APOLLONII PERGÆI

DE

SECTIONE RATIONIS

LIBRI DUO

Ex ARABICO MS^to^. Latine Verſi.

ACCEDUNT

Ejuſdem de SECTIONE SPATII
Libri Duo Reſtituti.

Opus Analyſeos Geometricæ ſtudioſis apprime Utile.

PRÆMITTITUR
PAPPI ALEXANDRINI Præfatio
ad VII^mum^ Collectionis Mathematicæ,
nunc primum Græce edita:

Cum Lemmatibus ejuſdem PAPPI ad hos
Apollonii Libros.

Opera & ſtudio EDMUNDI HALLEY
Apud OXONIENSES
Geometriæ Profeſſoris Saviliani.

OXONII,
E THEATRO SHELDONIANO
Anno MDCCVI.

h

REVERENDO VIRO

D. *HENRICO ALDRICH*

S. T. P.

Ædis Chriſti Decano,

Summo bonarum Literarum,

Præſertim Mathematicarum,

Fautori ac Vindici,

Hæc APOLLONII PERGÆI Opuſcula,

E tenebris eruta ac reſtituta,

Ea qua par eſt humilitate,

In perpetuum grati animi teſtimonium,

Offert, dicat, conſecratque

EDMUNDUS HALLEY.

Præfatio ad Lectorem.

QUAMVIS *de scientiis Mathematicis, hâc nostrâ & superiore ætate, præclare meruerint Viri eruditi, qui* Algebram Speciosam, Arithmeticam Infinitorum, *nuperamque* Fluxionum *doctrinam adinvenerunt & excoluerunt: nihil tamen inde* Veterum *gloriæ detrahitur, qui Geometriam ad eam provexere perfectionem, quam facilius forsan fuisset posteris mirari, quam absque* Antiquorum *scriptis investigando assequi. Quod egregii consummatique Geometræ exstiterint, magnoque acumine & solertiâ præditi, abunde testantur vel* Euclidis *solius,* Archimedis, *&* Apollonii *quæ supersunt. Plurima quidem illi (ut cæteros taceam) nobilissimaque reliquerunt ingenii monumenta; quorum nonnulla, quæ scilicet manifestam præ se tulerunt utilitatem, quæque proinde conservari humani generis maxime intererat, temporis injuriam sceleratasque plusquam barbarorum manus effugerunt: dum illa, quæ penitiora scientiæ magisque abstrusa continebant, neminem nacta vindicem idoneum aut custodem fidelem, utcunque pretiosa, fatali strage periere. Hinc factum, ut, magno rei literariæ damno, hactenus desiderarint Mathematici libros istos de* Analysi Veterum, *quorum nomina & argumenta ex* Pappo *solo habemus, eaque haud satis integra; quod & ipse mutilus magnaque sui parte truncatus ad nos pervenerit. Universos sane deperditos existimavit & deflevit Orbis eruditus, donec liber* Arabicus *cui titulus,*

كتاب ابلونيوس فقطع الخطوط علي النسبة

felici fato, repertus erat in Bibl. Bodleianâ *inter* Codd. *MSS. Cl.* Seldeni: *ubi diu latitavit, ac forsan diutius aliquanto latitasset, nisi, paucis abhinc annis, in manus incidisset D.* Ed Bernardi, *Astronomiæ Professoris* Saviliani, *& linguarum Orientalium peritissimi: qui statim Codice inspecto comperit esse Traductionem* Arabicam Apollonii περὶ λόγου ἀποτομῆς.

Bernardus *igitur, libro præclaro invento lætatus, alacriter* esse eidem Latine vertendo accingebat. Verum antequam vel decimam partem absolverat ab incœpto destitit, sive aliis studiis avocatus, sive operis difficultate perterritus: nam Codex ille non solum pessima manu exaratus erat, punctisque diacriticis plerumque destitutus, quibus in scripturâ Arabicâ literæ quamplurimæ solent distingui; sed & gravioribus adhuc vitiis laborabat, quod verba sæpiuscule & integras nonnunquam periodos omiserit, & Diagrammatum lineas literis male signatas & distinctas habuerit: adeo ut Divinatorem potius quam Interpretem ad sensum genuinum eruendum requisisse videretur. Postquam autem Bernardus è vivis excesserat, quicquid Apollonii traductum erat male habitum & neglectum jacebat, donec hortatu Viri Optimi & doctissimi D. Henrici Aldrich S. T. P. & Ædis Christi Decani, illud in manus sumpserat Collega meus μαθηματικώτατος D. Gregorius, Bernardi in Cathedra Saviliana Successor dignissimus. Hic loca nonnulla in Versione Bernardina castigavit & supplevit, totamque manu eleganti in usum Decani describi curavit. Postquam autem, magno Wallisio ad superos migrante, munus Professorium, quod ille egregie ornaverat, in me collatum esset; & forte fortuna Apollonii apographum istud, humanitate Decani supra memorati, conspexissem: magna me incessit cupido tentandi quid ipse in reliquo Apollonii vertendo præstare potuerim. Opus sane arduum & impeditum aggressus sum, qui, Linguæ Arabicæ prorsus ignarus, librum in ea conscriptum, mendisque innumeris & Lacunis non paucis refertum, interpretandi onus in me susceperim. Verum beneficio Schedarum quas traduxerat Bernardus, & quæ mihi Clavis ad instar aditum aperuerunt ad Apollonii mentem investigandam, primum voces illas excerpsi de quibus ex Versione Bernardi liquido mihi constabat; dein ad argumentum respiciendo, & notas obscuriores iterum iterumque mecum evolvendo, quid sibi voluerunt paullatim deprehendi: & hâc quasi deciphrandi methodo (ut ita loquar) eousque progressus sum, ut totum fere librum perlegerim, ac quodammodo intellexerim; eundemque denuo pedetentim percurrendo, opus integrum, absque alterius cujuspiam auxilio, ad eam quam videtis formam perduxerim.

Quod ad Codicem MS. attinet, qui nobis aureum Apollonii libellum unicus conservavit; in eo, Librarii (ut suspicor) incuriâ, plurimas hinc inde periodos desiderari comperi; quas,

prout

prout sensus & demonstratio postulabat, verbis meis, sed diverso charactere excusis, supplevi. Veruntamen non vanam prae se fert Antiquitatis speciem, utpote qui primae paginae adscriptum habeat Possessoris nomen, anno Hegiræ 633. *i. e.* Christi 1235. *unde liquet ante quingentos annos scriptum fuisse. Quo autem tempore adornata fuerit haec Versio, pro certo statuere non possum: conjecturis tamen inductus credo, factam esse paulo post annum* Christi 820, *auspiciis* Almaimonis Chalifæ *sive* Imperatoris Saracenorum. *Qui, miro flagrans literarum amore, libros Philosophorum & Mathematicorum optimos à* Græcis *Imperatoribus impetravit; atque id negotii popularibus suis dari voluit, ut eos, summa qua potuerunt fide & elegantia, in linguam* Arabicam *verterent.*

Jam si quaeratur unde constat hunc tractatum genuinum esse Apollonii *foetum? En tibi rationes, meo judicio, non contemnendas. Primo, in tot Loca & Casus divisus est uterque liber, quot utrique* Apollonii περὶ λόγου ἀποτομῆς *tribuit* Pappus, *in Praefatione ad* VII^{mum} Collect. Math. 2do *Idem est numerus & ordo diorismῶν, iidemque Casus dioristici.* 3° *Liber nostri* Apollonii *secundus, eodem modo ac ille quem describit* Pappus, *totus ad primum refertur, à quo etiam diorismos omnes mutuatur.* 4° *Lemmata eadem quae in libro* Arabico *passim occurrunt, in principio libri septimi (ut ab* Apollonio *desumpta) demonstrat* Pappus. 5° *Quatuor ultima* Pappi *Lemmata eodem ordine ac iisdem fere verbis traduntur, quibus Maximarum & Minimarum Rationum termini, in limitationibus ad Casus secundos & quartos Locorum* VI^{ti} *&* VII^{mi} *primi Libri nostri. Denique Diagrammata fere omnia* Graecam *referunt Originem, eo quod linearum notas dispositas habeant juxta ordinem Alphabeti* Graecorum, *qui ab illo Alphabeti* Arabum *plane diversus est.*

Si quis objiciat librum hunc, simili licet argumento, methodo tamen Apollonianæ *plane dissimili scriptum esse; quod in Casibus universis singulas rerum minutias percurrat, & plurima fuse demonstret, quae nulla videntur egere demonstratione. Velim is cogitet, librum hunc ex eorum numero primum esse, quos ad* Artis Analyticæ *institutionem adhibitos memorat* Pappus; *unde necesse habuerit Auctor quamplurima in discentium usum plenius & enucleatius tradere, exemploque fertilissimi Problematis per omnes Casus soluti commonstrare,*

strare, quid in simili proposito investigare debeat Analysta.

Hæc de Apollonii *libello jam primum in lucem edito; ex quo satis liquet, quo pacto* Veteres, *adhibitis proportionalium proprietatibus, Problemata plana ad æqualitatem duorum rectangulorum deducebant; quorum alterum quidem datum erat, alterius vero laterum summa vel differentia. Neque ulterius in exsequendâ Compositione progressi sunt, quia in sexto* Elementorum *Prop.* 28^va^ *&* 29^va^, *& in Prop.* 58^va^ *&* 59^va^, *iterumque Prop.* 84^va^ *&* 85^va^ Datorum Euclidis, *rectangulum datum excedens vel deficiens quadrato ad datam rectam applicare docemur; quæ quidem Effectiones coincidunt cum* Æquationum quadraticarum (*uti nunc loquimur*) *Constructionibus Geometricis. Methodus hæc cum* Algebrâ speciosâ *facilitate contendit, evidentiâ vero & demonstrationum elegantiâ eam longe superare videtur: ut abunde constabit, si quis conferat hanc* Apollonii *doctrinam* de Sectione Rationis *cum ejusdem Problematis Analysi Algebraicâ, quam exhibuit Clarissimus* Wallisius, *Tom.* II. *Operum Math. Cap.* LIV. *pag.* 220.

Ut vero methodum hanc præstantissimam magis adhuc illustrarem & Mathesεos Studiosos pleniori demererer obsequio, ad libros Apollonii *de* Sectione Spatii *restituendos memet accinxi; nec inani, ut persuasissimum habeo, conatu. Nam per omnia ipsius* Apollonii *ordinem & argumenta assequutus mihi videor, quantum scilicet ex.* Pappi *descriptione vel aliunde licet conjicere: quam bene autem hoc præstiterim aliorum esto judicium. Denique cum Versioni nostræ, ad majorem problematis dilucidationem, optimum visum fuerit* Scholia *nonnulla inserere, quorum ope* Loca Geometrica, *rectas omnes datam rationem abscindentes contingentia, designari possint: itidem in* Sectione Spatii, *quo modo similium* Locorum *descriptio fieret demonstratum dedi, propriisque solutionibus attexui, ne quid in hac de* Sectionibus *doctrina desideraretur. Insuper ad calcem Præfationis* Pappi, *de qua mox dicturus sum, prima viginti* Lemmata *è Libro Septimo* Collect. Math. *excerpta adjeci; quia in demonstrationibus* Apollonii *de utrâque* Sectione *ea assumpta fuisse plane asserit* Pappus, *resque ipsa testatur.*

Valde quidem dolendum est, quod reliqui tractatus Veterum Analytici, à Pappo *memorati, aut perierint, aut nondum*

lucem

lucem conspexerint. Nam minime dubito quin illorum nonnulli, Arabice *saltem versi, alicubi terrarum lateant, pulvere magis quam tenebris suis involuti. Quamobrem ut ab eruditis, quos ad Bibliothecas penitus excutiendas iterum iterumque hortor, melius faciliusque reperiantur & dignoscantur,* Pappi *Præfationem, non antehac* Græce, *immo vix* Latine *editam, operibus hisce præmisi; pristinæ integritati, quoad ejus fieri potuit, restitutam è duobus Codd. MSS. Bibliothecæ* Savilianæ. *Verum, ut ingenue fatear, manum adhuc medicam postulat. Nam ut* Græca Pappi *in hisce Codicibus sæpiuscule luxata sunt & depravata, præcipue in descriptione* Porismatum Euclidis, *(ubi nihil fere sani occurrit) ita in plerisque absurda adeo & insulsa erat* Commandini *Versio, ut necesse habuerim, aut passim eam emendare aut aliam de novo conficere.*

Quin & alias ob causas expoliri & publicari meruerit hæc Pappi *Præfatio.* PRIMO, *ut ex eâ ostendatur* Cartesium *falso Veteres ignorantiæ insimulasse, quasi is primus mortalium Locum ad quatuor rectas ab* Euclide *incœptum componere noverit; cum tamen* Apollonius *hoc ipsum se effecisse non obscure indicaverit. Nam impossibile esse* * *dicit, perfectam ejus Compositionem exhibere, absque propositionibus quas ipse à se inventas prodidit in tertio* Conicorum: *quod idem est ac si dixisset, illis concessis facile & proclive fuisse* Euclidi *Locum composuisse. Et sane si quis contulerit solutionem illam operosam & immani calculo* Algebraico *perplexam, quam in principio Geometriæ suæ dedit* Cartesius, *cum admiranda illa concinnitate qua res tota Geometrice & absque omni calculo absolvitur, per Lemmata* XVII, XVIII, XIX. *Lib. primi* Princip. Math. Naturalis Philosophiæ, *adhibitis duabus propositionibus Lib.* III. Conic. *minime dubitabit quin* Apollonius *ipse hac in re majus quiddam præstiterit, quam ab eo præstitum existimat* Cartesius. *Insuper adjicere licet, quod ad problema de* Sectione Determinatâ, *ab* Apollonio *plenissime resolutum, tota redeat difficultas inveniendi punctum quintum in Loco describendo. Datis autem quinque punctis docet* Pappus *Locum Ellipticum perficere, Lib.* VIII. *Prop.* 13, 14. *Eodemque modo, nec difficilius, mutatis mutandis, Locus Hyperbolicus per data quinque puncta describitur.* SECUNDO, *ut palam fiat omnibus,* Regulam Guldini Centrobaricam, *inter inventa Geometrica superioris seculi præcipua* *nume-*

* **Vide Pappi Prefat. p. XLII.**

numeratam, ipſis etiam Veteribus innotuiſſe: cum Pappus, *ſub finem hujuſce Præfationis, diſertim nobile illud Theorema deſcribat, quo menſurantur Solida omnia gyro Planorum quorumvis genita; modo habeantur eorundem Centra Gravitatis. Nam ſi* ἀμφοισμα *reddatur* gyrans, ἀμφοισικὸν *vero* gyrando genitum, *res manifeſtior erit, quam ut probatione indigeat. Verum utrum hoc invenerit ipſe* Pappus, *an à deceſſoribus ſuis acceperit, ex ipſius verbis haud liquet: pro certo tamen affirmare auſim, hanc Regulam illi perſpectam fuiſſe, annis* 1200 *ante natum* Guldinum.

Jam demum non diffitendum eſt, quod libris à Pappo *deſcriptis denuo inſtaurandis operam navarint Mathematici recentiores. Duos quidem noſtros de* Sectione Rationis *&* Spatii *quadantenus reſtituit* Willibrordus Snellius, *revocatos ad* Sectionem Determinatam, *ab ipſo ſimiliter inſtauratam.* Tactionum *doctrinam in* Apollonio Gallo *delineavit* Franciſcus Vieta. Loca plana *à* Fermato, *in operibus ejus poſthumis, miro acumine & judicio illuſtrata habemus: qui &* Poriſmata Euclidis, *opus longe difficillimum, redintegrare pollicitus eſt; verum fidem non liberavit. Denique* Inclinationum *problemata per omnes Caſus exſecutus eſt* Marinus Ghetaldus. *Neque ſane tantæ difficultatis ſunt hæc omnia, ut alicui* Artis Algebraicæ *perito moram longam injiciant. Verum perpendendum eſt, aliud eſſe Problema aliqualiter reſolutum dare, quod modis variis plerumque fieri poteſt, aliud methodo elegantiſſimâ id ipſum efficere; Analyſi breviſſimâ & ſimul perſpicuâ, Syntheſi concinnâ & minime operoſâ. Hoc Veteres præſtitiſſe argumento eſt* Apollonii *liber, quem impræſentiarum tibi ſiſtimus: nec dubium eſt quin* Pappus *ſub titulo* τόπȣ ἀναλυομένȣ *libros prædictos collegerit, ut exempla daret Analyſeos Inſtitutionis efficaciſſima, & diſcentium captui longe accommodatiora.*

Alia quæ te moneam jam non ſuperſunt; hoc tamen unum ne neſcias, tantiſper te morabor, donec narravero, me in hiſce omnibus edendis plurimum adjutum fuiſſe à viro amiciſſimo & de re literaria præclare merito D. Joh. Hudſono *S. T. P. Bibliothecæ* Bodleianæ *Præfecto: qui id ſibi (qua eſt humanitate) curæ eſſe voluit, ut nitidior & emendatior prodiret libellus.*

Vale & fruere.

Πάππȣ

Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως προοίμιον εἰς τὸ τῆς Συναγωγῆς ἕβδομον, περιέχον τὰ Λήμματα τοῦ ἀναλυομένου τόπου.

Ὁ Καλούμενος ἀναλυόμενος, Ἑρμόδωρε τέκνον, κατὰ σύλληψιν, ἰδία τίς ἐστιν ὕλη παρεσκευασμένη, μετὰ τὴν τῶν κοινῶν στοιχείων ποίησιν, τοῖς βουλομένοις ἀναλαμβάνειν ἐν γραμμαῖς δύναμιν εὑρετικὴν τῶν προτεινομένων αὐτοῖς προβλημάτων· καὶ εἰς τοῦτο μόνον χρησίμη καθεστῶσα. γέγραπται δὲ ὑπὸ τριῶν ἀνδρῶν, Εὐκλείδου τε τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου, καὶ Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου, κατὰ ἀνάλυσιν καὶ σύνθεσιν ἔχουσα τὴν ἔφοδον. ἀνάλυσις τοίνυν ἐστὶν ὁδὸς ἀπὸ τοῦ ζητουμένου, ὡς ὁμολογουμένου, διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων, ἐπί τι ὁμολογούμενον ἐν συνθέσει· ἐν μὲν γὰρ τῇ ἀναλύσει τὸ ζητούμενον ὡς γεγονὸς ὑποθέμενοι, τὸ ἐξ οὗ τοῦτο συμβαίνει σκοπούμεθα· καὶ πάλιν ἐκείνου τὸ προηγούμενον, ἕως ἂν οὕτως ἀναποδίζοντες καταντήσωμεν εἴς τι τῶν ἤδη γνωριζομένων, ἢ τάξιν ἀρχῆς ἐχόντων. καὶ τὴν τοιαύτην ἔφοδον ἀνάλυσιν καλοῦμεν, οἷον ἀνάπαλιν λύσιν. ἐν δὲ τῇ συνθέσει ἐξ ὑποστροφῆς, τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὕστατον ὑποστησάμενοι γεγονὸς ἤδη, καὶ τὰ ἑπόμενα ἐκεῖ, ἐνταῦθα προηγούμενα κατὰ φύσιν τάξαντες, καὶ ἀλλήλοις ἐπισυνθέντες, εἰς τέλος ἀφικνούμεθα τῆς τοῦ ζητουμένου κατασκευῆς· καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν. διττὸν δέ ἐστιν ἀναλύσεως γένος. τὸ μὲν ζητητικὸν τἀληθοῦς, ὃ καλεῖται θεωρητικόν· τὸ δὲ ποριστικὸν τοῦ προτεθέντος λέγειν, ὃ καλεῖται προβληματικόν. ἐπὶ μὲν οὖν τοῦ θεωρητικοῦ γένους, τὸ ζητούμενον ὡς ὂν ὑποθέμενοι, καὶ ὡς ἀληθές, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν, καὶ ὡς ἔστι καθ' ὑπόθεσιν, προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον· ἐὰν μὲν ἀληθὲς ᾖ ἐκεῖνο τὸ ὁμολογούμενον, ἀληθὲς ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει· ἐὰν δὲ ψεύδει ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ψεῦδος ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον. ἐπὶ δὲ τοῦ προβληματικοῦ γένους, τὸ προτεθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν, προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον· ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατὸν ᾖ καὶ ποριστόν, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθέν, δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ προτεθέν, καὶ πάλιν ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει· ἐὰν δὲ ἀδυνάτῳ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ἀδύνατον ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα. διορισμὸς δέ ἐστι προδιαστολὴ τοῦ πότε, καὶ πῶς, καὶ ποσαχῶς δυνατὸν ἔσται τὸ πρόβλημα. τοσαῦτα μὲν οὖν περὶ ἀναλύσεως καὶ συνθέσεως.

Τῶν δὲ προειρημένων τοῦ ἀναλυομένου βιβλίων ἡ τάξις ἐστὶ τοιαύτη. Εὐκλείδου δεδομένων βιβλίον ἕν· Ἀπολλωνίου λόγου ἀποτομῆς δύο, χωρίου ἀποτομῆς δύο, διωρισμένης τομῆς δύο· ἐπαφῶν δύο. Εὐκλείδου πορισμάτων τρία· Ἀπολλωνίου νεύσεων δύο, τοῦ αὐτοῦ τόπων ἐπιπέδων δύο, κωνικῶν ὀκτώ· Ἀρισταίου τόπων στερεῶν πέντε· Εὐκλείδου τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν δύο· Ερατοσθένους περὶ μεσοτήτων δύο. γίνεται βιβλία λγ΄, ὧν τὰς περιοχάς, μέχρι τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν, ἐξεθέμην σοὶ πρὸς ἐπίσκεψιν, καὶ τὸ πλῆθος τῶν τόπων, καὶ τῶν διορισμῶν, καὶ τῶν πτώσεων, καθ' ἕκαστον βιβλίον· ἀλλὰ καὶ τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα· καὶ οὐδεμίαν ἐν τῇ πραγματείᾳ τῶν βιβλίων καταλέλοιπα ζήτησιν, ὡς ἐνόμιζον.

Περὶ τῶν Δεδομένων Εὐκλείδου.

Περιέχει δὲ τὸ πρῶτον βιβλίον, ὅπερ ἐστὶ τῶν δεδομένων, ἅπαντα θεωρήματα ἐννενήκοντα· ὧν πρῶτα μὲν καθόλου ἐπὶ μεγεθῶν διαγράμματα κγ΄· τὸ δὲ δ΄ καὶ τὸ κ΄ ἐν εὐθείαις ἐστὶν ἀνάλογον ἄνευ θέσεως· τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ιδ΄ ἐν εὐθείαις ἐστὶ θέσει δεδομέναις. τὰ δὲ τούτοις ἑξῆς ι΄ ἐπὶ τριγώνων ἐστὶ τῷ εἴδει δεδομένων ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ἑπτά, ἐπὶ τυχόντων ἐστὶν εὐθυγράμμων χωρίων εἴδει δεδομένων ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ἕξ, ἐν παραλληλογράμμοις ἔτι καὶ παραβολαῖς εἴδει δεδομένων χωρίων. τῶν δὲ ἐχομένων ε΄, τὸ μὲν πρῶτον * γραφόμενόν ἐστι, τὰ δὲ δ΄ ἐπὶ τριγώνων χωρίων, ὅτι αἱ διαφοραὶ τῶν δυνάμεων τῶν πλευρῶν

πρὸς

πρὸς ταῦτα τὰ τρίγωνα χωρία λόγον ἔχουσι δεδομένον. τὰ δὲ ἑξῆς ἑπτὰ, ἕως τοῦ ο' καὶ γ', ἐν δυσὶ παραλληλογράμμοις, ὅτι διὰ τὰς ἐν ταῖς γωνίαις ὑποθέσεις ἐν δεδομένοις ἐστὶ λόγοις πρὸς ἄλληλα· ἔνια δὲ τούτων ἐπιλόγους ἔχει ὁμοίους ἐν δυσὶ τριγώνοις. ἐν δὲ τοῖς ἀφεξῆς ἐξ διαγράμμασιν, ἕως τοῦ ο' καὶ θ', δύο μέν ἐστιν ἐπὶ τριγώνων, δ' δὲ ἐπὶ πλειόνων εὐθειῶν ἀνάλογον οὐσῶν. τὰ δὲ ἑξῆς τρία, ἐπὶ δύο εὐθειῶν ἀνάλογον οὐσῶν, * τὰ δ' ἐστι, δοθέν τι περιεχουσῶν χωρίον. τὰ δὲ ἐπὶ πᾶσιν ὀκτὼ, ἕως ϟ, ἐν κύκλοις δείκνυται, τοῖς μὲν μεγέθει μόνον δεδομένοις, τοῖς δὲ καὶ θέσει· ὅτι διαγομένων εὐθειῶν διὰ δεδομένου σημείου τὰ γενόμενα δεδομένα.

Περὶ λόγου ἀποτομῆς β'.

Τῆς δ' ἀποτομῆς τοῦ λόγου βιβλίων ὄντων δύο, πρότασίς ἐστι μία ὑποδιῃρημένη· διὸ καὶ μίαν πρότασιν οὕτω γράφω. Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν τῇ θέσει δοθεισῶν δύο εὐθειῶν, πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις, λόγον ἐχούσας τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. Τὰς δὲ γραφὰς διαφόρους γενέσθαι καὶ πλῆθος λαβεῖν συμβέβηκεν, ὑποδιαιρέσεως γενομένης ἕνεκα, τῆς τε πρὸς ἀλλήλας θέσεως τῶν δεδομένων εὐθειῶν καὶ τῶν διαφόρων πτώσεων τοῦ δεδομένου σημείου, καὶ διὰ τὰς ἀναλύσεις καὶ συνθέσεις αὐτῶν τε καὶ τῶν διορισμῶν. Ἔχει γὰρ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον τοῦ λόγου ἀποτομῆς τόπους ἑπτὰ, πτώσεις κδ', διορισμοὺς δὲ πέντε, ὧν τρεῖς μέν εἰσι μέγιστοι, δύο δὲ ἐλάχιστοι· καί ἐστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ ε' τόπου, ἐλάχιστος δὲ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ ἕκτου τόπου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τοῦ ζ' τόπου, μέγιστοι δὲ οἱ κατὰ τὰς τετάρτας τοῦ ς' καὶ τοῦ ἑβδόμου τόπου. Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιδ', πτώσεις δὲ ξγ', διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ ὅλον εἰς τὸ πρῶτον. Λήμματα δ' ἔχει τὰ λόγου ἀποτομῆς κ', αὐτὰ δὲ τὰ δύο βιβλία τοῦ λόγου ἀποτομῆς θεωρημάτων ἐστὶ ρπα', κατὰ δὲ Περικλέα πλειόνων ἢ τοσούτων.

Περὶ χωρίου ἀποτομῆς β΄.

Τῆς δ' ἀποτομῆς τοῦ χωρίου βιβλία μέν ἐστι δύο, πρόβλημα δὲ κἀν τούτοις ἓν ὑποδιαιρούμενον δίς. καὶ τούτων μία πρότασίς ἐστι τὰ μὲν ἄλλα ὁμοίως ἔχουσα τῇ προτέρᾳ, μόνῳ δὲ τούτῳ διαφέρουσα τῷ δεῖν τὰς ἀποτεμνομένας δύο εὐθείας ἐν ἐκείνῃ μὲν λόγον ἐχούσας δοθέντα ποιεῖν, ἐν δὲ ταύτῃ χωρίον περιεχούσας δοθέν· ῥηθήσεται γὰρ οὕτω. Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν δοθεισῶν θέσει δύο εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις χωρίον περιεχούσας ἴσον τῷ δοθέντι. καὶ αὕτη δὲ διὰ τὰς αὐτὰς αἰτίας τὸ πλῆθος ἔσχηκε τῶν γραφομένων. Ἔχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον χωρίου ἀποτομῆς τόπους ζ΄, πτώσεις κδ΄, διορισμοὺς ζ΄· ὧν τέσσαρες μὲν μέγιστοι, τρεῖς δὲ ἐλάχιστοι. καὶ ἔστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν δευτέραν πτῶσιν τοῦ πρώτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην πτῶσιν τοῦ β΄ τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ τετάρτου, καὶ ὁ κατὰ τὴν τρίτην τοῦ ἕκτου τόπου· ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ τρίτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν δ΄ τοῦ τετάρτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ ἕκτου τόπου. Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον τοῦ χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιγ΄, πτώσεις δὲ ξ΄, διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ εἰς αὐτόν. θεωρήματα δ' ἔχει τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον μη΄, τὸ δὲ δεύτερον ος΄.

Περὶ διωρισμένης τομῆς β΄.

Ἑξῆς τούτοις ἀναδέδονται τῆς διωρισμένης τομῆς βιβλία δύο, ὧν ὁμοίως τοῖς πρότερον μίαν πρότασιν πάρεστι λέγειν, διεζευγμένην δὲ ταύτην· τὴν δοθεῖσαν ἄπειρον εὐθεῖαν ἑνὶ σημείῳ τεμεῖν, ὥστε τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῆς δοθεῖσι σημείοις, ἤτοι τὸ ἀπὸ μιᾶς τετράγωνον, ἢ τὸ ὑπὸ δύο ἀπολαμβανομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέντα λόγον ἔχειν, ἤτοι πρὸς τὸ ὑπὸ μιᾶς ἀπολαμβανομένης καὶ τῆς ἔξω δοθείσης, ἢ πρὸς τὸ ὑπὸ δύο ἀπολαμβανομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἐφ' ὁπότερα χρὴ τῶν δοθέντων σημείων. Καὶ ταύτης, ἅτε δὶς διεζευγμένης καὶ περισκελεῖς διορισμοὺς ἐχούσης, διὰ πλειόνων ἡ δεῖξις γέγονεν ἐξ ἀνάγκης.

ἀνάγκης. δείκνυσι δὲ ταύτην Ἀπολλώνιος ἐπὶ ψιλῶν τῶν εὐθειῶν τριβακώτερον πειρώμενος, καθάπερ καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν πρώτων στοιχείων Εὐκλείδου. καὶ ταύτην πάλιν εἰσαγωγικώτερον ἐπαναγράφων δεῖξαστε καὶ εὐφυῶς διὰ τῶν ἡμικυκλίων. Ἔχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον προβλήματα ἕξ, ἐπιτάγματα ιϛ´, διορισμοὺς πέντε, ὧν μεγίστους μὲν δ´, ἐλάχιστον δὲ ἕνα· καὶ εἰσὶ μέγιστοι μὲν, ὅ,τε κατὰ τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ δευτέρου προβλήματος, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ τετάρτου προβλήματος, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ε´, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἕκτου· ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ γ´ ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. Τὸ δὲ δεύτερον διωρισμένης τομῆς ἔχει προβλήματα τρία, ἐπιτάγματα ἐννέα, διορισμοὺς τρεῖς· ὧν εἰσὶν ἐλάχιστοι μὲν, ὅ,τε κατὰ τὸ τρίτον τοῦ πρώτου, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ δευτέρου· μέγιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ τρίτου προβλήματος. Λήμματα δὲ ἔχει τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον κζ´, τὸ δὲ δεύτερον κδ´. θεωρημάτων δὲ ἐστι τὰ δύο βιβλία διωρισμένης τομῆς πγ´.

Περὶ ἐπαφῶν β´.

Ἑξῆς δὲ τούτοις τῶν ἐπαφῶν ἐστι βιβλία δύο, προτάσεις δὲ ἐν αὐτοῖς δοκοῦσιν εἶναι πλείονες, ἀλλὰ καὶ τούτων μίαν τίθεμεν οὕτως ἔχουσαν· ἐξῆς σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων τριῶν ὁποιωνοῦν θέσει δοθέντων, κύκλον ἀγαγεῖν δι' ἑκάστου τῶν δοθέντων σημείων, εἰ δοθείη, ἐφαπτόμενον ἑκάστης τῶν δοθεισῶν γραμμῶν. ταύτης διὰ πλήθη τῶν ἐν ταῖς ὑποθέσεσι δεδομένων ὁμοίων ἢ ἀνομοίων κατὰ μέρος διαφόρους προτάσεις ἀναγκαῖον γίνεσθαι δέκα· ἐκ τῶν τριῶν γὰρ ἀνομοίων γενῶν τριάδες διάφοροι ἄτακτοι γίνονται δέκα. ἤτοι γὰρ τὰ δεδομένα, τρία σημεῖα, ἢ τρεῖς εὐθεῖαι, ἢ δύο σημεῖα καὶ εὐθεῖα, ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ σημεῖον, ἢ δύο σημεῖα καὶ κύκλος, ἢ δύο κύκλοι καὶ σημεῖον, ἢ δύο κύκλοι καὶ εὐθεῖα, ἢ σημεῖον καὶ εὐθεῖα καὶ κύκλος, ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ κύκλος, ἢ τρεῖς κύκλοι. Τούτων δύο μὲν τὰ πρῶτα δέδεικται ἐν τῷ τετάρτῳ βιβλίῳ τῶν πρώτων στοιχείων, ὅπερ * ἐῶ μὲν γράφων. τὸ μὲν γὰρ τριῶν δοθέντων σημείων μὴ ἐπ' εὐθείαν ὄντων τὸ αὐτό ἐστι τῷ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι. τὸ δὲ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν

μὴ

μὴ παραλλήλων οὐσῶν, ἀλλὰ τῶν τριῶν συμπιπτουσῶν, τὸ αὐτό ἐστι τῷ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι. τὸ γὰρ δύο παραλλήλων οὐσῶν δὲ μιᾶς ἐμπιπτούσης ὡς μέρος ὂν τοῦ β΄. ὑποδιαιρέσεως προγράφεται ἐν τούτοις· πάντα δὲ τὰ ἑξῆς ἓξ ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. Τὰ δὲ λειπόμενα δύο, τὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ κύκλου, ἢ τριῶν δοθέντων κύκλων, μόνον ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ, διὰ τὰς πρὸς ἀλλήλους θέσεις τῶν κύκλων τε καὶ εὐθειῶν πλείονας οὔσας καὶ πλειόνων διορισμῶν δεομένας. ταῖς προειρημέναις ἐπαφαῖς ὁμογενὲς πλῆθός ἐστι προβλημάτων, παραλειπόμενον ἀπὸ τῶν ἀναδιδόντων· προσαπέδωκαν δέ τινες προτέρῳ τῶν εἰρημένων δύο βιβλίων· εὐσύνοπτόν γὰρ καὶ εἰσαγωγικὸν μᾶλλον ἦν, ἐντελές τε δὲ συμπληρωτικὸν τοῦ γένους τῶν ἐπαφῶν. πάλιν μιᾷ περιλαβὼν ἅπαντα προτάσει, ἥτις τῆς προειρημένης λείπουσα μὲν ὑποθέσει, περιττεύουσα δὲ ἐπιτάγματι, οὕτως ἔχει. Ἐκ σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων ὁποιωνοῦν δύο δοθέντων κύκλον γράψαι τῷ μεγέθει δοθέντα, διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἢ τῶν δοθέντων παραγινόμενον, εἰ δοθείη, ἐφαπτόμενον δὲ ἑκάστης τῶν δεδομένων γραμμῶν· αὕτη περιέχει προβλημάτων ἤδη τὸ πλῆθος ἕξ. ἐκ τριῶν γὰρ διαφόρων τινῶν δυάδες ἄτακτοι διάφοραι γίνονται τὸ πλῆθος ἕξ· ἤτοι γὰρ δύο δοθέντων σημείων, ἢ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἢ δύο δοθέντων κύκλων, ἢ σημείου καὶ εὐθείας, ἢ σημείου καὶ κύκλου, ἢ εὐθείας καὶ κύκλου, τὸν δεδομένον τῷ μεγέθει κύκλον διάγειν δεῖ, ὡς εἴρηται· καὶ ταῦτα ἀναλῦσαι δὲ συνθεῖναι καὶ διορίζεσθαι κατὰ πτῶσιν. Ἔχει δὲ τὸ πρῶτον τῶν ἐπαφῶν προβλήματα ζ΄. τόδε δεύτερον προβλήματα δ΄. Λήμματα δὲ ἔχει τὰ δύο βιβλία κα΄. αὐτὰ δὲ θεωρήματά ἐστιν ξ΄.

Περὶ τῶν πορισμάτων Εὐκλείδου.

Μετὰ δὲ τὰς ἐπαφὰς ἐν τρισὶ βιβλίοις πορίσματά ἐστιν Εὐκλείδου, πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν, ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος. Οὐδὲν προστεθείκασι τοῖς ὑπ' Εὐκλείδου γραφεῖσι πρώτου, χωρὶς εἰ μή τινες τῶν πρὸ ἡμῶν ἀπειρόκαλοι δευτέρας γραφὰς ὀλίγοις αὐτῶν παρατεθείκασιν· ἑκάστου μὲν

πλῆθος

πλῆθος ὡρισμένον ἐχόντων ἀποδείξεων, * ὡς ἐδείξαμεν, τοῦ δὲ Εὐκλείδου μίαν ἑκάστου θέντος τὴν μάλιστα ὑπεμφαίνουσαν. Ταῦτα δὲ λεπτὴν καὶ φυσικὴν ἔχει θεωρίαν καὶ ἀναγκαίαν καὶ καθολικωτέραν, καὶ τοῖς δυναμένοις ὁρᾶν καὶ πορίζειν ἐπιτερπῆ. ἅπαντα δὲ αὐτῶν τὰ εἴδη οὔτε θεωρημάτων ἐστὶ οὔτε προβλημάτων, ἀλλὰ μέσην πως τούτων ἐχούσης ἰδέας· ὥστε τὰς προτάσεις αὐτῶν δύνασθαι σχηματίζεσθαι ἢ ὡς θεωρημάτων ἢ ὡς προβλημάτων· παρ' ὃ καὶ συμβέβηκεν, τῶν πολλῶν γεωμετρῶν τοὺς μὲν ὑπολαμβάνειν αὐτὰ εἶναι τῷ γένει θεωρήματα, τοὺς δὲ προβλήματα, ἀποβλέποντας τῷ σχήματι μόνον τῆς προτάσεως. τὰς δὲ διαφορὰς τῶν τριῶν τούτων ὅτι βέλτιον ᾔδεισαν οἱ ἀρχαῖοι, δῆλον ἐκ τῶν ὅρων. ἔφασαν γὰρ θεώρημα μὲν εἶναι τὸ προτεινόμενον εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου· πρόβλημα δὲ τὸ προβαλλόμενον εἰς κατασκευὴν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου· πόρισμα δὲ τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου. μετεγράφη δὲ οὗτος ὁ τοῦ πορίσματος ὅρος ὑπὸ τῶν νεωτέρων, μὴ δυναμένων ἅπαντα πορίζειν, ἀλλὰ συγχρωμένων τοῖς στοιχείοις τούτοις, καὶ δεικνύντων αὐτὸ μόνον τοῦθ' ὅτι ἐστὶ τὸ ζητούμενον, μὴ πορίζοντων δὲ τοῦτο· καὶ ἐλεγχόμενοι ὑπὸ τοῦ ὅρου καὶ τῶν διδασκομένων, ἔγραψαν ἀπὸ συμβεβηκότος οὕτως. πόρισμά ἐστι τὸ λεῖπον ὑποθέσει τοπικοῦ θεωρήματος. τούτου δὲ τοῦ γένους τῶν πορισμάτων εἶδός ἐστιν οἱ τόποι, καὶ πλεονάζουσι ἐν τῷ ἀναλυομένῳ· κεχωρισμένων δὲ τῶν πορισμάτων ἤθροισται καὶ ἐπιγράφεται καὶ παραδίδοται, διὰ τὸ πολύχυτον εἶναι μᾶλλον τῶν ἄλλων εἰδῶν. τῶν γοῦν τόπων ἐστὶν ἃ μὲν ἐπιπέδων, ἃ δὲ στερεῶν, ἃ δὲ γραμμικῶν, καὶ ἔτι τῶν πρὸς μεσότητας. Συμβέβηκεν δὲ καὶ τοῦτο τοῖς πορίσμασι, τὰς προτάσεις ἔχειν ἐπιτετμημένας διὰ τὴν σκολιότητα πολλῶν συνήθως συνυπακουομένων, ὥστε πολλοὺς τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ μέρους ἐκδέχεσθαι, τὰ δὲ ἀναγκαιότερα ἀγνοεῖν τῶν σημαινομένων. περιλαβεῖν δὲ πολλὰ μιᾷ προτάσει ἥκιστα δυνατὸν ἐν τούτοις, διὰ τὸ καὶ αὐτὸν Εὐκλείδην οὐ πολλὰ ἐξ ἑκάστου εἴδους τεθεικέναι, ἀλλὰ δείγματος ἕνεκα τῆς πολυπληθίας * ἐνῆ ὀλίγα πρὸς ἀρχήν. δεδομένον * τοῦ πρώτου βιβλίου τέθεικεν ὁμοειδῆ πάντα ἐκείνου τοῦ δαψιλεστέρου εἴδους τῶν τόπων, ὡς δέκα * τὸ πλῆθος. Διὸ καὶ περιλαβεῖν ταύτας μὴ παραλλήλων οὐσῶν, ἀλλὰ τῶν τριῶν συμπιπτουσῶν, τὸ αὐτό ἐστι τῷ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι. τὸ γὰρ δύο παραλλήλων οὐσῶν καὶ μιᾶς ἐμπιπτούσης ὡς μέρος ὂν τῆς β΄. ὑποδιαιρέσεως προγράφεται ἐν τούτοις· πάντα καὶ τὰ ἑξῆς ἓξ ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. Τὰ δὲ λειπόμενα δύο, τὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ κύκλου, ἢ τριῶν δοθέντων κύκλων, μόνον ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ, διὰ τὰς πρὸς ἀλλήλους θέσεις τῶν κύκλων τε καὶ εὐθειῶν πλείονας οὔσας καὶ πλειόνων διορισμῶν δεομένας. ταῖς προειρημέναις ἐπαφαῖς ὁμογενὲς πλῆθός ἐστι προβλημάτων, παραλειπόμενον ἀπὸ τῶν ἀναδιδόντων· προσυνέδωκαν δέ τινες προτέρῳ τῶν εἰρημένων δύο βιβλίων· εὐσύνοπτόν γὰρ καὶ εἰσαγωγικὸν μᾶλλον ἦν, ἐντελές τε καὶ συμπληρωτικὸν τοῦ γένους τῶν ἐπαφῶν. πάλιν μιᾷ περιλαβὼν ἅπαντα προτάσει, ἥτις τῆς προειρημένης λείπουσα μὲν ὑποθέσει, περιττεύουσα δὲ ἐπιτάγματι, οὕτως ἔχει. Ἐκ σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων ὁποιωνοῦν δύο δοθέντων κύκλον γράψαι τῷ μεγέθει δοθέντα, διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἢ τῶν δοθέντων παραγινόμενον, εἰ δοθείη, ἐφαπτόμενον δὲ ἑκάστης τῶν δεδομένων γραμμῶν· αὕτη περιέχει προβλημάτων ἤδη τὸ πλῆθος ἕξ. ἐκ τριῶν γὰρ διαφόρων τινῶν δυάδες ἄτακτοι διάφοραι γίνονται τὸ πλῆθος ἕξ· ἤτοι γὰρ δύο δοθέντων σημείων, ἢ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἢ δύο δοθέντων κύκλων, ἢ σημείου καὶ εὐθείας, ἢ σημείου καὶ κύκλου, ἢ εὐθείας καὶ κύκλου, τὸν δεδομένον τῷ μεγέθει κύκλον διαγαγεῖν δεῖ, ὡς εἴρηται· καὶ ταῦτα ἀναλῦσαι καὶ συνθεῖναι καὶ διορίζεσθαι κατὰ πτῶσιν. Ἔχει δὲ τὸ πρῶτον τῶν ἐπαφῶν προβλήματα ζ΄. τόδε δεύτερον προβλήματα δ΄. Λήμματα δὲ ἔχει τὰ δύο βιβλία κα΄. αὐτὰ δὲ θεωρήματά ἐστιν ξ΄.

Περὶ τῶν πορισμάτων Εὐκλείδου.

Μετὰ δὲ τὰς ἐπαφὰς ἐν τρισὶ βιβλίοις πορίσματά ἐστιν Εὐκλείδου, πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν, ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος. Οὐδὲν προστεθείκασι τοῖς ὑπ᾽ Εὐκλείδου γραφεῖσι πρώτου, χωρὶς εἰ μή τινες τῶν πρὸ ἡμῶν ἀπειρόκαλοι δευτέρας γραφὰς ὀλίγοις αὐτῶν παρατεθείκασιν· ἑκάστου μὲν

πλῆθος

πλῆθος ὡρισμένον ἔχοντος ἀποδείξεων, * ὡς ἐδείξαμεν, οὗ δὲ Εὐκλείδου μίαν ἑκάστου θέντος τὴν μάλιστα ὑπεμφαίνουσαν. Ταῦτα δὲ λεπτὴν καὶ φυσικὴν ἔχει θεωρίαν καὶ ἀναγκαίαν καὶ καθολικωτέραν, καὶ τοῖς δυναμένοις ὁρᾶν καὶ πορίζειν ἐπιτερπῆ. ἅπαντα δὲ αὐτῶν τὰ εἴδη οὔτε θεωρημάτων ἐστὶ οὔτε προβλημάτων, ἀλλὰ μέσην πως τούτων ἐχούσης ἰδέας· ὥστε τὰς προτάσεις αὐτῶν δύνασθαι σχηματίζεσθαι ἢ ὡς θεωρημάτων ἢ ὡς προβλημάτων· παρ' ὃ καὶ συμβέβηκεν, τῶν πολλῶν γεωμετρῶν τοὺς μὲν ὑπολαμβάνειν αὐτὰ εἶναι τῷ γένει θεωρήματα, τοὺς δὲ προβλήματα, ἀποβλέποντας τῷ σχήματι μόνον τῆς προτάσεως. τὰς δὲ διαφορὰς τῶν τριῶν τούτων ὅτι βέλτιον ᾔδεισαν οἱ ἀρχαῖοι, δῆλον ἐκ τῶν ὅρων. ἔφασαν γὰρ θεώρημα μὲν εἶναι τὸ προτεινόμενον εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου· πρόβλημα δὲ τὸ προβαλλόμενον εἰς κατασκευὴν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου· πόρισμα δὲ τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου. μετεγράφη δὲ οὗτος ὁ τοῦ πορίσματος ὅρος ὑπὸ τῶν νεωτέρων, μὴ δυναμένων ἅπαντα πορίζειν, ἀλλὰ συγχρωμένων τοῖς στοιχείοις τούτοις, καὶ δεικνύντων αὐτὸ μόνον τοῦθ' ὅτι ἐστὶ τὸ ζητούμενον, μὴ πορίζόντων δὲ τοῦτο· καὶ ἐλεγχόμενοι ὑπὸ τοῦ ὅρου καὶ τῶν διδασκομένων, ἔγραψαν ἀπὸ συμβεβηκότος οὕτως. πόρισμά ἐστι τὸ λεῖπον ὑποθέσει τοπικοῦ θεωρήματος. τούτου δὲ τοῦ γένους τῶν πορισμάτων εἶδός ἐστιν οἱ τόποι, καὶ πλεονάζουσι ἐν τῷ ἀναλυομένῳ· κεχωρισμένων δὲ τῶν πορισμάτων ἤθροισται καὶ ἐπιγράφεται καὶ παραδίδοται, διὰ τὸ πολύχυτον εἶναι μᾶλλον τῶν ἄλλων εἰδῶν. τῶν γοῦν τόπων ἐστὶν ἃ μὲν ἐπιπέδων, ἃ δὲ στερεῶν, ἃ δὲ γραμμικῶν, καὶ ἔτι τῶν πρὸς μεσότητας. Συμβέβηκεν δὲ καὶ τοῦτο τοῖς πορίσμασι, τὰς προτάσεις ἔχειν ἐπιτετμημένας διὰ τὴν σκολιότητα πολλῶν συνήθως συνυπακουομένων, ὥστε πολλοὺς τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ μέρους ἐκδέχεσθαι, τὰ δὲ ἀναγκαιότερα ἀγνοεῖν τῶν σημαινομένων. περιλαβεῖν δὲ πολλὰ μιᾷ προτάσει ἥκιστα δυνατὸν ἐν τούτοις, διὰ τὸ καὶ αὐτὸν Εὐκλείδην οὐ πολλὰ ἐξ ἑκάστου εἴδους τεθεικέναι, ἀλλὰ δείγματος ἕνεκα τῆς πολυπληθίας * ἐνίη ὀλίγα πρὸς ἀρχήν. δεδομένον * τοῦ πρώτου βιβλίου τέθεικεν ὁμοειδῆ πάντ' ἐκείνου τοῦ δαψιλεστέρου εἴδους τῶν τόπων, ὡς δέκα * τὸ πλῆθος. Διὸ καὶ περιλαβεῖν ταύτας ἐν μιᾷ προτάσει ἐνδεχόμενον εὑρόντες οὕτως ἐγράψαμεν.

Ἐὰν ὑπτίου ἢ παρυπτίου ἢ παραλλήλου * ἑτέρα τρία τὰ ἐπὶ μιᾶς σημεῖα δεδομένα ᾖ, τὰ δὲ λοιπὰ πλὴν ἑνὸς ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, καὶ τοῦθ' ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. τοῦτ' ἐπὶ τεσσάρων μὲν εὐθειῶν εἴρηται μόνων, ὧν οὐ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰσίν· ἀγνοεῖται δὲ ἐπὶ παντὸς τοῦ προτεινομένου πλήθους ἀληθὲς ὑπάρχον οὕτω λεγόμενον. ἐὰν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πάντα δὲ ἐπὶ μιᾶς αὐτῶν δεδομένα ᾖ, καὶ τῶν ἐπὶ ἑτέρας ἕκαστον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας· ἢ καθολικώτερον οὕτως, ἐὰν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πάντα δὲ τὰ ἐπὶ μιᾶς αὐτῶν σημεῖα δεδομένα ᾖ, τῶν δὲ λοιπῶν τὸ πλῆθος ἐχόντων τρίγωνον ἀριθμόν, ἡ πλευρὰ τούτου ἕκαστον ἔχει σημεῖον ἁπτόμενον εὐθείας θέσει δεδομένης, ὧν τριῶν μὴ πρὸς γωνίαν ὑπαρχόντων τριγώνου χωρὶς ἕκαστον λοιπὸν σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. τὸν δὲ στοιχειωτὴν οὐκ εἰκὸς ἀγνοῆσαι τοῦτο, τὴν δ' ἀρχὴν μόνην τάξαι. καὶ ἐπὶ πάντων δὲ τῶν πορισμάτων φαίνεται ἀρχὰς καὶ σπέρματα μόνα πληθῶν πολλῶν καὶ μεγάλων καταβεβληκέναι, ὧν ἕκαστον οὐ κατὰ τὰς τῶν ὑποθέσεων διαφορὰς διαστέλλειν δεῖ, ἀλλὰ κατὰ τὰς τῶν συμβεβηκότων καὶ ζητουμένων· αἱ μὲν ὑποθέσεις ἅπασαι διαφέρουσιν ἀλλήλων εἰδικώταται οὖσαι, τῶν δὲ συμβαινόντων καὶ ζητουμένων ἕκαστον ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὂν πολλαῖς ὑποθέσεσιν διαφόροις συμβέβηκε.

Ποιητέον οὖν ἐν μὲν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ ταῦτα τὰ γένη τῶν ἐν ταῖς προτάσεσι ζητουμένων. (ἐν ἀρχῇ μὲν τοῦ ζ' διάγραμμα τοῦτο) Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων πρὸς θέσει δεδομένην εὐθεῖαν κλασθῶσιν, ἀποτέμνῃ δὲ μία ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς τῷ ἐπ' αὐτῆς δεδομένῳ σημείῳ, ἀποτεμεῖ καὶ ἡ ἑτέρα ἀπὸ ἑτέρας λόγον ἔχουσαν δοθέντα. ἐν δὲ τοῖς ἑξῆς, ὅτι τόδε τὸ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης εὐθείας· ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς τήνδε δοθείς· ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἥδε θέσει δεδομένη ἐστίν· ὅτι ἥδε ἐπὶ δοθὲν νεύει· ὅτι λόγος τῆσδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι λόγος τῆσδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε κατηγμένην· ὅτι λόγος τοῦδε τοῦ * χωρίου πρὸς τὸ ὑπὸ δοθεί-

σης

σῆς καὶ τῆσδε· ὅτι τοῦδε τοῦ χωρίου ὁ μὲν τι δοθέν ἐστιν, ὁ δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τόδε τὸ χωρίον, ἢ τόδε μετά τινος χωρίου δοθέντος ἐστιν, * ἐκεῖνο δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἥδε μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα, λόγον ἔχει πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ὑπὸ τοῦ δοθέντος καὶ τῆσδε, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δοθέντος καὶ τῆς ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι λόγος τῆσδε καὶ τῆσδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι ἥδε ἀποτέμνει ἀπὸ θέσει δεδομένων δοθὲν περιεχούσας.

Ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ ὑποθέσεις μὲν ἕτεραι, τῶνδε ζητουμένων τὰ μὲν πλείονα τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, περισσὰ δὲ ταῦτα· ὅτι τόδε τὸ χωρίον ἤτοι λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν, ἢ μετὰ δοθέντος. λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶνδε καὶ * συναμφοτέρου τῶνδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τὸ ὑπὸ τῆσδε καὶ συναμφοτέρου τῆσδέ τε καὶ τῆς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα· καὶ τὸ ὑπὸ τῆσδε καὶ τῆς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα, λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος συναμφοτέρου πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι δοθὲν τὸ ὑπὸ τῶνδε.

Ἐν δὲ τῷ τρίτῳ βιβλίῳ αἱ μὲν πλείονες ὑποθέσεις ἐπὶ ἡμικυκλίων εἰσίν, ὀλίγαι δὲ ἐπὶ κύκλου καὶ τμημάτων· τῶν δὲ ζητουμένων τὰ μὲν πολλὰ παραπλησίως τοῖς ἔμπροσθεν, περισσὰ δὲ ταῦτα· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶνδε· ὅτι λόγος τοῦ ἀπὸ τῆσδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶνδε τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ἀπὸ τῆσδε τῷ ὑπὸ δοθέντος καὶ ἀπολαμβανομένης ὑπὸ καθέτου ἕως δοθέντος· ὅτι συναμφότερος καὶ πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἐστί τι δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τόδε δοθὲν περιέξουσι τῷ εἴδει τρίγωνον· ὅτι ἐστί τι δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τοῦδε ἴσας ἀπολαμβάνουσι περιφερείας· ὅτι ἥδε ἤτοι ἐν παραθέσει ἐστίν, ἢ μετά τινος εὐθείας ἐπὶ τὸ δοθὲν νευούσης δοθεῖσαν περιέχει γωνίαν. ἔχει δὲ τὰ τρία βιβλία τῶν πορισμάτων λήμματα λη', αὐτὰ δὲ θεωρημάτων ἐστὶ ροα.

Τόπων ἐπιπέδων β'.

Τῶν τόπων καθόλου οἱ μὲν εἰσὶν ἐφεκτικοὶ, οὓς καὶ Ἀπολλώνιος πρὸ τῶν στοιχείων λέγει σημείου μὲν τόπον σημεῖον, γραμμῆς δὲ τόπον γραμμὴν, ἐπιφανείας δὲ ἐπιφάνειαν, στερεοῦ δὲ στερεόν· οἱ δὲ διεξοδικοὶ, ὡς σημείου μὲν γραμμὴν, γραμμῆς ἐπιφάνειαν, ἐπιφανείας δὲ στερεόν. οἱ δὲ ἀναστροφικοὶ, ὡς σημείου μὲν ἐπιφάνειαν, γραμμῆς δὲ στερεόν. τῶν δὲ ἐν τῷ ἀναλυομένῳ, οἱ μὲν τῶν θέσει δεδομένων ἐφεκτικοί εἰσιν· οἱ δὲ ἐπίπεδοι λεγόμενοι, καὶ οἱ στερεοὶ καὶ γραμμικοὶ διεξοδικοί εἰσι σημείων. οἱ δὲ πρὸς ἐπιφανείαις ἀναστροφικοὶ μὲν εἰσὶ σημείων, διεξοδικοὶ δὲ γραμμῶν. οἱ μέν τοι γραμμικοὶ ἀπὸ τῶν πρὸς ἐπιφανείαις δείκνυνται. λέγονται δὲ ἐπίπεδοι μὲν τόποι ἤτοί τε περὶ ὧν ἐπάγομεν, καθόλου ὅσοι εἰσὶν εὐθεῖαι γραμμαὶ ἢ κύκλοι· στερεοὶ δὲ, ὅσοι εἰσὶ κώνων τομαὶ, παραβολαὶ ἢ ἐλλείψεις, ἢ ὑπερβολαί. γραμμικοὶ δὲ τόποι λέγονται ὅσαι γραμμαί εἰσιν ἔτι εὐθεῖαι, ἔτι κύκλοι, ἔτι τις τῶν εἰρημένων κωνικῶν τομῶν. οἱ δὲ ὑπὸ Ἐρατοσθένους ἐπιγραφέντες τόποι πρὸς μεσότητας, ἐκ τῶν προειρημένων εἰσὶ τῷ γένει· ἀπὸ δὲ τῆς ἰδιότητος τῶν ὑποθέσεων * ἐκείνοις. οἱ μὲν οὖν ἀρχαῖοι τῶν ἐπιπέδων τόπων τούτων τάξιν ἀποβλέποντες ἐστοιχειώσαν· ἧς ἀμελήσαντες οἱ μετ' αὐτοὺς προσέθηκαν ἑτέρους, ὡς οὐκ ἀπείρων τὸ πλῆθος ὄντων, εἰ θέλοι τις προσγράφειν οὐ τῆς τάξεως ἐκείνης ἐχόμενα. θήσω οὖν τὰ μὲν προσκείμενα ὕστερα, τὰ δὲ τῆς τάξεως πρότερα, μιᾷ περιλαβὼν προτάσει ταύτῃ. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι, ἤτοι ἀπὸ ἑνὸς δεδομένου σημείου ἢ ἀπὸ δύο, καὶ ἤτοι ἐπ' εὐθείας ἢ παράλληλοι, ἢ δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, καὶ ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας, ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον· ἅπτηται δὲ τὸ τῆς μιᾶς πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου, ἅψεται καὶ τὸ τῆς ἑτέρας πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου, ὅτε μὲν τοῦ ὁμογενοῦς, ὅτε δὲ τοῦ ἑτέρου· καὶ ὅτε μὲν ὁμοίως κειμένου πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ὅτε δὲ ἐναντίως· ταῦτα δὲ γίνεται παρὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὑποκειμένων· τὰ δὲ προσκείμενα ἐν ἀρχῇ ὑπὸ Χαρμάνδρου γ' συμφωνεῖ ταῦτα. Ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης τὸ ἓν πέρας ᾖ δεδομένον, τὸ ἕτερον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης.

κοίλης. Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης. Ἐὰν τριγώνου χωρίου μεγέθει δεδομένου ἡ βάσις θέσει καὶ μεγέθει δεδομένη ᾖ, ἡ κορυφὴ αὐτοῦ ἅπτεται θέσει δεδομένης εὐθείας. ἕτερα δὲ τοιαῦτα. Ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης, καὶ παρά τινα θέσει δεδομένην εὐθεῖαν ἠγμένης, τὸ ἓν πέρας ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ἅπτεται καὶ τὸ ἕτερον εὐθείας δεδομένης. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας δύο εὐθείας, παραλλήλους ἢ συμπιπτούσας, καταχθῶσιν ἐν δεδομέναις γωνίαις ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον· ἢ ὧν ἡ μία, μεθ᾽ ἧς πρὸς ἣν ἡ ἑτέρα λόγον ἔχει δοθέντα, δεδομένη ἐστί, ἅπτεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν ὦσιν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι θέσει δεδομέναι, καὶ ἐπ᾽ αὐτὰς ἀπό τινος σημείου καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ κατηγμένης, μετὰ τοῦ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, καὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως, τὸ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας παραλλήλους καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ᾽ αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις εὐθείας, ἤτοι λόγον ἐχούσας δοθέντα [ἢ χωρίον περιεχούσας δεδομένον, ἢ ὥστε τὰ ἐπ᾽ αὐτῶν τῶν κατηγμένων δεδομένα εἴδη, ἢ τὴν ὑπεροχὴν τῶν εἰδῶν ἴσην εἶναι δεδομένῳ χωρίῳ] τὸ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης εὐθείας.

Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον περιέχει τάδε· Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσι, καὶ ἡ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν δοθέντι χωρίῳ διαφέροντα, τὸ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν δὲ ὦσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἤτοι εὐθείας ἢ περιφερείας. Ἐὰν ᾖ θέσει δεδομένη εὐθεῖα, καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς δοθὲν σημεῖον, καὶ ἀπὸ τούτου διαχθεῖσά τις πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τοῦ πέρατος ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην, καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς διαχθείσης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἧς ἀπολαμβάνει, ἤτοι πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, ἢ πρὸς ἑτέρῳ δοθέντι σημείῳ ἐπὶ τῆς θέσει δεδομένης, τὸ πέρας τῆσδε ἅπτεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶστιν, καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς μιᾶς τοῦ ἀπὸ τῆς ἑτέρας δοθέντι μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ ὁσωνοῦν δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ἑνὶ σημείῳ, καὶ ἡ τὰ ἀπὸ πασῶν εἴδη ἴσα δοθέντι χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου παρὰ τὴν θέσει ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπολαμβανομένη ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς δοθέντι σημείῳ· καὶ ἡ τὰ ἀπὸ τῶν κεκλασμένων εἴδη ἴσα τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης, τὸ πρὸς τῇ κλάσει σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἐντὸς κύκλου θέσει δεδομένου δοθέν τι σημεῖον ᾖ, καὶ δι' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός· καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς ἄχρι τοῦ δοθέντος ἐντὸς σημείου, ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, ἢ τῷ μόνῳ, ἢ τούτῳ τε καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐντὸς δύο τμημάτων, τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν τοῦτο μὲν σημεῖον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ὁ δὲ κύκλος μὴ ὑπόκειται, τὰ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ δεδομένου σημεῖα ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας τῆς αὐτῆς. ἔχει δὲ τὰ τόπων ἐπιπέδων δύο βιβλία θεωρήματα ἤτοι διαγράμματα ρμζ, λήμματα δὲ ὀκτώ.

Νεύσεων δύο.

Νεύειν λέγεται γραμμὴ ἐπὶ σημεῖον, ἐὰν ἐπεκβαλλομένη ἐπ' αὐτὸ παραγίνηται. καθόλου δὲ τὸ αὐτό ἐστιν, ἐάν τε ἐπὶ δοθὲν νεύειν σημεῖον λέγηται· ἐάν τε ἐστί τι ἐπ' αὐτῆς δοθέν· ἐάν τε διὰ δοθέντος ἐστὶ σημείου. Ἐπέγραψαν δὲ ταῦτα Νεύσεις ἀφ' ἑνὸς τῶν εἰρημένων. Προβλήματος δὲ ὄντος καθολικοῦ τούτου· δύο δοθεισῶν γραμμῶν θέσει, θεῖναι μεταξὺ τούτων εὐθεῖαν τῷ μεγέθει δεδομένην, νεύουσαν ἐπὶ δοθὲν σημεῖον. ἐπὶ ταύτης τῶν ἐπὶ μέρους διάφορα τὰ ὑποκείμενα ἐχόντων, ἃ μὲν ἦν ἐπίπεδα, ἃ δὲ στερεά, ἃ δὲ γραμμικά. τῶν δ' ἐπιπέδων ἀποκληρώσαντες τὰ πρὸς πολλὰ χρησιμώτερα, ἔδειξαν προβλήματα ταῦτα. Θέσει δεδομένων ἡμικυκλίου τε καὶ εὐθείας πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, ἢ δύο ἡμικυκλίων ἐπ' εὐθείας ἐχόντων τὰς βάσεις, θεῖναι

δοθεῖσαν

δοθεῖσαν τῷ μεγέθει εὐθεῖαν μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν, νεύουσαν ἐπὶ γωνίαν ἡμικυκλίου. καὶ ῥόμβου δοθέντος, καὶ ἐπεκβλημένης μόνης μιᾶς πλευρᾶς, ἁρμόσαι ὑπὸ τὴν ἐκτὸς γωνίαν δεδομένην τῷ μεγέθει εὐθεῖαν νεύουσαν ἐπὶ τὴν ἀντικρὺς γωνίαν. καὶ θέσει δοθέντος κύκλου ἐναρμόσαι εὐθεῖαν μεγέθει δεδομένην νεύουσαν ἐπὶ δοθέν. τούτων δὲ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ τεύχει δέδεικται, τὸ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἡμικυκλίου καὶ εὐθείας, ἔχον πτώσεις τέσσαρας, καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἔχον πτώσεις δύο, καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ῥόμβου πτώσεις ἔχον δύο. Εν δὲ τῷ δευτέρῳ τεύχει, τὸ ἐπὶ τῶν δύο ἡμικυκλίων, τῆς ὑποθέσεως πτώσεις ἐχούσης δέκα· ἐν δὲ ταύταις ὑποδιαιρέσεις πλείονες διοριστικαὶ, ἕνεκα τοῦ δεδομένου μεγέθους τῆς εὐθείας. Τὰ μὲν οὖν ἐν τῷ ἀναλυομένῳ τόπῳ ἐπίπεδα, τοῦτ' ἔστιν ἃ καὶ πρότερα δείκνυται, χωρὶς τῶν Ερατοσθένους μεσοτήτων· ὕστατα γὰρ ἐκεῖνα. τοῖς δὲ ἐπιπέδοις ἐφεξῆς τὴν τῶν στερεῶν ἡ τάξις ἀπαιτεῖ θεωρίαν. Στερεὰ δὲ καλοῦσι προβλήματα, οὐχ ὅσα ἐν στερεοῖς σχήμασι προτείνεται, ἀλλ' ὅσα διὰ τῶν ἐπιπέδων μὴ δυνάμενα δειχθῆναι, διὰ τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν δείκνυται. ὥστε ἀναγκαῖον πρότερον περὶ τούτων γράφειν. τῶν μὲν οὖν ἀναδιδομένων κωνικῶν στοιχείων πρότερον Αρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου πέντε τεύχη, ὡς ἂν τοῖς ἤδη δυνατοῖς οὖσι ταῦτα παραλαμβάνειν ἐπιτομώτερον γεγραμμένα. ἔχει δὲ τὰ τῶν νεύσεων βιβλία δύο θεωρήματα ἤτοι διαγράμματα ρκε', λήμματα δὲ λη'.

Κωνικῶν η'.

Τὰ Εὐκλείδου βιβλία δ' κωνικῶν Απολλώνιος ἀναπληρώσας καὶ προσθεὶς ἕτερα δ', παρέδωκεν η' κωνικῶν τεύχη. Αρισταῖος δὲ, ὃς γράφει τὰ μέχρι τοῦ νῦν ἀναδιδόμενα στερεῶν τόπων τεύχη ε' συνεχῆ τοῖς κωνικοῖς, ἐκάλει, καὶ οἱ πρὸ Απολλωνίου, τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν, τὴν μὲν ὀξυγωνίου, τὴν δὲ ὀρθογωνίου, τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου κώνου τομήν. ἐπειδὴ ἐν ἑκάστῳ τῶν τριῶν τούτων κώνων διαφόρως τεμνουμένων αἱ τρεῖς γίγνονται γραμμαί· διαπορήσας, ὡς φαίνεται, Απολλώνιος τί δή ποτε ἀπεκληρώσαντο οἱ πρὸ αὐτοῦ, τὴν μὲν ἐκάλουν ὀξυγωνίου κώνου τομὴν δυναμένην καὶ ὀρθογωνίου καὶ ἀμβλυγωνίου εἶναι.

εἶναι· τὴν δὲ ὀρθογωνίου, εἶναι δυναμένην ὀξυγωνίου τε καὶ ἀμβλυγωνίου· τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου δυναμένην εἶναι ὀξυγωνίου τε καὶ ὀρθογωνίου· μεταθεὶς τὰ ὀνόματα καλεῖ τὴν μὲν ὀξυγωνίου καλουμένην Ἔλλειψιν, τὴν δὲ ὀρθογωνίου Παραβολήν, τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου Ὑπερβολήν, ἑκάστην ἀπό τινος ἰδίου συμβεβηκότος. χωρίον γάρ τι παρά τινα γραμμὴν παραβαλλόμενον, ἐν μὲν τῇ ὀξυγωνίου κώνου τομῇ ἐλλεῖπον γίνεται τετραγώνῳ· ἐν δὲ τῇ ὀρθογωνίου οὔτε ἐλλεῖπον οὔθ' ὑπερβάλλον. τοῦτο δ' ἔπαθεν μὴ προνοήσας ὅτι, κατά τινα μίαν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου τέμνοντος τοῦ κώνου, ἄλλη καὶ ἄλλη τῶν γραμμῶν γίνεται, ἣν ὀνομάζουσιν ἀπὸ τῆς ἰδιότητος τοῦ κώνου. ἐὰν γὰρ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀχθῇ παράλληλον μιᾷ τοῦ κώνου πλευρᾷ, γίγνεται μία μόνη τῶν τριῶν γραμμῶν, ἀεὶ ἡ αὐτή, ἣν ὠνόμασεν ὁ Ἀρισταῖος ἐκεῖνος τοῦ τμηθέντος κώνου τομήν. ὁ δ' οὖν Ἀπολλώνιος οἷα περιέχει τὰ ὑπ' αὐτοῦ γραφέντα κωνικῶν η' βιβλία λέγει, κεφαλαιωδῶς θεὶς προδήλωσιν ἐν τῷ προοιμίῳ τοῦ πρώτου ταύτην. "περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων, καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπιπλεῖον, καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξητασμένα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα. τὸ δὲ δεύτερον τὰ περὶ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων συμβαίνοντα, καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρείαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς. τίνας δὲ διαμέτρους ἢ τίνας ἄξονας καλῶ, εἰδήσεις ἐκ τούτου τοῦ βιβλίου. τὸ δὲ τρίτον, πολλὰ καὶ παντοῖα θεωρήματα χρήσιμα πρός τε τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων, καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλείονα καλὰ καὶ ξένα. ἃ καὶ κατανοήσαντες συνείδομεν μὴ συντεθειμένον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ γ' καὶ δ' γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριόν τι αὐτοῦ, καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ δυνατὸν ἄνευ τῶν προσευρημένων τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. τὸ δὲ τέταρτον, ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμπίπτουσι· καὶ ἄλλα ἐκ περισσοῦ, ὧν οὐδέτερον ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν γέγραπται, κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλει, καὶ ἔτι ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλουσι. τὰ δὲ λοιπὰ δ' περιουσιαστικώτερα· ἔστι γὰρ τὸ μὲν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων ἐπιπλεῖον· τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων τομῶν· τὸ δὲ διορι-

διοριστικῶν θεωρημάτων· τὸ δὲ κωνικῶν προβλημάτων διωρισμένων. Ἀπολλώνιος μὲν ταῦτα. ὃν δέ φησιν ἐν τῷ τρίτῳ τόπον ἐπὶ γ΄ καὶ δ΄ γραμμὰς μὴ τελειωθῆναι ὑπὸ Εὐκλείδου, οὐδ᾽ ἂν αὐτὸς ἐδυνήθη, οὐδ᾽ ἄλλος οὐδείς, ἀλλ᾽ οὐδὲ μικρόν τι προσθεῖναι τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γραφεῖσι, διά γε μόνων τῶν προδεδειγμένων ἤδη κωνικῶν, ἄχρι τῶν καθ᾽ Εὐκλείδην· ὡς καὶ αὐτὸς μαρτυρεῖ λέγων ἀδύνατον εἶναι τελειωθῆναι χωρὶς ὧν αὐτὸς προγράφειν ἠναγκάσθη. ὁ δὲ Εὐκλείδης ἀποδεχόμενος τὸν Ἀρισταῖον, ἄξιον ὄντα ἐφ᾽ οἷς ἤδη παραδεδώκει κωνικοῖς· καὶ μὴ φθάσας ἢ μὴ θελήσας ἐπικαταβάλλεσθαι τούτων τὴν αὐτὴν πραγματείαν· (ἐπιεικέστατος ὢν, καὶ πρὸς ἅπαντας εὐμενὴς τοὺς καὶ κατὰ ποσὸν συναύξειν δυναμένους τὰ μαθήματα, ὡς δεῖ, καὶ μηδαμῶς προσκρουστικὸς ὑπάρχων, καὶ ἀκριβὴς μὲν, οὐκ ἀλαζονικὸς δὲ καθάπερ οὗτος) ὅσον δυνατὸν ἦν δεῖξαι τοῦ τόπου διὰ τῶν ἐκείνου κωνικῶν ἔγραψεν, οὐκ εἰπὼν τέλος ἔχειν τὸ δεικνύμενον· τότε γὰρ ἦν ἀναγκαῖον ἐξελέγχειν· νῦν δ᾽ οὐδαμῶς, ἐπείτοι καὶ αὐτὸς ἐν τοῖς κωνικοῖς ἀτελῆ τὰ πλεῖστα καταλιπὼν οὐκ εὐθύνεται. προσθεῖναι δὲ τῷ τόπῳ τὰ λειπόμενα δεδύνηται, προφαντασιωθεὶς τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γεγραμμένοις ἤδη περὶ τοῦ τόπου, καὶ σχολάσας τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου μαθηταῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ πλεῖστον χρόνον, (ὅθεν ἔσχεν καὶ τὴν τοσαύτην ἕξιν) * οὐκ ἀπαθῆ. οὗτος δὲ ὁ ἐπὶ γ΄ καὶ δ΄ γραμμὰς τόπος, ἐφ᾽ ᾧ μεγαφρονεῖ προσθεὶς, χάριν ὀφείλων εἰδέναι τῷ πρώτῳ γράψαντι, τοιοῦτός ἐστι.

Ἐὰν γὰρ θέσει δεδομένων τριῶν εὐθειῶν, ἀπό τινος τοῦ αὐτοῦ σημείου καταχθῶσιν ἐπὶ τὰς τρεῖς ἐν δεδομέναις γωνίαις εὐθεῖαι· καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ δύο κατηγμένων περιεχομένου ὀρθογωνίου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τετράγωνον, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένου στερεοῦ τόπου, τουτέστι μιᾶς τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν. καὶ ἐὰν ἐπὶ δ΄ εὐθείας θέσει δεδομένας καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ δύο κατηγμένων, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο κατηγμένων, ὁμοίως τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης κώνου τομῆς. Ἐὰν μὲν γὰρ ἐπὶ δύο μόνας, ἐπίπεδος ὁ τόπος δέδεικται. Ἐὰν δὲ ἐπὶ πλείονας τεσσάρων, ἅψεται τὸ σημεῖον τόπων οὐκέτι

γνωρίμων,

γνωρίμων, ἀλλὰ γραμμῶν μόνον λεγομένων, ποδαπῶν δὲ, ἢ τινὰ ἐχουσῶν ἴδια οὐκέτι*· ὧν μίαν, οὐδὲ τὴν πρώτην καὶ συμφανεστάτην εἶναι δοκοῦσαν, συντεθείκασιν, ἀναδείξαντες χρησίμην οὖσαν. αἱ δὲ προτάσεις αὐτῶν εἰσίν.

Εὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας εὐθείας πέντε καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, καὶ λόγος ᾖ δεδομένος τοῦ ὑπὸ τριῶν κατηγμένων περιεχομένου στερεοῦ παραλληλεπιπέδου ὀρθογωνίου, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο κατηγμένων καὶ δοθείσης τινὸς περιεχόμενον παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον, ἅψεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης γραμμῆς. Εάν τε ἐπὶ ἕξ, καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ τῶν τριῶν περιεχομένου καὶ εἰρημένου στερεοῦ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν τριῶν, πάλιν τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης. Εάν τε ἐπὶ πλείονας τῶν ἕξ, οὐκέτι μὲν ἔχουσι λέγειν, λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ τῶν δ΄ περιεχομένου τινὸς πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν, ἐπεὶ οὐκ ἔστι τι περιεχόμενον ὑπὸ πλειόνων ἢ τριῶν διαστάσεων. συγκεχωρήκασι δὲ ἑαυτοῖς οἱ βραχὺ πρὸ ἡμῶν ἑρμηνεύειν τὰ τοιαῦτα, μηδὲ ἓν μηδαμῶς διαληπτὸν σημαίνοντες· τὸ ὑπὸ τῶν δ΄ περιεχόμενον λέγοντες, ἐπὶ τὸ ἀπὸ τῆσδε τετράγωνον, ἢ ἐπὶ τὸ ὑπὸ τῶν δ΄. παρῆν δὲ διὰ τῶν συνημμένων λόγων ταῦτα καὶ λέγειν καὶ δεικνύναι καθόλου, καὶ ἐπὶ τῶν προειρημένων προτάσεων καὶ ἐπὶ τούτων τὸν τρόπον τοῦτον. Εὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, καὶ δεδομένος ᾖ ὁ λόγος ὁ συνημμένος ἐξ οὗ ἔχει μία κατηγμένη πρὸς μίαν κατηγμένην, καὶ ἑτέρα πρὸς ἑτέραν, καὶ ἄλλη πρὸς ἄλλην, καὶ ἡ λοιπὴ πρὸς δοθεῖσαν, ἐὰν ὦσιν ζ΄· ἐὰν δὲ η΄, καὶ ἡ λοιπὴ πρὸς λοιπήν· τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης γραμμῆς. καὶ ὁμοίως ὅσαι ἂν ὦσιν περισσαὶ ἢ ἄρτιοι τὸ πλῆθος· τούτων ὡς ἔφην ἑπομένων τῷ ἐπὶ δ΄ τόπῳ· οὐδὲ ἓν οὖν τεθείκασιν ὥστε τὴν γραμμὴν εἰδέναι. τοῦθ᾽ οἱ βλέποντες ἥκιστα ἐπαίρονται, καθάπερ οἱ πάλαι καὶ τῶν τὰ κρείττονα γραψάντων ἕκαστος. ἐγὼ δὲ καὶ πρὸς ἀρχαῖς ἐπὶ τῶν μαθημάτων καὶ τῆς ὑπὸ φύσεως προκειμένης ζητημάτων ὕλης κινουμένους ὁρῶν ἅπαντας, αἰδούμενος ἐγὼ καὶ δείξας γε πολλῷ κρείσσονα καὶ πολλὴν προφερόμενα ὠφέλειαν*. ἵνα δὲ μὴ κεναῖς χερσὶ τοῦτο φθεγξάμενος ὧδε χωρισθῶ τοῦ λόγου, ταῦτα δώσω τοῖς ἀναγνοῦσιν.

