This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

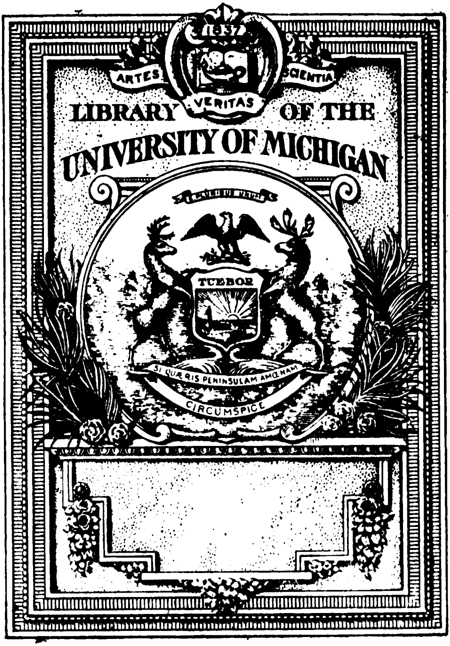
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

us of Antissa.

SERENI ANTINOENSIS

OPUSCULA.

EDIDIT ET LATINE INTERPRETATUS EST

I. L. HEIBERG,

DR. PHIL., PROFESSOR HAUNIENSIS.

LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MDCCCXCVI.

LIPSIAE: TYPIS B. G. TEUBNERI.

PRAEFATIO.

I.

Codices, quibus in hac editione usus sum, his siglis notaui:

V — cod. Uaticanus graecus 206, bombyc. saec. XII—XIII; u. ed. Apollonii I p. IV. habet fol. 161—193 Serenum de sectione cylindri, fol. 194—239 de sectione coni. correctus est et manu 1 et raro manu aliquanto recentiore (m. 2); praeterea alia manus etiam recentior (m. 3) partem superiorem folii 237 et folia 238—239 suppleuit (p. 276, 14—18, p. 278, 12—15, p. 280, 9—302, 4); denique Matthaeus Deuarius (u. ed. Apollon. II p. XVI) nonnulla correxit, plura adscripsit in margine (m. rec.). contuli Romae 1894.

v — cod. Uaticanus graecus 203, bombyc. saec. XIII; u. ed. Apollon. I p. V. habet fol. 84—90 Serenum de sectione cylindri sine titulo (*σερήνου* postea add. in mg., in fine *σερήνου ἀντισσέως φιλοσόφου περὶ κυλίνδρου τομῆς*), fol. 90—98 de sectione coni sine titulo, omnia usque ad p. 300, 20 eadem manu eleganti et adcurata scripta, qua Conica Apollonii, p. 300, 20 sqq. uero manu neglegenti eiusdem temporis, quae eadem fol. 1—55 scripsit (cfr. Apollon. II p. XI). descriptus est e V (u. Apollon. II p. XV;

cfr. in hoc uolumine p. 84, 10; 122, 18; 144, 16; 162, 2; 220, 8; 254, 4) ante correctiones manus 2 factas (p. 98, 22; 208, 26; 210, 13, 20, 24, 25; 212, 4, 10, 11, 16, 23; 258, 4)[1]); quare utilis est ad correctiones manus 1 distinguendas et ad pristinam scripturam locorum postea correctorum uel mutilatorum eruendam. contuli p. 276, 14—16; 278, 12—15; 278, 19—302, 4 et locos plurimos inspexi Romae 1894. figuras quoque non raro in V mutilatas e v suppleui.

w — cod. Uaticanus graecus 205, chartac., scriptus anno 1536 ab Iohanne Hydruntino, librorum graecorum instauratore ad bibliothecam Uaticanam (u. ed. Apollonii II p. XI); Sereni opuscula solito ordine habet p. 143—168 et p. 169—207. descriptus est e V iam mutilato et est apographum illud[2]) a Deuario toties citatum (u. ed. Apollon. II p. XV). hic illic locos nonnullos inspexi Romae 1894.

c — cod. Constantinopolitanus palatii ueteris nr. 40, bombyc. saec. XIII—XIV (u. ed. Apollon. II p. XI). Serenum de sectione cylindri habet p. 517—549, de sectione coni p. 549—588; nunc quidem desinit p. 254, 21 madore consumptus; p. 238, 20—252, 2 alia manu eiusdem temporis scripta sunt, p. 236, 15

---

1) Ita factum est, ut in v ordo hic sit inde a uocabulo *ἀγόμεναι* p. 36, 12: p. 56, 8 *ἐάν* — p. 60, 3 *πρός*, p. 36, 12 *εὐθεῖαι* — p. 56, 6 *κυλίνδρου*, p. 60, 3 *τῇ* seqq. nam haec disturbatio in V orta est folio 176 ante folia 170—175 transposito; uerum ordinem notauit manus 2 (u. not. crit. ad p. 36, 12, p. 56, 6, p. 60, 3), et postea folia suo ordine reposita sunt, ut nunc habentur. cfr. ad p. 272, 12.

2) Loci in ed. Apollonii II p. XVI citati in hac editione sunt p. 46, 15; 218, 10; 234, 13; 280, 7.

—238, 15 errore repetita. scripturas meliores quam V raro habet et plerumque eiusmodi, quae cuiuis librario sese offerant (p. 6, 23; 8, 1; 10, 23, 25; 16, 23; 50, 17; 64, 23; 88, 11; 122, 5, 19; 128, 19; 146, 5; 158, 21; 168, 14; uerba in V iniuria bis scripta omisit p. 50, 25; 128, 10; 152, 9; 180, 13; 182, 10; 194, 17; 220, 8, 18; 226, 10; 228, 11; 230, 3; 236, 17; 248, 12; paullo insigniores loci sunt p. 40, 23; 50, 29; 76, 16; 92, 17, 19; 120, 12; 138, 4; 150, 8; 210, 15; 214, 12; 220, 20, dubii p. 40, 22; 90, 28; 96, 12; 194, 1; 214, 20; 250, 10); et librarium in corrigendo deprehendimus p. 34, 3; 148, 5, etiam falso p. 194, 19, cfr. p. 106, 14. nec desunt loci, qui significare uideantur, c ex ipso V descriptum esse (cfr. Apollon. II p. XXXI), uelut p. 82, 4; 84, 10; 98, 22; 114, 5; 124, 16; 160, 25; 196, 5; 210, 25; 216, 2; 236, 2 (easdem repetitiones falsas habet p. 38, 19; 244, 5; cum v consentit in scriptura codicis V falso interpretanda p. 14, 16; 90, 11; 204, 5; 218, 4, cfr. praeterea p. 254, 14). sed obstant loci, quales sunt p. 4, 3; 166, 3; 208, 9; 250, 4, unde concludendum uideri possit, c ex archetypo codicis V descriptum esse (cfr. p. 12, 21), quem litteris compendiisque uncialibus scriptum fuisse ostendunt errores communes p. 106, 26; 134, 16; 144, 2. sed quidquid id est, codex c nihil ad uerba Sereni emendandi confert; nam quas habet emendationes et paucas et futiles, easdem praebet p. ipse contuli Hauniae 1889.

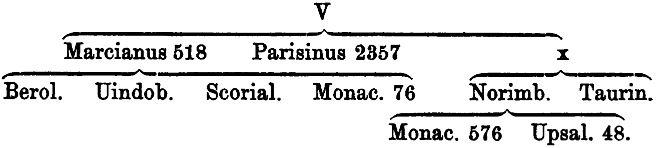
p — codex Parisinus graecus 2342, chartac. saec. XIV (u. Apollon. II p. XII, Omont Inventaire II p. 243) in monte Atho scriptus (Apollon. II p. LXIX). habet fol. 188—195^r Serenum de sectione coni, fol. 195^u—200 de sectione cylindri in fine mutilatum (desinit p. 102, 13; consistit ex XXV quaternionibus numeris *κγ*—*μη* in primo et ultimo folio signatis; e quaternione *μη* unum solum exstat folium). scriptus est a librario audaci et rerum et sermonis mathematici peritissimo (cfr. Apollon. II p. LIV sq.), qui multos locos feliciter emendauit, uelut in minutiis p. 2, 18; 4, 23; 12, 6, 7; 14, 26; 16, 15; 20, 20; 28, 26; 30, 7; 42, 20; 44, 2; 58, 10; 66, 7; 70, 3; 72, 9; 80, 2; 82, 13, 14; 86, 5; 88, 13; 94, 20; 98, 6, 10, 18; 122, 14; 124, 16; 130, 8, 21; 136, 7; 142, 13, 20; 144, 15; 148, 1; 152, 18; 154, 15; 156, 1; 158, 20; 162, 21; 164, 14; 166, 18; 168, 1; 170, 11; 174, 3, 10, 22; 176, 3, 7, 11; 178, 19; 182, 15, 16, 23; 184, 8; 190, 1; 192, 18; 194, 24; 198, 17; 200, 23; 202, 22; 204, 15; 206, 2, 20; 224, 17, 27; 226, 14; 230, 27; 234, 7, 8; 236, 1, 2, 11; 242, 25; 244, 5; 254, 3, 17; 256, 11; 258, 19; 264, 6; 266, 23; 268, 17; 270, 3, 7, 13; 272, 11; 278, 5; 280, 4 praeter errores iam in c correctos (excepto loco p. 10, 25); paullo maiora sunt p. 2, 11; 6, 9; 36, 16; 42, 16; 46, 12; 48, 3; 70, 14; 74, 22; 82, 7; 84, 18; 90, 11; 94, 7; 98, 22; 136, 8; 138, 12; 146, 25; 166, 25; 196, 23; 198, 19; 210, 13; 228, 13; 240, 16; 244, 10 et fortasse p. 190, 18; 202, 7; 204, 24. quam bene res mathematicas tenuerit librarius, ostendunt correctiones litterarum figurae p. 18, 6; 20, 15; 22, 1; 28, 21, 26; 30, 14; 32, 9; 34, 12; 38, 13; 42, 1; 46, 10, 15; 50, 19, 21; 68, 7; 80, 1; 98, 15, 17;

126, 20; 134, 24; 138, 5; 140, 25; 142, 16; 156, 17, 19; 160, 24; 170, 9; 176, 22; 178, 2, 4; 190, 19; 200, 11; 204, 8, 17, 21; 208, 26; 210, 20, 24, 25; 212, 4, 11, 16, 23; 226, 13; 228, 15; 232, 9, 14, 17; 238, 5, 24; 240, 5, 7; 242, 22; 244, 7; 252, 12; 270, 23; 278, 7, 11, 12. haec omnia non meliori memoriae, sed ingenio librarii deberi, adparet et ex interpolationibus apertissimis, quas quaelibet pagina prae se fert (uelut, ut hoc sumam, pro nudo *ἐπεί*, de quo u. ed. Euclidis V p. LX, in p legitur *ἐπεὶ οὖν* p. 8, 15; 138, 20; 140, 26; 146, 12; 148, 26; 160, 27; 172, 3; *καὶ ἐπεί* p. 44, 16; 124, 3; 136, 15; 278, 12; *ἐπεὶ γάρ* p. 52, 10; 160, 5; 202, 15; 210, 22; 250, 1; 254, 24; 270, 19; pro *ἡ Α γωνία* scripsit *ἡ πρὸς τῷ Α* p. 122, 24; 198, 13; pro *τὸ ὑπὸ ΕΠΗ* semper *τὸ ὑπὸ τῶν ΕΠ, ΠΗ* et similia, u. ad p. 46, 3; sed multo maiora molitus est, uelut p. 168, 22—23 et alibi sexcenties), et ex conatibus emendandi non perfectis uel aperte falsis (p. 4, 12; 12, 23; 14, 16, 26; 24, 25; 52, 18; 54, 1; 68, 3; 90, 27; 126, 4; 128, 1; 134, 16; 144, 2; 152, 2, 3; 158, 3; 188, 1; 194, 2, 26; 198, 17; 204, 22; 206, 21, 23; 220, 2, 20?; 230, 21; 244, 23; 274, 19); correctorem deprehendimus p. 10, 1; 36, 25; 166, 24. uestigia certa, unde concludi posset, p ex ipso V uel ex v pendere (u. Apollon. II p. LIV), in his opusculis non repperi; cum c in erroribus conspirat p. 26, 1; 66, 13; 142, 10, cum c correcto p. 188, 16. — contuli ipse Parisiis 1893.

Codicum Vcp scripturas omnes in adparatum recepi neglectis plerumque adcentibus et spiritibus, alios raro commemoraui (vw, de quibus u. supra; de Ambrosiano et Parisino 2367 infra dicetur). codicem V secutus sum, ubicumque fieri poterat. sed cum p. 276, 14—18; 278, 12—15; 280, 9—302, 4 manus recentior saeculi, ut uidetur, XV suppleuerit in V, hac in parte codicem v sequendum esse duxi; V enim hic ad p ita adcedit, ut si non omnes (p. 280, 13, 18, 19; 282, 1, 4, 7, 8, 10, 11, 14, 24; 284, 7, 14, 16, 18, 19, 21, 22, 24; 286, 1, 2, 12, 25; 288, 6; 290, 3, 5, 19; 292, 3, 19; 294, 1, 2, 11; 298, 27; 300, 4, 5, 7, 11, 16, 20), at tamen plurimas eius mutationes praebeat, quarum nonnullae tales sunt, quales in p pro certo interpolationi tribuendae sint a manu prima codicis V prorsus alienae (p. 278, 12—p. 282, 18; 284, 7; 286, 17; 288, 15; 290, 12; 294, 2; 296, 11; 298, 27; 302, 4—p. 284, 2; 286, 11; 290, 10; 294, 14, 15); cfr. praeterea p. 276, 15; 282, 5; 284, 24; 286, 5, 12, 14, 15, 26; 288, 6, 8, 11, 20, 21, 23; 290, 6, 11; 292, 13, 14; 294, 11, 13, 21; 296, 3; 298, 6, 12, 20, 25; 300, 2, 10, 17, 18; 302, 1, coniecturae prauae p. 294, 21; 298, 13, errores communes p. 286, 13; 292, 16; 294, 16; 300, 21—22. non pauca meliora habent quam v (p. 282, 2, 5, 23; 286, 4, 10, 25; 288, 8, 10; 290, 5; 292, 1, 4, 6, 7, 11; 294, 9; 296, 14, 20; 298, 9, 14, 20; 300, 3). ceterum uterque sua habet uitia (de p u. supra et p. 296, 4, de V cfr. p. 284, 7, 23; 298, 5 et interpolationes ei propriae p. 290, 12; 292, 12, 13, 14; 302, 3 et praeterea p. 296, 4). communes codicum Vvp errores sunt p. 292, 17; 296, 15, 22; 298, 21. w hic quoque inutilis est; nam e V descriptus est post supplementa manus tertiae addita, quorum scripturas summa fide, ut solet, refert.

Iam de ceteris codicibus uideamus.

cod. Ambrosianus A 101 sup. (u. Apollon. II p. XII) e p descriptus est (u. ib. p. XXI), sed antequam ultima folia perierunt; nam libellum de sectione cylindri integrum habet (p. 116, 8 τῆς τοῦ om.). idem de cod. Upsalensi 50 ualet (Apollon. II p. XIV, XXI). e reliquis codicibus Apollonianis, quos in ed. Apollonii II p. XII sqq. enumeraui, Serenum continent Marcianus 518, Taurinensis B I 14, Scorialensis *X*—I—7, Parisinus 2357, Uindobonensis suppl. gr. 9, Monacenses 76 et 576, Norimbergensis cent. V app. 6, Berolinensis Meermannianus 1545, Upsalensis 48, quorum stemma in ed. Apollon. II p. XVI sqq. hoc effeci



adcedunt Serenum uel solum continentes uel cum aliis mathematicis sine Apollonio hi:

cod. Paris. gr. 2358, chartac. saec. XVI (Omont II p. 245); continet fol. 33—57^{r} Serenum de sectione cylindri, fol. 57^{r}—94 de sectione coni; e v descriptus est (u. Apollon. II p. VI). tituli sunt σερήνου ἀντισσέως πλατωνικοῦ φιλοσόφου περὶ κυλίνδρου τομῆς βιβλίον ᾱ^{ον} et σερήνου ἀντισσέως περὶ κώνου τομῆς β̄, in fine τῶν σερήνου κωνικῶν τέλος; ultima propositio est ξς′ ut in v m. rec.

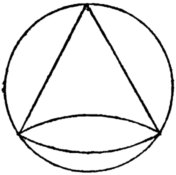
cod. Paris. gr. 2363, chartac. saec. XV (Omont II p. 246 sq.); fol. 129—140^{r} Serenum habet de sectione coni (non cylindri) usque ad p. 224, 12. e titulo *σερήνου ἀντινσέως φιλοσόφου περὶ κυλίνδρου* (del. alia manus et *κώνου* supra scripsit atramento nigro) *τομῆς* adparet, eum a V pendere, cuius subscriptio libelli de sectione cylindri (u. p. 166) pro titulo libri insequentis accepta est, sicut etiam in w factum esse uidemus.1) cum neque e v neque e w recentiore descriptus esse possit, sine dubio ipsius V apographum est. prior pars codicis e Parisino 2472 sumpta est (Euclidis opp. VII p. XXII). Serenum sequitur post interuallum paruum haec nota: *πῶς ἔχοντες δεδομένην εὐθεῖαν ληψόμεθα τὴν περιφέρειαν, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει; λαμβάνομεν τὴν ἔγγιστα ἐλάττονα τῆς ὑποκειμένης εὐθεῖαν καὶ τὴν ἔγγιστα μείζονα καὶ ἐκτίθεμεν ἰδίως τὴν τούτων ὑπεροχήν· εἶτα ἐκτίθεμεν τὴν ὑπεροχὴν τῶν περιφερειῶν* (*περιφερ-* e corr.), *ὑφ᾽ ἃς ὑποτείνουσιν, εἶτα τὴν ὑπεροχὴν τῆς ὑποκειμένης εὐθείας πρὸς τὴν ἔγγιστα ἐλάττονα αὐτῆς, καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὴν ἐπὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν περιφερειῶν* (*περιφερ-* supra scr.) *καὶ τὸν γινόμενον ἀριθμὸν μερίζομεν παρὰ τὴν ὑπεροχὴν τῆς μείζονος καὶ ἐλάττονος τῶν εὐθειῶν καὶ τὸν γινόμενον ἀριθμὸν προστίθεμεν τῇ ἐλάττονι περιφερείᾳ.*

cod. Paris. gr. 2367, chartac. saec. XVI (Omont II p. 248). continet Serenum de sectione cylindri fol. 1—29^r, de sectione coni fol. 29^r—69. fol. 1 mg. sup. legitur „1510 mantuæ Andreę Coneri“; mg. inf.

---

1) In w tituli sunt *σερήνου ἀντινσέως φιλοσόφου περὶ κυλίνδρου τομῆς* in utroque libello, et mg. sup. legitur in priore *βιβλίον α̅*, in altero *βιβλίον β̅*. in V fol. 193^u desinit in *ὁ περὶ τού-* p. 116, 12, deinde fol. 194^r sequitur *-των λόγος* cum subscriptione et ornamento finali; in eadem pagina incipit libellus de sectione coni sine titulo, unde causa erroris adparet. Deuarius correctiones suas (p. 116 not.) e w petiuit, ut solet.

figura inuenitur, quam adposuimus, conum repraesentans nigrum in sphaera lutea inscriptum; quae figura cum etiam in cod. Ottobon. lat. 1850 exstet, qui et ipse Andreae Coneri fuit (u. Abhandl. z. Gesch. d. Math. V p. 3), signum est ex libris quod uocatur illius uiri mathematici mihi ignoti ad nomen eius adludens. tituli sunt *σερήνου ἀντισέως περὶ κυλίνδρου τομῆς* et *σερήνου ἀντισέως περὶ* cum lacuna. sine dubio ex ipso V descriptus est; desinit enim in *τὴν Θ βάσιν* p. 302, 4, ut Vw soli, nec a w pendet, quoniam in priore libello *λη′* propositiones numerat, w autem *λϛ′*, in altero primas *μδ′* solas numeris signat, cum w ad *ξε′* progrediatur. sed totus codex correctus est ab homine non imperito, sed audaciore.



Alia subsidia praeter codices pauca adsunt, inter quae, ut solet, longe primum locum obtinet Commandinus (Comm., h. e. Sereni Antinsensis philosophi libri duo, unus de sectione cylindri, alter de sectione coni, a Federico Commandino Urbinate e Graeco conuersi et commentariis illustrati, Bononiae 1566 fol., repetita Pistorii 1696), qui multos errores tacite sustulit; habuit codicem Marcianum (u. Apollon. II p. LXXXIII). partes utriusque operis interpretatus est Georgius Ualla De expet. et fug. rebus XIII, 4. interpretationem Marini Ghetaldi (Uenetiis 1607) non uidi. Nizzius (Serenus von Antissa über den Schnitt des Cylinders, Stralsund 1860, Ueber den Schnitt des Kegels, ibid. 1861), qui editionem parabat collationesque codicum Monacensium et Norimbergensis habuit

(1860 p. 2), in interpretationibus germanicis rem criticam non curat.

restat editio et princeps et ad hunc diem sola Halleii (cum Apollonio Oxonii 1710 fol.), qui in praefatione p. III haec habet de subsidiis suis: „ob argumenti autem affinitatem Sereni libros duos de Sectione Cylindri et Coni publico donare haud gravatus sum jam primum Graece impressos, quos e Codicibus tribus Bibliothecæ Regiæ Parisiensis sui in usum describi curaverat vir doctissimus Henricus Aldrichius S. T. P.[1]) Ædis Christi Decanus mihique, ut simul cum Apollonio lucem aspicerent, perhumaniter impertiit. in his omnibus evulgandis industriam haud levem et diligentiam adhibui, mecum (quod fateri non piget) summopere adnitente D. Joanne Hudsono Bibliothecæ Bodlejanæ Præfecto manumque auxiliarem (prout in Euclide fecerat) non invito porrigente.“ inter Parisienses tres erat et cod. 2367, cuius coniecturae falsae saepius receptae sunt (uelut p. 22, 15; 24, 3; 32, 15), et p, cuius uestigia certa deprehendimus p. 40, 1, 5; 76, 15; 180, 1. paucas emendationes certas, quae Commandinum fugerant — eum quoque ab Halleio usurpatum esse, adparet ex p. 252, 22, ubi additamentum ab eo fol. 28^{u} in notis propositum recepit; cum eodem p. 252, 16, 23 *ἡ μὲν ΕΔ τῇ ΔΓ* et *δέ* omisit —, ex Halleio recepi, nonnullas non prorsus improbabiles commemoraui; ut adparatum criticum omnibus scripturis uariantibus editionis Halleianae

---

[1]) Ad hunc uirum misit Sereni libellos „nunc primum Graece et Latine ex suo exemplari manuscripto editos“.

onerarem, quae plerumque mutandi libidini temerariae debentur, ne hic quidem a me impetrare potui.

II.

Iam si quaerimus, qua fide nobis tradita sint haec opuscula, de librariis non est quod magnopere queramur; errores communes codicum (qui quidem in cp non correcti sint) nec multi sunt nec graues (p. 4, 10; 26, 14; 48, 25; 50, 29; 58, 12; 66, 13; 70, 22; 84, 19; 92, 6; 94, 17; 128, 26; 158, 29; 160, 6, 18; 188, 16; 200, 2, 22; 222, 25; 232, 17, 19; 236, 1; 238, 24; 250, 12; 260, 3; in litteris figurarum p. 22, 12; 54, 24; 56, 24; 76, 5; 88, 4; 126, 7; 140, 3; 160, 23; 166, 11; 170, 23; 180, 3; 208, 2; 212, 9; 214, 22; 234, 7; 236, 4; 268, 23; 280, 7; uerba omissa p. 8, 16; 52, 13; 92, 12; 162, 10; 212, 28; 220, 3; 250, 19). interpolatione uero, solita labe operum mathematicorum Graecorum, ne Serenus quidem caret. certa est in minoribus p. 206, 16; 212, 1 (de p. 272, 7 u. infra), aliquanto maior p. 298, 8 (cfr. scholium additum in V p. 252, 22); de figuris additis u. notae p. 155, 179, 235, 243 (cfr. p. 21). praeterea uerba p. 44, 18 *τὸ ἄϱα* — 19 *ΘΛ* suspecta sunt, quia post prop. XIII prorsus sunt inutilia. nec deest suspicio de demonstratione altera p. 256, 13 sqq. interpolata cum ob genus uniuersum (u. Euclidis opp. V p. LXXIX) tum propter locutionem insolitam *κοινῆς ἀϱϑείσης* p. 258, 8; 260, 4; tota praeterea demonstrationis forma uerbosior est et ad rationem elementarem propius adcedit quam pro more Sereni.

difficilis quaestio est de propositionibus numerandis; cum enim in V nulli numeri propositionum sint a manu prima, codicum auctoritas hac in re nulla est. cum autem Serenus more mathematicorum recentiorum non raro numeros propositionum indicet, quibus utitur[1]), hinc in propositionibus numerandis proficiscendum est. iam in libello de sectione cylindri praeter propp. 1 (p. 14, 22) et 3 (p. 50, 9; 100, 24) prop. 14 citat p. 48, 7; itaque aut prop. 9 aut 11 Halleii diuidenda est; quarum prior eligenda est et propter p. 32, 11 *ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι* et propter p. 48, 11 *πρὸς τῷ θ′ θεωρήματι* (ad finem prop. 9). Serenus igitur contra rationem diiunxit propp. 9—10, quae re uera partes sunt eiusdem demonstrationis, sicut etiam in codicibus Apollonii factum est (u. Apollon. II p. LXVIII); itaque fortasse etiam prop. 16 in duas diuidenda est (p. 48, 16). de sequentibus nihil constat, nec raro locus est dubitandi (propp. 27—28), etiam propter epilogos p. 58, 8; 96, 10. prop. 25 citatur p. 80, 7 *διὰ τὸ προδειχθέν*, prop. 31 eodem modo p. 112, 18 *διὰ τὸ πρὸ τούτου*; cfr. de prop. 11 p. 38, 17.

in libro de sectione coni praeter propp. 1 (*τὸ πρῶτον λημμάτιον* p. 128, 12) et 5 (p. 134, 20) citationesque nobis inutiles per *διὰ τὸ πρὸ τούτου* p. 142, 2 (prop. 10); 164, 23 (19); 198, 23 (32, cfr. p. 196, 17);

---

[1]) Etiam Apollonii I, 15 hoc numero citat p. 52, 25; 56, 5; sed p. 58, 7 Apollon. I, 20 pro 21, ut Eutocius in Archim. III p. 196, 24; 200, 11 et scholiasta eiusdem III p. 375, 3; itaque in Eutocii editione Conicorum adcessit una propositionum I, 16—19, et scholium illud Archimedis illa editione antiquius est. Apollon. I, 36 indicato libro, sed sine numero propositionis, citatur p. 100, 9, sicut Euclidis Elem. XII, 11 p. 278, 20. praeterea citat definitiones Apollonii p. 6, 6 sqq. et Optica (Euclidis) p. 104, 13.

202,17 (34) uel similia (τὸ πρὸ ἑνός p. 286, 5; 288, 12) citantur propp. 18—19 p. 270, 2. itaque ex propp. 6—17 Halleii una diuidenda erat, quae uix alia esse potest ac prop. 6 (cfr. p. 232, 6 ἑξῆς δειχϑήσεται de prop. 46, p. 266, 7 δείξομεν de 56). hinc simul arguitur interpolatio p. 272, 7, ubi prop. 19 citatur pro 20; ibidem etiam τοῦ πρώτου βιβλίου p. 272, 8 absurdum est; neque enim libellus de sectione coni in duo ab auctore diuisus erat. sed aliud fortasse uestigium eiusdem manus interpolatricis in eo deprehendimus, quod in figuris codicis V propp. 53 ἄλλως, 55, 57, 58, 59, 60 a manu 1 additi sunt numeri ζ, ϑ, ια, ιβ, ιγ, ιδ; librarius igitur aliquis a prop. 47 librum alterum incepisse uidetur; quam mutationem admodum infelicem posteriores rursus neglexerunt (haec fortasse causa est repetitionis in c p. 236, 15). prop. 20 non esse dirimendam, quod credideris, e p. 268, 24 adparet, ubi prop. 21 citatur. ordinatio propp. sequentium usque ad 33 e p. 204, 2 constat; numerus Halleianus quattuor minor est; quare eius propp. 21, 25, 28 in binas diuisi. et hoc confirmatur citatis p. 218, 20; 220, 14 propositionibus 36 et 38. de reliquis nihil adfirmari potest, nisi quod e p. 250, 10 sequitur, propp. 50—51 non coniungendas, e p. 256, 3 et p. 262, 19, propp. 52 et 53 in binas non diiungendas esse. e p. 238, 14 fortasse concludendum, prop. 46 ut lemma proprio numero caruisse (cfr. p. 80, 7). p. 270, 6 (in prop. 57) διὰ τὸ πρὸ τούτου ϑεώρημα error est et fortasse delendum; significatur enim prop. 54, nec prop. 55 spuria esse potest propter p. 270, 25; eius lemma est prop. 56 ab initio fortasse sine numero.

sequitur conspectus numerorum propositionum Halleianorum meorumque.

De sectione cylindri

ed. Halleii def. 1 = 1 ed. meae
2–5 = 2
6—7 = 3
8—10 = 4
11 = 5
12—13 = 6
14—15 = 7—8
prop. 1–8 = 1–8
9 = 9—10
10–25 = 11—26
26–27 = 27
28—30 = 28
31—35 = 29—33.

De sectione coni

ed. Halleii prop. 1—5 = 1—5 ed. meae
6 = 6–7
7—20 = 8–21
21 = 22–23
22–24 = 24—26
25 = 27—28
26—27 = 29—30
28 = 31—32
29—36 = 33—40
37 = 41—42
38–39 = 43—44
40 = 45–46
41–63 = 47—69.

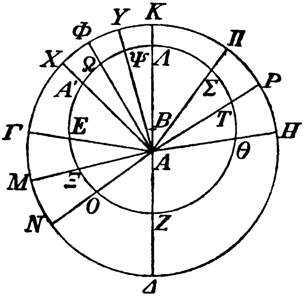
III.

Sereno patriam restituit coniectura facillima (Bibliotheca mathematica 1894 p. 97) *'Αντινοέως* reponens pro corrupto *ἀντινσέως* in subscriptione codicis V p. 116, quod solum habemus testimonium genuinum (*ἀντινέως* p in titulo p. 120). oriundus igitur erat ex Antinoeia siue Antinoupoli urbe Aegypti ab Hadriano condita. qua re magnopere confirmatur suspicio Pauli Tannery de aetate Sereni, qui praeeunte Michaele Chasles (Geschichte der Geometrie p. 44) eum inter Pappum Theonemque posuit, h. e. saeculo IV (Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques 1883). huic tempori optime conuenit et sermo iam ab usu ueterum mathematicorum deflectens (*ἡ Α γωνία* p. 122, 24; 198, 13; *ὁ Α κύκλος* p. 276, 10; 278, 12; cfr. p. 160, 8 et notae p. 155, 165) et res ab eo neque satis subtiliter (u. Halleius p. 68) nec semper recte (u. p. 157 not. 2) tractatae. omnino error, quem in priore opusculo (p. 2, 3 sqq.) impugnat, tum demum oriri potuit, cum Archimedes (*περὶ κωνοειδ.* 9) et Apollonius non iam satis intellegerentur (cfr. p. 52, 25). de Pithone geometra eius amico (p. 96, 14, 22) Cyroque (p. 2, 2; 120, 2) nihil notum.

duo opuscula Sereni sine dubio iam inde a saeculo VII (u. Apollon. II p. LVI) propter rerum adfinitatem cum Eutocii editione Conicorum Apollonii coniungebantur et ita ad nos peruenerunt. cum Apollonio coniunctum eum legit Theodorus Metochita (Sathas, *Μεσαιων. βιβλιοθ.* I p. ϱε′: *'Απολλωνίου τοῦ Περγαίου κωνικὰ .... καὶ Σερήνου κυλινδρικὰ μάλιστ' ἐπονήθη μοι*), fortasse in ipso codice p (Apollon. II p. LXX).

periit commentarius Sereni in Conica Apollonii, quem ipse commemorat p. 52, 26. in codicibus quibusdam Theonis Smyrnaei exstat fragmentum aut inde petitum aut ex alia lemmatum collectione (edidit Th. H. Martin post Theonem Parisiis 1849 p. 340—42, cfr. Hultsch Zeitschrift für Mathem. u. Physik XXIV hist. Abth. p. 41), quod hic subiungimus e cod. Marciano gr. 303 (M) additis scripturis codicis Paris. 1821 (P) apud Martinum Martinique ipsius (m); M ipse contuli Uenetiis 1893.

Σερήνου τοῦ φιλοσόφου ἐκ τῶν λημμάτων.



Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφϑῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ πρὸς αὐτῷ συσταϑῶσιν εὐϑύγραμμοι γωνίαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι, ἡ ἐγγύτερον τοῦ κέντρου ἀεὶ ἐλάσσων τῆς ἀπώτερον τοῦ κέντρου.

ἐὰν οὖν ταύτην τὴν πρότασιν ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῆς ἡλιακῆς ἐκκεντρότητος καὶ ὑποϑώμεϑα κέντρον τοῦ ζῳδιακοῦ τὸ Α, ζῳδιακὸν δὲ τὸν ΓΔΚ, ἡλιακὸν δὲ ἔκκεντρον τὸν ΕΛΖΘ περὶ κέντρον τὸ Β καὶ ἀπο-

---

Fig. om. MP, falsam habet m.

12. *διαμέτρου*] σ÷ο corr. ex σ∹ὄ M, *ἐπιφανείας* m, σ÷ P? 13. *πρός*] addidi, om. MPm. *συσταϑῶσιν*] *συσταϑῶσι* P. 14. *εὐϑύγραμμοι*] m, *εὐϑύγραμμαι* MP. 18. *ἀπώτερον*] *ἀπωτέρω* m. 19. Huc Serenus. 22. *ἐκκεντρότητος*] m, *ἐγκεντρότητος* MP. 25. *ἔκκεντρον*] m, *ἔγκ*ʼ M, *ἔγκον* P? *ΕΛΖΘ*] scribendum *ΕΖΘΛ*. *ἀπολάβωμεν*] Hultsch, *ἀπολάβομεν* MP, *ὑπολάβωμεν* m.

λάβωμεν ἴσας περιφερείας τοῦ ἐκκέντρου τὰς ΨΩ, ΩΑ′, ἔσται ἡ ὑπὸ ΨΑΩ γωνία ἐλάσσων τῆς ὑπὸ ΩΑ′Α· ὥστε καὶ ἡ ΥΦ περιφέρεια τῆς ΧΦ περιφερείας ἐλάσσων ἔσται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καί, ἐὰν ἴσας ἀλλήλαις θῶμεν τὰς ΕΞ, ΞΟ, ἐλάσσων ἔσται ἡ ΓΜ τῆς ΜΝ. ἔτι δὲ καὶ ἴσων οὐσῶν τῶν ΣΤ, ΤΘ ἐλάσσων ἔσται ἡ ΠΡ τῆς ΡΗ. καὶ καθόλου περὶ μὲν τὴν ΕΞΟ περιφέρειαν κινούμενος ὁ ἥλιος, φαινόμενος δὲ ἐπὶ τῆς ΓΜΝ περιφερείας, ἀπὸ τῶν ἐλαχίστων ἐπὶ τὰ μέγιστα κινηθήσεται, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Λ ἐρχόμενος δόξει ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Κ καὶ ἔσται ἀπὸ τῶν μεγίστων ἐπὶ τὰ ἐλάχιστα κινούμενος.

---

1. *ἐκκέντρου*] $\overline{\varepsilon\kappa}\kappa^{\smile}$ M. *ΩΑ′*] scripsi, $\overline{\nu\alpha}$ MP, *γω* m (qui inter *Γ* et *γ* distinguit, *Γ* = *Γ*, *γ* = *Α′*). 2. *ΩΑ′Α*] $\overline{\omega\gamma\alpha}$ M, $\overline{\omega\gamma\alpha}$ P, *ωαγ* m. 3. *ΥΦ*] m, $\overline{\nu\varphi}$ MP. *ἐλάσσων*] scripsi, *καί* MPm. 4. *διά*] scripsi, *δή* MPm. *δή*] om. m. *ἴσας*] m, bis MP. *ἀλλήλαις*] m, *ἀλλήλοις* MP. 5. *ἐλάσσων*] *καί* MPm. 6. *ἐλάσσων*] *καί* MPm. 7. *ΕΞΟ*] m, $\overline{\varepsilon\xi}$ $\xi\overline{o}$ MP.

Scr. Hauniae mense Decembri MDCCCXCV.

I. L. Heiberg.

DE SECTIONE CYLINDRI.

ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΤΟΜΗΣ.

Πολλοὺς ὁρῶν, ὦ φίλε Κῦρε, τῶν περὶ γεωμετρίαν ἀναστρεφομένων οἰομένους τὴν τοῦ κυλίνδρου πλαγίαν τομὴν ἑτέραν εἶναι τῆς τοῦ κώνου τομῆς τῆς καλουμένης ἐλλείψεως ἐδικαίωσα μὴ χρῆναι περιορᾶν ἀγνοοῦντας αὐτούς τε καὶ τοὺς ὑπ᾽ αὐτῶν οὕτω φρονεῖν ἀναπεπεισμένους· καίτοι δόξειεν ἂν παντὶ ἄλογον εἶναι γεωμέτρας γε ὄντας περὶ γεωμετρικοῦ προβλήματος ἄνευ ἀποδείξεως ἀποφαίνεσθαί τι καὶ πιθανολογεῖν ἀτεχνῶς ἀλλότριον γεωμετρίας πρᾶγμα ποιοῦντας. ὅμως δ᾽ οὖν, ἐπείπερ οὕτως ὑπειλήφασιν, ἡμεῖς δὲ οὐ συμφερόμεθα, φέρε γεωμετρικῶς ἀποδείξωμεν, ὅτι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κατ᾽ εἶδος ἀνάγκη γίνεσθαι ἐν ἀμφοτέροις τοῖς σχήμασι τομήν, τῷ κώνῳ λέγω καὶ τῷ κυλίνδρῳ, τοιῶσδε μέντοι ἀλλ᾽ οὐχ ἁπλῶς τεμνομένοις.

ὥσπερ δὲ οἱ τὰ κωνικὰ πραγματευσάμενοι τῶν παλαιῶν οὐκ ἠρκέσθησαν τῇ κοινῇ ἐννοίᾳ τοῦ κώνου, ὅτι τριγώνου περιενεχθέντος ὀρθογωνίου συνίσταιτο, περισσότερον δὲ καὶ καθολικώτερον ἐφιλοτεχνήσαντο μὴ μόνον ὀρθούς, ἀλλὰ καὶ σκαληνοὺς ὑποστησάμενοι κώνους, οὕτω χρὴ καὶ ἡμᾶς, ἐπειδὴ πρόκειται περὶ κυλίνδρου τομῆς ἐπισκέψασθαι, μὴ τὸν ὀρθὸν μόνον ἀφορίσαντας ἐπ᾽ αὐτοῦ ποιεῖσθαι τὴν σκέψιν, ἀλλὰ καὶ

---

1. *ΠΕΡΙ*] *Σερήνου περί* V v p. *ΠΕΡΙ — ΤΟΜΗΣ*] om. c. 2. *Πολλούς*] *ολλούς* c. 6. *τε*] om. p. 11. *ὅμως*] p,

DE SECTIONE CYLINDRI.

Cum uiderem, Cyre amice, multos eorum, qui in geometria uersarentur, sectionem transuersam cylindri a sectione coni, quae ellipsis uocatur, diuersam esse putare, censui non oportere eos in hoc errore esse sinere et ipsos et quibus persuasissent, ut ita sentirent. quamquam cuiuis absurdum uideri necesse est, geometras de geometrico problemate quidquam sine demonstratione pronuntiare similiaque ueri consectari, id quod a geometria maxime abhorreat. sed quidquid id est, quoniam illi ita sentiunt, nos uero non adsentimur, age geometrice demonstremus necesse esse sectionem genere unam eandemque esse in utraque figura, cono dico cylindroque, sed certo quodam modo, non quoquo modo sectis.

sicut autem ueterum qui conica scripserunt, communi notione coni non steterunt, conum oriri triangulo rectangulo circumacto [Eucl. XI def. 18], sed definitionem ampliorem et uniuersaliorem excogitauerunt conos non rectos modo, sed etiam obliquos supponentes [Apollon. con. I p. 6], ita nos quoque, quoniam propositum est, ut de cylindri sectione quaeramus, non rectum solum seligentes in eo quaerere

---

ὁμοίως Vvc; † et in mg. $\overset{τ}{M}$† puto *ὅμως* m. rec. V.   18. *ὀρθογωνίου*] p, *ὀρθογώνῳ* V, *ὀρθογών*^{ω} c.

τὸν σκαληνὸν περιλαβόντας ἐπὶ πλέον ἐκτεῖναι τὴν θεωρίαν. ὅτι μὲν γὰρ οὐκ ἂν προσοῖτό τις ἑτοίμως μὴ οὐχὶ πάντα κύλινδρον ὀρθὸν εἶναι τῆς ἐννοίας τοῦτο συνεφελκούσης, οὐκ ἀγνοῶ δήπουθεν· οὐ μὴν ἀλλ' ἕνεκά γε τῆς θεωρίας ἄμεινον οἶμαι καθολικωτέρῳ ὁρισμῷ περιλαβεῖν, ἐπεὶ καὶ τὴν τομὴν ὀρθοῦ μένοντος αὐτοῦ μόνῃ τῇ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐλλείψει τὴν αὐτὴν εἶναι συμβήσεται, καθολικώτερον δὲ ὑποτεθέντος ὅλῃ τῇ ἐλλείψει καὶ αὐτὴν ἐξισάζειν, ὃ δὴ καὶ δείξειν ὁ παρὼν λόγος ἐπαγγέλλεται. ἰτέον οὖν ἡμῖν ἐπὶ τὸ προκείμενον ὁρισαμένοις τάδε·

ἐὰν μενόντων δύο κύκλων ἴσων τε καὶ παραλλήλων αἱ διάμετροι παράλληλοι οὖσαι διὰ παντὸς αὐταί τε περιενεχθεῖσαι ἐν τοῖς τῶν κύκλων ἐπιπέδοις περὶ μένον τὸ κέντρον καὶ συμπεριενεγκοῦσαι τὴν τὰ πέρατα αὐτῶν κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν εἰς ταὐτὸ πάλιν ἀποκαταστῶσιν, ἡ γραφεῖσα ὑπὸ τῆς περιενεχθείσης εὐθείας ἐπιφάνεια κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια καλείσθω, ἥτις καὶ ἐπ' ἄπειρον αὔξεσθαι δύναται τῆς γραφούσης αὐτὴν εὐθείας ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένης. κύλινδρος δὲ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν παραλλήλων κύκλων καὶ τῆς μεταξὺ αὐτῶν ἀπειλημμένης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. βάσεις δὲ τοῦ κυλίνδρου οἱ κύκλοι. ἄξων δὲ ἡ διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν ἀγομένη εὐθεῖα. πλευρὰ δὲ τοῦ κυλίνδρου γραμμή τις, ἥτις εὐθεῖα οὖσα καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας οὖσα τοῦ κυλίνδρου τῶν βάσεων ἀμφοτέρων ἅπτεται, ἣν καί

---

2. προσοῖτο] Vvpc, ει supra scr. m. rec. V. 3. πάντα] -τα e corr. m. 1 V, παντί v supra scr. α, πάλιν c, τόν p. 8. καθολικωτέρον p. 10. ἰτέον] -τ- e corr. p. ἐπί] scripsi,

oportet, sed comprehendentes etiam obliquum disquisitionem latius extendere. nam neminem facile admissurum esse, non omnem cylindrum rectum esse, notione [Eucl. XI def. 21] hoc secum adducente, equidem certe non ignoro; uerum enimuero disquisitionis causa melius esse puto definitione uti uniuersaliore, quoniam recto eo manente eueniet, ut etiam sectio ellipsi recti coni soli respondeat, uniuersaliore uero supposita definitione, ut et ipsa omni ellipsi respondeat, quod quidem ipsum ut demonstretur, huic libro est propositum. adgrediendum igitur, quod propositum est, his definitis:

1. si manentibus duobus circulis aequalibus parallelisque diametri semper parallelae et ipsae circumactae in planis circulorum circum centrum manens et circumagentes rectam terminos eorum ad easdem partes uersus coniungentem rursus ad idem punctum restituuntur, superficies descripta a recta circumacta superficies cylindrica uocetur, quae in infinitum produci potest recta eam describente in infinitum producta.

2. cylindrus autem figura comprehensa a circulis parallelis et superficie cylindrica inter eos intercepta, bases autem cylindri circuli illi, axis autem recta per centra eorum ducta, latus autem cylindri linea quaedam recta, quae in superficie cylindri posita

---

περί Vvcp, ∴ supra add. m. rec. V, cui signo nunc quidem in mg. nihil respondet. 12. *μενόντων*] scripsi, *μὲν οὖν τῶν* Vc, *τῶν* p. 13. *αὐταί*] *αὗται* V. 19. *ἥτις*] *εἴ τις* c. 21. Post *σχῆμα* del. *τὸ περιε* c. 23. *βάσεις*] p, *βάσις* Vc.

φαμεν περιενεχθεῖσαν γράφειν τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν.

τῶν δὲ κυλίνδρων ὀρθοὶ μὲν οἱ τὸν ἄξονα πρὸς ὀρθὰς ἔχοντες ταῖς βάσεσι, σκαληνοὶ δὲ οἱ μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντες ταῖς βάσεσι τὸν ἄξονα.

ὁριστέον δὲ κατὰ Ἀπολλώνιον καὶ τάδε·

πάσης καμπύλης γραμμῆς ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ οὔσης διάμετρος καλείσθω εὐθεῖά τις, ἥτις ἠγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείας εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ, κορυφὴ δὲ τῆς γραμμῆς τὸ πέρας τῆς εὐθείας τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ, τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

συζυγεῖς δὲ διάμετροι καλείσθωσαν, αἵτινες ἀπὸ τῆς γραμμῆς τεταγμένως ἀχθεῖσαι ἐπὶ τὰς συζυγεῖς διαμέτρους ὁμοίως αὐτὰς τέμνουσι.

τοιούτων δὲ γραμμῶν ὑφισταμένων καὶ ἐν ταῖς πλαγίαις τομαῖς τοῦ κυλίνδρου ἡ διχοτομία τῆς διαμέτρου κέντρον τῆς τομῆς καλείσθω, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν γραμμὴν προσπίπτουσα ἐκ τοῦ κέντρου τῆς γραμμῆς.

ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθεῖσα περατουμένη ὑπὸ τῆς γραμμῆς δευτέρα διάμετρος καλείσθω· δειχθήσεται γὰρ πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν διάμετρον δίχα τέμνουσα.

---

4. σκαληνοί — 5. βάσεσι] om. p. 7. Post γραμμῆς del. τὸ πέρας τῆς εὐθείας c. 9. πάσας — 11. γραμμῆς] p, om. Vc. 10. κορυφήν comp. dubio p. 12. κατῆκται c. 16. δίχα τέμνουσι Halley. 19. ἡ δέ — 24. καλείσθω] mg. m. 1 p (κεί-

utramque basim tangat, quam quidem superficiem cylindricam describere circumactam dicimus.

3. cylindrorum uero recti, qui axem ad bases perpendicularem habent, obliqui autem, qui axem ad bases perpendicularem non habent.

uerum etiam haec secundum Apollonium definienda sunt:

4. omnis lineae curuae, quae in uno plano posita est, diametrus uocetur recta quaedam, quae a linea curua ducta omnes rectas in linea illa rectae alicui parallelas ductas in binas partes aequales secat, uertex autem lineae terminus huius rectae in linea, singulas autem rectas parallelas ad diametrum ordinate ductas esse [Apollon. con. I def. 4].

5. coniugatae autem diametri uocentur, quae a linea ad coniugatas diametros ordinate ductae eodem modo eas secant.1)

6. talibus uero lineis etiam in obliquis sectionibus cylindri ortis punctum medium diametri centrum sectionis uocetur, recta autem a centro ad lineam ducta radius sectionis [Apollon. con. I deff. alt. 1].

7. recta autem a centro sectionis rectae ordinate ductae parallela ducta, quae a linea terminatur, diametrus altera uocetur [Apollon. con. I deff. alt. 3]; demonstrabimus enim, eam omnes rectas in sectione diametro parallelas ductas in binas partes aequales secare.

---

1) Haec definitio nec cum Apollon. con. I def. 6 consentit nec per se satis perspicua est; sed emendationem probabilem non reperio nec adfirmare ausim, Serenum non ita scripsisse.

μενον). 22. *ἡ δὲ διά*] *διὰ δέ* p. 23. *κατηγμένην*] pc, *κατηνεγμένην* Vv. 24. *δευτέρα*] $\beta^{-\alpha}$ p.

ἔτι κἀκεῖνο προδιωρίσϑω, ὅτι ὅμοιαι ἐλλείψεις εἰσίν, ὧν ἑκατέρας αἱ συζυγεῖς διάμετροι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον καὶ πρὸς ἴσας γωνίας τέμνουσιν ἀλλήλας.

α΄.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐϑεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐϑείας ἁπτομένας ἀλλήλων καὶ ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ τὰ πέρατα αὐτῶν ἐπιζευγνύουσαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

ἔστωσαν δύο εὐϑεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΑΒ, ΒΓ παρὰ δύο εὐϑείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἴση ἔστω ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχϑωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ. λέγω, ὅτι αἱ ΑΓ, ΔΖ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

ἐπεζεύχϑωσαν αἱ ΒΕ, ΓΖ, ΑΔ. ἐπεὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι, καὶ ἡ ΒΕ ἄρα . . . . τῇ ΓΖ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι. καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ὃ προέκειτο δεῖξαι.

β΄.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηϑῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἡ τομὴ παραλληλόγραμμον ἔσται.

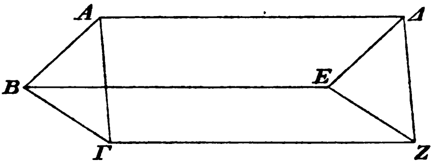
---

1. ὅμοιαι] pc, ὅμαιαι Vv, mg. γρ. † ὅμοιαι m. rec. V. 2. συζυγεῖς] vcp, euan. V, repet. mg. m. rec. 5. α΄] p, om. Vc. 8. αὐταί] αὗται Vcp. 13. *ΕΖ* — 14. εἰσιν] mg. p (κείμενον); in textu deinde del. *ΕΖ* καί. 13. *ΕΖ*] *ΖΕ* p. 15. *ΑΔ*, *ΒΕ*, *ΓΖ* p. ἐπεί] ἐπεὶ οὖν p. 16. τε] τέ ἐστι p. ἐστι] om. p. Post ἄρα exciderunt haec fere: τῇ *ΑΔ* ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἡ *ΒΓ* τῇ *ΕΖ* ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι, καὶ ἡ *ΒΕ* ἄρα τῇ *ΓΖ* ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι. καὶ ἡ *ΑΔ* ἄρα. 17. *ΓΖ*] Vc, *ΑΔ* p. ἐστι] διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ *ΓΖ* τῇ *ΒΕ* ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· αἱ *ΑΔ* ἄρα *ΓΖ* ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι p. 18. τε] εἰσίν p. εἰσιν — δεῖξαι] om. p. 19. β΄] p, m. rec. V, om. vc.

8. praeterea haec quoque definitio praemittenda, **similes** ellipses esse, quarum utriusque diametri coniugatae inter se eandem rationem habeant et ad aequales angulos inter se secent.

I.

Si duae rectae inter se tangentes duabus rectis inter se tangentibus, quarum utraque utrique est aequalis, parallelae sunt, rectae terminos earum coniungentes et ipsae aequales sunt et parallelae.



sint duae rectae inter se tangentes AB, $B\Gamma$ duabus rectis inter se tangentibus ΔE, EZ parallelae, et sit $AB = \Delta E$, $B\Gamma = EZ$, ducanturque $A\Gamma$, ΔZ. dico, rectas $A\Gamma$, ΔZ aequales et parallelas esse.

ducantur BE, ΓZ, $A\Delta$. quoniam AB rectae ΔE aequalis est et parallela, erit etiam [Eucl. I, 33] BE rectae $A\Delta$ aequalis et parallela. et quoniam $B\Gamma$ rectae EZ aequalis est et parallela, erit etiam BE rectae ΓZ aequalis et parallela. quare [Eucl. I, 30] $A\Delta$ rectae ΓZ aequalis est et parallela. ergo etiam [Eucl. I, 33] $A\Gamma$, ΔZ aequales et parallelae; quod erat demonstrandum.

II.

Si cylindrus plano per axem secatur, sectio parallelogrammum erit.

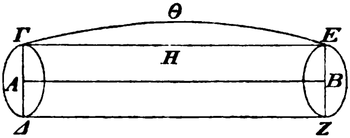
ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ τὰ *Α*, *Β* κέντρα κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ *ΑΒ* εὐϑεῖα, καὶ διὰ τῆς *ΑΒ* ἐκβεβλήσϑω ἐπίπεδον τέμνον τὸν κύλινδρον· ποιήσει δὴ ἐν μὲν τοῖς κύκλοις εὐϑείας τὰς *ΓΔ*, *ΕΖ* διαμέτρους οὔσας, ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὰς *ΕΗΓ*, *ΖΔ* γραμμάς. λέγω, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν *ΕΗΓ*, *ΔΖ* γραμμῶν εὐϑεῖά ἐστιν.

εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ ἔστωσαν εὐϑεῖαι, καὶ ἐπεζεύχϑω ἡ *ΕΘΓ* εὐϑεῖα. ἐπεὶ οὖν ἡ *ΕΗΓ* γραμμὴ καὶ ἡ *ΕΘΓ* εὐϑεῖα ἐν τῷ *ΕΔ* ἐπιπέδῳ εἰσὶ συνάπτουσαι κατὰ τὰ *Ε*, *Γ* σημεῖα, καί ἐστιν ἡ *ΕΗΓ* γραμμὴ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας, ἡ *ΕΘΓ* ἄρα εὐϑεῖα οὐκ ἔστιν ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. ἐπεὶ οὖν οἱ *Α*, *Β* κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοί εἰσι καὶ τέμνονται ὑπὸ τοῦ *ΕΔ* ἐπιπέδου, αἱ ἄρα κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· διάμετροι γάρ εἰσιν ἴσων κύκλων· ἐὰν ἄρα μενόντων τῶν *Α*, *Β* σημείων τὰς *ΑΓ*, *ΒΕ* διαμέτρους νοήσωμεν περιενεγκούσας τὴν *ΕΘΓ* εὐϑεῖαν περὶ τοὺς *Α*, *Β* κύκλους καὶ ἀποκαϑισταμένας, ἡ *ΕΘΓ* εὐϑεῖα γράψει τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, καὶ ἔσται τὸ *Θ* ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. ἦν δὲ ἐκτός· ὅπερ ἀδύνατον. εὐϑεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ *ΕΗΓ*. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ *ΖΔ*. καὶ ἐπιζευγνύουσιν ἴσας τε καὶ παραλλήλους τὰς *ΕΖ*, *ΓΔ*· τὸ *ΕΔ* ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1. βάσεις] corr. ex βάσις p, βάσις Vvc. 2. τῆς] τοῦ c. 3. *ΑΒ*] *ΑΒ* εὐϑείας p. 6. *ΕΗΓ*, *ΖΔ*] *ΓΗΕ*, *ΔΖ* p. 7. *ΕΗΓ*] *ΓΗΕ* p. 9. *ΕΘΓ* (pr.)] *ΓΘΕ* p. *ΕΗΓ*] *ΓΗΕ* p. *ΕΘΓ* (alt.)] *ΓΘΕ* εὐϑεῖαι p. 10. *ΕΔ*] corr. ex *ΕΘ* m. 1 c. 11. *ΕΗΓ*] *ΓΗΕ* p. 12. *ΕΘΓ*] *ΓΘΕ* p. 18. *ΕΘΓ*] *ΓΘΕ* p. 20. *ΕΘΓ*] *ΓΘΕ* p. 22. *ΕΗΓ*] *ΓΗΕ*, *Ε* e corr., p. 23. *ΖΔ*] *ΔΖ* p. ἐπιζευγνύουσισ V,

sit cylindrus, cuius bases sint circuli circum *Α*, *Β* centra descripti, axis autem recta *ΑΒ*, et per *ΑΒ* planum ducatur cylindrum secans; efficiet igitur in circulis rectas *ΓΔ*, *ΕΖ*, quae diametri sunt, in superficie autem cylindri lineas *ΕΗΓ*, *ΖΔ*. dico, utramque lineam *ΕΗΓ*, *ΔΖ* rectam esse.



nam si fieri potest, ne sint rectae, ducaturque recta *ΕΘΓ*. quoniam igitur linea *ΕΗΓ* et recta *ΕΘΓ* in plano *ΕΔ* positae sunt in punctis *Ε*, *Γ* concurrentes, et linea *ΕΗΓ* in superficie cylindri posita est, recta *ΕΘΓ* in superficie cylindri posita non est. quoniam igitur circuli *Α*, *Β* et aequales et paralleli sunt secanturque a plano *ΕΔ*, communes eorum sectiones parallelae sunt [Eucl. XI, 16]. uerum etiam aequales sunt; sunt enim aequalium circulorum diametri. itaque si manentibus punctis *Α*, *Β* diametros *ΑΓ*, *ΒΕ* finxerimus rectam *ΕΘΓ* per circulos *Α*, *Β* circumagentes et rursus restitutas, recta *ΕΘΓ* superficiem cylindri describet [def. 1], et punctum *Θ* in superficie erit. at extra positum erat; quod fieri non potest. itaque *ΕΗΓ* recta est. similiter autem etiam *ΖΔ*. et rectas *ΕΖ*, *ΓΔ* aequales et parallelas iungunt. ergo *ΕΔ* parallelogrammum est [Eucl. I, 33]; quod erat demonstrandum.

ἐπιζευγνυούσης v. 24. *ΕΖ*, *ΓΔ*] *ΓΔ*, *ΕΖ* p. *ΕΔ*] *ΓΖ* p. 25. ὅπερ ἔδει] om. p. δεῖξαι] vc, ξαι V, om. p. Seq. ἑξῆς τὸ σχῆμα Vv (fig. in mg. est).

γʹ.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμῳ, ἡ τομὴ παραλληλόγραμμον ἔσται ἴσας γωνίας ἔχον τῷ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμῳ.

ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ τὰ **Α**, **Β** κέντρα κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ **ΑΒ** εὐθεῖα, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ **ΓΔ**, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν **Ε**, **Ζ**, **Η**, **Θ** παραλλήλῳ ὄντι τῷ **ΓΔ** παραλληλογράμμῳ καὶ ποιοῦντι τομὰς ἐν μὲν ταῖς βάσεσι τὰς **ΕΖ**, **ΗΘ** εὐθείας, ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὰς **ΕΗ**, **ΖΘ** γραμμάς. λέγω, ὅτι τὸ **ΕΗΖΘ** σχῆμα παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἰσογώνιον τῷ **ΓΔ**.

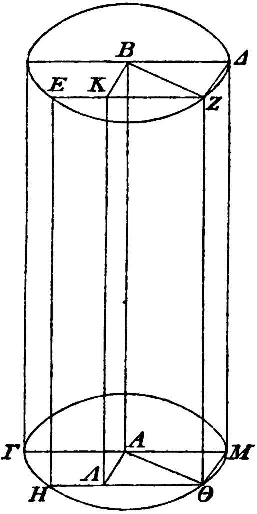
ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Β** κέντρου ἐπὶ τὴν **ΕΖ** εὐθεῖαν κάθετος ἡ **ΒΚ**, καὶ διὰ τῶν **ΚΒ**, **ΒΑ** διεκβεβλήσθω ἐπίπεδον, καὶ ἔστωσαν κοιναὶ τομαὶ αἱ **ΑΛ**, **ΚΛ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΒΖ**, **ΑΘ**. ἐπεὶ οὖν παράλληλος ὁ μὲν **Α** κύκλος τῷ **Β**, τὸ δὲ **ΕΘ** ἐπίπεδον τῷ **ΓΔ** ἐπιπέδῳ, καὶ τέμνεται ὑπὸ τοῦ **ΑΒΚΛ** ἐπιπέδου, παράλληλος ἄρα ἡ μὲν **ΑΛ** τῇ **ΒΚ**, ἡ δὲ **ΚΛ** τῇ **ΒΑ**· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΚΑ**· ἴση ἄρα ἡ μὲν **ΚΛ** τῇ **ΒΑ**, ἡ δὲ **ΒΚ** τῇ **ΑΛ**. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν **ΒΚ**

---

1. γʹ] p, m. rec. V, om. vc (et sic deinceps). 2. παραλλήλῳ] mut. in παραλληλο$^{\gamma\rho}$ m. 2 p. τῷ] τῷ τοῦ c. 3. παραλληλογράμμῳ] $\overset{\rho\omega}{\ddagger}$, ut saepe, p. 6. βάσις Vc. τά] p, τό Vc. 7. κέντρα] p, κέντρον Vc. 9. Ε, Ζ, Η, Θ] ΗΘΕΖ p. 11. ΕΖ, ΗΘ] ΗΘ, ΕΖ p. 12. ΕΗ, ΖΘ] ΗΕ, ΘΖ p. 13. ΕΗΖΘ] ΕΗΘΖ p. 18. ΒΖ, ΑΘ] ΑΘ, ΒΖ p. ὁ] ἐστιν ὁ p. 21. ἄρα] ἄρα ἐστίν p. ΒΚ] vp, mg. m. 1 V (Β euan.); ΚΛ c, et add. ∵ V. 22. ΚΑ] ΑΚ p. ἄρα] ἄρα ἐστίν p.

III.

Si cylindrus plano secatur parallelogrammo per axem ducto parallelo, sectio parallelogrammum erit parallelogrammo per axem ducto aequiangulum.



sit cylindrus, cuius bases sint circuli circum centra A, B descripti, axis autem recta AB, $\Gamma\Delta$ autem parallelogrammum per axem ductum, et cylindrus alio plano per E, Z, H, Θ secetur parallelogrammo $\Gamma\Delta$ parallelo et sectiones efficienti in basibus rectas EZ, $H\Theta$, in superficie autem cylindri lineas EH, $Z\Theta$. dico, figuram $EHZ\Theta$ parallelogrammum esse parallelogrammo $\Gamma\Delta$ aequiangulum.

ducatur a B centro ad rectam EZ perpendicularis BK, et per KB, BA planum ducatur, sintque communes sectiones $A\Lambda$, $K\Lambda$, et ducatur BZ, $A\Theta$. quoniam igitur circuli A, B paralleli sunt, et plana $E\Theta$, $\Gamma\Delta$ parallela secanturque plano $ABK\Lambda$, parallelae erunt $A\Lambda$, BK et $K\Lambda$, BA [Eucl. XI, 16]; itaque KA parallelogrammum est; quare $K\Lambda = BA$, $BK = A\Lambda$ [Eucl. I, 34]. et quoniam BK, $A\Lambda$ et KZ, $\Lambda\Theta$ [Eucl. XI, 16] parallelae sunt, erit etiam [Eucl. XI, 10]

$$\angle BKZ = A\Lambda\Theta.$$

---

23. KA] Halley, $K\Lambda$ Vcv, ΛK p. τῇ (pr.)] bis c. BA] AB p. BK τῇ $A\Lambda$ (utrumque)] $A\Lambda$ τῇ BK p.

τῇ ΑΛ παράλληλός ἐστιν, ἡ δὲ ΚΖ τῇ ΛΘ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΚΖ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΛΘ ἴση ἐστί. καί ἐστιν ἡ ΒΚ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΖ· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΛΘ. καί εἰσιν ἴσαι· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ΕΖ, ΗΘ· ἀλλὰ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΖ τῇ ΑΘ παράλληλός ἐστι, τὸ ἄρα διὰ τῆς ΒΖ καὶ τοῦ ἄξονος ἀγόμενον ἐπίπεδον ἥξει καὶ διὰ τῆς ΑΘ καὶ τομὴν ποιήσει παραλληλόγραμμον, καὶ πλευρὰ αὐτοῦ ἔσται ἡ τὰ Ζ, Θ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας οὖσα τοῦ κυλίνδρου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΘ πλευρὰ τοῦ ΕΖΗΘ σχήματος ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· κοινὴ ἄρα πλευρά ἐστι τοῦ τε διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου καὶ τοῦ ΕΗΖΘ σχήματος. εὐθεῖα δὲ ἐδείχθη ἡ πλευρὰ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου· ἡ ΘΖ ἄρα ἐστὶν εὐθεῖα. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΕΗ. καὶ ἐπιζευγνύουσιν ἴσας καὶ παραλλήλους τὰς ΕΖ, ΗΘ· τὸ ΕΘ ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστι.

λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιον τῷ ΓΔ.

ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ ΔΒ, ΒΖ δυσὶ ταῖς ΜΑ, ΑΘ παράλληλοί εἰσι, καί εἰσιν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἴσαι, καὶ αἱ ΖΔ, ΜΘ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα. καὶ αἱ ΖΘ, ΔΜ ἄρα καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΑΜ παράλληλος. ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΘΖ γωνία τοῦ ΕΘ παραλληλογράμμου τῇ ὑπὸ ΓΜΔ γωνίᾳ τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΕΘ τῷ ΓΔ.

---

1. ΚΖ τῇ ΛΘ] ΛΘ τῇ ΚΖ p. 2. ΒΚΖ] ΑΛΘ p. γωνία] om. p. ΑΛΘ] ΒΚΖ γωνίᾳ p. 3. ΒΚ] vcp, Β e corr. m. 1 V. 6. ΒΖ (pr.)] ΑΘ p. ΑΘ] ΒΖ p. 9. Ζ, Θ] Θ, Ζ p. 10. ΖΘ] ΘΖ p. 11. ΕΖΗΘ] ΗΘ e corr. p. 13. ΕΗΖΘ] ΕΘΖ p. 15. εὐθεῖά ἐστιν p. 16. ΕΗ] corr. ex

et BK ad KZ perpendicularis est; itaque etiam $A\Delta$ ad $\Delta\Theta$ perpendicularis est. et sunt aequales; itaque etiam EZ, $H\Theta$ aequales sunt [Eucl. III, 14]; uerum etiam parallelae [Eucl. XI, 16]. et quoniam BZ, $A\Theta$ parallelae sunt [id.], planum per BZ axemque ductum etiam per $\Delta\Theta$ ueniet sectionemque efficiet parallelogrammum, et latus eius erit recta, quae in superficie cylindri posita Z, Θ puncta coniungit [def. 2]. uerum etiam $Z\Theta$ latus figurae $EZH\Theta$ in superficie cylindri positum est; itaque latus est commune parallelogrammi per axem ducti figuraeque $EHZ\Theta$. demonstrauimus autem, latus parallelogrammi per axem ducti rectam esse [prop. II]; itaque ΘZ recta est. similiter autem etiam EH. et EZ, $H\Theta$ rectas aequales et parallelas iungunt; ergo $E\Theta$ parallelogrammum est [Eucl. I, 33].

dico, idem parallelogrammo $\Gamma\Delta$ aequiangulum esse.

quoniam enim duae rectae ΔB, BZ duabus rectis MA, $A\Theta$ parallelae sunt, et quattuor illae rectae aequales sunt, etiam $Z\Delta$, $M\Theta$ aequales sunt et parallelae propter prop. I. quare etiam $Z\Theta$, ΔM et ipsae aequales sunt et parallelae [Eucl. I, 33]. uerum etiam $A\Theta$, AM parallelae sunt. itaque [Eucl. XI, 10] angulus $\Delta\Theta Z$ parallelogrammi $E\Theta$ angulo $\Gamma M\Delta$ parallelogrammi $\Gamma\Delta$ aequalis est. ergo $E\Theta$ parallelogrammo $\Gamma\Delta$ aequiangulum est.

EZ m. 1 V, sed obscure; EZ vc, HE p. 17. EZ, $H\Theta$] $H\Theta$, EZ p. 19. ΔB, BZ] MA, $A\Theta$ p. MA, $A\Theta$] ΔB, BZ p. 21. $M\Theta$] ΘM p. εἰσι — 23. παράλληλοί] om. c (hab. v). 22. $Z\Theta$, ΔM] ΘZ, $M\Delta$ p. αὐταί] αὗται Vp. 26. ἄρα] ἄρα ἐστί p. τὸ $E\Theta$] Halley cum Comm., τῷ ϑ̄ Vc, τὸ ΘE p. τῷ] p, τό Vc.

δʹ.

Ἐὰν καμπύλην γραμμὴν ὑποτείνῃ εὐθεῖα, αἱ δὲ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν κάθετοι ἴσον δύνωνται τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης, ἡ γραμμὴ κύκλου περιφέρεια ἔσται.

ἔστω καμπύλη γραμμὴ ἡ ΑΒΔ, ὑποτείνουσα δὲ αὐτὴν ἡ ΑΔ εὐθεῖα, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν ἐπὶ τὴν ΑΔ αἱ ΒΕ, ΓΖ, καὶ ὑποκείσθω τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΖΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΔ κύκλου περιφέρειά ἐστι.

τετμήσθω δίχα ἡ ΑΔ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΒ, ΗΓ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΗΕ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ, ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΗΕ, ΕΒ, ἴση ἄρα ἡ ΒΗ τῇ ΗΔ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΓΗ τῇ ΗΔ ἴση δείκνυται καὶ αἱ ἄλλαι· ἡμικύκλιον ἄρα τὸ ΑΒΔ.

εʹ.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ταῖς βάσεσιν, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

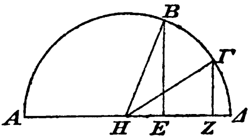
ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ ταῖς βάσεσι ποιοῦντι ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὴν ΓΞΔ γραμμήν. λέγω, ὅτι ἡ ΓΞΔ γραμμὴ κύκλου ἐστὶ περιφέρεια.

---

2. Ante *ἐάν* add. Ἐ mg. m. 1 V. 6. *ΑΒΔ*] *ΑΒΓΔ* p. 10. *ΑΖΔ*] *τῶν ΑΖ, ΖΔ* p. *ΑΒΔ*] *ΑΒΓΔ* p. 12. *ἡ ΑΔ δίχα* p. 15. *τό* (pr.)] p, *τῷ* Vc. *ΒΕ*] *ΕΒ* p. *ΒΗ*]

IV.

Si curuae lineae subtenditur recta, et rectae a linea ad subtensam perpendiculares quadratae aequales sunt rectangulo segmentis subtensae comprehenso, linea circuli arcus erit.



sit curua linea $AB\Delta$, ei autem subtensa recta $A\Delta$, ducanturque ad $A\Delta$ perpendiculares BE, ΓZ, et supponatur

$$BE^2 = AE \times E\Delta,$$
$$\Gamma Z^2 = AZ \times Z\Delta.$$

dico, $AB\Delta$ arcum circuli esse.

$A\Delta$ in H in duas partes aequales secetur, ducanturque HB, $H\Gamma$. quoniam igitur

$$H\Delta^2 = HE^2 + AE \times E\Delta \text{ [Eucl. II, 5]} = HE^2 + BE^2.$$

et etiam $BH^2 = HE^2 + EB^2$ [Eucl. I, 47], erit

$$BH = H\Delta.$$

et similiter demonstrabimus, esse etiam ΓH reliquasque rectae $H\Delta$ aequales; ergo $AB\Delta$ semicirculus est.

V.

Si cylindrus plano secatur basibus parallelo, sectio circulus erit centrum in axe habens.

sit cylindrus, cuius bases sint circuli A, B, axis autem recta AB, seceturque cylindrus plano basibus parallelo, quod in superficie cylindri efficiat lineam $\Gamma\Xi\Delta$. dico, lineam $\Gamma\Xi\Delta$ ambitum circuli esse.

HB p. 16. ἀπό] ἀπὸ τῶν p. BH] vcp, H e corr. m. 1 V. 17. αἱ] om. p. 18. $AB\Delta$] $AB\Gamma\Delta$ p. 23. βάσις V. 24. AB] vcp, corr. ex $A\Theta$ m. 1 V. 26. $\Gamma\Xi\Delta$] $\Gamma\Xi\Delta N$ p. 27. $\Gamma\Xi\Delta$] $\Gamma\Xi\Delta N$ p. περιφέρειά ἐστι p.

ἤχθωσαν ἐν τῷ Α κύκλῳ διάμετροι αἱ ΕΖ, ΗΘ, καὶ δι' ἑκατέρας τῶν ΕΖ, ΗΘ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδα τέμνοντα τὸν κύλινδρον· ποιήσει δὴ παραλληλόγραμμα τὰς τομάς. ἔστω τοῦ μὲν ΕΚ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ ΓΞΔ ἐπιπέδου κοινὴ τομὴ ἡ ΓΔ, τοῦ δὲ ΗΛ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ ΓΔΞ ἐπιπέδου κοινὴ τομὴ ἡ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΞΔ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ Α κύκλῳ καὶ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ΕΚ ἐπιπέδου, ἡ ΓΔ ἄρα εὐθεῖα τῇ ΕΖ παράλληλός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΝΞ τῇ ΗΘ παράλληλός ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΑ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΕ, ΔΖ παράλληλός ἐστι, καὶ ἴση ἡ ΑΕ τῇ ΑΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΜΔ. ὁμοίως ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΑ τῇ ΑΘ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΜΝ τῇ ΜΞ. ἐπεὶ δὲ αἱ ΑΕ, ΑΗ ἴσαι εἰσί, καὶ αἱ ΜΓ, ΜΝ ἄρα ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· πᾶσαι ἄρα αἱ ΜΓ, ΜΔ, ΜΝ, ΜΞ ἴσαι εἰσίν. ὁμοίως δὲ κἂν ἄλλαι διαχθῶσι, πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν ΓΞΔ γραμμὴν προσπίπτουσαι ἴσαι εὑρεθήσονται. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΞΔ τομή.

ὅτι δὲ καὶ τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας ἔχει, δῆλον· τὸ γὰρ Μ ἐν τοῖς τρισὶν ἐπιπέδοις ὂν ἐπὶ τῆς ΑΒ κοινῆς τομῆς τῶν παραλληλογράμμων ἐστί, τουτέστιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

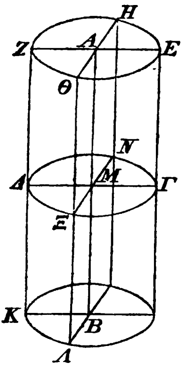
ς′.

Ἐὰν κύλινδρος σκαληνὸς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπι-

---

1. Α] ᾱ V, πρώτῳ c. 5. ΓΞΔ] ΓΞΔΝ p. 6. ΗΛ] p, ΗΓ Vc. ΓΔΞ] ΓΞΔΝ p. 7. ΝΞ] Ν e corr. m. 1 c. ΓΞΔ] ΓΞΔΝ p. 10. διὰ — 12. ἐστι] om. p. 10. δέ] δή Halley. 11. ἐστιν] c, ἐστὶ V. ΔΖ] Halley, ΔΞ Vc. 12. τῇ ΑΖ] bis c. 13. ΓΜ] ΜΓ p. 14. ΜΝ] ΝΜ p. ΑΕ] ΕΑ p. 15. ΜΓ] ΓΜ p. 16. ΜΝ, ΜΞ] ΜΞ, ΜΝ p.

ducantur in circulo A diametri EZ, $H\Theta$, et per utramque EZ, $H\Theta$ axemque plana ducantur cylindrum secantia; sectiones igitur efficient parallelogramma [prop. II]. sit $\Gamma\Delta$ communis sectio parallelogrammi EK planique $\Gamma\Xi\Delta$, $N\Xi$ autem parallelogrammi HA planique $\Gamma\Delta\Xi$ sectio communis. quoniam igitur planum $\Gamma\Xi\Delta$ circulo A parallelum est secaturque plano EK, recta $\Gamma\Delta$ rectae EZ parallela est [Eucl. XI, 16]. eadem de causa autem etiam $N\Xi$ rectae $H\Theta$ parallela est. quoniam igitur BA utrique ΓE, ΔZ parallela est, et $AE = AZ$, erit etiam $\Gamma M = M\Delta$. similiter quoniam $HA = A\Theta$, erit etiam $MN = M\Xi$. et quoniam $AE = AH$, erit etiam $M\Gamma = MN$; itaque $M\Gamma$, $M\Delta$, MN, $M\Xi$ omnes inter se aequales. similiter autem etiam, si aliae ducuntur, omnes rectae, quae ab M ad lineam $\Gamma\Xi\Delta$ adcidunt, aequales inuenientur. ergo sectio $\Gamma\Xi\Delta$ circulus est [Eucl. I def. 15].



eam autem etiam centrum habere in recta AB, adparet; nam punctum M, quod in tribus planis positum est, in AB communi parallelogrammorum sectione est, hoc est in axe.

VI.

Si cylindrus obliquus plano per axem secatur ad basim perpendiculari et simul alio plano secatur,

---

18. $\Gamma\Xi\Delta$] N add. m. 1 p. γραμμήν] om. c. 19. ἐστίν] ἐστὶ V. $\Gamma\Xi\Delta$] corr. ex $\Gamma Z\Delta$ m. 1 c, $\Gamma\Xi\Delta N$ p.

πέδῳ ὀρθῷ τε πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον καὶ ποιοῦντι τὴν κοινὴν τομὴν ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ εὐθεῖαν ἴσας μὲν ποιοῦσαν γωνίας ταῖς τοῦ παραλληλογράμμου, μὴ παράλληλον δὲ οὖσαν ταῖς βάσεσι τοῦ παραλληλογράμμου, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται, καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη ἀγωγὴ τοῦ ἐπιπέδου ὑπεναντία.

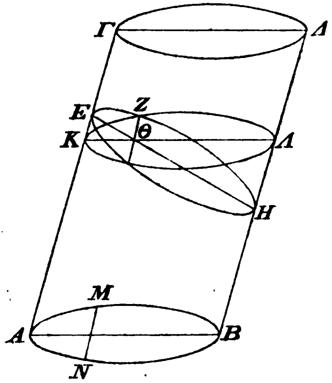
ἔστω σκαληνὸς κύλινδρος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον ἔστω τὸ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει, τετμήσθω δὲ ὁ κύλινδρος καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ΕΖΗ ὀρθῷ καὶ αὐτῷ πρὸς τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον καὶ ποιοῦντι ἐν αὐτῷ κοινὴν τομὴν τὴν ΕΗ εὐθεῖαν μὴ παράλληλον μὲν ταῖς ΑΒ, ΓΔ, ἴσας δὲ γωνίας ποιοῦσαν τὴν μὲν ὑπὸ ΗΕΑ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ, τὴν δὲ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖΗ τομὴ κύκλος ἐστίν.

εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΕΗ εὐθείας τὸ Θ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΕΗ ἤχθω ἡ ΘΖ ἐν τῷ ΕΖΗ ἐπιπέδῳ οὖσα· ἡ ΖΘ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ ΑΔ ἐπίπεδον. ἤχθω διὰ τοῦ Θ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΚΘΛ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΜΝ, καὶ διὰ τῶν ΖΘ, ΚΛ ἤχθω ἐπίπεδον ποιοῦν τὴν ΚΖΛ τομήν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΝ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΑΒ κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ οὖσα, κάθετος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ ἐπὶ τὸ ΑΔ ἐπίπεδον· παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΖΘ, ΜΝ. παράλληλοι δὲ καὶ αἱ ΚΛ,

---

6. -γὴ τοῦ ἐπιπέδου] ins. in ras. m. 1 p. 14. Post ὑπό (pr.) lacun. dimidiae fere lineae V (quia litterae ex altera parte eiusdem folii chartam maculauerant). 15. ΑΒΗ] p, ΑΗΒ Vc. 16. ἐστίν] ἔσται p. 18. ἤχθω] ἤχθω εὐθεῖα p. 19. ΑΔ] vcp, corr. ex ΑΘ m. 1 V. 20. τῇ] p, τήν Vvc.

quod et ad parallelogrammum per axem positum perpendiculare est et communem sectionem in parallelogrammo efficit rectam angulos efficientem angulis parallelogrammi aequales, basibus autem parallelogrammi non parallelam, sectio circulus erit; adpelletur autem talis positio plani contraria.



sit cylindrus obliquus, cuius parallelogrammum per axem positum sit $A\Delta$ ad basim perpendiculare, secetur autem cylindrus etiam alio plano EZH, quod et ipsum ad parallelogrammum $A\Delta$ perpendiculare sit in eoque communem sectionem efficiat rectam EH rectis AB, $\Gamma\Delta$ non parallelam, angulos autem efficientem aequales,

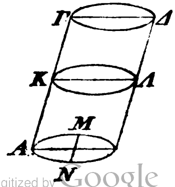
$$\angle HEA = EAB, \quad EHB = ABH.$$

dico, sectionem EZH esse circulum.

sumatur in recta EH punctum aliquod Θ, et ad EH perpendicularis ducatur ΘZ in plano EZH posita; $Z\Theta$ igitur ad planum $A\Delta$ perpendicularis est

---

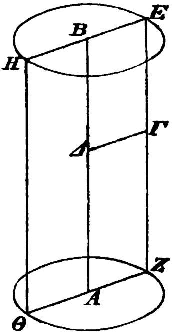
In Vv praeterea haec figura est, sed in V deleta; in v adscripsit m. rec. πεϱιττεῖ.



ΑΒ· καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπίπεδα. ἡ ΚΖΛ ἄρα τομὴ παράλληλός ἐστι τῇ βάσει· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΖΛ τομή. διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἡ ΚΛ καὶ τῇ ΚΛ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΘ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΖ. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ ἴσον ἐστίν· ἴση γὰρ ἡ μὲν ΕΘ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΘΛ διὰ τὸ τὰς πρὸς ταῖς ΕΚ, ΛΗ βάσεσι γωνίας ἴσας εἶναι· καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ ἴσον ἐστί. καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ΖΘ ἐπὶ τὴν ΕΗ. ὁμοίως δὲ κἂν ἄλλην ἀγάγης παράλληλον τῇ ΖΘ ἐπὶ τὴν ΕΗ, ἴσον δυνήσεται τῷ ὑπὸ τῶν γενομένων τμημάτων τῆς ΕΗ· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖΗ τομή, οὗ διάμετρος ἡ ΕΘΗ εὐθεῖα.

ζ'.

Δοθέντος κυλίνδρου σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἀγαγεῖν διὰ τοῦ σημείου πλευρὰν τοῦ κυλίνδρου.



ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τὸ Γ, καὶ δέον ἔστω διὰ τοῦ Γ ἀγαγεῖν τοῦ κυλίνδρου πλευράν.

ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τῶν ΑΒ,

---

1. ΚΖΛ] p, ΚΖ Vc. 2. -ός ἐστι τῇ βάσει] in ras. m. 1 p. 5. τῷ (alt.)] Vp, τό c. 7. ΕΚ, ΛΗ] ΕΗ, ΚΛ p. 8. τῷ] τό p. 9. τό] τῷ p. ΖΘ (alt.)] vc, corr. ex ΘΖ m. 1 V, ΘΖ p. 12. ΕΗ] Halley cum Comm., ΕΚ Vp (c?). ἐστίν] om. c. 15. Ante σημείου ins. καί m. 2 cod. Paris. 2367, Comm., Halley. 19. ΑΒ] vcp, Β paene euan. V, „† ἡ ΑΒ sic in apographo" mg. m. rec. V. 21. Γ] vcp, renouat. m. rec. V.

[Eucl. XI def. 4]. ducatur per Θ rectae AB parallela $K\Theta\Lambda$, et ad rectam AB perpendicularis ponatur MN, per $Z\Theta$, $K\Lambda$ autem ducatur planum sectionem efficiens $KZ\Lambda$. quoniam igitur MN perpendicularis est ad AB communem planorum sectionem in plano basis positam, MN ad planum $A\Delta$ perpendicularis est [Eucl. XI def. 4]; itaque $Z\Theta$, MN parallelae sunt [Eucl. XI, 6]. uerum etiam $K\Lambda$, AB parallelae sunt [Eucl. XI, 16]; quare etiam plana per eas ducta [Eucl. XI, 15]. itaque sectio $KZ\Lambda$ basi parallela est; sectio $KZ\Lambda$ igitur circulus est [prop. V]. diametrus autem circuli est $K\Lambda$ et ad $K\Lambda$ perpendicularis $Z\Theta$; itaque erit $K\Theta \times \Theta\Lambda = \Theta Z^2$. uerum

$$E\Theta \times \Theta H = K\Theta \times \Theta\Lambda;$$

nam $E\Theta = \Theta K$, $H\Theta = \Theta\Lambda$ [Eucl. I, 5], quia anguli ad bases EK, ΛH positi aequales sunt; quare etiam

$$Z\Theta^2 = E\Theta \times \Theta H.$$

et $Z\Theta$ ad EH perpendicularis est. similiter autem etiam, si aliam rectae $Z\Theta$ parallelam ad EH duxerimus, quadrata aequalis erit rectangulo partibus rectae EH, quas efficit, comprehenso; ergo sectio EZH circulus est, cuius diametrus est recta $E\Theta H$ [prop. IV].

VII.

Dato in superficie cylindri puncto aliquo per punctum illud latus cylindri ducere.

sit cylindrus, cuius bases sint circuli A, B, axis autem AB recta, punctum autem in superficie datum Γ, et oporteat per Γ latus cylindri ducere.

ducatur a puncto Γ ad AB perpendicularis $\Gamma\Delta$, et per rectas AB, $\Gamma\Delta$ planum ducatur cylindrum

ΓΔ εὐθειῶν ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον τέμνον τὸν κύλινδρον· ἥξει ἄρα ἡ τομὴ διὰ τοῦ Γ καὶ ποιήσει εὐθεῖαν ὡς τὴν ΓΕ, ἥτις ἐστὶ πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου.

η′.

Ἐὰν ἐπὶ κυλίνδρου ἐπιφανείας δύο σημεῖα ληφθῇ μὴ ἐπὶ μιᾶς ὄντα πλευρᾶς τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, ἡ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας.

ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις εἰσὶν οἱ Α, Β κύκλοι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ μὴ ὄντα ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ εὐθεῖα. λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐντὸς πίπτει τῆς ἐπιφανείας.

εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ἢ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἢ ἐκτὸς αὐτῆς. καὶ ἐπεὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα οὔκ ἐστιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, ἤχθω διὰ μὲν τοῦ Γ ἡ ΕΓΖ πλευρά, διὰ δὲ τοῦ Δ ἡ ΗΔΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΘ εὐθεῖαι· ἐντὸς ἄρα πίπτουσι τῶν κύκλων αἱ ΕΗ, ΖΘ. εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΓΔ τὸ Κ· τὸ δὴ Κ ἤτοι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου ἢ ἐκτός. ἔστω πρότερον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, καὶ διὰ τοῦ Κ ἤχθω πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΛΚΜ εὐθεῖα πίπτουσα ἐπὶ τὰς ΕΗ, ΖΘ περιφερείας ἐκβαλλομένη. οὐδετέραν ἄρα τεμεῖ τῶν ΕΗ, ΖΘ εὐθειῶν·

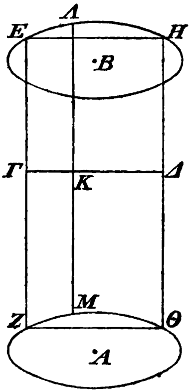
---

3. ΓΕ] Vcp, ΖΓΕ Halley, Ζ ins. m. 2 cod. Paris. 2367, *ecf* Comm. πλευρά] vcp, -ρά euan. V. 5. δύο] $\overline{\beta}$ Vc. ληφθῇ] ληφθείη p. 9. εἰσίν] ἔστωσαν p. οἱ] corr. ex ἡ p. 10. δύο] $\overline{\beta}$ c. 13. τῆς] τῆς τοῦ κυλίνδρου p. 18. Δ] e

secans; sectio igitur per *Γ* ueniet rectamque efficiet [prop. II] ut *ΓE*, quae latus est cylindri.

VIII.

Si in superficie cylindri duo puncta sumuntur non in uno latere posita parallelogrammi per axem cylindri positi, recta ducta intra superficiem cylindri cadet.



sit cylindrus, cuius bases sint circuli *A*, *B*, sumanturque in superficie eius duo puncta *Γ*, *Δ* non in uno latere posita parallelogrammi per axem cylindri positi, et ducatur recta *ΓΔ*. dico, *ΓΔ* intra superficiem cadere.

nam, si fieri potest, aut in superficie cadat aut extra eam. et quoniam puncta *Γ*, *Δ* in eodem latere cylindri non sunt, per *Γ* ducatur latus *EΓZ*, per *Δ* autem *HΔΘ* [prop. VII], ducanturque rectae *EH*, *ZΘ*; *EH*, *ZΘ* igitur intra circulos cadunt. iam in *ΓΔ* punctum aliquod sumatur *K*; *K* igitur aut in superficie cylindri est aut extra eam. prius in superficie sit, et per *K* latus cylindri ducatur *ΛKM* recta [prop. VII], quae producta in arcus *EH*, *ZΘ* cadet. neutram igitur rectarum *EH*, *ZΘ* secabit; itaque *ΛM* in plano *ZEHΘ* non est. et in ea positum est *K*; itaque ne

---

corr. p. 20. *ZΘ*] *ZΘ* *εὐθεῖαι* p. 21. *δή*] *δέ* p. 24. *EH*] *HE* p. 25. *οὐδετέραν ἄρα*] scripsi, *οὐδετέραν* Vc, *ἄρα ἡ ΛKM εὐθεῖα οὐδεμίαν* p. *τεμεῖ*] *τέμει* Vc, *τέμνει* p. *EH*] *H* e corr. m. 1 c.

οὐκ ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ Κ· οὐδὲ τὸ Κ ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ. ἐπεὶ δὲ ἡ ΓΔ ἐστιν ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ Κ, τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐστιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἔστιν ἄρα καὶ οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τὸ Κ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶν ἡ ΓΔ.

ἀλλὰ δὴ ἔστω ἐκτός, καὶ ληφθέντος σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς ΕΗ περιφερείας τοῦ Λ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΛ. ἐκβληθεῖσα δὴ ἐφ' ἑκάτερα ἡ ΚΛ οὐδετέραν τεμεῖ τῶν ΕΗ, ΖΘ εὐθειῶν· ὥστε οὐκ ἔσται ἡ ΚΛ ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ· καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

θʹ.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ μήτε παρὰ τὰς βάσεις μήτε ὑπεναντίως μήτε διὰ τοῦ ἄξονος μήτε παραλλήλῳ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ, ἡ τομὴ οὐκ ἔσται κύκλος οὐδὲ εὐθύγραμμον.

ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις οἱ Α, Β κύκλοι, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ μήτε παρὰ τὰς βάσεις μήτε ὑπεναντίως μήτε διὰ τοῦ ἄξονος μήτε παραλλήλως τῷ ἄξονι. τὸ δὴ τέμνον ἐπίπεδον ἤτοι καὶ τὰς βάσεις τέμνει ἀμφοτέρας ἢ τὴν ἑτέραν ἢ οὐδετέραν. πρῶτον δὴ μηδετέραν τεμνέτω καὶ ποιείτω γραμμὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὴν ΓΕΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΕΔ τομὴ οὔτε κύκλος ἐστὶν οὔτε εὐθύγραμμον.

---

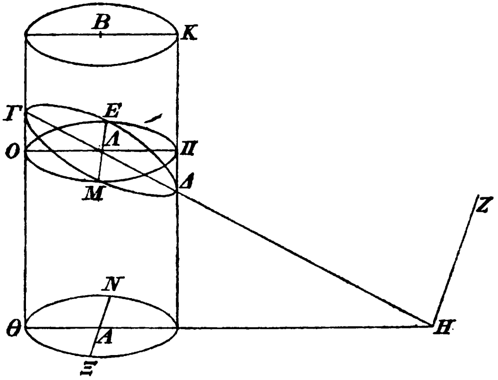
1. καί] V, καί ἐστιν cp. 2. ΖΕΗΘ] Ε e corr. p. 3. ἐπεί — 5. ἐπιπέδῳ] om. p. 5. τῷ] τῷ αὐτῷ p. 9. τοῦ] τινὸς τοῦ p. 10. ΚΛ] ΛΚ c. 14. τμηθῇ] Halley cum Comm., τμηθεῖς Vcp. 20. ἄξονι — 21. ἐπίπεδον] in ras. p seq. rasura magna.

K quidem in plano *ZEHΘ* est. quoniam autem *ΓΔ* in plano *ZEHΘ* est et in ea positum *K*, punctum *K* in plano *ZEHΘ* positum est. itaque *K* et est in plano et non est; quod fieri non potest. ergo *ΓΔ* in superficie non est.

iam uero extra eam sit, et sumpto in arcu *EH* puncto aliquo *Λ* ducatur *KΛ*. *KΛ* igitur in utramque partem producta neutram rectarum *EH*, *ZΘ* secabit; quare *KΛ* in plano *ZEHΘ* non erit; et reliqua manifesta sunt.

IX.

Si cylindrus plano secatur neque basibus parallelo neque contrario neque per axem posito neque plano per axem posito parallelo, sectio neque circulus erit neque figura rectilinea.



sit cylindrus, cuius bases sint *A*, *B* circuli, et plano secetur neque basibus parallelo neque contrario neque per axem neque axi parallelo posito. planum ὅτι μὲν οὐκ ἔστιν εὐθύγραμμον, δῆλον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω εὐθύγραμμον, καὶ εἰλήφθω πλευρά τις αὐτοῦ ἡ *ΓΕ*. ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου δύο σημεῖα εἴληπται τὰ *Γ*, *Ε* μὴ ὄντα ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου· ἡ γὰρ πλευρὰ κατὰ δύο σημεῖα οὐ τέμνει τὴν τοιαύτην γραμμήν· ἡ ἄρα τὰ *Γ*, *Ε* σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα εὐθεῖά ἐστιν ἡ *ΓΕ* γραμμή· τὸ ἄρα *ΓΕΔ* σχῆμα οὐκ ἔστιν εὐθύγραμμον.

δεικτέον δή, ὅτι οὐδὲ κύκλος.

ἐπεὶ γὰρ τὸ τῆς *ΓΕΔ* τομῆς ἐπίπεδον τῷ τοῦ *Α* κύκλου ἐπιπέδῳ οὐκ ἔστι παράλληλον, ἐκβαλλόμενα τὰ ἐπίπεδα τεμεῖ ἄλληλα. τεμνέτω, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ *ΖΗ*, καὶ διὰ τοῦ *Α* κέντρου ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν *ΖΗ* ἡ *ΘΑΗ*, καὶ διὰ τῆς *ΘΑ* καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον ποιοῦν ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν τὸ *ΘΚ* παραλληλόγραμμον, ἐν δὲ τῇ *ΓΕΔ* τομῇ τὴν *ΓΔ* εὐθεῖαν, καὶ τῆς *ΓΔ* δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ *Λ* ἤχθωσαν τῇ *ΖΗ* παράλληλοι διὰ μὲν τοῦ *Λ* ἡ *ΕΛΜ*, διὰ δὲ τοῦ *Α* ἡ *ΝΑΞ*· αἱ ἄρα *ΜΕ*, *ΝΞ* παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις. ἤχθω τοίνυν διὰ τῆς *ΕΜ* ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου ποιοῦν ἐν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν τὴν *ΟΕΠΜ*· ἡ *ΟΕΠ* ἄρα τομὴ κύκλος ἐστίν, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ *ΟΠ* δίχα τετμημένη κατὰ τὸ *Λ*· ἐπεὶ γὰρ τῶν *ΛΟΓ*, *ΛΠΔ* τριγώνων ὁμοίων ὄντων ἴση ἐστὶν ἡ *ΓΛ* τῇ *ΛΔ*, ἴση ἄρα καὶ ἡ *ΟΛ*

---

14. *κοινὴ τομὴ αὐτῶν*] *αὐτῶν κοινὴ τομή* p. 18. *τομῇ*] om. c. 21. *ΝΑΞ*] p, *ΝΞΑ* Vc. 24. *ΟΕΠ*] *ΟΕΠΜ* Halley cum Comm. 26. *ἐπεί*] *ἐπί* c. *τῶν*] p, *τό* Vc. *ΛΠΔ*] p, *ΑΠΔ* Vc. *τριγώνων*] p, *τρίγωνον* Vc.

igitur secans aut basim quoque utramque secat aut alteram aut neutram. iam primum neutram secet efficiatque in superficie cylindri lineam *ΓΕΔ*. dico, lineam *ΓΕΔ* neque circulum esse neque figuram rectilineam.

iam rectilineam figuram eam non esse, adparet. nam, si fieri potest, sit figura rectilinea, sumaturque latus aliquod eius *ΓΕ*. quoniam igitur in superficie cylindri duo puncta sumpta sunt *Γ*, *Ε* non in eodem latere cylindri posita (latus enim talem lineam in duobus punctis non secat), recta puncta *Γ*, *Ε* coniungens in superficie cylindri est; quod demonstrauimus fieri non posse [prop. VIII]. itaque linea *ΓΕ* recta non est; ergo figura *ΓΕΔ* rectilinea non est.

iam demonstrandum, ne circulum quidem eam esse.

quoniam enim planum sectionis *ΓΕΔ* plano circuli *Α* parallelum non est, producta plana inter se secabunt. secent, sitque communis eorum sectio *ΖΗ*, et per *Α* centrum ad *ΖΗ* perpendicularis ducatur *ΘΑΗ*, per *ΘΑ* autem axemque planum ducatur sectionem efficiens in cylindro parallelogrammum *ΘΚ*, in *ΓΕΔ* autem sectione rectam *ΓΔ*, et recta *ΓΔ* in *Λ* in duas partes aequales secta rectae *ΖΗ* parallelae ducantur per *Λ* recta *ΕΛΜ*, per *Α* autem *ΝΑΞ*; itaque *ΜΕ*, *ΝΞ* inter se parallelae sunt [Eucl. XI, 9]. per *ΕΜ* igitur planum basi cylindri parallelum ducatur in cylindro sectionem efficiens *ΟΕΠΜ*; itaque sectio *ΟΕΠ* circulus est, cuius diametrus est *ΟΠ* [prop. V] in *Λ* in duas partes aequales secta. quoniam enim in triangulis similibus *ΛΟΓ*, *ΛΠΔ* est *ΓΛ* = *ΛΔ*, τῇ ΛΠ. διάμετρος ἄρα καὶ ἡ ΕΛΜ τοῦ ΟΕΠ κύκλου. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΟΛ τῇ ΘΑ, ἡ ΛΜ δὲ τῇ ΑΞ, ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΑ, ΑΞ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΜ. ἡ ΕΛ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΟΠ διάμετρον τοῦ κύκλου· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΟΛ, ΛΠ. ἐπεὶ δὲ οὐκ ἔστιν ἡ τομὴ ὑπεναντία, ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΟΓ γωνία οὐκ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΟΓΛ· οὐδὲ ἡ ΟΛ ἄρα εὐθεῖα τῇ ΓΛ ἴση ἐστίν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΟΛ ἄρα, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΠ, τῷ ἀπὸ τῆς ΛΓ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τῶν ΓΛ, ΛΔ, ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΠ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΛ ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ οὐκ ἔστι τῷ ὑπὸ τῶν ΓΛ, ΛΔ ἴσον. οὐκ ἄρα κύκλος ἐστὶν ἡ ΓΕΔ τομή· ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ εὐθύγραμμον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

καὶ συναπεδείχθη, ὅτι ἡ τὴν ΓΔ ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ΖΗ διχοτομοῦσα εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως.

ι΄.

Ἀλλὰ δὴ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τεμνέτω καὶ τὰς βάσεις, τὴν μὲν Α βάσιν τῇ ΓΕ εὐθείᾳ, τὴν δὲ Β τῇ ΖΗ, καὶ διὰ τοῦ Α ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΕ ἡ ΘΑΛ, καὶ διὰ τῆς ΘΑ διαμέτρου καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον, ὃ ποιεῖ τομὴν τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον, τῆς δὲ ΖΕ τομῆς καὶ τοῦ ΘΚ παραλληλογράμμου κοινὴ τομὴ ἡ ΛΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΖΕ ἐπίπεδον οὔτε διὰ τοῦ

---

1. ἄρα] ἄρα ἐστί p. 3. ΛΜ δέ] Vc, δὲ ΛΜ p. τῶν] om. p. ΟΛ, ΛΜ] ΟΛΜ p. 4. ὑπό (pr.)] ὑπὸ τῶν Halley. ΘΑ, ΑΞ] ΘΑΞ p. ἐστίν] ἐστίν· ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΘΑΞ p. τῶν ΟΛ, ΛΜ] ΟΛΜ p. 6. τοῦ] τοῦ ΟΕΠ p. 7. τῷ] p, τό Vc. ὑπό] ὑπὸ τῶν p. Post τομή add. ∝ c. 8. ΛΟΓ]

erit etiam $O\Lambda = \Lambda\Pi$ [Eucl. VI, 4]. quare etiam $E\Lambda M$ diametrus est circuli $OE\Pi$. iam quoniam $O\Lambda$ rectae ΘA parallela est, ΛM autem rectae $A\Xi$, erit $\angle O\Lambda M = \Theta A\Xi$ [Eucl. XI, 10]; quare etiam $\angle O\Lambda M$ rectus est. itaque $E\Lambda$ ad circuli diametrum $O\Pi$ perpendicularis est; quare $E\Lambda^2 = O\Lambda \times \Lambda\Pi$. quoniam autem sectio contraria non est, non erit $\angle \Lambda O\Gamma = O\Gamma\Lambda$ [prop. VI]; itaque non est $O\Lambda = \Gamma\Lambda$; quare ne $O\Lambda^2$ quidem, hoc est $O\Lambda \times \Lambda\Pi$, aequale est quadrato $\Lambda\Gamma^2$, hoc est $\Gamma\Lambda \times \Lambda\Delta$. uerum $E\Lambda^2 = O\Lambda \times \Lambda\Pi$; quare non est $E\Lambda^2 = \Gamma\Lambda \times \Lambda\Delta$. ergo sectio $\Gamma E\Delta$ circulus non est [prop. IV]; demonstrauimus autem, eam ne rectilineam quidem figuram esse; quod erat demonstrandum.

et simul demonstrauimus, rectam rectae ZH parallelam, quae in sectione rectam $\Gamma\Delta$ in duas partes aequales secet, diametro basis aequalem esse.

X.

Iam uero planum secans etiam bases secet, basim A secundum rectam ΓE, B uero secundum ZH, et per A ad ΓE perpendicularis ducatur $\Theta A\Lambda$, per diametrum autem ΘA axemque planum ducatur sectionem efficiens ΘK parallelogrammum [prop. II], communis autem sectio sectionis ZE et parallelogrammi ΘK sit ΛM. quoniam igitur planum ZE

ΟΛΓ p. 9. *ΟΓΛ*] *Λ* e corr. m. 1 c. *τῇ* — *ἐστίν*] *ἴση ἐστὶ τῇ ΛΓ* p. 12. *τῷ*] vcp, corr. ex *τό* m. 1 V. 13. *ἴσον*] *ἴσον ἐστί* p. 14. *ΓΕΔ*] p, *ΓΕ* Vc. 15. *ὅπερ*] om. p. *ἔδει δεῖξαι*] om. p, *ἐδεῖξαι* c. 16. *ι´* mg. m. rec. V. *τῇ*] om. c. 19. *ι´*] mg. p, om. Vc. 21. *ΖΗ*] *ΖΗ εὐθείᾳ* p. 25. *ΖΕ*] vcp et seq. ras. 1 litt. V, *ΖΓΕΗ* Halley. 26. *τομή*] *τομὴ ἔστω* Halley (cum Comm.).

ἄξονος ἦκται οὔτε παραλλήλως τῷ ἄξονι, ἡ ΛΜ ἄρα ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὸν ἄξονα· τεμεῖ ἄρα καὶ τὴν ΘΝ παράλληλον οὖσαν τῷ ἄξονι· ἀμφοτέρα γὰρ ἐν τῷ ΘΚ εἰσιν ἐπιπέδῳ. τεμνέτω δὴ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα ἡ ΘΝ. ἐὰν δὴ μένοντος τοῦ ἄξονος καὶ τῶν κύκλων ἡ ΘΝ περιενεχθεῖσα σὺν ταῖς διαμέτροις ἀποκατασταθῇ, αὐξήσει τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς κυλίνδρου ἐπιφάνειαν κατὰ τὸ ὕψος, καὶ προσεκβληθέντος τοῦ ΖΕ ἐπιπέδου αὐξηθήσεται καὶ ἡ τομὴ μέχρι τοῦ Ν· τὸ δ' αὐτὸ ἔσται καὶ ἐπὶ τὰ Γ, Δ μέρη· ἡ ΝΗΕΡ ἄρα τομή ἐστι κυλίνδρου, οἷα καὶ ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι. ἡ ΝΗΕΡ ἄρα τομὴ οὔτε κύκλος οὔτε εὐθύγραμμόν ἐστι· καὶ ἡ ΓΕΗΖ ἄρα τομὴ οὔτε εὐθύγραμμον οὔτε κύκλος οὔτε τμῆμα κύκλου, ἀλλ' ἐστὶν ἡ τοιαύτη τομὴ κυλίνδρου τομή.

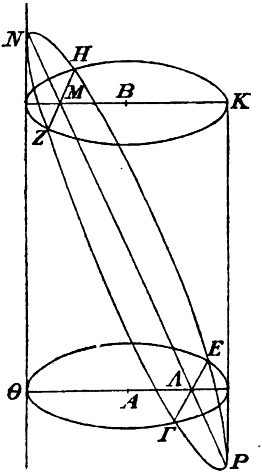
ια′.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος εὐθείᾳ τινί, ἥτις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσα τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἐντὸς πεσεῖται τοῦ παραλληλογράμμου καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου

---

3. ΘΝ] ΘΜ p, sed corr. 7. ἐξ ἀρχῆς] om. p. 8. κατὰ τὸ ὕψος, καί] bis c extr. et init. pag. 9. ΖΕ] p, ΞΕ Vc. 10. Γ] e corr. p. 12. ΝΗΕΡ] ΝΗ e corr. p. κύκλος] κύκλος ἐστίν p. 13. ἐστι — 14. κύκλος] om. p. 15. τομή (alt.)] p, τομῆς κύκλου Vc, τομ\̅ς cod. Paris. 2367 add. τμῆμα in ras. m. 2, τομῆς τμῆμα Halley cum Comm. 19. Post τῆς del. ἐπιφανείας c.

neque per axem ductum est neque axi parallelum, ΛM in infinitum producta axem secabit; secabit igitur etiam ΘN axi parallelam; utraque enim in plano ΘK posita est. secet igitur in N, et ΘN in utramque partem producatur. si igitur axe circulisque manentibus ΘN circumacta una cum diametris restituitur, superficiem cylindri ab initio positi secundum altitudinem augebit, et producto plano ZE etiam sectio augebitur ad N; idem autem etiam ad partes Γ, Λ uersus eueniet; itaque $NHEP$ sectio est cylindri, qualis in propositione praecedenti. itaque sectio $NHEP$ neque circulus est neque figura rectilinea [prop. IX]; ergo sectio ΓEHZ neque figura rectilinea est neque circulus neque segmentum circuli, sed talis sectio cylindri est sectio.



XI.

Si cylindrus plano per axem secatur, in superficie autem cylindri punctum aliquod sumitur, quod in latere parallelogrammi per axem positi non sit, et ab eo recta aliqua ducitur parallela rectae cuidam, quae in eodem plano posita, in quo est basis cylindri, ad basim parallelogrammi per axem positi perpendicularis

---

Fig. in Vvp male descriptam corr. Comm.

μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ παραλληλογράμμου.

ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε παράλληλος ἤχθω εὐθείᾳ τινὶ καθέτῳ ἐπὶ τὴν ΓΑ βάσιν τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ ἔστω ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἐντὸς πεσεῖται τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου καὶ προσεκβαλλομένη μέχρι τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ παραλληλογράμμου.

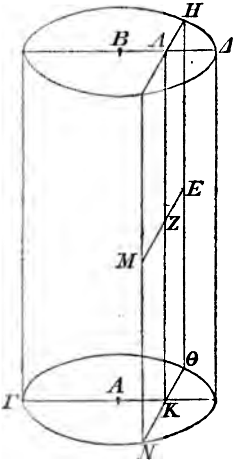
ἤχθω διὰ τοῦ Ε σημείου παρὰ τὸν ἄξονα ἡ ΘΕΗ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἤχθω ἡ ΘΚ παράλληλος τῇ ἐπὶ τὴν ΓΑ καθέτῳ, ᾗτινι παράλληλος ὑπόκειται ἡ ΕΖ· τεμεῖ ἄρα ἡ ΘΚ τὴν ΓΑ καὶ αὐτή. ἤχθω οὖν διὰ τῶν ΗΘ, ΘΚ ἐπίπεδον τέμνον τὸν κύλινδρον καὶ ποιείτω τὸ ΗΝ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΛ κοινὴ τομὴ τῶν ΓΔ, ΝΗ παραλληλογράμμων. ἐπεὶ τοίνυν αἱ ΕΖ, ΚΘ τῇ αὐτῇ εἰσι παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις ἄρα εἰσὶ παράλληλοι· καί ἐστιν ἡ ΘΚ ἐν τῷ ΚΗ ἐπιπέδῳ· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα ἐν τῷ ΚΗ ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐκβαλλομένη ἄρα ἡ ΕΖ πίπτει ἐπὶ τὴν ΛΚ, ἥτις ἐστὶν ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ. ἡ ΕΖ ἄρα ἐντὸς πίπτει τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου.

---

3. βάσεις] p et corr. ex βάσις in scribendo c, βάσις V. 8. ΓΔ] Γ e corr. p. 12. ΘΕΗ] p, ΘΕΚ Vc. 15. ᾗτινι] pc, ἡιτῖ|νι V, ἥ τίνι v. τεμεῖ] τέμει V. 16. ΘΚ] Θ e corr. in scrib. V. καὶ αὐτή] om. p, καὶ αὕτη Vc. 21. εἰσὶ παράλληλοι] παράλληλοί εἰσι p.

est, intra parallelogrammum cadet et ad alteram partem superficiei producta a parallelogrammo in duas partes aequales secabitur.

sit cylindrus, cuius bases sint circuli A, B, parallelogrammum autem per axem positum $\Gamma\Delta$, et in superficie cylindri sumatur punctum aliquod E, ab E autem recta ducatur parallela rectae cuidam ad $\Gamma\Lambda$1) basim parallelogrammi perpendiculari, sitque EZ. dico, rectam EZ intra parallelogrammum $\Gamma\Delta$ cadere et ad alteram partem superficiei productam a parallelogrammo in duas partes aequales secari.



per punctum E axi parallela ducatur recta ΘEH ambitum basis in Θ secans, et per Θ ducatur ΘK parallela rectae ad $\Gamma\Lambda$ perpendiculari, cui parallela supposita est EZ; ΘK igitur et ipsa rectam $\Gamma\Lambda$ secabit. ducatur igitur per $H\Theta$, ΘK planum cylindrum secans efficiatque parallelogrammum HN, et ducatur $K\Lambda$ communis sectio parallelogrammorum $\Gamma\Delta$, NH. quoniam igitur EZ, $K\Theta$ eidem rectae parallelae sunt, etiam inter se sunt parallelae [Eucl. XI, 9]; et ΘK in plano KH posita est; itaque etiam EZ in plano KH posita est. producta igitur EZ in ΛK cadit,

---

1) Littera Λ fortasse contra codices in termino rectae ponenda (ita Comm.). N om. Vv, habet p; pro Λ in V est A.

φανερὸν δέ, ὅτι, κἂν εἰς τὸ ἕτερον μέρος ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ Μ, ὅπερ ἐστὶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, δίχα ἔσται τετμημένη κατὰ τὸ Ζ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΑ διάμετρος πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΘΚ, ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΚΝ. καὶ παράλληλοι αἱ ΜΝ, ΛΚ, ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΜΖ τῇ ΖΕ.

ιβ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ τέμνοντι μὲν τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς τομῆς τῆς ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου γενομένης ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου παράλληλοι τῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων πεσοῦνται καὶ προσεκβαλλόμεναι ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων, καὶ ἡ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ὀρθοῦ μὲν ὄντος τοῦ κυλίνδρου πρὸς ὀρθὰς ἔσται καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τε διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, σκαληνοῦ δὲ ὄντος οὐκέτι, πλὴν ὅταν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου.

ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, καὶ

---

5. ΜΝ, ΛΚ, ΗΘ] ΝΜ, ΚΛ, ΘΗ p. 6. ΖΕ] Ε e corr. p. 8. τμηθῇ] bis V extr. et init. lin. 12. εὐθεῖαι] ab hoc uocabulo incipit fol. 170 in V, ϑ add. m. 2. 13. γενομένης] V, γινομένης? c, τεμ(ν)ομένης p. 14. τοῦ διά] τῇ διά c. 15. Post αὐτῇ del. αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι p. ἐπί — 16. πε-

quae in plano $\Gamma\Delta$ posita est. ergo EZ intra parallelogrammum $\Gamma\Delta$ cadit.

manifestum autem etiam, si ad alteram partem producatur ad M, quod in superficie cylindri est, in duas partes aequales eam sectam esse in Z. quoniam enim diametrus ΓA ad rectam ΘK perpendicularis est, erit $\Theta K = KN$ [Eucl. III, 3]. et MN, ΔK, $H\Theta$ parallelae sunt; ergo $MZ = ZE$.

XII.

Si cylindrus plano secatur planum basis extra circulum secanti, ita ut communis sectio planorum ad basim parallelogrammi per axem positi uel ad eandem productam perpendicularis sit, rectae, quae a sectione in superficie cylindri a plano secanti effecta ducuntur parallelae rectae ad basim parallelogrammi per axem positi perpendiculari uel eidem productae in communem sectionem planorum cadent et ad alteram partem sectionis productae in binas partes aequales a communi sectione planorum secabuntur, et recta ad basim parallelogrammi per axem positi uel ad eandem productam perpendicularis, si cylindrus rectus est, etiam ad communem sectionem parallelogrammi per axem positi planique secantis perpendicularis erit, sin obliquus, non iam perpendicularis, nisi quando planum per axem positum ad basim cylindri perpendiculare est.

sit cylindrus, cuius bases sint circuli A, B, parallelogrammum autem per axem positum sit $\Gamma\Delta$,

---

σοῦνται] in ras. p. 16. καί] p, om. Vc. 21. καί] om. p. τῇ] om. c. 22. παραλληλογράμμου] παραλλογ^{ρ} p. 25. βάσεις] e corr. p, βάσις Vc.

τετμήσθω ὁ κύλινδρος, ὡς εἴρηται, ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τὴν ΕΖΗΘ τομήν, ὥστε συμπιπτόντων τοῦ τε τῆς ΕΖΗΘ τομῆς καὶ τοῦ τῆς ΑΓ βάσεως ἐπιπέδου τὴν κοινὴν τομὴν τὴν ΚΛ πρὸς ὀρθὰς εἶναι τῇ ΓΑΛ εὐθείᾳ, καὶ ἀπὸ τῆς ΕΖΗ τομῆς ἤχθω τις εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΚΛ ἡ ΖΜ καὶ προσεκβληθεῖσα περατούσθω κατὰ τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸ Θ. λέγω, ὅτι ἡ ΖΜ πίπτει ἐπὶ τὴν ΕΗ, καὶ ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΖΜ τῇ ΜΘ.

ἐπεὶ γὰρ ἐν τῇ ΕΖΗ τομῇ παράλληλος ἦκται τῇ ΚΛ ἡ ΖΜ, ἐντὸς ἄρα πίπτει τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου. ἐπεὶ δέ ἐστιν ἡ μὲν ΖΜ εὐθεῖα ἐν τῷ ΕΖΗΘ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ ΕΗ κοινὴ τομή ἐστιν αὐτοῦ καὶ τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου, ἡ ΖΜ ἄρα ἐπὶ τὴν ΕΗ πίπτει.

ὅτι δὲ καὶ ἡ ΖΜ τῇ ΜΘ ἴση ἐστί, φανερὸν καὶ αὐτὸ διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα.

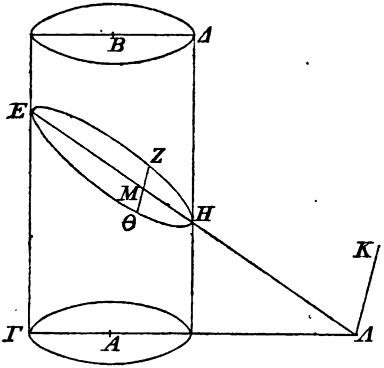
λοιπὸν δεῖ δεῖξαι, ὅτι ἡ ΚΛ ὀρθοῦ μὲν ὄντος τοῦ κυλίνδρου ἢ τοῦ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ὄντος τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΕΗΛ. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ΓΔ ἐπίπεδον πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ, τῇ δὲ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΓΑΛ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΚΛ ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ οὖσα, καὶ τῷ λοιπῷ ἄρα τῷ τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

εἰ δὲ τὸ ΓΔ οὐκ ἔστι πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει,

---

3. ΑΓ] ΓΑ p. 7. ἐπιφανείας] ἐπὶ φανείας V. 10. γάρ] corr. ex δέ in scrib. c. 13. ΕΖΗΘ] p, ΕΖΘΗ Vc. 14. καί] τε καί p. 19. ὄντος — 21. ὀρθάς] bis Vc. 21. Post ὀρθάς rep. ὄντος τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου πρὸς ὀρθάς e lin. 19—20 p. 25. ἐστιν] ἐστί V.

et cylindrus secetur, ut diximus, plano sectionem efficienti $EZH\Theta$, ita ut concurrentibus sectione $EZH\Theta$ planoque basis $A\Gamma$ communis sectio $K\Lambda$ ad rectam $\Gamma A\Lambda$ sit perpendicularis, et a sectione EZH recta aliqua ducatur ZM rectae $K\Lambda$ parallela productaque ad alteram partem superficiei terminetur in Θ. dico, rectam ZM in EH cadere, et esse $ZM = M\Theta$.



quoniam enim in sectione EZH rectae $K\Lambda$ parallela ducta est ZM, intra parallelogrammum $\Gamma\Delta$ cadit [prop. XI]. et quoniam recta ZM posita est in plano $EZH\Theta$, et EH eius parallelogrammique $\Gamma\Delta$ communis est sectio, ZM in EH cadit.

esse autem $ZM = M\Theta$, et ipsum per propositionem praecedentem manifestum est.

reliquum est, ut demonstremus, rectam $K\Lambda$ ad $EH\Lambda$ perpendicularem esse, si cylindrus rectus sit aut $\Gamma\Delta$ ad basim cylindri perpendiculare. quoniam enim planum $\Gamma\Delta$ ad planum basis perpendiculare est, et ad $\Gamma A\Lambda$ communem eorum sectionem perpendicularis est $K\Lambda$ in plano basis posita, etiam ad reliquum planum parallelogrammi $\Gamma\Delta$ perpendicularis est [Eucl. XI def. 4].

sin $\Gamma\Delta$ ad basim perpendiculare non est, non πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἔσται ἡ *ΚΛ* τῇ *ΛΕ*. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς ὀρθὰς ἡ *ΚΛ* τῇ *ΛΕ*. ἔστι δὲ καὶ τῇ *ΛΓ* πρὸς ὀρθάς· καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῷ *ΓΔ*, πρὸς ὀρθὰς ἔσται ἡ *ΚΛ*. καὶ τὸ δι' αὐτῆς ἄρα ἐπίπεδον τὸ τῆς *Α* βάσεως πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ *ΓΔ*· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ *ΚΛ* πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ *ΛΕ*.

ἐκ δὴ τῶν δεδειγμένων φανερόν, ὅτι ἡ *ΕΗ* διάμετρός ἐστι τῆς *ΕΖΗΘ* τομῆς· πάσας γὰρ τὰς παρὰ τὴν *ΚΛ* καταγομένας ἐπ' αὐτὴν δίχα τέμνει, ὥσπερ τὴν *ΖΘ*.

ιγ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὁμοίως τμηθῶσιν, ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς δευτέρας.

εὐθεῖαι γὰρ αἱ *ΑΒ*, *ΓΔ* ὁμοίως τετμήσθωσαν κατὰ τὰ *Ε*, *Ζ* σημεῖα. λέγω, ὅτι, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΓΔ*, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕ*, *ΕΒ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *ΓΖ*, *ΖΔ*.

ἐπεὶ γάρ, ὡς ἡ *ΑΕ* πρὸς *ΕΒ*, οὕτως ἡ *ΓΖ* πρὸς *ΖΔ*, καὶ συνθέντι ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ *ΑΒ* πρὸς *ΓΔ*, οὕτως ἡ *ΕΒ* πρὸς *ΖΔ*. καὶ ἐπεί, ὡς ἡ *ΑΕ* πρὸς *ΕΒ*, οὕτως ἡ *ΓΖ* πρὸς *ΖΔ*, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν *ΑΕ*,

---

1. πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἔσται] scripsi cum Comm., ἔσται Vc, σκαληνοῦ δηλαδὴ ὄντος τοῦ κυλίνδρου οὐκ ἔστι πρὸς ὀρθάς p et Halley (ἔσται). 4. αὐτῆς] αὐτοῦ p. 5. τό] τουτέστι τό p, Halley. τῷ] e corr. p. 7. ἐστι τῇ *ΛΕ*] ἔσται τῇ *ΕΛ* p. 8. *ΕΗ*] *Η* e corr. m. 1 c. 12. ιγ'] p, om. Vc, ιβ' m. rec. V. 14. δευτέρας] β̄ p. οὕτως] $\overset{ω}{οὔτ}$ p. 15. πρώτης] ᾱ p. 16. δευτέρας] β̄ p. 19. οὕτως] $\overset{ω}{οὔτ}$ p. 22. *ΖΔ*] cp, corr. ex

erit $K\Delta$ ad ΔE perpendicularis. si enim fieri potest, sit $K\Delta$ ad ΔE perpendicularis. uerum etiam ad $\Delta\Gamma$ perpendicularis est; quare etiam ad planum per eas ductum, hoc est ad $\Gamma\Delta$, perpendicularis erit $K\Delta$ [Eucl. XI, 4]. itaque etiam planum per eam ductum basis A ad $\Gamma\Delta$ perpendiculare erit [Eucl. XI, 18]; quod contra hypothesim est. ergo $K\Delta$ ad ΔE perpendicularis non est.

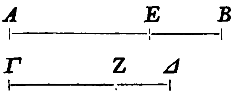
ex demonstratis igitur manifestum, EH diametrum esse sectionis $EZH\Theta$ [def. 4]; omnes enim rectas, quae ad eam rectae $K\Delta$ parallelae ducuntur, in binas partes aequales secat, sicut rectam $Z\Theta$.

XIII.

Si duae rectae similiter secantur, erit, ut quadratum primae ad quadratum alterius, ita rectangulum partibus primae comprehensum ad rectangulum partibus alterius comprehensum.

rectae enim AB, $\Gamma\Delta$ in punctis E, Z similiter secentur. dico, esse

$$AB^2 : \Gamma\Delta^2 = AE \times EB : \Gamma Z \times Z\Delta.$$



quoniam enim

$$AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta,$$

erit etiam componendo et permutando $AB : \Gamma\Delta = EB : Z\Delta$. et quoniam $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$, $AE \times EB$ ad $\Gamma Z \times Z\Delta$ duplicatam rationem[1] habet quam $EB : Z\Delta$ siue

---

[1] Nam $AE \times EB : EB^2 = \Gamma Z \times Z\Delta : Z\Delta^2$; tum permutando.

$\Xi\Delta$ V, $\Xi\Delta$ v. καὶ συνθέντι — 24. $Z\Delta$] om. c. 23. $Z\Delta$] cp, $\Xi\Delta$ Vv. 24. $Z\Delta$] Δ e corr. p.

ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ. ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὃ προέκειτο δεῖξαι.

ιδʹ.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ τε τῆς βάσεως καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου ἢ τῇ ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ, ἀπὸ δὲ τῆς τομῆς ἀχθῇ τις ἐπὶ τὴν διάμετρον παράλληλος τῇ εἰρημένῃ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων, ἡ ἀχθεῖσα δυνήσεταί τι χωρίον, πρὸς ὃ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως.

ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ κατ᾽ εὐθεῖαν ὀρθὴν πρὸς ΓΑ ἐκβληθεῖσαν, καὶ ἔστω ἡ γενομένη τομὴ ἡ ΕΖΗ, κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἡ ΕΗ διάμετρος οὖσα τῆς τομῆς, ὡς ἐδείχθη. ληφθέντος δέ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ Ζ κατήχθω ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν διάμετρον εὐθεῖα παράλ-

---

1. ΖΔ] p, om. Vc. 2. ἡ (alt.)] supra scr. m. 1 c. 5. οὕτως] οὕτω p. 6. ὃ προέκειτο δεῖξαι] om. p. 8. ιδʹ] p,

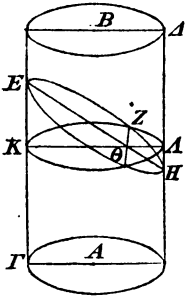
$AB : \Gamma\Delta$. uerum etiam AB^2 ad $\Gamma\Delta^2$ duplicatam rationem habet quam $AB : \Gamma\Delta$; ergo

$$AB^2 : \Gamma\Delta^2 = AE \times EB : \Gamma Z \times Z\Delta;$$

quod erat demonstrandum.

XIV.

Si cylindrus plano per axem secatur, secatur autem etiam alio plano planum basis secanti, et communis sectio plani basis secantisque ad basim parallelogrammi per axem positi uel ad eandem productam perpendicularis est, a sectione autem ad diametrum recta ducitur parallela communi planorum sectioni, quam diximus, recta ducta quadrata aequalis erit spatio cuidam, ad quod rectangulum partibus diametri sectionis comprehensum rationem habet, quam quadratum diametri sectionis ad quadratum diametri basis.



sit cylindrus, cuius bases sint circuli A, B, parallelogrammum autem per axem positum $\Gamma\Delta$, et cylindrus plano secetur cum plano basis concurrenti secundum rectam ad ΓA productam perpendicularem, sitque sectio effecta EZH, communis autem sectio parallelogrammi planique secantis EH, quae diametrus est sectionis, ut demonstrauimus [prop. XII]; sumpto autem in sectione puncto aliquo Z ab eo ad diametrum

---

om. Vc, *ιγ'* m. rec. V; et sic deinceps. 16. *δ*] p, om. Vc. 20. *βάσεις*] p, *βάσις* Vc. 23. *ΓΑ*] Vc, *τὴν ΓΑ* p.

ληλος τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἡ ΖΘ· πίπτει ἄρα ἡ ΖΘ ἐπὶ τὴν ΕΗ, ὡς ἐδείχθη. λέγω δή, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως.

ἤχθω διὰ τοῦ Θ παράλληλος τῇ ΓΑ ἡ ΚΘΛ, καὶ διὰ τῶν ΖΘ, ΚΛ εὐθειῶν ἤχθω ἐπίπεδον τομὴν ποιοῦν τὴν ΚΖΛ. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΓΑ παράλληλος, ἡ δὲ ΖΘ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων οὖσῃ ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ, καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπίπεδα παράλληλά ἐστιν· ἡ ΚΖΛ ἄρα τομὴ κύκλος ἐστί. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΓΑ, ἡ δὲ ΖΘ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς οὔσῃ πρὸς τὴν ΓΑ, καὶ ἡ ΖΘ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΚΛ. καί ἐστι κύκλος ὁ ΚΖΛ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ. ἐπεὶ ἡ ΚΕ τῇ ΛΗ παράλληλός ἐστιν, ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΛ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ ὅμοιόν ἐστι τῷ ὑπὸ ΚΘ, ΘΛ. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως.

ιε΄.

Ἡ διὰ τῆς διχοτομίας τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς τεταγμένως ἀγομένη ἐν τῇ τομῇ δευτέρα διάμετρος ἔσται.

ἔστω γὰρ τῆς ΕΖΗ τομῆς διάμετρος ἡ ΕΗ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Θ, καὶ διήχθω ἡ ΖΘΜ τεταγμένως. λέγω, ὅτι ἡ ΖΜ δευτέρα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

---

2. *δή*] *δέ* c. *τό*] p, *τῷ* Vc. 4. *ἀπό* (alt.)] *διά* c. 6. *Θ*] *ηΘ* c. 11. *ἐστιν — κύκλος*] om. p. 16. *ἐπεί*] Vc, *καὶ*

recta ducatur $Z\Theta$ communi planorum sectioni parallela; $Z\Theta$ igitur in EH cadit, ut demonstratum est [prop. XII]. iam dico, $E\Theta \times \Theta H$ ad $Z\Theta^2$ rationem habere, quam EH^2 ad quadratum diametri basis.

ducatur per Θ rectae $\Gamma\Delta$ parallela $K\Theta\Lambda$, et per rectas $Z\Theta$, $K\Lambda$ planum ducatur sectionem efficiens $KZ\Lambda$. quoniam igitur $K\Lambda$ rectae $\Gamma\Delta$ parallela est, $Z\Theta$ autem communi planorum sectioni in plano basis positae, etiam plana per eas ducta parallela sunt [Eucl. XI, 15]; itaque sectio $KZ\Lambda$ circulus est [prop. V]. rursus quoniam $K\Lambda$ rectae $\Gamma\Delta$ parallela est, $Z\Theta$ autem communi planorum sectioni ad $\Gamma\Delta$ perpendiculari, etiam $Z\Theta$ ad $K\Lambda$ perpendicularis est [Eucl. XI, 10]. et $KZ\Lambda$ circulus est; itaque erit $Z\Theta^2 = K\Theta \times \Theta\Lambda$. quoniam KE rectae ΛH parallela est, erit $K\Theta : \Theta\Lambda = E\Theta : \Theta H$ [Eucl. VI, 4]; itaque rectangulum $E\Theta \times \Theta H$ simile est rectangulo $K\Theta \times \Theta\Lambda$. ergo erit [prop. XIIII] $E\Theta \times \Theta H : K\Theta \times \Theta\Lambda$ siue $E\Theta \times \Theta H : Z\Theta^2 = EH^2 : K\Lambda^2$ siue EH^2 ad quadratum diametri basis.

XV.

Recta per punctum medium diametri sectionis in sectione ordinate ducta altera diametrus erit.

sit enim EH diametrus sectionis EZH et in Θ in duas partes aequales secetur, ducaturque ordinate $Z\Theta M$. dico, ZM alteram diametrum esse sectionis.

ἐπεί p.   19. Post ΘH del. m. 1 ὅμοιόν ἐστι V.   20. $Z\Theta$] τῆς $Z\Theta$ p.   οὕτως] οὕτω p.   27. δίχα τετμήσθω] τετμήσθω δίχα p.

ἤχθω παρὰ μὲν τὴν *ΕΗ* ἡ *ΝΞ*, παρὰ δὲ τὴν *ΖΜ* αἱ *ΝΠ*, *ΞΡ*· τεταγμέναι ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ *ΝΠ*, *ΞΡ*. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς *ΝΠ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΕΠΗ* λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΞΡ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΕΡΗ* τὸν αὐτὸν λόγον, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *ΝΠ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΕΠΗ*, οὕτως τὸ ἀπὸ *ΞΡ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΕΡΗ*. καὶ ἐναλλάξ· ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ *ΝΠ* τῷ ἀπὸ *ΞΡ*· παραλληλόγραμμον γάρ ἐστι τὸ *ΝΠΡΞ*· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ *ΕΠΗ* τῷ ὑπὸ *ΕΡΗ*. καὶ ἀπ' ἴσων ἀφῄρηται τῶν ἀπὸ *ΕΘ*, *ΘΗ*· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ *ΠΘ* λοιπῷ τῷ ἀπὸ *ΘΡ* ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ *ΠΘ* τῇ *ΘΡ*, τουτέστιν ἡ *ΝΟ* τῇ *ΟΞ*. ὁμοίως δὲ πᾶσαι αἱ παρὰ τὴν *ΕΗ* δίχα τέμνονται ὑπὸ τῆς *ΖΜ*· δευτέρα διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΖΜ*.

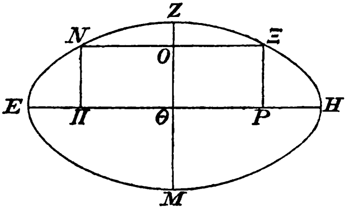
ιϛ.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ τέμνοντι τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ τε τῆς βάσεως καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἡ μὲν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀχθεῖσα παράλληλος τῇ εἰρημένῃ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων δυνήσεται χωρίον, πρὸς ὃ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς δια-

---

3. *ΕΠΗ*] τῶν *ΕΠ*, *ΠΗ* p; et similiter semper. 6. *ΕΡΗ*] τῷ *ΕΡ*, *ΡΗ* p. 8. οὕτως] οὕτω p. *ΞΡ*] τῆς *ΞΡ* p; et similiter semper. 9. *ΝΠ*] vc, *Π* e corr. m. 1 V, τῆς *ΝΠ* p. 10. *ΝΠΡΞ*] p, *ΝΠΞΡ* Vc. 11. ἀπ'] ἀπό c. 12. ἀπὸ *ΘΡ*] Halley, ἀπὸ τῆς *ΘΡ* p, *ΘΡ* Vc. 15. διάμετρος] om. p. *ΖΜ*] p, *ΘΝ* uel *ΘΜ* V, *ΘΝ* c, *ΘΜ* v, „ἡ *ΘΝ* in apographo“ m. rec. V. 18. κοινή] κονή p. 23. χωρίον] τι. χωρίον p. 24. ἔχει] ἕξει p.

ducatur rectae EH parallela $N\Xi$, rectae autem ZM parallelae $N\Pi$, ΞP; itaque etiam $N\Pi$, ΞP ordinate ductae sunt [def. 4]. quoniam igitur $N\Pi^2 : E\Pi \times \Pi H$ rationem habet, quam quadratum diametri basis cylindri ad quadratum diametri sectionis, eandem autem rationem habet etiam $\Xi P^2 : EP \times PH$ [prop. XIV], erit $N\Pi^2 : E\Pi \times \Pi H = \Xi P^2 : EP \times PH.$ et permutando; est autem $N\Pi^2 = \Xi P^2$; nam $N\Pi P\Xi$ parallelogrammum est; itaque etiam



$$E\Pi \times \Pi H = EP \times PH.$$

et ab aequalibus ablata sunt $E\Theta^2$, ΘH^2; itaque quod relinquitur $\Pi\Theta^2 = \Theta P^2$ [Eucl. II, 5]. quare $\Pi\Theta = \Theta P$, siue $NO = O\Xi$. et similiter omnes rectae rectae EH parallelae a ZM in binas partes aequales secantur; ergo ZM diametrus altera est [def. 7].

XVI.

Si cylindrus plano secatur planum basis secanti, communis autem sectio plani basis secantisque perpendicularis est ad basim parallelogrammi per axem positi uel ad eandem productam, recta a sectione ad diametrum ducta parallela communi planorum sectioni, quam diximus, quadrata aequalis erit spatio, ad quod rectangulum partibus diametri comprehensum rationem habet, quam quadratum diametri sectionis ad quadratum diametri alterius, recta autem a sectione ad μέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἡ δὲ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον ἀχθεῖσα παράλληλος τῇ διαμέτρῳ δυνήσεται χωρίον, πρὸς ὃ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς δευτέρας διαμέτρου λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου.

ἔστω κύλινδρος, καὶ κατεσκευάσθω ὡς ἐν τῷ ιδ'. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τῆς διχοτομούσης τὴν ΕΗ τεταγμένως, ὡς ἐδείχθη πρὸς τῷ θ' θεωρήματι, ἡ δὲ διχοτομοῦσα τὴν διάμετρον τεταγμένως δευτέρα διάμετρός ἐστιν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου, εἴη ἄν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

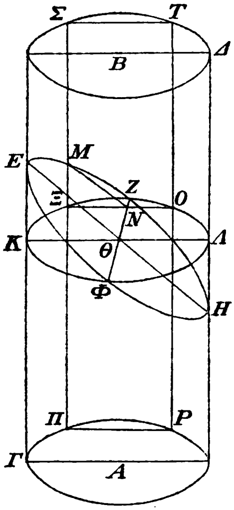
ἀλλὰ δὴ ὑποκείσθω τὸ μὲν Θ διχοτομεῖν τὴν ΕΗ διάμετρον, τὴν δὲ ΖΘΦ τεταγμένην εἶναι· δευτέρα ἄρα διάμετρος ἡ ΖΦ. κατήχθω ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τῆς τομῆς ἡ ΜΝ παράλληλος τῇ ΕΗ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΦΝ, ΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΦΖ δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου τῆς τομῆς.

ἤχθω διὰ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΓΔ παραλληλογράμμῳ τέμνον τὸν κύλινδρον· ποιήσει δὴ παραλληλόγραμμον τὴν τομήν. ποιείτω τὸ ΡΣ, ἔστω-

---

1. Ante πρός del. λόγον ἔχει c. 3. ὅ] p, om. Vc. 7. κατεσκευάσθω] vcp, supra σ add. ω V. 8. ἐδείχθη] vcp, ἐδείχη V. 9. ΖΘ] Θ e corr. p. ὡς] λόγον ἔχον ὡς p. 11. τῷ] p, τῶ vc et corr. ex τό m. 1 V. θ'] corr. ex η' p, ιθ Vvc. 14. πρός — διαμέτρου] om. c. 15. οὕτως] οὕτω p, ut semper ante consonantes. 16. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. p.

diametrum alteram ducta diametro parallela quadrata aequalis erit spatio, ad quod rectangulum partibus alterius diametri comprehensum rationem habet, quam quadratum alterius diametri ad quadratum diametri.



sit cylindrus, et construatur ut in prop. XIV. quoniam igitur demonstrauimus [prop. XIV], esse $E\Theta \times \Theta H : Z\Theta^2$, ut EH^2 ad quadratum diametri basis rectam EH in duas partes aequales ordinate secantis, sicut ad prop. IX [p. 30, 16] demonstratum est, recta autem diametrum in duas partes aequales ordinate secans altera est diametrus, ut in propositione praecedenti, erit, ut EH^2 ad quadratum alterius diametri, ita $E\Theta \times \Theta H : Z\Theta^2$; quod erat demonstrandum.

iam uero supponamus, punctum Θ medium esse diametri EH, $Z\Theta\Phi$ autem ordinatam; itaque $Z\Phi$ altera diametrus est [prop. XV]. ad eam a sectione rectae EH parallela ducatur MN. dico, esse $\Phi N \times NZ : MN^2 = \Phi Z^2 : EH^2$.

ducatur per MN planum parallelogrammo $\Gamma\Delta$ parallelum cylindrum secans; sectionem igitur efficiet parallelogrammum [prop. III]. efficiat $P\Sigma$, et communes

---

19. ἡ $Z\Phi$] ἐστιν ἡ $Z\Phi$ καί p. 25. τέμνον] Halley, τέμνοντι Vcp, *per axem cylindrum secanti* Comm. δή] δέ c.

σαν δὲ κοιναὶ τομαὶ αὐτοῦ καὶ τῶν παραλλήλων κύκλων αἱ ΣΤ, ΞΟ, ΠΡ, αὐτοῦ δὲ καὶ τῆς ΕΖΗ τομῆς κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ ΜΝ. ἐπεὶ οὖν παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΓΔ, ΡΣ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ΚΖΛ ἐπιπέδου, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἡ ΚΘ τῇ ΝΞ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΝΜ παράλληλος· ἡ ἄρα ὑπὸ ΚΘΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΞΝΜ ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ τὸ ΡΣ παραλληλόγραμμον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΓΔ παραλληλογράμμῳ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ γ′ θεωρήματι, ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν ΣΠΡ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΕΓΑ ἴση ἐστί, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΣΞΝ τῇ ὑπὸ ΕΚΘ· ὅμοια ἄρα ἀλλήλοις τὰ ΕΚΘ, ΜΞΝ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, οὕτως ἡ ΞΝ πρὸς ΝΜ· καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῆς ΦΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΞΝ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΝΜ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΝΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΦΝ, ΝΖ· κύκλος γάρ ἐστιν ὁ ΚΖΛ, καὶ ὀρθὴ ἡ ΘΖ ἐπὶ τὰς ΚΘ, ΞΝ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΦΖ δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΦΝ, ΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ὃ προέκειτο δεῖξαι.

ιζ′.

Ἐὰν κυλίνδρου τομῆς συζυγεῖς διάμετροι ὦσι, καὶ ποιηθῇ, ὡς ἡ διάμετρος τῆς τομῆς πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον, οὕτως ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς ἄλλην τινά, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀχθῇ τεταγμένως, δυνήσεται τὸ παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον πλάτος ἔχον τὴν ὑπ' αὐτῆς τῆς τεταγμένως ἀχθείσης ἀπολαμ-

---

6. ΝΞ] ΞΝ p. 7. ΚΘΕ] ΘΚΕ c. 9. τῷ γ′] τῶ ιγ c. 10. τῶν (utrumque)] om. p. 11. ἡ] supra scr. c. 17. τό]

sectiones eius circulorumque parallelorum sint ΣT, ΞO, ΠP, eius autem sectionisque EZH communis sectio sit MN. quoniam igitur plana parallela $\Gamma \Delta$, $P\Sigma$ a plano $KZ\Lambda$ secantur, communes eorum sectiones parallelae sunt [Eucl. XI, 16]; itaque $K\Theta$, $N\Xi$ parallelae sunt. erant autem etiam ΘE, NM parallelae; quare $\angle K\Theta E = \Xi NM$ [Eucl. XI, 10]. et quoniam parallelogramma $P\Sigma$, $\Gamma\Delta$ aequiangula sunt, ut in prop. III demonstratum est, erit $\angle \Sigma\Pi P = E\Gamma\Delta$, hoc est $\Sigma\Xi N = EK\Theta$; quare trianguli $EK\Theta$, $M\Xi N$ similes sunt. itaque [Eucl. VI, 4] $K\Theta : \Theta E = \Xi N : NM$; quare etiam $K\Theta^2 : \Theta E^2 = \Xi N^2 : NM^2 = \Phi Z^2 : EH^2$. est autem $N\Xi^2 = \Phi N \times NZ$; nam $KZ\Lambda$ circulus est et ΘZ ad $K\Theta$, ΞN perpendicularis. ergo, ut quadratum alterius diametri ΦZ ad quadratum diametri EH, ita $\Phi N \times NZ : MN^2$; quod erat demonstrandum.

XVII.

Si sectionis cylindri diametri sunt coniugatae, et fit, ut diametrus sectionis ad alteram diametrum, ita altera diametrus ad aliam, quaecunque a sectione ad diametrum ordinate ducitur, quadrata aequalis erit spatio tertiae proportionali adplicato latitudinem habenti rectam ab ipsa recta ordinate ducta ad sectionem abscisam deficienti spatio simili rectangulo a diametro tertiaque proportionali comprehenso.

τῷ p. τῆς] pc, τῆν Vv. $N\Xi$] ΞN p. τῷ] τό p. ὑπό] p, ἀπό Vc. 19. ΦZ] p, $\Phi Z \Delta$ Vc. 21. NZ] p, $N\Xi$ Vc. ὅ — 22. δεῖξαι] om. p. 25. τῆς — 26. διάμετρον] bis V. 26. οὕτως] τῆς τομῆς οὕτως c. 29. ἔχον] ἔχειν p. ὑπ'] scripsi, ἀπ' Vcp. τεταγμένως] cp, τεταγμένης V.

βανομένην πρὸς τῇ τομῇ ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς τρίτης ἀνάλογον.

ἔστω κυλίνδρου τομή, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, δευτέρα δὲ διάμετρος ἡ ΓΔ, καὶ γενέσθω, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ κείσθω ἡ ΑΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ, καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἤχθω τεταγμένως ἡ ΕΖ, καὶ παρὰ μὲν τὴν ΑΗ ἡ ΖΘ, παρὰ δὲ τὴν ΑΖ ἡ ΘΚ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘ παραλληλογράμμῳ.

ἐπεί, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΒΖ πρὸς ΖΘ, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΖ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΖ, ΖΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖ, ΖΑ, τουτέστι τὸ ΑΘ παραλληλόγραμμον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΑΗ τρίτην ἀνάλογον πλάτος ἔχον τὴν ΑΖ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ὑπὸ ΗΚΘ ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΗΑΒ.

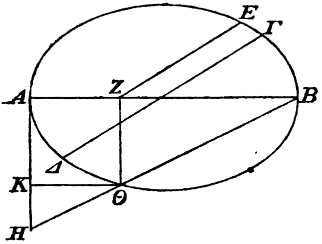
καλείσθω δὲ ἡ μὲν ΑΒ πλαγία τοῦ εἴδους πλευρά, ἡ δὲ ΑΗ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά.

Τούτων οὕτως ἐχόντων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἡ ΑΒΓ τοῦ κυλίνδρου τομὴ ἔλλειψίς ἐστιν· ὅσα γὰρ ἐνταῦθα τῇ τομῇ ἐδείχθη ὑπάρχοντα, πάντα ὁμοίως καὶ ἐπὶ τοῦ κώνου τῇ ἐλλείψει ὑπῆρχεν, ὡς ἐν τοῖς Κωνικοῖς δείκνυται θεωρήματι ιε' τοῖς δυναμένοις λέγειν τὴν ἀκρίβειαν τοῦ θεωρήματος, καὶ ἡμεῖς ἐν τοῖς εἰς αὐτὰ ὑπομνήμασι γεωμετρικῶς ἀπεδείξαμεν.

---

5. ΑΗ] e corr. p. 9. ἀπό] vcp, ἀ- e corr. m. 1 V. ΕΖ] ΕΤΖ c. 10. ἐπεί] ἐπεὶ γάρ p. 11. ΖΘ] τὴν ΖΘ p (cum alibi fere post πρός articulum omittat). 13. ΖΑ — ΒΖ] om.

sit sectio cylindri, cuius diametrus sit AB, altera autem diametrus $\Gamma\Delta$, et fiat $\Gamma\Delta : AH = AB : \Gamma\Delta$, ponaturque AH ad AB perpendicularis, et ducatur BH, ad AB autem ordinate ducatur EZ et rectae AH parallela $Z\Theta$, rectae AZ autem ΘK. dico, esse $EZ^2 = A\Theta$.



quoniam est [Eucl. V def. 9]

$$AB^2 : \Gamma\Delta^2 = AB : AH = BZ : Z\Theta$$ [Eucl. VI, 4], uerum [prop. XVI] $AB^2 : \Gamma\Delta^2 = BZ \times ZA : EZ^2$ et $BZ : Z\Theta = BZ \times ZA : \Theta Z \times ZA = BZ \times ZA : A\Theta$, erit $EZ^2 = A\Theta$, quod tertiae proportionali AH adplicatum est latitudinem habens AZ deficiens rectangulo $HK \times K\Theta$ simili rectangulo $HA \times AB$.

adpelletur autem AB latus transuersum figurae, AH uero latus rectum figurae.

Quae cum ita sint, manifestum est, $AB\Gamma$ cylindri sectionem ellipsim esse; nam quaecunque hic de sectione ualere demonstrauimus, omnia etiam in cono de ellipsi eodem modo ualebant, ut in Conicis demonstratur prop. XV [Apollon. I, 15], si quis uerum propositionis sensum intellegere potest, et nos in commentariis ad ea editis geometrice ostendimus.

V cp, corr. Comm. 14. πρὸς $Z\Theta$ — BZ, ZA] om. p. $Z\Theta$] $\Xi\Theta$ V c, corr. Comm. 18. $HK\Theta$] τῶν $\Theta K, KH$ p. HAB] AHB V c, τῶν BA, AH p, corr. Comm. 19. AB] AH p. 20. τοῦ εἴδους πλευρά] om. p. 21. ιζ′ mg. m. rec. V. ἐστιν] ἐστι c. 27. ὑπομνήμασι] ὑπομνήμασιν V.

ιη΄.

Ἐὰν ἐν κυλίνδρου τομῇ συζυγεῖς διάμετροι ὦσι, καὶ ποιηθῇ, ὡς ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον, οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς ἄλλην τινά, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον ἀχθῇ τεταγμένως, δυνήσεται τὸ παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον πλάτος ἔχον τὴν ὑπ' αὐτῆς τῆς τεταγμένως ἀχθείσης ἀπολαμβανομένην πρὸς τῇ τομῇ ἐλλεῖπον· εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου καὶ τῆς πορισθείσης τρίτης ἀνάλογον.

ἔστω κυλίνδρου τομή, καὶ γενέσθω, ὡς ἡ ΓΔ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν ΑΒ διάμετρον, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΗ, καὶ κείσθω ἡ ΓΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ, καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΕΖ, καὶ παρὰ μὲν τὴν ΓΗ ἡ ΖΘ, παρὰ δὲ τὴν ΓΔ ἡ ΘΚ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΘ παραλληλογράμμῳ.

ἐπεὶ γάρ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΗ, τουτέστιν ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΖ, ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ταῦτα γὰρ ἐδείχθη· ὡς δὲ ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΖ, ΖΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖ, ΖΓ, τουτέστι τὸ ΓΘ ὀρθογώνιον, ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ΓΘ,

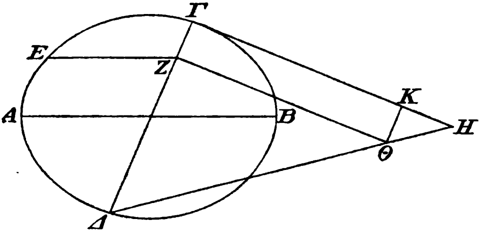
---

1. ιη΄] mg. m. rec. V, et sic deinceps. 7. ὑπ' αὐτῆς τῆς] scripsi, ὑπ' αὐτῆς Vc, ὑπὸ τῆς p. 12. ΑΒ (alt.)] ΑΗ c. 15. μέν] om. p. τὴν ΓΗ] bis p, sed corr. 17. παραλληλογράμμῳ] παραλληλ$\overset{:\ddot{ω}:}{ο}$γράμ$\overset{ω}{μ}$ c. 18. ΓΔ] ΓΘΔ p. 19. ΓΔ] ΔΓ p. 20. πρός — 22. ΖΘ] mg. p add. κείμενον (πρός etiam in textu, item ὡς δὲ ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ). 24. ΓΘ (pr.)] ΖΘ Vcp, corr. Comm. ἄρα] ἄρα ἐστί p.

XVIII.

Si in sectione cylindri diametri sunt coniugatae, et fit, ut altera diametrus ad diametrum, ita diametrus ad aliam, quaecunque a sectione ad alteram diametrum ordinate ducitur, quadrata aequalis erit spatio tertiae proportionali adplicato latitudinem habenti rectam ab ipsa recta ordinate ducta ad sectionem abscisam deficienti spatio simili rectangulo comprehenso ab altera diametro tertiaque proportionali, quam sumpsimus.

sit sectio cylindri, fiatque, ut altera diametrus $\Gamma\Delta$ ad diametrum AB, ita $AB : \Gamma H$, et ΓH ad $\Gamma\Delta$ perpendicularis ponatur, ducaturque ΔH, ad $\Gamma\Delta$ autem ordinate ducatur EZ et rectae ΓH parallela $Z\Theta$, $\Gamma\Delta$ autem rectae ΘK. dico, esse $EZ^2 = \Gamma\Theta$.



quoniam enim [Eucl. V def. 9]

$$\Gamma\Delta : \Gamma H = \Gamma\Delta^2 : AB^2 = \Delta Z : Z\Theta \text{ [Eucl. VI, 4]},$$

$$\text{et } \Gamma\Delta^2 : AB^2 = \Delta Z \times Z\Gamma : EZ^2$$

(haec enim demonstrata sunt) [prop. XVI], et

$$\Delta Z : Z\Theta = \Delta Z \times Z\Gamma : \Theta Z \times Z\Gamma = \Delta Z \times Z\Gamma : \Gamma\Theta,$$

In Vp linea $EZ\Theta$ recta est, ΓKH diametro AB parallela, in p $\Gamma\Delta$ ad AB perpendicularis.

ὃ παραβέβληται παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον τὴν ΓΗ πλάτος ἔχον τὴν ΖΓ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ὑπὸ ΘΚΗ ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΔΓΗ· ἅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ταῦτα σαφέστατα παρηκολούθει τῇ ἐλλείψει ἐν τῷ ιε′ θεωρήματι τῶν Κωνικῶν· ἔλλειψις ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒΓ τομὴ τοῦ κυλίνδρου.

ιθ′.

Ἐὰν ἐν κυλίνδρου τομῇ εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ἔσται τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα πρὸς μὲν τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς, ὡς τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν, πρὸς ἑαυτὰ δέ, ὡς τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν, ὡς εἴρηται, λαμβανομένων εὐθειῶν.

ἔστω κυλίνδρου τομὴ ἡ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΔ καὶ πλαγία πλευρὰ τοῦ εἴδους, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΑΗ, καὶ ἐπὶ τὴν ΑΔ τεταγμένως ἤχθωσαν αἱ ΒΕ, ΖΓ. λέγω, ὅτι τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ ἐστιν, ὡς ἡ ΗΑ πρὸς ΑΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἐστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΔ.

ἐπεὶ γάρ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου, οὕτως τό τε ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ καὶ ἡ ΑΗ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν ΑΔ πλαγίαν, ὡς ἄρα ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, οὕτως

---

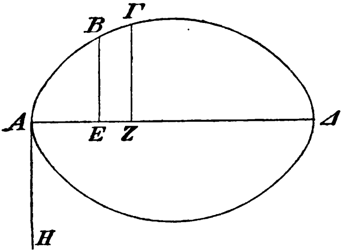
3. ἅπερ — δεῖξαι] om. p. 4. ταῦτα] καὶ ταῦτα δέ p. 6. ΑΒΓ] ΑΓΒ p. κυλίνδρου] des. fol. 175$^{\mathrm{v}}$ med. V, reliqua pars paginae uacat; in mg. inf. m. 2: ζήτει τὸ ἑπόμενον πρὸ φύλλων ⁜ ∴. 14. λαμβανομένων] ἀπολαμβανομένων p. 15. ΑΒΓΔ] ΑΒΓ c. 18. ΖΓ] ΓΖ p. 19. ΑΔ] ΑΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΔ ὡς ἡ ΗΑ πρὸς ΑΔ p.

erit $EZ^2 = \Gamma\Theta$, quod tertiae proportionali ΓH adplicatum est latitudinem habens $Z\Gamma$ deficiens spatio $\Theta K \times KH$ simili rectangulo $\Delta\Gamma \times \Gamma H$; quae erant demonstranda.

Haec manifestissime ellipsis propria adgnoscebantur in prop. XV Conicorum [Apollon. I, 15]; ergo $AB\Gamma$ sectio cylindri ellipsis est.

XIX.

Si in sectione cylindri rectae ad diametrum ordinate ducuntur, quadrata eorum erunt ad spatia comprehensa rectis ab iis ad terminos lateris transuersi figurae abscisis, ut latus rectum figurae ad transuersum, inter se autem, ut spatia comprehensa rectis sumptis, uti diximus.



sit cylindri sectio $AB\Gamma\Delta$, diametrus autem eius latusque transuersum figurae $A\Delta$, rectum autem latus figurae AH, et ad $A\Delta$ ordinate ducantur BE, $Z\Gamma$. dico, esse $BE^2 : AE \times E\Delta = HA : A\Delta$ et $BE^2 : \Gamma Z^2 = AE \times E\Delta : AZ \times Z\Delta$.

quoniam enim, ut quadratum alterius diametri ad quadratum diametri, ita et $BE^2 : AE \times E\Delta$ [prop. XVI] et AH latus rectum ad $A\Delta$ latus transuersum [prop. XVII], erit, ut latus rectum ad trans-

---

20. ἐστιν] om. p. 21. $AZ\Delta$] $A\Delta Z\Delta$ c. 24. AH] HA p. $A\Delta$] AB Vcp, corr. Comm.

τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΕ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕΔ*· ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΓΖ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΑΖΔ*. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΕ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΓΖ*, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕΔ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΖΔ*· ἃ προέκειτο δεῖξαι.

Καὶ ταῦτα δέδεικται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐν τοῖς Κωνικοῖς θεωρήματι κ΄.

Ἔστι μὲν οὖν καὶ δι' ἑτέρων πλείστων ἐπιδεῖξαι τὴν ταυτότητα τῶν τομῶν διὰ τῶν κοινῇ συμβαινόντων αὐταῖς· οὐ μὴν ἀλλὰ τά γε ἀρχικώτερα τῶν συμπτωμάτων εἴρηται σχεδόν. ἔπειτα μέχρι τοῦδε προαχθείσης τῆς θεωρίας οὐκ ἐμοὶ προσήκει τοὐντεῦθεν ἔτι τῶν λοιπῶν ἕκαστα διεξιόντι τοῖς ἀλλοτρίοις ἐνδιατρίβειν· ἀνάγκη γάρ που λεπτολογοῦντα περὶ ἐλλείψεως ἐπεισκυκλῆσαι καὶ τὰ τῷ Περγαίῳ Ἀπολλωνίῳ τεθεωρημένα περὶ αὐτῆς. ἀλλ' ὅτῳ σπουδὴ περαιτέρω σκοπεῖν, ἔξεστι ταῦτα παρατιθέντι τοῖς ἐν τῷ πρώτῳ τῶν Κωνικῶν εἰρημένοις αὐτῷ δι' αὐτοῦ βεβαιῶσαι τὸ προκείμενον· ὅσα γὰρ ἐν ἐκείνοις περὶ τὴν τοῦ κώνου τομὴν συμβαίνοντα τὴν καλουμένην ἔλλειψιν, τοσαῦτα καὶ περὶ τὴν τοῦ κυλίνδρου τομὴν ἐκ τῶν ἐνταῦθα προδεδειγμένων εὑρήσει συμβαίνοντα. διόπερ τούτου μὲν ἀποστάς, ὀλίγα δὲ ἄττα λημμάτια προσθείς, δι' ὧν καὶ αὐτῶν ἐνδείκνυταί πως ἡ τῶν τομῶν ταυτότης, ἐπ' ἄλλο τι τρέψομαι.

κ΄.

Λέγω τοίνυν, ὅτι δυνατόν ἐστι δεῖξαι κῶνον ὁμοῦ καὶ κύλινδρον μιᾷ καὶ τῇ αὐτῇ τεμνομένους ἐλλείψει.

---

4. ἃ — 5. δεῖξαι] om. p. 7. κ΄] κα΄ Halley cum Comm. 10. αὐταῖς] p, αὐτοῖς Vc. 12. ἐμοὶ προσήκει] scripsi prae-

uersum, ita $BE^2 : AE \times E\Delta$; eodem autem modo etiam $\Gamma Z^2 : AZ \times Z\Delta$. ergo etiam permutando $BE^2 : \Gamma Z^2 = AE \times E\Delta : AZ \times Z\Delta$; quae erant demonstranda.

Etiam haec de ellipsi demonstrata sunt in Conicis prop. XX [Apollon. I, 21].

Fieri potest, ut per alia quoque plurima demonstremus, sectiones easdem esse, per communes earum proprietates; uerum praecipuae certe proprietates fere dictae sunt. iam quaestione huc producta meum non est alienis immorari ulterius singula reliquorum persequentem; necesse enim esset omnia de ellipsi consectantem ea quoque repetere, quae Apollonius Pergaeus de ea quaesiuit. sed quisquis ultra quaerere studet, ei licet haec cum iis comparanti, quae in primo libro Conicorum dicta sunt, ipsi per se propositum confirmare; nam quaecunque illic in coni sectione, ellipsis quae uocatur, adcidunt, eadem omnia etiam in cylindri sectione ex iis, quae hic demonstrata sunt, inueniet adcidentia. quare hoc omisso, paucis autem lemmatis additis, quae et ipsa quodam modo significant, sectiones easdem esse, ad aliud me conuertam.

XX.

Dico igitur, fieri posse, ut demonstremus, simul conum et cylindrum una eademque ellipsi secari.

---

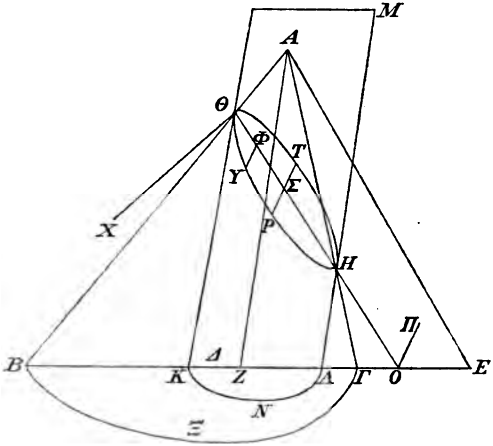
eunte Comm. (*ad me attinet*), *ἐμὸς ἥκει* Vcp, *ἐμοὶ ἥκει* Halley. 18. *αὑτοῦ*] *αὐτοῦ* V. 20. *συμβαίνοντα — ἔλλειψιν*] *τὴν καλουμένην ἔλλειψιν συμβαίνοντα* p. 23. *ἅττα*] *ἆττα* V.

ἐκκείσθω τρίγωνον σκαληνὸν τὸ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ΒΓ βάσεως δίχα τεμνομένης κατὰ τὸ Δ, καὶ μείζων ἔστω ἡ ΑΒ τῆς ΑΓ, καὶ πρὸς τῇ ΓΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ συνεστάτω γωνία ἡ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΕ ἤτοι μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἢ ἐλάσσων, καὶ συμπιπτέτω ἡ ΑΕ τῇ ΒΓΕ κατὰ τὸ Ε, καὶ τῶν ΒΕ, ΕΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ, καὶ τῇ ΑΕ παράλληλος ἐν τῷ τριγώνῳ διήχθω ἡ ΘΗ, καὶ διὰ τῶν Θ, Η σημείων τῇ ΑΖ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΘΚ, ΛΗΜ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΚΜ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τῆς ΒΕ ἀχθέντος ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς τῷ ΒΑΕ ἐπιπέδῳ γεγράφθω ἐν τῷ ἀχθέντι περὶ μὲν τὴν ΚΛ διάμετρον ὁ ΚΝΛ κύκλος βάσις ἐσόμενος κυλίνδρου, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΚΜ, περὶ δὲ τὴν ΒΓ διάμετρον ὁ ΒΞΓ κύκλος βάσις ἐσόμενος κώνου, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνόν ἐστι τὸ ΑΒΓ, καὶ τῆς ΘΗ ἐκβληθείσης ἐπὶ τὸ Ο ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΕ ἡ ΟΠ ἐν τῷ τῶν κύκλων ἐπιπέδῳ οὖσα, καὶ ἤχθω διὰ τῶν ΟΠ, ΟΘ εὐθειῶν ἐπίπεδον· ποιήσει δὴ τομὴν ἐν τῷ κώνῳ τῷ ἐπὶ τῆς ΒΞΓ βάσεως. ποιείτω τὴν ΘΡΗ· ἡ ΘΗ ἄρα εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς. τῆς οὖν ΘΗ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ Σ κατήχθωσαν τεταγμένως ἐπ' αὐτὴν δευτέρα μὲν διάμετρος ἡ ΡΣΤ, τυχοῦσα δὲ ἡ ΥΦ, καὶ γενέσθω, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ διαμέτρου τῆς ΘΡΗ τομῆς πρὸς τὸ

---

3. τῇ] inc. fol. 177^r, mg. sup. m. 2: τοῦτο ζητεῖται πρὸ φυλλ ἕξ. τῷ Α σημείῳ] τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α p. 4. τῶν ΓΑ, ΑΕ] ΓΑΕ p. 5. τῶν ΑΒ, ΒΓ] ΑΒΓ p. ἐλάσσων] ἐλᾶ p, ut saepissime. 6. ΒΓΕ] ΒΓ p. 25. ΘΡΗ] ΘΡΝ c.

ponatur triangulus scalenus *ΑΒΓ* in basi *ΒΓ* in *Δ* in duas partes aequales secta, sitque $ΑΒ > ΑΓ$, et ad *ΓΑ* rectam punctumque *Α* angulus construatur rectis *ΓΑ*, *ΑΕ* comprehensus aut maior angulo *ΑΒΓ* aut minor, et *ΑΕ* cum *ΒΓΕ* in *Ε* concurrat, rectarumque *ΒΕ*, *ΕΓ* media proportionalis sit *ΕΖ*, et ducatur *ΑΖ*, et rectae *ΑΕ* parallela in triangulo ducatur *ΘΗ*, et per puncta *Θ*, *Η* rectae *ΑΖ* parallelae ducantur *ΘΚ*, *ΛΗΜ*, expleaturque parallelogrammum *ΚΜ*, per *ΒΕ* autem ducto plano ad planum *ΒΑΕ* perpendiculari in plano ducto describatur circum *ΚΛ* diametrum circulus *ΚΝΛ*, qui basis erit cylindri, cuius est *ΚΜ* parallelogrammum per axem ductum, circum *ΒΓ* autem diametrum circulus *ΒΞΓ*, qui basis erit coni, cuius est *ΑΒΓ* triangulus per axem positus, et recta *ΘΗ* ad *Ο* producta ad *ΒΕ* perpendicularis ducatur *ΟΠ* in plano circulorum posita,



ἀπὸ τῆς ΡΤ δευτέρας διαμετρου τῆς αὐτῆς τομῆς, οὕτως ἡ ΘΗ πλαγία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν ΘΧ ὀρθίαν.

ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΘΚ τῇ ΑΖ παράλληλός ἐστιν, ἡ δὲ ΘΟ τῇ ΑΕ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΘΟ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΟ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ διαμέτρου τῆς τοῦ κώνου τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΡΤ δευτέρας διαμέτρου τῆς αὐτῆς τομῆς, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΟ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΟΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, τουτέστιν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ὡς ἐδείχθη πρότερον· ἡ ἄρα δευτέρα διάμετρος τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς ἴση ἐστὶ τῇ ΡΤ δευτέρᾳ διαμέτρῳ τῆς τοῦ κώνου τομῆς. καί ἐστιν ἡ διχοτομία τῆς ΘΗ κατὰ τὸ Σ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἄγεται τῇ ΘΗ δευτέρα διάμετρος τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ὥσπερ καὶ ἡ ΡΤ· ἡ ἄρα ΡΤ δευτέρα διάμετρός ἐστι τῆς τε τοῦ κώνου καὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς. ὁμοίως δὲ ἡ ΘΗ διάμετρός ἐστι τῆς τοῦ κώνου καὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς· τὸ Ρ ἄρα σημεῖον ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἐν ταῖς τομαῖς τοῦ τε κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου αἱ αὐταί εἰσι διάμετροι ἥ τε ΘΗ καὶ ἡ ΡΤ, καὶ ἡ τρίτη ἄρα ἀνάλογον ἡ αὐτή, τουτ-

---

2. ΘΗ] ΗΘ p. 6. ΚΟ] ΟΚ p. 11. πρὸς τό — 12. ΗΘ] om. p. 14. τῆς — τομῆς] om. p. 19. ἡ (alt.)] bis p. 21. τῆς τοῦ] τῆς τε τοῦ p. 22. Ρ ἄρα] ἄρα Ρ p. ἐπί] καὶ ἐπί p. 26. αὐτή] αὐτή ἐστι p.

et per rectas $O\Pi$, $O\Theta$ planum ducatur; efficiet igitur in cono, cuius basis est $B\Xi\Gamma$, sectionem. efficiat ΘPH; ΘH igitur recta diametrus est sectionis. recta igitur ΘH in Σ in duas partes aequales secta ordinate ad eam ducantur altera diametrus $P\Sigma T$ et alia quaelibet $\Upsilon\Phi$, fiatque, ut quadratum ΘH diametri sectionis ΘPH ad quadratum PT alterius diametri eiusdem sectionis, ita ΘH latus transuersum figurae ad ΘX latus rectum.

quoniam igitur ΘK rectae AZ parallela est, ΘO autem rectae AE, erit [Eucl. VI, 4]

$$AE^2 : EZ^2 = \Theta O^2 : KO^2.$$

est autem[1])

$$AE^2 : BE \times E\Gamma = \Theta H^2 : PT^2,$$

et $\Theta O^2 : OK^2 = \Theta H^2 : K\Lambda^2$ [Eucl. VI, 4], h. e. quadratum $H\Theta$ diametri sectionis cylindri ad quadratum alterius diametri sectionis cylindri, ut antea demonstratum, est [prop. IX extr.]; itaque altera diametrus sectionis cylindri aequalis est PT alteri diametro sectionis coni. et punctum medium rectae ΘH est Σ, et altera diametrus sectionis cylindri ad ΘH perpendicularis ducitur [prop. XV], sicut etiam PT; itaque PT altera diametrus est et coni et cylindri sectionis. eodem autem modo ΘH diametrus est et coni et cylindri sectionis. quare punctum P et in conica superficie et in superficie cylindri positum est. rursus quoniam in sectionibus et coni et cylindri eaedem sunt diametri ΘH et PT, etiam tertia

---

[1]) Nam ex Apollon. I, 13 erit $AE^2 : BE \times E\Gamma = \Theta H : \Theta X$, et ex hypothesi est $\Theta H : \Theta X = \Theta H^2 : PT^2$. praeterea ex hypothesi est $BE : EZ = EZ : E\Gamma$, h. e. $EZ^2 = BE \times E\Gamma$.

ἐστιν ἡ ΘΧ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά· ἡ ἄρα ΘΧ καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς ὀρθία ἐστὶ τοῦ εἴδους πλευρά. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΘΧ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΗΦ, ΦΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΦΥ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ὡς ἡ πλαγία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως καὶ ποιούσης τὰ τμήματα, καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἄρα τομῆς, ὡς ἡ ΘΗ πλαγία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν ΘΧ ὀρθίαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΗΦ, ΘΦ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἴσης τῇ ΥΦ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας ἀγομένης ἐπὶ τὴν ΘΗ. ἀλλ' ἡ ἴση τῇ ΥΦ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας ἐπ' αὐτὴν ἀγομένη κατὰ τὸ Φ οὐχ ἑτέρα ἐστὶ τῆς ΥΦ. ἡ ἄρα ΦΥ καὶ ἐν τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶ τομῇ· τὸ ἄρα Υ σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας ὂν καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἐπιφανείας. ὁμοίως δὲ δείκνυται, κἂν ὁσασοῦν ὁμοίως τεταγμένως ἀγάγωμεν. ἡ ΘΡΗ ἄρα γραμμὴ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις ἐστὶν ἀμφοτέρων τῶν σχημάτων· ἡ ΘΡΗ ἄρα τομὴ μία καὶ ἡ αὐτὴ ἐν ἀμφοτέροις ἐστὶ τοῖς σχήμασι. καὶ ἐπεὶ κατεσκευάσθη ἡ ὑπὸ ΓΑ, ΑΕ γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΗ, ΗΘ, ἤτοι μείζων ἢ ἐλάττων οὖσα τῆς πρὸς τῷ Β, ἡ ἄρα τομὴ οὐκ ἐστιν ὑπεναντία· ἡ ΘΡΗ ἄρα τομὴ οὐκ ἔστι κύκλος· ἔλλειψις ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΡΗ. καὶ τοῦ κώνου ἄρα τοῦ ἐκκειμένου καὶ τοῦ κυλίνδρου ἡ τομὴ αὕτη ἔλλειψίς ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

2. ἐπί] ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου καὶ ἐπί p. 3. ΘΗ] ΗΘ p. 9. ΘΗ] vp, Η euan. V (Ο?), ΘΟ c. 11. ΘΦ] ΦΘ p. 12. ἀγομένης] ἀγομένῃ Vcp? 13. γωνίας] cp, εὐθείας V, γρ. Γω

proportionalis eadem est, h. e. ΘX latus rectum figurae; ΘX igitur etiam in sectione cylindri latus rectum est figurae. quoniam igitur [Apollon. I, 21] $\Theta H : \Theta X = H\Phi \times \Phi\Theta : \Phi\Upsilon^2$, demonstrauimus autem [prop. XIX], etiam in sectione cylindri esse, ut latus transuersum figurae ad latus rectum, ita rectangulum partibus diametri comprehensum ad quadratum rectae ad eam ordinate ductae partesque efficientis, etiam in cylindri sectione erit, ut ΘH latus transuersum figurae ad ΘX rectum, ita $H\Phi \times \Theta\Phi$ ad quadratum rectae rectae $\Upsilon\Phi$ aequalis et ad ΘH ad aequales angulos ductae. uerum recta rectae $\Upsilon\Phi$ aequalis et ad illam ad aequales angulos ducta in Φ non alia est ac $\Upsilon\Phi$. itaque $\Phi\Upsilon$ etiam in cylindri sectione est; quare punctum Υ in superficie coni positum idem in superficie cylindri est. eodem autem modo demonstratur, quotcunque rectas eodem modo ordinatas duxerimus. itaque linea ΘPH in superficiebus utriusque figurae est; ΘPH igitur sectio una eademque in utraque figura est. et quoniam $\angle \Gamma AE$, h. e. $\angle AH\Theta$, constructus est aut maior aut minor angulo ad B posito, sectio non est contraria [prop. VI]; quare sectio ΘPH circulus non est [prop. IX]; itaque ellipsis est ΘPH. ergo haec et coni propositi et cylindri sectio ellipsis est; quod erat demonstrandum.

