕΓ, ΙΧ sunt etiam æquales, ob arcus æquales ΧΙ, ΔΒ; arcus autem ΓΚ, ΙΜ simul sumpti non sunt æquales semicirculo, neque arcus ΕΚ, ΧΜ: erit (*per* 16^{m} I. *hujus*) arcus ΓΚ æqualis arcui ΙΜ, quo major est arcus ΑΙ; adeoque arcus ΑΙ major est arcu ΓΚ. Q. E. D.

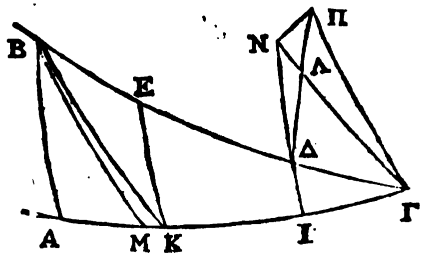


Dico quoque quod ΑΒ minor est utrisque ΔΙ, ΕΚ simul sumptis.

Ponatur arcus ΙΔΝ ipsi ΑΒ æqualis; & jam ostensum est quod ΑΚ major est quam ΙΓ. Fiat igitur ΑΜ æqualis ipsi ΙΓ, & ducantur ΒΜ, ΒΚ, ΓΝ. Jam quoniam ΒΑ æqualis est ipsi ΙΝ, & ΑΜ ipsi ΙΓ, & angulus ΒΑΜ æqualis angulo ΝΙΓ; erit basis ΒΜ æqualis basi ΝΓ. Est autem angulus Α non minor recto, quare arcus ΒΚ major est arcu ΒΜ; & ob ΒΜ æqualem ipsi ΝΓ, erit

arcus

arcus B K major quam N Γ. Pari autem ac in præcedentibus argumento constabit angulum B Δ I majorem esse angulo K E B, ob æquales angulos A K E, A I Δ. Fiat igitur angulus Γ Δ Λ æqualis angulo K E B; & erit B K major quam Γ Λ, quia major quam Γ N: major quoque erit quam Γ Δ, ob B K quam E B majorem, hoc est quam Γ Δ. Hinc manifestum est arcum de Γ ductum ad circulum cujus est arcus Δ Λ, ipsique B K æqualem, non casurum inter



puncta Δ, Λ. Sit ille arcus Γ Π. Quoniam vero arcus Γ B major est quam B A, & Γ B non est major quartâ circuli; erit quidem arcus B K major quam B A, minor vero quartâ circuli: quapropter uterque arcus E B, B K minor est quadrante, & angulus B E K est obtusus, quia angulus A B Γ non major est recto; angulus igitur B K E (*per* 22^{m} I. *huj.*) acutus est. Cum autem Γ Π æqualis sit ipsi B K, & Γ Δ ipsi E B; erit uterque Γ Δ, Γ Π minor quadrante; & angulus Γ Δ Π est obtusus, quippe æqualis ipsi B E K; adeoque angulus Δ Π Γ etiam acutus est. Quocirca duo triangula B E K, Δ Γ Π duos habent angulos æquales, nempe angulos Γ Δ Π, B E K; & duo latera alium in utroque angulum continentia inter se æqualia, nempe B E ipsi Γ Δ, & Γ Π ipsi B K; reliqui vero duo anguli sunt minores recto: arcus igitur Π Δ (*per* 13^{m} I. *hujus*) erit æqualis arcui E K. Sed Π Δ major est quam N Δ, adeoque, E K, Δ I simul sumpti superant arcum N Δ I, quem fecimus æqualem ipsi A B. Q. E. D.

Propositio hæc apud Arabes *in quinque diversas subdivisa est, earumque ultima XIIIma habetur.*

PROP. VII. THEOR.

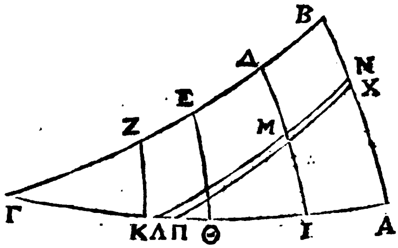
Si trianguli Sphærici aliquis ex angulis non major fuerit recto, & latera ipsum continentia inæqualia, ita tamen ut majus eorum non excedat quadrantem circuli; & si ab eorum altero ad basim ducantur arcus continentes cum eâ angulos æquales angulo trianguli sub basi & reliquo latere contento; fuerit autem reliquum illud

latus

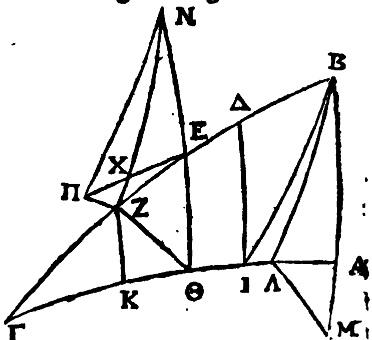
latus una cum tertio & minimo arcu ducto æqualis duobus arcubus intermediis: abscindent hi arcus segmenta inæqualia tam è basi quam è latere illo; quorum quæ propius adjacent lateri reliquo & indiviso majora erunt remotioribus ab eodem.

In triangulo Sphærico Α Β Γ sit angulus Β non major recto, & latus Γ Β majus quam Β Α; nec sit Β Γ major quadrante circuli; ducantur autem arcus Δ Ι, Ε Θ, Ζ Κ continentes cum Α Γ angulos æquales angulo Α; ac sint Α Β, Ζ Κ simul æquales arcubus Δ Ι, Ε Θ simul: dico quod Α Ι major est quam Θ Κ, & Β Δ quam Ε Ζ.

Capiatur Ι Λ ipsi Κ Γ æqualis, & ad Λ super arcum Α Λ constituatur angulus Α Λ Ν æqualis angulo Γ. Quoniam vero duo anguli trianguli Ζ Γ Κ sunt respective æquales duobus angulis trianguli Λ Μ Ι, & arcus Γ Κ æqualis est arcui Ι Λ; erit (*per* 14^{m} I. *hujus*) arcus Κ Ζ æqualis arcui Ι Μ. Sed Α Β, Κ Ζ simul sunt æquales ipsis Ι Δ, Θ Ε simul; quare, sublatis æqualibus, Α Β æqualis erit ipsis Θ Ε, Δ Μ simul. Verum (*per* 3^{m} II. *hujus*) Δ Μ major est arcu Β Ν: fiat igitur Β Χ ipsi Δ Μ æqualis, & restabit Χ Α æqualis ipsi Θ Ε. Ducatur arcus Χ Π faciens cum Α Γ angulum æqualem angulo Γ; æqualis igitur erit (*per* 16^{m} I. *hujus*) arcus Α Π ipsi Γ Θ: totus itaque Α Λ major est quam Γ Θ. Atqui Ι Λ æqualis est ipsi Κ Γ: quapropter, sublatis æqualibus, reliquus Α Ι major erit reliquo Θ Κ. Q. E. D.



Existente autem arcu Γ Β majore quam Α Β: dico quod Β Δ major est quam Ε Ζ. Quoniam enim Α Ι demonstratus est major quam Θ Κ, ponatur Α Λ ipsi Θ Κ æqualis; & producatur Β Α ad Μ, ita ut Α Μ sit æqualis ipsi Ζ Κ; & ducantur Β Λ, Β Ι arcus circulorum magnorum: jungatur etiam Ζ Θ arcus circuli magni; & (*per* 4^{m} I. *hujus*) arcus Λ Μ æqualis erit ipsi Θ Ζ. Producto autem Θ Ε, usque dum Ε Ν sit æqualis ipsi Δ Ι, ducatur arcus Ν Ζ: est igitur arcus Β Μ æqualis ipsi Θ Ν. Angulus autem Λ Μ Α (*per ostensa in præced.* 6^{ta}) major est angulo Ζ Θ Ε; quare re arcus B Δ (*per* 8m I. *hujus*) major erit quam Z N, atque adeo B I multo major quam Z N. Manifestum autem est angulum N E Γ majorem esse angulo B Δ I: fiat igitur angulus N E X æqualis angulo B Δ I, & erit X N minor quam B I. Sed B I major est quam Δ I, hoc est, quam N E; quare arcus eductus de N, ad circulum cujus arcus est E X, & arcui B I æqualis, non cadet inter puncta E, X. Cadat itaque extra, ad modum arcus N Π. Et quoniam duo triangula B Δ I, N E Π duos habent angulos æquales, nempe angulos N E Π, B Δ I; æquales autem sunt arcus comprehendentes duos alios eorum angulos, hoc est, B I arcui N Π, & Δ I ipsi N E æqualis; reliqui vero anguli non sunt recti, sed uterque acutus: manifestum est (*per* 13m I. *hujus*) quod arcus E Π æqualis est ipsi B Δ. Sed E Π major est quam E Z, ob N Π majorem quam Z N; atque adeo B Δ major est quam E Z. Q. E. D.



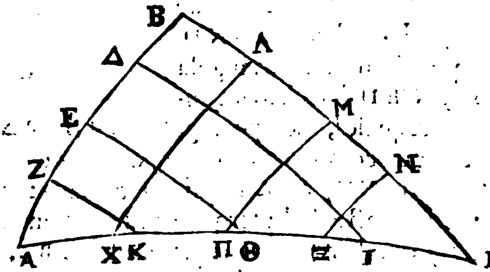
" *His præmonstratis, quod in propositione sexta omissum videatur hic demonstrare licet: nempe quod, si fuerit latus trianguli divisum minus indiviso, erit latus indivisum, una cum arcu qui adjacet angulo lateri indiviso opposito, majus duobus reliquis intermediis. Si vero, iisdem positis, arcus extremi æquales fuerint intermediis simul sumptis, erit arcus è latere minore abscissus, qui adjacet majori, minor eo qui adjacet angulo eidem majori lateri opposito.*

Jam vero in triangulo Sphærico A B Γ sit angulus B non major recto, & latus A B minus quam B Γ, & B Γ non majus quadrante; & capiatur in A B arcus B Δ æqualis arcui E Z, & ducantur Δ I, E Θ, Z K sub angulis angulo Γ æqualibus: dico quod Γ B, Z K simul sumpti superant ipsos Δ I, E Θ simul sumptos.

Capiantur Γ Λ ipsi I Δ, & Γ M ipsi Θ E, & Γ N ipsi Z K æquales, & ducantur arcus Λ X, M Π, N Ξ, sub angulis angulo A æqualibus. Jam quoniam B Δ est æqualis ipsi E Z, erunt BA, A Z æquales ipsis Δ A, A E simul. Cum autem duo triangula Γ Λ X, A I Δ duos

duos habeant angulos unius æquales duobus angulis alterius; arcus vero alteri æqualium angulorum oppositus in uno æqualis sit relativo suo in altero, nempe arcus Λ Γ arcui Δ I; reliqua autem duo latera in utroque non sint æqualia semicirculo: erit (*per* 16^{m} I. *buj.*) arcus Λ X æqualis ipsi Δ A. Pariterque M Π, E A; N Ξ, Z A erunt æquales; quare A B, N Ξ sunt æquales ipsis Λ X, M Π simul. Hinc (*per jam demonstrata*) B Λ major erit quam M N, atque adeo B Γ, Γ N excedent ipsos Λ Γ, Γ M. Sed Λ Γ æqualis est ipsi Δ I, & M Γ ipsi E Θ, uti N Γ ipsi Z K; quare ipsi B Γ, Z K simul sumpti superant arcus Δ I, E Θ simul sumptos.

Sint autem in hâc figurâ B Γ, Z K simul æquales ipsis E Θ, Δ I: dico quod B Δ minor est quam Z E.



Consimili enim modo capiantur Γ Λ, Γ M, Γ N æquales ipsis Δ I, E Θ, Z K; & ducantur Λ X, M Π, N Ξ, ut fecimus in priore. Quoniam autem B Γ, Γ N æquales sunt ipsis Λ Γ, Γ M; erit B Λ ipsi M N æqualis: unde (*per* 6^{m} II. *hujus*) A B, N Ξ simul minores erunt ipsis Λ X, M Π simul sumptis. Demonstravimus autem Δ A, E A, Z A æquales esse ipsis Λ X, M Π, N Ξ; adeoque A B, A Z simul minores fient ipsis Δ A, A E: unde patet B Δ minorem esse quam E Z. Nam si utrinque auferatur A Z, restabit B A minor quam Δ A, E Z simul: dein utrinque etiam tollatur arcus E A, & remanebit E B minor quam Δ Z. Denique sublato communi Δ E, erit B Δ minor quam E Z. Q. E. D.

Subdividitur etiam hæc Arabibus in tres diversas, quarum ultima & XV ma. alia Propositio merito censenda est.

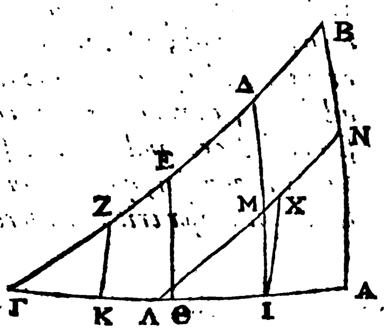
PROP. VIII. THEOR.

Si trianguli Sphærici angulus aliquis non major sit recto, arcus vero continentes illum sint inæquales, neque major eorum excedat circuli quadrantem; & si ducantur à majori eorum ad basim tres arcus circulorum magnorum, quorum duo contineant cum eâ angulos æquales contento sub basi & latere minore; abscindantur autem tam è latere

latere majore quam è basi, segmenta æqualia illis quæ lateri minori adjacent; & per puncta divisionum ducatur arcus tertius: erit angulus contentus sub arcu illo tertio & basi major contento sub basi & arcu minore.

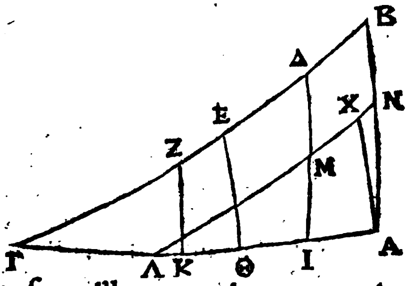
In triangulo Sphærico ΑΒΓ sit angulus Β non major recto; & sit ΒΓ major quam ΒΑ, haud major vero quadrante; & ducantur arcus ΔΙ, ΕΘ, ΖΚ, ita ut anguli ΔΙΓ, ΕΘΓ sint æquales angulo Α; fiat autem ΘΚ æqualis arcui ΑΙ, & ΕΖ ipsi ΒΔ: dico angulum ΖΚΓ majorem esse angulo Α.

Fiat ΙΛ ipsi ΓΚ æqualis, & ad Λ super arcum ΛΑ constituatur angulus ΑΛΜ æqualis angulo Γ. Quoniam itaque arcus ΛΙ æqualis est ipsi ΓΚ, & ΑΙ ipsi ΘΚ; erit totus ΛΑ toti ΓΘ æqualis. Anguli autem super arcus illos, in utroque triangulo ΕΓΘ, ΝΛΑ sunt respective æquales; quare (*per 14^m I. huj.*) arcus ΕΓ æqualis erit ipsi ΝΛ. Verum ΝΜ major est quam ΕΖ, quia (*per 3^m II. hujus*) major quam ΒΔ. Fiat igitur ΝΧ æqualis ipsi ΒΔ, & ducatur ΙΧ. Cum autem reliquus ΛΧ æqualis sit ipsi ΖΓ, & arcus ΓΚ, ΛΙ sint æquales, uti & angulus Γ angulo ΧΛΙ æqualis; erunt arcus ΙΧ, ΖΚ æquales, atque angulus ΖΚΓ angulo ΧΙΛ. Sed angulus ΧΙΛ major est angulo ΜΙΓ angulo Α æquali; angulus igitur ΖΚΓ major est angulo Α. Q. E. D.



Quod si angulus ΖΚΓ & alteruter è duobus angulis ΔΙΓ, ΕΘΓ fuerint æquales angulo Α, cæteris manentibus: dico quod angulus reliquus minor erit angulo Α.

Fiat enim ΙΛ ipsi ΓΚ æqualis, & ad Λ super ΛΑ constituatur angulus ΙΛΜ æqualis angulo Γ; & ob arcus ΓΚ, ΛΙ æquales, sicut & duos angulos super illos arcus, in utroque triangulo



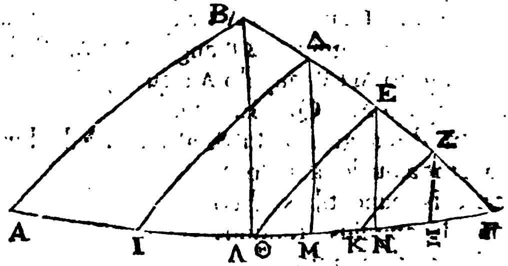
gulo

gulo Γ Z K, Λ M I, etiam æquales; erit Z Γ ipsi Λ M æqualis. Major autem est M N quam B Δ: fiat igitur M X æqualis ipsi B Δ, & erit Λ X æqualis ipsi Γ E. Quoniam igitur Γ K, Λ I sunt æquales, uti & K Θ, I A æquales; erunt toti Γ Θ, Λ A æquales. Et X Λ, Γ E sunt æquales; adeoque E Γ, Γ Θ sunt æquales ipsis X Λ, Λ A, respective. Et angulus E Γ Θ æqualis est angulo X Λ A; quare basis E Θ æqualis est basi X A, & angulus X A Λ æqualis est angulo Γ Θ E. Angulus autem X A Λ minor est quam B A Λ: angulus igitur Γ Θ E minor est angulo B A Γ. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

Si trianguli Sphærici uterque angulorum ad basim fuerit acutus, & uterque arcuum eosdem subtendentium minor quartâ circuli; & in eorundem non majore capiantur arcus æquales, à quorum extremitatibus ducantur arcus ad basim, continentes cum ea angulos æquales contento sub basi & arcu indiviso: abscindent hi arcus è basi portiones inæquales, quarum quæ propior est arcui indiviso trianguli major erit remotiore ab eodem.

In triangulo Sphærico A B Γ, sit uterque angulorum Γ A B, A Γ B acutus, & utrumque crus A B, B Γ minus quadrante; & in crure B Γ, quod non sit majus altero, capiantur duo arcus æquales B Δ, E Z, & ducantur arcus circulorum magnorum Δ I, E Θ, Z K, occurrentes arcui Γ A sub angulis æqualibus angulo A: dico quod A I major est quam Θ K.