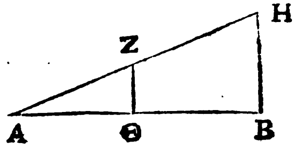
Ὁ μὲν τῶν τελείων ἀμφοιστικῶν λόγος συνῆπται, ἔκ τε τῶν ἀμφοισμάτων, καὶ τῶν ἐπὶ τοὺς ἄξονας ὁμοίως κατηγμένων εὐθειῶν ἀπὸ τῶν ἐν αὐτοῖς κεντροβαρικῶν σημείων. Ὁ δὲ τῶν ἀτελῶν ἔκ τε τῶν ἀμφοισμάτων καὶ τῶν περιφερειῶν, ὅσας ἐποίησε τὰ ἐν αὐτοῖς κεντροβαρικὰ σημεῖα. Ὁ δὲ τούτων περιφερειῶν, δῆλον ὡς ἔκ τε τῶν κατηγμένων, καὶ ὧν περιέχουσιν αἱ τούτων ἄκραι, εἰ καὶ εἶεν πρὸς τοῖς ἄξοσιν ἀμφοιστικῶν, γωνιῶν.

Περιέχουσι δὲ αὗται αἱ προτάσεις, σχεδὸν οὖσαι μία, πλεῖστα ὅσα καὶ παντοῖα θεωρήματα γραμμῶν τε καὶ ἐπιφανειῶν καὶ στερεῶν, πάνθ' ἅμα καὶ μιᾷ δείξει· καὶ τὰ μὴ προδεδειγμένα καὶ τὰ ἤδης ὡς καὶ τὰ ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶν στοιχείων. ἔχει δὲ τὰ η' βιβλία τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν θεωρήματα, ἤτοι διαγράμματα υπζ'· λήμματα δὲ, ἤτοι λαμβανόμενα, ἔστιν εἰς αὐτὰ ο'.

Πάππου Λήμματα εἰς τὰ λόγου καὶ χωρίου ἀποτομῆς.

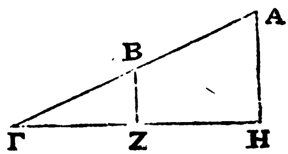
α'. ΤΗΝ δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τοῦ Γ πρὸς Δ, καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὴν ΑΒ εἰς τὸν τοῦ Γ πρὸς τὴν Δ λόγον. ἔκλινα πρὸς τὴν ΑΒ εὐθεῖαν γωνίᾳ τυχούσῃ εὐθεῖαν τὴν ΑΗ· καὶ τῇ μὲν Γ ἴσην ἀφεῖλον τὴν ΑΖ, τῇ δὲ Δ τὴν ΖΗ· καὶ ἐπιζεύξας τὴν ΒΗ ταύτῃ παράλληλον ἤγαγον τὴν ΖΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς ΖΗ, ἴση δέ ἐστιν ἡ μὲν ΑΖ τῇ Γ, ἡ δὲ ΖΗ τῇ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. διῄρηται ἄρα κατὰ τὸ Θ σημεῖον.



β'. Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, Δ, εὑρεῖν ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἄλλην τινὰ πρὸς τὴν Δ.

Πάλιν ἔκλινά τινα εὐθεῖαν τὴν ΓΗ ἐν τυχούσῃ γωνίᾳ, καὶ τῇ Δ ἴσην ἀπεθέμην τὴν ΓΖ· ἐπιζεύξα τὴν ΒΖ, καὶ ταύτῃ παράλληλον ἤγαγον τὴν ΑΗ. γίνεται οὖν πάλιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΓΖ, τουτέστι πρὸς τὴν Δ. εὕρηται ἄρα ἡ ΖΗ. ὁμοίως κἂν ἡ τρίτη δοθῇ, τὴν τετάρτην εὑρήσομεν.

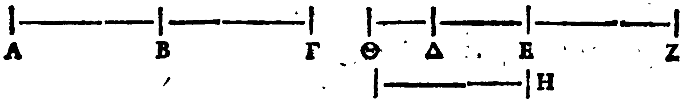


γ'. Ἐχέτω τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι καὶ κατὰ σύνθεσιν, τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτως ἄλλό τι τὸ Η

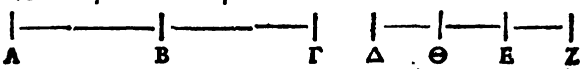
πρὸς

πρὸς τὸ ΕΖ· καὶ τὸ Η ἄρα πρὸς τὸ ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· μεῖζον ἄρα ἐστὶν τὸ Η τοῦ ΔΕ. κείσθω αὐτῷ ἴσον τὸ ΘΕ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτω τὸ ΘΕ πρὸς ΕΖ, τὸ δὲ ΘΖ πρὸς τὸ ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΕΖ· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ.



δ'. Πάλιν δὴ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ· ὅτι καὶ τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΕΖ.

Πάλιν γὰρ ἐπεὶ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ, ἐὰν ποιῶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτως ἄλλό τι πρὸς τὸ ΕΖ, ἔσται ἔλασσον τοῦ ΔΕ. ἔστω δὲ τὸ ΕΘ· γίνεται ἄρα καὶ ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ οὕτω τὸ ΘΖ πρὸς τὸ ΖΕ. τὸ δὲ ΘΖ πρὸς τὸ ΖΕ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ· τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ.



ε'. Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι καὶ ἐναλλὰξ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ.

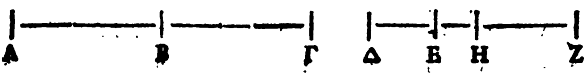
Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτως ἄλλό τι πρὸς τὸ ΕΖ· φανερὸν δὴ ὅτι μεῖζον ἔσται τοῦ ΔΕ. ἔστω τὸ ΗΕ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΗΕ οὕτω τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΗΕ, τουτέστιν ἤπερ τὸ ΒΓ πρὸς ΕΖ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ. τὰ δ' αὐτὰ κἂν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ὅτι καὶ ἐναλλάξ. ἔσται γὰρ καὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ

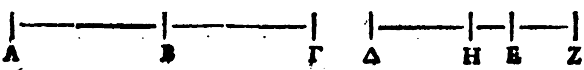
 οὕτως

οὕτως ἄλλό τι πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι πρὸς ἐλάσσονα τοῦ ΔΕ. τὰ λοιπὰ τὰ αὐτά.

ς'. Τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ· ὅτι ἀναστρέψαντι τὸ ΓΑ πρὸς ΑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΕ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ οὕτω τὸ ΔΖ πρὸς ἄλλό τι· ἔσται δὴ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΖΕ. ἔστω πρὸς τὸ ΖΗ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΑΒ οὕτω τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ. τὸ δὲ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΕ. Ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ· ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΔΕ. ἔσται γὰρ ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ οὕτω τὸ ΔΖ πρὸς μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ ΖΕ. καὶ τὰ λοιπὰ φανερά.

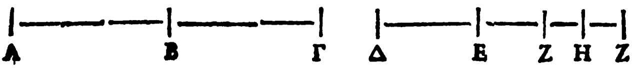




ζ'. Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι ἀνάπαλιν τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΔ.

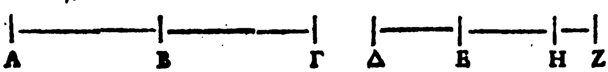
Πεποιήσθω γὰρ ὡς ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτως τὸ ΔΕ πρός τι· ἔσται δὴ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΕΖ, ὥστε πρὸς τὸ ΕΗ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶ ὡς τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ οὕτω τὸ ΗΕ πρὸς τὸ ΕΔ. τὸ δὲ ΗΕ πρὸς ΕΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ ΖΕ πρὸς ΕΔ. Ὁμοίως δὲ κἂν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ, ἀνάπαλιν τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ μείζονα

ζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΕ πρὸς ΕΔ. ἔσται γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτω τὸ ΔΕ πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖ. τὰ δὲ λοιπὰ φανερά. καὶ φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι ἐὰν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ, καὶ τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ. ἐὰν δὲ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ, καὶ τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ.



η'. Ἐχέτω δὴ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι καὶ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΔΖ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ οὕτω τὸ ΒΓ πρός τι. ἔσται δὲ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΕΖ. ἔστω πρὸς τὸ ΗΕ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς ὅλην τὴν ΔΗ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ· ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ. καὶ φανερὸν ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ πρὸς ὅλην τὴν ΔΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ· κἂν ἐλάσσων τοῦ μέρους, μείζων ὅλης.

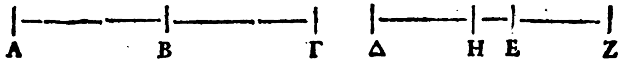


θ'. Ἐχέτω δὴ πάλιν ὅλη ἡ ΑΓ πρὸς ὅλην τὴν ΔΖ μείζονα λόγον ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ· ὅτι καὶ λοιπὴ ἡ ΒΓ πρὸς λοιπὴν τὴν ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΗ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς λοιπὴν τὴν ΗΖ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ. ἡ δὲ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΖΗ· καὶ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ μείζονα λόγον

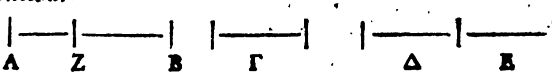
ἔχει

ἔχει ἤπερ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ. ἐὰν ᾖ ὅλης πρὸς τὴν ὅλην ἐλάσσων, τῆς λοιπῆς ἐλάσσων.



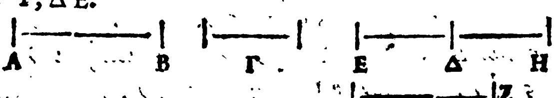
ι΄. Ἔστω μεῖζον μὲν τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ Δ τῷ Ε· ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ Ε.

Κείσθω γὰρ τῷ Γ ἴσον τὸ ΒΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΖ πρὸς τὸ Γ οὕτω τὸ Δ πρὸς τὸ Ε. ἀλλὰ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΖ πρὸς τὸ Γ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ Ε. καὶ φανερὸν ὅτι ἂν ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ Γ, τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, διὰ τὸ ἀνάπαλιν.



ια΄. Ἀλλὰ ἔστω μεῖζον μὲν τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἔλασσον δὲ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ.

Φανερὸν μὲν οὖν καὶ ἄνευ ἀποδείξεως. εἰ γὰρ ὄντος ἴσου τοῦ ΔΕ τῷ Ζ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ἐλάσσονος ὄντος πολλῷ μείζονα λόγον ἕξει. δι' ἀποδείξεως δὲ οὕτως. Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἐὰν ποιῶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ Ζ, ἔσται μεῖζον τοῦ Ζ, ὥστε καὶ τοῦ ΔΕ. ἔστω οὖν αὐτῷ ἴσον τὸ ΗΕ· τὸ ΗΕ ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ. ἀλλ' ὡς τὸ ΗΕ πρὸς τὸ Ζ, οὕτω τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ. καὶ φανερὸν ὅτι ὅπου τὸ ἔλασσον ἀεὶ ἐλάσσονα. καὶ ὅτι μεῖζον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ τοῦ ὑπὸ τῶν Γ, ΔΕ· ἴσον γὰρ αὐτῷ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν Γ, ΕΗ, ὅ ἐστι μεῖζον τοῦ ὑπὸ τῶν Γ, ΔΕ.

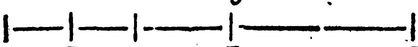


ιβ΄. Εὐιβ'. Εὐθεῖα ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ· ὅτι πάντα μὲν τὰ μεταξὺ τῶν ΑΓ σημείων εἰς ἐλάσσονας λόγους διαιρεῖ τὴν ΑΒ τοῦ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, πάντα δὲ τὰ μεταξὺ τῶν ΓΒ εἰς μείζονας.

Εἰλήφθω γὰρ σημεῖα ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Γ τὰ Δ, Ε. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων μὲν ἡ ΔΑ τῆς ΑΓ, μείζων δὲ ἡ ΔΒ τῆς ΒΓ, ἡ ΔΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν ΑΓ ἤπερ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΓΒ· καὶ ἐναλλὰξ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΒΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν Α, Γ σημείων. Πάλιν, ἐπεὶ μείζων μέν ἐστιν ἡ ΕΑ τῆς ΑΓ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΕΒ τῆς ΒΓ· ἡ ΕΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἐναλλὰξ ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν μεταξὺ τῶν Γ, Β λαμβανομένων σημείων.

ιγ'. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τμηθῇ δίχα κατὰ τὸ Γ, πάντων τῶν λαμβανομένων σημείων μέγιστον ἀποτέμνει τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ τὸ Γ σημεῖον.

Ἐὰν γὰρ ληφθῇ σημεῖον τὸ Δ, γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ. τὰ δὲ αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα.



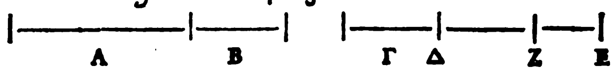
ιδ'. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἀεὶ τὸ ἔγγιον τοῦ Γ τοῦ ἀπωτέρου μεῖζον χωρίον ποιεῖ. Εἰλήφθω γὰρ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ Ε μεταξὺ τῶν ΑΔ. Δεικτέον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ, ὧν τὸ ἀπὸ ΔΓ ἐλασ-

σον

σὺν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ.

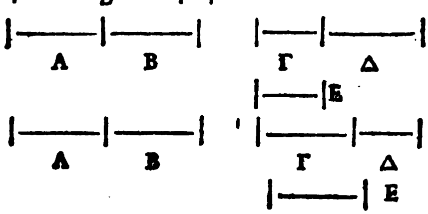
ιε'. Εἰ γὰρ εἴη τὸ Α μετὰ τοῦ Β ἴσον τῷ Γ μετὰ τοῦ ΔΕ, καὶ ἔλασσον τὸ Β τοῦ ΔΕ· μεῖζον ἂν γένοιτο τὸ Α τοῦ Γ.

Κείσθω γὰρ τῷ Β ἴσον τὸ ΔΖ· τὸ Α ἄρα μετὰ τοῦ ΔΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΕ μετὰ τοῦ Γ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ Α ἴσον ἐστὶ τοῖς Γ καὶ ΖΕ, ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ.



ιϛ'. Ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ.

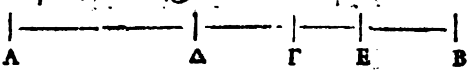
Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· καὶ ἡ Γ ἄρα πρὸς τὴν Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν Δ· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶ ἡ Ε τῆς Δ, καὶ κοινὸν ὕψος ἡ Α. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΑ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓ· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ. Ὁμοίως καὶ ἐὰν ἐλάσσων ὁ λόγος γένηται, ἔλασσον καὶ τὸ χωρίον τοῦ χωρίου. Ἀλλὰ δὴ ἔστω πάλιν μεῖζον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ὅτι ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. Κείσθω γὰρ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ· γίνεται ἄρα μεῖζον μὲν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ὥστε καὶ ἡ Ε τῆς Γ μείζων. ὡς δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Δ. ἡ δὲ Ε πρὸς τὴν Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β. ὁμοίως καὶ ἀναστρέψαντι.



ιζ'. Δύο

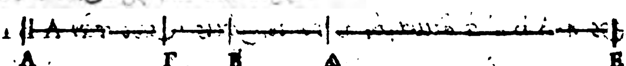
ιζ'. Δύο εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΒΔ, καὶ τῇ ΑΔ ἴση κείσθω ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΓΕ ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ ΑΒΓ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΕ ὑπερέχει τῇ ΓΕ, ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΕ· συναμφότερος δὲ ἡ ΑΒΕ δύο εἰσὶν αἱ ΒΔ, δύο δὲ αἱ ΒΔ δύνανται τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.



ιη'. Ἔστω δὲ πάλιν τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΓΕ σύγκειται ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΓ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΕ ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ΓΔ, ΔΕ· ἴση δέ ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΔΕ· ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΓ, τουτέστιν ἐκ συναμφοτέρου τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ δύο τῶν ΒΔ· δύο δὲ αἱ ΒΔ δύνανται τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΓ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

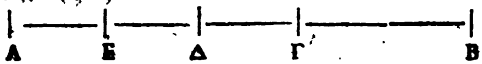


ιθ'. Πάλιν τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον ἡ ΒΔ, καὶ τῇ ΓΔ ἴση κείσθω ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΑΕ ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ ΑΒΓ συναμφοτέρου τῆς ΕΒΓ ὑπερέχει τῇ ΑΕ, συναμφότερος δὲ ἡ ΕΒΓ, δύο εἰσὶν αἱ ΒΔ, τουτέστιν ἡ δυναμένη τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΑΕ ἄρα ἐστὶν ἡ

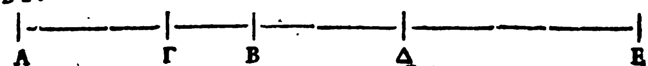
ὑπεροχὴ

ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.



κʹ. Πάλιν τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΒΔ, καὶ τῇ ΓΔ ἴση κείσθω ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΑΕ ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ, καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΕ σύγκειται ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΕ, ἴση δέ ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΔΓ, ἡ ΑΕ ἄρα σύγκειται ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΓ, τουτέστιν ἐκ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ καὶ δύο τῶν ΒΔ. δύο δὲ αἱ ΒΔ δύνανται τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΑΕ ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῶν ΑΒΓ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.



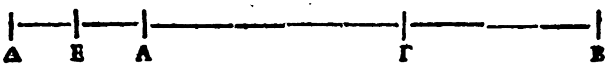
Ταῦτα λαμβάνεται εἰς τὴν τοῦ λόγου Ἀποτομήν, ταῦτα καὶ εἰς τὴν τοῦ χωρίου Ἀποτομὴν λαμβάνεται, διαφερόντως μόνον.

Πρόβλημα εἰς τὸ δεύτερον λόγου Ἀποτομῆς, χρήσιμον εἰς τὴν τοῦ ιγʹ. τόπου ἀνακεφαλαίωσιν.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, λαβεῖν ἐπεκβάλλοντα τὴν ΑΔ δοθὲν τὸ Δ, ποιοῦν τὸν τῆς ΒΔ πρὸς ΔΑ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

Ἔστω γεγονός, καὶ ἡ ὑπεροχὴ ἔστω ἡ ΑΕ (ἐν γὰρ τοῖς ἐπάνω εὕρομεν αὐτήν) ἔστιν οὖν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΕ. καὶ ἐναλλὰξ καὶ διελόντι καὶ χωρίον χωρίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΑ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΑ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ· καὶ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΓΕ παράκειται ὑπερβάλλον τετραγώνῳ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Δ. Συντεθήσεται δὲ οὕτως· ἔστω ἡ ὑπεροχὴ ἡ ΕΑ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΑ ἴσον πάλιν τῇ ΓΕ παραβεβλήσθω ὑπερβάλλον τετρα-

τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ ΓΔΕ. λέγω ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖόν ἐστι τὸ Δ. Ἐπεὶ γὰρ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΑ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ, ἀνάλογον καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΑΕ, ἥτις ἐστὶν ἡ ὑπεροχή. Τὰ δ' αὐτὰ κἂν ζητῶμεν λαβεῖν σημεῖον ποιοῦν ὡς τὴν ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ, καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ. ὅ. ἔ. δ.



Τὸ πρῶτον λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ἑπτὰ, πτώσεις κδ', διορισμοὺς δὲ πέντε· ὧν τρεῖς μὲν μέγιστοι, δύο δ' ἐλάχιστοι. Καὶ ἔστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ ε' τόπου, ἐλάχιστος δὲ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ ς' τόπου, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τοῦ ζ'· μέγιστοι δὲ οἱ κατὰ τὰς τετάρτας τοῦ ς' καὶ τοῦ ζ'. Τὸ δεύτερον λόγου ἀποτομῆς [ἔχει τόπους ιδ', πτώσεις δὲ ξγ', διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου, ἀπάγεται γὰρ ὅλον εἰς τὸ πρῶτον. Τὸ πρῶτον χωρίου ἀποτομῆς] ἔχει τόπους ζ, πτώσεις κδ', διορισμοὺς δὲ ἑπτά· ὧν τέσσαρες μέγιστοι, τρεῖς δ' ἐλάχιστοι· καὶ ἔστι μέγιστος μὲν ὁ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ πρώτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην [τοῦ δευτέρου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν δευτέραν] τοῦ τετάρτου τόπου καὶ ὁ [κατὰ τὴν τρίτην τοῦ ἕκτου· ἐλάχιστοι δὲ, ὁ] κατὰ τὴν τρίτην τοῦ τρίτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν τετάρτην τοῦ τετάρτου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ ἕκτου. Δεύτερον χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιγ', πτώσεις ξ', διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ εἰς αὐτό.

Ἐπιζητήσειεν ἄν τις διὰ τί ποτε μὲν τὸ λόγου ἀποτομῆς δεύτερον ἔχει τόπους ιδ', τὸ δὲ χωρίου ιγ' ἔχει. Ὁ δὲ διὰ τόδε, ὅτι ὁ ἕβδομος ἐν τῷ τοῦ χωρίου ἀποτομῆς τόπος παραλείπεται ὡς φανερός. ἐὰν γὰρ αἱ παράλληλοι ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ πέρατα πίπτωσιν, οἷα ἐὰν διαχθῇ δοθὲν ἀποτέμνει χωρίον· ἴσον γὰρ γίνεται τῷ ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν περάτων καὶ τοῦ ἀμφοτέρων τῶν ἐξ ἀρχῆς τῇ θέσει δοθεισῶν εὐθειῶν συμβολῆς. ἐν δὲ τῷ λόγου ἀποτομῆς οὐκέτι ὁμοίως· διὰ τοῦτο οὖν προσέχει τόπον ἕνα εἰς τὸ ἕβδομον τοῦ δευτέρου, καὶ τὰ λοιπὰ ὄντα τὰ ὄντα.

Quæ uncis inclusimus desunt & in MSS. nostris & quibus usus est Commandinus, *sed ex descriptione præmissâ restituimus.*

Pappi Alexandrini Præfatio ad ſeptimum Collectionis Mathematicæ, quo continentur Lemmata Loci *de Reſolutione*.

LOCUS de Reſolutione inſcriptus, *Hermodore* fili, ut paucis dicam, propria quædam eſt materia, in eorum uſum deſignata, qui, perceptis communibus Elementis, in Geometriâ facultatem ſibi comparare deſiderant inveſtigandi ſolutiones propoſitorum problematum; & in hunc finem ſolummodo utilis. Traditur autem à tribus viris, *Euclide* nempe Elementorum ſcriptore, *Apollonio Pergæo*, & *Ariſtæo* ſeniore. Procedit vero per modum Reſolutionis & Compoſitionis. Reſolutio autem eſt methodus, quâ à quæſito quaſi jam conceſſo, per ea quæ deinde conſequuntur, ad concluſionem aliquam, cujus ope Compoſitio fiat, perducamur. In reſolutione enim, quod quæritur ut jam factum ſupponentes, ex quo antecedente hoc conſequatur expendimus; iterumque quodnam fuerit hujus antecedens; atque ita deinceps, uſque dum in hunc modum regredientes, in aliquid jam cognitum locoque principii habitum incidamus. Atque hic proceſſus Analyſis vocatur, quaſi dicas, inverſa ſolutio. E contrario autem in Compoſitione, cognitum illud, in Reſolutione ultimo loco acquiſitum, ut jam factum præmittentes; & quæ ibi conſequentia erant, hic ut antecedentia naturali ordine diſponentes, atque inter ſe conferentes, tandem ad Conſtructionem quæſiti pervenimus. Hoc autem vocamus Syntheſin. Duplex autem eſt Analyſeos genus, vel enim eſt veri indagatrix, diciturque Theoretica; vel propoſiti inveſtigatrix, ac problematica vocatur. In Theoretico autem genere, quod quæritur, revera ita ſe habere ſupponentes, ac deinde per ea quæ conſequuntur, quaſi vera ſint (ut ſunt ex Hypotheſi) argumentantes; ad evidentem aliquam concluſionem procedimus. Jam ſi concluſio illa vera ſit, vera quoque eſt propoſitio de qua quæritur; ac demonſtratio reciproce reſpondet Analyſi. Si vero in falſam concluſionem incidamus, falſum quoque erit de quo quæritur. In Problematico

matico vero genere, quod proponitur ut jam cognitum sistentes, per ea quæ exinde consequuntur, tanquam vera, perducimur ad conclusionem aliquam: quod si conclusio illa possibilis sit ac ποριστὸν, quod Mathematici *Datum* appellant; possibile quoque erit quod proponitur: & hîc quoque demonstratio reciproce respondebit Analysi. Si vero incidamus in conclusionem impossibilem, erit etiam problema impossibile. Diorismus autem sive determinatio est qua discernitur quibus conditionibus quotque modis problema effici possit. Atque hæc de Resolutione & Compositione dicta sunto. Prædictorum autem *de Resolutione* librorum hic est ordo. Datorum *Euclidis* Liber unus. *Apollonii* de Sectione Rationis Libri II. Ejusdem de Sectione Spatii II. De Sectione determinatâ II. De Tactionibus II. *Euclidis* Porismatum III. *Apollonii* de Inclinationibus II. Ejusdem de Locis planis II. Conicorum VIII. *Aristæi* de Locis solidis V. *Euclidis* de Locis ad Superficiem II. *Eratosthenis* de mediis proportionalibus II. Fiunt libri numero XXXIII. quorum contenta, usque ad *Apollonii Conica*, considerationi tuæ subjicere volui; una cum numero Locorum & Diorismῶn, Casuumque in unoquoque Libro; ac præterea adjeci *Lemmata* requisita. Neque credo à me omissum esse quidquam notatu dignum in descriptione horum Librorum.

De Datis Euclidis I.

Primus Liber, nempe *Data Euclidis*, continet omnino Theoremata nonaginta; quorum priora viginti tria sunt de magnitudinibus in genere, vigesimus autem quartus, de rectis proportionalibus non datis positione. Quæ deinceps quatuordecim, de rectis positione datis. Quæ sequuntur decem, de Triangulis specie sed non positione datis. Proxima septem sunt de quibuscunque spatiis rectilineis, specie tantum, sed non positione datis. Sex quæ deinceps sunt, de parallelogrammis & de applicationibus spatiorum specie datorum agunt. E quinque autem sequentibus, primum jam descriptum est, (*nempe Dat.* 40^{um}.) reliqua vero quatuor sunt de Triangulorum Areis, quod differentiæ potestatum laterum Triangulorum, datam habeant rationem ad eorundem Areas. His subjuncta septem usque ad LXXIII^{um} sunt

de

de duobus parallelogrammis; quod juxta angulorum Hypotheses habeant rationem datam inter se; quædam vero eorum Consectaria habent similia in duobus Triangulis. E sex autem subsequentibus propositionibus usque ad 79^{am}, duæ quidem sunt de Triangulis, quatuor vero reliquæ sunt de pluribus rectis proportionalibus. Tres proximæ sunt de duabus rectis datum spatium comprehendentibus [*quarum summa vel differentia datur, vel etiam differentia potestatum.*] Cæteræ vero omnes octo usque ad nonagesimam, in circulis demonstrantur, vel magnitudine tantum datis, vel etiam positione; quod rectarum per datum punctum ductarum quæ fiunt è segmentis *rectangula* data sint.

De Sectione Rationis II.

Duo quidem sunt Libri de *Sectione Rationis*, sed unam tantum faciunt propositionem subdivisam: quare unam illam sic describo. "Per datum punctum rectam lineam ducere, "quæ auferat à duabus rectis positione datis segmenta, pun"ctis in iisdem datis adjacentia, datam rationem inter se "habentia." Diversas autem multasque figuras habere contigit, ob subdivisionem factam; & ob diversas rectarum datarum inter se positiones, Casusque puncti dati differentes; propterque Analyses & Compositiones horum Casuum, ut & Diorismῶn. Habet autem Liber primus de Sectione Rationis Loca septem, Casus viginti quatuor, Diorismos vero quinque: quorum tres sunt maximi, & duo minimi. Maximus quidem est ad Casum tertium Loci V. Minimi vero sunt ad Casus secundos Locorum VI & VII^{mi}. Reliqui autem maximi sunt ad Casus quartos eorundem Locorum VI & VII^{mi}. Liber posterior de Sectione Rationis Loca habet quatuordecim. Casus vero LXIII; Determinationes autem ex primo, ad quem quasi totus refertur. Lemmata habent hi duo libri viginti. Itidemque figuras (sive schemata) habent CLXXXI. vel etiam plures juxta *Periclem*.

De Sectione Spatii II.

Duo sunt libri de *Sectione Spatii*, sed in his non continetur nisi unum problema subdivisum. Propositio autem hæc

una

una quoad cætera priori similis est, ac solo hoc differt; quod in illâ oporteat segmenta duo abscissa rationem habere datam, in hâc vero datum continere rectangulum. Exprimetur vero ad hunc modum: "Per datum punctum rectam lineam "ducere, quæ auferat à rectis duabus positione datis segmenta, datis in ipsis punctis adjacentia, quæ rectangulum "æquale dato comprehendant." Hæc etiam propositio ob easdem causas plurimas quoque habet figuras. Liber autem prior de Sectione Spatii septem habet Loca, Casus viginti quatuor, ac Diorismos septem; quorum quatuor maximi sunt, tres vero minimi. Maximus autem est ad Casum secundum Loci primi; ut & ad primum secundi. Similiter ad secundum Casum quarti & tertium sexti. Minimi vero sunt ad Casum tertium Loci tertii, ad quartum quarti, ut & ad primum sexti Loci. Secundus liber de Sectione Spatii Loca habet XIII, & Casus LX; Determinationes vero ex primo, ad quem totus refertur. Constat autem liber primus Theorematis quadraginta octo; secundus vero LXXVI.

De Sectione Determinatâ II.

His subjiciuntur libri duo de *Sectione Determinatâ*, quas etiam ad modum præcedentium unam propositionem dicere liceat, sed disjunctam: quæ hujusmodi est. "Datam rectam "infinitam in uno puncto secare, ita, ut è rectis interceptis "inter illud & puncta in illâ data, vel quadratum ex unâ, "vel rectangulum sub duabus interceptis, datam habeat ra"tionem, vel ad contentum sub *aliâ* unâ interceptâ & datâ "quâdam; vel etiam ad contentum sub duabus *aliis* inter"ceptis: idque ad quam partem velis punctorum datorum." Hujus autem, quasi bis disjunctæ, & intricatos Diorismos habentis, per plura necessario facta est demonstratio. Hanc autem dedit *Apollonius* communi methodo tentamen faciens, ac solis rectis lineis usus, ad exemplum secundi libri Elementorum primorum *Euclidis*; ac rursus idem demonstravit ingeniose quidem, & magis ad institutionem accommodate, per semicirculos. Habet autem primus liber Problemata sex, Epitagmata, *sive Dispositiones punctorum*, sedecim; Diorismos quinque: quorum quatuor quidem Maximi sunt, Minimus vero unus. Sunt autem maximi, ad secundum Epitagma secundi

cundi problematis; item ad tertium quarti problematis; ad tertium quinti & ad tertium sexti. Minimus vero est ad tertium Epitagma tertii problematis. Secundus liber de Sectione determinata tria habet Problemata, Dispositiones novem, Determinationes tres; è quibus Minima sunt ad tertium primi, ut & ad tertium secundi; Maximum autem est ad tertium tertii problematis. Lemmata habet liber primus XXVII, secundus vero XXIV. Insunt autem in utroque libro de Sectione determinatâ Theoremata octoginta tria.

De Tactionibus II.

His ordine subnexi sunt libri duo *de Tactionibus*, in quibus plures inesse propositiones videntur; sed & ex his unam etiam faciemus, ad hunc modum se habentem. "E punctis "rectis & circulis, quibuscunque tribus positione datis, circu-"lum ducere per singula data puncta, qui, si fieri possit, "contingat etiam datas lineas." Ex hac autem ob multitudinem in Hypothesibus datorum, tam similium quam dissimilium *generum*, fiunt necessario decem propositiones diversæ; quia ex tribus dissimilibus generibus fiunt diversæ triades inordinatæ numero decem. Data etenim esse possunt vel tria puncta; vel tres rectæ; vel duo puncta & recta; vel duæ rectæ & punctum; vel duo puncta & circulus; vel duo circuli & punctum; vel duo circuli & recta; vel punctum, recta & circulus; vel duæ rectæ & circulus; vel tres circuli. Horum duo quidem prima problemata ostenduntur in libro quarto primorum Elementorum. Nam per tria data puncta, quæ non sint in linea recta, circulum ducere, idem est ac circa datum triangulum circumscribere. Problema autem in tribus datis rectis non parallelis, sed inter se occurrentibus, idem est ac dato triangulo circulum inscribere. Casus vero duarum rectarum parallelarum cum tertiâ occurrente, quasi pars esset secundæ subdivisionis, cæteris permittitur. Deinde proxima sex problemata continentur in primo libro. Reliqua duo, nempe de duabus rectis datis & circulo, & de tribus datis circulis, ista habentur in secundo libro, ob multas diversasque positiones circulorum & rectarum inter se, quibus fit ut etiam plurium determinationum opus sit. Prædictis his Tactionibus congener est ordo problematum, quæ ab editoribus omissa fuerant. Nonnulli autem priori horum librorum illa præfixerunt: Compendiosus enim & introductorius erat tractatus ille, & ad plenam de Tactionibus doctrinam absolvendam maxime idoneus. Hæc omnia rursus una propositio complectitur, quæ quidem quoad Hypothesim magis quam præcedentia contracta est, superaddita autem est conditio ad constructionem: estque hujusmodi. "E punctis, rectis, vel circulis, datis duobus quibuscunque, "describere circulum magnitudine datum, qui transeat per "punctum vel puncta data, ac, si fieri possit, contingat etiam "lineas datas." Continet autem hæc propositio sex problemata: ex tribus enim quibuscunque diversis generibus fiunt Duades inordinatæ diversæ numero sex. Vel enim datis duobus punctis, vel duabus rectis, vel duobus circulis, vel puncto & rectâ, vel puncto & circulo, vel rectâ & circulo, oportet circulum magnitudine datum describere, *qui data contingat*; hæc autem resolvenda sunt & componenda ut & determinanda juxta Casus. Liber primus *Tactionum* problemata habet septem; secundus vero quatuor. Lemmata autem ad utrumque librum sunt XXI; Theoremata LX.

De Porismatis Euclidis III.

Post *Tactiones* in tribus libris habentur *Porismata Euclidis*: collectio artificiosissima multarum rerum, quæ spectant ad Analysin difficiliorum & generalium problematum, quorum quidem ingentem copiam præbet Natura. Nihil vero additum est iis quæ *Euclides* primum scripserat, præterquam quod Scioli nonnulli, qui nos præcesserunt, sequentibus editionibus pauca de suis immiscuerint. Apud hos enim unumquodque Porisma definitum habet demonstrationum numerum: cum *Euclides* ipse non nisi unam, eamque maxime evidentem, in singulis posuerit. Habent autem subtilem & naturalem contemplationem, necessariamque & maxime universalem, atque iis qui singula perspicere atque investigare valent admodum jucundam. Specie autem hæc omnia neque Theoremata sunt, neque Problemata; sed mediæ quodammodo inter hæc naturæ, ita ut eorum propositiones censeri possint, vel inter Theoremata, vel Problemata: unde factum est ut nonnulli è Geometris hæc genere Theoremata

mata esse contendant, alii vero Problemata esse; respicientes ad formam tantum propositionis. Differentias autem horum trium melius intellexisse Veteres manifestum est ex definitionibus. Dixerunt enim Theorema esse quo aliquid proponitur demonstrandum: Problema quo proponitur aliquid construendum: Porisma vero esse quo aliquid proponitur investigandum. A Neotericis autem immutata est hæc Porismatis definitio, qui, quum hæc omnia proprio Marte investigare haud potuerint, Elementa hæc adhibuerunt, contenti demonstrare tantum quid sit quod quæritur, absque illius investigatione: & quamvis à definitione & ab ipsâ doctrinâ redarguerentur, hoc tamen modo definierunt. Porisma est quod deest in Hypothesi Theorematis Localis. Hujus autem generis Porismatum Loca Geometrica sunt species; quæ quidem redundare videntur in libris de Resolutione: ac seorsim à Porismatis collecta sub propriis titulis traduntur, eo quod magis diffusa & copiosa sit hæc præ cæteris speciebus. E Locis enim quædam Plana sunt, quædam Solida, quædam Linearia, & præter hæc sunt Loca ad medietates, sive à mediis proportionalibus orta. Accidit hoc etiam Porismatis, propositiones habere contractas & in compendium redactas, omissis pluribus quæ pro more subintelligi solent: unde evenit Geometras non paucos ex parte tantum rem percipere, dum ea quæ inter ostensa magis necessaria sunt haud capiunt. Multa vero ex istis in unâ propositione comprehendere vix possibile est, quia ipse *Euclides* non multa in unaquaque specie posuerit: sed, ut ostenderet copiosiorem scientiam, pauca tantum, quasi ad jacienda in singulis principia, scripta reliquerit. Datum *** primi libri omnino ejusdem speciei est cum uberrima illa Locorum specie, ut decem ** sint numero. Quare hujus propositiones unâ solâ comprehendi posse animadvertentes, rem ad hunc modum describimus. "Duabus rectis "in eodem plano positione datis, * vel occurrentibus inter se "vel * parallelis, si dentur in unâ earum tria puncta: cæ"tera vero puncta præter unum tangant rectam positione "datam, etiam hoc quoque tanget rectam positione datam." Hoc autem de quatuor tantum rectis dicitur, quarum non plures quam duæ per idem punctum transeunt. In quolibet autem rectarum numero quomodo se res habeat vulgo ignoratur. "Si quotcunque rectæ occurrant inter se,

"nec

"nec plures quam duæ per idem punctum; data vero sint
"puncta omnia in earum unâ, unumquodque autem pun-
"ctum in altera tangat rectam positione datam." Vel generalius sic. "Si quotcunque rectæ occurrant inter se, neque
"sint plures quam duæ per idem punctum; omnia vero
"puncta in unâ earum data sint; reliquorum numerus erit
"Numerus Triangularis, cujus latus exhibet numerum pun-
"ctorum rectam positione datam tangentium. Quod si tres
"fuerint hujusmodi intersectiones, quæ non reperiantur ad
"angulos trianguli, (*hoc est, si fuerint in rectâ lineâ*:) una-
"quæque intersectio reliqua tanget positione datam." *Euclidem* autem hoc nescivisse haud verisimile est, sed principia sola respexisse: nam per omnia Porismata non nisi prima principia, & semina tantum multarum & magnarum rerum sparsisse videtur. Hæc autem juxta Hypothesium differentias minime distinguenda sunt; sed secundum differentias accidentium & quæsitorum. Hypotheses quidem omnes inter se differunt, cum specialissimæ sint: accidentium vero & quæsitorum unumquodque, cum sit unum idemque, multis diversisque Hypothesibus contingit.

Talia itaque inquirenda offeruntur in primi libri propositionibus: (in principio septimi habetur Diagramma huc spectans) "Si à duobus punctis datis inflectantur duæ rectæ
"ad rectam positione datam, abscindat autem earum una à
"rectâ positione datâ segmentum dato in eâ puncto adja-
"cens, auferet etiam altera ab aliâ rectâ segmentum datam
"habens rationem." Deinde in subsequentibus: "Quod pun-
"ctum illud tangit rectam positione datam. Quod ratio ipsius
". . . . ad rectam . . . . data est. Quod ratio ipsius . . . . ad
"partem abscissam . . . . datur. Quod hæc recta . . . . posi-
"tione datur. Quod hæc ad datum punctum vergit. Quod
"data est ratio ipsius . . . . ad interceptam inter punctum . .
"& datum punctum . . Quod data est ratio rectæ . . . . ad
"aliquam à puncto . . ductam. Quod datur ratio rectan-
"guli * * ad rectangulum sub datâ & ipsâ . . . . Quod hujus
"rectanguli unum latus datum est, alterum vero rationem
"habet ad rectam abscissam. Quod rectangulum hoc vel so-
"lum, vel una cum quodam dato spatio, est * * illud vero
"rationem datam habet ad partem abscissam. Quod recta
". . . . una cum aliâ ad quam . . . . est in ratione datâ, rati-

"onem habet datam ad interceptam inter punctum . . &
"datum punctum . . Quod contentum sub quâdam datâ &
"rectâ . . . . æquale est contento sub aliâ datâ & interceptâ
"inter punctum . . & datum . . Quod datur ratio rectæ
". . . . , atque etiam ipsius . . . . , ad interceptam inter pun-
"ctum . . & datum. Quod recta . . . . aufert à positione
"datis segmenta rectangulum datum comprehendentia."

In secundo libro Hypotheses quidem diversæ sunt. Inquirenda vero ut plurimum eadem ac in primo: præterea que hæc. "Quod rectangulum illud . . . . in . . . . rationem ha-
"bet ad partem abscissam, vel per se, vel adjuncto quodam
"dato rectangulo. Quod datur ratio rectanguli sub . . . .
"& . . . . ad partem abscissam. Quod data est ratio rectanguli
"sub utrâque . . . . & . . . . simul sumptâ, & utrâque ipsa-
"rum . . . . & . . . . etiam simul sumptârum, ad partem ab-
"scissam. Quod contentum sub ipsâ . . . . & utrâque ipsa-
"rum . . . . & . . . . quæ ad rectam . . . . rationem datam ha-
"bet; atque etiam contentum sub . . . . & illâ quæ ad ipsam
". . . . datam habet rationem, sunt in data ratione ad ἀπο-
"μεώ. Quod datur ratio utriusque . . . . , ... simul sumptæ
"ad interceptam inter punctum . . & datum punctum . .
"Quod datum est rectangulum sub ipsis . . . . & . . . ."

In tertio libro plures sunt Hypotheses de semicirculis; paucæ autem de Circulo & segmentis. Inquirendorum vero maxima pars affinis est præcedentibus. Insuper vero hæc sese offerunt. "Quod datur ratio rectanguli . . . . in . . . . ad
"rectangulum . . . . in . . . . Quod datur ratio quadrati ipsius
". . . . ad partem abscissam. Quod rectangulum sub ipsis
". . . . & . . . . *æquale est* rectangulo sub datâ . . . . & interceptâ
"inter punctum . . & datum punctum . . Quod quadra-
"tum ipsius . . . . *æquale est* contento sub datâ . . . . & in-
"terceptâ inter Cathetum & punctum datum . . . . Quod
"rectæ . . . . , ... una cum illâ ad quam . . . . datam habet
"rationem, simul sumptæ, datam habent rationem ad par-
"tem abscissam. Quod datur punctum aliquod, à quo si du-
"cantur rectæ ad puncta quævis . . continebunt illæ tri-
"angulum specie datum. Quod datur aliquod punctum à
"quo si ducantur rectæ ad puncta quævis . . , abscindent
"illæ *è circulo* æquales circumferentias. Quod recta . . . .
"vel erit in Parathesi, vel cum quâdam aliâ rectâ versus

"pun-

"punctum datum vergente datum continebit angulum." Habent autem tres Porismatum libri Lemmata XXXVIII, Theoremata vero CLXXI.

Hactenus Porismatum *descriptio, nec mihi intellecta nec lectori profutura. Neque aliter fieri potuit: tam ob defectum Schematis cujus fit mentio; unde rectæ satis multæ, de quibus hic agitur, absque notis Alphabeticis, ullove alio distinctionis charactere, inter se confunduntur: quàm ob omissa quædam ac transposita vel aliter vitiata in propositionis generalis expositione; unde quid sibi velit* Pappus *haud mihi datum est conjicere. His adde dictionis modum nimis contractum, ac in re difficili, qualis hæc est, minime usurpandum.*

De Locis Planis II.

Loca in genere hoc modo distribuuntur. Alia sunt ἐφεκτικὰ, sive adæquata; de quibus *Apollonius* ante propria Elementa hæc habet: "Puncti locus est punctum, Lineæ linea, Superficiei superficies, Solidique solidum." Alia vero διεξοδικὰ, quasi dicas progressiva; quo sensu Puncti locus est linea, Lineæ superficies, ac Superficiei solidum. Alia demum ἀναστροφικὰ sive circumgressiva, si ita loqui liceat, quo modo puncti locus est Superficies, ac lineæ Solidum. Ex his quæ Analysim Geometricam spectant, Loca datorum positione ἐφεκτικὰ sunt. Quæ vero plana, solida & linearia dicuntur, sunt loca διεξοδικὰ punctorum: Loca vero ad superficies sunt ἀναστροφικὰ punctorum & διεξοδικὰ linearum. Linearia vero post loca ad Superficiem demonstrationes suas habent. Jam loca plana, de quibus hîc agitur, in genere sunt lineæ quæcunque vel rectæ vel circulares: solida vero sunt Coni sectiones omnes, nempe Parabolæ, Ellipses, vel Hyperbolæ quævis. Linearia vero dicuntur lineæ omnes quæ nec rectæ nec circuli sunt, neque aliquæ è dictis Coni sectionibus. Quæ vero ab *Eratosthene* Loca ad Medietates dicuntur, ejusdem quidem generis sunt, sed ob proprietates Hypothesium *diversa sunt* ab illis * * * * * *. Veteres igitur, hunc Locorum planorum ordinem respicientes, Elementa tradiderunt; quem cum negligerent posteriores, alia *improprie* apposuerunt; quasi loca illa multitudine infinita non fuerint, si quis singula recensere velit, nullâ hujus ordinis habitâ ratione. Postpositis igitur jam descriptis, quæque ordine priora sunt

præ-

Præmittens, hac unâ Propositione rem complectar. "Si du-
"cantur rectæ duæ, vel ab eodem dato puncto, vel à duobus,
"quæ vel sint in lineâ rectâ, vel parallelæ, vel datum contineant
"angulum, vel datam habeant inter se rationem, vel datum
"comprehendant spatium; contingat autem terminus unius
"Locum planum positione datum: continget etiam alterius
"terminus Locum planum positione datum, interdum quidem
"ejusdem generis, interdum vero diversi; interdum similiter
"positum respectu rectæ lineæ, interdum contrario modo si-
"tum." Atque hæc quidem fiunt propter differentias sub-
jectorum. Consentanea vero his sunt tria illa quæ in princi-
pio *Charmandri* reperiuntur; nempe, "Si rectæ cujusvis
"magnitudine datæ terminus unus datus sit, alter terminus
"continget concavam circuli circumferentiam positione da-
"tam. Si à duobus datis punctis inflectantur rectæ datum
"angulum continentes, commune earum punctum tanget
"circumferentiam concavam positione datam. Si sit area
"Trianguli magnitudine data, ac basis quoque magnitudine
"ac positione detur; vertex ejus continget rectam positione
"datam." Alia vero sunt hujusmodi. "Si rectæ magnitu-
"dine datæ, & à quapiam positione datâ æquidistantis, unus
"terminus contingat Locum planum positione datum; alter
"quoque terminus Locum planum positione datum continget.
"Si à quodam puncto ad duas rectas positione datas, vel
"parallelas vel occurrentes inter se, ducantur in datis angu-
"lis rectæ, quæ datam habeant rationem inter se; vel qua-
"rum una, simul cum eâ ad quam altera datam habet ratio-
"nem, data fuerit; continget punctum rectam positione da-
"tam. Si fuerint quotcunque rectæ positione datæ, & ad
"ipsas à quodam puncto ducantur rectæ in datis angulis;
"sitque rectangulum sub datâ quâdam & unâ è ductis rectis,
"simul cum rectangulo sub datâ & aliâ ductâ, æquale rect-
"angulo sub datâ & tertiâ ductâ; & sic de cæteris: contin-
"get punctum rectam positione datam. Si à quodam puncto
"ad positione datas duas parallelas ducantur rectæ in datis
"angulis, abscindentes rectas, ad puncta in ipsis data adja-
"centes, quæ vel fuerint in datâ ratione [vel datum spatium
"comprehendant, vel ita ut summa vel differentia data-
"rum specierum ex ipsis ductis, æqualis fuerit dato spatio]
"punctum illud continget rectam positione datam."

Hæc

Hæc autem continentur in secundo libro. "Si à duobus
" datis punctis inflectantur rectæ, quarum quadrata dato spa-
" tio inter se differunt, punctum concursûs tanget rectam po-
" sitione datam. Si vero fuerint in datâ ratione, tanget
" idem vel lineam rectam vel circumferentiam circuli. Si
" sit recta positione data, & in ipsâ datum sit punctum, unde
" ducatur quædam recta terminata; ab hujus autem termino
" demittatur normalis ad rectam positione datam: sit vero
" quadratum ductæ æquale rectangulo sub datâ quâdam &
" interceptâ, vel inter punctum datum, vel etiam inter aliud
" quodvis punctum datum in positione datâ sumptum, &
" normalem: terminus hujus ductæ continget circuli circum-
" ferentiam positione datam. Si à duobus datis punctis infle-
" ctantur rectæ, & sit quadratum unius quadrato alterius dato
" majus quam in ratione; continget punctum circumferen-
" tiam positione datam. Si à quotcunque datis punctis in-
" flectantur rectæ ad unum punctum, sitque summa specie-
" rum ab omnibus factarum æqualis dato spatio, punctum il-
" lud continget circumferentiam positione datam. Si à duo-
" bus datis punctis inflectantur rectæ; à puncto autem con-
" cursûs ducatur recta positione datæ normalis, quæ auferat
" à rectâ positione datâ segmentum puncto dato adjacens, ac
" sit summa quadratorum è rectis inflexis æqualis rectan-
" gulo sub datâ & segmento intercepto: punctum illud con-
" cursus tanget circumferentiam positione datam. Si intra cir-
" culum positione datum detur punctum quodlibet, ac per idem
" ducatur recta quævis, in quâ sumatur punctum aliquod
" extra circulum: sit autem quadratum interceptæ inter pun-
" cta illa æquale rectangulo sub totâ & parte exteriore ad
" circulum terminatâ, vel soli, vel etiam adjuncto rectan-
" gulo sub segmentis duobus interioribus: punctum extra
" sumptum datam positione rectam continget. Quod si pun-
" ctum illud tangat rectam positione datam, circulus vero non
" descriptus sit; puncta illa duo, ad utramque partem puncti
" dati, contingent ejusdem circuli positione dati circumferen-
" tiam." Habent autem duo libri de Locis planis Theore-
mata sive diagrammata CXLVII. Lemmata vero VIII.

De

De Inclinationibus II.

Inclinare dicitur linea ad punctum, si producta ad ipsum pervenit: universim autem idem est, sive dicatur linea inclinare ad datum punctum, sive in eâ partem aliquam datam esse: sive per datum punctum transire. Inscripti autem sunt hi libri *Inclinationes* ab horum uno. Problema vero generale hoc est: " Duabus lineis positione datis, inter eas " inserere rectam magnitudine datam, quæ ad datum pun- " ctum pertingat." E particularibus autem Problematis, diversa subjecta habentibus, quædam plana sunt, quædam solida, quædam etiam linearia. Selecta vero è planis, quæ ad plura magis utilia visa sunt, hæc demonstrantur. " Datis " positione semicirculo & rectâ quæ basi normalis sit; vel " duobus semicirculis in eâdem rectâ bases habentibus; inserere " rectam magnitudine datam inter duas illas lineas, quæ ad " angulum semicirculi pertingat." Et " Rhombo dato & " producto uno ejus latere, adaptare, sub angulo ejus exte- " riore, rectam magnitudine datam ad angulum oppositum " vergentem." Et " In circulo positione dato inserere re- " ctam magnitudine datam, quæ ad datum punctum pertin- " gat." In primo autem libro demonstratur Problema de uno semicirculo & recta; quod quidem quatuor Casus habet: ut & illud de circulo in duos Casus divisum: atque etiam illud de rhombo, duos quoque Casus habens. In secundo vero habetur unicum Problema de duobus semicirculis, cujus ex Hypothesi decem sunt Casus; atque horum etiam plures sunt subdivisiones dioristicæ, propter datam magnitudinem rectæ inserendæ.

Hæc igitur in Loco *de Resolutione* plana reperiuntur, quæ scilicet prius ordine demonstrantur, absque Medietatibus *Eratosthenis*, nonnisi ultimo loco adhibendis. Exactis autem planis, solidorum contemplationem ordo postulare videtur. Solida vero vocant Problemata, non quæ de figuris solidis proponuntur, sed quæ, cum non possint per plana demonstrari, trium linearum Conicarum opem requirunt: ita ut prius de illis necesse sit scribere. Primus itaque Elementa Conica protulit *Aristæus* senior, in quinque libris; quasi in eorum usum qui jam hæc satis percipere valent,

f compen-

compendiosius conscriptis. Habent autem Inclinationum Libri duo Theoremata sive diagrammata CXXV, Lemmata vero XXXVIII.

De Conicis VIII.

Quatuor *Conicorum* libros ab *Euclide* receptos fusius explicavit *Apollonius*; adjectisque quatuor aliis, edidit octo Conicorum volumina. *Aristæus* autem (qui hactenus solus est autor de Locis Solidis, conscriptis quinque libris argumento Conicis conjuncto) & quotquot *Apollonio* priores fuerunt, tres Conicas lineas, Acutanguli, Rectanguli & Obtusanguli Coni Sectiones nominârunt. Quoniam vero in quolibet horum trium Conorum, diverso modo sectorum, omnes hæ tres producantur lineæ; *Apollonius*, ut videtur, non contentus Antecessorum placitis (cum sectio illa, quam dixerunt Coni acutanguli sectionem, etiam in Cono rectangulo vel obtusangulo secari possit; uti & sectio Coni rectanguli dicta, in acutangulo vel obtusangulo; cumque etiam obtusanguli Coni sectio possit tum acutanguli tum rectanguli sectio esse) mutatis nominibus sectionem Coni, acutanguli dictam, Ellipsin vocavit; rectanguli Parabolam; Obtusanguli vero Hyperbolam: singulas à proprio quodam accidente. Rectangulum enim quoddam ad rectam quandam applicatum, in Acutanguli Coni sectione deficiens fit quadrato; *in Obtusanguli excedens quadrato*; in rectanguli vero sectione neque deficiens neque excedens. Hoc autem admisit, non percepto, quod, juxta certum quendam casum in situ plani Conum secantis, alia atque alia ex his lineis generetur. Nam si planum secans parallelum fuerit uni Coni lateri, una sola ex tribus lineis producitur, semper eadem; quam tamen *Aristæus* ille secti Coni nomine appellavit.

Apollonius autem ipse, de iis quæ continentur in octo libris Conicorum à se conscriptis, hæc habet; summariam hanc descriptionem in præfatione primi tradens. "Continet liber "primus origines trium sectionum, ut & oppositarum secti-"onum; earundemque præcipua symptomata, plenius & uni-"versalius, quam in aliorum scriptis reperiuntur, elaborata. "Secundus habet quæ ad Diametros & Axes sectionum & op-"positarum pertinent, ut & ad Asymptotos; aliaque quæ ge-

 "neralem

“ neralem ac necessarium præbent usum ad Diorismos. Quas
“ vero diametros, qualesque axes nomino ex hoc libro disces.
“ Tertius habet multa & omnigena Theoremata utilia ad
“ compositiones Locorum solidorum, & ad Determinationes:
“ quorum plurima perpulchra & nova sunt. Hisce autem
“ perpensis animadverti, non compositum fuisse ab *Euclide*
“ locum ad tres vel quatuor lineas, sed particulam tantum
“ ejus, atque hanc non satis feliciter: impossibile enim erat
“ absque prædictis propositionibus perfectam ejus composi-
“ tionem exhibere. Quartus docet quotupliciter Coni secti-
“ ones vel inter se, vel cum circuli circumferentiâ occurrere
“ possint; atque insuper alia, de quibus nihil ab iis qui
“ ante nos fuerunt memoriæ proditum est: nimirum quot
“ punctis Coni sectio vel circuli circumferentia vel etiam
“ sectiones oppositæ oppositis sectionibus occurrant. Reli-
“ qui quatuor libri penitiorem magis spectant scientiam:
“ Primus enim ex iis magnâ ex parte agit de Maximis & Mi-
“ nimis: Secundus de æqualibus & similibus sectionibus:
“ Tertius tradit Theoremata dioristica, sive determinandi
“ vim habentia: Quartus vero habet Problemata Conica de-
“ terminata.” Hactenus *Apollonius*. Quem vero in tertio ait Locum ad tres vel quatuor lineas ab *Euclide* non perfectum fuisse, neque ipse poterat, neque aliquis alius explere; vel tantillum adjicere iis quæ scripserat *Euclides*, solâ ope Conicorum illorum, quæ ad ea usque tempora demonstrata ferebantur. Id quod & ipse *Apollonius* testatur, dum dicit, “ Im-
“ possibile fuisse compositionem perfici, absque iis quæ ipse
“ invenire necesse habuit.” *Euclides* autem excipiens *Aristæum* nuper editis Conicis de Mathesi præclare meritum, nolensque alios prævenire, vel sese alterius negotio immiscere (erat enim ingenio mitissimus, & erga omnes (ut par erat) benignus, qui vel tantillum Mathematicas disciplinas promovere poterant, aliisque nullo modo infensus; sed summe accuratus, minimeque (uti hic) gloriosus) quantum de Loco possibile erat ostendi per illius Conica, scriptis mandavit; non affirmans perfecta esse quæ demonstraverat: nam sic jure meritoque reprehendi potuisset. Nequaquam vero hoc modo: siquidem & ipse *Apollonius*, plurima in Conicis imperfecta relinquens, minime ab aliis redarguitur. Poterat quidem ea adjecisse, quæ ad Locum absolvendum deerant, ani-

mo

mo complexus ea quæ *Euclides* de Loco scripserat, & operam dans *Euclidis* discipulis *Alexandriæ* longo tempore (unde exquisitam adeo in Mathematicis peritiam est assequutus) haud tamen illud sustinuit efficere. Locus autem ad tres vel quatuor lineas (de quo ob nonnulla adjecta tantopere se jactat; cum potius primo scriptori gratias referre debuisset) hujusmodi est: "Tribus rectis positione datis, si à quodam puncto "ducantur rectæ ad tres illas in datis angulis; detur autem ra-"tio rectanguli sub duabus ductis contenti ad quadratum re-"liquæ: punctum continget locum solidum positione datum, "hoc est, aliquam è tribus lineis Conicis. Si vero ad quatuor "rectas positione datas ducantur rectæ in datis angulis; ac "data fuerit ratio rectanguli sub duabus ductis ad rectangu-"lum sub duabus reliquis ductis: punctum similiter tan-"get Coni sectionem positione datam." Demonstratur autem Locum esse planum, si ad duas tantum positione datas ducantur rectæ. Si vero ducantur ad plures quam quatuor; continget punctum Loca nondum cognita, sed Lineas tantum dictas. Quales vero sint, quasve proprietates habeant, nondum compertum est. Harum unam, eamque neque primam, neque maxime conspicuam, utilem fore existimantes, composuerunt. Hisce autem propositionibus constant: "Si "ab aliquo puncto ad quinque rectas positione datas ducan-"tur rectæ in datis angulis; ac detur ratio solidi parallele-"pipedi rectanguli sub tribus ductis contenti ad parallele-"pipedum solidum rectangulum sub duabus reliquis & datâ "quâdam contentum: punctum illud continget locum linea-"rem positione datum. Si autem ducantur ad sex, ac ratio "data sit dicti solidi sub tribus contenti, ad illud quod sub "tribus reliquis continetur: rursus punctum continget line-"am positione datam." Quod si plures fuerint quam sex, non amplius habent dicere, quod ratio data sit contenti sub quatuor ductis ad contentum sub reliquis; quoniam non datur aliquod contentum sub pluribus quam tribus dimensionibus. Sibimet autem in his plus justo concesserunt, qui paulo ante nos hæc interpretati sunt; nihil quidem quod ullo modo complecti possumus in medium proferentes: cum scilicet quod quatuor dimensionibus constet, vel Biquadrati vel Supersolidi sub quatuor rectis nomine comprehenderint. Licebit autem per compositas rationes hæc & dicere & de-

 monstrare

monstrare universim; tam in prædictis propositionibus quam in superioribus: ad hunc modum. "Si à quodam puncto ad "rectas positione datas ducantur rectæ in datis angulis; & "data sit ratio composita ex rationibus quas habet una è du- "ctis ad unam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & re- "liqua ad datam, si fuerint septem; vel si fuerint octo, & "reliqua ad reliquam: continget punctum illud lineam po- "sitione datam. Ac pari modo fiet, quotcunque fuerint du- "ctæ pares vel impares numero." Hæc vero consequuntur Locum ad quatuor rectas. Nihil igitur protulerunt unde cognosci poterit quænam sit illa linea. Qui vero difficultatem perspexere, rem minime aggressi sunt; ad exemplum Veterum & Scriptorum omnium melioris notæ. Ego autem, quum plurimos viderim circa principia in disciplinis Mathematicis occupatos, disquisitionibusque Physicis operam navantes, erubui sane, eo quod facile esset multo præstantiora ac utiliora proferre. Ne vero, quasi hoc gratis dixissem, alienus à ratione jam videar, hæc parum quidem cognita propalabo.

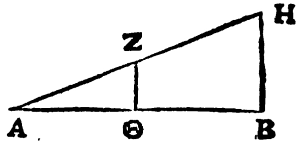
Figuræ perfecto gyro genitæ rationem habent compositam ex ratione gyrantium, & ex illâ rectarum similiter ad axes ductarum ab ipsarum gyrantium Gravitatis centris. Ratio vero incompleto gyro genitarum fit ex ratione gyrantium & arcuum quos descripsêre earundem centra Gravitatis. Manifestum autem est horum arcuum rationem componi ex ratione ductarum ad axes, & ex illâ angulorum quos continent ductarum extremitates, si ad axes genitarum æstimantur.

Hæ vero propositiones, quæ fere una sunt, plurima & varia complectuntur Theoremata de lineis, superficiebus & solidis, unâ eademque demonstratione; quorum nonnulla quidem nondum demonstrata sunt; alia vero jam olim, uti ea quæ occurrunt in duodecimo Elementorum. Habent autem libri octo Conicorum *Apollonii* Theoremata sive Diagrammata CCCCLXXXVII, Lemmata vero LXX.

Lemmata Pappi *ad Libros de Sectione Rationis & Spatii.*

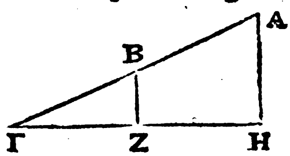
I. DATAM rectam lineam in data ratione secare.

Sit recta data A B, ratio autem data ut Γ ad Δ: oportet rectam A B dividere in ratione ipsius Γ ad Δ. Inclinetur sub quovis angulo ad rectam A B recta A H; & termino rationis Γ æqualem aufer A Z, ipsi vero Δ rectam Z H: dein junctâ B H, ipsi parallela ducatur Z Θ. Quoniam enim A Θ est ad Θ B ut A Z ad Z H; A Z vero æqualis est ipsi Γ, Z H autem ipsi Δ: erit igitur A Θ ad Θ B ut Γ ad Δ. Dividitur itaque *in ea ratione* A B in puncto Θ.



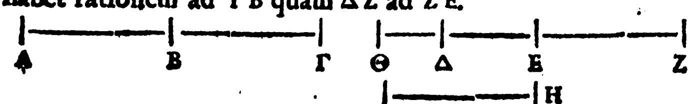
II. Datis tribus rectis A B, B Γ, Δ, invenire aliam quandam quæ sit ad Δ sicut A B ad B Γ.

Rursus inclinetur recta quædam Γ H sub quovis angulo; & fiat Γ Z ipsi Δ æqualis. Junge B Z, ipsique parallela ducatur A H. Est igitur A B ad B Γ sicut H Z ad Z Γ, hoc est, ad Δ. Quare H Z est recta quæsita. Similiter si daretur tertia quartam inveniremus.



III. Habeat A B ad B Γ majorem rationem quam Δ E ad E Z: componendo erit ratio A Γ ad Γ B major ratione Δ Z ad Z E.

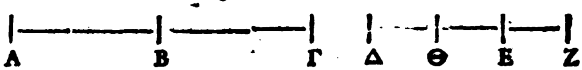
Fiat enim ut A B ad B Γ ita alia quædam ut H ad E Z; habebit igitur H ad E Z majorem rationem quam Δ E ad E Z, unde major erit H quam Δ E. Eidem ponatur Θ E æqualis. Quoniam autem A B est ad B Γ ut Θ E ad E Z, *erit componendo ut* A Γ *ad* Γ B *ita* Θ Z *ad* E Z. Sed Θ Z majorem habet rationem ad E Z quam Δ Z ad E Z; quare etiam A Γ majorem habet rationem ad Γ B quam Δ Z ad Z E.



IV. Rur-

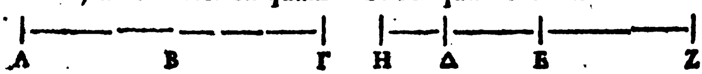
IV. Rurſus habeat AB minorem rationem ad BΓ quam habet ΔE ad EZ; erit etiam ratio AΓ ad ΓB minor ratione ΔZ ad ZE.

Quoniam AB minorem habet rationem ad BΓ quam ΔE ad EZ; ſi fiat ut AB ad BΓ ita quædam alia ad EZ, erit illa minor quam ΔE, nempe EΘ. Quapropter *componendo* AΓ erit ad ΓB ſicut ΘZ ad ZE. Sed ΘZ minorem habet rationem ad ZE quam ΔZ ad ZE, adeoque AΓ ad ΓB minorem quoque habet rationem quam ΔZ ad ZE.



V. Habeat autem AB ad BΓ majorem rationem quam ΔE ad EZ: permutando erit ratio AB ad ΔE major ratione BΓ ad EZ.

Fiat enim ut AB ad BΓ, ita alia quædam ad EZ. Patet eam majorem eſſe quam ΔE: ſit autem illa HE. Permutando igitur erit ut AB ad HE ita BΓ ad EZ. Sed AB majorem habet rationem ad ΔE quam AB ad HE, hoc eſt, quam BΓ ad EZ; quare AB ad ΔE majorem habet rationem quam BΓ ad EZ. Pariter ſi minor fuerit ratio AB *ad* BΓ *quam* ΔE *ad* EZ; etiam permutando, AB *ad* ΔE *minorem habebit rationem quam* BΓ *ad* EZ. Nam ſi fiat ut AB ad BΓ ita alia quædam ad EZ, minor erit ea quam ΔE: reliqua vero eadem ſunt.

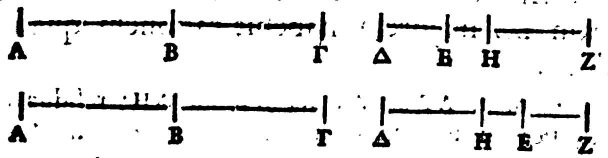


VI. Habeat AΓ ad ΓB majorem rationem quam ΔZ ad ZE: per converſionem rationis ΓA ad AB minorem habebit rationem quam ZΔ ad ΔE.

Fiat enim ut AΓ ad ΓB ita ΔZ ad aliam quandam, quæ minor erit quam ZE, ut ZH. Per converſionem rationis erit AΓ ad AB ut ΔZ ad ΔH. Sed ΔZ ad ΔH minorem habet rationem quam ΔZ ad ΔE, *quare* AΓ *ad* AB *minorem habet rationem quam* ΔZ *ad* ΔE. Similiter ſi AΓ ad ΓB minorem habeat rationem quam ΔZ ad ZE. Per converſionem rationis, AΓ majorem habet rationem ad AB quam ΔZ ad ΔE.

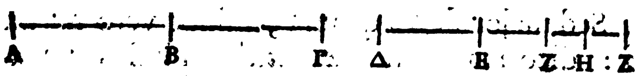
erit

erit enim ut AΓ ad ΓB ita ΔZ ad aliam, majorem quam ZE. Caetera evidentia sunt.



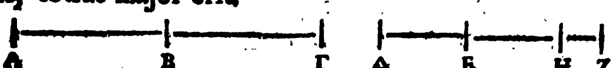
VII. Habeat rursus AB ad BΓ majorem rationem quam ΔE ad EZ: invertendo ΓB ad BA minorem habet rationem quam EZ ad EΔ.

Fiat enim ut AB ad BΓ ita ΔE ad aliam, ut EH, quae minor erit quam EZ: invertendo itaque erit ut ΓB ad BA ita EH ad EΔ. Sed EH ad EΔ minorem habet rationem quam ZE ad EΔ; *quare* ΓB *ad* BA *minorem habet rationem quam* ZE *ad* EΔ. Similiter si AB minorem habeat rationem ad BΓ quam ΔE ad EZ; invertendo ΓB ad BA majorem habebit rationem quam ZE ad EΔ. Nam ut AB ad BΓ ita erit ΔE ad majorem quam EZ. Reliqua vero manifesta sunt. Ex his etiam consequitur, quod, si AB majorem habeat rationem ad BΓ quam ΔE ad EZ, EZ etiam ad ΔE majorem habebit rationem quam ΓB ad BA. Si vero AB ad BΓ minorem habeat rationem quam ΔE ad EZ, minor quoque erit ratio EZ ad ΔE quam ΓB ad BA.



VIII. Habeat AB ad ΔE majorem rationem quam BΓ ad EZ: erit ratio ipsius AB ad ΔE major ratione AΓ ad ΔZ.

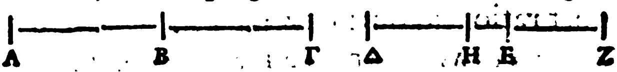
Fiat enim ut AB ad ΔE ita BΓ ad aliam quandam, ut HE, minorem quam EZ: tota igitur AΓ ad totam ΔH est ut AB ad ΔE. Sed AΓ ad ΔH majorem habet rationem quam ad ΔZ; igitur AB ad ΔE majorem habet rationem quam AΓ ad ΔZ. Ac manifestum est totam AΓ ad totam ΔZ minorem habere rationem quam AB ad ΔE. Quod si minor fuerit ratio partis, totius major erit.



IX. Ha-

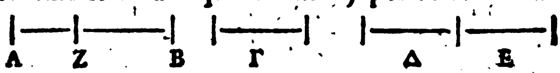
IX. Habeat rursus tota AΓ ad totam ΔZ majorem rationem quam AB ad ΔE: residua BΓ ad residuam EZ majorem habebit rationem quam AΓ ad ΔZ.

Fiat enim ut AΓ ad ΔZ ita AB ad ΔH; residua igitur BΓ ad residuam HZ erit etiam ut AΓ ad ΔZ. Sed BΓ ad EZ majorem habet rationem quam ad ZH, quare ratio BΓ ad EZ major est ratione AΓ ad ΔZ. Si vero ratio totius ad totam minor fuerit, minor quoque erit ratio residuæ *ad residuam.*



X. Sit AB major quam Γ, Δ vero ipsi E æqualis: majorem habebit rationem AB ad Γ quam est ratio Δ ad E.

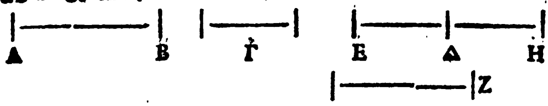
Ponatur enim BZ ipsi Γ æqualis, atque erit BZ ad Γ sicut Δ ad E. Sed AB majorem habet rationem ad Γ quam BZ ad Γ: AB igitur majorem habet rationem ad Γ quam Δ ad E. Patet etiam quod, si minor fuerit AB quam Γ, AB minorem haberet rationem ad Γ quam Δ ad E, per conversam.



XI. Sed major sit AB quam Γ, minor vero ΔE quam Z: dico majorem esse rationem ipsius AB ad Γ quam ΔE ad Z.

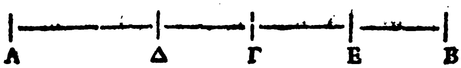
Hoc manifestum est etiam absque demonstratione. Si enim, dum ΔE ipsi Z æqualis fuerat, AB majorem habuerit rationem ad Γ quam ΔE ad Z; jam cum minor ea ponatur, multo majorem habebit rationem. Hoc autem modo demonstrabitur. Quoniam major est AB quam Γ; si fiat ut AB ad Γ ita alia quædam ad Z: major erit ea quam Z, sicut & quam ΔE. Æqualis autem sit ipsi EH. EH igitur majorem habet rationem ad Z quam ΔE ad Z. Sed ut HE ad Z ita AB ad Γ. Quare ratio AB ad Γ major est ratione ΔE ad Z. (Ac manifestum est, si AB minor fuerit quam Γ, minorem semper fore rationem, *quoties* ΔE *vel est æqualis vel major quam* Z.) Majus quoque erit rectangulum AB in Z rectangulo ΔE in

Γ, æquale enim est rectangulo EH in Γ, quod majus est contento sub Γ & ΔE.



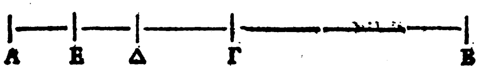
XII. Secetur recta AB in puncto Γ. Dico puncta omnia inter A & Γ dividere rectam AB in minores rationes quam habet AΓ ad ΓB: puncta vero omnia inter Γ & B in rationes majores.

Capiantur enim puncta Δ, E ab utraque parte ipsius Γ. Jam quoniam ΔA minor est quam AΓ, ΔB vero major quam BΓ; ΔA minorem habet rationem ad AΓ quam ΔB ad BΓ; permutando itaque AΔ ad ΔB minorem habet rationem quam AΓ ad ΓB. Idemque demonstratur de punctis omnibus inter A & Γ. Rursus quia EA major est quam AΓ, EB vero minor quam BΓ; EA majorem habebit rationem ad AΓ quam EB ad BΓ: quare permutando AE ad EB majorem habet rationem quam AΓ ad ΓB. Pari modo idem probatur de punctis reliquis inter Γ & B sumendis.



XIII. Dividatur recta AB bifariam in puncto Γ. Dico rectangulum ad punctum Γ abscissum, sive AΓ in ΓB, majus esse quovis alio segmentis quibuslibet aliis contento.

Sumatur enim aliud punctum ut Δ; atque erit rectangulum AΔB, una cum quadrato ipsius ΓΔ, æquale quadrato ex AΓ, hoc est rectangulo AΓB. Majus itaque est rectangulum AΓ in ΓB rectangulo AΔ in ΔB. Idem constat de punctis reliquis.



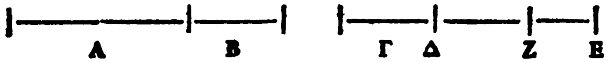
XIV. Dico quoque quod punctum propius puncto Γ adjacens, rectangulum semper efficit majus remotiore.

Sumatur enim aliud punctum ut E inter A & Δ. Demonstrandum est majus esse rectangulum AΔB rectangulo AEB.

Quoniam enim rectangulum ΑΔΒ una cum quadrato ex ΔΓ æquale est quadrato ipsius ΑΓ; atque etiam rectangulum ΑΕΒ una cum quadrato ex ΕΓ æquale est eidem quadrato ex ΑΓ: erit rectangulum ΑΔΒ cum quadrato ex ΔΓ æquale rectangulo ΑΕΒ cum quadrato ex ΕΓ. Ex his autem quadratum ex ΔΓ minus est quadrato ex ΕΓ. Rectangulum igitur reliquum ΑΔΒ majus est reliquo rectangulo ΑΕΒ.

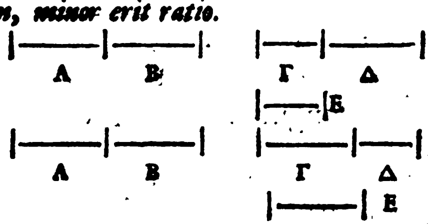
XV. Nam si sit Α una cum Β æqualis ipsi Γ cum ΔΕ; sit vero Β minor quam ΔΕ: major erit Α quam Γ.

Ponatur ΔΖ ipsi Β æqualis: Α igitur una cum ΔΖ æqualis erit ipsi ΔΕ una cum Γ. Communis auferatur ΔΖ; & reliquum Α æquale erit reliquis Γ & ΖΕ simul sumptis; ac propterea Α major erit quam Γ.



XVI. Habeat Α ad Β majorem rationem quam Γ ad Δ. Dico majus esse rectangulum sub Α & Δ rectangulo sub Β & Γ.

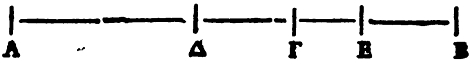
Fiat enim ut Α ad Β ita Γ ad Ε: majorem itaque rationem habet Γ ad Ε quam ad Δ, unde minus est Ε quam Δ; ac sumptâ Α in communem altitudinem, minus erit rectangulum Α in Ε rectangulo Α in Δ. Sed rectangulum ΑΕ æquale est rectangulo ΒΓ; minus itaque est rectangulum ΒΓ rectangulo ΑΔ: hoc est, ΑΔ majus est rectangulo ΒΓ. Similiter si minor fuerit ratio, minus quoque erit rectangulum rectangulo. Quinetiam si rectangulum Α in Δ majus fuerit quam Β in Γ, ratio ipsius Α ad Β major erit ratione Γ ad Δ. Ponatur enim ipsi ΑΔ æquale rectangulum ΒΕ; majus ergo erit rectangulum ΒΕ quam ΒΓ; unde & Ε major erit quam Γ. Sed ut Α ad Β, ita Ε ad Δ. Est vero ratio Ε ad Δ major ratione Γ ad Δ; adeoque etiam ratio Α ad Β major erit. *Pariter si minus fuerit rectangulum, minor erit ratio.*



XVII. Inter

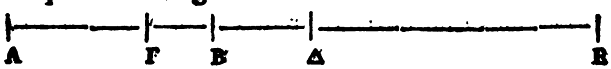
XVII. Inter duas rectas AB, BΓ media proportionalis sit BΔ, ac fiat ΔE ipsi AΔ æqualis. Dico ΓE excessum esse quo utræque AB, BΓ simul sumptæ superant illam quæ potest quater rectangulum AB in BΓ.

Quoniam enim utræque AB, BΓ excedunt utrasque AB, BE differentiâ ΓE, erit ΓE excessus quo utræque AB, BΓ, utrasque AB, BE excedunt; ipsæ autem AB, BE simul sumptæ duæ sunt BΔ. Sed duæ BΔ possunt quater rectangulum AB in BΓ. Quare ΓE excessus est quo utræque AB, BΓ simul sumptæ superant illam quæ potest quater rectangulum ABΓ.