---

mg. m. 1. *ἐπ' αὐτήν*] V; om. c, add. mg. m. 1; *ἐπὶ τὴν* ΘH p, *ἐπὶ τὴν αὐτήν* Halley. Post *ἀγομένη* del. *ἐπὶ τὴν* ΘH m. 1 c. 14. *ἐστί*] om. p. 16. *τῆς*] cp, om. V? 21. ΓA, AE] ΓAE p. 22. AH, $H\Theta$] $AH\Theta$ p. 23. *ἐλάττων*] *ἐλάσσων* p. *τῆς*] cp, *τῇ* Vv. 26. *ἡ τομὴ αὕτη*] *τομὴ ἡ αὐτή* Halley cum Comm. 27. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. p.

κα΄.

Κώνου δοθέντος καὶ ἐλλείψεως ἐν αὐτῷ εὑρεῖν κύλινδρον τεμνόμενον τῇ αὐτῇ ἐλλείψει τοῦ κώνου.

ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα ἐν αὐτῷ ἔλλειψις, ἧς διάμετρος ἡ ΖΕ, ἥτις ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ παράλληλος τῇ ΖΔ ἡ ΑΜ, καὶ τῶν ΒΜ, ΜΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΜΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ, καὶ διὰ τῶν Ζ καὶ Ε σημείων τῇ ΑΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΘ, ΚΕΛ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΘΛ παραλληλόγραμμον. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κύλινδρον, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΘΚ κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΘΛ, ἔσται καὶ ἐν τῷ κυλίνδρῳ τομή, ἧς διάμετρός ἐστιν ἡ ΖΕ. ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι δειχθήσεται καὶ ἡ δευτέρα διάμετρος ἡ αὐτὴ οὖσα καὶ πᾶσαι αἱ τεταγμένως ἀγόμεναι. εὕρηται ἄρα κύλινδρος, ὃς τέμνεται τῇ δοθείσῃ ἐλλείψει τοῦ δοθέντος κώνου· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κβ΄.

Κυλίνδρου δοθέντος καὶ ἐλλείψεως ἐν αὐτῷ εὑρεῖν κῶνον τεμνόμενον τῇ αὐτῇ ἐλλείψει τοῦ κυλίνδρου.

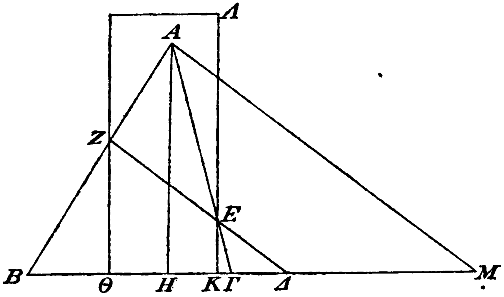
---

6. ἐκβεβλήσθω] ἐκβε extr. lin. c. ἐπί] καὶ συμπιπτέτω τῇ ΒΓ κατά p. Δ] vcp, e corr. m. 1 V. 7. ΑΜ] ΑΜ συμπίπτουσα τῇ ΒΔ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Μ p. τῶν] p, τῆς Vc. 11. κύλινδρον] om. p extr. lin. 13. ἐν τῷ] ἔστω Vcp, corr. Comm. κυλίνδρῳ] V, κυλίνδρου p et comp. c. 14. δή] δέ c. 18. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι] om. p. 19. κβ΄] om. V.

XXI.

Cono dato et in eo ellipsi cylindrum inuenire eadem coni ellipsi sectum.

sit datus conus, cuius triangulus per axem positus sit $AB\Gamma$, in eo autem data ellipsis, cuius diametrus ZE, quae ad Δ producatur, AM autem rectae $Z\Delta$ parallela, rectarumque BM, $M\Gamma$ media proportionalis sit MH, et ducatur AH, per puncta autem Z, E rectae AH parallelae ducantur $Z\Theta$, $KE\Lambda$, expleaturque parallelogrammum $\Theta\Lambda$. si igitur cylindrum finxerimus, cuius basis sit circulus circum diametrum ΘK, parallelogrammum autem per axem positum $\Theta\Lambda$, etiam in cylindro sectio erit, cuius diametrus est ZE. itaque eodem modo, quo in praecedenti propositione, demonstrabimus, etiam alteram diametrum eandem esse omnesque rectas ordinate ductas. ergo inuentus est cylindrus, qui data ellipsi dati coni secatur; quod fieri oportebat.



XXII.

Cylindro dato et in eo ellipsi conum inuenire eadem ellipsi cylindri sectum.

ἐκκείσθω ἔξωθεν εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ καὶ τυχὸν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Δ, καὶ γενέσθω, ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΕΔ, καὶ ἀπὸ μὲν τῶν Ε, Δ, Γ σημείων τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς οἱανδήποτε γωνίαν ἐφεστάτωσαν εὐθεῖαι παράλληλοι ἀλλήλαις αἱ ΕΖ, ΔΗ, ΓΘ, διὰ δὲ τοῦ Γ ἤχθω τις εὐθεῖα τέμνουσα τὰς ΕΖ, ΔΗ ἡ ΓΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΚ συμπιπτέτω τῇ ΔΗ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ.

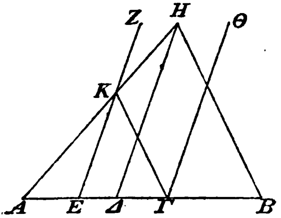
τούτων οὕτως ἰδίᾳ κατασκευασθέντων ἔστω ὁ δοθεὶς κύλινδρος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΛΜ, τῆς δὲ δοθείσης ἐν αὐτῷ ἐλλείψεως διάμετρος ἔστω ἡ ΝΞ, καὶ τετμήσθω ἡ ΛΞ βάσις τοῦ παραλληλογράμμου ὁμοίως τῇ ΕΓ, ἵν' ᾖ, ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΞ. ἔτι γενέσθω, ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞΠ, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΛΡ, καὶ διὰ τοῦ Ο ἤχθω παράλληλος ταῖς τοῦ παραλληλογράμμου πλευραῖς ἡ ΟΣ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΡΝ συμπιπτέτω τῇ ΟΣ κατὰ τὸ Σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΠ, ΣΞ.

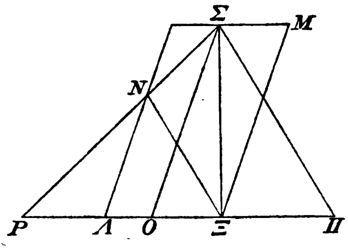
ἐπεὶ οὖν ἡ ΡΠ εὐθεῖα ὁμοίως τῇ ΑΒ τέτμηται, ἔστιν ἄρα καί, ὡς μὲν ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΟ, οὕτως ἡ ΟΠ πρὸς τὴν ΠΞ, ὡς δὲ ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΞ, οὕτως ἡ ΡΟ πρὸς τὴν ΟΛ, τουτέστιν ἡ ΡΣ οὕτως πρὸς τὴν ΣΝ· παράλληλος ἄρα τῇ ΝΞ ἡ ΣΠ. ἐὰν δὴ νοήσω-

---

2. *μέν*] om. p. 3. *ἡ ΔΒ* — 4. *οὕτως*] om. Vc, *ἥ τε ΔΒ πρὸς ΒΓ καί* p; corr. Comm. 4. *τήν* (alt.)] om. p. 7. *ΓΘ*] p, *ΓΔ* Vc. 14. *ἡ*] supra scr. p. 15. *γενέσθω*] *γινέσθω* p. 16. *ΓΒ*] p, *ΓΒ* uel *ΓΖ*, *Γ* e corr. m. 1, V, — mg.; *ΓΖ* v, *ΓΞ*? c. 20. *Σ*] e corr. m. 1 c. 23. *καί*] om. p. *μέν*]

ponatur seorsum recta AB et in ea quodlibet punctum Δ, fiatque $AB : B\Delta = \Delta B : B\Gamma$ et $AB : B\Gamma = A\Delta : E\Delta$, a punctis E, Δ, Γ autem ad quemlibet angulum ad rectam AB erigantur rectae inter se parallelae EZ, ΔH, $\Gamma\Theta$, per Γ autem recta aliqua ducatur rectas EZ, ΔH secans ΓK, et ducta AK cum ΔH in H concurrat, ducaturque HB.





his seorsum ita constructis sit datus cylindrus, cuius est parallelogrammum per axem ductum ΛM, diametrus autem ellipsis in eo datae sit $N\Xi$, seceturque basis parallelogrammi $\Lambda\Xi$ eodem modo, quo $E\Gamma$, ita ut sit $E\Delta : \Delta\Gamma = \Lambda O : O\Xi$. praeterea fiat $\Lambda\Xi : \Xi\Pi = E\Gamma : \Gamma B$ et $\Xi\Lambda : \Lambda P = \Gamma E : EA$, et per O lateribus parallelogrammi parallela ducatur $O\Sigma$, ductaque PN cum $O\Sigma$ concurrat in Σ, et ducantur $\Sigma\Pi$, $\Sigma\Xi$.

quoniam igitur recta $P\Pi$ eodem modo secta est, quo AB, erit etiam $P\Pi : \Pi O = O\Pi : \Pi\Xi$ et $P\Pi : \Pi\Xi = PO : O\Lambda = P\Sigma : \Sigma N$ [Eucl. VI, 2; V, 18]; itaque $N\Xi$, $\Sigma\Pi$ parallelae sunt [Eucl. V, 17; VI, 2].

---

om. p. ἡ *ΟΠ*] ἥ τε *ΟΠ* p. 24. ὡς — οὕτως] καί p. *ΡΠ*] *ΟΠ* Vc, corr. Comm. 25. οὕτως] om. p. 26. *ΣΠ*] *ΟΠ* c.

μεν κῶνον, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΡΞ κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΣΡΞ, ἔσται καὶ ἐν τῷ κώνῳ τομή, ἧς διάμετρός ἐστιν ἡ ΝΞ. ὁμοίως δὴ τοῖς προδεδειγμένοις δειχθήσεται καὶ ἡ δευτέρα διάμετρος ἡ αὐτὴ οὖσα καὶ πᾶσαι αἱ τεταγμένως ἀγόμεναι. τέτμηται ἄρα καὶ ὁ κῶνος τῇ αὐτῇ ἐλλείψει τοῦ δοθέντος κυλίνδρου· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κγʹ.

Κώνου δοθέντος εὑρεῖν κύλινδρον καὶ τεμεῖν ἀμφοτέρους ἑνὶ ἐπιπέδῳ διὰ τῆς τομῆς ποιοῦντι ἐν ἑκατέρῳ ὁμοίας ἐλλείψεις.

δεδόσθω κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὸ Α κέντρον κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Β σημεῖον, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΓΒΔ πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει τοῦ κώνου, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα ἡ ΑΓΕ, ΑΔΖ, καὶ πρὸς τῇ ΔΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΖ γωνία ἤτοι μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ ΒΓΔ ἢ ἐλάσσων, καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ, τοῦ δὲ ζητουμένου κυλίνδρου βάσις ἔστω ἤτοι ὁ Α κύκλος ἢ καὶ ἄλλος τις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ Α κύκλῳ· οὐδὲν γὰρ διοίσει. ἔστω δὴ ὁ περὶ τὴν ΕΘ διάμετρον, καὶ διὰ τῶν Ε, Θ σημείων παράλληλοι τῇ ΒΗ εὐθείᾳ ἤχθωσαν αἱ ΕΚ, ΘΛ· ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ

---

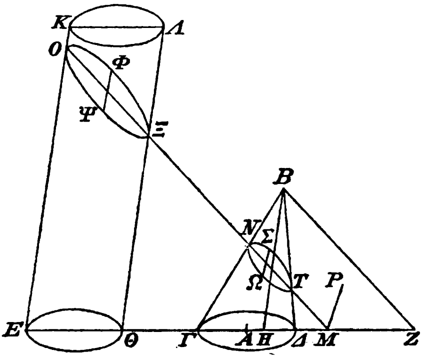
2. τρίγωνον] τρῖγωνον, τρῖγ e corr. m. 1, V. 3. τομή] p, τομῆς Vc. 7. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι] om. p. 8. κγʹ] κβʹ mg. m. rec. V. 14. ὄν] p, ἐν Vc. 15. ἡ ΑΓΕ, ΑΔΖ] ἡ ΓΔ κατὰ τὰ Ε καὶ Ζ σημεῖα p. 16. τῇ] τήν p. 17. τῶν ΔΒ, ΒΖ] ΔΒΖ p. 19. εἰλήφθω] ἔστω p. 22. δή] δέ Vcp, corr. Halley cum Comm. 23. ΒΗ εὐθείᾳ] ΗΒ εὐθεῖαι p.

quare si conum finxerimus, cuius basis sit circulus circum diametrum $P\Xi$, triangulus autem per axem positus $\Sigma P\Xi$, in cono quoque sectio erit, cuius diametrus est $N\Xi$. iam eodem modo, quo antea, demonstrabimus, etiam alteram diametrum et omnes rectas ordinate ductas easdem esse. ergo etiam conus eadem ellipsi dati cylindri sectus est; quod fieri oportebat.

XXIII.

Cono dato cylindrum inuenire et utrumque secare uno plano, quod per sectionem in utroque similes ellipses efficiat.

datus sit conus, cuius basis sit circulus circum A centrum, uertex autem punctum B, triangulus autem per axem positus $\Gamma B\Delta$ ad basim coni perpendicularis, et ad utramque partem producantur $A\Gamma E$, $A\Delta Z$, et ad ΔB punctumque eius B construatur angulus ΔBZ aut maior aut minor angulo $B\Gamma\Delta$, rectarumque ΓZ, $Z\Delta$ media proportionalis sumatur ZH, et ducatur BH, quaesiti autem cylindri basis sit aut A circulus aut alius in eodem plano positus ac circulus A; nihil enim intererit. sit igitur circulus circum $E\Theta$ diametrum, et per puncta E, Θ



ΓΒΔ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΖ τέμνει τὴν ΒΗ, ἡ ΒΖ ἄρα ἐκβαλλομένη πάσας τὰς τῇ ΒΗ παραλλήλους ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένας τέμνει· καὶ αἱ παράλληλοι οὖν τῇ ΒΖ τὰς τῇ ΒΗ παραλλήλους τέμνουσιν. ἤχθω τῇ ΒΖ παράλληλος ἡ ΜΝ καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὰς ΘΛ, ΕΚ κατὰ τὰ Ξ, Ο σημεῖα, καὶ τῇ ΕΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ καὶ περὶ τὴν ΚΛ διάμετρον κύκλος παράλληλος τῷ περὶ τὴν ΕΘ· νοηθήσεται δὴ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ ΕΘ, ΚΛ κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΚΘ, δηλονότι καὶ αὐτὸ πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει. καὶ ἐὰν διὰ τοῦ Μ τῇ ΓΔΖ βάσει πρὸς ὀρθὰς ἀγάγωμεν τὴν ΜΡ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαν τῷ Α κύκλῳ καὶ διὰ τῶν ΜΡ, ΜΟ διεκβάλλωμεν ἐπίπεδον, ποιήσει ἐν μὲν τῷ κώνῳ τὴν ΝΣΤ ἔλλειψιν, ἐν δὲ τῷ κυλίνδρῳ τὴν ΟΦΞ, διάμετροι δὲ τῆς μὲν ἡ ΝΤ, τῆς δὲ ἡ ΟΞ. λέγω δή, ὅτι ἡ ΝΣΤ ἔλλειψις τῇ ΟΦΞ ἐλλείψει ὁμοία ἐστίν.

ἐπεὶ γὰρ αἱ ΟΜ, ΒΖ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις, ἀλλὰ καὶ αἱ ΕΚ, ΘΛ, ΒΗ παράλληλοι ἀλλήλαις, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ τέμνει, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΕ, τουτέστιν ὡς ἡ ΟΞ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΟΞ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΟΞ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΟΞ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, φέρε τῆς ΦΨ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΝΤ διαμέτρου

---

1. ΒΗ] ΗΒ p. 2. ΒΗ] ΗΒ p. 9. βάσεις] p, βάσις Vc. 13. τῷ Α κύκλῳ] τοῖς κύκλοις p. διεκβάλλωμεν] διεκβάλωμεν p. 14. ΝΣΤ] σ̅τ̅ p. 15. ἔλλειψιν] ἔλειψιν p.

rectae BH parallelae ducantur EK, $\Theta\Lambda$; in eodem igitur plano sunt ac triangulus $\Gamma B\Delta$. et quoniam BZ rectam BH secat, BZ producta omnes rectas rectae BH parallelas in infinitum productas secat; quare etiam rectae rectae BZ parallelae rectas rectae BH parallelas secant. ducatur MN rectae BZ parallela et producta rectas $\Theta\Lambda$, EK secet in punctis Ξ, O, rectaeque $E\Theta$ parallela ducatur $K\Lambda$ et circum $K\Lambda$ diametrum circulus circulo circum $E\Theta$ descripto parallelus; cylindrus igitur fingi poterit, cuius bases sint circuli $E\Theta$, $K\Lambda$, parallelogrammum autem per axem positum $K\Theta$, scilicet et ipsum ad basim perpendiculare. et si per M ad basim $\Gamma\Delta Z$ perpendicularem duxerimus MP in eodem plano positam, quo circulus Λ, et per MP, MO planum duxerimus, efficiet in cono ellipsim $N\Sigma T$, in cylindro autem $O\Phi\Xi$, diametri autem erunt alterius NT, alterius $O\Xi$. dico, ellipsim $N\Sigma T$ ellipsi $O\Phi\Xi$ similem esse.

quoniam enim OM, BZ inter se parallelae sunt, sed etiam EK, $\Theta\Lambda$, BH inter se parallelae, EZ autem communis secat, erit [Eucl. VI, 4]
$OM : ME = BZ : ZH = O\Xi : \Theta E$ [Eucl. VI, 2; V, 18]; quare etiam $O\Xi^2 : \Theta E^2 = BZ^2 : ZH^2 = BZ^2 : \Gamma Z \times Z\Delta$. uerum ut quadratum diametri $O\Xi$ ad ΘE^2, ita quadratum diametri $O\Xi$ ad quadratum diametri coniugatae, uelut $\Phi\Psi$ [prop. IX extr.], et ut $BZ^2 : \Gamma Z \times Z\Delta$, ita quadratum diametri NT ad quadratum diametri coniugatae, uelut $\Sigma\Omega$ [Apoll. I, 13; prop. XVII]; ita-

---

16. ἡ NT] $\overline{\eta\nu\tau}$ V. δή] om. p. 19. BH] HB p. 25. ΘE] $E\Theta$ p. 27. φέρε] om. p. $\Phi\Psi$] ΦX p.

πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, φέρε τῆς ΣΩ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΟΞ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΦΨ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΝΤ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΣΩ. καὶ ὡς ἡ ΟΞ ἄρα πρὸς τὴν ΦΨ συζυγῆ διάμετρον, οὕτως καὶ ἡ ΝΤ πρὸς τὴν ΣΩ συζυγῆ διάμετρον. ὅτι δὲ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας τέμνουσιν ἥ τε ΟΞ τὴν ΦΨ καὶ ἡ ΝΤ τὴν ΣΩ, δῆλον· τὰς γὰρ ΨΦ, ΩΣ παραλλήλους οὔσας ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΜΡ ἡ ΜΟ τέμνει. ἡ ἄρα ΟΦΞ τομὴ τῇ ΝΣΤ τομῇ ὁμοία ἐστί. καὶ οὔκ ἐστι κύκλος οὐδετέρα αὐτῶν διὰ τὸ μὴ ὑπεναντίαν εἶναι τὴν τομὴν τῆς ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΖ γωνίας, τουτέστι τῆς ὑπὸ τῶν ΒΤ, ΤΝ, ἀνίσου οὔσης τῇ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ. ἔλλειψις ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΟΦΞ, ΝΤΣ τομῶν, καί εἰσιν ὅμοιαι ἀλλήλαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδʹ.

Κυλίνδρου δοθέντος εὑρεῖν κῶνον καὶ τεμεῖν ἀμφοτέρους ἑνὶ ἐπιπέδῳ ποιοῦντι διὰ τῆς τομῆς ἐν ἑκατέρῳ ὁμοίας ἐλλείψεις.

δεδόσθω κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ Α κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ, τοῦ δὲ ζητουμένου κώνου βάσις ἔστω ἤτοι ὁ Α κύκλος ἢ καὶ ἄλλος τις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ Α, οἷον περὶ τὴν ΕΖ διάμετρον, ἐφ' ἧς κέντρον τὸ Δ, καὶ ληφθέντος σημείου τυχόντος ἐπὶ τῆς ΖΗ τοῦ Η εἰλήφθω

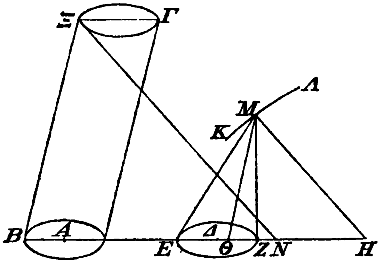
---

1. φέρε] om. p. 2. ΟΞ] vp, $\overset{\frown}{\underset{o}{\omega\xi}}$ V, ὦξ c. ΦΨ] ΦΧ p. 4. ΦΨ] ΧΦ p. οὕτως καί] om. p. 6. ΦΨ] ΦΧ p. 7. ΨΦ, ΩΣ] ΦΧ, ΣΩ p. 8. ΜΟ] ΟΜ p. 11. τῶν ΔΒ, ΒΖ] ΔΒΖ p. τῶν ΒΤ, ΤΝ] ΒΤΝ p. 12. τῶν ΒΓ, ΓΔ] ΒΓΔ p. 13. ΝΤΣ] ΝΣΤ p. 14. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. p.

que $O\Xi^2 : \Phi\Psi^2 = NT^2 : \Sigma\Omega^2$. quare etiam, ut $O\Xi$ ad diametrum coniugatam $\Phi\Psi$, ita etiam NT ad diametrum coniugatam $\Sigma\Omega$. uerum etiam ad aequales angulos secare $O\Xi$ rectam $\Phi\Psi$ et NT rectam $\Sigma\Omega$, manifestum est; nam rectas $\Psi\Phi$, $\Omega\Sigma$ inter se rectaeque MP parallelas MO secat. itaque sectio $O\Phi\Xi$ sectioni $N\Sigma T$ similis est [def. 8]. et neutra earum circulus est, quia sectio contraria non est, cum $\angle \Delta BZ$ siue $\angle BTN$ angulo $B\Gamma\Delta$ inaequalis sit. ergo utraque sectio $O\Phi\Xi$, $NT\Sigma$ ellipsis est, et inter se similes sunt; quod erat demonstrandum.

XXIV.

Cylindro dato conum inuenire et utrumque uno plano secare, quod per sectionem in utroque similes ellipses efficiat.



datus sit cylindrus, cuius basis sit A circulus, parallelogrammum autem per axem positum $B\Gamma$ ad basim perpendiculare, producaturque BA, quaesiti autem coni basis sit aut A circulus aut alius in eodem plano positus, quo A, uelut circum EZ diametrum, in qua sit

---

15. *κδ'*] *κγ'* mg. m. rec. V. 21. *ὄν*] om. c. 22. *κώνου*] p, *τριγώνου* Vvc. 23. *περί*] Vvc, *ὁ περί* p. 24. *Δ*] Z Vc, *Δ καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ* EZ p. 25. *σημειον τυχοντος*] *τυχόντος σημείου* p. *τοῦ H*] om. p.

τῶν ΕΗ, ΗΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΘΗ, καὶ κέντρῳ τῷ Η, διαστήματι δὲ ἤτοι μείζονι ἢ ἐλάττονι τοῦ ΗΘ γεγράφθω ἐν τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ περιφέρεια κύκλου ἡ ΚΛ, καὶ διὰ τοῦ Θ ταῖς πλευραῖς τοῦ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, καὶ τῇ ΜΗ παράλληλος ἤχθω τέμνουσα τὸ τρίγωνον καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ἡ ΝΞ. ἐὰν δὴ διὰ τῆς ΝΞ διαγάγωμεν ἐπίπεδον κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον, ἔσται ἡ τομὴ ὁμοία ἐν ἑκατέρῳ, δεῖξις δὲ ἡ αὐτὴ τῷ πρὸ τούτου. ὅτι δὲ καὶ ἐλλείψεις αἱ τομαὶ καὶ οὐχὶ κύκλοι, δῆλον· τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ΜΗ ἤτοι μεῖζον κατεσκευάσθη ἢ ἔλαττον τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ.

κε΄.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ τετμημένη κατὰ τὸ Γ καὶ Δ, ἡ δὲ ΑΓ τῆς ΔΒ μὴ ἔστω μείζων. λέγω δή, ὅτι, ἐὰν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ ἴσον χωρίον παρὰ τὴν ΑΓ παραβάλλω ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων μὲν ἔσται τῆς ΓΔ, ἐλάττων δὲ τῆς ΓΒ.

εἰ γὰρ δυνατόν, ὑποκείσθω πρῶτον ἡ ΓΔ πλευρὰ εἶναι τοῦ ὑπερβλήματος. ἐπεὶ οὖν τὸ παρὰ τὴν ΑΓ παραβαλλόμενον ὑπερβάλλον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ ταὐτόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ, ἔστι δὲ τὸ παρὰ τὴν

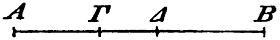
---

1. ἀνάλογον] vcp, -νά- suppleuit m. rec. V. 3. γεγράφθω] κύκλος γεγράφθω p. ΒΓ] vc, Β corr. ex Η m. 1 V, διὰ τοῦ ΒΓ p. 5. ΜΕ] ΜΕ, ΜΘ Vcp; corr. Comm. 8. διαγάγωμεν] διάγωμεν c? 10. τούτου] τού|τούτου V. 14. κε΄] om. V. 15. Ante ἔστω add. ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ κατὰ δύο σημεῖα, τὸ δὲ πρὸς τῷ ἑνὶ πέρατι τῆς εὐθείας τμῆμα μὴ μεῖζον ᾖ τοῦ πρὸς τῷ λοιπῷ πέρατι τμήματος, τῷ δὲ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ τε μέσου τμήματος καὶ τοῦ λοιποῦ τετραγώνῳ

centrum Δ, et sumpto in ZH quolibet puncto H sumatur rectarum EH, HZ media proportionalis ΘH, et centro H, radio autem aut maiore aut minore quam $H\Theta$ in plano $B\Gamma$ circuli arcus describatur $K\Lambda$, per Θ autem lateribus parallelogrammi $B\Gamma$ parallela ducatur ΘM, ducanturque ME, MZ, MH, et rectae MH parallela ducatur $N\Xi$ triangulum parallelogrammumque secans. itaque si per $N\Xi$ planum eo, quem significauimus, modo duxerimus, sectio in utroque similis erit, demonstratio autem eadem, quae in praecedenti. uerum etiam ellipses, non circulos, esse sectiones, manifestum est; nam MH^2 constructum est aut maius aut minus quam $H\Theta^2$ siue $EH \times HZ$.[1])

XXV.

Sit recta AB secta in Γ et Δ, ne sit autem $A\Gamma > \Delta B$. dico, si rectae $A\Gamma$ adplicuerim spatium quadrato ΓB^2 aequale figura quadrata excedens, latus excessus fore $> \Gamma\Delta$, sed $< \Gamma B$.



nam, si fieri potest, primum supponatur $\Gamma\Delta$ latus excessus esse. quoniam igitur spatium rectae $A\Gamma$ adplicatum quadrato $\Gamma\Delta^2$ excedens est $A\Delta \times \Delta\Gamma$, uerum spatium rectae $A\Gamma$

---

1) Si enim $MH^2 = EH \times HZ$, est $MEH \sim MZH$ [Eucl. VI, 6] et $\angle\, MEH = ZMH$; sectio igitur contraria esset et circulus.

ἴσον παρὰ τὸ μὴ μεῖζον τμῆμα παραβληθῇ ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων μὲν ἔσται τοῦ μέσου τμήματος, ἐλάττων δὲ συναμφοτέρου τοῦ τε μέσου καὶ τοῦ πρὸς τῷ λοιπῷ πέρατι τμήματος p. 16. δή] om. p. ἐάν] cp, ἐὰν ἐν V. 18. παραβάλω] παραβληθῇ p.

ΑΓ παραβαλλόμενον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ οὐκ ἔλαττον· οὐ γὰρ ἐλάττων ἡ ΔΒ τῆς ΑΓ οὐδὲ ἡ ΓΒ τῆς ΑΔ· καὶ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνου οὔκ ἐστιν ἔλαττον· ὅπερ ἀδύνατον. τὸ δὲ αὐτὸ δειχθήσεται, εἰ καὶ ἐλάττων τῆς ΓΔ ὑποτεθείη γίνεσθαι ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος.

ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος ἡ ΓΒ. ἔσται ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ· ὅπερ ἀδύνατον. τὸ αὐτὸ δέ, εἰ καὶ μείζων τῆς ΓΒ ὑποτεθείη γίνεσθαι ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος.

ἡ ἄρα πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων ἔσται τῆς ΓΔ, ἐλάττων δὲ τῆς ΓΒ.

κϛ΄.

Κυλίνδρου δοθέντος τετμημένου ἐλλείψει κῶνον συστήσασθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τεμνόμενον καὶ ποιοῦντα ὁμοίαν ἔλλειψιν τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψει.

ἔστω ὁ δοθεὶς κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὸ Α κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓ, ἐν ᾧ διάμετρος τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἡ ΕΔ, ἥτις ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ΒΑ κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῇ ΔΖ διὰ τοῦ Γ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ συμπίπτουσα τῇ ΒΑ κατὰ τὸ Η, καὶ προσεκβεβλήσθω ἡ ΖΔΘ εὐθεῖα.

---

3. τετραγώνῳ] om. p. 8. εἰ καί] καὶ εἰ p. 11. ΓΒ] vcp, corr. ex ΓΔ m. 1 V. 12. τετραγώνῳ] om. p. αὐτό —

adplicatum figura quadrata excedens aequale est quadrato ΓB^2, erit $A\Delta \times \Delta\Gamma = \Gamma B^2$. sed ΓB^2 non minus est quam $A\Delta^2$; neque enim $\Delta B < A\Gamma$ nec $\Gamma B < A\Delta$; quare etiam $A\Delta \times \Delta\Gamma$ non minus est quam $A\Delta^2$; quod fieri non potest. idem autem demonstrabitur etiam, si supposuerimus, latus excessus fieri $< \Gamma\Delta$.

iam rursus ΓB latus sit excessus. erit igitur $AB \times B\Gamma = \Gamma B^2$; quod fieri non potest. idem autem etiam, si supposuerimus, latus excessus fieri $> \Gamma B$.

ergo latus excessus erit $> \Gamma\Delta$, sed $< \Gamma B$.

XXVI.

Cylindro dato ellipsi secto conum construere in eadem basi cylindri et sub eadem altitudine, qui eodem plano secetur et ellipsim ellipsi cylindri similem efficiat.

sit datus cylindrus, cuius basis sit circulus circum A centrum descriptus, parallelogrammum autem per axem positum $B\Gamma$, in quo diametrus datae ellipsis sit $E\Delta$, quae producta cum BA in Z concurrat, rectae autem ΔZ parallela per Γ ducatur ΓH cum BA in H concurrens, producaturque recta $Z\Delta\Theta$.

quoniam igitur parallelogrammi ΘH latus ZH lateri $\Theta\Gamma$ aequale est, non est autem $\Theta\Gamma < BK$, non est $ZH < BK$. itaque si spatium quadrato KH^2

---

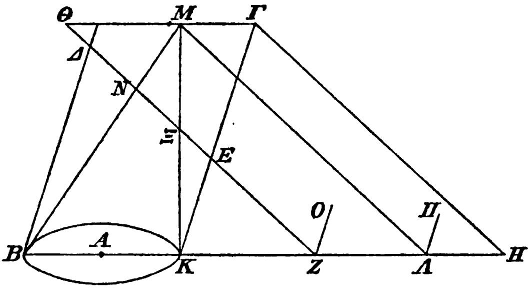
13. καί] δ' αὐτὸ καὶ εἰ p. 13. ΓB] $B\Gamma$ p. 15. ἔσται] μέν ἐστι p. 17. κϛ′] κδ′ m. rec. V. 26. τῇ — Γ] διὰ τοῦ Γ τῇ ΔZ p. 28. $Z\Delta\Theta$] $Z\Delta$ p.

ἐπεὶ οὖν τοῦ ΘΗ παραλληλογράμμου ἡ ΖΗ πλευρὰ τῇ ΘΓ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ΘΓ τῆς ΒΚ οὔκ ἐστιν ἐλάττων, καὶ ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΒΚ οὔκ ἐστιν ἐλάττων. ἐὰν ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΚΗ τετραγώνῳ ἴσον παραβάλλωμεν παρὰ τὴν ΒΚ ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων μὲν ἔσται τῆς ΚΖ, ἐλάττων δὲ τῆς ΚΗ διὰ τὸ προδειχθέν. ἔστω τοίνυν ἡ ΚΛ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος, καὶ διὰ τοῦ Λ παράλληλος ἤχθω τῇ ΗΓ ἡ ΛΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΒ, ΜΚ, καὶ νενοήσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Μ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ Λ κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον δηλονότι τὸ ΒΚΜ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν καὶ τὸν κῶνον τετμημένον τῷ ἐπιπέδῳ, ὑφ' οὗ γέγονεν ἡ ΕΔ διάμετρος τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ἔσται καὶ ἐν τῷ κώνῳ τομή, ἧς διάμετρος ἡ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΚΗ τετραγώνῳ ἴσον παρὰ τὴν ΒΚ παραβέβληται ὑπερβάλλον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ τετραγώνῳ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΛ, ΛΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΗ τετραγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἐπεὶ οὖν αἱ ΔΒ, ΚΓ παράλληλοι ἀλλήλαις εἰσίν, ἀλλὰ καὶ αἱ ΔΖ, ΜΛ, ΓΗ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις, ὡς ἄρα ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΗ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΛ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΛ, ΛΚ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς

---

1. ΘΗ] p, ΘΔ Vc. 2. τῆς] p, τῇ Vc? ΒΚ] p, ΘΚ Vc. 3. καὶ ἡ — ἐλάττων] om. c. 4. παραβάλλωμεν] παραβάλωμεν p. 8. παράλληλος — 9. ΗΓ] τῇ ΗΓ παράλληλος ἤχθω p. 10. νενοήσθω] νενοείσθω p, sed corr. in scrib. 11. Λ] πρῶτος c. 17. τῆς] e corr. p. ΚΛ] ΒΚ p. 19. ἀλλήλαις εἰσίν] εἰσιν ἀλλήλαις p. 21. τήν] om. p. 23. ΚΗ] ΗΚ p, bene. 24. ΜΛ] p, corr. ex ΜΑ m. 1 V, ΜΑ v, ΜΘ c.

aequale rectae BK adplicuerimus figura quadrata excedens, latus excessus erit $> KZ$, sed $< KH$, propter propositionem praecedentem [prop. XXV]. sit igitur $K\Lambda$ latus excessus, et per Λ rectae $H\Gamma$ parallela



ducatur ΛM, ducanturque MB, MK, et fingatur conus, cuius uertex sit punctum M, basis autem A circulus et triangulus per axem positus BKM. itaque si etiam conum eo plano sectum finxerimus, a quo effecta est diametrus sectionis cylindri $E\Delta$, in cono quoque erit sectio, cuius diametrus $N\Xi$. quoniam igitur quadrato KH^2 aequale ad BK adplicatum est spatium quadrato $K\Lambda^2$ excedens, erit $B\Lambda \times \Lambda K = KH^2$. iam quoniam ΔB, $K\Gamma$ inter se parallelae sunt, parallelae autem etiam ΔZ, $M\Lambda$, ΓH, erit

$$\Delta Z : ZB = \Gamma H : HK \text{ [Eucl. I, 29; VI, 4];}$$

quare etiam

$$\Delta Z^2 : ZB^2 = \Gamma H^2 : KH^2 = M\Lambda^2 : B\Lambda \times \Lambda K.$$

uerum $\Delta Z^2 : ZB^2 = E\Delta^2 : BK^2$ [Eucl. VI, 2; V, 18] siue quadratum diametri ellipsis cylindri $E\Delta$ ad quadratum diametri coniugatae [prop. IX extr.], et ut $M\Lambda^2 : B\Lambda \times \Lambda K$, ita quadratum diametri

ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψεως τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΛ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΛ, ΛΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τοῦ κώνου ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τοῦ κώνου ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου. καὶ ὡς ἄρα ἡ διάμετρος τῆς ἐλλείψεως τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον, οὕτως ἡ διάμετρος τῆς τοῦ κώνου ἐλλείψεως πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον. καί εἰσιν αἱ δεύτεραι διάμετροι πρὸς ἴσας γωνίας ταῖς διαμέτροις· ἀμφότεραι γὰρ παράλληλοί εἰσι ταῖς πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΗ τῇ ΖΟ καὶ τῇ ΛΠ. ἡ ἄρα τοῦ κώνου ἔλλειψις ὁμοία ἐστὶ τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψει, καὶ γέγονεν ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ συνέστη ὁ κῶνος ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κυλίνδρῳ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· ἅπερ ἦν τὰ ἐπιταχθέντα.

κζʹ.

Τὸν δοθέντα κύλινδρον ἢ κῶνον σκαληνὸν δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου μέρους ἀπειραχῶς τεμεῖν δυσὶν ἐπιπέδοις μὴ παραλλήλως μὲν κειμένοις, ποιοῦσι δὲ ὁμοίας ἐλλείψεις.

ἔστω πρῶτον ὁ δοθεὶς κύλινδρος σκαληνός, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου, καὶ ὑποκείσθω ἡ πρὸς τῷ Α γωνία ὀξεῖα, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν

---

4. *ΒΛ*] vp, et V ita ut *Β* litterae *Α* similis sit; *ΑΛ* c.
7. *τοῦ — ἐλλείψεως*] *ἐλλείψεως τοῦ κυλίνδρου* p. *πρός —*

ellipsis coni ad quadratum diametri coniugatae [Apollon. I, 13; prop. XVII]; quare etiam, ut quadratum diametri ellipsis cylindri ad quadratum diametri coniugatae, ita quadratum diametri ellipsis coni ad quadratum diametri coniugatae. itaque etiam, ut diametrus ellipsis cylindri ad diametrum coniugatam, ita diametrus ellipsis coni ad diametrum coniugatam. et alterae diametri ad diametros aequales angulos efficiunt; utraque enim rectis $Z O$ et $\Delta\Pi$ ad $B H$ perpendicularibus parallela est [prop. IX extr.]. ergo ellipsis coni ellipsi cylindri similis est [def. 8], et ab eodem plano effecta est, et conus in eadem basi constructus est ac cylindrus et sub eadem altitudine; quae proposita erant.

XXVII.

Fieri potest, ut datus cylindrus conusue scalenus ab altera parte in infinitum duobus planis secetur non parallelis, similes autem ellipses efficientibus.

sit primum datus cylindrus scalenus, cuius parallelogrammum per axem positum sit $A B$ ad basim cylindri perpendiculare, supponaturque angulus ad A positus acutus, et per Γ ad latus $A \Delta$ perpendicularis ducatur $\Gamma \Delta$; $\Gamma \Delta$ igitur minima est omnium, quae inter parallelas $A \Delta$, ΓB cadunt. sumantur ad utramque partem puncti Δ rectae aequales $E \Delta$, ΔZ,

---

8. *διαμέτρου* (pr.)] p, om. V c. 11. *ἡ διάμετρος*] p c, corr. ex *τὴν διάμετρον* m. 1 V, *διάμετρος* v. 13. *δεύτεραι*] p, *δεύτεροι* V c. 14. *ταῖς*] p, *τάς* V c. 20. *κζ'*] *κε'* mg. m. rec. V. 26. *ὀρθάς*] *ὀρθαί*? p.

ΑΔ πλευρὰν ἡ ΓΔ· ἐλαχίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ πασῶν τῶν ταῖς ΑΔ, ΓΒ παραλλήλοις ἐμπιπτουσῶν. εἰλήφθωσαν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Δ ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΕΔ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΓ, ΓΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΓ τῇ ΖΓ. ἐὰν οὖν κατὰ τὸν παραδεδομένον τρόπον ἀγάγωμεν διὰ τῶν ΓΕ, ΓΖ ἐπίπεδα, τεμεῖ τὸν κύλινδρον. τεμνέτω καὶ ποιείτω τὰς ΕΗΓ, ΖΘΓ ἐλλείψεις. λέγω δή, ὅτι ὅμοιαί εἰσιν.

ἐπεὶ γάρ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἑαυτῇ συζυγοῦς διαμέτρου, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΓ διάμετρος πρὸς τὴν ἑαυτῇ συζυγῆ διάμετρον, οὕτω καὶ ἡ ΖΓ διάμετρος πρὸς τὴν ἑαυτῇ συζυγῆ διάμετρον. ἀλλὰ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας τέμνονται ἐν ἑκατέρᾳ αἱ διάμετροι, ὡς ἐδείχθη πολλάκις· ὅμοιαι ἄρα ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ ΕΗΓ, ΖΘΓ ἐλλείψεις.

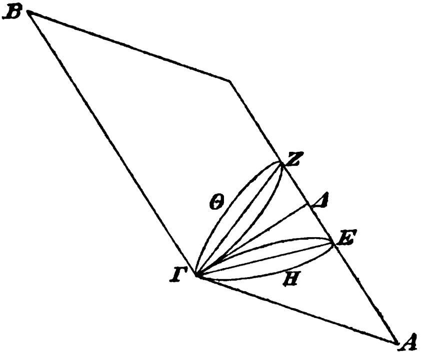
κἂν ἑτέρας δὲ ἀπολάβῃς ἴσας εὐθείας παρ' ἑκάτερα τοῦ Δ, συστήσονται πάλιν ἕτεραι δύο ἐλλείψεις ὅμοιαι ἀλλήλαις.

ἐπισημαντέον δέ, ὅτι ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἀνάγκη τὰς ἐκ τοῦ αὐτοῦ μέρους ὁμοίας καὶ ἴσας εἶναι διὰ τὸ

---

4. ΖΓ] ΓΖ p. 7. ΕΗΓ] ΓΗΕ p. 10. ΓΑ (pr.)] p, Α e corr. m. 1 litterae Δ similem V, ΓΔ vc. 11. ἐστι] om. p. 12. τῆς τομῆς] ἐστί p. 13. ἑαυτῇ] V?, ἑαυτοῦ cp. διαμέτρου] om. p. 14. ἐστι] om. p. τῆς τομῆς] ἐστί p. 15. διαμέτρου] om. p. 16. διάμετρον] om. p. 18. διάμετρον] om. p. γωνίας] p, $\widetilde{\Gamma}$ ἴσας V, |ἴσας c. 19. ἐν] V, om. cp.

ducanturque $E\Gamma$, ΓZ; itaque $E\Gamma = Z\Gamma$ [Eucl. I, 4]. si igitur ita, ut traditum est, plana per ΓE, ΓZ duxerimus, cylindrum secabunt. secent efficiantque ellipses $EH\Gamma$, $Z\Theta\Gamma$. dico, eas similes esse.



quoniam enim $E\Gamma^2 : \Gamma\Delta^2 = Z\Gamma^2 : \Gamma\Delta^2$ [Eucl. V, 7], et $E\Gamma^2 : \Gamma\Delta^2$ est ratio quadrati diametri sectionis $E\Gamma$ ad quadratum diametri cum ea coniugatae, $Z\Gamma^2 : \Gamma\Delta^2$ autem quadrati diametri sectionis $Z\Gamma$ ad quadratum diametri cum ea coniugatae [prop. IX extr.], erit etiam, ut diametrus $E\Gamma$ ad diametrum cum ea coniugatam, ita $Z\Gamma$ diametrus ad diametrum cum ea coniugatam. uerum etiam ad aequales angulos diametri in utraque secantur, ut saepe demonstratum est. ergo ellipses $EH\Gamma$, $Z\Theta\Gamma$ inter se similes sunt [def. 8].

et etiam, si alias rectas aequales ad utramque partem puncti Δ absumpseris, rursus aliae duae ellipses inter se similes construentur.

notandum autem, in cylindro ellipses ex eadem parte similes necessario etiam aequales esse, quia ratio diametrorum ad eandem rectam $A\Gamma$ eadem est.

ἑκατέρᾳ] ἑκάτεραι Vcp. 23. Post ἀλλήλαις add. καὶ τοῦτο ἐπ' ἄπειρον p. 25. διά] vcp, -ά euan. V.

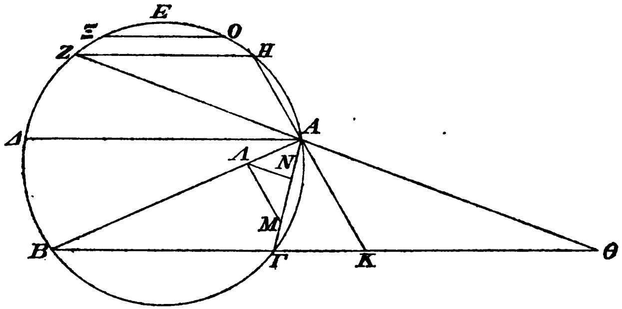
τὸν λόγον εἶναι τῶν διαμέτρων τὸν αὐτὸν πρὸς τὴν αὐτὴν τὴν ΑΓ.

Ἔστω δὲ νῦν ὁ δοθεὶς κῶνος σκαληνός, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει τοῦ κώνου, καὶ ἔστω ἡ ΑΒ τῆς ΑΓ μείζων, καὶ περιγεγράφθω κύκλος, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΑΔ δηλονότι τέμνουσα τὸν κύκλον, καὶ τῆς ΔΑ περιφερείας δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ Ε εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔΕ περιφερείας τὸ Ζ, καὶ ἤχθω παράλληλος τῇ ΔΑ ἡ ΖΗ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ μὲν ΖΑ συμπιπτέτω τῇ ΒΓ κατὰ τὸ Θ, ἡ δὲ ΗΑ κατὰ τὸ Κ· ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΗ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΖ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΘ, ΘΖ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΘΑ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘ, ΘΓ. ἐὰν οὖν διαγάγωμεν εὐθείας παραλλήλους τῇ μὲν ΑΚ τὴν ΛΜ, τῇ δὲ ΑΘ τὴν ΛΝ, καὶ δι' αὐτῶν ἀχθέντα ἐπίπεδα τέμνῃ τὸν κῶνον, ὁμοίας ἐλλείψεις ποιήσει. ἐπεὶ γάρ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘ, ΘΓ, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ,

---

1. τὸν αὐτόν] τῶν αὐτῶν c. 3. δέ] δή p. 5. τῆς] p, τῇ Vc. 7. Ante ΑΔ del. τὸν δοθέν c. 13. ΘΖ] ΖΘ p. 16. ΑΘ, ΘΖ] ΖΘ, ΘΑ p. 17. ὑπό] corr. ex ἀπό m. 1 p. τουτέστι — 18. ΚΓ] om. p. 19. τουτέστι — ΘΓ] ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ,

Iam uero datus conus scalenus sit, cuius triangulus per axem ductus sit $AB\Gamma$ ad basim coni perpendicularis, sitque $AB > A\Gamma$, et circumscribatur circulus, ducaturque per A rectae $B\Gamma$ parallela $A\Delta$ circulum secans, et arcu ΔA in E in duas partes aequales secto in arcu ΔE sumatur punctum aliquod Z, ducaturque ZH rectae ΔA parallela, et ducta ZA cum $B\Gamma$ concurrat in Θ, HA autem in K; itaque $AK : KH = A\Theta : \Theta Z$ [Eucl. VI, 4; V, 18]. est autem



$$AK : KH = AK^2 : HK \times KA$$

et $$A\Theta : \Theta Z = A\Theta^2 : A\Theta \times \Theta Z.$$

quare $$AK^2 : HK \times KA = A\Theta^2 : Z\Theta \times \Theta A$$

siue $AK^2 : BK \times K\Gamma = A\Theta^2 : B\Theta \times \Theta\Gamma$ [Eucl. III, 36]. itaque si duxerimus ΛM rectae AK parallelam, ΛN autem rectae $A\Theta$, et plana per eas ducta conum secuerint, similes ellipses efficient. quoniam enim $AK^2 : BK \times K\Gamma = A\Theta^2 : B\Theta \times \Theta\Gamma$, et ut

$$AK^2 : BK \times K\Gamma,$$

ΘA, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $B\Theta$, $\Theta\Gamma$ p. 22. τέμῃ] τεμεῖ c. 24. $B\Theta$] Θ e corr. c. $\Theta\Gamma$] corr. ex $H\Gamma$ c.

ΚΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΔΜ* διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΘ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *ΒΘ*, *ΘΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΔΝ* διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου, καὶ ὡς ἄρα ἡ *ΔΜ* διάμετρος πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον, οὕτως ἡ *ΝΔ* διάμετρος πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον. αἱ ἄρα *ΔΜ*, *ΔΝ* ὁμοίων ἐλλείψεών εἰσι διάμετροι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κἂν ἑτέρας δὲ τῇ *ΖΗ* παραλλήλους ἀγάγωμεν, ὡς τὴν *ΞΟ*, καὶ ἀπὸ τῶν *Ξ* καὶ *Ο* ἐπὶ τὸ *Α* ἐπιζεύξαντες ἐκβάλωμεν ἐπὶ τὴν *ΒΘ*, καὶ ταῖς ἐκβληθείσαις παραλλήλους ἀγάγωμεν ἐν τῷ τριγώνῳ, συστήσονται πάλιν ἕτεραι δύο ἐλλείψεις ὅμοιαι ἀλλήλαις, καὶ τοῦτο ἐπ' ἄπειρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη'.

Τὸν δοθέντα κύλινδρον σκαληνὸν ἢ κῶνον δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ἀπειραχῶς τεμεῖν δυσὶν ἐπιπέδοις καὶ ποιεῖν ἐλλείψεις ὁμοίας.

ἔστω πρῶτον ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου δεῖξαι, καὶ κείσθω ἡ αὐτὴ καταγραφὴ τῇ πρότερον, καὶ τῇ *ΑΔ* ἴση ἔστω ἡ *ΔΗ*· ἴση ἄρα ἡ *ΓΑ* τῇ *ΗΓ*. ἐπεὶ τοίνυν ἡ ἀπὸ τοῦ *Α* ἐπὶ τὴν *ΓΒ* ἀγομένη εὐθεῖα μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν *ΑΓ*, *ΓΗ* καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ *Γ* μεταξὺ τῶν *Η*, *Α* σημείων πιπτουσῶν, δῆλον, ὡς, ἐὰν ἐκ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ἀγάγωμεν δύο εὐθείας ἴσας ἀλλήλαις, ἡ ἀπὸ τοῦ *Γ* ἀγομένη ὑπερπεσεῖται τὸ *Η*. ἤχθω-

---

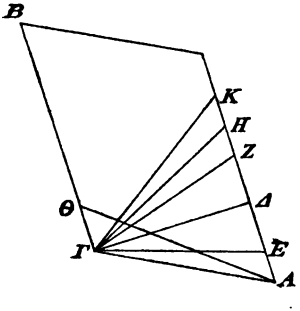
1. ἐλλείψεως] ἐλλεί| c. 4. *ΔΝ*] *ΔΝ* Vcp, corr. Comm. 6. συζυγῆ] συζυγῆ ἑαυτῇ p. 7. συζυγῆ] συζυγῆ ἑαυτῇ p. 8. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. p. ἔδει] $\overline{\text{ἔ}}$ c. 10. καί (alt.)] om. p. 11. ἐκβάλωμεν] cp, ἐκβάλλωμεν V. 13. ἕτεραι] p, ἕτεροι Vc. 14. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. p. 15. κη'] κϛ mg. m. rec. V.

ita quadratum diametri ellipsis AM ad quadratum diametri cum ea coniugatae, ut autem $A\Theta^2 : B\Theta \times \Theta\Gamma$, ita quadratum diametri ellipsis AN ad quadratum diametri cum ea coniugatae [Apollon. I, 13; prop. XVII], erit etiam, ut AM diametrus ad diametrum coniugatam, ita NA diametrus ad diametrum coniugatam. ergo AM, AN diametri sunt ellipsium similium [def. 8]; quod erat demonstrandum.

et etiam, si alias rectas rectae ZH parallelas duxerimus, uelut ΞO, et ab Ξ, O ad A ductas rectas ad $B\Theta$ produxerimus productisque parallelas in triangulo duxerimus, rursus aliae duae ellipses inter se similes construentur, et hoc in infinitum; quod erat demonstrandum.

XXVIII.

Fieri potest, ut datus cylindrus conusue scalenus a partibus oppositis in infinitum duobus planis secetur, et ellipses similes efficiantur.



primum sit in cylindro demonstrandum, ponaturque eadem figura, quae antea, et sit $\Delta H = A\Delta$; itaque $\Gamma A = H\Gamma$ [Eucl. I, 4]. quoniam igitur recta ab A ad ΓB ducta maior est utraque $A\Gamma$, ΓH omnibusque, quae a Γ inter puncta H, A cadunt, adparet, si a partibus oppositis duas rectas inter se aequales duxerimus, rectam a Γ ductam extra H casuram esse.

σαν οὖν ἐκ τῶν ἀντικειμένων μερῶν αἱ ΑΘ, ΓΚ ἴσαι οὖσαι ἀλλήλαις, δι' ὧν ἐὰν ἀχθῇ ἐπίπεδα ποιοῦντα ἐλλείψεις, ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΓ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΓ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου. αἱ ἄρα ΚΓ, ΑΘ διάμετροί εἰσιν ὁμοίων ἐλλείψεων.

Κείσθω πάλιν ἡ καταγραφὴ τοῦ κώνου, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΓΒ ἐπὶ θάτερα δέον ἔστω ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μερῶν ἀγαγεῖν ἐπίπεδα ποιοῦντα ὁμοίας ἐλλείψεις.

διήχθω τις εἰς τὸν κύκλον εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΒΓ ἡ ΠΡ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΠ, ΑΡ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Σ, Τ σημεῖα· ὡς ἄρα ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΠ, οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς τὴν ΤΡ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΣ, ΣΠ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΤ, ΤΡ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΤ, ΤΓ. ἐὰν ἄρα ταῖς ΣΑ, ΑΤ παραλλήλους εὐθείας ἀγάγωμεν ἐν τῷ τριγώνῳ, ὡς τὰς ΒΥ, ΓΦ, καὶ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ποιοῦντα ἐλλείψεις, ἔσονται διὰ τὰ πολλάκις εἰρημένα αἱ ΒΥ, ΓΦ εὐθεῖαι ὁμοίων ἐλλείψεων διάμετροι.

Καὶ φανερόν, ὅτι τῇ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους τῶν ὁμοίων ἐλλείψεων συζυγίᾳ γίνεταί τις ὁμοία ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ὁμοίων ἐλλείψεων συζυγία, ἀντι-

---

2. ἐπίπεδα] ἐπίπεδο$\overset{α}{ν}$ c. 5. συζυγοῦς] συζ^{υγ}οῦς V. 6. διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως] euan. p. τουτέστιν] τουτέστι p. 7. ὡς — ἐλλείψεως] om. p. 8. συζυγοῦς] -ο- e corr. m. 1 V,

ducantur igitur a partibus oppositis $A\Theta$, ΓK inter se aequales, per quas si plana ducuntur ellipses efficientia, erit, ut quadratum diametri ellipsis ΘA ad $A\Gamma^2$ siue ad quadratum diametri cum ea coniugatae [prop. IX extr.], ita $K\Gamma^2 : A\Gamma^2$ siue quadratum diametri ellipsis $K\Gamma$ ad quadratum diametri coniugatae. ergo $K\Gamma$, $A\Theta$ diametri sunt ellipsium similium.

Rursus ponatur figura coni, et producta ΓB ad alteram partem oporteat ab utraque parte plana ducere similes ellipses efficientia.

ducatur in circulum recta aliqua ΠP rectae $B\Gamma$ parallela, et ductae $A\Pi$, AP producantur ad puncta Σ, T; itaque $A\Sigma : \Sigma\Pi = AT : TP$ [Eucl. VI, 2; V, 18]. quare etiam $A\Sigma^2 : A\Sigma \times \Sigma\Pi = AT^2 : AT \times TP$ siue $A\Sigma^2 : \Gamma\Sigma \times \Sigma B = AT^2 : BT \times T\Gamma$ [Eucl. III, 36]. itaque si rectis ΣA, AT parallelas rectas in triangulo duxerimus, ut $B\Upsilon$, $\Gamma\Phi$, et per eas plana ellipses efficientia, rectae $B\Upsilon$, $\Gamma\Phi$ propter ea, quae iam saepe diximus, diametri similium ellipsium erunt.

Et manifestum est, pari similium ab eadem parte ellipsium simile existere par similium a partibus oppositis ellipsium, sed quod diametros in contraria ratione diametrorum habeat.

nam si in figura cylindri construxerimus $\Gamma A^2 : A\Theta^2$ siue $\Gamma A^2 : \Gamma K^2 = E\Gamma^2 : \Gamma A^2$ siue $\Gamma Z^2 : \Gamma A^2$, erit,

---

συζυγοῦς ἑαυτῇ p. 11. δέον] p, δὲ ὄν V, ö ὄν c. ἀπ'] p, ἀ- e corr. m. 1 V, ἐπ' vc. 12. ἐπίπεδα] ἐπί- euan. c. 16. τήν] om. p, sed lin. 17 habet. 18. $\Sigma\Pi$] ΣT c. 20. πρός] om. p. 21. παραλλήλους] παραλλήλ῾ p. 26. τῇ] om. c. 27. ἀπό] Halley, om. Vc, ἐκ p. 28. μερῶν] cp, μέρος v, om. V add. ⁒ m. 1, cui signo in mg. nunc quidem nihil respondet.

πεπονθυίας μέντοι τὰς διαμέτρους ἔχουσα ταῖς διαμέτροις.

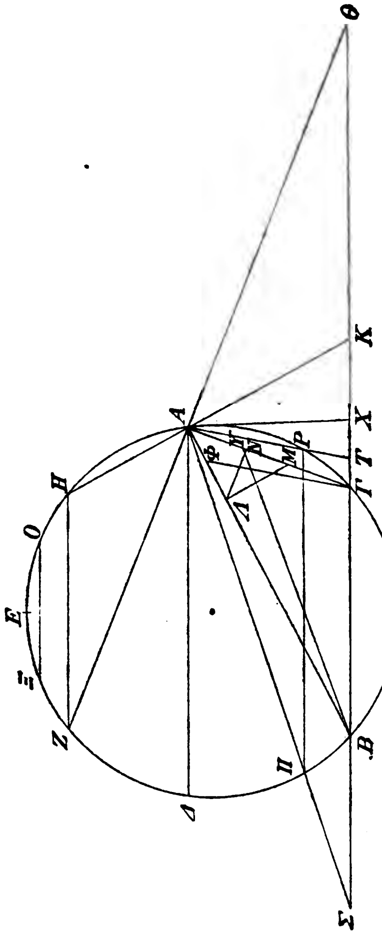
ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου καταγραφῆς κατασκευάσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἢ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἢ τῆς ΓΚ, γενήσεται, ὡς τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ΕΓ, ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῶν ὁμοίων ἐλλείψεων τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους ἠγμένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας συζυγοῦς διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ΑΘ, ΓΚ, τουτέστιν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῶν ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων ἠγμένων ὁμοίων ἐλλείψεων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου· ὡς ἄρα τῆς ἑτέρας συζυγίας ἡ διάμετρος πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον, οὕτως τῆς ἑτέρας συζυγίας ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἐπὶ δὲ τοῦ κώνου, ἐὰν πάλιν κατασκευάσωμεν, ὡς τὴν ΗΑ πρὸς ΑΚ, οὕτως τὴν ΑΠ πρὸς τὴν ΠΣ, ἔσται, ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΗ, οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΣΑ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΠΣ, ΣΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ

---

1. ἔχουσα] ἔχουσαι p. 3. ἐάν] -άν euan. c. 5. οὕτως] οὕτω c. οὕτως — 6. ΑΘ] ins. in ras. p. 6. ἑκατέρας] Halley, ἑκατέρων Vcp. 12. τῶν ἀπό] scripsi, om. Vcp, ἀπό Halley. ἀντικειμένων] ἀντικειμένως p. 17. τοῦ] cp, om. V. 18. ΑΚ] τὴν ΑΚ p. οὕτως — πρός] euan. p. 19. ἔσται] cp, $\overset{\omega}{\text{ἔς}}$ V, ἔστω v. 20. τό (alt.)] corr. ex τῷ m. 1 c. Hic et in seqq. quaedam euan. p. 22. ΑΣ] ΣΑ p.

ut $E\Gamma^2$ uel ΓZ^2 ad ΓA^2, hoc est ut quadratum diametri ellipsium similium ab eadem parte ductarum ad quadratum alterius diametri coniugatae, ita ΓA^2 ad $A\Theta^2$ uel ΓK^2, hoc est quadratum alterius diametri ellipsium similium a partibus oppositis ductarum ad quadratum diametri coniugatae. ergo ut alterius paris diametrus ad alteram diametrum, ita alterius paris altera diametrus ad diametrum.



In cono autem, si rursus construxerimus

$$A\Pi : \Pi\Sigma = HA : AK,$$

erit

$$AK : KH = \Pi\Sigma : \Sigma A$$

[Eucl. V, 18] siue $AK^2 : HK \times KA = \Pi\Sigma \times \Sigma A : A\Sigma^2$. uerum ut μέρους ὁμοίων δύο ἐλλείψεων ἤτοι τῆς ΑΝ ἢ τῆς ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας συζυγοῦς διαμέτρου, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΠΣ, ΣΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΒ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΣΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῶν ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ἠγμένων ἐλλείψεων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου. ὡς ἄρα τῆς ἑτέρας συζυγίας ἡ διάμετρος πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον, οὕτως τῆς ἑτέρας συζυγίας ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον.

Καὶ γέγονε φανερὸν ἐκ τούτων, ὅτι ἐν παντὶ μὲν κυλίνδρῳ καὶ κώνῳ συνίστανται δύο συζυγίαι ἐλλείψεων ὁμοίων μὲν ἀλλήλαις, ἀντιπεπονθυίας δὲ τὰς διαμέτρους ἐχουσῶν, καὶ ὅτι παρὰ τὰς τέσσαρας ταύτας ἄλλη ὁμοία οὐ συνίσταται πλὴν τῶν παραλλήλων αὐταῖς· ἀεὶ γὰρ αἱ παράλληλοι τομαὶ ὁμοίας ποιοῦσιν ἐλλείψεις, ἐὰν ποιῶσι· καὶ ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ κυλίνδρου ἡ διὰ τῆς ΓΗ ἀγωγὴ τοῦ ἐπιπέδου ὑπεναντία τέ ἐστι καὶ κύκλον ποιεῖ τὴν τομήν, ἐπὶ δὲ τοῦ κώνου, ἐὰν διὰ τοῦ Α τοῦ κύκλου ἐφάπτηταί τις ὡς ἡ ΑΧ, διὰ τὸ εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΧ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΧ, ΧΓ ἴσον ἡ διὰ τῶν τῇ ΑΧ παραλλήλων εὐθειῶν ἐν τῷ τριγώνῳ ἀγωγὴ τῶν ἐπιπέδων ποιήσει κύκλους· ὑπεναντία γάρ ἐστι καὶ αὐτή, ὡς τῷ προσέχοντι γίνεται καταφανές· καὶ ὅτι τῇ δοθείσῃ ἐλλείψει ἐν κυλίνδρῳ σκαληνῷ καὶ κώνῳ τρεῖς ὁμοίας ἄλλας ἔστιν εὑρεῖν, μίαν μὲν αὐτῇ τῇ δοθείσῃ σύζυγον, δύο δὲ ἑαυταῖς μὲν συζύγους, ταῖς δὲ λοιπαῖς ὁμοίας κατὰ ἀντιπεπόνθησιν τῶν διαμέτρων·

---

1. ΑΜ] Μ euan. p. 2. ὡς δέ] bis c. 6. ἐλλείψεων] om. c. 7. δευτέραν] p, om. Vc. 11. κώνῳ] κώνῳ σκαληνῷ Halley. 17. ἀγωγή] scripsi, ἀγωγῆς Vcp. 19. τοῦ κύκλου

$AK^2 : HK \times KA$ siue $AK^2 : BK \times K\Gamma$ [Eucl. III, 36], ita quadratum diametri duarum ellipsium ab eadem parte similium aut AN aut AM ad quadratum alterius diametri coniugatae, et ut $\Pi\Sigma \times \Sigma A$ siue $\Gamma\Sigma \times \Sigma B$ [Eucl. III, 36] ad ΣA^2, ita quadratum alterius diametri ellipsium a partibus oppositis ductarum ad quadratum diametri coniugatae. ergo ut alterius paris diametrus ad alteram diametrum, ita alterius paris altera diametrus ad diametrum.

Et ex his manifestum est, in omni cylindro conoue duo paria ellipsium construi inter se similium, diametros autem in contraria proportione habentium, et praeter has quattuor nullam aliam construi similem praeter sectiones iis parallelas (semper enim sectiones parallelae similes ellipses efficiunt, si omnino efficiunt), et in cylindro planum per ΓH ductum contrarium esse et sectionem efficere circulum, in cono autem, si per A circulum contingat recta aliqua uelut AX, plana per rectas rectae AX in triangulo parallelas circulos efficere, quia $AX^2 = BX \times X\Gamma$ [Eucl. III, 36]; nam et ipsa contraria sunt, ut cogitanti adparet;[1]) et fieri posse, ut datae ellipsi in cylindro scaleno conoque similes tres aliae inueniantur, una cum ipsa data coniugata, duae autem inter se coniugatae, reliquis autem similes ita, ut diametri in contraria proportione sint; quare etiam fieri potest, ut datae

---

[1]) Quia $BX : AX = AX : X\Gamma$, erit $\triangle ABX \backsim A\Gamma X$; itaque $\angle \Gamma AX = ABX$.

— τις] ἐφάπτηταί τις τοῦ κύκλου p. 20. τό (alt.)] p, τοῦ Vc. 21. τῇ] p, τῆς Vc. 26. δοθείσῃ] vcp, -εί- euan. V.

ὥστε καὶ τῇ δοθείσῃ δυνατὸν τρεῖς ὁμοίας πορίσασθαι· δεῖ δὲ τὴν δοθεῖσαν μήτε ὑπεναντίαν εἶναι· ταύτῃ γὰρ οὐδεμία συνίσταται ὁμοία πλὴν τῶν παραλλήλων· μήτε τὴν διάμετρον αὐτῆς παράλληλον εἶναι τῇ διὰ τῶν Ε καὶ Α ἀγομένῃ εὐθείᾳ ἐν τῇ καταγραφῇ τοῦ κώνου· μονήρης γὰρ καὶ αὕτη διὰ τὸ τὴν διὰ τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλον ἀγομένην ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου πίπτειν ἐκτὸς καὶ μὴ εἶναι τῷ Ε σημεῖον σύζυγον ὡς τῷ Ξ τὸ Ο ἢ τῷ Ζ τὸ Η.

Περὶ μὲν οὖν τοῦ προτεθέντος ἡμῖν προβλήματος ἀπὸ πλειόνων ἀρκείτω καὶ τὰ εἰρημένα, ὥρα δ' ἂν εἴη μετελθεῖν, ἐφ' ὅπερ ἀρτίως ἐπηγγειλάμην· ἀφορμὴ δέ μοι τῆς μελλούσης σκέψεως οὐκ ἄκαιρος, ἔστι δὲ ἥδε.

Πείθων ὁ γεωμέτρης ἐν συγγράμματι ἑαυτοῦ τὰς παραλλήλους ἐξηγούμενος, οἷς μὲν Εὐκλείδης εἶπεν, οὐκ ἠρκέσθη, σοφώτερον δὲ δι' ὑποδείγματος αὐτὰς ἐσαφήνισε· φησὶ γὰρ τὰς παραλλήλους εὐθείας εἶναι τοιοῦτον, οἵας ἐν τοῖς τοίχοις ἢ τῷ ἐδάφει τὰς τῶν κιόνων σκιὰς ὁρῶμεν ἀποτελουμένας ἤτοι λαμπάδος τινὸς ἀπ' ἀντικρὺ καιομένης ἢ λύχνου. τούτων δὲ εἰ καὶ πᾶσι πλεῖστον παρέχει κατάγελων, ἀλλὰ ἡμῖν οὐ καταγέλαστον αἰδοῖ τοῦ γεγραφότος· φίλος γὰρ ἀνήρ. ἀλλὰ σκεπτέον, ὅπως τὸ τοιοῦτον ἔχει μαθηματικῶς· οἰκεία δὲ ἡ σκέψις τοῖς ἐνταῦθα προτεθεωρημένοις· δι' αὐτῶν γὰρ ἀποδειχθήσεται τὸ προκείμενον.

---

6. μονήρης] μο̽νήρης V. 9. τῷ (pr.)] corr. ex τό m. 1 c. Ξ] vcp, corr. ex Ζ m. 1 V. 12. ἀρτίως] cp, -ρ- e corr. V, ἀντίως v. 13. μοι] om. p. 14. Πείθων] -ν euan. p. 17. τοιοῦτον] V c, τοιαύτας p? 18. οἵας] euan. p. 20. τούτων] V c,

ellipsi tres similes inueniantur; oportet autem, datam ellipsim neque contrariam esse (huic enim similis nulla construitur praeter parallelas), neque diametrum eius rectae per E et Δ in figura coni ductae parallelam esse; nam haec quoque singularis est, quia recta per E rectae $A\Delta$ parallela ducta extra circulum cadit, quippe quae eum contingat, nec punctum est cum E coniugatum ut O cum Ξ uel H cum Z.

De problemate igitur nobis proposito e pluribus iam ea sufficiant, quae diximus, tempus autem fuerit ad id transgredi, quod nuper [p. 58, 25] significaui; locus uero mihi ad hanc disquisitionem digrediendi non ineptus, est autem hic.

Pitho geometra in opere quodam suo parallelas explicans iis, quae Euclides dixit, non contentus erat, sed per exemplum eas subtilius declarauit; dicit enim, parallelas rectas esse tale aliquid, quales umbras columnarum in muris uel in solo effici uidemus face uel lumine e parte opposita ardente. haec irridendi etsi omnibus occasionem praebet plurimam, nobis certe irridendum non est propter reuerentiam scriptoris; homo enim amicus. sed uidendum, quomodo hoc mathematice se habeat. et quaestio est ab iis non aliena, quae hic praemissa sunt; nam quod proposuimus, per ea demonstrabitur.

τοῦτο p. 21. *πλεῖστον*] *πλεῖ|πλεῖστον* V. *ἡμῖν*] vcp, *-ῖν* euan. V. 22. *ἀνήρ*] *ἀνήρ* V, *ὁ ἀνήρ* c. 25. *ἀποδειχθήσεται*] vcp, *-ήσε-* e corr. (ex *ῆ*..) m. 1 V.

κθ'.

Αἱ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι κατ' ἀμφότερα τὰ μέρη πᾶσαι καθ' ἑνὸς παραλληλογράμμου πλευρῶν τὰς ἐπαφὰς ποιοῦνται.

ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἤχθωσαν αἱ ΓΔ, ΓΕ εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα. λέγω, ὅτι τὰ Ε, Δ τῶν ἐπαφῶν σημεῖα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἐστί.

κατήχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΖ, καὶ διὰ τῆς ΓΖ ἤχθω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ τοῦ Α κύκλου ἐπιπέδῳ καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῷ κυλίνδρῳ τὸν περὶ τὸ Ζ κύκλον, ὥστε κύλινδρον ὑποστῆναι, οὗ βάσεις οἱ Β, Ζ κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΒΖ εὐθεῖα, καὶ διὰ τῆς ΓΖ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον ποιοῦν ἐν τῷ κυλίνδρῳ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, καὶ τῇ ΖΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΚ ἐν τῷ τοῦ Ζ κύκλου ἐπιπέδῳ οὖσα, καὶ διὰ τῆς ΓΚ καὶ ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ διεκβεβλήσθω ἐπίπεδα τέμνοντα τὸν κύλινδρον καὶ ποιείτω διὰ τῆς τομῆς ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὰς ΛΔΜ, ΝΕΞ γραμμάς, ἐν δὲ τῷ τοῦ παραλληλογράμμου ἐπιπέδῳ τὰς ΛΜΓ, ΝΞΓ εὐθείας· διάμετροι ἄρα τῶν

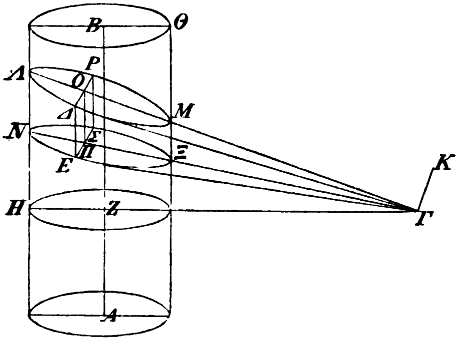
---

1. κθ'] om. V. 6. βάσεις] p, βάσις Vc. 10. τά (pr.)] p, om. Vc. 14. Α κύκλου] vcp, $\overline{α}$κύκλου V. 15. κυλίνδρῳ] κυ|κυλίνδρῳ c. τό] vcp, -ό e corr. m. 1 V. Ζ] p, ΔΖ Vvc. 17. ΒΖ] p, ΓΖ Vc. 18. τό] p, τῷ Vc. 19. ΖΓ] ΓΖ c? 22. ποιείτω] p, corr. ex |είτω m. 2 V, εἴτω v, εἴ$\overset{ω}{τ}$ c.

XXIX.

Rectae ab eodem puncto superficiem cylindricam contingentes ab utraque parte omnes per latera unius parallelogrammi contingunt.

sit cylindrus, cuius bases sint circuli A, B, axis autem recta AB, et sumatur extrinsecus punctum aliquod Γ, a Γ autem ducantur rectae $\Gamma\Delta$, ΓE superficiem cylindri ad eandem partem contingentes in punctis Δ, E. dico, E et Δ puncta contactus in una recta posita esse.



ducatur a puncto Γ ad AB perpendicularis ΓZ, et per ΓZ planum ducatur plano circuli A parallelum efficiatque in cylindro sectionem circulum circum Z descriptum, ita ut existat cylindrus, cuius bases sint circuli B, Z, axis autem recta BZ, et per ΓZ axemque planum ducatur in cylindro efficiens parallelogrammum per axem positum $H\Theta$, ad $Z\Gamma$ autem perpendicularis ducatur ΓK in plano circuli Z posita, per ΓK autem et utramque $\Gamma\Delta$, ΓE plana producantur cylindrum secantia efficiantque per sectionem in superficie cylindri lineas $\Lambda\Delta M$, $NE\Xi$, in plano autem parτομῶν εἰσιν αἱ ΛΜ, ΝΞ εὐθεῖαι. κατήχθωσαν τοίνυν ἐπὶ τὰς ΛΜ, ΝΞ διαμέτρους αἱ ΔΟ, ΕΠ τεταγμένως καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπὶ θάτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸ Ρ καὶ Σ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται τῆς ΛΔΜΡ γραμμῆς ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Δ, καὶ δέδεικται ἡ τοιαύτη τοῦ κυλίνδρου τομὴ ἔλλειψις οὖσα, ἀλλ' οὐ κύκλος, καὶ κατῆκται τεταγμένως ἡ ΔΟ, ὡς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΜ, ὡς δέδεικται τῷ Ἀπολλωνίῳ ἐν τῷ α΄ τῶν Κωνικῶν. καὶ διὰ τὰ αὐτά, ὡς ἡ ΝΓ πρὸς τὴν ΓΞ, οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς τὴν ΠΞ. ἐπεὶ δὲ ἡ ΝΗ τῇ ΘΜ παράλληλός ἐστιν, ὡς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΝΓ πρὸς τὴν ΓΞ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΜ, οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς τὴν ΠΞ· ἡ ἄρα τὰ Π, Ο σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐν τῷ ΗΘ ἐπιπέδῳ ἐστὶ καὶ παράλληλος ἑκατέρᾳ τῶν ΒΑ, ΘΜ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΔΟ, ΕΠ τῇ ΓΚ παράλληλός ἐστιν, αἱ ΔΟ, ΕΠ ἄρα καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. ἐὰν δὴ διὰ τῶν ΔΟ, ΕΠ εὐθειῶν ἀχθῇ ἐπίπεδον, τεμεῖ τὸ ΘΗ παραλληλόγραμμον κατὰ τὴν ΟΠ γραμμήν, καὶ ἔσται τὸ ΠΕΔΟ ἐπίπεδον παράλληλον ἐπιπέδῳ τινὶ τῶν διὰ τῆς ΒΑ ἀγομένων καὶ τεμνόντων τὸ ΗΘ· τὸ ἄρα ΠΕΔΟ ἐπίπεδον τομὴν ποιήσει ἐν τῷ κυλίνδρῳ παραλληλόγραμμον, ὡς ἐδείχθη θεωρήματι τρίτῳ. καί ἐστιν ἡ ΕΔ γραμμὴ κοινὴ τομὴ τοῦ ΠΕΔΟ ἐπιπέδου καὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· ἡ ΕΔ ἄρα εὐθεῖά ἐστι καὶ πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου. ὁμοίως δὴ δείκνυται καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἐφαπτομένων, καὶ ὅτι

---

2. ΕΠ] ΡΠ c. 4. τό] Vc, τά p. 5. ΛΔΜΡ] c, Ρ obscura in V, ΛΔΜΕ v, ΛΔΜ p. τὸ Δ, καὶ δέδεικται] absumpserunt uermes in p. 9. τῷ (pr.)] om. p. α΄] πρώτῳ c.

allelogrammi rectas *ΛΜΓ*, *ΝΞΓ*; rectae igitur *ΛΜ*, *ΝΞ* diametri sunt sectionum. iam ad diametros *ΛΜ*, *ΝΞ* ordinate ducantur *ΔΟ*, *ΕΠ* producanturque ad alteram partem superficiei ad *Ρ*, *Σ*. quoniam igitur *ΓΔ* lineam *ΛΔΜΡ* in *Δ* contingit, et demonstrauimus, eiusmodi sectionem cylindri ellipsim esse, non circulum, ordinateque ducta est *ΔΟ*, erit

$$\Lambda\Gamma : \Gamma M = \Lambda O : OM,$$

ut ab Apollonio demonstratum est in I. libro Conicorum [36]. eademque de causa $N\Gamma : \Gamma\Xi = N\Pi : \Pi\Xi$. quoniam autem *ΝΗ*, *ΘΜ* parallelae sunt, erit $\Lambda\Gamma : \Gamma M = N\Gamma : \Gamma\Xi$ [Eucl. VI, 2; V, 18]; quare etiam $\Lambda O : OM = N\Pi : \Pi\Xi$. itaque recta puncta *Π*, *Ο* coniungens in plano *ΗΘ* est parallelaque utrique *ΒΑ*, *ΘΜ*. et quoniam utraque *ΔΟ*, *ΕΠ* rectae *ΓΚ* parallela est, *ΔΟ* et *ΕΠ* etiam inter se parallelae sunt [Eucl. I, 30]. si igitur per rectas *ΔΟ*, *ΕΠ* planum ducitur, parallelogrammum *ΘΗ* secundum lineam *ΟΠ* secabit, planumque *ΠΕΔΟ* parallelum erit plano alicui eorum, quae per *ΒΑ* ducuntur et *ΗΘ* secant; planum igitur *ΠΕΔΟ* sectionem efficiet in cylindro parallelogrammum, ut in prop. III demonstratum est. et linea *ΕΔ* communis est sectio plani *ΠΕΔΟ* cylindrique superficiei; itaque *ΕΔ* recta est latusque parallelogrammi. iam eodem modo etiam in omnibus contingentibus demonstratur, et

---

Κωνικῶν] *κωνικῶν* $\lambda\overline{\varsigma}^{\omega}$ *θεωρήματι* p. 14. *σημεῖα*] om. p. 18. *εἰσὶ παράλληλοι*] *παράλληλοί εἰσιν* p. 19. *ΘΗ*] *ΗΘ* p. 24. *θεωρήματι τρίτῳ*] *ἐν θεωρήματι* $\overline{\gamma}^{\omega}$ p. 25. *κοινὴ τομή*] om. p.

πάλιν ἐπὶ θάτερα μέρη αἱ ἁφαὶ κατὰ τὸ Ρ καὶ Σ γίνονται καί εἰσιν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου τῇ ΕΔ. πᾶσαι ἄρα αἱ ἐφαπτόμεναι καθ' ἑνὸς παραλληλογράμμου πλευρῶν τὰς ἁφὰς ποιοῦνται· ὃ προέκειτο δεῖξαι.

λ′.

Τούτου δειχθέντος ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ παρὰ τὴν ΑΒ αὐτοῦ βάσιν ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Κ μὴ ὂν ἐν τῷ τοῦ παραλληλογράμμου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ ἐκβληθεῖσαι προσπιπτέτωσαν ἐπιπέδῳ τινὶ παραλλήλῳ ὄντι τῷ ΑΒΓΔ κατὰ τὰ Λ, Μ, Ν, Ξ σημεῖα. τὸ δὴ διὰ τῶν ΚΛ, ΕΖ εὐθειῶν ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον τεμεῖ καὶ τὸ ΛΜΝΞ ἐπίπεδον καὶ ποιήσει ἐν αὐτῷ κοινὴν τομὴν τὴν ΛΜ εὐθεῖαν παράλληλον οὖσαν τῇ ΕΖ· ὁμοίως δὲ καὶ τὸ διὰ τῶν ΚΝ, ΗΘ εὐθειῶν ἐπίπεδον ποιήσει παράλληλον τὴν ΝΞ τῇ ΗΘ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΛΚΝ τρίγωνον τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓΔ, ΛΝΞΜ, αἱ ἄρα κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις, τουτέστιν ἡ ΝΛ τῇ ΗΕ· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΞΜ τῇ ΘΖ παράλληλος. ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΝ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΝ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΝΞ, ὡς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΛΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΛΜ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΝΞ. καὶ ἐναλλάξ·

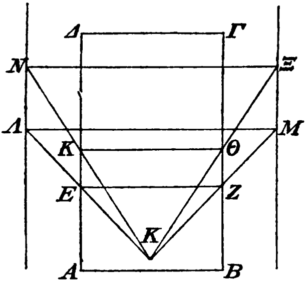
---

4. ὃ προέκειτο δεῖξαι] om. p. 6. λ′] om. V. 7. παραλληλόγραμμον] vcp, -ον euan. V. 8. αὐτοῦ βάσιν] βάσιν αὐτοῦ p. 10. τοῦ] om. c. 12. παραλλήλῳ] vcp, -ρ- corr. ex λ m. 1 V. 13. σημεῖα] in hoc uocabulo des. p. 14. τεμεῖ — ἐπίπεδον] om. c. ΛΜΝΞ] fort. ΛΜΞΝ.

rursus ex altera parte contactus in P, Σ fieri et in una recta rectae $E\Delta$ parallela positos esse. ergo omnes rectae contingentes per latera unius parallelogrammi contingunt; quod erat propositum.

XXX.

Hoc demonstrato sit parallelogrammum $AB\Gamma\Delta$, et basi eius AB parallelae ducantur EZ, $H\Theta$, sumaturque punctum aliquod K in plano parallelogrammi non positum, et ductae KE, KZ, KH, $K\Theta$ productae cum plano aliquo concurrant plano $AB\Gamma\Delta$ parallelo in punctis Λ, M, N, Ξ. itaque planum per $K\Lambda$, EZ rectas ductum etiam planum $\Lambda MN\Xi$ secabit efficietque in eo communem sectionem ΛM rectam rectae EZ parallelam [Eucl. XI, 16]; et eodem modo etiam planum per rectas KN, $H\Theta$ ductum efficiet $N\Xi$ rectae $H\Theta$ parallelam. quoniam igitur triangulus ΛKN a planis parallelis $AB\Gamma\Delta$, $\Lambda N\Xi M$ secatur, communes eorum sectiones parallelae sunt [Eucl. XI, 16], h. e. $N\Lambda$ et HE; eadem de causa autem etiam ΞM rectae ΘZ parallela. quare [Eucl. VI, 2; V, 18] $EK : K\Lambda = HK : KN$. est autem $HK : KN = H\Theta : N\Xi$ et $EK : K\Lambda = EZ : \Lambda M$ [Eucl. VI, 4]; quare etiam $EZ : \Lambda M = H\Theta : N\Xi$. et permutando [Eucl. V, 16], et $EZ = H\Theta$; itaque etiam $\Lambda M = N\Xi$. uerum eaedem parallelae sunt



καί ἐστιν ἴση ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῇ ΝΞ. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα καὶ ἡ ΜΞ εὐθεῖα τῇ ΛΝ.

Ἐὰν δὴ τὸ μὲν Κ σημεῖον ὑποθώμεθα εἶναι τὸ φωτίζον, τὸ δὲ ΑΓ παραλληλόγραμμον τὸ ἐπιπροσθοῦν ταῖς ἀκτῖσιν, εἴτε καθ' αὐτὸ εἴη εἴτε ἐν κυλίνδρῳ, συμβήσεται τὰς ἀπὸ τοῦ Κ φωτίζοντος ἀκτῖνας ἐκβαλλομένας ὁρίζεσθαι τῇ τε ΜΛ καὶ τῇ ΝΞ εὐθείᾳ, καὶ τὸ μεταξὺ τῶν ΜΛ, ΞΝ παραλλήλων ἐσκιασμένον ἔσται. ὅτι μὲν οὖν παράλληλος καὶ ἡ ΔΑ τῇ ΓΒ καὶ ἡ ΝΛ τῇ ΞΜ, δέδεικται· οὐ μὴν καὶ οὕτω φανοῦνται· τῶν γὰρ ΛΜ, ΝΞ διαστάσεων ἡ ἐγγύτερον τῆς ὄψεως μείζων φαίνεται· ταῦτα δὲ παρειλήφαμεν ἐκ τῶν Ὀπτικῶν.