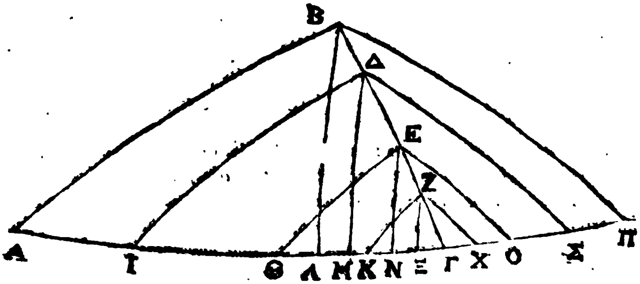


Sit primo A B æqualis ipsi B Γ, & de punctis B, Δ, E, Z demittantur ad angulos rectos super basim A Γ arcus B Λ, Δ M, E N & Z Ξ; cumque A B æqualis sit ipsi B Γ, & B Λ normalis super A Γ, erunt A Λ, Λ Γ æquales; quare A Γ duplus est ipsius A Λ: pariter Γ I duplus ipsius Γ M. Et quoniam excessus arcus A Γ supra Γ I duplus est, excessûs dimidii ipsius A Γ supra dimidium arcus

arcus Γ I, sive ipsius Λ Γ supra Γ M; & excessus A Γ supra Γ I est arcus A I, uti excessus arcus A Γ supra Γ M est arcus Λ M, erit A I duplus ipsius Λ M. Pari argumento cum Γ Θ duplus sit ipsius Γ N, & Γ K duplus arcus Γ Ξ, erit excessus ipsius Γ Θ supra Γ K duplus excessûs dimidiorum eorundem, sive arcus Γ N supra Γ Ξ: erit igitur arcus Θ K duplus ipsius N Ξ. Jam quoniam triangulum A B Γ habet angulum B dimidium anguli A B Γ, adeoque non majorem recto; & latus Γ B majus quam B Λ, & Γ B non major est quartâ circuli; & B Δ æqualis est ipsi E Z, & Δ M, E N, Z Ξ cadunt super arcum A Γ ad angulos æquales angulo B A Γ: erit (per prius demonstrata, in 6^{ta} II. *hujus*) arcus Λ M major quam N Ξ. Sed A I duplus est ipsius Λ M, & Θ K duplus ipsius N Ξ: quocirca major erit arcus A I quam Θ K. Q. E. D.

Sit jam arcus B Γ minor quam B A: dico quod sic etiam A I major erit quam Θ K

Quoniam B Γ minor est quam B A, angulus A minor est angulo Γ, & anguli Δ I Γ, E Θ Γ, Z K Γ sunt singuli æquales angulo A, adeoque minores angulo Γ; unde Γ Δ minor est quam Δ I, & Γ E quam E Θ, & Γ Z quam Z K: quare fieri potest ut ducantur à punctis B, Δ, E, Z arcus æquales arcubus A B, Δ I, E Θ, Z K ad arcum A Γ, qui cadant extra punctum Γ. Sint hi arcus B Π,



Δ Σ, E O, Z X: & de punctis B, Δ, E, Z demittantur arcus normales ad A Γ. Quoniam vero angulus E Γ A est acutus, erit arcus A Γ major quam Π Γ, uti I Γ quam Γ Σ, & Γ Θ quam Γ O, & Γ K quam Γ X; cadentque normales inter puncta A, Γ. Sint normales hi arcus B Λ, Δ M, E N, Z Ξ: erit igitur arcus A Π duplus arcus Π Λ, & arcus I Σ duplus ipsius Σ M; ac propterea excessus ipsius A Π supra I Σ, hoc est arcus A I, Π Σ simul, duplus erit excessûs dimidii ipsius A Π supra dimidium ipsius Σ I, hoc est ipsius Π Λ supra Σ M, nempe arcus M Λ, Σ Π simul. Pari

 modo

modo quia Ο Θ duplus eſt arcûs Ο Ν, & Κ Χ duplus ipſius Ξ Χ; exceſſus arcus Θ Ο ſupra Κ Χ, hoc eſt Ο Χ, Κ Θ ſimul, duplus erit exceſsûs dimidii ipſius Ο Θ ſive Ο Ν ſupra dimidium ipſius Κ Χ ſive Χ Ξ, hoc eſt Ν Ξ, Ο Χ ſimul. Quoniam vero angulus Γ Β Α minor eſt recto, manifeſtum eſt arcum Β Γ majorem eſſe arcu Β Α; nec Β Α neque Β Γ excedere quadrantem. Sed Β Δ æqualis eſt ipſi Ε Ζ; & arcus Δ Μ, Β Ν, Ζ Ξ faciunt angulos æquales angulo Λ: quare (*per* 6^{m} II. *buj.*) arcus Λ Μ major eſt quam Ν Ξ. Et quoniam in triangulo Α Β Π normalis de Β demiſſus cadit inter puncta Α, Γ, erit angulus Π Β Γ minor dimidio anguli Α Β Π, adeoque angulus Π Β Γ non eſt major recto. Uterque autem arcuum Γ Β, Β Π minor eſt quadrante, & arcus Β Δ æqualis eſt ipſi Ε Ζ, ac ducuntur arcus Δ Σ, Ε Ο, Ζ Χ ſub angulis angulo Π æqualibus ſuper arcum Π Γ; erit igitur (*per* 6^{m} II. *hujus*) arcus Π Σ major quam Ο Χ. Nuper autem demonſtravimus Α Ι, Π Σ ſimul duplum eſſe ipſorum Μ Λ, Σ Π ſimul, hoc eſt duplum arcus Λ Μ cum duplo ipſius Π Σ ſimul æqualem eſſe arcubus Α Ι, Π Σ ſimul; ac ſublato communi Π Σ, reſtabit Α Ι æqualis ipſi Π Σ una cum duplo ipſius Λ Μ. Eodem argumento erit Κ Θ æqualis arcui Ο Χ cum duplo ipſius Ξ Ν. Oſtenſum autem eſt Λ Μ majorem eſſe quam Ξ Ν, adeoque duplum ipſius Λ Μ majorem duplo ipſius Ν Ξ, & Π Σ majorem quam Ο Χ: quapropter Π Σ una cum duplo ipſius Μ Λ, qui ſimul æquales ſunt arcui Α Ι, major eſt arcu Ο Χ una cum duplo ipſius Ξ Ν, qui ſimul æquales ſunt ipſi Θ Κ: quare Α Ι major eſt quam Θ Κ. Q. E. D.

NB. *Has novem Propoſitiones nonnulli è Codicibus olim Libro primo tribuerunt; adeoque in Codice* Hebræo, *unde facta eſt hæc traductio, duplici ordine numerantur; atque hæc ultima tam ut* IX^{na} *ſecundi quam* $XLIV^{ta}$ *primi ſignata eſt. Dein quaſi hic inciperet Liber ſecundus, ſub novo Titulo, novaque Propoſitionum ſerie, ſubjiciuntur quatuor Theoremata, eadem ipſa quæ in quatuor præcedentibus oſtenſa ſunt quaſi ad verbum referentia, eodemque modo demonſtrata.*

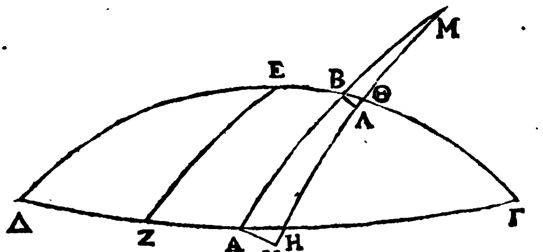
Qui ſit uſus hujus recapitulationis ſane non liquet, quapropter loco haud alieno viſum eſt Scholion *inſerere, totius rei ſummam paulo plenius & accuratius exhibiturum.*

SCHOLION.

Recte quidem cautum eſt à Menelao *in ultimis Propoſitionibus, ne angulus ſub cruribus contentus major ſit recto; neve crus majus, in quo ſumuntur arcus æquales, vel ad quem ducuntur arcus cum baſi angulos æquales conſtituentes, excedat circuli quadrantem: aliter enim incidiſſet in ambiguum, ob Dioriſmum* *visimum in Sphæricis satis difficilem, & ut videtur Veterum methodis inaccessum.* Euclides *enim in* Phænomenis, *& post eum* Hipparchus, *nihil protulere de Zodiaci signis maximo tempore orientibus: ejusque rei rationem reddens* Pappus *Prop.* 56. *Lib.* VI. Collect. Math. *hæc habet,* ἐπιταράττουσι γὰρ οἱ ζητοῦντες καὶ ἀπορεῖσιν εἰς τὰς ἀνατολικὰς διαφοράς. *Idemque* Pappus *eo loci testatur* Menelai *nostri hac de re exstitisse dissertationem, quæ temporum injuria olim periisse videtur.*

Nequid autem hac in parte desideraretur, Diorismum hunc plenius assecuti sumus; ac rem Sphærica tractantibus adhuc intactam accuratius perpendere constituimus. Ignoscat tamen Lector si in hoc Parergo nonnulla assumpserimus Auctoris nostri ævo nondum comperta.

Pone arcum ΑΓ *basim esse trianguli* ΑΒΓ, *apud quam fiunt constantes anguli, latus indivisum* ΑΒ, *divisum vero* ΒΓ; *ac sit uterque angulus* Α, Γ *acutus,* Α *vero primo major sit quam* Γ. *Producantur arcus* ΑΓ, ΓΒ *ad occursum in* Δ, *& bisecetur semicirculus* ΓΔ *in puncto* Ε, *& ducatur arcus* ΕΖ, *constituens cum* ΑΓ *angulum æqualem angulo* Α; *& erit* ΕΖ, *maximus arcuum sub eodem angulo inter arcus* ΔΒΓ, ΔΑΓ *ducendorum. Arcui*

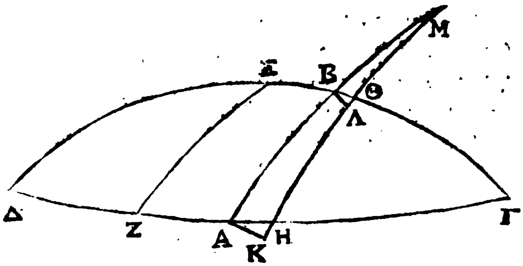


autem ΑΒ *quam proximè ducatur sub eodem angulo arcus* ΘΗ, *qui productus occurrat arcui* ΑΒ *producto in puncto* Μ: *& centro* Μ, *intervallo* ΜΒ, *describatur arcus circuli minoris* ΒΛ; *eodemque centro & intervallo* ΜΑ *describatur arcus circuli* ΑΚ; *qui magnus erit circulus, quia* (per 10^{m} I. huj.) *arcus* ΑΜ, ΜΗ *simul sumpti sunt æquales semicirculo. erit igitur arcus momentaneus* ΑΚ *ad momentaneum* ΒΛ *sicut semidiameter Sphæræ ad semidiametrum circuli cujus arcus est* ΒΛ, *hoc est ad sinum arcus* ΜΒ, *qui complementum est arcus* ΑΒ *ad quadrantem. Est autem arcus* ΒΛ *ad arcum* ΘΒ *sicut sinus anguli* Β *ad radium: ex æquo itaque arcus* ΑΚ

ad

ad ΘΒ *erit sicut sinus anguli* B *ad sinum complementi arcus* A B. *Sed arcus momentaneus* A H *est ad* A K *sicut radius ad sinum anguli* A; *ratio igitur arcus* A H *ad* Θ B *componitur ex ratione quam habet sinus anguli* B *ad sinum arcus* M B, *&* *ex ea quam habet radius ad sinum anguli* A. *Manente autem angulo* A, *ratio radii ad sinum anguli* A *data est: proinde ubicunque ducatur arcus* A B *inter semicirculos* Δ Ε Γ, Δ Α Γ; *si fiat ut sinus anguli* B *ad sinum arcus* M B *ita* A H *ad quartam proportionalem, erit ea quarta semper in data ratione ad* B Θ, *nempe in ratione radii ad sinum anguli* A; *atque adeo ubi maxima fuerit ratio sinus anguli* B *ad sinum ipsius* M B, *ibi quoque* maxima *erit ratio arcuum momentaneorum* A H *ad* Θ B.

Concipe jam arcum A B *motu æquabili ferri de* Γ *ad* Δ *inter arcus* Γ Ε Δ, Γ Α Δ, *manentibus angulis* A *&* Γ; *ac manifestum est continue augeri arcum* A B, *usque dum* B *ad* E *feratur, &*



A *ad* Z; *atque adeo sinum arcus* M B *eousque minui, minimumque fieri coëuntibus punctis* B, E: *ultra vero* E *augeri. Angulus autem* B *continue augetur, & apud* E *in omni casu fit recto major: ubique etiam recto major est, si anguli* A, Γ *simul minores fuerint recto. Si vero simul majores fuerint recto, angulus* B *de* Γ *prodiens fit primo acutus, dein rectus, ac denique obtusus, priusquam* B *ad* E *pervenit. Anguli autem acuti sinus aucto angulo augetur, obtusi vero sinus eo aucto minuitur, uti manifestum est.*

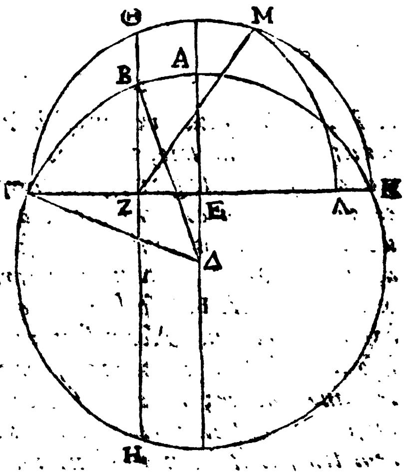
Ut igitur habeatur ratio maxima *sinus anguli* B *ad sinum arcus* M B, *simul augeri vel simul minui debent sinus isti in eadem ratione quam habent inter se. In quadrante autem* E Δ *minuitur sinus anguli obtusi* B, *interea dum augetur sinus arcus* B M; *atque adeo in toto illo quadrante ratio arcuum momentaneorum* A H *ad* Θ B *minuitur, minimaque fit in puncto* Δ. *In quadrante vero* E Γ, *si anguli* A, Γ *simul minores fuerint recto,*

erit

erit angulus B semper obtusus; vel si majores recto fuerint, in hac saltem parte quadrantis ΓE, quæ versus E, erit angulus ille obtusus; ac proinde minuitur sinus ejus, interea dum sinus arcus MB etiam decrescit. Quoties igitur fieri potest ut inter E, Γ inveniatur situs arcus AB, talis ut sinus arcus MB in eadem ratione minuatur qua sinus anguli B; angulus ABΓ semper obtusus sit, arcusque BΓ quadrante minor. Si igitur BΓ minor fuerit quadrante, ac simul angulus ABΓ recto major; vel si angulus ABΔ fuerit recto minor, & arcus BΔ quadrante major, incidere possumus in ambiguum supra dictum: Menelaus igitur in præcedentibus Propositionibus non sine causa admonuit arcum divisum BΓ quadrante majorem non esse debere, neque angulum ABΓ majorem recto.

Et autem in omni casu cognoscatur punctum B, tale ut arcus intercipiens AH ad arcum BΘ maximam obtineat rationem, manentibus scilicet angulis A & Γ, compositione satis expedita habebitur universim, ad hunc modum.

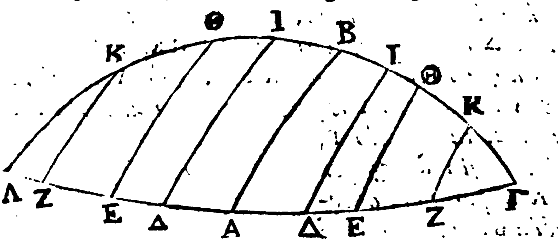
Centro Δ describatur circulus AΓHK, ac fiat angulus AΔB æqualis angulo Γ, angulusque AΔΓ angulo A æqualis; & ponatur arcus AK arcui AΓ æqualis, & jungatur recta ΓK occurrens ductæ AΔ in puncto E, quo bisecta est ΓK: & per B ipsi AΔ parallela ducatur recta BH occurrens ipsi ΓK ad angulos rectos in puncto Z. Dein centro E, radio ΓE, describatur semicirculus ΓΘMK, cui conveniat recta BH producta in puncto Θ; & erit ZΘ media proportionalis tam inter ZH, ZB, quam inter ZΓ, ZK. Capiatur etiam ZΛ media proportionalis inter ZΘ, ZH; & erit ZΛ maxima è tribus mediis proportionalibus inter ZH, ZB, sive inter summam & differentiam sinuum complementorum arcuum AB, AΓ ad quadrantes. Denique centro Z, intervallo ZΛ, describatur arcus circuli ΛM, occurrens semicirculo ΓΘK in M, & ducatur recta ZM: dico



arcum

arcum ΜΛ *similem esse arcui* ΒΓ *in præcedente figura; hoc est, angulum* ΚΖΜ, *quem subtendit arcus* ΜΚ, *æqualem esse angulo ad centrum Sphæræ, quem subtendit dictus arcus* ΒΓ; *quoties ita divisus sit quadrans* ΓΕ *in* Β, *ut ratio arcus* ΑΗ *ad* ΘΒ maxima *fiat.*

Invento autem hoc Diorismo, jam paulo audentius hujus Libri Secundi Theoremata aliqua proponere, pleniusque exsequi licebit. Manentibus enim angulis acutis Α, Γ, *quorum* Α *major sit, productisque lateribus* ΓΑ, ΓΒ *ad occursum in* Λ; *inveniatur punctum* Β *in semicirculo* ΓΒΛ, *juxta præscriptum Regulæ præcedentis; ita ut arcus* ΑΒ *situs sit, ubi maxima sit ratio momentorum. Jam si ab utraque parte ipsius* Α *capiantur duo arcus æquales, ut* ΑΔ, ΕΖ, *vel in basi* ΑΓ *vel in* ΑΛ; *ac ducantur ad latera* ΒΓ *vel* ΒΛ *arcus* ΔΙ, ΕΘ, ΖΚ: *manifestum est arcum* ΒΙ, *in utroque casu, minorem esse arcu* ΘΚ; *tametsi arcus* ΒΑ *major sit quadrante, atque angulus* ΑΒΓ *major*



recto; contra quod cautum est in Prop. V^ta hujus. *Puncto enim* Α *motu æquabili lato, velocitas puncti* Β, *usque dum limitem quem diximus attigerit, gradatim minuitur; atque adeo arcus, ea velocitate in eodem tempore descripti, continue decrescunt: ultra vero dictum limitem versus* Λ *denuo crescunt, interea dum punctum* Α *ad* Λ *transfertur. Ad* Λ *autem maxima fit velocitas puncti* Β, *respectu ejus quam habet punctum* Α *juxta basim* ΑΛ *latum. Nec refert an alter arcuum æqualium in ipso* ΑΓ *vel* ΑΛ *sumptorum fuerit punctis* Γ, Α *vel* Α, Λ *conterminus, necne; neve an fuerint arcus æquales continui aut disjuncti, aut ex parte intercepti ab invicem; modo arcus* ΔΙ *remotior fuerit à communibus intersectionibus* Γ *aut* Λ *quam est arcus* ΖΚ.