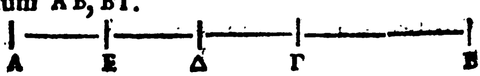
XVIII. Rursus sit BΔ media proportionalis inter AB, BΓ; ac fiat ΔE ipsi ΔA æqualis. Dico rectam ΓE componi ex utrisque AB, BΓ, & ex illâ quæ potest quater rectangulum AB, BΓ simul sumptis.

Quoniam enim ΓE componitur ex ipsis ΓΔ, ΔE; ac AΔ æqualis est ipsi ΔE; componetur etiam ΓE ex ipsis AΔ, ΔΓ; hoc est ex utrisque AB, BΓ & duabus BΔ simul sumptis. Sed duæ BΔ possunt quater rectangulum AB in BΓ. Recta igitur ΓE composita est ex utrisque AB, BΓ & ex eâ quæ potest quater rectangulum AB in BΓ.



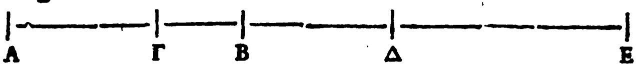
XIX. Rursus BΔ sit media proportionalis inter AB, BΓ, & ponatur ΔE ipsi ΓΔ æqualis. Dico rectam AE excessum esse quo utræque AB, BΓ superant illam quæ potest quater rectangulum AB, BΓ.

Quoniam enim utræque AB, BΓ superant utrasque EB, BΓ, excessu AE; ac utræque EB, BΓ duæ sunt BΔ, sive illâ quæ potest quater rectangulum AB in BΓ. Igitur AE est excessus quo utræque AB, BΓ superant illam quæ potest quater rectangulum AB, BΓ.



XX. Rursus sit BΔ media proportionalis inter AB, BΓ; & ponatur ΔE ipsi ΓΔ æqualis. Dico rectam AE componi ex utrisque AB, BΓ & ex eâ quæ potest quater rectangulum AB in BΓ.

Quoniam enim AE componitur ex ipsis AΔ, ΔE; ac ΔE ipsi ΓΔ æqualis est: componetur itaque AE ex ipsis AΔ, ΔΓ; hoc est ex utrisque AB, BΓ & ex duabus BΔ. Sed duæ BΔ possunt quater rectangulum AB, BΓ. Composita est igitur recta AE ex utrisque AB, BΓ & ex eâ quæ potest quater rectangulum AB in BΓ.



Assumuntur Lemmata hæc tum ad *Sectionem Rationis*, tum ad *Sectionem Spatii*; diverso tamen modo.

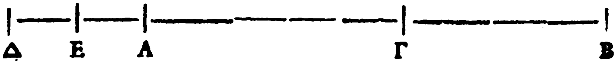
Problema ad secundum de Sectione Rationis; *utile ad Recapitulationem Loci decimi tertii.*

Datis duabus rectis AB, BΓ, sumere in productâ AΔ punctum datum Δ, tale ut BΔ eandem habeat rationem ad ΔA, quam habet ΓΔ ad excessum quo utræque AB, BΓ superant illam quæ potest quater rectangulum AB in BΓ.

Puta factum, & sit excessus ille recta AE (in præmissis enim invenimus eam) est igitur BΔ ad ΔA ut ΓΔ ad AE; quare permutando ac dividendo, dein *conferendo* rectangulum *extremorum* cum rectangulo *mediorum*, rectangulum BΓ in EA æquale erit rectangulo ΓΔ in ΔE. Datum autem est rectangulum BΓ in EA, ac proinde datur ΓΔ in ΔE; quod quidem applicatur ad rectam datam ΓE excedens quadrato: datum igitur est punctum Δ. Componetur autem hoc modo. Sit excessus ille recta EA, & applicetur rectangulum æquale rectangulo BΓE excedens quadrato ad rectam ΓE; nempe rectangulum ΓΔ in ΔE. Dico punctum Δ esse punctum quæsitum. Quoniam enim rectangulum BΓ in EA æquale est rectangulo ΓΔ in ΔE: Resolutâ in proportionem æqualitate, dein componendo & permutando, erit ut BΔ ad ΔA ita ΓΔ ad AE, quæ excessus est. Eodem modo fiet, si velimus su-

sumere

mere punctum tale, ut ΒΔ sit ad ΔΑ ut ΓΔ ad rectam compositam ex utrisque ΑΒ, ΒΓ & illâ quæ potest quater rectangulum ΑΒ, ΒΓ. Q. E. D.



Primus liber de *Sectione Rationis* habet Loca septem, Casus viginti quatuor, Diorismos quinque; quorum tres sunt Maximi, duo vero Minimi. Et Maximus quidem est ad Casum tertium Loci V^{ti}. Minimi autem sunt ad Casus secundos Locorum VI^{ti} & VII^{mi}. Maximi reliqui sunt ad Casus quartos eorundum Locorum VI^{ti} & VII^{mi}. Secundus de *Sectione Rationis* [*habet Loca quatuordecim, Casus* LXIII. *Diorismos vero ex primo, ad quem totus refertur. Primus liber de Sectione Spatii*] habet loca septem, Casus XXIV. Diorismos septem, quorum quatuor Maximi sunt, tres autem Minimi. Maximus autem est ad Casum II. Loci primi, ut & ad primum [*secundi Loci*; *similiter ad secundum*] quarti, [*& ad tertium sexti Loci. Minimi vero sunt*] ad tertium Casum tertii Loci, ad quartum quarti, & ad primum sexti. Secundus liber de *Sectione Spatii* Loca habet XIII. Casus LX. & Diorismos ex primo, ad quem totus refertur.

Quæret fortasse aliquis unde factum sit, ut secundus liber de *Sectione Rationis* quatuordecim Loca contineat, cum idem de *Sectione Spatii* tredecim tantum habeat. Fit autem ob hanc causam; quia septimus Locus in *Sectione Spatii* omissus est, ut manifestus. Nam si utræque parallelæ cadant super terminos datos, quæcunque recta ducta fuerit, abscindet rectangulum datum; æquale nempe illo quod continetur sub duabus interceptis inter terminos & concursum ambarum rectarum principalium positione datarum. Hoc autem aliter se habet in *Sectione Rationis*. Quapropter excedit uno Loco ad septimum secundi, atque ita deinceps.

APOL-

APOLLONII PERGÆI

De Sectione rationis,

SIVE

ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ ΑΠΟΤΟΜΗΣ,

LIBER PRIOR.

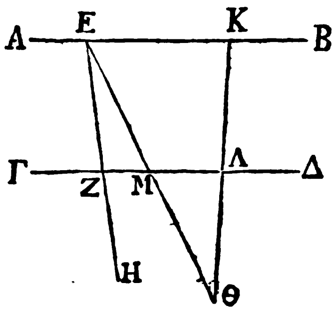
SINT duæ rectæ lineæ infinitæ in eodem plano positione datæ, quæ vel invicem æquidistent vel sese intersecent; & datum sit in utrâque illarum punctum: sitque etiam ratio data: & præterea datum sit punctum extra rectas datas. Ducere oportet à puncto dato lineam rectam, quæ occurrens rectis positione datis, ab ipsis auferat segmenta quæ sint inter se in ratione datâ.

Primo sint duæ rectæ positione datæ invicem parallelæ ut ΑΒ, ΓΔ; & sumatur in rectâ ΑΒ punctum Ε, & in ΓΔ punctum Ζ: rectaque rectis datis occurrens sit ΕΖΗ. Cadet autem punctum datum vel intra angulum ΔΖΗ, vel intra angulos ΒΕΖ, ΔΖΕ, vel intra spatia iisdem adjacentia.

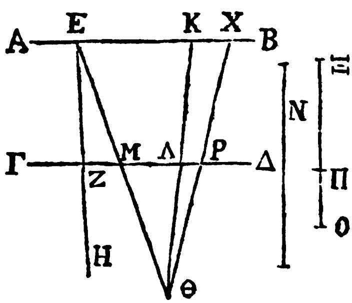
LOCUS PRIMUS.

Cadat autem primo intra angulum ΔΖΗ, ut punctum Θ. Rectæ vero lineæ, quæ à puncto Θ ductæ auferunt à rectis positione datis segmenta, datis punctis Ε, Ζ adjacentia, in ratione datâ, admittunt tres casus; quatenus vel resecantur segmenta ex ΕΒ, ΖΔ, vel ex ΕΑ, ΖΔ, vel denique ex ipsis ΕΑ, ΖΓ.

Cas. I. Cadat autem recta secundum modum primum, ut recta ΘK. Auferat isthæc à rectis EB, ZΔ segmenta BK, ZΛ, habentia inter se rationem rationi datæ æqualem; ac jungatur recta EΘ. Positione igitur data est ipsa EΘ. Sed etiam ΓΔ positione datur, datum est igitur punctum M. Quoniam autem dantur puncta E, M, Θ, etiam datur ratio rectæ [EM ad MΘ, & componendo datur quoque ratio] EΘ ad ΘM. Verum ratio EΘ ad ΘM æqualis est rationi BK *ad* MΛ, *quare ratio* BK *ad* MΛ *data est. Datur autem ratio* BK *ad* ZΛ, *quare ratio* ZΛ *ad* MΛ *quoque datur; ac dividendo ratio* MZ *ad* MΛ *etiam data est. Sed recta* ZM *magnitudine datur, adeoque ipsa* MΛ *magnitudine data est; & ob datum punctum* M *punctum* Λ *quoque datur: unde recta* ΘΛK *positione datur. Quoniam autem recta* MΛ *minor est quam* ZΛ, *ratio* BK *ad* MΛ *sive* EΘ *ad* ΘM *major erit ratione* EK ad ZΛ, hoc est, ratione data. Oportet igitur rationem datam minorem esse ratione EΘ ad ΘM.



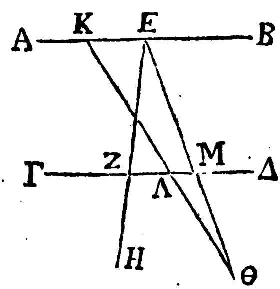
Componetur autem Problema hoc modo. Manente figurâ jam descriptâ, ac junctâ rectâ EΘ: manifestum est rationem datam minorem esse debere ratione EΘ ad ΘM. Esto igitur illa æqualis rationi N ad ΞO. Ac fiat ut EΘ ad ΘM ita N *ad* ΞΠ, *minorem quam* ΞO; *dein fiat ut* OΠ *ad* ΠΞ, ita ZM ad MΛ: & connexa ΘΛ producatur in directum. Dico quod recta ΘΛK sola solvit problema. Quod sic ostenditur. Quoniam ZM est ad MΛ ut OΠ ad ΠΞ, erit componendo ZΛ ad ΛM ut ΞO ad ΞΠ: ac invertendo ut ΛM ad ZΛ ita ΠΞ ad ΞO. Cum autem EΘ est ad ΘM ut EK ad MΛ, erit etiam EK ad MΛ sicut N ad ΞΠ. Sed MΛ est ad ΛZ ut ΠΞ ad ΞO; adeoque ex æquo erit EK ad ΛZ ut N ad ΞO. Ducta est igitur



igitur recta ΘK per punctum Θ, quæ aufert segmenta EK, ZΛ habentia inter se rationem rationi datæ æqualem. Recta igitur ΘK solvit problema. Aio autem illam solam hoc præstare. Nam si fieri potest, alia idem efficiat, ut recta ΘX. Aufert ergo recta ΘX rationem EX ad ZP æqualem rationi datæ. Quoniam vero ΛM minor est quam recta ΛZ, erit ratio PΛ ad ΛM major ratione PΛ ad ΛZ. Et componendo erit ratio PM ad MΛ major ratione PZ ad ΛZ. Ut autem PM ad MΛ, ita XE ad EK: ergo ratio XE ad EK major est ratione PZ ad ΛZ: ac permutando erit ratio XE ad PZ major ratione EK ad ZΛ. Ostensum autem est rectam ΘK problema solvere, id quod non præstat altera, adeoque ea sola.

Manifestum autem est quod rectæ puncto Z propiores, rationes minores abscindunt quam remotiores ab eo.

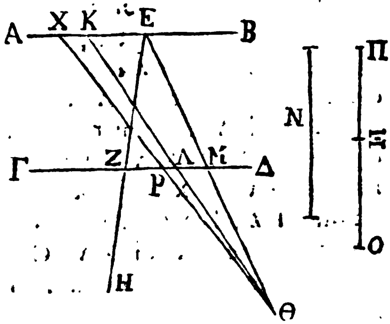
Cas. II. Iisdem manentibus ducatur, juxta casum secundum, recta ΘK auferens à rectis EA, ZΔ rationem EK ad ZΛ æqualem rationi datæ; & jungatur recta EΘ. Positione igitur datur EΘ. Data autem est positione ΓΔ; datur itaque punctum M; utraque adeo recta ΘE, ΘM datur: quare ratio EΘ ad ΘM etiam datur. Est autem EΘ ad ΘM ut EK ad ΛM; quare ratio KE ad ΛM datur. Sed ratio KE ad ZΛ data est; ratio igitur ZΛ ad ΛM data erit. Et componendo ratio ZM ad MΛ datur; adeoque cum recta ZM magnitudine data sit, etiam ipsa ΛM magnitudine data erit. Datum autem est punctum M, quare punctum Λ datum erit; ac dato puncto Θ, datur positione recta ΘΛK. Quoniam autem recta ΛM potest esse vel æqualis ipsi ΛZ, vel major vel minor ea; igitur rationes non habent limites.



Componetur autem problema hoc modo. Permanente figura jam descripta, jungatur recta EΘ; sitque ratio data eadem quæ N ad ΞO. Et fiat N ad ΞΠ sicut EΘ ad ΘM; ac ut OΠ ad ΠΞ sic ZM ad MΛ. Jungatur ΘΛ ac producatur in K. Dico rectam ΘK solvere problema, sive KE

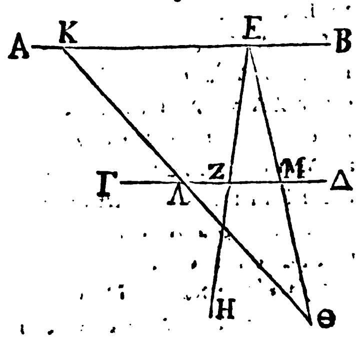
 esse

esse ad ZΛ ut N ad ΞO. Quoniam autem EΘ est ad ΘM ut KE ad ΛM, necnon ut N ad ΠΞ; erit etiam KE ad ΛM ut N ad ΠΞ. Item quia OΠ est ad ΠΞ ut ZM ad MΛ, erit, dividendo & invertendo, ΛM ad ΛZ ut ΠΞ ad ΞO. Quare ex æquo erit KE ad ZΛ ut N ad ΞO. Recta itaque ΘK solvit problema. Dico autem illam solam hoc præstare. Nam si fieri potest, ducatur alia, ut recta ΘX, auferens rationem XE ad PZ rationi datæ parem. Sed XE *major est quam* EK, *ac* ZP *minor quam* ZΛ; *unde* ratio XE ad ZP major est ratione EK ad ZΛ, adeoque recta XΘ majorem aufert rationem quam KΘ.



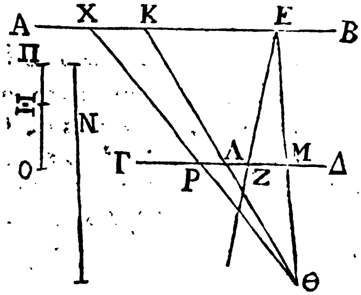
Manifestum autem est rectas puncto Z propiores, rationes majores abscindere quam rectæ remotiores ab illo.

Cas. III. Iisdem autem manentibus, ducatur secundum casum tertium, recta ΘK auferens è rectis EA, ZΓ rationem EK ad ZΛ rationi datæ æqualem; ac jungatur EΘ Datur igitur positione ipsa EΘ. Sed ob rectam ΓΔ positione datam, punctum M & ratio EΘ ad ΘM etiam dantur. Est autem ut EΘ ad ΘM ita EK ad ΛM: quare ratio EK ad ΛM datur. Sed ratio EK ad ZΛ datur, adeoque etiam ratio MΛ ad ZΛ data est: ac dividendo ratio MZ ad ZΛ datur. At recta MZ datur, quare recta ZΛ positione & magnitudine datur. Punctum autem Z datum est, adeoque & punctum Λ datur: ac dato puncto Θ, recta ΘΛK positione datur. Quoniam autem ZΛ minor est ΛM, erit ratio EK ad ZΛ major ratione EK ad ΛM. At vero EK est ad ΛM ut EΘ ad ΘM; quapropter ratio EK ad ZΛ major est ratione EΘ ad ΘM: adeoque ratio data major esse debet ratione EΘ ad ΘM.



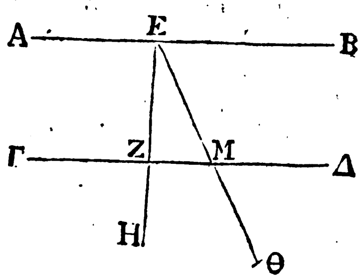
Componetur autem problema hoc modo. Manente figura jam

jam descripta, connectatur recta ΕΘ. Oportet enim rationem datam majorem esse ratione ΕΘ ad ΘΜ. Sit adeo ratio Ν ad ΞΠ major ratione ΕΘ ad ΘΜ. Fiatque ut ΕΘ ad ΘΜ ita Ν ad ΟΠ; & ut ΟΞ ad ΞΠ ita ΜΖ ad ΖΛ; & ducatur & producatur ΘΛ ad Κ. Dico rectam ΘΛΚ solvere problema. Quoniam enim ΜΖ est ad ΖΛ ut ΟΞ ad ΞΠ, erit componendo ΜΛ ad ΛΖ ut ΟΠ ad ΠΞ. Item quia ΕΘ est ad ΘΜ, sive ΕΚ ad ΜΛ, ut Ν ad ΟΠ; atque etiam ΜΛ ad ΛΖ ut ΠΟ ad ΠΞ: ex æquo erit ΕΚ ad ΛΖ ut Ν ad ΠΞ. Recta itaque ΘΚ solvit problema. Dico & eam solam. Nam si fieri possit, ducatur alia, ut recta ΘΧ, abscindens rationem ΧΕ ad ΡΖ rationi datæ æqualem. Quoniam autem recta ΛΖ minor est quam ΛΜ, erit ratio ΡΛ ad ΛΖ major ratione ΡΛ ad ΛΜ: ac Componendo erit ratio ΡΖ ad ΖΛ major ratione ΡΜ ad ΜΛ. At ΡΜ est ad ΜΛ ut ΧΕ ad ΕΚ; quare ratio ΧΕ ad ΕΚ minor est ratione ΡΖ ad ΖΛ: ac permutando, ratio ΧΕ ad ΡΖ minor erit ratione ΚΕ ad ΛΖ. Recta igitur ΘΚ majorem abscindit rationem quam recta ΘΧ.



Rectæ autem ductæ propiores puncto Ζ, majores abscindunt rationes quam quæ sunt remotiores ab eo.

Resolvimus ergo problema secundum omnes modos, atque compositionem illius ostendimus. Iisdem autem manentibus ducatur recta ΕΘ: & ratio data vel minor erit quam ratio ΕΘ ad ΘΜ, vel ei æqualis, vel denique major. Si autem fuerit ratio data minor ratione ΕΘ ad ΘΜ, componetur quidem problema juxta duos modos, nempe primum & secundum. Sed componi nequit modo tertio, quia ratio data non est major ratione ΕΘ ad ΘΜ. Si fuerit data ratio æqualis rationi ΕΘ ad ΘΜ, componetur quidem problema secundo modo. Non autem componi potest modo primo,

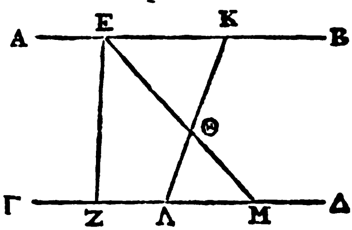


primo, quia ratio data non est minor ratione ΕΘ ad ΘΜ. Neque sane modo tertio, quia ratio data non est major ea. Si denique major fuerit ratione ΕΘ ad ΘΜ, patet problema solvi posse duobus modis, *secundo scil. ac tertio, non autem primo*, quia ratio data non est minor ea.

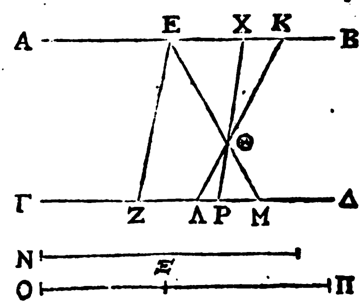
LOCUS SECUNDUS.

Esto jam punctum datum intra angulos ΒΕΖ, ΕΖΔ, ut est punctum Θ: rectæ autem ductæ per punctum Θ abscindant rectas punctis Ε, Ζ adjacentes, quæ sint inter se in ratione data. Hoc autem fiet secundum tres casus; aut enim eas abscindet à rectis ΕΒ, ΖΔ, aut à rectis ΕΑ, ΖΔ, vel denique à rectis ΕΒ, ΖΓ.

*Cas.*I. Agatur ideo recta, secundum casum primum, ut recta ΚΛ, abscindens à rectis ΕΒ, ΖΔ rationem ΕΚ ad ΖΛ rationi datæ æqualem; & connexa ΕΘ producatur in Μ: recta itaque ΕΜ positione datur. Sed recta ΓΔ positione data est: quare datur & punctum Μ, adeoque ratio ΕΘ ad ΘΜ data est. Est autem ΕΘ ad ΘΜ ut ΕΚ ad ΜΛ. Verum ratio ΕΚ ad ΛΖ datur, adeoque ex æquo ratio ΖΛ ad ΜΛ datur: & componendo ratio ΖΜ ad ΜΛ etiam datur. Recta autem ΖΜ magnitudine datur; quare recta ΜΛ tam magnitudine quam positione datur. Cumque punctum Μ datur, etiam punctum Λ datur: ac dato puncto Θ, recta quoque ΚΘΛ positione datur. Quoniam autem alterutra è rectis ΖΛ, ΛΜ potest esse major altera, rationes hoc in casu non habent limites.



Componetur autem problema hoc modo. Manente figura jam descripta, jungatur ΕΘ ac producatur in Μ. Sit ratio data ut Ν ad ΞΟ: fiatque Ν ad ΠΞ ut ΕΘ ad ΘΜ; & ut ΠΞ ad ΟΞ ita ΜΛ ad ΖΛ: & ducatur ΛΘ producaturque. Dico rectam

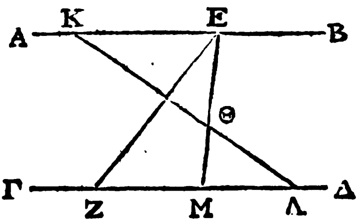


ΛΘΚ

ΛΘΚ problema ſolvere. Quoniam enim ΕΘ eſt ad ΘΜ, hoc eſt ΕΚ ad ΛΜ, ut Ν ad ΠΞ; & ΛΜ ad ΛΖ ut ΠΞ ad ΞΟ, per conſtructionem; erit ex æquo, ΕΚ ad ΛΖ ut Ν ad ΞΟ. Quare recta ΚΛ ſolvit problema. Aio inſuper eam ſolam hoc præſtare. Nam ſi fieri poteſt, ducatur alia ut recta ΧΘΡ. Quoniam autem recta ΕΚ major eſt recta ΕΧ, & recta ΖΛ minor quam ipſa ΡΖ, erit ratio ΕΚ ad ΖΛ major ratione ΕΧ ad ΡΖ: adeoque abſcindet recta ΛΚ rationem majorem quam recta ΧΡ.

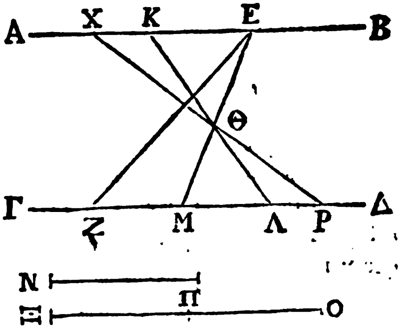
Unde & rectæ puncto Ζ propiores, abſcindent rationes majores quam quæ ab eodem puncto ſunt remotiores.

Caſ. II. Dein ducatur, modo ſecundo, recta ΚΛ auferens à rectis ΕΑ ΖΔ rationem ΕΚ ad ΖΛ æqualem rationi datæ: & jungatur recta ΕΘ, producaturque ad Μ: datur igitur poſitione recta ΕΜ. Sed poſitione data eſt recta ΓΔ, adeoque punctum Μ datum eſt: quare & ratio ΕΘ ad ΘΜ datur. Verum ut ΕΘ ad ΘΜ ita ΕΚ ad ΜΛ: atque etiam data eſt ratio ΕΚ ad ΖΛ: quare ratio ΖΛ ad ΜΛ datur; ac dividendo, ratio ΖΜ ad ΜΛ etiam datur. At ΖΜ magnitudine datâ, datur quoque recta ΜΛ magnitudine & poſitione: datoque puncto Μ, datur etiam punctum Λ: ac cum punctum Θ datur, recta quoque ΚΘΛ poſitione datur. Quoniam vero ΖΛ major eſt quam ΛΜ, erit ratio ΕΚ ad ΛΜ, hoc eſt ΕΘ ad ΘΜ, major ratione ΕΚ ad ΖΛ; quare ratio ad componendum propoſita minor eſſe debet ratione ΕΘ ad ΘΜ.



Componetur autem problema hoc modo. Manentibus deſcriptis, ſit ratio data æqualis rationi Ν ad ΞΟ, quæ ſit minor ratione ΕΘ ad ΘΜ: fiatque ut ΕΘ ad ΘΜ ita Ν ad ΠΟ, & ut ΞΟ ad ΠΟ ita ΖΛ ad ΜΛ: & connectatur ΛΘ producaturque. Dico rectam ΛΘΚ ſolvere problema. Quoniam enim ΕΘ eſt ad ΘΜ, hoc eſt ΕΚ ad ΜΛ, ut Ν ad ΠΟ; atque etiam ΜΛ ad ΛΖ ut ΠΟ ad ΞΟ; erit ex æquo ΕΚ ad ΛΖ ut Ν ad ΞΟ: quare recta ΚΛ ſolvit problema. Dico autem eam ſolam hoc præſtare. Nam ſi fieri poſſit, ducatur alia quævis ut recta ΧΡ. Quoniam igitur ΛΖ major eſt recta

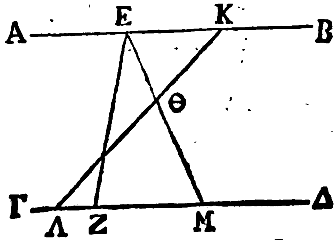
ΛΜ,



ΛM, erit ratio PΛ ad ΛZ minor ratione ejusdem ad rectam ΛM: atque componendo, ratio ZP ad ZΛ minor erit ratione PM ad MΛ. Verum PM est ad MΛ ut XE ad EK. Quare ratio ZP ad ZΛ minor est ratione XE ad EK: ac permutando, ratio ZP ad XE minor est ratione ZΛ ad EK. Sola igitur recta KΛ solvit problema.

Manifestum autem est rectas propiores puncto Z, rationes majores auferre quam rectæ ab illo remotiores.

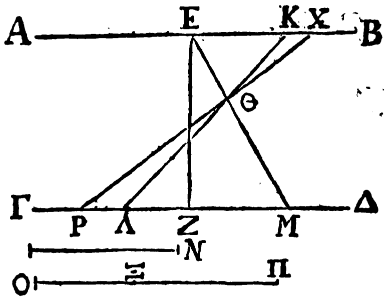
Cas. III. Jam ducta sit recta KΛ, modo tertio, auferens a rectis EB, ZΓ rationem EK ad ZΛ rationi datæ æqualem. Jungatur EΘ, producaturq; ad M *in recta* ΓΔ. Ac recta EM positione datur, adeoque punctum M datur: datisque punctis E, Θ, datur ratio ipsarum EΘ, ΘM. Verum EΘ est ad ΘM ut EK ad ΛM, adeoque ratio EK ad ΛM datur. Sed ratio EK ad ZΛ data est: quare ratio MΛ ad ΛZ datur; ac dividendo, data erit ratio MZ ad ΛZ. Cum autem recta MZ datur, data est etiam recta ZΛ magnitudine & positione: ac ob punctum Z datum habetur punctum Λ, adeoque recta KΘΛ positione datur. Quoniam vero recta ΛZ minor est recta ΛM, erit ratio EK ad ZΛ major ratione EK ad ΛM. Verum EK est ad ΛM ut EΘ ad ΘM; quare ratio EK ad ZΛ major est ratione EΘ ad ΘM. Sed ratio EK ad ZΛ rationi datæ æqualis est: oportet itaque rationem ad componendum datam majorem esse ratione EΘ ad ΘM.



Componetur autem problema hoc modo; Manente figura jam descripta, sit ratio data, nempe ratio N ad ΞO, major ratione EΘ ad ΘM: fiatque ut EΘ ad ΘM ita N ad ΠO; necnon ut ΠΞ ad ΞO, ita MZ ad ZΛ: & jungatur ΛΘ producaturque. Dico rectam ΛΘK solvere problema. Quoniam enim MZ est ad ZΛ ut ΠΞ ad ΞO, erit componendo

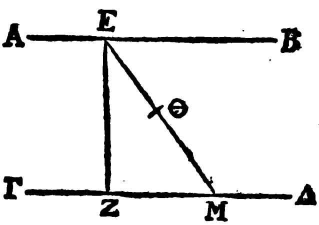
MΛ

MΛ ad ZΛ ut ΠO ad ΞO. Verum EΘ est ad ΘM, hoc est EK ad ΛM, ut N ad ΠO: Quare ex æquo EK erit ad ZΛ ut N ad ΞO. Recta itaque KΛ solvit Problema. Dico etiam eam solam hoc præstare. Nam si fieri potest, ducatur alia recta ut XP. Quoniam vero recta MΛ major est recta ZΛ, erit ratio PΛ ad ΛM minor ratione PΛ ad ΛZ; ac componendo ratio PM ad MΛ minor erit ratione PZ ad ZΛ. At ratio PM ad MΛ est ut XE ad EK; quare ratio XE ad EK minor est ratione PZ ad ZΛ; ac alternando ratio XE ad PZ minor erit ratione EK ad ZΛ. Sola itaque ΛK solvit problema.



Manifestum autem est rectas puncto Z propiores, majores rationes abscindere quam quæ ab eodem remotiores sunt.

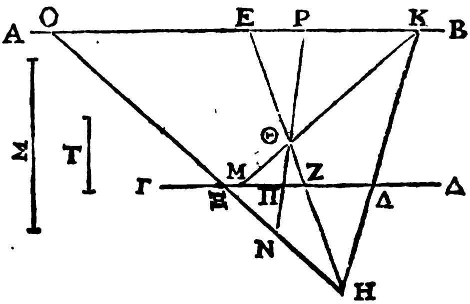
Invenimus adeo Resolutionem atque etiam Compositionem Problematis, secundum ejus tres Casus. Iisdem vero manentibus, si jungatur EΘ producaturque in M; erit quidem ratio data vel æqualis rationi EΘ ad ΘM, vel major illa, vel minor. Si vero ratio data æqualis fuerit rationi EΘ ad ΘM, propositio construetur secundum formam unicam eamque primam: non enim ad formam secundam, quia ratio data non est minor ratione EΘ ad ΘM; neque ad formam tertiam, quia ratio data non est major ratione EΘ ad ΘM. Dein si ratio data sit minor ratione EΘ ad ΘM, construetur problema duabus formis, nempe prima & secunda: non autem forma tertia, quia ratio non est major ratione EΘ ad ΘM. Si denique ratio data sit major ratione EΘ ad ΘM, problema construetur secundum duas formas, primam ac tertiam; non potest autem construi forma secunda, quia ratio data non est minor ratione EΘ ad ΘM.



SCHOLION.

Paulo generalius, ac sane non minus concinne, problemata hæc in rectis parallelis efficiuntur hunc in modum.

Sint duæ rectæ parallelæ A B, Γ Δ, *positione datæ; ac sumatur in* A B *punctum* E, *in* Γ Δ *punctum* Z: *sitque ratio ad construendum proposita sicut* Σ *ad* T. *Fiat* E K *æqualis ipsi* Σ, *ac* Z Λ, Z M, *ab utraque parte puncti* Z, *æquales termino alteri rationis* T. *Junge* K Λ, K M, *quæ occurrant rectæ datæ* E Z *productæ in datis punctis* H, Θ. *Dico rectas omnes per puncta illa* H, Θ *transeuntes, rectisque* A B, Γ Δ *occurrentes, auferre rationes æquales rationi* Σ *ad* T. *Etenim* E Θ *est ad* Θ Z *ut* E K *ad* Z M, *hoc est ut* Σ *ad* T; *ac* P E *est ad* Z Π *ut* E Θ *ad* Θ Z; *igitur* P E *est ad* Z Π *sicut* Σ *ad* T. *Similiter* H E *est ad* H Z *ut* E K *ad* Z Λ, *sive ut* Σ *ad* T. *Sed* O E *est ad* Z Ξ *sicut* H E *ad* H Z: *ergo* O E *est ad* Z Ξ *in ratione* Σ *ad* T. *Quocirca dato puncto quovis* N, *vel intra vel extra parallelas datas, rectæ duæ* H N, N Θ *productæ satisfacient problemati. Quod si altera è rectis* H N, N Θ *parallela fuerit ipsis* A B, Γ Δ, *adeoque iisdem non occurrens; altera tantum solutionem præstabit: hoc etenim in casu, ratio* N P *ad* N Π *eadem est cum ratione datâ* Σ *ad* T *sive* E H *ad* H Z. *Hinc etiam consequuntur omnia quæ de rationum limitibus demonstravit* Apollonius, *quem Constructionis hujus compendium latuisse vix credibile est; sed potius methodum hanc suam prætulisse arbitror, utpote sequentibus magis analogam. Patet quoque rectam* H E *harmonice dividi in punctis* Z, Θ; *quia* H E *est ad* Z H *ut* Θ E *ad* Z Θ.



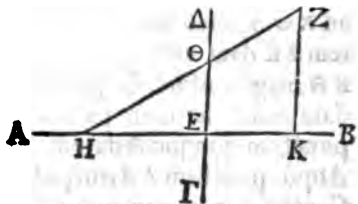
LOCUS TERTIUS.

Jam rectæ positione datæ A B, Γ Δ, secent se mutuo in puncto E; ac in utrâque sumatur commune punctum E.

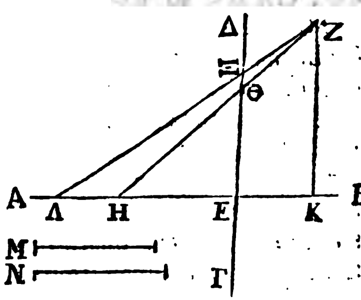
Punctum

Punctum autem datum cadet vel intra angulum Δ E B, vel intra angulum eidem deinceps. Efficitur autem in quovis angulo quod in angulo Δ E B effectum est. Detur itaque punctum Z intra angulum Δ E B; ac ducendæ sint rectæ per punctum Z, quæ auferant à rectis per punctum E, segmenta quæ sint inter se in ratione data. Hoc autem fiet juxta tres modos: vel enim abscissa erit ratio à rectis A E, E Δ, vel à rectis Γ E, E B, vel denique à B E, E Δ.

Cas. I. Ducatur autem primo recta Z H, juxta modum primùm, auferens à rectis A E, E Δ, rationem Θ E ad E H rationi datæ æqualem. Et per punctum Z agatur recta parallela rectæ E Δ usque ad K; erit ergo Z K positione data. Sed & recta A B positione datur, punctum itaque K datum est. Quoniam vero ratio E Θ ad E H datur, erit etiam ratio Z K ad K H data. Cumque Z K datur, etiam Z H data erit magnitudine & positione: ac ob datum punctum K, punctum H quoque datum erit. Punctum autem Z datur, quare recta H Z positione data est. Et manifestum est rationem datam minorem esse debere ratione Z K ad K E.



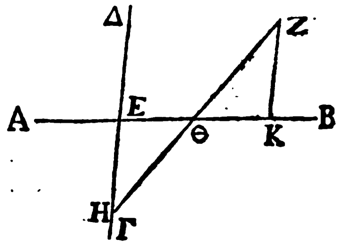
Componetur autem problema hoc modo. Manente figura jam descripta, ducatur recta K Z rectæ Δ E parallela; sitque ratio data minor ratione Z K ad K E, nempe ratio M ad N. Fiat ut M ad N ita Z K ad K H, ac connectatur recta H Z. Dico rectam H Z solvere problema. Quoniam enim Z K est ad K H ut Θ E ad E H, atque etiam ut M ad N; erit adeo Θ E ad E H ut M ad N. Recta itaque H Z solvet problema. Dico præterea eam solam hoc præstare. Nam si fieri potest, ducatur alia recta, ut Z Λ. Quoniam recta H K minor est recta K Λ, erit ratio Z K ad K H major ratione Z K ad K Λ. Verum Z K est ad K H ut Θ E ad E H; & Z K est ad K Λ ut Ξ E ad E Λ: quare ratio Θ E ad E H major est ra-



tione ΖΕ ad ΕΛ. Quapropter recta ΖΛ non abscindit rationem rationi datæ æqualem. Consimili argumento liquet nullam aliam rectam præter solam ΖΗ solvere problema.

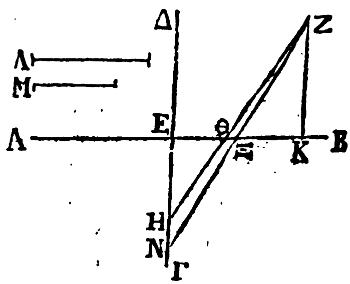
Manifestum autem est rectas puncto Ε propiores, majores semper rationes abscindere, quam rectæ remotiores ab illo.

Cas. II. Dein ducta sit recta modo secundo, ut ΖΗ, auferens à rectis ΓΕ, ΕΒ, rationem rationi datæ æqualem. Per punctum Ζ acta sit recta ΖΚ rectæ ΓΔ parallela: eritque ΖΚ positione data; ac ob rectam ΑΒ positione datam, punctum Κ datum erit. At ratio ΗΕ ad ΕΘ data est, adeoque ratio ΖΚ ad ΚΘ etiam datur. Recta autem ΖΚ data est; quare etiam ΚΘ magnitudine & positione data erit: ac dato puncto Κ, punctum quoque Θ datum est.



Atqui punctum Ζ datur, adeoque recta ΖΘΗ datur positione. Constat autem oportere rationem datam majorem esse ratione ΖΚ ad ΚΕ.

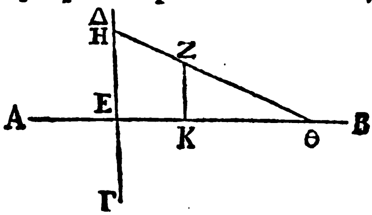
Componetur autem Problema hoc modo. Manente figura jam descripta; sit ratio data major ratione ΖΚ ad ΚΕ, nempe ratio Λ ad Μ. Fiat ut Λ ad Μ ita ΖΚ ad ΚΘ, ac juncta ΖΘ producatur ad Η. Dico rectam ΖΗ solvere Problema, eamque solam. Quoniam enim ΖΚ est ad ΚΘ ut ΗΕ ad ΕΘ, erit ΗΕ ad ΕΘ sicut Λ ad Μ. Recta itaque ΖΗ solvit Problema. Dico & hanc solam id præstare. Nam si fieri potest, ducatur alia ut recta ΖΝ. Quoniam autem recta ΚΞ minor est quam ΚΘ, erit ratio ΖΚ ad ΚΞ major ratione ΖΚ ad ΚΘ. Est autem ΖΚ ad ΚΞ ut ΝΕ ad ΕΞ, & ΖΚ ad ΚΘ ut ΕΗ ad ΕΘ: quare ratio ΝΕ ad ΕΞ major est ratione ΗΕ ad ΕΘ, adeoque rationi datæ æqualis non est. Recta igitur ΖΝ non solvit problema. Pari argumento liquet nullam aliam rectam præter ΖΗ solvere problema.



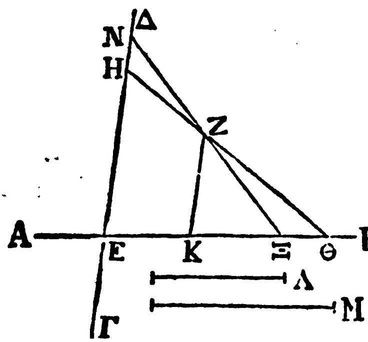
Manifestum autem est rectas puncto Ε propiores, semper

per rationes minores abscindere quam remotiores ab illo.

Cas. III. Jam ducta sit recta, ut HΘ, juxta modum tertium, auferens à rectis BE, EΔ, rationem rationi datæ æqualem. Age rectam ZK rectæ ΓΔ parallelam; erit igitur recta ZK positione data. Sed recta quoque EB positione data est; adeoque punctum K datur. Ratio autem HE ad EΘ data est; quare ratio ZK ad KΘ datur: ac ob rectam ZK magnitudine datam, recta etiam KΘ datur magnitudine & positione. Dato autem puncto K, punctum quoque Θ datum erit: ac puncto Z dato, recta ΘZH positione datur. Ratio autem non est determinata, quia KE potest esse vel æqualis ipsi KΘ, vel illa major vel minor.



Componetur autem problema hoc modo. Manente figura jam descripta, rationi datæ æqualis sit ratio Λ ad M: fiatque ut Λ ad M ita ZK ad KΘ; & jungatur ΘZ producaturque in H. Dico rectam ΘH solam solvere problema. Quoniam enim ZK est ad KΘ* ut Λ ad M, erit etiam HE ad EΘ ut Λ ad M; adeoque recta HΘ solvit problema. Dico & hanc solam id præstare. Etenim si fieri potest, ducatur altera ut NΞ. Quoniam autem recta NE major est recta HE, recta vero EΞ minor est ipsa EΘ; ratio NE ad EΞ major erit ratione HE ad EΘ, adeoque illi æqualis non est. Unde manifestum est nullam aliam rectam problema solvere præter ipsam HΘ. Patet etiam rectas propiores puncto E, secundum rectam ΓΔ, auferre rationes minores quam quæ secantur à remotioribus ab eo.

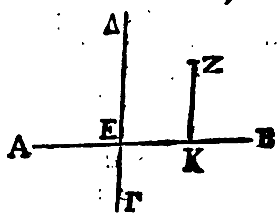


Invenimus itaque resolutionem problematis juxta omnes modos; ejusdemque compositionem ostendimus per omnes casus ejus. Manentibus autem descriptis, ac ducta recta pa-

* *Hactenus pertigit Traductio D. Bernardi.*

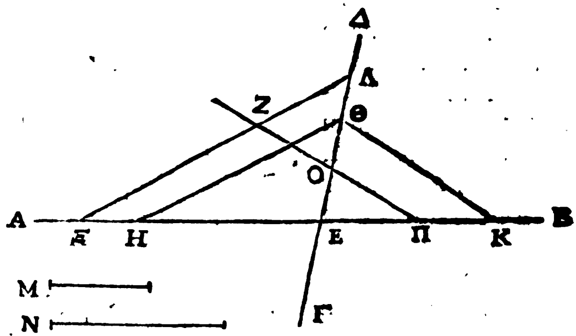
rallela

rallela Z K; Ratio data vel minor erit ratione Z K ad K E, vel major illa, vel æqualis illi. Quod si fuerit minor ratione Z K ad K E, componetur problema duobus modis, nempe primo ac tertio; non autem modo secundo, quia ratio data non est major quam ratio Z K ad K E. Si fuerit major quam ratio Z K ad K E, componetur problema duobus modis, nempe secundo & tertio: non autem juxta modum primum, quia ratio non est minor quam ratio Z K ad K E. At si ratio data æqualis fuerit rationi Z K ad K E, componetur unico tantum modo, eoque tertio: non enim fieri potest secundum modum primum, quia ratio non est minor ratione Z K ad K E; neque modo secundo, quia non est major ea.



SCHOLION.

Generaliter autem construuntur problemata hujus Loci hunc in modum. Sint rectæ datæ A B, Γ Δ *sese intersecantes in puncto* E: *Ratio autem proposita sit ratio* M *ad* N. *Fiat* E Θ *æqualis termino rationis* M, *ac* E H, E K, *ab utraque parte puncti* E, *æquales ipsi* N *termino alteri rationis: ac ducantur*



rectæ Θ H, Θ K. *Dico rectas omnes ipsis* Θ H, Θ K *parallelas auferre rationes rationi datæ* M *ad* N *æquales. Quapropter dato quovis puncto* Z, *ipsi* Θ H *parallela ducatur* Λ Z Ξ; *atque ipsi* Θ K *parallela* Z O Π. *Dico* E Λ *esse ad* E Ξ *ut* E Θ *ad* E H (*ob parallelas*) *hoc est ut* M *ad* N (*per constructionem.*) *Pariter* E O *est ad* E Π *ut* E Θ *ad* E K, *sive ut* M *ad* N. *Rectæ*

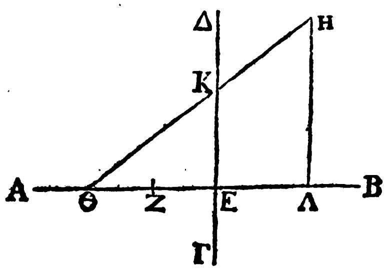
igitur

igitur ΛΞ, ΖΠ *satisfaciunt problemati, eæque solæ. Quod si altera è parallelis transeat per punctum* Ε; *altera tantum unico modo rem præstat.*

LOCUS QUARTUS.

Intersecent jam se mutuo rectæ ΑΒ, ΓΔ, in puncto Ε: ac sumatur in recta ΑΒ punctum Ζ; in recta vero ΓΔ, punctum Ε. Eritque punctum datum vel intra angulum ΔΕΒ, vel intra angulum ΑΕΔ, vel intra angulos iisdem deinceps. Cadat autem imprimis intra angulum ΔΕΒ, ut est punctum Η; ac educendæ sint rectæ è puncto Η, quæ auferant à rectis, quæ punctis Ε, Ζ adjacent, segmenta in ratione data. Hoc autem fieri potest secundum quatuor diversos casus: aut enim erunt segmenta è rectis ΕΔ, ΖΑ; vel ex ΕΔ, ΖΕ; vel ex ΕΓ, ΖΒ; vel denique ex ΕΔ, ΖΒ.

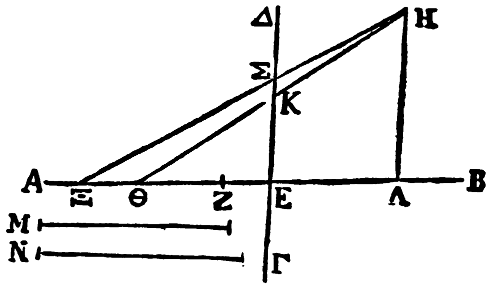
Cas. I. Ducatur jam secundum casum primum, recta ΗΘ auferens à rectis ΕΔ, ΖΑ, rationem ΕΚ ad ΖΘ, æqualem rationi datæ. Agatur recta ΗΛ ipsi ΔΕ parallela, adeoque punctum Λ datur: ac fiat ut ΕΚ ad ΖΘ ita ΛΗ ad ΖΑ. Dato autem puncto Ζ, punctum quoque Α datur: ac ob datum punctum Λ, etiam recta ΑΛ datur. Jam ΛΗ est ad ΖΑ sicut ΕΚ ad ΖΘ; adeoque permutando ΛΗ erit ad ΕΚ ut ΑΖ ad ΖΘ. Sed ΛΗ est ad ΕΚ ut ΛΘ ad ΘΕ; quapropter ΛΘ est ad ΘΕ ut ΑΖ ad ΖΘ, ac per conversionem rationis, erit ΘΛ ad ΛΕ ut ΖΑ ad ΑΘ; adeoque id quod fit sub ΛΕ in ΖΑ æquale erit contento sub ΛΘ in ΘΑ; quare rectangulum ΘΛ in ΘΑ datur. Applicandum est itaque ad rectam datam, nempe ad ipsam ΑΛ, rectangulum æquale rectangulo dato deficiens quadrato, ac habebitur utraque ΑΘ, ΘΛ data: adeoque punctum Θ datur. Dato autem puncto Η, ipsa ΗΘ datur positione.



Manifestum autem est quod applicatio hæc semper fieri potest; quia in compositione applicandum est ad rectam ΑΛ rectangulum æquale rectangulo ΛΕ in ΖΑ deficiens quadrato.

drato. Rectangulum enim Λ Z in Z Λ majus eſt rectangulo Λ E in Z Λ.

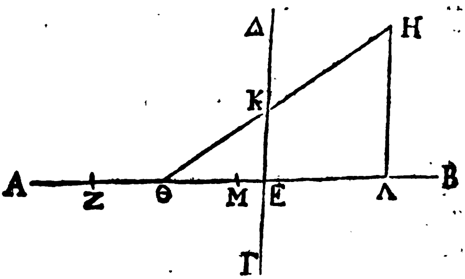
Componetur autem Problema hunc in modum. Manentibus jam deſcriptis, rectâque parallelâ H Λ; ſit ratio data ſicut M ad N; ac fiat Λ H ad Z Λ ſicut M ad N: & applicetur rectæ A Λ, rectangulum æquale rectangulo A Z in E Λ deficiens quadrato. Sit rectangulum illud A Θ in Θ Λ; ac jungatur Θ H. Dico quod recta Θ H, eaque ſola, ſolvit problema; ſive quod K E eſt ad Z Θ ſicut M ad N. Rectangulum enim A Θ in Θ Λ æquale eſt rectangulo A Z in E Λ; erit itaque Θ Λ ad Λ E ut A Z ad Θ A; ac per converſionem rationis erit Θ Λ ad Θ E ut A Z ad Z Θ. Sed Λ Θ eſt ad Θ E ut Λ H eſt ad E K; quare Λ H eſt ad E K ſicut A Z ad Z Θ; ac permutando Λ H erit ad Z Λ ut E K ad Z Θ. At Λ H eſt ad Z Λ ſicut M ad N; quare E K eſt ad Z Θ ſicut M ad N; quapropter recta Θ H ſolvit problema. Dico etiam & hanc ſolam hoc præſtare. Nam ſi fieri poteſt, ducatur alia, ut recta H Ξ. Quoniam autem rectangulum A Z in Z Λ majus eſt rectangulo A Θ in Θ Λ, erit rectangulum A Θ in Θ Λ majus rectangulo A Ξ in Ξ Λ; rectangulum vero A Θ in Θ Λ æquale eſt rectangulo A E *in* Z Λ; *igitur rectangulum* A E *in* Z Λ *majus eſt rectangulo* A Ξ in Ξ Λ: quare ratio Ξ Λ ad Λ E minor erit ratione Z A ad A Ξ; adeoque per converſionem rationis ratio Λ Ξ ad E Ξ major eſt ratione A Z ad Z Ξ. Sed ratio Λ Ξ ad Ξ E eſt ut Λ H ad E Σ; quare ratio Λ H ad E Σ major eſt ratione A Z ad Z Ξ; ac permutando ratio Λ H ad Z Λ major erit ratione E Σ ad Z Ξ. Atqui ratio Λ H ad Z Λ eſt ut M ad N; adeoque ratio M ad N major eſt ratione E Σ ad Z Ξ, quapropter recta H Ξ non ſolvit problema.



Manifeſtum autem eſt rectas puncto E propiores, auferre rationes majores quam quæ ſecantur à rectis remotioribus ab eodem.

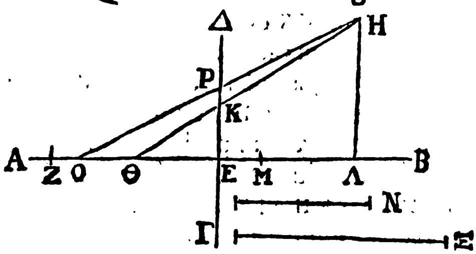
Caſ. II. Ducatur jam recta juxta caſum ſecundum, ut Θ H, auferens

auferens à rectis ΕΔ, ΖΒ segmenta ΖΘ, ΕΚ in ratione rationi datæ æquali. Ipsi ΔΕ parallela ducatur recta ΗΛ per punctum datum Η; & fiat ut ΕΚ ad ΖΘ, ita ΗΛ ad ΖΜ. Datur autem recta ΗΛ, adeoque recta ΖΜ datur & magnitudine & positione: ac ob datum punctum Ζ, etiam punctum Μ datur. Quoniam vero ΛΗ est ad ΖΜ ut ΕΚ ad ΖΘ; erit permutando ΛΗ ad ΕΚ sicut ΖΜ ad ΖΘ. Sed ΛΗ est ad ΕΚ sicut ΛΘ



ad ΘΕ; adeoque ΖΜ ad ΖΘ est ut ΛΘ ad ΘΕ: ac per conversionem rationis erit ΜΖ ad ΘΜ ut ΘΛ ad ΛΕ: quare rectangulum ΖΜ in ΕΛ æquale est rectangulo ΛΘ in ΘΜ. Sed rectangulum ΖΜ in ΕΛ datur, adeoque rectangulum ΛΘ in ΘΜ datum est, ad rectam datam, nempe ΜΛ, applicandum excedens quadrato. Punctum igitur Θ datur; ac dato puncto Η, recta ΗΘ positione datur.

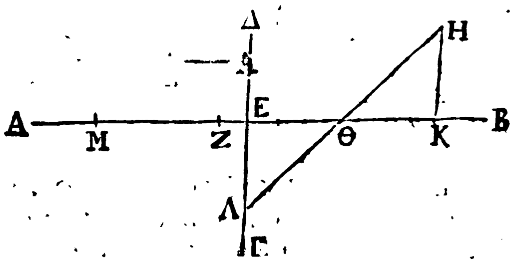
Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, sit ratio data ut Ν ad Ξ; ac fiat ΗΛ ad ΖΜ ut Ν ad Ξ: dein applicetur ad rectam ΜΛ rectangulum æquale rectangulo ΖΜ in ΕΛ excedens quadrato, nempe rectangulum ΛΘ in ΘΜ. Quoniam autem rectangulum ΛΕ in ΖΜ excedens quadrato applicandum est ad rectam ΜΛ; ac rectangulum ΛΖ in ΖΜ majus est rectangulo ΛΕ in ΖΜ, cui æquale est rectangulum ΛΘ in ΘΜ;



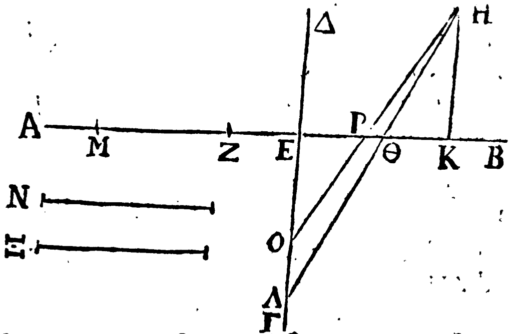
facta applicatione punctum Θ cadet inter puncta Ε, Ζ. Actâque rectâ ΘΗ, dico quod ipsa ΘΗ solvit problema, eaque sola. Nam si fieri potest ducatur alia, puta ΗΡΟ. Cum autem recta ΡΕ major est quam ΚΕ, ac recta ΖΟ minor est quam ΖΘ; ratio ipsius ΡΕ ad ΖΟ major erit ratione ΕΚ ad ΖΘ: adeoque sola recta ΗΘ solvit problema.

Manifestum autem est rectas propiores puncto E abscindere rationes minores, quam quæ secantur à remotioribus ab eo.

Cas. III. Ducatur jam recta secundum casum tertium, ut ΛH auferens à rectis EΓ, ZB rationem ΛE ad ΘZ æqualem rationi datæ. Agatur per punctum H recta HK ipsi ΓΔ parallela; ac patet quod recta HK datur magnitudine, quodque punctum K datur. Fiat jam KH ad ZM ut ΛE ad ΘZ. Data autem est ratio ΛE ad ΘZ; quare & ratio KH ad ZM datur, ac recta ZM datur magnitudine & positione: ac ob datum punctum Z punctum M datur; cumque punctum K datur, datur etiam recta KM. Quoniam autem KH est ad ZM ut ΛE ad ZΘ, permutando erit KH ad ΛE sicut ZM ad ZΘ. Sed KH est ad ΛE ut KΘ ad ΘE; quare KΘ est ad ΘE ut MZ ad ZΘ: adeoque componendo erit KE ad EΘ ut MΘ ad ΘZ. Per conversionem autem rationis erit EK ad KΘ ut ΘM ad MZ. Rectangulum itaque EK in MZ æquale est rectangulo MΘ in ΘK. Datur autem rectangulum KE in MZ, ob data latera ejus; quare datum est etiam rectangulum MΘ in ΘK, applicandum ad rectam datam MK deficiens quadrato: ac habebitur punctum Θ, quod quidem cadet inter puncta E & K; quia rectangulum ME in EK majus est rectangulo MZ in EK, sive MΘ in ΘK. Dato autem puncto H, etiam recta HΘΛ datur positione.



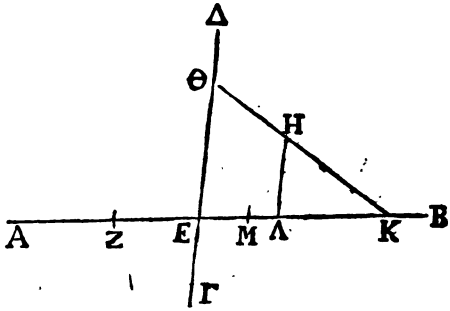
Construetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, ductâque rectâ parallelâ; sit ratio proposita sicut N ad Ξ. Fiat KH ad ZM sicut N ad Ξ & applicetur ad rectam KM rectangulum æquale rectangulo EK in ZM deficiens quadrato. Sit rectangulum illud MΘ in ΘK; ac jungatur recta HΘ, quæ producatur ad Λ. Dico quod recta HΛ solvit problema, auferens rationem ΛE ad ZΘ sicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum KE in ZM æquale est rectangulo MΘ in ΘK, erit EK ad KΘ sicut ΘM ad MZ; ac per conversionem rationis erit KE ad EΘ ut MΘ ad ΘZ: quare dividendo erit KΘ ad EΘ, five KH ad ΛE, ficut MZ ad ZΘ: ac permutando KH ad MZ erit ut ΛE ad ZΘ. Sed KH eſt ad MZ ficut N ad Ξ (per conſtructionem) quare ΛE erit ad ZΘ ficut N ad Ξ; adeoque recta HΛ ſatisfacit problemati. Dico etiam quod ea ſola hoc præſtat. Nam ſi fieri poteſt, ducatur alia ut OH; ac ſi ſecet recta HO rationem propoſitam, five æqualem rationi N à Ξ, erit ΛE ad ZΘ ficut OE ad ZP. At ΛE eſt ad ZΘ ficut KH ad ZM, adeoque KH erit ad ZM ut OE ad ZP: ac permutando erit KH ad OE ut ZM ad PZ. Eſt autem KH ad OE ficut KP ad PE; quare KP erit ad PE ut MZ ad ZP. Componendo itaque ac convertendo rationem, EK erit ad KP ficut MP ad MZ: unde rectangulum EK in MZ æquale erit rectangulo KP in MP. Sed rectangulum MΘ in ΘK æquale eſt rectangulo EK in MZ, adeoque rectangulum MΘ in ΘK æquale erit rectangulo MP in PK; quod fieri nequit: adeoque ſola recta HΛ ſolvit problema.



Poſito *autem quod rectangulum* MΘ *in* ΘK *five rectangulum* EK *in* MZ minus fuerit rectangulo MP, in PK; patet quod ratio EK ad PK minor erit ratione MP ad MZ: ac per converſionem rationis erit ratio KE ad EP major ratione MP ad PZ; dividendo autem erit ratio KP ad PE major ratione MZ ad ZP. Sed KP eſt ad PE ficut KH ad OE; quare ratio KH ad OE major eſt ratione MZ ad ZP: & permutando ratio KH ad MZ major erit ratione OE ad ZP. Quoniam autem HK eſt ad MZ ut ΛE ad ZΘ, igitur ratio ΛE ad ZΘ major erit ratione OE ad ZP; adeoque recta ΛH majorem aufert rationem quam quæ abſcinditur à recta OH; unde manifeſtum eſt rectas propiores puncto E auferre rationes minores quam quæ ſecantur à remotioribus ab eo.

Caſ. IV. Ducatur jam recta ſecundum modum quartum, ut KΘ, auferens à rectis EΔ, ZB, rationem æqualem rationi datæ, nempe rationem EΘ ad KZ. Ducatur recta ΓΔ parallela,

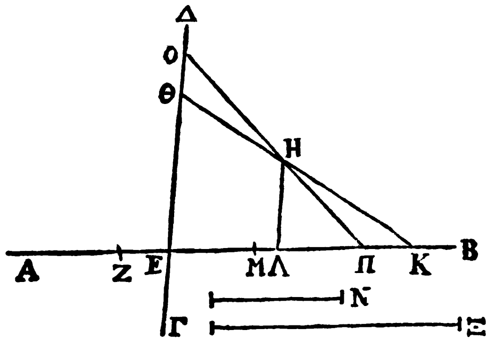
lela, ut HΛ; ac recta HΛ tam magnitudine quam positione data est; adeoque punctum Λ datur. Cum autem ratio EΘ ad KZ datur, ei fiat ratio HΛ ad ZM æqualis: ratione itaque ΛH ad ZM data, atque ipsa ΛH data, recta MZ etiam data est magnitudine & positione, ac ob cognitum punctum Z, punctum M etiam datur: dato autem puncto Λ, recta MΛ habetur. Verum cum EΘ est ad KZ ut ΛH ad ZM; permutando erit EΘ ad ΛH, sive EK ad KΛ, ut KZ ad ZM: ac dividendo erit EΛ ad ΛK sicut KM ad ZM. Rectangulum itaque EΛ in ZM æquale erit rectangulo MK in KΛ. Sed rectangulum EΛ in MZ datum est, adeoque & rectangulum MK in KΛ datur, applicandum ad rectam datam MΛ excedens quadrato, ut habeatur punctum K. Datis autem punctis K & H, recta etiam KHΘ positione datur.



Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, ductaque recta parallela, sit ratio data sicut N ad Ξ. Fiat HΛ ad ZM sicut N ad Ξ, & applicetur ad rectam MΛ rectangulum æquale rectangulo ΛE in MZ excedens quadrato, nempe rectangulum MK in KΛ. Jungatur KH ac producatur ad Θ. Dico quod recta ΘK solvit problema, sive quod aufert rationem EΘ ad ZK æqualem rationi N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum ΛE in ZM æquale est rectangulo MK in KΛ, erit EΛ ad ΛK sicut KM ad MZ; & componendo erit EK ad KΛ ut KZ ad MZ. Sed EK est ad KΛ ut EΘ ad ΛH; adeoque EΘ est ad ΛH sicut KZ ad MZ: ac permutando erit EΘ ad KZ sicut ΛH ad MZ. Atqui ΛH est ad MZ sicut N ad Ξ, adeoque EΘ est ad KZ ut N ad Ξ; quare recta KΘ solvit problema. Dico etiam quod & sola hoc præstat. Nam si fieri potest, ducatur alia, ut recta OΠ; ac si secet ipsa OΠ rationem æqualem rationi N ad Ξ, erit EO ad ZΠ sicut EΘ ad ZK. Est autem EΘ ad ZK ut ΛH ad ZM, adeoque erit EO ad ZΠ sicut ΛH ad

ZM;

ZM; & permutando erit EO ad ΛH ut ZΠ ad ZM. Sed EO est ad ΛH ut EΠ ad ΠΛ, adeoque EΠ est ad ΠΛ sicut ΠZ ad ZM: quare dividendo erit EΛ ad ΠΛ ut ΠM ad ZM, ac rectangulum EΛ in ZM æquale erit rectangulo ΠΛ in ΠM. Cum autem rectangulum EΛ



in ZM æquale est rectangulo MK in KΛ, rectangulum MK in KΛ æquale erit rectangulo MΠ in ΠΛ; quod fieri nequit: adeoque sola recta KΘ solvit problema.

Quænam autem ex illis auferat rationem majorem hunc ad modum cognoscitur. Quoniam rectangulum MK in KΛ, sive ΛE in MZ, majus est rectangulo MΠ in ΠΛ; erit ratio EΛ ad ΛΠ major ratione ΠM ad MZ; ac componendo ratio EΠ ad ΠΛ major quam ratio ΠZ ad ZM. Sed ratio EΠ ad ΠΛ est ut EO ad ΛH; quare ratio EO ad ΛH major erit ratione ΠZ ad ZM: ac permutando erit ratio EO ad ΠZ major quam ΛH ad ZM. Ratio autem ΛH ad ZM est ut EΘ ad KZ, adeoque ratio EO ad ΠZ major erit ratione EΘ ad KZ: quare recta KΘ aufert rationem minorem quam quæ secatur à recta OΠ.

Hinc manifestum est rectas puncto B propiores abscindere rationes minores, quam quæ secantur à rectis remotioribus ab eo.

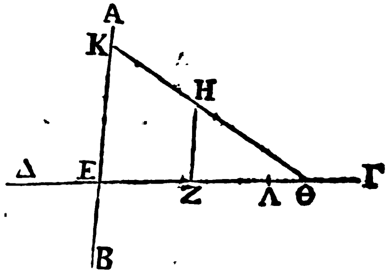
Possibile autem est problema hoc quomodocunque propositum, & componi potest juxta omnes casus prædictos, sed uno tantum modo: nam in omnibus non habentur limites.

LOCUS QUINTUS.

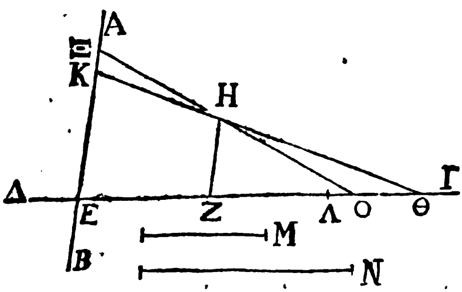
Sit punctum datum H intra angulum ΓEA; ac ductâ per punctum H rectâ ipsi AB parallelâ, sumi potest punctum Z *in recta* ΓE, vel ultra, vel citra, vel super ipsam rectam parallelam. Cadat autem imprimis super ipsam parallelam; ac duci

duci possunt rectæ è puncto H tribus modis diversis: vel enim ducta auferet rationem à rectis ΓZ, EA; vel à rectis EZ, EB; vel denique à rectis EΛ, ZΔ.

Cas. I. Primo autem ducatur, juxta modum primum, secans à rectis ΓZ, EA rationem EK ad ZΘ æqualem rationi datæ. Fiat ZH ad ZΛ sicut EK ad ZΘ. Cumque ratio HZ ad ZΛ datur, atque ipsa ZH datur, etiam recta ZΛ datur: ac dato puncto Z punctum Λ datur; adeoque recta ZΛ datur magnitudine & positione. Quoniam vero EK est ad ZΘ sicut HZ ad ZΛ, erit permutando EK ad ZH ut ZΘ ad ZΛ. Sed EK est ad ZH ut EΘ ad ΘZ, adeoque EΘ est ad ΘZ ut ΘZ ad ZΛ; quare dividendo erit EZ ad ΘZ sicut ΘΛ ad ZΛ: rectangulum itaque EZ in ZΛ æquale est rectangulo ΘZ in ΘΛ. At rectangulum EZ in ZΛ datur; ergo rectangulum ZΘ in ΘΛ etiam datur, applicandum ad rectam datam ΛZ excedens quadrato: unde punctum Θ innotescet. Dato autem puncto H, recta quoque ΘK datur positione.



Componetur autem hoc problema. Manentibus prius descriptis, ductaque recta parallela; sit ratio data sicut M ad N. Fiat HZ ad ZΛ sicut M ad N; & applicetur ad rectam ZΛ rectangulum æquale rectangulo EZ in ZΛ excedens quadrato, ut rectangulum ZΘ in ΘΛ. Jungatur HΘ ac producatur ad K. Dico rectam ΘK solvere problema, sive quod EK est ad ZΘ in ratione M ad N. Quoniam enim rectangulum EZ in ZΛ æquale est rectangulo ZΘ in ΘΛ, erit EZ ad ZΘ sicut ΘΛ ad ΛZ; & componendo erit EΘ ad ΘZ *sicut* ΘZ *ad* ΛZ. *Sed* EΘ *est ad* ΘZ ut EK ad ZH, adeoque EK est ad ZH sicut

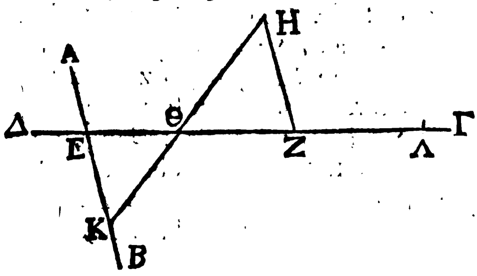


ΘZ

ΘZ ad ZΛ: quare permutando erit EK ad ΘZ sicut ZH ad ZΛ. Est autem HZ ad ZΛ (per constructionem) sicut M ad N; quare EK est ad ZΘ ut M ad N, ac recta ΘK solvit problema. Dico & hanc solam id præstare. Nam si possibile sit, ducatur alia ut ΞO: quæ si auferat rationem æqualem rationi M ad N, erit EK ad ZΘ sicut EΞ ad ZO. Cumque EK est ad ZΘ ut HZ ad ZΛ, erit ZH ad ZΛ ut EΞ ad ZO: ac permutando erit EΞ ad ZH ut ZO ad ZΛ. At EΞ est ad ZH sicut EO ad ZO, adeoque EO est ad ZO ut OZ ad ZΛ: unde dividendo erit EZ *ad* ZO *sicut* OΛ *ad* ZΛ; *adeoque rectangulum* EZ in ZΛ æquale erit rectangulo ZO in OΛ. Sed rectangulum EZ in ZΛ æquale est rectangulo ZΘ in ΘΛ; quare rectangulum ZΘ in ΘΛ æquale erit rectangulo ZO in OΛ, quod fieri non potest: adeoque sola recta ΘK solvit problema. Quoniam autem recta EΞ major est, quam recta EK, ΘZ vero major est quam recta ZO; erit ratio EΞ ad ZO major ratione EK ad ZΘ; adeoque recta ΘK aufert rationem minorem, quam quæ abscinditur ab ipsa OΞ.

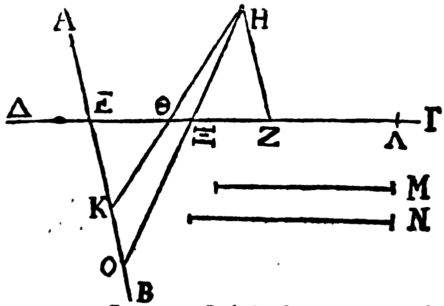
Manifestum itaque est rectas propiores puncto E auferre rationes minores, quam quæ secantur à remotioribus ab eo.

Cas. II. Ducatur jam, juxta modum secundum, recta HK, auferens à rectis EZ, EB rationem KE ad ΘZ, æqualem rationi datæ. Rationi datæ KE ad ZΘ æqualis sit ratio HZ ad ZΛ; data autem ratione HZ ad ZΛ, atque ipsâ HZ, data est etiam recta ZΛ; cumque punctum Z datur, punctum Λ quoque datum est, ac recta ZΛ datur magnitudine & positione. Quoniam autem KE est ad ZΘ ut HZ ad ZΛ, erit permutando KE ad ZH, sive EΘ ad ΘZ, ut ZΘ ad ZΛ; ac componendo erit EZ ad ΘZ, ut ΘΛ ad ΛZ: adeoque rectangulum EZ in ΛZ æquale rectangulo ΛΘ in ΘZ. Applicando igitur hoc ad rectam datam ZΛ excedens quadrato, habebitur punctum Θ, quod semper cadet inter puncta E, Z; dato autem puncto H, etiam recta HΘK positione datur.



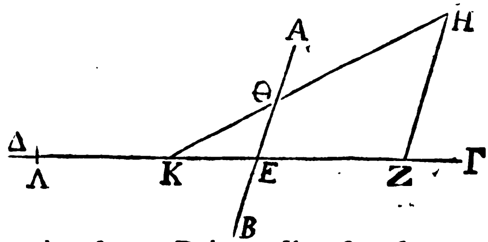
Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus descriptis,

descriptis, rectaque parallela; sit ratio data sicut M ad N, cui æqualis sit ratio HZ ad ZΛ; & applicetur ad ΛZ rectangulum æquale rectangulo EZ in ΛZ excedens quadrato. Sitque rectangulum illud ΛΘ in ΘZ; ac jungatur recta ΘH, quæ producatur ad K. Dico rectam HK solvere problema, sive quod KE est ad ZΘ sicut M ad N. Quoniam enim rectangulum EZ in ZΛ æquale est rectangulo ΛΘ in ΘZ, erit resolvendo in proportionem, EZ ad ZΘ ut ΘΛ ad ΛZ; ac dividendo erit EΘ ad ΘZ ut ΘZ ad ZΛ. Sed KE est ad ZH ut EΘ ad ΘZ, adeoque KE est ad ZH ut ΘZ ad ZΛ, ac permutando KE ad ΘZ ut ZH ad ZΛ. Est autem ZH ad ZΛ sicut M ad N, quare KE est ad ZΘ sicut M ad N: quapropter recta HK satisfacit problemati. Dico etiam quod ea sola hoc præstat: nam si aliter possibile sit, ducatur alia recta ut HO; ac si secet recta HO rationem æqualem rationi M ad N, erit KE ad ZΘ sicut EO ad ZΞ. Cumque EK est ad ZΘ, sicut HZ ad ZΛ, etiam erit OE ad ZΞ sicut HZ ad ZΛ; ac permutando erit OE ad ZH ut ZΞ ad ZΛ. Sed OE est ad ZH ut EΞ ad ZΞ, adeoque EΞ erit ad ΞZ ut ΞZ ad ZΛ; ac componendo EZ erit ad ΞZ ut ΞΛ ad ZΛ: quare rectangulum EZ in ZΛ æquale erit rectangulo ΞZ in ΞΛ. Hoc autem fieri nequit, quia fecimus rectangulum ΛΘ in ΘZ æquale rectangulo EZ in ZΛ; quapropter sola recta HK solvit problema. Quoniam autem EO major est quam EK, recta vero ZΞ minor quam ZΘ; manifestum est rectam HK abscindere rationem minorem quam recta OH.



Cas. III. Ducatur jam secundum modum tertium recta KH, auferens à rectis EA, ZΔ rationem EΘ ad ZK æqualem rationi datæ. Quoniam ratio EΘ ad ZK data est, eidem æqualis sit ratio HZ ad ZΛ: datâ autem rectâ ZH etiam recta ZΛ datur: cumque punctum Z datur, punctum quoque Λ datum erit, ac recta ZΛ datur tam magnitudine quam positione. Jam vero EΘ est ad ZK sicut HZ ad ZΛ, ac permutando EΘ erit

erit ad HZ sicut KZ ad ZΛ. Sed EΘ est ad ZH ut EK ad KZ, adeoque EK est ad KZ ut KZ ad ZΛ; quare invertendo ac convertendo rationem, erit KZ ad ZE sicut ZΛ ad ΛK: quocirca rectangulum ΛZ in ZE æquale est rectangulo KZ in ΛK. At vero rectangulum ΛZ in ZE datur, ob data ejusdem latera; adeoque rectangulum ZK in ΛK etiam datur. Dein applicando ad rectam datam ZΛ rectangulum prædictum deficiens quadrato, habebitur punctum K: dato autem puncto H, recta HK etiam positione datur.

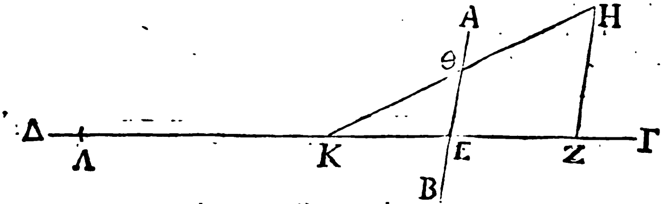


Quoniam autem requiritur ad compositionem, ut fiat ratio HZ ad ZΛ æqualis rationi datæ, atque ut applicetur ad rectam ZΛ rectangulum æquale rectangulo ΛZ in ZE deficiens quadrato, nempe rectangulum ZK in KΛ; *cadet punctum* K *in recta* EΛ, eritq; recta quæsita HK, quæ ducta solvet problema. At non semper possibile est talem rectam ducere, quoties scilicet rectangulum ΛZ in ZE majus fuerit quadrato ex dimidio ipsius ΛZ: quapropter applicatio fieri nequit: adeoque constructio problematis non semper possibilis est, neque in omni casu. Fit autem modo singulari, si recta quæsita occurrat rectæ ZΛ in ipsius medio ad punctum K, ac sit rectangulum ΛZ in ZE æquale rectangulo ZK in KΛ, ut sic satisfaciat problemati.

Determinatur autem ratio hæc, capiendo rationem datæ HZ ad quæsitam ZΛ talem, ut si dividatur recta ZΛ bifariam in K, rectangulum ΛZ in ZE æquale sit rectangulo ZK in KΛ. Hoc autem efficitur, si inveniatur in recta EZ punctum quoddam ut Λ, ita ut divisâ ZΛ bifariam in K, rectangulum ΛZ in ZE æquale sit rectangulo KZ in KΛ. Puta factum. Cumque rectangulum ΛZ in ZE æquale est rectangulo KZ in KΛ, erit ZΛ ad ΛK sicut KZ ad ZE. Recta autem ZΛ duplum est ipsius ΛK, adeoque KZ etiam duplum erit ipsius ZE, ac recta ZE æqualis erit ipsi EK. At recta ZE datur, adeoque & EK datur magnitudine & positione. Datis autem punctis E, K & Z, datur quoque recta ZK cui æqualis est KΛ; adeoque recta KΛ

D datur

datur magnitudine & positione: ac dato puncto K, punctum Λ etiam datur: punctum igitur quæsitum, in quo habetur terminus rationum, est punctum Λ. Dico præterea, quod si jungatur recta H K, erit Θ E ad Z K sicut H Z ad Z Λ; etenim

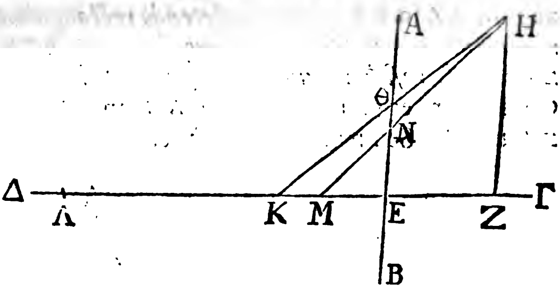


recta K E *dimidium est ipsius* Z K, *uti* Z K *dimidium ipsius* Λ Z: adeoque erit Λ Z ad Z K ut Z K ad K E, hoc est, ut H Z ad E Θ; ac permutando erit H Z ad Z Λ ut Θ E ad Z K. Componetur autem ratio ista extrema, si fiat recta E K ipsi Z E æqualis, ac jungatur H K.