Ἐπειδὴ δὲ παρακείμενόν ἐστι καὶ περὶ τοῦ κώνου θεωρῆσαι τὸ ὅμοιον διὰ τὸ κοινὸν εἶναι τὴν ἔλλειψιν τοῦ τε κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου, ἔσκεπται δὲ περὶ τοῦ κυλίνδρου, φέρε καὶ περὶ τοῦ κώνου σκεψώμεθα.

λα΄.

Ἐὰν τριγώνου ληφθῇ σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸ τρίγωνον, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθῇ τις ἑτέρα εὐθεῖα τέμνουσα τὴν διηγμένην οὕτως, ὥστε ἔχειν, ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, οὕτως τῆς ἐντὸς ἀπειλημμένης τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον καὶ πρὸς τῷ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου κείμενον, ἥτις ἂν ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὸ τρίγωνον, ἀνάλογον ἔσται τετμημένη ὑπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ

---

4. *εἶναι*] vc, *-ν-* euan. V. 8. *ΜΛ*] *ΝΛ* Halley. *ΝΞ*] *ΜΞ* Halley. 9. *ΜΛ, ΞΝ*] *ΝΛ, ΜΞ* Halley (male). *ἐσκι-*

[Eucl. XI, 9]; ergo etiam $M\Xi$, ΛN parallelae [Eucl. I, 33].

Iam si punctum K illustrans esse supposuerimus, parallelogrammum autem $\Lambda\Gamma$ radiis officiens, siue per se exstat siue in cylindro, eueniet, ut radii a K illustranti egredientes rectis $M\Lambda$, $N\Xi$ terminentur, et spatium inter parallelas $M\Lambda$, ΞN adumbratum erit.

iam et $\Delta\Lambda$, ΓB et $N\Lambda$, ΞM parallelas esse, demonstratum est; sed ita non adparebunt; nam distantiarum ΛM, $N\Xi$ oculo propior maior adparet; haec autem ex Opticis transsumpsimus [Eucl. Optic. 6].

Quoniam autem consentaneum est idem etiam in cono pertractare, quia ellipsis coni cylindrique communis est, in cylindro autem quaesitum est, iam in cono quoque quaeramus.

XXXI.

Si extra triangulum punctum sumitur, ab eoque recta ducitur triangulum secans, a uertice autem ad basim alia recta ducitur rectam secantem ita secans, ut sit, ut tota recta secans ad partem extra triangulum positam, ita rectae intra triangulum abscisae pars maior ad minorem, quae parti extra triangulum positae propior est, quaecunque recta a puncto sumpto ducitur triangulum secans, a recta a uertice ad basim ducta secundum eandem proportionem secta erit. et si omnes rectae ab eodem puncto ita ductae secundum

---

ασμένον] Halley cum Comm., *ἐσκιασμένων* Vc. 19. *λα′*] om. V. 26. *τῷ*] *τό* Vc, corr. Halley. 28. *ἔσται τετμημένη*] scripsi, *τετμημένη* Vc, *τέτμηται* Halley.

τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν εὐθείας. κἂν πᾶσαι αἱ οὕτως ἠγμέναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ τέμνουσα αὐτὰς εὐθεῖα ἐν τῷ τριγώνῳ ἀγομένη διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου ἐλεύσεται.

τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω εὐθεῖα τέμνουσα τὸ τρίγωνον ἡ ΔΕΖ, ἀπὸ δὲ τῆς Α κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθήτω ἡ ΑΗΘ τέμνουσα τὴν ΖΔ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως τὴν ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, καὶ διήχθω τις ἑτέρα εὐθεῖα ἡ ΔΚΛ. λέγω, ὅτι, ὡς ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ.

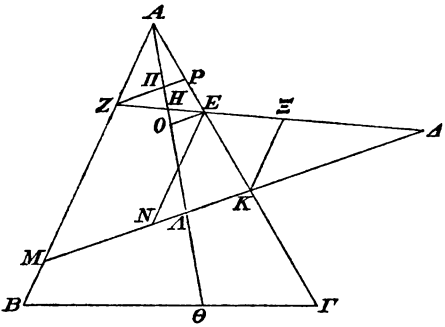
ἤχθωσαν διὰ μὲν τῶν Ε, Κ σημείων τῇ ΑΒ παράλληλοι αἱ ΕΝ, ΚΞ, διὰ δὲ τῶν Ε, Ζ τῇ ΜΔ παράλληλοι αἱ ΕΟ, ΖΠΡ. ἐπεὶ τοῦ ΑΜΚ τριγώνου παρὰ τὴν ΑΜ πλευράν ἐστιν ἡ ΕΝ, ὡς ἄρα ἡ ΝΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἡ ΜΑ πρὸς τὴν ΑΚ, τουτέστιν οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΡ. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΖΑ τῇ ΚΞ παράλληλός ἐστιν, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΞ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΖ. ἐπεὶ οὖν, ὡς μὲν ἡ ΝΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΡ, ὡς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΞ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΖ, καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ΕΝ πρὸς τὴν ΚΞ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΡ, τουτέστιν ἡ ΕΟ πρὸς τὴν ΠΡ. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΔΞ λόγῳ, ὁ δὲ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΔΞ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ

---

3. ἡ] e corr. m. 1 c. 10. ΔΚΛ] Vc, ΔΚΛΜ Halley cum Comm. 11. ΛΚ] ΑΚ Vc, corr. Comm. 14. ἐπεί] V, ἐπεὶ οὖν corr. m. 1 ex ἐπεὶ τοῦ c. 18. ΚΞ] ΚΖ Vc, corr. Comm. 22. τεταραγμένῃ] $\overset{α}{τετ}$ραγμένη V. 25. ΖΔ] c, Ζ e

eandem proportionem secantur, recta eas secans in triangulo ducta per uerticem trianguli ueniet.

nam extra triangulum $AB\Gamma$ punctum aliquod sumatur Δ, et a Δ recta ducatur ΔEZ triangulum secans, a uertice autem A ad basim ducatur $AH\Theta$ rectam $Z\Delta$ ita secans, ut sit
$$Z\Delta : \Delta E = ZH : HE,$$
ducaturque alia recta $\Delta K\Lambda$. dico, esse
$$M\Delta : \Delta K = M\Lambda : \Lambda K.$$



ducantur per puncta E, K rectae AB parallelae EN, $K\Xi$, per E, Z autem rectae $M\Delta$ parallelae EO, $Z\Pi P$. quoniam in triangulo ΛMK lateri AM parallela est EN, erit
$NE : EK = M\Lambda : \Lambda K$ [Eucl. VI, 4] $= Z\Lambda : \Lambda P$ [Eucl. VI, 2; V, 18]. rursus quoniam $Z\Lambda$, $K\Xi$ parallelae sunt, erit $EK : K\Xi = E\Lambda : \Lambda Z$ [Eucl. VI, 4]. quoniam igitur $NE : EK = Z\Lambda : \Lambda P$ et
$$EK : K\Xi = E\Lambda : \Lambda Z,$$
ex aequo erit in ratione perturbata [Eucl. V, 23] $EN : K\Xi = E\Lambda : \Lambda P = EO : \Pi P$ [Eucl. VI, 4]. quoniam igitur $M\Delta : \Delta K = Z\Delta : \Delta\Xi$ [Eucl. VI, 2; V, 18] et $Z\Delta : \Delta\Xi = (Z\Delta : E\Delta) \times (E\Delta : \Delta\Xi)$, erit etiam

---

corr. m. 1 V, $\Xi\Delta$ v. $\Delta\Xi$] vc, corr. ex ΔZ m. 1 V. 26. τὴν $\Delta\Xi$] Halley, $\Gamma\Delta\Xi$ c et in ras. m. 1 V.

τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΕΔ καὶ τοῦ τῆς ΕΔ πρὸς ΔΞ, καὶ ὁ τῆς ΜΔ πρὸς ΔΚ λόγος ἄρα σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΕΔ καὶ τοῦ τῆς ΕΔ πρὸς τὴν ΔΞ. ἀλλ' ὁ μὲν τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΕΔ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ διὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὁ δὲ τῆς ΕΔ πρὸς τὴν ΔΞ, τουτέστιν ὁ τῆς ΕΝ πρὸς τὴν ΞΚ, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ· ὁ ἄρα τῆς ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΕ λόγου καὶ τοῦ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ. πάλιν ἐπεὶ ὁ τῆς ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΖΠ πρὸς τὴν ΠΡ, ὁ δὲ τῆς ΖΠ πρὸς τὴν ΠΡ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΠ πρὸς τὴν ΟΕ λόγου, τουτέστι τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, καὶ τοῦ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ὁ τῆς ΜΛ ἄρα πρὸς τὴν ΛΚ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΗΖ πρὸς τὴν ΗΕ λόγου καὶ τοῦ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ τῆς ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν συγκείμενος· ὡς ἄρα ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ.

ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἄλλαι διαχθῶσιν ἀπὸ τοῦ Δ· πᾶσαι γὰρ ὑπὸ τῆς ΑΘ διαιρεθήσονται τὸν εἰρημένον τρόπον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Κἂν αἱ ἀπὸ τοῦ Δ διαχθεῖσαι ἀνάλογον ὦσι τετμημέναι, ἵν' ᾖ, ὡς μὲν ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, ὡς δὲ ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ, ἡ τὰς ἐν τῷ τριγώνῳ ἀπειλημμένας εὐθείας, οἷον τὰς ΖΕ, ΜΚ, ἀνάλογον τέμνουσα εὐθεῖα διαγομένη διὰ τῆς κορυφῆς ἥξει τοῦ τριγώνου.

---

1. πρὸς ΔΞ] V, πρὸς τὴν ΔΞ c. καὶ ὁ — 3. ΔΞ] om. c. 15. ΛΚ] ΑΚ Vc, corr. Comm. 23. διαχθεῖσαι] c, corr. ex διαχθῶσι m. 1 V, διαχθῶσαι v. 26. ἡ] Halley, ἢ Vc.

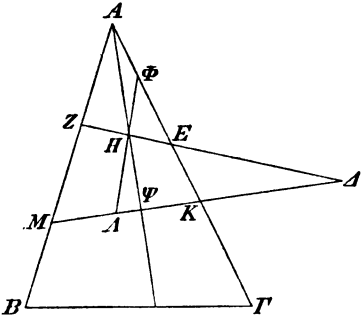
$M\Delta : \Delta K = (Z\Delta : E\Delta) \times (E\Delta : \Delta \Xi)$. uerum ex hypothesi $Z\Delta : E\Delta = ZH : HE$, demonstrauimus autem, esse $E\Delta : \Delta \Xi$ siue [Eucl. VI, 4] $EN : \Xi K = OE : \Pi P$; itaque $M\Delta : \Delta K = (ZH : HE) \times (OE : \Pi P)$. rursus quoniam $M\Lambda : \Lambda K = Z\Pi : \Pi P$ [Eucl. VI, 4] et $Z\Pi : \Pi P = (Z\Pi : OE) \times (OE : \Pi P) = (ZH : HE) \times (OE : \Pi P)$ [Eucl. VI, 4], erit etiam

$$M\Lambda : \Lambda K = (HZ : HE) \times (OE : \Pi P).$$

demonstrauimus autem, etiam rationem $M\Delta : \Delta K$ ex iisdem compositam esse; itaque $M\Delta : \Delta K = M\Lambda : \Lambda K$.

eodem autem modo demonstrabitur, etiam si aliae a Δ ducuntur; omnes enim ab $A\Theta$ eo, quo diximus, modo diuidentur; quod erat demonstrandum.

Et si rectae a Δ ductae secundum eandem proportionem sectae sunt, ita ut sit $Z\Delta : \Delta E = ZH : HE$ et $M\Delta : \Delta K = M\Lambda : \Lambda K$, recta rectas in triangulo abscisas, ut ZE, MK, secundum eandem proportionem secans producta per uerticem trianguli ueniet.



nam si fieri potest, extra eum ueniat per punctum Φ, et ducatur recta $AH\Psi$. quoniam igitur recta $A\Psi$ a uertice ducta rectam $Z\Delta$ ita secat, ut sit

$$Z\Delta : \Delta E = ZH : HE,$$

ex eo, quod supra demonstratum est, etiam $M\Delta$ secundum eandem proportionem secat. itaque

$$M\Delta : \Delta K = M\Psi : \Psi K;$$

εἰ γὰρ δυνατόν, ἡκέτω ἐκτὸς κατὰ τὸ Φ σημεῖον, καὶ διήχθω ἡ ΛΗΨ εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν κατὰ τὸ προδειχθὲν εὐθεῖά τις ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἡ ΛΨ ἀγομένη τέμνει τὴν ΖΔ εὐθεῖαν, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως τὴν ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, καὶ τὴν ΜΔ ἄρα ἀνάλογον τέμνει. ὡς ἄρα ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἡ ΜΨ πρὸς τὴν ΨΚ· ὅπερ ἀδύνατον· ὑπέκειτο γάρ, ὡς ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ. ἡ ἄρα ΛΗ ἐκβαλλομένη οὐχ ἥξει δι' ἄλλου σημείου πλὴν τοῦ Λ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβʹ.

Αἱ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου κωνικῆς ἐπιφανείας ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι κατ' ἀμφότερα τὰ μέρη πᾶσαι καθ' ἑνὸς τριγώνου πλευρῶν τὰς ἐπαφὰς ποιοῦνται.

ἔστω κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὸ Α κέντρον κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Β σημεῖον, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, σημείου δέ τινος τοῦ Γ ληφθέντος ἐκτὸς τοῦ κώνου ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Γ αἱ ΓΔ, ΓΕ εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. λέγω, ὅτι τὰ Ε, Δ σημεῖα τῶν ἐπαφῶν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἐστί.

κατήχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΖ, καὶ διὰ τῆς ΓΖ ἤχθω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ τοῦ Α κύκλου ἐπιπέδῳ καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῷ κώνῳ τὸν περὶ τὸ Ζ κέντρον κύκλον, ὥστε κῶνον ὑποστῆναι, οὗ βάσις μὲν ὁ Ζ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΖΒ, καὶ διὰ τῆς ΓΖ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω

---

11. λβʹ] om. V. 24. κύκλου ἐπιπέδῳ] vc, -ου ἐ- corr. ex ω in scrib. V.

quod fieri non potest; supposuimus enim, esse

$$M\Delta : \Delta K = M\Lambda : \Lambda K.$$

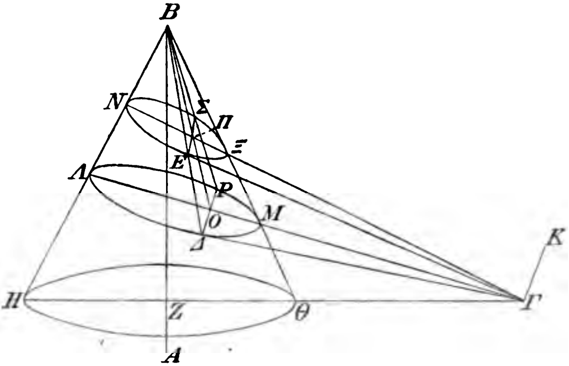
ergo ΛH producta per nullum aliud punctum ueniet quam A; quod erat demonstrandum.

XXXII.

Rectae ab eodem puncto superficiem conicam ex utraque parte contingentes omnes per latera unius trianguli contingunt.

sit conus, cuius basis sit circulus circum A centrum descriptus, uertex autem punctum B, axis autem recta AB, et sumpto extra conum puncto aliquo Γ a Γ ducantur rectae $\Gamma\Delta$, ΓE superficiem coni ex eadem parte contingentes. dico, puncta contactus E, Δ in una recta esse.

ducatur a puncto Γ ad AB perpendicularis ΓZ, et per ΓZ planum ducatur plano circuli A parallelum



efficiatque in cono sectionem circulum circum Z centrum descriptum, ita ut conus existat, cuius basis ἐπίπεδον ποιοῦν ἐν τῷ κώνῳ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΒΗΘ, καὶ τῇ ΓΖ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΚ ἐν τῷ τοῦ Ζ κύκλου ἐπιπέδῳ οὖσα, καὶ διὰ τῆς ΓΚ καὶ ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ ἤχθω ἐπίπεδα τέμνοντα τὸν κῶνον καὶ ποιείτω διὰ τῆς τομῆς ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὰς ΛΔΜ, ΝΕΞ γραμμάς, ἐν δὲ τῷ τοῦ ΒΗΘ τριγώνου ἐπιπέδῳ τὰς ΛΓ, ΝΓ εὐθείας· διάμετροι ἄρα τῶν ΛΔΜ, ΝΕΞ τομῶν εἰσιν αἱ ΛΜ, ΝΞ εὐθεῖαι. ἤχθωσαν τοίνυν ἐπὶ τὰς ΛΜ, ΝΞ διαμέτρους αἱ ΔΟ, ΕΠ τεταγμένως καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπὶ θάτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸ Ρ καὶ Σ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ εὐθεῖα τῆς ΛΔΜ γραμμῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κατῆκται τεταγμένως ἡ ΔΟ, ὡς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΜ· καὶ διὰ τὰ αὐτά, ὡς ἡ ΝΓ πρὸς τὴν ΓΞ, οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς τὴν ΠΞ· ἡ ἄρα τὰ Ο καὶ Π σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἥξει διὰ τῆς κορυφῆς διὰ τὸ πρὸ τούτου. διήχθω τοίνυν ἡ ΟΠΒ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΕΣ, ΔΡ τῇ ΓΚ ἐστι παράλληλος, αἱ ἄρα ΔΡ, ΕΣ παράλληλοί τέ εἰσιν ἀλλήλαις καὶ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. τὸ οὖν διὰ τῆς ΒΠΟ καὶ τῶν ΕΣ, ΔΡ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον τὴν τομὴν ποιήσει τρίγωνον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ· τὰ ἄρα Ε καὶ Δ σημεῖα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ὄντα τοῦ κώνου ἐπὶ πλευρᾶς ἐστι τριγώνου τοῦ τέμνοντος τὸ ΒΗΘ τρίγωνον κατὰ τὴν ΒΠΟ εὐθεῖαν. ὁμοίως δὲ δείκνυται ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων πασῶν καὶ τῶν κατὰ τὸ Ρ καὶ Σ ἐφαπτομένων τὸ αὐτὸ συμβαῖνον. πᾶσαι

---

16. τά] τό Vc, corr. Halley. 22. ΒΠΟ] βο̤̈πο c. 26. ΒΠΟ] vc, et ΠΟ e corr. m. 1 V. 28. Ρ] vc, non liquet V.

sit circulus Z, axis autem ZB, et per ΓZ axemque planum ducatur in cono efficiens $BH\Theta$ triangulum per axem positum, et ad ΓZ perpendicularis ducatur ΓK in plano circuli Z posita, per ΓK autem et utramque $\Gamma\Delta$, ΓE plana ducantur conum secantia efficiantque per sectionem in superficie coni lineas $\Lambda\Delta M$, $NE\Xi$, in plano autem trianguli $BH\Theta$ rectas $\Lambda\Gamma$, $N\Gamma$; diametri igitur sectionum $\Lambda\Delta M$, $NE\Xi$ sunt rectae ΛM, $N\Xi$. iam ad diametros ΛM, $N\Xi$ ordinate ducantur ΔO, $E\Pi$ producanturque ad alteram partem superficiei ad P, Σ. quoniam igitur recta $\Gamma\Delta$ lineam $\Lambda\Delta M$ in puncto Δ contingit, ordinateque ducta est ΔO, erit $\Lambda\Gamma : \Gamma M = \Lambda O : OM$ [Apollon. I, 36]; et eadem de causa erit $N\Gamma : \Gamma\Xi = N\Pi : \Pi\Xi$; itaque propter propositionem praecedentem recta puncta O, Π coniungens producta per uerticem ueniet. ducatur igitur $O\Pi B$. et quoniam utraque $E\Sigma$, ΔP rectae ΓK parallela est, ΔP et $E\Sigma$ inter se parallelae sunt [Eucl. XI, 9] et in uno plano positae. itaque planum per $B\Pi O$ et $E\Sigma$, ΔP productum in superficie coni sectionem efficiet triangulum [Apollon. I, 3]; puncta igitur E, Δ in superficie coni posita in latere sunt trianguli triangulum $BH\Theta$ secundum rectam $B\Pi O$ secantis. eodem autem modo in omnibus contingentibus idem euenire demonstratur, etiam in rectis in P, Σ contingentibus. ergo omnes rectae a Γ superficiem conicam contingentes in latera unius trianguli cadunt; quod erat demonstrandum.

ἄρα αἱ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτόμεναι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καθ' ἑνὸς τριγώνου πλευρῶν πίπτουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ'.

Τούτου δὴ δειχθέντος ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ παρὰ τὴν ΒΓ βάσιν αἱ ΔΕ, ΖΗ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Θ μὴ ὂν ἐν τῷ τοῦ τριγώνου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΘΔ, ΘΖ, ΘΗ, ΘΕ ἐκβληθεῖσαι προσπιπτέτωσαν ἐπιπέδῳ τινὶ παραλλήλῳ ὄντι τῷ ΑΒΓ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα· τὸ δὴ διὰ τῶν ΕΔ, ΚΘ εὐθειῶν ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον τεμεῖ καὶ τὸ ΚΛΜΝ ἐπίπεδον καὶ ποιήσει ἐν αὐτῷ κοινὴν τομὴν τὴν ΚΝ εὐθεῖαν παράλληλον οὖσαν τῇ ΕΔ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ διὰ τῶν ΖΗ, ΛΘ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ποιήσει παράλληλον τῇ ΖΗ τὴν ΛΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΚΘΛ ἐπίπεδον τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΚΛΜΝ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΚΛ, ΔΖ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις. διὰ ταὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΗΕ παράλληλός ἐστιν· ἐκβληθεῖσαι ἄρα αἱ ΚΛ, ΜΝ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ Ξ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΚΞ, ΞΝ δυσὶ ταῖς ΔΑ, ΑΕ παράλληλοί εἰσιν, ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ξ γωνία τῇ πρὸς τῷ Α. πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ΞΚ, ΚΝ δυσὶ ταῖς ΑΔ, ΔΕ παράλληλοί εἰσιν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν ΞΚ, ΚΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ ἴση. τὰ ἄρα ΞΚΝ, ΑΒΓ τρίγωνα ὅμοιά ἐστιν ἀλλήλοις.

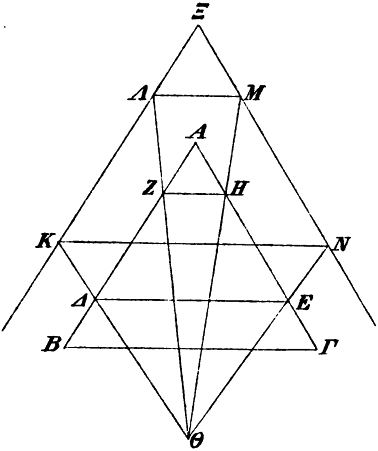
Ἐὰν οὖν πάλιν τὸ μὲν Θ σημεῖον ὑποθώμεθα τὸ φωτίζον εἶναι, τὸ δὲ ΑΒΓ τρίγωνον τὸ ἐπιπροσθοῦν

---

4. λγ'] om. V. 5. ΑΒΓ] v, seq. spatium 4 litt. c; seq. spatium 4 litt. et in lin. proxima 5 litt. V, mg. m. rec.: in apographo nullum erat spatium. 14. τό] postea ins. m. 1 c. 21. ἄρα] om. c. 22. τῷ (utrumque)] scripsi, τό V c.

XXXIII.

Iam uero hoc demonstrato sit triangulus $AB\Gamma$ basique $B\Gamma$ parallelae ΔE, ZH, sumaturque punctum aliquod Θ in plano trianguli non positum, et ductae $\Theta\Delta$, ΘZ, ΘH, ΘE productae cum plano aliquo plano $AB\Gamma$ parallelo in punctis K, Λ, M, N concurrant; planum igitur per rectas $E\Delta$, $K\Theta$ ductum etiam planum $K\Lambda MN$ secabit efficietque in eo communem sectionem rectam KN rectae $E\Delta$ parallelam [Eucl. XI, 16]. similiter autem etiam planum per ZH, $\Lambda\Theta$ productum efficiet ΛM rectae ZH parallelam. quoniam igitur planum $K\Theta\Lambda$ a planis parallelis $AB\Gamma$, $K\Lambda MN$ secatur, communes eorum sectiones $K\Lambda$, ΔZ inter se parallelae sunt [Eucl. XI, 16]. eadem autem de causa etiam NM, HE parallelae sunt. productae igitur $K\Lambda$, MN in Ξ concurrent. quoniam igitur duae rectae $K\Xi$, ΞN duabus ΔA, AE parallelae sunt, erit $\angle \Xi = A$ [Eucl. XI, 10]. rursus quoniam duae rectae ΞK, KN duabus $A\Delta$, ΔE parallelae sunt, erit $\angle \Xi KN = A\Delta E$ [Eucl. XI, 10]. ergo trianguli ΞKN, $AB\Gamma$ inter se similes sunt.



ταῖς ἀκτῖσιν, εἴτε καϑ' αὐτὸ ὂν τὸ τρίγωνον εἴτε ἐν κώνῳ, συμβήσεται τὰς ἀπὸ τοῦ Θ φερομένας ἀκτῖνας ἐκπιπτούσας διὰ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ποιεῖν τὸ ΚΝΞ τρίγωνον τῆς σκιᾶς ὅμοιον ὂν τῷ ΑΒΓ.

Ταῦτα εἰ καὶ ὀπτικῆς ϑεωρίας ἔχεται καὶ δοκεῖ διὰ τοῦτο τῆς παρούσης πραγματείας ἀλλότρια εἶναι, ἀλλ' οὖν ἐκεῖνό γε φανερὸν γέγονεν, ὅτι ἄνευ τῶν περὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς τοῦ κώνου τομῆς ἐνταῦϑα δειχϑέντων, τῆς ἐλλείψεως λέγω καὶ τῶν ἁπτομένων αὐτῆς εὐϑειῶν, ἀδύνατον ἦν καταστῆσαι τὸ τοιοῦτον πρόβλημα· ὥστε οὐκ ἀλόγως, ἀλλὰ διὰ τὴν χρείαν ἐπεισῆλϑεν ὁ περὶ τούτων λόγος.

---

1. καϑ' αὐτό] vc, καϑ$\overset{τ'}{αὐ}$ V. 6. πραγματείας] c, πραγμα$^{τ'}$ Vv. 12. τούτων] τούτου c. In fine: τέλος τοῦ α' m. rec. V. Deinde σερήνου ἀντινσέως φιλοσόφου περὶ κυλίνδρου τομῆς :— Vc, τὸ $\bar{β}^{ον}$ add. m. rec. V; τέλος τοῦ περὶ κυλίνδρου τομῆς σερήνου Ambr. A 101 sup.

Si igitur rursus supposuerimus, *Θ* punctum illustrans esse, triangulum autem *ΑΒΓ* radiis officientem, siue per se exstat siue in cono, eueniet, ut radii a *Θ* progredientes per triangulum *ΑΒΓ* cadentes *ΚΝΞ* triangulum umbrae efficiant triangulo *ΑΒΓ* similem.

Haec etiam si ad disputationem opticam pertinent ideoque ab hac disquisitione aliena esse uidentur, hoc certe adparuit, sine iis, quae hic de sectione cylindri et coni demonstrata sunt, ellipsi scilicet rectisque eam contingentibus, problema eiusmodi ad finem perduci non potuisse; quare non sine causa, sed propter usum de his mentio incidit.

DE SECTIONE CONI.

ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΥ ΤΟΜΗΣ.

Τῆς ἐν τοῖς κώνοις τομῆς, ἄριστε Κῦρε, ὅταν διὰ τῆς κορυφῆς αὐτῶν γίνηται, τρίγωνα μὲν ὑφιστάσης ἐν τοῖς κώνοις, ποικίλην δὲ καὶ γλαφυρὰν θεωρίαν ἐχούσης καὶ μηδενὶ τῶν πρὸ ἡμῶν, ὅσα γε ἐμὲ εἰδέναι, πραγματευθείσης ἔδοξέ μοι μὴ καλῶς ἔχειν ἀνεξέργαστον ἀφεῖναι τὸν τόπον τοῦτον, εἰπεῖν δὲ περὶ αὐτῶν, ὅσα γε εἰς ἐμὴν ἀφῖκται κατάληψιν. σχεδὸν μὲν οὖν τά γε πλείω καὶ βαθυτέρας δοκοῦντα δεῖσθαι γεωμετρίας ἡγοῦμαι λόγου τετυχηκέναι παρ' ἡμῶν, οὐκ ἂν δὲ θαυμάσαιμι, εἴ καί τι τῶν ὀφειλόντων λεχθῆναι παρείκων ὀφθείην ἅτε πρῶτος ἐγχειρήσας τῇ τούτων θεωρίᾳ· ὥστε εἰκὸς ἢ σὲ καθέντα εἰς τὴν αὐτὴν σκέψιν ἢ τῶν ὕστερον ἐντευξομένων τινὰ ὁρμώμενον ἐνθένδε τὸ παροφθὲν ἡμῖν προσθεῖναι. ἔστι δὲ ἃ καὶ ἑκόντες παραλελοίπαμεν ἢ διὰ τὸ σαφὲς ἢ διὰ τὸ ἄλλοις δεδεῖχθαι· αὐτίκα τὸ μὲν ἐν παντὶ κώνῳ τρίγωνον εἶναι τομήν, εἰ διὰ τῆς κορυφῆς τμηθείη, διὰ τὸ δεδεῖχθαι ἄλλοις ὡς οὕτως ἔχον ἡμεῖς παραλιμπάνομεν, ἵνα μηδὲν ἀλλότριον τοῖς ὑφ' ἡμῶν εὑρεθεῖσι συντεταγμένον ᾖ. τὰ δ' ἐπιπολαιότερα καὶ τοῖς πολλοῖς εὔληπτα γραφῆς οὐκ ἠξιώσαμεν, ἵνα μὴ τῶν ἐντυγχανόντων τὴν προσ-

---

Titulum om. Vc, *σερήνου ἀντινέως φιλοσόφου περὶ κώνου τομῆς* p. 11. *θαυμάσαιμι*] *θαυμάσαιτό τις* p. 12. *παρεί-*

DE SECTIONE CONI.

Quum sectio conorum, optime Cyre, in conis triangulos efficiens, si per uerticem eorum fit, uariam subtilemque materiam disputandi praebeat nec a quoquam ante nos, quod sciam, pertractata sit, mihi placuit hunc locum incultum non relinquere, sed de ea re dicere, quae percepi. credo igitur, pleraque et fere quae altiore geometria egere uideantur a nobis perstricta esse, sed non mirabor, si quid eorum, quae tractanda erant, omisisse inueniar, quippe qui ad haec tractanda primus adcesserim; quare consentaneum est, aut te eandem quaestionem ingressum aut aliquem eorum, qui postea legent, hinc profectum addere, quae nos praetermisimus. quaedam uero etiam de industria omisimus, aut quia manifesta sunt aut ab aliis demonstrata; uelut statim in omni cono triangulum esse sectionem, si per uerticem secetur, quia ab aliis [Apollon. I, 3] demonstratum est ita se habere, nos omittimus, ne quid alienum iis, quae a nobis inuenta sunt, sit immixtum. quae uero futiliora sunt et a uulgo facile comprehenduntur, perscribere detrectauimus, ne

---

κων] παρήκων p. πρῶτος] vcp, πρώ$\overset{τ}{ω}$ϲ V. 13. καθέντα] καθιέντα Halley. 16. ἄλλοις] ἐν ἄλλοις p. 17. κώνῳ] vcp, post κώ- ras. 1 litt. V.

οχὴν τῆς διανοίας ἐκλύσωμεν. ἰτέον δὴ ἐπὶ τὴν τῶν προκειμένων ἀπόδειξιν.

α΄.

Ἐὰν τεσσάρων εὐθειῶν ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην, τὸ ὑπὸ πρώτης καὶ τετάρτης μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ δευτέρας καὶ τρίτης.

εὐθεῖα γὰρ ἡ A πρὸς τὴν B μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν $\varDelta E$. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν A, $\varDelta E$ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν B, Γ.

ἐπεὶ ἡ A πρὸς B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς $\varDelta E$, ἔστω, ὡς ἡ A πρὸς B, οὕτως ἡ Γ πρὸς $\varDelta Z$· τὸ ἄρα ὑπὸ A, $\varDelta Z$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν B, Γ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ A, $\varDelta E$ τοῦ ὑπὸ A, $\varDelta Z$· καὶ τοῦ ὑπὸ B, Γ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ A, $\varDelta E$.

β΄.

Ἐὰν τριγώνου ὀρθογωνίου ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν γωνιῶν ἐπὶ μιὰν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἀχθῇ εὐθεῖα, ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ᾽ αὐτῆς πρὸς τῇ καθέτῳ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἐξ ἀρχῆς ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν πρὸς τὴν τμηθεῖσαν πλευρὰν ὑπὸ τῆς ἀχθείσης.

τριγώνου γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ $AB\Gamma$ ὀρθὴν ἔχοντος τὴν A γωνίαν ἀπὸ μιᾶς τῶν γωνιῶν τῆς Γ ἐπὶ

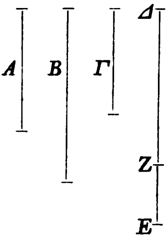
---

1. δή] δὴ οὖν p. 3. α΄] mg. p, mg. m. rec. V, om. vc; et sic deinceps. 5. ἔχῃ] pc, ἔχει Vv. 6. ὑπό (pr.)] ὑπὸ τῆς p. 11. ἡ (pr.)] γὰρ ἡ p. B] τὴν B p. 12. $\varDelta E$] τὴν $\varDelta E$ p. 13. ὑπό (pr.)] ὑπὸ τῶν p. τῷ] p, τ̃ι V, corr. ex τό m. 1 c, τῶν v. 14. ὑπό (pr.)] ὑπὸ τῶν p, ut semper (in rectangulis). τοῦ (alt.)] p, τό Vvc. 18. τῶν] pc, $\overset{\tau}{\omega}$ V,

legentium animi intentionem delassemus. iam uero ad demonstrationem propositorum ueniamus.

I.

Si quattuor rectarum prima ad secundam maiorem rationem habet quam tertia ad quartam, rectangulum primae quartaeque maius est rectangulo secundae tertiaeque.



sit enim $A : B > \Gamma : \Delta E$. dico, esse $A \times \Delta E > B \times \Gamma$.

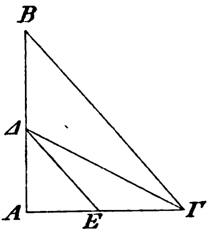
quoniam $A : B > \Gamma : \Delta E$, sit $A : B = \Gamma : \Delta Z$; itaque $A \times \Delta Z = B \times \Gamma$ [Eucl. VI, 16]. uerum

$$A \times \Delta E > A \times \Delta Z;$$

ergo etiam $A \times \Delta E > B \times \Gamma$.

II.

Si trianguli rectanguli ab altero angulo ad alterum laterum rectum angulum comprehendentium recta ducitur, recta ducta ad rectam ab ea de perpendiculari abscisam maiorem rationem habet quam latus ab initio sub recto angulo subtendens ad latus a recta ducta sectum.



nam trianguli rectanguli $AB\Gamma$ angulum A rectum habentis ab altero angulo Γ ad AB recta ducatur $\Gamma\Delta$. dico, esse $\Gamma\Delta : \Delta A > \Gamma B : BA$.

τῷ v. ἀχθῇ] γωνίαν εὐθειῶν ἀχθῇ p. 19. ἀπολαμβανομένην] pc, ἀπολαμβανομένη V. 24. *Α*] πρὸς τῷ *Α* p. *Γ*] πρὸς τῷ *Γ* p.

τὴν ΑΒ ἤχθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ πρὸς ΔΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ.

ἤχθω παρὰ τὴν ΓΒ ἡ ΔΕ. ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ, ἀμβλεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΓ· μείζων ἄρα ἡ ΔΓ τῆς ΔΕ. ἡ ἄρα ΓΔ πρὸς ΔΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ.

γʹ.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ, τῶν γινομένων ἐν ταῖς τομαῖς τριγώνων τὰ ἴσας ἔχοντα βάσεις ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ κώνου διὰ τῆς κορυφῆς τμηθέντος ἐπιπέδοις γεγενήσθω τὰ ὑπὸ τῆς τομῆς γενόμενα τρίγωνα· ὅτι γὰρ τρίγωνα ποιοῦσιν αἱ τοιαῦται τομαί, ἐν ἄλλοις δείκνυται. γεγενήσθω δὴ τὰ ΑΓΔ, ΑΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς ΓΔ, ΕΖ βάσεις. λέγω, ὅτι τὰ ΑΓΔ, ΑΕΖ τρίγωνα ἴσα ἐστίν.

ἐπεὶ γὰρ αἵ τε βάσεις ἴσαι ἀλλήλαις, ἴσαι δὲ καὶ αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ἄρα τῷ τριγώνῳ ἴσον.

δʹ.

Ἐν τοῖς ὀρθοῖς κώνοις τὰ ὅμοια τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

---

2. ΔΑ] τὴν ΔΑ p. 3. ἐπεί] καὶ ἐπεί p. 4. ΔΑΓ] ΔΑΓ γωνία p. ἡ (pr.)] ἐστὶν ἡ p. 5. ΓΔ] vp, ΓΔ uel ΓΑ V, ΓΑ c. ΔΑ] τὴν ΔΑ p. 9. τά] τάς c. 10. ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα] ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν p. 11. Α] πρῶτον c. 14. γενόμενα] γινόμενα Halley. 15. τοιαῦται τομαί] τομαὶ αὗται p. 16. ἴσας] p, ἴσα c et extr. pag. V. 17. ἴσα] ἴσα

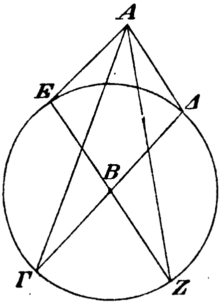
ducatur rectae ΓB parallela ΔE. quoniam $\angle \Delta A \Gamma$ rectus est, $\angle \Delta E \Gamma$ obtusus est [Eucl. I, 16]; itaque $\Delta \Gamma > \Delta E$ [Eucl. I, 19]. quare

$$\Gamma \Delta : \Delta A > E \Delta : \Delta A \text{ [Eucl. V, 8]},$$

h. e. [Eucl. VI, 4] $> \Gamma B : BA$.

III.

Si conus rectus per uerticem planis secatur, triangulorum in sectionibus ortorum, qui aequales habent bases, inter se sunt aequales.



sit conus, cuius uertex sit punctum A, basis autem circulus circum centrum B descriptus, cono autem per uerticem planis secto efficiantur trianguli per sectionem orti; nam triangulos efficere eius modi sectiones, in aliis demonstratur [Apollon. I, 3]. itaque effecti sint $A\Gamma\Delta$, AEZ aequales habentes bases $\Gamma\Delta$, EZ. dico, triangulos $A\Gamma\Delta$, AEZ aequales esse.

quoniam enim et bases inter se aequales et $A\Gamma = A\Delta = AE = AZ$, etiam triangulus triangulo aequalis est [Eucl. I, 8].

IV.

In conis rectis trianguli similes inter se aequales sunt.

ἀλλήλοις p. 18. ἀλλήλαις] ἀλλήλαις εἰσίν p. ἴσαι (alt.)] εἰσί p. 19. AZ] AZ ἴσαι ἀλλήλαις p. 20. ἴσον] ἴσον ἐστίν p.

ἔστω γὰρ ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ ὅμοιον. λέγω, ὅτι καὶ ἴσον ἐστίν.

ἐπεὶ γάρ, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα. καί εἰσιν ἴσαι αἱ ΓΑ, ΕΑ· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΔ, ΕΖ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων τρίγωνα ἐν τοῖς ὀρθοῖς κώνοις ἴσα ἐστίν· ἴσα ἄρα τὰ ΑΓΔ, ΑΕΖ τρίγωνα.

ε΄.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς ἐπιπέδοις τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς τῷ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῖς δὲ ἐκτὸς τοῦ ἄξονος, ὁ δὲ ἄξων τοῦ κώνου μὴ ἐλάττων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τῶν γινομένων ἐν τῷ κώνῳ τριγώνων μέγιστον ἔσται τὸ διὰ τοῦ ἄξονος.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ. τμηθέντος δὲ τοῦ κώνου διὰ τῆς κορυφῆς γεγενήσθω τρίγωνα διὰ μὲν τοῦ ἄξονος τὸ ΑΓΔ, ἐκτὸς δὲ τοῦ ἄξονος τὸ ΑΕΖ, καὶ κείσθω παράλληλος ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ, ὁ δὲ ἄξων, τουτέστιν ἡ ΑΒ εὐθεῖα, μὴ ἐλάττων ἔστω τῆς ΒΓ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ΑΕΖ τριγώνου.

ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ΕΖ ἡ ΒΗ· δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Η. ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ· ἡ ΑΗ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΕΖ· ἰσοσκελὲς γὰρ τὸ ΕΑΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΒΕ, ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ΒΕ, ἡ ἄρα ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς

---

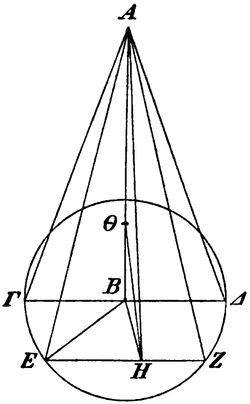
3. γάρ] γάρ ἐστιν p. 4. ΕΖ] cp; ΕΞ̈ V, mg. Ζ m. 1 euan. ΕΑ] ΓΕΑ Vc, ΑΕ p. 7. ΑΕΖ] Comm., ΔΕΖ Vcp.

nam in figura proposita [p. 125] trianguli $A\Gamma\Delta$, AEZ similes sint. dico, eosdem aequales esse.

quoniam enim $A\Gamma : \Gamma\Delta = AE : EZ$, permutando [Eucl. V, 16]. et $\Gamma A = EA$; itaque etiam $\Gamma\Delta = EZ$. trianguli autem in aequalibus basibus positi in conis rectis aequales sunt [prop. III]; ergo $A\Gamma\Delta = AEZ$.

V.

Si conus rectus per uerticem secatur planis, uno per axem, aliis extra axem, et axis coni non minor est radio basis, triangulorum in cono ortorum maximus est triangulus per axem.



sit conus, cuius uertex sit A, basis autem circulus circum B centrum descriptus, axis autem AB. cono uero per uerticem secto trianguli effecti sint per axem $A\Gamma\Delta$, extra axem autem AEZ, ponaturque EZ rectae $\Gamma\Delta$ parallela, axis autem, siue recta AB, ne sit $< B\Gamma$. dico, esse $\triangle\, A\Gamma\Delta > AEZ$.

ducatur BE, et a B ad EZ perpendicularis ducatur BH; EZ igitur in H in duas partes aequales secta est [Eucl. III, 3]. ducatur AH; AH igitur ad EZ perpendicularis est; nam EAZ aequicrurius est. quoniam igitur AB radio BE minor non est, uerum $EH < BE$, erit $AB > EH$.

---

20. $A\Gamma\Delta$] p, $A\Gamma$ Vc. 22. κάθετος — 23. τὴν EZ] ἐπὶ τὴν EZ κάθετος ἤχθω p. 25. EAZ] AEZ p.

ΕΗ. ἀφῃρήσθω τοίνυν τῇ ΕΗ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ μὲν ΕΗ τῇ ΒΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΗ, δύο ἄρα δυσὶν ἴσαι. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΒΘ ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΕΒ τῇ ΘΗ ἴση ἐστί, καὶ ὅμοια τὰ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς ΕΗ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ. ἡ δὲ ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ, ὡς προεδείχθη· ὀρθογώνιον γὰρ τὸ ΑΒΗ. καὶ ἡ ΒΕ ἄρα πρὸς ΕΗ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΕΗ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΗ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΒΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΗΑ διὰ τὸ πρῶτον λημμάτιον. ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ ΓΔ, ΒΑ ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ ΕΖ, ΗΑ ἥμισυ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΓΔ ἄρα τρίγωνον τοῦ ΑΕΖ μεῖζόν ἐστι. καὶ πάντων ἄρα τῶν ἴσας βάσεις ἐχόντων τῇ ΕΖ καὶ διὰ τοῦτο ἴσων ὄντων μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΓΔ. ὁμοίως δὲ δείξομεν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τομῶν τῶν ἐκτὸς τοῦ ἄξονος· μέγιστον ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον.

ϛʹ.

Ἔστι τὸ αὐτὸ καὶ ἄλλως καθολικώτερον δεῖξαι, ὅτι καὶ ἁπλῶς τῶν τριγώνων τὸ μείζονα βάσιν ἔχον μεῖζόν ἐστι.

τμηθέντος γὰρ τοῦ κώνου γενέσθω τὰ ΑΓΔ, ΑΖΔ τρίγωνα, ὥστε τὰς ΓΔ, ΖΔ βάσεις συμβάλλειν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ πέρας, καὶ ἔστω μείζων τῆς ΖΔ ἡ ΓΔ

---

1. τῇ] τῆς p. ἡ ΒΘ — 2. ἴση] om. Vc, ἡ ΒΘ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση μέν ἐστιν p. 2. μέν] om. p. ΒΘ] Θ e corr. m. 1 c. 3. ἴσαι] ἴσαι εἰσί p. 4. ἴση] ἴση

auferatur igitur $B\Theta = EH$, ducaturque $H\Theta$. iam quoniam $EH = B\Theta$, et BH communis, duo latera duobus aequalia sunt. et $\angle EHB = HB\Theta$; nam uterque rectus est; quare etiam $EB = \Theta H$ [Eucl. I, 4], et trianguli similes; itaque [Eucl. VI, 4]

$$BE : EH = H\Theta : \Theta B.$$

uerum $H\Theta : \Theta B > HA : AB$, ut supra demonstratum est [prop. II]; nam ABH rectangulus est. quare etiam $BE : EH$ siue $\Gamma B : EH > AH : AB$; itaque $\Gamma\Delta \times BA > EZ \times HA$ propter primum lemma [prop. I]. sed

$$\triangle A\Gamma\Delta = \tfrac{1}{2}\Gamma\Delta \times BA,\ \triangle AEZ = \tfrac{1}{2} EZ \times HA$$

[Eucl. I, 41]; quare etiam $A\Gamma\Delta > AEZ$. itaque $A\Gamma\Delta$ etiam omnibus triangulis bases habentibus rectae EZ aequales ideoque aequalibus [prop. III] maior est. et eodem modo demonstrabimus etiam in reliquis sectionibus extra axem. ergo triangulus per axem maximus est.

VI.

Licet idem aliter quoque uniuersalius demonstrare, omnino triangulorum, qui maiorem habeat basim, maiorem esse.

secto enim cono effecti sint trianguli $A\Gamma\Delta$, $AZ\Delta$, ita ut bases $\Gamma\Delta$, $Z\Delta$ in termino Δ concurrant, sitque

---

ἐστίν p. 5. *τῇ* ΘH] *βάσει τῇ* $H\Theta$ p. *ὡς*] *καὶ ὡς* p. 9. Post EH (alt.) add. *τουτέστι ἡ* $\Gamma\Delta$ *πρὸς* EZ Halley cum Comm. 10. *ἧπερ*] *εἴπερ* c. AH] HA p. *τὸ ἄρα* — 11. HA] cp, bis V. 11. BA] e corr. p. 13. *ἔστι* — *ἥμισυ*] mg. p (*κείμενον*). 14. Ante *τό* del. *ἔστι* p. AEZ] EZ in ras. p. 15. AEZ] AEZ *τριγώνου* p. 19. *τρίγωνον*] cp, *τριγώνου* V. 26. *ἔστω*] *ἔστι* Vcp, corr. Halley cum Comm.

εἴτε διὰ τοῦ κέντρου οὖσα εἴτε μή. λέγω, ὅτι τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΖΔ μεῖζόν ἐστιν.

ἤχθωσαν ἐπὶ τὰς ΖΔ, ΓΔ κάθετοι αἱ ΑΒ, ΑΗ, ἐπὶ δὲ τὴν ΑΔ ἡ ΒΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΖΔ μείζων ἐστί, καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα ἡ ΒΔ τῆς ΔΗ μείζων· τὸ ἀπὸ ΒΔ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΗ μεῖζόν ἐστι. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΑ λοιποῦ τοῦ ἀπὸ ΑΗ ἔλαττόν ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΔ· καὶ ἡ ΑΘ ἄρα πρὸς ΘΔ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ. γενέσθω, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΚ· κάθετος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΚ ἐπὶ τὴν ΑΔ, ὡς δειχθήσεται.

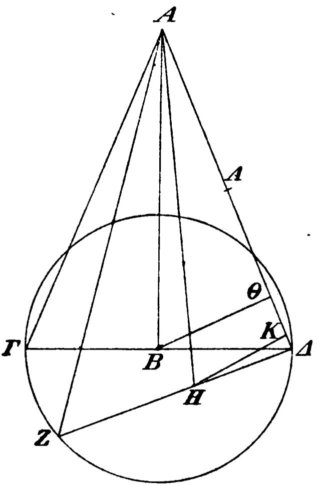
καὶ ἐπεὶ ὑπόκειται ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ οὐκ ἐλάττων, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ ἢ ἴση. ἔστω πρότερον μείζων· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΘ τῆς ΘΔ. τετμήσθω ἡ ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ ΑΘ, ΘΔ τοῦ ἀπὸ ΑΛ ἔλαττόν ἐστι τῷ ἀπὸ ΛΘ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΚ, ΚΔ τοῦ ἀπὸ ΑΛ ἔλαττόν ἐστι τῷ ἀπὸ ΛΚ, καί ἐστι μεῖζον τὸ ἀπὸ ΛΚ τοῦ ἀπὸ ΛΘ, μεῖζον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΘΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΘ, τοῦ ὑπὸ ΑΚ, ΚΔ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΗΚ· ἡ ΘΒ ἄρα μείζων τῆς ΗΚ. καί εἰσιν αἱ ΒΘ, ΗΚ ὕψη τῶν ΑΒΔ, ΑΗΔ τριγώνων· μεῖζον ἄρα τὸ ΑΒΔ τοῦ ΑΗΔ· ὥστε καὶ τὰ διπλάσια·

---

2. *τοῦ — ἐστιν*] *μεῖζόν ἐστι τοῦ ΑΖΔ* (Ζ corr. ex *Γ*) p. 5. *μείζων*] *μείζων ἐστί* p. 6. *ἀπό* (pr.)] *ἀπὸ τῆς* p, ut semper. 8. *ἐλάττονα λόγον*] p, *ἔλαττον ἀνάλογον* Vc. 9. *ΗΔ*] Vp, *ΝΔ* c. 11. *τό*] Vp, *τά* c. 20. *ὑπό*] sic p. 21. *τῷ*] p, *τό* Vc. 24. *ΘΒ*] *ΒΘ* p. *μείζων*] *μείζων ἐστί* c.

$\Gamma\Delta > Z\Delta$ siue per centrum ducta siue non per centrum. dico, esse $A\Gamma\Delta > AZ\Delta$.

ducantur ad $Z\Delta$, $\Gamma\Delta$ perpendiculares AB, AH, ad $A\Delta$ autem $B\Theta$. quoniam igitur $\Gamma\Delta > Z\Delta$, erit etiam dimidia $B\Delta > \Delta H$; quare $B\Delta^2 > \Delta H^2$. itaque quod relinquitur [Eucl. I, 47] $BA^2 < AH^2$; quare erit $AB^2 : B\Delta^2 < AH^2 : H\Delta^2$. uerum $AB^2 : B\Delta^2 = A\Theta : \Theta\Delta$1); quare etiam $A\Theta : \Theta\Delta < AH^2 : H\Delta^2$. fiat $AK : K\Delta = AH^2 : H\Delta^2$, ducaturque HK; etiam HK igitur ad $A\Delta$ perpendicularis est, ut demonstrabitur [prop. VII].



et quoniam supposuimus [p. 126, 18], non esse $AB < B\Delta$, erit aut $AB > B\Delta$ aut $AB = B\Delta$. sit prius $AB > B\Delta$; itaque etiam $A\Theta > \Theta\Delta$. iam $A\Delta$ in Λ in duas partes aequales secetur. quoniam igitur $A\Theta \times \Theta\Delta = A\Lambda^2 \div \Lambda\Theta^2$ et $AK \times K\Delta = A\Lambda^2 \div \Lambda K^2$ [Eucl. II, 5], et $\Lambda K^2 > \Lambda\Theta^2$, erit $A\Theta \times \Theta\Delta > AK \times K\Delta$ siue [Eucl. VI, 8 coroll.] $B\Theta^2 > HK^2$; itaque $\Theta B > HK$. et $B\Theta$, HK altitudines sunt triangulorum $AB\Delta$, $AH\Delta$; itaque $AB\Delta > AH\Delta$ [cfr. Eucl. VI, 1]; quare etiam

---

1) Nam $A\Theta : \Theta\Delta = A\Theta^2 : B\Theta^2$ [Eucl. VI, 8 coroll.; V def. 9], et $A\Theta^2 : B\Theta^2 = AB^2 : B\Delta^2$ [Eucl. VI, 8, 4].

τὸ ἄρα ΑΓΔ τοῦ ΑΖΔ μεῖζόν ἐστιν. ἀλλὰ τῷ ΑΖΔ ἴσον ἕκαστον, οὗ ἡ βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ΖΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ παντὸς τριγώνου μεῖζόν ἐστιν, οὗ ἡ βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ΖΔ.

εἰ δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ ἴση, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΔ· ὁμοίως ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΘΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΘ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΚ, ΚΔ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΗΚ. ἡ ἄρα ΒΘ μείζων ἐστὶ τῆς ΚΗ, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τοῦ ΑΗΔ τριγώνου μεῖζον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἄλλας βάσεις διαγάγωμεν· ὥστε τὸ οὕτως ἔχον μείζονα βάσιν τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἔχοντος ἐλάσσονα.

ζʹ.

Ὅτι δὲ ἡ ΗΚ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΑΔ, δείκνυται οὕτως.

τριγώνου γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ ΑΗΔ διῃρήσθω ἡ βάσις ὑπὸ τῆς ΗΚ, ὥστε εἶναι, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, οὕτως τὴν ΑΚ πρὸς ΚΔ. λέγω, ὅτι κάθετός ἐστιν ἡ ΗΚ ἐπὶ τὴν ΑΔ.

εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ ΗΛ κάθετος· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, οὕτως ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ΛΔ. ἦν δέ, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ· ἔσται ἄρα, ὡς ἡ ΑΛ πρὸς ΛΔ, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα κάθετός ἐστιν ἡ ΗΛ. ὁμοίως δὲ δείκνυται, ὅτι οὐδὲ ἄλλη πλὴν τῆς ΗΚ· ἡ ἄρα ΗΚ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΑΔ.

---

1. ΑΓΔ — ἐστιν] ΑΓΔ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΑΖΔ p. τοῦ — 3. ΑΓΔ] om. c. 2. τὸ ἄρα — 4. ΖΔ] om. p. 8. ΒΘ] p, ΑΒΘ Vc. ΚΗ] ΗΚ p. 13. ζʹ] p, mg. m. rec. V. 16. ΑΗΔ] ΑΗΔ ὀρθὴν ἔχοντος τὴν πρὸς τῷ Η γωνίαν p. 17. βάσις] τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα τουτέστι(ν) ἡ ΑΔ p. ΑΗ] ΗΑ p.

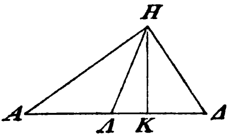
dupla; itaque $A\Gamma\varDelta > AZ\varDelta$. uerum triangulo $AZ\varDelta$ aequales sunt omnes trianguli, quorum bases aequales sunt rectae $Z\varDelta$. ergo $A\Gamma\varDelta$ maior est omni triangulo, cuius basis aequalis est rectae $Z\varDelta$.

sin $AB = B\varDelta$, erit etiam $A\Theta = \Theta\varDelta$; eodem igitur modo [Eucl. II, 5] $A\Theta \times \Theta\varDelta > AK \times K\varDelta$ siue [Eucl. VI, 8 coroll.] $B\Theta^2 > HK^2$. itaque $B\Theta > KH$ et $\triangle\, AB\varDelta > AH\varDelta$. similiter autem demonstrabitur etiam, si alias bases duxerimus; quare triangulus ita basim habens maiorem maior est triangulo minorem habenti.

VII.

Uerum HK ad $A\varDelta$ perpendicularem esse, ita demonstratur.

nam trianguli rectanguli $AH\varDelta$ basis ab HK ita diuidatur, ut sit $AH^2 : H\varDelta^2 = AK : K\varDelta$. dico, HK ad $A\varDelta$ perpendicularem esse.



nam si minus, sit $H\Lambda$ perpendicularis; quare

$$HA^2 : H\varDelta^2 = A\Lambda : \Lambda\varDelta$$

[p. 131 not.]. erat autem

$$AH^2 : H\varDelta^2 = AK : K\varDelta;$$

itaque $A\Lambda : \Lambda\varDelta = AK : K\varDelta$; quod absurdum est. itaque $H\Lambda$ perpendicularis non est. similiter autem demonstratur, ne aliam quidem praeter HK perpendicularem esse; ergo HK ad $A\varDelta$ perpendicularis est.

---

18. *οὕτως*] *οὕτω* p. 20. $H\Lambda$] e corr. p. 21. *τήν*] supra scr. p. 22. *ἢν* — 24. $K\varDelta$] mg. m. 1 p (*κείμενον*). 22. *δέ*] *δὲ καί* p. 23. $K\varDelta$] $K\Lambda$ p. $A\Lambda$] AK p. $\Lambda\varDelta$] $K\varDelta$ p. *οὕτως*] om. p. 24. AK] $A\Lambda$ p. $K\varDelta$] $\Lambda\varDelta$ p. *ἄρα*] *ἄρα ἡ* $H\Lambda$ p. 25. *ἡ* $H\Lambda$] *ἐπὶ τὴν* $A\varDelta$ p. *δείκνυται*] *δειχθήσεται* p. *ἄλλη*] *ἄλλη τις* p. 26. *ἡ ἄρα* HK] *ἡ* HK *ἄρα* p.

η΄.

Ἐὰν ἐν κώνῳ ὀρθῷ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον μέγιστον ᾖ πάντων τῶν ἐκτὸς τοῦ ἄξονος συνισταμένων τριγώνων, ὁ ἄξων τοῦ κώνου οὐκ ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΓΔ μέγιστον ὂν πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων ἐκτὸς τοῦ ἄξονος. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων, καὶ ἤχθω ἐν τῷ κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα τὰ Α, Ε σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΒΕ. ἐὰν ἄρα ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ Α ὑπὸ τῇ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ ἐναρμοσθῇ, μεταξὺ πεσεῖται τῶν Β καὶ Ε σημείων. ἐνηρμόσθω ἡ ΑΖ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ διὰ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΓΔ ἤχθω ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ· γενήσεται δή, ὡς ἐν τῷ ε΄ θεωρήματι ἐδείχθη, τὰ ΑΒΖ, ΗΒΖ τρίγωνα ὅμοια, καὶ ἴσαι αἱ ὁμόλογοι, καὶ ὡς ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς ΗΖ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΗΖ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΖΗ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ· ὅπερ ἀδύνατον·

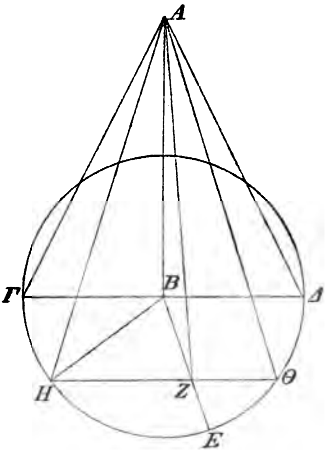
---

1. η΄] p et mg. m. rec. V, om. Vc, et sic deinceps. 2. ἐν] om. c. 6. Post οὗ del. βάσις m. 1 c. 14. σημεῖα] om. p. 16. τῇ ὑπό] scripsi, τὴν ὑπό p, τοῦ Vc. 17. γωνίᾳ] γωνίαν p. 19. Ζ] e corr. p. 20. ΒΗ] ΗΘ p. 22. ὁμόλογοι] ὁμόλογοι πλευραί p. ΑΒ] vcp, corr. ex ΑΘ m. 1 V. οὕτως] om. p. 24. ΑΖ] Ζ e corr. p. ΖΗ] p, ΞΝ Vc. τουτέστι] τοῦτό ἐστι c. 25. ἀδύνατον] ἀ- e corr. p.

VIII.

Si in cono recto triangulus per axem ductus maior est omnibus triangulis extra axem constructis, axis coni radio basis minor non erit.

sit conus, cuius uertex sit A, axis autem AB recta, basis autem circulus circum B centrum descriptus, et triangulus per axem ductus $A\Gamma\Delta$ maior omnibus triangulis in cono extra axem constructis. dico, AB radio minorem non esse.



nam si fieri potest, sit minor, ducaturque in circulo ad $\Gamma\Delta$ perpendicularis BE. et quoniam angulus ABE rectus est [Eucl. XI def. 3], recta puncta A, E coniungens maior est radio BE [Eucl. I, 19]. itaque si ab A sub angulo ABE recta inseritur radio aequalis, inter puncta B, E cadet. inseratur AZ radio aequalis, et per Z rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducatur $H\Theta$, ducaturque BH; itaque, ut in prop. V demonstratum est, trianguli ABZ, HBZ similes fiunt [Eucl. VI, 7], et latera correspondentia aequalia erunt, et

$$ZA : AB = BH : HZ = \Gamma B : HZ.$$

itaque $AB \times B\Gamma = AZ \times ZH$, h. e. triangulus per axem ductus aequalis est triangulo $AH\Theta$; quod fieri ὑπόκειται γὰρ τὸ ΑΓΔ μέγιστον εἶναι. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου.

θʹ.

Κῶνον ὀρθόν, οὗ ὁ ἄξων οὔκ ἐστιν ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τρίγωνον λόγον ἔχον δεδομένον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον λόγον ἐλάττονος εἶναι πρὸς μεῖζον.

ἔστω κορυφὴ μὲν τοῦ κώνου τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ἐν ᾧ κάθετος ἡ ΑΒ ἐστι. δεῖ δὴ τὸν κῶνον τεμεῖν τριγώνῳ, ὃ λόγον ἕξει πρὸς τὸ ΑΓΔ τὸν ἐπιταχθέντα· ἐπιτετάχθω δὲ ὁ τῆς Κ ἐλάττονος πρὸς μείζονα τὴν Λ λόγος.

ἐπεὶ τὸ ΑΒΔ ὀρθογώνιόν ἐστι, γεγράφθω περὶ αὐτὸ ἡμικύκλιον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἤχθω ἡ ΒΕ, καὶ ὡς ἡ Κ πρὸς Λ, οὕτως ἔστω ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ, καὶ διὰ τοῦ Ζ παράλληλος ἤχθω τῇ ΕΔ ἡ ΖΗ, διὰ δὲ τοῦ Η τῇ ΖΕ παράλληλος ἡ ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΗΘ. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ Κ πρὸς Λ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΒΕ, ὡς δὲ ἡ ΘΗ πρὸς ΒΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΘ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕ, ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΗΘ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕ, ΑΔ, οὕτως τὰ ἡμίση τὸ ΑΗΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΔ, ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς Λ, οὕτως τὸ ΑΔΗ πρὸς τὸ ΑΒΔ·

---

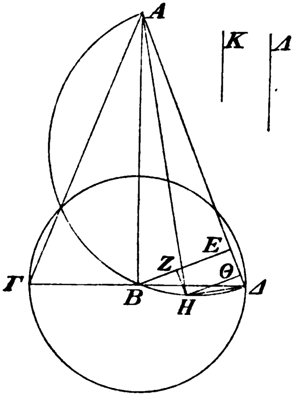
4. ὁ] om. p. 7. δή] p, δέ Vc. δεδομένον p. 8. ἐλάττονος] p, ἐλάττονα Vc. 9. ὁ] om. c. 10. κύκλος] vcp, -ος euan. V, add. m. rec. 13. δέ] δή p. 15. ἐπεί] καὶ ἐπεί p. ΑΒΔ] vcp, Δ postea ins. m. 1 V. 17. Κ] ΚΛ c. 22. οὕτως] οὕτω p, ut semper ante consonantes. ΑΔ] vcp, Δ euan. V. 23. ΑΔ (tert.)] Δ e corr. p. 24. τό (pr.)] τουτέστι τό (-ό e corr.) p. ΑΒΔ] Β corr. ex Ζ p. 25. ὡς — ΑΒΔ] om. p.

non potest; supposuimus enim, $A\Gamma\Delta$ maximum esse. ergo AB radio minor non est.

IX.

Conum rectum, cuius axis radio basis minor non est, per uerticem secare plano triangulum efficienti, qui ad triangulum per axem ductum rationem datam habeat. oportet autem, datam rationem esse minoris ad maius [prop. V].

sit uertex coni A, basis autem circulus circum B centrum descriptus, triangulus autem per axem ductus $A\Gamma\Delta$, in quo AB perpendicularis est. oportet igitur conum secare triangulo, qui ad $A\Gamma\Delta$ rationem habeat datam; data autem sit ratio K minoris ad Λ maius.



quoniam $AB\Delta$ rectangulus est, circum eum describatur semicirculus, et a B perpendicularis ducatur BE, sitque

$$ZE : EB = K : \Lambda,$$

et per Z rectae $E\Delta$ parallela ducatur ZH, per H autem rectae ZE parallela $H\Theta$; itaque $ZE = H\Theta$ [Eucl. I, 34]. quoniam igitur $K : \Lambda = ZE : EB = \Theta H : BE$, et

$$\Theta H : BE = H\Theta \times A\Delta : BE \times A\Delta,$$

et ut $H\Theta \times A\Delta : BE \times A\Delta$, ita dimidia $\triangle AH\Delta : AB\Delta$, erit $K : \Lambda = A\Delta H : AB\Delta$; itaque $AH\Delta$ ad $AB\Delta$ in τὸ ΑΗΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΔ ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστίν. ἐὰν οὖν ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου ἐναρμόσωμεν διπλῆν τῆς ΗΔ καὶ διὰ τῆς ἐναρμοσθείσης καὶ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τὸ ἐπίπεδον ἐκβάλωμεν, ποιήσει τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ διπλάσιον τοῦ ΑΗΔ. σχήσει ἄρα τὸ συνιστάμενον τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον, ὃν τὸ ΑΗΔ ἔχει πρὸς ΑΒΔ, τουτέστιν ὃν ἡ Κ πρὸς Λ.

ι΄.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ τῷ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῖς δὲ ἐκτὸς τοῦ ἄξονος, τῶν δὲ γενομένων τριγώνων ἐκτὸς τοῦ ἄξονος ἓν ὁτιοῦν ἴσον ᾖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ὁ τοῦ κώνου ἄξων ἐλάττων ἔσται τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

τμηθέντος γὰρ τοῦ κώνου γενέσθω τρίγωνα διὰ μὲν τοῦ ἄξονος τὸ ΑΓΔ, ἐκτὸς δὲ τὸ ΑΕΖ ἴσον ὂν τῷ ΑΓΔ, ἔστω δὲ παράλληλος ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ καὶ κάθετοι αἱ ΑΒ, ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΒΗ. λέγω δή, ὅτι ἡ ΑΒ ὁ ἄξων ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΒΔ ἐκ τοῦ κέντρου.

ἐπεὶ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΓΔ, καὶ τὰ διπλάσια ἄρα, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΗΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΔ, ΒΑ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΕΗ, τουτέστιν ἡ ΒΕ πρὸς ΕΗ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΒΕΗ, ΗΑΒ μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ μιᾷ γωνίᾳ

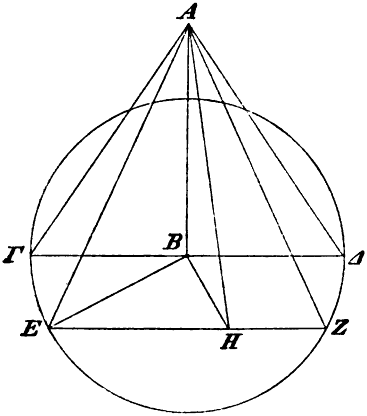
---

4. ἐκβάλωμεν] cp, ἐκβάλλωμεν Vv. 5. ΑΗΔ] p, ΑΒΔ Vc. 6. τρίγωνον] τρίγωνον τὸ διπλάσιον τοῦ ΑΗΔ p. πρὸς τὸ ΑΓΔ] supra scr. p. 7. πρός (alt.)] om. c. 12. ᾖ] p, ἐστι Vc, ἔστω Halley. 13. ἐλάττων] ἐλάσσων c. τῆς (alt.)] om. c. 18. ὁ] τουτέστιν ὁ p. ἐκ] τῆς ἐκ p. 20. ἐπεί] Vc, ἐπεὶ οὖν p. ἴσον] vcp; om. V, mg. m. 1 ·/· ἴσον. 21. τουτ-

data ratione est. quare si in basi coni inserimus rectam duplo maiorem recta $H\Delta$ et per insertam uerticemque coni planum ducimus, in cono efficiet triangulum duplo maiorem quam $AH\Delta$. ergo triangulus ita constructus ad $A\Gamma\Delta$ rationem habebit, quam $AH\Delta : AB\Delta$ siue $K : \Lambda$.

X.

Si conus rectus per uerticem planis secatur, uno per axem, aliis autem extra axem, et triangulorum extra axem effectorum aliquis triangulo per axem ducto aequalis est, axis coni minor erit radio basis.



secto cono effecti sint trianguli, per axem $A\Gamma\Delta$, extra eum autem AEZ triangulo $A\Gamma\Delta$ aequalis, sit autem EZ rectae $\Gamma\Delta$ parallela perpendicularesque AB, AH, et ducantur BE, BH. dico, axem AB minorem esse radio $B\Delta$.

quoniam $\triangle\, AEZ = A\Gamma\Delta$, etiam dupla, h. e. $EZ \times HA = \Gamma\Delta \times BA$; quare

$$\Gamma\Delta : EZ = HA : AB = \Gamma B : EH = BE : EH.$$

quoniam igitur duo trianguli BEH, HAB unum

ἐστι] ἴσον ἄρα ἐστί p. ἴσον ἐστί] om. p. 22. EZ] τὴν EZ p. 23. EH (utrumque)] τὴν EH p.

τῇ ὑπὸ ΑΒΗ ἴσην ἔχει· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἑκατέρα δὲ τῶν λοιπῶν τῶν ὑπὸ ΕΒΗ, ΑΗΒ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΗΒ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΕΗ. ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΒΕ· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα ἄξων οὖσα τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ὃ προέκειτο δεῖξαι.

ἐπεὶ τοίνυν ἐδείχθη ἐπὶ παραλλήλων τῶν ΓΔ, ΕΖ, φανερόν, ὡς, κἂν μὴ παράλληλοι ὦσιν, οὐδὲν διοίσει· ἐδείχθη γάρ, ὡς τὰ ἴσας ἔχοντα βάσεις τρίγωνα ἴσα ἐστί.

ια'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων δεικτέον, ὅτι, ἐὰν διαχθῇ πάλιν ἐπίπεδον τέμνον τὸν κῶνον διὰ τῆς κορυφῆς καὶ ποιοῦν ἐν τῇ βάσει εὐθεῖαν τῷ μεγέθει μεταξὺ τῶν βάσεων τῶν ἴσων τριγώνων, ἐκεῖνο τὸ τρίγωνον μεῖζον ἔσται ἑκατέρου τῶν ἴσων τριγώνων.

ἔστω γὰρ ἐπὶ τῆς ὁμοίας καταγραφῆς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΓΔ ἴσον τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν ΕΖ, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ ΚΜ μεγέθει μεταξὺ τῶν ΓΔ, ΕΖ καὶ ἑκατέρᾳ αὐτῶν κείσθω παράλληλος, καὶ διήχθω τὸ ἐπίπεδον. λέγω δή, ὅτι τὸ ΑΚΜ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ΑΓΔ, ΑΕΖ.

τετμήσθω γὰρ πάλιν δίχα ἡ ΚΜ τῷ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΒΚ, ΒΛ. ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΓΔ

---

1. ΑΒΗ] ΑΗΒ c. 3. ΕΒΗ] ΕΗΒ Vcp, corr. Comm. 5. ΗΒ] ΒΗ p. 7. ἐλάττων] p, ἔλαττον Vc. 8. κέντρου] corr. ex κώνου m. 1 c. ὅ — δεῖξαι] V, om. cp. 11. τά] τάς c. ἴσας] corr. ex ἴσα m. 1 p. 21. μεταξύ] bis p, sed

angulum uni angulo aequalem habent $\angle EHB = ABH$ (uterque enim rectus) et circum alios angulos latera proportionalia, et uterque reliquorum EBH, AHB recto minor est, trianguli similes sunt [Eucl. VI, 7]. itaque $EH : HB = AB : HB$ [Eucl. VI, 4]; quare $AB = EH$ [Eucl. V, 9]. uerum $EH < BE$ [Eucl. I, 19]; ergo etiam AB axis coni minor est radio; quod oportebat demonstrare.

quoniam igitur in parallelis $\Gamma\Delta$, EZ demonstratum est, manifestum, etiam si parallelae non sint, nihil interesse; demonstratum enim [prop. III], triangulos aequales bases habentes aequales esse.

XI.

Iisdem positis demonstrandum, si rursus planum ducatur conum secans per uerticem et in basi efficiens rectam magnitudine mediam inter bases triangulorum aequalium, triangulum illum maiorem fore utroque triangulo aequali.

sit enim in figura eadem triangulus per axem ductus $A\Gamma\Delta$ aequalis triangulo basim habenti EZ, ducaturque recta aliqua KM magnitudine media inter $\Gamma\Delta$, EZ et utrique earum parallela ponatur, ducaturque planum. dico, triangulum AKM maiorem esse utroque $A\Gamma\Delta$, AEZ.

nam rursus KM puncto Λ in duas partes aequales secetur, ducanturque $A\Lambda$, BK, $B\Lambda$. quoniam

---

corr. 22. ἑκατέρα] ἑκάτεραι V, ἑκάτερ$^{\alpha\iota}$ c. 23. δή] om. p. 24. ἑκατέρου τῶν] in ras. p. 25. Λ] p, Δ Vc. 26. ἔπει ἐπεὶ οὖν p.

τρίγωνον τῷ ΑΕΖ τριγώνῳ, ἡ ἄρα ΑΒ τῇ ΕΗ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΕΖ ἴση ἐστίν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου συναπεδείχθη. μείζων δὲ ἡ ΚΛ τῆς ΕΗ· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ΚΛ. κείσθω οὖν τῇ ΚΛ ἴση ἡ ΒΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΝ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοῖς προειρημένοις ἔσται τὸ ΒΚΛ τρίγωνον τῷ ΛΝΒ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιον· ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς ΚΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΚΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΚΜ, οὕτως ἡ ΛΝ πρὸς ΝΒ. ἡ δὲ ΛΝ πρὸς ΝΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΛΑ πρὸς ΑΒ· καὶ ἡ ΓΔ ἄρα πρὸς ΚΜ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΛΑ πρὸς ΑΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΒΑ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΚΜ, ΛΑ, τουτέστι τὸ ΑΓΔ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΑΚΜ· μεῖζον ἄρα τὸ ΑΚΜ τοῦ ΑΓΔ.

τὸ αὐτὸ δὴ δείκνυται καὶ ἐπὶ πάντων, ὧν ἡ βάσις μεγέθει μεταξύ ἐστι τῶν ΓΔ καὶ ΕΖ· οὐδὲν δὲ διοίσει, κἂν μὴ παράλληλοι ὦσιν αἱ βάσεις, ὡς καὶ πρότερον ἐδείχθη.

ιβʹ.

Τὸν δοθέντα κῶνον ὀρθόν, οὗ ὁ ἄξων ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς, ὥστε τὸ γινόμενον τρίγωνον ἴσον εἶναι τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ.

ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος, οὗ ἄξων μὲν ὁ ΑΒ, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, καὶ δέον ἔστω

---

2. πρό] περί p. 5. ΛΝ] ΑΝ p. δή] -ή e corr. p. 6. ΛΝΒ] ΔΝΒ Vc, ΑΝΒ p, corr. Comm. 9. ΛΝ (utrumque)] ΑΝ p. 10. καὶ ἡ ΓΔ — 11. πρὸς ΑΒ] Vv, om. cp. 12. ΓΔ, ΒΑ] ΓΒ, ΑΒ p. 13. ἔλαττον] ἔλασσον p. τοῦ] p, τό Vc. 16. ΕΖ] p, ἐξ Vc. δέ] γάρ p. 20. τόν] p, om. Vc. ἐλάττων] comp. p, ἔλαττον Vc.

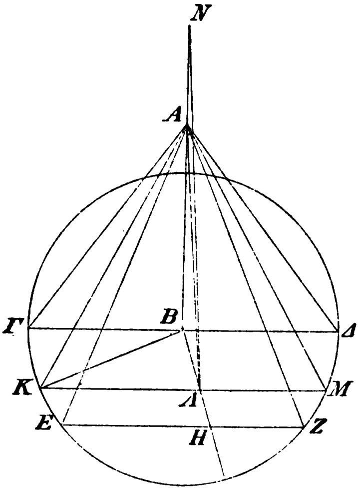
$\triangle\, A\Gamma\Delta = AEZ$, erit $AB = \frac{1}{2}EZ = EH$, ut in praecedenti simul demonstratum est [p. 140, 5]. uerum $K\Lambda > EH$ [Eucl. III, 15]; quare etiam

$$K\Lambda > AB.$$

ponatur igitur

$$BN = K\Lambda,$$

ducaturque AN. itaque eadem de causa, qua in praecedentibus [Eucl. I, 4], triangulus $BK\Lambda$ triangulo ANB aequalis est et similis; quare [Eucl. VI, 4] $BK : K\Lambda = AN : NB = \Gamma B : K\Lambda = \Gamma\Delta : KM$. uerum $AN : NB < A\Lambda : AB$ [prop. II]; quare etiam $\Gamma\Delta : KM < A\Lambda : AB$. itaque $\Gamma\Delta \times BA < KM \times A\Lambda$ [prop. I], siue $A\Gamma\Delta < AKM$. ergo $AKM > A\Gamma\Delta$.



idem igitur demonstratur etiam in omnibus, quorum basis magnitudine media est inter $\Gamma\Delta$ et EZ; nec intererit, etiam si bases parallelae non fuerint, ut iam antea [p. 140, 9 sq.] demonstratum est.

XII.

Datum conum rectum, cuius axis minor sit radio basis, per uerticem ita secare, ut triangulus effectus triangulo per axem ducto aequalis sit.

sit datus conus, cuius axis sit AB, triangulus autem τεμεῖν τὸν κῶνον ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ ἴσον τῷ ΑΓΔ.

ἤχθω τῇ ΓΔ ἐν τῷ κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΒΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἐνηρμόσθω ἡ ΑΗ ὑποτείνουσα μὲν τὴν ὑπὸ ΑΒΖ γωνίαν, ἴση δὲ οὖσα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου· τοῦτο δὲ ῥᾴδιον ποιῆσαι· καὶ διὰ τοῦ Η παράλληλος τῇ ΓΔ ἤχθω ἡ ΘΗΚ· ἡ ΘΗΚ ἄρα κατὰ τὸ Η δίχα τέτμηται καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΕΒΖ. διεκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΘΚ, ΗΑ ἐπίπεδον ποιοῦν τὸ ΑΘΚ τρίγωνον. λέγω, ὅτι τὸ ΑΘΚ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΓΔ.

ἐπεζεύχθω ἡ ΒΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ, ὡς ἄρα ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΗΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΒΘΗ, ΗΑΒ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχει· ὀρθαὶ γὰρ αἱ ὑπὸ ΘΗΒ, ΑΒΗ· περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, καὶ τὰ λοιπά, ὅμοια ἄρα τὰ ΒΘΗ, ΗΑΒ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΔ, ΒΑ ἴσον τῷ ὑπὸ ΘΚ, ΗΑ· καὶ τὰ ἡμίσεα. τὸ ΑΓΔ τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ'.

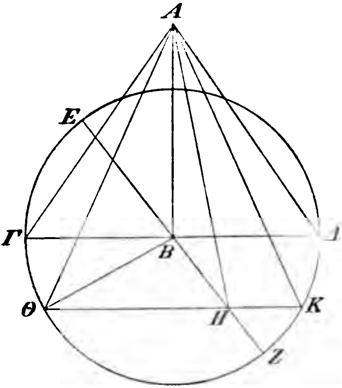
Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ, τῶν δὲ γενομένων ἐν τῷ κώνῳ τριγώνων τινὸς ἡ ἀπὸ

---

1. *τόν*] vcp, corr. ex *τό* m. 1 V. 2. *ΑΓΔ*] *ἀπὸ ΓΔ* Vc, *ἀπὸ τῆς ΓΔ* p, corr. Comm. 9. *τῇ*] *ἐστι τῇ* p. 12. *ἴση*] *ἴση ἐστίν* p. *ΒΘ* (alt.)] *ΘΒ* p. 13. *ΗΒ* (alt.)] *ΒΗ* p. 14. *ΒΘΗ*] *Β* e corr. p, *ΒΗΘ* c. *ΗΑΒ*] *ΑΒΗ* p. 15. *αἱ*] p, om. Vc. *ΘΗΒ*] *ΗΒ* e corr. p. 16. *περί*] cp, comp. V, *παρά* v. 17. *ΗΑΒ*] *ΑΒΗ* p. 18. *ΘΗ*] *ΘΚ*? p. 19. *ΗΑ*] corr. ex *ΗΒ* p. *ἴσον*] *ἴσον ἐστί* p. 20. *τό — ἄρα*] *τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον* p. 21. *τριγώνῳ — ποιῆσαι*] om. p.

per axem ductus $A\Gamma\Delta$, et oporteat conum secare plano triangulum in cono efficienti triangulo $A\Gamma\Delta$ aequalem.

ducatur in circulo per centrum ad $\Gamma\Delta$ perpendicularis EBZ. et quoniam AB minor est radio, inseratur AH sub angulo ABZ subtendens radioque aequalis; hoc autem facile fit; et per H rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducatur ΘHK; itaque ΘHK in H ab EBZ in duas partes aequales et perpendiculariter secta est [Eucl. I, 29; III, 3]. ducatur planum per ΘK, HA triangulum efficiens $A\Theta K$. dico, esse triangulum $A\Theta K = A\Gamma\Delta$.



ducatur $B\Theta$. quoniam igitur $AH = B\Theta$, erit $AH : HB = \Theta B : HB$ [Eucl. V, 7]. quoniam igitur duo trianguli $B\Theta H$, HAB unum angulum uni angulo aequalem habent (nam uterque ΘHB, ABH rectus est) et circum alios angulos latera proportionalia, et cetera, trianguli $B\Theta H$, HAB similes sunt [Eucl. VI, 7]; quare [Eucl. VI, 4] $B\Theta : \Theta H = HA : AB = \Gamma\Delta : \Theta K$. itaque $\Gamma\Delta \times BA = \Theta K \times HA$ [Eucl. VI, 16]; et etiam dimidia. ergo $\triangle A\Gamma\Delta = A\Theta K$; quod erat demonstrandum.

XIII.

Si conus rectus per uerticem planis secatur, alicuius autem triangulorum in cono effectorum recta a τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἴση ᾖ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως, τοῦτο μεῖζον ἔσται πάντων τῶν ἀνομοίων ἐν τῷ κώνῳ τριγώνων.

ἐν γὰρ κώνῳ ὀρθῷ τρίγωνον ἔστω τὸ ΑΓΔ ἔχον τὴν ΑΒ κάθετον ἴσην τῇ ΒΔ ἡμισείᾳ οὔσῃ τῆς ΓΔ βάσεως. λέγω, ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι πάντων τῶν ἀνομοίων ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων.

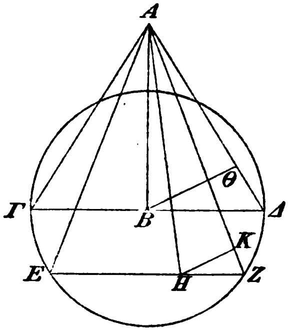
εἰλήφθω γὰρ ἄλλο τυχὸν τρίγωνον ἀνόμοιον αὐτῷ τὸ ΑΕΖ, ἐν ᾧ κάθετος ἡ ΑΗ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΑΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΑΖ κάθετος ἤχθω ἡ ΗΚ. ἐπεὶ ἀνόμοιόν ἐστι τὸ ΑΓΔ τῷ ΑΕΖ, ἀνόμοιον ἄρα καὶ τὸ ΑΒΔ τῷ ΑΗΖ. καί ἐστιν ὀρθογώνια, καὶ ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΔ· τὸ ΑΗΖ ἄρα ἀνισοσκελές. καὶ τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἄνισον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΖ, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΖ· ἡ μὲν ἄρα ΑΔ εἰς ἴσα τέτμηται, ἡ δὲ ΑΖ εἰς ἄνισα. ἐπεὶ οὖν αἱ ΔΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσί, καὶ ἡ μὲν εἰς ἴσα διῄρηται, ἡ δὲ εἰς ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων τμημάτων τοῦ ὑπὸ τῶν ἀνίσων μεῖζόν ἐστι· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΘΔ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΚΖ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ ΑΘΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΒΘ, τῷ δὲ ὑπὸ ΑΚΖ ἴσον τὸ ἀπὸ

---

4. ἐν] corr. ex ἐάν m. 1 c. ὀρθῷ] bis c. 5. ἡμισείᾳ] cp, ἡμισέᾳ V. 7. συνισταμένων] vcp, σ- e corr. m. 1 V. 12. ΗΚ] corr. ex ΗΘ m. 1 c. ἐπεί] ἐπεὶ οὖν p. 15. ἀνισοσκελές] ἀνισοσκελές ἐστι p. 17. ἀπό (alt.)] ἀπὸ τῆς p. 18. ἀπό] ἀπὸ τῆς p. 20. τέτμηται] corr. ex τέμνεται c. 21. ΑΖ] cp, corr. ex ΔΖ m. 1 V, ΔΖ v. 22. διῄρηται] διαιρεῖται p.

uertice ad basim perpendicularis dimidiae basi aequalis est, ille maior erit omnibus in cono triangulis non similibus.

nam in cono recto triangulus sit $A\Gamma\Delta$ perpendicularem AB aequalem habens rectae $B\Delta$ dimidiae basis $\Gamma\Delta$. dico, triangulum $A\Gamma\Delta$ maiorem esse omnibus triangulis non similibus in cono constructis.



sumatur enim alius aliquis triangulus ei non similis AEZ, in quo perpendicularis sit AH, et a B ad $A\Delta$ perpendicularis ducatur $B\Theta$, ab H autem perpendicularis ad AZ ducatur HK. quoniam $A\Gamma\Delta$ triangulo AEZ similis non est, etiam $AB\Delta$ triangulo AHZ similis non est. et rectanguli sunt, et $AB\Delta$ aequicrurius; itaque AHZ aequicrurius non est. quare etiam $AB^2 = B\Delta^2$, sed AH^2 quadrato HZ^2 non aequale. est autem [p. 131 not.] $AB^2 : B\Delta^2 = A\Theta : \Theta\Delta$ et $AH^2 : HZ^2 = AK : KZ$; itaque $A\Delta$ in partes aequales secta est, AZ autem in inaequales. quoniam igitur ΔA, AZ aequales sunt, et altera in partes aequales secta est, altera in inaequales, rectangulum partium aequalium maius est rectangulo inaequalium [Eucl. II, 5]; itaque $A\Theta \times \Theta\Delta > AK \times KZ$. uerum [Eucl. VI, 8, 17]

---

23. $A\Theta\Delta$] τῶν $A\Theta$, $\Theta\Delta$ p, ut semper. 25. $B\Theta$ — ἀπό] p, om. Vc. τῷ] p, τό Halley. τό (alt.)] scripsi, τῷ e corr. p, τῷ Halley.