Eodemque modo, si ponatur punctum Β *motu æquabili ferri per arcum* ΓΒΛ, *manifestum est ex præmissis spatia descripta motu puncti* Α *inæqualia fieri; eoque motu gradatim aucto,*

juxta

juxta Α velocitatem ejus maximam provenire. Unde si in crure trianguli majori ΒΓ vel ΒΑ capiantur ab utraque parte ipsius Β duo arcus æquales ΒΙ, ΘΚ; ac ducantur ad basim arcus ΙΔ, ΘΕ, ΚΖ; erit segmentum basis ΑΔ ab iisdem interceptum majus intercepto ΕΖ; quocunque ordine capiantur dicti arcus æquales, modo sint inter Β, Γ vel Β, Α, ac ΚΖ propior fuerit intersectioni basis & cruris divisi quam arcus ΔΙ. Quod quidem ex parte tantum demonstratum dedit Menelaus in VI^ta hujus.

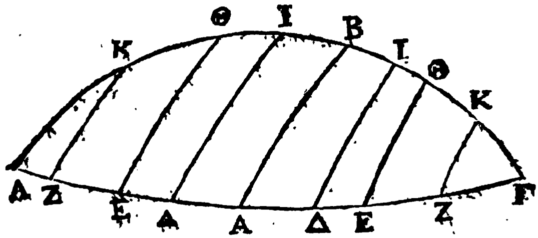
Fieri autem potest ut maxima trium mediè proportionalium, inter summam & differentiam Sinuum complementorum utriusque anguli Α, Γ ad angulos rectos, major sit quam summa Sinuum ipsorum angulorum, id est, in Fig. pag. 71, ut ΖΛ major sit quam ΖΚ, quo in casu circulus centro Ζ intervallo ΖΛ descriptus minime occurret semicirculo ΓΘΚ. Hoc quoties sit, Diorismus de quo agitur locum non habet; atque ubicunque sumpseris duos arcus æquales in basi ΓΑΛ, ac duxeris ad semicirculum ΓΒΛ arcus, ut prius; erit segmentum illud ex eodem abscissum, quod propius est angulo Γ, minus altero ab eodem remotiore: motus enim puncti Β omnium tardissimus fit ad Γ, uti semper velocissimus ad Λ. Ac propterea talibus existentibus angulis Α & Γ, si capiantur arcus æquales utcunque in semicirculo ΓΒΛ; ac ducantur ab eorum terminis ad basim arcus cum eadem angulos æquales angulo Α constituentes: manifestum est segmentum illud basis, ab iisdem interceptum, quod propius est angulo Γ, majus esse segmento altero, remotiore scilicet ab eodem.

Hæc autem accidere nequeant, nisi angulus Γ haud major sit angulo cujus sinus æquatur trienti radii, hoc est angulo 19^gr. 28′. 16″; in quo casu extremo angulus Α fit μοναχὸς, estque 35^gr. 15′. 52″; cujus sinus potest trientem quadrati radii. Si vero angulus Γ minor fuerit prædicto, utrinque limitibus coercetur angulus Α; ut si, exempli gratia, Γ sit 19 graduum, angulus Α major esse nequit quam 41^gr. 41′. 42″, nec minor quam 29°. 18′. 18″, si puncti Β velocitas, respectu ejus quam habet punctum Α, minima fuerit in puncto Γ. Universim autem, posita t æquali tangenti complementi anguli dati Γ ad rectum, & r = radio, duæ radices sive z in hac æquatione $z^4 + tz^3 - rrtz + r^4 = 0$ erunt tangentes semisummæ angulorum Γ & Α in utroque casu, unde & uterque an-

K gulus

gulus A datus erit. *Nec video an leviori opera hæc omnia accuratè definiri queant. Observandum tamen duos illos angulos* A *una cum angulo* Γ *simul sumptos conficere angulum rectum: cujus rei demonstrationem nondum assecutus sum.*

Si vero angulus A *æqualis vel minor fuerit angulo* Γ, *eadem ipsa evenient quæ in prius descriptis, sed absque interveniente Diorismo. Nam si punctum* B *motu æquabili feratur per arcum* ΓBA, *velocitas puncti* A *continuo augebitur, ac proinde arcus, velocitatibus illis æqualibus temporibus descripti, quo longius absunt à puncto* Γ, *eo majores fiunt: id quod à* Menelao *in* 4ta *&* 9na *hujus docetur. Idem etiam dicendum, si angulus* Γ *fuerit obtusus,* A *vero minor eo qui ipsi* Γ *deinceps est. Arcus autem divisus* BΓ, *in utroque casu, major esse nequit eo cujus sinus est ad radium sicut sinus anguli* A *ad sinum anguli* Γ, *existente scilicet arcu* AB *quadrante circuli.*



Restat jam ut paucula subjiciam de altera parte harum Propositionum; nempe quod si capiantur duo arcus æquales in latere trianguli majore, ac ducantur ad basim arcus cum eadem angulos æquales constituentes, erunt duo extremi ex his ductis arcubus simul sumpti minores duobus intermediis: E contra vero, si sumantur arcus illi è minore latere, erunt arcus extremi majores intermediis simul sumptis. Horum prius verum quidem est in omni casu absque limite, nec refert an angulus B *fuerit obtusus vel acutus, aut* BΓ *major vel minor quadrante, modo angulus* A *major sit angulo* Γ. *In altero vero ubi angulus* Γ *major est angulo* A, *sive* Γ *obtusus fuerit vel acutus, arcus indivisus & è quatuor ductis maximus non major esse potest quadrante, eoque necessariò minor est arcus divisus* BΓ, *uti recte monitum est in ultima parte Prop.* VIIma *hujus.*

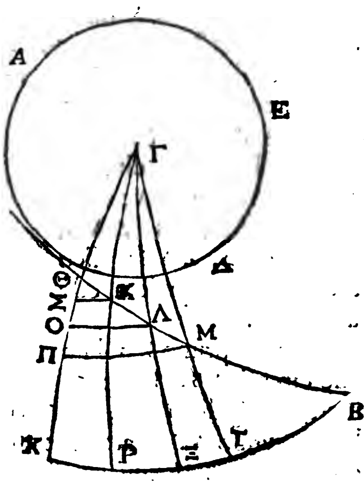
Denique si capiantur in basi duo arcus æquales, ac ducantur ad latus alterutrum cujuscunque trianguli Spherici quatuor *tur arcus continentes cum basi angulos æquales, erit in omni casu summa arcuum intermediorum major extremis simul sumptis, absque conditionibus quæ requiruntur in Propositione* V^ta^. *Sed ad* Menelaum *redeamus.*

His igitur præmonstratis, sequentia subjunximus ad verificanda ea quæ habentur in libro *Theodosii* de Sphæra, cum eorundem conversis: sed modo magis universali & qui assensum extorqueat, tam ad stabilienda principia, quam ad demonstranda ea quæ prius scripta sunt; quorum quidem nonnulla vix satis firma videntur.

PROP. X.

Si fuerit in Sphæra circulus magnus quem tangit aliquis è circulis parallelis; & capiantur in eo duo arcus æquales inter punctum contactûs & maximum parallelorum; & describantur per terminos horum arcuum, tam circuli paralleli, quam circuli magni prodeuntes è polo: tum abscindent hi circuli paralleli ex iis qui de polo ducuntur arcus inæquales, quorum qui maximo parallelorum propior est major erit remotiore. Et præterea portio illa maximi parallelorum circulis de polo ductis abscissa, quæ propior est communi circuli obliqui & circuli parallelorum maximi intersectioni, minor erit remotiore ab eadem

Sit Θ M B circulus magnus Sphæræ, quem contingat aliquis circulorum parallelorum A Δ E, sitque parallelorum maximus B T Ξ P X; & in ipso Θ B capiantur duo arcus æquales Θ K, Λ M; & per polum Γ perque puncta Θ, K, Λ, M ducantur arcus circulorum magnorum Γ Θ X, Γ K P, Γ Λ Ξ, Γ M T; jungantur etiam circuli paralleli transeuntes per puncta K, Λ, M, nempe arcus K Σ, Λ O, M Π:



Dico

dico quod arcus ΠΟ major est arcu ΣΘ, quodque arcus ΧΡ major est arcu ΞΤ.

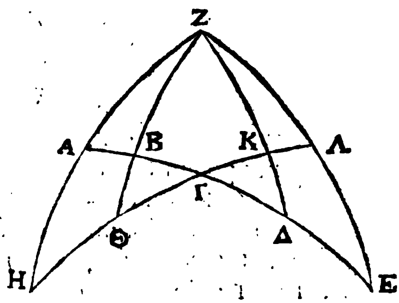
Quoniam enim ΜΓΘ triangulum est Sphæricum, cujus crus ΜΓ majus est crure ΓΘ; ac utrumque minus est quadrante; & in ΘΜ sumuntur arcus æquales ΘΚ, ΛΜ; necessario consequitur, per ea quæ demonstravimus in 33^a I. & 7^{ma} II. hujus, angulum ΘΓΚ majorem esse angulo ΛΓΜ, atque arcum ΧΡ majorem arcu ΞΤ; quodque arcus ΜΓ, ΓΘ simul sumpti superant ipsos ΛΓ, ΓΚ simul sumptos; unde manifestum est arcum ΠΟ majorem esse arcu ΣΘ.

NB. *Hanc propositionem* V^{tam} *&* VI^{am} *&* IX^{am} *Lib. III. Sphæricorum* Theodosii *complecti.*

PROP. XI.

Sese intersecent duo circuli in Sphæra maximi, & in eorum uno capiantur duo arcus æqualiter distantes à puncto sectionis duorum illorum circulorum; & per terminos horum arcuum, perque polos alterutrius circulorum, transeant circuli maximi: abscindent hi circuli ex altero circulorum primorum arcus æquales.

Sint ΑΒΕ, ΗΘΛ duo circuli magni Sphæræ, sese intersecantes in puncto Γ, & in uno illorum capiantur arcus ΑΒ, ΔΕ æqualiter distantes à puncto Γ; & ducantur arcus circulorum magnorum transeuntes per puncta Α, Β, Δ, Ε, & per Ζ polum alterutrius circulorum ΑΒΕ, ΗΓΛ; sint autem hi arcus ΖΑΗ, ΖΒΘ, ΖΚΔ, ΖΛΕ: dico arcum ΗΘ æqualem esse arcui ΚΛ.



Ponamus primo Ζ polum esse circuli ΑΒΔΕ, quare uterque angulus ΓΑΗ, ΛΕΓ erit rectus. Et angulus ΛΓΕ æqualis est angulo ΑΓΗ; atque etiam arcus ΑΓ æqualis est arcui ΓΕ: quare arcus ΓΗ æqualis est arcui ΓΛ. Pari argumento constabit

ſtabit arcum Θ Γ æqualem eſſe arcui Κ Γ; reliquus igitur arcus Θ Η æqualis eſt arcui Κ Λ.

Ponamus autem punctum Ζ polum eſſe circuli Λ Γ Η; & erunt duo anguli Λ Η Γ, Γ Λ Ε recti. Angulus autem Λ Γ Η æqualis eſt angulo Λ Γ Ε, uti arcus Λ Γ æqualis arcui Γ Ε; & duo arcus Λ Η, Λ Ε ſimul ſumpti non ſunt æquales ſemicirculo, quia uterque eſt quadrante minor: arcus igitur Η Γ (*per* 16^{m} I. *huj.*) æqualis eſt arcui Γ Λ. Ac ſimili modo demonſtrabitur arcum Θ Γ æqualem eſſe arcui Γ Κ: arcus igitur reliquus Θ Η æqualis eſt Κ Λ. Q. E. D.

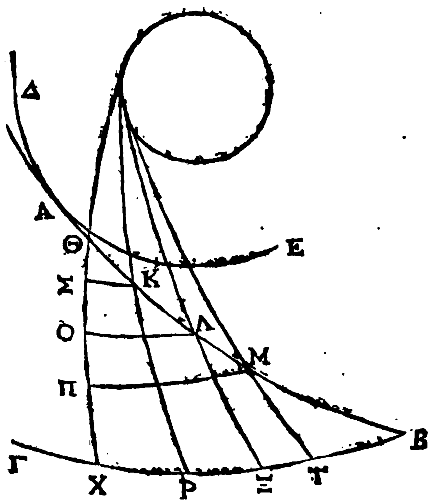
Hæc eſt 13^{a} III. *Sphæricorum* Theodoſii.

PROP. XII.

Si fuerit circulus Sphæræ maximus, quem contingat aliquis è circulis parallelis; & inter punctum contactus & parallelorum maximum capiantur duo arcus æquales; & ducantur arcus circulorum per terminos ſumptorum arcuum tranſeuntes, quorum aliqui ſint arcus circulorum parallelorum, aliqui vero magnorum vel per parallelorum polos tranſeuntium, vel unum aliquem eundemque circulum parallelum, ſed priori parallelo minorem, contingentium, & ad eaſdem partes ſuper maximum parallelorum, ad quas inclinat circulus obliquus prius dictus, inclinantium: tum circuli paralleli ſic ducti abſcindent è maximis ductis arcus inæquales, quorum qui propior eſt circulo è parallelis maximo major erit remotiore. Quinetiam portiones in maximo parallelorum abſciſſæ, quæ propiores ſunt communi circuli illius cum circulo obliquo primario interſectioni, minores fient iis quæ ab eâdem longius diſtant.

Sit circulus Sphæræ magnus Α Μ Β, quem contingat aliquis è circulis parallelis Α Δ Ε, & ſit maximus parallelorum Γ Χ Ρ Ξ Τ Β; & in circulo Α Μ Β capiantur duo arcus æquales Θ Κ, Λ Μ; & deſcribantur circulorum arcus tranſeuntes per horum terminos, è parallelis quidem arcus Κ Σ, Λ Ο, Μ Π, è magnis vero, Κ Ρ, Λ Ξ, Μ Τ, vel per polos eorum tranſeuntes, vel qui omnes contingant

tingant eundem circulum parallelum minorem circulo Α Δ Ε, & ad idem latus ad quod inclinat circulus A M B inclinati sint super circulum Γ B: dico quod Π O major est quam Θ Σ, & X P quam Ξ T.



Quoniam angulus Θ B Γ minor est recto, angulus vero Θ X B non minor recto, erit arcus Θ X minor arcu Θ B. Cum itaque triangulum B Θ X habet crus B Θ majus crure Θ X, neque B Θ majus est quadrante circuli, nec angulus Θ major est recto, & ex arcu B Θ abscissi sunt duo arcus æquales Θ K, Λ M; ducuntur etiam arcus K P, Λ Ξ, M T constituentes cum basi B Γ angulos æquales angulo Θ X B eidem relativo: & erit arcus X P (*per 7^m II. hujus*) major arcu Ξ T, & erunt duo arcus Θ X, M T simul sumpti minores duobus arcubus K P, Λ Ξ simul sumptis; hoc est, arcus Θ X, X Π simul sumpti minores erunt ipsis Σ X, X O simul sumptis. Hinc constabit Π O majorem esse arcu Θ Σ. Angulus autem B Θ X non major erit recto, uti dictum est, quia in triangulo B X Θ angulus ad X non minor est recto, latera vero alium ejus angulum, nempe angulum ad Θ, continentia sunt singula minora quadrante circuli. Demonstratum autem est in libro primo Prop. XXI, quod, si hæc ita se habeant, angulus contentus B Θ X non major erit recto Q. E. D.

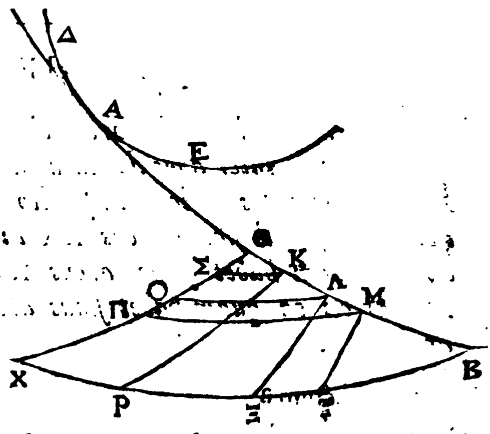
Hinc VII^ma *&* VIII^va *Libri* III. *Theodosii demonstrantur.*

PROP. XIII.

Si in Sphæra fuerit circulus magnus quem contingat aliquis è circulis parallelis, & inter punctum contactus & maximum parallelorum capiantur in eo duo arcus æquales, per quorum terminos ducantur circuli, quorum aliqui sint paralleli, aliqui vero circuli maximi qui contin-

contingant unum eundemque è parallelis parallelo vero priori majorem; neque opus est ut sit inclinatio ejus ad easdem partes ad quas inclinat circulus ille primarius, in quo sumpsimus arcus æquales: tum circuli paralleli abscindent è circulis maximis ductis arcus inæquales, quorum minor erit qui propior est parallelorum maximo. Abscindent etiam iidem circuli magni è maximo parallelorum arcus inæquales, quorum qui propior est communi circuli magni primarii & maximi parallelorum intersectioni, minor erit remotiore ab eadem.

Tangat enim circulum maximum ΑΒ circulus aliquis è parallelis unus, qui sit ΑΔΕ; maximus autem parallelorum sit ΒΞΧ, & in arcu ΑΒ capiantur duo arcus æquales ΘΚ, ΛΜ; per quorum terminos describantur circuli paralleli ΚΣ, ΛΟ, ΜΠ, aliique circuli maximi ΘΧ, ΚΡ, ΛΞ, ΜΤ, quos omnes contingat idem circulus parallelus circulo ΑΔΕ major: dico quod arcus ΠΟ minor est arcu ΣΘ, quodque arcus ΤΞ minor est quam ΧΡ.



Quoniam enim in triangulo ΘΒΧ latus ΧΘ majus est latere ΘΒ, at non majus quadrante circuli, & in arcu ΒΘ sumuntur duo arcus æquales ΘΚ, ΛΜ, à quibus ducuntur arcus ΚΡ, ΛΞ, ΜΤ, continentes cum basi angulos æquales angulo apud Χ iisdem relativo; erit arcus ΧΡ (*per* 9^{m} II. *hujus*) major arcu ΞΤ; itemque arcus ΘΧ, ΜΤ simul sumpti (per demonstrata in 7^{ma} II. hujus) majores erunt arcubus intermediis ΚΡ, ΛΞ: quare duo arcus ΘΧ, ΧΠ simul sumpti sunt majores duobus ΣΧ. ΧΟ simul sumptis; unde constabit arcum ΘΣ majorem esse arcu ΟΠ. Et ex præcedentibus manifestum est quomodo consequatur conversa hujus.