Imprimis autem inquirendum est, an hæc recta H K auferat rationem majorem vel minorem quavis alia, per punctum H ducenda, rectisque E A, Z Δ occurrente: quod quidem hunc in modum determinatur.

Manentibus jam descriptis, rectâque parallelâ; fiat recta E K æqualis ipsi E Z. Junctâ rectâ H K, examinandum est an recta H K auferat rationem E Θ ad Z K, majorem quam alia quævis recta per punctum H ducta, rectisque E A, Z Δ occurrens. Fiat recta K Λ æqualis ipsi K Z, ac rectangulum Λ Z in Z E æquale erit rectangulo Z K in K Λ; & ratio E Θ ad Z K erit ut H Z ad Z Λ sive ut H Z ad quater Z E. Agatur recta alia ut H M; ac comparanda venit ratio E Θ ad Z K cum ratione N E ad Z M. Cumque E Θ est ad Z K ut Z H ad Z Λ, conferenda est ratio H Z ad Z Λ cum ratione N E ad Z M; ac permutando, conferenda est ratio H Z ad N E cum ratione Λ Z ad Z M. At Z H est ad E N ut Z M ad M E; quare comparanda est ratio Z M ad M E cum ratione Λ Z ad M Z. Ac convertendo rationem, conferenda est ratio M Z ad Z E cum ratione Λ Z ad Λ M: unde conferendum est rectangulum Λ Z in Z E cum rectangulo M Z in M Λ. Quoniam autem rectangulum Z K in K Λ æquale est rectangulo Λ Z in Z E, conferatur rectangulum Z K in K Λ cum rectangulo Z M in M Λ. Manifestum autem est quod rectangulum Z K in K Λ majus est rectangulo

angulo ZM in MΛ, quia K eſt in medio ipſius ZΛ: rectangulum itaque ZM in MΛ minus eſt rectangulo KZ in KΛ. Cumque rectangulum ΛZ in ZE æquale eſt rectangulo KZ in KΛ, igitur rectangulum ZM in MΛ minus erit rectangulo ΛZ in ZE; adeoque ratio ZM ad ZE minor erit ratione ZΛ ad ΛM: ac convertendo rationem, ZM ad ME major erit ratione ZΛ ad ZM.

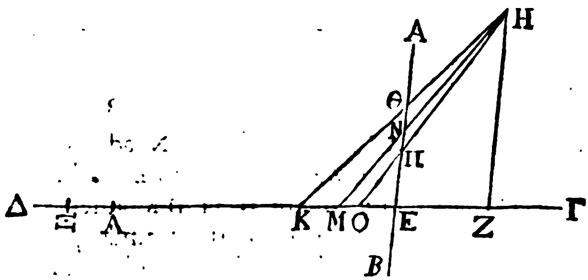


Sed ZM eſt ad ME ut ZH ad EN; quare ratio ZH ad EN major eſt ratione ΛZ ad ZM: & permutando erit ratio ZH ad ΛZ major ratione EN ad ZM. Eſt autem ZH ad ZΛ ut EΘ ad ZK, ergo ratio EΘ ad ZK major eſt ratione EN ad ZM; quare recta HK aufert rationem majorem quam quæ ſecatur à recta HM: unde patet rationem EΘ ad ZK majorem eſſe rationibus quibuſcunque, quæ abſcindi poſſint à rectis quibuſvis per punctum H ductis, rectiſque EA, ZΔ occurrentibus.

Dico etiam quod rectæ propiores ipſi HK auferunt ſemper rationes majores, quam quæ ſecantur à remotioribus ab ea. Quoniam enim ratio NE ad ZM minor eſt ratione EΘ ad ZK, ac EΘ eſt ad ZK ut ZH ad ZΛ: erit ratio NE ad ZM minor ratione ZH ad ZΛ. Fiat itaque ut NE ad ZM ita ZH ad rectam aliam, majorem quam ZΛ, puta ad ZΞ: adeoque erit NE ad ZM ut ZH ad ZΞ. Sed & juxta reſolutionem præmiſſam, conſtat rectangulum ZΞ in ZE æquale eſſe rectangulo ZM in MΞ, ob rationem NE ad ZM æqualem rationi HZ ad ZΞ. Ducatur jam recta alia ut OH, ac comparanda ſit ratio NE ad ZM cum ratione ΠE ad ZO. Eſt autem NE ad ZM ut HZ ad ZΞ; quare permutando, comparanda eſt ratio ZH ad EΠ cum ratione ΞZ ad ZO. Sed ratio ZH ad EΠ eſt ut ZO ad OE, *adeoque comparanda eſt ratio* ZO *ad* OE cum ratione ΞZ ad ZO; ac per converſionem rationis, comparanda eſt ratio ZO ad ZE cum ratione ΞZ ad ΞO: & conferendum rectangulum ΞZ in ZE cum rectangulo ZO in ΞO.

Sed

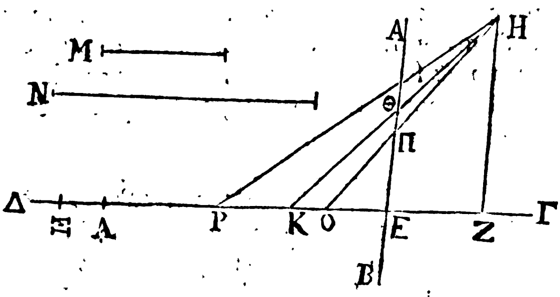
Sed rectangulum ΞZ in ZE æquale est rectangulo ZM in MΞ; quapropter conferendum est rectangulum ZM in MΞ cum rectangulo ZO in OΞ. Conferatur etiam rectangulum ZK in KΞ cum rectangulo ZM in MΞ. Est autem rectangulum ΞZ in ZE æquale rectangulo ZM in MΞ; comparandum est itaque rectangulum ZK in KΞ cum rectangulo ΞZ in ZE. Demonstratum autem est rectangulum ZK in KΛ æquari rectangulo ΛZ in EZ; *quare auferendo rectangulum* ZK *in* KΛ *è rectangulo* ZK *in* KΞ, *ac rectangulum* ΛZ *in* ZE *è rectangulo* ΞZ *in* ZE, *residua erunt rectangula* ZK *in* ΛΞ *&* EZ *in* ΞΛ. Conferatur ergo rectangulum ΛΞ in ZK cum rectangulo ΞΛ in EZ. Sed manifestum est rectangulum ΞΛ in ZK ma-



jus esse rectangulo ΞΛ in EZ; *quibus additis ad æqualia* rectangula ZK *in* KΛ & ΛZ in EZ, fiet rectangulum ZK in KΞ majus rectangulo ΞZ in ZE. Sed ZM in MΞ æquale est rectangulo ΞZ in ZE, adeoque ZK in KΞ majus est rectangulo ZM in MΞ: dato itaque quovis puncto O, rectangulum ZM in MΞ majus erit rectangulo ZO in OΞ. At rectangulum ΞZ in ZE æquale est rectangulo ZM in MΞ; *adeoque rectangulum* ΞZ *in* ZE *majus erit rectangulo* ZO *in* OΞ: unde ratio OZ ad ZE minor erit ratione ΞZ ad ΞO. Ac convertendo rationem, ratio OZ *ad* OE major erit ratione ΞZ ad ZO. Ratio autem OZ ad OE est ut ZH ad EΠ; quare ratio HZ ad EΠ major erit ratione ΞZ ad ZO: ac permutando, ratio HZ ad ΞZ *major erit ratione* EΠ *ad* ZO. *Sed* HZ *est ad* ΞZ ut NE ad ZM; quare ratio NE ad ZM major erit ratione ΠE ad ZO: quocirca recta HM aufert rationem majorem quam quæ secatur à recta HO. Hinc manifestum est rectas propiores ipsi HK abscindere rationes majores, quam quæ secantur à remotioribus ab ea. Patet etiam ex jam descriptis rationem maximam

mam E Θ ad Z K æqualem esse rationi Z H ad quater Z E, quia Z Λ est quater Z E.

Componetur autem problema hunc in modum. Iisdem manentibus quæ supra, ac ductâ rectâ parallelâ; fiat recta E K æqualis ipsi Z E, ac jungatur H K. Hæc recta H K auferet rationem majorem, quam quævis alia recta per punctum H ducta, ipsisque E A, Z Δ occurrens. Ratio autem proposita vel erit æqualis rationi E Θ ad Z K, hoc est, rationi H Z ad quater Z E, (juxta jam demonstrata) vel major erit ratione E Θ ad Z K, vel minor erit ea. Si autem ratio data æqualis fuerit rationi E Θ ad Z K, recta H K solvit problema, eaque sola: quia rectæ huic propiores semper auferunt rationes majores, quam quæ sunt remotiores ab ea. At si major fuerit ratio quam E Θ ad Z K, impossibile erit problema; quia ratio proposita



major est maximâ. Quod si ratio M ad N minor fuerit quam ratio E Θ ad Z K; fiat recta Z K æqualis ipsi K Λ: eritque rectangulum Λ Z in Z E æquale rectangulo Z K in K Λ, ac ratio E Θ ad Z K æqualis rationi H Z ad Z Λ. Quoniam autem ratio M ad N minor est quam ratio H Z ad Z Λ, faciamus ut M ad N ita H Z ad rectam aliam ipsâ Z Λ longiorem, puta ad Z Ξ. Est vero recta K Z major quam ipsa Z E; quare rectangulum Ξ Λ in K Z majus erit rectangulo Ξ Λ in E Z. Rectangulum autem Λ Z in Z E æquale est rectangulo Z K in K Λ; adeoque si applicetur ad rectangulum Z K in K Λ rectangulum Z K in Ξ Λ, ac ad rectangulum Λ Z in E Z rectangulum Ξ Λ in E Z, erit totum rectangulum Z K in K Ξ majus rectangulo toto Ξ Z in Z E: quare possibile erit applicare ad rectam Z Ξ rectangulum æquale rectangulo Ξ Z ad Z E, duobus modis, ab utraque scilicet parte puncti K; & habebuntur puncta in rectis quæsitis, nempe O & P. Junctisque rectis H O, H P, dico

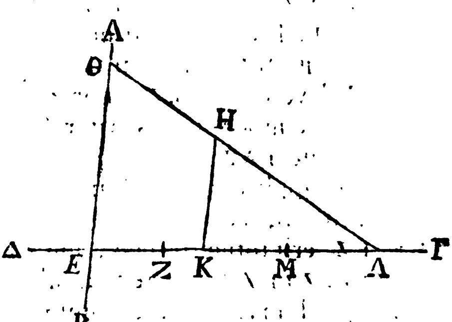
dico utramque ex illis problema solvere. Etenim rectangulum ΞΖ in ΖΕ æquale est rectangulo ΖΟ in ΟΞ; quare ΟΖ erit ad ΖΞ ut ΞΖ ad ΟΞ: ac convertendo rationem, ΟΖ erit ad ΟΕ ut ΞΖ ad ΟΖ. Sed ΟΖ est ad ΟΕ sicut ΗΖ ad ΕΠ; quare ΗΖ est ad ΕΠ ut ΞΖ ad ΖΟ: ac permutando, ΗΖ erit ad ΖΞ ut ΕΠ ad ΖΟ. Est vero ΗΖ ad ΖΞ, ut Μ ad Ν; adeoque Μ est ad Ν ut ΕΠ ad ΖΟ: quapropter recta ΗΟ solvit problema. Ac pari argumento demonstratur rectam ΗΡ idem præstare; utraque itaque ΗΟ, ΗΡ satisfacit quæsito.

Invenimus itaque Resolutionem problematis secundum omnes casus ejus, ac Compositionem ostendimus juxta omnes modos. Ductâ autem rectâ parallelâ, erit ratio data vel æqualis rationi ΖΗ ad quater ΖΕ, vel erit major eâ, vel minor. Quod si æqualis fuerit, componetur problema juxta casum primum & secundum, ac modo singulari juxta casum tertium. Si major fuerit, componi potest dupliciter; modo nempe primo, & secundo. At si minor fuerit ratio, tum quatuor modis fieri potest Constructio; nempe primo, & secundo, ac dupliciter juxta tertium.

LOCUS SEXTUS.

Cadat jam recta ΗΚ, per punctum Η ducta ipsique ΑΕ parallela, ultra punctum Ζ; sive ut sit punctum Ζ inter illam & punctum Ε. Ac recta duci potest per punctum Η, juxta quatuor casus; vel enim auferet rationem à rectis ΓΖ, ΕΑ; vel à ΓΖ, ΕΒ; vel à rectis ΖΕ, ΕΒ; vel denique à ΖΔ, ΕΑ.

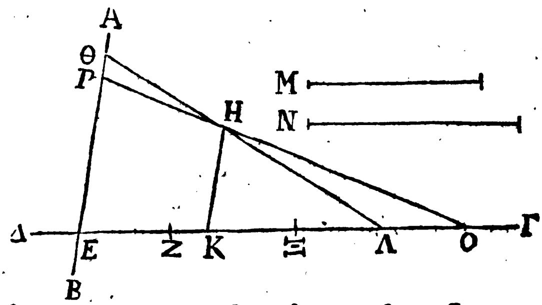
Cas. I. Imprimis autem ducatur juxta casum primum recta ΘΛ, auferens à rectis ΓΖ, ΕΑ rationem ΕΘ ad ΖΛ æqualem rationi datæ. Fiat autem ratio ΚΗ ad ΖΜ æqualis rationi ΕΘ ad ΛΖ; ac datâ rectâ ΗΚ, recta etiam ΖΜ datur magnitudine & positione; cumque punctum Ζ datur, datum est quoque punctum Μ. Quoniam autem ΕΘ est ad ΖΛ sicut ΗΚ ad ΖΜ; erit permutando, ΕΘ ad



ΗΚ

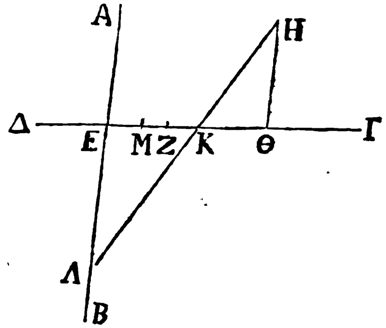
HK ſicut ΛZ ad ZM. Sed ratio EΘ ad HK eſt ut ΛE ad ΛK, quare EΛ erit ad ΛK ut ΛZ ad ZM: ac dividendo, EK erit ad KΛ *ut* ΛM *ad* ZM, *adeoque rectangulum* EK *in* ZM æquale erit rectangulo KΛ in ΛM. Rectangulum autem MZ in EK datur, dato utroque ejus latere; itaque rectangulum KΛ in ΛM datur, applicandum ad rectam datam KM excedens quadrato; unde punctum Λ datur, ac recta ΛΘ poſitione data eſt.

Sic autem componetur problema hoc. Iiſdem poſitis quæ ſupra, ductâque rectâ parallelâ; ſit ratio data ſicut M ad N, ac fiat HK ad ZΞ ſicut M ad N; dein applicetur ad rectam KΞ rectangulum æquale rectangulo ΞZ in KE excedens quadrato, nempe rectangulum ΛK in ΛΞ; & jungatur recta ΛH quæ producatur ad Θ. Dico quod recta ΛΘ ſolvit problema, ſive quod ratio EΘ ad ZΛ eſt ut M ad N. Quoniam enim rectangulum EK in ZΞ æquale eſt rectangulo KΛ in ΛΞ; erit EK ad KΛ ſicut ΛΞ ad ΞZ: adeoque componendo, erit EΛ ad ΛK, ſive EΘ ad



HK, ſicut ΛZ ad ZΞ: ac permutando, erit EΘ ad ΛZ ſicut HK ad ZΞ. At HK eſt ad ZΞ ſicut M ad N, adeoque recta ΛΘ ſolvit problema. Dico etiam quod ſola hoc præſtat. Nam ſi poſſibile ſit ducatur alia ut OP. At ſi recta OP auferat rationem æqualem rationi M ad N, erit ratio EP ad ZO æqualis rationi ΘE ad ZΛ. Quod fieri nequit, cum evidenter minor ſit ratio illa. Ac patet rectas propiores puncto E, ut recta OP, auferre rationes minores quam quæ abſcinduntur à remotioribus ab eo.

Caſ. II. Manentibus quæ prius, ductâque rectâ parallelâ; ducatur jam juxta modum ſecundum recta HΛ, auferens ab ipſis ΓZ, EB rationem ΛE ad ZK æqualem rationi datæ. Fiat ΘH ad ZM ſicut ΛE ad ZK. Cumque recta ΘH datur, recta ZM etiam datur & magnitudine & poſitione: ac dato puncto Z, punctum M datur; adeoque cum punctum Θ detur, recta quoque ΘM data eſt magnitudine & poſitione. Jam ΛE eſt ad ad ZK ut ΘH ad ZM; quare permutando, ΛB erit ad ΘH ut est KZ ad ZM. Sed ΛB est ad ΘH sicut EK ad KΘ; *quare* EK *est ad* KΘ *sicut* KZ *ad* ZM; ac componendo, EΘ ad ΘK sicut KM ad MZ: *rectangulum itaque* EΘ *in* MZ *æquale est rectangulo* ΘK *in* KM. Datum autem est rectangulum EΘ in MZ, dato nempe utroque ejus latere; adeoque rectangulum MK in KΘ datur: quare applicando illud ad rectam MΘ deficiens quadrato, punctum K datur. Dato autem puncto H, recta quoque HKΛ positione data erit.



Quoniam autem in Compositione oportet fieri rationem ΘH ad ZM æqualem rationi datæ, & applicari ad rectam ΘM rectangulum æquale rectangulo ΘE in ZM deficiens quadrato; cadet punctum K in recta ΘZ. At non semper possibile est rectam quæsitam ducere. Etenim si rectangulum ΘE in ZM majus fuerit quadrato dimidii ipsius ΘM, tum fieri non potest applicatio; adeoque non semper neque in omni casu construi potest problema.

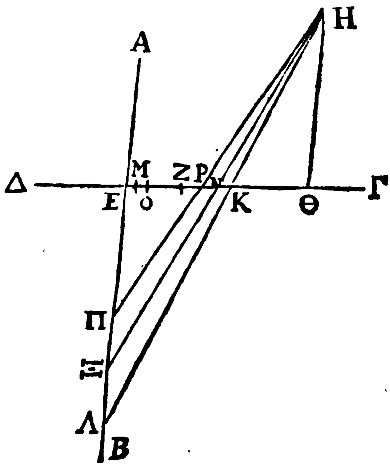
Fit autem modo singulari, si ducatur recta transiens per punctum K, quod in medio sit ipsius ΘM, ea lege ut rectangulum ΘK in KM æquale sit rectangulo ΘE in ZM; quæ proinde satisfaciet problemati. Obtinebitur autem extrema illa ratio, si ponamus rationem ΘH ad ZM æqualem illi, ac sectâ ipsâ ΘM bifariam in K rectangulum ΘK in KM æquale fuerit rectangulo EΘ in ZM. Inquirendum igitur est punctum M in recta ZΔ, tale, ut, si bisecetur ΘM in puncto K, habeatur rectangulum ΘE in ZM æquale rectangulo ΘK in KM. Erit igitur EΘ ad ΘK sicut KM ad MZ; ac per conversionem rationis, ΘE ad EK erit ut MK ad KZ. Sed KM æqualis est ipsi KΘ, adeoque erit ΘE ad EK sicut ΘK ad KZ; permutando autem erit EΘ ad ΘK sicut EK ad KZ. Per conversionem vero rationis EΘ erit ad EK sicut EK ad EZ: quare recta EK media proportionalis est inter EΘ & EZ. Utraque autem ΘE, EZ datur, adeoque ipsa EK datur magnitudine & positione; ac ob datum punctum E punctum K etiam datur. Cumque punctum Θ datur, ipsa ΘK data est; cui æqualis est recta KM: quapropter dato puncto K etiam punctum M datur.

Componetur autem propositio hæc in hunc modum. Capiatur media proportionalis inter ipsas EΘ, EZ; sitque ea recta EK. Manifestum autem est rectam ΘK majorem esse quam KZ. Quoniam enim EΘ est ad EK sicut EK ad EZ; differentia antecedentium ad differentiam consequentium, sive ΘK ad KZ, erit in eadem ratione. Sed EΘ major est quam EK, adeoque ΘK major est quam KZ. Fiat autem ipsi ΘK æqualis recta KM; eritque punctum M punctum quæsitum: hoc est, rectangulum ΘE in ZM æquale erit rectangulo MK in KΘ. Etenim quia EΘ est ad EK ut KE ad EZ; erit per conversionem rationis ac permutando, ΘE ad EK ut ΘK ad KZ. Sed ΘK *æqualis est ipsi* MK, *quare* ΘE *erit* ad EK ut MK ad KZ; ac per conversionem rationis, EΘ erit ad KΘ sicut MK ad MZ: quapropter rectangulum ΘE in MZ æquale erit rectangulo MK in KΘ. Junctâ itaque KH, ac in directum productâ, dico quod recta HΛ satisfacit proposito: sive quod ΛE est ad ZK ut ΘH ad ZM. Namque rectangulum ΘE in ZM æquale est rectangulo MK in KΘ, unde EΘ est *ad* ΘK sicut KM ad MZ; ac dividendo EK erit ad KΘ sicut KZ ad ZM. Sed EK est ad KΘ ut ΛE est ad ΘH; quare ΛE *est ad* ΘH ut KZ ad ZM, & permutando ΛE est ad KZ ut ΘH ad ZM. Quocirca rite construitur, si capiatur EK media proportionalis inter ipsas ΘE, EZ; ac juncta recta HK producatur ad Λ.

Jam inquirendum est, an recta HΛ auferat rationem ΛE ad ZK, majorem vel minorem præ omnibus rectis quæ duci possunt per punctum H, quæque rectis EB, ZΓ occurrunt. Determinatur autem problema hunc in modum. Manentibus descriptis, una cum rectâ parallelâ; capiatur media proportionalis inter rectas EΘ, EZ, puta EK: junctaque recta KH producatur in directum. Oportet invenire an recta HΛ secet rationem ΛE ad ZK, majorem vel minorem præ illis quas auferunt rectæ quævis aliæ, per punctum H ductæ, rectasque EB, ZΓ intersecantes. Ponatur recta KM ipsi KΘ æqualis, ac rectangulum ΘE in MZ æquale erit rectangulo MK in KΘ: ratio autem ΛE ad ZK æqualis erit rationi ΘH ad ZM.

 Ducatur

Ducatur jam recta alia ut ΗΝ, ac conferenda venit ratio ΞΕ ad ΖΝ cum ratione ΛΕ ad ΖΚ; cumque ΛΕ est ad ΖΚ ut ΘΗ ad ΖΜ, conferenda erit ratio ΞΕ ad ΖΝ cum ratione ΘΗ ad ΖΜ, ac permutando comparanda erit ratio ΞΕ ad ΘΗ *cum ratione* ΝΖ *ad* ΖΜ. *Sed ratio* ΞΕ *ad* ΘΗ *æqualis* est rationi ΕΝ ad ΝΘ. Quare conferatur ratio ΕΝ ad ΝΘ cum ratione ΝΖ ad ΖΜ; ac componendo conferatur ratio ΕΘ ad ΘΝ cum ratione ΝΜ ad ΜΖ: adeoque comparandum venit rectangulum ΘΕ in ΜΖ cum rectangulo ΜΝ in ΝΘ. Manifestum autem est rectangulum ΜΚ in ΚΘ majus esse rectangulo ΜΝ in ΝΘ, quia punctum Κ secat rectam ΘΜ bifariam in medio. Sed rectangulum ΕΘ in ΜΖ æquale est rectangulo ΜΚ in ΚΘ; ergo rectangulum ΕΘ in ΜΖ majus est rectangulo ΜΝ in ΝΘ: unde ratio ΕΘ ad ΘΝ major erit ratione ΝΜ ad ΜΖ. Dividendo autem erit ratio ΕΝ ad ΝΘ major ratione ΝΖ ad ΖΜ. Sed ΕΝ est ad ΝΘ ut ΕΞ ad ΘΗ; igitur ratio ΕΞ ad ΘΗ major erit ratione ΝΖ ad ΖΜ: ac permutando, erit ratio ΞΕ ad ΝΖ major ratione ΘΗ ad ΜΖ. Cum autem ΘΗ est ad ΜΖ ut ΛΕ ad ΖΚ, ratio ΞΕ ad ΝΖ major erit ratione ΛΕ ad ΖΚ. Recta itaque ΗΛ aufert rationem minorem, quam quæ aufertur à recta ΗΞ. Hinc constat hanc rectam ΗΛ abscindere rationem minorem rationibus, quæ auferri possint à rectis quibuscunque per punctum Η ductis, ipsisque ΖΓ, ΕΒ occurrentibus.

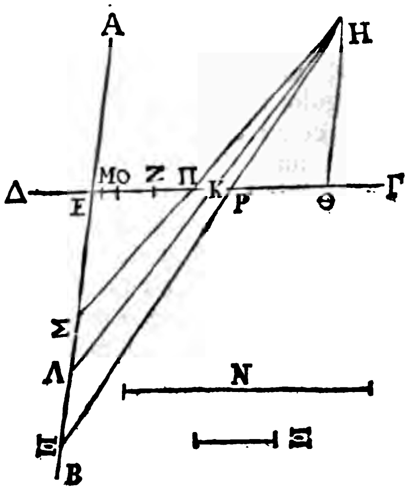


Quoniam autem recta ΗΛ abscindit rationem minorem, quam quas rectæ quævis, per punctum Η ductæ, auferunt à rectis ΖΓ, ΕΒ: Dico quoque quod rectæ propiores ipsi ΗΛ auferunt rationes minores, quam quæ auferuntur à remotioribus ab eâ. Quoniam enim ratio ΞΕ ad ΖΝ major est ratione ΛΕ ad ΖΚ, hoc est quam ΘΗ ad ΖΜ; ponamus ΘΗ esse ad rectam aliquam ΖΟ sicut ΞΕ ad ΖΝ; quæ proinde

minor

minor erit quam Z M. Ac ex demonstratis constat rectangulum E Θ in Z O æquale esse rectangulo O N in N Θ. Cum autem ratio Ξ E ad Z N æqualis est rationi Θ H ad Z O, ducatur recta alia, ut H P; ac comparanda sit ratio Π E ad Z P cum ratione Ξ E ad Z N. Quoniam vero Ξ E est ad Z N ut Θ H ad Z O, conferatur ratio Π E ad Z P cum ratione Θ H ad Z O: ac permutando, conferatur ratio Π E ad Θ H cum ratione P Z ad Z O. Sed ratio Π E ad Θ H est ut E P ad P Θ; adeoque componendo, comparanda est ratio Θ E ad P Θ cum ratione P O ad Z O; ac rectangulum Θ E in Z O comparandum cum rectangulo Θ P in P O. Est autem rectangulum Θ E in Z O æquale rectangulo O N in N Θ; quare conferendum est rectangulum O N in N Θ cum rectangulo O P in P Θ. Conferendum est etiam rectangulum O K in K Θ cum rectangulo O N in N Θ. Quoniam vero rectangulum Θ E in O Z æquale est rectangulo O N in N Θ, conferendum est rectangulum O K in K Θ cum rectangulo E Θ in O Z. Rectangulum autem M K in K Θ æquale est rectangulo Θ E in M Z. Si itaque auferatur è rectangulo E Θ in M Z rectangulum E Θ in O Z, & è rectangulo M K in K Θ rectangulum O K in K Θ; residuum M O in E Θ majus erit residuo M O in K Θ. Quoniam autem rectangulum Θ E in M Z æquale est rectangulo M K in K Θ, ac rectangulum M O in E Θ majus est rectangulo M O in K Θ; manifestum est rectangulum O Z in E Θ majus esse rectangulo O K in K Θ. Sed rectangulum O N in N Θ æquale est rectangulo O Z in Θ E; quare rectangulum O N in N Θ minus est rectangulo O K in K Θ: unde etiam consequetur rectangulum O N in N Θ majus esse rectangulo O P in P Θ. Rectangulum vero O Z in Θ E æquale est rectangulo O N in N Θ; igitur rectangulum O Z in Θ E majus est rectangulo O P ad P Θ; quare ratio E Θ ad Θ P major erit ratione P O ad O Z: ac dividendo, ratio E P ad P Θ, hoc est Π E ad H Θ, major erit ratione P Z ad Z O. Permutando autem, ratio Π E ad P Z major erit ratione H Θ ad Z O. Sed est H Θ ad Z O ut E Ξ ad Z N; quapropter ratio Π E ad P Z major est ratione Ξ E ad Z N. Recta itaque H Ξ aufert rationem minorem quam quæ aufertur à recta H Π. Recta autem H Ξ propior est ipsi H Λ quam est recta H Π, unde manifestum est rectas propiores rectæ H Λ abscindere rationes minores quam remotiores ab eâ.

Conſtruetur itaque problema hunc in modum. Manentibus quæ prius, una cum recta parallela; capiatur ΕΚ media proportionalis inter ΘΕ & ΕΖ; junctaque ΗΚ producatur ad Λ; ac recta ΗΛ auferet rationem ΛΕ ad ΖΚ. Ratio autem data vel erit ipſa ratio ΛΕ ad ΖΚ, vel minor illâ vel major. Ac ſi fuerit ratio ut ΛΕ ad ΖΚ, recta ΗΛ ſatisfacit problemati: & patet quod ea ſola hoc præſtat. Quod ſi minor fuerit quam ratio ΛΕ ad ΖΚ, tunc impoſſibile eſt problema. Sin autem ratio data, nempe Ν ad Ξ, major fuerit ratione ΛΕ ad ΖΚ; fiat ipſi ΘΚ æqualis recta ΚΜ: & rectangulum ΕΘ in ΖΜ æquale erit rectangulo ΜΚ in ΚΘ, ac ratio ΛΕ ad ΖΚ æqualis erit rationi ΘΗ ad ΖΜ. Eſt autem ratio Ν ad Ξ major ratione ΛΕ ad ΖΚ, hoc eſt ratione ΘΗ ad ΜΖ. Fiat itaque ut Ν ad Ξ ita ΘΗ ad rectam aliam ipſa ΖΜ minorem, puta ad ΖΟ. Quoniam vero ΕΘ in ΜΖ æquale eſt ΜΚ in ΚΘ, ac ΜΟ in ΕΘ majus eſt quam ΜΟ in ΚΘ; manifeſtum eſt rectangulum ΟΖ in ΕΘ minus eſſe quam ΟΚ in ΚΘ; adeoque poſſibile erit applicare rectangulum illud ad rectam ΟΘ.

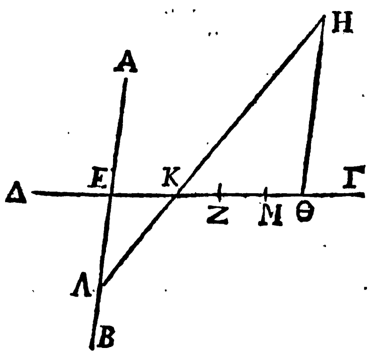


Quapropter ſi rectangulum æquale rectangulo ΕΘ in ΟΖ deficiens quadrato applicetur ad rectam ΘΟ, ad utramque partem puncti Κ, habebuntur puncta Π & Ρ. Ductiſque rectis ΗΠ, ΗΡ, producantur ad Σ, Ξ. Dico utramque rectam ΗΣ, ΗΞ ſatisfacere problemati, ſive quod ratio Ν ad Ξ eſt ut ΣΕ ad ΖΠ, vel ut ΞΕ ad ΖΡ. Quoniam enim rectangulum ΘΕ in ΖΟ æquale eſt rectangulo ΟΠ in ΠΘ, erit ΕΘ ad ΘΠ ſicut ΠΟ ad ΟΖ; & dividendo, ratio ΕΠ ad ΠΘ erit ut ΠΖ ad ΖΟ. Sed ΕΠ eſt ad ΠΘ ut ΣΕ ad ΘΗ; adeoque ΣΕ eſt ad ΘΗ ut ΠΖ ad ΖΟ; ac permutando erit ΣΕ ad ΠΖ ſicut ΘΗ ad ΖΟ. Eſt autem ΘΗ ad ΖΟ ut Ν ad Ξ; ergo ΕΣ eſt ad ΠΖ ſicut Ν ad Ξ: utraque igitur è rectis ΗΣ, ΗΞ ſolvit

solvit problema. Ac manifestum est quod rectæ ab utraque parte propiores ipsi Η Λ, auferunt rationes minores quam remotiores ab eadem.

Limes autem rationis habetur hoc modo. Ratio Λ Ε ad Ζ Κ est ut Θ Η ad Ζ Μ. Est autem Ζ Μ excessus ipsarum Θ Ε, Ε Ζ simul sumptarum supra ipsas Θ Ε, Ε Μ. At Θ Ε, Ε Μ simul sumptæ æquantur *duplo* ipsius Κ Ε; quia Θ Κ æqualis est ipsi Κ Μ. Duplum autem ipsius Κ Ε idem potest quod quater Θ Ε in Ε Ζ; quia Ε Κ media est proportionalis inter Θ Ε & Ε Ζ. Igitur recta Ζ Μ excessus erit, quo ipsæ Θ Ε, Ε Ζ simul sumptæ excedunt illam, quæ potest id quod quater sub rectis Θ Ε, Ε Ζ continetur. Ratio itaque Λ Ε ad Ζ Κ (quæ minor est ratione quâvis, rectis per punctum Η ductis, ab ipsis Ε Β, Ζ Γ auferendâ) *eadem est cum ratione* Θ Η *ad excessum, quo ipsæ* Θ Ε, Ε Ζ *simul sumptæ superant* illam quæ potest quater id quod sub Θ Ε, Ε Ζ continetur.

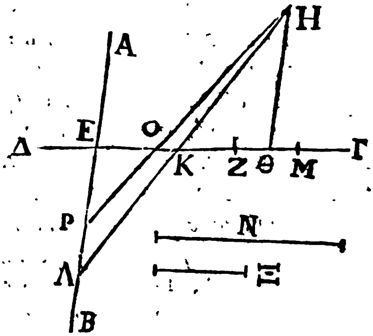
Cas. III. Manentibus jam descriptis, ac ductâ rectâ parallelâ: ducatur juxta modum tertium recta Η Λ, auferens ab ipsis Ε Ζ, Ε Β rectas Λ Ε, Κ Ζ in ratione datâ. Fiat Θ Η ad Ζ Μ sicut Λ Ε ad Κ Ζ; ac datâ rectâ Η Θ, recta Ζ Μ dabitur magnitudine & positione. Cum autem punctum Ζ datur, datum est punctum Μ; ac ob datum punctum Θ, recta Θ Μ datur *magnitudine & positione.*



Quoniam autem Λ Ε est ad Κ Ζ ut Θ Η ad Ζ Μ, erit permutando, Λ Ε *ad* Θ Η *sicut* Κ Ζ *ad* Ζ Μ. *Sed* Λ Ε *est ad* Θ Η *ut* Κ Ε *ad* Κ Θ; *adeoque* Κ Ε est ad Κ Θ sicut Κ Ζ ad Ζ Μ; ac componendo, erit Θ Ε ad Κ Θ ut Κ Μ ad Μ Ζ. Est igitur rectangulum Ε Θ in Ζ Μ æquale rectangulo Θ Κ in Κ Μ. Datur autem rectangulum Ε Θ in Ζ Μ, datâ nempe utrâque è rectis Ε Θ, Ζ Μ; adeoque rectangulum Θ Κ in Κ Μ datur. Applicando itaque ad rectam datam Θ Μ rectangulum illud datum excedens quadrato, habebitur punctum Κ. Ob datum autem punctum Η dabitur etiam positione recta Η Κ Λ.

Construetur autem problema hunc in modum. Manentibus quæ

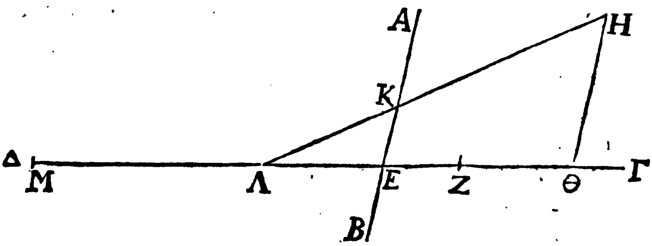
quæ prius, ac ductâ rectâ parallelâ; sit ratio data sicut N ad Ξ: sitq; in eadem ratione ΘH ad ZM: dein applicetur ad rectam ΘM rectangulum æquale rectangulo ΘE in ZM excedens quadrato. Fieri autem nequit ut rectangulum ΘE in ZM sit minus rectangulo ΘZ in ZM, quia recta EΘ major est ipsa ΘZ: nec majus quam ΘE in EM, quia recta EM major est ipsâ ZM. Unde patet punctum K cadere inter puncta E, Z. Sit autem rectangulum illud ΘK in KM. Jungatur HK ac producatur ad Λ. Dico rectam HKΛ satisfacere problemati, sive quod ΛE est ad KZ sicut N ad Ξ. Quoniam enim EΘ in ZM æquale est rectangulo ΘK in KM, erit EΘ ad ΘK sicut KM ad MZ: ac dividendo, erit EK ad KΘ, hoc est EΛ ad HΘ, sicut KZ ad ZM. Permutando autem, EΛ erit ad KZ ut ΘH ad ZM. Sed ΘH est ad ZM sicut N ad Ξ. Quare EΛ erit ad KZ sicut N ad Ξ; adeoque recta HΛ solvet problema. Dico etiam quod ea sola hoc præstat. Nam si fieri potest, ducatur alia, ut HP; quæ auferat rationem N ad Ξ. Erit itaque PE ad OZ sicut ΛE ad KZ. Hoc autem impossibile est, cum antecedens minor sit antecedente, & consequens major consequente. Unde manifestum est rectam HP auferre rationem minorem quam quæ ablata est ab ipsâ HΛ.



Cas. IV. Manentibus quæ prius, una cum rectâ parallelâ; ducatur jam, secundum modum quartum, recta HΛ, abscindens à rectis EΛ, ZΔ rationem EK ad ΛZ, æqualem rationi datæ. Fiat in eadem ratione ΘH ad ZM; atque ob datam ΘH, ipsa ZM dabitur magnitudine & positione: ac ob datum punctum Z, punctum M quoque datur. Quoniam autem ΘH est ad ZM ut EK ad ZΛ; erit permutando, ΘH ad EK, hoc est ΘΛ ad ΛE, sicut MZ ad ZΛ. Per conversionem autem rationis, erit ΘΛ ad ΘE sicut MZ ad MΛ; quare rectangulum ZM in ΘE æquale erit rectangulo ΘΛ in ΛM. Sed datur rectangulum ZM in ΘE, datâ nempe utrâque ZM, ΘE; quare rectangulum ΘΛ in ΛM datum est. Applicando itaque ad ad rectam datam Θ M rectangulum illud deficiens quadrato, punctum Λ dabitur. Cum autem punctum H datur, etiam recta H Λ dabitur magnitudine & positione.

Quoniam autem in compositione, oportet Θ H esse ad Z M in ratione proposita; & applicari ad rectam Θ M rectangulum æquale rectangulo Θ E in Z M deficiens quadrato, nempe rectangulum Θ Λ in Λ M; ac jungi rectam H Λ: punctum illud Λ haberi non potest in omni casu. Adeoque constructio problematis non semper possibilis est, nec in omni casu. Modo autem singulari fit, si recta M Θ bifariam secetur in puncto Λ. Erit autem propositio hujusmodi.

Ut extrema hæc ratio habeatur, ponamus eam ut Θ H ad Z M; & bisectâ ipsâ Θ M in Λ, oportet rectangulum Θ Λ in Λ M reperiri æquale rectangulo Z M in Θ E. Puta factum,

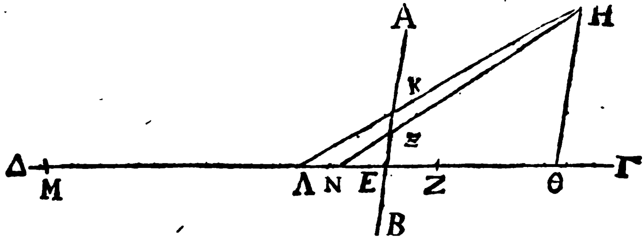


fitque ea ut Θ H ad Z M; ac bisecetur Θ M in puncto Λ, ita ut rectangulum Θ Λ in Λ M æquale sit rectangulo Z M in Θ E. Quoniam rectangulum Θ Λ in Λ M æquale est rectangulo Z M in Θ E, erit Λ Θ ad Θ E sicut Z M ad M Λ; dividendo autem, Z Λ erit ad M Λ sicut Λ E ad E Θ. Sed M Λ æqualis est ipsi Λ Θ, adeoque erit Z Λ ad Λ Θ sicut Λ E ad E Θ; permutando vero ac dividendo, habebitur Z E ad Λ E sicut Λ E ad Θ E. Quapropter Λ E media est proportionalis inter Θ E & E Z. Datâ autem utrâque Θ E, E Z, datur etiam E Λ magnitudine & positione: cumque punctum E datur, dabitur quoque punctum Λ. Dato autem puncto Θ, recta Θ Λ etiam datur, cui æqualis est recta Λ M; adeoque recta Λ M datur magnitudine & positione. Datum autem est punctum Λ; quare punctum M, hoc est punctum quæsitum, innotescit.

Componetur autem propositio hunc in modum. Manentibus descriptis, ductâque recta parallela; capiatur E Λ media proportionalis inter ipsas Θ E, E Z, ac ponatur M Λ ipsi Θ Λ

æqualis.

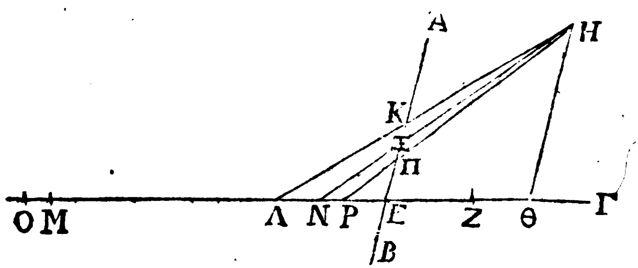
æqualis. Dico quod punctum M est punctum quæsitum; quodque rectangulum ΘΛ in ΛM æquale est rectangulo ZM in ΘE. Quoniam enim EΛ media proportionalis est inter ipsas EZ & ΘE, erit ZE ad EΛ sicut EΛ ad ΘE. Summa autem antecedentium est ad summam consequentium in eadem ratione, adeoque ΛZ ad ΘΛ erit ut ΛE ad EΘ. At recta ΘΛ æqualis est ipsi ΛM; quare ZΛ est ad ΛM sicut ΛE ad



EΘ; & componendo, ZM erit ad MΛ sicut ΛΘ ad ΘE. Rectangulum igitur ΘΛ in ΛM æquale erit rectangulo ZM in ΘE; quapropter punctum M erit punctum quæsitum. Junctâ vero HΛ, dico quod EK est ad ZΛ ut ΘH ad ZM. Etenim ZM est ad MΛ sicut ΛΘ ad ΘE; ac convertendo rationem, MZ erit ad ZΛ ut ΘΛ ad ΛE, hoc est ut ΘH ad EK. Alternando autem, ΘH erit ad ZM ut EK ad ZΛ. Captâ itaque ad constructionem rectâ EΛ mediâ proportionali inter ΘE, EZ, jungatur HΛ. Ac manifestum est rectam HΛ auferre rationem EK ad ZΛ, vel minorem, vel majorem quâvis aliâ ratione, quæ à recta quacunque per punctum H ductâ, ipsisque EA, ZΔ occurrente, abscindi potest.

Hoc autem determinatur hunc in modum. Manentibus quæ prius, ac ductâ rectâ parallelâ, capiatur media proportionalis inter ΘE, EZ ut EΛ; junctâque HΛ, inquiratur primo an recta HΛ auferat rationem EK ad ZΛ, majorem vel minorem quâvis aliâ rectâ per punctum H ducendâ, rectisque ZΔ, EA occurrente. Sit ΛM æqualis ipsi ΘΛ; ac rectangulum ΘΛ in ΛM æquale rectangulo ZM in ΘE; adeoque erit ratio EK ad ZΛ sicut ΘH ad ZM. Ducatur jam alia recta ut HN; ac comparanda est ratio EK ad ZΛ, cum ratione EΞ ad ZN. Est autem EK ad ZΛ ut ΘH ad ZM, adeoque conferenda est ratio ΘH ad ZM cum ratione EΞ ad ZN. Alternando autem, conferatur ratio ΘH ad ΞE cum ratione ZM ad ZN. Sed ΘH est ad ΞE sicut ΘN ad NE. Conferatur ergo ratio ΘN ad NE cum ratione MZ ad ZN. Per conversionem autem rationis, conferatur ratio ΘN ad ΘE cum ratione MZ ad MN; unde comparandum venit rectangulum ZM in ΘE cum rectangulo ΘN in NM. Sed rectangulum ZM in ΘE æquale est rectangulo ΘΛ in ΛM, adeoque conferendum erit rectangulum ΘΛ in ΛM cum rectangulo ΘN in MN. Manifestum autem est quod ΘΛ in ΛM majus est rectangulo ΘN in NM; quia punctum Λ dividit rectam ΘM in medio: quare rectangulum ΘN in NM minus erit rectangulo ΘE in ZM, adeoque ratio ΘN ad ΘE minor erit ratione ZM ad MN. Convertendo autem rationem, erit ratio ΘN ad NE, sive ΘH ad EΞ, major ratione MZ ad ZN: ac permutando, ratio ΘH ad ZM, hoc est EK ad ZΛ, major erit ratione EΞ ad ZN. Recta igitur HΛ aufert rationem majorem quam HN: unde patet rectam HΛ abscindere rationem majorem quavis aliâ rectâ, per punctum H transeunte, ipsisque ZΔ, EA occurrente.

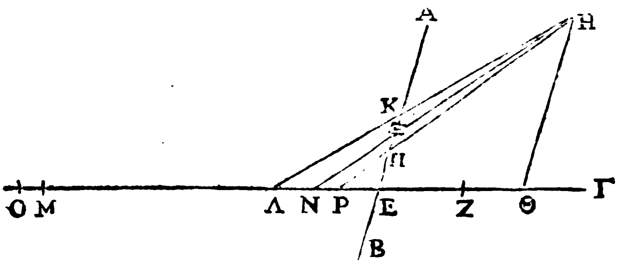
Dico præterea quod rectæ propiores ipsi HΛ auferunt rationes majores, quam quæ secantur à remotioribus ab ea. Quoniam enim ratio ΞE ad ZN minor est ratione EK ad ZΛ, sive ΘH ad ZM; fiat ut EΞ ad ZN, ita ΘH ad rectam aliam, quæ major erit quam ZM, puta ad ZO. Ac juxta jam demonstrata rectangulum ΘE in ZO æquale erit rectangulo ΘN in NO. Ducatur jam recta alia ut HP, ac comparanda venit ratio EΞ ad ZN cum ratione EΠ *ad* ZP. *Sed* EΞ *est ad* ZN *ut* ΘH *ad* ZO; quare conferenda est ratio ΘH ad ZO



cum ratione EΠ ad ZP; atque alternando, conferenda ratio ΘH ad EΠ, sive ΘP ad PE, cum ratione OZ ad ZP. Convertendo autem rationem, conferenda est ratio ΘP ad ΘE cum ratione OZ ad OP; adeoque rectangulum ZO in ΘE cum rectangulo ΘP in PO. Sed rectangulum ΘE in ZO

 æquale

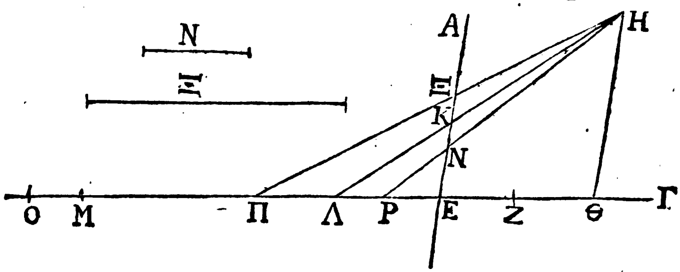
æquale est rectangulo ΘN in NO; quare comparandum est rectangulum ΘN in NO cum rectangulo ΘP in PO. Conferatur etiam rectangulum ΘΛ in ΛO cum rectangulo ΘN in NO. Cum autem ΘN in NO æquale est rectangulo ZO in ΘE, conferendum est rectangulum ΘΛ in ΛO cum rectangulo ZO in ΘE. Sed ex præmissis liquet rectangulum ΘΛ in ΛM æquari rectangulo ΘE in ZM. Sublato itaque rectangulo ΘΛ in ΛM è rectangulo ΘΛ in ΛO, & rectangulo ΘE in ZM è rectangulo ΘE in ZO, comparandum est residuum cum residuo, sive rectangulum ΘΛ in MO cum rectangulo ΘE in MO. Manifestum autem est rectangulum ΘΛ in MO majus esse rectangulo ΘE in MO, quia ΘΛ major est



quam ΘE. Quoniam vero rectangulum ΘE in MO minus est rectangulo ΘΛ in MO, ac rectangulum ΘE in ZM æquale *est rectangulo* ΘΛ *in* ΛM; *rectangulum totum* ΘE in ZO minus erit toto rectangulo ΘΛ in ΛO. Rectangulum autem ΘE in ZO æquale est rectangulo ΘN in NO; adeoque rectangulum ΘN in NO minus est rectangulo ΘΛ in ΛO. Unde constat rectangulum ΘP in PO minus esse quam ΘN in NO. Cum autem rectangulum ΘN in NO æquale est rectangulo ΘE in ZO, rectangulum ΘP in PO etiam minus erit rectangulo ΘE in ZO; ac ratio PΘ ad ΘE minor erit ratione OZ ad PO. Per conversionem vero rationis, ΘP erit ad PE, sive ΘH ad EΠ, in majore ratione quam OZ ad ZP: ac alternando, ΘH erit ad OZ in majore ratione quam EΠ ad ZP. Est autem ΘH ad OZ sicut EΞ ad ZN: quare ratio EΞ ad ZN major est ratione EΠ ad ZP. Igitur recta HN, quæ propius distat *ab ipsa* HΛ, aufert rationem majorem quam quæ secatur à recta remotiore HP. Ac manifestum est rectas illi propiores semper abscindere rationes majores, quam quæ sunt remotiores ab eâdem.

Compo-

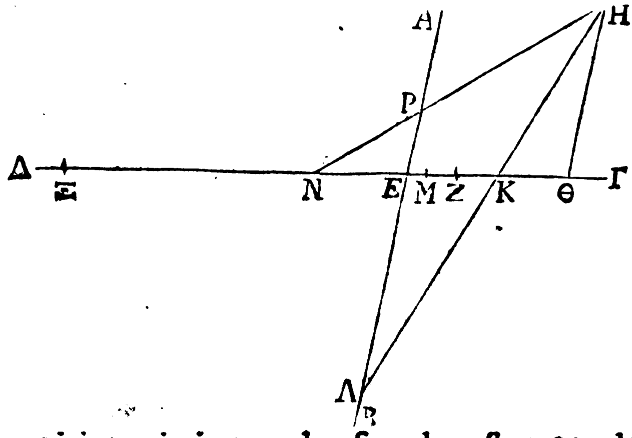
Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus prius descriptis ac rectâ parallelâ; capiatur ΕΛ media proportionalis inter ΕΘ, ΕΖ: ac jungatur recta ΗΛ auferens rationem ΕΚ ad ΖΛ. Ac si recta ΗΛ satisfacit proposito problemati, patet quod ea sola hoc præstat: quod si major fuerit ratione ΕΚ ad ΖΛ, impossibile erit problema; quia recta ΗΛ aufert rationem ΕΚ ad ΖΛ, majorem quam quælibet alia recta per punctum Η ducta, ipsisque ΖΔ, ΕΑ occurrens. At si proponatur ratio aliqua Ν ad Ξ, minor quam ratio ΕΚ ad ΖΛ; fiat ΛΜ æqualis ipsi ΛΘ: eritque rectangulum ΖΜ in ΘΕ æquale rectangulo ΘΛ in ΛΜ, ac ΕΚ ad ΖΛ erit ut ΘΗ ad ΖΜ. Jam fiat ut Ν ad Ξ ita ΘΗ ad rectam aliam ipsâ ΖΜ majorem, nempe ad ΖΟ. Cumque rectangulum ΟΜ in ΛΘ majus est rectangulo ΟΜ in ΕΘ, & rectangulum ΜΛ in ΛΘ æquale est rectangulo ΘΕ in ΖΜ; totum rectangulum ΛΘ



in ΛΟ majus erit toto rectangulo ΘΕ in ΖΟ; adeoque rectangulum ΘΕ in ΖΟ applicari potest ad rectam ΘΟ deficiens quadrato: idque duobus modis, ab utrâque scilicet parte puncti Λ. Si itaque per puncta designata Π & Ρ agantur rectæ ΗΠ, ΗΡ; dico quod recta utraque ΗΠ, ΗΡ satisfacit problemati, sive quod ΕΝ est ad ΖΡ sicut Ν ad Ξ: quodque ΕΞ est ad ΖΠ etiam ut Ν ad Ξ. Quoniam enim rectangulum ΘΡ in ΡΟ æquale est rectangulo ΘΕ in ΖΟ, erit ratio ΡΘ ad ΘΕ ut ΖΟ ad ΟΡ; ac per conversionem rationis, ΡΘ ad ΡΕ, hoc est ΘΗ ad ΕΝ, sicut ΖΟ ad ΖΡ. Permutando autem ΘΗ erit ad ΖΟ *ut* ΕΝ *ad* ΖΡ. *Sed* ΘΗ *est ad* ΖΟ ut Ν ad Ξ; quare ΕΝ est ad ΖΡ ut Ν ad Ξ. Ac pari argumento probabitur rationem ΕΞ ad ΖΠ esse ut Ν ad Ξ; quapropter utraque è rectis ΗΠ, ΗΡ solvit problema. Patet etiam rectas ab utraque parte propiores ipsi ΗΛ, auferre rationes majores quam quæ secantur à remotioribus ab eadem.

Innotescit autem extrema ratio hunc in modum. Quoniam EK est ad ZΛ sicut ΘH ad ZM; ac recta ZM æqualis est ipsis ZΛ, ΛM simul sumptis, hoc est, ipsis ΘΛ, ΛZ (ob ΘΛ ipsi MΛ æqualem.) Ipsæ vero ΘΛ, ΛZ simul sumptæ æquales sunt ipsis ΘE, EZ, cum duplo ipsius EΛ simul sumptis. Duplum autem rectæ EΛ potest quater rectangulum ΘE in EZ. Est igitur EK ad ΛZ sicut ΘH ad rectam compositam ex utrâque ΘE, EZ, & rectâ quæ potest quater rectangulum ΘE in EZ.

Invenimus itaque quo pacto construi possit problema secundum omnes casus ejus; ac manifestum est quod in nullo casu fieri potest ut construatur juxta omnes modos. Ductâ enim rectâ parallelâ, & inventâ mediâ proportionali inter ΘE, EZ; fiant EK, EN, eidem mediæ æquales: ac jungantur HN, HΛ. Ponatur etiam KM ipsi ΘK æqualis, ac NΞ ipsi ΘN. Jam ratio minima juxta modum secundum erit ratio ΛE ad ZK, sive ΘH ad ZM: maxima autem ratio juxta modum quartum, erit ut EP ad ZN, sive ut ΘH ad ZΞ. Quoniam

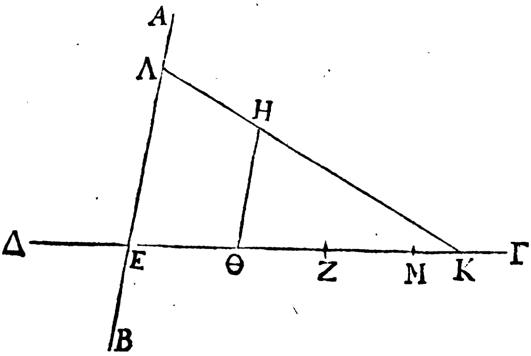


vero minima ratio juxta modum secundum est ut ΘH ad ZM, maxima autem juxta modum quartum ut ΘH ad ZΞ; evidens est rationem ΘH ad ZM majorem esse ratione ΘH ad ZΞ. Adeoque ratio data vel erit ut ΘH ad ZM; vel minor quam ΘH ad ZM, ac major quam ΘH ad ZΞ; vel major quam ΘH ad ZM; vel erit ut ΘH ad ZΞ; vel minor quam ΘH ad ZΞ. Quod si fuerit ut ΘH ad ZM, tribus modis construi potest, nempe juxta casum primum & tertium, quibus abscindi possunt

sunt rationes quævis; ac modo singulari juxta casum secundum: non autem juxta casum quartum, quia ratio ΘΗ ad ΖΜ major est ratione ΘΗ ad ΖΞ. Si fuerit ratio minor quam ΘΗ ad ΖΜ, ac major quam ΘΗ ad ΖΞ; erit problema juxta duos solum modos, primum nempe & tertium; neque juxta secundum nec quartum casum efficietur; quia ratio proposita minor est minimâ, ac major maximâ. Quod si major fuerit quam ΘΗ ad ΖΜ, erit problema quatuor modis solvendum; nempe primo ac tertio, ac dupliciter juxta modum secundum; non autem ad modum quartum, quia ratio major est maximâ, sive quam ratio ΘΗ ad ΖΞ; est enim ΘΗ ad ΖΜ major ratione ΘΗ ad ΖΞ. At vero si maxima fuerit, sive ut ΘΗ ad ΖΞ, tribus modis construetur; primo scilicet & tertio; ac modo singulari juxta casum quartum: non autem juxta modum secundum, quia *minor* est minima; ratio enim ΘΗ ad ΖΞ minor est ratione ΘΗ ad ΖΜ. Quod si minor fuerit ratio quam ΘΗ ad ΖΞ, quatuor diversis modis componetur; primo & tertio, ac dupliciter modo quarto: non autem modo secundo, quia ratio data minor est minimâ. Ostendimus itaque an compositio fieri possit, necne, per omnes varietates rationis proponendæ.

LOCUS SEPTIMUS.

Maneat jam, eodem modo quo prius, punctum datum Η: intersecet autem recta parallela citra punctum Ζ, hoc est, cadat inter puncta Ε & Ζ; ut est recta ΗΘ. Rectæ autem per punctum Η ductæ habebunt quatuor casus diversos: vel enim auferetur ratio è rectis ΖΓ, ΕΑ; vel ex ΖΕ, ΕΑ; vel ex ΖΕ, ΕΒ, vel denique ex ipsis ΖΔ, ΕΑ. *Cas.* I. Ducatur autem

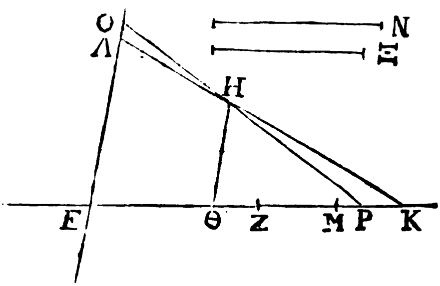


imprimis, juxta modum primum, recta ΚΗΛ auferens à rectis ΖΓ, ΕΑ, rationem ΕΛ ad ΖΚ, æqualem rationi datæ. Fiat ut

ΕΛ

E Λ ad Z K ita Θ H ad Z M; dato autem Θ H, datur quoque Z M magnitudine & poſitione: ac dato puncto Z punctum M etiam datum eſt. Cum vero E Λ eſt ad Z K ut Θ H ad Z M, erit alternando, E Λ ad Θ H, hoc eſt E K ad K Θ, ut K Z ad Z M; ac dividendo, erit E Θ ad Θ K ut K M ad M Z: adeoque rectangulum E Θ in M Z æquale erit rectangulo Θ K in K M. Sed rectangulum E Θ in Z M datur, datâ utrâque rectâ; adeoque rectangulum Θ K in K M etiam datur. Applicando itaque ad rectam datam Θ M rectangulum illud excedens quadrato, habebitur punctum K: ac dato puncto Z, recta etiam K H Λ poſitione datur.

Conſtruetur autem problema hunc in modum. Manentibus quæ prius, ac ductâ rectâ parallelâ; ſit ratio data ſicut N ad Ξ; *ac fiat ut* N *ad* Ξ ita Θ H ad Z M: atque applicetur ad rectam Θ M rectangulum æquale rectangulo Θ E in Z M excedens quadrato. Sit illud rectangulum Θ K in K M, ac jungatur recta K H producaturque. Dico quod recta K Λ ſatisfacit problemati, ſive quod E Λ eſt ad Z K ſicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum E Θ in Z M æquale eſt rectangulo Θ K in K M, erit E Θ ad Θ K ut K M ad M Z; ac componendo, erit E K ad K Θ, hoc eſt E Λ ad Θ H,

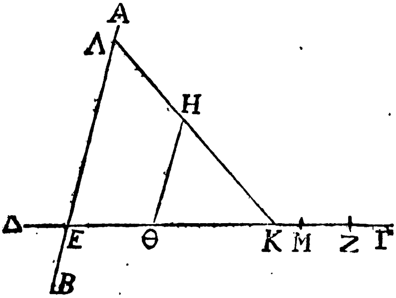


ſicut K Z ad Z M: quare permutando, erit E Λ ad K Z ſicut Θ H ad Z M, hoc eſt ut N ad Ξ (*per conſtructionem*) adeoque recta K Λ ſolvit problema. Dico etiam quod ſola hoc præſtat. Nam ſi fieri poteſt ut aliter ſolvatur, ducatur recta alia ut O H P; ut ſit O E ad Z P in ratione E Λ ad Z K. Hoc autem fieri nequit, quia antecedens major eſt antecedente, & conſequens minor conſequente; adeoque recta hæc aufert rationem majorem quam quæ abſcinditur à recta K Λ.

Caſ. II. Manentibus jam deſcriptis ac rectâ parallelâ; ducatur juxta modum ſecundum, recta K Λ auferens à rectis Z E, E Λ rationem E Λ ad K Z æqualem rationi datæ. Fiat Θ H ad Z M ut E Λ ad Z K. Quoniam vero E Λ eſt ad Z K ut Θ H ad Z M, alternando erit E Λ ad Θ H, ſive E K ad K Θ, ut K Z

ad

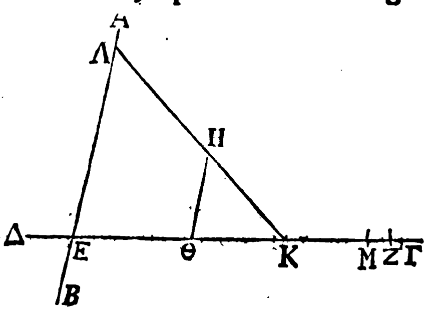
ad ZM. Recta autem EK major est quam KΘ, igitur KZ major est quam ZM. Data autem est recta ZM magnitudine & positione; quare dato puncto Z, datur quoque punctum M. Quoniam vero EK est ad KΘ ut KZ ad ZM, erit *dividendo*, EΘ ad ΘK sicut KM ad MZ; ac rectangulum EΘ in ZM æquale erit rectangulo KΘ in KM. Datâ autem utrâque EΘ, ZM, datur etiam rectangulum ΘK in KM, applicandum ad rectam cognitam ΘM deficiens quadrato: unde punctum K innotescet. Cognito autem puncto H, recta quoque KHΛ positione datur.



Quoniam vero ad constructionem requiritur, ut fiat ratio ΘH ad ZM æqualis rationi datæ; & ut applicetur ad rectam ΘM rectangulum æquale rectangulo ΘE in ZM deficiens quadrato, nempe rectangulum ΘK in KM; ita ut habeatur punctum K in recta ΘM: hoc autem fieri nequit generaliter. Igitur non semper, neque in omni casu possibile est componere problema.

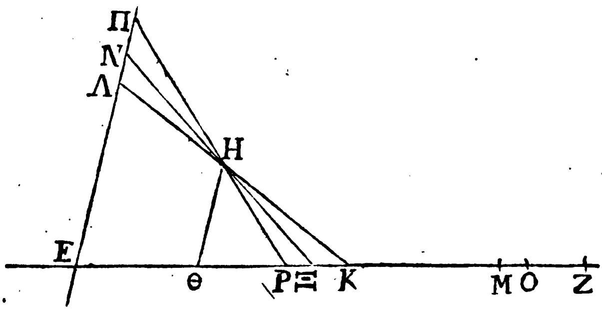
Fit autem modo singulari, si reperiatur punctum K in medio ipsius ΘM. Punctum vero K, in quo est extrema ratio, investigabitur ad hunc modum.

Ponamus extremam illam rationem esse ut ΘH ad ZM: ac divisâ rectâ MΘ bifariam in medio, oportet fieri rectangulum ΘK in KM æquale rectangulo EΘ in ZM. Restat igitur solum ut inveniatur punctum M in recta ΘZ, tale, ut bisectâ rectâ ΘM in puncto K, rectangulum ΘE in MZ æquale sit rectangulo ΘK in KM. Quoniam vero rectangulum ΘE in MZ æquale est rectangulo ΘK in KM, erit ZM ad MK sicut KΘ ad ΘE: ac componendo, erit ZK ad KM *sive* KΘ, ut KE ad ΘE. Summa autem antecedentium est ad summam



consequentium in eadem ratione, adeoque ZE est ad KE ut KE ad ΘE. Est igitur recta KE media proportionalis inter rectas datas ZE & ΘE; quare & ipsa KE datur magnitudine & positione; ac dato puncto E, punctum K quoque datur. Ob datum autem punctum Θ, datur etiam recta KΘ; cui æqualis est recta KM; datur itaque recta KM magnitudine & positione: ac dato puncto K, dabitur quoque punctum M, hoc est, punctum quæsitum.

Componetur autem Lemma hunc in modum. Maneant quæ prius, una cum rectâ parallelâ, & capiatur EK media proportionalis inter rectas ZE, EΘ; sitque recta KM ipsi ΘK æqualis. Cadet vero *punctum* M citra punctum Z, quia recta ZK major est quam KΘ. Etenim cum ZE est ad EK ut EK ad EΘ, erit differentia antecedentium ad differentiam consequentium in eadem ratione; hoc est ZE ad EK ut ZK ad KΘ. Sed antecedens major est consequente; itaque recta KZ major est quam ΘK. Junctâ autem & productâ rectâ HK; dico quod rectangulum ZM in ΘE æquale est rectangulo ΘK in KM; quodque ratio EΛ ad KZ æqualis est rationi ΘH ad ZM. Quoniam enim recta KE media proportionalis est inter ZE & ΘE; erit ZE ad EK sicut KE ad EΘ; & aufe-



rendo consequentes, erit residuum ZK ad residuum KΘ, hoc est ad KM, in eadem ratione, sive ut EK ad EΘ: ac dividendo, erit ZM ad MK ut KΘ ad ΘE: rectangulum igitur EΘ in ZM æquale est rectangulo MK in KΘ. Quinetiam quia KE est ad EΘ ut ZK ad KM; per conversionem rationis, erit EK ad KΘ, hoc est EΛ ad ΘH, ut KZ ad ZM, ac permutando, EΛ erit ad KZ ut ΘH ad ZM: adeoque efficitur constructio, si inveniatur EK media proportionalis inter ipsas EΘ, EZ, ac jungatur recta KHΛ. Jam inquirendum est an recta

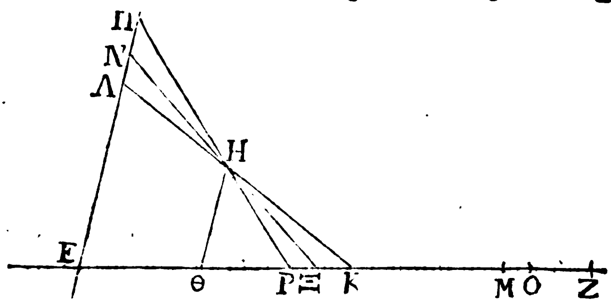
KHΛ

KHΛ auferat rationem majorem an minorem quâlibet aliâ rectâ, per punctum H ductâ, ipsisque EA, ZE occurrente.

Hoc autem determinatur hunc in modum. Manentibus quæ prius, ac ductâ rectâ parallelâ; sit EK media proportionalis inter ZE & EΘ, ac junctâ KHΛ, oportet inquirere an recta KΛ auferat rationem EΛ ad KZ, majorem vel minorem præ omnibus rectis per punctum H ducendis, ita ut occurrant ipsis EA, ZE. Fiat recta MK ipsi KΘ æqualis, & erit rectangulum ΘE in ZM æquale rectangulo ΘK in KM; ac ratio ΛE ad KZ æqualis rationi ΘH in ZM. Ducatur jam recta alia ut NΞ; & oportet conferre rationem NE ad ZΞ cum ratione ΛE ad ZK, hoc est, cum ratione ΘH ad ZM. Alternando autem, comparanda est ratio NE ad ΘH, sive EΞ ad ΞΘ, cum ratione ΞZ ad ZM; ac dividendo, comparanda est ratio EΘ ad ΘΞ cum ratione ΞM ad ZM: unde conferre licet rectangulum EΘ in ZM cum rectangulo ΘΞ in ΞM. Sed rectangulum ΘE in ZM æquale est rectangulo ΘK in KM; conferendum est igitur rectangulum ΘK in KM cum rectangulo ΘΞ in ΞM. Constat autem rectangulum ΘK in KM majus esse rectangulo ΘΞ in ΞM; quia ΘK æqualis est ipsi KM, ac proinde quadratum ex ΘK majus est rectangulo ΘΞ in ΞM. At rectangulum ΘK in KM æquale est rectangulo ΘE in ZM; quare rectangulum ΘE in ZM majus est rectangulo ΘΞ in ΞM; atque adeo ratio ΘE ad ΞΘ major est ratione ΞM ad ZM. Componendo autem ratio EΞ ad ΞΘ, sive EN ad ΘH, major erit ratione ΞZ ad ZM; ac permutando ratio EN ad ZΞ major erit ratione ΘH ad ZM, hoc est ratione EΛ ad ZK Quapropter recta KΛ aufert rationem minorem, quam quæ abscinditur à recta NΞ. Et manifestum est quod ex omnibus rectis per punctum H ductis, ipsasque ΘZ, EA intersecantibus, recta KΛ minorem aufert rationem.

Quoniam autem ratio EΛ ad ZK, sive ΘH ad ZM, minor est ratione EN ad ZΞ; faciamus ut EN ad ZΞ ita ΘH ad rectam aliam, quæ proinde minor erit quam ZM, puta ad ZO: ac manifestum est ex præmissis, quod rectangulum ΘE in ZO æquale erit rectangulo ΘΞ in ΞO. Ducatur jam recta alia ut ΠP, ac comparanda est ratio EN ad ZΞ, sive ΘH ad ZO, cum ratione EΠ ad PZ. Permutando autem conferatur ratio EΠ ad ΘH, sive EP ad PΘ, cum ratione PZ ad ZO; ac dividendo,

videndo, conferenda venit ratio ΘE ad PΘ cum ratione PO ad ZO; adeoque rectangulum ΘE in ZO cum rectangulo ΘP in PO conferendum. Est autem rectangulum ΘE in ZO æquale rectangulo ΘΞ in ΞO; quare comparandum est rectangulum ΘΞ in ΞO cum rectangulo ΘP in PO. Præterea conferatur rectangulum ΘK in KO cum rectangulo ΘΞ in ΞO. Quoniam vero rectangulum ΘΞ in ΞO æquale est rectangulo EΘ in ZO, conferatur rectangulum ΘK in KO cum rectangulo EΘ in ZO. Probatur autem rectangulum ΘK in KO majus esse rectangulo EΘ in ZO; quia EΘ in ZM majus est rectangulo EΘ in ZO. Est vero rectangulum EΘ in ZM æquale rectangulo ΘK in KM, *quo majus est rectangulum*

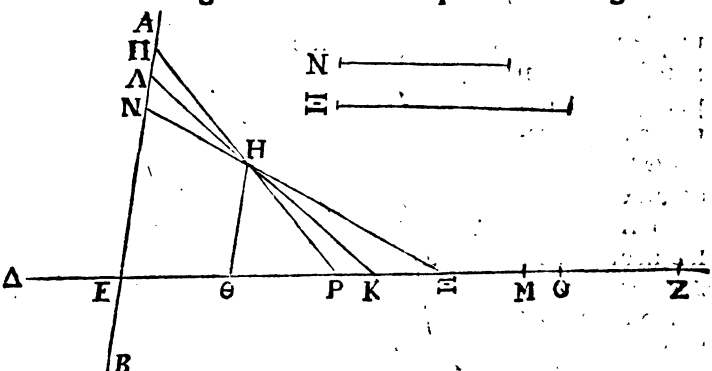


ΘK *in* KO: *quare rectangulum* ΘK *in* KO *majus est rectangulo* EΘ *in* ZM, *ac multo majus quam* EΘ *ad* ZO. Rectangulum autem EΘ in ZO æquale est rectangulo ΘΞ in ΞO; quocirca rectangulum ΘK in KO majus erit quam ΘΞ in ΞO: unde etiam manifestum est rectangulum ΘΞ in ΞO majus esse rectangulo ΘP in PO, adeoque rectangulum EΘ in ZO majus erit quam ΘP in PO. Quapropter ratio EΘ ad ΘP major erit ratione PO ad ZO; ac componendo ratio EP ad PΘ, sive EΠ ad ΘH, major erit ratione PZ ad ZO. Alternando vero ratio EΠ ad PZ major erit ratione ΘH ad ZO, sive EN ad ZΞ. Aufert itaque recta NΞ rationem minorem quam quæ abscinditur à recta ΠP. Rectæ igitur ipsi KΛ propiores abscindunt semper rationes minores, quam rectæ quæ sunt remotiores ab eadem.

Componetur autem problema hunc in modum. Maneant quæ supra; ac ductâ rectâ parallelâ, fiat EK media proportionalis inter EZ, EΘ; & jungatur recta HKΛ. Hæc recta KΛ auferet rationem EΛ ad KZ minorem qualibet aliâ, quæ à

rectis

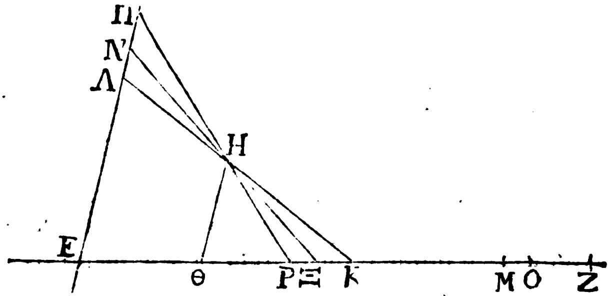
rectis Z Θ, E A resecari possit, rectâ per punctum H ducendâ. Ratio autem proposita vel eadem erit cum ratione E Λ ad K Z; vel minor erit eâ; vel major. Si fuerit eadem, tum recta K Λ satisfacit problemati. Ac patet quod ea sola; quia rectæ omnes per punctum H ductæ auferunt rationes majores quam quæ secatur ab ipsa K Λ. Quod si minor fuerit eâ, problema impossibile erit; quia auferenda est ratio minor minimâ. Sin major fuerit ratio ratione E Λ ad K Z, ut est ratio N ad Ξ; fiat K M ipsi Θ K æqualis, & rectangulum E Θ in M Z æquale erit rectangulo Θ K in K M: & ratio E Λ ad K Z æqualis erit rationi Θ H ad Z M. Cum autem ratio N ad Ξ major est ratione E Λ ad K Z, sive Θ H ad Z M; faciamus ut N ad Ξ ita Θ H ad rectam aliam minorem ipsâ Z M, puta ad Z O. Quoniam vero rectangulum E Θ in Z M æquale est rectangulo Θ K



in K M, erit rectangulum E Θ in Z O minus rectangulo Θ K in K O; quare fieri potest ut ad rectam Θ O applicetur rectangulum, æquale rectangulo E Θ in Z O deficiens quadrato, duobus quidem modis; ab utraque scilicet parte puncti K: quo facto habebuntur puncta requisita, nempe puncta Ξ, P. Junctis igitur rectis Ξ H, P H, ac productis; dico quod utraque è rectis Π P, N Ξ satisfacit problemati; sive quod E Π est ad Z P, ac E N ad Z Ξ, sicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum E Θ in Z O æquale est rectangulo Θ P in P O, erit E Θ ad Θ P sicut P O ad Z O. Componendo autem ac deinde permutando, erit E Π ad P Z sicut Θ H ad Z O, hoc est ut N ad Ξ; adeoque recta Π P solvit problema. Pari etiam modo probabitur rectam Ξ N idem præstare; adeoque utraque ex illis solutionem præbet. Ac manifestum est rectas utrinque propiores ipsi K Λ abscin-

 dere

videndo, conferenda venit ratio ΘE ad PΘ cum ratione PO ad ZO; adeoque rectangulum ΘE in ZO cum rectangulo ΘP in PO conferendum. Est autem rectangulum ΘE in ZO æquale rectangulo ΘΞ in ΞO; quare comparandum est rectangulum ΘΞ in ΞO cum rectangulo ΘP in PO. Præterea conferatur rectangulum ΘK in KO cum rectangulo ΘΞ in ΞO. Quoniam vero rectangulum ΘΞ in ΞO æquale est rectangulo EΘ in ZO, conferatur rectangulum ΘK in KO cum rectangulo EΘ in ZO. Probatur autem rectangulum ΘK in KO majus esse rectangulo EΘ in ZO; quia EΘ in ZM majus est rectangulo EΘ in ZO. Est vero rectangulum EΘ in ZM æquale rectangulo ΘK in KM, *quo majus est rectangulum*

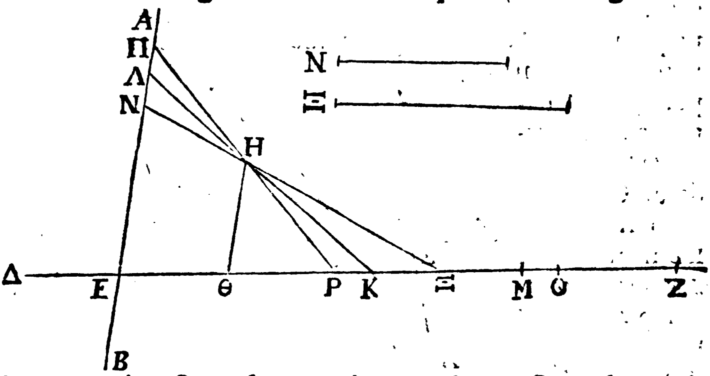


ΘK *in* KO: *quare rectangulum* ΘK *in* KO *majus est rectangulo* EΘ *in* ZM, *ac multo majus quam* EΘ *ad* ZO. Rectangulum autem EΘ in ZO æquale est rectangulo ΘΞ in ΞO; quocirca rectangulum ΘK in KO majus erit quam ΘΞ in ΞO: unde etiam manifestum est rectangulum ΘΞ in ΞO majus esse rectangulo ΘP in PO, adeoque rectangulum EΘ in ZO majus erit quam ΘP in PO. Quapropter ratio EΘ ad ΘP major erit ratione PO ad ZO; ac componendo ratio EP ad PΘ, sive EΠ ad ΘH, major erit ratione PZ ad ZO. Alternando vero ratio EΠ ad PZ major erit ratione ΘH ad ZO, sive EN ad ZΞ. Aufert itaque recta NΞ rationem minorem quam quæ abscinditur à recta ΠP. Rectæ igitur ipsi KΛ propiores abscindunt semper rationes minores, quam rectæ quæ sunt remotiores ab eadem.