ΗΚ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΘ τοῦ ἀπὸ ΗΚ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΘ τῆς ΗΚ. ὡς δὲ ἡ ΒΘ πρὸς ΗΚ, οὕτως τό τε ὑπὸ ΒΘ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΚ, ΑΖ, καὶ τὸ ἥμισυ πρὸς τὸ ἥμισυ, τουτέστι τὸ ΑΒΔ πρὸς τὸ ΑΗΖ· μεῖζον ἄρα τὸ ΑΒΔ τοῦ ΑΗΖ, καὶ τὰ διπλάσια τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ. ὁμοίως δὴ δείκνυται, ὅτι πάντων τῶν ἀνομοίων μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Τὸν δοθέντα κῶνον ὀρθόν, οὗ ὁ ἄξων ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ γινόμενον τρίγωνον μεῖζον εἶναι πάντων τῶν ἀνομοίων αὐτῷ ἐν τῷ κώνῳ γινομένων τριγώνων.

ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος ὀρθός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ ἐλάττων ὢν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὸν κῶνον, ὡς προστέτακται.

ἤχθω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ποιοῦν τὸ ΑΓΔ τρίγωνον· ἡ ΑΒ ἄρα κάθετος ἐλάττων ἐστὶ τῆς ΒΔ. ἤχθω ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ τῇ ΓΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ ᾧ μεῖζον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τούτου ἥμισυ ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ, καὶ διὰ τοῦ Η παράλληλος ἤχθω τῇ ΓΔ ἡ ΖΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΒΘ.

ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΒΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΘ, τοῦ ἀπὸ ΒΑ μεῖζόν ἐστι δυσὶ τοῖς ἀπὸ ΒΗ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΗ

---

1. ἀπό (pr.)] p, ὑπό Vc. 5. ΑΗΖ (alt.)] p, corr. ex ΑΕΖ m. 1 c, ΑΕΖ V. 6. τό] τοῦ c. 7. ΑΓΔ] corr. ex ΑΒΔ m. 1 c. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. p. 18. προστέτακται] προτέτακται c. 22. μεῖζον] μεῖζόν ἐστι p. 26. ἐπεί] ἐπεὶ οὖν p.

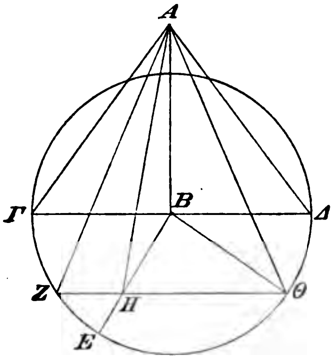
$A\Theta \times \Theta\Delta = B\Theta^2$ et $AK \times KZ = HK^2$; itaque $B\Theta^2 > HK^2$ et $B\Theta > HK$. est autem

$$B\Theta : HK = B\Theta \times A\Delta : HK \times AZ,$$

et dimidium ad dimidium siue $AB\Delta : AHZ$; itaque $AB\Delta > AHZ$ et sumptis duplis $A\Gamma\Delta > AEZ$. iam eodem modo demonstratur, omnibus triangulis non similibus maiorem esse $A\Gamma\Delta$; quod erat demonstrandum.

XIV.

Datum conum rectum, cuius axis minor sit radio basis, per uerticem plano ita secare, ut triangulus effectus maior sit omnibus triangulis ei non similibus, qui in cono efficiuntur.



sit datus conus rectus, cuius uertex sit A, basis autem circulus circum B centrum descriptus, axis autem AB minor radio basis, et oporteat conum secare, ut propositum est.

ducatur planum per axem triangulum $A\Gamma\Delta$ efficiens; itaque

$$AB < B\Delta.$$

ducatur in plano circuli ad ΓB perpendicularis BE, sitque $BH^2 = \frac{1}{2}(\Delta B^2 \div BA^2)$, et per H rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducatur $ZH\Theta$, ducanturque AH, $B\Theta$.

quoniam $B\Delta^2 = BA^2 + 2BH^2 = B\Theta^2$ et [Eucl. I, 47] $AH^2 = AB^2 + BH^2$, erit $B\Theta^2 = AH^2 + BH^2$. uerum τοῦ ἀπὸ AB μεῖζόν ἐστιν ἑνὶ τῷ ἀπὸ BH, τὸ ἄρα ἀπὸ BΘ τοῦ ἀπὸ AH μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ BH. ἔστι δὲ καὶ τοῦ ἀπὸ HΘ τῷ ἀπὸ HB μεῖζον τὸ ἀπὸ BΘ· ἑκατέρου ἄρα τῶν ἀπὸ AH, HΘ τῷ αὐτῷ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ BΘ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ AH τῷ ἀπὸ HΘ καὶ ἡ AH τῇ HΘ. καί ἐστι καὶ ἡ ZH τῇ HΘ ἴση· ἡ ἄρα AH ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ZΘ. ἐὰν ἄρα διὰ τῶν ZΘ, HA διεκβάλωμεν ἐπίπεδον, ἔσται τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ· γεγονέτω τὸ AZΘ. ἐπεὶ οὖν τρίγωνόν ἐστιν ἐν κώνῳ τὸ AZΘ, οὗ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετος ἡ AH ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως, τὸ AZΘ ἄρα μεῖζόν ἐστι πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ γινομένων τριγώνων ἀνομοίων αὐτῷ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιε′.

Τὸν δοθέντα κῶνον διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τεμεῖν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει.

ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ B κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ AB, καὶ δέον ἔστω τὸν κῶνον τεμεῖν διὰ τῆς AB πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει.

εἰ μὲν οὖν ὀρθός ἐστιν ὁ κῶνος, δῆλον, ὡς ἥ τε AB πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ βάσει, καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς AB ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ βάσει· ὥστε τὸ AΓΔ τρίγωνον διὰ τῆς AB ὂν πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ βάσει.

ἀλλὰ δὴ σκαληνὸς ἔστω ὁ κῶνος· ἡ ἄρα AB οὐκ ἔστι πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει. πιπτέτω τοίνυν ἡ ἀπὸ τῆς A

---

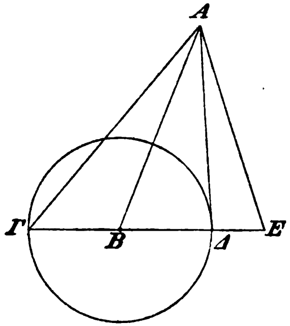
3. τῷ] τό p. HB] BΘ p. τό] τῷ p. BΘ] BH p.
6. HΘ (pr.)] HΘ ἴση p. 8. διεκβάλωμεν] cp, διεκβάλλωμεν V.

etiam $B\Theta^2 = H\Theta^2 + HB^2$ [Eucl. I, 47]. itaque $B\Theta^2$ utrumque $AH^2, H\Theta^2$ eodem excedit; quare $AH^2 = H\Theta^2$ et $AH = H\Theta$. est autem etiam $ZH = H\Theta$ [Eucl. III, 3]; quare $AH = \frac{1}{2} Z\Theta$. iam si per $Z\Theta$, HA planum duxerimus, triangulus in cono efficietur; effectus sit $AZ\Theta$. quoniam igitur in cono triangulus est $AZ\Theta$, in quo AH a uertice perpendicularis dimidiae basi aequalis est, $AZ\Theta$ maior est omnibus triangulis in cono effectis ei non similibus [prop. XIII]; quod oportebat fieri.

XV.

Datum conum per axem plano secare ad basim perpendiculari.

sit datus conus, cuius uertex sit A punctum, basis autem circulus circum B centrum descriptus, axis autem AB, et oporteat conum per AB ad basim perpendiculariter secare.



iam si conus rectus est, adparet, AB ad basim perpendicularem esse, omniaque plana per BA ducta ad basim perpendicularia esse [Eucl. XI, 18]; quare triangulus $A\Gamma\Delta$ per AB ductus ad basim perpendicularis est.

iam uero conus scalenus sit; AB igitur ad basim perpendicularis non est. perpendicularis igitur ab A

---

10. *τό*] p, mut. in *τῷ* m. 1 c, *τῷ* V. 12. *τριγώνων* — 13. *ποιῆσαι*] *ὁμοίων αὐτῷ τριγώνων* p. 17. *σημεῖον*] om. p. 26. *δ*] om. c.

κορυφῆς κάθετος ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διεκβεβλήσθω τὸ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἐπίπεδον ποιοῦν ἐν τῷ κώνῳ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον. λέγω, ὅτι τὸ ΑΓΔ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ βάσει τοῦ κώνου.

ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΕ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΑΕ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ· καὶ τὸ ΑΓΔ ἄρα τρίγωνον πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιϛʹ.

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τὸ γενόμενον τρίγωνον ἔσται σκαληνόν, οὗ ἡ μὲν μείζων πλευρὰ μεγίστη ἔσται πασῶν τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένων εὐθειῶν, ἡ δὲ ἐλάττων πλευρὰ ἐλαχίστη πασῶν τῶν ὁμοίως ἀγομένων εὐθειῶν, τῶν δὲ ἄλλων εὐθειῶν ἡ τῇ μεγίστῃ ἔγγιον τῆς ἀπώτερόν ἐστι μείζων.

ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ ΓΕΔ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, τοῦ δὲ κώνου τμηθέντος διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῷ ΓΕΔ κύκλῳ τὸ γενόμενον τρίγωνον ἔστω τὸ ΑΓΔ, προσνευέτω δὲ ὁ ἄξων ἐπὶ τὸ Δ μέρος. ἐπεὶ οὖν σκαληνοῦ ὄντος τοῦ κώνου οὐκ ἔστιν ἡ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τῷ ΓΔΕ

---

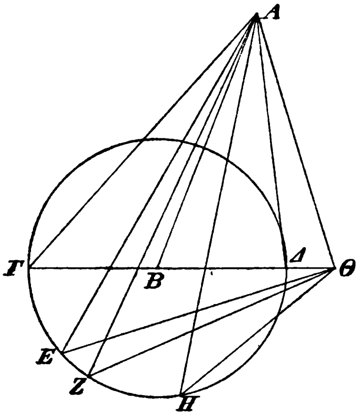
2. ΒΕ] ΒΓ Vc, ΕΒ p, corr. Halley (*eb* Comm.). διεκβεβλήσθω] ἐκβεβλήσθω p. 3. ΑΒΕ] ΑΗΕ Vc, ΑΕΒ p, corr. Comm. 9. καί — 10. ἐπιπέδῳ] bis V. 10. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι] om. p. 18. ἀπώτερον] p, ἀπότερον Vc. 22. ΓΕΔ] ΑΕΔ corr. ex ΑΕΓ m. 1 c. 23. προσνευέτω] bis c. 25. ΓΔΕ] ΓΕΔ p.

uertice ad planum basis in *E* cadat, ducaturque *BE*, et producatur planum trianguli *ABE* in cono efficiens triangulum *AΓΔ*. dico, *AΓΔ* ad basim coni perpendicularem esse.

quoniam enim *AE* ad planum basis perpendicularis est, etiam omnia plana per *AE* ducta ad planum basis perpendicularia sunt [Eucl. XI, 18]; ergo etiam triangulus *AΓΔ* ad planum basis perpendicularis est; quod oportebat fieri.

XVI.

Si conus scalenus per axem plano secatur ad basim perpendiculari, triangulus effectus scalenus erit, cuius latus maius maxima erit omnium rectarum, quae a uertice coni ad ambitum basis ducuntur, minus autem latus minima omnium rectarum eodem modo ductarum, ceterarum autem rectarum maiori propior remotiore maior est.



sit conus scalenus, cuius uertex sit *A*, basis autem circulus *ΓEΔ*, axis autem *AB*, et cono per axem secto ad circulum *ΓEΔ* perpendiculariter triangulus effectus sit *AΓΔ*, et axis ad *Δ* uersus inclinatus sit. quoniam igitur in cono scaleno *AB* ad circulum *ΓΔE* perpendicularis non est, sit ad eum perpendicularis *AΘ*;

κύκλῳ, ἔστω πρὸς ὀρθὰς αὐτῷ ἡ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα ἐν τῷ τοῦ ΑΓΔ ἐστιν ἐπιπέδῳ καὶ πεσεῖται ἐπὶ τὴν ΓΒΔ ἐκβληθεῖσαν. ἐπεὶ οὖν μείζων ἡ ΓΘ τῆς ΘΔ, καὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΘΔ μεῖζον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΘΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΓΘ, ΘΑ τῶν ἀπὸ ΔΘ, ΘΑ μείζονά ἐστι, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ. μείζων ἄρα ἡ ΑΓ τῆς ΑΔ.

λέγω δή, ὅτι ἡ ΑΓ καὶ πασῶν ἁπλῶς μεγίστη ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένων εὐθειῶν, ἡ δὲ ΑΔ ἐλαχίστη.

ἤχθωσαν γὰρ αἱ ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΘ μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ ἄρα μέγιστόν ἐστι τῶν ἀπὸ ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ, ΘΔ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΘΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΘΑ μεῖζόν ἐστιν ἑκάστου τῶν ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΕΘΑ, ΖΘΑ, ΗΘΑ, ΔΘΑ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΓ ἑκάστου τῶν ἀπὸ ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ΑΔ. καὶ ἡ ΑΓ ἄρα μείζων ἐστὶν ἑκάστης τῶν ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ΑΔ. ὁμοίως δείκνυται, ὅτι καὶ τῶν ἄλλων· μεγίστη ἄρα ἡ ΑΓ πασῶν τῶν, ὡς εἴρηται, ἀγομένων εὐθειῶν ἐν τῷ κώνῳ. διὰ τῶν αὐτῶν δὲ δείκνυται, ὅτι καὶ ἡ μὲν ΑΔ ἐλαχίστη, τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν ΑΕ τῆς ΑΖ μείζων, ἡ δὲ ΑΖ

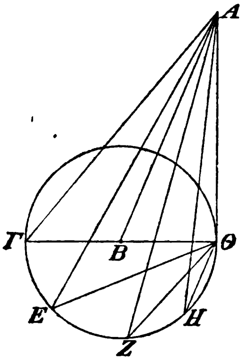
---

2. ΓΒΔ] ΓΔ p. 3. ΓΘ] Θ e corr. p. 4. μεῖζον] μεῖζόν ἐστι p. 5. ΓΘ] τῆς ΓΘ p. ΔΘ] τῆς ΔΘ p. 11. Post ΘΗ add. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ p. 14. ἀπό] ἀπὸ τῶν p. 15. τό (alt.)] p, om. Vc. 18. ΑΕ] supra add. + m. rec. V, τῆς ΑΕ p. 20. δείκνυται] δειχθήσεται p. 21. ἀγομένων] ἀπὸ τοῦ Α ἀγομένων p. 22. δέ] δ' ὁμοίως p. δείκνυται] δειχθήσεται p.

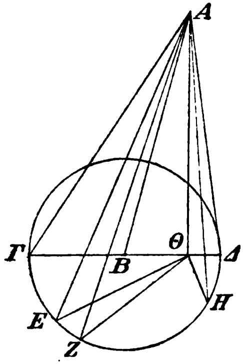
$A\Theta$ igitur in plano $A\Gamma\Delta$ est et in $\Gamma B\Delta$ productam cadet [cfr. Eucl. XI def. 4]. quoniam igitur $\Gamma\Theta > \Theta\Delta$, erit etiam $\Gamma\Theta^2 > \Theta\Delta^2$. adiiciatur commune ΘA^2; itaque

$$\Gamma\Theta^2 + \Theta A^2 > \Delta\Theta^2 + \Theta A^2$$

siue [Eucl. I, 47] $\Gamma A^2 > A\Delta^2$. ergo $A\Gamma > A\Delta$.



iam dico, $A\Gamma$ omnino omnium maximam esse rectarum, quae a uertice ad ambitum basis ducantur, $A\Delta$ autem minimam.



ducantur enim ΘE, ΘZ, ΘH. quoniam igitur $\Gamma\Theta$ maxima est omnium, quae a Θ ad ambitum cadunt [Eucl. III, 8], erit etiam $\Theta\Gamma^2$ maximum quadratorum ΘE^2, ΘZ^2, ΘH^2, $\Theta\Delta^2$. adiiciatur commune ΘA^2; itaque $\Gamma\Theta^2 + \Theta A^2$ maius est quam

$$E\Theta^2 + \Theta A^2,\ Z\Theta^2 + \Theta A^2,\ H\Theta^2 + \Theta A^2,\ \Delta\Theta^2 + \Theta A^2,$$ 1)

hoc est [Eucl. I, 47] $A\Gamma^2$ maius quam AE^2, AZ^2, AH^2, $A\Delta^2$. ergo etiam $A\Gamma$ maior quam AE, AZ, AH, $A\Delta$. similiter demonstrari potest,

---

Has figuras hab. V, om. p, nec ab initio a Sereno positae fuisse uidentur (p. 154, 2—3).

---

1) Ita uertendum esse, ipsa ratiocinatio docet, sed *τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΘΑ* debuit esse $(\Gamma\Theta + \Theta A)^2$. neque tamen Halleius sequendus, qui scripsit: *συναμφότερον ἄρα τὸ ἀπὸ τῶν ΓΘ, ΘΑ μεῖζόν ἐστι ἑκάστου συναμφοτέρου τοῦ ἀπὸ τῶν ΕΘ, ΘΑ κτλ.*

τῆς ΑΗ, καὶ ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ΑΓ τῆς ἀπώτερόν ἐστι μείζων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζʹ.

Ἐὰν τριγώνου ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως εὐθεῖα ἀχθῇ, τὰ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς βάσεως καὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν εὐθείας.

ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, οὗ δίχα τετμήσθω ἡ βάσις κατὰ τὸ Δ, καὶ διήχθω ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ΑΔ.

εἰ μὲν οὖν ἰσοσκελές ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, φανερὰ ἡ δεῖξις διὰ τὸ ἑκατέραν τῶν πρὸς τῷ Δ γίνεσθαι ὀρθήν.

ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ μείζων· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΔΓ. ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ, καὶ κατήχθωσαν ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετοι αἱ ΒΕ, ΓΖ· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ΕΒΔ, ΓΖΔ ὀρθογώνια διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΒΕ, ΖΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ.

---

1. ἀπώτερον] p, ἀπότερον Vc. ἐστι] om. p. 2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. p. 6. βάσεως] βάσεος c. 10. ἀπό] ἀπὸ τῶν p. 11. ΑΒ] ΒΑ p. ἐστί] εἰσί p. 14. τῷ] vcp, corr. ex τό m. 1 V. Δ] Δ γωνιῶν p. γίνεσθαι] εἶναι p. 16. τῆς ΑΓ μείζων] μείζων τῆς ΑΓ p. 17. ΒΔΑ] p, ΒΑΔ Vvc, corr. m. rec. V. ΑΔΓ] ΔΑΓ p. 19. ΕΒΔ] p; ΕΒΔ, ΓΒΔ Vc. ὀρθογώνια] om. p. 20. εἶναι] om. c. ΖΓ] Γ e corr. m. 1 c, ΓΖ p. 21. ΓΔ] ΔΓ p. 22. τό] τῇ c, τῷ p. τῷ] ἄρα ἴσον ἐστὶ τό p. 23. καί — ΔΖ] om. c. τό] τῷ p. τῷ] ἴσον ἐστὶ τό p.

eam ceteris quoque maiorem esse; itaque $A\Gamma$ maxima est omnium rectarum, quae in cono ducuntur, uti diximus. eodem autem modo demonstrari potest, $A\Delta$ minimam esse et ceterarum $AE > AZ$, $AZ > AH$, semperque propiorem rectae $A\Gamma$ remotiore maiorem esse; quod erat demonstrandum.

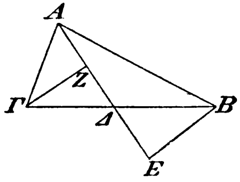
XVII.

Si in triangulo a uertice ad punctum medium basis recta ducitur, quadrata laterum aequalia sunt quadratis partium basis et duplo quadrato rectae a uertice ad basim ductae.

sit triangulus $AB\Gamma$, cuius basis in Δ in duas partes aequales secetur, ducaturque $A\Delta$. dico, esse

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 + 2\,A\Delta^2.$$

iam si triangulus $AB\Gamma$ aequicrurius est, demonstratio manifesta est, quia uterque angulus ad Δ positus rectus fit.



iam uero sit $BA > A\Gamma$; itaque etiam[1] $\angle B\Delta A > A\Delta\Gamma$ [Eucl. I, 25]. producatur $A\Delta$, et ad eam perpendiculares ducantur BE, ΓZ; itaque trianguli rectanguli $EB\Delta$, $\Gamma Z\Delta$ similes sunt, quia BE, $Z\Gamma$ parallelae sunt[2]); itaque [Eucl. VI, 4] $B\Delta : \Delta\Gamma = E\Delta : \Delta Z$. uerum $B\Delta = \Gamma\Delta$; itaque etiam $E\Delta = \Delta Z$ et $A\Delta \times \Delta E = A\Delta \times \Delta Z$ et $2\,A\Delta \times \Delta E = 2\,A\Delta \times \Delta Z$. quoniam igitur

---

1) H. e. $\angle B\Delta A$ obtusus est, $\angle A\Delta\Gamma$ acutus.

2) Immo quia et rectos angulos et angulos ad Δ aequales habent.

ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ τῶν ἀπὸ ΑΔ, ΔΒ μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ, τουτέστι τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΓ τῶν ἀπὸ ΑΔ, ΔΓ ἔλαττόν ἐστι τῷ αὐτῷ τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ, τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΒΔ, ΔΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

Ἐὰν τεσσάρων εὐθειῶν ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τετάρτης. κἂν τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τετάρτης, ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην.

ἔστωσαν εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, Δ, ἐχέτω δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ.

ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ὁ τοῦ μείζονος ἄρα διπλάσιος μείζων ἐστὶ τοῦ τοῦ ἐλάττονος διπλασίου. ἔστι δὲ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου μείζονος ὄντος διπλάσιος ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγος, τοῦ δὲ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ λόγου ἐλάττονος ὄντος διπλάσιος ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ τοῦ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ.

---

1. ΑΒ] ΒΑ p. ἀπό (alt.)] ἀπὸ τῶν p. 3. ΑΔ, ΔΓ] Comm.; ΑΔ, ΑΓ Vc; τῶν ΓΔ, ΔΑ, Α e corr., p. 4. ἀπό]

$$AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 + 2\, A\Delta \times \Delta E \text{ [Eucl. II, 12]}$$
$$= A\Delta^2 + \Delta B^2 + 2\, A\Delta \times \Delta Z,$$

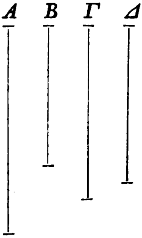
et $A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 \div 2\, A\Delta \times \Delta Z$, erit

$$BA^2 + A\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 + 2\, A\Delta^2;$$

quod erat demonstrandum.

XVIII.

Si quattuor rectarum prima ad secundam maiorem rationem habet quam tertia ad quartam, etiam quadratum primae ad quadratum secundae maiorem rationem habebit quam quadratum tertiae ad quadratum quartae. et si quadratum primae ad quadratum secundae maiorem rationem habet quam quadratum tertiae ad quadratum quartae, prima ad secundam maiorem rationem habet quam tertia ad quartam.



sint rectae A, B, Γ, Δ, sitque

$$A : B > \Gamma : \Delta.$$

dico, esse etiam $A^2 : B^2 > \Gamma^2 : \Delta^2$.

quoniam enim $A : B > \Gamma : \Delta$, erit etiam maior ratio duplicata [cfr. Eucl. V def. 9] minore ratione duplicata maior. maior autem ratio $A : B$ duplicata $A^2 : B^2$ est et minor ratio $\Gamma : \Delta$ duplicata $\Gamma^2 : \Delta^2$; ergo etiam $A^2 : B^2 > \Gamma^2 : \Delta^2$.

ἀπὸ τῶν p. 5. ἀπό (pr.)] ἀπὸ τῶν p. $A\Delta$] $B\Delta$ p. 6. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. p. 20. ἤπερ] om. c. ἀπὸ τῆς (pr.)] p, om. Vc. 21. λόγος] cp, λόγον V. 23. τοῦ τοῦ] τοῦ c. 25. τοῦ] τό p. 26. ἐλάττονος] ἐλάσσονος p. 27. Δ] Δ λόγος p. 29. τοῦ τοῦ] scripsi, τοῦ Vcp.

πάλιν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *Α* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Β* μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς *Γ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Δ*. λέγω, ὅτι ἡ *Α* πρὸς τὴν *Β* μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ *Γ* πρὸς τὴν *Δ*.

ἐπεὶ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς *Α* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Β* λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ τοῦ ἀπὸ τῆς *Γ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Δ* λόγου, καὶ ὁ τοῦ μείζονος ἄρα ἥμισυς τοῦ τοῦ ἐλάττονος ἡμίσεος μείζων ἐστίν. ἔστι δὲ τοῦ μὲν ἀπὸ τῆς *Α* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Β* λόγου μείζονος ὄντος ἥμισυς ὁ τῆς *Α* πρὸς τὴν *Β*, τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς *Γ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Δ* ἐλάττονος ὄντος ἥμισυς ὁ τῆς *Γ* πρὸς τὴν *Δ*· καὶ ὁ τῆς *Α* ἄρα πρὸς τὴν *Β* λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ τῆς *Γ* πρὸς τὴν *Δ*· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθʹ.

Ἐὰν δύο μεγέθη ἴσα ἀνομοίως διαιρεθῇ, τῶν δὲ τοῦ ἑτέρου τμημάτων τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τοῦ λοιποῦ τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον ἢ τὸ ἴσον πρὸς τὸ ἴσον, τῶν προειρημένων τμημάτων τὸ μὲν μεῖζον μέγιστον ἔσται τῶν τεσσάρων τμημάτων, τὸ δὲ ἔλαττον ἐλάχιστον τῶν τεσσάρων.

ἔστω δύο μεγέθη ἴσα τὰ *ΑΒ*, *ΓΔ*, καὶ διῃρήσθω τὸ μὲν *ΑΒ* τῷ *Ε*, τὸ δὲ *ΓΔ* τῷ *Ζ*, ἔστω δὲ τὸ μὲν *ΑΕ* τοῦ *ΕΒ* μεῖζον, τὸ δὲ *ΓΖ* τοῦ *ΖΔ* μὴ ἔλαττον, ὥστε τὸ *ΑΕ* πρὸς *ΕΒ* μείζονα λόγον ἔχειν ἤπερ τὸ *ΓΖ* πρὸς τὸ *ΖΔ*. λέγω, ὅτι τῶν *ΑΕ*, *ΕΒ*, *ΓΖ*, *ΖΔ* μεγεθῶν μέγιστον μέν ἐστι τὸ *ΑΕ*, ἐλάχιστον δὲ τὸ *ΒΕ*.

ἐπεὶ τὸ *ΑΕ* πρὸς *ΕΒ* μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ *ΓΖ* πρὸς *ΖΔ*, καὶ συνθέντι ἄρα τὸ *ΑΒ* πρὸς *ΒΕ*

---

5. ἐπεί] ἐπεὶ γάρ p. 6. τοῦ τοῦ] scripsi, τοῦ Vcp. 8. ἐστίν] ἐστί p. τοῦ μέν] debuit dici τοῦ μὲν τοῦ. 13. ὅπερ

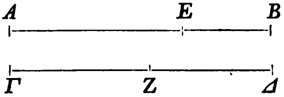
rursus autem sit $A^2 : B^2 > \Gamma^2 : \Delta^2$. dico, esse $A : B > \Gamma : \Delta$.

quoniam $A^2 : B^2 > \Gamma^2 : \Delta^2$, etiam maior ratio dimidiata maior erit minore ratione dimidiata. uerum ratio maior $A^2 : B^2$ dimidiata est $A : B$ et ratio minor $\Gamma^2 : \Delta^2$ dimidiata est $\Gamma : \Delta$; ergo etiam $A : B > \Gamma : \Delta$; quod erat demonstrandum.

XIX.

Si duae magnitudines aequales inaequaliter diuiduntur, et alterius partium maior ad minorem maiorem rationem habet quam reliquae maior ad minorem uel aequalis ad aequalem, maior partium, quas diximus, maxima erit quattuor partium, minor autem minima earum.

sint duae magnitudines aequales AB, $\Gamma\Delta$, et diuidatur AB puncto E, $\Gamma\Delta$ autem puncto Z, sitque $AE > EB$ et ΓZ non minor quam $Z\Delta$, ita tamen, ut sit $AE : EB > \Gamma Z : Z\Delta$. dico, magnitudinum AE, EB, ΓZ, $Z\Delta$ maximam esse AE, minimam autem BE.



quoniam $AE : EB > \Gamma Z : Z\Delta$, etiam componendo erit $AB : BE > \Gamma\Delta : \Delta Z$ [Pappus VII, 45], et per-

---

ἔδει δεῖξαι] om. p. 18. ἤ] καί Vcp, corr. Halley cum Comm. 20. ἔλαττον] ἔλασσον p. 22. τό (pr.)] cp, τῶ corr. in τὸ m. 1 V, τῷ v. 23. ΓZ] $\Gamma\Delta$ Vcp, corr. Comm. 24. EB] τὸ EB p. μείζονα] vcp, corr. ex μειζον m. rec. V (α euan. a m. 1?). ΓZ] p, AZ Vc. 25. τό] om. p. EB] vp, et V, sed ita, ut B litterae A similis sit; EA c. 27. ἐπεί] ἐπεὶ οὖν p. EB — 28. πρός (alt.)] mg. m. 1 p. 28. BE] e corr. m. 1 p.

μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΔ πρὸς ΔΖ, καὶ ἐναλλὰξ τὸ ΑΒ πρὸς ΓΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΕΒ πρὸς ΖΔ. καί ἐστιν ἴσον τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· ἔλαττον ἄρα τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. τὸ δὲ ΖΔ τοῦ ΓΖ οὐ μεῖζον· καὶ τοῦ ΓΖ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ ΕΒ. ἦν δὲ καὶ τοῦ ΑΕ ἔλαττον· ἐλάχιστον ἄρα τὸ ΕΒ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ ἴσον, ὧν τὸ ΕΒ τοῦ ΔΖ ἔλαττον, λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΑ λοιποῦ τοῦ ΓΖ μεῖζον. τὸ δὲ ΓΖ τοῦ ΖΔ οὐκ ἔλαττόν ἐστι· καὶ τοῦ ΖΔ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΕ. ἦν δὲ καὶ τοῦ ΕΒ μεῖζον· μέγιστον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕ, τὸ δὲ ΕΒ ἐλάχιστον.

κʹ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τάς τε βάσεις ἴσας ἔχῃ, ἔχῃ δὲ καὶ τὰς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένας εὐθείας ἴσας, τοῦ δὲ ἑτέρου ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ τοῦ λοιποῦ μείζων πρὸς τὴν ἐλάττονα ἢ καὶ ἴση πρὸς τὴν ἴσην, οὗ ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς ΒΓ, ΕΖ βάσεις, ὧν ἑκατέρα τετμήσθω δίχα κατὰ τὰ Η καὶ Θ σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΗ, ΔΘ ἴσαι ἔστωσαν· ἔστω δὲ ἡ μὲν ΕΔ τῆς ΔΖ μείζων, ἡ δὲ ΒΑ τῆς ΑΓ μὴ ἐλάττων, ὥστε τὴν ΕΔ πρὸς ΔΖ μείζονα

---

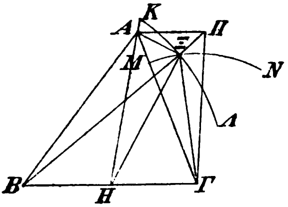
2. *ΕΒ*] cp, et V, sed ita, ut *Β* litterae *Α* similis sit; *ΕΑ* v. 5. ἄρα] om. c. 7. τοῦ] vcp, corr. ex τό m. 1 V. *ΔΖ*] *ΖΔ* p. 10. μέγιστον] om. Vcp, corr. Halley cum Comm. ἐστί] om. c. 16. ἐλάττονα] ἐλάσσονα p. ἔχῃ] corr ex ἔχει m. 1 c, ἔχει v. 17. ἴση] ἡ ἴση c. 18. μείζονα] om. c. 21. τετμήσθω δίχα] δίχα τετμήσθω p. τά] p, τό Vc.

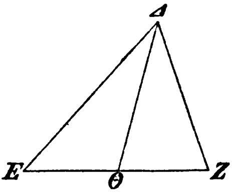
mutando $AB : \Gamma\Delta > EB : Z\Delta$ [Pappus VII, 47]. et $AB = \Gamma\Delta$; itaque $EB < Z\Delta$. uerum $Z\Delta$ non maior est quam ΓZ; itaque etiam $EB < \Gamma Z$. erat autem etiam $EB < \Delta E$; minima igitur est EB. rursus quoniam $AB = \Gamma\Delta$, quarum $EB < \Delta Z$, quae relinquitur $E\Delta$ maior erit quam quae relinquitur ΓZ. uerum ΓZ non minor est quam $Z\Delta$; itaque etiam $\Delta E > Z\Delta$. erat autem etiam $\Delta E > EB$; ergo ΔE maxima est, minima autem EB.

XX.

Si duo trianguli bases aequales habent, habent autem etiam rectas a uertice ad punctum medium basis ductas aequales, alterius autem maius latus ad minus maiorem rationem habet quam reliqui latus maius ad minus uel aequale ad aequale, triangulus, cuius latus maius ad minus rationem habet maiorem, minor est.

sint duo trianguli $AB\Gamma$, ΔEZ bases $B\Gamma$, EZ aequales habentes, quarum utraque in punctis H, Θ in binas partes aequales secetur, et ductae AH, $\Delta\Theta$ aequales sint; sit autem $E\Delta > \Delta Z$, BA autem non





---

22. καὶ Θ σημεῖα] Θ p. 23. ἔστω δέ] ἔστωσαν c. 24. μή] οὐκ p.

λόγον ἔχειν ἤπερ τὴν ΒΑ πρὸς ΑΓ. λέγω, ὅτι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ.

ἐπεὶ γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ ἴσαι τέ εἰσι καὶ εἰς ἴσα διῄρηνται, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΔΘ ἴση, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα ἴσα ἐστί· τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΗ, ΗΓ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΑΗ τοῖς ἀπὸ ΕΘ, ΘΖ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΘΔ ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ ΒΗ, ΗΓ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΑΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ· τοῦτο γὰρ ἐδείχθη· τοῖς δὲ ἀπὸ ΕΘ, ΘΖ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΘΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΕΔ, ΔΖ· καὶ συναμφότερον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ ΕΔ, ΔΖ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ, καὶ τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν δύο ἴσων μεγεθῶν τοῦ τε ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΓ καὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΕΔ, ΔΖ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλαττον, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ τοῦ λοιποῦ τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ ΕΔ μέγιστον ὂν μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ, τὸ δὲ ἀπὸ ΔΖ ἐλάχιστον ὂν ἔλαττόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ διὰ τοῦ πρὸ τούτου θεωρήματος· καὶ ἡ μὲν ΕΔ ἄρα ἑκατέρας τῶν ΒΑ, ΑΓ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ΔΖ ἑκατέρας τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάττων. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΕΔ γραφόμενος κύκλος ὑπερπεσεῖται τὴν ΒΑ· γεγράφθω ὁ ΚΛ· καὶ ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΔΖ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΑΓ· γεγράφθω

---

5. ἀπό] ἀπὸ τῶν p, ut semper. 7. ΘΔ] ΔΘ p. 9. ΘΔ] ΔΘ p. 11. ἀπό (utrumque)] ἀπὸ τῆς p. 12. ἡ ΒΑ πρός]

minor quam $A\Gamma$, ita tamen, ut sit $E\Delta : \Delta Z > BA : A\Gamma$. dico, esse $\triangle\, \Delta EZ < AB\Gamma$.

quoniam enim $B\Gamma = EZ$, et in aequalia diuisae sunt, et praeterea $AH = \Delta\Theta$, etiam quadrata earum aequalia sunt; itaque

$$BH^2 + H\Gamma^2 + 2\,AH^2 = E\Theta^2 + \Theta Z^2 + 2\,\Theta\Delta^2.$$

uerum $BA^2 + A\Gamma^2 = BH^2 + H\Gamma^2 + 2\,AH^2$; hoc enim demonstratum est [prop. XVII]; et

$$E\Delta^2 + \Delta Z^2 = E\Theta^2 + \Theta Z^2 + 2\,\Theta\Delta^2;$$

quare etiam $BA^2 + A\Gamma^2 = E\Delta^2 + \Delta Z^2$. et quoniam $E\Delta : \Delta Z > BA : A\Gamma$, erit etiam [prop. XVIII] $E\Delta^2 : \Delta Z^2 > BA^2 : A\Gamma^2$. quoniam igitur duarum magnitudinum aequalium $BA^2 + A\Gamma^2$ et $E\Delta^2 + \Delta Z^2$*) maior pars ad minorem, hoc est $E\Delta^2 : \Delta Z^2$, maiorem rationem habet, quam reliquae pars ad partem reliquam, hoc est $BA^2 : A\Gamma^2$, maximum $E\Delta^2$ maius erit utroque BA^2, $A\Gamma^2$, minimum autem ΔZ^2 minus erit utroque BA^2, $A\Gamma^2$ propter propositionem praecedentem [prop. XIX]; itaque etiam $E\Delta$ utraque BA, $A\Gamma$ maior est, ΔZ autem utraque BA, $A\Gamma$ minor. circulus igitur centro B, radio autem rectae $E\Delta$ aequali descriptus rectam BA excedet; describatur $K\Lambda$. et circulus centro Γ, radio autem rectae ΔZ aequali descriptus rectam $A\Gamma$ secabit; describatur MN. cir-

---

*) Cfr. p. 155 not.

τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς p (cfr. lin. 14—15). 13. καὶ τό — 15. $A\Gamma$] mg. p (κείμενον). 14. ἀπό] p, ᾱ ἀπό Vvc. 15. ἴσων] vcp, post ἴ- ras. 1 litt. V. 21. ἀπὸ BA — 23. ἑκατέρου] mg. p. 24. τῶν] vcp, corr. ex τῷ m. 1 V. 25. τῶν] vcp, corr. ex τῷ m. 1 V. 26. τῇ $E\Delta$ — 28. ἴσῳ] om. c. 29. ΔZ] $Z\Delta$ p.

ὁ ΜΝ. τέμνουσι δὴ ἀλλήλους οἱ ΚΔ, ΜΝ κύκλοι, ὡς δειχθήσεται. τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΞΑ, ΞΒ, ΞΗ, ΞΓ· ἡ μὲν ἄρα ΒΞ τῇ ΕΔ ἴση, ἡ δὲ ΞΓ τῇ ΔΖ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΒΞΓ τρίγωνον τῷ ΕΔΖ ἴσον ἐστίν. ὥστε ἴση καὶ ἡ ΞΗ τῇ ΔΘ, τουτέστι τῇ ΑΗ· ὀξεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΑΗ γωνία. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ οὐκ ἔστιν ἐλάττων, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ ἄρα γωνία τῆς ὑπὸ ΑΗΓ οὐκ ἔστιν ἐλάττων· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΗΓ οὐ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ἡ δὲ ὑπὸ ΗΑΞ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΗΑ, ΞΑΗ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν· οὐκ ἄρα ἡ ΑΞ τῇ ΗΓ παράλληλός ἐστιν. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΑΠ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΠ· τὸ ἄρα ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΒΠΓ τριγώνῳ. τὸ ἄρα ΒΑΓ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΒΞΓ, τουτέστι τοῦ ΕΔΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅτι δὲ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ ΚΔ, ΜΝ κύκλοι, δεικτέον οὕτως.

ἔστω γὰρ τῇ μὲν ΕΔ ἴση ἡ ΒΑΡ, τῇ δὲ ΔΖ ἴση ἡ ΓΣ ἐπ' εὐθείας οὖσα τῇ ΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ΒΣ ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΕΖ, ΖΔ. ἐπεὶ οὖν συναμφότερος ἡ ΕΖ, ΖΔ τῆς ΕΔ μείζων ἐστί, καὶ ἡ ΒΣ ἄρα τῆς ΒΡ μείζων ἐστίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΡ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΒΣ. ἡ δὲ ΓΣ

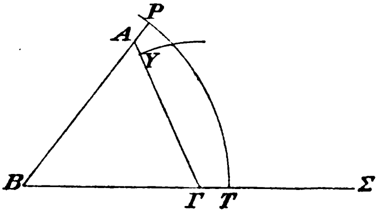
---

3. ΒΞ] vp, corr. ex ΒΖ m. 1 V, ΒΖ c. 4. ἴση] ἴση ἐστίν p. 5. ΒΞΓ] vcp, corr. ex ΒΖΓ m. 1 V. ΕΔΖ] ΔΕΖ p. 6. ἴση] om. p. ΔΘ] ΔΘ ἴση ἐστί p. 7. ἄρα] ἄρα ἐστίν p. 8. καί — 9. ἐλάττων] om. c. 10. μείζων] -ων e corr. p. 11. ΓΗΑ] ΓΑΗ Vcp, corr. Comm. ΞΑΗ] Η e corr. p. 13. Ante ΒΓ del. Α c. 15. ἄρα (alt.)] δέ p. 16. ΒΑΓ] ΒΠΓ τρίγωνον p. ΒΞΓ] ΒΞΓ τριγώνου p. ΕΔΖ] ΔΕΖ p. ὅπερ — 17. δεῖξαι] τὸ ἄρα ΔΕΖ ἔλαττόν

culi igitur $K\Lambda$, MN inter se secant, ut demonstrabitur. secent inter se in Ξ, ducanturque ΞA, ΞB, ΞH, $\Xi\Gamma$; itaque $B\Xi = E\Delta$, $\Xi\Gamma = \Delta Z$. erat autem etiam $B\Gamma = EZ$; quare etiam $\triangle B\Xi\Gamma = E\Delta Z$ [Eucl. I, 8; I, 4]. itaque etiam

$$\Xi H = \Delta\Theta \text{ [Eucl. I, 4] } = AH;$$

$\angle \Xi AH$ igitur acutus est [Eucl. I, 5; I, 17]. et quoniam BA non minor est quam $A\Gamma$, etiam $\angle AHB$ angulo $AH\Gamma$ non minor est [Eucl. I, 25]; quare $\angle AH\Gamma$ non maior est recto. $\angle HA\Xi$ autem minor est recto; itaque $\Gamma HA + \Xi AH$ duobus rectis minores sunt; $A\Xi$ igitur rectae $H\Gamma$ parallela non est [Eucl. I *αἴτ.* 5]. per A igitur rectae $B\Gamma$ parallela ducatur $A\Pi$, producaturque $B\Xi\Pi$, et ducatur $\Gamma\Pi$; itaque $\triangle AB\Gamma = B\Pi\Gamma$ [Eucl. I, 37]. ergo $BA\Gamma > B\Xi\Gamma$, hoc est $BA\Gamma > E\Delta Z$; quod erat demonstrandum.



Circulos autem $K\Lambda$, MN inter se secare, sic demonstrandum:

sit enim

$$BAP = E\Delta,$$
$$\Gamma\Sigma = \Delta Z$$

in producta $B\Gamma$ posita; itaque $B\Sigma = EZ + Z\Delta$. quoniam igitur $EZ + Z\Delta > E\Delta$ [Eucl. I, 20], erit etiam $B\Sigma > BP$; circulus igitur centro B, radio autem BP descriptus

---

ἐστι τοῦ $AB\Gamma$ p. 18. κα' mg. m. rec. V. ὅτι] p, ὅτε Vvc, corr. m. rec. V. 23. ἐστί] ἐστί, τουτέστι τῆς BP p. 24. BP] corr. ex BE p, BE vc et, E e corr., V; $E\Delta$ Halley cum Comm. 25. Post BP del. μείζων ἐστί m. 1 V (non hab. v). ἡ δὲ $\Gamma\Sigma$] p, om. Vc.

ἴση οὖσα τῇ ΔΖ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ΓΑ· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΣ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΑΓ. τεμνέτω κατὰ τὸ Υ· ἥξει ἄρα διὰ τῆς ΡΥ περιφερείας. τέμνουσιν ἄρα ἀλλήλους καὶ οἱ ΚΛ, ΜΝ κύκλοι.

κα΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἀνισοσκελῆ τάς τε βάσεις ἴσας ἔχῃ, ἔχῃ δὲ καὶ τὰς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένας εὐθείας ἴσας, τοῦ ἐλάττονος ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τοῦ μείζονος μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα.

ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ ἴσας ἔχοντα τάς τε ΑΓ, ΕΗ βάσεις δίχα τετμημένας κατὰ τὰ Δ καὶ Θ σημεῖα, ἴσαι δὲ ἔστωσαν καὶ αἱ ΒΔ, ΖΘ, καὶ μεῖζον τὸ ΕΖΗ τρίγωνον, ἔστω δὲ ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΒΓ μείζων, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ.

εἰ γὰρ μή, ἤτοι τὸν αὐτὸν ἢ ἐλάττονα.

ἔστω οὖν πρότερον, εἰ δυνατόν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· καὶ συνθέντι ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς συναμφότερον τὸ ἀπὸ ΑΒ, ΒΓ πρὸς συναμφότερον τὸ ἀπὸ ΕΖ, ΖΗ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. ἀλλὰ συναμφότερον τὸ

---

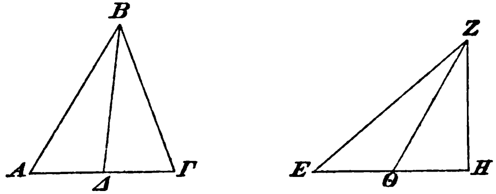
1. ἐλάττων] p, ἔλαττον Vc. 4. καί] om. p. 5. κξ mg. m. rec. V. 6. κα΄] p, κβ΄ mg. m. rec. V, om. Vc. 13. καί] om. p. 14. αἱ] vcp, ἑ V. ΖΘ] corr. ex ΖΔ p. 15. τρίγωνον] τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ p. 16. ΒΓ] τὴν ΒΓ p. 17. ΖΗ] τὴν ΖΗ p. 18. ἐλάττονα] ἐλάττονα ἕξει Halley. 20. οὕτως] om. p. 21. οὕτως] om. p. 22. καὶ ἐναλλάξ] om. p. ἀπό] ἀπὸ τῆς p. 23. πρός] πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ οὕτω p. ἀπό] ἀπὸ τῆς p. οὕτω] πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, καὶ

rectam $B\Sigma$ secabit. $\Gamma\Sigma$ autem rectae ΔZ aequalis minor est quam ΓA; circulus igitur centro Γ, radio autem $\Gamma\Sigma$ descriptus rectam $A\Gamma$ secabit. secet in Υ; ueniet igitur per arcum $P\Upsilon$. ergo etiam circuli $K\Lambda$, MN inter se secant.

XXI.

Si duo trianguli non aequicrurii bases aequales habent, habent autem etiam rectas a uertice ad punctum medium basis ductas aequales, maius latus minoris ad minus maiorem rationem habet quam maius latus maioris ad minus.

sint trianguli $AB\Gamma$, EZH bases $A\Gamma$, EH aequales habentes in binas partes aequales sectas in punctis Δ, Θ, sit autem etiam $B\Delta = Z\Theta$, et triangulus EZH maior sit, sit autem $AB > B\Gamma$ et $EZ > ZH$. dico, esse $AB : B\Gamma > EZ : ZH$.



nam, si minus, aut eandem habent rationem aut minorem.

prius igitur, si fieri potest, sit $AB : B\Gamma = EZ : ZH$. itaque $AB^2 : B\Gamma^2 = EZ^2 : ZH^2$; quare etiam componendo [Eucl. V, 18] et permutando [Eucl. V, 16] $AB^2 + B\Gamma^2 : EZ^2 + ZH^2 = B\Gamma^2 : ZH^2$. est autem

---

ἐναλλάξ, ὡς συναμφότερον τὸ ἀπὸ τῆς AB, $B\Gamma$ πρὸς συναμφότερον τὸ ἀπὸ τῆς EZ, ZH p.

ἀπὸ ΑΒΓ συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ ΕΖΗ ἴσον· καὶ τὸ ἀπὸ ΒΓ ἄρα τῷ ἀπὸ ΖΗ ἴσον. ὥστε καὶ λοιπὸν τὸ ἀπὸ ΑΒ λοιπῷ τῷ ἀπὸ ΕΖ ἴσον· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΖΗ. ἀλλὰ καὶ αἱ βάσεις ἴσαι· πάντα ἄρα πᾶσιν ἴσα. ἴσον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΖΗ· ὅπερ ἄτοπον· ἦν γὰρ ἔλαττον τὸ ΑΒΓ. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ.

ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἐχέτω ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ ἐλάττονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ· ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ. τὸ ἄρα ΕΖΗ τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ διὰ τὰ δειχθέντα· ὅπερ ἄτοπον· ὑπέκειτο γὰρ μεῖζον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ τὸν αὐτόν· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ.

κβ'.

Τὸν δοθέντα κῶνον σκαληνὸν τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδῳ ποιοῦντι ἐν τῷ κώνῳ τρίγωνον ἰσοσκελές.

ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος σκαληνός, οὗ ἄξων μὲν ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ ΓΕΔ κύκλος, καὶ δέον ἔστω τεμεῖν αὐτόν, ὡς ἐπιτέτακται.

τετμήσθω πρῶτον διὰ τοῦ ἄξονος τῷ ΑΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὄντι τῷ ΓΕΔ κύκλῳ, καὶ ἤχθω ἡ ΑΗ κάθετος, ἥτις πίπτει ἐπὶ τὴν ΓΔ βάσιν τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, καὶ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἡ ΕΖ, καὶ διὰ τῆς ΕΖ καὶ τῆς Α κορυφῆς ἐκβεβλήσθω τὸ ἐπίπεδον ποιοῦν τὸ ΑΕΖ

---

1. *ἀπό* (pr.)] *ἀπὸ τῆς* p. **ΕΖΗ**] *τῆς* **ΕΖ, ΖΗ** p. *ἴσον*] *ἴσον ἐστί* p. *καί* — 2. *ἴσον*] om. c. 1. *τό*] *τῷ* p. 2. *τῷ*] *τό* p. *ἴσον*]

[prop. XVII] $AB^2 + B\Gamma^2 = EZ^2 + ZH^2$; itaque etiam $B\Gamma^2 = ZH^2$. quare etiam reliquum AB^2 reliquo EZ^2 aequale est [Eucl. V, 9]; itaque $AB = EZ$, $B\Gamma = ZH$. uerum etiam bases aequales sunt; itaque omnia omnibus aequalia [Eucl. I, 8]. quare [Eucl. I, 4] $\triangle AB\Gamma = EZH$; quod absurdum est; erat enim $AB\Gamma$ minor. ergo non est $AB : B\Gamma = EZ : ZH$.

uerum, si fieri potest, sit $AB : B\Gamma < EZ : ZH$; itaque $EZ : ZH > AB : B\Gamma$. itaque $\triangle EZH < AB\Gamma$ propter ea, quae demonstrauimus [prop. XX]; quod absurdum est; supposuimus enim, esse $EZH > AB\Gamma$. itaque non est $AB : B\Gamma < EZ : ZH$. demonstrauimus autem, ne eandem quidem rationem eas habere; ergo erit $AB : B\Gamma > EZ : ZH$.

XXII.

Datum conum scalenum per uerticem secare plano in cono triangulum aequicrurium efficienti.

sit datus conus scalenus, cuius axis sit AB, basis autem circulus $\Gamma E\Delta$, et oporteat eum secare, ut dictum est.

primum per axem secetur plano $A\Gamma\Delta$ ad circulum $\Gamma E\Delta$ perpendiculari, ducaturque AH perpendicularis, quae in $\Gamma\Delta$ basim trianguli $A\Gamma\Delta$ cadit [Eucl. XI def. 4], et ad $\Gamma\Delta$ perpendicularis in plano circuli

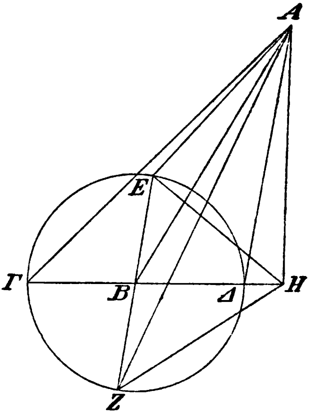
---

ἴσον ἐστίν p. 3. AB (pr.)] AB *ἴσον ἐστί* p. *ἴσον*] om. p. 7. Mg. *α* m. rec. V. 9. ZH (pr.)] p, ΞH Vc. 11. *τοῦ*] p, *τό* Vc. Post $AB\Gamma$ del. *τριγώνου* p. 16. *κβ´*] p, om. Vc, *κγ´* m. rec. V. 18. *τῷ*] om. c? 23. $\Gamma E\Delta$] $BE\Delta$ Vcp, corr. Comm. 24. *ἥτις*] *ἧ*$\overset{\varsigma}{\tau}$ V. *πίπτει*] *πιπτέτω* p. 26. *διά*] supra scr. m. 1 c. 27. *τό* (pr.)] om. Halley.

τρίγωνον. λέγω, ὅτι τὸ *ΑΕΖ* τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστιν.

ἐπεζεύχθωσαν αἱ *ΕΗ*, *ΖΗ*. ἐπεὶ ἡ *ΓΔ* τὴν *ΕΖ* πρὸς ὀρθὰς τέμνουσα δίχα αὐτὴν τέμνει, ἴση ἄρα ἡ *ΕΗ* τῇ *ΖΗ*. καὶ κοινὴ ἡ *ΑΗ*, καὶ ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ *ΑΗΕ*, *ΑΗΖ* γωνιῶν· καὶ ἡ *ΕΑ* ἄρα τῇ *ΑΖ* ἴση ἐστίν. ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ *ΑΕΖ* τρίγωνον.

ἐκ δὴ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι πάντα τὰ συνιστάμενα τρίγωνα τὰς βάσεις ἔχοντα πρὸς ὀρθὰς τῇ *ΓΔ* ἰσοσκελῆ ἐστιν.



κγ'.

Ἔτι δεικτέον, ὅτι, ἐὰν τὰ γινόμενα τρίγωνα τὰς βάσεις μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχῃ τῇ *ΓΔ*, οὐκ ἔσται ἰσοσκελῆ.

ὑποκείσθω γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς ἡ *ΕΖ* μὴ πρὸς ὀρθὰς τῇ *ΓΔ*· αἱ *ΕΗ*, *ΖΗ* ἄρα ἄνισοί εἰσι. κοινὴ δὲ ἡ *ΗΑ* καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐταῖς· καὶ αἱ ἄρα *ΕΑ*, *ΑΖ* ἄνισοί εἰσι. τὸ *ΕΑΖ* ἄρα τρίγωνον οὐκ ἔστιν ἰσοσκελές.

κδ'.

Ἐν κώνῳ σκαληνῷ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος συνισταμένων τριγώνων μέγιστον μὲν ἔσται τὸ ἰσοσκελές,

---

3. ἐπεί] ἐπεὶ οὖν p. 5. ἄρα] ἄρα ἐστίν p. 7. *ΑΗ*] *ΗΑ* p. 12. πόρισμα mg. p. 14. τρίγωνα] om. p. 17. κγ'] κδ'

ducatur EZ, et per EZ uerticemque A planum ducatur triangulum AEZ efficiens. dico, triangulum AEZ aequicrurium esse.

ducantur EH, ZH. quoniam $\Gamma\Delta$ rectam EZ ad rectos angulos secans in duas partes aequales eam secat [Eucl. III, 3]1)), erit $EH = ZH$ [Eucl. I, 4]. communis autem AH, et uterque angulus AHE, AHZ rectus; quare etiam $EA = AZ$ [Eucl. I, 4]. ergo triangulus AEZ aequicrurius est.

hinc manifestum est, omnes triangulos, qui construantur bases ad $\Gamma\Delta$ perpendiculares habentes, aequicrurios esse.

XXIII.

Praeterea demonstrandum, si trianguli effecti bases ad $\Gamma\Delta$ perpendiculares non habeant, aequicrurios eos non fore.

nam in eadem figura supponatur EZ ad $\Gamma\Delta$ non perpendicularis; EH, ZH igitur inaequales sunt. communis autem HA et ad eas perpendicularis; quare etiam EA, AZ inaequales sunt. ergo triangulus EAZ aequicrurius non est.

XXIV.

In cono scaleno triangulorum per axem constructorum maximus erit triangulus aequicrurius,

---

1) Neque enim necesse est, EZ per B cadere; sed ita est in figura codicum Vp.

---

mg. m. rec. V, κγ' mg. p, om. Vc. 22. κοινή — 23. εἰσι] om. p. 25. κδ'] p, om. Vc.

ἐλάχιστον δὲ τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ κώνου, τῶν δὲ λοιπῶν τὸ τοῦ μεγίστου ἔγγιον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπώτερον.

ἐν γὰρ κώνῳ σκαληνῷ διὰ τοῦ ΑΒ ἄξονος ἔστω τρίγωνα, ἰσοσκελὲς μὲν τὸ ΑΓΔ, ὀρθὸν δὲ πρὸς τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον τὸ ΑΕΖ. λέγω, ὅτι πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων μέγιστον μέν ἐστι τὸ ΑΓΔ, ἐλάχιστον δὲ τὸ ΑΕΖ.

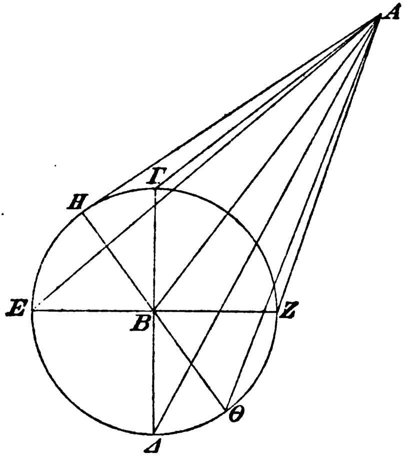
ἔστω γὰρ διὰ τοῦ ἄξονος ἠγμένον ἄλλο τρίγωνον τὸ ΑΗΘ. καὶ ἐπεὶ σκαληνὸς ὁ κῶνος, κεκλίσθω ὁ ΑΒ ἄξων ἐπὶ τὰ τοῦ Ζ μέρη· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΑΕ πλευρὰ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἀγομένων εὐθειῶν, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΖ. ἡ μὲν ἄρα ΕΑ τῆς ΑΗ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ΖΑ τῆς ΑΘ ἐλάττων. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΑΕΖ, ΑΗΘ ἴσας ἔχει βάσεις τὰς ΕΖ, ΗΘ καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως τὴν αὐτὴν τὴν ΑΒ, καὶ μείζονα λόγον ἔχει ἡ ΑΕ πρὸς ΑΖ ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΘ, ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΖ τοῦ ΗΑΘ. ὁμοίως δὲ δείκνυται, ὅτι καὶ πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων· ἐλάχιστον ἄρα τὸ ΕΑΖ πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων. πάλιν ἐπεὶ τῶν ΑΗΘ, ΑΓΔ τριγώνων αἵ τε βάσεις ἴσαι καὶ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἡ αὐτή, καὶ ἔχει ἡ ΗΑ πρὸς ΑΘ μείζονα λόγον ἤπερ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΔ· ἴσαι γὰρ αἱ ΓΑ,

---

3. ἀπώτερον] p, ἀπότερον Vc. 10. ὁ (pr.)] ἐστιν ὁ p. κεκλίσθω] p, κεκλείσθω Vvc. 11. μέν] vcp, supra scr. m. 1 V. 14. ΑΗ] Η sustulerunt uermes in c. 17. τήν (alt.)] τῇ c. 19. ΗΑΘ] ΑΗΘ p. 21. ἐλάχιστον — 22. τριγώνων (pr.)] bis p. 22. ἐπεί] p, ἐπί Vc. 23. ἴσαι] ἴσαι εἰσί p. 24. ΗΑ] Α e corr. p.

minimus autem, qui ad basim coni perpendicularis est, reliquorum autem maximo propior remotiore maior est.

nam in cono scaleno per axem AB trianguli ducti sint, aequicrurius $A\Gamma\Delta$, perpendicularis autem ad planum basis AEZ. dico, omnium triangulorum per axem ductorum maximum esse $A\Gamma\Delta$, minimum autem AEZ.



sit enim alius triangulus per axem ductus $AH\Theta$. et quoniam conus scalenus est, axis AB ad partes Z uersus inclinatus sit; latus igitur AE maxima est omnium rectarum ab A ad ambitum ductarum, minima autem AZ [prop. XVI]. itaque $EA > AH$, $ZA < A\Theta$. quoniam igitur duo trianguli AEZ, $AH\Theta$ bases EZ, $H\Theta$ aequales habent rectamque a uertice ad punctum medium basis eandem AB, et

$$AE : AZ > HA : A\Theta,$$

erit $\triangle AEZ < HA\Theta$ [prop. XX]. similiter autem demonstratur, etiam omnibus triangulis per axem ductis minorem eum esse; ergo EAZ minimus est omnium triangulorum per axem ductorum. rursus quoniam triangulorum $AH\Theta$, $A\Gamma\Delta$ et bases aequales

ΑΔ· τὸ ΗΑΘ ἄρα τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΓΑΔ τριγώνου. ὁμοίως δὲ δείκνυται, ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα τοῦ ΓΑΔ ἐλάττονά ἐστι. μέγιστον ἄρα πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὸ ΑΓΔ, ἐλάχιστον δὲ τὸ ΑΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ὁμοίως δὲ δείκνυται, ὅτι καὶ τὸ τοῦ μεγίστου ἔγγιον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπώτερον.

κε΄.

Ἐν τῷ δοθέντι κώνῳ σκαληνῷ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως εὐθεῖαν ἀγαγεῖν, πρὸς ἣν ἡ μεγίστη λόγον ἕξει δοθέντα· δεῖ δὴ τὸν δοθέντα λόγον μείζονος μὲν εἶναι πρὸς ἐλάττονα, ἐλάττονα δὲ εἶναι τοῦ ὃν ἔχει ἡ μεγίστη τῶν ἐν τῷ κώνῳ πρὸς τὴν ἐλαχίστην.

δεδόσθω κῶνος, οὗ βάσις ὁ ΒΓ κύκλος καὶ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ ΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς ὀρθὰς δὲ τῷ ΒΓ κύκλῳ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΒΑ τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου εὐθειῶν, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ. ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν, πρὸς ἣν ἡ ΒΑ λόγον ἕξει, ὃν ἔχει ἡ Δ εὐθεῖα μείζων οὖσα πρὸς τὴν Ε ἐλάττονα· ἐχέτω δὲ ἡ Δ πρὸς Ε λόγον ἐλάττονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ.

κατήχθω ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΖΗ, καὶ ὡς ἡ Δ πρὸς Ε, οὕτως ἐχέτω

---

1. ΗΑΘ] ΗΘ c. ἔλαττον] corr. ex ἔλασσον m. 1 c. 3. ΓΑΔ] ΑΓΔ p. ἐλάττονα] p, ἔλαττον Vvc (fuit correctum in V?). 5. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. p. 7. ἀπώτερον] p, ἀπότερον Vc. 8. κε΄] p et m. rec. V, om. Vc.

sunt et recta a uertice ad punctum medium basis ducta eadem, et $HA : A\Theta > \Gamma A : A\Delta$ (nam $\Gamma A = A\Delta$), erit $\triangle\, HA\Theta < \Gamma A\Delta$ [prop. XX]. similiter autem demonstratur, etiam omnes triangulos per axem ductos triangulo $\Gamma A\Delta$ minores esse. ergo $A\Gamma\Delta$ maximus est omnium triangulorum per axem ductorum, minimus autem AEZ; quod erat demonstrandum.

similiter autem demonstratur, etiam triangulum maximo propiorem remotiore maiorem esse.

XXV.

In dato cono scaleno a uertice ad ambitum basis rectam ducere, ad quam maxima rationem habeat datam oportet igitur, datam rationem maioris esse ad minus, minorem autem esse ea, quam habet maxima in cono recta ad minimam.

datus sit conus, cuius basis sit circulus $B\Gamma$ diametrusque circuli $B\Gamma$, uertex autem A punctum, et ad circulum $B\Gamma$ perpendicularis triangulus $AB\Gamma$; maxima igitur rectarum a uertice coni ductarum est BA, minima autem $A\Gamma$ [prop. XVI]. iam sit propositum, ut ab A ad ambitum circuli rectam ducamus, ad quam BA rationem habeat, quam habet maior recta Δ ad minorem E; sit autem $\Delta : E < BA : A\Gamma$.

ducatur ad $B\Gamma$ perpendicularis AZ, producaturque BZH, et ut $\Delta : E$, ita sit BA ad aliam aliquam, sitque ad AH, quae sub angulo AZH inseratur. itaque

---

11. δή] p, δέ Vc. 15. δ] μὲν ὁ p. καὶ διάμετρος] διάμετρος δέ p. 16. ΒΓ] Β e corr. p. Α] e corr. p. 22. Δ] p, ΗΔ Vc.

ἡ ΒΑ πρὸς ἄλλην τινά, ἐχέτω δὲ πρὸς τὴν ΑΗ, ἥτις ἐνηρμόσθω ὑπὸ τὴν ὑπὸ ΑΖΗ γωνίαν. ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς ΑΗ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς ΑΓ· μείζων ἄρα ἡ ΗΑ τῆς ΑΓ καὶ ἡ ΗΖ τῆς ΖΓ. ἐπεὶ οὖν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ, μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΑ τοῦ ἀπὸ ΑΗ, τουτέστι τὰ ἀπὸ ΒΖ, ΖΑ τῶν ἀπὸ ΑΖ, ΖΗ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΖ τοῦ ἀπὸ ΖΗ μεῖζον, καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΗ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΗ ἐλάττων· ἡ ἄρα ΖΗ τῆς μὲν ΖΓ μείζων ἐστί, τῆς δὲ ΖΒ ἐλάττων. ἐνηρμόσθω τοίνυν τῷ κύκλῳ τῇ ΖΗ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΘΖ τῇ ΖΗ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΖΑ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἑκατέρᾳ αὐτῶν, καὶ βάσις ἄρα ἡ ΘΑ τῇ ΑΗ ἴση. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ Δ πρὸς Ε, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΘ, ἡ δὲ Δ πρὸς Ε ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστί, καὶ ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς ΑΘ ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστίν. ἡ ΑΘ ἄρα διῆκται, πρὸς ἣν ἡ ΒΑ λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

---

2. ΑΖΗ] p, ΑΗΖ V et corr. ex ΑΖ m. 1 c. 3. ἡ ΑΒ] om. p. 4. ΗΑ] p, ΗΓ Vc. ΗΖ] p, ΗΓ Vc. ΖΓ] ΓΖ p. 6. ΑΗ] ΑΗ, μεῖζον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ τοῦ ἀπὸ τῆς Ε p. ἄρα] ἄρα καί p. 7. ΑΗ] ΒΗ p. ἀπό (tert.)] ἀπὸ τῶν p. 8. ἀπό (pr.)] ἀπὸ τῶν p. 9. μεῖζον] μεῖζόν ἐστι p. 13. ἡ (pr.)] supra scr. m. 1 c. ἴση] ἴση ἐστί p. 15. ἴση] ἴση ἐστίν p. 17. ἐστί — 18. λόγῳ] om. c. 18. ΑΘ (alt.)] vcp, suppl. m. rec. V. ἄρα] ἄρα — V, † add. m. rec.; mg. „$\overset{\tau}{M}$ † sic in apographo. forte melius † δέδεικται ὡς πρὸς τὴν ΒΑ —“. 19. διῆκται] vcp, διῆ- suppl. m. rec. V. πρός] vcp, -ρός suppl. m. rec. V. ἣν] p, om. c, ἡ v et suppl. m. rec. V. ἡ ΒΑ] p, ΒΑ Vv, $\overline{\eta\beta\alpha}$ c. ἐπιταχθέντα] vcp, -τα- suppl. m. rec. V. 20. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι] om. p.

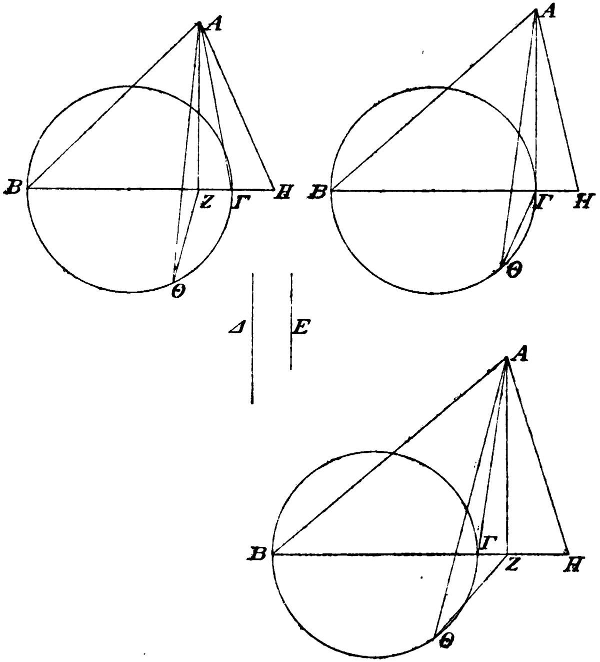
$BA:AH < AB:A\Gamma$; quare $HA > A\Gamma$ [Eucl. V, 10] et $HZ > Z\Gamma$ [Eucl. I, 47]1). quoniam igitur

$$\Delta^2 : E^2 = BA^2 : AH^2,$$

erit $BA^2 > AH^2$, hoc est [Eucl. I, 47]

$$BZ^2 + ZA^2 > AZ^2 + ZH^2.$$

auferatur, quod commune est, AZ^2; itaque quod relinquitur $BZ^2 > ZH^2$ et $BZ > ZH$. erat autem etiam $\Gamma Z < ZH$; quare $Z\Gamma < ZH < ZB$. in circulum igitur rectae ZH aequalis inseratur $Z\Theta$, ducaturque $A\Theta$.



---

1) Itaque tertiam figuram solam respicit.

κϛ′.

Ἔστω τρίγωνον δοθὲν τὸ ΑΒΓ σκαληνὸν μείζονα ἔχον τὴν ΑΒ τῆς ΑΓ, ἡ δὲ ΒΓ βάσις τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ διήχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἡ μὲν ΕΔ πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῇ ΒΓ ἴση οὖσα τῇ ΔΑ, ἡ δὲ ΑΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. μεῖζον τοῦ ΑΒΓ ἄλλο τρίγωνον συστήσασθαι τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΔΑ καὶ προσέτι λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒΓ, ὃν ἡ Θ πρὸς Η μείζων πρὸς ἐλάττονα· ἐχέτω δὲ ἡ Θ πρὸς Η λόγον μὴ μείζονα ἤπερ ἡ ΔΕ πρὸς ΑΖ.

κέντρῳ τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΑ γεγράφθω κύκλος· ἥξει δὴ καὶ διὰ τοῦ Ε· ἔστω δὴ ὁ ΕΑ.

ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς Θ πρὸς Η λόγος οὐ μείζων ἐστὶ τοῦ τῆς ΔΕ πρὸς ΑΖ, ἤτοι ὁ αὐτός ἐστιν ἢ ἐλάττων.

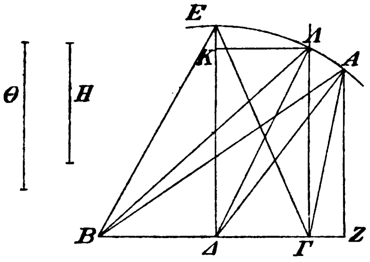
---

1. κϛ′] p et m. rec. V, om. Vc. Praemittit p: τριγώνου δοθέντος σκαληνοῦ καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένης εὐθείας ἄλλο μεῖζον τρίγωνον συστήσασθαι, ὥστε ἴσην μὲν ἔχειν τὴν βάσιν καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως τῇ τοῦ δοθέντος τριγώνου, λόγον δὲ ἔχειν πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον, ὃν εὐθειά τις μείζων πρὸς ἐλάττονα· δεῖ δὴ τὰς τοιαύτας εὐθείας λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλας μὴ μείζονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ δοθέντος τριγώνου ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένη τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν πιπτούσης καθέτου. 2. τρίγωνον δοθέν] τὸ δοθὲν σκαληνὸν τρίγωνον p. σκαληνόν] om. p. 3. ΑΓ] ΒΓ Vcp, corr. Comm. ἡ δὲ ΒΓ βάσις] καί p. ΒΓ] Β euan. c. δίχα] ἡ ΒΓ βάσις δίχα p. 4. καί (alt.)] om. p. ἡ μέν — 6. συστήσασθαι] ἤχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Α καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν ἡ ΑΖ, καὶ δέον ἔστω ἄλλο μεῖζον τρίγωνον συστήσασθαι ἐπὶ τῆς ΒΓ p. 8. ἑκατέρᾳ — ΔΑ] ἔχον τῇ ΑΔ p. 9. ΑΒΓ] ΑΒΓ τρίγωνον p. Θ — 10. ἐλάττονα] Θ μείζων πρὸς ἐλάττονα τὴν Η p. 10. Η] τὴν Η p. 11. ἤπερ] τοῦ ὃν ἔχει p. ΔΕ] ΔΑ p. ΑΖ] corr. ex ΔΑΖ m. 1 c. 12. κέντρῳ] ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ καὶ κέντρῳ p. κέντρῳ — ΔΑ] om. c. γεγράφθω — 13. ΕΑ] κύκλου περιφέρεια

quoniam igitur $\Theta Z = ZH$, et communis ZA et ad utramque earum perpendicularis [Eucl. XI def. 3], erit etiam basis $\Theta A = AH$ [Eucl. I, 4]. quoniam igitur $\Delta : E = BA : AH = BA : A\Theta$, et $\Delta : E$ in data ratione est, etiam $BA : A\Theta$ in data est ratione. ergo ducta est $A\Theta$, ad quam BA rationem habeat propositam; quod oportebat fieri.

XXVI.

Sit datus triangulus scalenus $AB\Gamma$ habens $AB > A\Gamma$, et basis $B\Gamma$ in Δ in duas partes aequales secetur, ducaturque $A\Delta$, $E\Delta$ autem rectae ΔA aequalis ad $B\Gamma$ perpendicularis sit, AZ autem ad $B\Gamma$ perpendicularis. construendus alius triangulus triangulo $AB\Gamma$ maior, qui rectam a uertice ad punctum medium basis ductam utrique ΔE, ΔA aequalem habeat et praeterea ad $AB\Gamma$ rationem, quam $\Theta : H$ maior ad minorem; sit autem $\Theta : H$ non maior quam $\Delta E : AZ$.



centro Δ, radio autem ΔA circulus describatur; ueniet igitur etiam per E; sit igitur EA.

iam quoniam $\Theta : H$ non maior est quam $\Delta E : AZ$, aut eadem est aut minor.

γεγράφθω ἡ *EA*· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ *ΔE* τῇ *ΔA* καὶ p. 13. δὴ δ] c, bis Vv (ὁ alt. loco del. m. rec. V). 14. οὖν] om. p. Θ] vcp, corr. ex Δ in scrib. V. *H*] τὴν *H* p. 15. *ΔE*] *ΔA* ἤτοι τῆς *ΔE* p.

ἔστω πρότερον ὁ αὐτός, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ Θ πρὸς Η, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΑΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΑΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΒΓ, ὡς ἄρα ἡ Θ πρὸς Η, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΒΓ. ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ ΕΔ, ΒΓ ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ ΑΖ, ΒΓ ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· καὶ τὸ ΒΕΓ ἄρα πρὸς τὸ ΒΑΓ λόγον ἔχει, ὃν ἡ Θ πρὸς Η, τουτέστι τὸν ἐπιταχθέντα.

ἀλλὰ δὴ ἐχέτω ἡ Θ πρὸς Η ἐλάττονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΑΖ, γενέσθω δέ, ὡς ἡ Θ πρὸς Η, οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΑΖ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΒ, ΛΓ. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ Θ πρὸς Η, οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΑΖ, ὡς δὲ ἡ ΚΔ πρὸς ΑΖ, οὕτως τὸ ΒΛΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΓ τρίγωνον, τὸ ἄρα ΒΛΓ πρὸς τὸ ΒΑΓ τὸν ἐπιταχθέντα ἔχει λόγον τὸν τῆς Θ πρὸς Η· ἔχει δὲ καὶ τὴν ΛΔ ἴσην τῇ ΔΑ· ὃ προστέτακται ποιῆσαι.

κϛʹ.

Τὸν δοθέντα κῶνον σκαληνὸν τεμεῖν διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ, ὃ τὸν δοθέντα λόγον ἕξει πρὸς τὸ ἐλάχιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων· δεῖ δὴ τὸν δοθέντα λόγον μείζονος ὄντα πρὸς ἔλαττον μὴ μείζονα εἶναι τοῦ ὃν ἔχει τὸ μέγιστον τρίγωνον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς τὸ ἐλάχιστον.

ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος σκαληνός, οὗ ὁ ἄξων ὁ ΑΒ,

---

2. ὡς] supra scr. p. Η] τὴν Η p. 3. ΑΖ (utrumque)] τὴν ΑΖ p. 4. ὡς ἄρα — 5. ΑΖ, ΒΓ] om. p. 6. ΕΒΓ] corr. ex ΑΒΓ m. 1 c. Post τρίγωνον del. καὶ τὸ ΒΕΓ τρί-

sit prius $\Theta : H = \Delta E : AZ$, ducanturque EB, $E\Gamma$. quoniam igitur $\Theta : H = E\Delta : AZ$, et

$$E\Delta : AZ = E\Delta \times B\Gamma : AZ \times B\Gamma,$$

erit $\Theta : H = E\Delta \times B\Gamma : AZ \times B\Gamma$. est autem $EB\Gamma = \frac{1}{2} E\Delta \times B\Gamma$, $AB\Gamma = \frac{1}{2} AZ \times B\Gamma$ [Eucl. I, 41]; quare etiam $BE\Gamma : BA\Gamma = \Theta : H$, hoc est rationi propositae.

iam uero sit $\Theta : H < E\Delta : AZ$, fiatque $K\Delta : AZ = \Theta : H$, et per K rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducatur $K\Lambda$, ducanturque ΛB, $\Lambda\Gamma$. quoniam igitur $\Theta : H = K\Delta : AZ$, et $K\Delta : AZ = \triangle B\Lambda\Gamma : BA\Gamma$ [cfr. Eucl. VI, 1], erit $B\Lambda\Gamma : BA\Gamma = \Theta : H$, hoc est rationi propositae; habet autem etiam $\Lambda\Delta = \Delta A$; quod propositum erat.

XXVII.

Datum conum scalenum per axem secare plano triangulum in cono efficienti, qui ad minimum triangulorum per axem ductorum datam habeat rationem; oportet igitur, datam rationem maioris ad minus non maiorem esse ea, quam habet maximus triangulus per axem ductus ad minimum.

sit datus conus scalenus, cuius axis sit AB, basis

γωνον m. 1 c. 7. ἐστι] om. p. 8. $BE\Gamma$] $EB\Gamma$ p. $BA\Gamma$] ἀπὸ τῆς $AB\Gamma$ p. 9. H] τὴν H p. 10. ἐχέτω] bis V. H] τὴν H p. ἐλάττονα λόγον ἤπερ] λόγον ἐλάττονα τοῦ ὃν ἔχει p. 11. $E\Delta$] ΔE p. δέ] δή p. H] τὴν H p. οὕτως] om. p. 12. AZ] τὴν AZ p. 13. $K\Lambda$] K e corr. p. 14. H] τὴν H p. 15. $B\Lambda\Gamma$] corr. ex $\Lambda\Gamma$ m. 1 c. πρός (alt.)] p, om. Vc. τό (alt.)] τοῦ c. 16. τρίγωνον] τριγώνου c, om. p. τό (alt.)] p, τόν Vc. 17. ἔχει λόγον] λόγον ἔχει p. H] τὴν H p. 18. προστέτακται] προτέτακται c. 19. κζʹ] p et m. rec. V, om. Vc. 20. κῶνον] κῶνō V. 23. δὴ τόν] p, δὲ τόν V, δέ c. 27. ὁ (sec.)] om. p.

βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τὸ δὲ ἐλάχιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὸ ΑΓΔ, καὶ δέον ἔστω διὰ τοῦ ΑΒ ἄξονος ἀγαγεῖν ἐπίπεδον ποιοῦν τρίγωνον, ὃ λόγον ἕξει πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, ὃν ἔχει ἡ Ε εὐθεῖα μείζων οὖσα πρὸς τὴν Ζ, μὴ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον τὸ ΑΓΔ.

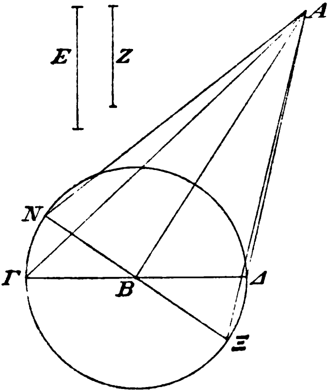
εἰ μὲν οὖν ἡ Ε πρὸς Ζ λόγον ἔχει, ὃν τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον, διὰ τοῦ Β πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ ἀγαγόντες εὐθεῖαν ἐν τῷ κύκλῳ καὶ διὰ τῆς ἀχθείσης καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβαλόντες ἐπίπεδον ἕξομεν τρίγωνον ἰσοσκελές, ὃ μέγιστόν ἐστι τῶν διὰ τοῦ ἄξονος· ταῦτα γὰρ ἐδείχθη· καὶ ἕξει πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον τὸν τῆς Ε πρὸς Ζ, τουτέστι τὸν ἐπιταχθέντα.