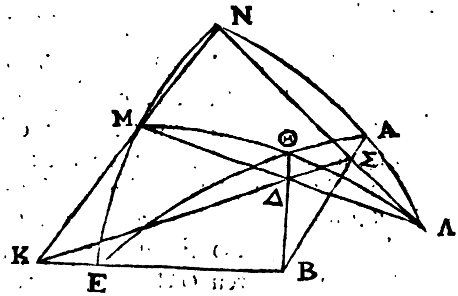
MENE-

MENELAI ALEXANDRINI SPHÆRICORUM

Lib. III.

PROP. I. THEOR.

Sint in superficie Sphæræ duo arcus circulorum magnorum, N M E, N A Λ *inter quos ducantur alii duo arcus* E Θ A, Λ Θ M *occurrentes invicem in puncto* Θ: *dico sinum arcus* A N *esse ad sinum arcus* A Λ *in ratione composita ex ea quam habet sinus arcus* N E *ad sinum arcus* E M, *& ex ea quam habet sinus arcus* M Θ *ad sinum arcus* Θ Λ.

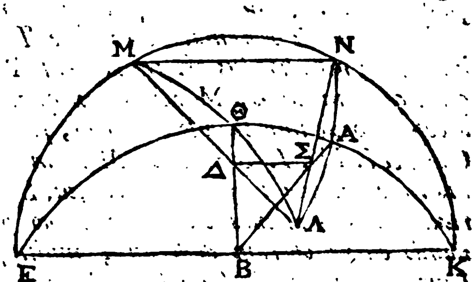


Ponatur punctum B centrum esse Sphæræ, & jungantur rectæ Λ N, Λ M, M N, E B, & Θ B occurrens subtensæ M Λ in Δ, & A B occurrens ipsi N Λ in Σ, & ducta Δ Σ producatur usque dum conveniat cum recta M N producta in K; & erit punctum K in plano

utriusque

utriusque circuli A Θ E, N M E. Sed puncta E, B sunt etiam in iisdem planis; quare K E B erit linea recta. Cum autem punctum Σ est in intersectione rectarum A B, N Λ, & punctum Δ in ipsarum Θ B, M Λ; ac punctum K est in producta Σ Δ; erunt tria puncta Σ, Δ, K in plano trianguli N Λ M: erit igitur N Σ ad Σ Λ in ratione composita ex ratione quam habet N K ad K M & ratione quam habet M Δ ad Δ Λ, *per sequens Lemma* I. Sed N K est ad K M sicut normalis cadens de puncto N super diametrum K E B ad normalem de puncto M super eandem, *per Lemma* II. Est autem normalis de puncto N sinus arcus E N, & normalis de puncto M est sinus arcus M E; adeoque N K est ad K M ut sinus arcus N E ad sinum arcus M E. Eodem modo patebit N Σ esse ad Σ Λ ut sinus arcus N A ad sinum arcus A Λ; & M Δ esse ad Δ Λ ut sinus arcus M Θ ad sinum arcus Θ Λ: quapropter sinus arcus A N est ad sinum arcus A Λ in ratione composita ex ratione sinus arcus N E ad sinum arcus M E, & ex ea quam habet sinus arcus M Θ ad sinum arcus Θ Λ. Q. E. D.

Pone jam rectam Δ Σ parallelam esse ipsi M N; & compleantur semicirculi E M N, E Θ Λ, occurrentes invicem ad K. Itaque quoniam in duobus planis E N K, E Θ K duae rectae Σ Δ, M N parallelae sunt, erit quoque communis sectio horum planorum, nempe recta E B K, etiam ipsis Σ Δ, M N parallela, *ut ex 9na* XI. *Eucl. constabit*. Cum autem normalis de puncto N



ad diametrum K E B demissa sinus est arcus E N, cui ob parallelas aequalis est normalis de M ad eandem diametrum demissa; erit sinus arcus N E aequalis sinui ipsius E M. Ob parallelas vero M N, Δ Σ, erit N Σ ad Σ Λ, sive sinus arcus N A ad sinum arcus A Λ, sicut M Δ ad Δ Λ, hoc est, ut sinus arcus M Θ ad sinum ipsius Θ Λ: componitur igitur ratio sinus arcus N A ad sinum arcus A Λ, ex ratione sinus M Θ ad sinum ipsius Θ Λ & ratione sinus arcus N E ad sinum arcus E M; quae quidem ratio, hoc in casu, ubi arcus E M, N E simul sumpti aequantur semicirculo, fit ratio aequalitatis.

Pari argumento demonstrabitur quicquid peti possit de rationibus sinuum horum arcuum, ope rectarum in dato plano inter se convenientium. At ex ipso diagrammate, quo in præsentiarum usi sumus, probari potest sinum arcus Α Λ esse ad sinum arcus Α Ν in ratione composita ex ratione sinus arcus Λ Θ ad sinum arcus Θ Μ, & ex ratione quam habet sinus arcus Μ Ε ad sinum arcus Ε Ν. Superius enim demonstratum est sinum arcus Α Ν esse ad sinum arcus Α Λ in ratione composita ex ea quam habet sinus arcus Μ Θ ad sinum arcus Θ Λ & ex ea quam habet sinus arcus Ν Ε ad sinum arcus Ε Μ. Invertendo igitur, ratio sinus arcus Α Λ ad sinum arcus Α Ν composita erit ex ratione sinus arcus Θ Λ ad sinum arcus Μ Θ, & ex ratione sinus arcus Μ Ε ad sinum arcus Ε Ν. Q. E. D.

SCHOLION.

Vocem נבחות, *qua significat* Hebræus *Interpres subtensam dupli arcus, sive* τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς περιφερείας *apud* Ptolemæum, *ubique Sinum reddimus, nostri ævi Mathematicis morem gerentes, & exemplo usi Traductoris* Arabis *semper vocem* جيب *hoc est* Sinum, *adhibentis. Rationes enim eædem sunt sinuum quæ subtensarum duplorum arcuum inter se.*

Porro huic Theoremati tota fere Trigonometria Veterum innititur; nec alio usus est fundamento Ptolemæus *in Syntaxi: quod quidem illum à* Menelao, *vix quadraginta annos seniore, accepisse haud improbabile videbitur, factâ collatione hujus cum Cap. XII. Lib. I. Syntaxeos Mathematicæ. Idem* Arabibus *maxime quoque in pretio fuit, qui, Sphæricorum Triangulorum dimensurationes ex hoc principio petentes, eidem exornando enixe operam dederunt, multisque scriptis Regulam hanc, quam* القطاع, *hoc est* Intersectionis, *dixerunt, elucidare conati sunt. Unde* Europæi *Mathematici ante aliquot secula, cum re nomen etiam à* Mauris *mutuati sunt, ac de Figurâ* Catha *scripta reliquerunt; inter quos eminet* Simon de Bredon Anglus, *circa annum* 1350 Mertonensis Socius, *cujus de hac re opus in* Bibliotheca Bodleiana *non uno Volumine asservatur.*

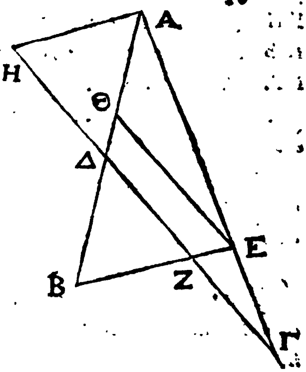
Lemmata autem in Codice Hebræo *absque demonstratione assumpta, in* Arabico *vero ad modum* Ptolemæi *demonstrata, sic se habent.*

Lemma

Lemma I.

Si ad duas rectas ΑΒ, ΑΓ *concurrentes in* Α *ducantur duæ aliæ* ΓΔ, ΒΕ *sese intersecantes in puncto* Ζ: *dico rectam* ΑΕ *esse ad* ΕΓ *in ratione composita ex ratione* ΔΖ *ad* ΖΓ *& ratione* ΒΑ *ad* ΒΔ.

Per Α *enim ipsi* ΒΕ *parallela ducatur* ΑΗ, *occurrens ipsi* ΔΓ *productæ in* Η. *Jam quoniam* ΑΗ *parallela est ipsi* ΕΖ, *erit ut* ΑΕ *ad* ΕΓ *ita* ΗΖ *ad* ΖΓ. *Sumptâ autem mediâ recta* ΖΔ, *ratio* ΗΖ *ad* ΖΓ *componetur ex ratione quam habet* ΗΖ *ad* ΖΔ, *& ex ea quam habet* ΖΔ *ad* ΖΓ. *Sed ob parallelas* ΑΗ, ΒΖ, *erit &* ΖΗ *ad* ΖΔ *sicut* ΒΑ *ad* ΒΔ: *ratio igitur* ΗΖ *ad* ΖΓ, *hoc est* ΑΕ *ad* ΕΓ, *componitur ex ratione quam habet* ΒΑ *ad* ΒΔ *& ex ea quam habet* ΔΖ *ad* ΖΓ.



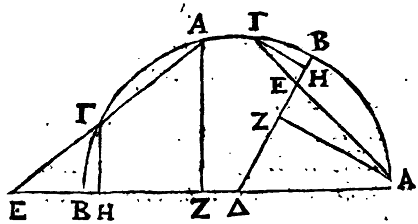
Iisdem positis; dico quoque ΓΑ *esse ad* ΑΕ *in ratione composita ex ratione quam habet* ΓΔ *ad* ΔΖ *& ex ea quam habet* ΖΒ *ad* ΒΕ.

Ipsi ΓΔ *parallela ducatur* ΕΘ, *& ob easdem parallelas, erit, ut* ΓΑ *ad* ΑΕ *ita* ΓΔ *ad* ΕΘ; *sumatur* ΔΖ *media, & ratio* ΓΔ *ad* ΕΘ *componetur ex ea quam habet* ΓΔ *ad* ΔΖ *& ex ea quam habet* ΔΖ *ad* ΕΘ. *Ob parallelas vero* ΔΖ, ΘΕ, *erit* ΔΖ *ad* ΕΘ *sicut* ΖΒ *ad* ΒΕ: *ratio igitur* ΓΔ *ad* ΕΘ, *hoc est* ΓΑ *ad* ΑΕ, *composita est ex ratione* ΓΔ *ad* ΔΖ *& ratione* ΖΒ *ad* ΒΕ. Q. E. D.

Lemma II.

Si in Circulo recta aliqua è centro educta arcum quemlibet ejusque subtensam diviserit: erunt segmenta subtensæ Sinubus segmentorum arcus proportionalia.

Sit enim circulus ΑΒΓΑ, *in quo subtendat arcum aliquem recta* ΑΓ, *& de centro* Δ *ducatur utcunque recta* ΔΒ *occurrens subtensæ in* Ε, *arcui vero in* Β; *& demittantur normales* ad ΔB rectæ AZ, ΓH: dico AZ esse ad ΓH, hoc est sinus arcus AB ad sinum arcus ΓB, sicut AE ad EΓ.



Quoniam enim rectæ AZ, ΓH normales sunt ad eandem ΔB, similia erunt triangula AEZ, ΓEH; atque adeo ut AE ad EΓ ita AZ ad ΓH; & ita sinus arcus AB ad Sinum arcus ΓB. Q. E. D.

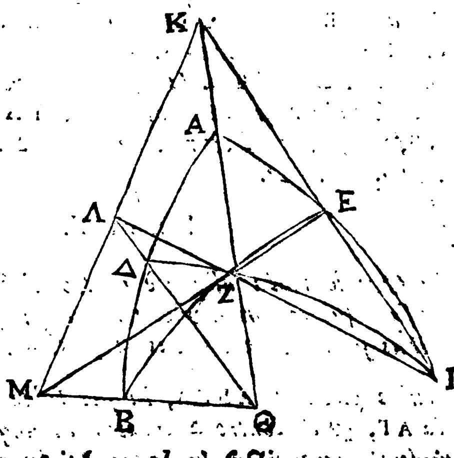
Ac manifestum est eodem modo rem se habere, si recta è centro circuli occurrat subtensæ extra circulum productæ.

His subjungere liceat aliud Theorema, à Ptolemæo in loco citato usurpatum, & à Theone Alexandrino in Commentariis demonstratum: nimirum sequens

Theorema.

Si ad duos arcus circulorum magnorum AB, AΓ ducantur duo alii arcus ΓΔ, BE sese intersecantes in puncto Z: dico sinum arcus AΓ esse ad sinum arcus AE in ratione composita ex ratione sinus arcus ΓΔ ad sinum arcus ΔZ, & ex ratione sinus arcus BZ ad sinum arcus BE.

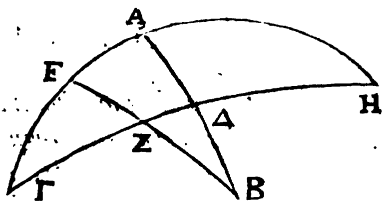
Sit enim Θ centrum Sphæræ, & jungantur rectæ ΘA, ΓE & producantur ad occursum in K; itemque rectæ ΘB, ZE productæ occurrant ad M, pariterque ΘΔ, ΓZ productæ conveniunt ad punctum Λ. Quoniam itaque tria puncta K, Λ, M, sunt in plano trianguli ΓZE, quippe in productis ejus lateribus; eademq; sunt etiam in plano circuli AΔB, utpote in rectis è centro ejus ductis; manifestum est ea incidere in communem utriusque plani sectionem: ac proinde



KΛM,

ΚΛΜ *erit linea recta. Ductâ igitur rectâ* ΚΛΜ, *ad duas rectas* ΓΚ, ΚΜ *ducuntur aliæ duæ* ΑΓ, ΜΕ *occurrentes in puncto* Ζ, *adeoque (per Lemmatis* I. *part. poster.) ratio* ΓΚ *ad* ΚΕ *componetur ex ratione* ΓΛ *ad* ΛΖ *& ratione* ΖΜ *ad* ΜΕ. *Sed (per Lemma* II.) ΓΚ *est ad* ΚΕ *ut Sinus arcus* ΑΓ *ad Sinum arcus* ΑΕ; *&* ΓΛ *est ad* ΛΖ *ut Sinus arcus* ΔΓ *ad Sinum arcus* ΔΖ; *itemque* ΖΜ *est ad* ΜΕ *ut Sinus arcus* ΒΖ *ad sinum arcus* ΒΕ: *Composita est igitur ratio sinus arcus* ΑΓ *ad sinum arcus* ΑΕ *ex ratione sinus arcus* ΔΓ *ad sinum arcus* ΔΖ *& ratione sinus arcus* ΒΖ *ad sinum arcus* ΒΕ. Q. E. D.

Hoc autem Theorema omisit Menelaus, *idemque sine demonstratione proposuit* Ptolemæus, *quasi Propositionis primariæ Corollarium, atque ex ea facile demonstrabile. Arcubus enim* ΓΑ, ΓΔ *ad occursum in* Η *productis, erunt arcus* ΓΑΗ, ΓΔΗ *semicirculi; ac proinde Sinus arcuum* ΓΑ, ΑΗ; ΓΔ, ΔΗ *erunt eædem rectæ.*



Ad arcus autem ΕΗ, ΒΕ *ducuntur duo arcus* ΑΒ, ΗΖ, *concurrentes in puncto* Δ; *atque adeo, per hanc primam Propositionem, erit Sinus arcus* ΗΑ, *hoc est Sinus arcus* ΓΑ, *ad Sinum arcus* ΑΕ *in ratione composita ex ratione Sinus arcus* ΔΗ, *hoc est Sinus arcus* ΔΓ, *ad Sinum arcus* ΔΖ *& ratione Sinus arcus* ΒΖ *ad Sinum arcus* ΒΕ. Q. E. D.

Coroll. I. *Quoniam autem sinus arcus* ΑΔ *ad sinum arcus* ΔΒ *est in ratione composita ex ea quam habet sinus arcus* ΑΓ *ad sinum* ΓΕ, *& ex ea quam habet sinus arcus* ΕΖ *ad sinum* ΖΒ; *hoc est, ut rectangulum sub sinubus* ΑΓ × ΕΖ *ad rectangulum sub sinubus* ΓΕ × ΒΖ; *erit solidum sub extremis æquale solido sub mediis. Proinde Solidum sub sinubus* ΑΔ × ΓΕ × ΖΒ *æquale erit solido sub sinubus* ΔΒ × ΑΓ × ΕΖ. *Hinc patet hos terminos in diversimodas variari posse Analogias. Ex. gr. sinus arcus* ΓΕ *ad sinum arcus* ΕΖ *erit ut rectangulum sub sinubus* ΔΒ × ΑΓ *ad rectangulum sub sinubus* ΑΔ × ΖΒ; *hoc est, in ratione composita ex ea quam habet sinus* ΔΒ *ad sinum* ΑΔ, *& ex ratione sinus* ΑΓ *ad sinum* ΖΒ: *vel si mavis, ex ratione sinus* ΔΒ *ad sinum* ΖΒ *& ratione sinus* ΑΓ *ad* ΑΔ. *& sic de cæteris. Pari argumento, ex Theoremate nuper demonstrato,*

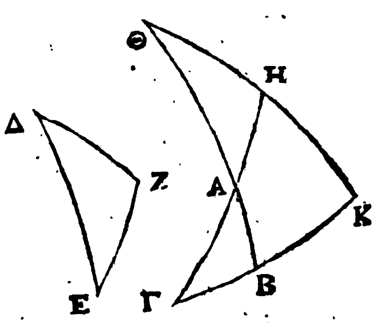
monstrato, constabit solidum sub sinubus Γ Α × Δ Ζ × Β Ε *æquale esse solido sub sinubus* Α Ε × Δ Γ × Β Ζ; *ac proinde sinum* Β Ζ *esse ad sinum* Ζ Δ *in ratione composita ex ea quam habet sinus* Β Ε *ad sinum* Δ Γ *& ex ea quam habet sinus* Γ Α *ad sinum* Α Ε. *&c.*

Coroll. 2. *Quod si* Γ *polus fuerit arcus* Α Β, *&* Β *polus arcus* Α Γ, *erunt anguli* Α, Ε, Δ *recti; & arcus omnes* Α Β, Α Γ, Β Ε, Γ Δ *quadrantes; atque* Γ Ε Ζ, Β Δ Ζ *erunt triangula Sphærica rectangula; quorum anguli* Ε Γ Ζ, Ζ Β Δ *mensurantur arcubus* Α Ε, Α Δ *respective. Ex Corollario itaque præcedente nullo fere negotio erui possunt Canones pro resolvendis Casibus Trigonometriæ Sphæricæ pene omnibus, si demissis perpendicularibus triangula obliquangula ad casus rectangulorum reducantur.*

PROP. II. THEOR.