Componetur autem problema hunc in modum. Maneant quæ supra; ac ductâ rectâ parallelâ, fiat EK media proportionalis inter EZ, EΘ; & jungatur recta HKΛ. Hæc recta KΛ auferet rationem EΛ ad KZ minorem qualibet aliâ, quæ à

rectis

rectis ZΘ, EΛ resecari possit, rectâ per punctum H ducendâ. Ratio autem proposita vel eadem erit cum ratione EΛ ad KZ; vel minor erit eâ; vel major. Si fuerit eadem, tum recta KΛ satisfacit problemati. Ac patet quod ea sola; quia rectæ omnes per punctum H ductæ auferunt rationes majores quam quæ secatur ab ipsa KΛ. Quod si minor fuerit eâ, problema impossibile erit; quia auferenda est ratio minor minimâ. Sin major fuerit ratio ratione EΛ ad KZ, ut est ratio N ad Ξ; fiat KM ipsi ΘK æqualis, & rectangulum EΘ in MZ æquale erit rectangulo ΘK in KM: & ratio EΛ ad KZ æqualis erit rationi ΘH ad ZM. Cum autem ratio N ad Ξ major est ratione EΛ ad KZ, sive ΘH ad ZM; faciamus ut N ad Ξ ita ΘH ad rectam aliam minorem ipsâ ZM, puta ad ZO. Quoniam vero rectangulum EΘ in ZM æquale est rectangulo ΘK

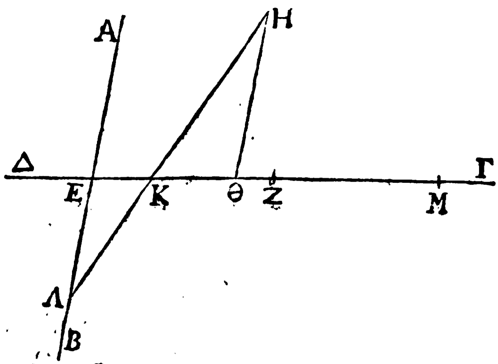


in KM, erit rectangulum EΘ in ZO minus rectangulo ΘK in KO; quare fieri potest ut ad rectam ΘO applicetur rectangulum, æquale rectangulo EΘ in ZO deficiens quadrato, duobus quidem modis; ab utraque scilicet parte puncti K: quo facto habebuntur puncta requisita, nempe puncta Ξ, P. Junctis igitur rectis ΞH, PH, ac productis; dico quod utraque è rectis ΠP, NΞ satisfacit problemati; sive quod EΠ est ad ZP, ac EN ad ZΞ, sicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum EΘ in ZO æquale est rectangulo ΘP in PO, erit EΘ ad ΘP sicut PO ad ZO. Componendo autem ac deinde permutando, erit EΠ ad PZ sicut ΘH ad ZO, hoc est ut N ad Ξ; adeoque recta ΠP solvit problema. Pari etiam modo probabitur rectam ΞN idem præstare; adeoque utraque ex illis solutionem præbet. Ac manifestum est rectas utrinque propiores ipsi KΛ abscindere

dere rationes minores, quam quæ auferuntur à remotioribus ab eadem.

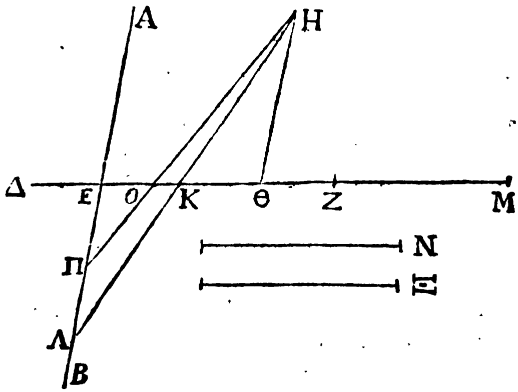
Extrema autem ratio determinatur hunc in modum. Quoniam ratio E A ad K Z est ut Θ H ad Z M; ac Z M est excessus utrarumq; E Z, E Θ supra utrasque M E, E Θ simul sumptas: ipsæ autem M E, E Θ simul sumptæ valent duplum ipsius K E, quia recta M K æqualis est ipsi K Θ; duplum vero ipsius K E potest quater rectangulum Z E in Θ E, quia media proportionalis est inter ipsas. Erit igitur ratio illa minima æqualis rationi ipsius Θ H ad excessum, quo ipsæ Z E, Θ E simul sumptæ superant rectam, quæ potest quater rectangulum Z E in Θ E.

Cas. III. Manentibus quæ supra, ductâque rectâ parallelâ; ducatur jam recta K Λ, juxta modum tertium, auferens à rectis E B, Z E rationem Λ E ad Z K, æqualem rationi datæ: ac fiat Θ H ad Z M sicut Λ E ad Z K. Data autem est recta Θ H, datur itaque recta Z M tum magnitudine tum positione; ac dato puncto Z, etiam punctum M datur; adeoque recta Θ M quoque datur. Quoniam vero Λ E est ad K Z sicut Θ H ad Z M, erit permutando Λ E ad Θ H, hoc est E K ad K Θ, ut K Z ad Z M; quare componendo, erit E Θ ad Θ K sicut K M ad M Z; unde rectangulum Θ E in M Z æquale erit rectangulo M K in K Θ. Datur autem rectangulum E Θ in M Z, datâ scilicet utrâque rectâ; adeoque rectangulum M K in K Θ datur. Applicando igitur illud ad rectam datam M Θ excedens quadrato, punctum K datur; ac dato puncto H, etiam recta K Λ positione datur.

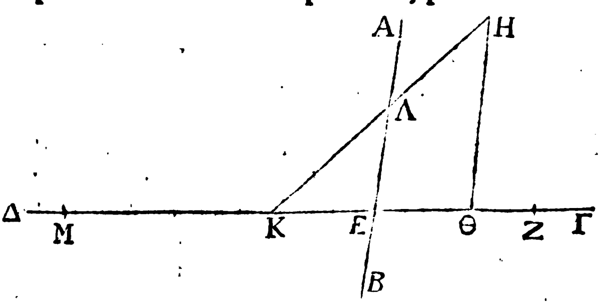


Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus descriptis, ductâque rectâ parallelâ, sit ratio data sicut N ad Ξ; ac fiat Θ H ad Z M sicut N ad Ξ: dein applicetur ad rectam Θ M rectangulum æquale rectangulo Θ E in M Z excedens quadrato, nempe rectangulum M K in K Θ. Jungatur H K, quæ producatur *ad* Λ. Dico quod recta H Λ solvit problema,

blema, sive quod Λ E est ad K Z sicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum E Θ in M Z æquale est rectangulo M K in K Θ, erit E Θ ad Θ K sicut K M ad M Z; ac dividendo, E K ad K Θ, hoc est Λ E ad H Θ, sicut K Z ad Z M. Alternando autem Λ E erit ad K Z sicut Θ H ad Z M, sive ut N ad Ξ. Quapropter recta H Λ solvit problema. Dico quoque quod ea sola hoc præstat. Nam si fieri potest, ducatur alia, ut H Π; ac si recta H Π aufert eandem rationem N ad Ξ, erit Λ E ad K Z sicut Π E ad O Z. Hoc autem impossibile est, quia antecedens *minor est antecedente* & consequens major consequente. Unde manifestum est rectam H Π abscindere rationem minorem, quam quæ aufertur à recta H Λ.



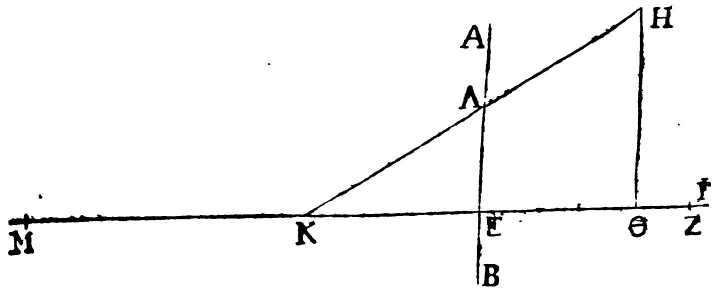
Cas. IV. Manentibus descriptis, ductâque rectâ parallelâ; ducatur jam modo quarto, recta H K auferens à rectis E A, Z Δ rationem E Λ ad K Z æqualem rationi datæ. Fiat Θ H ad Z M sicut E Λ ad K Z; ac datâ rectâ Θ H, dabitur quoque Z M magnitudine & positione. Dato autem puncto Z, punctum M datur; & ob punctum Θ datum recta etiam Θ M data est. Quoniam vero Θ H est ad Z M sicut E Λ ad K Z; erit permutando Θ H ad E Λ, hoc est Θ K ad K E, sicut M Z ad Z K; ac per conversionem rationis, erit Θ K ad Θ E ut Z M ad M K; adeoque rectangulum Θ E in Z M æquale



æquale erit rectangulo ΘK in KM. Sed rectangulum ΘE in ZM datur, rectangulum igitur ΘK in KM datum est. Dein applicando ad rectam datam ΘM rectangulum illud deficiens quadrato, punctum K innotescet. Dato autem puncto H, recta quoque HKΛ positione datur.

Quoniam autem ad constructionem oportet quod ΘH sit ad ZM in ratione propositâ; quodque rectangulum æquale rectangulo ΘE in ZM applicetur ad rectam ΘM deficiens quadrato, nempe ΘK in KM: applicatio ista non semper fieri potest, ob causas modo dictas, nisi fuerit ratio intra certos limites: adeoque non semper effici potest problematis constructio.

Fit autem modo singulari, si reperiatur punctum K in medio ipsius ΘM, eritque Analysis hujusmodi. Ad determinandam extremam rationem, ponamus rationem ΘH ad ZM æqualem illi; ac secemus rectam ΘM bifariam in medio ad punctum K, ita ut rectangulum ZM in ΘE æquale sit rectangulo ΘK in KM. Inveniendum est igitur tale punctum M,



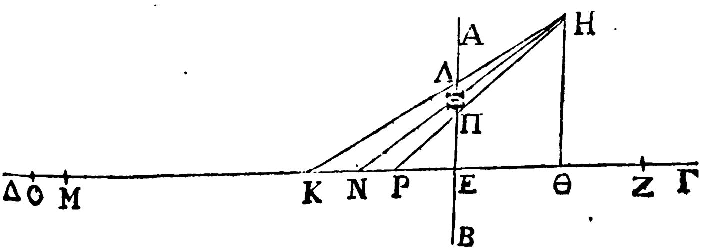
in recta ΔZ, ut, sectâ rectâ ΘM bifariam in puncto K, rectangulum ZM in ΘE æquale fuerit rectangulo ΘK in KM. Sit itaque ZM in ΘE æquale rectangulo ΘK in KM; ac ZM erit ad MK sicut KΘ ad ΘE; dividendo autem ZK erit ad KM ut KE ad ΘE. Cum autem recta ΘK æqualis est ipsi KM, erit ZK ad KΘ sicut KE ad EΘ. Differentia vero antecedentium est ad differentiam consequentium in eadem ratione; adeoque ZE erit ad EK sicut EK ad EΘ: quare recta EK media proportionalis est inter ipsas ZE, EΘ. Ambæ vero rectæ ZE, EΘ dantur, recta igitur EK datur magnitudine & positione. Dato autem puncto Θ, recta quoque ΘK datur, cui æqualis est recta KM; adeoque KM datur magnitudine

udine & positione. Sed datur punctum K, punctum M ergo latum est. Est autem punctum M punctum quæsitum.

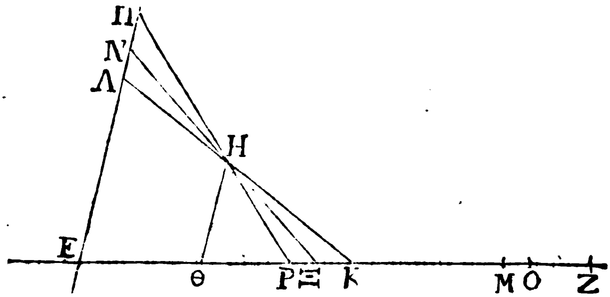
Componetur autem propositio hunc in modum. Manentibus descriptis ac ductâ rectâ parallelâ; capiatur E K media proportionalis inter ipsas Z E, E Θ; ac fiat recta K M ipsi K Θ æqualis: & jungatur ipsa K H. Dico quod rectangulum Z M in E Θ æquale erit rectangulo Θ K in K M, quodque ratio E A ad Z K erit ut Θ H ad Z M. Quoniam enim Z E est ad E K ut E K ad E Θ, ac summa antecedentium est ad summam consequentium in eadem ratione; erit Z K ad K Θ ut E K ad E Θ. Sed K Θ æqualis est rectæ K M; ergo Z K erit ad K M ut K E ad E Θ. Componendo autem Z M erit ad M K ut K Θ ad Θ E. Quare rectangulum Z M in Θ E æquale erit rectangulo M K in K Θ. Quinetiam cum Z M sit ad M K sicut K Θ *ad* Θ E, *per conversionem rationis, erit* Z M *ad* Z K *ut* K Θ ad K E, sive ut Θ H ad E A; quare permutando, Θ H erit ad Z M ut E A ad Z K. Quapropter rite construitur, si inveniatur media proportionalis inter Z E & E Θ, puta recta E K, ac jungatur ipsa H A K.

Jam inquirendum est an recta H K auferat rationem E A ad Z K, minorem vel majorem quâvis aliâ rectâ per punctum H ducendâ, quæ ipsis Z Δ, E A occurrat.

Hoc autem determinatur in hunc modum. Manentibus quæ prius, ductâque rectâ parallelâ; sit E K media propor-



tionalis inter Z E & E Θ, ac jungatur H K. Oportet inquirere an recta H K auferat rationem E A ad Z K, majorem vel minorem quavis aliâ rectâ, quæ per H ducta secet ipsas Z Δ, E A. Fiat recta K M æqualis ipsi K Θ, ac rectangulum Z M in E Θ æquale erit rectangulo Θ K in K M; & ratio E Λ ad Z K æqualis rationi Θ H ad Z M. Ducatur jam recta alia ut H N; & comparanda venit ratio E A ad Z K, sive Θ H *ad* Z M, *cum ratione* videndo, conferenda venit ratio ΘΕ ad ΡΘ cum ratione ΡΟ ad ΖΟ; adeoque rectangulum ΘΕ in ΖΟ cum rectangulo ΘΡ in ΡΟ conferendum. Est autem rectangulum ΘΕ in ΖΟ æquale rectangulo ΘΞ in ΞΟ; quare comparandum est rectangulum ΘΞ in ΞΟ cum rectangulo ΘΡ in ΡΟ. Præterea conferatur rectangulum ΘΚ in ΚΟ cum rectangulo ΘΞ in ΞΟ. Quoniam vero rectangulum ΘΞ in ΞΟ æquale est rectangulo ΕΘ in ΖΟ, conferatur rectangulum ΘΚ in ΚΟ cum rectangulo ΕΘ in ΖΟ. Probatur autem rectangulum ΘΚ in ΚΟ majus esse rectangulo ΕΘ in ΖΟ; quia ΕΘ in ΖΜ majus est rectangulo ΕΘ in ΖΟ. Est vero rectangulum ΕΘ in ΖΜ æquale rectangulo ΘΚ in ΚΜ, *quo majus est rectangulum*

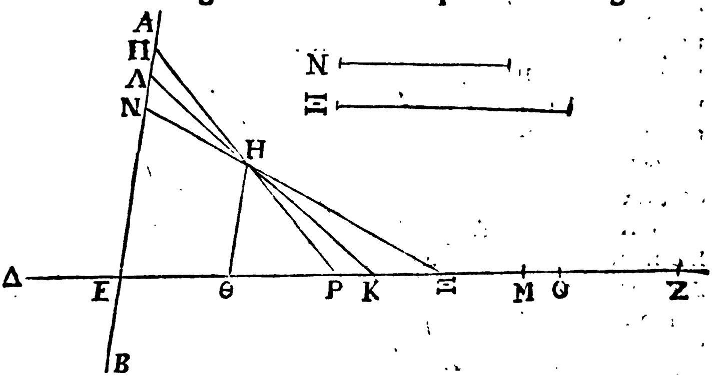


ΘΚ *in* ΚΟ: *quare rectangulum* ΘΚ *in* ΚΟ *majus est rectangulo* ΕΘ *in* ΖΜ, *ac multo majus quam* ΕΘ *ad* ΖΟ. Rectangulum autem ΕΘ in ΖΟ æquale est rectangulo ΘΞ in ΞΟ; quocirca rectangulum ΘΚ in ΚΟ majus erit quam ΘΞ in ΞΟ: unde etiam manifestum est rectangulum ΘΞ in ΞΟ majus esse rectangulo ΘΡ in ΡΟ, adeoque rectangulum ΕΘ in ΖΟ majus erit quam ΘΡ in ΡΟ. Quapropter ratio ΕΘ ad ΘΡ major erit ratione ΡΟ ad ΖΟ; ac componendo ratio ΕΡ ad ΡΘ, sive ΕΠ ad ΘΗ, major erit ratione ΡΖ ad ΖΟ. Alternando vero ratio ΕΠ ad ΡΖ major erit ratione ΘΗ ad ΖΟ, sive ΕΝ ad ΖΞ. Aufert itaque recta ΝΞ rationem minorem quam quæ abscinditur à recta ΠΡ. Rectæ igitur ipsi ΚΛ propiores abscindunt semper rationes minores, quam rectæ quæ sunt remotiores ab eadem.

Componetur autem problema hunc in modum. Maneant quæ supra; ac ductâ rectâ parallelâ, fiat ΕΚ media proportionalis inter ΕΖ, ΕΘ; & jungatur recta ΗΚΛ. Hæc recta ΚΛ auferet rationem ΕΛ ad ΚΖ minorem qualibet aliâ, quæ à

rectis

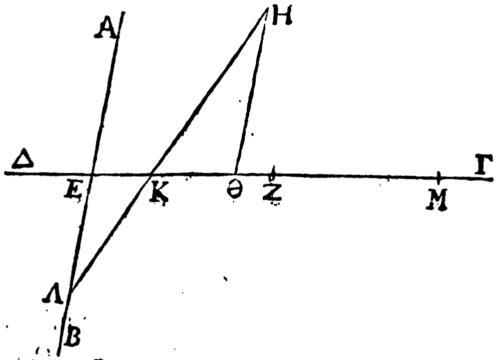
rectis ZΘ, EΛ resecari possit, recta per punctum H ducenda. Ratio autem proposita vel eadem erit cum ratione EΛ ad KZ; vel minor erit eâ; vel major. Si fuerit eadem, tum recta KΛ satisfacit problemati. Ac patet quod ea sola; quia rectæ omnes per punctum H ductæ auferunt rationes majores quam quæ secatur ab ipsa KΛ. Quod si minor fuerit eâ, problema impossibile erit; quia auferenda est ratio minor minimâ. Sin major fuerit ratio ratione EΛ ad KZ, ut est ratio N ad Ξ; fiat KM ipsi ΘK æqualis, & rectangulum EΘ in MZ æquale erit rectangulo ΘK in KM: & ratio EΛ ad KZ æqualis erit rationi ΘH ad ZM. Cum autem ratio N ad Ξ major est ratione EΛ ad KZ, sive ΘH ad ZM; faciamus ut N ad Ξ ita ΘH ad rectam aliam minorem ipsâ ZM, puta ad ZO. Quoniam vero rectangulum EΘ in ZM æquale est rectangulo ΘK



in KM, erit rectangulum EΘ in ZO minus rectangulo ΘK in KO; quare fieri potest ut ad rectam ΘO applicetur rectangulum, æquale rectangulo EΘ in ZO deficiens quadrato, duobus quidem modis; ab utraque scilicet parte puncti K: quo facto habebuntur puncta requisita, nempe puncta Ξ, P. Junctis igitur rectis ΞH, PH, ac productis; dico quod utraque è rectis ΠP, NΞ satisfacit problemati; sive quod EΠ est ad ZP, ac EN ad ZΞ, sicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum EΘ in ZO æquale est rectangulo ΘP in PO, erit EΘ ad ΘP sicut PO ad ZO. Componendo autem ac deinde permutando, erit EΠ ad PZ sicut ΘH ad ZO, hoc est ut N ad Ξ; adeoque recta ΠP solvit problema. Pari etiam modo probabitur rectam ΞN idem præstare; adeoque utraque ex illis solutionem præbet. Ac manifestum est rectas utrinque propiores ipsi KΛ abscindere rationes minores, quam quæ auferuntur à remotioribus ab eadem.

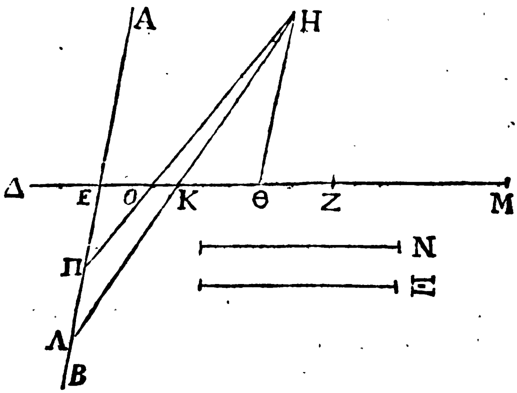
Extrema autem ratio determinatur hunc in modum. Quoniam ratio EA ad KZ est ut ΘH ad ZM; ac ZM est excessus utrarumq; EZ, EΘ supra utrasque ME, EΘ simul sumptas: ipsæ autem ME, EΘ simul sumptæ valent duplum ipsius KE, quia recta MK æqualis est ipsi KΘ; duplum vero ipsius KE potest quater rectangulum ZE in ΘE, quia media proportionalis est inter ipsas. Erit igitur ratio illa minima æqualis rationi ipsius ΘH ad excessum, quo ipsæ ZE, ΘE simul sumptæ superant rectam, quæ potest quater rectangulum ZE in ΘE.

Cas. III. Manentibus quæ supra, ductâque rectâ parallelâ; ducatur jam recta KΛ, juxta modum tertium, auferens à rectis EB, ZE rationem ΛE ad ZK, æqualem rationi datæ: ac fiat ΘH ad ZM sicut ΛE ad ZK. Data autem est recta ΘH, datur itaque recta ZM tum magnitudine tum positione; ac dato puncto Z, etiam punctum M datur; adeoque recta ΘM quoque datur. Quoniam vero ΛE est ad KZ sicut ΘH ad ZM, erit permutando ΛE ad ΘH, hoc est EK ad KΘ, ut KZ ad ZM; quare componendo, erit EΘ ad ΘK sicut KM ad MZ; unde rectangulum ΘE in MZ æquale erit rectangulo MK in KΘ. Datur autem rectangulum EΘ in MZ, datâ scilicet utrâque rectâ; adeoque rectangulum MK in KΘ datur. Applicando igitur illud ad rectam datam MΘ excedens quadrato, punctum K datur; ac dato puncto H, etiam recta KΛ positione datur.

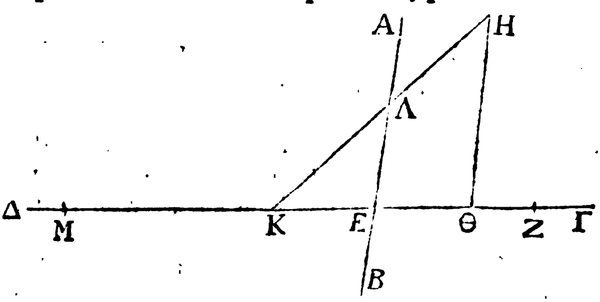


Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus descriptis, ductâque rectâ parallelâ, sit ratio data sicut N ad Ξ; ac fiat ΘH ad ZM sicut N ad Ξ: dein applicetur ad rectam ΘM rectangulum æquale rectangulo ΘE in MZ excedens quadrato, nempe rectangulum MK in KΘ. Jungatur HK, quæ producatur *ad* Λ. Dico quod recta HΛ solvit problema,

blema, sive quod Λ E est ad K Z sicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum E Θ in M Z æquale est rectangulo M K in K Θ, erit E Θ ad Θ K sicut K M ad M Z; ac dividendo, E K ad K Θ, hoc est Λ E ad H Θ, sicut K Z ad Z M. Alternando autem Λ E erit ad K Z sicut Θ H ad Z M, sive ut N ad Ξ. Quapropter recta H Λ solvit problema. Dico quoque quod ea sola hoc præstat. Nam si fieri potest, ducatur alia, ut H Π; ac si recta H Π aufert eandem rationem N ad Ξ, erit Λ E ad K Z sicut Π E ad O Z. Hoc autem impossibile est, quia antecedens *minor est antecedente* & consequens major consequente. Unde manifestum est rectam H Π abscindere rationem minorem, quam quæ aufertur à recta H Λ.



Cas. IV. Manentibus descriptis, ductâque rectâ parallelâ; ducatur jam modo quarto, recta H K auferens à rectis E A, Z Δ rationem E Λ ad K Z æqualem rationi datæ. Fiat Θ H ad Z M sicut E Λ ad K Z; ac datâ rectâ Θ H, dabitur quoque Z M magnitudine & positione. Dato autem puncto Z, punctum M datur; & ob punctum Θ datum recta etiam Θ M data est. Quoniam vero Θ H est ad Z M sicut E Λ ad K Z; erit permutando Θ H ad E Λ, hoc est Θ K ad K E, sicut M Z ad Z K; ac per conversionem rationis, erit Θ K ad Θ E ut Z M ad M K: adeoque rectangulum Θ E in Z M

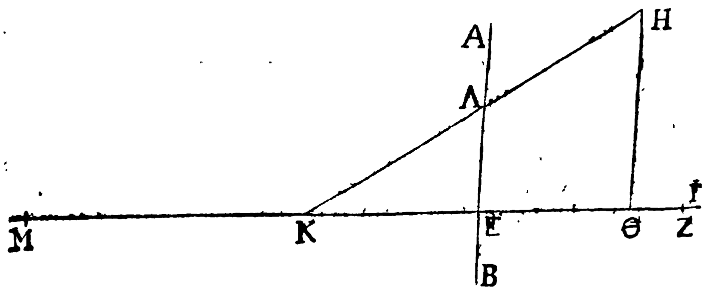


æquale

æquale erit rectangulo Θ K in K M. Sed rectangulum Θ E in Z M datur, rectangulum igitur Θ K in K M datum est. Dein applicando ad rectam datam Θ M rectangulum illud deficiens quadrato, punctum K innotescet. Dato autem puncto H, recta quoque H K Λ positione datur.

Quoniam autem ad constructionem oportet quod Θ H sit ad Z M in ratione propositâ; quodque rectangulum æquale rectangulo Θ E in Z M applicetur ad rectam Θ M deficiens quadrato, nempe Θ K in K M: applicatio ista non semper fieri potest, ob causas modo dictas, nisi fuerit ratio intra certos limites: adeoque non semper effici potest problematis constructio.

Fit autem modo singulari, si reperiatur punctum K in medio ipsius Θ M, eritque Analysis hujusmodi. Ad determinandam extremam rationem, ponamus rationem Θ H ad Z M æqualem illi; ac secemus rectam Θ M bifariam in medio ad punctum K, ita ut rectangulum Z M in Θ E æquale sit rectangulo Θ K in K M. Inveniendum est igitur tale punctum M,



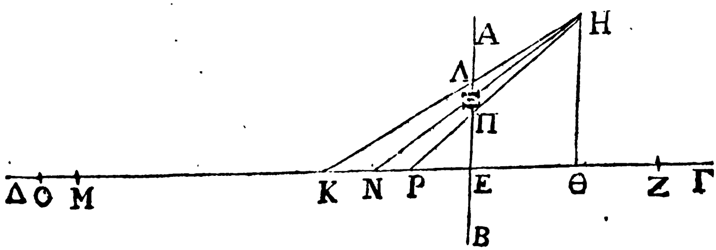
in recta Δ Z, ut, sectâ rectâ Θ M bifariam in puncto K, rectangulum Z M in Θ E æquale fuerit rectangulo Θ K in K M. Sit itaque Z M in Θ E æquale rectangulo Θ K in K M; ac Z M erit ad M K sicut K Θ ad Θ E; dividendo autem Z K erit ad K M ut K E ad Θ E. Cum autem recta Θ K æqualis est ipsi K M, erit Z K ad K Θ sicut K E ad E Θ. Differentia vero antecedentium est ad differentiam consequentium in eadem ratione; adeoque Z E erit ad E K sicut E K ad E Θ: quare recta E K media proportionalis est inter ipsas Z E, E Θ. Ambæ vero rectæ Z E, E Θ dantur, recta igitur E K datur magnitudine & positione. Dato autem puncto Θ, recta quoque Θ K datur, cui æqualis est recta K M; adeoque K M datur magnitudine

tudine & positione. Sed datur punctum K, punctum M ergo datum est. Est autem punctum M punctum quæsitum.

Componetur autem propositio hunc in modum. Manentibus descriptis ac ductâ rectâ parallelâ; capiatur E K media proportionalis inter ipsas Z E, E Θ; ac fiat recta K M ipsi K Θ æqualis: & jungatur ipsa K H. Dico quod rectangulum Z M in E Θ æquale erit rectangulo Θ K in K M, quodque ratio E A ad Z K erit ut Θ H ad Z M. Quoniam enim Z E est ad E K ut E K ad E Θ, ac summa antecedentium est ad summam consequentium in eadem ratione; erit Z K ad K Θ ut E K ad E Θ. Sed K Θ æqualis est rectæ K M; ergo Z K erit ad K M ut K E ad E Θ. Componendo autem Z M erit ad M K ut K Θ ad Θ E. Quare rectangulum Z M in Θ E æquale erit rectangulo M K in K Θ. Quinetiam cum Z M sit ad M K sicut K Θ *ad* Θ E, *per conversionem rationis, erit* Z M *ad* Z K *ut* K Θ ad K E, sive ut Θ H ad E A; quare permutando, Θ H erit ad Z M ut E A ad Z K. Quapropter rite construitur, si inveniatur media proportionalis inter Z E & E Θ, puta recta E K, ac jungatur ipsa H Λ K.

Jam inquirendum est an recta H K auferat rationem E A ad Z K, minorem vel majorem quâvis aliâ rectâ per punctum H ducendâ, quæ ipsis Z Δ, E A occurrat.

Hoc autem determinatur in hunc modum. Manentibus quæ prius, ductâque rectâ parallelâ; sit E K media proportionalis



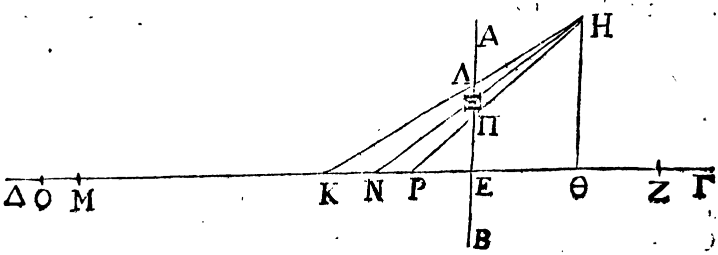
tionalis inter Z E & E Θ, ac jungatur H K. Oportet inquirere an recta H K auferat rationem E A ad Z K, majorem vel minorem quavis aliâ rectâ, quæ per H ducta secet ipsas Z Δ, E A. Fiat recta K M æqualis ipsi K Θ, ac rectangulum Z M in E Θ æquale erit rectangulo Θ K in K M; & ratio E Λ ad Z K æqualis rationi Θ H ad Z M. Ducatur jam recta alia ut H N; & comparanda venit ratio E A ad Z K, sive Θ H *ad* Z M, *cum ratione*

tione Β Ξ *ad* Ζ Ν; *& alternando, conferenda est ratio* Θ Η *ad* Ξ Ε, sive Θ Ν ad Ν Ε, cum ratione Μ Ζ ad Ζ Ν. Convertendo autem rationem, conferatur ratio Ζ Μ ad Μ Ν cum ratione Θ Ν ad Θ Ε; unde rectangulum Ζ Μ in Θ Ε comparandum est cum rectangulo Μ Ν in Θ Ν. Sed rectangulum Θ Κ in Κ Μ æquale est rectangulo Ζ Μ in Θ Ε; comparandum est itaque rectangulum Θ Κ in Κ Μ cum rectangulo Θ Ν in Ν Μ. Manifestum est autem rectangulum Θ Κ in Κ Μ majus esse rectangulo Θ Ν in Ν Μ; cumque Θ Κ in Κ Μ æquale est ipsi Ζ Μ in Θ Ε, rectangulum Ζ Μ in Θ Ε majus erit rectangulo Θ Ν in Ν Μ: ratio igitur Θ Ν ad Θ Ε minor erit ratione Ζ Μ ad Μ Ν. Per conversionem vero rationis, ratio Θ Ν ad Ν Ε, sive Θ Η ad Ε Ξ, major erit ratione Μ Ζ ad Ζ Ν; alternando autem ratio Θ Η ad Ζ Μ major erit ratione Ε Ξ ad Ζ Ν: quare recta Η Κ abscindit rationem majorem quam recta Η Ν. Unde constat, quod præ omnibus rectis quæ duci possint per punctum Η, ita ut rectas Ζ Δ, Ε Α intersecent, recta Η Κ aufert rationem Ε Λ ad Ζ Κ maximam.

Dico præterea quod rectæ propiores ipsi Η Κ abscindunt rationes majores, quam rectæ quæ remotiores sunt ab eadem. Quoniam enim ratio Ε Λ ad Ζ Κ, sive Θ Η ad Ζ Μ, major est ratione Ε Ξ ad Ζ Ν; faciamus ut Ε Ξ ad Ζ Ν ita Θ Η ad rectam aliam, nempe ad Ζ Ο, quæ proinde major erit quam Ζ Μ. Constat autem ex præmissis rectangulum Ζ Ο in Θ Ε æquari rectangulo Θ Ν in Ν Ο. Ducatur jam alia recta ut Η Ρ; & oportet comparare rationem Ε Ξ ad Ζ Ν, sive Θ Η ad Ζ Ο, cum ratione Ε Π ad Ζ Ρ. Alternando comparanda est ratio Θ Η ad Ε Π, sive Θ Ρ ad Ρ Ε, cum ratione Ο Ζ ad Ζ Ρ. Per conversionem autem rationis, conferatur ratio Θ Ρ ad Θ Ε cum ratione Ο Ζ ad Ο Ρ, ac proinde rectangulum Ζ Ο in Θ Ε cum rectangulo Θ Ρ in Ρ Ο. Sed rectangulum Ζ Ο in Θ Ε æquale est rectangulo Θ Ν in Ν Ο, adeoque comparandum est rectangulum Θ Ν in Ν Ο cum rectangulo Θ Ρ in Ρ Ο. Conferatur etiam rectangulum Θ Κ in Κ Ο cum rectangulo Θ Ν in Ν Ο. Est vero rectangulum Θ Ν in Ν Ο æquale rectangulo Θ Ε in Ζ Ο; *quare conferendum est rectangulum* Θ Κ *in* Κ Ο *cum rectangulo* Θ Ε *in* Ζ Ο. Constat autem rectangulum Θ Κ in Κ Ο majus esse rectangulo Θ Ε in Ζ Ο; quia rectangulum Ο Μ in Κ Θ majus est rectangulo Ο Μ in Ε Θ. Rectangulum autem Μ Κ in Κ Θ æquale est rectangulo Μ Ζ in

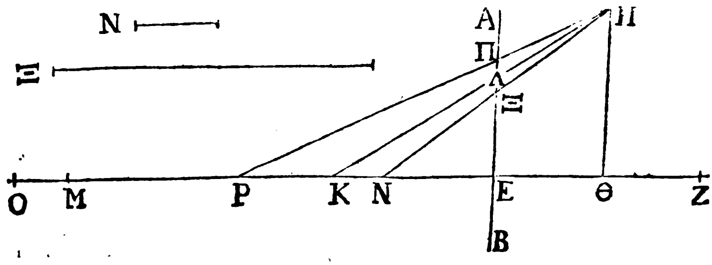
Ε Θ,

E Θ, ideo totum rectangulum K Θ in K O majus erit toto Z O in Θ E, sive rectangulo Θ N in N O. Unde etiam probatur rectangulum Θ N in N O majus esse rectangulo Θ P in P O; adeoque rectangulum Θ E in Z O majus erit rectangulo Θ P in P O: quare ratio Θ P ad Θ E minor erit ratione Z O ad P O. Con-



vertendo autem rationem, ratio Θ P ad P E, sive Θ H ad E Π, major erit ratione Z O ad Z P. Alternando vero ratio Θ H ad Z O, sive E Ξ ad Z N, major erit ratione E Π ad Z P. Quapropter recta H N aufert rationem majorem quam H P. Adeoque rectæ propiores ipsi K H abscindunt majores rationes, quam quæ longius distant ab eâdem.

Componetur autem problema modo sequente. Manentibus quæ prius, ductâque rectâ parallelâ, capiatur media proportionalis inter rectas E Z, E Θ, quæ sit E K; & jungatur H K. Hæc recta H K abscindet rationem E Λ ad Z K, majorem quam quælibet alia recta per punctum H ducenda, ita ut rectis Z Δ, E A occurrat. Ratio autem ad construendum proposita, vel erit ratio E Λ ad Z K, vel major erit ea, vel minor: ac si æqualis fuerit rationi E Λ ad Z K, tum recta H Λ K satisfacit problemati. Quod si major fuerit ratio quam E Λ ad Z K, problema impossibile est; quia ratio proposita major est maximâ. Sin ratio data N ad Ξ minor fuerit quam E Λ ad Z K; fiat recta K M æqualis ipsi Θ K; ac rectangulum Z M in Θ E æquale erit rectangulo Θ K in K M, & E Λ erit ad Z K ut Θ H ad Z M. Faciamus jam ut N ad Ξ ita Θ H ad rectam aliam majorem ipsâ Z M, ut ad Z O: cumque rectangulum Θ K in O M majus est rectangulo Θ E in O M, ac rectangulum Θ K in K M æquale est rectangulo Θ E in Z M; totum rectangulum Θ K in K O majus erit rectangulo Θ E in Z O. Adeoque possibile est applicari rectangulum Θ E in Z O deficiens quadrato ad rectam Θ O, duobus quidem modis; ad utramque scilicet partem puncti K. Quo facto habebuntur puncta quæsita N, P: junctisque HN, HP, dico utramque ductam HN, HP satisfacere problemati; sive quod EΞ est ad ZN ut N ad Ξ; vel quod EΠ est ad ZP in eadem ratione N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum ΘN in NO æquale est rectangulo ZO in ΘE, erit ZO ad ON sicut NΘ ad ΘE; ac per conver-



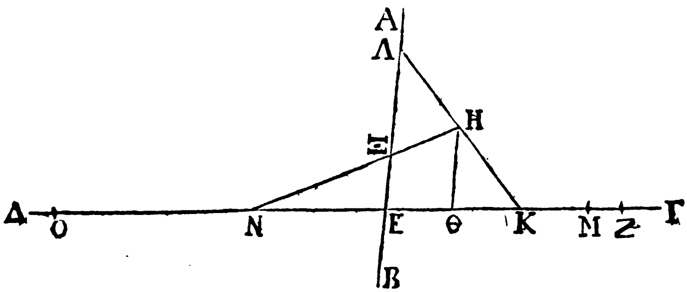
sionem rationis ZO erit ad ZN ut ΘN ad NE, sive ΘH ad EΞ: permutando autem erit ΘH ad ZO sicut EΞ ad ZN. Sed ΘH est ad ZO sicut N ad Ξ; quare EΞ est ad ZN sicut N ad Ξ. Ac simili argumento probabitur EΠ esse ad ZP in eadem ratione N ad Ξ. Ambæ igitur HN, HP satisfaciunt problemati. Manifestum autem est rectas utrinque propiores ipsi HK abscindere rationes majores, quam rectæ quæ longius removentur ab eadem.

Ratio autem maxima hunc in modum determinatur. Cum ratio illa maxima ea sit quæ EΛ ad ZK, sive ΘH ad ZM; recta autem ZM constat ex utrisque ZK, KΘ simul sumptis, (quia MK æqualis est ipsi KΘ:) sed & utræque ZK, KΘ æquales sunt utrisque ZE, EΘ ac duplo ipsius EK simul sumptis: duplum vero rectæ EK potest quater rectangulum ZE, ΘE: erit igitur ratio ΘH ad ZM, vel sicut ΘH ad rectam compositam ex utrisque ZE, ΘE & ex ea quæ potest quater rectangulum ΘE ad ZE simul sumptis; vel minor erit ea.

Exhibuimus itaque compositionem problematis juxta omnes casus qui proponi possint; ostendimusque an fieri possit constructio, necne: capiatur enim media proportionalis inter rectas ZE, EΘ; ac ponatur ea ab utraque parte puncti E, ut EK, EN. Ductisque rectis HK, HN; fiat ipsi ΘK recta KM æqualis: ac ipsi ΘN æqualis fit recta NO. Erit igitur ratio EΛ ad ZK ratio minima, juxta casum secundum, sive ut ΘH ad ZM: ratio autem EΞ ad NZ, sive ΘH

ad

ad ZO maxima erit juxta modum quartum. Ac manifestum est quod, juxta modum secundum, ratio ΘH ad ZM major est ratione ejusdem ad ZO. Jam ratio data vel erit ipsa ratio ΘH ad ZM; vel minor erit ratione ΘH ad ZM, ac major quam ratio ΘH ad ZO; *vel major erit ratione* ΘH *ad* ZM; vel erit ipsa ratio ΘH ad ZO; vel minor erit eâdem. At si fuerit ratio ut ΘH ad ZM, efficietur problema tribus modis; nempe primo ac tertio, ac modo singulari juxta casum secundum; non autem omnino juxta modum quartum, quia ratio ΘH ad ZM major est ratione ΘH ad ZO. *Si vero minor fuerit ratione* ΘH *ad* ZM, *major autem quam* ΘH *ad* ZO; *tum componetur dupliciter, modo nempe primo & tertio; non*



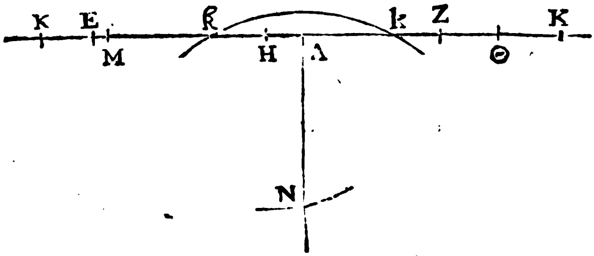
autem modo secundo, quia ratio minor est minimâ; neque modo quarto, quia major est maximâ. Si major fuerit ratio quam ΘH ad ZM, tum fieri potest quadrupliciter, nempe modo primo & tertio, & dupliciter juxta secundum; non autem modo quarto, quia ratio data, cum major sit ratione ΘH ad ZM, multo major est ratione ΘH ad ZO. *Si vero æqualis fuerit rationi* ΘH *ad* ZO, *fiet tribus modis, nempe primo & tertio, & modo singulari juxta casum quartum; non autem fieri potest juxta casum secundum, quia ratio* ΘH *ad* ZO *minor est quam minima, sive quam* ΘH *ad* ZM. Denique si minor fuerit ratione ΘH ad ZO, erit problema juxta quatuor modos solvendum, primum nempe ac tertium; & dupliciter ad modum quartum: non autem omnino juxta modum secundum, quia ratio proposita minor est minima. Adeoque composuimus problema juxta omnem varietatem ejus.

SCHOLION GENERALE.

Quæret fortaſſe, nec immerito, Lector Geometricus qua lege diſponi debeat recta ZM, *quæ in omni caſu ſumenda eſt ad* ΘH *in ratione propoſitâ: Hoc enim neutiquam oſtenditur ab* Apollonio. *Quoniam vero in unoquoque caſu* EK *eſt ad* KΘ *ſicut* KZ *ad* ZM, (*Notis utor Loci ſeptimi*) *puncta tria* K, Z, M *eodem ordine ſemper collocanda ſunt inter ſe, quo tria illa* E, K, Θ: *adeoque in caſibus ubi punctum* K *ſupponitur inter puncta* E *&* Θ, *punctum* Z *intermedium eſſe debet inter* K *&* M; *ac proinde recta* ZM *ad contrarias partes à puncto* K *ponenda eſt. Si vero* E *vel* Θ *intermedium fuerit, intermedium quoque erit punctum* K *vel* M, *reſpective; quocirca recta* ZM *collocanda erit ad eaſdem partes vel verſus punctum* K. *Quod ſi, juxta præſcriptum hujus Regulæ, ponatur recta* ZM *ad eaſdem partes à puncto* Z, *ad quas jacet punctum* H *à recta* AB, *applicandum erit rectangulum* ΘE *in* ZM *ad rectam* ΘM *excedens quadrato. Si vero ad contrarias partes ponenda ſit* ZM, *applicandum eſt ad ipſam* ΘM *rectangulum* ΘE *in* ZM *deficiens quadrato. Utriuſque autem Applicationis effectionem docet* Euclides *in* 28^va^ *&* 29^na^ Prop. Elem. VI. *quarum ope conſtruxere Veteres problemata omnia plana ad has duas Formulas redacta; nempe ut cognitâ dati rectanguli ſummâ vel differentiâ laterum, invenirentur latera ſigillatim. Ac ſane pro reſoluto habebatur apud eos omne problema, poſtquam ad harum alteram perductum erat: ut vel ex hoc libro & ex* Pappo *videre eſt. Unde ſubeſt mirari hæc duo problemata generaliſſime ab* Euclide *conſtructa, à* Tacquetto, Chaleſio *eorumque Aſſeclis, ut inutilia nulliuſque momenti rejici, nec Commentario digna cenſeri. Etenim ſi, loco parallelogrammi dati, applicetur rectangulum ad rectam datam, quod deficiat vel excedat quadrato, loco figuræ parallelogrammæ ſpecie datæ; (cum Rectangula & Quadrata etiam parallelogramma ſint) res nimis manifeſta eſt quam ut ulteriore indigeat explicatione. Coincidit autem cum vulgatâ Æquationum Quadraticarum (uti nunc loquimur) effectione: quæ quidem commodiſſime fit ad hunc modum. Proponatur applicandum ad rectam* ΘM *rectangulum æquale rectangulo* ΘE *in* ZM *imprimis excedens quadrato. Biſectâ rectâ* ΘM *in medio ad* Λ,

eidem

eidem ΘM *normalis sit* ΛN; *factisque* ΛE, ΛZ *ipsis* ΘE, ZM *æqualibus, bisecetur* EZ *in* H: *&* *arcus circuli centro* H *radio* HZ *descripti occurret normali* ΛN *in puncto* N, *ita ut* ΛN *sit media proportionalis inter* ΘE *&* ZM. *Dein fiant* ΛK, Λϰ, *ab utraque parte puncti* Λ, *ipsi* ΘN *æquales; ac puncta* K, ϰ *erunt puncta quæsita. Si vero applicandum fuerit rectangu-*



lum illud deficiens quadrato; Centro N *ac radio* ΛΘ *describatur arcus circularis qui ipsi* ΘM *occurret in punctis quæsitis* *k*, k. *Quod si* ΛΘ *minor fuerit mediâ illâ proportionali* ΛN, *ita ut circulus ille non intersecet, nec tangat rectam* ΘM, *impossibilis erit constructio. Sed primis Elementis imbutum Lectorem supponimus; nec hujus est loci ea docere.*

Cæterum, ut in Scholiis præcedentibus, Problema modo magis generali tractavimus; relicto scilicet puncto, unde ducantur rectæ rationem auferentes, indeterminato: ita etiam in his quatuor Locis sive Capitulis, invenimus rectas omnes, datam rationem abscindentes, contingere Curvas binas Parabolicas (quas conjugatas appellare licet.) Simulque nobilem, ac, quantum scio, novam Parabolæ proprietatem, describendæ Curvæ aptissimam, patefecimus. Demonstrat enim Apollonius *rationes maximas & minimas esse ut* ΘH, *sive recta parallela, ad* $EZ + E\Theta \pm \sqrt{4\, EZ \text{ in } E\Theta}$: *adeoque datâ ratione quâvis, ut* m *ad* n, *maximas ac minimas rectas parallelas, quales* ΘH, *reperiri, capiendo eas ad* $EZ + E\Theta \pm \sqrt{4\, EZ \text{ in } E\Theta}$ *ut* n *ad* m. *Stante autem* EZ, *ac fluente* EΘ; *patet* $\frac{m}{n} \times EZ + E\Theta$ *rectam lineam Curvæ diametrum designare cum* EΘ *incipientem. Quadratum autem partis alterius sive*

$\frac{m^2}{n^2}$

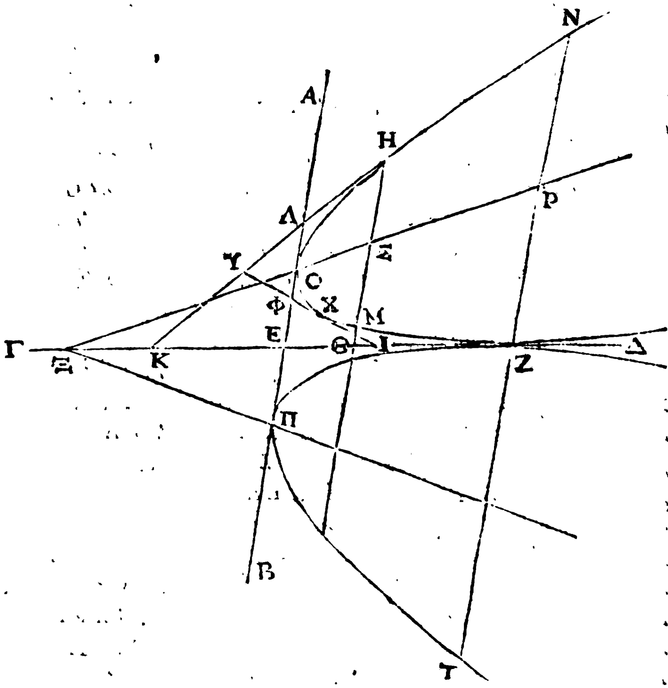
$\frac{m^2}{n^2} \times 4\,EZ \times E\Theta$ *augeri in ratione ipsius* $E\Theta$, *ut Abscissæ ; adeoque* $\frac{m}{n}\sqrt{4\,EZ}$ *in* $E\Theta$ *est ordinatim applicata Curvæ, quam contingunt puncta omnia* H ; *quæ proinde Parabola est : utpote cujus notissima est proprietas, ut quadrata Applicatarum sint in ratione Abscissarum.*

Quocirca Parabolas binas, quas contingunt rectæ omnes à datis rectis datam auferentes rationem, hunc in modum designare licet. Sint rectæ duæ positione datæ ΑΒ, ΓΔ *sese intersecantes in puncto* Ε ; *ac in* ΓΔ *sumatur punctum* Ζ : *oportet invenire Curvas illas quas contingunt rectæ omnes quovis modo abscindentes rationem* ΕΛ *ad* ΖΚ *sive* m *ad* n. *Capiatur in recta* ΕΔ *quodvis punctum* Θ ; *ac per* Θ *&* Ζ *ducantur ipsi* ΑΒ *parallelæ* ΘΗ, ΖΝ. *Ponatur* ΕΞ *ipsi* ΕΖ *æqualis, ac fiat* ΕΟ = ΕΠ *ad* ΕΖ = ΕΞ *ut* m *ad* n. ; *ac datis punctis* Ο *&* Π (*in quibus continget recta* ΑΒ *utramque curvam*) *junctisque & productis* ΞΟ, ΞΠ, *erunt ipsæ utriusque Parabolæ diametri. Occurrat autem diameter* ΞΟ *parallelis* ΘΗ, ΖΝ *in punctis* Σ *&* Ρ ; *ac* ΞΕ *erit ad* ΕΟ, *hoc est* n *ad* m, *ut* ΞΘ, *sive* ΕΖ + ΕΘ, *ad* ΘΣ ; *quæ proinde æquabitur ipsi* $\frac{m}{n} \times EZ + E\Theta$; *ac* ΖΡ *æqualis erit ipsi* $\frac{m}{n} \times 2\,EZ$: *adeoque ejus quadratum* $\frac{m^2}{n^2} \times 4\,EZ \times EZ$. *Ob Parabolam autem erit, ut* ΟΡ *ad* ΟΣ, *hoc est* ΕΖ *ad* ΕΘ, *ita quadratum ex* ΖΡ *vel* ΡΝ, *ad quadratum ex* ΣΜ *vel* ΣΗ ; *quod proinde habebitur* $\frac{m^2}{n^2} \times 4\,EZ$ *in* ΕΘ : *ejusque latus* $\frac{m}{n}\sqrt{4\,EZ \times E\Theta}$ *erit ipsi* ΣΜ *vel* ΣΗ. *Quapropter differentia ipsarum* ΘΣ, ΣΜ, *sive* ΘΜ, *erit ad* $EZ + E\Theta - \sqrt{4\,EZ \times E\Theta}$ *ut* m *ad* n ; *earundemque summa, sive* ΘΗ, *erit ad* $EZ + E\Theta + \sqrt{4\,EZ \times E\Theta}$ *etiam ut* m *ad* n. *Est igitur ratio* m *ad* n, *sive* ΕΛ *ad* ΖΚ, *extrema illa quæ auferri potest à rectis per puncta* Η, Μ *ducendis : quemadmodum ex determinationibus* Apollonii *manifestum est. Parabolæ autem describendæ Latus rectum habebitur capiendo illud ad* ΡΖ *ut* ΡΖ *ad* ΡΟ ; *unde Curvam ipsam per puncta ducere pronum est. Altera autem Parabola*

easdem

easdem omnino habet ordinatim applicatas cum priore, ad eandem distantiam rectæ parallelæ HΘ, *à communi Tangente* AB.

Descriptis autem Curvis; dico omnes rectas easdem contingentes abscindere rationem æqualem rationi EO *ad* ZE, *juxta omnes modos quibus fieri potest; ubicunque fuerit punctum datum* H, *è quo educendæ sunt rectæ. Nam si pro-*



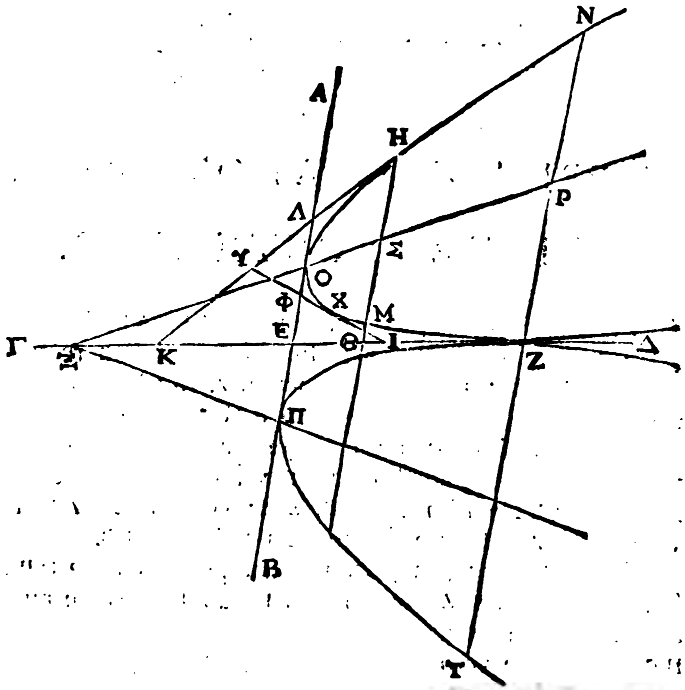
ponatur illud supra Vertices Parabolarum, sive à recta AB *versus* Γ; *semper duci possunt quatuor Tangentes ad modum quatuor casuum Loci quarti. Si fuerit punctum* H *in recta* ZN, *habebuntur casus tres Loci quinti; ac patet quod in casu tertio impossibile sit Tangentem ducere, nisi* ZH *excesserit ipsam* ZN, *vel major fuerit quam quater* EO. *Si fuerit punctum* H *infra rectam* NZT, *versus* Δ; *Tangentes designabunt omnes rectas juxta quatuor Casus Loci sexti ducendas. Quod si fuerit* H *intra datas parallelas* AB, NT; *habebimus omnes Casus Loci septimi; eâ ubique lege, ut si punctum reperiatur intra ambitum alterutrius Curvæ, duobus tantum modis pos-sibile*

sibile sit Tangentes ducere; nempe quæ tangant alteram. Si tangat punctum H *ipsas Curvas, tribus tantum modis fiet. Si vero extra Curvarum ambitus inveniatur punctum, tum quatuor modis duci possunt Tangentes: duobus nempe juxta Casus primos & tertios Locorum sexti & septimi; ac duobus, juxta casus secundos eorundem Locorum, quoties collocatur punctum in spatiis inter utramque Parabolam intermediis: vel etiam duobus, juxta Casus quartos eorundem, si in spatiis externis & infinitis* ΑΟΝ, ΒΠΤ *punctum* Η *inveniatur: quæ omnia coincidunt cum iis quæ in casubus determinatis tradit* Apollonius.

Caveat tamen Lector ne credat has Parabolas, quasi ad compositionem requisitas, describi oportere. Haud enim Geometræ Curvas Conicas ad effectionem Planorum Problematum (quale est hoc) adhibere convenit. At vero ad plenam solutionem, Locum, *ut vocant, seu puncta omnia rem propositam præstantia exhiberi petunt hodierni Artifices; in quorum gratiam præcedentia subjunximus.*

Occasione autem hujus Loci *designandi, incidi in Propositionem perpulchram, quæque nova mihi visa est.* viz. *Si tres rectæ contingant Parabolam, ut* ΗΚ, ΚΖ, ΕΛ; *ac datum sit in altera punctum contactûs ut* Ζ; *dantur etiam in reliquis puncta contactûs. Nam* ΖΚ *est ad* ΕΛ *ut* ΕΖ *ad* ΕΟ; *ac* ΕΖ *est ad* ΚΛ *ut* ΚΕ *ad* ΛΗ: *quia Tangentes Parabolæ auferunt semper segmenta in datâ ratione. Datis etiam quatuor Tangentibus absque puncto, dantur etiam in omnibus puncta contactuum. Ducatur enim Tangens quarta, ut* ΙΧΦΥ, *occurrens ipsi* ΑΒ *in* Φ, *ac Curvam contingens in* Χ. *Dico quod* ΛΥ *erit ad* ΕΙ *ut* ΛΚ *ad* ΕΖ, *ac in eâdem erit ratione* ΚΕ *ad* ΛΗ; *data ergo sunt puncta* Ζ & Η. *Pariter* ΚΥ : ΚΛ :: ΕΦ : ΕΟ & ΚΛ : ΚΥ :: ΙΦ : ΙΧ. *Vel etiam* ΕΚ : ΚΙ :: ΦΥ : ΥΧ, *ac* ΚΙ : ΕΚ :: ΛΦ *ad* ΛΟ. *Quæ omnia manifesta sunt, ex eo, quod rectas quatuor Parabolam contingentes, ita sese intersecare necesse sit, ut quælibet Tangens similiter divisa sit, (sive in partes proportionales) ad puncta intersectionum & contactuum.*

Datis autem quatuor Tangentibus, Curva ipsas contingens statim, absque omni præparatione, describi potest. Divisâ enim utrâque rectâ ΕΙ, ΥΛ *in partes quotlibet numero æquales, continuanda est similium partium dispunctio utrinque* *in infinitum; partium scilicet ipsius* ΕΙ *versus* Κ *&* Ζ: *partium vero ipsius* ΛΥ *versus* Η *&* Κ. *Deinde jungendo omnia ordine puncta ad contrarias partes sumpta, nempe puncta in* ΚΥ *cum punctis in* ΙΖ; *illa vero in* ΛΗ *cum correspondentibus in* ΕΚ; *habebimus Curvæ Tangentes quotlibet. Ad has*

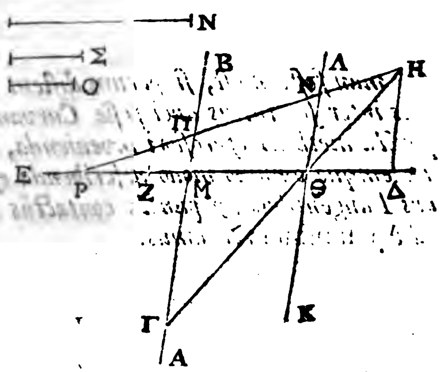


vero manifestum est, si parum distent Tangentium intersectiones inter se, tutius duci posse Curvam quæsitam, quam per puncta methodo operosiori invenienda, ut expertus fateberis. Eodemque omnino modo describenda est Parabola, datis tribus Tangentibus & puncto contactûs in aliquâ earum. Sed ad Apollonium *redeamus.*

APOLLONII PERGÆI
De Sectione rationis,
SIVE
ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ ΑΠΟΤΟΜΗΣ,
LIBER POSTERIOR.

SINT duæ rectæ positione datæ ut AB, ΔE, sese intersecantes in puncto M; sumatur autem in recta AB punctum Γ, & in recta ΔE punctum Z. Sit vero imprimis punctum datum H intra angulum ΔMB. Ac duci possunt rectæ per punctum H, ita ut segmenta in ratione datâ resectæ sint juxta quinque modos: vel enim abscindentur à rectis ΓB, ZE; vel à rectis ΓB, ZM; vel à rectis ZΔ, ΓA; vel â rectis ZΔ, ΓM; vel denique à rectis ΔZ, ΓB.

Cas. I. Ducatur jam juxta modum primum recta HP auferens ab ipsis ΓB, ZE rationem ΓΠ ad ZP æqualem rationi datæ: jungatur recta HΓ. Quoniam vero punctum Γ datur, atque etiam punctum H, erit recta ΓH positione data; datâ autem positione rectâ EZ, datum erit punctum *occursus* Θ. Per punctum Θ agatur recta KΛ ipsi AB parallela. Cum autem recta illa per punctum datum Θ ducatur, rectæque datæ AB parallela sit, ipsa KΛ positione



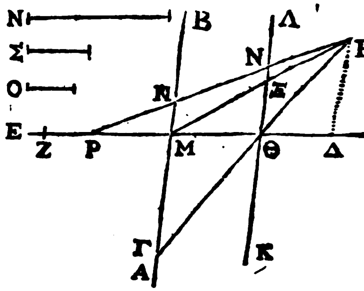
positione data est: dantur autem rectæ ΓH, ΘH, ob data puncta Γ, Θ, H; adeoque ratio ΓH ad HΘ, hoc est ratio ΓΠ ad ΘN, etiam datur. Sed ratio ΓΠ ad ZP data est, adeoque ratio ΘN ad ZP habetur. Jam rectæ duæ KΛ, ΔE *positione* dantur, ac in recta KΛ notatur punctum Θ, in ipsâ vero ΔE punctum Z; datum autem punctum H est intra angulum ΔΘΛ. Ducenda est igitur recta ut HP, quæ auferat ab ipsis rationem datam ΘN ad ZP. Datur autem recta HP, datâ ratione illâ; per ea quæ demonstravimus in libro primo, Loco quarto & Casu primo. Hoc est quod voluimus ostendere in hoc Casu.

Componetur autem problema in hunc modum. Sit ratio data sicut N ad O: ac fiat ut ΓH ad HΘ ita N ad Σ. Dantur autem duæ rectæ in eodem plano, nempe KΛ, ΔE; & in recta KΛ sumitur punctum Θ, in recta vero ΔE punctum Z: ac datum est punctum H intra angulum ΔΘΛ. Ducatur igitur recta HΠP, juxta modum descriptum in casu primo loci quarti, quæ auferat rationem ΘN ad ZP, sicut Σ ad O. Dico quod hæc recta HΠP solvit problema. Quoniam enim HΓ est ad HΘ ut ΓΠ ad ΘN; ac N est ad Σ ut HΓ ad HΘ: erit ΓΠ ad ΘN sicut N ad Σ. Est autem ΘN ad ZP sicut Σ ad O; adeoque ex æquo ΓΠ erit ad ZP sicut N ad O: ac proinde recta HP solvit problema, eaque sola. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur jam, juxta casum secundum, recta HP auferens à rectis ZM, ΓB rationem ΓΠ ad ZP æqualem rationi datæ. Jungatur recta ΓH *occurrens ipsi* ΔE *in puncto* Θ; *ac per datum punctum* Θ *duc rectam* KΛ *ipsi* AB *parallelam, quæ proinde positione data est.* Datis autem punctis Γ, Θ, H dabitur recta utraque ΓH, HΘ; adeoque ratio earundem datur. Quoniam vero ΓΠ est ad ΘN ut ΓH ad HΘ, ratio quoque ΓΠ ad ΘN data est. Sed & ratio ΓΠ ad ZP datur; ratio igitur ΘN ad ZP data est. Datis autem positione duabus rectis in eodem plano, nempe KΛ, ΔE; in recta KΛ sumitur punctum Θ, in recta vero ΔE punctum Z: datum autem punctum H cadit intra angulum ΔΘΛ. Ducenda est igitur recta HP, quæ data erit per ea quæ demonstravimus in libro primo, ad Loci quarti Casum secundum.

Ad compositionem autem requiritur, ut ratio data major sit ratione ΓM ad MZ. Etenim cum recta ΓΠ major sit quam ΓM, ac ZP minor quam ZM; erit ratio ΓΠ ad ΓM major ratione

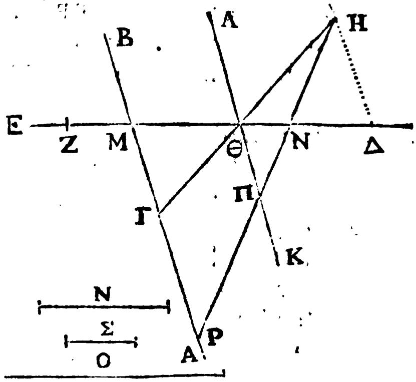
tione ZP ad ZM; ac permutando erit ratio ΓΠ ad ZP major ratione ΓM ad MZ. Oportet igitur rationem datam majorem esse ratione ΓM ad MZ. Construetur autem problema ad hunc modum. Manentibus prius descriptis; sit ratio data sicut N ad O, quæ major sit ratione ΓM ad MZ. Jungantur HΓ, HM, ac fiat ut HΓ ad ΘH ita N ad Σ. Quoniam autem HΓ est ad ΘH ut N ad Σ, & ΓM est ad ΘΞ ut HΓ ad ΘH, erit ΓM ad ΘΞ sicut N ad Σ. Sed ratio N ad O major est ratione ΓM ad MZ: quare ex æquo ratio Σ ad O major erit ratione ΘΞ ad MZ. Igitur si velimus ducere rectam per punctum H, juxta casum secundum Loci quarti, quæ auferat à rectis KΛ, ΘZ rationem æqualem rationi Σ ad O; occurret illa rectæ ZM, hoc est, cadet ultra punctum M. Nam si propior fuerit puncto Θ, abscinderetur ratio minor. Fiet autem compositio ut in Casu secundo Loci quarti. Ac rectâ HP auferente rationem ΘN ad PZ æqualem rationi Σ ad O; dico quod ipsa HP satisfaciet problemati. Quoniam enim ΓH est ad HΘ in ratione N ad Σ, *ac* ΓΠ *est ad* ΘN ut ΓH est ad HΘ, *erit etiam* ΓΠ *ad* ΘN sicut N ad Σ. Sed ΘN est ad PZ sicut Σ ad O: quare ex æquo ΓΠ erit ad PZ in ratione N ad O. Quapropter recta HP solvit problema, eaque sola. Q. E. D.



Cas. III. Ducatur jam, juxta modum tertium, recta HP auferens à rectis ΓA, ZΔ rationem ΓP ad ZN æqualem rationi datæ; & jungatur ΓH. Datis punctis Γ & H datur etiam recta ΓH. Sed recta ΔE positione datur, ergo datum est punctum Θ. Per punctum Θ ducatur recta parallela ipsi AB, ut KΛ; igitur recta KΛ positione datur. Datis autem rectâ KΛ, punctisque Γ, H, Θ; utraque recta ΓH, HΘ datur, earundemque ratio. Sed ut ΓH est ad HΘ, ita ΓP ad ΠΘ; ratio itaque ΓP ad ΠΘ datur: ratio autem ΓP ad ZN datur, adeoque ratio ΠΘ ad ZN data est. Jam sunt duæ rectæ lineæ in eodem plano, nempe KΛ, ΔE; ac notatur recta KΛ puncto Θ, recta vero ΔE puncto Z: punctum autem H, unde ducenda est recta secans, cadit intra angulum ΔΘΛ. Ducenda est igitur recta

recta ΗΠ auferens rationem ΠΘ ad ΝΖ. At data erit recta ΗΠΡ, juxta ea quæ demonstrantur in Libro primo, Loco quarto ac Casu tertio. Q. E. I.

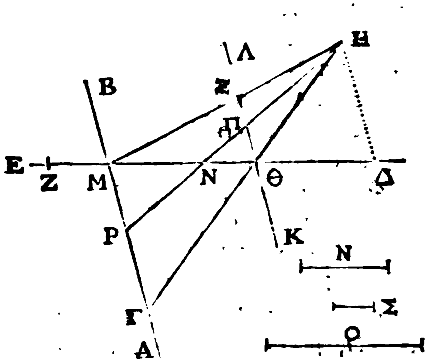
Sic autem componetur problema. Sit ratio data sicut Ν ad Ο; ac manentibus descriptis, fiat ut ΗΓ ad ΗΘ ita Ν ad Σ. Cumque ΚΛ, ΔΕ sint duæ rectæ in eodem plano positione datæ; ac in rectâ ΚΛ sumatur punctum Θ, in rectâ vero ΔΕ punctum Ζ; ac sit



punctum datum Η intra angulum ΔΘΛ: ducatur igitur recta ΗΠ, juxta Casum tertium Loci quarti, quæ auferat rationem ΘΠ ad ΖΝ æqualem rationi Σ ad Ο; ac producatur eadem ad Ρ. Dico quod recta ΗΡ satisfacit problemati. Etenim ΓΗ est ad ΗΘ sicut Ν ad Σ; atque adeo ΓΡ est ad ΘΠ ut Ν ad Σ. Sed ΘΠ est ad ΖΝ sicut Σ ad Ο: quare ex æquo erit ΓΡ ad ΖΝ sicut Ν ad Ο. Recta igitur ΗΡ solvit problema, eaque sola. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur jam recta ΗΡ, juxta Casum quartum, auferens à rectis ΓΜ, ΖΔ segmenta ΓΡ, ΖΝ in ratione datâ. Junge ΓΗ, & cum puncta Γ & Η dentur, data erit recta ΗΓ; ac datâ rectâ ΔΕ, est etiam punctum Θ datum. Per punctum Θ agatur recta ΚΛ ipsi ΑΒ parallela, ac recta ΚΛ datur *positione*. Quoniam autem puncta Γ, Η, Θ data sunt, rectæ duæ ΓΗ, ΘΗ etiam dantur; unde ratio ΓΗ ad ΗΘ data est. Sed ut ΓΗ ad ΗΘ ita ΓΡ ad ΘΠ, ratio itaque ΓΡ ad ΘΠ datur. Datâ autem ratione ΓΡ ad ΖΝ, dabitur quoque ratio ΘΠ ad ΖΝ. Jam duæ rectæ ΚΛ, ΔΕ dantur positione in eodem plano, ac recta ΚΛ notatur in puncto Θ; recta vero ΔΕ in puncto Ζ: punctum autem datum est punctum Η, intra angulum ΛΘΔ. Ducenda est igitur recta ut ΗΡ, quæ auferat rationem ΘΠ ad ΖΝ. Datur autem recta ΗΡ per ea quæ demonstrantur in Libri primi Loco quarto ac Casu secundo. Necesse est autem ad Constructionem ut ratio proposita minor

nor sit ratione ΓM ad MZ. Quoniam enim recta MΓ major est quam ΓP, ac MZ minor quam ZN, erit ratio MΓ ad ΓP major ratione MZ ad ZN; quare permutando, ratio MΓ ad MZ major erit ratione ΓP ad ZN. Sed ratio ΓP ad ZN est ratio data; oportet igitur rationem, ad construendum propositam, minorem esse ratione ΓM ad MZ.

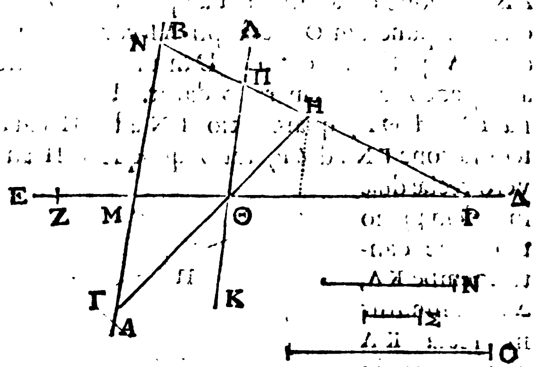


Componetur problema hunc in modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut N ad O, quæ sit minor ratione ΓM ad MZ. Jungatur HM, ac fiat ut ΓH ad HΘ ita N ad Σ. Quoniam autem ut ΓH ad HΘ ita ΓM ad ΘΞ; ac ΓH ad HΘ est ut N ad Σ: ΓM igitur erit ad ΘΞ sicut N ad Σ. Sed ratio ΓM ad MZ major est ratione N ad O: quare collatis consequentibus erit ratio ΘΞ ad MZ major ratione Σ ad O. Recta igitur ducta per punctum H, quæ auferat à rectis ΘΛ, ZΘ rationem æqualem rationi Σ ad O, occurret rectæ ΘM. Expositis enim duabus rectis KΛ, ΔE, sumitur in KΛ punctum Θ; in recta vero ΔE punctum Z. Punctum autem datum H est intra angulum ΔΘΛ: quare, si ducatur, per Casum secundum Loci quarti, recta HM, quæ auferat rationem ΘΞ ad MZ majorem ratione Σ ad O; ac deinde proponatur aliam ducere, ut recta HN, quæ auferat rationem æqualem rationi Σ ad O; cadet illa citra punctum M, *sive inter puncta* Θ & M: quia juxta præscriptum Casûs illius rectæ propiores puncto Θ auferunt rationes minores quam quæ sunt remotiores ab eodem. Productâ autem rectâ HN *ad* P, dico quod HP solvit problema. Etenim ut ΓH est ad HΘ, ita ΓP ad ΘΠ; *adeoque* ΓP *est ad* ΘΠ *sicut* N *ad* Σ. *Sed* ΘΠ *est* ad ZN sicut Σ ad O: igitur ex æquo ΓP erit ad ZN sicut N ad O. Quare recta HP satisfacit problemati. Q. E. D.

Cas. V. Ducatur juxta Casum quintum recta PN, auferens ab ipsis ZΔ, ΓB rationem ΓN ad ZP æqualem rationi datæ. Junge

Junge ΓH, ac datis punctis Γ & H recta ΓH datur. Cumque recta ΔE positione datur, etiam punctum Θ datur. Ducta dein per punctum Θ recta ipsi AB parallela ut KΛ, ipsius KΛ positio data erit. Quoniam autem puncta Γ, H, Θ dantur, rectæ etiam HΓ, HΘ habentur atque ratio earundem. Ut autem ΓH ad HΘ ita ΓN ad ΘΠ; quare ratio ΓN ad ΘΠ datur. Sed & ratio ΓN ad ZP datur, adeoque ratio ΘΠ ad ZP data est. Jam rectæ duæ KΛ, ΔE dantur positione, ac sumitur in recta KΛ punctum Θ, in recta autem ΔE punctum Z; punctum vero datum H est intra angulum ΔΘΛ: ducenda est igitur recta ut ΠP, auferens à rectis illis rationem ΘΠ ad ZP. Positione autem datur recta PΠ, per demonstrata in Libri primi Loco quarto ac Casu quarto. Quod erat inveniendum.

Construetur autem problema hunc in modum. Sit ratio data sicut N ad O; ac manentibus descriptis, fiat ut HΓ ad HΘ ita N ad Σ. Datis autem positione in eodem plano duabus rectis KΛ, ΔE; in ipsa KΛ sumitur punctum Θ, in recta vero ΔE punctum Z. Punctum autem datum H est intra angulum ΔΘΛ, & ratio auferenda est ut Σ ad O. Ducatur igitur, juxta Casum quartum Loci quarti, recta ΠP, quæ auferat segmenta ΘΠ ad ZP, rationem habentia æqualem rationi Σ ad O: datur itaque recta ΠP, quæ producatur ad N. Dico quod recta PΠN solvit problema. Etenim ut HΓ ad HΘ ita ΓN ad ΘΠ. Sed HΓ est ad HΘ sicut N ad Σ; quare ΓN est ad ΘΠ ut N ad Σ. Est autem ΘΠ ad ZP sicut Σ ad O: quare ex æquo erit ΓN ad PZ sicut N ad O. Q. E. D.

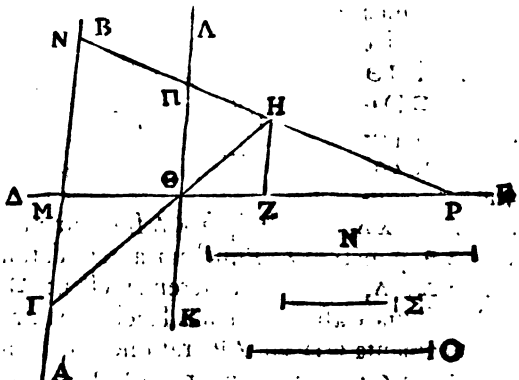


LOCUS

LOCUS SECUNDUS.

Sint jam duæ rectæ infinitæ positione datæ, *ut* AB, ΔE, *sese intersecantes in puncto* M, ac sumatur in recta AB punctum Γ, in recta vero ΔE punctum Z. Sitque datum punctum H intra angulum EMB. Cadat autem imprimis recta, per punctum H ducta ipsi AB parallela, super ipsum punctum datum Z. Ac rectæ per punctum H ductæ habebunt quatuor Casus. Vel enim segmenta abscissa erunt à rectis ΓB, ZE; vel à rectis ΓA, ZΔ; vel à rectis ΓM, MZ; vel denique ab ipsis ΓB, ZΔ.