ἐχέτω δὲ νῦν ἡ Ε πρὸς Ζ ἐλάττονα λόγον ἤπερ τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον, καὶ κείσθω ἐκτὸς εὐθεῖα ἡ ΗΘ ἴση οὖσα τῇ ΓΔ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον ὅμοιον ὂν τῷ ΑΓΔ, ὥστε καὶ τὴν ΚΗ τῇ ΑΓ ἴσην εἶναι καὶ πάντα πᾶσιν, καὶ ἐπὶ τῆς ΗΘ συνεστάτω τρίγωνον ἴσην ἔχον τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως τῇ ΚΛ καὶ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΚΗΘ, ὃν

---

2. ΑΓΔ] Α euan. c. 6. λόγον] δέ Halley cum Comm. ἤπερ] τοῦ ὃν $^{\text{ἔχει}}$ p. 7. Post ἐλάχιστον del. διὰ τοῦ Β πρὸς ὀρθάς m. 1 c. τὸ ΑΓΔ] om. p. 8. εἰ] ἡ c. εἰ μέν — 9. ἐλάχιστον] bis p, sed corr. 8. ὃν] p, ὧν Vc. 9. τριγώνων] om. c. 13. ἐστι] ἔσται p. 14. Ε] ΕΖ p. Ζ] τὴν Ζ p. 16. δὲ νῦν] om. p, supra scr. δή. Ζ] τὴν Ζ p. 18. καί — ἐκτός] ἐκκείσθω p. εὐθεῖα] εὐθεῖά τις p. 20. τήν] e corr. p. ΚΗ] vcp, Η suppl. m. rec. V. 21. πᾶσιν] πᾶσι p. ΗΘ] ΗΘ ἄλλο τρίγωνον p. τρίγωνον] τὸ ΜΗΘ p. 23. τό] τήν p.

autem circulus circum B centrum descriptus, minimus autem triangulorum per axem ductorum sit $A\Gamma\Delta$, et oporteat per axem AB planum ducere triangulum efficiens, qui ad triangulum $A\Gamma\Delta$ rationem habeat, quam maior recta $E : Z$, quae ratio maior non sit ea, quam habet maximus triangulorum per axem ductorum ad minimum $A\Gamma\Delta$.



iam si $E : Z$ rationem habet, quam maximus triangulorum per axem ductorum ad minimum, recta in circulo per B ad $\Gamma\Delta$ perpendiculari ducta et plano per rectam ductam axemque producto triangulum aequicrurium habebimus, qui maximus sit triangulorum per axem ductorum; haec enim demonstrata sunt [prop. XXIV]; et ad $A\Gamma\Delta$ rationem habebit, quam $E : Z$, hoc est propositam.

iam uero $E : Z$ minorem rationem habeat, quam maximus triangulorum per axem ductorum ad minimum, ponaturque extrinsecus recta $H\Theta$ rectae $\Gamma\Delta$ aequalis, et in ea triangulus $KH\Theta$ triangulo $A\Gamma\Delta$ similis, ita ut etiam $KH = A\Gamma$ et omnia omnibus [Eucl. VI, 4], et in $H\Theta$ triangulus construatur rectam a uertice ad punctum medium basis rectae $K\Lambda$ aequalem habens et ad $KH\Theta$ rationem habens, quam $E : Z$ [prop. XXVI]. triangulus igitur constructus ἡ Ε πρὸς Ζ. τὸ δὴ συνιστάμενον τρίγωνον τὴν κορυφὴν ἕξει ἐπὶ τὰ τοῦ Η μέρη, ὡς δειχθήσεται. ἔστω δὴ τὸ ΜΗΘ, ὥστε τὴν ΜΗ πλευρὰν τῆς ΜΘ μείζονα εἶναι. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΑ τῇ ΑΚ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΑΗ, μείζων δὲ ἡ ὑπὸ ΚΑΗ γωνία τῆς ὑπὸ ΜΑΗ, μείζων ἄρα ἡ ΚΗ τῆς ΜΗ. ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΓΑ ἴση· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΚΘ τῆς ΜΘ ἐλάττων ἐστίν, ἡ δὲ ΜΘ τῆς ΜΗ ἐλάττων, ἡ ἄρα ΚΘ τῆς ΜΗ ἐλάττων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΗ τῆς μὲν μεγίστης τῶν ἐν τῷ κώνῳ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ΑΓ, τῆς δὲ ἐλαχίστης μείζων τῆς ΑΔ, δυνατὸν ἄρα εὐθεῖαν ἴσην τῇ ΜΗ ἀπὸ τῆς Α κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγαγεῖν, ὡς ἤδη μεμαθήκαμεν. ἤχθω δὴ καὶ ἔστω ἡ ΑΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΒΞ καὶ ἡ ΑΞ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ μὲν ΑΝ τῇ ΜΗ, ἡ δὲ ΝΒ τῇ ΗΑ, ἡ δὲ ΒΑ τῇ ΑΜ, ὅλον ἄρα τὸ ΑΝΒ τρίγωνον τῷ ΜΗΑ ἴσον ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΑΗ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΞ ἄρα τῇ ὑπὸ ΜΑΘ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΑΜ, ἡ δὲ ΒΞ τῇ ΑΘ, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΞ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΜΑΘ, ἴση ἄρα ἡ ΑΞ τῇ ΜΘ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΑΝ τῇ ΜΗ ἴση καὶ ἡ ΝΞ βάσις τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ΑΝΞ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΗΜΘ. ἀλλὰ τὸ ΗΜΘ πρὸς τὸ ΗΚΘ, τουτέστι πρὸς τὸ ΓΑΔ, λόγον ἔχει τὸν τῆς Ε πρὸς Ζ· καὶ τὸ ΑΝΞ ἄρα πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν ἡ

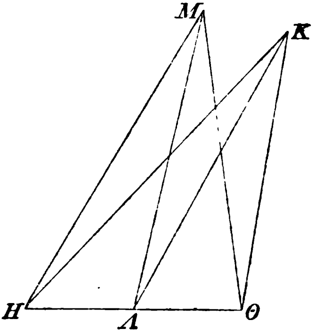
---

1. Z] τὴν Z p. τό — 2. ἕξει] ἔσται δὴ ἡ κορυφὴ τοῦ ΜΗΘ τριγώνου p. 2. ἔστω — 4. εἶναι] καὶ ἡ ΜΗ τῆς ΜΘ μείζων p. 6. ΓΑ] corr. ex ΓΒ p. 7. μείζων] ἐλάττων corr. ex ἐλάσσων p. 8. ἐλάττων (alt.) — 9. ΚΘ] καὶ ἡ ΚΘ ἄρα p.

14. ἐπεζεύχθω — καί] διὰ τοῦ Β ἤχθω ἡ ΝΒΞ καὶ ἐπεζεύχθω p. 15. ἴση] ἴση ἐστίν p. 16. ὅλον ἄρα] καί p.

17. τῷ] ἄρα τῷ p. Ante ἴσον del. τρι m. 1 c. 18. ΜΑΗ] ΜΑΗ ἴση p. ἄρα] om. p. 20. γωνία ἴση ἐστί] om. p.

uerticem ad partes H uersus habebit, ut demonstrabimus [prop. XXVIII]. sit igitur $MH\Theta$, ita ut sit latus $MH > M\Theta$. quoniam igitur $M\Lambda = \Lambda K$, et ΛH communis est, et $\angle K\Lambda H > M\Lambda H$, erit $KH > MH$ [Eucl. I, 24]. est autem $KH = \Gamma A$; quare etiam $\Gamma A > MH$. rursus quoniam $K\Theta < M\Theta$ [Eucl. I, 24] et $M\Theta < MH$, erit $K\Theta < MH$. quoniam igitur MH maxima in cono recta $A\Gamma$ [prop. XVI] minor est, minima autem $A\Delta$ maior, fieri potest, ut ab A uertice ad ambitum basis recta ducatur rectae MH aequalis, ut iam diximus [prop. XXV]. ducatur igitur sitque AN, ducanturque $NB\Xi$ et $A\Xi$. quoniam igitur $AN = MH$, $NB = H\Lambda$, $BA = \Lambda M$, erit totus triangulus $ANB = MH\Lambda$ et $\angle ABN = M\Lambda H$ [Eucl. I, 8; I, 4]; quare etiam $\angle AB\Xi = M\Lambda\Theta$ [Eucl. I, 13]. rursus quoniam $AB = \Lambda M$, $B\Xi = \Lambda\Theta$, $\angle AB\Xi = M\Lambda\Theta$, erit $A\Xi = M\Theta$ [Eucl. I, 4]. erat autem etiam $AN = MH$ et basis $N\Xi = H\Theta$; quare $\triangle AN\Xi = HM\Theta$ [Eucl. I, 8; I, 4]. uerum



$$HM\Theta : HK\Theta = E : Z = HM\Theta : \Gamma A\Delta;$$

---

21. ἄρα — $M\Theta$] καὶ ἡ $A\Xi$ ἄρα τῇ $M\Theta$ ἐστιν ἴση p. ἡ (pr.)] euan. c. 22. ἄρα] corr. ex ἄρ m. 1 V. ἄρα $AN\Xi$] $AN\Xi$ ἄρα p. $AN\Xi$] $N\Xi$ v. 23. $HM\Theta$ (pr.)] $MH\Theta$ p. $HM\Theta$ (alt.)] $MH\Theta$ τρίγωνον p. $HK\Theta$] $KH\Theta$ p. 25. Z] τὴν Z p. ἄρα] ἄρα τρίγωνον p. ὃν ἡ] τὸν τῆς p.

Ε πρὸς Ζ. ἦκται ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος τὸ ΑΝΞ τρίγωνον, ὡς ἐπιτέτακται.

κη΄.

Εἰ δέ τις λέγει, ὅτι τὸ συνιστάμενον ἐπὶ τῆς ΗΘ τρίγωνον μεῖζον ὑπάρχον τοῦ ΗΚΘ ἐπὶ τὰ τοῦ Θ μέρη τὴν κορυφὴν ἕξει, συμβήσεται ἀδύνατον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, οὕτως. ἐπεὶ οὖν ἴσαι αἱ ΚΛ, ΜΛ, κοινὴ δὲ ἡ ΛΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΜΛΗ γωνία μείζων τῆς ὑπὸ ΚΛΗ, μείζων ἄρα ἡ ΜΗ τῆς ΚΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΚΘ τῆς ΘΜ μείζων. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΜΗ τῆς ΗΚ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ΜΘ τῆς ΘΚ ἐλάττων, ἡ ἄρα ΜΗ πρὸς ΗΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΜΘ πρὸς ΘΚ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἡ ΗΜ πρὸς ΘΜ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ. ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΜΘ τοῦ ΗΚΘ· ὅπερ ἀδύνατον· ὑπέκειτο γὰρ μεῖζον. οὐκ ἄρα ἐπὶ τὰ τοῦ Θ μέρη τὴν κορυφὴν ἕξει τὸ τρίγωνον· ἐπὶ τὰ τοῦ Η ἄρα μέρη ἕξει.

κθ΄.

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τοῦ δὲ γενομένου τριγώνου ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος μὴ ἐλάττων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ

---

1. Ζ] τὴν Ζ p, ΕΖ Vc. 3. κη΄] mg. m. rec. V, om. Vcp. 4. λέγει] vc, corr. ex λέγοι m. 1 V, λέγοι p. 7. ἴσαι] ἴσαι εἰσίν p. 10. οὖν ἡ μέν] bis c. 11. ΜΘ] ΚΘ p. ΘΚ ἐλάττων] ΘΜ p. 12. πρός] τῆς p. 13. ἄρα] om. p. ΗΜ] ΜΗ p. ΘΜ] ΜΘ p. 14. ΗΚ] ΗΘ p. ἐστί] om. p. 15. ΗΜΘ] ΜΘΗ p. ΗΚΘ] ΚΗΘ p. 16. μεῖζον] V, corr. ex μείζων m. 1 c, μείζων p. τοῦ] addidi, om. Vcp. 17. τρίγωνον] ἐπὶ τῆς ΗΘ συνιστάμενον τρίγωνον μεῖζον ὂν τοῦ ΚΗΘ p. ἕξει (alt.)] om. p. 18. κθ΄] mg. m. rec. V,

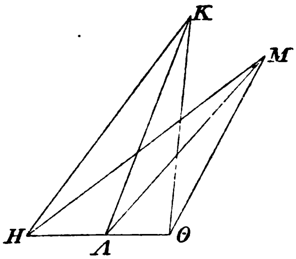
itaque etiam $A N \Xi : A \Gamma \Delta = E : Z$. ergo per axem ductus est triangulus $A N \Xi$, ut propositum est.

XXVIII.

Sin quis dicat, triangulum in $H \Theta$ constructum triangulo $H K \Theta$ maiorem ad partes Θ uersus uerticem habiturum esse, eueniet absurdum. nam, si fieri potest, ita sit. quoniam igitur $K \Lambda = M \Lambda$, communis autem ΛH, et

$$\angle M \Lambda H > K \Lambda H,$$

erit etiam $M H > K H$ [Eucl. I, 24]. eadem de causa etiam $K \Theta > \Theta M$.



buoniam igitur $M H > H K$ et $M \Theta < \Theta K$, erit $M H : H K > M \Theta : \Theta K$; quare etiam permutando

$$H M : \Theta M > H K : K \Theta \text{ [Pappus VII, 47].}$$

itaque $\triangle H M \Theta < H K \Theta$ [prop. XX]; quod fieri non potest; nam supposuimus $H M \Theta > H K \Theta$. quare triangulus ille uerticem non habebit ad partes Θ uersus; ergo eum ad partes H uersus habebit.

XXIX.

Si conus scalenus per axem plano secatur ad basim perpendiculariter, trianguliqne effecti recta a uertice ad basim perpendicularis non minor est radio basis, triangulus ad basim perpendicularis maximus erit

---

κη̄ p, om. Vc. 19. διά] p, ἐπί Vc. 21. ἐπί] euan. c. 22. τῆς (alt.)] vc, supra scr. m. 1 V, om. p. ὀρθάς] ὀ- e corr. m. 1 c.

βάσει τρίγωνον μέγιστον ἔσται πάντων τῶν ἐκτὸς τοῦ ἄξονος ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων καὶ παραλλήλους βάσεις ἐχόντων τῇ τοῦ πρὸς ὀρθὰς τριγώνου.

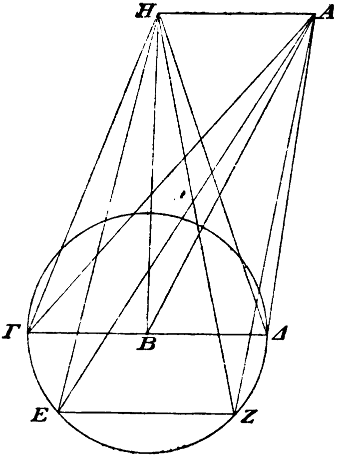
κῶνος γάρ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τετμήσθω διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος μὴ ἐλάττων ἔστω τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως. λέγω, ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων βάσεις ἐχόντων παραλλήλους τῇ ΓΔ.

διήχθω γὰρ ἐν τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΕΖ, ἐφ' ἧς τὸ ΑΕΖ τρίγωνον, ἐν δὲ τῷ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω τῇ ΓΔ ἡ ΒΗ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΗ· ἡ ΒΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΔ καθέτῳ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΓ, ΗΔ, ΗΕ, ΗΖ· νοηθήσεται δὴ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Η, ἄξων δὲ ἡ ΗΒ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἐν ᾧ τρίγωνα διὰ μὲν τοῦ ἄξονος τὸ ΗΓΔ, ἐκτὸς δὲ τοῦ ἄξονος τὸ ΗΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΗ οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, διὰ τὰ προδεδειγμένα ἄρα τὸ ΗΓΔ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΗΕΖ καὶ πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ τριγώνων βάσεις ἐχόντων παραλλήλους τῇ ΓΔ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΗΓΔ τῷ ΑΓΔ ἴσον ἐστίν· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· τὸ δὲ ΗΕΖ τῷ ΑΕΖ ἴσον· τὸ ἄρα ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ μεῖζόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ δείκ-

---

1. ἔσται] om. c. ἐκτός] p, ἐντός Vc. 18. ἡ] Vc, ὁ p, fort. recte. ΗΒ] Η e corr. p. 19. Β] p, Γ Vc. 25. καί] εἰσι καί p. 27. ΑΓΔ] vcp, ΑΓ e corr. m. 1 V.

omnium triangulorum, qui in cono extra axem construuntur basesque parallelas habent basi trianguli perpendicularis.



conus enim, cuius uertex sit *A*, basis autem circulus circum *B* centrum descriptus, per axem secetur plano triangulum *AΓΔ* efficienti ad basim coni perpendicularem, recta autem ab *A* ad *ΓΔ* perpendicularis non minor sit radio basis. dico, triangulum *AΓΔ* maximum esse omnium triangulorum, qui in cono construantur bases rectae *ΓΔ* parallelas habentes.

nam in circulo rectae *ΓΔ* parallela ducatur *EZ*, in qua triangulus *AEZ*, in plano autem trianguli *AΓΔ* ad *ΓΔ* perpendicularis erigatur *BH*, rectaeque *ΓΔ* parallela ducatur *AH*; itaque *BH* rectae ab *A* ad *ΓΔ* perpendiculari aequalis est [Eucl. I, 34]. ducantur *HΓ*, *HΔ*, *HE*, *HZ*; fingemus igitur conum, cuius uertex sit *H*, axis autem *HB*, basis autem circulus circum centrum *B* descriptus, et in eo triangulos *HΓΔ* per axem, extra axem autem *HEZ*. quoniam igitur *BH* non minor est radio, propter ea, quae antea demonstrauimus [prop. V], erit $H\Gamma\Delta > HEZ$ omnibusque in cono triangulis, qui bases habent rectae νυται, ὅτι καὶ πάντων τῶν παραλλήλους βάσεις ἐχόντων τῇ ΓΔ. τὸ ΑΓΔ ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν παραλλήλους βάσεις ἐχόντων τῇ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λʹ.

Ἐὰν δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐλάττων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ ΑΓΔ οὐκ ἔσται μέγιστον τῶν τὰς παραλλήλους τῇ ΓΔ βάσεις ἐχόντων τριγώνων· ἡ δὲ αὐτὴ δεῖξις καὶ καταγραφή.

ἐπεὶ γὰρ ἡ ΗΒ ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ ἄρα ΗΓΔ οὐκ ἔσται μέγιστον τῶν παραλλήλους αὐτῷ βάσεις ἐχόντων· ἐδείχθη γὰρ καὶ μείζονα αὐτοῦ συνιστάμενα καὶ ἐλάττονα καὶ ἴσα. εἰ μὲν οὖν ἔλαττον τὸ ΗΓΔ τοῦ ΗΕΖ, ἔλαττον ἔσται καὶ τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ, εἰ δὲ μεῖζον τὸ ΗΓΔ τοῦ ΗΕΖ, μεῖζον καὶ τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ, καὶ ἴσον ὁμοίως.

λαʹ.

Ἐὰν ἐν σκαληνῷ κώνῳ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστῇ, ὁ δὲ ἄξων τοῦ κώνου μὴ ἐλάττων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μέγιστον ἔσται πάντων τῶν ἰσοσκελῶν τῶν συνισταμένων, ἐφ᾽ ὃ μέρος προσνεύει ὁ ἄξων.

ἔστω κῶνος, οὗ ἄξων μὲν ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ περὶ

---

2. τὸ ΑΓΔ — 4. δεῖξαι] om. p. 5. λʹ] om. Vc, κθʹ p. 8. τάς] om. p. 9. ἡ — καταγραφή] ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς p. 10. γάρ] om. p. ἐλάττων] ἐλάττων ἐστί p. 12. Post γάρ add. † m. rec. V (in mg. nunc nihil comparet). καί — αὐτοῦ] αὐτοῦ καὶ μείζονα p. 16. καί] εἰ δὲ ἴσον p. 17. λαʹ] om. Vc, λʹ p et m. rec. V. 18. ἐν] p, om. Vvc. τμηθέντι] om. p.

$\Gamma\Delta$ parallelas. uerum $H\Gamma\Delta = A\Gamma\Delta$ [Eucl. I, 37] (nam in eadem basi sunt et in iisdem parallelis) et $HEZ = AEZ$ [id.]; itaque $A\Gamma\Delta > AEZ$. eodem autem modo demonstratur, eum etiam omnibus triangulis bases rectae $\Gamma\Delta$ parallelas habentibus maiorem esse. ergo $A\Gamma\Delta$ maximus est omnium triangulorum, qui bases rectae $\Gamma\Delta$ parallelas habent; quod erat demonstrandum.

XXX.

Sin recta ab A ad $\Gamma\Delta$ perpendicularis minor est radio, $A\Gamma\Delta$ maximus non erit triangulorum bases rectae $\Gamma\Delta$ parallelas habentium; demonstratio autem figuraque eadem est.

quoniam enim HB minor est radio, $H\Gamma\Delta$ maximus non erit eorum, qui bases ei parallelas habent; demonstrauimus enim [prop. XI], triangulos et maiores eo et minores et aequales construi. iam si $H\Gamma\Delta < HEZ$ erit etiam $A\Gamma\Delta < AEZ$, sin $H\Gamma\Delta > HEZ$, etiam $A\Gamma\Delta > AEZ$, et aequalis eodem modo.

XXXI.

Si in cono scaleno per uerticem planis secto in basibus parallelis trianguli aequicrurii construuntur, axis autem coni non minor est radio basis, triangulus aequicrurius per axem ductus maximus erit omnium aequicruriorum ad eam partem uersus constructorum, ad quam axis inclinatus est.

sit conus, cuius axis sit AB, basis autem circulus

---

19. ἐπιπέδοις] ἐπιπέδοις τμηθέντι p. 24. ὁ περί] vcp, suppl. m. rec. V.

τὸ Β κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ τριγώνου διὰ τοῦ ἄξονος ἠγμένου βάσις ἔστω ἡ ΓΒΔ, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἐλάττων ἔστω ὀρθῆς, ὥστε τὴν ΑΒ ἐπὶ τὰ Δ μέρη προσνεύειν, καὶ ἔστω ἡ ΑΒ μὴ ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. λέγω, ὅτι τὸ διὰ τῆς ΑΒ ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστι τῶν γινομένων ἰσοσκελῶν τριγώνων τῶν μεταξὺ τῶν Β, Δ σημείων τὰς βάσεις ἐχόντων.

εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε, καὶ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ΒΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ.

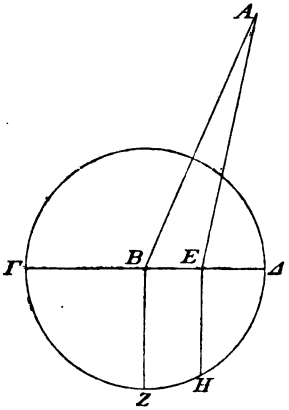
ἡ δὴ ΒΑ τῆς ΑΕ ἤτοι ἐλάττων ἐστὶν ἢ οὐκ ἔστιν ἐλάττων.

ὑποκείσθω δὴ μὴ εἶναι ἐλάττων ἡ ΒΑ τῆς ΑΕ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΑ τῆς ΑΕ οὐκ ἐλάττων, ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ΒΖ, ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΑΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΗ πρὸς ΒΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ βάσιν ἔχον τὴν διπλῆν τῆς ΒΖ, ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελές, τῷ δὲ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὴν διπλῆν τῆς ΕΗ, ὕψος δὲ τὴν ΑΕ· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μεῖζόν ἐστι τοῦ διὰ τῆς ΑΕ ἰσοσκελοῦς. ὁμοίως δὲ δείκνυται, ὅτι καὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν Β, Δ τὰς βάσεις ἐχόντων μέγιστόν ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος.

---

1. Β] p, om. Vv, euan. c. κέντρον] vcp, κέν- suppl. m. rec. V. δέ] om. c. 2. τριγώνου] om. p. ἠγμένου] ἠγμένῳ Vc, ἠγμένου τριγώνου p. 7. τῶν] om. p. 14. δή] euan. c. 17. τὸ ἄρα] bis V. 19. τό (alt.)] p, τὸ τό V, τὸ τήν c. τήν] om. c. 24. τῆς] τοῦ p. ἰσοσκελοῦς] p, ἰσοσκελές Vc. 26. τό] om. Vc, τὸ τρίγωνον τό p. διὰ τοῦ] in ras. p.

circum B centrum descriptus, trianguli autem ad circulum perpendiculariter per axem ducti basis sit $\Gamma B\Delta$, et $\angle AB\Delta$ minor sit recto, ita ut AB ad partes Δ uersus inclinata sit, et AB non minor sit radio. dico, triangulum aequicrurium per AB ductum maximum esse triangulorum aequicruriorum, qui efficiantur inter puncta B, Δ bases habentes.



sumatur in $B\Delta$ punctum aliquod E, et ad $\Gamma\Delta$ perpendiculares in circulo ducantur BZ, EH, ducaturque AE.

BA igitur recta AE aut minor est aut non minor.

iam supponatur, non esse $BA < AE$. quoniam igitur non est $BA < AE$, sed $EH < BZ$ [Eucl. III, 15], erit $AB : AE > EH : BZ$; itaque

$$AB \times BZ > AE \times EH$$

[prop. I]. uerum rectangulo $AB \times BZ$ aequalis est triangulus basim habens $2BZ$ et altitudinem AB [Eucl. I, 41], hoc est [prop. XXII] triangulus aequicrurius per axem ductus, rectangulo autem $AE \times EH$ aequalis est triangulus, qui basim habet $2EH$, altitudinem autem AE [Eucl. I, 41]; itaque triangulus aequicrurius per axem ductus maior est triangulo aequicrurio per AE ducto. similiter autem demonstratur, etiam omnium triangulorum inter B, Δ bases habentium maximum esse triangulum per axem ductum.

λβ'.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ ΒΑ τῆς ΑΕ ἐλάττων. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἤχθω ἐν τῷ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΘ ἴση οὖσα τῇ ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΕ, ΒΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΕΒ μείζων ἐστίν, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΘΒΕ· αἱ ἄρα ΘΒ, ΑΕ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσι. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ τῇ ΚΕ παράλληλος ἡ ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΘΒ τῇ ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας· ὀρθαὶ γάρ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΗ τῇ ΘΕ. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΘΒΛ, μείζων ἄρα ἡ ΘΕ τῆς ΘΛ· ἡ ΘΒ ἄρα πρὸς ΘΕ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΛ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΛ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΕ· ἡ ἄρα ΒΘ πρὸς ΘΕ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΚ πρὸς ΚΕ. ἡ δὲ ΒΚ πρὸς ΚΕ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς δείκνυται· πολλῷ ἄρα ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ. ἡ ἄρα ΒΑ πρὸς ΑΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ, τουτέστι πρὸς ΒΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΗ πρὸς ΒΖ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΕ,

---

1. λβ'] om. Vcp. 3. ΑΒΕ] corr. ex ΑΕ m. 1 c. 6. ΑΒΕ] vp, macula obscurat. V, ΒΑ c. τῆς — 7. ΑΕΒ] om. p. 7. ἐστίν (alt.)] om. c. 8. ΘΒ, ΑΕ εὐθεῖαι] ΒΘ, ΕΑ p. 9. συμπίπτουσι] συμπεσοῦνται p. τό] om. p. 11. ἴση] ἴση ἐστίν p. 12. ἴση — ΒΗ] euan. c. 13. ἡ (pr.)] ἐστιν ἡ p. 14. ΘΒ] ΒΘ p. ΘΕ] τὴν ΘΕ p. λόγον] om. c. 15. ΒΘ (pr.)] ΘΒ p, corr. ex ΘΒ m. 1 c. ΒΘ (alt.)] Β e corr. m. 1 c, corr. ex ΘΒ p. 16. ἡ ἄρα — 17. ΚΕ (pr.)] om. p. 19. δείκνυται]

XXXII.

Iam uero sit $BA < AE$. et quoniam $\angle ABE$ minor est recto, in plano trianguli ABE ad $\Gamma\Delta$ perpendicularis ducatur $B\Theta$ rectae EH aequalis, ducanturque $\Theta E, BH$. et quoniam [Eucl. I, 18] $\angle ABE > AEB$, $\angle AEB$ minor est recto. uerum $\angle \Theta BE$ rectus est; itaque rectae ΘB, AE productae concurrunt [Eucl. I *αἴτ.* 5]. concurrant in K, ducaturque per Θ rectae KE parallela $\Theta\Lambda$. quoniam igitur $\Theta B = EH$, communis autem BE, et angulos aequales comprehendunt (nam recti sunt), erit etiam $BH = \Theta E$ [Eucl. I, 4]. et quoniam $\angle \Theta B\Lambda$ rectus est, erit $\Theta E > \Theta\Lambda$ [Eucl. I, 47]; itaque [Eucl. V, 8]

$$\Theta B : \Theta E < B\Theta : \Theta\Lambda.$$

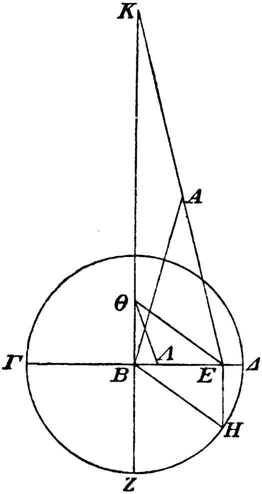
uerum $B\Theta : \Theta\Lambda = BK : KE$ [Eucl. VI, 4]; itaque

$$B\Theta : \Theta E < BK : KE.$$

est autem

$$BK : KE < BA : AE,$$

ut deinceps demonstrabitur [prop. XXXIII]; itaque multo magis $B\Theta : \Theta E < BA : AE$. quare $BA : AE > B\Theta : \Theta E$, hoc est $> EH : HB$ siue $EH : BZ$. quoniam igitur $BA : AE > EH : BZ$, erit $AB \times BZ > AE \times EH$ [prop. I]. uerum rectangulo $AB \times BZ$ aequalis est triangulus aequicrurius per



δειχθήσεται p. 20. BA (pr.) — 21. ἡ] om. p. 24. *μεῖζον*] p, σἴον Vc. τοῦ] p, τῷ Vc.

ΕΗ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ ἴσον ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελές, τῷ δὲ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ ἴσον ἐστὶ τὸ διὰ τῆς ΑΕ καὶ τῆς διπλῆς τῆς ΕΗ ἰσοσκελές· μεῖζον ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τῆς ΑΕ ἰσοσκελοῦς. ὁμοίως δὲ δείκνυται, ὅτι καὶ τῶν ἄλλων, ὧν αἱ βάσεις μεταξὺ τῶν Β, Δ· ὃ προέκειτο δεῖξαι.

λγ'.

Ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ μιᾶς τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ λοιπὴ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.

ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν Β, ἀφ' ἧς ἐπὶ τὴν ΑΓ βάσιν ἤχθω ἡ ΒΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ.

ἤχθω διὰ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΑΒ ἡ ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Ε, μείζων ἄρα ἡ ΒΔ τῆς ΔΕ· ἡ ἄρα ΒΔ πρὸς ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΓ. ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ· ἡ ἄρα ΒΔ πρὸς ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ. ὥστε φανερόν, ὅτι καὶ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ, ὃ ἐχρησίμευεν ἡμῖν εἰς τὸ πρὸ τούτου.

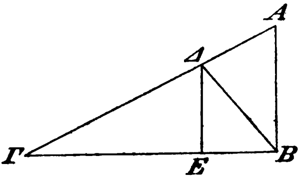
---

2. Post ἰσοσκελές add. βάσιν ἔχον τὴν διπλῆν τῆς ΒΖ p. 6. ἄλλων, ὧν] ἄλλ^{ων} m. 1 c. Δ — 7. δεῖξαι] Δ σημείων p. 8. λγ'] om. Vc, λα' p et m. rec. V. 9. ὀρθῆς] ὀρθῆς γωνίας p. 14. Β] πρὸς τῷ Β γωνίαν p. 15. ΒΔ (pr.)] ΑΔ p. ΒΔ (alt.)] Β e corr. p. 18. αἱ] om. Vc, εἰσιν αἱ p. τῷ] p, τό Vc. 20. οὕτως — 21. ΔΓ] p, om. Vc. 21. ἄρα ΒΔ] ΒΔ

axem ductus [prop. XXII; Eucl. I, 41], rectangulo autem $AE \times EH$ aequalis triangulus aequicrurius per AE et $2EH$ ductus; itaque triangulus aequicrurius per axem ductus maior est triangulo aequicrurio per AE ducto. similiter autem demonstratur, eum etiam ceteris maiorem esse, quorum bases inter B, Δ sint; quod erat demonstrandum.

XXXIII.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad latus subtendens recta aliqua ducitur, recta ducta ad rectam abscisam a recta ducta alteroque laterum rectum angulum comprehendentium maiorem rationem habebit, quam reliquum laterum rectum angulum comprehendentium ad subtendens.



sit triangulus $AB\Gamma$ rectum habens $\angle B$, a quo ad basim $A\Gamma$ ducatur $B\Delta$. dico, esse $B\Delta : \Delta\Gamma > BA : A\Gamma$.

ducatur per Δ rectae AB parallela ΔE. quoniam igitur anguli ad E positi recti sunt, erit $B\Delta > \Delta E$ [Eucl. I, 19]; itaque $B\Delta : \Delta\Gamma > E\Delta : \Delta\Gamma$ [Eucl. V, 8]. uerum $E\Delta : \Delta\Gamma = BA : A\Gamma$ [Eucl. VI, 4]; itaque $B\Delta : \Delta\Gamma > BA : A\Gamma$. ergo manifestum est, esse etiam $BA : A\Gamma < B\Delta : \Delta\Gamma$, quod in propositione praecedenti usurpauimus [p. 196, 17].

ἄρα Halley. $B\Delta$] B seq. lac. 1 litt. p, corr. Comm. 23. ἐχρησίμευεν] vcp, -μευεν suppl. m. rec. V.

λδ'.

Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τισὶν ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστῇ, ἐφ' ὃ μέρος προσνεύει ὁ ἄξων, τῶν δὲ γενομένων ἰσοσκελῶν ἓν ὁτιοῦν ἴσον ᾖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου κάθετος μείζων ἔσται τοῦ ἄξονος.

ἔστω σκαληνὸς κῶνος, οὗ κορυφὴ τὸ *Α*, ἄξων δὲ ὁ *ΑΒ* προσνεύων ἐπὶ τὰ τοῦ *Δ* μέρη, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ *Β* κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου βάσις ἔστω ἡ *ΓΒΔ*, καὶ ἤχθωσαν τῇ *ΓΔ* πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ κύκλῳ αἱ *ΒΖ*, *ΕΗ*, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ *ΑΕ*, καὶ ὑποκείσθω τὸ διὰ τῶν *ΑΕ*, *ΕΗ* ἰσοσκελὲς ἴσον εἶναι τῷ διὰ τῶν *ΑΒ*, *ΒΖ*, ὅ ἐστι τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ. λέγω, ὅτι ἡ *ΑΕ* μείζων ἐστὶ τῆς *ΑΒ*.

ἐπεὶ γὰρ τὸ διὰ τῶν *ΑΕ*, *ΕΗ* ἰσοσκελὲς ἴσον ἐστὶ τῷ διὰ τῶν *ΑΒ*, *ΒΖ*, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕ*, *ΕΗ* ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΖ*, ὡς ἄρα ἡ *ΒΖ* πρὸς *ΕΗ*, οὕτως ἡ *ΕΑ* πρὸς *ΑΒ*. μείζων δὲ ἡ *ΒΖ* τῆς *ΗΕ*· μείζων ἄρα καὶ ἡ *ΕΑ* τῆς *ΑΒ*.

λε'.

Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τισὶν ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρί-

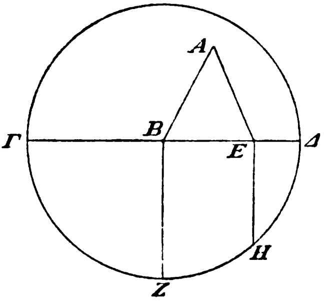
---

1. *λδ'*] om. Vc, *λβ'* p et m. rec. V. 2. *ἐάν*] vcp, suppl. m. rec. V. *ἐν*] om. Vcp, corr. Halley. 9. *προσνεύων*] *προ*$^{\sigma}$*νεύων* p. 11. *ἄξονος*] vcp, -*ος* euan. V. *ΓΒΔ*] p, *ΒΓΔ* V, *ΒΔ* c. 12. *τῷ*] euan. c. 13. *τῶν*] *τοῦ* p. 20. *μείζων*] vcp, *ζ* suppl. m. rec. V. 22. *λε'*] om. Vc, *λγ'* p et m. rec. V. 23. *ἐν*] p, om. Vc

XXXIV.

Si in cono scaleno per axem planis compluribus secto in basibus parallelis trianguli aequicrurii ad eam partem uersus construuntur, ad quam axis inclinatus est, triangulorum autem aequicruriorum ita effectorum aliquis triangulo aequicrurio per axem ducto aequalis est, recta a uertice ad basim trianguli perpendicularis maior erit axe.

sit conus scalenus, cuius uertex sit A, axis autem AB ad partes Δ uersus inclinatus, basis autem circulus circum centrum B descriptus, trianguli autem ad circulum perpendiculariter per axem ducti basis sit $\Gamma B \Delta$, ducanturque in circulo ad $\Gamma\Delta$ perpendiculares BZ, EH, et ducatur AE, supponaturque, triangulum aequicrurium per AE, EH ductum aequalem esse triangulo per AB, BZ, hoc est [prop. XXII] triangulo aequicrurio per axem ducto. dico, esse $AE > AB$.



quoniam enim triangulus aequicrurius per AE, EH ductus triangulo per AB, BZ aequalis est, et [Eucl. I, 41] $AE \times EH = AB \times BZ$, erit $BZ : EH = EA : AB$ [Eucl. VI, 16]. est autem $BZ > HE$ [Eucl. III, 15]; ergo etiam $EA > AB$.

XXXV.

Si in cono scaleno per uerticem planis compluribus secto in basibus parallelis trianguli aequicrurii ad γωνα συστῇ, ἐφ' ὃ μέρος προσνεύει ὁ ἄξων, τῶν δὲ γενομένων ἰσοσκελῶν ἓν ὁτιοῦν ἴσον ᾖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ, ὁ ἄξων τοῦ κώνου ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ νεύων ἐπὶ τὰ τοῦ Δ μέρη, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον, τοῦ δὲ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ἀγομένου τριγώνου βάσις ἔστω ἡ ΓΒΔ, τῇ δὲ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ΒΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ ὑποκείσθω τῷ διὰ τῆς ΑΒ καὶ τῆς διπλῆς τῆς ΒΖ ἀγομένῳ τριγώνῳ, τουτέστι τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ, τὸ διὰ τῆς ΕΑ καὶ τῆς διπλῆς τῆς ΕΗ ἀγόμενον ἰσοσκελὲς ἴσον εἶναι. λέγω, ὅτι ὁ ΒΑ ἄξων ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου.

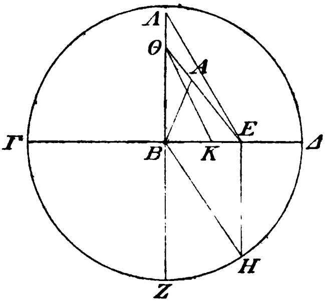
ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἤχθω ἐν τῷ τοῦ ΑΒΕ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἡ ΕΑ τῆς ΑΒ διὰ τὸ πρὸ τούτου, ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΕΑ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΘΒΕ· αἱ ἄρα ΘΒ, ΕΑ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ, τὸ δὲ διὰ τῆς ΑΕ καὶ τῆς διπλῆς τῆς ΕΗ ἰσοσκελὲς ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ, καί ἐστιν ἴσα ἀλλήλοις τὰ ἰσοσκελῆ, καὶ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς ΖΒ, τουτέστι πρὸς ΗΒ. ἐπεὶ

---

1. ὁ ἄξων] bis p, sed corr. 6. νεύων] προσνεύων p. 7. κέντρον] κέντρον κύκλος p, fort. recte. τοῦ δέ — 8. ΓΒΔ] om. p. 13. ὅτι] euan. c. 15. ἐπεί] ἐπεὶ γάρ p. ΑΒΕ] ΑΕΒ p. 17. μείζων] μείζων ἐστίν p. 22. τῷ] p, τῶν Vc. τῆς (pr.)] τῶν Vcp, corr. Halley. 26. ΗΕ] ΕΗ p.

eam partem uersus construuntur, ad quam axis inclinatus est, triangulorum autem aequicruriorum ita effectorum aliquis triangulo aequicrurio per axem ducto aequalis est, axis coni minor erit radio basis.

sit conus scalenus, cuius uertex sit A, axis autem AB ad partes Δ uersus inclinatus, basis autem circulus circum B centrum descriptus, trianguli autem ad circulum perpendiculariter per axem ducti basis sit $\Gamma B\Delta$, et ad $\Gamma\Delta$ in circulo perpendiculares ducantur BZ, EH, ducaturque AE, et supponatur, triangulo per AB et $2BZ$ ducto, hoc est [prop. XXII] triangulo aequicrurio per axem ducto, aequalem esse triangulum aequicrurium per EA et $2EH$ ductum. dico, axem BA radio minorem esse.



quoniam $\angle ABE$ minor est recto, in plano trianguli ABE ad $\Gamma\Delta$ perpendicularis ducatur $B\Theta$. et quoniam $EA > AB$ propter propositionem praecedentem [prop. XXXIV], $\angle BEA$ minor est recto [Eucl. I, 18]. uerum $\angle \Theta BE$ rectus est; itaque rectae ΘB, EA productae concurrent [Eucl. I *αἰτ.* 5]. concurrant in Θ. quoniam igitur triangulus aequicrurius per axem ductus aequalis est rectangulo $AB \times BZ$, triangulus autem aequicrurius per AE et $2EH$ ductus rectangulo $AE \times EH$ [Eucl. I, 41], et trianguli aequicrurii inter se aequales sunt, erit etiam $AB \times BZ = AE \times EH$;

οὖν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ διὰ τὸ λγʹ θεώρημα, ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ἐλάττονα μέν τινα τῆς ΘΕ, μείζονα δὲ τῆς ΘΒ. ἔστω δή, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΚ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΚΘ ἤχθω ἡ ΕΛ συμπίπτουσα τῇ ΒΘ κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΚ, τουτέστιν ἡ ΒΛ πρὸς ΛΕ, ἣν δέ, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΛ πρὸς ΛΕ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΛΒΕ, ΗΕΒ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχει· ὀρθογώνια γάρ· περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς Λ, Η τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, καὶ τῶν λοιπῶν γωνιῶν ἑκατέρα ὀξεῖα, ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ΛΒΕ, ΗΕΒ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ ΛΒ πρὸς ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς ΒΕ· ἴση ἄρα ἡ ΛΒ τῇ ΗΕ. ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· καὶ ἡ ΒΛ ἄρα ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ἡ ΕΑΒ συναμφοτέρου τῆς ΕΛΒ μείζων ἐστί, καί ἐστιν, ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΛΒ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ, καὶ συνθέντι ἄρα, ὡς συναμφότερος ἡ ΕΛΒ πρὸς ΒΛ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΕΑΒ πρὸς ΒΑ, καὶ ἐναλλάξ· μείζων δὲ συναμφότερος ἡ ΕΑΒ συναμφοτέρου τῆς ΕΛΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΛ. ἐδείχθη δὲ ἡ ΛΒ ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

2. λγʹ] Vvc, λαʹ p. 4. ΒΑ] vcp; Β macula obscur. V, mg. Β m. 1. 5. οὕτως] om. p. καί] ἤχθω δή p. Ε παρά] p, corr. ex $\overline{\epsilon\pi}$ m. 1 V (παρά comp.), Ε ἐπί vc. 6. ἤχθω] om. p. 8. ΛΕ] p, ΑΕ Vc. 9. καί — 10. ΗΒ] om. c. 9. ΒΛ] p, ΒΘ V. 12. Λ] πρὸς τοῖς Λ p. 15. ἡ (pr.)] p, om. Vc. 16. ΕΗ] ΗΕ p. 17. καί (pr.)] vcp, sustulit resarcinatio in V. ΒΛ] p, ΒΔ Vc. καί (alt.)] vcp, suppl. m. rec. V. 18. τῆς] τοῦ c. ΕΛΒ] ΕΒ p. 21. ΕΑΒ] p, ΕΒΑ Vc. 22. ΒΑ]

quare $BA : AE = HE : ZB$ [Eucl. VI, 16] $= HE : HB$. quoniam igitur propter prop. XXXIII est

$$BA : AE > B\Theta : \Theta E,$$

erit, ut $BA : AE$, ita $B\Theta$ ad rectam minorem quam ΘE, maiorem autem quam ΘB. sit igitur

$$BA : AE = B\Theta : \Theta K,$$

et per E rectae $K\Theta$ parallela ducatur $E\Lambda$ cum $B\Theta$ in Λ concurrens. quoniam igitur

$$BA : AE = B\Theta : \Theta K = B\Lambda : \Lambda E \text{ [Eucl. VI, 4]},$$

erat autem $BA : AE = EH : HB$, erit etiam

$$B\Lambda : \Lambda E = EH : HB.$$

quoniam igitur duo trianguli ΛBE, HEB unum angulum uni angulo aequalem habent (nam rectanguli sunt), et circum alios angulos Λ, H latera proportionalia, reliquorumque angulorum uterque acutus est, trianguli ΛBE, HEB similes sunt [Eucl. VI, 7]. itaque $\Lambda B : BE = HE : BE$ [Eucl. VI, 4]; quare $\Lambda B = HE$ [Eucl. V, 9]. uerum EH radio minor est [Eucl. III, 15]; quare etiam $B\Lambda$ radio minor est. et quoniam est [Eucl. I, 21] $E\Lambda + \Lambda B > EA + AB$, et $E\Lambda : \Lambda B = EA : AB$, erit etiam componendo [Eucl. V, 18] $E\Lambda + \Lambda B : B\Lambda = EA + AB : BA$ et permutando [Eucl. V, 16]; est autem

$$E\Lambda + \Lambda B > EA + AB;$$

quare etiam $\Lambda B > BA$. demonstrauimus autem, esse ΛB radio minorem; quod erat demonstrandum.

AB p. Post ἐναλλάξ add. ὡς συναμφότερος ἡ $E\Lambda B$ πρὸς συναμφότερον τὴν EAB, οὕτως ἡ $B\Lambda$ πρὸς BA p. δέ] Halley, δὲ ὁ Vc, δὲ ἡ p. 23. EAB] B e corr. p. 24. Post κέντρου add. πολλῷ ἄρα ἡ AB ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου p, fort. recte. 25. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. p.

λϛ′.

Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τισὶν ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστῇ, ἀφ’ οὗ μέρους ἀπονεύει ὁ ἄξων, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν συστάντων ἰσοσκελῶν οὐκ ἔσται πάντων ἐλάχιστον.

ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ ὁ ἄξων ὁ ΑΒ, τοῦ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ ΓΒΔ διάμετρος, ἐλάττων δὲ ἔστω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ὀρθῆς. λέγω, ὅτι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν συνισταμένων ἰσοσκελῶν τὰς βάσεις ἐχόντων μεταξὺ τῶν Γ, Β σημείων οὐ πάντων ἐλάχιστόν ἐστιν.

ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω τῇ ΓΔ ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΕ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ [ἐκ κέντρου], ἔστω ἡ ΕΖ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ παρὰ τὴν ΕΒ ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΜΗ, καὶ παρὰ τὴν ΖΕ ἡ ΗΘ· παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ ΖΘ. ἴση ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΗΘ· ἡ ἄρα ΗΘ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἴση. ἤχθωσαν δὴ πάλιν ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΚΒ, ΗΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν δύο ὀρθογώνια τὰ ΘΗΒ, ΛΒΗ ἴσας ἔχει γωνίας τὰς ὀρθάς, περὶ δὲ ἄλλας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, καὶ τὰ λοιπὰ τῆς προ-

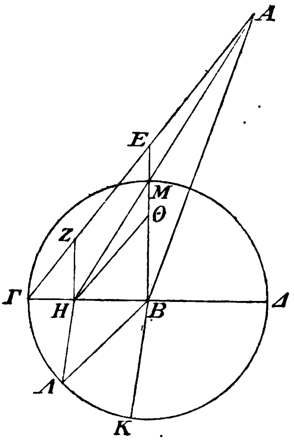
---

1. λϛ′] om. Vc, λδ′ p et m. rec. V. 2. ἐν] p, om. Vc. 7. ὁ (pr.)] κορυφὴ μὲν τὸ Α p. ὁ (alt.)] δὲ ὁ p. δέ] om c. 12. Γ, Β] Β, Γ p. 16. ἐστὶ τῆς] vcp, suppl. m. rec. V. ἐκ] τῆς ἐκ Halley. κέντρου] τοῦ κέντρου p; ἐκ κέντρου fort. delenda. 18. ἡ (pr.)] vcp, om. nunc V. ΑΜΗ] vcp, suppl. m. rec. V. 19. ἄρα (pr.)] ἄρα ἐστί p. ἄρα (sec.)] ἄρα ἐστίν p. 20. ἴση] p, om. Vc. 21. ΚΒ, ΗΛ] Halley; ΗΚΒ, ΗΛ Vc; ΒΚ, ΗΛ p. 23. τά] τό Vc, τρίγωνα τά p, corr. Halley. 24. ἄλλας] ἄλλας γωνίας p.

XXXVI.

Si in cono scaleno per uerticem planis compluribus secto in basibus parallelis trianguli aequicrurii ad eam partem uersus construuntur, a qua axis reclinatus est, triangulus aequicrurius per axem ductus minimus non erit omnium aequicruriorum constructorum.

sit conus scalenus, cuius axis sit AB, communis autem sectio plani per axem ad circulum perpendicularis circulique diametrus $\Gamma B\Delta$, et $\angle AB\Delta$ minor sit recto. dico, triangulum aequicrurium per axem ductum minimum non esse omnium aequicruriorum, qui construantur bases inter puncta Γ, B habentes.



ducatur enim $A\Gamma$, et in triangulo $AB\Gamma$ ad $\Gamma\Delta$ perpendicularis ducatur BE. et quoniam $\Gamma E > \Gamma B$, quae e centro ducta est [Eucl. I, 19], sit EZ radio aequalis, et rectae EB parallela ZH, ducaturque AMH et rectae ZE parallela $H\Theta$; parallelogrammum igitur est $Z\Theta$. quare $ZE = H\Theta$ [Eucl. I, 34]; $H\Theta$ igitur radio aequalis est. iam rursus in plano circuli ad $\Gamma\Delta$ perpendiculares ducantur KB, $H\Lambda$, ducaturque $B\Lambda$. quoniam igitur duo trianguli rectanguli ΘHB, ABH aequales habent angulos rectos, circum alios autem latera proportionalia, et cetera, quae habet protasis τάσεως, ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ ΒΛ πρὸς ΛΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΜ πρὸς ΜΒ, ἡ δὲ ΗΜ πρὸς ΜΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ, ἡ ἄρα ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. ἀλλ' ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ ΒΛ, τουτέστιν ἡ ΒΚ, πρὸς ΛΗ· ἡ ἄρα ΒΚ πρὸς ΛΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΚ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΗ, ΗΛ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μεῖζόν ἐστι τοῦ διὰ τῆς ΑΗ ἰσοσκελοῦς, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ διπλῆ τῆς ΛΗ. οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς ἐλάχιστόν ἐστι πάντων τῶν μεταξὺ τῶν Β, Γ σημείων τὰς βάσεις ἐχόντων ἰσοσκελῶν.

λζʹ.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως δύο τρίγωνα συστῇ, καὶ τοῦ μὲν ἑτέρου ἡ πλευρὰ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει, τοῦ δὲ ἑτέρου πρὸς ἀμβλεῖαν γωνίαν, τὸ δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου ὕψος μὴ ἔλαττον ᾖ τοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ὕψους, ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία τοῦ ὀρθογωνίου μείζων ἔσται τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ ἀμβλυγωνίου.

συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΑΒ τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ τρίγωνα, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ ἔστω ὀρθή, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΔ ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Δ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΔΖ μὴ ἐλάττων ἔστω τῆς ΓΒ καθέτου. λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ.

---

2. οὕτως] om. p. ΒΛ] ΛΒ p. ΗΘ] ΗΒ Vcp, corr. Comm. 3. ΘΒ] ΒΘ p. 7. ΛΗ] ΗΛ p. ΒΚ] corr. ex ΓΚ p. 8. ΛΗ] ΗΛ p. 9. τοῦ] vp, corr. ex τό m. 1 V, τό c. 10. τὸ διά — 12. οὐκ] mg. p (κείμενον). 12. ΛΗ] Λ e corr. m. 1 c. ἰσοσκελές] vcp, ἰσ- suppl. m. rec. V. 15. λζʹ] om. Vc, λεʹ p et m. rec. V; et sic deinceps.

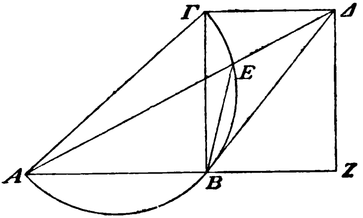
[Eucl. VI, 7], trianguli similes sunt; quare

$$H\Theta : \Theta B = B\Delta : \Delta H \text{ [Eucl. VI, 4].}$$

quoniam igitur $H\Theta : \Theta B > HM : MB$ [prop. II] et $HM : MB > H\Delta : \Delta B$,[1]) erit $H\Theta : \Theta B > H\Delta : \Delta B$. uerum $H\Theta : \Theta B = B\Delta : \Delta H = BK : \Delta H$; quare $BK : \Delta H > H\Delta : \Delta B$. itaque $\Delta B \times BK > \Delta H \times H\Delta$ [prop. I], hoc est [prop. XXII] triangulus aequicrurius per axem ductus maior est aequicrurio per ΔH ducto, cuius basis est $2\Delta H$ [Eucl. I, 41]. ergo triangulus aequicrurius per axem ductus minimus non est omnium aequicruriorum, qui bases inter puncta B, Γ habent.

XXXVII.

Si in eadem basi duo trianguli construuntur, et alterius latus ad basim perpendiculare est, alterius autem ad angulum obtusum, et altitudo trianguli obtusianguli altitudine rectanguli non minor est, angulus ad uerticem trianguli rectanguli positus maior erit angulo ad uerticem obtusianguli posito.



construantur in AB trianguli $A\Gamma B$, $A\Delta B$, et $\angle AB\Gamma$ rectus sit, $\angle AB\Delta$ autem obtusus, et recta ΔZ a Δ ad AB perpendicularis non minor sit perpendiculari ΓB. dico, esse $\angle A\Gamma B > A\Delta B$.

---

1) Nam AB maior est recta ab A ad ΓB perpendiculari.

---

22. $A\Gamma B$] $\alpha \cdot \ddot{\beta}$: $\gamma\beta$ c. 26. $A\Gamma B$] p, $AB\Gamma$ Vvc, corr. m. 2 V. $A\Delta B$] p, $A\ddot{B}\Delta$ Vvc, corr. m. 2 V.

ἐπεὶ παράλληλοι μὲν αἱ ΒΓ, ΔΖ καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΖ, οὐκ ἐλάττων δὲ ἡ ΔΖ τῆς ΓΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΓΒ γωνία οὐκ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒΓ ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἐν ἡμικυκλίῳ ἄρα ἐστίν, οὗ διάμετρος ἡ ΑΓ· περιγραφὲν ἄρα τὸ ἡμικύκλιον τεμεῖ τὴν ΑΔ. τεμνέτω δὴ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΒ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ μείζων τῆς ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ.

λη΄.

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν τοῦ ὀρθογωνίου ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία μὴ μείζων ᾖ τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων ἐπιζευγνυούσης καὶ τῆς πρὸς ἀμβλεῖαν τῇ βάσει, ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρὰ πρὸς τὴν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τοῦ ἀμβλυγωνίου ἡ τὴν ἀμβλεῖαν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ἀμβλεῖαν τῇ βάσει.

καταγεγράφθω τὰ αὐτὰ τρίγωνα, καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ μὴ μείζων τῆς ὑπὸ ΓΔΒ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ.

ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ, ὡς ἐδείχθη, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΑΒ τῆς ὑπὸ ΔΑΒ, συνεστάτω τῇ μὲν ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΑΒ ἡ ὑπὸ ΔΑΗ· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΓΒ, ΑΔΗ

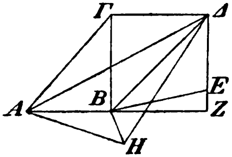
---

1. μέν] μέν εἰσιν p. ΔΖ] ΖΔ p. 3. ΔΓΒ] ΑΓΔ Halley. 7. δή] om. p. 8. μείζων] μείζων ἐστί p. 13. μή] p, om. Vvc, supra scr. m. 2 V. 14. ἐπιζευγνυούσης] ἐπιζευγνυούσας c, sed corr. m. 1. 15. ἀμβλεῖαν] cp, ἀμβλείας Vv. 20. ΑΓΒ] vcp, corr. ex ΑΓΔ m. 1 V. ΓΔΒ] p, ΓΒΔ Vvc, corr. m. 2 V. 21. ΓΒ] τὸ ΓΒ p. 22. ἐπεί] ἐπεὶ

quoniam parallelae sunt $B\Gamma$, ΔZ et ad BZ perpendiculares, ΔZ autem non minor quam ΓB, $\angle \Delta\Gamma B$ non minor est recto; itaque $A\Delta > A\Gamma$ [Eucl. I, 19]. et quoniam $AB\Gamma$ rectangulus est, in semicirculo est, cuius diametrus est $A\Gamma$ [Eucl. III, 31]; semicirculus igitur descriptus rectam $A\Delta$ secabit. secet igitur in E, ducaturque EB; itaque [Eucl. III, 27] $\angle AEB = A\Gamma B$. uerum $\angle AEB > A\Delta B$ [Eucl. I, 16]; ergo etiam $\angle A\Gamma B > A\Delta B$.

XXXVIII.

Iisdem positis si trianguli rectanguli angulus ad uerticem positus non maior est angulo comprehenso a recta uertices triangulorum coniungente rectaque cum basi angulum obtusum efficiente, latus trianguli rectanguli sub recto angulo subtendens ad latus ad basim perpendiculare minorem rationem habet, quam trianguli obtusianguli latus sub angulo obtuso subtendens ad latus cum basi angulum obtusum efficiens.



describantur iidem trianguli, et $\angle A\Gamma B$ non maior sit angulo $\Gamma\Delta B$. dico, esse $A\Gamma : \Gamma B < A\Delta : \Delta B$.

quoniam $\angle A\Gamma B > A\Delta B$, ut demonstratum est [prop. XXXVII], et $\angle \Gamma AB > \Delta AB$, construatur $\angle A\Delta H = A\Gamma B$ et $\angle \Delta AH = \Gamma AB$; itaque trianguli $A\Gamma B$, $A\Delta H$ aequianguli sunt. quare

$$\Delta A : A\Gamma = HA : AB \text{ [Eucl. VI, 4];}$$

γάϱ p. 24. ΓAB] p, $A\Gamma B$ Vvc, corr. m. 2 V. 25. ΔAH] p, $A\Delta H$ Vvc, corr. m. 2 V. $A\Delta H$] vp, H euan. V, $A\Delta$ c.

τρίγωνα [ὅμοια]. ὡς ἄρα ἡ *ΔΑ* πρὸς *ΑΓ*, οὕτως ἡ *ΗΑ* πρὸς *ΑΒ*· καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα τὸ *ΔΑΓ* τρίγωνον τῷ *ΗΑΒ* τριγώνῳ ἐπιζευχθείσης τῆς *ΒΗ*. ἡ ἄρα ὑπὸ *ΑΓΔ* γωνία τῇ ὑπὸ *ΑΒΗ* ἴση ἐστίν.

ἐπεὶ οὖν ἡ *ΔΖ* τῆς *ΓΒ* οὐκ ἔστιν ἐλάττων, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἢ μείζων.

ἔστω πρότερον ἴση· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ παραλληλόγραμμον τὸ *ΓΖ*. ἡ ἄρα ὑπὸ *ΔΓΒ* μετὰ τῶν ὑπὸ *ΓΒΔ*, *ΔΒΖ* δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ *ΓΔΒ*, τουτέστι τῆς ὑπὸ *ΔΒΖ*, οὐ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ *ΑΓΒ*· ἡ ἄρα ὑπὸ *ΒΓΔ* μετὰ τῶν ὑπὸ *ΓΒΔ*, *ΑΓΒ* οὐ μείζονές εἰσι δυεῖν ὀρθῶν, ὅ ἐστιν αἱ ὑπὸ *ΑΓΔ*, *ΓΒΔ* οὐ μείζονές εἰσι δυεῖν ὀρθῶν. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ *ΑΓΔ* ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ *ΑΒΗ*· αἱ ἄρα ὑπὸ *ΑΒΗ*, *ΓΒΔ* οὐ μείζονές εἰσι δυεῖν ὀρθῶν. προσκείσθω ἡ ὑπὸ *ΑΒΓ* ὀρθή· αἱ ἄρα ὑπὸ *ΑΒΗ*, *ΑΒΔ* οὐ μείζονές εἰσι τριῶν ὀρθῶν. λοιπὴ ἄρα εἰς τέσσαρας ὀρθὰς ἡ ὑπὸ *ΔΒΗ* οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ μιᾶς ὀρθῆς· μείζων ἄρα ἡ *ΔΗ* τῆς *ΔΒ*· ἡ ἄρα *ΑΔ* πρὸς *ΔΗ* ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ *ΑΔ* πρὸς *ΔΒ*. ἀλλ' ὡς ἡ *ΑΔ* πρὸς *ΔΗ*, οὕτως ἡ *ΑΓ* πρὸς *ΓΒ*· καὶ ἡ ἄρα *ΑΓ* πρὸς *ΓΒ* ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ *ΑΔ* πρὸς *ΔΒ*.

ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ *ΔΖ* τῆς *ΓΒ* μείζων· ἀμβλεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ *ΔΓΒ*. ἤχθω τῇ *ΓΔ* παράλληλος ἡ *ΒΘ*. κατὰ τὰ αὐτὰ δή, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ *ΔΓΒ* μετὰ τῶν ὑπὸ *ΓΒΔ*, *ΔΒΘ* δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τῆς δὲ ὑπὸ *ΔΒΘ*,

---

1. ὅμοια] deleo, καὶ ὅμοια p. ἄρα] vcp, suppl. m. rec. V. ἡ *ΗΑ* — 2. *ΑΒ*] vcp; euan. V, repet. mg. m. rec. 3. *ΗΑΒ*] *ΒΗΑ* p. 4. *ΑΒΗ*] p, *ΑΗΒ* Vvc, corr. m. 2 V.

et aequales angulos comprehendunt; itaque ducta BH trianguli $\Delta A\Gamma$, HAB similes sunt [Eucl. VI, 6]. quare $\angle A\Gamma\Delta = ABH$.

quoniam igitur ΔZ non minor est quam ΓB, aut ei aequalis est aut maior.

prius aequalis sit; itaque ΓZ parallelogrammum est rectangulum [Eucl. I, 33]. itaque

$$\angle \Delta\Gamma B + \Gamma B\Delta + \Delta BZ$$

duobus rectis aequales sunt. uerum angulo $\Gamma\Delta B$ siue ΔBZ [Eucl. I, 29] non maior est $\angle A\Gamma B$; itaque $\angle B\Gamma\Delta + \Gamma B\Delta + A\Gamma B$ non maiores sunt duobus rectis, hoc est $\angle A\Gamma\Delta + \Gamma B\Delta$ duobus rectis non maiores sunt. uerum $\angle ABH = A\Gamma\Delta$; itaque $\angle ABH + \Gamma B\Delta$ duobus rectis non maiores sunt. adiiciatur rectus angulus $AB\Gamma$; itaque $\angle ABH + AB\Delta$ non maiores sunt tribus rectis. itaque qui relinquitur ad quattuor rectos, $\angle \Delta BH$ non minor est uno recto; quare $\Delta H > \Delta B$ [Eucl. I, 19]; itaque [Eucl. V, 8] $A\Delta : \Delta H < A\Delta : \Delta B$. uerum $A\Delta : \Delta H = A\Gamma : \Gamma B$ [Eucl. VI, 4]; ergo etiam $A\Gamma : \Gamma B < A\Delta : \Delta B$.

iam uero sit $\Delta Z > \Gamma B$; $\angle \Delta\Gamma B$ igitur obtusus est. ducatur rectae $\Gamma\Delta$ parallela $B\Theta$. eadem igitur ratione, quoniam $\angle \Delta\Gamma B + \Gamma B\Delta + \Delta B\Theta$ duobus rectis aequales sunt [Eucl. I, 29; I, 32], angulo autem

---

9. $\Delta\Gamma B$] $\Gamma\Delta B$ Vcp, corr. Comm. 10. ΔBZ] Vc, ΔZB p et supra scr. m. 2 V, ΓBZ v. 11. $\Gamma\Delta B$] p, $\Gamma B\Delta$ Vvc, corr. m. 2 V. τουτέστι] τουτέστι˜ V, corr. m. 2. 13. εἰσι] om. c. δυεῖν] δύο p. 14. ὅ ἐστιν] τουτέστιν p. ὅ ἐστιν — 15. ὀρθῶν] om. c. 16. $\Gamma B\Delta$] p, $AB\Delta$ Vvc, corr. m. 2 V. 19. εἰς] εἰς τάς p. 28. ΓB (alt.)] p, $\Gamma\Delta B$ Vvc, corr. m. 2 V. 24. ἤπερ] om. c. 26. $B\Theta$] BE Halley. 28. $\Delta B\Theta$ (pr.)] ΔBE Halley. δυσίν — $\Delta B\Theta$ (alt.)] om. Vcp, corr. Halley cum Comm. (ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΔBE).

τουτέστι τῆς ὑπὸ ΓΔΒ, οὐ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΔ, τουτέστιν αἱ ὑπὸ ΑΒΗ, ΓΒΔ, οὐ μείζονές εἰσι δυεῖν ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΗ οὐ μείζονές εἰσι τριῶν ὀρθῶν. ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΒΗ οὐκ ἐλάττων ὀρθῆς ἐστι· μείζων ἄρα ἡ ΗΔ τῆς ΔΒ. ἡ ΑΔ ἄρα πρὸς ΔΗ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθʹ.

Τῶν αὐτῶν ὄντων τῶν ἄλλων ἐὰν τοῦ ὀρθογωνίου ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τοῦ ἀμβλυγωνίου ἡ τὴν ἀμβλεῖαν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ἀμβλεῖαν τῇ βάσει, ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ ὀρθογωνίου γωνία μείζων ἐστὶ τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων ἐπιζευγνυούσης καὶ τῆς πρὸς ἀμβλεῖαν τῇ βάσει.

κείσθω ἡ αὐτὴ καταγραφὴ τῶν αὐτῶν κατεσκευασμένων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ, καὶ ἡ ἄρα ΑΔ πρὸς ΔΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΗΔ τῆς ΔΒ. ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΒΗ γωνία ἐλάττων ἐστὶν

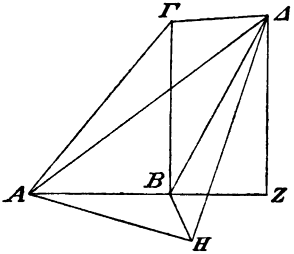
---

1. *ἡ ὑπό — 3. ὀρθῶν*] om. p lacuna relicta. 1. *ἡ ὑπό*] vc, euan. V, repet. mg. m. rec. („† sic in apographo"). *ΑΓΒ*] vc, euan. V, repet. mg. m. rec. 2. *αἱ* (alt.)] vc, euan. V, mg. m. rec. „*αἱ* — sic in apographo, sed notae et spatium plus designant". *ΑΒΗ*] v et supra scr. m. rec. V, euan. V, *ΑΒΝ* c. 5. *ἐστι*] abstulerunt uermes c. 6. Post *ΔΗ* add. Halley: *τουτέστιν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ*. *ἔχει*] om. c. 7. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. p. 9. *τῶν ἄλλων*] om. p. 12. *πρός* (alt.)] cp, om. Vv. *ἀμβλεῖαν*] cp et in ras. m. 1 v, *β* supra scr. m. 1 V. 14. *ἐστί*] *ἔσται* p. 16. *ἀμβλεῖαν*] vcp, *β* supra scr. m. 1 V.

$\Delta B\Theta$ siue [Eucl. I, 29] $\Gamma\Delta B$ non maior est $\angle A\Gamma B$, $\angle A\Gamma\Delta + \Gamma B\Delta$ siue $ABH + \Gamma B\Delta$ non maiores sunt duobus rectis; quare $\angle AB\Delta + ABH$ non maiores sunt tribus rectis. itaque ΔBH non minor est recto; quare $H\Delta > \Delta B$ [Eucl. I, 19]. ergo $A\Delta : \Delta H < A\Delta : \Delta B$ [Eucl. V, 8];[1]) quod erat demonstrandum.

XXXIX.

Ceteris iisdem positis si trianguli rectanguli latus sub angulo recto subtendens ad latus ad basim perpendiculare maiorem rationem habet, quam trianguli obtusianguli latus sub angulo obtuso subtendens ad latus cum basi angulum obtusum efficiens, angulus ad uerticem trianguli rectanguli positus maior est angulo comprehenso a recta uertices triangulorum coniungente rectaque cum basi angulum obtusum efficiente.



ponatur eadem figura iisdem praeparatis. quoniam igitur $A\Gamma : \Gamma B > A\Delta : \Delta B$, et $A\Gamma : \Gamma B = A\Delta : \Delta H$ [Eucl. VI, 4], erit etiam $A\Delta : \Delta H > A\Delta : \Delta B$; quare $H\Delta < \Delta B$ [Eucl. V, 10].

---

1) Et $A\Gamma : \Gamma B = A\Delta : \Delta H$. credo, post ΔB lin. 7 addendum esse: *ἀλλ' ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ· καὶ ἡ ἄρα ΑΓ πρὸς ΓΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ.*

---

18. *ἐπεί*] vcp, euan. V. 19. *ὡς δέ* — 21. *ΔB*] mg. p (*κείμενον*). 20. *AΔ* (alt.)] cp, *HΔ* v et fort. V (del. m. rec.), *AΔ* supra scr. m. rec. V. 22. *ΔBH*] *ΔHB* Vcp, corr. Comm. *ἐστὶν ὀρθῆς μιᾶς*] *ἐστὶ μιᾶς ὀρθῆς* p.

ὀρθῆς μιᾶς· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΗ μείζονές εἰσι τριῶν ὀρθῶν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΑΒΗ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΒΔ μείζονές εἰσι τριῶν ὀρθῶν. ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθή· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΔ δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσιν. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ μετὰ μὲν τῶν ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ δυεῖν ὀρθῶν εἰσι μείζους, μετὰ δὲ τῶν ὑπὸ ΓΔΒ, ΓΒΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ.

μʹ.

Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τισὶν ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστῇ, ἀφ' οὗ μέρους ἀπονεύει ὁ ἄξων, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων ἰσοσκελῶν οὔτε μέγιστον ἔσται πάντων οὔτε πάντων ἐλάχιστον.

ἔστω κῶνος, οὗ ὁ ἄξων ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς γωνίας τῷ κύκλῳ ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ ΓΒΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ἔστω ὀρθῆς. λέγω, ὅτι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν συνισταμένων ἰσοσκελῶν τὰς βάσεις ἐχόντων μεταξὺ τῶν Γ, Β σημείων οὔτε μέγιστόν ἐστι πάντων οὔτε ἐλάχιστον.

ὁ δὴ ἄξων ἤτοι ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἢ ἴσος αὐτῇ ἢ μείζων.

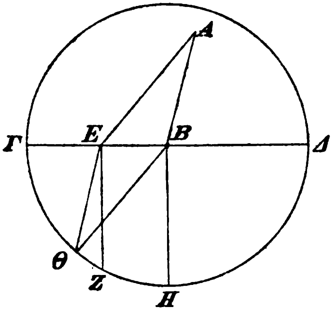
---

1. ΑΒΔ] Β e corr. p. 2. ἡ] vp, euan. V, ὁ c. ἴση] ἴση ἐστί p. 4. αἱ ἄρα] λοιπαὶ ἄρα αἱ p. 5. δύο] δυεῖν Halley. 6. δυεῖν] V et corr. ex δύο in scrib. p, δυοῖν c. 8. μείζων ἄρα ἡ] ἡ ἄρα p. 9. ΓΔΒ] ΓΔΒ μείζων ἐστί p. 11. ἐάν] vcp, ἐά- suppl. m. rec. V. 12. ἐπιπέδοις] vcp, ἐ- suppl. m. rec. V. ἰσοσκελῆ] vcp, ἰ- suppl. m. rec. V. 14. ἰσοσκελές] vcp, alt. σ euan. V. 15. πάντων (alt.)] om. p. 17. ὁ (pr.)] om. p.

itaque $\angle \Delta BH$ uno recto minor est; reliqui igitur $AB\Delta + ABH$ maiores sunt tribus rectis. uerum $\angle ABH = A\Gamma\Delta$; itaque $\angle A\Gamma\Delta + AB\Delta$ tribus rectis maiores sunt. auferatur rectus $\angle AB\Gamma$; $A\Gamma\Delta + \Gamma B\Delta$ igitur duobus rectis maiores sunt. quoniam igitur $\angle B\Gamma\Delta + A\Gamma B + \Gamma B\Delta$ duobus rectis maiores sunt, $B\Gamma\Delta + \Gamma\Delta B + \Gamma B\Delta$ autem duobus rectis aequales [Eucl. I, 32], erit $\angle A\Gamma B > \Gamma\Delta B$.

XL.

Si in cono scaleno per uerticem planis compluribus secto in basibus parallelis trianguli aequicrurii ad eam partem uersus construuntur, a qua axis reclinatus est, triangulus aequicrurius per axem ductus triangulorum aequicruriorum, uti diximus, constructorum neque omnium maximus est neque minimus omnium.



sit conus, cuius axis sit AB, basis autem circulus circum B centrum descriptus, communis autem sectio plani per axem ad circulum perpendicularis circulique sit $\Gamma B\Delta$, et $\angle AB\Delta$ minor sit recto. dico, triangulum aequicrurium per axem ductum triangulorum aequicruriorum, qui bases inter puncta Γ, B habentes construantur, neque maximum esse omnium neque minimum.

axis igitur aut minor est radio basis aut ei aequalis aut maior.

ἔστω πρῶτον ἐλάττων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἐνηρμόσθω ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τῶν Β καὶ Ε σημείων τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ΕΖ, ΒΗ, καὶ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ ΕΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΕ. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΒΘ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, κοινὴ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τοῖς λοιποῖς ἴσα· ὅμοια ἄρα τὰ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ. ἐπεὶ δὲ μείζων ἡ ΖΕ τῆς ΕΘ, ἴσαι δὲ αἱ ΒΗ, ΒΘ, ἡ ἄρα ΒΘ πρὸς ΘΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΗ πρὸς ΖΕ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ· ἡ ἄρα ΕΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΗ πρὸς ΕΖ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΕ, ΕΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΗ, τουτέστι τὸ διὰ τῆς ΑΕ ἰσοσκελές, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ διπλῆ τῆς ΕΖ, τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς μεῖζόν ἐστι· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς οὐ πάντων μέγιστόν ἐστι τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων τριγώνων. ἐδείχθη δὲ ἐν τῷ τριακοστῷ ἕκτῳ καθόλου, ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων οὔτε ἐλάχιστον.

μα΄.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ ΑΒ ἄξων ἴσος τῇ ἐκ τοῦ κέντρου.

ἡ δὴ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἐλάττων οὖσα ὀρθῆς ἤτοι ἐλάττων ἐστὶν ἡμισείας ὀρθῆς ἢ οὔ.

ἔστω πρότερον οὐκ ἐλάττων ἡμισείας, καὶ διὰ τοῦ

---

2. ἐκ (pr.)] ἐκ τῆς c. 4. ΕΖ, ΒΗ] ΗΒ, ΒΖ p. ΒΗ] p et V, sed littera Β macula obscurata, ΒΘ vc. 9. ἴσα] ἴσα εἰσίν p. 10. Ante ἡ (alt.) add. † et mg. „ἡ $\overline{εξ}$ τῆς $\overline{εθ}$ sic apograph.“ m. rec. V. ΖΕ] ΗΕ p. 11. ΒΗ] ΒΖ p.

primum sit minor. quoniam igitur AB radio minor est, radio aequalis inseratur AE, et per puncta B, E ad $\Gamma\Delta$ perpendiculares in circulo ducantur EZ, BH, anguloque AEB aequalis construatur $\angle EB\Theta$, et ducatur ΘE. quoniam igitur utraque AE, $B\Theta$ radio aequalis est, communis autem BE, et angulos aequales comprehendunt, etiam reliqua reliquis aequalia sunt [Eucl. I, 4]; trianguli igitur similes sunt. quare $EA : AB = B\Theta : \Theta E$ [Eucl. VI, 4]. quoniam autem $ZE > E\Theta$ et $BH = B\Theta$, erit [Eucl. V, 8] $B\Theta : \Theta E > BH : ZE$. uerum $B\Theta : \Theta E = EA : AB$; quare $EA : AB > BH : EZ$. itaque [prop. I]

$$AE \times EZ > AB \times BH,$$

hoc est triangulus aequicrurius per AE ductus, cuius basis est $2EZ$, maior est triangulo aequicrurio per axem ducto; itaque triangulus aequicrurius per axem ductus non est maximus omnium triangulorum, uti diximus, constructorum. demonstrauimus autem in prop. XXXVI in uniuersum, ne minimum quidem eum esse; ergo neque maximus est omnium neque minimus.

XLI.

Iam uero axis AB radio aequalis sit.

$\angle AB\Delta$ igitur, qui recto minor est, aut minor est dimidio recto aut non minor.

sit prius non minor dimidio, et per A in plano

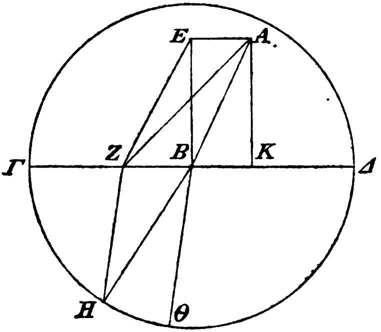
$B\Theta$ (pr.)] vcp, Θ in ras. m. rec. V, infra scr. *βϑ* m. 1?, del. m. rec. 12. BH] $B\Theta$ p. ZE] mut. in HE p. 14. BH] $B\Theta$ *τουτέστιν ἡ* BZ p. EZ] HE p. 15. EZ] EH p. *μεῖζον*] corr. ex *μείζονα* m. 1 c. BH] BZ p. 20. *ἕκτῳ*] *τετάρτῳ* p, *δευτέρῳ* Halley. 21. *μέγιστόν ἐστι*] in ras. p.

Α ἐν τῷ ὀρθῷ πρὸς τὸν κύκλον ἐπιπέδῳ παράλληλος ἤχθω τῇ ΓΒ ἡ ΑΕ καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ, ἐν δὲ τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΒΘ, ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ. ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ οὐκ ἐλάττων ἐστὶν ἡμισείας, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα οὐκ ἐλάττων ἐστὶν ἡμισείας· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΒΑ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΖΕΒ, οὐ μείζων ἐστὶν ἡμισείας· ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΑΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΖΕΒ, ΖΑΒ ἐπὶ μιᾶς βάσεως συνέστηκε, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἀγομένη, ὡς ἡ ΑΚ, οὐκ ἔστιν ἐλάττων τῆς ΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΕΒ τοῦ ὀρθογωνίου γωνία οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΑΒ, ἡ ἄρα ΖΕ πρὸς ΕΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ διὰ τὸ τριακοστὸν ὄγδοον θεώρημα. ὡς δὲ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΒΗ, τουτέστιν ἡ ΒΘ, πρὸς ΖΗ· ἴση γὰρ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου· καὶ ἡ ΒΘ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΘ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΖΗ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τῆς ΑΖ ἰσοσκελοῦς· οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν,

---

2. ΓΒ] ΔΒ p. ἡ ΑΕ καί] suppleui cum Comm., om. Vc, ἡ ΑΕ καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς ὀρθὰς ἀνήχθω ἡ ΒΕ καὶ διὰ τοῦ Ε p, ἡ ΑΕ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ Halley; et fort. plura desunt. τῇ] τῇ δέ Halley. παράλληλος] παράλληλος ἤχθω p. ἡ ΕΖ] e corr. p. 3. ΖΑ] p, ΖΔ Vc. 4. ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ] om. p. 5. οὐκ ἐλάττων] vcp, οὐκ ἐ- euan. V. ἡμισείας] ἡμισείας ὀρθῆς p. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα] vcp, καὶ ἡ ὑ- et -ρα euan. V. 7. ἡμισείας] ἡμισείας ὀρθῆς p. 8. Post μείζων rep. ἐστὶν οὐ μείζων ἐστὶν ἡμισείας ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ οὐ μείζων V, del. οὐ μείζων ἐστὶν ἡμισείας; ἐστὶν ἡμισείας ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ οὐ μείζων rep. v. ΕΑΒ] ΒΑΕ p. 9. ΖΕΒ] vcp, e corr. m. 1 V. 12. ἐστί] ἐστὶν c, sed corr. 14. ὄγδοον] ἕκτον p, τέταρτον Halley. 16. καί] om. p, ἡ ΒΕ τῇ ΖΗ καί Halley.

ad circulum perpendiculari rectae ΓB parallela ducatur AE et rectae AB parallela EZ, ducaturque ZA, in circulo autem ad $\Gamma\Delta$ perpendiculares ducantur $B\Theta$, ZH, et ducatur BH. quoniam $\angle AB\Delta$ non minor est dimidio recto, etiam $\angle BAE$ non minor est dimidio [Eucl. I, 29]; quare $\angle EBA$ siue ZEB [Eucl. I, 29] non maior est dimidio [Eucl. I, 32]; itaque $\angle ZEB$ non maior est angulo EAB. quoniam igitur duo trianguli ZEB, ZAB in eadem basi constructi sunt, et recta ab A ad $\Gamma\Delta$ perpendicularis ducta, ut AK, non minor est quam EB, angulus autem trianguli rectanguli ZEB non maior est angulo EAB, erit $ZE : EB < ZA : AB$ propter prop. XXXVIII. est autem $ZE : EB = BH : ZH = B\Theta : ZH$ [Eucl. VI, 7; VI, 4]; nam etiam EZ radio aequalis est [Eucl. I, 34]; quare etiam $B\Theta : ZH < ZA : AB$. itaque [prop. I] $AB \times B\Theta < AZ \times ZH$, hoc est triangulus aequicrurius per axem ductus minor triangulo aequicrurio per AZ ducto; itaque triangulus aequicrurius per axem ductus maximus non est omnium aequicruriorum, uti diximus, constructorum. demon-



---

17. ZH] τὴν ZH p. 18. ἤπερ] bis V. AB (pr.)] τὴν AB p. 20. ἰσοσκελὲς] p, ἰσοσκελές ἐστι Vc, ἰσοσκελὴς ἔλαττόν ἐστι Halley; fort. ἰσοσκελὲς ἔλαττον. διά] cp, διὰ τοῦ V.

ὡς εἴρηται, συνισταμένων ἰσοσκελῶν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα πάντων μέγιστόν ἐστιν οὔτε ἐλάχιστον.

μβʹ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ἡμισείας ὀρθῆς, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒΕ, καὶ κείσθω ἡ ΒΕ ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐν τῷ ὀρθῷ πρὸς τὸν κύκλον ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ καὶ ἡ ΑΕ, τῇ ΑΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΖ, τῇ δὲ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΗ, καὶ ὑποτεινέτω τὴν ὑπὸ ΖΒΗ γωνίαν ἡ ΖΗ εὐθεῖα ἴση συσταθεῖσα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ.

ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΖΒΕ, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς ἡμισείας, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ε, ἡ ἄρα ΒΕ τῆς ΕΖ μείζων. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΖΕ, ΕΒ, ὧν μεῖζον τὸ ἀπὸ ΕΒ τοῦ ἀπὸ ΖΕ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΒ ἔλαττον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΒΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΗ μεῖζον ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΖΒ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΒΗ ἔλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΒ ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΑ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΑΒ, ΒΖ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ, ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΒ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ἀπὸ ΑΒ καὶ τῷ ἀπὸ ΒΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΑ μεῖζον ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΒ.

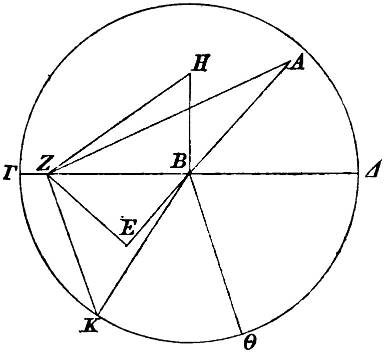
---

4. *μβʹ*] om. Vc et Halley, *μʹ* mg. p et m. rec. V. 6. *ΑΒΕ*] *ΑΒ ἐπὶ τὸ Ε* p. 8. *τῇ ΑΕ*] om. p. 9. *ΕΖ*] *ΕΖ τῇ ΑΕ* p. *ἡ*] *ἀνήχθω ἡ* p. 14. *ὀρθῆς ἡμισείας*] *ἡμισείας ὀρθῆς* p. 15. *μείζων*] *μείζων ἐστί* p. 16. *ἀπό* (pr.)] *ἀπὸ τῶν* p. *ΕΒ* (alt.)] *ΒΕ* p. 17. *ΖΕ*] *ΕΖ* p. *ἤ*] p, *ᾗ* Vc. *τοῦ*] *ἐστι τοῦ* p. 18. *ἤ*] p, *ᾗ* Vc. 23. *ἀπό*] *ἀπὸ τῶν* p.

strauimus autem, ne minimum quidem eum esse [prop. XXXVI]; ergo neque maximus est omnium neque minimus.

XLII.

Iam uero $\angle AB\Delta$ minor sit dimidio recto, producaturque ABE, et ponatur BE dimidio radio aequalis, et in plano ad circulum perpendiculari, in quo est etiam AE, ad AE perpendicularis ducatur EZ, ad $\Gamma\Delta$ autem perpendicularis BH, subtendatque sub angulo ZBH recta ZH radio aequalis constructa, ducaturque ZA.



quoniam igitur $\angle AB\Delta$ siue ZBE [Eucl. I, 15] dimidio recto minor est, rectus autem angulus ad E positus, erit $BE > EZ$ [Eucl. I, 19]. et quoniam $ZB^2 = ZE^2 + EB^2$ [Eucl. I, 47], quorum $EB^2 > ZE^2$, erit $ZB^2 < 2\,BE^2$; quare $ZH^2 > 2\,ZB^2$; itaque $ZH^2 < 2\,BH^2$ [Eucl. I, 47]. et quoniam EB dimidia est radii, erit $2\,AB \times BE = BA^2$. quoniam igitur $ZA^2 = AB^2 + BZ^2 + 2\,AB \times BE$ [Eucl. II, 12], et $2\,AB \times BE = AB^2$, erit $ZA^2 = 2\,AB^2 + BZ^2$; itaque $ZA^2 > 2\,AB^2$. demonstrauimus autem, esse

---

τό] τῷ p. 24. τῷ] τό p. 25. ἀπό (pr.)] ὑπό Vcp, corr. Comm. AB] τῶν AB, BE p. τῷ (alt.)] corr. ex τό m. 1 c.

ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ ΖΗ ἔλαττον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΗΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ· ὥστε καὶ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ. ἐὰν οὖν πάλιν ἐν τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῶσιν αἱ ΖΚ, ΒΘ, ἐπιζευχθῇ τε ἡ ΒΚ, ἡ ΒΘ πρὸς ΖΚ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς ἔλαττόν ἐστι τοῦ διὰ τῆς ΑΖ. οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων ἰσοσκελῶν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστιν οὔτε ἐλάχιστον.

μγ'.

Ἔστω δὲ νῦν ὁ ΑΒ ἄξων μείζων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐν τῷ ὀρθῷ πρὸς τὸν κύκλον ἐπιπέδῳ ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἡ ΑΕ.

ἡ δὴ ΑΕ ἤτοι ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἢ οὔ.

ἔστω πρότερον ἐλάττων, καὶ διὰ τοῦ Α παρὰ τὴν ΓΔ ἤχθω ἡ ΑΖ, διὰ δὲ τοῦ Β παρὰ τὴν ΑΕ ἡ ΒΖ, καὶ συστήτω ἡ ὑπὸ ΒΖΗ μὴ μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ ΖΑΒ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΗΑ. πάλιν ἄρα διὰ τὰ δειχθέντα ἡ ΖΗ πρὸς ΖΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΒ ἴση οὖσα τῇ ΑΕ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, μείζων δὲ ἡ ΖΗ τῆς ΖΒ, ἡ ἄρα ΖΗ ἤτοι μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἢ ἐλάττων ἢ ἴση.

---

4. ΖΗ] ΖΒ p. 5. ἐάν — 7. ΑΒ] om. p. 6. τε] δέ Halley. 10. ἐστι] om. p. 11. ἄρα] ἄρα πάντων p. 13. μγ'] om. Vc, μα' p et mg. m. rec. V; et sic deinceps. 16. ΓΔ] Δ

$ZH^2 < 2\,HB^2$; itaque $ZH^2 : HB^2 < Z\Delta^2 : \Delta B^2$; quare etiam $ZH : HB < Z\Delta : \Delta B$ [prop. XVIII]. si igitur rursus in circulo ad $\Gamma\Delta$ perpendiculares ducuntur ZK, $B\Theta$, duciturque BK, erit $B\Theta : ZK < Z\Delta : \Delta B$;[1]) itaque triangulus aequicrurius per axem ductus minor est triangulo per ΔZ ducto [prop. I; Eucl. I, 41]. itaque triangulus aequicrurius per axem ductus maximus non est omnium aequicruriorum, uti diximus, constructorum. demonstrauimus autem, ne minimum quidem eum esse [prop. XXXVI]; ergo neque maximus est neque minimus.