Si duorum triangulorum Sphæricorum duo anguli fuerint æquales, duo vero alii anguli vel æquales inter se, vel simul sumpti duobus rectis æquales: dico quod Sinus laterum, quæ duobus angulis æqualibus subtenduntur, sunt ad sinus laterum quæ duobus aliis angulis, vel æqualibus vel duobus rectis æqualibus, subtenduntur respective, in eadem ratione; & è contra.

Sint duo triangula Sphærica Α Β Γ, Δ Ε Ζ, sitque angulus Α unius æqualis angulo Δ alterius; duo vero anguli Γ & Ζ vel sint æquales inter se, vel simul duobus rectis æquales: dico sinum arcus Α Β esse ad sinum arcus Β Γ sicut sinus arcus Δ Ε ad sinum arcus Ε Ζ.



Producatur arcus Α Γ ad Η, & Β Α ad Θ, & fiat arcus Α Η æqualis arcui Δ Ζ, & angulus Α Η Θ angulo Ε Ζ Δ; & compleatur figura, productis arcubus Γ Β, Θ Η ad occursum in Κ: erit igitur arcus Α Θ æqualis arcui Δ Ε, uti Θ Η arcui Ε Ζ. Quoniam vero anguli Β Γ Α, Α Η Θ, vel sunt æquales, vel simul sumpti duobus rectis æquales, erunt arcus Γ Κ, Κ Η vel simul semicirculo lo æquales, vel æquales inter se; ac proinde Sinus arcus ΓΚ Sinui arcus ΚΗ æqualis. Sed, per Figuram Propositionis præcedentis, ratio sinus arcus ΓΚ ad sinum arcus ΒΓ componitur ex ratione sinus arcus ΚΗ ad sinum arcus ΗΘ & ratione sinus arcus ΘΑ ad sinum arcus ΑΒ: deletis autem æqualibus sinubus arcuum ΓΚ, ΚΗ, erit sinus arcus ΗΘ ad sinum arcus ΒΓ sicut sinus arcus ΑΘ ad sinum arcus ΑΒ, καὶ ἐναλλάξ. Verum arcus ΗΘ æqualis est arcui ΕΖ, uti ΑΘ arcui ΔΕ; erit igitur ut sinus arcus ΑΒ ad sinum arcus ΒΓ ita sinus arcus ΔΕ ad sinum arcus ΕΖ. Q. E. D.

Porro si ponamus angulos Α, Δ esse æquales, ac sit ut sinus arcus ΑΒ ad sinum arcus ΒΓ ita sinus arcus ΔΕ ad sinum arcus ΕΖ: dico angulos Γ, Ζ vel æquales esse, vel simul sumptos duobus rectis æquales.

Fiant ea quæ prius facta sunt; ac sit ut sinus arcus ΓΒ ad sinum arcus ΑΒ, ita sinus arcus ΗΘ ad sinum arcus ΑΘ; καὶ ἐναλλάξ: & collatis rationibus Figuræ Prop. I. congruis, consequetur, è converso superioris argumenti, sinum arcus ΚΗ æqualem esse sinui arcus ΚΓ; ac proinde angulum ΘΗΑ æqualem esse angulo ΑΓΒ, hoc est, angulum Ζ angulo Γ, vel simul sumptos duobus rectis esse æquales. Q. E. D.

Coroll. *In omni igitur Triangulo Sphærico sinus laterum sunt ut sinus angulorum ipsis oppositorum.*

PROP. III. THEOR.

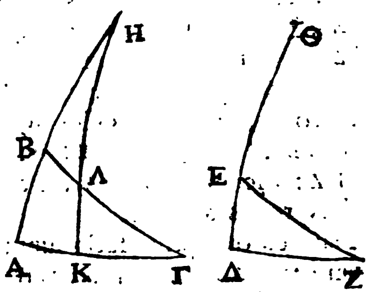
Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos ad utramque basin rectos, duos vero alios angulos ad bases æquales quidem sed non rectos: erunt sinus duorum laterum, angulum rectum in triangulorum altero continentium, inter se in ratione composita ex ratione quam habent sinus laterum in altero triangulo angulum rectum continentium, & eodem modo sumptorum, & ex ratione quam habet sinus arcus inter Verticem trianguli prioris & polum basis ejus intercepti, ad sinum arcus inter Verticem alterius trianguli & basis ejus polum intercepti.

Sint duo triangula Sphærica ΑΒΓ, ΔΕΖ, quorum duo anguli

Α, Δ

Α, Δ sint recti, duo vero alii anguli ad Γ, Ζ æquales sint sed non recti, & sint puncta Η, Θ poli utriusque basis ΓΑ, ΖΔ: dico sinum arcus ΑΒ esse ad sinum arcus ΑΓ in ratione composita ex ratione sinus arcus ΕΔ ad sinum arcus ΔΖ & ratione sinus arcus ΗΒ ad sinum arcus ΕΘ.

Fiat enim arcus ΓΚ æqualis arcui ΔΖ, & per Η polum arcus ΑΓ ducatur arcus ΗΛΚ occurrens arcui ΓΒ in Λ; & erit arcus ΚΛ æqualis arcui ΔΕ, uti ΛΗ arcui ΕΘ. Quoniam vero figura ΑΗΛΓ est ad modum figuræ Prop. I. hujus, erit sinus ΑΒ ad sinum ΒΗ in ratione composita ex ratione sinus arcus ΑΓ ad sinum arcus ΓΚ, & ratione sinus arcus ΚΛ ad sinum arcus ΛΗ: unde transpositis terminis, ratio sinus arcus ΑΒ ad sinum arcus ΑΓ composita erit ex ratione sinus arcus ΒΗ ad sinum arcus ΛΗ, & ratione sinus arcus ΚΛ ad sinum arcus ΓΚ. Sed arcus ΓΚ æqualis est arcui ΖΔ, & arcus ΚΛ arcui ΔΕ, sicut & arcus ΛΗ arcui ΘΕ: quapropter ratio sinus arcus ΑΒ ad sinum arcus ΑΓ componitur ex ratione sinus arcus ΔΕ ad sinum arcus ΖΔ & ex ratione sinus arcus ΒΗ ad sinum arcus ΘΕ. Q. E. D.



Coroll. *Hinc constat Tangentes perpendicularium* ΑΒ, ΔΕ *sinubus Basium* ΑΓ, ΔΖ *proportionales esse.*

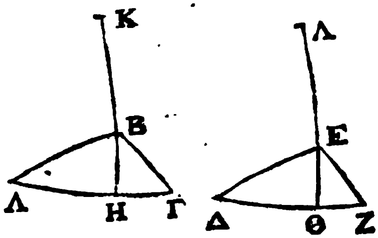
PROP. IV. THEOR.

Si duo triangula Sphærica angulos habeant ad bases æquales, quemque relativo suo, nec fuerit aliquis eorum rectus; & ab angulis verticalibus in utroque demittantur arcus ad bases normales: erunt sinus segmentorum basium inter se proportionales.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ; sitque angulus Α unius æqualis angulo Δ alterius, atque etiam anguli ad puncta Γ, Ζ æquales, neque sit ullus eorum rectus: & ducantur à punctis verticum Β, Ε ad bases ΑΓ, ΔΖ arcus perpendiculares ΒΗ, ΕΘ: dico

dico ſinum arcus A H eſſe ad ſinum arcus H Γ ſicut ſinus arcus Δ Θ ad ſinum arcus Θ Z.

Ponamus enim polos duorum arcuum A Γ, Z Δ eſſe ad puncta K, Λ: itaque quoniam anguli ad puncta H, Θ ſunt recti, atque anguli ad puncta A, Δ ſunt æquales, ac puncta K, Λ poli ſunt arcuum A Γ, Δ Z: erit (*per præcedens*) ſinus arcus A H ad ſinum arcus Δ Θ in ratione compoſita ex ea quam habet ſinus arcus B H ad ſinum arcus E Θ, & ratione ſinus arcus E Λ ad ſinum arcus B K. Rurſus, quoniam anguli apud H, Θ ſunt recti, & anguli apud Γ, Z ſunt æquales & non recti; erit (*per eandem*) ſinus arcus Γ H ad ſinum arcus Z Θ in ratione compoſita ex iiſdem rationibus, nempe ex ratione ſinus arcus B H ad ſinum arcus E Θ, & ex ea quam habet ſinus arcus E Λ ad ſinum arcus B K. Eſt igitur ſinus arcus A H ad ſinum arcus Δ Θ ſicut ſinus arcus Γ H ad ſinum arcus Z Θ; & permutando erunt etiam proportionales. Q. E. D.



PROP. V. THEOR.

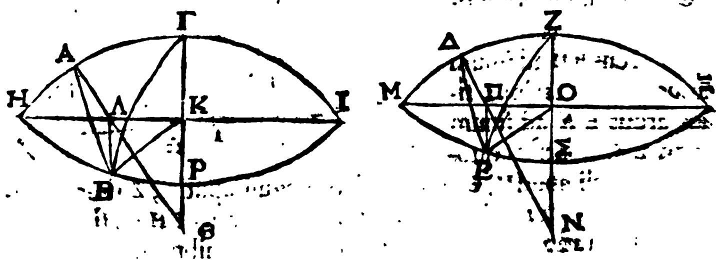
Si duo triangula Sphærica habeant duos angulos ad utriuſque baſim æquales acutos, alios vero duos rectos; reliquis autem angulis ſubtendantur latera quadrante circuli minora: erit ſinus ſummæ duorum arcuum angulum acutum comprehendentium in altero triangulorum, ad ſinum differentiæ eorundem arcuum, ſicut ſinus ſummæ arcuum in altero angulum acutum continentium, ad ſinum differentiæ eorundem.

Sint duo triangula A B Γ, Δ E Z, quorum duo anguli ad puncta A, Δ ſint recti, duo vero alii ad Γ, Z æquales acuti; ac ſit utrumque latus Γ A, Z Δ minus quadrante circuli: dico quod ſinus arcuum B Γ, Γ A ſimul ſumptorum eſt ad ſinum differentiæ ipſorum B Γ, Γ A, ſicut ſinus ſummæ arcuum E Z, Z Δ, ad ſinum differentiæ eorundem arcuum.

Centro Γ, intervallo Γ B deſcribatur ſemicirculus H B I, ut

 fiat

fiat A I summa arcuum A Γ, Γ B; & A H differentia eorundem. Sit Θ centrum Sphæræ, & ducantur Γ Θ, Θ A, H I communes sectiones planorum Γ B Θ, A B Θ, H B I cum plano circuli I Γ A H. Cum autem Γ polus est circuli H B I, erit punctum K centrum ejus; ac juncta recta B K æqualis erit ipsi H K, & utraque B K, K H erit ad angulos rectos ipsi Γ Θ; atque adeo angulus rectilineus H K B, quo inclinantur plana A Γ Θ, B Γ Θ inter se, æqualis erit angulo Sphærico A Γ B, per ostensa in primâ I^mi hujus. Quoniam vero planum utriusque circuli A B Θ, H B I ad angu-



los rectos insistit plano circuli Γ A H; erit recta B Λ, communis nempe dictorum planorum sectio, etiam normaliter erecta super utramque rectam H Λ K, A Λ Θ (*per* 19^am XI. *Eucl.*) ac proinde angulus B Λ K rectus est. Radio itaque existente B K sive H K, B Λ sinus est arcus H B sive anguli H K B, hoc est anguli Sphærici A Γ B; ejusdemque sinus versus est H Λ, sinus versus vero complementi ejus ad semicirculum est recta Λ I. Sed (*per Lemma* 2^m *ad primam* III. *hujus*) Λ I est ad H Λ ut sinus arcus A I ad sinum arcus A H; hoc est, ut sinus versus anguli I Γ B ad sinum versum anguli A Γ B, ita sinus summæ arcuum A Γ, Γ B ad sinum differentiæ eorundem. Completâ autem alterâ Figurâ, ut Δ Ξ sit summa arcuum Δ Z, Z E, & Δ M eorundem differentia, eodem argumento probabitur angulum E Π O rectum esse, angulumque Π O E æqualem angulo Sphærico E Z Δ, atque adeo M Π sinum esse versum anguli E Z Δ, Π Ξ vero sinum versum anguli E Z Ξ, radio existente M O vel O E. Anguli autem E Z Δ, E Z Ξ sunt æquales angulis A Γ B, I Γ B, ac propterea eorum sinus versi sunt proportionales; hoc est, Π Ξ erit ad M Π sicut I Λ ad Λ H. Sed ut Π Ξ ad M Π ita sinus arcus Δ Ξ ad sinum arcus Δ M; & ostensum est I Λ esse ad Λ H sicut sinus arcus A I ad sinum arcus A H: sinus igitur summæ arcuum B Γ, Γ A est ad sinum differentiæ eorundem, sicut sinus summæ arcuum E Z, Z Δ, sive arcus arcûs ΔΞ, ad sinum differentiæ ipsorum ΕΖ, ΖΔ, sive arcûs ΔΜ. Q. E. D.

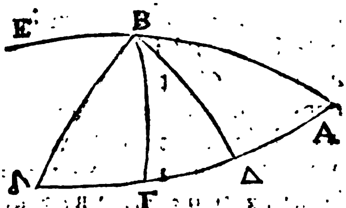
Coroll. *Hinc manifestum est sinus summarum horum arcuum esse ad sinus differentiarum eorundem, in duplicata ratione radii ad Tangentem dimidii anguli sub arcubus illis comprehensi.*

PROP. VI. THEOR.

Si dividatur angulus aliquis trianguli Sphærici bifariam, erunt sinus duorum laterum ad sinus duorum segmentorum basis in eadem ratione: & conversim & permutatim.

Sit triangulum Sphæricum ΑΒΓ, & secet arcus ΒΔ angulum ΑΒΓ bifariam; dico sinum arcus ΑΒ esse ad sinum arcus ΑΔ sicut sinus arcus ΒΓ ad sinum arcus ΔΓ.

In triangulis enim Sphæricis ΑΒΔ, ΓΒΔ, duo anguli ΑΒΔ, ΓΒΔ sunt æquales, duo vero anguli ad punctum Δ simul sumpti sunt æquales duobus rectis: erit igitur (*per* 2^m^ III. *hujus*) sinus arcus ΒΑ ad sinum arcus ΑΔ sicut sinus arcus ΒΓ ad sinum arcus ΓΔ, & ἐναλλὰξ erunt etiam proportionales.



E converso vero, si sinus arcus ΑΒ fuerit ad sinum arcus ΒΓ, sicut sinus arcus ΑΔ ad sinum arcus ΔΓ: dico arcum ΒΔ dividere angulum ΑΒΓ bifariam.

Quoniam enim duo anguli apud Δ sunt æquales duobus rectis, & sinus arcus ΑΒ est ad sinum arcus ΑΔ, sicut sinus arcus ΒΓ ad sinum arcus ΓΔ: erunt, (*è converso Prop.* 2^dæ^ III *hujus*) anguli ΑΒΔ, ΔΒΓ vel æquales vel simul sumpti duobus rectis æquales; sed non sunt duobus rectis æquales, adeoque angulus ΑΒΔ æqualis erit angulo ΔΒΓ. Q. E. D.

Rursus ponatur angulus ΓΒΕ, qui deinceps est angulo ΑΒΓ, bifariam dividi arcu Βϛ; dico sinum arcus ΑΒ esse ad sinum arcus ΒΓ sicut sinus arcus Αϛ ad sinum arcus ϛΓ: atque etiam ἐναλλάξ.

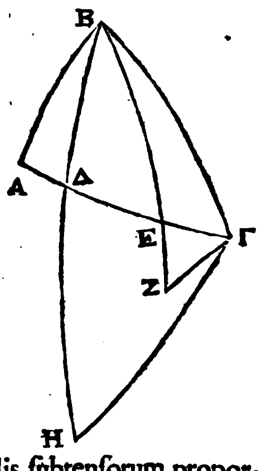
Quoniam enim duo triangula ΑΒϛ, ΓΒϛ habeant angulum ad ϛ utrique communem, duos vero angulos ΑΒϛ, ΓΒϛ simul ſumptos duobus rectis æquales, erit (*per* 2^m III *hujus*) ſinus arcus A B ad ſinum arcus A Δ ſicut ſinus arcus B Γ ad ſinum arcus Γ Δ, & permutando. Converſa autem hujus manifeſta eſt.

PROP. VII. THEOR.

Si de puncto verticali trianguli Sphærici ducantur ad baſim duo arcus, continentes cum duobus lateribus trianguli angulos æquales: erunt rectangula ſub ſinubus ſegmentorum baſis contenta inter ſe ſicut quadrata ſinuum laterum trianguli inter ſe.

Sit triangulum Sphæricum A B Γ, & à vertice B prodeant ad baſim A Γ arcus B Δ, B E, ita ut anguli A B Δ, Γ B E ſint æquales: dico fore quadratum è ſinu arcus A B ad quadratum è ſinu arcus B Γ ſicut rectangulum ſub ſinubus arcuum E A, A Δ ad rectangulum ſub ſinubus arcuum Δ Γ, Γ E.

De puncto Γ ad arcus B Δ, B E productos ducantur arcus Γ H, Γ Z, ita ut angulus Γ Z B ſit æqualis angulo A B E, utque angulus Γ H B ſit æqualis angulo A B Δ: erit igitur (*per* 2^{dam} III *hujus*) ſinus arcus A B ad ſinum arcus Γ Z ut ſinus arcus A E ad ſinum arcus E Γ; erit etiam ſinus arcus A B ad ſinum arcus Γ H ſicut ſinus arcus A Δ ad ſinum arcus Δ Γ: quadratum igitur ex ſinu arcus A B eſt ad rectangulum ſub ſinubus arcuum Γ Z, Γ H ſicut rectangulum ſub ſinubus arcuum A E, A Δ ad rectangulum ſub ſinubus arcuum E Γ, Γ Δ. Quoniam vero angulus B H Γ æqualis eſt angulo Γ B Z, atque angulus B Z Γ æqualis angulo H B Γ,

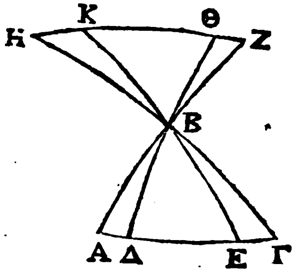


erunt ſinus arcuum æqualibus illis angulis ſubtenſorum proportionales, hoc eſt, ſinus arcus B Γ erit ad ſinum arcus Γ H ut ſinus arcus Γ Z ad ſinum arcus B Γ, ac proinde rectangulum ſub ſinubus arcuum Γ H, Γ Z æquabitur quadrato ex ſinu arcus B Γ. Quadratum igitur ex ſinu arcus A B erit ad quadratum ex ſinu arcus B Γ, ſicut rectangulum contentum ſub ſinubus arcuum A E, A Δ ad rectangulum ſub ſinubus arcuum Δ Γ, Γ E. Q. E. D.