Cas. I. Cadat autem imprimis, juxta Casum primum, recta NHP, secans a rectis ΓB, ZE rationem ΓN ad ZP æqualem rationi datæ. Junge ΓH; ac datis punctis Γ & H, ac rectâ ZE positione datâ, ipsa ΓH ac punctum Θ dabuntur. Ductâque per punctum Θ rectâ ipsi AB parallelâ, ut KΛ, ipsa quoque KΛ positione datur. Dantur autem utræque ΓH, ΘH, atque adeo earundem ratio datur. Ut autem ΓH est ad HΘ ita ΓN ad ΘΠ, quare ratio ΓN ad ΘΠ data est. Datâ autem ratione ΓN ad ZP, ratio quoque ΘΠ ad ZP datur. Jam vero rectæ duæ in eodem plano positione dantur, nempe KΛ, ΔE; ac sumitur in recta KΛ punctum Θ, in ipsâ vero ΔE punctum Z. Datum vero punctum H ponitur intra angulum EΘΛ; cadit



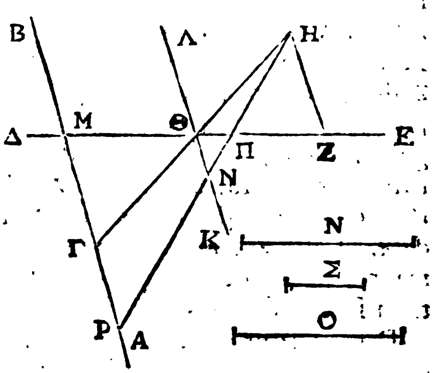
etiam recta per punctum H ducta ipsi AB parallela, super punctum Z. Ducenda est igitur recta HP, quæ auferat rationem rationi ΘΠ ad ZP æqualem. Recta autem PHN positione datur, per demonstrata in Libro primo, ad Casum primum Loci quinti. Q. E. I.

Sic autem componetur problema hoc. Manentibus descriptis ac juxta præscriptum propositionis dispositis; sit ratio data

sicut

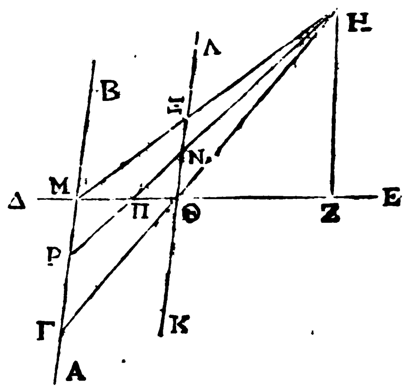
ſicut N ad O, ac fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Σ. Dantur autem duæ rectæ in eodem plano, puta K Λ, Δ E, quarum K Λ notatur in puncto Θ, Δ E vero in puncto Z; punctum autem datum H eſt intra angulum E Θ Λ; ratio vero auferenda eſt ut Σ ad O. Ducatur itaque recta Π P, juxta Caſum primum Loci quinti, (quia recta parallela cadit ſuper punctum Z) auferens rationem Θ Π ad Z P æqualem rationi datæ Σ ad O; ac productâ rectâ P H Π *ad* N, dico quod ipſa N H P ſatisfacit problemati. Quoniam enim Γ H eſt ad H Θ ut Γ N ad Θ Π; ac Γ H eſt ad H Θ etiam ut N ad Σ: idcirco Γ N eſt ad Θ Π ut N ad Σ. Sed Θ Π eſt ad P Z ſicut Σ ad O; quare ex æquo erit Γ N ad P Z ſicut N ad O: recta itaque P H N ſolvit problema. Q. E. D.

Caſ. II. Ducatur jam juxta modum ſecundum recta H P, auferens à rectis Γ A, Z Δ rationem Γ P ad Z Π æqualem rationi datæ. Junge Γ H, ac cum punctum Θ detur, ducatur per idem Θ recta parallela ipſi A B, ut K Θ Λ: recta itaque K Θ Λ poſitione datur. Datur autem ratio H Γ ad Θ H; cumque Γ P eſt ad Θ N ſicut H Γ ad Θ H, ratio quoque Γ P ad Θ N datur: ſed & ratio Γ P ad Z Π datur; quare ratio Θ N ad Z Π etiam datur. Jam rectæ duæ K Λ, Δ E dantur poſitione; ac ſumitur punctum Θ in recta K Λ, in ipſa vero Δ E punctum Z; ac datum punctum H eſt intra angulum E Θ Λ: recta autem parallela cadit ſuper punctum Z Ducenda eſt igitur recta ut H N, auferens rationem illam Θ N *ad* Z Π à rectis Θ K, Z Δ. Hæc autem recta H Π N poſitione datur, juxta demonſtrata in Libro primo, ad Caſum ſecundum Loci quinti. Q. E. I.



Hoc autem problema ſic conſtruetur. Maneant jam deſcripta quemadmodum docuimus; ac ſit ratio data ſicut N ad O. Fiatque ut H Γ ad H Θ ita N ad Σ. Sunt autem duæ rectæ datæ in eodem plano, nempe K Λ, Δ E; & habetur in rectâ K Λ punctum Θ, in ipsâ vero Δ E punctum Z; datum quoque punctum Η est intra angulum ΕΘΛ: recta autem parallela cadit super punctum datum Ζ, ac ratio data ea est quæ Σ ad Ο. Ducatur igitur recta ΗΠΝ, juxta casum secundum Loci quinti, auferens rationem ΘΝ ad ΖΠ æqualem rationi Σ ad Ο, ac producatur ea ad Ρ. Dico quod recta ΗΡ solvit problema. Quoniam enim ΗΓ est ad ΗΘ ut ΓΡ ad ΘΝ; atque etiam ΗΓ est ad ΗΘ ut Ν ad Σ: erit quoque ΓΡ ad ΘΝ sicut Ν ad Σ. Sed ΘΝ est ad ΖΠ in ratione Σ ad Ο: quare ex æquo ΓΡ erit ad ΖΠ sicut Ν ad Ο. Recta igitur ΗΠΡ satisfacit problemati. Q. E. D.

Cas. III. Ducatur juxta Casum tertium recta ΗΡ auferens à rectis ΓΜ, ΖΜ rationem ΓΡ ad ΖΠ æqualem rationi *datæ*. Junctâ ΗΓ, per punctum Θ ducatur recta ΚΛ ipsi ΑΒ parallela, ac recta ΚΘΛ datur positione. Quoniam vero ΗΓ est ad ΗΘ sicut ΡΓ ad ΘΝ, ratio ΡΓ ad ΘΝ datur; ac *datâ* ratione ΡΓ ad ΖΠ, ratio etiam ΘΝ ad ΖΠ datur. Dantur autem positione duæ rectæ in eodem plano nempe ΚΛ, ΔΕ; & in recta ΚΛ punctum Θ, in ΔΕ vero punctum Ζ datur: datum autem punctum Η est intra angulum ΕΘΛ; ac recta



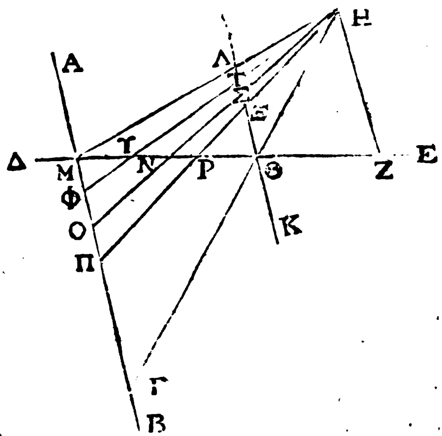
parallela cadit super punctum Ζ. Ducenda est igitur recta ΗΠ, quæ abscindat rationem ΘΝ ad ΖΠ æqualem rationi datæ. Datur autem positione recta ΗΠ, quæ solvet problema, per ea quæ demonstrantur in Libro primo, ad Casum tertium Loci quinti. Q. E. I.

Determinatur autem hunc in modum. Manentibus jam descriptis, recta ΖΘ vel minor erit quam recta ΘΜ, vel major eâ. Sit autem imprimis non minor eâ; ac jungatur ΗΜ. Dico quod recta ΗΜ aufert rationem ΓΜ ad ΜΖ majorem quâvis aliâ ratione, quæ à quibuscunque rectis per punctum Η ductis, rectisque ΓΜ, ΜΘ occurrentibus abscindi possint. Ducatur enim alia recta ut ΗΠΡ. Quoniam vero recta ΖΘ non minor est quam ΘΜ, recta ΗΜ auferet rationem ΘΞ

ad

ad Z M eo majorem quo propior est rectæ abscindenti rationem maximam; adeoque majorem eâ quæ resecatur ab H Π P: juxta demonstrata in Libro primo ad Loci quinti Casum tertium. Ratio igitur Θ Ξ ad Z M major est ratione Θ N ad Z Π, ac permutando ratio Ξ Θ ad Θ N major erit ratione M Z ad Z Π. Cum autem ratio Ξ Θ ad Θ N est ut Γ M ad Γ P, ratio Γ M ad Γ P major erit quam M Z ad Z Π. Permutando itaque ratio Γ M ad M Z major erit ratione Γ P ad Π Z: quare recta H M aufert rationem Γ M ad M Z majorem quacunque alia ratione, quam abscindere possit recta quævis per punctum H ducta rectisque Θ M, M Γ occurrens. Q. E. D.

Quod si Z Θ minor sit quam recta Θ M; fiat Θ N ipsi Z Θ æqualis: ac junctam H N produc ad O: junge etiam H M. Dico rectam H N O auferre rationem Γ O ad Z N majorem quavis aliâ ratione, à rectâ qualibet per punctum H ducendâ, totique rectæ Γ M occurrente abscissâ: quodque recta H M abscindit rationem Γ M ad M Z minorem quâlibet ratione, à rectâ per punctum H ductâ ipsique O M occurrente, ablatâ. Ducatur enim recta alia ut H Π P occurrens rectæ Γ O. Quoniam autem recta Z Θ æqualis est ipsi ΘN, positione datur recta H N O, auferens rationem Θ Σ ad Z N maximam; per Loci quinti Casum tertium Lib. I. Ratio igitur Θ Σ ad Z N major est ratione Θ Ξ ad Z P, ut ibidem demonstratur. Permutando autem ratio Θ Σ ad

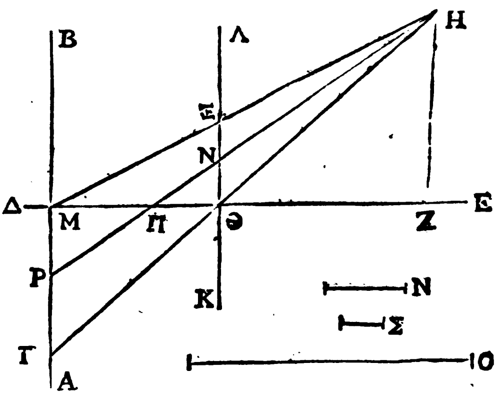


Θ Ξ major erit ratione Z N ad Z P. Sed ratio Θ Σ ad Θ Ξ est ut Γ O ad Γ Π; quare ratio Γ O ad Γ Π major est ratione Z N ad Z P: ac permutando, *ratio* Γ O *ad* Z N *major erit ratione* Γ Π *ad* Z P. Ac pari modo probabitur quod, si ducatur recta quævis alia per punctum H, occurrens ipsi O M, recta H N O auferet rationem Γ O ad Z N maximam. Dico præterea quod recta HM aufert rationem Γ M ad M Z minorem quâvis aliâ

 ratione,

ratione, quæ resecari possit à rectâ qualibet per punctum H ductâ, ipsisque O M, M N occurrente. Educatur enim recta alia ipsam O M intersecans, ut H T Υ Φ. Quoniam vero recta H N O abscindit rationem maximam, ac recta H T Υ eidem propior est quam recta H M; ratio Θ T ad Z Υ major erit ratione Θ Λ ad Z M: ac permutando ratio Θ T ad Θ Λ major erit ratione Z Υ ad Z M. Sed Θ T est ad Θ Λ ut Γ Φ ad Γ M; quare ratio Γ Φ ad Γ M major est ratione Z Υ ad Z M, ac permutando ratio Γ Φ ad Z Υ major erit ratione Γ M ad M Z: adeoque ratio Γ M ad M Z minor est ratione Γ Φ ad Z Υ. Recta igitur H N aufert rationem Γ O ad N Z majorem quavis ratione, quæ secari possit à rectis per H ductis, ipsique Γ M occurrentibus: recta vero H M aufert rationem Γ M ad M Z, minorem qualibet aliâ rectâ ipsi O M occurrente. Q. E. D.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, recta Z Θ vel minor erit quam Θ M vel major ea. Sit autem imprimis recta Z Θ non minor quam Θ M. Junge H M, ac recta H M secabit rationem Γ M ad M Z majorem quavis aliâ ratione, à rectâ quâlibet per punctum H ductâ ipsique Γ M occurrente, abscissâ. Jam si ratio ad construendum data fuerit ratio Γ M ad M Z, recta H M *satisfacit problemati. At si major fuerit ratio quam* Γ M ad M Z non componetur problema; quia recta H M aufert rationem Γ M ad M Z maximam. Quod si minor



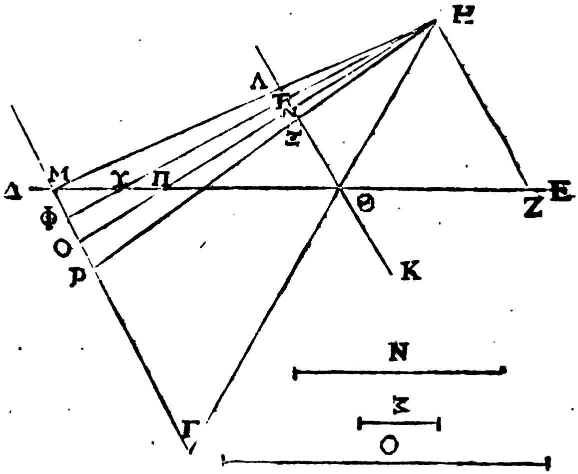
fuerit ratione Γ M ad M Z uno tantum modo construetur. Propositâ autem ratione N ad O minore quam Γ M ad M Z; fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Σ: ac ducatur per punctum Θ recta K Θ A ipsi A B parallela. Quoniam autem Γ H est ad H Θ sicut Γ M ad Θ Ξ, atque Γ H est ad H Θ ut N ad Σ, erit etiam Γ M ad Θ Ξ sicut N ad Σ; ac invertendo erit Θ Ξ ad Γ M sicut Σ ad N. Sed ratio Γ M ad M Z major est ratione N ad O; igitur

igitur ex æquo erit ratio ΘΞ ad MZ major ratione Σ ad O. Jam dantur positione rectæ duæ ΚΛ, ΔΕ, quarum ΚΛ notatur in puncto Θ, ΔΕ vero in puncto Z: cadit autem recta parallela super punctum Z, ac recta ΘZ non est minor quam ΘM; recta vero HM aufert rationem maximam, nempe ΘΞ ad MZ, qua minor est ratio Σ ad O. Ducatur itaque recta per punctum H, juxta Casum tertium Loci quinti, quæ auferat à rectis ΘΛ, ZM rationem rationi Σ ad O æqualem. Quod quidem fieri potest duobus modis; sed una tantum è rectis occurret rectæ ΘM, alterâ ultra punctum M cadente. Sit autem recta illa HNΠ, auferens rationem NΘ ad ZΠ æqualem rationi Σ ad O. Dico quod recta HNΠP solvit problema. Nam ΓH est ad HΘ ut ΓP ad ΘN, ac ΓH est ad HΘ ut N ad Σ; adeoque ΓP est ad ΘN ut N ad Σ. Sed ΘN est ad ZΠ sicut Σ ad O: quare ex æquo ΓP erit ad ZΠ sicut N ad O. Igitur recta HP satisfacit problemati. Q. E. D.

Jam sit recta ZΘ minor quam ΘM. Fiat recta ΘΠ æqualis ipsi ZΘ, ac juncta HΠ producatur ad O. Jungatur etiam HM; ac recta HΠO auferet rationem ΓO ad ZΠ, majorem quâvis ratione à qualibet rectâ per punctum H ductâ ac rectæ ΓM occurrente abscissâ. Recta vero HM abscindet rationem ΓM ad MZ minorem qualibet ratione à rectis per H ductis ipsique MO occurrentibus auferendâ. Recta enim HΠO (per Casum tertium Loci quinti) secat rationem ΘN ad ZΠ majorem ratione ΘΛ ad MZ; ac alternando *erit ratio* ΘN *ad* ΘΛ *major ratione* ZΠ *ad* MZ. Sed ΘN est ad ΘΛ sicut ΓO ad ΓM; quare permutando ratio ΓO ad ZΠ major erit ratione ΓM ad ZM. Recta igitur HO abscindit rationem ΓO ad ZΠ, majorem quavis alia ratione à rectâ ipsi ΓM occurrente abscissâ. Recta vero HM aufert rationem ΓM ad MZ minorem ratione quavis quæ secatur à rectis ipsi OM occurrentibus. Ducatur enim recta HTΥ; cumque ea propior sit rectæ maximam rationem auferenti quam HM, recta HTΥ majorem auferet rationem quam HM; adeoque ratio ΘT ad ZΥ major erit ratione ΘΛ ad MZ, ac permutando *ratio* ΘT *ad* ΘΛ *major erit ratione* ZΥ *ad* MZ. Sed ΘT est ad ΘΛ ut ΓΦ ad ΓM; quare alternando ratio ΓΦ ad ZΥ major est ratione ΓM ad MZ: adeoque recta HM aufert rationem minimam. Igitur si proponatur ratio ad componendum, quæ sit æqualis rationi ΓO ad ZΠ, sola recta HO satisfacit problemati, quia

ratio

ratio est maxima. Quâ si major sit ratio, non componetur, quia major est maxima. Quod si fuerit minor quam ratio Γ O ad Z Π, major vero quam Γ M ad M Z; tum problema duobus modis effici potest, nempe ab utrâque parte rectæ H N O. Si vero non fuerit major ratione Γ M ad M Z, tum uno tantum modo componetur, nempe inter O & Γ. Imprimis autem sit ratio data, sicut N ad O, minor ratione Γ O ad Z Π, major vero quam Γ M ad M Z: & fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Σ, adeoque Γ O ad N Θ erit ut N ad Σ; ac invertendo erit N Θ ad Γ O sicut Σ ad N. Sed ratio Γ O ad Π Z major est



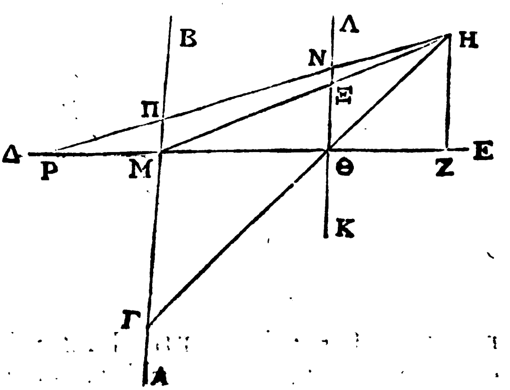
ratione N ad O: quare ex æquo ratio N Θ ad Π Z major erit ratione Σ ad O. Quinetiam cum ratio Γ H ad H Θ sit ut N ad Σ, atque etiam ut Γ M ad Θ Λ; erit Γ M ad Θ Λ sicut N ad Σ; ac invertendo Θ Λ ad Γ M ut Σ ad N. Sed ratio Γ M ad M Z minor est ratione N ad O: quare ex æquo ratio Θ Λ ad M Z minor erit ratione Σ ad O. Probavimus autem rationem Θ N ad Π Z majorem esse ratione Σ ad O; ac recta H Π maximam aufert rationem per demonstrata in Casu tertio Loci quinti. Si itaque ducantur, ad modum Casus tertii Loci quinti, rectæ per punctum H, quæ auferant ab ipsis Θ Λ, Z Δ segmenta quæ sint inter se ut Σ ad O, habebuntur duæ rectæ, ab utraque scilicet parte ipsius H O; quarum altera ut H Ξ P occurret rectæ Θ Π. Dico quoque alteram rectæ Π M occursuram. Quoniam enim rectæ propiores ipsi H O semper auferunt rationes majores quam rectæ remotiores ab eâdem; ac ratio Σ ad O major est ratione Θ Λ ad M Z: recta illa, quæ per punctum H ducta abscindit rationem Σ ad O, propior erit ipsi

O H

ΟΗ quam recta ΗΜ. Ducta igitur recta ΗΤΥ ac producta in Φ: dico hanc quoque satisfacere problemati. Nam ΗΓ est ad ΗΘ, hoc est ΓΦ ad ΘΤ, sicut Ν ad Σ; ac ΘΤ est ad ΖΥ sicut Σ ad Ο; quare ex æquo erit ΓΦ ad ΖΥ sicut Ν ad Ο. Recta igitur ΗΥΦ satisfacit problemati; ac manifestum est rectam alteram, sive ΗΞΡ, tantundem præstare.

Manentibus autem omnibus jam descriptis; sit ratio Ν ad Ο non major ratione ΓΜ ad ΜΖ: ac fiat ut ΓΗ ad ΗΘ ita Ν ad Σ. Per inquisitionem autem præmissam, constat *rationem* Σ *ad* Ο majorem non esse ratione ΘΛ ad ΜΖ; atque adeo certe minorem ratione ΘΝ ad ΠΖ. Quoniam vero ratio Σ ad Ο minor est ratione ΝΘ ad ΖΠ, sive maxima: ducantur, juxta descripta in Casu tertio Loci quinti, rectæ duæ ab utraque parte ipsius ΗΝΟ, auferentes rationem æqualem rationi Σ ad Ο; quarum altera quidem cadet inter ipsas ΗΠ, ΗΓ, altera vero occurret rectæ ΠΜΔ. Quoniam autem recta quæ propior est ipsi ΗΠ semper aufert rationem majorem remotiore: ac ratio Σ ad Ο, cum jam non sit major quam ratio ΘΛ ad ΜΖ, vel æqualis erit illi vel minor ea. Si itaque æqualis fuerit, rem præstat recta ΗΜ. Quod si minor fuerit ratione ΘΛ ad ΜΖ, cadet recta ultra ipsam ΗΜ; adeoque patet quod non satisfacit problemati, quia non occurrit rectæ ΓΜ. Altera autem recta quæ transit inter ipsas ΗΓ, ΗΠΟ solvit problema. Q. E. D.

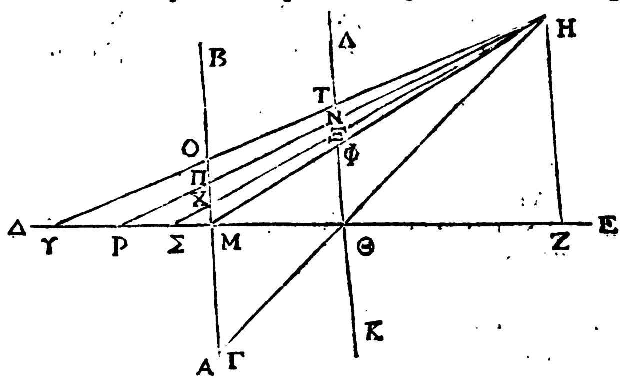
Cas. IV. Ducatur jam, juxta Casum quartum, recta ΗΡ auferens ab ipsis ΓΒ, ΖΔ rationem ΓΠ ad ΖΡ æqualem rationi datæ. Jungatur ΗΓ; ac per punctum Θ jam cognitum, ducatur recta ipsi ΑΒ parallela, ut ΚΘΛ; ac recta ΚΛ positione datur. Cum autem ratio ΗΓ ad ΗΘ, sive ΓΠ ad ΘΝ, data est, *ac ratio* ΓΠ *ad* ΖΡ *datur, ratio quoq;* ΝΘ *ad* ΖΡ *datur*. Jam dantur positione duæ rectæ ΚΛ, ΔΕ; sumitur



mitur autem in Κ Λ punctum Θ, in ipsâ vero Δ Ε punctum Ζ: punctum autem cognitum Η est intra angulum Ε Θ Λ; ac recta parallela cadit super ipsum punctum Ζ. Ducenda est igitur recta Η Ν Ρ quæ auferat rationem Θ Ν ad Ρ Ζ. Recta autem illa Η Ρ positione datur, per demonstrata in Libro primo ad Casum tertium Loci quinti.

Determinatur autem problema hunc in modum. Recta Ζ Θ potest esse vel major vel minor quam Θ Μ: imprimis autem non sit major quam Θ Μ. Junge Η Μ, ac dico quod recta Η Μ *aufert rationem* Γ Μ ad Μ Ζ majorem quavis aliâ rectâ per punctum Η ductâ, ipsique Δ Μ occurrente. Ducatur enim recta alia, ut Η Ν Ρ; cumque recta Ζ Θ non est longior quam Θ Μ, recta Η Μ vel auferet rationem Θ Ξ ad Μ Ζ maximam, vel propior erit rectæ rationem maximam abscindenti quam ista Η Ρ. Quare ratio Θ Ξ ad Μ Ζ major erit ratione Θ Ν ad Ζ Ρ, ac permutando ratio Θ Ξ ad Θ Ν major erit ratione Μ Ζ Ζ Ρ. Quoniam vero Θ Ξ est ad Θ Ν ut Γ Μ est ad Γ Π, erit ratio Γ Μ ad Γ Π major ratione Μ Ζ ad Ζ Ρ; ac permutando ratio Γ Μ ad Μ Ζ major erit ratione Γ Π ad Ζ Ρ. Recta igitur Η Μ aufert rationem Γ Μ ad Μ Ζ, majorem quavis ratione à recta qualibet per punctum Η transeunte, rectæque Δ Μ occurrente abscissâ. Q. E. D.

Manentibus descriptis, jam sit recta Ζ Θ major quam Θ Μ, ac fiat recta Θ Ρ ipsi Ζ Θ æqualis: ac junctâ Η Ρ, dico quod

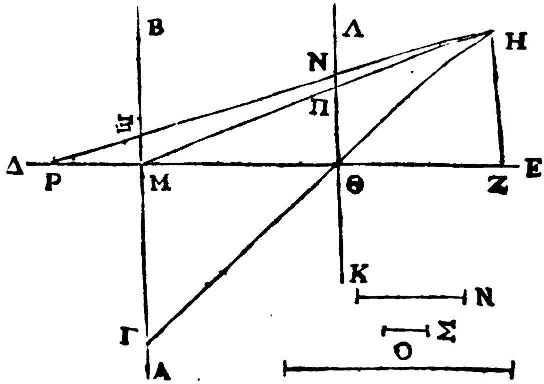


recta Η Ρ aufert rationem Γ Π ad Ρ Ζ majorem quavis ratione, quam abscindit recta quælibet alia per punctum Η ducta, rectæque Μ Δ occurrens. Ducantur rectæ duæ ab utrâque

parte

parte ipsius H P, ut H Σ, H T. Quoniam vero recta Z Θ æqualis est ipsi Θ P, recta H P auferet rationem N Θ ad Z P maximam, juxta Casum tertium Loci quinti. Etenim rectæ K Λ, Δ E dantur positione; ac notatur in recta K Λ punctum Θ, ac in Δ E punctum Z; ac parallela per H ducta cadit super punctum Z: & recta Θ P æqualis est ipsi Z Θ. Ratio igitur N Θ ad Z P major est ratione Θ T ad Z T; ac permutando erit ratio Θ N ad Θ T major ratione Z P ad Z T. Sed N Θ est ad Θ T ut Γ Π ad Γ O. Quare ratio Γ Π ad Γ O major est ratione Z P ad Z T, *ac permutando ratio* Π Γ *ad* Z P *major est ratione* Γ O *ad* Z T. Simili argumento demonstratur rectam alteram H Σ auferre rationem minorem quam recta H P. Recta igitur H P aufert rationem Γ Π ad Z P, majorem quavis rectâ per H transeunte ipsique M Δ occurrente. Dico præterea rectam H M abscindere rationem Γ M ad M Z, minorem qualibet ratione, à rectâ quavis per H transeunte, ipsique P M soli occurrente, abscissâ. Etenim recta H Σ propior est rectæ maximam rationem auferenti, sive rectæ H P, quam est H M; erit igitur ratio Θ Ξ ad Z Σ major ratione Θ Φ ad Z M: ac permutando ratio Θ Ξ ad Θ Φ major erit ratione Z Σ ad Z M. Sed Θ Ξ est ad Θ Φ ut Γ X ad Γ M, adeoque ratio Γ X ad Γ M major erit ratione Z Σ ad Z M; ac permutando Γ X erit ad Z Σ in majore ratione quam Γ M ad M Z. Recta igitur H M aufert rationem Γ M ad M Z minorem rectâ quâvis per H ductâ ac ipsi P M soli occurrente. Q. E. D.

Sic autem componetur problema hoc. Manentibus descriptis, recta Z Θ potest esse vel major rectâ Θ M, vel minor illâ. Imprimis autem sit Z Θ non major quam Θ M. Junctâ igitur H M, recta H M auferet rationem Γ M ad M Z, majorem qualibet ratione, à rectis per H ductis ipsique Δ M occurrentibus, ablatâ. Ac si fuerit ratio data æqualis rationi Γ M ad M Z, recta H M sola solvit problema, auferendo scilicet rationem illam maximam. Si major fuerit ratio proposita, tum componi non potest problema, quia ratio data major est maximâ. Si vero proponatur ratio minor, tum fieri potest unico tantum modo. Sit jam ratio proposita sicut N ad O minor ratione Γ M ad M Z. Fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Σ: cumque H Γ est ad H Θ sicut Γ M ad Θ Π, erit etiam Γ M ad Θ Π sicut N ad Σ, ac invertendo Θ Π ad Γ M erit ut Σ ad N. Sed ratio Γ M ad M Z major est ratione N ad O; quare ex æquo erit ratio Σ ad O minor ratione ΘΠ ad MZ, hoc est ratione maximâ. Igitur, juxta Casum tertium Loci quinti, ducantur, ab utraque parte ipsius HM, rectæ duæ auferentes à rectis ZΔ, ΘΠ, rationem æqualem rationi Σ ad O. Sed altera tantum è rectis illis occurret ipsi MΔ, ut recta HP, quæ auferet rationem ΘN ad ZP æqualem rationi Σ ad O.

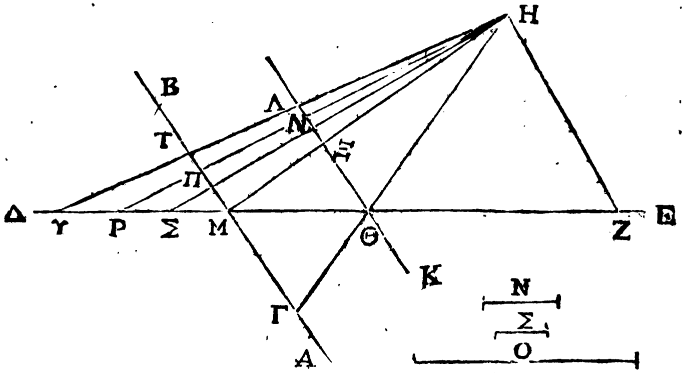


Dico quod recta HP solvit problema. Etenim HΓ est ad HΘ ut N ad Σ; & ΓΞ est ad ΘN ut HΓ ad HΘ: adeoque ΓΞ est ad ΘN sicut N ad Σ. Sed NΘ est PZ sicut Σ ad O. Quare ex æquo ΓΞ erit ad ZP sicut N ad O. Recta igitur HP solvit problema. Altera autem recta non occurret ipsi MΔ, adeoque non solvit problema; quod nullo alio modo construi potest præter dictum. Q. E. D.

Manentibus descriptis; sit recta ZΘ major quam ΘM. Fiat recta ΘP æqualis illi, ac jungantur ipsæ HM, HP. Quoniam recta ZΘ æqualis est ipsi ΘP, recta HP auferet rationem ΓΠ ad PZ, majorem quavis ratione quam abscindere possit recta quælibet per H ducta ipsique MΔ occurrens: ac recta HM auferet rationem ΓM ad MZ, minorem quâvis aliâ rectâ ipsi MP occurrente. Jam si ratio data æqualis fuerit rationi ΓΠ ad PZ, sola recta HP solvit problema. Si vero proponatur ratio major quam ΓΠ ad PZ, tum problema construi non potest; quia ratio data major est maximâ. Quod si proponatur ratio minor quam ΓΠ ad PZ, major vero quam ΓM ad MZ, construetur problema duobus modis; quia duci possunt rectæ duæ ab utroque latere ipsius HP, quæ occurrentes ipsi MΔ satisfacient proposito. Si vero ratio non fuerit major ratione ΓM ad MZ, tum problema unicam tantum sortitur solutionem. Sit jam ratio data sicut N ad O, quæ minor sit ratione ΓΠ ad PZ, major vero quam ratio ΓM ad

MZ.

MZ. Fiat ut ΓH ad HΘ ita N ad Σ. Quoniam autem, ut ΓH est ad HΘ ita ΓΠ ad ΘN, erit quoque ΓΠ ad ΘN sicut N ad Σ; ac invertendo ΘN erit ad ΓΠ sicut Σ ad N. At ratio ΓΠ ad PZ major est ratione N ad O; quare ex æquo ratio ΘN ad PZ major erit ratione Σ ad O. Quinetiam cum ratio ΓH ad HΘ sit ut ΓM ad ΘΞ; ac ΓH sit ad HΘ ut N



ad Σ; ideo ΓM ad ΘΞ erit ut N ad Σ. Sed ΓM est ad MZ in ratione minore quam N ad O; quare invertendo & ex æquo, ΘΞ ad MZ erit in ratione minore quam Σ ad O. Ratio igitur Σ ad O minor erit ratione ΘN ad PZ, ac major ratione ΘΞ ad MZ. Sed ratio ΘN ad PZ maxima est, per Casum tertium Loci quinti. Ducantur ergo rectæ duæ per punctum H, ab utraque parte ipsius HP, quæ occurrentes ipsi ΔM *auferant à rectis* ΘΛ, ZΔ rationes æquales rationi datæ, sive rationi Σ ad O. Sint autem ipsæ rectæ HΥ, HΣ. Dico harum utramque problema solvere. Quoniam enim HΓ est ad HΘ sicut N ad Σ; ac ΓT est ad ΘΛ sicut HΓ ad HΘ: erit etiam ΓT ad ΘΛ sicut N ad Σ. Sed ΘΛ est ad ZΥ sicut Σ ad O; quare ex æquo ΓT erit ad ZΥ sicut N ad O, adeoque recta HΥ solvit problema. Ac pari argumento probabitur alteram etiam rectam HΣ satisfacere problemati. Quod autem recta HΣ non cadat ultra rectam HM, sic demonstratur. Quoniam ratio Σ ad O minor est ratione ΘN ad PZ, quæ nempe æqualis est rationi maximæ; (juxta Casum tertium Loci quinti) major vero ratione ΘΞ ad MZ à rectâ HM abscissâ; rectæ autem, quæ propiores sunt rationem maximam auferenti, majores abscindunt rationes quam remotiores ab eadem:

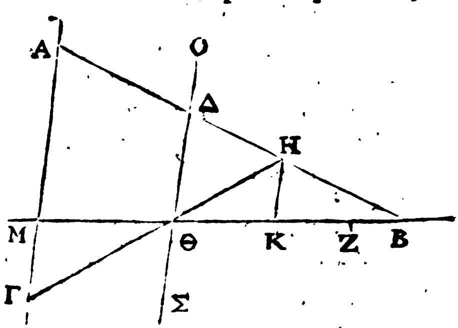
eadem: igitur recta, quæ aufert rationem Σ ad O, occurret rectæ PM. Q. E. D.

Manentibus autem descriptis, sit ratio data, nempe ratio N ad O, jam non major ratione ΓM ad MZ. Manifestum est rationem Σ ad O non esse majorem ratione ΘΞ ad MZ, adeoque minorem esse ratione ΘN ad ZP, sive maxima. Ducantur igitur, juxta Casum tertium Loci quinti, rectæ duæ, ab utraque parte rectæ HP, quæ abscindere possint rationem æqualem rationi Σ ad O; quarum altera occurret rectæ MΔ, adeoque satisfaciet problemati; ut demonstratur in præmissis: altera vero non solvet problema, quia non occurret rectæ PM, sed rectæ MΘ. Quoniam enim rectæ propiores ipsi HP auferunt rationes majores quam rectæ remotiores ab eadem; ac ratio Σ ad O minor est ratione ΘΞ ad MZ; erit recta illa altera remotior ab ipsa HP quam est recta HM, adeoque ipsi MΘ occurret. Q. E. D.

LOCUS TERTIUS.

Occurrat jam recta, per punctum H ducta ipsique AΓ parallela, rectæ alteri MB citra punctum Z; sive inter illud ac punctum M, ad modum rectæ HK: ac manifestum est rectas duci posse per punctum H, juxta quinque diversos Casus.

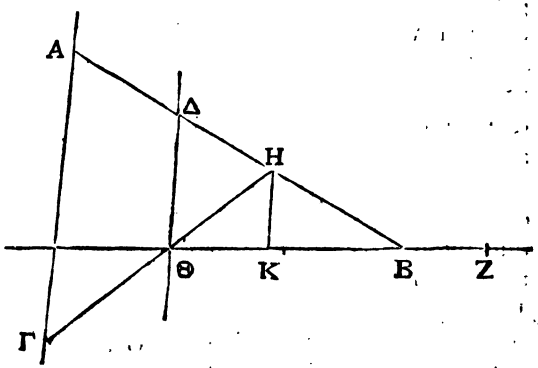
Cas. I. Ducatur autem imprimis recta AB, juxta Casum primum, auferens segmenta ΓA ad BZ in ratione data. Junge ΓH; ac per punctum Θ ducatur recta ipsi ΓA parallela, ut recta ΣΘO. Quoniam ratio ΓH ad HΘ datur, ratio ΓA ad ΔΘ data est. *Cumque ratio* ΓA *ad* BZ data est, dabitur quoque ratio ΔΘ ad ZB. Sunt autem rectæ duæ positione datæ, ΣO, MB; ac sumitur in



recta MB punctum Z, in recta autem ΣO punctum Θ; datum autem punctum H est intra angulum OΘB. Ducenda est igitur recta AHB, auferens rationem ΔΘ ad ZB datam. Recta autem AHB positione datur, juxta Casum primum Loci

Loci ſeptimi, neque habet limites. Conſtruetur autem per ea quæ ibidem docentur.

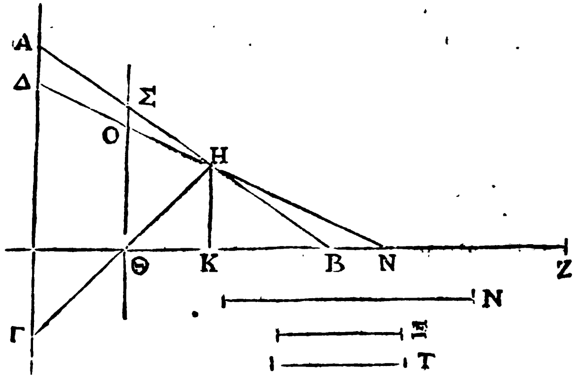
Caſ. II. Ducatur recta A B, juxta Caſum ſecundum, auferens rationem Γ A ad B Z datam. Manentibus autem deſcriptis; cum ratio Γ A ad Δ Θ data eſt, atque etiam ratio Θ Δ ad Z B datur, recta quoque A B dabitur poſitione; per Caſum ſecundum Loci ſeptimi.



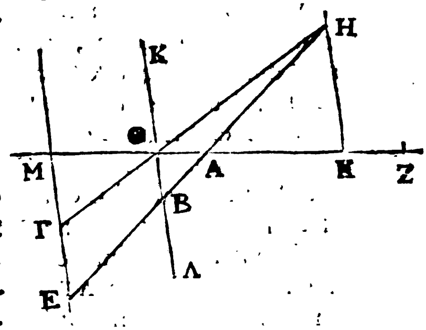
Determinatur autem hunc in modum. Capiatur Θ B media proportionalis inter ipſas Z Θ, Θ K; junctâque H B ac productâ ad A, dico quod recta A B aufert rationem Γ A ad B Z, minorem quavis aliâ ratione, quæ reſecari poſſit à rectis per punctum H ductis, ipſique K Z occurrentibus. Ducatur enim alia, ut Δ H N. Cumque recta Θ B media proportionalis eſt inter Z Θ, Θ K; erit ratio Σ Θ ad B Z minor ratione O Θ ad Z N: ac permutando, erit ratio Σ Θ ad Θ O minor ratione B Z ad Z N. Sed Σ Θ eſt ad Θ O ut A Γ ad Γ Δ; adeoque ratio A Γ ad Γ Δ minor erit ratione B Z ad Z N: quare permutando, ratio A Γ ad B Z minor erit ratione Γ Δ ad Z N. Recta igitur A B aufert rationem A Γ ad B Z minorem qualibet ratione, à rectis per H tranſeuntibus rectæque K Z occurentibus, abſciſsâ.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam deſcriptis; ſit Θ B media proportionalis inter rectas Z Θ, Θ K; junctaque H B producatur ad A. Dico quod recta A B auferet rationem Γ A ad B Z, minorem quavis aliâ ratione, quam abſcindere poteſt recta quævis alia per punctum H ducta, ipſique K Z occurrens. Quod ſi ratio ad conſtruendum propoſita æqualis fuerit rationi Γ A ad Z B; tum recta A B ſola ſolvit problema; ſi minor fuerit eâ, compoſitio fieri non poteſt. Si vero major fuerit eâ, componetur duobus

bus modis, ab utrâque parte ipsius A B. Sit autem ratio data sicut N ad T, quæ major sit ratione Γ A ad B Z. Fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Ξ: ac manifestũ est ex æquo, quod ratio Ξ ad T major erit ratione Θ Σ ad B Z. Sed ratio Θ O ad N Z major est eâ; quia Θ B media proportionalis est inter Z Θ & Θ K: unde constat rectas duas duci posse per punctum H, ab utraque parte ipsius A B, quæ secent à rectis Θ Σ, Z K, rationes æquales rationi Ξ ad T. Constat autem ex præmissis rectas hunc in modum ductas solvere problema.



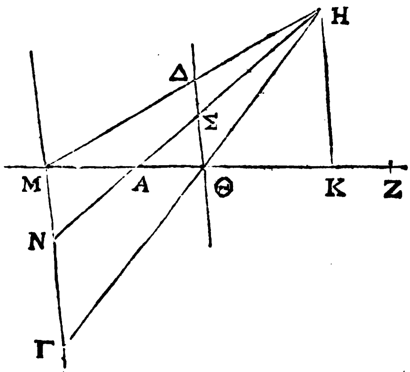
Cas. III. Ducatur jam, juxta Casum tertium, recta auferens rationem Γ E ad A Z datam. Quoniam ratio E Γ ad B Θ datur, ac ratio quoque B Θ ad A Z data est; recta E H positione datur: per Casum tertium Loci septimi, qui quidem non habet limites, adeoque manifesta est compositio.



Cas. IV. Ducatur jam, ad modum quartum, recta H N auferens rationem Γ N ad A Z datam. Quoniam ratio Γ N ad Θ Σ datur, etiam ratio Σ Θ ad A Z data est; unde recta H N positione datur. Reducitur enim ad Casum quartum Loci septimi.

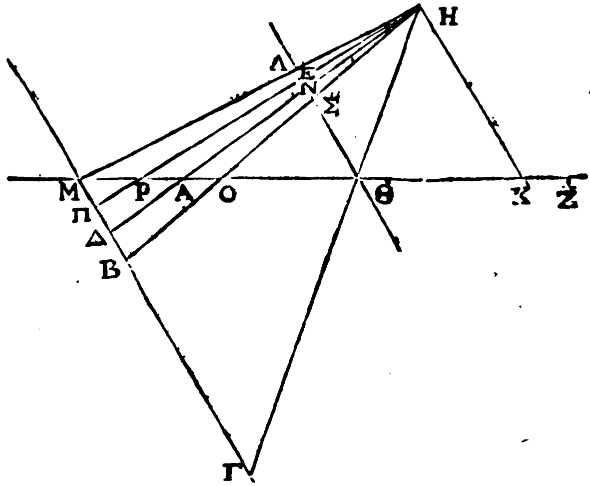
Determinatur autem problema hunc in modum. Manentibus prius descriptis, capiatur media proportionalis inter Z Θ & Θ K. Hæc vel minor erit recta Θ M, vel non minor eâ: ac primo non sit minor eâ. Junge H M, ac dico quod recta

recta HM aufert rationem ΓM ad MZ, majorem quavis ratione, à rectâ qualibet per punctum H ductâ ipsique ΓM occurrente, abscissâ. Ducatur enim alia ut HN. Quoniam media proportionalis inter ZΘ, ΘK non est minor quam ΘM; recta HM vel auferet rationem ΘΔ ad ZM maximam, vel propior erit rectæ rationem maximam auferenti: adeoque ratio ΔΘ ad ZM major erit ratione ΘΣ ad AZ; *permutando autem* ΔΘ *ad* ΘΣ *major erit ratione* ZM *ad* AZ. Sed ΔΘ est ad ΘΣ ut est MΓ ad ΓN; quare ratio MΓ ad ΓN major erit ratione MZ ad AZ: ac permutando iterum, ratio MΓ ad MZ major erit ratione ΓN ad AZ. Recta igitur HM aufert rationem ΓM ad MZ, majorem quavis ratione quam aufert recta quælibet alia per punctum H ducta ipsique ΓM occurrens. Q. E. D.



Sit jam media proportionalis inter ZΘ & ΘK minor quam ΘM, ut ΘA. Jungantur HM, HA, ac producatur HA ad Δ. Dico quod recta HΔ aufert rationem ΓΔ ad AZ, majorem quavis alia ratione, quam abscindit recta quælibet per H ducta, totique rectæ ΓM occurrens: quodque recta HM aufert rationem ΓM ad MZ, minorem quâvis aliâ rectâ ipsi ΔM occurrente. Ducantur enim rectæ duæ ut HΠ, HB. Quoniam autem ΘA media proportionalis est inter ZΘ, ΘK, auferet recta HA rationem ΘN ad AZ maximam. Est igitur ratio ΘN ad AZ major ratione ΣΘ ad ZO; & permutando ratio ΘN ad ΣΘ major erit ratione AZ ad ZO. Sed NΘ est ad ΘΣ ut ΔΓ ad ΓB, quæ proinde ratio major est ratione AZ ad ZO: permutando autem ratio ΔΓ ad AZ major erit ratione ΓB ad ZO. Ac pari modo demonstratur rationem illam majorem esse ratione ΓΠ ad PZ. Quapropter recta HΔ aufert rationem ΓΔ ad AZ, majorem omnibus rationibus à rectis per H ductis rectæque ΓM occurrentibus, abscissis. Dico præterea quod recta HM aufert

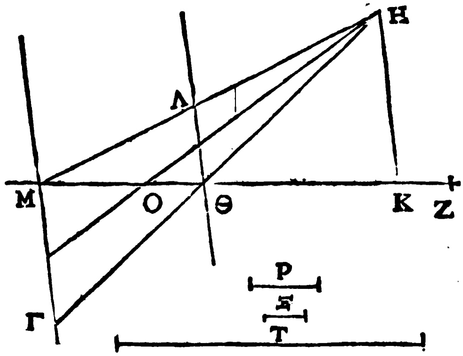
fert rationem Γ M ad M Z, minorem ratione quacunque, à rectâ quâvis *per* H *ductâ*, ipsamque Δ M intersecante, abscissâ.



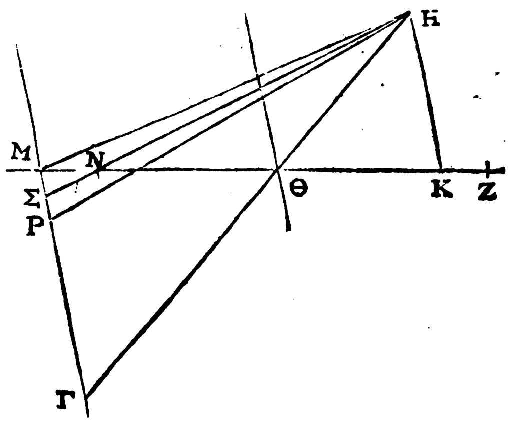
Quoniam enim recta H Π propior est ipsi H Δ, maximam rationem auferenti, quam est recta H M; ac rectæ quæ propiores sunt illi semper abscindunt rationes majores: igitur ratio Θ Ξ ad P Z major erit ratione A Θ ad M Z. Permutando autem ratio Ξ Θ ad Θ A major erit ratione P Z ad Z M. Sed Ξ Θ est ad Θ A ut Π Γ ad Γ M; ratio igitur Π Γ ad Γ M major erit ratione P Z ad Z M: ac permutando ratio Π Γ ad P Z major erit ratione Γ M ad M Z. Quocirca recta H Δ aufert rationem Γ Δ ad A Z, majorem quavis ratione quam abscindere potest recta aliqua alia per H ducta, ita ut rectis Γ M, Δ M occurrat. Recta vero H M aufert rationem minorem quâvis aliâ rectam Δ M solam intersecante.

Sic autem componetur problema hoc. Maneant jam descripta; ac media proportionalis inter Z Θ, Θ K, vel minor erit quam M Θ; vel non erit minor eâ. Imprimis autem non sit minor ea. Junge H M; ac recta H M abscindet rationem Γ M ad M Z, majorem quam recta quævis per H ducta ipsamque Γ M intersecans. Igitur si ratio ad construendum data fuerit æqualis rationi Γ M ad M Z; recta H M eaque sola solvit problema. Si vero ratio minor fuerit, construetur problema unico tantum modo. Quod si ratio data, quæ sit

sit ut P ad T, minor fuerit ratione Γ M ad M Z; fiat ut Γ H ad H Θ ita P ad Ξ; ac demonstrari potest ex æquo, quod ratio Ξ ad T minor erit ratione Λ Θ ad M Z: unde patet quod possibile sit per punctum H ducere duas rectas, quæ auferant à rectis Γ M, M Z rationem æqualem rationi Ξ ad T. Hæ si ducantur, cadent ab utraque parte ipsius H M; ac manifestum est alteram ex his rectis ut H O, quæ per punctum H transit ac producta occurrit ipsi Γ M, solvere problema; *alteram vero non item*: adeoque unico tantum modo efficitur. Q. E. D.

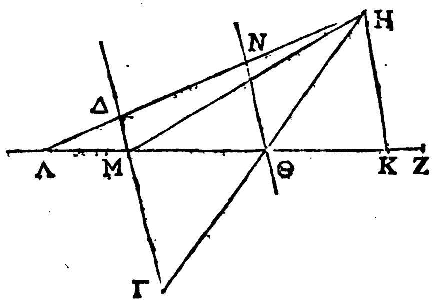


Jam sit media proportionalis inter Z Θ & Θ K minor quam recta Θ M; sit ea Θ N. Junge rectas H M, H N; & producatur H N ad Σ; ac recta hæc H Σ auferet rationem Γ Σ ad N Z, majorem quavis, quæ resecari possit à rectis per punctum H ductis, ipsique Γ M occurrentibus. Recta vero H M auferet rationem Γ M ad M Z, minorem quavis ratione à rectis per H ductis, ipsique Σ M soli occurrentibus, abscissâ. Propositâ autem ratione construendâ, quæ æqualis sit rationi Γ Σ ad N Z; manifestum est quod sola recta H Σ solvet problema. Si ratio proposita major fuerit ea, tum componi non potest. Quod si minor fuerit ratione Γ Σ ad N Z, major vero quam Γ M ad M Z; hoc in casu dupliciter solvi potest



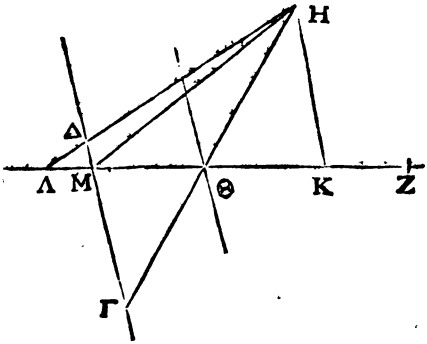
problema per præcedentia: à rectis scilicet ab utrâque parte ipsius Η Σ ducendis, ipsisque Γ Σ, Σ Μ occurrentibus. Quod si ratio data æqualis fuerit rationi Γ Μ ad Μ Ζ; constat etiam ex determinatione præmissâ, quod duobus modis solvi possit, nempe rectâ Η Μ, ac rectâ aliâ ut Η Ρ. Si vero ratio minor fuerit quam Γ Μ *ad* Μ Ζ; tum cadet altera è rectis ultra ipsam Η Μ, adeoque non satisfaciet problemati. Manifesta autem sunt hæc omnia ex iis quæ jam pridem demonstravimus.

Cas. V. Ducatur jam recta Η Λ, juxta Casum quintum, auferens rationem Γ Δ ad Λ Ζ datam. Quoniam ratio Γ Δ ad Θ Ν datur, ratio etiam Ν Θ ad Λ Ζ datur; unde recta *quoque* Η Λ positione data est, per demonstrata in Casu quarto *Loci septimi*, qui quidem determinationem habet. Determinatur autem hunc in modum. Quoniam media proportionalis inter Ζ Θ, Θ Κ, vel major esse potest quam recta Θ Μ, vel minor eâ; primum non sit major eâ. Junge Η Μ, ac manifestum est ex limitationibus præcedentibus, quod recta Η Μ auferet rationem Γ Μ ad Μ Ζ majorem rationibus omnibus, à rectis per punctum Η ductis rectæque Λ Μ occurrentibus, abscissis.



Si vero media proportionalis inter Ζ Θ, Θ Κ major sit quam recta Θ Μ; ut est recta Θ Λ: jungantur Η Λ, Η Μ; ac patet ex limitationibus præcedentibus, quod recta Η Λ auferet rationem Γ Δ ad Λ Ζ, majorem omni ratione, quam auferunt rectæ quævis per Η ductæ, ipsique Λ Μ Θ occurrentes. Recta vero Η Μ auferet rationem Γ Μ ad Μ Ζ, minorem quavis ratione, à rectis per Η ductis, solique rectæ Λ Μ occurrentibus, abscissâ. Q. E. D.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, erit media proportionalis inter Ζ Θ & Θ Κ, vel major quam Θ Μ, vel non major ea. Primo autem non sit major eâ. Junge Η Μ auferentem rationem Γ Μ ad Μ Ζ, M Z, majorem omni ratione, à rectis per H ductis, ipsique Λ M occurrentibus, abscissâ: ac si fuerit ratio ad componendum data ut Γ M ad M Z, sola recta H M solvit problema. Si major fuerit eâ, tum construi non potest. Quod si ratio minor fuerit eâ, ex præcedentibus constat unam solam rectam duci posse, quæ occurrens ipsi Λ M problemati satisfaciat. Q. E. D.



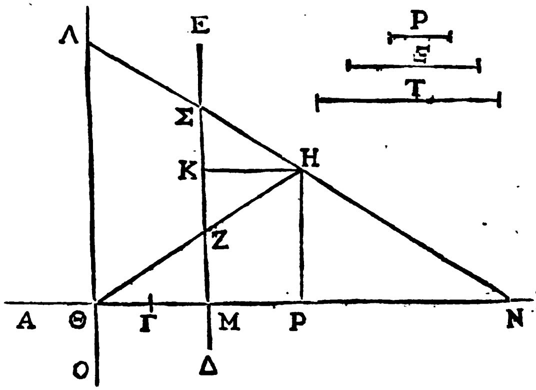
Quod si Θ Λ, media proportionalis inter Z Θ & Θ K, major fuerit quam Θ M; jungantur H M, H Λ; ac recta H Λ auferet rationem Γ Δ ad Λ Z, majorem omni ratione quam abscindunt rectæ aliæ per H ductæ, ipsique Θ M *continuatæ* occurrentes: recta vero H M auferet rationem minimam, nempe rationem Γ M ad M Z. Jam si proponatur ratio ad construendum, quæ fuerit ut Γ Δ ad Λ Z; patet quod recta H Λ sola solvet problema: ac si major fuerit ratio, non construetur. Quod si minor fuerit ratione Γ Δ ad Λ Z, major vero quam Γ M ad M Z, manifestum est ex præmissis, problema effici posse duobus modis; ductis rectis, ab utraque parte ipsius H Λ, rectæ Λ M occurrentibus. Si vero minor fuerit ratione Γ M ad M Z, ex præcedentibus limitationibus constat, unico solum modo solvi posse problema; scilicet rectâ ipsam Λ M intersecante. Denique si ratio æqualis fuerit rationi Γ M ad M Z, duplicem habebit solutionem. Recta enim H M, atque etiam alia ipsi Λ M occurrens ultra punctum Λ, rem præstant. Totum hoc patet ex prius demonstratis.

LOCUS QUARTUS.

Cadat jam recta, quæ per H ducitur ipsi A B parallela, ultra punctum Z; ita ut Z sit inter illam & punctum M: sitque ea recta H K. Recta vero per puncta H, Z ducta & producta, vel incidet super ipsum punctum Γ; vel inter illud & punctum Λ; vel inter illud & punctum M. Cadat autem imprimis

primis inter illud & punctum A, ut recta H Θ; & manifestum est rectas per punctum H ductas disponi posse juxta quinque diversos Casus.

Cas. I. Ducatur autem modo primo, recta N H Σ auferens rationem Γ N ad Z Σ datam. Per punctum Θ ducatur recta parallela ipsi M Z; ac producatur recta N Σ usque ad punctum Λ. Quoniam autem punctum Z datur, etiam recta Θ Z H positione datur; ac rectâ A B positione datâ, punctum Θ etiam datur: adeoque recta O Θ Λ *ipsi* Δ E *parallela positione* data est. Ratio autem Θ H ad H Z datur; quare ratio etiam Θ Λ ad Z Σ datur. Quoniam vero ratio Γ N ad Z Σ datur, ratio quoque Θ Λ ad Γ N datur. Jam

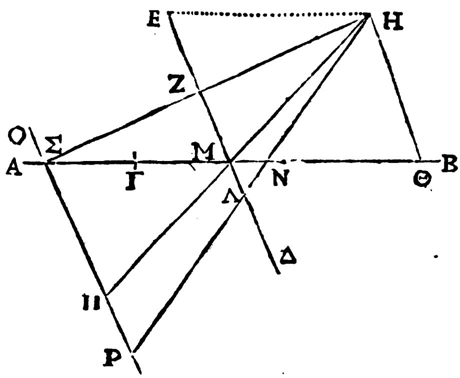


dantur rectæ duæ A B, Θ Λ; ac sumitur in recta Θ Λ punctum Θ, in recta autem A B punctum Γ; punctum autem datum H est intra angulum Λ Θ B; cadit etiam recta parallela ultra punctum Γ. Ducenda est igitur recta N H Λ, auferens rationem Θ Λ ad Γ N datam. Recta autem H Λ positione datur, per demonstrata in Casu primo Loci sexti; qui quidem Casus determinationem non habet.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus quæ supra, sit ratio data sicut P ad T. Dico quod recta N Λ satisfacit problemati. Quoniam enim Z H ad H Θ, sive Z Σ ad Θ Λ, est ut P ad Ξ; ac Θ Λ ad Γ N est ut Ξ ad T; ex æquo erit Z Σ ad Γ N sicut P ad T, adeoque recta N H Λ solvit problema. Q. E. D.

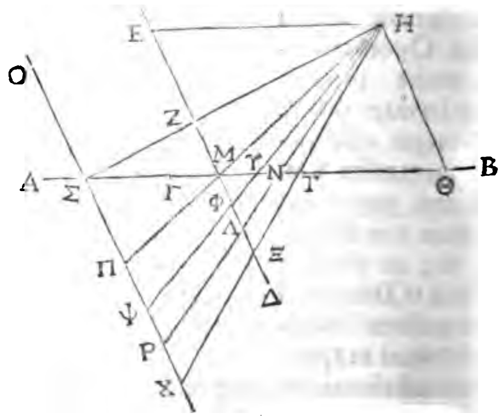
Cas. II. Ducatur jam, juxta Casum secundum, recta H Λ auferens rationem Γ N ad Z Λ datam; ducatur per punctum Σ recta parallela ipsi E Δ, ut O Σ P: ac dato utroque puncto H & Z, recta H Z Σ etiam positione datur. Datâ autem positione rectâ A B, punctum Σ datur; ductâ vero rectâ O Σ P per datum

datum punctum Σ, datæque rectæ ΑΕ parallelâ, ipsa ΟΡ positione datur. Duc etiam rectam ipsi ΔΕ parallelam, per punctum Η, ut ΗΘ: adeoque punctum Θ datur. Denique ducatur recta ΗΛ. Quoniam autem puncta ΗΖΣ dantur, ratio ipsius ΣΗ ad ΗΖ datur; adeoque ratio ΡΣ ad ΖΛ datur. Sed data est ratio ΛΖ ad ΓΝ, *quare ratio* ΡΣ *ad* ΓΝ *datur*. Jam dantur positione rectæ duæ ΟΡ, ΑΒ; ac in recta ΟΡ sumitur punctum Σ, & in ΑΒ punctum Γ; recta autem parallela ΗΘ cadit ultra punctum datum Γ. Ducenda est igitur recta ΗΡ, juxta Casum secundum Loci sexti Lib. I. auferens rationem ΣΡ ad ΓΝ datam; quare recta ΗΡ positione datur. Determinationem autem habet. Quoniam vero media proportionalis inter ΘΣ & ΣΓ major esse potest quam recta ΣΜ, vel non major eá: primum non sit major eâ; ac ducatur recta ΗΜ. Dico quod ΗΜ auferet rationem ΓΜ ad ΜΖ, majorem quâvis ratione, quæ resecari possit à rectis per punctum Η ductis rectæque ΓΜ occurrentibus. *Producatur autem recta* ΗΜ ad punctum Π. Jam quia media proportionalis inter ΘΣ, ΣΓ non est major quam ΣΜ, potest esse vel æqualis illi, vel minor eâ. Et si fuerit æqualis ipsi ΣΜ, cum dentur positione duæ rectæ ΟΡ, ΑΒ; ac in ΟΡ sumatur punctum Σ, in ΑΒ vero punctum Γ; cadat autem recta parallela ΘΗ ultra punctum Γ; recta ΗΜ producta ad Π (per Casum secundum Loci sexti) auferet rationem ΠΣ ad ΓΜ, minorem quavis ratione quam resecat recta quævis alia sic ducta. *Si vero media proportionalis inter* ΘΣ, ΣΓ *minor fuerit quam* ΣΜ, *recta* ΗΜ propior erit rectæ rationem minimam abscindenti, quam recta quævis ΗΡ; quare ratio ΠΣ ad ΓΜ minor erit ratione ΡΣ ad ΓΝ; ac permutando ratio ΠΣ ad ΡΣ, hoc est ΖΜ ad ΛΖ, minor erit ratione ΓΜ ad ΓΝ. Atque iterum permutando, ratio ΖΜ ad ΜΓ minor erit ratione



tione ZΛ ad ΓN. Invertendo autem rationem, erit ratio ΓM ad ZM major ratione ΓN ad ZΛ. Unde patet rectam HM auferre rationem ΓM ad MZ, majorem omnibus rectis per punctum H ductis ipsique MΔ occurrentibus.

Sin autem media proportionalis inter rectas ΘΣ, ΣΓ, major fuerit quam est ΣM; sit ea recta ΣN. Junge HN, quæ producatur in directum. Junge etiam HM. Dico quod recta HN aufert rationem ΓN ad ZΛ, majorem quavis aliâ ratione à rectis per H ductis, totique rectæ MΔ occurrentibus, ablatâ. Producantur rectæ HM, HΛ ad Π & P, ac ab utraque parte ipsius HP ducantur rectæ HΞ, HΦ ad puncta X & Ψ continuandæ. Jam rectæ duæ OP, AB positione dantur; ac in OP sumitur punctum Σ, in AB vero punctum Γ; ac recta HΘ, quæ per punctum datum H ducitur ipsi OP parallela, cadit ultra punctum Γ: recta autem ΣN media proportionalis

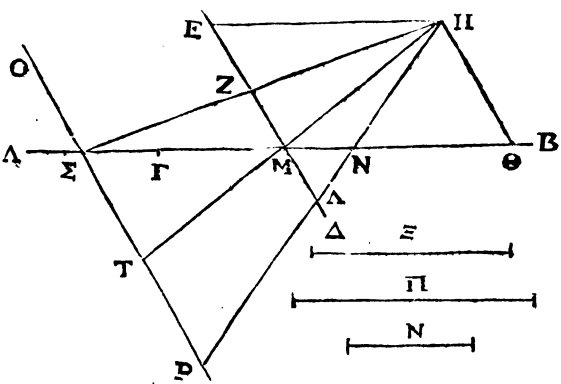


est inter ΘΣ & ΣΓ. Quocirca recta HNP ducta & producta (per Casum secundum Loci sexti) auferet rationem PΣ ad ΓN minimam. Ductâ igitur aliâ rectâ, ut HX; ratio PΣ ad ΓN minor erit ratione ΣX *ad* ΓT; ac permutando PΣ ad ΣX minor erit ratione ΓN ad ΓT. Sed PΣ est ad ΣX ut ZΛ ad ZΞ; adeoque ratio ΛZ ad ZΞ minor erit ratione ΓN ad ΓT; permutando autem ratio ΛZ ad ΓN minor erit ratione ZΞ ad ΓT. Invertendo itaque, ratio ΓN ad ΛZ major erit ratione ΓT ad ZΞ: quare recta HΛ aufert rationem majorem quam quævis recta HΞ; nempe rationem ΓN ad ZΛ, quæ major est quavis ratione, à recta qualibet per punctum H transeunte, totique rectæ ΔM occurrente, abscisâ. Dico præterea quod recta HM aufert rationem ΓM ad MZ, minorem quacunque ratione, à rectis per H ductis, solique

rectæ

rectæ MΛ occurrentibus, abſciſsâ. Quoniam enim recta HP aufert rationem minimam PΣ ad ΓN (per Caſum ſecundum Loci ſexti) ac rectæ propiores ipſi HP ſemper abſcindunt rationes minores quam remotiores ab eâdem; ratio igitur ΣΨ ad ΓΥ minor erit ratione ΠΣ ad ΓM; ac permutando ratio ΣΨ ad ΠΣ minor erit ratione ΓΥ ad ΓM. Sed ΣΨ eſt ad ΠΣ ut ΦZ ad ZM: quare ratio ΦZ ad ZM minor erit ratione ΓΥ ad ΓM. Dein permutando, ratio ΦZ ad ΓΥ minor erit ratione ZM ad ΓM. Invertendo itaque, ratio ΓΥ ad ΦZ major erit ratione ΓM ad ZM. Recta igitur HM aufert rationem minorem quam quæ reſecatur à recta HΦ. Unde patet rectam HM auferre rationem ΓM ad MZ, minorem quavis ratione, à rectis per H ductis, ipſique MΛ occurrentibus, abſciſsâ. Q. E. D.

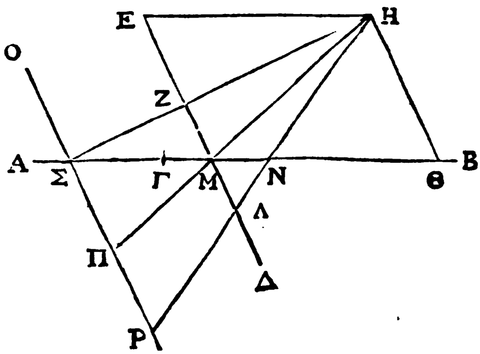
Componetur autem problema in hunc modum. Maneant jam deſcripta; ac primum ſit media proportionalis inter ΘΣ, ΣΓ, non major quam ΣM. Jungatur HM, ac recta HM auferet rationem ΓM ad MZ, majorem omni ratione, à rectâ quavis per H ductâ totiq; rectæ MΔ occurrente, abſcindendâ. Erit autem ratio



ad conſtruendum propoſita vel æqualis rationi ΓM ad MZ; vel major erit eâ; vel minor. Si æqualis fuerit ei, tum recta HM ſolvet problema. Si vero major fuerit ratione illâ, non componi poteſt, quia ratio propoſita major eſt maximâ. Quod ſi ratio minor fuerit, uno tantum modo efficietur. Sit autem data ratio ſicut Ξ ad N, quæ minor ſit ratione ΓM ad MZ. Fiat ut ΣH ad HZ ita Π ad N; ac producatur HM ad T. Jam conſtat, ex determinatione Caſus ſecundi Loci ſexti, quod ratio TΣ ad ΓM vel minima eſt; vel propior erit rationi minimæ, quam ratio quævis alia à rectâ ipſi PT occurrente abſciſsâ.

abſciſsâ. Quoniam autem ΣH eſt ad HZ ut Π ad N; ac ΣH eſt ad HZ ut ΣT ad ZM; erit etiam Π ad N ſicut ΣT ad ZM. At vero ratio N ad Ξ major eſt ratione MZ ad ΓM; quare ex æquo erit ratio Π ad Ξ major ratione ΣT ad ΓM. Cum autem ratio ΣT ad ΓM vel minima ſit; (per Caſum ſecundum Loci ſexti) vel minor ratione quavis, quam abſcindit recta quælibet ipſi TP occurrens; eâ vero major ſit ratio Π ad Ξ; duci poſſunt rectæ duæ, ab utroque latere ipſius HM, quæ auferant rationes æquales rationi Π ad Ξ. Harum vero altera non ſolvit problema, quæ ſcilicet ducta occurrit rectæ MZ; altera autem occurrens rectæ MΔ ſatisfacit problemati. Ductâ igitur rectâ HP auferente rationem PΣ ad ΓN æqualem rationi Π ad Ξ; dico rectam illam HP ſolvere problema, ſive ΓN eſſe ad ZΛ ſicut Ξ ad N. Quoniam enim ΣH eſt ad HZ ut Π ad N, ac ΣH eſt ad HZ ſicut PΣ ad ΛZ, erit etiam PΣ ad ΛZ ſicut Π ad N. Sed ΓN eſt ad PΣ ut Ξ ad Π; quare ex æquo ΓN erit ad ΛZ ſicut Ξ ad N: adeoque recta HΛP, eaque ſola, ſolvit problema. Q. E. D.

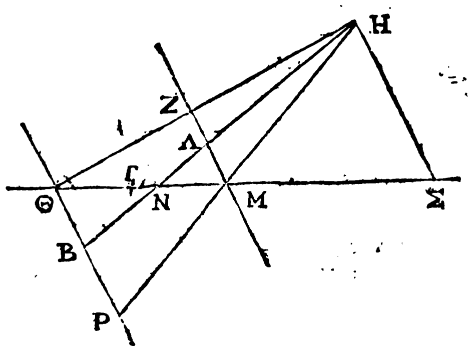
Quod ſi media proportionalis inter ΘΣ, ΣΓ major fuerit quam ΣM; ſit illa æqualis ipſi ΣN; ac junctæ HN, HM producantur ad puncta P & Π. Recta igitur HP auferet rationem ΓN ad ΛZ, majorem quavis ratione, quæ reſecari poſſit à rectis per punctum H ductis ipſiſque ΓB, ZΔ occurrentibus: ac recta HM auferet rationem ΓM ad MZ, minorem quavis ratione quam abſcindunt rectæ quævis per H ductæ ipſique MΛ occurrentes. Ratio autem data vel erit æqualis rationi NΓ ad ZΛ; vel major erit eâ; vel minor. Vel major erit ratione ΓM ad MZ; vel æqualis; vel minor eâ.



Jam ſi ratio fuerit æqualis ΓN ad ZΛ, ſola recta HNΛ ſatisfacit problemati; ac ſi major fuerit eâ non componetur. Quod ſi minor fuerit eâ, ſed major ratione ΓM ad MZ, conſtruetur

struetur problema duobus modis, *ab utraque scilicet parte* ipsius Η Λ. Si vero minor fuerit ratione Γ Μ ad Μ Ζ, uno tantum modo componetur, scilicet ultra punctum Λ.

Cas. III. Ducatur jam, juxta modum tertium, recta Η Λ auferens rationem Ν Γ ad Λ Ζ datam. Datur autem ratio Λ Ζ ad Β Θ: quare ratio Β Θ ad Ν Γ datur. Datur igitur positione recta Η Λ, per ea quæ habentur ad Casum secundum Loci sexti Lib. I.



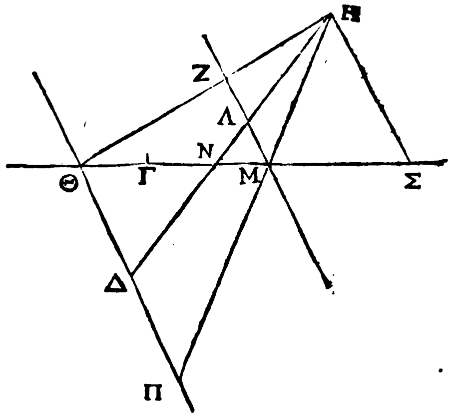
Determinatur autem ad hunc modum. Quoniam media proportionalis inter Θ Σ & Θ Γ vel minor esse potest quam recta Θ Μ, vel non minor eâ: primum non sit minor eâ; ac jungatur recta Η Μ, quæ producatur ad Ρ. Manifestum est, ex jam demonstratis, rectam Η Μ auferre rationem Γ Μ ad Μ Ζ, majorem quavis ratione, quam abscindunt rectæ quævis per Η ductæ ipsique Γ Μ occurrentes. Q. E. D.

Quod si media proportionalis inter Θ Σ & Θ Γ minor fuerit quam Θ Μ; sit illa recta Θ Ν. Jungantur Η Μ, Η Ν, quæ producantur ad Ρ & Β; & patet, per ea quæ in præcedentibus demonstrantur de limitibus, quod recta Η Ν aufert rationem Γ Ν ad Λ Ζ, majorem quavis ratione, à rectis quibuslibet per Η ductis, ipsiq; Γ Μ occurrentibus, abscissâ; quodque recta Η Μ aufert rationem Γ Μ ad Μ Ζ, minorem quavis ratione à rectis ipsam Μ Ν intersecantibus ablatâ.

Componetur autem problema in hunc modum. Maneant quæ supra; ac capiatur media proportionalis inter Θ Σ & Θ Γ. Hæc minor erit quam Θ Μ, vel non minor erit eâ. Ac primum non sit minor eâ. Juncta recta Η Μ producatur ad Ρ; ac recta Η Μ Ρ auferet rationem Γ Μ ad Μ Ζ, majorem ratione quavis, à rectis per Η ductis, ipsique Γ Μ occurrentibus, abscissâ. Si igitur proponatur ratio construenda, quæ

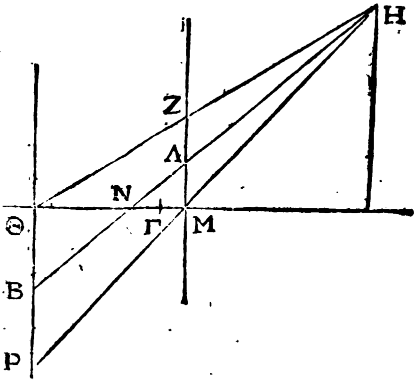
 æqualis

æqualis sit rationi Γ M ad M Z, patet solam rectam H M satisfacere problemati. Si vero major eâ fuerit ratio proposita, non componi potest. At si minor fuerit eâ, patet ex compositionibus jam descriptis, quod uno tantum modo fieri possit, rectâ scilicet ipsi Γ M occurrente.



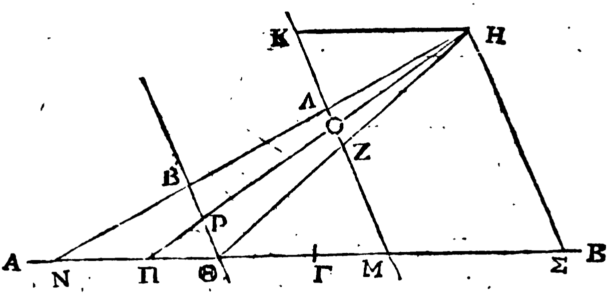
Quod si media proportionalis inter ipsas Σ Θ, Θ Γ minor fuerit quam ipsa Θ M, ut Θ N: junge rectas H M, H N, quæ producantur ad puncta Π & Δ; ac recta H Δ auferet rationem Γ N ad Λ Z majorem quâvis ratione quam secant rectæ quævis aliæ per punctum H ductæ, totique rectæ Γ M occurrentes; vel quam rectæ quæ soli rectæ M N occurrunt. Recta vero H Π abscindet rationem Γ M ad M Z minorem quavis ratione quam auferunt rectæ *quælibet soli* M N *occurrentes.* Quare si proponatur ad construendum ratio æqualis rationi Γ N ad Λ Z, manifestum est rectam H N satisfacere problemati; ac si major fuerit eâ, componi non posse. Quod si ratio data minor fuerit quam ratio Γ N ad Λ Z, major vero quam Γ M ad M Z; constat, è determinationibus modo descriptis, problema duobus modis componi posse, ab utraque parte ipsius H Δ, rectis ipsis Γ N & N M occurrentibus. Si vero ratio minor fuerit quam Γ M ad M Z, patet ex iisdem limitationibus, unam solam rectam ipsi Γ N occurrentem solvere problema. Si denique ratio data æqualis fuerit rationi Γ M ad M Z, ex iisdem præmissis consequitur, componi posse duobus modis; rectamque H M solvere problema, atque etiam rectam aliam ipsi Γ N occurrentem. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur jam recta HΛN, juxta Casum quartum, auferens rationem ΓN ad ΛZ datam. Producatur hæc ad punctum B; & ob datam rationem ΛZ ad BΘ, ratio quoque BΘ ad NΓ datur: recta igitur HΛN positione datur, juxta demonstrata in Casu tertio Loci sexti, qui non habet limites. Constructio autem manifesta est.



Cas. V. Ducatur jam modo quinto recta HΛN, auferens rationem ΛZ ad ΓN datam. Quoniam ratio ΛZ ad BΘ datur, data quoque est ratio ΘB ad NΓ; unde etiam recta HΛN positione datur. Reducitur enim ad Casum quartum Loci sexti.

Determinatur autem hunc in modum. Manentibus descriptis; sit ΘN media proportionalis inter ΘΣ, ΘΓ. Juncta HN, dico quod hæc recta HΛN aufert rationem ZΛ ad NΓ, majorem quacunque ratione, quam abscindere potest recta quævis per H ducta, totique rectæ ΘΛ occurrens. Ducatur enim recta alia ut HΠ; quoniam autem recta ΘN media



proportionalis est inter ΘΣ, ΘΓ, erit ratio ΘB ad NΓ major ratione ΘP ad ΓΠ; ac permutando erit ratio ΘB ad ΘP major ratione ΓN ad ΓΠ. Sed ΘB est ad ΘP ut ZΛ ad ZO; quare ratio ZΛ ad ZO major est ratione ΓN ad ΓΠ: ac permutando ratio ZΛ ad ΓN major erit ratione ZO ad ΓΠ.