XLIII.

Iam uero axis AB maior sit radio, et in plano ad circulum perpendiculari ad $\Gamma\Delta$ perpendicularis ducatur AE.

AE igitur aut minor est radio aut non minor.

prius sit minor, et per A rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducatur AZ, per B autem rectae AE parallela BZ, construaturque $\angle BZH$ angulo ZAB non maior, et ducatur HA. rursus igitur propter ea, quae demonstrauimus [prop. XXXVIII], $ZH : ZB < HA : AB$. quoniam igitur ZB, quae aequalis est rectae AE [Eucl. I, 34], minor est radio, et $ZH > ZB$ [Eucl. I, 19], ZH aut maior est radio aut minor aut aequalis.

---

[1]) Nam $\triangle\ ZHB$, ΓKB similes sunt (Eucl. VI, 7); itaque $BK : KZ = ZH : BH$. et $BK = B\Theta$.

---

e corr. p. 17. δή] p, δέ Vc. ἐστί] ἐστῖ extr. lin. V, ἐστιν v. 20. AZ] cp, corr. ex $A\Delta$ m. 1 V, $A\Delta$ v. 25. μείζων] μεῖζον c, sed corr. ZH] HZ p. 26. ZH] HZ p. 27. ἢ ἴση] p, ἴση Vc.

ἔστω πρῶτον ἴση.

ἐὰν οὖν πάλιν, τὸ εἰωθός, ἐν τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἀγάγωμεν τὰς ΗΔ, ΜΒ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΒΔ, διὰ τὰ δειχθέντα πολλάκις ἡ ΗΔ πρὸς ΔΒ μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ΒΜ πρὸς ΗΔ· ὥστε καὶ τὸ διὰ τῶν ΔΗ, ΗΔ ἰσοσκελὲς μεῖζόν ἐστι τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς.

εἰ δὲ ἡ ΖΗ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἡ ΗΝ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΔ πρὸς ΔΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ, ἡ δὲ ΗΖ πρὸς ΖΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΝ πρὸς ΝΒ, καὶ ἡ ἄρα ΗΔ πρὸς ΔΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΝ πρὸς ΝΒ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΜ πρὸς ΗΔ. καὶ οὕτως τὸ διὰ τῆς ΔΗ ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς μεῖζον ἔσται.

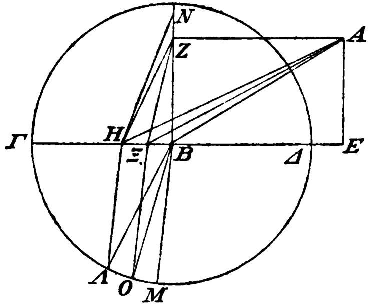
εἰ δὲ ἡ ΖΗ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, διήχθω ἡ ΖΞ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΞΖΒ οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΖΔΒ, ἐπιζευχθεῖσα ἄρα ἡ ΞΔ πρὸς ΔΒ μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ΞΖ πρὸς ΖΒ. ὡς δὲ ἡ ΞΖ πρὸς ΖΒ, οὕτως ἡ ΒΜ πρὸς ΞΟ· ἡ ἄρα ΞΔ πρὸς ΔΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΜΒ πρὸς ΞΟ. τὸ ἄρα διὰ τῶν ΔΞ, ΞΟ ἰσοσκελὲς μεῖζόν ἐστι τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς· οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς πάντων μέγιστόν ἐστι τῶν εἰρημένων ἰσοσκελῶν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ

---

2. τό] κατὰ τό Halley. 3. ὀρθάς] vcp, euan. V, „·:· ὀρθάς apogr.“ mg. m. rec. ΜΒ] ΒΜ p. 10. ἡ (pr.)] bis V. 11. ἤπερ] εἴπερ c. 12. καὶ ἡ ἄρα ΗΔ] in ras. p. 13. ΝΒ] p, ΗΒ Vc. 14. καί] fort. ὥστε καί. τῆς ΔΗ] τῶν ΔΗ, ΗΔ Halley cum Comm. τοῦ (pr.)] p, τό Vc. 15. ἔσται] ἐστι comp. p. 17. ΖΞ] vcp, corr. ex ΖΖ m. 1 V. 19. ἕξει] -ξ- e corr. c. 21. ἡ ἄρα — 22. πρὸς ΞΟ] om. p.

primum aequalis sit.

si igitur rursus solita ratione in circulo ad $\Gamma\Delta$ perpendiculares duxerimus $H\Lambda$, MB, duxerimusque $B\Lambda$, propter ea, quae iam saepe demonstrauimus [uelut p. 224, 5 sq.], erit $H\Lambda : \Lambda B > BM : H\Lambda$; quare etiam triangulus aequicrurius per AH, $H\Lambda$ ductus maior est triangulo aequicrurio per axem ducto [prop. I; Eucl. I, 41].



sin ZH minor est radio, sit HN radio aequalis. quoniam igitur $HA : AB > HZ : ZB$ [prop. XXXVIII], et $HZ : ZB > HN : NB$ [prop. II], erit etiam $HA : AB > HN : NB$, hoc est $> BM : H\Lambda$ [Eucl. VI, 7; VI, 4]. ergo sic quoque triangulus aequicrurius per AH ductus triangulo aequicrurio per axem ducto maior erit [prop. I; Eucl. I, 41].

sin ZH radio maior est, ducatur $Z\Xi$ radio aequalis. quoniam igitur $\angle\, \Xi ZB$ non maior est angulo ZAB, ducta recta ΞA erit $\Xi A : AB > \Xi Z : ZB$ [prop. XXXVIII]. est autem $\Xi Z : ZB = BM : \Xi O$ [Eucl. VI, 7; VI, 4]; itaque $\Xi A : AB > MB : \Xi O$. quare triangulus aequicrurius per $A\Xi$, ΞO ductus maior est triangulo aequicrurio per axem ducto; itaque triangulus aequicrurius per axem ductus maximus non est omnium aequicruriorum, quos diximus. demonstrauimus autem [prop. XXXVI], ne minimum ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων οὔτε ἐλάχιστον.

μδʹ.

Ἔστω δὴ ἡ ΑΕ κάθετος μὴ ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ ΖΒ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ ΑΘ, καὶ συστήτω ἡ ὑπὸ ΒΘΗ μὴ μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ ΘΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ. ἕξει δὴ πάλιν διὰ τὰ δειχθέντα ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ ἐλάττονα λόγον ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΒ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, μείζων δὲ ἡ ΘΗ τῆς ΘΒ, ἡ ΘΗ ἄρα ἤτοι ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἢ ἐλάσσων ἢ μείζων.

ἔστω πρῶτον ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΗΚ, ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, ὡς δὲ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ ΒΛ πρὸς ΗΚ, ἡ ἄρα ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΛ πρὸς ΗΚ· μεῖζον ἄρα τὸ διὰ τῆς ΑΗ τρίγωνον ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς.

εἰ δὲ ἡ ΘΗ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΗΜ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, ἡ δὲ ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα ἤπερ ἡ ΗΜ πρὸς ΜΒ, ἡ ἄρα ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΜ πρὸς ΜΒ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΛ πρὸς ΗΚ. ὥστε καὶ

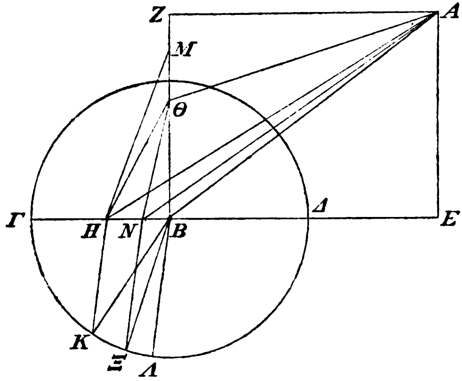
---

11. ΘΗ (pr.)] ΗΘ p. ἴση] c, bis V, ἐλάσσων p. 12. τῇ] τῆς p. ἐλάσσων] ἴση p. 13. κέντρου] p, κέντρου ἢ ἐλάσσων ἢ μείζων Vc. 14. αἱ] corr. ex ἡ p. 15. ἡ (pr.)] corr. ex αἱ m. 1 c. ΗΑ] p, ΝΑ Vc. 17. ἡ ἄρα — 18. ΗΚ] om. p. 23. μείζονα] μείζονα λόγον ἔχει p. 24. ἡ ἄρα — 25. ΜΒ] om. p.

quidem eum esse; ergo neque maximus est omnium neque minimus.

XLIV.

Iam uero perpendicularis AE radio non minor sit, ZB autem radio aequalis, ducaturque AZ, et producatur recta aliqua $A\Theta$, construaturque $\angle B\Theta H$ non maior angulo ΘAB, et ducatur HA. rursus igitur propter ea, quae demonstrauimus [prop. XXXVIII], erit $H\Theta : \Theta B < HA : AB$. et quoniam ΘB minor est radio, et $\Theta H > \Theta B$ [Eucl. I, 19], ΘH aut aequalis est radio aut minor aut maior.



primum radio aequalis sit, ducanturque in circulo ad $\Gamma\Delta$ perpendiculares HK, $B\Lambda$. quoniam igitur [prop. XXXVIII]

$$HA : AB > H\Theta : \Theta B,$$

et $H\Theta : \Theta B = B\Lambda : HK$ [Eucl. VI, 7; VI, 4], erit $HA : AB > B\Lambda : HK$; itaque triangulus aequicrurius per AH ductus maior est triangulo aequicrurio per axem ducto [prop. I; Eucl. I, 41].

sin ΘH radio minor est, sit HM radio aequalis. quoniam igitur $HA : AB > H\Theta : \Theta B$, et

$$H\Theta : \Theta B > HM : MB \text{ [prop. II]},$$

οὕτω μεῖζον τὸ διὰ τῆς ΗΑ ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς.

εἰ δὲ μείζων ἡ ΗΘ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἡ ΘΝ ἐνηρμοσμένη ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΑ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ πάλιν πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ ἡ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΝΘΒ οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΘΑΒ, ἡ ἄρα ΝΘ πρὸς ΘΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΝΑ πρὸς ΑΒ. ὡς δὲ ἡ ΝΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΝΞ· ἡ ἄρα ΒΑ πρὸς ΝΞ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΝΑ πρὸς ΑΒ. μεῖζον ἄρα τὸ διὰ τῆς ΑΝ ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς οὐ πάντων μέγιστόν ἐστι τῶν εἰρημένων ἰσοσκελῶν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων οὔτε ἐλάχιστον.

με΄.

Παντὸς κώνου σκαληνοῦ δυνάμει ἀπείρων ὄντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰς βάσεις τῶν τριγώνων ἀγόμεναι κάθετοι πᾶσαι ἐπὶ ἑνὸς κύκλου περιφέρειαν πίπτουσιν ὄντος τε ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ περὶ διάμετρον τὴν ἐν τῷ εἰρημένῳ ἐπιπέδῳ ἀπολαμβανομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τοῦ τε κέντρου τῆς βάσεως καὶ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καθέτου.

ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, καὶ ἄξων ὁ ΑΒ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ, τῇ δὲ ΓΒ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΒ, τυχοῦσαι δὲ

---

1. τοῦ (pr.)] τό c. 3. ἐκ τοῦ] bis V. 8. ὡς δέ — 10. ΑΒ] mg. p (κείμενον). 21. ὄντος] ὄντες Vc, ὄντι p, corr.

erit $HA : AB > HM : MB$, hoc est [Eucl. VI, 7; VI, 4] $> B\Delta : HK$. quare sic quoque triangulus aequicrurius per HA ductus maior est triangulo aequicrurio per axem ducto [prop. I; Eucl. I, 41].

sin $H\Theta$ radio maior est, inserta sit ΘN radio aequalis, ducaturque NA, et in circulo rursus ad $\Gamma\Delta$ perpendicularis $N\Xi$. quoniam igitur $\angle N\Theta B$ non maior est angulo ΘAB, erit $N\Theta : \Theta B < NA : AB$ [prop. XXXVIII]. uerum $N\Theta : \Theta B = B\Delta : N\Xi$ [Eucl. VI, 7; VI, 4]; itaque $B\Delta : N\Xi < NA : AB$. itaque triangulus aequicrurius per AN ductus maior est triangulo aequicrurio per axem ducto; triangulus igitur aequicrurius per axem ductus maximus non est omnium, quos diximus, aequicruriorum. demonstrauimus autem [prop. XXXVI], ne minimum quidem eum esse; ergo neque maximus est omnium neque minimus.

XLV.

Triangulis per axem cuiusuis coni scaleni potentia infinitis rectae a uertice coni ad bases triangulorum perpendiculares ductae omnes in ambitum unius circuli cadunt, qui in eodem plano basis coni descriptus est et circum diametrum rectam in plano illo inter centrum basis rectamque a uertice ad planum perpendicularem abscisam.

sit conus scalenus, cuius uertex sit punctum A, basis autem circulus circum B centrum descriptus, et axis AB, ab A autem ad planum basis perpendicularis $A\Gamma$, ducaturque ΓB, et ad ΓB perpendicularis

---

Halley cum Comm. 27. *τό*] p, om. Vc. 29. ΔB] Vc, ΔBE p, ΔE Halley, *bd* Comm.

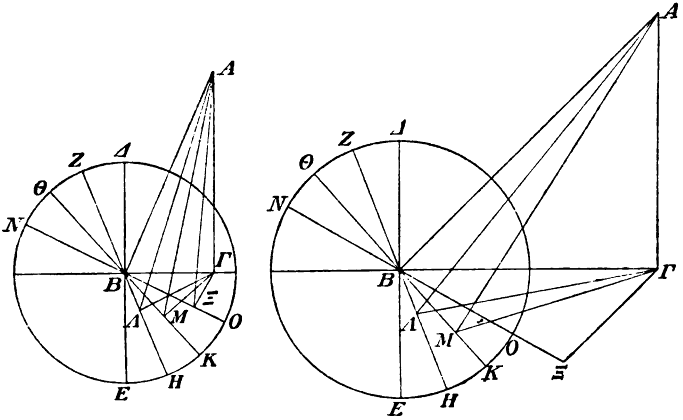
αἱ ΖΗ, ΚΘ· γίνονται δὴ αἱ ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ βάσεις τριγώνων διὰ τοῦ ἄξονος ἠγμένων. ἤχθωσαν οὖν κάθετοι ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὰς ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ εὐθείας αἱ ΑΒ, ΑΛ, ΑΜ· ὅτι γὰρ ὁ μὲν ΑΒ ἄξων πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΔΕ, αἱ δὲ ΑΛ, ΑΜ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΒΗ, ΒΚ μέρη πίπτουσιν, ἑξῆς δειχθήσεται. λέγω δή, ὅτι τὰ Β καὶ Λ καὶ Μ σημεῖα ἐπὶ ἑνὸς κύκλου περιφερείας ἐστίν, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ εὐθεῖα.

ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΛ, ΓΜ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΛ κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΛΑ γωνία. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΑΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, ὀρθαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΓΛ, ΑΓΜ γωνίαι· ὥστε ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῖς ἀπὸ ΒΛ, ΛΑ ἴσον, τὸ δὲ ἀπὸ ΛΑ τοῖς ἀπὸ ΛΓ, ΓΑ ἴσον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῖς ἀπὸ ΒΛ, ΛΓ, ΓΑ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τοῖς ἀπὸ ΒΓ, ΓΑ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΓ, ΓΑ τοῖς ἀπὸ ΒΛ, ΛΓ, ΓΑ ἴσα ἐστί. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΓΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΒΛ, ΛΓ· ὀρθὴ ἄρα

---

1. *αἱ* (pr.)] *διήχθωσαν διὰ τοῦ Β αἱ* p. *ΚΘ*] *ΘΚ* p. *δή*] *δέ* c. *βάσεις*] cp, corr. ex *βάσις* m. 1 V, *βάσις* v. 4. *γὰρ ὁ μέν*] *μὲν οὖν ὁ* p. 6. *μέρη*] *μέρη τῶν ΖΗ, ΘΚ* p. *πίπτουσιν*] *πιπίπτουσιν* V. 8. *ἐστίν*] *εἰσίν* p. *εὐθεῖα*] om. p. 9. *ΓΛ*] p, *ΓΑ* Vcv. 10. *κάθετος*] *κάθετός ἐστιν* p. *ἄρα*] vcp, -*α* suppl. m. rec. V. *ἐστίν*] vcp, *ἐστί*- euan. V, † *ἐστιν* mg. m. rec. *ΖΛΑ*] p, *ΖΑΛ* Vc. 11. *ἐπεί*] e corr. p. 12. *ὀρθαί*] *ὀρθή* p. *αἱ* — 13. *γωνίαι*] *ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΛ, ΑΓΜ ὀρθή ἐστιν* p. 12. *ΑΓΒ*] *ΑΓΔ* V et *Α* euan. c, corr. Comm. 13. *τοῖς*] *ἴσον ἐστὶ τοῖς* p. *ἀπό* (alt.)] *ἀπὸ τῶν* p, ut semper fere. 14. *ΛΑ* (pr.)] *Α* e corr. p. *ἴσον*] om. p. *ἀπό* (pr.)] *ἀπὸ τῆς* p. *ΛΓ*] *Γ* sustulit lacuna in c. *ΓΑ*] p, *ΛΑ* Vc. *ἴσον*] om. p. 15. *ΑΒ*] *ΒΑ* p. *ΓΑ*] p, *ΛΑ* Vc. 16. *ἐστίν*] *ἐστῖ*⁻ c. *τοῖς*] bis p, sed corr. 17. *ΒΓ*] scripsi, *τῆς ΒΓ* Vcp. *τοῖς*] *ἴσα εἰσὶ τοῖς* p. *ΓΑ*] p, *ΛΑ* Vc. 18. *ἴσα ἐστί*] om. p. 19. *τοῖς*] scripsi, *τῷ* Vcp. *ἄρα*] *ἄρα ἐστίν* p.

a B in eodem plano ducatur ΔB, aliae autem quaelibet ZH, $K\Theta$; rectae igitur ΔE, ZH, ΘK bases fiunt triangulorum per axem ductorum. ducantur igitur ab A ad rectas ΔE, ZH, ΘK perpendiculares AB, $A\Lambda$, AM; nam axem AB ad ΔE perpendicularem esse, $A\Lambda$ et AM uero perpendiculares ad partes BH, BK uersus cadere, deinceps demonstrabimus [prop. XLVI]. dico, puncta B, Λ, M in unius circuli ambitu esse, cuius diametrus sit recta $B\Gamma$.



ducantur $\Gamma\Lambda$, ΓM. quoniam igitur $A\Lambda$ ad ZH perpendicularis est, $\angle Z\Lambda A$ rectus est. rursus quoniam $A\Gamma$ ad planum basis perpendicularis est, anguli $A\Gamma B$, $A\Gamma\Lambda$, $A\Gamma M$ recti sunt [Eucl. XI def. 3]; quare quoniam $AB^2 = B\Lambda^2 + \Lambda A^2$ et $\Lambda A^2 = \Lambda\Gamma^2 + \Gamma A^2$ [Eucl. I, 47], erit $AB^2 = B\Lambda^2 + \Lambda\Gamma^2 + \Gamma A^2$. uerum etiam [Eucl. I, 47] $BA^2 = B\Gamma^2 + \Gamma A^2$; quare $B\Gamma^2 + \Gamma A^2 = B\Lambda^2 + \Lambda\Gamma^2 + \Gamma A^2$. auferatur, quod commune est, ΓA^2; reliquum igitur $B\Gamma^2 = B\Lambda^2 + \Lambda\Gamma^2$;

ἡ ὑπὸ ΒΛΓ γωνία ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ ΒΜ, ΜΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΜΑ ἴσον τοῖς ἀπὸ ΜΓ, ΓΑ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΒΜ, ΜΓ, ΓΑ. ἐπεὶ δὲ καὶ τοῖς ἀπὸ ΒΓ, ΓΑ ἴσον, τὸ ἄρα ἀπὸ ΒΓ ἴσον τοῖς ἀπὸ ΒΜ, ΜΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΜΓ γωνία ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ. τὰ ἄρα Λ, Μ σημεῖα ἐπὶ περιφερείας ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. ὁμοίως οὖν, κἂν ὁσασοῦν ἀγάγωμεν, ὃν εἰρήκαμεν τρόπον, ὥσπερ οὖν καὶ τὴν ΝΟΞ, τὸ αὐτὸ συμβαῖνον δειχθήσεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μϛʹ.

Ὅτι δὲ ὁ μὲν ΑΒ ἄξων πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΔΕ, αἱ δὲ ΑΛ, ΑΜ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΒΗ, ΒΚ μέρη πίπτουσιν, οὕτω δεικτέον.

ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΑΔ, ΑΕ, ἔσται τὸ ΔΑΕ τρίγωνον ἰσοσκελές, καὶ διὰ τοῦτο ἡ διὰ τῆς διχοτομίας τῆς βάσεως καὶ τῆς Α κορυφῆς ἀγομένη πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ ΔΕ. ἐπεζεύχθωσαν δὴ καὶ αἱ ΓΖ, ΓΗ, ΑΖ, ΑΗ. ἐπεὶ οὖν ἀμβλεῖα μὲν ἡ ὑπὸ ΖΒΓ γωνία, ὀξεῖα δὲ ἡ ὑπὸ ΓΒΗ, μείζων ἄρα ἡ ΖΓ τῆς ΓΗ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΗ μεῖζον. καὶ

---

2. ἴσον] ἴσον ἐστί p. 3. ἴσον] ἴσον ἐστί p. 4. ΑΒ] τῆς ΑΒ p. ἐπεὶ δὲ καί] ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστί p. 5. ἴσον (pr.)] τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΜ, ΜΓ, ΓΑ· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ p. ἴσον (alt.)] ἴσον ἐστί p. 6. καί] ἐστίν p. 7. τά] p, τό Vc. Λ, Μ] scripsi; Λ, Β, Μ Vc; Β, Λ, Μ p et Comm.; Β, Λ, Μ, Γ Halley. 8. οὗ] p, om. Vc. 9. ΒΓ] ΓΒ p. ὃν εἰρήκαμεν] om. p. 10. οὖν καί] om. Halley. ΝΟΞ] ΝΞΟ p. 11. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. p. 13. ὅτι] cp et ὅ- in ras. m. 1 v, ὅ- sustulit

itaque $\angle B\Lambda\Gamma$ in plano basis rectus est [Eucl. I, 48]. rursus quoniam $AB^2 = BM^2 + M\Lambda^2$ et

$$M\Lambda^2 = M\Gamma^2 + \Gamma\Lambda^2 \text{ [Eucl. I, 47],}$$

erit $AB^2 = BM^2 + M\Gamma^2 + \Gamma\Lambda^2$. quoniam autem etiam $AB^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Lambda^2$ [Eucl. I, 47], erit

$$B\Gamma^2 = BM^2 + M\Gamma^2;$$

quare etiam $\angle BM\Gamma$ in plano basis rectus erit [Eucl. I, 48]. ergo puncta Λ, M in ambitu sunt eiusdem circuli, cuius diametrus est $B\Gamma$ [Eucl. III, 31]. similiter igitur, quotcunque duxerimus eo, quo diximus, modo, uelut $NO\Xi$,[1]) idem adcidere demonstrabimus; quod erat demonstrandum.

XLVI.

Axem autem AB ad ΔE perpendicularem esse, et $A\Lambda$, AM perpendiculares ad BH, BK partes uersus cadere, sic demonstrandum.

si enim $A\Delta$, AE duxerimus, triangulus ΔAE aequicrurius erit [prop. XXII], et ideo recta per punctum medium basis uerticemque Λ ducta ad ΔE perpendicularis erit [Eucl. I, 8; I def. 10]. ducantur igitur ΓZ, ΓH, AZ, AH. quoniam igitur $\angle ZB\Gamma$ obtusus est, acutus autem $\angle \Gamma BH$, erit $Z\Gamma > \Gamma H$ [Eucl. I, 24] et $Z\Gamma^2 > \Gamma H^2$. quare etiam communi

---

1) Itaque alteram figuram solam respicit.

---

lacuna in V, mg. m. rec.: „† ἔτι in apographo. puto legendum ὅτι $\overset{\tau}{M}$“; ἔτι w. AB — ἐστι] sine necessitate rep. mg. m. rec. V. 19. αἱ] vcp, ins. m. 1 V. 20. μέν] μέν ἐστιν p. 21. $Z\Gamma$] $\Xi\Gamma$ c.

κοινοῦ ἄρα προστεθέντος τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΑ τῶν ἀπὸ τῶν ΗΓ, ΓΑ μείζονά ἐστι, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΑ τοῦ ἀπὸ ΑΗ μεῖζόν ἐστι· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΑ τῆς ΑΗ. ἐπεὶ οὖν αἱ μὲν ΖΒ, ΒΗ ἴσαι, κοινὴ δὲ ἡ ΒΑ, μείζων δὲ ἡ ΖΑ τῆς ΑΗ, ἡ μὲν ἄρα ὑπὸ ΖΒΑ γωνία ἀμβλεῖά ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ ὀξεῖα· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ ἐπὶ τὰ ΒΗ μέρη πίπτει. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

* * *

Ὥστε φανερόν, ὅτι αἱ προειρημέναι κάθετοι ἀπὸ μετεώρου τοῦ Α σημείου ἐπὶ κύκλου περιφέρειαν πίπτουσαι κατὰ ἐπιφανείας οἰσθήσονται κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ ὑπὸ τῶν πτώσεων τῶν καθέτων γραφόμενος κύκλος, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ ἐξ ἀρχῆς κώνῳ.

μζ΄.

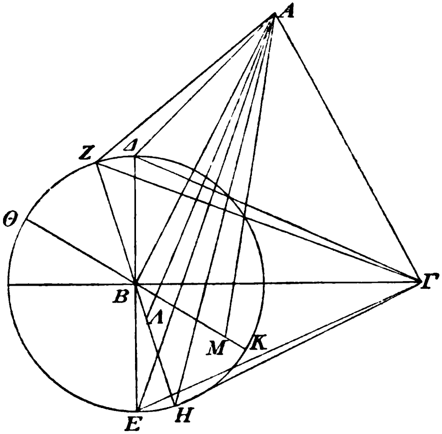
Ἐν κώνῳ σκαληνῷ δοθέντος τινὸς τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων, ὃ μήτε μέγιστόν ἐστι μήτε ἐλάχιστον, εὑρεῖν ἕτερον τρίγωνον διὰ τοῦ ἄξονος, ὃ μετὰ τοῦ δοθέντος ἴσον ἔσται συναμφοτέρῳ τῷ μεγίστῳ καὶ τῷ ἐλαχίστῳ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος.

ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἄξων

---

1. ἄρα] om. p. προστεθέντος] p, προτεθέντος Vc. τά] scripsi, τό Vcp. 2. ΗΓ] vp, Η euan. V, ΝΓ c. μείζονα] p, μεῖζον Vc. 3. ΖΑ] τῆς ΑΖ p. ΑΗ] τῆς ΖΗ p. 4. ΒΗ] ΑΗ Vcp, corr. Comm. ἴσαι] ἴσαι εἰσί p. 6. ἐστιν] γωνία ἐστίν p. 9. ὅτι] cp, om. v, ὅ τι V supra scr. + ὅτι m. rec. 10. -ου τοῦ] e corr. p. 11. οὗ] p, om. Vc. 15. ἐν — p. 238, 15. συναμφότερος] bis c (c^1 c^2). 15. τινός] om. c^1. 17. διά] bis V. 20. Α] πρῶτον c^2.

adiecto $A\Gamma^2$ erunt $Z\Gamma^2 + \Gamma A^2 > H\Gamma^2 + \Gamma A^2$, hoc est $ZA^2 > AH^2$ [Eucl. I, 47]; itaque etiam $ZA > AH$. quoniam igitur $ZB = BH$, et BA communis est, uerum $ZA > AH$, $\angle ZBA$ obtusus est, $\angle ABH$ autem acutus [Eucl. I, 25]; ergo recta ab A ad ZH perpendicularis ad partes BH uersus cadit. similiter autem etiam de ceteris demonstrabitur.



Quare manifestum est, rectas illas perpendiculares, quae a puncto A sublimi ad ambitum circuli cadant, per superficiem coni ferri, cuius basis sit circulus punctis, in quae cadant perpendiculares, descriptus, uertex autem idem, qui coni ab initio positi.

XLVII.

In cono scaleno dato aliquo triangulorum per axem ductorum, qui neque maximus est neque minimus, alium triangulum per axem ductum inuenire, qui una cum dato aequalis sit simul maximo minimoque eorum, qui per axem ducuntur.

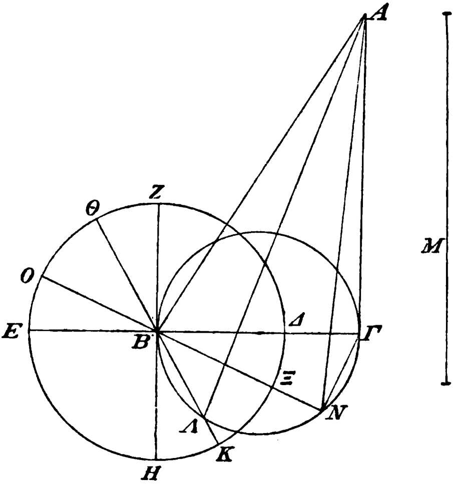
sit conus scalenus, cuius uertex sit A punctum, δὲ ὁ *ΑΒ*, καὶ ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον κάθετος ἡ *ΑΓ*, καὶ διὰ τοῦ *Γ* καὶ τοῦ *Β* κέντρου διήχθω ἡ *ΓΔΒΕ* εὐθεῖα, ᾗ πρὸς ὀρθὰς ἡ *ΖΒΗ*· τῶν ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων μέγιστον μὲν ἔσται, ὡς ἐδείχθη πολλάκις, οὗ βάσις μὲν ἡ *ΖΗ*, ὕψος δὲ ἡ *ΑΒ*, ἐλάχιστον δέ, οὗ βάσις μὲν ἡ *ΕΔ*, ὕψος δὲ ἡ *ΑΓ*. ἔστω δὴ τὸ δοθὲν τρίγωνον διὰ τοῦ ἄξονος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ἡ *ΘΚ*, ὕψος δὲ ἡ *ΑΛ*, καὶ δέον ἔστω ἕτερον τρίγωνον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος εὑρεῖν, ὃ μετὰ τοῦ τριγώνου, οὗ βάσις μὲν ἡ *ΘΚ*, ὕψος δὲ ἡ *ΑΛ*, ἴσον ἔσται συναμφοτέρῳ τῷ μεγίστῳ καὶ τῷ ἐλαχίστῳ.

ἐπεὶ ἡ *ΑΛ* κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν *ΘΚ* βάσιν, τὸ ἄρα *Λ* σημεῖον ἐπὶ κύκλου περιφερείας ἐστίν, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ *ΒΓ*, διὰ τὸ προδειχθέν. γεγράφθω δὲ ὁ *ΒΛΓ* κύκλος, καὶ ᾧ μείζων ἐστὶ συναμφότερος ἡ *ΒΑ*, *ΑΓ* τῆς *ΑΛ*, τούτῳ ἴση ἔστω ἡ *Μ*. ἐπεὶ οὖν τῶν ἀπὸ τοῦ *Α* ἐπὶ τὴν *ΒΛΓ* περιφέρειαν ἀγομένων εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἡ *ΑΒ*, ἐλαχίστη δὲ ἡ *ΑΓ*, ἡ ἄρα *ΑΛ* ἐλάττων μέν ἐστι τῆς *ΑΒ*, μείζων δὲ τῆς *ΑΓ*. ἀλλ' ἡ *ΛΑ* μετὰ τῆς *Μ* ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ *ΒΑΓ*, ὧν ἡ *ΑΛ* ἐλάττων τῆς *ΑΒ*· ἡ ἄρα *Μ* τῆς *ΑΓ* μείζων ἐστί· καὶ τὸ ἀπὸ *Μ* ἄρα τοῦ ἀπὸ *ΑΓ* μεῖζόν ἐστιν. ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς *Μ* ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΝ* τῆς *ΓΝ* ἐναρμοσθείσης εἰς τὸν κύκλον, καὶ

---

1. *τό*] Vc^2, postea ins. p, om. c^1. 3. *ΖΒΗ*] *ΖΗΒ* c^2. 5. *ΑΒ*] p, *ΑΗ* Vc^{1}c^2. 6. *ἡ ΕΔ*] e corr. p. 7. *ἐστιν*] om. p. 9. *τῶν*] om. p. 11. *τῷ* (alt.)] om. p. 16. *ΒΑ*, *ΑΓ*] *ΒΑΓ* p. 18. *μέν*] *μέν ἐστιν* p. In sequentibus lacunae nonnulla abstulerunt in c. 20. *ΛΑ*] *ΑΛ* p. *Μ*] des. p. 585 col. 1 in c, seq. alia manu. 24. *ΓΝ* (pr.)] p, *ΓΗ* vc et e corr. m. 1 V. *εἰς*] om. Vcp, corr. Halley. *τὸν κύκλον*] *τῷ κύκλῳ* p.

basis autem circulus circum B centrum descriptus, axis autem AB, et ad planum basis perpendicularis $A\Gamma$, et per Γ centrumque B producatur recta $\Gamma\Delta BE$, ad quam perpendicularis sit ZBH; triangulorum igitur per axem ductorum maximus erit, ut saepe demonstratum est [propp. XXII, XXIV], cuius basis est ZH, altitudo autem AB, minimus uero, cuius basis est $E\Delta$, altitudo autem $A\Gamma$ [prop. XXIV]. iam uero datus triangulus per axem ductus sit is, cuius basis sit ΘK, altitudo autem $A\Lambda$, et oporteat alium triangulum per axem ductum inuenire, qui una cum triangulo, cuius basis est ΘK, altitudo autem $A\Lambda$, aequalis sit simul maximo minimoque.



quoniam $A\Lambda$ ad ΘK basim perpendicularis est, punctum Λ in ambitu circuli est, cuius diametrus est $B\Gamma$, propter id, quod antea demonstratum est [prop. XLV]. describatur igitur circulus $B\Lambda\Gamma$, et sit $M = BA + A\Gamma \div A\Lambda$. quoniam igitur rectarum ab A ad ambitum $B\Lambda\Gamma$ ductarum maxima est AB, διήχθω ἡ ΝΞΒΟ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΝΑ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΝΓ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΒΓ, ΓΑ, τὸ δὲ ἀπὸ ΒΓ ἴσον τοῖς ἀπὸ ΒΝ, ΝΓ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΒΝ, ΝΓ, ΓΑ, ὧν τοῖς ἀπὸ ΓΝ, ΓΑ τὸ ἀπὸ ΑΝ ἴσον ἐστί· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῖς ἀπὸ ΒΝ, ΝΑ ἴσον ἐστίν. ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΝΑ γωνία· ἡ ΑΝ ἄρα ὕψος ἐστὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ ΟΒΞ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Μ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΑΓ, ΓΝ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἴσον τοῖς ἀπὸ ΑΓ, ΓΝ, ἴση ἄρα ἡ Μ τῇ ΑΝ· ὥστε καὶ συναμφότερος ἡ ΛΑΝ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΑΓ ἴση ἐστί, καὶ τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς ΛΑΝ τῷ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου τριγώνου, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΖΗ, ΕΔ, ὕψη δὲ αἱ ΒΑ, ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς ΛΑΝ διπλάσιόν ἐστι τῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΘΚ, ΟΞ, ὕψη δὲ αἱ ΛΑ, ΑΝ· τὰ ἄρα τρίγωνα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΘΚ, ΟΞ, ὕψη δὲ αἱ ΛΑ, ΑΝ, ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἐλαχίστῳ καὶ τῷ μεγίστῳ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος. καί ἐστι τὸ δοθὲν τὸ ἐπὶ τῆς ΘΚ· εὕρηται ἄρα τρίγωνον διὰ

---

1. ΝΞΒΟ] ΜΞΒΟ? c. 4. τοῖς] τῆς c. 5. ΓΑ] p, ΝΑ Vc. ΓΝ] ΝΓ p. 6. ΓΑ] ΓΑ ἴσον ἐστὶ p. ΑΝ ἴσον ἐστί] τῆς ΑΝ p. ΑΒ] ΑΒ ἴσον ἐστὶ p. 7. ἴσον ἐστίν] om. p. ΒΝΑ] p, ΒΑΝ Vc. 8. ΑΝ] ΝΑ p. 11. ΑΓ] τοῖς ΑΓ c. 12. συναμφότερος] συναμφοτέροις V. 14. ΛΑΝ — 15. τῆς] om. c. 16. καὶ συναμφοτέρου] p, om. Vc. 17. τριγώνου] τῶν τριγώνων p. 18. ΖΗ] p, ΖΕ Vv. ΖΗ — 20. αἱ] om. c. 18. ΕΔ] vp, Ε e corr. m. 1 V. ΒΑ] p, ΨΑ Vv. 20. ὧν] p, om. V. 24. τρίγωνον] om. p.

minima autem $A\Gamma$ [prop. XVI], erit $AB > A\Delta > A\Gamma$. uerum $A\Delta + M = B\Delta + A\Gamma$, quarum $A\Delta < AB$; quare $M > A\Gamma$; itaque etiam $M^2 > A\Gamma^2$. sint $A\Gamma^2 + \Gamma N^2 = M^2$ recta ΓN in circulum inserta, producaturque $N\Xi BO$, et ducatur NA; itaque $\angle\, BN\Gamma$ rectus est [Eucl. III, 31]; nam in semicirculo est. quoniam igitur $AB^2 = B\Gamma^2 + \Gamma A^2$, et

$$B\Gamma^2 = BN^2 + N\Gamma^2 \text{ [Eucl. I, 47]},$$

erit

$$AB^2 = BN^2 + N\Gamma^2 + \Gamma A^2,$$

quorum $\Gamma N^2 + \Gamma A^2 = AN^2$ [Eucl. I, 47]; itaque $AB^2 = BN^2 + NA^2$. quare $\angle\, BNA$ rectus est [Eucl. I, 48]; AN igitur altitudo est trianguli per axem ducti, cuius basis est $OB\Xi$. et quoniam $M^2 = A\Gamma^2 + \Gamma N^2$, uerum etiam $AN^2 = A\Gamma^2 + \Gamma N^2$, erit $M = AN$; quare etiam $A\Delta + AN = B\Delta + A\Gamma$, et rectangulum comprehensum a diametro et

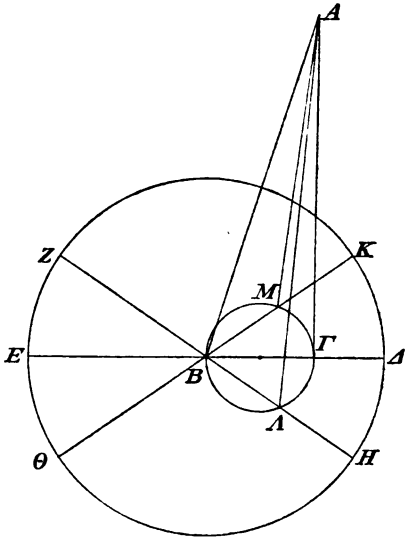
$$(A\Delta + AN)$$

rectangulo comprehenso a diametro et $(B\Delta + A\Gamma)$ aequale est. uerum rectangulum comprehensum a diametro et $(B\Delta + A\Gamma)$ duplo maius est triangulo maximo minimoque, quorum bases sunt ZH, $E\Delta$, altitudines autem $B\Delta$, $A\Gamma$ [prop. XXII, XXIV; Eucl. I, 41], rectangulum autem comprehensum a diametro et $(A\Delta + AN)$ duplo maius est triangulis, quorum bases sunt ΘK, $O\Xi$, altitudines autem $A\Delta$, AN [Eucl. I, 41]; itaque trianguli, quorum bases sunt ΘK, $O\Xi$, altitudines autem $A\Delta$, AN, aequales sunt triangulo minimo maximoque eorum, qui per axem ducti sunt. et datus triangulus est, qui in ΘK descriptus est; ergo inuentus est triangulus per axem ductus, τοῦ ἄξονος τὸ ἐπὶ τῆς ΟΞ, ὃ μετὰ τοῦ δοθέντος τοῦ ἐπὶ τῆς ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ μεγίστῳ καὶ τῷ ἐλαχίστῳ.

μη΄.

Ἐὰν δύο τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων αἱ βάσεις ἴσας περιφερείας ἀπολαμβάνωσι πρὸς τῇ διὰ τῆς καθέτου διαμέτρῳ, τὰ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσται· καλείσθω δὲ ὁμοταγῆ.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, καὶ ἄξων ὁ ΑΒ, κάθετος δὲ ἐπὶ τὴν βάσιν ἡ ΑΓ, ἡ δὲ διὰ τοῦ Γ σημείου τῆς καθέτου διάμετρος ἡ ΔΓΒΕ, διήχθωσαν δὲ αἱ ΖΒΗ, ΘΒΚ ἴσας περιφερείας ἀπολαμβάνουσαι πρὸς τῇ ΕΔ τὰς ΚΔ, ΔΗ. λέγω, ὅτι τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα, ὧν βάσεις εἰσὶν αἱ ΖΗ, ΘΚ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.



γεγράφθω περὶ τὴν ΒΓ διάμετρον κύκλος ὁ ΒΛΓΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΑΜ· κάθετοι ἄρα

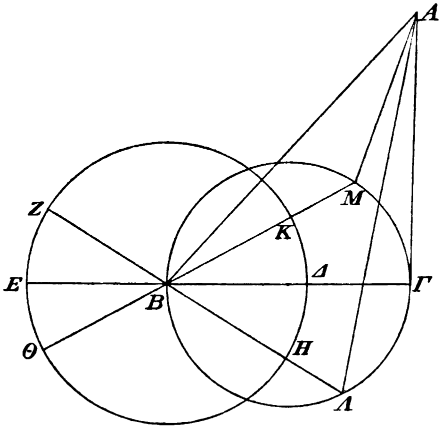
---

1. τό] τρίγωνον τό p. 2. τῷ (pr.)] τῷ τε Halley. 16. τήν] om. p. 20. ΔΓΒΕ] ΓΔΒΕ p. 22. ΖΒΗ] p, ΒΖΗ Vc. 25. εἰσὶν αἱ] p, εἰσί Vc.

qui in $O\Xi$ descriptus est, qui una cum dato triangulo in ΘK descripto aequalis est maximo minimoque.

XLVIII.

Si duorum triangulorum per axem ductorum bases ad diametrum per perpendicularem ductam aequales arcus abscindunt, trianguli inter se aequales erunt; uocentur autem correspondentes.



sit conus, cuius uertex sit A, basis autem circulus circum B centrum descriptus, et axis AB, ad basim autem perpendicularis $A\Gamma$, diametrus autem per punctum perpendicularis Γ ducta $\Delta\Gamma BE$1), producantur autem ZBH, ΘBK arcus aequales ad $E\Delta$ abscindentes $K\Delta$, ΔH. dico, triangulos per axem ductos, quorum bases sint ZH, ΘK, inter se aequales esse.

describatur circum diametrum $B\Gamma$ circulus $B\Lambda\Gamma M$, ducanturque $A\Lambda$, AM; itaque perpendiculares sunt $A\Lambda$ ad ZH, AM autem ad ΘK [prop. XLVI coroll.].

---

1) Itaque figuram 1 solam respicit. p fig. 2 solam habet.

εἰσὶν ἡ μὲν ΑΛ ἐπὶ τὴν ΖΗ, ἡ δὲ ΑΜ ἐπὶ τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΛ ἴση ἐστίν, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΜΒ εὐθεῖα τῇ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΜ, ΜΒ, ἀλλὰ καὶ τοῖς ἀπὸ ΑΛ, ΛΒ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΜ, ΜΒ ἄρα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΛ, ΛΒ ἴσα ἐστίν, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΒ τῷ ἀπὸ ΒΛ ἴσον ἐστί· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΑ τῷ ἀπὸ ΑΛ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΑΛ τῇ ΑΜ. καί εἰσιν ὕψη τῶν τριγώνων, ὧν βάσεις εἰσὶν αἱ ΖΗ, ΘΚ· ἴσα ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν ΖΗ, ΘΚ βάσεων τρίγωνα τὰ διὰ τοῦ ἄξονος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μθ'.

Τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὰ ὁμοταγῆ ἴσα τε καὶ ὅμοια ἀλλήλοις ἐστίν.

ἔστω γὰρ ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης τὰ ΖΑΗ, ΘΑΚ τρίγωνα ὁμοταγῆ. λέγω, ὅτι ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν ἀλλήλοις.

ὅτι μὲν οὖν ἴσα ἐστίν, ἤδη δέδεικται· ὅτι δὲ ὅμοια, νῦν δεικτέον.

ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν ἦκται τῆς βάσεως, καί ἐστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῖς ἀπὸ ΑΜ, ΜΒ, ἀλλὰ καὶ τοῖς ἀπὸ ΑΛ, ΛΒ, καὶ τὰ ἀπὸ ΑΜ, ΜΒ ἄρα

---

5. Post ἀπό (pr.) add. + m. rec. V. καὶ τά — 6. ΛΒ] p, bis Vvc. 5. ἄρα] ἄρα ἴσα εἰσί p. 6. ἴσα ἐστίν] om. p. 7. ἀπό (pr.)] supra scr. m. 1 c. ΒΛ] p, ΒΑ Vc. ἀπό (alt.)] sustulerunt uermes in c. 8. ἴση] e corr. c. ἄρα] ἄρα ἐστίν p. ἡ ΛΑ] litt. ἡ Λ e corr. p. 10. ἐπί] vcp; ἐ- add. m. rec. V, praecedunt — — m. rec. τὰ διά] p, om. Vc. 11. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. p. 15. ἔστω γάρ] ἔστωσαν p. προκειμένης] προκειμένης καταγραφῆς p. 23. ΛΒ] ΛΑΒ c. καὶ τά — p. 246, 1. ΛΒ] om. Vc, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΜ, ΜΒ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΛ, ΛΒ p.

et quoniam $\angle \Gamma BM = \Gamma B\Lambda$ [Eucl. III, 26], erit etiam $MB = B\Lambda$ [Eucl. III, 7]. quoniam igitur

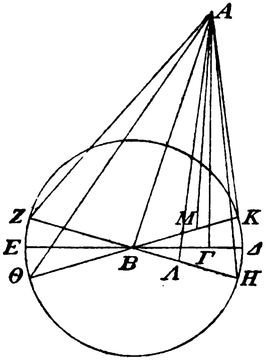
$$AB^2 = AM^2 + MB^2,$$

uerum etiam $AB^2 = A\Lambda^2 + \Lambda B^2$ [Eucl. I, 47], erunt etiam $AM^2 + MB^2 = A\Lambda^2 + \Lambda B^2$, quorum $MB^2 = B\Lambda^2$; itaque etiam reliquum $MA^2 = A\Lambda^2$; quare $\Lambda A = AM$. et altitudines sunt triangulorum, quorum bases sunt ZH, ΘK; ergo trianguli in basibus ZH, ΘK per axem ducti aequales sunt [Eucl. VI, 1]; quod erat demonstrandum.

XLIX.

Triangulorum per axem ductorum correspondentes inter se et aequales et similes sunt.

nam ut in figura proposita trianguli ZAH, ΘAK correspondentes sint. dico, eos inter se et aequales et similes esse.



iam eos aequales esse, antea demonstrauimus [prop. XLVIII]; similes autem eos esse, nunc demonstrandum.

quoniam enim AB in utroque triangulo a uertice ad punctum medium basis ducta est, et

$$AB^2 = AM^2 + MB^2,$$

uerum etiam

$$AB^2 = A\Lambda^2 + \Lambda B^2,$$

erunt etiam $AM^2 + MB^2 = A\Lambda^2 + \Lambda B^2$, quorum $AM^2 = A\Lambda^2$ [prop. XLVIII]; quare etiam reliquum $MB^2 = B\Lambda^2$ et $MB = B\Lambda$; itaque etiam tota $M\Theta = \Lambda Z$.

τοῖς ἀπὸ ΑΔ, ΔΒ ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ ΑΜ τῷ ἀπὸ ΑΔ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΒ τῷ ἀπὸ ΒΔ καὶ ἡ ΜΒ εὐθεῖα τῇ ΒΔ· ὥστε καὶ ὅλη ἡ ΜΘ τῇ ΔΖ. ἴση δὲ καὶ ἡ ΜΑ τῇ ΑΔ· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα ἴσα ἐστί, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΖ τῷ ἀπὸ ΑΘ, καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΑΘ ἴση. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΑΚ τῇ ΑΗ δείκνυται ἴση. ἀλλὰ καὶ αἱ ΖΗ, ΘΚ βάσεις ἴσαι· τὰ ἄρα ΖΑΗ, ΘΑΚ τρίγωνα ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν ἀλλήλοις.

δῆλον δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.

ν'.

Ἐὰν κώνου σκαληνοῦ ὁ ἄξων ἴσος ᾖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἔσται, ὡς τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον, οὕτως τὸ ἐλάχιστον πρὸς τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἰσοσκελές.

ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἴση οὖσα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, καὶ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὸ μὲν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἔστω τὸ ΓΑΔ, τὸ δὲ ἰσοσκελὲς τὸ ΕΑΖ· μέγιστον μὲν ἄρα ἐστὶ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τὸ ΕΑΖ, ἐλάχιστον δὲ τὸ ΓΑΔ, διὰ τὰ πρότερον δειχθέντα. ἤχθω οὖν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος· πίπτει δὴ ἐπὶ τὴν ΓΔ διάμετρον. ἔστω οὖν ἡ ΑΗ, καὶ διήχθω ἡ ΘΗΚ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ, καὶ διεκβεβλήσθω τὸ ἐπίπεδον

---

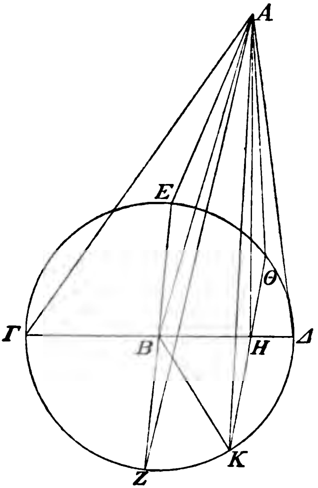
1. *ἴσα*] *ἴσα ἐστίν* p. *ΑΜ*] *τῶν ΑΜ* p. 2. *ἴσον*] *ἴσον ἐστί* p. *ΒΔ*] *ΒΔ ἴσον ἐστί* p. 7. *ἴσαι*] *ἴσαι εἰσί* p. 8. *τρίγωνα*] vcp, -*α* corr. ex *ο* in scrib. V. *ὅμοια*] vcp, *ὅ*- euan. V. 9. *αὐτοῦ*] c, comp. Vv, om. p. 19. *ΕΑΖ*] *ΑΕΖ* p. 20. *μέν*] vcp, comp. supra scr. m. 1 V. 21. *πρότερον δειχθέντα*] *προδειχθέντα* p. 22. *δή*] *δέ* p. 23. *ΓΔ*] vcp, *Γ* suppl. m. rec. V. *ἡ* (alt.)] vcp, suppl. m. rec. V. *ΘΗΚ*] *Η* supra scr. m. 1 c. 24. *ΓΔ*] cp, corr. ex *ΓΗΔ* V, *ΓΗΔ* v.

uerum etiam $MA = \Lambda A$; quare etiam quadrata earum aequalia, hoc est [Eucl. I, 47] $AZ^2 = A\Theta^2$ et $AZ = A\Theta$. similiter autem demonstratur, esse etiam $AK = AH$. est autem etiam basis $ZH = \Theta K$; ergo trianguli ZAH, ΘAK et aequales et similes sunt inter se [Eucl. I, 8; I, 4].

manifesta autem etiam propositio conuersa.

L.

Si coni scaleni axis radio basis aequalis est, erit, ut maximus triangulorum per axem ductorum ad minimum, ita minimus ad triangulum aequicrurium ad basim perpendicularem.



sit conus scalenus, cuius uertex sit A, axis autem recta AB radio basis aequalis, basis autem circulus circum B centrum descriptus, et triangulorum per axem ductorum ad basim perpendicularis sit $\Gamma A\Delta$, aequicrurius autem EAZ; maximus igitur triangulorum per axem ductorum est EAZ, minimus autem $\Gamma A\Delta$, propter ea, quae antea demonstrauimus [prop. XXIV]. ducatur igitur ab A ad basim perpendicularis; cadit igitur in diametrum $\Gamma\Delta$ [Eucl. XI def. 4]. sit igitur AH, ducaturque ΘHK ad $\Gamma\Delta$ perpendicularis, et proποιοῦν τὸ ΘΑΚ τρίγωνον ἰσοσκελὲς ὂν καὶ ὀρθὸν πρὸς τὴν βάσιν. λέγω δή, ὅτι, ὡς τὸ ΕΑΖ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς τὸ ΓΑΔ ἐλάχιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος, οὕτω τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ ἰσοσκελές.

ἐπεὶ γὰρ τῶν ΕΑΖ, ΓΑΔ τριγώνων αἱ μὲν βάσεις ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΔ, ΕΖ διάμετροι, ὕψος δὲ τοῦ μὲν ΕΑΖ ἡ ΒΑ, τοῦ δὲ ΓΑΔ ἡ ΑΗ, ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, οὕτως τὸ ΕΑΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΓΑΔ. πάλιν ἐπεὶ τῶν ΓΑΔ καὶ ΘΑΚ τριγώνων κοινὸν ὕψος ἐστὶν ἡ ΑΗ, βάσις δὲ τοῦ μὲν ΓΑΔ ἡ ΓΔ, τουτέστιν ἡ ΕΖ, τοῦ δὲ ΘΑΚ ἡ ΘΚ, ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ, οὕτως τὸ ΓΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΘΑΚ. ἀλλ' ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ, οὕτως αἱ ἡμίσειαι, τουτέστιν ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ· ὅμοια γὰρ τὰ ΒΗΚ, ΒΗΑ τρίγωνα ὀρθογώνια· καὶ τὸ ἄρα ΓΑΔ τρίγωνον πρὸς ΘΑΚ ἐστιν, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ. ἦν δὲ καὶ τὸ ΕΑΖ πρὸς ΓΑΔ, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ· ὡς ἄρα τὸ ΕΑΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΓΑΔ, οὕτως τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

να'.

Πάλιν ἔστω, ὡς τὸ ΕΑΖ πρὸς τὸ ΓΑΔ, οὕτως τὸ ΓΑΔ πρὸς ΘΑΚ. λέγω, ὅτι ἡ ΒΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

---

3. πρὸς τό — 4. ἄξονος] om. c. 4. ἰσοσκελές] ἰσοσκελοῦς? c. 5. τῶν] τό c. ΓΑΔ] vcp, Δ e corr. m. 1 V. 7. τοῦ] vcp, -οῦ e corr. m. 1 V. 10. ΓΑΔ] p, corr. ex ΓΑΗΔ m. 1 V, ΓΔ c, ΓΑΗΔ v. 11. τοῦ δέ] corr. ex πρός m. 1 c. ΘΑΚ] corr. ex ΘΗΚ m. 1 c. ὡς ἄρα] ἔστιν ἄρα ὡς p. ΕΖ (alt.)] Ζ e corr. p. 12. οὕτως — 13. ΘΚ] bis V. 13. ΕΖ πρὸς ΘΚ] sustulit lacuna in c. ἡμίσειαι] ἡμίσειαι πρὸς

ducatur planum triangulum $\Theta A K$ efficiens aequicrurium et ad basim perpendicularem [prop. XXII; Eucl. XI, 18]. dico, esse, ut $E A Z$ maximus eorum, qui per axem ducti sint, ad $\Gamma A \Delta$ minimum eorum, qui per axem ducti sint, ita $\Gamma A \Delta$ ad $\Theta A K$ aequicrurium.

quoniam enim triangulorum $E A Z$, $\Gamma A \Delta$ bases aequales sunt $\Gamma \Delta$, $E Z$ diametri, altitudo autem $E A Z$ trianguli $B A$ [prop. XXII], $\Gamma A \Delta$ autem trianguli $A H$, erit $B A : A H = E A Z : \Gamma A \Delta$ [cfr. Eucl. VI, 1]. rursus quoniam triangulorum $\Gamma A \Delta$, $\Theta A K$ communis altitudo est $A H$, basis autem $\Gamma A \Delta$ trianguli $\Gamma \Delta$ siue $E Z$, $\Theta A K$ autem trianguli ΘK, erit

$$E Z : \Theta K = \Gamma A \Delta : \Theta A K \text{ [Eucl. VI, 1].}$$

est autem $E Z : \Theta K = \frac{1}{2} E Z : \frac{1}{2} \Theta K = B K : K H$; et $B K : K H = B A : A H$ [Eucl. VI, 4]; nam trianguli rectanguli $B H K$, $B H A$ similes sunt [Eucl. VI, 7]; quare etiam $\Gamma A \Delta : \Theta A K = B A : A H$. erat autem etiam $E A Z : \Gamma A \Delta = B A : A H$; ergo

$$E A Z : \Gamma A \Delta = \Gamma A \Delta : \Theta A K;$$

quod erat demonstrandum.

LI.

Rursus sit $E A Z : \Gamma A \Delta = \Gamma A \Delta : \Theta A K$. dico, $B A$ radio basis aequalem esse.

ἀλλήλας p. τουτέστιν — 14. πρός (pr.)] sustulit lacuna in c. 14. πρὸς $K H$ οὕτως] item. 15. $B H K$] e corr. p, mg. βηκ. 16. ἄρα $\Gamma A \Delta$] $\Gamma A \Delta$ ἄρα p. πρός] ἐστι πρὸς τό p. 17. ἐστιν] om. p. 18. $\Gamma A \Delta$] τὸ $\Gamma A \Delta$ p. ὡς ἡ — 19. $\Gamma A \Delta$] om. c. 18. $A H$] τὴν $A H$ p. 19. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. p. 21. να′] om. Vc, μϑ′ ἀντίστροφον mg. p. 22. οὕτως] sic p. 23. $\Theta A K$] τὸ $\Theta A K$ p.

ἐπεί, ὡς τὸ ΕΑΖ πρὸς τὸ ΓΑΔ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΖ πρὸς ΓΑΔ, οὕτως τὸ ΓΑΔ πρὸς ΘΑΚ, καὶ τὸ ἄρα ΓΑΔ πρὸς ΘΑΚ ἐστιν, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ. ὡς δὲ τὸ ΓΑΔ πρὸς ΘΑΚ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ, τουτέστιν ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ, καί ἐστιν ὅμοια τὰ ΒΑΗ, ΒΚΗ τρίγωνα καὶ ὁμόλογοι αἱ ΑΒ, ΒΚ. ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΒΚ ἐκ τοῦ κέντρου· ὃ προέκειτο δεῖξαι.

Καὶ συναπεδείχθη καθ' ἑκατέραν τῶν δείξεων, ὅτι τὸ ΕΑΖ τρίγωνον τῷ ΘΑΚ ὅμοιόν ἐστιν· ὡς γὰρ ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ. καὶ ἔτι τὸ μὲν ΕΑΖ πρὸς τὸ ΘΑΚ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ. καί ἐστι τὸ ΓΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΘΑΚ, ὡς ἡ ΓΔ, τουτέστιν ὡς ἡ ΕΖ, πρὸς ΘΚ· ὥστε τὸ ΕΑΖ πρὸς τὸ ΘΑΚ διπλασίονα λόγον ἔχει τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν ΕΖ, ΘΚ. ὅμοια ἄρα τὰ ΕΑΖ, ΘΑΚ. ὥστε φανερόν, ὅτι, ἐὰν κώνου σκαληνοῦ ὁ ἄξων ἴσος ᾖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἰσοσκελὲς ὅμοιόν ἐστι τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ· καὶ ἀντιστρόφως, ὅτι, ἐὰν τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἰσοσκελὲς ὅμοιον ᾖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ, ὁ ἄξων τοῦ κώνου ἴσος ἔσται τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· καὶ τοῦτο γὰρ εὐκατανόητον ἐκ τῶν ἤδη δειχθέντων.

---

1. ἐπεί] ἐπεὶ γάρ p. 2. πρός (alt.)] πρὸς τό p. 3. ΘΑΚ (utrumque)] τὸ ΘΑΚ p. ἄρα ΓΑΔ] ΓΑΔ ἄρα p. 4. ΓΑΔ] e corr. p. ΘΑΚ] v, τὸ ΘΑΚ p, ΔΑΚ c; Θ corr. ex Δ m. 1 V, Κ euan., mg. † ΘΑΚ — m. rec. 8. ἐκ] τῇ ἐκ p. 9. ὃ προέκειτο δεῖξαι] om. p. 10. ἑκατέραν] c?, ἑτέραν Vp. 11. τρίγωνον — 12. ΕΖ] bis c. 12. ἔτι] ὅτι Vvcp, corr. Halley. 13. μέν] fort. delendum. ΕΑΖ] vcp,

quoniam $EAZ : \Gamma A\Delta = BA : AH$ [cfr. Eucl. VI, 1], et $EAZ : \Gamma A\Delta = \Gamma A\Delta : \Theta AK$, erit etiam

$$\Gamma A\Delta : \Theta AK = BA : AH.$$

uerum

$$\Gamma A\Delta : \Theta AK = EZ : \Theta K \text{ [Eucl. VI, 1]} = BK : KH;$$

quare etiam $BA : AH = BK : KH$, et trianguli BAH, BKH similes sunt et correspondentia latera AB, BK [Eucl. VI, 4]. ergo AB radio BK aequalis est[1]); quod erat propositum.

Et simul per utramque demonstrationem [propp. L—LI] demonstratum est, triangulos EAZ, ΘAK similes esse; nam $EZ : \Theta K = BA : AH$. praeterea [Eucl. V def. 9] $EAZ : \Theta AK = \Gamma A\Delta^2 : \Theta AK^2$. est autem $\Gamma A\Delta : \Theta AK = \Gamma\Delta : \Theta K = EZ : \Theta K$; quare $EAZ : \Theta AK$ duplicatam rationem habet, quam latera correspondentia $EZ : \Theta K$. ergo trianguli EAZ, ΘAK similes sunt [Eucl. VI, 19]. itaque manifestum est, si coni scaleni axis radio basis aequalis sit, triangulum aequicrurium ad basim perpendicularem similem esse aequicrurio per axem ducto; et conuertendo, si triangulus aequicrurius ad basim perpendicularis similis sit aequicrurio per axem ducto, axem coni radio basis aequalem fore; nam hoc quoque ex iis, quae iam demonstrauimus, facile intellegitur.

---

[1]) Nam latus correspondens BH commune est.

---

corr. ex EAH in scrib. V. 15. ὡς (alt.)] om. p. 16. ΘK] Θ e corr. p. 19. ἴσος] om. Vcp, corr. Halley. 20. βάσεως] βάσεως ἴσος p. 23. ἴσος ἔσ-] sustulit lacuna in c, ut alia plura in seq.

νβʹ.

Ἐὰν κύκλος κύκλον τέμνῃ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ γραφόμενος, ἀπὸ δὲ τῆς ἑτέρας αὐτῶν τομῆς διαχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὴν διὰ τοῦ κέντρου περιφέρειαν καὶ προσεκβληθῶσιν ἐπὶ τὴν τοῦ ἑτέρου κύκλου περιφέρειαν, ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα μεταξὺ τῆς τοῦ ἑτέρου κύκλου κυρτῆς περιφερείας καὶ τῆς κοίλης τοῦ ἑτέρου ἴση ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῆς διαχθείσης εὐθείας καὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου περιφερείας ἐπὶ τὴν ἑτέραν κοινὴν τομὴν τῶν κύκλων ἐπιζευγνυμένῃ.

ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ, διὰ δὲ τοῦ Δ κέντρου γεγράφθω τις κύκλος ὁ ΔΒΓ τέμνων τὸν ἐξ ἀρχῆς κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα, καὶ διήχθωσαν εὐθεῖαι διὰ μὲν τοῦ Δ ἡ ΒΔΕ, τυχοῦσα δὲ ἡ ΒΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΓ, ΖΓ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΕΔ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΖΗ τῇ ΖΓ.

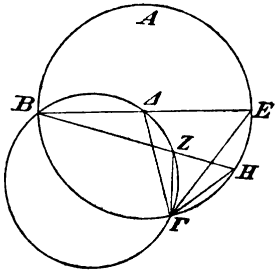
ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΓ, ΓΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΓ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΖΓ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΓ τῇ ὑπὸ ΖΗΓ ἴση διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβηκέναι· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἴση, καὶ ὅμοια τὰ τρίγωνα· ἰσοσκελὲς ἄρα καὶ τὸ ΓΖΗ. ἴση ἄρα ἡ μὲν ΕΖ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΗΖ τῇ ΖΓ. ὁμοίως δέ, κἂν ἄλλαι διαχθῶσι, δειχθήσεται τὰ τῆς προτάσεως.

---

1. νβʹ] om. Vc, μθʹ m. rec. V, νʹ p. 2. ἐάν] inc. paginae ultimae col. 1 in c manu priore. 5. κύκλον] vcp, -ου euan. V. 12. ΔΒΓ] p, ΑΒΓ Vvc, corr. m. 2 V. 14. ΒΖΗ] ΒΗΖ c. 15. Post ἐπεζεύχθωσαν add. + m. rec. V. 16. ΖΗ] ΗΖ p. 19. ΗΖΓ] V, Η e corr. p, corr. ex ΖΗΓ m. 1 c. ἡ] supra scr. m. 1 c. 20. ἴση] ἴση ἐστί p. τό] sustulerunt uermes in c. 21. ἴση] ἴση ἐστί p. 22. Post τρίγωνα add. ἰσοσκελὲς δὲ τὸ ΓΔΕ Halley cum Comm. Mg. ὁ γὰρ ΕΔΓ ἰσοσκελές, αἱ δὲ ΕΔ καὶ ΔΓ ἴσαι ἐκ τοῦ κέντρου οὖσαι τοῦ ⟨Α⟩ΒΓ

LII.

Si circulus circulum secat per centrum eius descriptus, et ab altera eorum sectione rectae ducuntur arcum per centrum ductum secantes producunturque ad ambitum alterius circuli, recta abscisa inter ambitum conuexum alterius circuli concauumque alterius aequalis erit rectae a communi sectione rectae productae ambitusque per centrum ducti ad alteram sectionem communem circulorum ductae.



sit circulus $AB\Gamma$ circum centrum Δ descriptus, et per Δ centrum describatur circulus aliquis $\Delta B\Gamma$ circulum ab initio positum in punctis B, Γ secans, producanturque rectae per Δ punctum $B\Delta E$, alia autem quaelibet BZH, et ducantur $\Delta\Gamma$, $Z\Gamma$. dico, esse $E\Delta = \Delta\Gamma$, $ZH = Z\Gamma$.

ducantur $E\Gamma$, ΓH. quoniam igitur [Eucl. III, 21] $\angle B\Delta\Gamma = BZ\Gamma$, etiam reliquus $E\Delta\Gamma = HZ\Gamma$ [Eucl. I, 13]. uerum etiam $\angle \Delta E\Gamma = ZH\Gamma$ [Eucl. III, 27], quia in eodem arcu consistunt; quare etiam reliquus angulus reliquo aequalis [Eucl. I, 32], et trianguli similes sunt; quare etiam ΓZH aequicrurius est [Eucl. VI, 4]. ergo $EZ = \Delta\Gamma$, $HZ = Z\Gamma$. et eodem modo demonstrabuntur proposita etiam, si aliae productae erunt rectae.

κύκλου ⟨τοῦ Δ⟩ σημείου m. 2 V ex parte euan.; „$\overset{\tau}{M}$ haec quae sunt in margine non habentur in apographo“ add. m. rec. καὶ] euan. c.

Πάλιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς ὑποκείσθω τῇ μὲν ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ, τῇ δὲ ΓΖ ἡ ΖΗ τῆς ΒΔΓ περιφερείας κατὰ τὸ Δ δίχα τετμημένης. λέγω, ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ ὁποτερῳοῦν τῶν ΔΒ, ΔΓ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ε καὶ Η σημείων.

ἐπεὶ γὰρ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΓ, καί ἐστιν ἰσοσκελῆ τὰ ΕΔΓ, ΗΖΓ τρίγωνα, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ· ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα κύκλῳ αἱ ὑπὸ ΒΕΓ, ΒΗΓ γωνίαι. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΒ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ε, Η σημείων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νγ'.

Ἐὰν ἐν τμήματι κύκλου κλασθῶσιν εὐθεῖαι, μεγίστη μὲν ἔσται ἡ πρὸς τὴν διχοτομίαν τὴν κλάσιν ἔχουσα, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς πρὸς τῇ διχοτομίᾳ τῆς ἀπώτερόν ἐστι μείζων.

ἐν γὰρ τῷ ΑΒΓ τμήματι κεκλάσθωσαν εὐθεῖαι, ἡ μὲν ΑΒΓ ὥστε τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Β, τυχοῦσαι δὲ αἱ ΑΔΓ, ΑΗΓ. λέγω, ὅτι συναμφότερος ἡ ΑΒΓ εὐθεῖα μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἐν τῷ τμήματι κλωμένων εὐθειῶν, μείζων δὲ ἡ ΑΔΓ τῆς ΑΗΓ.

ἐπεὶ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ περιφερείᾳ ἴση ἐστί, καὶ ἡ ΑΒ ἄρα εὐθεῖα τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση. κέντρῳ

---

3. ὁ] p, $\overset{o}{\varphi}$ Vvc, „$\overset{\tau}{M}$ † puto ὁ κέντρῳ sic infra in repetitione“ mg. m. rec. V. 4. μέν] vcp, -έν euan. V, ∵ μέν mg. m. rec. τῶν] cp, $\overset{\tilde{\tau}}{\omega}$ V, τῷ v. 7. ἴση] ἴση ἐστίν p. ΗΖΓ] Η e corr. p. 12. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. p. 13. νγ'] om. Vc, να' p. 14. ἐν] om. vc. 15. ἡ] corr. ex αἱ p.

Rursus in eadem figura supponatur $\Delta E = \Gamma\Delta$, $\Gamma Z = ZH$ arcu $B\Delta\Gamma$ in Δ in duas partes aequales secto. dico, circulum centro Δ, radio autem alterutra [Eucl. III, 29] rectarum ΔB, $\Delta\Gamma$ descriptum etiam per puncta E, H uenire.

quoniam enim $\angle E\Delta\Gamma = HZ\Gamma$ [Eucl. III, 21; I, 13], et trianguli $E\Delta\Gamma$, $HZ\Gamma$ aequicrurii sunt, erit etiam [Eucl. I, 32; I, 5] $\angle BE\Gamma = BH\Gamma$; itaque anguli $BE\Gamma$, $BH\Gamma$ in eodem circulo sunt [Eucl. III, 21]. ergo circulus centro Δ, radio autem ΔB descriptus etiam per puncta E, H ueniet; quod erat demonstrandum.

LIII.

Si in segmento circuli rectae franguntur, maxima erit, quae ad punctum medium fractionem habet, ceterarum autem semper propior ei, quae ad punctum medium est, remotiore maior est.

nam in segmento $AB\Gamma$ frangantur rectae, $AB\Gamma$ ita, ut arcus $AB\Gamma$ in B in duas partes aequales secetur, aliae autem quaelibet $A\Delta\Gamma$, $AH\Gamma$. dico, $AB + B\Gamma$ rectam maximam esse omnium rectarum, quae in segmento frangantur, et

$$A\Delta + \Delta\Gamma > AH + H\Gamma.$$

quoniam arcus $AB = B\Gamma$, erit etiam recta $AB = B\Gamma$ [Eucl. III, 29]. centro igitur B, radio

---

17. ἀπώτερον] p, ἀπότερον Vc. 21. εὐθεῖα] om. p. πασῶν] des. c uocabulis nonnullis lacuna absumptis (etiam in proxime praecedentibus lacunae complures). 24. ἐπεί] ἐπεὶ γάρ p. $B\Gamma$] p, $A\Gamma$ V. 25. ἐστί] vp; euan. V, rep. mg. m. rec. ἐστιν ἴση] ἴση ἐστί p. ἴση] v, corr. ex ἤση m. 1 V. κέντρῳ] vp, -τρῳ lacuna absumptum V.

οὖν τῷ Β, διαστήματι δὲ ὁποτερῳοῦν τῶν ΒΑ, ΒΓ γεγράφθω κύκλος ὁ ΑΕΖΓ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΑΒΕ, ΑΔΖ, ΑΗΘ· ἴση ἄρα διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα ἡ μὲν ΕΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΔ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΘΗ τῇ ΗΓ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΕ διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΕΖ κύκλου, μεγίστη μὲν ἄρα τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν ἡ ΑΕ, ἡ δὲ ΑΖ μείζων τῆς ΑΘ. ἀλλὰ τῇ μὲν ΑΕ ἴση συναμφότερος ἡ ΑΒΓ, τῇ δὲ ΑΖ ἡ ΑΔΓ, τῇ δὲ ΑΘ ἡ ΑΗΓ· καὶ τούτων ἄρα μεγίστη μὲν ἡ ΑΒΓ, μείζων δὲ ἡ ΑΔΓ τῆς ΑΗΓ. καὶ ὁμοίως ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς πρὸς τῇ διχοτομίᾳ τῆς ἀπώτερόν ἐστι μείζων· ὃ προέκειτο δεῖξαι.

Ἄλλως τὸ αὐτό.

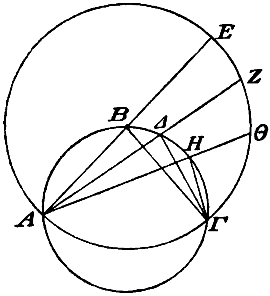
Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ τμήματι κεκλάσθω ἡ ΑΒΓ εὐθεῖα, ὥστε τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Β. λέγω, ὅτι συναμφότερος ἡ ΑΒΓ εὐθεῖα μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι κλωμένων εὐθειῶν.

κεκλάσθω γὰρ ἡ ΑΔΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔΕ, καὶ κείσθω ἡ ΔΕ τῇ ΔΓ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΔ, ΒΕ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ περιφερείᾳ ἴση ἐστί, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ γωνία βέβηκεν, ἐπὶ δὲ τῆς ΒΓ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ

---

1. ΒΑ] p, lacuna absumptum V, mg. „† ΒΑ amplius in apographo“ m. rec. ΒΓ] corr. ex ΒΑ m. rec. v. 3. ἄρα] ἄρα ἐστί p. 4. θεώρημα] om. p. 7. ΑΘ] p, corr. ex ΑΗ m. 2 V, ΑΗ v. 11. ἀπώτερον] p, ἀπότερον V. ὃ προέκειτο δεῖξαι] om. p. 13. ἄλλως τὸ αὐτό] p, V mg. m. 2, om. v. 17. ΑΒΓ] vp, Β e corr. m. 1 V. 19. κεκλάσθω] vp, -άσ- euan. V, „† άσθω“ mg. m. rec. γάρ — 20. κείσθω] vp, ex

autem alterutra rectarum BA, $B\Gamma$ circulus describatur $AEZ\Gamma$, producanturque ABE, $A\Delta Z$, $AH\Theta$; itaque propter propositionem praecedentem [prop. LII] erit $EB = B\Gamma$, $Z\Delta = \Delta\Gamma$, $\Theta H = H\Gamma$. quoniam igitur AE diametrus est circuli AEZ, maxima rectarum in circulo ductarum est AE et $AZ > A\Theta$ [Eucl. III, 15]. est autem $AB + B\Gamma = AE$, $A\Delta + \Delta\Gamma = AZ$, $AH + H\Gamma = A\Theta$; ergo harum quoque maxima est $AB + B\Gamma$, et $A\Delta + \Delta\Gamma > AH + H\Gamma$. et eodem modo semper propior ei, quae ad punctum medium est, remotiore maior est; quod erat propositum.



Aliter idem.

Sit circulus $AB\Gamma$, et in segmento $AB\Gamma$ frangatur recta $AB\Gamma$ ita, ut arcus $AB\Gamma$ in B in duas partes aequales secetur. dico, rectam $AB + B\Gamma$ maximam esse omnium, quae in eodem segmento frangantur, rectarum.

frangatur enim $A\Delta\Gamma$, producaturque $A\Delta E$, et ponatur $\Delta E = \Delta\Gamma$, ducanturque $B\Delta$, BE. quoniam igitur arcus AB arcui $B\Gamma$ aequalis est, et in AB $\angle B\Delta A$ consistit, in $B\Gamma$ autem $\angle BA\Gamma$, erit [Eucl. III, 27] $\angle B\Delta A = BA\Gamma$. communis adiiciatur

---

parte euan. V (legi possunt γὰρ ἡ ..... εβλήσθω ἡ ..... σθω, hoc del. m. rec.), rep. mg. m. rec.

ΒΔΕ· συναμφοτέρος ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΔΑ συναμφοτέρῳ τῇ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ ἐστιν ἴση. καί ἐστι συναμφότερος ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΔΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση· καὶ συναμφότερος ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ συναμφότερος ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση· συναμφότερος ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ συναμφοτέρῳ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστί. κοινῆς ἀρθείσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΕ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἴση μὲν ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας, καὶ βάσις ἄρα ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΒΕ εὐθεῖαι μείζονές εἰσι τῆς ΑΕ, ἀλλὰ ταῖς μὲν ΑΒ, ΒΕ συναμφότερος ἡ ΑΒΓ ἴση ἐστί, τῇ δὲ ΑΕ συναμφότερος ἡ ΑΔΓ ἴση ἐστί, καὶ συναμφότερος ἄρα ἡ ΑΒΓ τῆς ΑΔΓ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὲ δείκνυται καὶ τῶν ἄλλων μείζων. συναμφότερος ἄρα ἡ ΑΒΓ πασῶν τῶν ἐν τῷ τμήματι κλωμένων μεγίστη ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ διχοτομία πρὸς τῷ Ζ. λέγω, ὅτι ἡ τοῦ Ζ ἔγγιον ἡ ΑΒΓ εὐθεῖα τῆς ἀπώτερον τῆς ΑΔΓ μείζων ἐστίν.

ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΖΒ περιφέρεια τῆς ΒΔΓ περιφερείας μείζων ἐστί, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζων. κοινῆς προστεθείσης τῆς ὑπὸ ΒΔΕ αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΔΑ μείζονές εἰσι τῶν ὑπὸ ΒΔΕ,

---

4. ΒΑΓ] p, corr. ex ΔΑΓ m. 2 V, ΔΑΓ v. ἐστιν ἴση] ἴση ἐστίν p. 5. ὑπό] vp, bis V. 8. κοινῆς] καὶ κοινῆς p. ἀρθείσης] Vp, fort. ἄρα ἀρθείσης; ἄρα ἀφαιρεθείσης Halley. 11. ἐστιν ἴση] ἴση ἐστί p. 14. ἴση ἐστί] om. p. ΑΒΓ] vp, corr. ex ΑΔΓ m. 1 V. 19. εὐθεῖα] om. p. ἀπώτερον] p, ἀπότερον V. 21. ἐπεί] vp, renouat. m. rec. V. 22. ΒΔΑ] corr. ex ΒΔΕ m. 2 V, ΒΔΕ v; ΒΓΑ p, Γ e corr. γωνία] om. p. 23. μείζων] μείζων ἐστίν· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ

$\angle B\Delta E$; itaque $B\Delta E + B\Delta A = B\Delta E + BA\Gamma$. et $B\Delta E + B\Delta A$ duobus rectis aequales sunt [Eucl. I, 13]; itaque etiam $B\Delta E + BA\Gamma$ duobus rectis aequales sunt. uerum etiam $B\Delta\Gamma + BA\Gamma$ duobus rectis aequales sunt [Eucl. III, 22]; quare $B\Delta E + BA\Gamma = B\Delta\Gamma + BA\Gamma$. ablato igitur, qui communis est, angulo $BA\Gamma$ erit reliquus $B\Delta E = B\Delta\Gamma$. quoniam igitur $\Gamma\Delta = \Delta E$, communis autem $B\Delta$, et angulos aequales comprehendunt, erit etiam basis $\Gamma B = BE$ [Eucl. I, 4]. et quoniam [Eucl. I, 20]

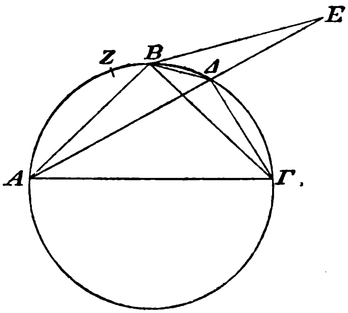
$$AB + BE > AE,$$

et

$$AB + B\Gamma = AB + BE,$$

$$A\Delta + \Delta\Gamma = AE,$$

erunt etiam $AB + B\Gamma > A\Delta + \Delta\Gamma$. similiter autem demonstrabimus, eas ceteris quoque maiores esse. ergo $AB + B\Gamma$ omnium, quae in segmento franguntur, rectarum maxima est.



Iam uero punctum medium sit Z. dico, rectam $AB + B\Gamma$ puncto Z propiorem maiorem esse remotiore $A\Delta + \Delta\Gamma$.

quoniam enim arcus AZB maior est arcu $B\Delta\Gamma$, erit etiam $\angle B\Delta A > BA\Gamma$ [Eucl. VI, 33]. communi adiecto angulo $B\Delta E$ erunt

$$B\Delta E + B\Delta A > B\Delta E + BA\Gamma;$$

ΒΔΑ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ p. κοινῆς — τῆς] κοινὴ προσκείσθω ἡ p.

ΒΑΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ ἐλάττονές εἰσι δυοῖν ὀρθῶν. εἰσὶ δὲ αἱ ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ τῶν ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ μείζονές εἰσι. καὶ κοινῆς ἀρθεισης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΔΕ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΔΒ τῆς ὑπὸ ΒΔΕ μείζων, καὶ ἡ ΓΒ ἄρα βάσις μείζων ἐστὶ τῆς ΒΕ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΒΕ εὐθεῖαι μείζονές εἰσι τῆς ΑΕ, τῶν δὲ ΑΒ, ΒΕ συναμφότερος ἡ ΑΒΓ εὐθεῖα μείζων ἐστί, συναμφότερος ἄρα ἡ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΕ, τουτέστι συναμφοτέρου τῆς ΑΔΓ.

νδʹ.

Ἐὰν τεσσάρων ἀνίσων εὐθειῶν τὸ ἀπὸ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης τὸ συναμφότερον τετράγωνον ἴσον ᾖ συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν λοιπῶν, ἡ συγκειμένη εὐθεῖα ἐκ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης ἐλάττων ἔσται τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν λοιπῶν.

ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, καὶ μεγίστη μὲν πασῶν ἔστω ἡ ΑΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΕ τῆς ΕΖ μὴ ἐλάττων ἔστω, ἔστω δὲ τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσα. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ ἐλάττων ἐστίν.

ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ ΒΗ, ΕΘ, καὶ κείσθω

---

1. ΒΔΕ] β̅δ̅ε̅· V. δυοῖν] δύο p. 3. ἄρα] om. Vp, corr. Halley. ΒΔΓ] bis V. τῶν] ἄρα τῶν p. 6. ἴση ἡ ΔΓ] ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ p. τῇ] p, τῆς V. 7. μείζων (pr.)] μείζων ἐστί p. 10. εὐθεῖα] om. p. 11. ἐστί] p, ἐστίν V. τῆς (pr.)] p, corr. ex ἡ m. 1 V, τῇ v. 12. νδʹ] om. V, νβʹ p. 19. μεγίστη] vp, -γίστη suppl. m. rec. V. πασῶν] om. p. 20. ἡ] vp, suppl. m. rec. V. 21. τοῖς] ἴσα τοῖς p. ἴσα] om. p. 23. ἤχθωσαν] ἔστωσαν p.

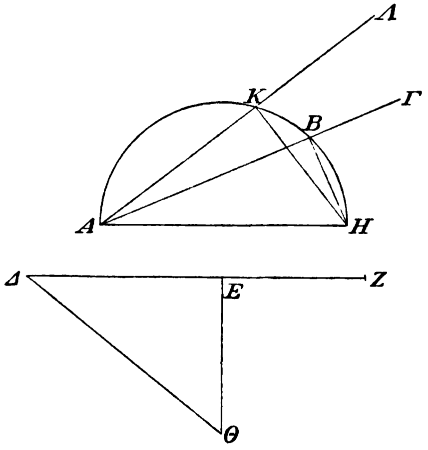
itaque $B\Delta E + BA\Gamma$ duobus rectis minores sunt [Eucl. I, 13]. uerum $B\Delta\Gamma + BA\Gamma$ duobus rectis aequales sunt [Eucl. III, 22]; itaque

$$B\Delta\Gamma + BA\Gamma > B\Delta E + BA\Gamma.$$

et ablato, qui communis est, angulo $BA\Gamma$ erit reliquus $B\Delta\Gamma > B\Delta E$. quoniam igitur $\Delta\Gamma = \Delta E$, et ΔB communis, et $\angle \Gamma\Delta B > B\Delta E$, erit etiam basis $\Gamma B > BE$ [Eucl. I, 24]. et quoniam $AB + BE > AE$ [Eucl. I, 20], et $AB + B\Gamma > AB + BE$, erit $AB + B\Gamma > AE$, hoc est $> A\Delta + \Delta\Gamma$.

LIV.