Quod

Quod si ponatur quadratum ex sinu arcus A B esse ad quadratum è sinu arcus B Γ sicut rectangulum sub sinubus arcuum A E, A Δ ad rectangulum sub sinubus arcuum Δ Γ, Γ E: dico angulum A B Δ æqualem esse angulo Γ B E.

Producantur enim arcus A B, B Γ ad Z & H, ac fiat arcus B Z æqualis arcui A B, uti B H arcui B Γ; producatur etiam arcus B Δ ad Θ, & fiat Z Θ æqualis arcui A Δ; ac ducatur de puncto B arcus B K, qui contineat cum B H angulum æqualem angulo Z B Θ. Erit igitur, per jam demonstrata, quadratum ex sinu arcus B Z sive A B, ad quadratum è sinu arcus B H, hoc est B Γ, sicut rectangulum sub sinubus arcuum K Z, Z Θ ad rectangulum sub sinubus arcuum K H, H Θ.



Sed arcus Z Θ, Θ H arcubus A Δ, Δ Γ sunt respective æquales; unde manifestum est arcum K H æqualem esse arcui Γ E: arcus autem B H æqualis est arcui B Γ, uti angulus K H B angulo B Γ E; angulus igitur K B H æqualis est angulo Γ B E. Sed angulus K B H factus est æqualis angulo Θ B Z, hoc est angulo A B Δ: quapropter angulus A B Δ æqualis est angulo Γ B E. Q. E. D.

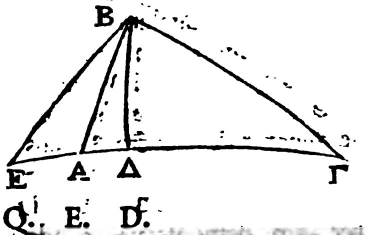
PROP. VIII. THEOR.

Si ab angulo recto trianguli Sphærici rectanguli, ducantur ad basim duo arcus continentes cum altero laterum ejus angulos æquales: erit sinus arcus compositi ex basi & arcu eidem adjuncto, ad sinum ipsius arcus adjuncti, ut sinus segmenti basis quod adjacet reliquo trianguli lateri, ad sinum alterius segmenti basis: & è contra.

Sit A B Γ triangulum Sphæricum habens angulum B rectum, & de puncto B ducantur duo arcus ad basim, ut B Δ, B E, qui contineant cum arcu A B angulos æquales: dico sinum arcus Γ E esse ad sinum arcus A E sicut sinus arcus Γ Δ ad sinum arcus Δ A.

Quoniam enim angulus A B Γ est rectus, angulus vero A B Δ æqualis angulo A B E, dividet arcus B Γ angulum qui deinceps est

est angulo EBΔ bifariam; quare (*per 6tam III hujus*) sinus arcus BE est ad sinum arcus BΔ ut sinus arcus EΓ ad sinum arcus ΓΔ; & (*per eandem*) ut sinus arcus EA ad sinum arcus AΔ; sinus igitur arcus EΓ est ad sinum arcus ΓΔ sicut sinus arcus EA ad sinum arcus AΔ; & permutando, sinus arcus ΓE est ad sinum arcus EA ut sinus arcus ΓΔ ad sinum arcus ΔA. Q. E. D.

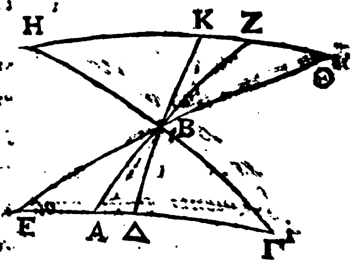


Ponatur jam sinum arcus ΓE esse ad sinum arcus EA sicut sinus arcus ΓΔ ad sinum arcus ΔA, & simul angulum EBA æqualem esse angulo ABΔ: dico angulum ABΓ rectum esse.

Permutando enim, erit sinus arcus ΓE ad sinum arcus ΓΔ sicut sinus arcus EA ad sinum arcus AΔ; hoc est, ut sinus arcus EB ad sinum arcus BΔ. Arcus igitur BΓ dividet angulum qui deinceps est angulo EBΔ bifariam: unde consequetur angulum ABΓ rectum esse. Q. E. D.

Ponatur rursus sinum arcus ΓE esse ad sinum arcus EA sicut sinus arcus ΓΔ ad sinum arcus AΔ, angulo ABΓ existente recto: dico angulum EBA æqualem esse angulo ABΔ.

Producantur enim duo arcus AB, BΓ, ut fiat arcus BZ æqualis ipsi AB, & arcus BH ipsi BΓ; & ducatur arcus HZ, ac sint duo arcus HZ, ZΘ æquales ipsis AΓ, AE respectivè: fiat etiam angulus KBZ æqualis angulo ZBΘ. Cumque angulus HBZ est rectus, (per superius ostensa) erit sinus arcus ΘH ad sinum arcus ΘZ sicut sinus arcus HK ad sinum arcus KZ. Sed sinus arcus ΘH est ad sinum arcus ΘZ sicut sinus arcus ΓE ad sinum arcus EA; quia hi arcus, uti diximus, sunt respective æquales. In eadem autem ratione sinus arcus ΓΔ est ad sinum arcus ΔA: quare sinus arcus HK est ad sinum arcus KZ sicut sinus arcus ΓΔ ad sinum arcus ΔA. Verum arcus ZH æqualis est arcui AΓ, quare arcus ZK æqualis est arcui AΔ; & arcus BZ æqualis est arcui AB; atque hi arcus continent angulos BZK, BAΔ æquales: angulus igitur KBZ æqualis est angulo ABΔ, (*per 4tam I. hujus.*) Sed angulus KBZ æqua-

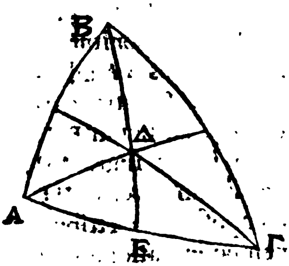


æqualis factus est angulo Z B Θ, qui æqualis est angulo A B E: angulus igitur A B Δ æqualis est angulo A B E. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

Si duo quilibet anguli trianguli Sphærici ductis arcubus dividantur bifariam, & è puncto concursus duorum arcuum ducatur arcus tertius ad angulum reliquum: dividet ille arcus angulum reliquum bifariam.

Trianguli Sphærici A B Γ dividantur duo anguli qui ad A & Γ bifariam, ductis arcubus A Δ, Δ Γ coeuntibus ad Δ; & jungantur puncta B, Δ, ducto arcu B Δ: dico arcum B Δ bisecare angulum A B Γ.



Producatur arcus B Δ ad E: & quoniam anguli qui sunt ad A & Γ dividuntur bifariam ab arcubus A Δ, Δ Γ, erit (*per* 6^m III *hujus*) sinus arcus B Δ ad sinum arcus Δ E sicut sinus arcus B Γ ad sinum arcus Γ E, & sicut sinus arcus A B ad sinum arcus A E: permutando itaque sinus arcus B Γ erit ad sinum arcus A B sicut sinus arcus Γ E ad sinum arcus A E. Erit igitur è converso ejusdem 6^æ) angulus A B Γ bifariam divisus ab arcu B Δ. Q. E. D.

Coroll. *Omni igitur Triangulo Sphærico inscribi potest circulus.*

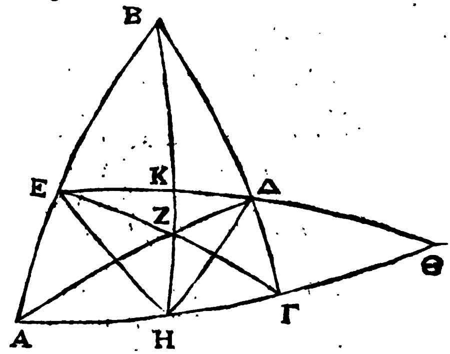
PROP. X. THEOR.

Si demittantur, de duobus quibuslibet angulis trianguli Sphærici, ad latera iisdem opposita, duo arcus perpendiculares: erit arcus ab angulo reliquo ad punctum quo conveniunt priores illi arcus, si producatur, etiam normalis super latus reliquum.

Sit A B Γ triangulum Sphæricum, & de duobus punctis angularibus A & Γ ducantur ad latera opposita B Γ, A B arcus normales A Δ, Γ E, qui conveniant in puncto Z, & ducta B Z producatur

ducatur ad occursum ipsius ΑΓ in puncto Η: dico arcum ΒΗ perpendicularem esse super arcum ΑΓ.

Transeat enim per puncta Δ, Ε arcus ΕΔ, qui producatur usque dum occurrat arcui ΑΓ producto: conveniant autem ad Θ, & jungantur duo arcus ΗΔ, ΗΕ. Jam quoniam habetur figura ΑΘΕΖ, ad modum Propositionis primæ hujus, erit sinus arcus ΑΘ ad sinum arcus ΘΓ in ratione composita ex ratione sinus arcus ΑΔ ad sinum arcus ΔΖ & ratione sinus arcus ΖΕ ad sinum arcus ΕΓ. Pariterque in figura tali ΑΓΒΖ, ratio sinus arcus ΑΗ ad sinum arcus ΗΓ composita est ex ratione sinus arcus ΑΖ ad sinum arcus ΖΔ & ratione sinus arcus ΔΒ ad sinum arcus ΒΓ. Ratio autem sinus ΔΒ ad sinum ΒΓ, in figura ΑΒΓΖ, componitur ex ratione sinus ΔΑ ad sinum ΑΖ & ratione sinus ΖΕ ad sinum ΕΓ: ratio igitur sinus ΑΗ ad sinum arcus ΗΓ composita est ex tribus,



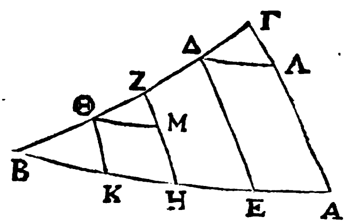
nempe ex ratione sinus ΑΖ ad sinum ΖΔ, & ratione sinus ΔΑ ad sinum ΑΖ, & ratione sinus ΖΕ ad sinum ΕΓ: duæ autem priores, ob utrinque inventum ΑΖ, componunt rationem sinus ΔΑ ad sinum ΖΔ: ratio igitur sinus ΑΗ ad sinum ΗΓ componitur ex ratione sinus ΔΑ ad sinum ΖΔ & ratione sinus ΖΕ ad sinum ΕΓ. Sed ratio sinus ΑΘ ad sinum ΘΓ componitur ex iisdem rationibus; quare sinus arcus ΑΘ est ad sinum arcus ΘΓ sicut sinus arcus ΑΗ ad sinum arcus ΗΓ. Jam in triangulo ΑΔΓ angulus ΑΔΓ est rectus; quare (*per octavam* III *hujus*) angulus ΘΔΓ æqualis erit angulo ΓΔΗ, ac proinde angulus ΑΔΗ æqualis erit angulo ΑΔΕ: ac ob angulum ΓΕΑ rectum, erit quoque (*per eandem octavam*) angulus ΔΕΓ æqualis angulo ΓΕΗ. Quoniam vero ΔΕΗ triangulum est Sphæricum, ac dividuntur anguli ejus ad Δ & Ε bifariam à ductis arcubus ΔΖ, ΖΕ; si ducatur arcus ΗΖ è puncto Η ad concursum eorum in Ζ, erit quoque angulus ΕΗΔ bifariam divisus, *per nonam* III. *hujus*. In triangulis autem ΘΔΗ, ΘΕΗ anguli Δ & Ε divisi sunt bifariam ab arcubus ΔΓ, ΕΓ, quare (*per* 6^m III.

6ta III. *hujus*) tam sinus arcus Θ E ad sinum E H, quam sinus arcus Θ Δ ad sinum arcus Δ H, erit in eadem ratione, nempe ut sinus arcus Θ Γ ad sinum arcus Γ H: permutando itaque sinus Θ E erit ad sinum Θ Δ sicut sinus E H ad sinum H Δ, hoc est ut sinus arcus E K ad sinum arcus K Δ, quia angulus E H Δ bifariam divisus est arcu H Z K. Quocirca cum angulus E H K æqualis est angulo Δ H K, ac sinus arcus Θ E est ad sinum Θ Δ sicut sinus E K ad sinum K Δ, erit (*è conversa* 8va III *hujus*) angulus Θ H K rectus. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

Si trianguli Sphærici crus majus non excesserit quadrantem circuli, & è crure illo majore sumantur duo arcus, à quorum terminis ducantur ad basim arcus continentes cum ea angulos æquales contento sub basi & crure reliquo; & si arcus sumpti fuerint æquales, erunt differentiæ inter arcus illos ductos inæquales, & differentiarum minor erit ea quæ est inter arcus cruri minori adjacentes: si vero differentiæ illæ inter arcus ductos fuerint æquales, tum arcus sumpti erunt inæquales, & major eorum erit qui propior est vertici trianguli. Quod si alter ex arcubus duobus sumptis, una cum differentia arcuum per terminos ejus ductorum, æqualis fuerit alteri arcui una cum differentia arcuum etiam per terminos ejus ductorum simul sumpta; tum duo arcus illi sumpti erunt inæquales, & eorum major erit qui propior vertici trianguli. Si vero differentia inter alterum ex arcubus sumptis & excessum quo differunt duo arcus per terminos ejus ducti, æqualis fuerit differentiæ inter alterum arcuum & excessum quo differunt arcus etiam per terminos ejusdem ducti; erit arcus ille qui vertici trianguli adjacet minor altero. Ac universim erit ratio arcus illius, qui vertici trianguli propior sumitur, ad arcum reliquum remotius sumptum, major ratione quam habet differentia inter arcus per terminos prioris ductos ad differentiam quæ est inter ductos per terminos alterius.

Sit triangulum Sphæricum Α Β Γ, cujus crus Β Γ majus sit reliquo Γ Α, sed non majus quadrante circuli; & capiantur in Β Γ arcus Γ Δ, Ζ Θ, & ducantur per terminos eorum arcus Δ Ε, Ζ Η, Θ Κ, continentes cum basi angulos æquales angulo Α: dico quod si fuerit arcus Γ Δ æqualis arcui Ζ Θ; erit Γ Λ differentia inter arcus Γ Α, Δ Ε, minor quam Ζ Μ differentia ipsorum Ζ Η, Θ Κ: Si vero differentiæ inter dictos arcus fuerint æquales; erit arcus Γ Δ major arcu Ζ Θ. Ac si fuerit arcus Γ Δ una cum excessu quo Γ Α superat Δ Ε æqualis arcui Ζ Θ una cum differentia ipsorum Ζ Η, Θ Κ, erit etiam arcus Γ Δ major quam Ζ Θ. Quod si differentia inter arcum Γ Δ & Γ Λ, quo scilicet Γ Α superat Δ Ε, æqualis fuerit differentiæ inter Ζ Θ & Ζ Μ, quo Ζ Η superat Θ Κ; tum arcus Γ Δ minor erit arcu Ζ Θ. Denique dico rationem arcus Γ Δ ad arcum Ζ Θ majorem esse ratione arcus Γ Λ ad arcum Ζ Μ.



Quoniam enim triangula Α Β Γ, Δ Β Ε &c. angulum habent ad Β communem, angulos vero ad puncta Α, Ε, Η, Κ æquales; erit sinus arcus Β Γ ad sinum arcus Β Δ sicut sinus arcus Γ Α ad sinum arcus Δ Ε, (*per* 2^m^ III *hujus*.) Et simili ratione, erit sinus arcus Β Δ ad sinum arcus Β Ζ ut sinus arcus Δ Ε ad sinum arcus Ζ Η; uti & sinus arcus Ζ Β ad sinum arcus Β Θ sicut sinus arcus Ζ Η ad sinum arcus Θ Κ. Arcus autem Β Γ major est arcu Γ Α, sed non major quarta circuli; quæ cum ita se habeant, evenient ea omnia quæ in hæc propositione dicta sunt, quorum demonstratio, ut & plurium his similium, è parte prima *libri Lemmatum Cyclicorum* petenda est.

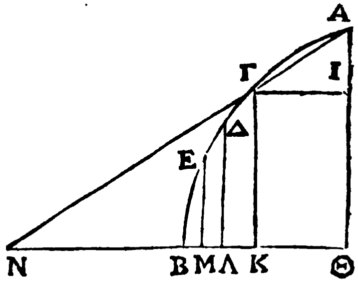
His demonstrandis non inutile videbitur Lemma sequens, cum ejusdem Corollariis.

Lemma.

Ratio quam habet arcus major ad minorem major est ratione quam habet sinus majoris ad minoris sinum

Sint Α Β, Β Γ *duo arcus, quorum sinus sint rectæ* Α Θ, Γ Κ, *normaliter ad diametrum* Β Θ *applicatæ: dico arcum* Α Β *majorem habere rationem ad arcum* Β Γ *quam habet* Α Θ *ad* Γ Κ.

Ducatur



Ducatur recta ΑΓ, *quæ producatur ad occursum diametri* ΒΘ *etiam productæ ad punctum* Ν, *ac erit* ΑΝ *ad* ΝΓ *sicut* ΑΘ *ad* ΓΚ, *ac dividendo* ΓΝ *erit ad* ΑΓ *sicut* ΓΚ *ad* ΑΙ *sive ad differentiam ipsarum* ΑΘ, ΓΚ. *Sed* ΝΓ *major est arcu* ΒΓ, *utpote Tangente major, & subtensa* ΑΓ *minor est arcu* ΑΓ: *ratio igitur arcus* ΑΓ *ad arcum* ΓΒ *major est ratione rectæ* ΓΑ *ad rectam* ΝΓ. *Componendo itaque ratio arcus* ΑΒ *ad* ΒΓ *major erit ratione* ΑΝ *ad* ΝΓ, *hoc est ratione* ΑΘ *ad* ΚΓ. Q. E. D.

Coroll. 1. *Permutando igitur, ratio arcus majoris ad sinum suum major est ratione arcus minoris ad sinum suum; atque adeo quo minor est arcus eo minor erit ratio ejus ad sinum eidem adjacentem.*

Coroll. 2. *Unde manifestum fiet, quod si sinus quatuor arcuum proportionales fuerint, sive si* ΑΘ *sit ad* ΓΚ *sicut* ΔΛ *ad* ΕΜ, *major erit ratio arcus* ΑΒ *ad* ΒΓ *ratione arcus* ΒΔ *ad* ΒΕ.

Coroll. 3. *Manente autem dicta ratione sinuum, dividendo, ratio arcus* ΑΓ *ad arcum* ΔΕ *eo major erit quo majores sunt sinus isti.*

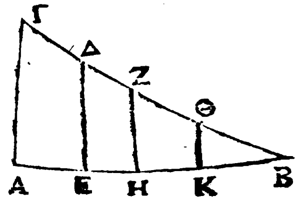
PROP. XII.