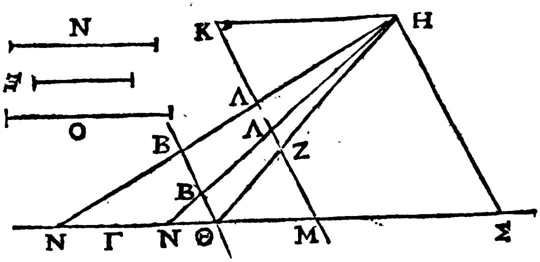
Recta igitur ΗΛΝ aufert rationem ΛΖ ad ΝΓ, majorem quavis aliâ rectâ per Η ductâ, ipsique ΘΛ occurrente. Q. E. D.

Sic autem componetur problema. Maneant jam descripta, ac fiat recta ΘΝ media proportionalis inter ΣΘ, ΘΓ. Jungatur ΗΝ, ac recta ΗΝ auferet rationem ΖΛ ad ΓΝ, majorem quâvis aliâ ratione, quam abscindet recta quævis per Η ducta totique ΘΛ occurrens. Si itaque ratio ad componendum proposita æqualis fuerit rationi ΛΖ ad ΓΝ, sola recta ΗΛΝ solvet problema. Si vero ratio data major fuerit eâ, tum non construi potest problema. Quod si minor fuerit eâ, patet ex jam demonstratis, duas rectas duci posse quæ problema solvant, nempe occurrentes ipsis ΛΝ, ΝΘ.

LOCUS QUINTUS.

Cadat jam recta ΗΘ, à puncto Η per punctum Ζ ducta, citra punctum Γ, *sive inter illud & punctum* Μ; ac manifestum est rectas duci posse per punctum Η juxta quinque Casus.

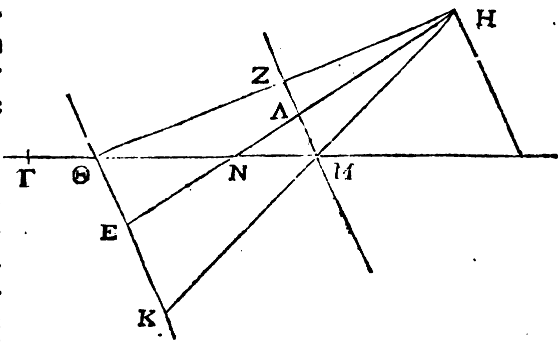
Cas. I. II. Imprimis autem ducantur rectæ ΝΗ, ad modum Casus primi & secundi, auferentes rationes ΖΛ ad ΓΝ datas. Quoniam ratio ΛΖ ad ΘΒ datur, dabitur quoque ratio ΒΘ ad ΝΓ. Dantur autem positione rectæ duæ, quarum altera ΘΒ notatur in puncto Θ, altera vero ΜΝ in puncto Γ; ac punctum datum Η est intra angulum ΒΘΜ. Ducendæ sunt igitur rectæ ΗΝ, juxta Casus primum & secundum *Loci quarti*, auferentes rationes datas ΘΒ ad ΓΝ; ac proinde datæ erunt positione rectæ ΗΝ, per regulas eorundem Casuum; qui quidem non habent limites.



Componentur autem problemata hunc in modum. Manentibus quæ prius, sit ratio data sicut Ν ad Ο; ac fiat ut ΖΗ ad ΗΘ ita Ν ad Ξ. Jam dantur positione rectæ duæ, nempe ΘΒ, ΓΜ; ac sumitur in ΘΒ punctum Θ; in alterâ vero ΜΝ punctum Γ; punctum autem datum Η est intra angulum ΜΘΒ. Rectæ igitur ΗΝ, ductæ juxta Casus primum & secundum Loci quarti, auferent rationes

rationes Θ B ad Γ N æquales rationi Ξ ad O; unde patet rectam H N satisfacere problemati.

Cas. III. Ducatur, juxta Casum tertium, recta H N auferens rationem Z Λ ad Γ N datam; ac producatur ea ad punctum E. Datâ autem ratione Z Λ ad E Θ, data quoque erit ratio E Θ ad Γ N: unde recta H N E positione datur, secundum demonstrata in Casu tertio Loci quarti. Determinatur autem hunc in modum. Junge rectam H M, quæ producatur ad K: dico rectam H K auferre rationem Z M ad M Γ, majorem quâvis ratione, à recta qualibet per punctum H ductâ, ipsique Z M occurrente, abscissâ. Ducatur enim recta alia ut H E; ac manifestum est rectam, puncto Θ propiorem, semper abscindere rationem minorem, quam quæ aufertur à remotiore ab eodem: adeoque erit ratio E Θ ad Γ N minor ratione K Θ ad Γ M. Permutando autem ratio K Θ ad E Θ major erit ratione Γ M ad Γ N. Sed K Θ est ad E Θ ut Z M ad Z Λ; quare ratio Z M ad Z Λ major erit ratione Γ M ad Γ N; ac permutando ratio Z M ad Γ M major erit ratione Z Λ ad Γ N. Quocirca recta H K aufert rationem M Z ad Γ M majorem quavis ratione, à rectâ quacunque per punctum H ductâ, ipsique Θ M occurrente, ablatâ.

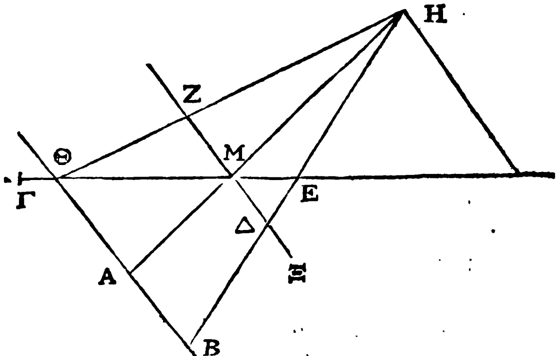


Componetur autem hunc in modum. Manentibus jam descriptis, jungatur H M, ac producatur ad K. Recta hæc H K auferet rationem Z M ad M Γ, majorem quavis ratione, quam aufert recta alia quævis per H ducta rectæque Θ M occurrens. Si itaque ratio ad componendum data æqualis fuerit rationi M Z ad Γ M; sola recta H K solvet problema. Si vero ratio data major fuerit eâ, non componetur. Quod si minor fuerit eâ, manifestum est è determinationibus præcedentibus, uno tantum modo problema effici posse, rectâ scilicet ipsi Θ M occurrente.

Cas. IV

Caſ. IV. Ducatur recta Η Δ, juxta modum quartum, auferens rationem Ζ Δ ad Γ Ε datam; ac producatur ea ad punctum Β. Quoniam ratio Ζ Δ ad Β Θ datur, ratio etiam Β Θ ad Γ Ε data erit, adeoque recta Η Β dabitur poſitione: reducitur enim ad eundem Caſum cum problemate præcedente.

Determinatur autem hunc in modum. Maneant jam deſcripta, ac juncta recta Η Μ producatur ad Α: dico rectam Η Α auferre rationem Ζ Μ ad Μ Γ, minorem quavis ratione, à rectâ qualibet per punctum Η ductâ ipſique Μ Ξ occurrente, abſciſsâ. Ducatur enim recta alia ut Η Β. Quoniam vero rectæ propiores puncto Θ auferunt rationes minores, quam quæ abſcinduntur à remotioribus ab eo; ratio Θ Α ad Γ Μ minor erit ratione Θ Β ad Γ Ε; ac permutando, erit ratio Θ Α ad Θ Β minor ratione Γ Μ ad Γ Ε. Sed Θ Α eſt ad Θ Β ut

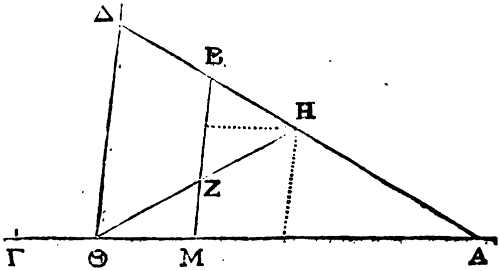


Ζ Μ ad Ζ Δ; adeoque ratio Ζ Μ ad Ζ Δ minor erit ratione Γ Μ ad Γ Ε. Permutando autem ratio Ζ Μ ad Μ Γ minor erit ratione Ζ Δ ad Γ Ε: quare recta Η Α aufert rationem Μ Ζ ad Γ Μ, minorem quavis ratione quam abſcindere poteſt alia quælibet recta per Η ducta ipſique Μ Ξ occurrens.

Componetur autem problema ad hunc modum. Jungatur recta Η Μ ac producatur ad Α; ac recta Η Α auferet rationem Ζ Μ ad Μ Γ, minorem quavis aliâ à rectis per Η ductis ipſique Ξ Μ occurrentibus abſciſsâ. Igitur ſi ratio ad conſtruendum propoſita æqualis fuerit rationi Ζ Μ ad Μ Γ, ſola recta Η Α ſatisfacit problemati. Si vero minor fuerit eâ, non componetur. Quod ſi major fuerit eâ, demonſtratum eſt in præmiſſis, unam ſolam rectam ipſi Ξ Μ occurrentem ſolvere problema.

Caſ. V.

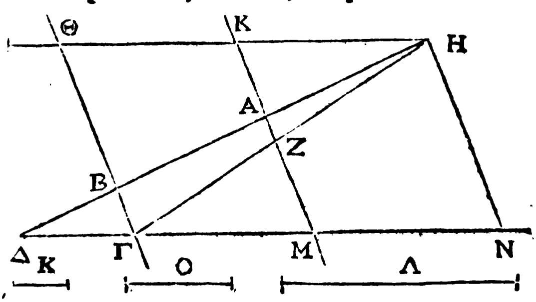
Cas. V. Ducatur, juxta modum quintum, recta ΑΒ auferens à rectis ΓΑ, ΖΒ rationem ΖΒ ad ΓΑ datam; ac producatur ea ad punctum Δ. Quoniam data est ratio ΖΒ ad ΘΔ, datur etiam ratio ΘΔ ad ΓΑ; adeoque recta ΔΑ positione datur; juxta resolutionem Casus quarti Loci quarti, qui non habet limites. Compositio autem manifesta est.



LOCUS SEXTUS.

Incidat jam recta, per puncta Η, Ζ ducta, super ipsum punctum Γ in recta altera sumptum, ut recta ΗΖΓ: ac manifestum est rectas per punctum Η duci posse juxta quatuor modos.

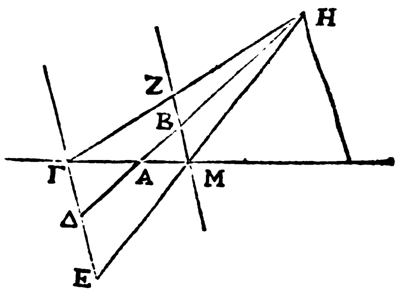
Cas. I. Ducatur autem imprimis recta ΗΒ, juxta Casum primum, auferens rationem ΖΑ ad ΓΔ datam, ac producatur ea *ad* Δ. *Quoniam ratio* ΖΑ *ad* ΓΒ *datur, dabitur etiam ratio* ΓΒ ad ΓΔ, adeoque recta ΒΔ positione datur, per ea quæ demonstrantur in Casu primo Loci tertii Lib. I. Oportet autem rationem datam minorem esse ratione ΚΖ ad ΓΝ. Ducatur enim recta *ipsi* ΜΖΚ parallela, ut ΗΝ, ac producatur utraque ΗΚ, ΓΒ ad Θ. Quoniam autem ratio ΘΓ ad ΓΒ major est ratione ΘΒ ad ΓΒ; ac ΘΓ est ad ΓΒ sicut ΚΖ ad ΖΑ; atque etiam ΘΒ est ad ΒΓ ut ΘΗ ad ΓΔ; recta vero ΘΗ æqualis est ipsi ΓΝ: ratio igitur ΚΖ ad ΖΑ major erit ratione ΓΝ ad ΓΔ. Permutando autem, ratio ΚΖ ad ΓΝ major erit ratione ΖΑ ad ΓΔ. Oportet itaque rationem ad componendum datam minorem esse ratione ΚΖ ad ΓΝ.



Compo-

Componetur autem problema in hunc modum. Esto ratio proposita sicut K ad Λ, quæ minor sit ratione K Z ad Γ N. Fiat ut Z H ad Γ H ita K ad O; cumque Z H est ad Γ H sicut K Z ad K M, erit etiam Z K ad K M sicut K ad O. Sed recta K M æqualis est ipsi H N: quare Z K est ad H N sicut K ad O; ac invertendo O erit ad K sicut H N ad K Z. Ratio autem K ad Λ minor est ratione K Z ad Γ N; igitur *ex æquo* ratio O ad Λ minor erit ratione H N ad N Γ. Quocirca si fiat ut O ad Λ ita H N ad N Δ, major erit illa quam recta N Γ. Junctâ autem H Δ, dico rectam H Δ solvere problema. Etenim K est ad O ut Z H ad H Γ, ac Z H est ad H Γ sicut Z A ad B Γ; adeoque Z A est ad B Γ ut K ad O. Sed N H est ad N Δ, hoc est B Γ ad Γ Δ, sicut O ad Λ: igitur ex æquo erit Z A ad Γ Δ sicut K ad Λ; adeoque recta H Δ solvit problema. Q. E. D.

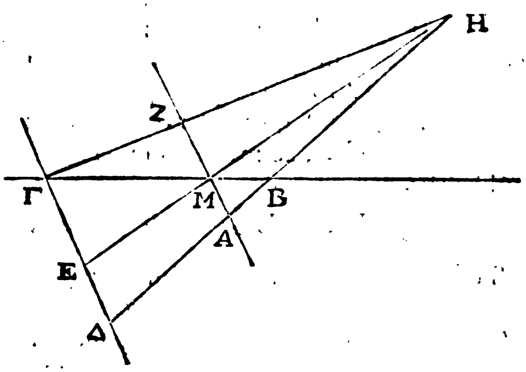
Cas. II. Ducatur jam, juxta modum secundum, recta H A auferens rationem B Z ad Γ A datam. Producatur ea ad punctum Δ. Quoniam autem ratio B Z ad Γ Δ datur, data est quoque ratio Γ Δ ad Γ A; quapropter recta H Δ positione datur: reducitur enim ad Casum secundum Loci tertii. Determinatio autem hæc est. Juncta H M producatur ad E, ac dico quod recta H M auferet rationem Z M ad M Γ *majorem* quavis ratione quam resecant rectæ per H ductæ ipsique Γ M occurrentes. Ductâ enim rectâ H Δ; cum rectæ propiores puncto Γ abscindunt semper rationes minores, quam quæ auferuntur à remotioribus ab eo: manifestum est rationem E Γ ad Γ M *majorem* esse ratione Δ Γ ad Γ A; ac permutando, rationem E Γ ad Γ Δ *majorem* esse ratione M Γ ad Γ A. Sed E Γ est ad Γ Δ sicut M Z ad Z B; adeoque ratio M Z ad Z B *major* erit ratione M Γ ad Γ A. Permutando autem ratio M Z ad Γ M *major* erit ratione Z B ad Γ A; quare recta H M aufert rationem Z M ad M Γ *majorem* quavis ratione quam auferant rectæ per H ductæ, totique rectæ Γ M occurrentes.



Componetur autem problema ad hunc modum. Maneant jam descripta, ac juncta H M producatur ad E. Recta hæc

HM auferet rationem ZM ad MΓ, * *majorem* quacunque ratione quam resecant rectæ quævis aliæ per H ductæ, totique rectæ ΓM occurrentes. Si igitur ratio proposita æqualis fuerit rationi ZM ad MΓ, sola recta HM solvit problema. Si *major* fuerit data ratio, non componi potest. Quod si *minor* fuerit eâ, patet quod, juxta Casum prædictum, duci possit recta, quæ occurrens rectæ ΓM solvat problema. Q. E. D.

Cas. III. Ducatur, juxta modum tertium, recta HA auferens rationem ZA ad ΓB datam, ac producatur ea ad punctum Δ. Quoniam ratio AZ ad ΓΔ datur, ratio ipsius BΓ ad ΓΔ etiam data est: unde recta HΔ positione datur. Reducitur enim ad eundem Casum cum problemate præcedente. Determinatur autem hunc in modum. Junge HM, quæ producatur ad E. Cum autem rectæ propiores puncto Γ auferunt semper rationes * *minores* quam quæ resecantur à remotioribus ab eo (per nuper demonstratas limitationes) constat rectam HM auferre rationem ZM ad MΓ *minorem* quavis aliâ à rectis per punctum H ductis, totique rectæ MB occurrentibus, abscissis.

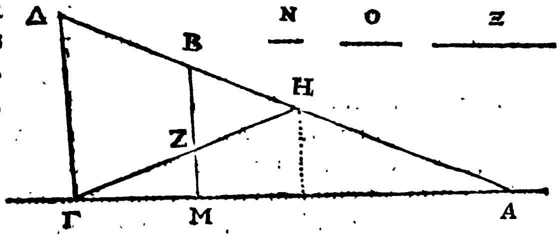


Sic autem componetur problema. Manentibus descriptis, jungatur HM que producatur ad E: recta hæc HM auferet rationem MZ ad ΓM, *minorem* quavis ratione, à qualibet aliâ per H ductâ, totique MB occurrente, abscissâ. Si igitur proponatur ratio componenda quæ æqualis sit rationi ZM ad MΓ; sola recta HM satisfacit problemati. Quod si *minor* fuerit eâ, non componetur. Si vero * *major* fuerit, manifestum est ex limitationibus præmissis rectam problema solventem occurrere ipsi MB. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur, juxta Casum quartum, recta AHB aufe-

* *In Cas.* II. *&* III. *ubique fere contrarium habet MS. Codex, manifestâ mendâ.*

rens rationem BZ ad ΓA datam. Producatur ea ad Δ. Datâ autem ratione BZ ad ΓΔ, datur quoque ratio ΓΔ ad ΓA: jam rectæ duæ ΓA, ΓΔ dantur positione; ac in utrâque earum sumitur punctum Γ; punctum autem datum H est intra angulum AΓΔ. Ducenda est igitur recta AΔ, juxta Casum tertium Loci tertii, auferens rationem ΓΔ ad ΓA datam; adeoque recta AΔ datur positione, (per ea quæ in prædicto casu demonstrantur) neque habet determinationem.

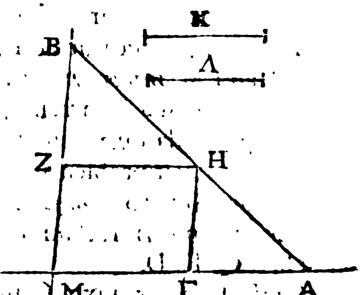


Componetur autem problema hunc in modum. Maneant descripta, ac sit ratio data sicut N ad Ξ. Fiat ut HZ ad ΓH ita N ad O. Jam dantur positione rectæ duæ ΓA, ΓΔ invicem occurrentes in puncto Γ; punctum autem datum H est intra angulum AΓΔ. Ducatur itaque recta AΔ (per Casum tertium Loci tertii) quæ auferat rationem ΓΔ ad ΓA æqualem rationi O ad Ξ; ac manifestum est rectam AΔ satisfacere problemati.

LOCUS SEPTIMUS.

Sit jam punctum datum H intra angulum AMB; ac ducantur per H rectæ duæ parallelæ rectis datis AM, MB, ut ΓH, HZ; quæ occurrant ipsis datis in punctis Γ & Z. Ac manifestum est quod rectæ duci possint per punctum H juxta tres Casus.

Cas. I. Ducatur autem imprimis recta AB, ad modum primum, auferens rationem ZB ad AΓ datam. Quoniam ZB est ad AΓ ut rectangulum ZB in AΓ ad quadratum ex AΓ; data est ratio rectanguli BZ in AΓ ad quadratum ex AΓ. Sed rectangulum BZ in AΓ datur, quia æqualis est rectangulo ZH in HΓ; adeoque recta ΓA datur. Dato autem puncto

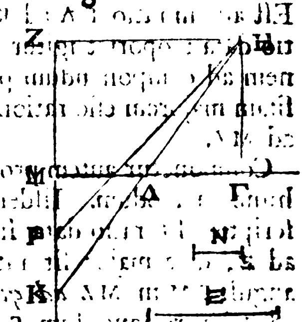


Γ,

Γ, punctum Λ etiam datur: ac ob datum punctum Η recta ΛΒ positione datur. Q. E. I.

Componetur autem problema ad hunc modum. Maneant descripta, ac sit ratio proposita sicut Κ ad Λ. Fiat ut Κ ad Λ ita rectangulum ΗΖ in ΗΓ ad quadratum ex ΓΛ; ac juncta recta ΗΛ producatur ad Β: dico rectam ΛΒ satisfacere problemati. Quoniam enim rectangulum ΓΗ in ΗΖ est ad quadratum ex ΓΛ ut Κ est ad Λ, ac rectangulum ΖΒ in ΓΛ æquale est rectangulo ΓΗ in ΗΖ; erit rectangulum ΖΒ in ΓΛ ad quadratum ex ΓΛ ut Κ ad Λ: adeoque erit ΖΒ ad ΓΛ sicut Κ ad Λ. Recta igitur ΛΒ solvit problema. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur, juxta Casum secundum, recta ΗΚ auferens rationem ΓΛ ad ΚΖ datam. Quoniam ratio ΓΛ ad ΚΖ datur, data erit ratio rectanguli ΓΛ in ΚΖ ad quadratum ex ΚΖ. Sed rectangulum ΓΛ in ΚΖ æquale est rectangulo ΓΜ in ΜΖ, adeoque ratio rectanguli ΓΜ in ΜΖ ad quadratum ex ΚΖ datur. Rectangulum autem ΓΜ in ΜΖ datur, ob cognitam utramque rectam; quadratum igitur ex ΚΖ datum est, adeoque & ipsa ΚΖ datur magnitudine & positione: ac dato puncto Ζ punctum Κ datur, unde & ipsa ΚΗ *positione datur.* Quoniam autem recta ΜΓ major est ipsâ ΓΛ, ac recta ΜΖ minor est quam ΚΖ; erit ratio ΜΓ ad ΓΛ major ratione ΜΖ ad ΖΚ; ac permutando, ratio ΜΓ ad ΜΖ major erit ratione ΓΛ ad ΖΚ. Sed ratio ΓΛ ad ΖΚ est ratio data: oportet igitur rationem construendam minorem esse ratione ΓΜ ad ΜΖ.

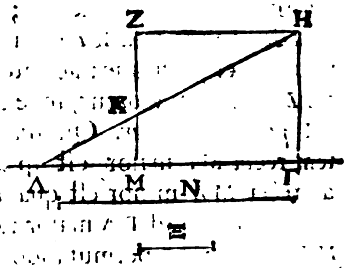


Componetur autem problema in hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut Ν ad Ξ, minor ratione ΓΜ ad ΜΖ. Quoniam autem ratio ΓΜ ad ΜΖ major est ratione Ν ad Ξ, ratio rectanguli ΓΜ in ΜΖ ad quadratum ex ΜΖ major erit ratione Ν ad Ξ. Ponatur igitur ut Ν ad Ξ ita rectangulum ΓΜ in ΜΖ ad rectangulum aliud; quod proinde majus erit quadrato ex ΜΖ, nempe æquale quadrato ex ΚΖ. Dico quod recta ΚΗ solvit problema; sive quod ΓΛ est ad ΚΖ ut Ν ad Ξ. Etenim ut Ν est ad Ξ ita rectangulum ΓΜ in ΜΖ ad quadratum ex ΚΖ. Sed rectangulum ΓΜ in ΜΖ

 æquale

æquale est rectangulo ΓΛ in ΚΖ; adeoque erit ut Ν ad Ξ ita rectangulum ΓΛ in ΚΖ ad quadratum ex ΚΖ, hoc est, ita ΓΛ ad ΚΖ. Recta igitur ΚΗ solvit problema; ac dico quod ea sola. Nam si ducatur recta alia, ut ΗΡ; manifestum est illam satisfacere problemati, hanc vero non item.

Cas. III. Manentibus quæ prius, ducatur recta ΗΚΛ, juxta modum tertium, auferens rationem ΓΛ ad ΚΖ datam. Quoniam ratio ΓΛ ad ΚΖ data est, dabitur quoque ratio rectanguli ΓΛ in ΚΖ ad quadratum ex ΚΖ. Sed rectangulum ΓΛ in ΚΖ æquale est rectangulo ΓΜ in ΜΖ: quare ratio ΓΜ in ΜΖ ad quadratum ex ΚΖ datur. Rectangulum autem ΓΜ in ΜΖ datum est, ob datam utramque ΓΜ, ΜΖ; adeoque quadratum ex ΚΖ datur, atque ipsa ΚΖ tam magnitudine quam positione; ac dato puncto Ζ, punctum Κ datur. Recta igitur ΚΗΛ positione datur. Cum autem recta ΓΛ major est quam ΓΜ, ac ΚΖ minor quam ΖΜ; ratio ΓΛ ad ΓΜ major erit ratione ΚΖ ad ΖΜ; & permutando ratio ΓΛ ad ΚΖ major erit ratione ΓΜ ad ΖΜ. Est autem ratio ΓΛ ad ΚΖ ratio data; oportet igitur rationem ad componendum propositam majorem esse ratione ΓΜ ad ΜΖ.



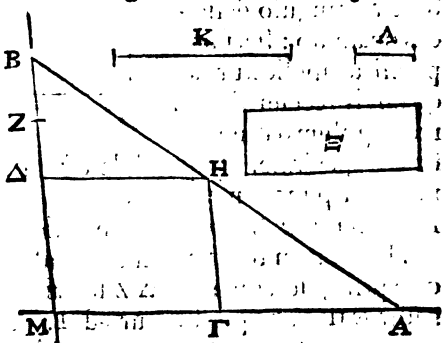
Componetur autem problema hunc in modum. Iisdem descriptis, sit ratio data sicut Ν ad Ξ; quæ major sit ratione ΓΜ ad ΜΖ, sive ratione rectanguli ΓΜ in ΜΖ *ad quadratum ex* ΜΖ. Fiat igitur ut Ν ad Ξ ita rectangulum ΓΜ in ΜΖ ad rectangulum aliud; quod minus erit quadrato ex ΜΖ. Sit autem illud æquale quadrato ex ΚΖ; ac juncta ΗΚ producatur ad Λ. Dico rectam ΗΛ solvere problema, sive quod ΓΛ est ad ΚΖ sicut Ν ad Ξ. Quoniam enim rectangulum ΓΜ in ΜΖ est ad quadratum ex ΚΖ ut Ν ad Ξ; ac rectangulum ΓΜ in ΜΖ æquale est rectangulo ΓΛ in ΚΖ: erit rectangulum ΓΛ in ΚΖ ad quadratum ex ΚΖ, hoc est ΓΛ ad ΚΖ, sicut Ν ad Ξ. Recta igitur ΗΛ solvit problema, eaque sola. Nam si ducatur recta alia, illa quidem satisfaciet problemati, altera vero non item.

LOCUS

LOCUS OCTAVUS.

Cadat jam recta per punctum H ducta, rectæque ZM parallela, super ipsum punctum Γ; quæ vero alteri rectæ MA parallela ducitur, cadat citra punctum Z, ut HΔ. Ac manifestum est rectas duci posse per punctum H secundum quatuor formas.

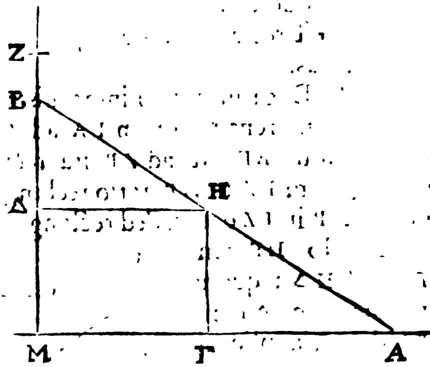
Cas. I. Ducatur autem imprimis recta AHB, juxta modum primum, auferens rationem ΓA ad ZB æqualem rationi datæ. Quoniam ut AΓ est ad ZB ita rectangulum AΓ in ΔB ad rectangulum BZ in ΔB, ratio rectanguli AΓ in ΔB ad rectangulum ΔB in BZ datur. Sed rectangulum AΓ in ΔB æquale est rectangulo HΓ in ΓM *vel* HΔ: quare rectangulum ΔB in BZ datur, applicandum ad rectam datam ΔZ excedens quadrato; adeoque recta BZ datur, ipsumque punctum B datum. Dato autem puncto H, recta AHB positione data est.



Componetur autem hunc in modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut K ad Λ. Fiat ut K ad Λ ita rectangulum HΓ in HΔ ad rectangulum Ξ; & applicetur ad rectam ΔZ rectangulum æquale rectangulo Ξ excedens quadrato. Sit illud rectangulum ΔB in BZ. Jungatur HB ac producatur ad A: dico rectam AB solvere problema. Quoniam enim K est ad Λ ut rectangulum ΓH in HΔ ad rectangulum Ξ; ac rectangulum Ξ æquale est rectangulo ΔB in BZ, uti rectangulum ΓH in HΔ æquale est rectangulo ΔB in AΓ: erit itaque rectangulum ΔB in AΓ ad rectangulum ΔB in BZ, hoc est, AΓ ad BZ, sicut K ad Λ. Recta igitur AB solvit problema. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur jam recta AB, juxta modum secundum, auferens rationem AΓ ad BZ datam. Ob datam rationem AΓ ad BZ, data quoque est ratio rectanguli AΓ in BΔ ad rectangulum BZ in BΔ. Rectangulum autem AΓ in BΔ datur,

tur, quia æquale est rectangulo ΓΗ in ΗΔ: adeoque rectangulum ΒΖ in ΒΔ datum est. Applicando itaque ad rectam ΔΖ, rectangulum illud deficiens quadrato, habebitur recta ΔΒ. Datis autem punctis Η, Β, recta ΑΒ positione datur. Quoniam autem requiritur ut fiat, in ratione ad componendum propositâ, rectangulum ΓΗ in ΗΔ ad rectangulum aliud; & ut applicetur ad rectam ΔΖ rectangulum æquale huic rectangulo deficiens quadrato: fieri non potest ut applicetur ad quamvis rectam datam rectangulum datum deficiens quadrato. Impossibile est igitur producere rectam lineam ad punctum Α, quæ auferat à quibuslibet duabus rectis segmenta quæ sint inter se in ratione data.

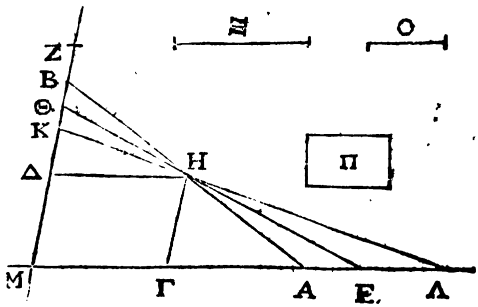


Hoc autem determinatur in hunc modum. Manentibus quæ prius, secetur recta ΔΖ bifariam in puncto Θ; ac jungatur ΘΗ quæ producatur ad Ε. Dico rectam ΘΕ auferre rationem ΓΕ ad ΘΖ, minorem quâvis ratione à qualibet aliâ rectâ per Η ductâ, totique ΔΖ occurrente, abscissâ. Ducatur enim alia ut ΑΒ. Quoniam recta ΔΘ æqualis est ipsi ΘΖ, erit rectangulum ΘΔ in ΘΖ majus rectangulo ΖΒ in ΒΔ. Rectangulum autem ΕΓ in ΔΘ æquale est rectangulo ΑΓ in ΒΔ, quia utrumque æquale est rectangulo ΓΗ in ΗΔ. Ratio igitur rectanguli ΕΓ in ΔΘ ad rectangulum ΘΔ in ΘΖ minor est ratione rectanguli ΑΓ in ΒΔ ad rectangulum ΖΒ in ΒΔ. Sed rectangulum ΕΓ in ΔΘ est ad rectangulum ΔΘ in ΘΖ ut ΕΓ ad ΖΘ; ac rectangulum ΑΓ in ΒΔ est ad rectangulum ΔΒ in ΒΖ ut ΑΓ ad ΒΖ: ratio igitur ΕΓ ad ΖΘ minor est ratione ΑΓ ad ΒΖ. Quocirca recta ΕΘ aufert rationem ΕΓ ad ΘΖ, minorem quavis ratione quam abscindit recta quæcunque alia per Η ducta, totique rectæ ΖΔ occurrens.

Componetur autem problema in hunc modum. Manentibus descriptis, dividatur recta ΔΖ bifariam in puncto Θ, ac

jungatur

jungatur HΘ ad punctum E producenda. Hæc recta ΘE auferet rationem ΓE ad ΘZ minorem qualibet ratione quam abscindere potest alia quævis recta per H ducta utrique ΔZ occurrens. Jam si ratio ad componendum data æqualis fuerit rationi ΓE ad ΘZ, sola recta EΘ solvit problema. Si ratio minor fuerit eâ, componi non potest. Quod si ratio proposita major fuerit ratione EΓ ad ΘZ, ut Ξ ad O; fiat ut Ξ ad O ita rectangulum ΓH in HΔ (æquale rectangulo EΓ in ΔΘ) ad rectangulum Π. Quoniam vero ratio Ξ ad O major est ratione EΓ ad ΘZ,

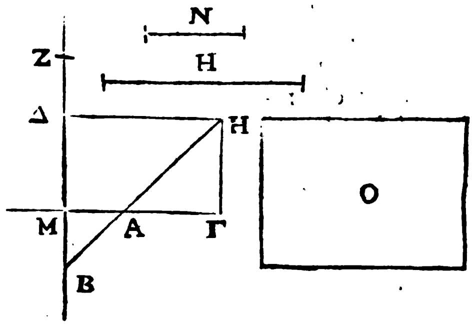


erit ratio rectanguli EΓ in ΔΘ ad rectangulum Π major ratione EΓ ad ΘZ. Sed EΓ est ad ΘZ ut rectangulum EΓ in ΔΘ ad rectangulum ΘZ in ΔΘ; adeoque ratio rectanguli EΓ in ΔΘ ad rectangulum Π major est ratione rectanguli EΓ in ΔΘ ad rectangulum ΔΘ in ΘZ: unde rectangulum Π minus erit rectangulo ΔΘ in ΘZ. Possibile est igitur applicare ad rectam ΔZ rectangulum æquale rectangulo Π deficiens quadrato. Fiet autem applicatio ista duobus modis, ita ut puncta applicationum fuerint B & K. Jungantur BH, KH quæ producantur ad A & Λ. Dico utramque rectam AB, KΛ solvere problema. Quoniam enim rectangulum ΓH in HΔ est ad rectangulum Π ut Ξ ad O; ac rectangulum ΓH in HΔ æquale est rectangulo ΓΛ in ΔK; uti rectangulum Π æquale est rectangulo ΔK in KZ; erit rectangulum ΓΛ in ΔK ad ΔK in KZ, hoc est ΓΛ ad ΔK, ut Ξ ad O. Recta igitur ΛK satisfacit problemati. Ac pari argumento demonstratur rectam AB idem præstare. Constat itaque duobus modis componi posse problema. Q. E. D.

Cas. III. Ducatur recta HB, juxta Casum tertium, auferens rationem ΓA ad BZ datam. Quoniam ratio rectanguli ΓA in BΔ ad rectangulum BZ in BΔ data est, atque etiam rectangulum BΔ in ΓA datur; *datum quoque erit rectangulum* BZ *in* BΔ, applicandum ad rectam ΔZ excedens quadrato,

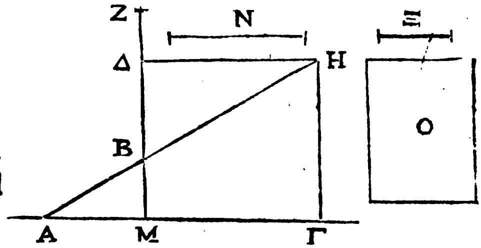
drato, ut habeatur recta BΔ, punctumque B datum. Ad compositionem autem requiritur rationem propositam minorem esse ratione ΓM ad MZ Nam recta MΓ major est quam ΓA, ac MZ minor est quam BZ, adeoque ratio ΓM ad ΓA major erit ratione MZ ad BZ; ac permutando ratio ΓM ad MZ major erit ratione ΓA ad BZ. Sed ratio ΓA ad BZ est ratio data: quare oportet ad constructionem quod ratio data minor sit ratione ΓM ad MZ.

Componetur autem problema ad hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data, quæ minor sit ratione ΓM ad MZ, sicut N ad Ξ: ac fiat ut N ad Ξ ita rectangulum ΓH in HΔ (æquale rectangulo ΓM in MΔ) ad rectangulum O. *Est* autem ratio N ad Ξ minor ratione ΓM ad MZ; quare ratio rectanguli ΓM in MΔ ad rectangulum O minor erit ratione ΓM ad MZ. Sed ΓM est ad MZ ut rectangulum ΓM in MΔ ad rectangulum ZM



in MΔ: quare rectangulum O majus erit rectangulo ZM in MΔ. Si igitur applicetur ad rectam ZΔ rectangulum ipsi O æquale excedens quadrato, punctum B cadet ab alterâ parte puncti M; adeoque si fiat rectangulum ZB in BΔ rectangulo O æquale, ac jungatur recta HB: dico rectam HB solvere problema. Quoniam enim N est ad Ξ ut rectangulum ΓH in HΔ ad rectangulum O; ac rectangulum O æquale est rectangulo ZB in BΔ: erit N ad Ξ ut rectangulum ΓH in HΔ ad rectangulum ZB in BΔ. Sed rectangulum ΓH in HΔ æquale est rectangulo AΓ in BΔ; adeoque N est ad Ξ ut rectangulum AΓ in BΔ ad rectangulum ZB in BΔ. Rectangulum autem AΓ in BΔ est ad rectangulum ZB in BΔ ut AΓ ad ZB. Ergo AΓ est ad ZB ut N ad Ξ, ac recta HB solvit problema. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur, juxta Casum quartum, recta HA auferens rationem ΓA ad ZB datam. Quoniam ratio rectanguli ΓA in BΔ ad rectangulum ZB in BΔ datur; ac rectangulum ΓA in BΔ æquale eſt rectangulo ΓH in HΔ: igitur rectangulum ZB in BΔ datur, applicandum ad rectam datam ΔZ excedens quadrato; unde recta BΔ datur. Ob datum autem punctum H, recta HB poſitione datur. Oportet vero rationem ad conſtruendum propoſitam majorem eſſe ratione ΓM ad MZ, Nam recta ΓA major eſt quam ΓM, ac BZ minor eſt quam recta MZ; adeoque ratio ΓA ad ΓM major erit ratione BZ ad MZ. Permutando autem ratio ΓA ad BZ major erit ratione ΓM ad MZ. Sed ratio AΓ ad BZ eſt ratio data, quæ proinde major eſſe debet ratione ΓM ad MZ.

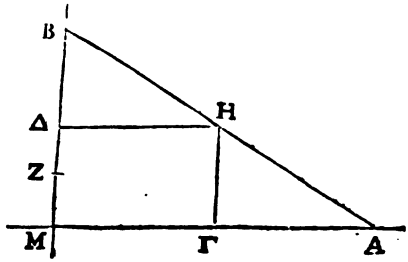


Sic autem componetur problema hoc. Maneant quæ prius, ac ſit ratio data ſicut N ad Ξ, quæ major ſit ratione ΓM ad MZ. Fiat ut N ad Ξ ita rectangulum ΓH in HΔ (æquale rectangulo ΓM in MΔ) ad rectangulum O. Jam ratio N *ad* Ξ major eſt ratione ΓM ad MZ, ac ratio N ad Ξ eſt ut rectangulum ΓM in ΔM ad rectangulum O; ratio autem ΓM ad MZ eſt ut rectangulum ΓM in MΔ ad rectangulum MΔ in MZ. Ratio igitur rectanguli ΓM in MΔ ad rectangulum O major eſt ratione rectanguli ΓM in MΔ ad rectangulum ZM in MΔ; adeoque rectangulum O minus erit rectangulo ZM in MΔ. Si itaque applicetur ad rectam ZΔ rectangulum æquale rectangulo O excedens quadrato, punctum applicationis B cadet citra punctum M. Sit rectangulum O æquale rectangulo ZB in BΔ, ac juncta HB producatur ad A. Dico rectam HA ſolvere problema. Quoniam enim rectangulum ΓH in HΔ, hoc eſt rectangulum ΓA in BΔ, eſt ad rectangulum ZB in BΔ ut N eſt ad Ξ; ac rectangulum ΓA in BΔ eſt ad ZB in BΔ ut ΓA ad ZB: erit igitur ΓA ad BZ ſicut N ad Ξ. Q. E. D.

LOCUS NONUS.

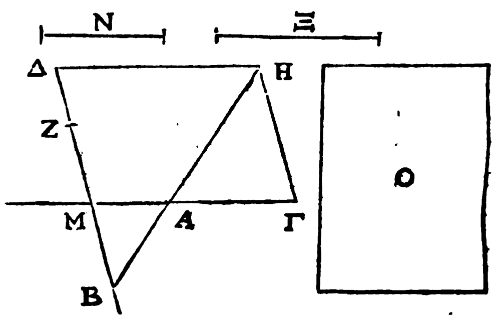
Cadat jam altera è duabus parallelis extra punctum Z, ad modum rectæ HΔ, ac manifestum est quod habebuntur quatuor Casus, hoc est, quod duci possunt rectæ per punctum H secundum quatuor modos.

Cas. I. Ducatur autem recta BA, juxta Casum primum, auferens rationem AΓ ad BZ datam. Quoniam rectangulum AΓ in BΔ datur, rectangulum quoque ZB in BΔ datur, applicandum ad rectam datam ZΔ excedens quadrato; recta igitur BΔ ac punctum B dantur: unde recta AHB positione datur. Constructio autem problematis manifesta est ex præmissis.



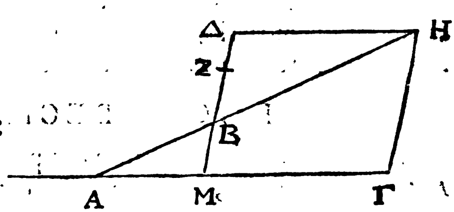
Cas. II. Ducatur jam juxta Casum secundum, recta HB auferens rationem ΓA ad BZ datam. Quoniam ratio rectanguli AΓ in BΔ ad rectangulum BΔ in BZ data est, ac rectangulum ipsum AΓ in BΔ datum; ideo rectangulum BΔ in BZ datur, applicandum ad rectam datam ΔZ excedens quadrato; unde punctum B datur. Dato autem puncto H, recta AHB positione datur. Oportet autem rationem ad componendum datam minorem esse ratione ΓM ad MZ. Quoniam enim ΓM major est ipsâ ΓA, & MZ minor ipsâ ZB, *erit ratio* ΓM *ad* ΓA *major ratione* MZ *ad* ZB, ac permutando ratio ΓA ad ZB minor erit ratione ΓM ad MZ.

Componetur autem ad hunc modum problema. Manentibus quæ prius, esto ratio data sicut N ad Ξ, quæ sit minor ratione ΓM ad MZ. Fiat ut N ad Ξ ita rectangulum HΓ in HΔ, sive rectangulum MΓ in MΔ, ad rectangulum



gulum O. Quoniam autem ratio N ad Ξ minor est ratione ΓM ad MZ; ac ΓM est ad MZ ut rectangulum ΓM in MΔ ad rectangulum MΔ in MZ, igitur ratio rectanguli ΓM in MΔ ad rectangulum O minor erit ratione rectanguli ΓM in MΔ ad rectangulum ΔM in MZ, *adeoque rectangulum* O *majus erit rectangulo* ΔM *in* MZ. Applicetur itaque ad rectam ΔZ rectangulum æquale rectangulo O excedens quadrato, sitque illud rectangulum ΔB in BZ; *& punctum* B *cadet ultra punctum* M. Ac manifestum est rectam HB satisfacere problemati.

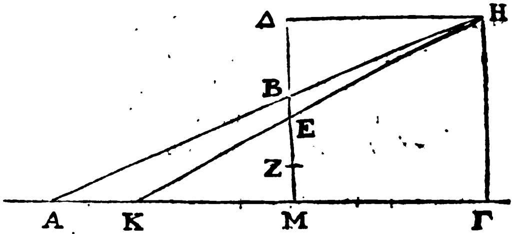
Cas. III. Ducatur, juxta Casum tertium, recta HA auferens rationem ΓA *ad* BZ *datam. Quoniam ratio rectanguli* BZ *in* BΔ *ad rectangulum* ΓA in BΔ datur, ac rectangulum ΓA in BΔ datum est, ipsum quoque rectangulum BZ in BΔ datur, applicandum ad rectam ΔZ excedens quadrato; unde punctum B datur, ac ob datum punctum H recta HA positione datur. Oportet autem rationem ad componendum datam majorem esse ratione ΓM ad MZ. Quoniam enim ratio AΓ ad ΓM major est ratione BZ ad ZM, permutando erit ratio AΓ ad BZ major ratione ΓM ad MZ. Est vero ratio AΓ ad BZ ratio data; quare manifestum est oportere



rationem datam majorem esse ratione ΓM ad MZ. Constat autem ex præmissis quo pacto fieri possit constructio.

Cas. IV. Ducatur jam recta HA, juxta Casum quartum, auferens rationem ΓA ad BZ datam. Quoniam ratio rectanguli ΓA in BΔ ad rectangulum ZB in BΔ datur, ac rectangulum ΓA in BΔ datum est; igitur rectangulum ZB in BΔ datur. Applicando itaque rectangulum illud ad rectam ZΔ deficiens quadrato, dabitur punctum B. Dato autem puncto H, ipsa ABH positione datur. Determinatur autem hunc in modum. Maneant descripta, & dividatur recta ZΔ bifariam in puncto B; ac juncta HB producatur ad A: dico rectam HA auferre rationem ΓA ad BZ, minorem quavis ratione quam resecant rectæ quælibet aliæ per H ductæ, totique rectæ ΔZ occurrentes. Ducatur enim recta alia ut

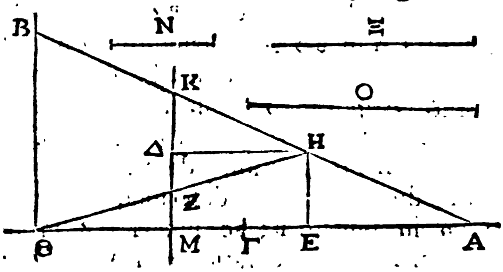
HBK. Quoniam vero recta ZB æqualis est ipsi $B\Delta$, erit rectangulum ZB in $B\Delta$ majus rectangulo ZE in $E\Delta$. Sed rectangulum ΓA in $B\Delta$ æquale est rectangulo ΓK in $E\Delta$, (quia utrumque æquale est rectangulo ΓH in $H\Delta$) Igitur ratio rectanguli ΓA in $B\Delta$ ad rectangulum ZB in $B\Delta$ minor est ratione rectanguli ΓK in $E\Delta$ ad rectangulum ZE in $E\Delta$. Sed rectangulum ΓA in $B\Delta$ est ad rectangulum ZB in $B\Delta$, ut ΓA *ad* ZB; *ac rectangulum* ΓK *in* $E\Delta$ *ad rectangulum* ZE *in* $E\Delta$ est ut ΓK ad ZE. Ratio igitur ΓA ad ZB minor est ratione ΓK ad ZE: adeoque recta ΓA aufert rationem $A\Gamma$ ad ZB, minorem quavis aliâ à rectâ qualibet per H ductâ, totique rectæ ΔZ occurrente, abscissâ; adeoque habentur limites. Constat autem ex jam traditis, compositionem fieri posse duobus modis, utrinque à recta HA; scilicet rectis BZ, $B\Delta$ occurrentibus.



LOCUS DECIMUS.

Cadant jam rectæ duæ, quæ per punctum H ducantur ipsis AM, MK parallelæ, ultra puncta data Z & Γ, ad modum rectarum $H\Delta$, HE. Ac manifestum est rectas duci posse per punctum H, juxta quinque diversos Casus.

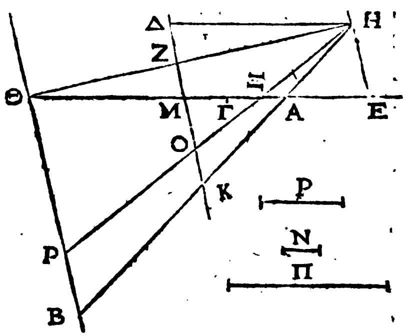
Cas. I. Ducatur autem imprimis, juxta modum primum, recta AK auferens rationem KZ ad $A\Gamma$ datam. Jungatur HZ quæ producatur ad Θ; ac per punctum Θ ducatur recta $B\Theta$ ipsi KM parallela. Contineetur etiam recta AHK ad punctum B, in recta ΘB positione datâ. Quoniam vero ratio ZK ad $A\Gamma$ datur, atque etiam ratio ZK ad ΘB data est, ratio quoque ΘB ad $A\Gamma$ datur. Jam



Jam dantur positione rectæ duæ A Θ, Θ B; ac sumitur in A Θ punctum Γ, in ipsâ vero B Θ punctum Θ; punctum autem datum H est intra angulum A Θ B; ac recta parallela H E cadit ultra punctum Γ. Ducenda est igitur recta, juxta Casum primum *Loci sexti*, auferens rationem Θ B ad Γ A datam; quare recta A B positione datur per regulas Casus prædicti: qui quidem non habet Diorismum.

Componetur autem problema in hunc modum. Sit ratio data sicut N ad O. Fiat ut Z H ad H Θ ita N ad Ξ; ac ducatur recta A B, ad modum Casus primi Loci sexti, auferens rationem Θ B ad A Γ æqualem rationi Ξ ad O: ac manifestum est rectam A B solvere problema. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur jam recta H K, juxta Casum secundum, auferens rationem K Z ad A Γ datam. Producatur recta Z H ad Θ, ac per punctum Θ ipsi K M parallela ducatur recta, quæ occurrat ipsi H K in puncto B. Quoniam ratio K Z ad A Γ datur, atque etiam ratio K Z ad B Θ; datur quoque ratio B Θ ad A Γ: atque adeo ipsa recta H B positione datur, per Casum secundum Loci sexti, qui determinationem habet.



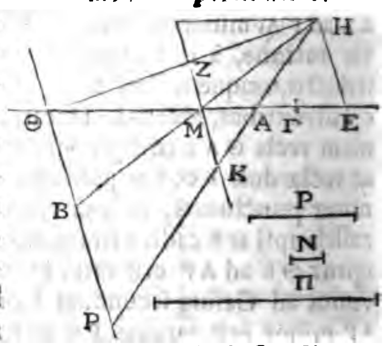
Limitatur autem ad hunc modum. Manentibus descriptis, capiatur recta Θ A media proportionalis inter ipsas Θ E, Θ Γ; ac juncta recta H A producatur ad B. Dico rectam H B auferre rationem K Z ad Γ A, minorem quavis ratione, à rectis per H ductis, totique rectæ Γ A occurrentibus, abscissâ. Ducatur enim alia, ut H P. Jam quoniam recta Θ A media proportionalis est inter ipsas Θ E, Θ Γ; ac rectæ duæ B Θ, E Θ positione dantur; ac in rectâ B Θ sumitur punctum Θ, in ipsâ vero E Θ punctum Γ; ac recta parallela ipsi Θ B cadit ultra punctum Γ, nempe recta H E: ratio igitur Θ B ad A Γ erit ratio minima, per ea quæ demonstravimus ad Casum secundum Loci sexti. Hinc ratio Θ B ad A Γ minor erit ratione P Θ ad Γ Ξ; ac permutando ratio B Θ ad Θ P minor erit ratione A Γ ad Γ Ξ. Sed B Θ est ad Θ P ut K Z ad Z O; quare ratio K Z ad Z O minor erit ratione A Γ ad

Γ Ξ;

Γ Ξ; ac permutando ratio ΚΖ *ad* ΑΓ *minor erit ratione* ΖΟ *ad* ΓΞ. Recta igitur ΗΒ aufert rationem ΚΖ ad ΓΑ minorem quavis ratione, à rectâ qualibet per Η ductâ, abscissâ.

Componetur autem problema ad hunc modum. Manentibus descriptis, sit recta ΘΑ media proportionalis inter ΕΘ, ΘΓ, ac juncta ΗΑ producatur ad Β. Recta ΗΚΒ auferet rationem ΚΖ ad ΓΑ, minorem qualibet ratione, à rectis per Η ductis, totique rectæ ΓΑ occurrentibus, abscindendâ. Jam si ratio ad componendum proposita æqualis fuerit rationi ΚΖ ad ΓΑ, sola recta ΗΚΒ satisfacit problemati. Ac si minor fuerit eâ, non construetur. Si vero ratio major fuerit eâ, constat ex præmissis problema componi posse duobus *modis*, ab utraque parte rectæ ΗΚ; abscissis ex utrâque ΕΑ, ΑΓ segmentis. Esto autem ratio data sicut Ρ ad Ν, quæ major sit ratione ΚΖ ad ΓΑ; & fiat ut ΖΗ ad ΗΘ ita Ρ ad Π; unde Ρ erit ad Π ut ΚΖ ad ΘΒ. Sed ratio Ρ ad Ν major est ratione ΚΖ ad ΓΑ, adeoque ex æquo ratio Π ad Ν major erit ratione ΘΒ ad ΓΑ. Ratio autem ΘΒ ad ΓΑ ratio minima est, per Casum secundum Loci sexti; quare duci possunt rectæ duæ ab utraque parte ipsius ΗΒ, ut recta ΗΡ quæ auferat rationem ΡΘ ad ΓΞ æqualem rationi Π ad Ν: ac manifestum est rectam illam solvere problema. Eodemque modo demonstrabitur rectam alteram tantundem præstare. Q. E. D.

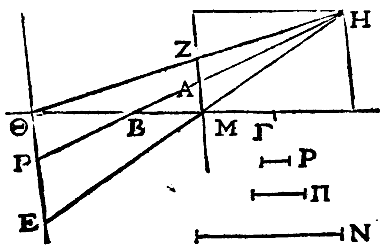
Cas. III. Ducatur jam, ad modum tertium, recta ΗΑΚ, auferens rationem ΚΖ ad ΓΑ datam; ac producatur ea ad punctum Ρ. Quoniam ratio ΚΖ ad ΡΘ datur, etiam ratio ΡΘ ad ΓΑ data est; ac proinde recta ΗΡ positione datur: resolvitur enim per Casum tertium Loci sexti. Determinatur autem ad hunc modum. Manentibus descriptis, jungatur ΗΜ quæ producatur ad Β; ac manifestum est oportere rationem ΖΜ ad ΜΓ minorem esse ratione ad construendum propositâ, sive ratione ΚΖ ad ΓΑ. Jam datâ quavis ratione



majore quam ratio ΖΜ ad ΜΓ, componetur hujusmodi. Manentibus descriptis, sit ratio data, sive ratio Ρ ad Ν, major ratione

tione ZM ad MΓ; ac fiat ut ZM ad ΘB ita P & Π: & ex æquo constabit rationem ΘB ad MΓ minorem esse ratione Π ad N. Ductâ igitur rectâ per punctum H, quæ auferat ab ipsis PΘ, ΘΓ segmenta, quæ sint inter se in ratione Π ad N; manifestum est illam rectæ ΓM occurrere: quandoquidem rectæ puncto Θ propiores abscindunt semper rationes minores quam quæ auferuntur à remotioribus ab eodem. Si igitur recta HP auferat rationem PΘ ad ΓA æqualem rationi Π ad N, clarum est rectam illam solvere problema. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur jam, juxta Casum quartum, recta HP abscindens rationem AZ ad BΓ datam. Quoniam ratio AZ *ad* PΘ *datur, ratio quoque* PΘ *ad* BΓ data est; adeoque recta HP positione datur: resolvitur enim eodem omnino modo cum præcedente. Sic autem determinatur. Maneant descripta ac jungatur HM quæ producatur ad E; ac manifestum est componi posse problema, si ratio data minor fuerit ratione ZM ad MΓ.

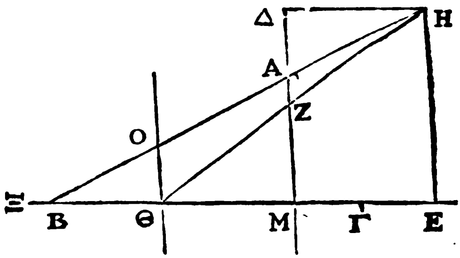


Componetur autem ad hunc modum. Sit ratio data sicut P ad N, quæ minor sit ratione MZ ad MΓ; ac fiat ut ZH ad HΘ, *hoc est* ZM *ad* ΘE, *ita* P ad Π; & ex æquo demonstrabitur rationem ΘE ad ΓM majorem esse ratione Π ad N. Igitur si jubeatur rectam ducere per punctum H, quæ resecet è rectis ΓΘ, ΘE segmenta habentia inter se rationem Π ad N; clarum est rectam illam ipsi MΘ occursuram: quia jam demonstratum est rectas puncto Θ propiores auferre rationes *minores* rationibus, quæ auferuntur à remotioribus ab eodem. Ductâ igitur rectâ HP, quæ auferat rationem PΘ ad ΓB æqualem rationi Π ad N, patet ipsam HAP solvere problema.

Cas. V. Ducatur jam, juxta Casum quintum, recta AB auferens rationem ZA ad ΓB datam. Quoniam ratio ZA ad ΘO data est, atque etiam ratio ΘO ad ΓB; recta quoque HB positione datur. Resolvitur enim per Casum quartum Loci sexti; qui quidem casus limites habet. Determinatur autem hunc in modum. Manentibus descriptis, capiatur media proportionalis inter rectas EΘ, ΘΓ, ut recta ΘB. Junctâ autem

rectâ

rectâ HB, auferet illa rationem ΘO ad $B\Gamma$, majorem quavis ratione quam resecant rectæ quælibet aliæ per H ductæ, totique $M\Xi$ occurrentes: unde patet rectam illam HB abscindere etiam rationem ZA ad $B\Gamma$, majorem quavis aliâ, à rectâ quælibet ipsi $Z\Delta$ occurrente, ablatâ.



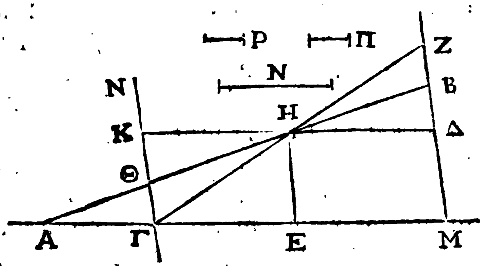
Componetur autem problema in hunc modum. Maneant jam descripta, ac fiat recta ΘB media proportionalis inter ipsas $E\Theta$, $\Theta\Gamma$; ac jungatur HB. Hæc recta HB auferet rationem ZA ad $B\Gamma$, majorem quacunque ratione, quam abscindere potest alia quævis per H ducta, totique rectæ $Z\Delta$ occurrens. Manifestum autem est, ex jam demonstratis, duobus modis componi posse problema, rectis scilicet ab utrâque parte ipsius HB ducendis, ipsisque AZ, $A\Delta$ occursuris. Q. E. D.

LOCUS UNDECIMUS.

Incidant jam rectæ duæ per punctum H ductæ, ipsisque ZM, $M\Gamma$ parallelæ, citra puncta data Z & Γ, ad modum ipsarum HE, ΔH; junctisque punctis Z & H producatur recta HZ in directum. Cadet autem illa vel super ipsum punctum Γ, vel ultra, vel citra illud. Imprimis autem cadat super illud; ac patet rectas duci posse per punctum H, secundum quatuor diversos modos.

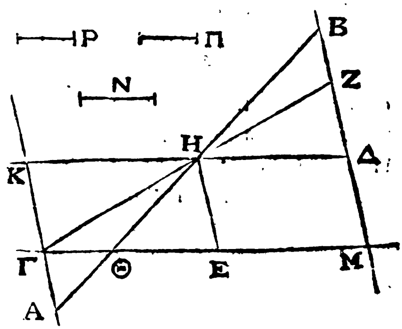
Cas. I. Ducatur recta AB, juxta Casum primum, auferens rationem BZ ad ΓA *datam*: & agatur per H recta HE ipsi MZ parallela. Jam quoniam ratio BZ ad ΓA datur, atque etiam ratio BZ ad $\Gamma\Theta$ data est, quæ nempe æqualis est rationi ZH ad $H\Gamma$; ipsa quoque ratio $\Gamma\Theta$ ad ΓA datur. Habentur autem rectæ duæ positione datæ, viz. AM, ΓN; ac in utrâque earum sumitur commune punctum Γ; & punctum datum H est intra angulum $M\Gamma N$. Ducenda est igitur recta BHA auferens datam rationem $\Theta\Gamma$ ad ΓA. Recta autem AB positione datur per Casum primum Loci tertii, qui determinationem habet. Oportet enim rationem componendam minorem esse ratione ΔZ ad $E\Gamma$. Producatur recta ΔH ad K.

Quoniam vero ratio ΗΕ ad ΕΓ major est ratione ejusdem ΗΕ ad ΕΑ; ac ΗΕ ad ΕΑ est ut ΘΓ ad ΓΑ: igitur ratio ΗΕ ad ΕΓ major erit ratione ΘΓ ad ΓΑ. Sed ΗΕ æqualis est ipsi ΓΚ; quare ratio ΓΚ ad ΕΓ major erit ratione ΘΓ ad ΓΑ, ac permutando ratio ΓΚ ad ΘΓ major erit ratione ΕΓ ad ΓΑ. Sed ΓΚ est ad ΓΘ ut ΔΖ ad ΒΖ. Quocirca ratio ΔΖ ad ΒΖ major erit ratione ΕΓ ad ΓΑ; ac permutando ratio ΔΖ ad ΕΓ major erit ratione ΒΖ ad ΓΑ. Ratio igitur ΒΖ ad ΓΑ, nempe ratio data, minor esse debet ratione ΔΖ ad ΕΓ.



Componetur autem problema ad hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut Ρ ad Ν minor ratione ΔΖ ad ΕΓ: *ac fiat ut* ΓΗ *ad* ΗΖ *ita* Π *ad* Ρ. Quoniam vero ΓΗ est ad ΗΖ ut ΓΚ ad ΔΖ, ac, ob ΕΗ ipsi ΓΚ æqualem, ΓΚ est ad ΔΖ ut ΕΗ ad ΔΖ; erit igitur Π ad Ρ sicut ΕΗ ad ΔΖ. Sed ratio Ρ ad Ν minor est ratione ΔΖ ad ΕΓ; quare ex æquo ratio Π ad Ν minor erit ratione ΗΕ ad ΕΓ. Si itaque fiat ut Π ad Ν ita ΗΕ ad rectam aliam, quæ proinde major erit ipsa ΕΓ, ut ΕΑ; ac jungatur ΗΑ, quæ producatur ad Β; manifestum est rectam ΑΗΒ solvere problema. Q.E.D.

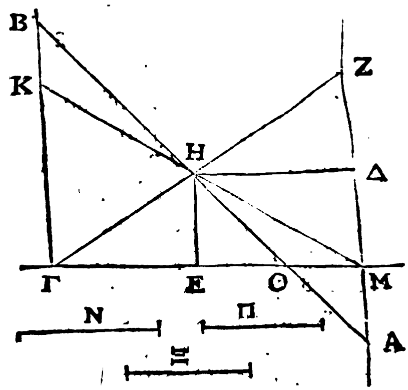
Cas. II. Ducatur jam recta ΘΒ, juxta modum secundum, auferens rationem ΖΒ ad ΓΘ datam; ac producatur ea ad Α. Quoniam ratio ΖΒ ad ΑΓ datur, data quoque est ratio ΑΓ ad ΓΘ; ac proinde recta ΑΒ positione datur; quia reducitur ad Casum secundum Loci tertii, qui limitem habet. Oportet enim rationem construendam majorem esse ratione ΔΖ ad ΕΓ. Producatur recta ΔΗ ad Κ. Cumque ratio ΗΕ ad ΕΘ, sive ΑΓ ad ΓΘ, major est ratione ΗΕ ad ΕΓ, hoc est ratione ΚΓ ad ΓΕ, erit permutando ratio ΑΓ ad ΓΚ major



ratione ΓΘ ad ΓΕ. Sed ΑΓ est ad ΓΚ sicut ΒΖ ad ΖΔ; quare ratio ΒΖ ad ΖΔ major erit ratione ΓΘ *ad* ΓΕ, *ac permutando erit ratio* ΒΖ *ad* ΓΘ major ratione ΖΔ ad ΓΕ. Est autem ratio ΒΖ ad ΓΘ ratio data; quare ratio illa data major esse debet ratione ΖΔ ad ΕΓ.

Componetur autem problema in hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut Ρ ad Ν, major ratione ΖΔ ad ΕΓ; ac fiat ut ΗΓ ad ΗΖ, *sive* ΓΚ *ad* ΖΔ, ita Π ad Ρ. Cum autem ratio Ρ ad Ν major est ratione ΖΔ ad ΕΓ, ex æquo erit ratio Π ad Ν major ratione ΓΚ ad ΓΕ, hoc est ratione ΕΗ ad ΕΓ. Dantur jam positione rectæ duæ, nempe ΕΓ, ΓΑ; ac sumitur in concursu utriusque punctum Γ; ac ratio data major est ratione ΕΗ ad ΕΓ. Recta igitur ducta, ita ut auferat rationem æqualem rationi Π ad Ν, occurret ipsi ΓΕ. Hoc autem si præstet recta ΑΒ per Η ducta, manifestum est ipsam ΑΘΒ satisfacere problemati.

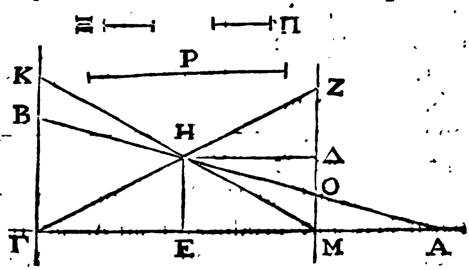
Cas. III. Ducatur recta ΑΗ, juxta Casum tertium, auferens rationem ΑΖ ad ΓΟ datam. Producatur ea ad punctum Β; ac data ratione ΑΖ ad ΓΒ, ratio quoque ΓΒ ad ΟΓ datur; adeoque recta ΑΒ positione datur, per demonstrata in Casu tertio Loci tertii. Determinatio autem manifesta est: nam manentibus descriptis, ratio componenda major esse debet ratione ΖΜ ad ΜΓ; quia ratio ΑΖ ad ΟΓ evidenter major est ratione ΖΜ ad ΜΓ.



Sic autem componetur problema. Iisdem positis, jungatur ΗΜ, quæ producatur ad Κ; ac sit ratio data sicut Ν ad Π major ratione ΖΜ ad ΜΓ. Fiat ut ΖΗ ad ΗΓ ita Ν ad Ξ. Cumque ΖΗ est ad ΗΓ sicut ΜΖ ad ΓΚ; ac ratio Ν ad Π major est ratione ΖΜ ad ΜΓ: patet ex æquo rationem Ξ ad Π majorem esse ratione ΓΚ ad ΓΜ. Ducatur itaque recta ΑΒ, quæ auferat rationem ΓΒ ad ΟΓ æqualem rationi Ξ ad Π, & recta illa occurret ipsi ΕΜ; quia rectæ propiores puncto Γ abscindunt semper rationes majores quam quæ auferuntur

runtur à remotioribus ab eodem. Constat igitur rectam ΒΗΟΑ solvere problema.

Cas. IV. Ducatur jam recta ΑΗΒ, juxta Casum quartum, auferens rationem ΟΖ ad ΓΑ datam. Quoniam ratio ΟΖ ad ΓΒ data est, ratio quoque ΓΒ ad ΑΓ datur, adeoque recta ΑΒ positione datur. Oportet autem rationem ad componendum datam minorem esse ratione ΖΜ ad ΜΓ, per jam demonstrata.



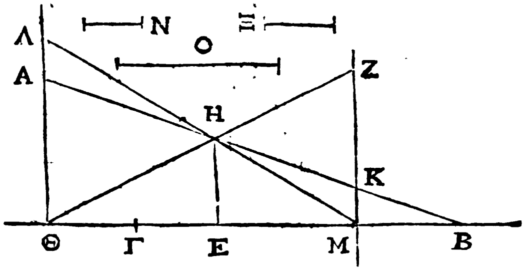
Sic autem componetur problema. Maneant descripta, ac sit ratio data sicut Ξ ad Ρ, minor ratione ΖΜ ad ΜΓ. Jungatur ΗΜ ac producatur ad Κ: dein fiat ut ΖΗ ad ΗΓ ita Ξ ad Π. Est autem ΖΗ ad ΗΓ ut ΜΖ ad ΚΓ; ac ratio ΜΖ ad ΜΓ major est ratione Ξ ad Ρ; quare ex æquo constat rationem ΚΓ ad ΓΜ majorem esse ratione Π ad Ρ. Ducatur igitur recta ΑΗΒ, auferens rationem ΓΒ ad ΑΓ æqualem rationi Π ad Ρ: ac patet rectam illam ΑΒ ipsi ΜΑ occurrere; quia rectæ propiores puncto Γ abscindunt semper rationes majores quam quæ sunt remotiores ab eodem. Manifestum autem est rectam ΑΟΒ solvere problema.

LOCUS DUODECIMUS.

Occurrat jam recta, per puncta Ζ & Η ducta, ipsi ΜΓ, ultra punctum Γ, ad modum rectæ ΖΗΘ: ac manifestum est rectas duci posse per punctum Η juxta quinque Casus.

Cas. I. Ducatur recta ΗΒ, ad formam Casus primi, auferens rationem ΚΖ ad ΒΓ datam. Per punctum Θ ducatur recta ΘΑ ipsi ΜΖ parallela. Jam quia ratio ΖΚ ad ΘΑ, (quæ nempe æqualis est rationi ΖΗ ad ΗΘ) data est; ratio quoque ipsius ΘΑ ad ΒΓ datur. Dantur autem positione rectæ duæ ΘΒ, ΘΑ; ac in recta ΘΑ sumitur punctum Θ, in recta vero ΘΒ sumitur punctum Γ; & punctum datum Η est intra angulum ΑΘΜ; recta autem parallela per Η ducta, nempe ΗΕ, cadit citra punctum Γ. Ducenda est igitur recta

A B auferens rationem A Θ ad B Γ datam; quæ quidem recta A B dabitur positione, juxta ostensa in Casu primo Loci sexti. Constat autem rationem componendam minorem esse debere ratione Z M ad M Γ; quia recta K Z minor est quam Z M, & Γ B major quam Γ M.

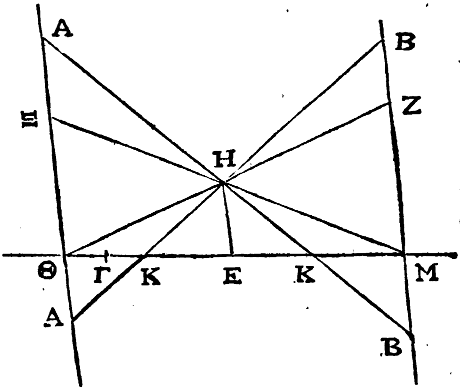


Sic autem componetur. Maneant descripta, & sit ratio data sicut N ad O minor ratione Z M ad M Γ. Jungatur M H quæ producatur ad Λ, ac fiat ut Z H ad H Θ, hoc est Z M ad Λ Θ, ita N ad Ξ; quare N est ad Ξ sicut Z M ad Θ Λ. Sed ratio N ad O minor est ratione Z M ad M Γ; adeoque ex æquo erit ratio Ξ ad O minor ratione Λ Θ ad M Γ. Invertendo autem ratio O ad Ξ major erit ratione M Γ ad Θ Λ. Itaque si faciamus ut O ad Ξ ita M Γ ad rectam aliam, minor erit illa quam Θ Λ. Esto autem illa recta Θ A, ac juncta H A producatur ad B. Manifestum autem est quod, si velimus ducere per punctum H rectam resecantem è rectis Θ Λ, B Γ, (per Casum primum Loci sexti Lib. I.) segmenta quæ sint inter se in ratione Ξ ad O; recta illa occursura sit ipsi B M: quia rectæ propiores puncto Γ semper auferunt rationes majores quam rectæ remotiores ab eodem. Ductâ igitur rectâ A B auferente rationem A Θ ad Γ B æqualem rationi Ξ ad O, clarum est hanc rectam solvere problema.

Cas. II. Ducatur jam recta H B, juxta Casum secundum, auferens rationem Z B ad Γ K datam. Quoniam ratio Z B ad A Θ datur, data quoque est ratio A Θ ad Γ K, unde recta A B positione datur, per eundem Casum cum præcedente. Oportet autem rationem componendam majorem esse ratione Z M ad M Γ. Componetur problema, si manentibus descriptis, jungatur H M quæ producatur ad Ξ, ac fiat omnino ut in præcedente Casu.

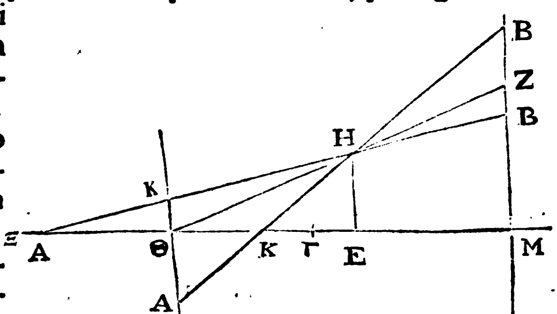
Cas. III. Ducatur recta H B, juxta Casum tertium, auferens rationem Z B ad K Γ datam, ac producatur ea ad punctum A. Quoniam ratio Z B ad A Θ datur, atque etiam ratio

ZB ad KΓ datur, ratio quoque AΘ ad KΓ data erit: unde ipsa recta AB positione datur, per resolutionem Casus secundi Loci sexti, qui quidem Diorismum habet. Determinatur autem hunc in modum. Maneant descripta, & capiatur ΘK media proportionalis inter ipsas ΘE, ΘΓ; ac juncta HK producatur ad A. Hæc recta HA auferet rationem ΘA ad ΓK minorem quavis ratione, à rectâ qualibet aliâ per H ductâ, totique rectæ EΓ occurrente, abscissâ.



Patet etiam rectam BK abscindere rationem ZB ad KΓ, minorem quavis aliâ à rectis ipsi EΓ occurrentibus auferendâ. Juxta præscriptum autem horum limitum componendum est problema: quod quidem fiet duobus modis, ab utrâque scilicet parte rectæ BK, resectis segmentis ex utrisque EK, KΓ.

Cas. IV. Ducatur jam recta AB, ad modum quartum, abscindens rationem ZB ad KΓ datam. Ducatur recta per punctum Θ ipsi MZ parallela, ac ratio ZB ad ΘA data erit: ob datam autem rationem ZB ad KΓ, *data quoque est ratio* ΘA *ad* KΓ, adeoque recta AB positione datur, per regulas Casus tertii Loci sexti, qui non habet determinationem. Compositio vero manifesta est ex jam descriptis.



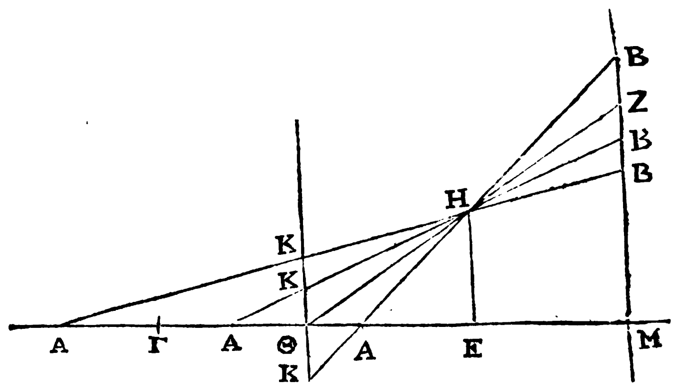
Cas. V. Ducatur, secundum modum quintum, recta AB auferens rationem BZ ad AΓ datam. Quoniam vero ratio BZ ad ΘK datur, ratio quoque ΘK ad AΓ data

data est; atque ipsa recta AB positione datur; juxta præcepta Casus quarti Loci sexti, qui quidem limites habet. Determinatur autem hujusmodi. Manentibus descriptis, capiatur ΘA media proportionalis inter ΘE, ΘΓ ac jungatur HA. Hæc recta HA auferet rationem ΘK ad ΓA, majorem quavis ratione, à qualibet rectâ per H ductâ, totique ΓA occurrente, ablatâ. Unde etiam recta AB auferet rationem BZ ad AΓ, majorem omni ratione, à rectâ quavis per H ductâ, totique rectæ ΓΞ occurrente, resecandâ. Iisdem autem manentibus, Compositio problematis evidens est; quodque fieri possit duobus modis, ab utraque scilicet parte ipsius AB, rectis utrique AΘ, AΞ occurrentibus.

LOCUS DECIMUS TERTIUS.

Cadat jam recta, per puncta H, Z ducta & producta, citra punctum Γ, ut ΘZ. Manifestum autem est rectas duci posse per punctum H, quæ occurrant rectis datis juxta quinque diversos modos sive Casus.

Cas. I. II. III. Ducantur autem rectæ AB, ad modum Casuum primi, & secundi, & tertii, quæ auferant rationes ZB ad ΓA datas. Agatur per punctum Θ, ipsi MZ parallela, recta ΘK. Jam quoniam rationes BZ ad ΓA dantur, atque etiam ratio BZ ad ΘK data est, dabuntur quoque rationes ΘK ad

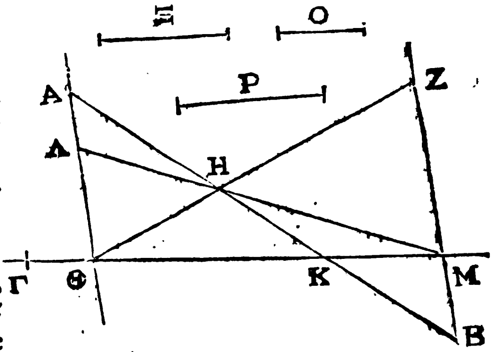


ΓA. Dantur autem positione rectæ duæ ΘK, AM; ac in recta ΘK sumitur punctum Θ, in ipsa vero AM punctum Γ. Punctum autem datum H est intra angulum KΘM. Ducendæ sunt igitur rectæ quæ auferant rationes KΘ ad ΓA datas.