Si quattuor rectarum inaequalium summa quadratorum maximae minimaeque aequalis est summae quadratorum reliquarum, recta composita ex maxima minimaque minor erit recta ex reliquis composita.



sint quattuor rectae AB, $B\Gamma$, ΔE, EZ, et maxima omnium sit AB, minima autem $B\Gamma$, et ΔE non minor sit quam EZ, sintque $AB^2 + B\Gamma^2 = \Delta E^2 + EZ^2$. dico, esse $A\Gamma < \Delta Z$.

ducantur perpendiculares BH, $E\Theta$, ponaturque ἴση ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΕΘ τῇ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ, καὶ γεγράφθω περὶ τὸ ΑΒΗ ὀρθογώνιον ἡμικύκλιον. ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΒΗ, τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΘ ἴσα ἐστί, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΗ ἄρα τῷ ἀπὸ ΔΘ ἐστιν ἴσον, καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΔΘ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΘ τῆς ΒΗ μείζων ἐστίν, ἡ ἄρα τῇ ΕΘ ἴση ἐναρμοζομένη τῷ ἡμικυκλίῳ τεμεῖ τὴν ὑπὸ ΒΗΑ γωνίαν. ἐνηρμόσθω ἡ ΗΚ ἴση οὖσα τῇ ΘΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΚ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω ἴση ἡ ΚΛ τῇ ΚΗ. ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ ΑΚ, ΚΗ τοῖς ἀπὸ ΑΒ, ΒΗ ἴσα ἐστί, τὰ δὲ ἀπὸ ΑΒ, ΒΗ τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΘ ἴσα, τὰ ἄρα ἀπὸ ΑΚ, ΚΗ τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΘ ἴσα ἐστίν· ὧν τὸ ἀπὸ ΚΗ τῷ ἀπὸ ΕΘ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΚ τῷ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστί, καὶ ἡ ΑΚ τῇ ΔΕ· τὸ ἄρα ΑΚΗ τρίγωνον ἴσον καὶ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΔΕΘ, καὶ ἡ ΑΛ τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ εὐθεῖα τῆς ΚΗ οὐκ ἔστιν ἐλάττων, οὐδ' ἡ ΑΚ ἄρα περιφέρεια τῆς ΚΗ περιφερείας ἐλάττων ἐστί. καὶ διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα, ἐπεὶ ἐν τμήματι κύκλου κεκλασμέναι εἰσὶν αἱ ΑΚΗ, ΑΒΗ εὐθεῖαι, καί ἐστιν ἡ ΑΚΗ ἤτοι πρὸς τῇ διχοτομίᾳ ἢ ἔγγιον τῆς διχοτομίας, μείζων ἄρα ἡ ΑΚΗ τῆς ΑΒΗ, τουτέστιν ἡ ΑΛ τῆς ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΔΖ τῆς ΑΓ. ἐλάττων ἄρα ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι διῃρημέναι ὦσι, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν τῆς ἐλάττονος τμημάτων τετράγωνα ἴσα ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν τῆς μείζονος τμημάτων τετραγώνοις, τῶν

---

2. ΑΒΗ] ΑΒΗ τριγωνον p. 5. ἐστιν ἴσον] ἴσον ἐστί p. 6. ἡ (alt.)] bis V. ΕΘ] Θ e corr. p. 7. ἄρα] ἄρα

$BH = B\Gamma$ et $E\Theta = EZ$, et ducantur AH, $\Delta\Theta$, describaturque circum triangulum rectangulum ABH semicirculus [Eucl. III, 31]. quoniam igitur

$$AB^2 + B\Gamma^2 = \Delta E^2 + E\Theta^2 = AB^2 + BH^2,$$

erit etiam $AH^2 = \Delta\Theta^2$ [Eucl. I, 47] et $AH = \Delta\Theta$. et quoniam $E\Theta > BH$, recta rectae $E\Theta$ aequalis in semicirculum inserta $\angle BHA$ secabit. inseratur $HK = \Theta E$, ducaturque AK et producatur, sitque $K\Lambda = KH$. quoniam igitur [Eucl. I, 47]

$$AK^2 + KH^2 = AB^2 + BH^2 = \Delta E^2 + E\Theta^2,$$

quorum $KH^2 = E\Theta^2$, erit reliquum $AK^2 = \Delta E^2$ et $AK = \Delta E$; itaque $\triangle AKH$ triangulo $\Delta E\Theta$ aequalis est et similis [Eucl. I, 4], et $A\Lambda = \Delta Z$. quoniam igitur AK recta KH minor non est, ne arcus quidem AK arcu KH minor est [Eucl. III, 28]. et quoniam in segmento circuli fractae sunt rectae AKH, ABH, et AKH aut ad punctum medium est aut puncto medio propior, propter propositionem praecedentem [prop. LIIII] erit $AK + KH > AB + BH$, siue $A\Lambda > A\Gamma$ siue $\Delta Z > A\Gamma$. ergo $A\Gamma < \Delta Z$; quod erat demonstrandum.

LV.

Si duae rectae inaequales diuisae sunt, et quadrata partium minoris aequalia sunt quadratis partium

---

ἴση p. ἴση] om. p. 8. ἡ] καὶ ἔστω ἡ p. 11. τοῖς (pr.)] ἴσα εἰσὶ τοῖς p. ἴσα ἐστί] om. p. 12. ἴσα] om. p. 14. ἴσον (pr.)] ἴσον ἐστί p. 19. τό] corr. ex τοῦ p. 24. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. p. 25. νε'] om. V, νγ' p. 28. τῶν — τμημάτων] τῶν τμημάτων τῆς μείζονος p. τῆς μείζονος] v, τῆς μει- euan. V, rep. mg. m. rec.

τεσσάρων τμημάτων μέγιστον μὲν ἔσται τὸ τῆς ἐλάττονος μεῖζον τμῆμα, ἐλάχιστον δὲ τὸ ἔλαττον.

ἔστωσαν εὐθεῖαι δύο ἄνισοι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ διῃρημέναι κατὰ τὰ Β καὶ Ε σημεῖα, ὥστε τὴν μὲν ΔΕ τῆς ΕΖ μείζονα εἶναι, τὴν δὲ ΑΒ τῆς ΒΓ μὴ εἶναι ἐλάσσονα, καὶ μείζων μὲν ἔστω ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ τετραγώνοις ἴσα. λέγω, ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΕ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΕΖ.

ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ ἡ ΒΗ ἴση οὖσα τῇ ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ, καὶ περὶ τὸ ΑΒΗ ὀρθογώνιον γεγράφθω ἡμικύκλιον. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ εὐθεῖα τῆς ΒΗ οὐκ ἔστιν ἐλάττων, καὶ ἡ ΑΒ ἄρα περιφέρεια τῆς ΒΗ οὐκ ἔστιν ἐλάττων· ἡ ἄρα τῆς ΑΒΗ περιφερείας διχοτομία ἤτοι κατὰ τὸ Β ἔσται ἢ ἐπὶ τῆς ΑΒ περιφερείας, οἷον κατὰ Θ. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῇ διχοτομίᾳ, διαστήματι δὲ ὁποτερῳοῦν τῶν Α, Η γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Γ, ὡς προεδείχθη· γεγράφθω οὖν καὶ ἔστω ὁ ΑΚΓΗ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ ΔΕ, ΕΖ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΗ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΑΗ. ἐλάττων δὲ ἡ ΔΖ τῆς ΑΓ· δυνατὸν ἄρα μεταξὺ τῶν ΑΓ, ΑΗ εὐθειῶν ἐναρμόσαι τῷ ΑΚΓΗ κύκλῳ εὐθεῖαν ἴσην τῇ ΔΖ. ἐνηρμόσθω ἡ ΑΛΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΗ· ἴση ἄρα διὰ τὰ προδεδειγμένα ἡ

---

6. *μείζων*] p, *μεῖζον* V. 9. *ἐστιν*] *ἔσται* p. *ἐλαχίστη δέ*] rep. mg. m. rec. V sine necessitate. 13. *καὶ ἡ* — 14. *ἐλάττων*] supra scr. m. 1 p. 13. *ἄρα*] om. p. 15. *ἤτοι*] *ἤ* p. *ἔσται*] *ἐστιν* p. 16. *Θ*] *τὸ Θ* p. 19. *οὖν* (pr.)] om. p. 24. *ΑΗ*] vp, lacuna absumptum V. 26. *ἄρα*] *ἄρα ἐστί* p. *προδεδειγμένα*] vp, *γ* supra scr. m. 1 V.

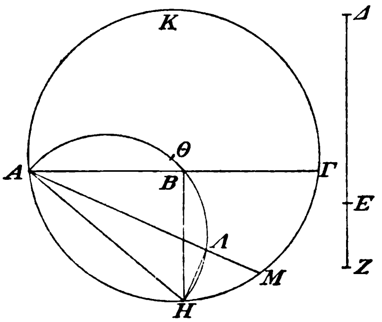
maioris, quattuor partium maxima erit pars maior minoris, minima autem minor.

sint duae rectae inaequales $AB\Gamma$, ΔEZ in punctis B, E ita diuisae, ut sit $\Delta E > EZ$, AB autem non minor quam $B\Gamma$, sitque $A\Gamma > \Delta Z$ et

$$AB^2 + B\Gamma^2 = \Delta E^2 + EZ^2.$$

dico, quattuor rectarum AB, $B\Gamma$, ΔE, EZ maximam esse ΔE, minimam autem EZ.

ducatur ad $A\Gamma$ perpendicularis $BH = B\Gamma$, ducaturque AH, et circum triangulum rectangulum ABH describatur semicirculus [Eucl. III, 31]. quoniam igitur recta AB non minor est quam BH, etiam arcus AB non minor est quam BH [cfr. Eucl. III, 28]; punctum igitur medium arcus ABH aut in B erit aut in arcu AB, uelut in Θ. itaque circulus centro puncto medio, radio autem alterutro A, H descriptus etiam per Γ ueniet, ut antea demonstratum est [prop. LII]; describatur igitur et sit $AK\Gamma H$. quoniam igitur $\Delta Z^2 > \Delta E^2 + EZ^2$ [Eucl. II, 4] et



$$\Delta E^2 + EZ^2 = AH^2 \text{ [Eucl. I, 47]},$$

erit etiam $\Delta Z^2 > AH^2$; quare $\Delta Z > AH$. uerum $\Delta Z < A\Gamma$; itaque fieri potest, ut inter rectas $A\Gamma$, AH in circulum $AK\Gamma H$ recta inseratur rectae ΔZ aequalis. inseratur $A\Lambda M$, ducaturque ΛH; itaque

ΛΜ τῇ ΛΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΑΛ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΑΒ οὐκ ἐλάσσων τῆς ΒΗ, ἡ ἄρα ΑΛ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΒΗ. ἡ δὲ ΛΗ ἐλάττων ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΒΗ· τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΗ, ΑΛ, ΛΗ μεγίστη μὲν ἡ ΑΛ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΛΗ. ἀλλ' ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΛΗ, τουτέστιν ἡ ΛΜ, τῇ ΕΖ, ὡς δείξομεν· τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἡ ΔΕ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΕΖ· ὃ προέκειτο δεῖξαι.

νϛʹ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἴσαι διῃρημέναι ὦσιν οὕτως, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἑτέρας τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς λοιπῆς ἴσον εἶναι, καὶ τὰ τμήματα τοῖς τμήμασιν ἴσα ἔσται ἑκάτερον ἑκατέρῳ.

ἔστωσαν εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις αἱ ΑΛΜ, ΔΕΖ διῃρημέναι κατὰ τὰ Λ καὶ Ε σημεῖα, ὥστε τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΛΜ ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΑΛ τῇ ΔΕ.

ἐπεὶ ἴση ἡ ΑΜ τῇ ΔΖ, καὶ αἱ ἡμίσειαι ἄρα ἴσαι εἰσίν. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΜ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΔΖ ἴσον ἐστίν. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΜ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ, καί ἐστι τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΛΜ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ ἡ ΔΖ ἄρα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ε, ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΜ, τουτέστι τῆς ἡμισείας τῆς ΔΖ.

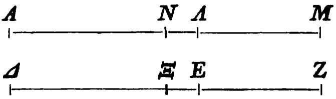
---

3. ἡ δέ — 4. ΒΗ (pr.)] om. p. 8. μέν] μέν ἐστιν p. 9. ὃ προέκειτο δεῖξαι] om. p. 10. νςʹ] om. V, νδʹ p. 11. οὕτως] vp, euan. V, rep. mg. m. rec. 12. καί] om. p. 13. τοῖς] e corr. p. 14. ἑκάτερον ἑκατέρῳ] om. p. 16. ὥστε] καὶ ἔστω p. 17. εἶναι] om. p. ἐστὶν ἴση] ἴση ἐστίν p. 19. ἴση] γὰρ ἴση ἐστίν p. 23. τό] ἴσον τῷ p. ἡ] p, om. V.

propter ea, quae antea demonstrauimus [prop. LII], erit $\Lambda M = \Lambda H$. quoniam igitur $A\Lambda > AB$ [Eucl. III, 15], et AB non minor quam BH, $A\Lambda$ utraque AB, BH maior est. ΛH autem utraque AB, BH minor est [Eucl. III, 15]; itaque rectarum AB, BH, $A\Lambda$, ΛH maxima est $A\Lambda$, minima autem ΛH. sed $BH = B\Gamma$, $A\Lambda = \Delta E$, $\Lambda H = \Lambda M = EZ$, ut demonstrabimus [prop. LVI];¹) ergo rectarum AB, $B\Gamma$, ΔE, EZ maxima est ΔE, minima autem EZ; quod erat propositum.

LVI.

Si duae rectae aequales ita diuisae sunt, ut etiam rectangulum partium alterius rectangulo partium reliquae aequale sit, etiam partes partibus aequales erunt singulae singulis.



sint rectae inter se aequales $A\Lambda M$, ΔEZ in punctis Λ, E ita diuisae, ut sit $A\Lambda \times \Lambda M = \Delta E \times EZ$. dico, esse $A\Lambda = \Delta E$.

quoniam $AM = \Delta Z$, erit etiam $\frac{1}{2} AM = \frac{1}{2} \Delta Z$; quare etiam $(\frac{1}{2} AM)^2 = (\frac{1}{2} \Delta Z)^2$. iam si AM in Λ in duas partes aequales secta est, et

$$A\Lambda \times \Lambda M = (\tfrac{1}{2} AM)^2,$$

etiam ΔZ in E in duas partes aequales secta est, quoniam $\Delta E \times EZ = (\frac{1}{2} AM)^2 = (\frac{1}{2} \Delta Z)^2$ [Eucl. II, 5].

---

1) Nam $A\Lambda \times \Lambda M = \Delta E \times EZ$, quia
$A\Lambda^2 + \Lambda M^2 + 2 A\Lambda \times \Lambda M = \Delta E^2 + EZ^2 + 2 \Delta E \times EZ$,
et $A\Lambda^2 + \Lambda M^2 = A\Lambda^2 + \Lambda H^2 = AH^2 = \Delta E^2 + EZ^2$.

---

24. *τό* (alt.) — *τῷ*] vp, euan. V, rep. mg. m. rec. 25. *τουτέστι*] *τουτέστιν* V. *τῆς ἡμισείας* (alt.)] om. p.

εἰ δὲ μή, τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ν, Ξ σημεῖα· ἴση ἄρα ἡ ΝΜ εὐθεῖα τῇ ΞΖ. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΝΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΞΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΛΜ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΞΕ, ὧν τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΛΜ τῷ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσον ἐστί· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΝΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΞΕ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΝΛ τῇ ΞΕ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΞΖ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΛΜ τῇ ΕΖ ἴση. ὥστε καὶ ἡ ΑΛ τῇ ΔΕ ἴση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νζʹ.

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ἄξονος τμηθῇ, τῶν γενομένων τριγώνων τὸ μεῖζον μείζονα περίμετρον ἔχει, καὶ οὗ τριγώνου μείζων ἡ περίμετρος, καὶ αὐτὸ μεῖζόν ἐστι.

τετμήσθω κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ΑΒ ἄξονος, καὶ γενέσθω ἐκ τῆς τομῆς τὰ ΑΓΔ, ΑΕΖ τρίγωνα, μεῖζον δὲ τὸ ΑΓΔ, ὥστε τὴν μὲν ΕΑ τῆς ΑΖ μείζονα εἶναι, τὴν δὲ ΓΑ τῆς ΑΔ μὴ ἐλάττονα. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓΔ περίμετρος τῆς ΑΕΖ περιμέτρου μείζων ἐστίν.

ἐπεὶ γὰρ ἴσαι μὲν αἱ ΓΔ, ΕΖ βάσεις, κοινὴ δὲ ἦκται ἡ ΒΑ ἐπὶ τὴν διχοτομίαν αὐτῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς, καί ἐστι τὸ ΑΕΖ τοῦ ΑΓΔ ἔλαττον, ἡ ἄρα ΕΑ πρὸς ΑΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΔ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ καʹ θεωρήματι· ἡ μὲν ἄρα ΕΑ

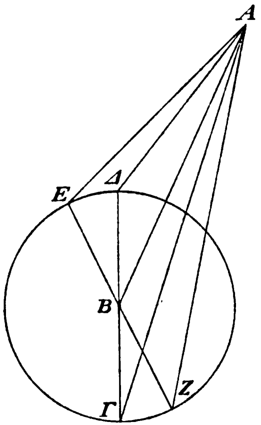
---

1. *Ν, Ξ*] e corr. p. 2. *τῆς ΝΜ τῷ ἀπό*] om. p, *τῆς Μ τῷ* supra scr. m. 1. 3. *τῆς ΞΖ*] vp, euan. V, rep. mg. m. rec. 8. *λοιπή*] *καὶ λοιπή* p. *τῇ ΕΖ*] vp, Ζ corr. ex Ξ V, rep. mg. m. rec. *ἴση*] *ἐστιν ἴση* p. 9. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] *ἐστίν* p. 10. *νζʹ*] om. V, *νεʹ* p. 17. *μείζονα*] p, *μεῖζον* V. 18. *ἐλάττονα*] *ἐλάσσονα* p. 19. *τῆς — ἐστίν*] *μείζων ἐστὶ τῆς ΑΕΖ περιμέτρου* p. 20. *μέν*] *μέν εἰσιν* p. *ΓΔ*] *ΔΓ* p.

sin minus, in punctis N, Ξ in binas partes aequales secentur; itaque $NM = \Xi Z$. quare $NM^2 = \Xi Z^2$, hoc est $A\Lambda \times \Lambda M + N\Lambda^2 = \Delta E \times EZ + \Xi E^2$ [Eucl. II, 5], quorum $A\Lambda \times \Lambda M = \Delta E \times EZ$; itaque reliquum $N\Lambda^2 = \Xi E^2$; quare $N\Lambda = \Xi E$. uerum etiam $NM = \Xi Z$; itaque reliqua $\Lambda M = EZ$. ergo etiam $A\Lambda = \Delta E$; quod erat demonstrandum.

LVII.

Si conus scalenus per axem secatur, triangulorum effectorum maior maiorem perimetrum habet, et cuius trianguli maior est perimetrus, et ipse maior est.



conus scalenus per axem AB secetur, et per sectionem efficiantur trianguli $A\Gamma\Delta$, AEZ, maior autem sit $A\Gamma\Delta$, ita ut sit $EA > AZ$, ΓA autem non minor quam $A\Delta$ [prop. XXIV]. dico, perimetrum $A\Gamma\Delta$ maiorem esse perimetro AEZ.

quoniam enim basis

$$\Gamma\Delta = EZ,$$

communis autem BA a uertice ad punctum medium earum ducta, et $\triangle AEZ < A\Gamma\Delta$, erit $EA : AZ > \Gamma A : A\Delta$, ut in prop. XXI demonstratum est; itaque EA quattuor rectarum maxima

---

EZ] vp, euan. V, rep. mg. m. rec. 23. AZ] AB V, τὴν AB p, corr. Comm. 24. ἐδείχϑη] vp, -η suppl. m. rec. V. ϰα΄] ϰ΄ p? EA μεγίστη ἐστί] vp, euan. V, rep. mg. m. rec.

μεγίστη ἐστὶ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν, ἡ δὲ ΑΖ ἐλαχίστη· καὶ ταῦτα γὰρ ἐδείχθη ιη΄ καὶ ιθ΄ θεωρήματι. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης, τουτέστι τὰ ἀπὸ ΕΑ, ΑΖ, τοῖς ἀπὸ ΓΑ, ΑΔ ἴσα ἐστί, συναμφότερος ἄρα ἡ ΕΑ, ΑΖ εὐθεῖα συναμφοτέρου τῆς ΓΑ, ΑΔ ἐλάττων ἐστὶ διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα. προσκείσθωσαν αἱ ΕΖ, ΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕΖ περίμετρος ὅλης τῆς ΑΓΔ περιμέτρου ἐλάττων ἐστί. μείζων ἄρα ἡ τοῦ μείζονος περίμετρος.

Καὶ γέγονε φανερόν, ὅτι ἐν τοῖς σκαληνοῖς κώνοις τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων μεγίστη μὲν ἡ τοῦ μεγίστου περίμετρος, τουτέστι τοῦ ἰσοσκελοῦς, ἐλαχίστη δὲ ἡ τοῦ ἐλαχίστου, τουτέστι τοῦ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ κώνου, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ τὸ μεῖζον μείζονα περιμέτρου ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον.

Πάλιν ὑποκείσθω ἡ τοῦ ΓΑΔ τριγώνου περίμετρος μείζων εἶναι τῆς τοῦ ΕΑΖ. λέγω δή, ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τοῦ ΕΑΖ μεῖζόν ἐστιν.

ἐπεὶ ἡ ΑΓΔ περίμετρος τῆς ΕΑΖ περιμέτρου μείζων ἐστίν, ἴση δὲ ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ, λοιπὴ ἄρα συναμφότερος ἡ ΓΑ, ΑΔ συναμφοτέρου τῆς ΕΑ, ΑΖ μείζων ἐστί. καί ἐστι τὰ ἀπὸ ΓΑ, ΑΔ τοῖς ἀπὸ ΕΑ, ΑΖ ἴσα· τῶν ἄρα ΓΑ, ΑΔ, ΕΑ, ΑΖ εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΕΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΖ· ταῦτα γὰρ ἅπαντα προδέδεικται. ἡ ΕΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΑ πρὸς ΑΓ. ἐπεὶ οὖν

---

2. ιη΄ καί] V, ἐν τῷ p, † ιη΄ καὶ ιθ΄ add. mg. m. rec. V. 3. τά] p, τό V. 4. ΑΖ] om. V. 5. ΕΑ, ΑΖ] ΕΑΖ p. 6. ΓΑ, ΑΔ] ΓΑΔ p. 7. ἡ] p, om. V. 8. ὅλης] vp, -ης supra lacunam chartae m. 1 V. 11. μέν] μέν ἐστιν p. 13. τοῦ (alt.)] p, τῇ Vv. 17. Post τῆς add. † m. rec. V, in mg.

est, AZ autem minima; nam haec quoque demonstrata sunt in propp. XVIII et XIX.1) et quoniam quadrata maximae minimaeque, hoc est $EA^2 + AZ^2$, quadratis $\Gamma A^2 + A\Delta^2$ aequalia sunt [prop. XVII], erit $EA + AZ < \Gamma A + A\Delta$ propter propositionem praecedentem [immo prop. LIV]. adiiciantur EZ, $\Gamma\Delta$; itaque tota perimetrus AEZ minor est tota perimetro $A\Gamma\Delta$.' ergo maior est maioris perimetrus.

Et manifestum est, in conis scalenis triangulorum per axem ductorum maximam esse perimetrum maximi, hoc est aequicrurii, minimam autem minimi, hoc est trianguli ad basim coni perpendicularis [prop. XXIV], ceterorum autem semper maiorem perimetrum habere maiorem quam minorem.

Rursus supponamus, perimetrum trianguli $\Gamma A\Delta$ maiorem esse perimetro trianguli EAZ. dico, esse $\triangle A\Gamma\Delta > EAZ$.

quoniam perimetrus $A\Gamma\Delta$ perimetro EAZ maior est, et $\Gamma\Delta = EZ$, erit reliqua $\Gamma A + A\Delta > EA + AZ$. et $\Gamma A^2 + A\Delta^2 = EA^2 + AZ^2$ [prop. XVII]; quare rectarum ΓA, $A\Delta$, EA, AZ maxima est EA, minima autem AZ [prop. LV]; nam haec omnia antea demonstrata sunt. itaque $EA : AZ > \Delta A : A\Gamma$. quon-

---

1) Nam $EA^2 : AZ^2 > \Gamma A^2 : A\Delta^2$ (prop. XVIII);
$EA^2 + AZ^2 = \Gamma A^2 + A\Delta^2$ (prop. XVII);
tum e prop. XIX maximum EA^2, minimum AZ^2.

---

quaedam euan. EAZ] vp, A e corr. V. δή] om. p. 19. ἐπεί] ἐπεὶ γάρ p. $A\Gamma\Delta$] $\Delta A\Gamma$ p. 21. ΓA, $A\Delta$] $\Gamma A\Delta$ p. τῆς EA, AZ] v, alt. A euan. V; rep. mg. m. rec. V, τῆς EAZ p. 23. AZ (alt.)] p, AE V. 24. ταῦτα] vp, euan. V, rep. mg. m. rec.

δύο τρίγωνα τὰ ΓΑΔ, ΕΑΖ βάσεις ἴσας ἔχει, ἔχει δὲ καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένην τὴν αὐτήν, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τοῦ ἑτέρου μείζων πρὸς τὴν ἐλάττονα, καὶ τὰ λοιπά, τὸ ἄρα ΕΑΖ τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι· μεῖζον ἄρα τὸ ΓΑΔ τρίγωνον τοῦ ΕΑΖ [ὡς ἐδείχθη θεωρήματι ιθ' τοῦ πρώτου βιβλίου].

νη'.

Τῶν ἴσων μὲν καὶ ὀρθῶν κώνων, ἀνομοίων δέ, ἀντιπέπονθε τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα ταῖς ἑαυτῶν βάσεσιν.

ἔστωσαν κῶνοι ὀρθοὶ καὶ ἴσοι, ἀνόμοιοι δέ, ὧν κορυφαὶ μὲν τὰ Α, Β σημεῖα, ἄξονες δὲ οἱ ΑΗ, ΘΒ, τὰ δὲ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ, βάσεις δὲ τῶν κώνων οἱ περὶ τὰς ΓΔ, ΕΖ διαμέτρους κύκλοι. λέγω, ὅτι, ὡς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ.

ἐπεὶ γὰρ ἴσοι εἰσὶν οἱ κῶνοι, ὡς ἄρα ὁ περὶ τὸ Η κέντρον κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὸ Θ κύκλον, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΑΗ. ὁ δὲ περὶ τὸ Η κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὸ Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ

---

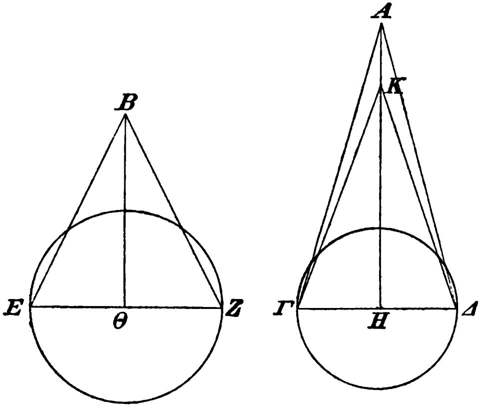
3. ἠγμένην] vp, ἠγμέ- euan. V, rep. mg. m. rec. 6. ἐστι] ἐστι τοῦ ΓΑΔ p. 7. ὡς ἐδείχθη — 8. βιβλίου] V, deleo. 7. θεωρήματι — 8. βιβλίου] ἐν τῷ κ̄ω θεωρήματι p. 9. νη'] om. V, νϛ' p. 11. τά] om. V. 12. βάσεσιν] hic des. fol. 235^{u} V, mg. m. rec. τὸ ἑξῆς ἔστωσαν κῶνοι. 13. ἔστωσαν — ὀρθοί] vp, euan. V, rep. mg. m. rec. 14. ΘΒ] v, Θ euan. V, ΒΘ p. 15. ΑΓΔ] litt. ΓΔ e corr. p. 16. διαμέτρους] om. p. 18. ΒΕΖ] vp, Β euan. V, mg. „ΑΕΖ in apographo. melius ΒΕΖ ex superioribus“ m. rec. 20. κέντρον] p, euan. V, rep. mg. m. rec.; om. v. 21. Η] uel Κ Vv, Η κέντρον p. 22. -να λόγον ἔχει] vp, euan. V, rep. mg. m. rec.

iam igitur duo trianguli $\Gamma A\Delta$, EAZ bases aequales habent, habent autem etiam rectam a uertice ad punctum medium basis ductam eandem, et maius latus alterius ad minus maiorem rationem habet quam alterius latus maius ad minus, et cetera, triangulus EAZ minor est [prop. XX]. ergo $\triangle\, \Gamma A\Delta > EAZ$.

LVIII.

Conorum aequalium rectorumque, sed non similium, trianguli per axem ducti in contraria proportione sunt basium suarum.

sint coni recti aequalesque, sed non similes, quorum uertices sint puncta A, B, axes autem AH, ΘB,



et trianguli per axem ducti $A\Gamma\Delta$, BEZ, bases autem conorum circuli circum $\Gamma\Delta$, EZ diametros descripti. dico, esse $\triangle\, A\Gamma\Delta : BEZ = EZ : \Gamma\Delta$.

quoniam enim coni aequales sunt, erit, ut circulus circum H centrum descriptus ad circulum circum Θ

ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔστω τῶν ΘΒ, ΑΗ μέση ἀνάλογον ἡ ΚΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΚΔ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἥ τε ΒΘ πρὸς τὴν ΚΗ καὶ ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΚΗ, τὸ ΒΕΖ ἄρα τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΓΔ τριγώνῳ. καὶ ἐπεί, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς ΗΑ, ὡς δὲ ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΑ, οὕτως τὸ ΚΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ, ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὸ ΚΓΔ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΒΕΖ τρίγωνον, πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν. ἀντιπέπονθεν ἄρα τὰ ἐκκείμενα τρίγωνα ταῖς ἑαυτῶν βάσεσιν.

νθ'.

Ὧν κώνων ὀρθῶν ἀντιπέπονθε τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ταῖς ἑαυτῶν βάσεσιν, οὗτοι ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις.

ἔστωσαν κῶνοι ὀρθοί, ὧν κορυφαὶ μὲν τὰ Α, Β σημεῖα, ἄξονες δὲ αἱ ΑΗ, ΒΘ εὐθεῖαι, τὰ δὲ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ, καὶ ἔστω, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὸ ΕΒΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ. λέγω, ὅτι ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις οἱ κῶνοι.

γενέσθω, ὡς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ, οὕτως τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ΒΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ΚΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὸ

---

1. ΘΒ] ΒΘ p. 7. οὕτως — 9. ΕΖ] om. p. 7. ΗΑ] τὴν ΗΑ Halley. 9. ὡς ἄρα] rep. mg. m. rec. V sine causa.

descriptum, ita $B\Theta : AH$ [Eucl. XII, 15]. circulus autem circum H descriptus ad circulum circum Θ descriptum rationem habet, quam $\Gamma\Delta^2 : EZ^2$ [Eucl. XII, 2]. sit rectarum ΘB, AH media proportionalis KH, ducanturque $K\Gamma$, $K\Delta$; itaque [Eucl. V def. 9] $\Gamma\Delta : EZ = B\Theta : KH = KH : HA$. quoniam igitur $\Gamma\Delta : EZ = B\Theta : KH$, erit $\triangle BEZ = K\Gamma\Delta$ [Eucl. VI, 14; I, 41]. et quoniam $\Gamma\Delta : EZ = KH : HA$, et $KH : HA = K\Gamma\Delta : A\Gamma\Delta$ [cfr. Eucl. VI, 1], erit $\Gamma\Delta : EZ = K\Gamma\Delta : A\Gamma\Delta = BEZ : A\Gamma\Delta$; quare etiam $A\Gamma\Delta : BEZ = EZ : \Gamma\Delta$. ergo trianguli propositi in contraria proportione sunt basium suarum.

LIX.

Quorum conorum rectorum trianguli per axes ducti in contraria proportione sunt basium suarum, inter se aequales sunt.

sint coni recti, quorum uertices sint puncta A, B, axes autem rectae AH, $B\Theta$, trianguli autem per axes ducti $A\Gamma\Delta$, BEZ, et sit

$$\Gamma\Delta : EZ = \triangle EBZ : \triangle A\Gamma\Delta.$$

dico, conos inter se aequales esse.

fiat $BEZ : A\Gamma\Delta = A\Gamma\Delta : KEZ$; itaque

$$BEZ : KEZ = \Gamma A\Delta^2 : KEZ^2 \text{ [Eucl. V def. 9].}$$

---

10. τρίγωνον (alt.)] om. p. 11. τρίγωνον (pr.)] om. p, rep. mg. m. rec. V sine causa. καί] om. p lacuna parua relicta. 12. βάσις] vp, euan. V, supra scr. m. rec. 15. νθ′] om. V, νζ′ p. 16. διά] bis V, sed corr. 19. κῶνοι ὀρθοί, ὧν] scripsi, κώνων οἷον V, κῶνοι ὧν p, κώνων Halley cum Comm. 20. αἱ] οἱ p. εὐθεῖαι] om. p. 23. ἴσοι — ἀλλήλοις] p et ἴσοι in ras. v; euan. V, rep. mg. m. rec. 26. ἥπερ] vp; ἥ- euan. V, mg. „† ἥπερ apogr.“ m. rec.

ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ, ὡς δὲ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΑΓΔ, οὕτως τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ. ὥστε ἐπεὶ τὰ ΑΓΔ, ΚΕΖ τρίγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ἄρα ὕψος ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΚΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖ, ὁ ἄρα Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΕΚΖ. εἶχε δὲ καὶ τὸ ΕΒΖ πρὸς τὸ ΕΚΖ διπλασίονα λόγον ἤπερ τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΕΚΖ· ὡς ἄρα ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, οὕτω τὸ ΕΒΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖ, τουτέστιν ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΚΘ. καί ἐστιν ἡ ΘΚ τῇ ΑΗ ἴση· ὡς ἄρα ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, οὕτως ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΑΗ. καί εἰσιν αἱ ΒΘ, ΑΗ ἄξονες τῶν κώνων καὶ ἀντιπεπόνθασι ταῖς βάσεσι, τουτέστι τοῖς Η, Θ κύκλοις· οἱ ἄρα Α, Β κῶνοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν.

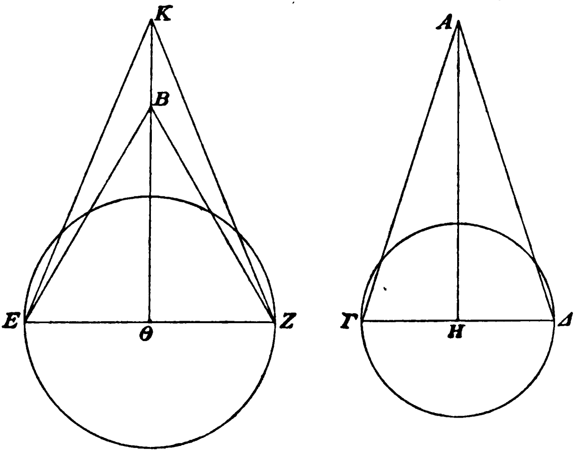
---

1. *τό* (pr.)] Vvp, mg. „† *τὴν* apogr.“ m. rec. V. *ΒΕΖ*] *ΕΒΖ* p. 5. *ἐστιν ὡς*] vp, rep. mg. m. rec. V, *-ιν ὡς* euan. 6. *Η*] *περὶ τὸ Η* p. 7. *Θ*] *περὶ τὸ Θ* p. 8. *διάμετρος* (pr.)] vp, rep. mg. m. rec. V, *-ετρ-* euan. 9. *ΕΚΖ*] *ΚΕΖ* p. 10. *Η*] *περὶ τὸ Η* p. *Θ*] *περὶ τὸ Θ* p. 11. *ΕΚΖ*] vp, euan. V, rep. mg. m. rec. 12. *διπλασίονα*] vp, rep. mg. m. rec. V, *-σίονα* euan. 13. *ΕΚΖ*] *ΚΕΖ* p. 14. *οὕτω*] *οὕτως* Halley. *ΕΒΖ*] des. fol. 236^{u} V; quartam partem superiorem folii 237 in alio genere chartae suppleuit m. 3 V (contuli etiam v). 15. *ΚΘ*] v, *ΘΚ* Vp. 18. *ταῖς*] rursus inc. m. 1 V. 19. *Η, Θ*] vp, euan. V, supra scr. m. rec. *Α, Β*] v, mg. m. rec V, *Α* euan.; *ΑΓΔ, ΒΕΖ* p.

quoniam igitur $\Gamma\Delta : EZ = \triangle\, BEZ : \triangle\, A\Gamma\Delta$ et $BEZ : A\Gamma\Delta = A\Gamma\Delta : KEZ$, erit

$$\Gamma\Delta : EZ = A\Gamma\Delta : KEZ.$$

quare quoniam trianguli $A\Gamma\Delta$, KEZ inter se rationem habent quam bases, sub eadem altitudine sunt [Eucl. VI, 1]; itaque $AH = K\Theta$. et quoniam circulus H ad circulum Θ duplicatam rationem habet quam diametrus $\Gamma\Delta$ ad EZ [Eucl. XII, 2], et $\Gamma\Delta : EZ = A\Gamma\Delta : EKZ$, erit $H : \Theta = \Gamma A\Delta^2 : EKZ^2$. erat autem etiam $EBZ : EKZ = \Gamma A\Delta^2 : EKZ^2$; quare $H : \Theta = EBZ : EKZ = B\Theta : K\Theta$ [cfr. Eucl. VI, 1]. est autem $\Theta K = AH$; itaque $H : \Theta = B\Theta : AH$. et $B\Theta$, AH axes sunt conorum et sunt in contraria ratione basium, h. e. circulorum H, Θ; ergo coni A, B inter se aequales sunt [Eucl. XII, 15].



ξʹ.

Ἐὰν δύο κώνων ὀρθῶν ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν διπλασίονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσται.

ἔστωσαν κῶνοι ὀρθοί, ὧν κορυφαὶ μὲν τὰ Α, Β σημεῖα, βάσεις δὲ οἱ περὶ τὰ Η, Θ κέντρα κύκλοι, τὰ δὲ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ, ἐχέτω δὲ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ διπλασίονα λόγον ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ. λέγω, ὅτι τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ἔστω, ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ. ἐπεὶ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον, ἀλλὰ καὶ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, ὡς ἄρα ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον. ὥστε ἐπεὶ οἱ ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ κῶνοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἰσοϋψεῖς ἄρα εἰσὶ διὰ τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τοῦ ιβʹ τῶν Στοιχείων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν ὁ

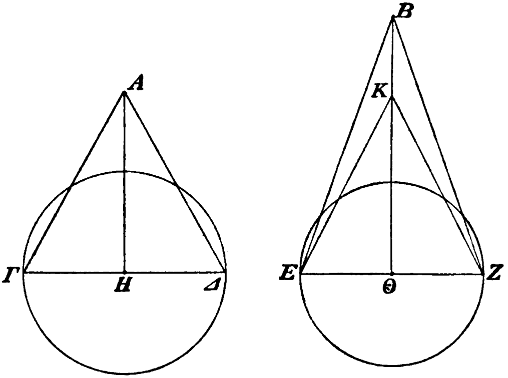
---

1. ξʹ] om. V, νηʹ p. 2. ἐὰν δύο] v, euan. V, supra scr. m. rec.; ἐάν p. πρός — 4. ἔσται] vp (ἀλλήλαις v), euan. V, rep. mg. m. rec. 5. κορυφαί] p, κορυφή Vv. 7. ΑΓΔ] p, ΑΒΔ V. 8. Θ] vp; euan. V, mg. Β m. 2, „littera $\overline{B}$ extra seriem adiecta redundare uidetur“ m. rec. 9. ΑΗΓΔ] ΑΗΔ p. 10. ἴσα] vp, suppl. m. rec. V. 11. πρὸς τόν] vp, suppl. m. rec. V, „sic in apographo“ mg. ΒΘΕΖ] p, ΒΘΕΞ Vv. 12. ΒΘΕΖ] p, ΒΘΕΞ Vv. ΚΘΕΖ] des. fol. 237^{r} V. ἐπεί — 15. λόγον] m. 3 V (cfr. ad p. 276, 14); contuli etiam v. 12. ἐπεί] v, καὶ ἐπεί Vp. 14. ΑΗΓΔ] vp, corr. ex ΒΘΕΖ eadem manu V. 16. ὁ (pr.)] v, supra lac. m. rec. V, om. p. ΑΗΓΔ κῶνος] om. p. 19. ἰσοϋψεῖς] vp, euan. V, rep. mg.

LX.

Si duorum conorum rectorum basis ad basim duplicatam rationem habet, quam conus ad conum, trianguli per axes ducti inter se aequales erunt.

sint coni recti, quorum uertices sint puncta A, B, bases autem circuli circum H, Θ centra descripti, trianguli autem per axes ducti $A\Gamma\Delta$, BEZ, sit autem $H : \Theta = AH\Gamma\Delta^2 : B\Theta EZ^2$. dico, esse



$$\triangle A\Gamma\Delta = BEZ.$$

sit $AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = B\Theta EZ : K\Theta EZ$. quoniam $H : \Theta = AH\Gamma\Delta^2 : B\Theta EZ^2$, uerum etiam $AH\Gamma\Delta : K\Theta EZ = AH\Gamma\Delta^2 : B\Theta EZ^2$ [Eucl. V def. 9], erit $H : \Theta = AH\Gamma\Delta : K\Theta EZ$. quare quoniam coni $AH\Gamma\Delta$, $K\Theta EZ$ inter se rationem habent quam bases, aequalis altitudinis sunt propter conuersum theorema

---

m. rec. ἄρα] hinc contuli etiam v. 20. τοῦ θεωρήματος] τοῦ ια' θεωρήματος p. 21. ἐστὶν ἡ *ΑΗ*] v, ἡ *ΑΗ* p; euan. V (*ΒΗ*?), ἐστὶν ἡ *ΒΗ* mg. m. rec.

Η κύκλος πρὸς τὸν Θ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον, τουτέστιν ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΚ, ἔχει δὲ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΚ, τουτέστι πρὸς ΑΗ. ἴσα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα· ὃ προέκειτο δεῖξαι.

ξα'.

Καὶ ἐὰν τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ᾖ, ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον.

καταγεγράφθωσαν πάλιν οἱ προκείμενοι κῶνοι, καὶ ὑποκείσθω τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. δεικτέον δή, ὅτι ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον.

ἔστω γάρ, ὡς ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς ΑΗ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ. ἐπεὶ οὖν τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα

---

1. Θ] v, Θ κύκλον p; euan. V, mg. „·:· Θ ex superioribus“ m. rec. 2. τουτέστιν] ξτέστιν V, τουτέστιν mg. m. rec. 4. ΘΚ] vp, euan. V, „puto ΘΚ“ mg. m. rec. δέ] vp; δὲ δὲ, alt. euan., V, mg. „puto καί“ m. rec. τόν] p, om. Vv. Θ] in ras. m. 1 v. 5. λόγον] rep. mg. m. rec. V sine causa. ΕΖ] τὴν ΕΖ p. 6. ΓΔ] vp, euan. V. πρός (pr.) — 7. πρός] vp, euan. V, rep. mg. m. rec. 6. ΕΖ] τὴν ΕΖ p. ΘΚ] τὴν ΘΚ p. 7. πρός] τήν p. ἴσα — τρίγωνα] rep. mg. m. rec. V sine necessitate. ΒΕΖ] ΒΕΔ Vvp, ΒΗΔ in repetitione m. rec. V; corr. Comm. ὃ προέκειτο δεῖξαι] v, om. p; ὃ προέ- sustulit lacuna in V, mg. „puto deesse ὃ προ-“ m. rec. 8. δεῖξαι] hic des. (fol. 237^{u}) m. 1 V, cetera m. 3. 9. ξα'] om. v, νθ' p, ξ' m. rec. V. 13. καταγεγράφθωσαν — κῶνοι] ἔστω γὰρ πάλιν ἡ αὐτὴ καταγραφὴ τῶν κώνων p. 18. ΑΗ] τὴν ΑΗ p. 19. ΗΚ] τὴν ΗΚ p.

libri XII Elementorum [Eucl. XII, 11]; itaque $AH = K\Theta$. quoniam igitur

$$H : \Theta = AH\Gamma\Delta^2 : B\Theta EZ^2 = B\Theta EZ^2 : K\Theta EZ^2$$
$$= B\Theta^2 : \Theta K^2 \text{ [cfr. Eucl. XII, 11],}$$

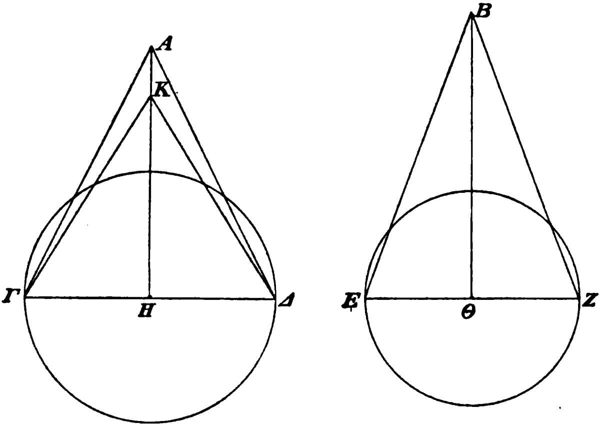
et $H : \Theta = \Gamma\Delta^2 : EZ^2$ [Eucl. XII, 2], erit

$$\Gamma\Delta : EZ = B\Theta : \Theta K = B\Theta : AH.$$

ergo $\triangle\, A\Gamma\Delta = BEZ$ [Eucl. VI, 14; I, 41]; quod erat propositum.

LXI.

Et si trianguli per axes ducti inter se aequales sunt, basis ad basim duplicatam rationem habet, quam conus ad conum.



describantur rursus coni propositi, et supponamus $\triangle\, A\Gamma\Delta = BEZ$. demonstrandum, esse

$$H : \Theta = AH\Gamma\Delta^2 : B\Theta EZ^2.$$

sit enim $B\Theta : AH = AH : HK$. quoniam igitur $\triangle\, A\Gamma\Delta = BEZ$, erit [Eucl. VI, 14; I, 41]

$$\Gamma\Delta : EZ = B\Theta : AH = AH : HK.$$

ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ, ἔχει δὲ καὶ ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ, ὡς ἄρα ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ· ὁ ἄρα ΚΗΓΔ κῶνος τῷ ΒΘΕΖ ἴσος ἐστίν. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ, ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΔΓ, τουτέστι πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον, ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον. ἀλλ' ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ· ὁ ἄρα Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, τουτέστιν ἡ βάσις τοῦ ΑΗΓΔ κώνου πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΒΘΕΖ κώνου, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξβʹ.

Οἱ ἰσοϋψεῖς κῶνοι ὀρθοὶ διπλασίονα λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ἤπερ τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα.

καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ἔστω ὁ ΑΗ ἄξων τῷ ΒΘ ἴσος. λέγω, ὅτι ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΒΕΖ.

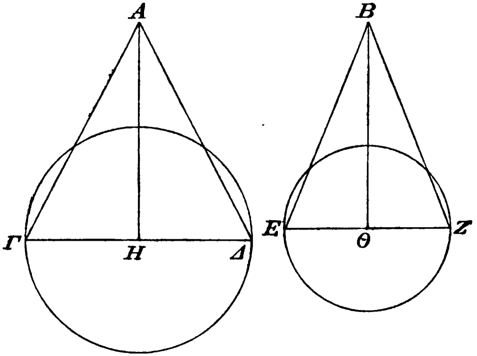
---

1. ἐστὶν ἀλλήλοις] ἀλλήλοις ἐστίν p. 2. ΗΚ] Η̄ extr. lin. v. 4. ΕΖ] τὴν ΕΖ p. ἔχει — 6. ΑΗ] om. p. 5. ΚΗ] v, ΗΚ V. λόγον] λόγον ἔχει v. 7. ΚΗ] τὴν ΚΗ p. ΚΗΓΔ] ΚΗΔ p. 8. ΕΖ] τὴν ΕΖ p. 10. τόν — 12. πρός] mg. p. 10. ΚΗΔΓ] v, ΚΗΔΓ κῶνον p, ΚΗΓΔ V. 11. κῶνον] om. p. 14. τήν] om. p. 17. ΒΘΕΖ] Vp, suppl. in lac. m. rec. v. 18. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] v, om. Vp. 19. ξβʹ] om. Vv, ξʹ p, ξαʹ m. rec. V. 22. ΑΗ] e corr. p.

et quoniam
$H : \Theta = \Gamma\Delta^2 : EZ^2$ [Eucl. XII, 2] $= B\Theta^2 : AH^2$, et etiam $B\Theta : KH = B\Theta^2 : AH^2$ [Eucl. V def. 9], erit $H : \Theta = B\Theta : KH$; itaque $KH\Gamma\Delta = B\Theta EZ$ [Eucl. XII, 15]. quoniam igitur $\Gamma\Delta : EZ = AH : HK$, et $AH : HK = AH\Gamma\Delta : KH\Delta\Gamma$ [cfr. Eucl. XII, 11] $= AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ$, erit $\Gamma\Delta : EZ = AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ$. uerum $H : \Theta = \Gamma\Delta^2 : EZ^2$; ergo circulus H ad circulum Θ, hoc est basis coni $AH\Gamma\Delta$ ad basim coni $B\Theta EZ$, duplicatam rationem habet, quam conus $AH\Gamma\Delta$ ad conum $B\Theta EZ$; quod erat demonstrandum.

LXII.

Coni recti aequalis altitudinis inter se duplicatam rationem habent quam trianguli per axes ducti.



describantur coni, sitque axis $AH = B\Theta$. dico, esse $AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = A\Gamma\Delta^2 : BEZ^2$.

---

23. $B\Theta$] $BH\Theta$ v. 24. $B\Theta EZ$] B e corr. p. ἔχει — p. 284, 2. λόγον] mg. p. 24. $A\Gamma\Delta$] $A\Gamma\Delta$ τρίγωνον p.

ἐπεὶ γὰρ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, ὡς δὲ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον· ἰσοϋψεῖς γάρ· καὶ ὁ ΑΗΓΔ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξγ'.

Ἐὰν ὀρθοὶ κῶνοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχωσιν ἤπερ τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα, ἰσοϋψεῖς ἔσονται οἱ κῶνοι.

καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ὑποκείσθω ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχειν ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον. λέγω, ὅτι ἡ ΑΗ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΘ.

κείσθω τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ ἴσον τὸ ΚΓΔ τρίγωνον. ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ, ἴσον δὲ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τῷ ΚΓΔ τριγώνῳ, ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ τρίγωνον, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ, τουτέστιν ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον, οὕτως ὁ ΚΗΓΔ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ. καὶ ἐπεὶ τῶν

---

2. ΕΖ] v, τὴν ΕΖ Vp. 7. ΒΕΖ] ΕΒΖ V. τρίγωνον (alt.)] om. p. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] v, om. Vp. 8. ξγ'] om. Vv, ξα' p, ξβ' m. rec. V bis. 14. τρίγωνον (alt.)] om. p. 16. τρίγωνον] om. p. 18. τρίγωνον] om. p. 19. τρίγωνον] om. p. τριγώνῳ] om. p. 21. τρίγωνον] om. p. 22. τρίγωνον] om. p. 23. ΚΗΓΔ] ΚΗΔΓ V. 24. κῶνον (utrumque)]

quoniam enim $H : \Theta = \Gamma\Delta^2 : EZ^2$ [Eucl. XII, 2], et [Eucl. XII, 11] $H : \Theta = AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ$ (nam aequalis sunt altitudinis), erit etiam

$$AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = \Gamma\Delta^2 : EZ^2$$
$$= \text{[Eucl. VI, 1]}\ A\Gamma\Delta^2 : BEZ^2;$$

quod erat demonstrandum.

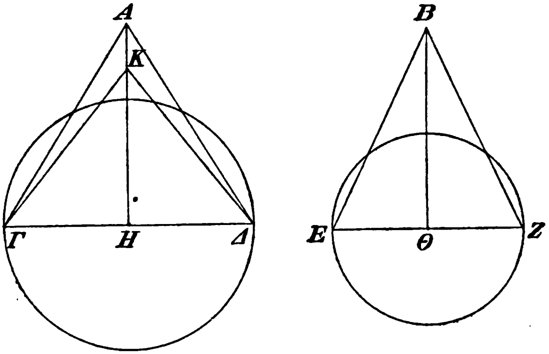
LXIII.

Si coni recti inter se rationem habent duplicatam quam trianguli per axem ducti, coni aequalis erunt altitudinis.

describantur coni, et supponamus

$$AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = A\Gamma\Delta^2 : BEZ^2.$$

dico, esse $AH = B\Theta$.



ponatur $\triangle\, K\Gamma\Delta = BEZ$. quoniam igitur

$$AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = A\Gamma\Delta^2 : BEZ^2,$$

et $BEZ = K\Gamma\Delta$, erit

---

om. p. ὡς] v, *καὶ ὡς* p et V? $AH\Gamma\Delta$] v, $AH\Gamma\Delta$ *κῶνος* Vp. $KH\Gamma\Delta$] $KH\Delta\Gamma$ p. 25. $KH\Gamma\Delta$] corr. ex $KH\Delta$ p.

ΚΗΓΔ, ΒΘΕΖ κώνων τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΚΓΔ, ΒΕΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἡ ἄρα Η βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Θ βάσιν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΚΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ ἑνὸς θεωρήματι. ὡς δὲ ὁ ΚΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΑΗΓΔ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ καὶ ἡ ΑΗ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΗΚ· ὁ ἄρα Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΚ. ἔχει δὲ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓΔ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ. ἐπειδὴ δὲ τὸ ΚΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, κατ' ἀντιπεπόνθησιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ. ἐδείχθη δέ, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως καὶ ἡ ΑΗ πρὸς ΚΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΚΗ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξδ'.

Τῶν ἀντιπεπονθότων κώνων ὀρθῶν τοῖς ἄξοσι τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ἔστω, ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΒΘ ἄξων πρὸς τὸν ΑΗ. λέγω, ὅτι τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ἔστω τῷ ΑΗΓΔ κώνῳ ἰσοϋψὴς ὁ ΚΘΕΖ κῶνος. ἐπεὶ οὖν, ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ,

---

1. τῶν ἀξόνων] τοῦ ἄξονος p. 2. ἀλλήλοις ἐστίν] εἰσὶν ἀλλήλοις p. 4. τόν] Vp, τήν v. 5. πρὸ ἑνός] scripsi; προενί v, πρὸ τούτου Vp. 10. λόγον] Vp, λόγον ἔχει v. ΓΔ διάμετρος] Vp, σύμμετρος v. 11. ΕΖ (alt.)] v, τὴν ΕΖ Vp. 12. ΗΚ] τὴν ΗΚ p. ἐπειδή] v, ἐπεί Vp. 13. ἀντι-

$$AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = A\Gamma\Delta^2 : K\Gamma\Delta^2 = AH^2 : HK^2$$
[cfr. Eucl. VI, 1] $= AH\Gamma\Delta^2 : KH\Gamma\Delta^2$
[cfr. Eucl. XII, 11]; itaque
$AH\Gamma\Delta : KH\Gamma\Delta = KH\Gamma\Delta : B\Theta EZ$ [Eucl. V def. 9]. et quoniam conorum $KH\Gamma\Delta$, $B\Theta EZ$ trianguli per axes ducti $K\Gamma\Delta$, BEZ inter se aequales sunt, erit basis coni $H : \Theta = KH\Gamma\Delta^2 : B\Theta EZ^2$, ut demonstratum est in prop. LXI. uerum
$$KH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = AH\Gamma\Delta : KH\Gamma\Delta = AH : HK;$$
itaque erit $H : \Theta = AH^2 : HK^2$. uerum etiam $H : \Theta = \Gamma\Delta^2 : EZ^2$ [Eucl. XII, 2]; quare
$$\Gamma\Delta : EZ = AH : HK.$$
quoniam autem $\triangle K\Gamma\Delta = BEZ$, e contrario erit $\Gamma\Delta : EZ = B\Theta : KH$ [Eucl. VI, 14; I, 41]. demonstrauimus autem, esse $\Gamma\Delta : EZ = AH : KH$; itaque etiam $B\Theta : KH = AH : KH$. ergo $AH = B\Theta$ [Eucl. V, 9]; quod erat demonstrandum.

LXIV.

Conorum rectorum, qui in contraria ratione sunt axium, trianguli per axes ducti inter se aequales sunt.

describantur coni, sitque
$$AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = B\Theta : AH.$$
dico, esse $\triangle A\Gamma\Delta = BEZ$.

sint coni $AH\Gamma\Delta$, $K\Theta EZ$ aequalis altitudinis. quoniam igitur $AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = B\Theta : AH$, et

---

πεπόνθησιν] v, *-η-* e corr. p, *ἀντιπεπόνθασιν* V. 14. *ἐδείχθη* — 15. *KH*] v, om. Vp. 15. *καὶ ὡς ἄρα*] v, *ἀλλ' ὡς* Vp. 17. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] v, om. Vp. 18. *ξδ'*] om. Vv, *ξβ'* p, *ξγ'* m. rec. V. 20. *ἐστί*] *ἐστῖ* V. 25. *ἰσοϋψῆς*] p, corr. ex *ἴσοι* uel *ἴσος* eadem manu V, om. v extr. lin. *κῶνος*] om. p. 26. *οὖν*] v, *οὖν ἐστιν* Vp.

οὕτως ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΑΗ, ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΘΚ, ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΚ, τουτέστιν ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον. ἀλλ' ὡς ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, οὕτως τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἔχει δὲ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ ἰσοϋψῆ κῶνον διπλασίονα λόγον καὶ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ ἑνὸς θεωρήματι· ὡς ἄρα τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ. τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ ἴσον ἐστίν· ὅ προέκειτο δεῖξαι.

ξε'.

Καὶ ἐὰν τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ᾖ, ἀντιπεπόνθασιν οἱ κῶνοι τοῖς ἄξοσιν.

ὑποκείσθω γὰρ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ ἴσον εἶναι. λέγω, ὅτι, ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΒΘ ἄξων πρὸς τὸν ΑΗ.

ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς καὶ κατασκευῆς, ἐπεὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ ἴσον ἐστίν, ὡς ἄρα

---

5. ΚΘΕΖ] ΚΘΕΖ κῶνον V. διπλασίονα] p, comp. V, ut solet, διπλάσιον v. 6. κῶνον] om. p. ΒΘΕΖ] v, ΒΘΕΖ κῶνος Vp. 7. ΚΘΕΖ] ΚΕΘΖ κῶνον V. 8. ΑΗΓΔ] v, ΑΗΓΔ κῶνος Vp. τόν] Vp, τοῦ v. 10. πρός] Vp, om. v. 11. καί] v, om. Vp. 15. τῷ ΒΕΖ ἴσ-] Vp, in ras. m. 1 v. ὃ προέκειτο δεῖξαι] v, om. Vp. 16. ξε'] om. Vv, ξγ' p, ξδ' m. rec. V. 20. τριγώνῳ — 23. ΒΕΖ] bis p, sed corr. 20. ὅτι] v, ὅτι ἐστίν Vp. 21. ΒΘΕΖ] v, ΒΘΕΖ κῶνον Vp. 23. ΒΕΖ] Vp, Ε sustulit resarcinatio in v. ὡς ἄρα] v, ἔστιν ἄρα ὡς Vp.

$AH = \Theta K$, erit

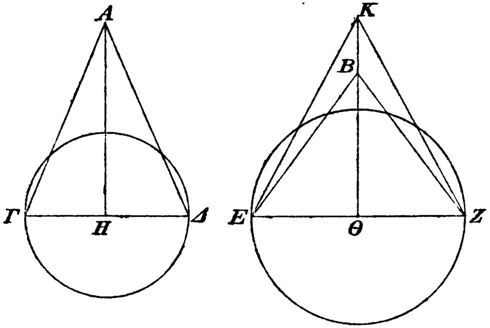
$$AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = B\Theta : \Theta K = B\Theta EZ : K\Theta EZ$$

[cfr. Eucl. XII, 11]; itaque

$$AH\Gamma\Delta : K\Theta EZ = B\Theta EZ^2 : K\Theta EZ^2$$

[Eucl. V def. 9]. sed $B\Theta EZ : K\Theta EZ = BEZ : KEZ$ [cfr. Eucl. VI, 1]; itaque erit

$$AH\Gamma\Delta : K\Theta EZ = BEZ^2 : KEZ^2.$$



uerum etiam propter altitudinem aequalem

$$AH\Gamma\Delta : K\Theta EZ = A\Gamma\Delta^2 : KEZ^2,$$

ut demonstratum est in prop. LXII; itaque

$$BEZ : KEZ = A\Gamma\Delta : KEZ.$$

ergo $A\Gamma\Delta = BEZ$ [Eucl. V, 9]; quod erat propositum.

LXV.

Et si trianguli per axem ducti inter se aequales sunt, coni in contraria ratione sunt axium.

nam supponamus, esse $\triangle A\Gamma\Delta = BEZ$. dico, esse $AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = B\Theta : AH$.

in eadem enim figura et constructione, quoniam $\triangle A\Gamma\Delta = BEZ$, erit $A\Gamma\Delta : KEZ = BEZ : KEZ$

τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ, οὕτως τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἐπειδὴ δὲ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ ἰσοϋψῆ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς δὲ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, οὕτως τὸ ΒΕΖ πρὸς ΚΕΖ, ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, τουτέστιν ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, τουτέστιν οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΚ. ἀλλ' ἡ ΘΚ τῇ ΑΗ ἴση· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΒΘ ἄξων πρὸς τὸν ΑΗ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξς′.

Τῶν ἀντιπεπονθότων ὀρθῶν κώνων ταῖς βάσεσι τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα πρὸς ἄλληλα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν ἀντιπεπονθότως.

καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ἔστω, ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η βάσιν. λέγω, ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ.

---

3. ΑΓΔ] ΒΕΖ τρίγωνον p. 5. ΒΕΖ] Vp, ΜΕΖ v. ΚΕΖ (alt.)] τὸ ΚΕΖ p. 6. ΚΘΕΖ] v, ΚΘΕΖ κῶνον Vp. 10. ΘΚ (pr.)] v, τὴν ΘΚ Vp. 11. ἴση] v, ἴση ἐστίν Vp. 12. ΑΗ] ΑΗ ἄξονα V. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] v, om. Vp. 13. ξς′] om. Vv, ξδ′ p, ξγ′ m. rec. v, ξε′ m. rec. V. 19. ΒΘΕΖ] ΒΘΕΖ κῶνον p.

[Eucl. V, 7]. quoniam autem

$$AH\Gamma\Delta : K\Theta EZ = A\Gamma\Delta^2 : KEZ^2$$

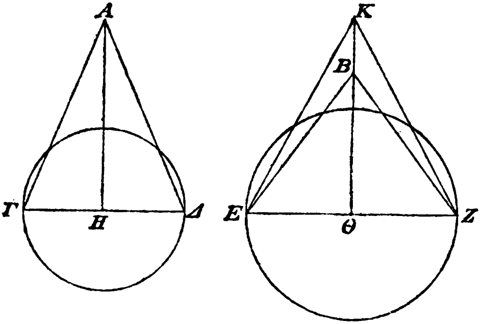
propter altitudinem aequalem [prop. LXII], et

$$A\Gamma\Delta : KEZ = BEZ : KEZ,$$

erit

$$AH\Gamma\Delta : K\Theta EZ = BEZ^2 : KEZ^2 = B\Theta EZ^2 : K\Theta EZ^2$$

[cfr. Eucl. VI, 1; XII, 11]; itaque



$$AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = B\Theta EZ : K\Theta EZ \text{ [Eucl. V def. 9]}$$
$$= B\Theta : \Theta K \text{ [cfr. Eucl. XII, 11].}$$

uerum $\Theta K = AH$; ergo erit

$$AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = B\Theta : AH;$$

quod erat demonstrandum.

LXVI.

Conorum rectorum, qui in contraria ratione sunt basium, trianguli per axes ducti inter se triplicatam rationem habent quam basis ad basim in contraria ratione.

describantur coni, sitque $AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = \Theta : H$. dico, esse $A\Gamma\Delta : BEZ = EZ^3 : \Gamma\Delta^3$.

κείσθω τῇ ΒΘ ἴση ἡ ΚΗ· οἱ ἄρα ΚΗΓΔ, ΒΘΕΖ ἰσοϋψεῖς κῶνοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς αἱ βάσεις. ἐπεὶ οὖν, ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η βάσιν, ἀλλ' ὡς ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η βάσιν, οὕτως ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον, ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ. ἀλλ' ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ, οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ΑΓΔ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ. ὁ δὲ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ ἰσοϋψῆ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ τετραπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ. καὶ τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ. ὡς δὲ τὸ ΒΕΖ πρὸς ΚΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ

---

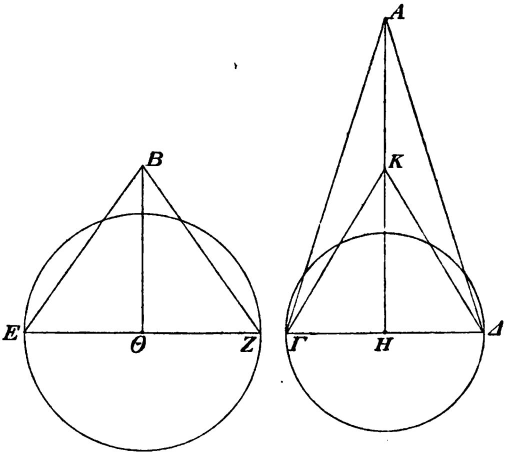
1. ΒΘ] Vp, ΒΕ v. 3. ΒΘΕΖ] ΒΘΕΖ κῶνον p. 4. ἀλλ' — 5. βάσιν] Vp, om. v. 6. ΑΗΓΔ] Vp, ΗΓΔ v. 7. ὁ (alt.) — 8. ΚΗΓΔ] Vp, om. v. 8. ἄρα ΑΗΓΔ] p, ΑΗΓΔ ἄρα V. 9. ΚΗΓΔ — 13. τόν (pr.)] mg. p (κείμενον). 11. τό (pr.)] V, om. p, τόν suppl. m. rec. v. τὸ ΑΓΔ — 12. ΚΓΔ] Vp, om. v. 12. ΚΓΔ] ΚΓΔ τρίγωνον V. 13. ΚΗΓΔ] ΚΗΓΔ κῶνον V. ὁ δέ] v, ἀλλ' ὁ Vp. 14. ἰσουψῆ] v, om. Vp. κῶνον] om. V. 15. ἄρα] bis V, sed corr. 16. τετραπλασίονα] v, τριπλασίονα p et V (sed τρι- in ras. plurium litterarum). τὸ ΒΕΖ] ἡ ΕΖ p. 17. τὸ ΚΓΔ] V, euan. p. ΚΓΔ — 18. τό (pr.)] om. v. 17. καί — 19. ΚΓΔ (pr.)] om. Vp (καὶ τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τό suppl. Halley cum Comm., sed fortasse plura desunt). 19. ΚΓΔ (alt.)] τὸ ΚΓΔ p.

ponatur $KH = B\Theta$; itaque coni $KH\Gamma\Delta$, $B\Theta EZ$ aequalis altitudinis inter se rationem habent quam bases [Eucl. XII, 11]. quoniam igitur

$$AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = \Theta : H,$$

et $\Theta : H = B\Theta EZ : KH\Gamma\Delta$, erit

$$AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = B\Theta EZ : KH\Gamma\Delta;$$



itaque $AH\Gamma\Delta : KH\Gamma\Delta = B\Theta EZ^2 : KH\Gamma\Delta^2$ [Eucl. V def. 9]. uerum $AH\Gamma\Delta : KH\Gamma\Delta = A\Gamma\Delta : K\Gamma\Delta$ [cfr. Eucl. XII, 11; VI, 1]; itaque

$$A\Gamma\Delta : K\Gamma\Delta = B\Theta EZ^2 : KH\Gamma\Delta^2.$$

est autem propter altitudinem aequalem

$$B\Theta EZ : KH\Gamma\Delta = BEZ^2 : K\Gamma\Delta^2 \text{ [prop. LXII];}$$

itaque $A\Gamma\Delta : K\Gamma\Delta = BEZ^4 : K\Gamma\Delta^4$. quare etiam $A\Gamma\Delta : BEZ = BEZ^3 : K\Gamma\Delta^3$. est autem [Eucl. VI, 1]

ΒΕΖ τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξζʹ.

Καὶ ὧν κώνων ὀρθῶν τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τριπλασίονα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ἤπερ ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν ἀντιπεπονθότως, οὗτοι ταῖς βάσεσιν ἀντιπεπόνθασιν.

ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς καὶ κατασκευῆς ἐχέτω τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ βάσις τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν ΓΔ. λέγω δή, ὅτι, ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ἡ Θ βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Η βάσιν.

ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς ΓΔ, οὕτως τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ ἰσοϋψὲς τρίγωνον, τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΓΔ τετραπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ. ὡς δὲ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΓΔ, οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ

---

1. ΒΕΖ τρίγωνον] ΚΓΔ p. 2. τήν] om. p. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] v, om. Vp. 3. ξζʹ] om. Vv, ξεʹ p, ξδʹ m. rec. v. 9. τό (pr.)] Vp, τά v. 10. ἡ ΕΖ] Vp, suppl. m. rec. v in resarcinatione, ut h. l. alia minora. 11. δή] om. p. ὅτι] v, ὅτι ἐστίν Vp. ΒΘΕΖ] ΒΘΕΖ κῶνον p. 12. Η] Vp, euan. v. 13. ΒΕΖ] v, ΕΒΖ Vp. 14. ΕΖ πρός] in ras. p. ΓΔ] v, τὴν ΓΔ Vp. ἡ ΕΖ] Vp, in ras. m. rec. v. 15. ΓΔ] v, τὴν ΓΔ Vp. τρίγωνον πρὸς τό] mg. p. ΚΓΔ — 16. τρίγωνον (pr.)] in ras. p. 16. τρίγωνον (alt.)] v, om. V, mg. p. πρός — 18. ΑΓΔ] mg. p. 21. ΚΗΓΔ (pr.)] v, ΚΗΓΔ κῶνον Vp. ὁ ἄρα] τό v, ἀλλ' ὁ Vp, corr. Halley cum Comm.; fort. ὥστε ὁ. ΚΗΓΔ (alt.)] v, ΚΗΔ κῶνον p, ΚΗΓΔ κῶνον V.

$BEZ : K\Gamma\Delta = EZ : \Gamma\Delta$; ergo $A\Gamma\Delta : BEZ = EZ^3 : \Gamma\Delta^3$; quod erat demonstrandum.

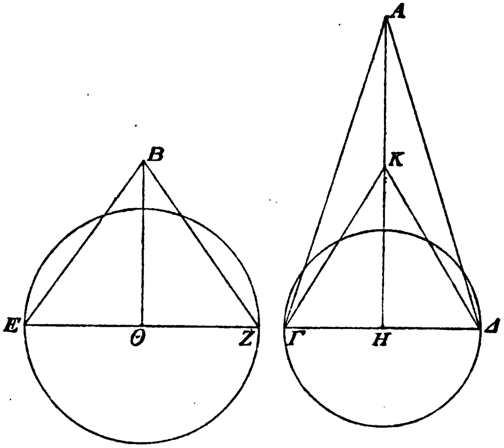
LXVII.

Et quorum conorum rectorum trianguli per axes ducti inter se rationem triplicatam habent quam basis ad basim in contraria ratione, ii in contraria ratione sunt basium.

nam in eadem figura et constructione sit

$$A\Gamma\Delta : BEZ = EZ^3 : \Gamma\Delta^3.$$

dico, esse $AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = \Theta : H$.



quoniam enim $A\Gamma\Delta : BEZ = EZ^3 : \Gamma\Delta^3$, et [Eucl. VI, 1] $EZ : \Gamma\Delta = BEZ : K\Gamma\Delta$ aequalis altitudinis, erit $A\Gamma\Delta : BEZ = BEZ^3 : K\Gamma\Delta^3$; itaque $A\Gamma\Delta : K\Gamma\Delta = BEZ^4 : K\Gamma\Delta^4$. uerum $A\Gamma\Delta : K\Gamma\Delta = AH\Gamma\Delta : KH\Gamma\Delta$ [cfr. Eucl. VI, 1; XII, 11];

τετραπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ *ΒΕΖ* τρίγωνον πρὸς τὸ *ΚΓΔ*. ἔχει δὲ ὁ *ΒΘΕΖ* κῶνος πρὸς τὸν *ΚΗΓΔ* κῶνον ἰσοϋψῆ διπλασίονα λόγον ἤπερ τὸ *ΒΕΖ* τρίγωνον πρὸς τὸ *ΚΓΔ*· ὁ ἄρα *ΑΗΓΔ* πρὸς τὸν *ΚΗΓΔ* διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ *ΒΘΕΖ* κῶνος πρὸς τὸν *ΚΗΓΔ* κῶνον. ὡς ἄρα ὁ *ΑΗΓΔ* κῶνος πρὸς τὸν *ΒΘΕΖ*, οὕτως ὁ *ΒΘΕΖ* πρὸς τὸν *ΚΗΓΔ*. ὡς δὲ ὁ *ΒΘΕΖ* πρὸς τὸν *ΚΗΓΔ*, οὕτως ἡ *Θ* βάσις πρὸς τὴν *Η*· ὡς ἄρα ὁ *ΑΗΓΔ* κῶνος πρὸς τὸν *ΒΘΕΖ*, οὕτως ἡ *Θ* βάσις πρὸς τὴν *Η*· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξη΄.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς πρὸς κῶνον ὀρθὸν διπλασίονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ τοῦ τριγώνου βάσις πρὸς τὴν βάσιν.

καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ὑποκείσθω ὁ *ΑΗΓΔ* κῶνος πρὸς τὸν *ΒΘΕΖ* κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχειν ἤπερ ἡ *Η* βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν *Θ* βάσιν. λέγω, ὅτι τὸ *ΑΓΔ* τρίγωνον πρὸς τὸ *ΒΕΖ* τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ *ΔΓ* βάσις τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν *ΕΖ*.

ἔστω τῇ *ΑΗ* ἡ *ΘΚ* ἴση· οἱ ἄρα *ΑΗΓΔ*, *ΚΘΕΖ*

---

3. *κῶνον ἰσοϋψῆ*] v, *ἰσοϋψῆ κῶνον* Vp. 4. *ὁ* — 6. *ΚΗΓΔ κῶνον*] om. p. 4. *ὁ*] v, mut. in *ὡς* eadem manu V, post *ἄρα* add. *ὁ* ead. man. *ΑΗΓΔ*] *Η* in ras. m. 1 v, *ΑΗΓΔ κῶνος* V. *πρός*] V, -ς euan. v. 5. *ΚΗΓΔ* — 7. *τόν* (pr.)] v, om. V. 9. *Θ*] Vp, euan. v. *Η*] e corr. p. 11. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] v, om. Vp. 12. *ξη΄*] om. Vv, *ξϛ΄* p et m. rec. V, *ξε΄* m. rec. v. 14. *ἔχῃ*] Vp, *ἔχει* v. 15. *πρός* — *τρίγωνον* (alt.)] om. Vvp, corr. Comm. 16. *τριπλασίονα*] Vp, -*ρι*- in

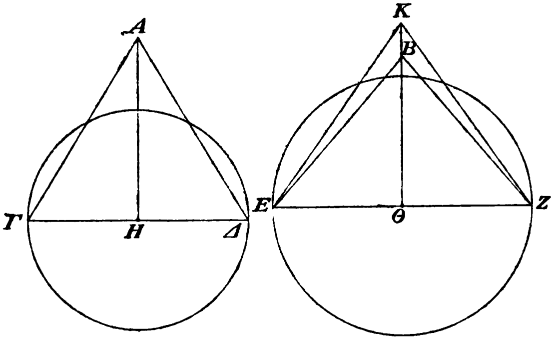
itaque $AH\Gamma\Delta : KH\Gamma\Delta = BEZ^4 : K\Gamma\Delta^4$. uerum propter altitudinem aequalem est

$$B\Theta EZ : KH\Gamma\Delta = BEZ^2 : K\Gamma\Delta^2$$ [prop. LXII];

itaque $AH\Gamma\Delta : KH\Gamma\Delta = B\Theta EZ^2 : KH\Gamma\Delta^2$; quare $AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = B\Theta EZ : KH\Gamma\Delta$ [Eucl. V def. 9]. est autem $B\Theta EZ : KH\Gamma\Delta = \Theta : H$ [Eucl. XII, 11]; ergo erit $AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = \Theta : H$; quod erat demonstrandum.

LXVIII.

Si conus rectus ad conum rectum duplicatam rationem habet quam basis ad basim, triangulus per axem ductus ad triangulum per axem ductum triplicatam rationem habebit quam basis trianguli ad basim.



describantur coni, et supponamus, esse

$$AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = H^2 : \Theta^2.$$

dico, esse $A\Gamma\Delta : BEZ = \Delta\Gamma^3 : EZ^3$.

sit $\Theta K = AH$; coni igitur $AH\Gamma\Delta$, $K\Theta EZ$, qui

---

ras. m. 1 v. 20. H] Vp, om. v. 22. $\Delta\Gamma$] $A\Gamma$ Vvp, $\Gamma\Delta$ Halley cum Comm.

κῶνοι ἰσοϋψεῖς ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Η βάσις πρὸς τὴν Θ βάσιν, ὡς δὲ ἡ Η βάσις πρὸς τὴν Θ, οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, οὕτως ὁ ΚΘΕΖ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ. [ἐπεὶ τοίνυν ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΚΘΕΖ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ, ἔχει δὲ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Η βάσις πρὸς τὴν Θ βάσιν, ὡς ἄρα ἡ Η βάσις πρὸς τὴν Θ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΗ ἄξων πρὸς τὸν ΒΘ ἄξονα.] καὶ ἐπεὶ ἰσοϋψεῖς εἰσιν οἱ ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ κῶνοι, ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς ἐδείχθη. ὡς δὲ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, οὕτως ὅ τε ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον καὶ τὸ ΚΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ· καὶ τὸ ΚΖΕ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ. ὡς δὲ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ, οὕτως ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖ· ἰσοϋψῆ γάρ ἐστι τὰ τρίγωνα· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

5. *ΑΗΓΔ*] *ΗΓΔ* V. 6. *ΑΗΓΔ*] v, *ΑΗΓΔ κῶνος* Vp. 7. *ΑΗΓΔ*] Vp, *ΑΗ*- in ras. m. 1 v. 8. *ἐπεί* — 14. *ἄξονα*] om. Halley cum Comm. 12. *ΒΘΕΖ*] Vp, *ΒΕΘΖ* v. *καί*] v, om. Vp. 13. *ὡς ἄρα* — 14. *βάσιν*] scripsi, om. v,

aequales habent altitudines, inter se rationem habent quam bases [Eucl. XII, 11]. quoniam igitur

$$A H \Gamma \Delta : B \Theta E Z = H^2 : \Theta^2,$$

et $H : \Theta = A H \Gamma \Delta : K \Theta E Z$, erit

$$A H \Gamma \Delta : B \Theta E Z = A H \Gamma \Delta^2 : K \Theta E Z^2;$$

quare $A H \Gamma \Delta : K \Theta E Z = K \Theta E Z : B \Theta E Z$ [Eucl. V def. 9]. quoniam igitur

$$A H \Gamma \Delta : B \Theta E Z = K \Theta E Z^2 : B \Theta E Z^2 = K \Theta^2 : \Theta B^2$$

[cfr. Eucl. XII, 11], uerum etiam

$$A H \Gamma \Delta : B \Theta E Z = H^2 : \Theta^2,$$

erit $H : \Theta = A H : B \Theta$.[1] et quoniam coni $A H \Gamma \Delta$, $K \Theta E Z$ aequales habent altitudines, erit

$$A H \Gamma \Delta : K \Theta E Z = A \Gamma \Delta^2 : K E Z^2,$$

ut demonstratum est [prop. LXII]. uerum

$$A H \Gamma \Delta : K \Theta E Z = K \Theta E Z : B \Theta E Z = K E Z : B E Z$$

[cfr. Eucl. XII 11; VI, 1]; quare etiam

$$K Z E : B E Z = A \Gamma \Delta^2 : K E Z^2;$$

itaque $A \Gamma \Delta : B E Z = A \Gamma \Delta^3 : K E Z^3$. est autem $A \Gamma \Delta : K E Z = \Gamma \Delta : E Z$ [Eucl. VI, 1]; nam trianguli aequalem habent altitudinem. ergo

$$A \Gamma \Delta : B E Z = \Gamma \Delta^3 : E Z^3;$$

quod erat demonstrandum.

---

[1] Hinc concludi poterat $A H \Gamma \Delta : K \Theta E Z = K E Z : B E Z$. sed cum lin. 18 sq. hoc, ut solet, aliter concludat interposita ratione $K \Theta E Z : B \Theta E Z$, et praeterea hic dicendum esset $K \Theta : B \Theta$, uerba *ἐπεί — ἄξονα* lin. 8—14 cum Commandino delenda sunt.

ὡς ἄρα ὁ ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν (corr. ex *τ* mg. V) *ΒΘΕΖ κῶνον* Vp. 14. *τόν*] Vp, om. v. 20. *ΚΕΖ*] Vp, *ΚΕΓ* v. *καί* — 22. *ΚΕΖ*] v, om. Vp. 21. *διπλασίονα* — 23. *ΒΕΖ*] om. v; lacunam suppl. Halley cum Comm. 24. *οὕτως*] Vp, -*ς* sustulerunt uermes in v. 25. *ἐστι*] v, *εἰσι* Vp. 27. *τήν*] om. p. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] v, om. Vp.

ξϑ'.

Κἂν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ τοῦ τριγώνου βάσις πρὸς τὴν βάσιν, ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν βάσιν.

ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ κείσϑω πάλιν τῇ ΑΗ ἴση ἡ ΘΚ.

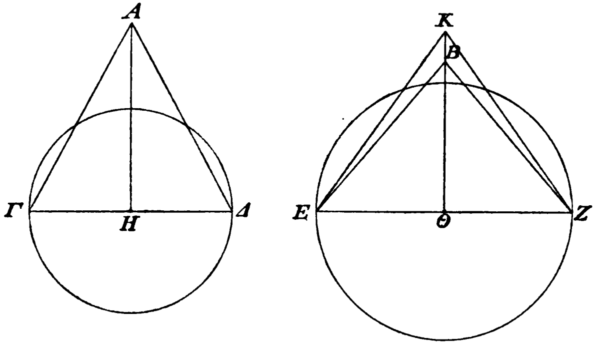
ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΚΕΖ πρὸς τὸ ΒΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ΚΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ, οὕτως ὁ ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ· καὶ ὁ ΚΘΕΖ κῶνος ἄρα πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἔχει δὲ καὶ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον ἰσοϋψῆ διπλασίονα λόγον ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον, οὕτως ὁ

---

1. ξϑ'] om. Vv, ξζ' p et m. rec. V, ξϛ' m. rec. v. 2. κἄν] v, καὶ ἐάν Vp. 3. ἔχῃ] Vp, ἔχει v. 4. τήν] τὴν τοῦ τριγώνου p. 5. ἔχει] ἕξει p. 7. καταγραφῆς] καταγραφῆς καὶ κατασκευῆς p. 8. πρός — ἐχέτω] τριπλασίονα λόγον ἐχέτω πρὸς τὸ ΒΕΖ p. πρὸς τὸ ΒΕΖ] supra scr. eadem manu V. 10. ΑΓΔ] v, ΑΓΔ τρίγωνον Vp. 11. ἡ ΓΔ — 14. ΑΓΔ] mg. p (κείμενον), in textu ras. 6—7 litt. 11. ΕΖ (utrumque)] ΖΕ p. 14. τὸ ΚΕΖ] Vp, in resarcinatione m. rec. v, ut τὸ ΚΕΖ τ- lin. 16, ΒΘΕΖ δ- lin. 18,

LXIX.

Et si triangulus per axem ductus ad triangulum per axem ductum triplicatam rationem habet quam basis trianguli ad basim, conus ad conum duplicatam rationem habet quam basis coni ad basim.



nam in eadem figura sit $A\Gamma\Delta : BEZ = \Gamma\Delta^3 : EZ^3$, et ponatur rursus $\Theta K = AH$.

quoniam igitur $A\Gamma\Delta : BEZ = \Gamma\Delta^3 : EZ^3$, et [Eucl. VI, 1] $\Gamma\Delta : EZ = A\Gamma\Delta : KEZ$, erit

$$A\Gamma\Delta : BEZ = A\Gamma\Delta^3 : KEZ^3;$$

itaque $KEZ : BEZ = A\Gamma\Delta^2 : KEZ^2$. est autem [cfr. Eucl. VI, 1; XII, 11]

$$KEZ : BEZ = K\Theta EZ : B\Theta EZ;$$

πρὸς τ- lin. 20. 16. τρίγωνον] om. p. 17. καὶ ὁ] v, ὁ ἄρα Vp. 18. ἄρα] v, om. Vp. $B\Theta EZ$] corr. ex ΘEZ eadem manu V. 19. $AH\Gamma\Delta$] Vp, Γ supra scr. m. 1 v. 20. κῶνον ἰσοϋψῆ] ἰσοϋψῆ κῶνον p. διπλασίονα] des. fol. 98 a m. 1 v, reliqua in imo mg. alia manu. 21. τὸ KEZ — 22. πρός] om. v, τὸ KEZ, ὡς δὲ τὸ $A\Gamma\Delta$ τρίγωνον πρός Vp, corr. Comm. 22. τὸν $K\Theta EZ$ κῶνον] v, τὸ KEZ Vp.

ΚΘΕΖ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ. ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, τουτέστιν ἤπερ ἡ Η βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Θ βάσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1. ΚΘΕΖ] v, ΚΘΕΖ κῶνος Vp. ὁ ἄρα — 2. ΒΘΕΖ] om. v, ὁ ἄρα ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ Vp, corr. Comm. 3. ΚΘΕΖ] vp, ΚΘΕΖ κῶνον V. ἡ Η] Vp, infra add. v. 4. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] v, om. V, τέλος τοῦ περὶ κώνου τομῆς σερήνου p.

itaque etiam $K\Theta EZ : B\Theta EZ = A\Gamma\Delta^2 : KEZ^2$. uerum etiam propter altitudines aequales

$$A H\Gamma\Delta : K\Theta EZ = A\Gamma\Delta^2 : KEZ^2 \text{ [prop. LXII]};$$

itaque $AH\Gamma\Delta : K\Theta EZ = K\Theta EZ : B\Theta EZ$. ergo [Eucl. V def. 9]

$$AH\Gamma\Delta : B\Theta EZ = AH\Gamma\Delta^2 : K\Theta EZ^2$$
$$= \text{[Eucl. XII, 11] } H^2 : \Theta^2;$$

quod erat demonstrandum.