Si trianguli Sphærici alter angulorum ad basin fuerit acutus, alter vero rectus; neque fuerit latus angulo recto subtensum majus quadrante circuli; & in hoc latere capiantur duo arcus, à quorum terminis ducantur arcus ad basim normales, atque hi arcus in latere sumpti fuerint æquales: erunt arcus, qui inter normales illos intercipiuntur, inæquales; eorumque major adjacebit angulo recto. Evenient autem in hoc casu cætera omnia quæ in præcedentibus descripsimus.

Sit triangulum Sphæricum ΑΒΓ, cujus angulus Β acutus, angulus vero Α rectus; nec sit latus ΒΓ majus quadrante circuli; & in latere ΒΓ sumantur duo arcus ΓΔ, ΖΘ, per quorum ter-

 minos

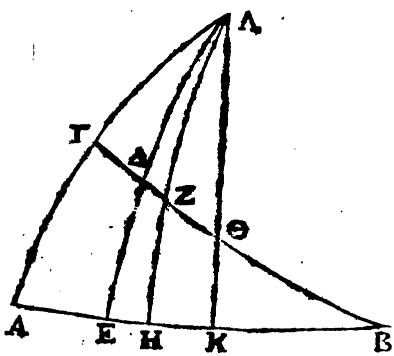
minos, ad angulos rectos super basim ΑΒ, ducantur arcus ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ: dico quod si arcus ΓΔ, ΖΘ fuerint æquales, arcus ΑΕ major erit arcu ΗΚ; quodque si duo arcus ΑΕ, ΓΔ simul sumpti fuerint æquales duobus ΗΚ, ΖΘ simul sumptis, erit arcus ΓΔ minor arcu ΖΘ: quod si differentia arcuum ΑΕ, ΓΔ æqualis fuerit differentiæ inter arcus ΘΖ, ΚΗ, auferendo scilicet minorem ex majore, erit arcus ΓΔ major arcu ΖΘ. Universim vero ratio quam habet arcus ΑΕ ad ΗΚ major erit ratione ΓΔ ad ΖΘ.



Quoniam enim arcus ΒΓ minor est quadrante circuli, angulus autem qui ad Β acutus est, qui vero ad Α, Ε, Η, Κ sunt recti; erit (*per* 5am. III. *hujus*) ut sinus summæ arcuum ΑΒ, ΒΓ ad sinum differentiæ eorundem, ita sinus summæ arcuum ΔΒ, ΒΕ ad sinum differentiæ arcuum ΔΒ, ΒΕ; & ita sinus summæ arcuum ΖΒ, ΒΗ ad sinum differentiæ eorundem, ac denique ita sinus summæ arcuum ΘΒ, ΒΚ ad sinum differentiæ ipsorum; quæ cum ita se habeant, evenient ea omnia quæ in præmissis dicta sunt.

Rursus si fuerit arcus ΒΓ quadrans circuli, adeoque ΑΒ ipsi ΒΓ æqualis, eadem ipsa etiam hoc in casu consequentur, juxta ea quæ demonstravimus in parte prima *Libri Lemmatum Cyclicorum.*

Sed & eadem alio modo ex hoc tertio Libro probabuntur. Producantur enim arcus ΑΓ, ΕΔ, ΗΖ, ΚΘ ad polum arcus ΑΒ, qui sit ad punctum Λ; & (*per* 3am III. *hujus*) ratio sinus arcus ΑΒ ad sinum arcus ΒΕ, componetur ex ratione sinus arcus ΛΓ ad sinum arcus ΕΔ; hoc est, ex ratione sinus arcus ΒΓ ad sinum arcus ΒΔ, & ratione sinus arcus ΛΔ ad sinum ΛΓ.



Sed ΛΔ major est quam ΛΓ, & uterque minor quadrante circuli; quare ratio sinus ΑΒ ad sinum arcus ΒΕ major est ratione

ratione sinus arcus ΒΓ ad sinum arcus ΒΔ. Pari modo patebit rationem sinus arcus ΕΒ ad sinum ΒΚ majorem esse ratione sinus arcus ΔΒ ad sinum arcus ΒΘ. Hinc constare potest rationem sinus arcus ΕΚ ad sinum arcus ΚΑ minorem esse ratione sinus arcus ΔΘ ad sinum arcus ΘΓ: Invertendo igitur ratio sinus arcus ΚΑ ad sinum arcus ΚΕ major est ratione sinus arcus ΘΓ ad sinum arcus ΘΔ. Et eodem modo probabitur sinum arcus ΕΚ majorem habere rationem ad sinum arcus ΚΗ quam habet sinus arcus ΔΘ ad sinum arcus ΘΖ. Pariter cum ratio sinus ΗΒ ad sinum arcus ΒΚ major sit ratione sinus arcus ΖΒ ad sinum ipsius ΒΘ, erit ratio sinus arcus ΚΑ ad sinum arcus ΑΗ minor ratione sinus arcus ΘΓ ad sinum arcus ΓΖ; ac propterea sinus arcus ΑΗ ad sinum arcus ΑΕ erit in minore ratione quam sinus arcus ΓΖ ad sinum arcus ΓΔ. Hæc autem cum ita se habeant, evenient ea omnia quæ in hac propositione dicta sunt, & arcus ΑΕ erit ad arcum ΗΚ in majori ratione quam arcus ΓΔ ad arcum ΖΘ. Q. E. D.

SCHOLION.

In hac, uti & in præcedente propositione, citatur Liber cui titulus ספר התמונות ההקשיות *hoc est, Liber Propositionum seu potius Lemmatum Cyclicorum, uti verba videntur reddenda. Curta sane sunt & imperfecta quæ his demonstrandis afferuntur argumenta, & ex dicto libro petita, qui qualis fuerit ne conjectura quidem assequi licebit. Ex consensu autem utriusque Codicis MS*[ti]*. in ipsius Auctoris Græca textu deperdito eadem olim reperta fuisse crediderim: qui textus an integer ad Traductores pervenerit, an potius hac in parte mancus, definire vix ausim. Sed nec te moveat si nonnulla hic desiderentur; quoniam in Corollariis ad XV*[tam]* hujus libri tertii, eadem ipsa paulo evidentius demonstrata reperies.*

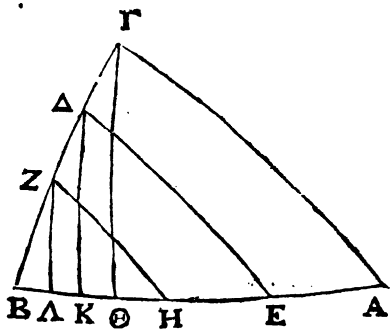
PROP. XIII.

Si trianguli non æquilateri majus latus non excedat quadrantem circuli, & capiantur in latere minore duo arcus, à quorum extremitatibus ducantur arcus ad basim, continentes cum ea angulos æquales angulo quem latus reliquum cum eadem continet; ducantur etiam ab iisdem punctis alii arcus ad basim normales; tum si duo

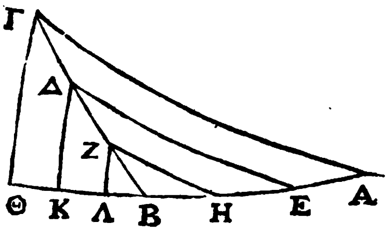
arcus

arcus, intercepti inter illos qui æquales angulos cum basi constituunt, fuerint æquales, inæquales erunt arcus in basi inter normales intercepti; & eorum major adjacebit lateri trianguli minori. Quod si fuerint duo arcus è basi à normalibus abscissi æquales inter se, tum arcus, intercepti inter eos qui faciunt cum basi angulos æquales, erunt inæquales; & eorum major conterminus erit lateri majori; & evenient cætera accidentia, prout diximus, ad exemplum præcedentium.

Sit triangulum Sphæricum ΑΒΓ, ac sit latus ΑΓ majus quam ΓΒ, sed non majus quadrante circuli; ac capiantur in ΒΓ arcus ΓΔ, ΔΖ, à quorum terminis ducantur ad basim ΑΒ arcus continentes cum ea angulos æquales angulo ad Α iisdem relativo, sicut arcus ΔΕ, ΖΗ; uti etiam arcus ΓΘ, ΔΚ, ΖΛ basi ΑΒ perpendiculares: dico quod si fuerit arcus ΑΕ æqualis arcui ΕΗ, erit arcus ΘΚ minor arcu ΚΛ; ac si fuerit arcus ΘΚ æqualis arcui ΚΛ major erit arcus ΑΕ arcu ΕΗ; evenientque cætera modo dicta. Et universim ratio quam habet arcus ΑΕ ad ΕΗ major erit ratione arcus ΘΚ ad ΚΛ.



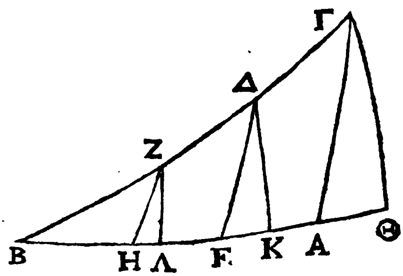
Quoniam in duobus triangulis Sphæricis ΑΒΓ, ΕΒΔ, anguli apud puncta Α, Ε sunt æquales; angulus autem apud Β communis est utrique, & inter eos ducuntur arcus ad ΑΒ normales, ut ΓΘ, ΔΚ; erit (*per* 4^{am}. III. *hujus*) sinus arcus ΑΘ ad sinum arcus ΘΒ sicut sinus arcus ΕΚ ad sinum ipsius ΚΒ; pariterque erit ut sinus arcus ΕΚ ad sinum arcus ΚΒ ita sinus arcus ΗΛ ad sinum arcus ΒΛ: ac permutando sinus ΑΘ ad sinum ΕΚ erit ut sinus ΘΒ ad sinum arcus ΒΚ; & ut sinus ΕΚ ad sinum ΗΛ ita sinus ΚΒ ad sinum ΒΛ: & ubicunque duxeris normalem, hi sinus erunt semper proportionales. Arcus autem ΑΘ major est quam ΘΒ, ob arcum ΑΓ majorem arcu ΓΒ. Jam si fuerit arcus ΘΚ æqualis arcui ΚΛ, erit differentia arcuum ΑΘ, ΕΚ; hoc est, differentia arcuum



arcuum A B, Θ K major differentia arcuum E K, H Λ sive arcuum E H, Λ K, in figura prima: in figura autem secunda, summa arcuum A E, Θ K major erit summa ipsorum E H, K Λ. In utraque itaque figura arcus A E major est quam E H.

Quod si A E æqualis fuerit ipsi E H; quoniam, in figura prima, arcuum A Θ, E K, sive arcuum A E, Θ K, differentia minor est differentia arcuum E K, H Λ; hoc est, arcuum E H, K Λ; & in figura secunda, summa arcuum A E, Θ K minor est summa arcuum E H, K Λ. In utraque igitur figura arcus K Θ minor erit quam K Λ. Atque universim ratio arcus A E ad E H major erit ratione quam habet arcus Θ K ad K Λ. Unde & ex præcedente constabit rationem arcus A E ad E H majorem esse ratione arcus Γ Δ ad Δ Z. Q. E. D.

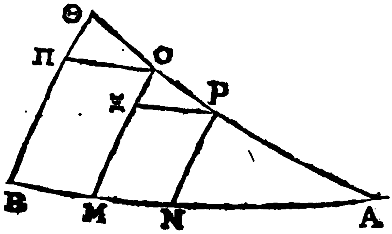
Pari modo ostendi potest quod, si angulus A trianguli A B Γ fuerit obtusus, qui vero ad B acutus, & arcus B Γ non excesserit quadrantem; ac capiantur in arcu B Γ duo arcus ut Γ Δ, Δ Z, & ducantur ad basim A B duo arcus Δ E, Z H, continentes cum ea angulos æquales angulo A iisdem relativo; ducantur etiam perpendiculares Γ Θ, Δ K, Z Λ: tum eadem quoque evenient quæ modo diximus. Et universim ratio arcus A E ad E H major erit ratione arcus Θ K ad K Λ. Unde etiam constabit rationem A E ad E H majorem esse ratione arcus Γ Δ ad Δ Z. Q. E. D.



SCHOLION.

Ut autem hæc melius intelligantur, Scholium hoc subjungere visum est. Quoniam sinus arcus A Θ *est ad sinum arcus* Θ B *sicut sinus arcus* E K *ad sinum arcus* K E, *&c. contineant arcus* A Θ, Θ B *angulum aliquem* A Θ B, *& in* A Θ *capiantur arcus,*

arcus, AO ipsi EK æqualis, uti & AP ipsi HΛ; & ducantur arcus OM, PN, constituentes cum basi AB angulos M & N angulo B æquales; & fiat ΠB ipsi OM, & MΞ ipsi PN æqualis: erit igitur (per 2^{m}. III. hujus) arcus OM æqualis arcui KB in præcedentibus figuris, & PN arcui BΛ. Proinde arcus



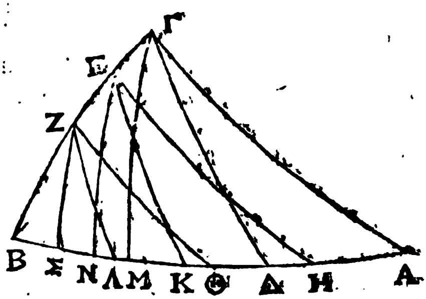
ΘO æqualis erit differentiæ arcuum AE, ΘK, in priore figura; vel summæ ipsorum AE, ΘK, in secunda: & arcus OP æqualis erit differentiæ vel summæ arcuum EH, KΛ. Erit etiam arcus ΘΠ æqualis arcui ΘK, & OΞ ipsi KΛ. Jam, per undecimam præcedentem, ratio arcus OΘ ad ΘΠ major est ratione OP ad ΞO; hoc est, ratio differentiæ vel summæ arcuum AE, ΘK ad arcum ΘK major est ratione differentiæ vel summæ arcuum EH, KΛ ad arcum KΛ: componendo igitur, in casu prioris figuræ; vel dividendo, in casu figuræ secundæ, ratio AE ad ΘK major erit ratione EH ad KΛ. Permutando autem ratio AE ad EH major erit ratione ΘK ad KΛ; quæ quidem ratio (per proxime præcedentem) major est ratione ΓΔ ad ΔZ; ratio igitur AE ad EH multo major est ratione ΓΔ ad ΔZ. Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

Si trianguli Sphærici latera fuerint inæqualia, nec eorum majus excesserit quadrantem, & à vertice ejus ad basim ducatur arcus utcunque, modo non minor sit latere trianguli minore; sumptisque in latere minore arcubus, ducantur per terminos eorum ad basim arcus continentes cum ea angulos æquales angulo quem cum ipsa continet latus trianguli majus; ducantur etiam per eosdem terminos arcus alii, continentes cum basi angulos æquales angulo, quem cum ea continent arcus prius ductus: & evenient eadem quæ in præcedentibus propositionibus dicta sunt: Et universim ratio arcuum interceptorum ab iis qui cum basi continent arcus æquales contento sub basi

basi & latere majore, ubicunque sumantur, major erit ratione arcuum interceptorum ab aliis illis arcubus ductis: posito scilicet quod in omnibus his rationibus antecedentes sint arcus illi qui adjacent lateri majori, consequentes vero qui ab eodem remotiores sunt.

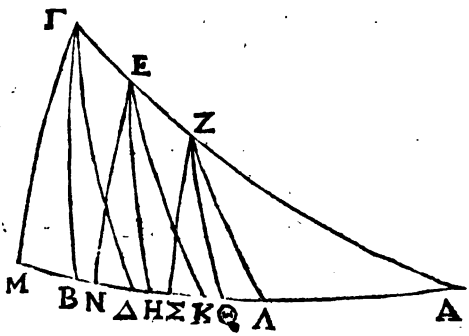
Sit ΑΒΓ triangulum Sphæricum, cujus latus ΑΓ majus sit latere ΒΓ, sed non majus quadrante circuli, & a vertice Γ ducatur ad basim ΑΒ arcus quilibet ΓΔ, qui non minor sit quam ΒΓ; & in ΒΓ capiantur duo arcus ΓΕ, ΕΖ, & ducantur per eorum extremitates ad basim arcus ΕΗ, ΖΘ, continentes cum ea angulos æquales angulo Α; ducantur etiam alii arcus ΕΚ, ΖΛ facientes cum eadem basi angulos æquales angulo ad Δ: dico rationem arcus ΑΗ ad arcum ΗΘ majorem esse ratione arcus ΔΚ ad ΚΛ.



Nam si fuerit angulus ΑΒΓ rectus, erit, per quartam hujus, sinus arcus ΑΒ ad sinum arcus ΒΗ sicut sinus arcus ΔΒ ad sinum arcus ΒΚ: pariterque sinus arcus ΒΗ est ad sinum arcus ΒΘ sicut sinus arcus ΒΚ ad sinum arcus ΒΛ; unde & ex præcedente manifesta sunt ea omnia quæ dicta sunt. Quod si angulus ad Β non fuerit rectus, ducantur ad basim arcus normales ΓΜ, ΕΝ, ΖΣ: quoniam vero ΓΔ non minor est quam ΓΒ, erit ΔΜ non minor quam ΜΒ; & argumento superius usurpato, probabitur sinum arcus ΑΜ esse ad sinum arcus ΜΒ, sicut sinus arcus ΗΝ ad sinum arcus ΝΒ, & ita sinus arcus ΘΣ ad sinum ΣΒ; erit etiam sinus arcus ΔΜ ad sinum arcus ΜΒ sicut sinus arcus ΚΝ ad sinum arcus ΝΒ, & sicut sinus arcus ΛΣ ad sinum arcus ΣΒ. Sed arcus ΑΜ major est quam ΒΜ, & arcus ΔΜ non minor est quam ΒΜ, & nec arcus ΑΜ neque ΑΓ major est quadrante circuli: erit igitur ratio arcus ΑΗ sive differentia arcuum ΑΒ, ΒΗ, ad ΗΘ sive differentiam arcuum ΒΗ, ΒΘ, major ratione quam habet ΔΚ differentia arcuum ΔΒ, ΒΚ, ad arcum ΚΛ differentiam arcuum ΚΒ, ΒΛ. Pariterque etiam constabit arcum A Δ majorem habere rationem ad arcum Δ B quam habet arcus H K ad K B, atque hanc rationem majorem esse ea quam habet Θ Λ ad Λ B.

Est enim sinus arcus A M *ad sinum arcus* H N *sicut sinus arcus* M Δ *ad sinum arcus* K N, *& sinus arcus* H N *ad sinum* ΘΣ *sicut sinus* K N *ad sinum* Λ Σ, *quia sunt inter se sicut sinus arcus* M B *ad sinum* B N, *& ut sinus* B N *ad sinum* B Σ; *ac proinde, argumento Scholii præcedentis, erit differentia arcuum* A M, H N *ad differentiam arcuum* H N, Θ Σ *in majori ratione quam differentia arcuum* Δ M, K N *ad differentiam arcuum* K N, Λ Σ; *hoc est, differentia arcuum* A H, M N *ad differentiam arcuum* H Θ, N Σ *in majori erit ratione quam differentia arcuum* Δ K, M N *ad differentiam arcuum* K Λ, N Σ. *Unde & ex præcedentibus consequitur, rationem arcus* A H *ad arcum* H Θ *majorem esse ratione arcus* Δ K *ad arcum* K Λ.

Rursus, si fuerit angulus A trianguli A B Γ acutus, qui vero ad B obtusus, ac latus A Γ non sit majus quadrante circuli; ac ducatur de puncto Γ ad basin A B arcus Γ Δ, & capiantur in latere A Γ arcus Γ E, E Z, & ducantur arcus E H, Z Θ continentes cum basi A B angulos æquales angulo ad B; ducantur quoque alii arcus E K, Z Λ continentes cum basi angulos æquales angulo Δ: dico rationem arcus Δ K ad K Λ majorem esse ratione arcus B H ad H Θ.



Demittantur enim arcus ad basim perpendiculares Γ M, E N, Z Σ; & (*per* 4^{tam} III. *hujus*) erit ut sinus arcus A M ad sinum arcus M B, ita sinus arcus A N ad sinum arcus N H, & sinus arcus A Σ ad sinum arcus Σ Θ: pariterque erit ut sinus arcus A M ad sinum arcus M Δ, ita sinus arcus A N ad sinum arcus N K; & ita sinus arcus A Σ ad sinum arcus Σ Λ: erit igitur ratio differentiæ arcuum Δ A, A K ad differentiam arcuum K A, A Λ major ratione quam habet differentia arcuum B A, A H ad differentiam arcuum H A, AΘ. Q. E. D.

Unde etiam consequitur rationem arcus A Δ ad Δ B majorem esse

esse ratione arcus ΑΚ ad ΚΗ, atque rationem ΑΚ ad ΚΗ majorem esse ratione ΑΛ ad ΑΘ.

*Plurima autem ad perfectam demonstrationem in his desiderari quis non videt, sive ab Authore subintellecta, sive à Traductoribus brevitati studentibus prætermissa, vel forsan remotiorum seculorum injuria in libris antiquioribus obliterata? Sed & ex diversissimo fundamento, quod in Scholio ad IX*nam *secundi Libri posuimus, eadem ipsa paulo ut videtur apertius derivari possunt. Ostendimus enim ibidem,* pag. 70. *rationem arcus momentanei* ΓΕ *ad momentaneum* ΑΗ (in fig. prima) *componi ex data & manente ratione sinus anguli* Α *ad semidiametrum Sphæræ, & ex ratione sinus complementi arcus* ΑΓ *vel* ΕΗ *ad quadrantem, ad sinum anguli* ΑΓΒ *vel* ΒΕΗ. *Simulque rationem momentanei arcus* ΓΕ *ad momentaneum arcum* ΔΚ *componi ex ratione data quam habet sinus anguli* Δ *ad semidiametrum sphæræ, & ratione sinus complementi arcus* ΔΓ *vel* ΕΚ *ad sinum anguli* ΔΓΒ *vel* ΚΕΒ. *Eodemque modo componetur ratio quam habet arcus momentaneus* ΕΖ *ad arcus quam minimos* ΗΘ *ac* ΚΛ: *Æquabilius autem crescunt momenta arcuum* ΔΚ, ΚΔ, *quam momenta arcuum* ΘΗ, ΗΑ, *posito quod arcus* ΒΓ *motu æquabili augeatur; ac proinde quo minor est angulus* Α *respectu anguli* Δ, *eo major erit ratio arcus* ΑΗ *ad arcum* ΗΘ, *respectu ejus quam habet arcus* ΔΚ *ad* ΚΛ.

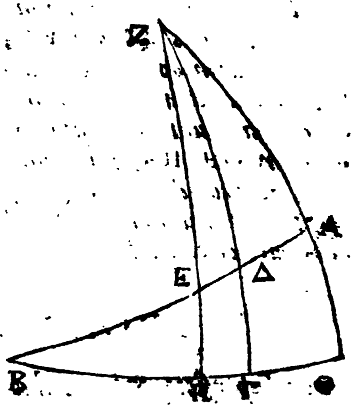
PROP. XV. THEOR.

Si in superficie Sphæræ duo circuli magni inclinati sint ad invicem, & capiantur in eorum uno duo puncta, per quæ ducantur ad alterum duo arcus eidem ad angulos rectos: tum sinus arcus, intercepti inter casus duorum perpendicularium, erit ad sinum arcus inter sumpta duo puncta, ut rectangulum contentum sub semidiametro Sphæræ & semidiametro circuli qui contingit unum è circulis & alteri æquidistans est, ad rectangulum sub semidiametris duorum circulorum per sumpta duo puncta transeuntium, alterique dictorum circulorum magnorum æquidistantium.

Sint

Sint duo circuli magni AB, BΓ inclinati inter se, & sumantur in AB duo puncta Δ, E, per quæ ducantur ad arcum BΓ normales ΔΓ, EH: dico quod sinus arcus ΓH est ad sinum arcus EΔ, sicut rectangulum sub semidiametro sphæræ & semidiametro circuli ipsi BΓ æquidistantis circulumque BA contingentis, ad rectangulum sub semidiametris circulorum per puncta Δ, E transeuntium circuloque BΓ æquidistantium.

Producantur arcus ΓΔ, HE ad polum circuli BΓ, qui sit Z; & ad BA normalis sit arcus AZ. Jam quoniam uterque angulus ZAE, ZHB est rectus, & angulus AEZ est angulo BEH æqualis, erit sinus arcus AZ ad sinum arcus ZE (per III. hujus) sicut sinus arcus BH ad sinum arcus BE. Est autem Figura BΓZE ad modum figuræ propositionis primæ hujus; componetur igitur ratio sinus arcus ΓH ad sinum arcus ΔE ex ratione sinus arcus ΓZ ad sinum ZΔ, & ratione sinus arcus BH ad sinum arcus BE. Verum hæc ratio eadem ostensa est ac ratio sinus arcus AZ ad sinum arcus ZE; quare sinus arcus ΓH est ad sinum arcus ΔE ut rectangulum sub sinubus arcuum ΓZ, AZ ad rectangulum sub sinubus arcuum ΔZ, ZE. Sinus autem arcus ΓZ semidiameter est sphæræ, & sinus arcus AZ semidiameter est circuli transeuntis per A & circulo BΓ æquidistantis, qui etiam contingit circulum AB in puncto A; & sinus arcuum ΔZ, ZE sunt semidiametri circulorum per puncta Δ, E transeuntium, eidemque circulo BΓ æquidistantium. Constat ergo propositum.

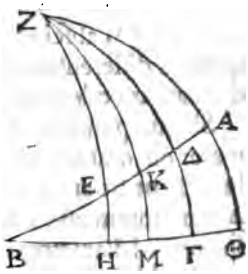


Hinc demonstrari potest, uti diximus, Propositio principalis libri tertii Sphæricorum *Theodosii*, diverso tamen modo. Ostendit enim ille rationem arcus ΓΘ ad arcum AΔ majorem esse ratione diametri Sphæræ ad diametrum circuli æquidistantis ipsi BΓΘ, & circulum AB in puncto A contingentis. Hæc autem propositio est ipsius *Apollonii*, in libro cui titulus *Liber* הכללי, (forte *De Principiis universalibus*.) Nos vero in sequentibus ostendemus quomodo se res habeat universim, quod-

que

quæ ratio arcus ΓH ad arcum ΔE certa quadam ratione major est, quadam vero minor.

Jam si duo circuli magni AB, BΘ inclinentur ad invicem, & ducatur circulus transiens per polos utriusque, ut ZAΘ, & punctum Z sit polus circuli BΘ; ducatur etiam è puncto Z arcus circuli magni ZKM occurrens arcui AB in K, ita ut sinus arcus ZK media proportionalis sit inter sinus arcuum ZA, ZΘ; hoc est, ut diameter circuli per K transeuntis circuloque BΘ æquidistantis, media proportionalis sit inter diametrum Sphæræ & diametrum circuli contingentis circulum AB circuloque BΘ æquidistantis: dico excessum quo arcus BK superat arcum BM datum esse; excessumque illum majorem esse quovis alio inter quoslibet duos arcus ad hunc modum abscissos.



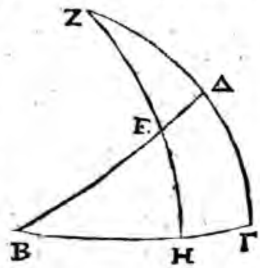
Est enim sinus arcus MZ ad sinum arcus ZK sicut sinus arcus ZK ad sinum arcus AZ, ac proinde sinus arcus MΘ est ad sinum arcus AK ut sinus arcus KB ad sinum arcus BM. Sed arcus BΘ æqualis est arcui AB; quare arcus ΘM æqualis est arcui BK, & arcus KA arcui BM. Quoniam vero sinus arcus MZ est ad sinum arcus ZK sicut sinus arcus ZK ad sinum arcus ZA, erit sinus MZ ad sinum ZA, sive diameter sphæræ ad diametrum circuli ipsi BΘ æquidistantis & circulum AB tangentis in puncto A, sicut quadratum è sinu arcus ZM ad quadratum è sinu arcus ZK, hoc est, ut quadratum è sinu arcus ΘM ad quadratum è sinu arcus AK. Componendo igitur ac dividendo, erit ut summa dictarum diametrorum ad earundem differentiam ita summa quadratorum ex sinubus arcuum ΘM, KA qui quadrantem conficiunt, hoc est, quadratum ex semidiametro sphæræ, ad differentiam quadratorum ex iisdem sinubus. Sed dictæ diametri datæ sunt, data est igitur differentia illa quadratorum; & dato eorundem aggregato, dantur quoque ipsa quadrata è sinubus arcuum ΘM, AK: dantur ideo ipsi arcus, ac proinde eorundem differentia data est. Quum autem hi duo arcus simul sumpti quadrantem circuli conficiunt; dico eorundem differentiam majorem esse quavis alia differentia arcuum ad hunc modum abscissorum.

Ducantur enim per polum Z arcus circulorum magnorum

ZΔΓ,

Z Δ Γ, Z K M, Z E H, & erit ſinus arcus Γ M ad ſinum arcus K Δ ut rectangulum ſub ſemidiametro ſphæræ & ſinu arcus A Z contentum, ad rectangulum ſub ſinubus arcuum Δ Z, Z K. Sed rectangulum ſub ſemidiametro ſphæræ & ſinu arcus A Z æquale eſt quadrato ex ſinu arcus K Z; quod quidem quadratum majus eſt rectangulo ſub ſinubus Δ Z, Z K: quare arcus Γ M major eſt arcu Δ K. Pari modo demonſtrabitur arcum M H minorem eſſe arcu K E. Quæ cum ita ſe habeant, erit exceſſus arcus E K ſupra arcum M B major exceſſu arcus E B ſupra arcum B H, ac major exceſſu arcus Δ B ſupra arcum B Γ. Unde manifeſtum eſt arcum Z K M abſcindere è duobus circulis A B, B Θ duos arcus, quorum differentia major ſit ea quæ eſt inter quoſlibet alios duos arcus eodem modo abſciſſos.

Sit jam punctum Z polus circuli B H Γ, ac ſit arcus B Δ non major quadrante; tranſeant autem arcus Γ Δ Z, H E Z per polum Z, ut ſit arcus Γ H major arcu Δ E: dico rationem Γ H ad Δ E minorem eſſe ratione diametri ſphæræ ad diametrum circuli circulo B Γ æquidiſtantis & per punctum Δ tranſeuntis.



Quoniam enim arcus Δ B non eſt major quadrante, & arcus Δ E minor eſt quam Γ H; ratio autem ſinus arcus Γ H ad ſinum arcus Δ E (*per jam oſtenſa*) compoſita eſt è ratione ſinus arcus Γ Z ad ſinum arcus Z Δ, & ratione ſinus arcus H B ad ſinum arcus B E; & H B minor eſt quam B E: erit igitur ratio ſinus arcus Γ H ad ſinum arcus Δ E minor ratione ſinus arcus Γ Z ad ſinum arcus Z Δ, ſive ratione quam habet ſemidiameter ſphæræ ad ſemidiametrum circuli per Δ tranſeuntis circuloque B Γ æquidiſtantis. Cum autem Γ Z quadrans eſt, & Γ H quadrante minor, erit quoque ratio arcus Γ H ad Δ E dicta ratione diametrorum minor.

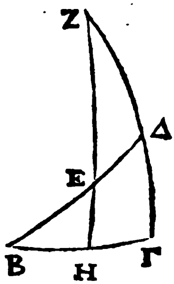
Cum vero ſinus arcus Γ H ad ſinum arcus Δ E ſit ſicut rectangulum ſub ſemidiametro ſphæræ & ſemidiametro circuli qui contingit circulum B E Δ, ipſiuſque B Γ plano æquidiſtat, ad rectangulum ſub ſemidiametris circulorum per puncta Δ, E tranſeuntium, eidemque plano æquidiſtantium; ſi arcus Γ H major ſit quam Δ E: dico rationem quam habet arcus Γ H ad arcum Δ E majorem eſſe dicta ratione rectangulorum.

Quoniam

Quoniam enim arcus ΓH major est arcu ΔE, erit eorundem arcuum ratio major ratione sinus arcus ΓH ad sinum arcus ΔE. Hæc autem ratio ea est quam habet rectangulum sub semidiametro sphæræ & semidiametro circuli qui tangit circulum BΔ circuloque BΓ æquidistat, ad rectangulum sub semidiametris circulorum eidem BΓ æquidistantium perque puncta Δ, E, transeuntium: ratio igitur arcus ΓH ad arcum ΔE major est ratione prædicta.

Eodem modo constabit, quod si arcus ΓH minor fuerit quam ΔE, erunt hi arcus in ratione minore quam habent rectangula illa inter se.

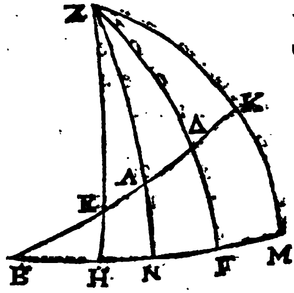
Ponamus enim arcum ΓH minorem esse arcu ΔE, & erit rectangulum sub semidiametro sphæræ & semidiametro circuli contingentis circulum BΔ ipsique BΓ æquidistantis, minus rectangulo sub semidiametris circulorum per puncta Δ, E transeuntium eidemque plano æquidistantium; horum autem rectangulorum rationem habent sinus arcuum ΓH, ΔE inter se: minor itaque est ratio arcuum ipsorum ratione dictorum rectangulorum.



Sit autem arcus ΓH minor arcu ΔE, sive rectangulum sub diametro Sphæræ & diametro circuli contingentis circulum BΔ, planoque circuli BΓ æquidistantis, minus rectangulo sub diametris circulorum per puncta Δ, E transeuntium: dico rationem arcus ΓH ad arcum ΔE majorem esse ratione diametri circuli qui contingit circulum BΔ, ad diametrum circuli per punctum E transeuntis.

Quoniam enim rectangulum sub sinubus arcuum EZ, ZΔ majus est rectangulo sub semidiametro Sphæræ & semidiametro circuli contingentis BΔ ipsique BΓ æquidistantis; ducantur per Z polum circuli BΓ arcus circulorum magnorum ZKM, ZΛN, ita ut rectangula sub sinubus arcuum ΔZ, ZΛ; EZ, ZK contenta, sint singula æqualia contento sub semidiametro Sphæræ & semidiametro circuli contingentis circulum BΔ. Cadat autem imprimis punctum Λ inter puncta Δ, E. Et ob æqualia illa rectangula, erit (*per jam ostensa*) arcus ΓN æqualis arcui ΔΛ, ut & ΛE arcui ΓM, & arcus HN arcui ΔK: quocirca arcus ΓN, NH simul sumpti æquales sunt arcubus ΛΔ, ΔK simul, hoc est arcus ΓH arcui KΛ. Pari modo arcus MΓ, ΓN simul (hoc est arcus MN) æquales

æquales sunt arcui Δ E. Sed (per superius demonstrata) ratio arcus MN ad arcum KΛ, sive arcus ΔE ad arcum ΓH, minor est ratione semidiametri Sphæræ ad sinum arcus KZ; quæ quidem ratio eadem est ac ratio sinus arcus BZ ad semidiametrum circuli circulum BEΔ contingentis ipsique BΓ æquidistantis. Est igitur ratio arcus Δ B ad ΓH minor dictis rationibus; adeoque invertendo, ratio ΓH ad ΔE major est ratione diametri circuli contingentis circulum BΔ, ad diametrum circuli per B transeuntis & plano circuli BHΓ æquidistantis. Q. E. D.



Si vero punctum Λ cadet inter Δ & K, res manifesta est.

Ostendimus igitur quomodo se res habet, quæcunque fuerit ratio arcuum ΓH ad ΔE, sive majoris ad minus, sive minoris ad majus.

Constat etiam ex jam dictis, quod si punctum Δ fuerit terminus quadrantis BΔ, ratio arcus ΓH ad ΔE minor erit ratione diametri Sphæræ ad diametrum circuli tangentis circulum BEΔ, ipsique BHΓ æquidistantis; major vero ratione diametri Sphæræ ad diametrum circuli eidem æquidistantis & per punctum B transeuntis.

Unde si terminus quadrantis fuerit inter puncta Δ, E, & arcus ΔE bifariam divisus fuerit; ratio arcus ΓH ad arcum ΔE & minor erit & major rationibus illis.

Si vero terminus quadrantis non fuerit medio loco inter puncta Δ, E, erit ratio arcus ΓH ad ΔE minor ratione diametri Sphæræ ad diametrum circuli contingentis BΔE planoque BHΓ æquidistantis; major vero ratione diametri Sphæræ ad diametrum circuli eidem plano æquidistantis, qui vel per punctum Δ vel Z transit, quod scilicet remotius fuerit à puncto termini quadrantis.

Coroll. *Arcu igitur BΓ motu æquabili describi supposito, momenta arcus BΔ erunt ubique ut quadrata sinuum distantiarum à polo Z. Unde etiam constabunt ea omnia, quæ in Prop. XIIma plenius demonstrasse oportuit.*

FINIS.