Dantur

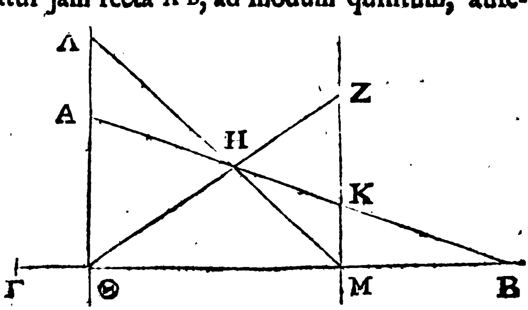
Dantur autem positione rectæ A B respectivè, nempe in primo Casu per Casum primum Loci quarti; in casu secundo, per secundum ejusdem; ac in tertio per tertium. Neque habent limites. Compositio autem manifesta est ex jam descriptis.

Cas. IV. Ducatur recta H B, juxta Casum quartum, auferens rationem Z B ad Γ K datam. Producatur ipsa H B ad Λ. Cumque Z B est ad Θ Λ in ratione datâ, ratio quoque Θ Λ ad K Γ data erit, adeoque recta A B positione datur, per Loci quarti Casum quartum. Constat autem rationem componendam majorem esse debere ratione Z M ad M Γ.



Componetur autem problema in hunc modum. Manentibus descriptis, proponatur ratio Ξ ad P major ratione Z M ad M Γ. Jungatur H M quæ producatur ad Λ, ac fiat ut Z H ad H Θ ita Ξ ad O: & ex æquo patebit rationem Λ Θ ad Γ M minorem esse ratione O ad P. Ductâ igitur rectâ A B per punctum H, quæ auferat rationem A Θ ad Γ K æqualem rationi O ad P, occurret illa necessario rectæ Θ M; quia rectæ propiores puncto Θ, *in ipsâ* Θ M *sumptæ*, semper auferunt rationes majores quam à rectis remotioribus abscissæ. Constat itaque ex prius ostensis rectam A B solvere problema.

Cas. V. Ducatur jam recta A B, ad modum quintum, auferens rationem Z K ad Γ B datam. Datâ ratione Z K ad A Θ, dabitur quoque ratio A Θ ad B Γ, adeoque recta A B positione datur, eodem modo quo resolvimus Casum quartum. Oportet autem rationem componendam

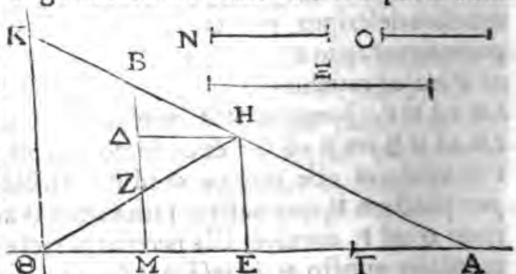


nendam minorem esse ratione ZM ad MΓ, ut patet per demonstrata in superiori Casu. Compositio autem manifesta est ex præmissis.

LOCUS DECIMUS QUARTUS.

Incidant jam rectæ duæ, ipsis ΓM, MZ parallelæ, ita ut earum altera HE fuerit citra punctum Γ; altera vero HΔ ultra punctum Z: ac manifestum est rectas per punctum H ductas disponi posse juxta quinque modos.

Cas. I. Ducatur recta AB, secundum Casum primum, auferens rationem ZB ad AΓ datam. Juncta HZ producatur ad Θ, & per punctum Θ ducatur recta ΘK ipsi MB parallela, rectæque AB in puncto K occurrens. Quoniam ratio ZB ad ΘK datur, ratio etiam ΘK ad ΓA data est. Dantur autem positione rectæ duæ AΘ, ΘK; in quarum altera ΘK sumitur punctum Θ, in altera vero AΘ punctum Γ; ac datum punctum H est intra angulum AΘK: recta vero HE per H ducta ipsi AΘ parallela cadit citra punctum Γ. Ducenda est igitur recta AK abscindens rationem ΘK ad AΓ datam. Hæc recta AK positione datur per Casum primum Loci *septimi Lib.* I. qui non habet limites.

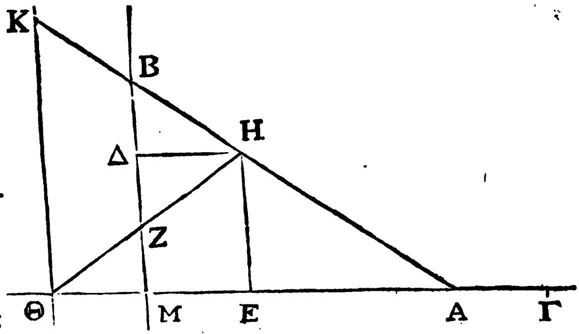


Componetur autem hujusmodi problema. Maneant descripta, ac sit ratio proposita sicut N ad O. Fiat ut ZH ad HΘ ita N ad Ξ; ac ducatur recta AHK, juxta Casum primum Loci *septimi*, quæ auferat rationem KΘ ad ΓA æqualem rationi Ξ ad O; ac manifestum est rectam ABK solvere problema.

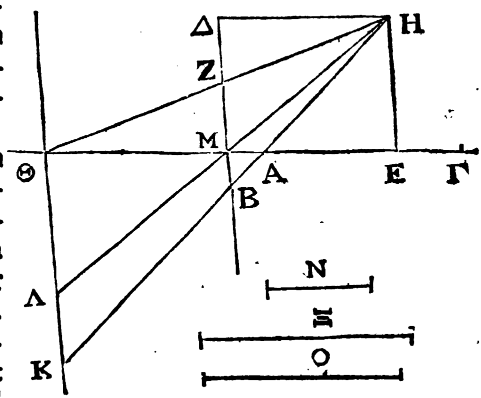
Cas. II. Ducatur jam recta AB, juxta Casum secundum, auferens rationem ZB ad AΓ datam. Producatur ipsa AB ad K: cumque ratio ZB ad ΘK data est, ratio etiam ΘK ad ΓA datur, adeoque recta AHK positione datur, per Casum secundum Loci *septimi*. Limitem autem habet, & ad hunc modum determinatur. Capiatur recta ΘA media proportionalis inter ipsas ΘΓ, ΘE; ac jungatur HA quæ producatur

ad

ad K. Dico rectam A K auferre rationem Θ K ad A Γ, minorem quavis ratione, à rectâ quacunque per H ductâ, totique E Γ occurrente, abscissâ. Hinc patet quo pacto componi possit problema, & quod fiat constructio duobus modis, ab utrâque parte ipsius A K, rectis scilicet ipsis Γ A, A E occurrentibus.



Cas. III. Ducatur recta H B, juxta Casum tertium, auferens rationem Z B ad Γ A datam: ac producatur ea ad punctum K. Quoniam ratio Z B ad K Θ datur, ratio etiam K Θ ad Γ A datur, adeoque recta H K positione datur, per Casum tertium Loci *septimi*. Constat autem rationem componendam majorem esse debere ratione Z M ad M Γ.

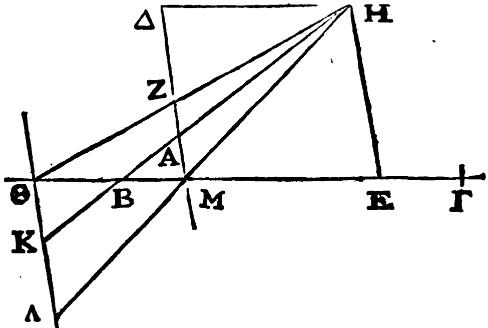


Componetur autem problema hujusmodi. Maneant descripta, & sit ratio data sicut N ad O major ratione Z M ad M Γ. Juncta H M producatur ad Λ, ac fiat ut Z H ad H Θ ita N ad Ξ; & patet ex æquo quod ratio Λ Θ ad Γ M minor erit ratione Ξ ad O: quare ductâ rectâ H K auferente rationem K Θ ad Γ A æqualem rationi Ξ ad O, occurret illa rectæ E M necessario. Etenim rectæ propiores puncto Θ auferunt semper rationes *minores* quam quæ abscinduntur à rectis remotioribus ab eodem; adeoque recta H K solvit problema.

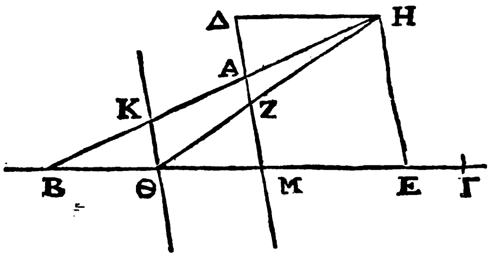
Cas. IV. Ducatur jam recta H B, ad modum quartum, auferens rationem A Z ad B Γ datam, & producatur ea ad pun-

 ctum K.

ctum K. Quoniam ratio AZ ad KΘ datur, data etiam est ratio KΘ ad BΓ; recta igitur HK positione datur, per solutionem Casus præcedentis. Oportet autem rationem componendam minorem esse ratione ZM ad MΓ. Componetur autem problema hujusmodi: maneant quæ prius, & sit ratio data sicut N ad O minor ratione ZM ad MΓ. Junge HM quæ producatur ad Λ, ac fiat omnino ut in Casu proxime præcedente.



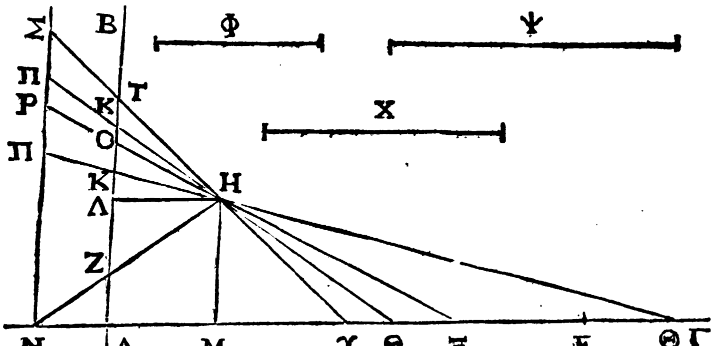
Cas. V. Ducatur denique recta HB, juxta Casum quintum, auferens rationem AZ ad BΓ datam. Quoniam ratio ZA ad BΓ datur, atque etiam ratio ZA ad ΘK data est, igitur ratio quoque ΘK ad BΓ datur: unde recta HB positione datur, per Casum quartum Loci *septimi*, qui quidem determinatus est. Limitatur autem in hunc modum. Manentibus descriptis, capiatur recta ΘB media proportionalis inter ipsas ΘΓ, ΘE, ac jungatur HB. Hæc recta HB auferet rationem ΘK ad BΓ majorem quavis ratione à rectis per H ductis, totique rectæ BΘ occurrentibus, abscissâ; adeoque ex præmissis constat rectam eandem ZB auferre rationem ZA ad BΓ majorem quam recta quævis alia per H ducta, ipsique ZΔ occurrens. Quod si componendum sit problema, manifestum est fieri posse duobus modis, ab utraque parte rectæ HB; sumptis nempe segmentis ab utrisque ZA, AΔ. Hæc autem omnia facile consequuntur ex nuper demonstratis.



ΑΝΑΛΙ-

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ.

Occurrant rectis duabus *positione datis* AB, AΓ rectæ duæ parallelæ HM, HΛ extra puncta data E & Z: ac patet rectas per H ductas disponi posse juxta quinque Casus. Auferant autem rectæ ΘK, juxta formas primam & secundam, rationes KZ ad EΘ æquales rationibus datis. Junctis punctis H, Z, producatur recta HZ ad N; ac per punctum N ducatur recta NΣ ipsi AB parallela. Producantur etiam rectæ ΘK ad Π. Quoniam autem utraque NH, ZH datur magnitudine, earundem etiam ratio data est. Sed NH est ad ZH ut NΠ ad KZ, adeoque ratio NΠ ad KZ datur: cumque ratio KZ ad EΘ data est, ipsa quoque ratio NΠ ad EΘ datur. Jam dantur positione rectæ duæ ΓN, NΣ; ac sumitur in recta ΓN punctum E, in recta vero NΣ punctum N; datum autem punctum H est intra angulum ΓNΣ; ac recta per H ducta ipsi AB parallela non transit per punctum E: ducenda est igitur recta ΘHKΠ auferens rationem NΠ ad ΘE æqualem rationi datæ. Ac manifesta est solutio. Casus autem primus absque limitibus est; secundus vero non item. Determinatur autem Casus



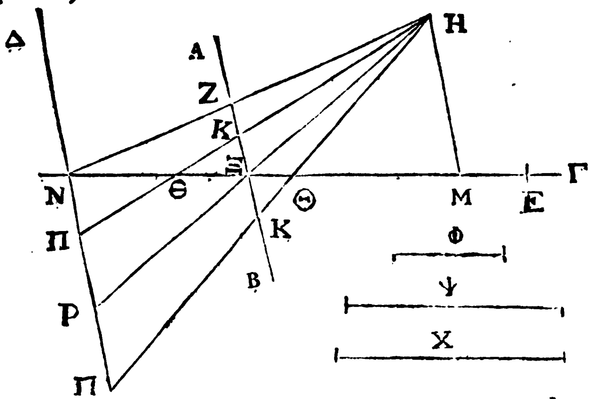
secundus, capiendo mediam proportionalem inter ipsas NM, NE, ut recta NΘ; ac jungendo rectam HΘ, quæ producatur ad Π. Ratio enim NΠ ad EΘ, in rectis NΣ, EM, erit ratio minima. Dico quoque rationem KZ ad EΘ, in rectis AB, EM, esse rationem minimam. Educatur enim è puncto H recta alia ΞHP. Jam quoniam ratio NΠ ad EΘ minor est ratione NP ad EΞ, permutando erit ratio NΠ ad NP minor ratione EΘ ad EΞ. Sed NΠ est ad NP ut ZK ad ZO; quare ratio KZ ad

ZO minor erit ratione EΘ ad EΞ; unde permutando ratio KZ ad EΘ minor erit ratione ZO ad EΞ. Ratio igitur KZ ad EΘ minima est in rectis AB, EM.

Componetur autem hunc in modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut Φ ad X. Hæc ratio vel æqualis erit rationi KZ ad EΘ, vel minor erit eâ, vel major. Si vero ratio Φ ad X æqualis fuerit rationi KZ ad EΘ sola recta HΠ solvet problema. Si minor fuerit eâ, problema impossibile est. Quod si major fuerit eâ, tum construi potest duobus modis. Ponatur jam rationem Φ ad X majorem esse ratione KZ ad EΘ. Fiat ut ZH ad HN ita Φ ad Ψ, *ac ratio* Ψ *ad* X major erit ratione NΠ ad EΘ; adeoque possibile erit ducere *per* punctum H rectam abscindentem rationem Ψ ad X, idque duobus modis, ab utraque parte ipsius HΠ. Ducantur igitur rectæ tales ΞHP, THΣ: dico utramque rectam satisfacere problemati. Quoniam enim HZ est ad HN sicut ZT ad NΣ, atque etiam ut Φ ad Ψ; erit quoque ZT ad NΣ sicut Φ ad Ψ. Sed NΣ est ad EΥ sicut Ψ ad X, adeoque ex æquo erit ZT ad EΥ sicut Φ ad X. Recta igitur ΥHΣT satisfacit problemati. *Ac pari argumento recta altera* ΞHOP *tantundem præstat.*

Auferat jam recta HΘK, juxta Casus tertium & quartum, rationes KZ ad EΘ æquales rationibus datis. Juncta HZ producatur ad N, & per punctum N ducatur recta NΠ, *ipsi* AB parallela: prolongetur etiam HKΘ ad Π. Quoniam vero utraque recta NH, HZ datur magnitudine, ratio earundem datur: cum HN est ad HZ ut ΠN ad KZ, ratio etiam ΠN ad KZ datur. Ob datam autem rationem KZ ad EΘ, ratio quoque NΠ ad EΘ datur. Dantur igitur positione duæ rectæ in eodem plano, nempe ΓN, ΛΠ; ac in recta ΓN sumitur punctum E, in ipsa vero ΔNΠ punctum N; punctum autem datum H, est intra angulum ΓNΔ; ac recta quæ per H ducitur ipsi NΠ parallela cadit citra punctum E. Ducenda est itaque recta HΘΠ per punctum H, auferens rationem NΠ ad EΘ æqualem rationi datæ. Manifestum est autem quod, in Casu tertio, ratio KZ ad ZΞ major est ratione ΘE ad EΞ; quodque, in Casu quarto, ratio ista minor est eâ. Permutando autem, ratio KZ ad ΘE, in Casu tertio, major erit ratione ZΞ ad EΞ; ut in Casu quarto, minor erit eâ. Sed ratio KZ ad EΘ æqualis est rationi datæ; adeoque oportet rationem

tionem datam majorem esse, in tertio Casu; minorem vero in quarto, ratione Z Ξ ad Ξ E.

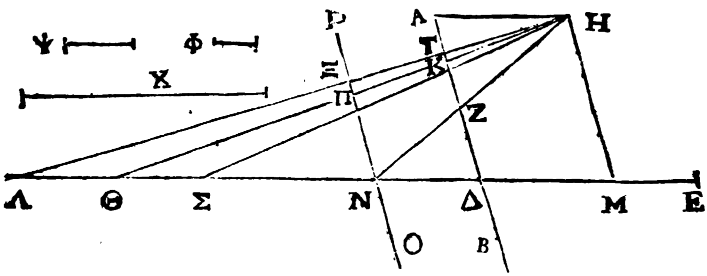


Componetur autem problema hujusmodi. Maneant descripta, ac jungatur H Ξ, quæ producatur ad P. Esto ratio data sicut Φ ad X, in tertio Casu major; in quarto minor ratione Z Ξ ad Ξ E. Fiat ut H Z ad H N ita Φ ad Ψ: ac ratio Ψ ad X in Casu tertio, major erit ratione P N ad Ξ E; at in Casu quarto minor erit eâ. Quocirca recta H Ξ P auferet rationem in Casu tertio, minimam; ut in quarto, maximam. Si itaque jubeatur ducere per punctum H rectam auferentem rationem Ψ ad X; vel erit recta sic ducta, juxta modum tertium, occurrens ipsi E Ξ; vel juxta modum quartum, cadens ab altera parte puncti Ξ. Ductâ autem rectâ H Π auferente rationem N Π ad E Θ æqualem rationi Ψ ad X, ratio K Z ad E Θ æqualis erit rationi Φ ad X: adeoque recta illa H Π satisfacit problemati.

Auferat autem recta H K Θ, juxta modum quintum, rationem K Z ad E Θ æqualem rationi datæ. Jungatur H Z ac producatur ea ad N. Per N agatur recta O P ipsi A B parallela. Jam quoniam utraque recta H N, H Z magnitudine datur, ratio etiam N H ad H Z datur. Sed N H est ad H Z ut N Π ad K Z. Ob datam itaque rationem K Z ad E Θ, ratio Π N ad E Θ data erit. Jam sunt in eodem plano rectæ duæ positione datæ, nempe E N, O P; ac sumitur in recta E N punctum E, ac in ipsâ O P punctum N; punctum autem datum H est intra angulum E N P; recta vero per H ducta ipsi A B parallela cadit citra punctum E. Ducenda est igitur recta Θ H Π per

punctum

punctum H, quæ auferat rationem ΠN ad EΘ æqualem rationi datæ, per ea quæ demonstrantur in præmissis. Determinatur autem faciendo NΘ mediam proportionalem inter ipsas MN, NE, ac jungendo rectam HΘ auferentem à rectis OP, EN segmenta ΠN, EΘ habentia inter se rationem maximam. Dico eandem rectam auferre à rectis AB, EN rationem KZ ad EΘ maximam. Jungatur enim recta alia HΛ, ac ratio ΠN ad EΘ major erit ratione ΞN ad EΛ. Permutando autem ratio ΠN ad ΞN major erit ratione EΘ ad EΛ. Sed ΠN est ad ΞN sicut KZ ad ZT; adeoque ratio KZ ad ZT major est ratione EΘ ad EΛ: unde permutando, ratio KZ ad ΘE major erit ratione ZT ad EΛ. Quapropter *etiam in* rectis AB, EN ratio KZ ad EΘ maxima est.



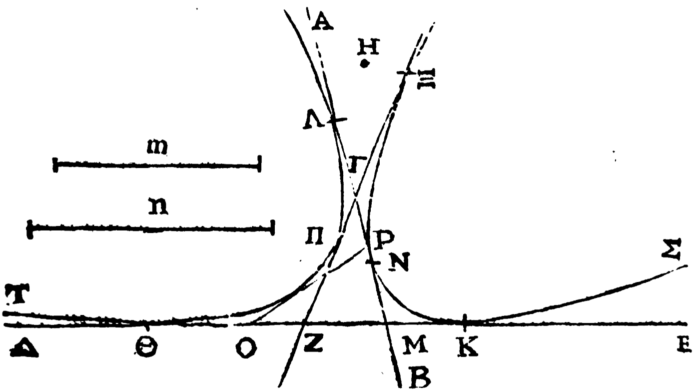
Componetur autem problema ad hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut Φ ad X, quæ vel æqualis erit rationi KZ ad EΘ, vel major erit eâ, vel minor. Si æqualis fuerit ei, sola recta HΘ solvet problema. Si vero major fuerit eâ, problema impossibile est. Quod si minor fuerit, componetur duobus modis. Sit enim ratio Φ ad X *minor ratione* KZ *ad* EΘ; *ac fiat ut* HZ *ad* HN *ita* Φ *ad* Ψ; *ac manifestum est* rationem Ψ ad X minorem esse ratione ΠN ad EΘ. Ratio autem ΠN ad ΘE est ratio maxima, adeoque possibile erit ducere per punctum H rectam auferentem rationem Ψ ad X, idque duobus modis, ab utrâque parte ipsius HΘ. Ductis autem rectis HΛ, HΣ, *quæ auferant rationes æquales rationi* Ψ *ad* X, *dico ipsas solvere problema. Etenim* ZH *est ad* HN, *hoc est* ZT *ad* ΞN, *ut* Φ *ad* Ψ; *ac* ΞN *est ad* EΛ *sicut* Ψ *ad* X; *adeoque ex æquo erit* ZT *ad* EΛ ut Φ ad X. Recta itaque HΛ solvit problema; & pari modo probabitur rectam HΣ idem præstare.

SCHOLION.

SCHOLION.

Ex numero Locorum & Casuum, *utrique libro à* Pappo *assignato, satis superque liquet genuinum hoc esse* Apollonii *opus: quod licet, ex Versione, utpote Arabicâ mendosâ, traductum, plurime à nativâ elegantiâ discedere existimetur; Literatis omnibus, præsertim Geometris, non ingratum esse confido. Ne tanta Casuum multitudine Lectoris animus turbaretur, non abs re fore arbitror, rem totam ob oculos ponere; descriptoque* Loco *quem tangunt rectæ omnes datam rationem à datis rectis abscindentes, puncti* H *situm in singulis expendere.*

Sint rectæ duæ AB, ΔE *positione datæ, sese intersecantes in puncto* M; *ac in* AB *sumatur punctum* Γ, *in* ΔE *vero punctum* Z: *describere oportet Curvas illas quas tangant rectæ omnes, auferentes à rectis datis segmenta punctis* Γ, Z *adjacentia, quæ sint in ratione datâ; puta ut* m *ad* n. *Fiat ut* m *ad* n *ita* ΓM *ad rectam aliam, utrinque à puncto* Z *in rectâ* ΔE *collocandam, ut* ZΘ, ZK. *Et in eadem ratione* m *ad* n *capiatur ad* ZM *recta, æqualis ipsi* ΓΛ *vel* ΓN, *utrinque à puncto* Γ *in recta* AB *ponenda. Quoniam vero* MΓ *est ad* ΘZ *sive*



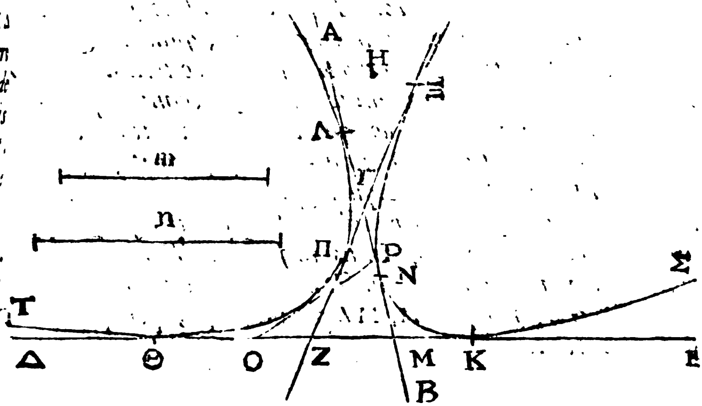
ZK *ut* m *ad* n, *atque etiam* ΓΛ *vel* ΓN *est ad* ZM *in eadem ratione; erit componendo* MΛ *ad* ΘM, *ac dividendo* MN *ad* MK *in eadem ratione, sive ut* m *ad* n. *Quinetiam si auferatur ab ipsâ* ΓM *recta aliqua ut* ΓP, *ac simul addatur ipsi* ZM *recta* ZO, *quæ fuerit ad* ΓP *sicut* n *ad* m; *dividendo* MP *erit ad* ΘO *in eadem ratione ac* m *ad* n; *ac vicissim, si augeatur recta* ΓM *ac minuatur ipsa* ZM; *componendo erunt* *etiam segmenta in eadem ratione. Ac facili negotio idem* [illegible] *rectis* ΓΜ, ΖΚ *demonstrabitur. Hinc si loco Parabolarum* [illegible] *jugatarum, quas in Scholio ad finem Lib. I. adhibuimus, de*-*scribantur Parabolæ duæ, quarum altera contingat rectas* [illegible] ΔΕ *in punctis* Λ, Θ; *altera vero in punctis* Κ *ac* Ν: *patet, per ibidem demonstrata, rectas omnes Parabolam* ΛΠΘΤ *con*-*tingentes abscindere è rectis* ΜΛ, ΘΕ; *uti & è rectis* ΜΒ, ΘΔ, *rationes æquales rationi* m *ad* n. *Tangentes vero omnes alte*-*rius Parabolæ* ΣΚΝΞ *auferent à rectis* ΜΛ, ΚΔ; *ac ab ipsis* ΜΒ, ΚΕ, *easdem rationes* m *ad* n. *Quoniam vero* ΓΜ *est ad* ΖΘ *ac* ΖΚ *sicut* m *ad* n; *componendo aut dividendo, pro ge*-*nio Casûs, segmenta omnia à Tangentibus prioris Parabolæ è rectis* ΓΛ, ΖΕ; *vel ex ipsis* ΓΒ, ΖΔ *abscissa: aut à Tangenti*-*bus posterioris, ex ipsis* ΓΛ, ΖΔ, *vel* ΓΒ, ΖΕ *ablata, erunt in ea*-*dem ratione. Patet etiam rectam* ΖΓΞ, *puncta data* Γ, Ζ *con*-*nectentem, contingere utramque Parabolam, puta in punctis* Π *&* Ξ; *quia recta hæc aufert rationem* ΜΓ *ad* ΖΘ *vel* ΖΚ *æ*-*qualem rationi* m *ad* n.

Dantur igitur tres Tangentes utrique Parabolæ communes, ac in earum altera puncta contactûs utriusque Curvæ, ut Θ *&* Κ: *unde levi opere* Locus *sive Curvæ ipsæ describi possunt, per ea quæ ad finem Scholii prædicti præcepimus. Datis au*-*tem Curvis illis, manifestum est, si reperiatur punctum da*-*tum* Η *in ipsis punctis contactuum* Π *&* Ξ, *unico tantum modo componi posse problema: si fuerit punctum* Η *intra am*-*bitum alterutrius Parabolæ, vel si tangat ipsam rectam* ΖΓΞ *productam, non nisi duas Tangentes duci posse: adeoque duo*-*bus tantum modis componi problema. Si vero punctum* Η *tan*-*gat ipsas Parabolas, tribus modis efficietur Constructio. Quod si ponatur punctum datum* Η *extra Curvas, nec in rectâ* ΖΓ, *ubicunque fuerit, quatuor Tangentes duci possunt, ad utram*-*que Parabolam binæ, unde etiam juxta quatuor modos com*-*ponendum est problema.*

Observandum tamen est quod, si ratio m *ad* n *minor fu*-*erit ratione* ΓΜ *ad* ΖΜ, *punctum* Κ *cadet ad easdem partes cum puncto* Ζ; *ac Parabola altera* ΞΝΚΣ *non in angulo* ΛΜΔ, *sed in angulo* ΕΜΒ, *describenda erit. At si ratio auferenda æqualis fuerit rationi* ΓΜ *ad* ΖΜ, *coincidente puncto* Κ *cum puncto* Μ, *recta* ΗΜ *satisfaciet problemati; atque etiam recta alia, ipsi* ΓΖ *parallela, per punctum* Η *ducta.*

Hinc

Hinc manuducimur ad aliam & à constructione Apollonii *diversissimam problematis effectionem, nec minus facilem. Nam loco puncti* Z *in rectâ* Δ E *sumantur puncta* Θ *&* K, *æqualiter à* Z *utrinque distantia; ac loco puncti* Γ *in recta* A B *sumatur punctum concursûs* M: *ubicunq; fuerit punctum datum* H, *manifestum est resolvi posse problema, per Casus quosdam quatuor Locorum ultimorum Libri primi. Nec ulteriori explicatione*



opus est, utpote in re satis evidente; cum scilicet segmenta omnia in rectis positione datis, punctis Θ, M *adjacentia, sint in eâdem ratione cum segmentis ab eâdem rectâ abscissis, ac punctis* Γ, Z *adjacentibus; hoc est, in ratione* Γ M *ad* Z Θ *vel* Z K. *Exempli gratiâ, ductâ rectâ quâvis* P O *auferente à positione datis* A B, Δ E *segmenta* M P *&* Θ O, *punctis* M *&* Θ *adjacentia, quæ sint in ratione datâ sive ut* Γ M *ad* Z Θ. *Dico eandem rectam* P O *abscindere etiam segmenta* Γ P *ad* Z O, *punctis* Γ, Z *adjacentia, eandem rationem inter se habentia quam habet* Γ M *ad* Z Θ. *Etenim si* Γ M *sit ad* Z Θ *sicut* m *ad* n, *ac fiat etiam* M P *ad* Θ O *in eadem ratione datâ (per Casus* II^{dos} *Loci quarti vel septimi Lib.* I.) *erit etiam dividendo,* Γ M—M P, *sive* Γ P, *ad* Z Θ—Θ O, *hoc est ad* Z O, *ut* m *ad* n: *recta igitur* P O *satisfacit problemati.*

Per totum autem Librum secundum fere, duplici Compositione effici potest propositum, etiam juxta methodum Apollonii, *tametsi hoc reticeat; indifferenter enim duci potest recta parallela per punctum* H *ad hanc vel illam è rectis duabus positione datis: adeo ut pro diversitate situs punctorum*

ctorum Γ *&* Z, *ad alia Loca aliosque Casus idem problema plerumque referri possit: quod quidem innuisse sufficiat. Quinetiam Casus Loci secundi Lib.* II. *ad modum Loci octavi & noni, paulo simplicius (ut videtur) & resolvuntur & determinantur.*

Porro Capitula hujus Libri τόπους *sive* Loca *inscripsit* Apollonius, *sensu omnino Geometrico, ad indigitandum* Locum *sive situm puncti* H *in singulis diversum, respectu trianguli* Z Γ M, *in plano infinito circumjecto. Loca autem hæc sunt genere diversissima: nam Locus primus, quartus, quintus & decimus occupant spatia summo modo infinita, ac totum planum complentia, si adjeceris Locum tertium & decimum quartum inter parallelas intercepta, ac quoad unam tantum dimensionem infinita. Locus Decimus-tertius occupat solum triangulum* Z Γ M; *eidemque æquale spatium duodecimus. Secundus, sextus, & nonus punctum* H *in rectis infinitis collocant; ut octavus & undecimus in finitis. Denique Locus septimus non nisi unicum punctum est, in concursu scilicet duarum rectarum ipsis* Γ M, M Z *parallelarum, per puncta* Γ *&* Z *ductarum.*

APOL-

APOLLONII PERGÆI

De Sectione Spatii;

SIVE

ΠΕΡΙ ΧΩΡΙΟΥ ΑΠΟΤΟΜΗΣ,

LIBER PRIOR RESTITUTUS.

QUÆNAM fuerit Analysis Veterum, è specimine librorum præcedentium abunde constat. Lectoribus autem nonnullis nimius fortasse videatur auctor noster, dum in tot Casus diversos problema de Sectione Rationis distribui voluit; singulorum Resolutionem ac Compositionem fuse docens. Veniam tamen indulgebit, qui animadverterit hos libros à *Pappo* immediate post *Euclidis Data* describi, quasi Analyseos studiosis apprime necessarios, ac in exemplum plani problematis per omnes casus plenissime soluti designatos: nec tam Mathematicorum peritis scriptos, quam in gratiam eorum qui velint ἀναλαμβάνειν ἐν γραμμαῖς δύναμιν εὑρετικὴν, ut ait *Pappus*. Agnitâ autem hujus Analyseos præstantia, *Apollonii* opus de Sectione Spatii sive rectanguli, jam olim deperditum, restaurare aggressus sum; nec irrito conamine. Manifestum enim est ex descriptione *Pappi*, hos libros eodem omnino subdivisionis ordine, quoad *Loca* & *Casus*, distributos fuisse. Exactâ autem resolutione comperi problemata duo περὶ λόγου ἀποτομῆς, & περὶ χωρίου ἀποτομῆς, conjunctissima ac quasi germana esse; levique facta mutatione per omnia quasi coincidere. Quocirca solutionem ejus subjungere visum est, inventam ac demonstratam ad exemplum præcedentium; nec multum, ut opinor, ab ipsius *Apollonii* opere (si unquam lucem viderit) discrepaturam: nisi quod in gratiam Lectorum, quibus brevitas magis cordi est, in compendium, quantum fieri licuit, redacta sit. Hoc autem magna ex parte fit, observatis in omni Casu, ad puncta correspondentia designanda, iisdem notis Alphabeticis.

PROPOSITIO GENERALIS.

Sint duæ rectæ infinitæ in eodem plano positione datæ, ut ΑΒ, ΔΕ; vel parallelæ inter se, vel occurrentes invicem in puncto Μ. Sumatur autem in rectâ ΑΒ punctum Γ, in ipsâ vero ΔΕ punctum Ζ. Ducenda est recta, per punctum quodvis datum Η, non contingens positione datas, quæ auferat ab ipsis segmenta ΓΚ, ΖΛ, rectangulum *dato* (quod semper Ξ appellare licet) æquale continentia.

Sint autem imprimis rectæ duæ positione datæ invicem parallelæ; ac punctum datum Η cadet necessario vel intra vel extra parallelas datas.

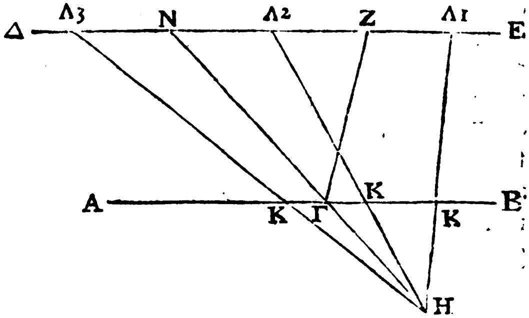
LOCUS PRIMUS.

Cadat primo punctum Η extra parallelas datas: ac manifestum est problema effici posse juxta tres modos, segmentis scilicet ab ipsis ΓΒ, ΖΕ, vel ab ipsis ΓΒ, ΖΔ, vel denique ab ipsis ΑΓ, ΖΔ auferendis.

In unoquoque horum Casuum eadem plane est Analysis, eademque Compositio. Ponatur itaque in quolibet casu rectam ΗΚΛ abscindere segmenta ΓΚ, ΖΛ rectangulum æquale rectangulo dato Ξ comprehendentia. Junctis punctis datis Η, Γ, recta ΗΓ data erit positione, quæ producatur ad occursum cum positione datâ ΔΕ; adeoque punctum occursus Ν datur, ipsaque recta ΝΖ: ob data autem tria puncta Η, Γ, Ν ratio ipsius ΗΓ ad ΗΝ data erit. Verum ratio ΓΚ ad ΝΛ eadem est ac ratio ΗΓ ad ΗΝ; quare ratio ΓΚ ad ΝΛ etiam data est: unde & ratio rectanguli ΓΚ in ΖΛ ad rectangulum ΝΛ *in* ΖΛ datur. Sed rectangulum ΓΚ in ΖΛ datum est; quare rectangulum ΖΛ in ΝΛ quoque datur, applicandum ad rectam datam ΝΖ, excedens quadrato in casu primo ac tertio, vel deficiens quadrato in secundo; unde (per 58^um & 59^um *Datorum Euclidis*) dantur puncta applicationis Λ; iisque datis, rectæ etiam ΗΚΛ dantur positione.

Ac

Ac manifestum est casus primum & tertium nullis limitibus obnoxios esse, sed rectas remotiores à punctis datis Γ, Z semper auferre Spatia majora, quam quæ iisdem propiores sunt. Patet quoque rectam ZΛ, in primo Casu, semper æquari ipsi NΛ in tertio. Secundus autem casus determinatur, quia rectangulum NΛ in ΛZ, quod sit ad rectangulum Ξ ut HN ad HΓ, applicandum est ad rectam NZ deficiens quadrato. Applicatio autem ista fieri nequit quoties rectangulum illud majus fuerit quadrato



dimidii ipsius NZ. Fiet autem modo singulari, si punctum Λ reperiatur in medio ipsius NZ; adeoque rectangulum maximum, juxta hunc casum auferendum, erit ad quadratum dimidii ipsius NZ, sicut ΓK ad NΛ sive ut HΓ ad HN. Hoc si majus fuerit spatium datum, problema propositum impossible est. Quod si minus fuerit eo, patet applicationem fieri posse dupliciter, adeoque duobus modis componi problema, rectis nempe æqualiter à punctis N, Z utrinque distantibus.

Compositio autem manifesta est. Nam si producatur recta HΓ ad N, ac fiat ut HΓ ad HN ita rectangulum datum Ξ ad aliud O; dein utrinque applicetur ad rectam datam NZ rectangulum illud O excedens quadrato; atque, si fieri potest, etiam deficiens quadrato: habebuntur omnia puncta quæsita Λ in punctis applicationum, ductæque omnes rectæ HKΛ satisfacient problemati. Quoniam enim rectangulum NΛ in ΛZ æquale est rectangulo O, ac rectangulum O est ad rectangulum Ξ ut NΛ ad ΓK; erit rectangulum ΓK in ΛZ æquale rectangulo Ξ. Rectæ igitur omnes HKΛ solvunt problema. Q.E.D.

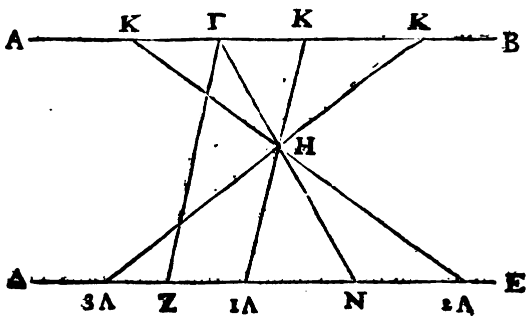
Problema igitur hoc semper effici potest dupliciter juxta Casus primum & tertium; atque etiam dupliciter, juxta secundum, modo rectangulum O minus fuerit quadrato ex dimidio ipsius NZ. Quod si eidem æquale fuerit, fiet modo singulari: si vero majus fuerit eo impossibilis erit Constructio.

LOCUS

LOCUS SECUNDUS.

Sit jam punctum datum H intra parallelas datas: patet tribus modis duci posse rectas, quæ segmenta auferant Γ K & Z Λ datum rectangulum Ξ continentia: vel enim ex ipsis Γ B, Z E; vel ex ipsis Γ A, Z Δ; vel tertio ex ipsis Γ B, Z Δ resecta erunt.

In omni autem Casu, mutatis mutandis, eadem est resolutio cum præcedente. Junctâ enim & productâ rectâ Γ H ad N, recta H N dabitur magnitudine & positione; ac ob data puncta Γ, H, N, ratio ipsius Γ H ad H N, hoc est, Γ K ad Λ N, (ob similia triangula) data erit. Sed ut Γ K est ad Λ N *ita* rectangulum Γ K in Λ Z ad rectangulum Λ N in Λ Z. Datum autem est rectangulum Γ K in Λ Z; quare datur quoque rectangulum N Λ in Λ Z, applicandum ad rectam datam N Z deficiens quadrato, in primo Casu; excedens vero quadrato in secundo ac tertio: qui quidem Casus proinde semper possibiles sunt, ac rectæ propiores punctis Γ, Z, auferunt semper Spatia minora quam remotiores ab iisdem.



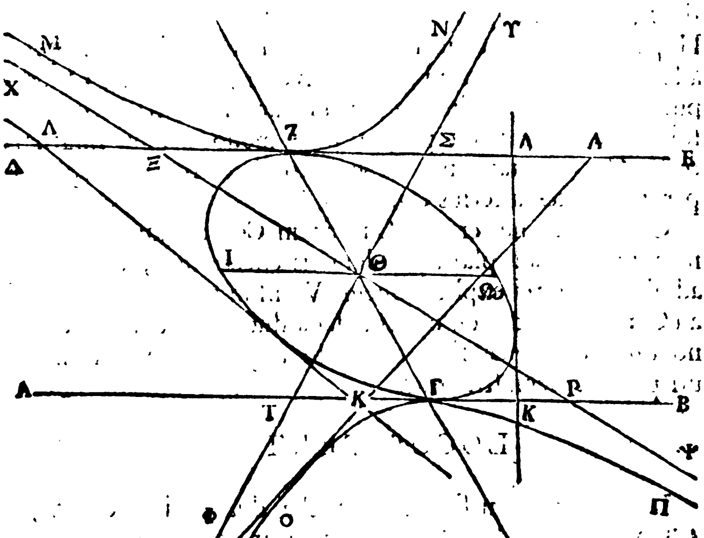
Primus autem Casus Dioristicus est, neque applicari potest rectangulum deficiens quadrato ad rectam N Z, quod majus fuerit quadrato dimidii ipsius N Z. Rectangulum igitur maximum, quod abscindi potest juxta Casum primum, erit ad quadratum dimidii ipsius N Z, ut Γ H ad H N. Hoc si majus fuerit rectangulum propositum Ξ, non componetur problema, ut impossibile. Si æquale fuerit ei, singulari tantum modo fiet. Si vero minus fuerit eo, dupliciter construi potest problema, factâ ad utramque partem applicatione.

Compositio autem manifesta est, eademque omnino cum illâ quam in præcedente Loco ostendimus. Fiat enim ut Γ H ad H N ita rectangulum datum Ξ ad aliud O, quod applicetur ad rectam N Z, deficiens quadrato in primo Casu, excedens vero

in

in secundo ac tertio. Duobus itaque semper fieri potest modis; atque insuper duobus, quoties rectangulum O minus fuerit quadrato ex dimidio ipsius NZ; vel modo singulari, si eidem æquale fuerit, hoc est omnino tribus.

Cæterum ut in Sectione Rationis Scholia addidimus pro exhibendis Locis Geometricis, quæ tangant rectæ omnes rem propositam præstantes; ita in Sectione Spatii Lectori curioso non injucundum erit nec inutile eadem commonstrari, locaque designari quæ tangant rectæ omnes rectangulum datum auferentes. Hoc autem fit ope Propositionis 42^{dæ} Lib. III. *Conicorum Apollonii* nostri, quâ demonstratur, *Si rectæ tres contingant Ellipsin vel Hyperbolam, quarum duæ parallelæ sint & dentur positione; quadratum semidiametri Sectionis his duabus parallelæ æquale esse rectangulo segmentorum inter puncta contactuum & Tangentem tertium interjectorum.* Idemque demonstrationibus propriis Illustrissimus *Newtonus* in *Principiis*, & Cl. *Hireus* in *Conicis* stabiliverunt. Hoc autem posito, si describatur Ellipsis ΓIZΩ cujus diameter sit recta ΓZ, jungens puncta



Γ, Z in rectis positione datis sumpta; in ejusque medio centrum Θ; eidem autem Conjugata diameter sit recta IΘΩ ipsi AB, ΔE parallela, quæ possit quadruplum rectanguli dati

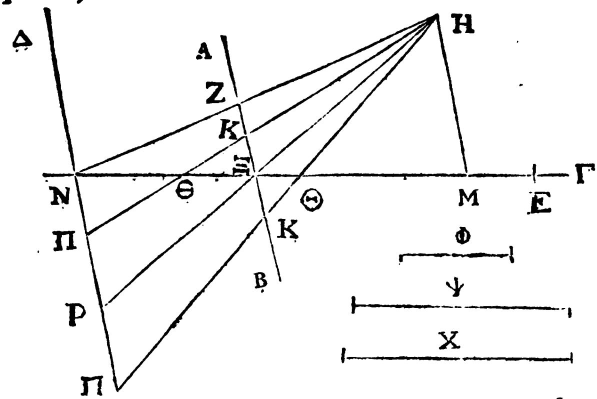
seq.

Z O minor erit ratione E Θ ad E Ξ; unde permutando ratio K Z ad E Θ minor erit ratione Z O ad E Ξ. Ratio igitur K Z ad E Θ minima est in rectis A B, E M.

Componetur autem hunc in modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut Φ ad X. Hæc ratio vel æqualis erit rationi K Z ad E Θ, vel minor erit eâ, vel major. Si vero ratio Φ ad X æqualis fuerit rationi K Z ad E Θ sola recta H Π solvet problema. Si minor fuerit eâ, problema impossibile est. Quod si major fuerit eâ, tum construi potest duobus modis. Ponatur jam rationem Φ ad X majorem esse ratione K Z ad E Θ. Fiat ut Z H ad H N ita Φ ad Ψ, *ac ratio* Ψ *ad* X major erit ratione N Π ad E Θ; adeoque possibile erit ducere per punctum H rectam abscindentem rationem Ψ ad X, idque duobus modis, ab utraque parte ipsius H Π. Ducantur igitur rectæ tales Ξ H P, T H Σ: dico utramque rectam satisfacere problemati. Quoniam enim H Z est ad H N sicut Z T ad N Σ, atque etiam ut Φ ad Ψ; erit quoque Z T ad N Σ sicut Φ ad Ψ. Sed N Σ est ad E T sicut Ψ ad X, adeoque ex æquo erit Z T ad E T sicut Φ ad X. Recta igitur T H Σ T satisfacit problemati. *Ac pari argumento recta altera* Ξ H O P *tantundem præstat.*

Auferat jam recta H Θ K, juxta Casus tertium & quartum, rationes K Z ad E Θ æquales rationibus datis. Juncta H Z producatur ad N, & per punctum N ducatur recta N Π, ipsi A B parallela: prolongetur etiam H K Θ ad Π. Quoniam vero utraque recta N H, H Z datur magnitudine, ratio earundem datur: cum H N est ad H Z ut Π N ad K Z, ratio etiam Π N ad K Z datur. Ob datam autem rationem K Z ad E Θ, ratio quoque N Π ad E Θ datur. Dantur igitur positione duæ rectæ in eodem plano, nempe Γ N, Λ Π; ac in recta Γ N sumitur punctum E, in ipsa vero Δ N Π punctum N; punctum autem datum H, est intra angulum Γ N Δ; ac recta quæ per H ducitur ipsi N Π parallela cadit citra punctum E. Ducenda est itaque recta H Θ Π per punctum H, auferens rationem N Π ad E Θ æqualem rationi datæ. Manifestum est autem quod, in Casu tertio, ratio K Z ad Z Ξ major est ratione Θ E ad E Ξ; quodque, in Casu quarto, ratio ista minor est eâ. Permutando autem, ratio K Z ad Θ E, in Casu tertio, major erit ratione Z Ξ ad E Ξ; ut in Casu quarto, minor erit eâ. Sed ratio K Z ad E Θ æqualis est rationi datæ; adeoque oportet rationem

tionem datam majorem esse, in tertio Casu; minorem vero in quarto, ratione Z Ξ ad Ξ E.

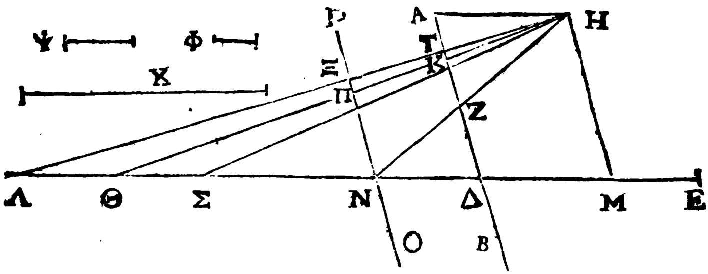


Componetur autem problema hujusmodi. Maneant descripta, ac jungatur H Ξ, quæ producatur ad P. Esto ratio data sicut Φ ad X, in tertio Casu major; in quarto minor ratione Z Ξ ad Ξ E. Fiat ut H Z ad H N ita Φ ad Ψ: ac ratio Ψ ad X in Casu tertio, major erit ratione P N ad Ξ E; at in Casu quarto minor erit eâ. Quocirca recta H Ξ P auferet rationem in Casu tertio, minimam; ut in quarto, maximam. Si itaque jubeatur ducere per punctum H rectam auferentem rationem Ψ ad X; vel erit recta sic ducta, juxta modum tertium, occurrens ipsi E Ξ; vel juxta modum quartum, cadens ab altera parte puncti Ξ. Ductâ autem rectâ H Π auferente rationem N Π ad E Θ æqualem rationi Ψ ad X, ratio K Z ad E Θ æqualis erit rationi Φ ad X: adeoque recta illa H Π satisfacit problemati.

Auferat autem recta H K Θ, juxta modum quintum, rationem K Z ad E Θ æqualem rationi datæ. Jungatur H Z ac producatur ea ad N. Per N agatur recta O P ipsi A B parallela. Jam quoniam utraque recta H N, H Z magnitudine datur, ratio etiam N H ad H Z datur. Sed N H est ad H Z ut N Π ad K Z. Ob datam itaque rationem K Z ad E Θ, ratio Π N ad E Θ data erit. Jam sunt in eodem plano rectæ duæ positione datæ, nempe E N, O P; ac sumitur in recta E N punctum E, ac in ipsâ O P punctum N; punctum autem datum H est intra angulum E N P; recta vero per H ducta ipsi A B parallela cadit citra punctum E. Ducenda est igitur recta Θ H Π per

punctum

punctum H, quæ auferat rationem ΠN ad EΘ æqualem rationi datæ, per ea quæ demonstrantur in præmissis. Determinatur autem faciendo NΘ mediam proportionalem inter ipsas MN, NE, ac jungendo rectam HΘ auferentem à rectis OP, EN segmenta ΠN, EΘ habentia inter se rationem maximam. Dico eandem rectam auferre à rectis AB, EN rationem KZ ad EΘ maximam. Jungatur enim recta alia HΛ, ac ratio ΠN ad EΘ major erit ratione ΞN ad EΛ. Permutando autem ratio ΠN ad ΞN major erit ratione EΘ ad EΛ. Sed ΠN est ad ΞN sicut KZ ad ZT; adeoque ratio KZ ad ZT major est ratione EΘ ad EΛ: unde permutando, ratio KZ ad ΘE major erit ratione ZT ad EΛ. Quapropter etiam in rectis AB, EN ratio KZ ad EΘ maxima est.



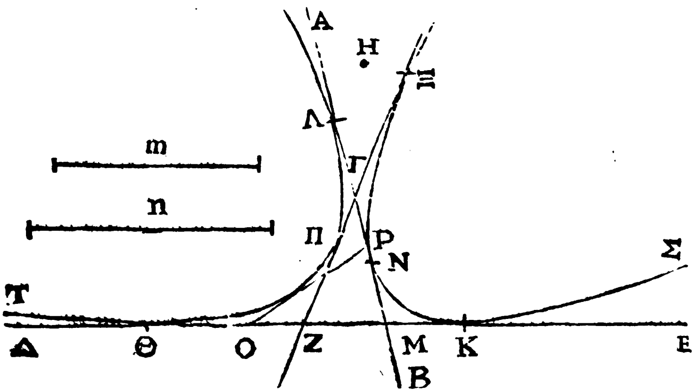
Componetur autem problema ad hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut Φ ad X, quæ vel æqualis erit rationi KZ ad EΘ, vel major erit eâ, vel minor. Si æqualis fuerit ei, sola recta HΘ solvet problema. Si vero major fuerit eâ, problema impossibile est. Quod si minor fuerit, componetur duobus modis. Sit enim ratio Φ ad X *minor ratione* KZ *ad* EΘ; *ac fiat ut* HZ *ad* HN *ita* Φ *ad* Ψ; *ac manifestum est* rationem Ψ ad X minorem esse ratione ΠN ad EΘ. Ratio autem ΠN ad ΘE est ratio maxima, adeoque possibile erit ducere per punctum H rectam auferentem rationem Ψ ad X, idque duobus modis, ab utrâque parte ipsius HΘ. Ductis autem rectis HΛ, HΣ, *quæ auferant rationes æquales rationi* Ψ *ad* X, *dico ipsas solvere problema. Etenim* ZH *est ad* HN, *hoc est* ZT *ad* ΞN, *ut* Φ *ad* Ψ; *ac* ΞN *est ad* EΛ *sicut* Ψ *ad* X; *adeoque ex æquo erit* ZT *ad* EΛ ut Φ ad X. Recta itaque HΛ solvit problema; & pari modo probabitur rectam HΣ idem præstare.

SCHOLION.

SCHOLION.

Ex numero Locorum & Casuum, *utrique libro à* Pappo *assignato, satis superque liquet genuinum hoc esse* Apollonii *opus: quod licet, ex Versione, utpote Arabicâ mendosâ, traductum, plurime à nativâ elegantiâ discedere existimetur; Literatis omnibus, præsertim Geometris, non ingratum esse confido. Ne tanta Casuum multitudine Lectoris animus turbaretur, non abs re fore arbitror, rem totam ob oculos ponere; descriptoque* Loco *quem tangunt rectæ omnes datam rationem à datis rectis abscindentes, puncti* H *situm in singulis expendere.*

Sint rectæ duæ AB, ΔE *positione datæ, sese intersecantes in puncto* M; *ac in* AB *sumatur punctum* Γ, *in* ΔE *vero punctum* Z: *describere oportet Curvas illas quas tangant rectæ omnes, auferentes à rectis datis segmenta punctis* Γ, Z *adjacentia, quæ sint in ratione datâ; puta ut* m *ad* n. *Fiat ut* m *ad* n *ita* ΓM *ad rectam aliam, utrinque à puncto* Z *in rectâ* ΔE *collocandam, ut* ZΘ, ZK. *Et in eadem ratione* m *ad* n *capiatur ad* ZM *recta, æqualis ipsi* ΓΛ *vel* ΓN, *utrinque à puncto* Γ *in recta* AB *ponenda. Quoniam vero* MΓ *est ad* ΘZ *sive*



ZK *ut* m *ad* n, *atque etiam* ΓΛ *vel* ΓN *est ad* ZM *in eadem ratione; erit componendo* MΛ *ad* ΘM, *ac dividendo* MN *ad* MK *in eadem ratione, sive ut* m *ad* n. *Quinetiam si auferatur ab ipsâ* ΓM *recta aliqua ut* ΓP, *ac simul addatur ipsi* ZM *recta* ZO, *quæ fuerit ad* ΓP *sicut* n *ad* m; *dividendo* MP *erit ad* ΘO *in eadem ratione ac* m *ad* n; *ac vicissim, si augeatur recta* ΓM *ac minuatur ipsa* ZM; *componendo erunt*

S *etiam*

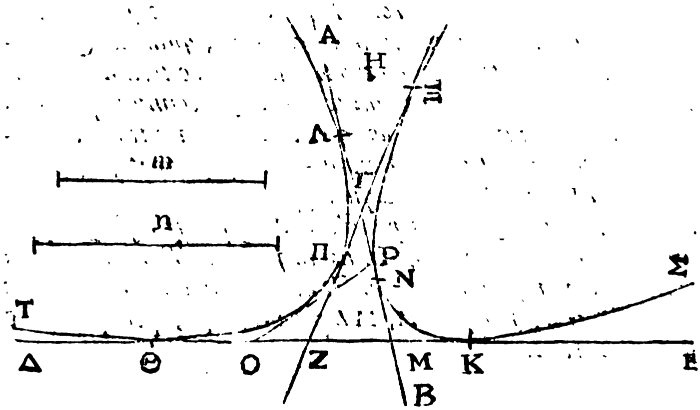
etiam ſegmenta in eadem ratione. Ac facili negotio idem in rectis ΓΜ, ΖΚ *demonſtrabitur. Hinc ſi loco Parabolarum conjugatarum, quas in Scholio ad finem Lib. I. adhibuimus, deſcribantur Parabolæ duæ, quarum altera contingat rectas* ΑΒ, ΔΕ *in punctis* Λ, Θ; *altera vero in punctis* Κ *ac* Ν: *patebit, per ibidem demonſtrata, rectas omnes Parabolam* ΛΠΘΤ *contingentes abſcindere è rectis* ΜΑ, ΘΕ; *uti & è rectis* ΜΒ, ΘΔ, *rationes æquales rationi* m *ad* n. *Tangentes vero omnes alterius Parabolæ* ΣΚΝΞ *auferent à rectis* ΜΑ, ΚΔ; *ac ab ipſis* ΜΒ, ΚΕ, *eaſdem rationes* m *ad* n. *Quoniam vero* ΓΜ *eſt ad* ΖΘ *ac* ΖΚ *ſicut* m *ad* n; *componendo aut dividendo, pro genio Caſûs, ſegmenta omnia à Tangentibus prioris Parabolæ è rectis* ΓΑ, ΖΕ; *vel ex ipſis* ΓΒ, ΖΔ *abſciſſa: aut à Tangentibus poſterioris, ex ipſis* ΓΑ, ΖΔ, *vel* ΓΒ, ΖΕ *ablata, erunt in eadem ratione. Patet etiam rectam* ΖΓΞ, *puncta data* Γ, Ζ *connectentem, contingere utramque Parabolam, puta in punctis* Π *&* Ξ; *quia recta hæc aufert rationem* ΜΓ *ad* ΖΘ *vel* ΖΚ *æqualem rationi* m *ad* n.

Dantur igitur tres Tangentes utrique Parabolæ communes, ac in earum altera puncta contactûs utriuſque Curvæ, ut Θ *&* Κ: *unde levi opere* Locus *ſive Curvæ ipſæ deſcribi poſſunt, per ea quæ ad finem Scholii prædicti præcepimus. Datis autem Curvis illis, manifeſtum eſt, ſi reperiatur punctum datum* Η *in ipſis punctis contactuum* Π *&* Ξ, *unico tantum modo componi poſſe problema: ſi fuerit punctum* Η *intra ambitum alterutrius Parabolæ, vel ſi tangat ipſam rectam* ΖΓΞ *productam, non niſi duas Tangentes duci poſſe: adeoque duobus tantum modis componi problema. Si vero punctum* Η *tangat ipſas Parabolas, tribus modis efficietur Conſtructio. Quod ſi ponatur punctum datum* Η *extra Curvas, nec in rectâ* ΖΓ, *ubicunque fuerit, quatuor Tangentes duci poſſunt, ad utramque Parabolam binæ, unde etiam juxta quatuor modos componendum eſt problema.*

Obſervandum tamen eſt quod, ſi ratio m *ad* n *minor fuerit ratione* ΓΜ *ad* ΖΜ, *punctum* Κ *cadet ad eaſdem partes cum puncto* Ζ; *ac Parabola altera* ΞΝΚΣ *non in angulo* ΑΜΔ, *ſed in angulo* ΕΜΒ, *deſcribenda erit. At ſi ratio auferenda æqualis fuerit rationi* ΓΜ *ad* ΖΜ, *coincidente puncto* Κ *cum puncto* Μ, *recta* ΗΜ *ſatisfaciet problemati; atque etiam recta alia, ipſi* ΓΖ *parallela, per punctum* Η *ducta.*

Hinc

Hinc manuducimur ad aliam & à constructione Apollonii *diversissimam problematis effectionem, nec minus facilem. Nam si loco puncti* Z *in rectâ* ΔE *sumantur puncta* Θ *&* K, *æqualiter à* Z *utrinque distantia; ac loco puncti* Γ *in recta* AB *sumatur punctum concursûs* M: *ubicunq; fuerit punctum datum* H, *manifestum est resolvi posse problema, per Casus quosdam quatuor Locorum ultimorum Libri primi. Nec ulteriori explicatione*



opus est, utpote in re satis evidente; cum scilicet segmenta omnia in rectis positione datis, punctis Θ, M *adjacentia, sint in eâdem ratione cum segmentis ab eâdem rectâ abscissis, ac punctis* Γ, Z *adjacentibus; hoc est, in ratione* ΓM *ad* ZΘ *vel* ZK. *Exempli gratiâ, ductâ rectâ quâvis* PO *auferente à positione datis* AB, ΔE *segmenta* MP *&* ΘO, *punctis* M *&* Θ *adjacentia, quæ sint in ratione datâ sive ut* ΓM *ad* ZΘ. *Dico eandem rectam* PO *abscindere etiam segmenta* ΓP *ad* ZO, *punctis* Γ, Z *adjacentia, eandem rationem inter se habentia quam habet* ΓM *ad* ZΘ. *Etenim si* ΓM *sit ad* ZΘ *sicut* m *ad* n, *ac fiat etiam* MP *ad* ΘO *in eadem ratione datâ (per Casus* II[dos] *Loci quarti vel septimi Lib.* I.) *erit etiam dividendo,* ΓM—MP, *sive* ΓP, *ad* ZΘ—ΘO, *hoc est ad* ZO, *ut* m *ad* n: *recta igitur* PO *satisfacit problemati.*

Per totum autem Librum secundum fere, duplici Compositione effici potest propositum, etiam juxta methodum Apollonii, *tametsi hoc reticeat; indifferenter enim duci potest recta parallela per punctum* H *ad hanc vel illam è rectis duabus positione datis: adeo ut pro diversitate situs punctorum*

ctorum Γ *&* Z, *ad alia Loca aliosque Casus idem problema plerumque referri possit: quod quidem innuisse sufficiat. Quinetiam Casus Loci secundi Lib.* II. *ad modum Loci octavi & noni, paulo simplicius (ut videtur) & resolvuntur & determinantur.*

Porro Capitula hujus Libri τόπυς *sive* Loca *inscripsit* Apollonius, *sensu omnino Geometrico, ad indigitandum* Locum *sive situm puncti* H *in singulis diversum, respectu trianguli* Z Γ M, *in plano infinito circumjecto. Loca autem hæc sunt genere diversissima: nam Locus primus, quartus, quintus & decimus occupant spatia summo modo infinita, ac totum planum complentia, si adjeceris Locum tertium & decimum quartum inter parallelas intercepta, ac quoad unam tantum dimensionem infinita. Locus Decimus-tertius occupat solum triangulum* Z Γ M; *eidemque æquale spatium duodecimus. Secundus, sextus, & nonus punctum* H *in rectis infinitis collocant; ut octavus & undecimus in finitis. Denique Locus septimus non nisi unicum punctum est, in concursu scilicet duarum rectarum ipsis* Γ M, M Z *parallelarum, per puncta* Γ *&* Z *ductarum.*

APOL-

APOLLONII PERGÆI

De Sectione Spatii,

SIVE

ΠΕΡΙ ΧΩΡΙΟΥ ΑΠΟΤΟΜΗΣ,

LIBER PRIOR RESTITUTUS.

QUÆNAM fuerit Analysis Veterum, è specimine librorum præcedentium abunde constat. Lectoribus autem nonnullis nimius fortasse videatur auctor noster, dum in tot Casus diversos problema de Sectione Rationis distribui voluit; singulorum Resolutionem ac Compositionem fuse docens. Veniam tamen indulgebit, qui animadverterit hos libros à *Pappo* immediate post *Euclidis Data* describi, quasi Analyseos studiosis apprime necessarios, ac in exemplum plani problematis per omnes casus plenissime soluti designatos: nec tam Mathematicorum peritis scriptos, quam in gratiam eorum qui velint ἀναλαμβάνειν ἐν γραμμαῖς δύναμιν εὑρετικὴν, ut ait *Pappus*. Agnitâ autem hujus Analyseos præstantia, *Apollonii* opus de Sectione Spatii sive rectanguli, jam olim deperditum, restaurare aggressus sum; nec irrito conamine. Manifestum enim est ex descriptione *Pappi*, hos libros eodem omnino subdivisionis ordine, quoad *Loca* & *Casus*, distributos fuisse. Exactâ autem resolutione comperi problemata duo περὶ λόγου ἀποτομῆς, & περὶ χωρίου ἀποτομῆς, conjunctissima ac quasi germana esse; levique facta mutatione per omnia quasi coincidere. Quocirca solutionem ejus subjungere visum est, inventam ac demonstratam ad exemplum præcedentium; nec multum, ut opinor, ab ipsius *Apollonii* opere (si unquam lucem viderit) discrepaturam: nisi quod in gratiam Lectorum, quibus brevitas magis cordi est, in compendium, quantum fieri licuit, redacta sit. Hoc autem magna ex parte fit, observatis in omni Casu, ad puncta correspondentia designanda, iisdem notis Alphabeticis.

PROPOSITIO GENERALIS.

Sint duæ rectæ infinitæ in eodem plano positione datæ, ut ΑΒ, ΔΕ; vel parallelæ inter se, vel occurrentes invicem in puncto Μ. Sumatur autem in rectâ ΑΒ punctum Γ, in ipsâ vero ΔΕ punctum Ζ. Ducenda est recta, per punctum quodvis datum Η, non contingens positione datas, quæ auferat ab ipsis segmenta ΓΚ, ΖΛ, rectangulum *dato* (quod semper Ξ appellare licet) æquale continentia.

Sint autem imprimis rectæ duæ positione datæ invicem parallelæ; ac punctum datum Η cadet necessàrio vel intra vel extra parallelas datas.

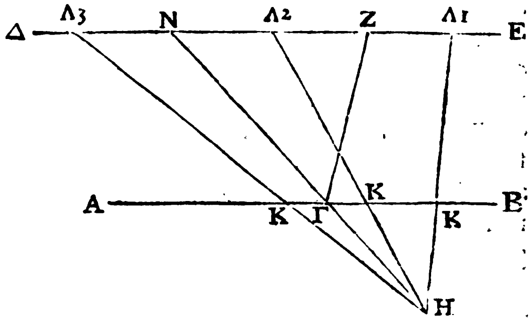
LOCUS PRIMUS.

Cadat primo punctum Η extra parallelas datas: ac manifestum est problema effici posse juxta tres modos, segmentis scilicet ab ipsis ΓΒ, ΖΕ, vel ab ipsis ΓΒ, ΖΔ, vel denique ab ipsis ΑΓ, ΖΔ auferendis.

In unoquoque horum Casuum eadem plane est Analysis, eademque Compositio. Ponatur itaque in quolibet casu rectam ΗΚΛ abscindere segmenta ΓΚ, ΖΛ rectangulum æquale rectangulo dato Ξ comprehendentia. Junctis punctis datis Η, Γ, recta ΗΓ data erit positione, quæ producatur ad occursum cum positione datâ ΔΕ; adeoque punctum occursus Ν datur, ipsaque recta ΝΖ: ob data autem tria puncta Η, Γ, Ν ratio ipsius ΗΓ ad ΗΝ data erit. Verum ratio ΓΚ ad ΝΛ eadem est ac ratio ΗΓ ad ΗΝ; quare ratio ΓΚ ad ΝΛ etiam data est: unde & ratio rectanguli ΓΚ in ΖΛ ad rectangulum ΝΛ in ΖΛ datur. Sed rectangulum ΓΚ in ΖΛ datum est; quare rectangulum ΖΛ in ΝΛ quoque datur, applicandum ad rectam datam ΝΖ, excedens quadrato in casu primo ac tertio, vel deficiens quadrato in secundo; unde (per 58um & 59um *Datorum Euclidis*) dantur puncta applicationis Λ; iisque datis, rectæ etiam ΗΚΛ dantur positione.

Ac

Ac manifestum est casus primum & tertium nullis limitibus obnoxios esse, sed rectas remotiores à punctis datis Γ, Ζ semper auferre Spatia majora, quam quæ iisdem propiores sunt. Patet quoque rectam ΖΛ, in primo Casu, semper æquari ipsi ΝΛ in tertio. Secundus autem casus determinatur, quia rectangulum ΝΛ in ΛΖ, quod sit ad rectangulum Ξ ut ΗΝ ad ΗΓ, applicandum est ad rectam ΝΖ deficiens quadrato. Applicatio autem ista fieri nequit quoties rectangulum illud majus fuerit quadrato dimidii ipsius ΝΖ. Fiet autem modo singulari, si punctum Λ reperiatur in medio ipsius ΝΖ; adeoque rectangulum maximum, juxta hunc casum auferendum, erit ad quadratum dimidii ipsius ΝΖ, sicut ΓΚ ad ΝΛ sive ut ΗΓ ad ΗΝ. Hoc si majus fuerit spatium datum, problema propositum impossible est. Quod si minus fuerit eo, patet applicationem fieri posse dupliciter, adeoque duobus modis componi problema, rectis nempe æqualiter à punctis Ν, Ζ utrinque distantibus.



Compositio autem manifesta est. Nam si producatur recta ΗΓ ad Ν, ac fiat ut ΗΓ ad ΗΝ ita rectangulum datum Ξ ad aliud Ο; dein utrinque applicetur ad rectam datam ΝΖ rectangulum illud Ο excedens quadrato; atque, si fieri potest, etiam deficiens quadrato: habebuntur omnia puncta quæsita Λ in punctis applicationum, ductæque omnes rectæ ΗΚΛ satisfacient problemati. Quoniam enim rectangulum ΝΛ in ΛΖ æquale est rectangulo Ο, ac rectangulum Ο est ad rectangulum Ξ ut ΝΛ ad ΓΚ; erit rectangulum ΓΚ in ΛΖ æquale rectangulo Ξ. Rectæ igitur omnes ΗΚΛ solvunt problema. Q.E.D.

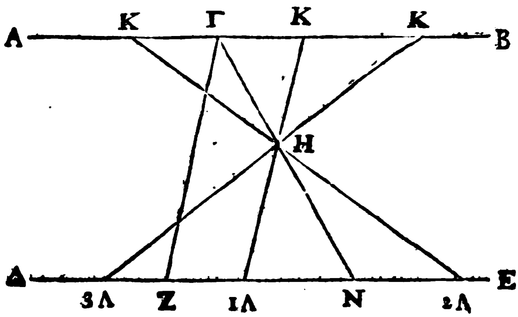
Problema igitur hoc semper effici potest dupliciter juxta Casus primum & tertium; atque etiam dupliciter, juxta secundum, modo rectangulum Ο minus fuerit quadrato ex dimidio ipsius ΝΖ. Quod si eidem æquale fuerit, fiet modo singulari: si vero majus fuerit eo impossibilis erit Constructio.

LOCUS

LOCUS SECUNDUS.

Sit jam punctum datum H intra parallelas datas: patet tribus modis duci posse rectas, quæ segmenta auferant ΓK & ZΛ datum rectangulum Ξ continentia: vel enim ex ipsis ΓB, ZE; vel ex ipsis ΓA, ZΔ; vel tertio ex ipsis ΓB, ZΔ resecta erunt.

In omni autem Casu, mutatis mutandis, eadem est resolutio cum præcedente. Junctâ enim & productâ rectâ ΓH ad N, recta HN dabitur magnitudine & positione; ac ob data puncta Γ, H, N, ratio ipsius ΓH ad HN, hoc est, ΓK ad ΛN, (ob similia triangula) data erit. Sed ut ΓK est ad ΛN *ita rectangulum* ΓK in ΛZ ad rectangulum ΛN in ΛZ. Datum autem est rectangulum ΓK in ΛZ; quare datur quoque rectangulum NΛ in ΛZ, applicandum ad rectam datam NZ deficiens quadrato, in primo Casu; excedens vero quadrato in secundo ac tertio: qui quidem Casus proinde semper possibiles sunt, ac rectæ propiores punctis Γ, Z, auferunt semper Spatia minora quam remotiores ab iisdem.



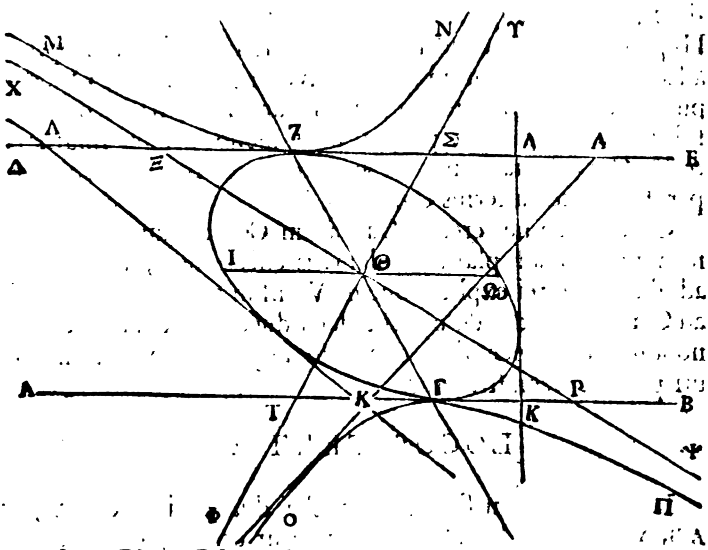
Primus autem Casus Dioristicus est, neque applicari potest rectangulum deficiens quadrato ad rectam NZ, quod majus fuerit quadrato dimidii ipsius NZ. Rectangulum igitur maximum, quod abscindi potest juxta Casum primum, erit ad quadratum dimidii ipsius NZ, ut ΓH ad HN. Hoc si majus fuerit rectangulum propositum Ξ, non componetur problema, ut impossibile. Si æquale fuerit ei, singulari tantum modo fiet. Si vero minus fuerit eo, dupliciter construi potest problema, factâ ad utramque partem applicatione.

Compositio autem manifesta est, eademque omnino cum illâ quam in præcedente Loco ostendimus. Fiat enim ut ΓH ad HN ita rectangulum datum Ξ ad aliud O, quod applicetur ad rectam NZ, deficiens quadrato in primo Casu, excedens vero

in

in secundo ac tertio. Duobus itaque semper fieri potest modis; atque insuper duobus, quoties rectangulum O minus fuerit quadrato ex dimidio ipsius NZ; vel modo singulari, si eidem æquale fuerit, hoc est omnino tribus.

Cæterum ut in Sectione Rationis Scholia addidimus pro exhibendis Locis Geometricis, quæ tangant rectæ omnes rem propositam præstantes; ita in Sectione Spatii Lectori curioso non injucundum erit nec inutile eadem commonstrari, locaque designari quæ tangant rectæ omnes rectangulum datum auferentes. Hoc autem fit ope Propositionis 42dæ Lib. III. *Conicorum Apollonii* nostri, quâ demonstratur, *Si rectæ tres contingant Ellipsin vel Hyperbolam, quarum duæ parallelæ sint & dentur positione; quadratum semidiametri Sectionis his duabus parallelæ æquale esse rectangulo segmentorum inter puncta contactuum & Tangentem tertium interjectorum.* Idemque demonstrationibus propriis Illustrissimus *Newtonus* in *Principiis*, & Cl. *Hirius* in *Conicis* stabiliverunt. Hoc autem posito, si describatur Ellipsis ΓΙΖΩ cujus diameter sit recta ΓΖ, jungens puncta



Γ, Z in rectis positione datis sumpta; in ejusque medio centrum Θ; eidem autem Conjugata diameter sit recta ΙΘΩ ipsi AB, ΔE parallela, quæ possit quadruplum rectanguli dati

seg:

segmentorum auferendorum: dico omnes Tangentes hujus Ellipseos abscindere segmenta ΓΚ, ΖΛ rectangulum æquale dato comprehendentia; si nempe ab eodem latere rectæ ΖΓ sumenda sint, ut in Casu I & III Loci primi, & in primo secundi. Quod si in contrarias partes segmenta auferenda sint, ut in II^{do} primi, & II^{do} & III^{o} secundi; describantur Hyperbolæ oppositæ ΜΖΝ, ΟΓΠ, easdem cum Ellipsi diametros habentes: ac rectæ omnes Curvas illas Hyperbolicas contingentes abscindent etiam segmenta rectangulum æquale rectangulo dato continentia. Quæ omnia ex ipsâ *Apollonii* propositione prædictâ satis patent. Jam fiant ΖΞ, ΖΣ & ΓΡ, ΓΤ æquales semidiametro conjugatæ ΘΙ; ac rectæ ΣΘΤ, ΞΘΡ in infinitum productæ, ut ΥΘΦ, ΧΘΨ, erunt oppositarum Hyperbolarum Asymptoti. Datis autem Asymptotis & punctis Γ, Ζ paratissima est Curvarum descriptio.

Hinc manifestum est problema quaternas habere solutiones, si fuerit punctum datum Η extra ambitum Ellipseos vel oppositarum Hyperbolarum. Si vero punctum Η reperiatur intra earundem Curvarum partes concavas, non nisi binæ duci possunt Tangentes ad Ellipsin, si fuerit intra ambitum Hyperbolarum; vel ad Hyperbolas, si fuerit intra Ellipsin: adeoque duobus tantum modis solvetur problema. Quod si punctum Η tangat alteram harum Curvarum, trium omnino solutionum capax est propositum: modo nempe singulari, rectâ Curvam tangente in puncto dato Η; ac dupliciter per Tangentes alterius Curvæ.

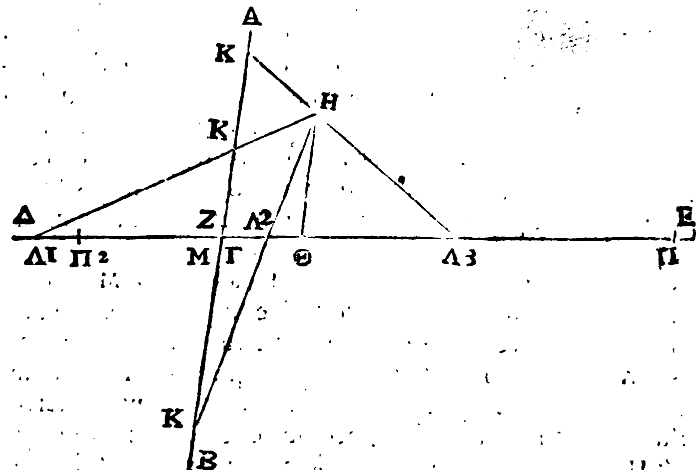
Cave tamen ne credas Curvarum Conicarum descriptionem præcipi ad plani problematis effectionem, sed tantum ad uberiorem rei explicationem. Vicissim autem Tangentibus ad Curvas Conicas de punctis datis ducendis, etiamsi Curvæ nondum descriptæ sint, converso argumento via sternitur; uti posthac demostrabitur.

LOCUS TERTIUS.

Intersecent jam se mutuo rectæ duæ positione datæ, ut ΑΒ, ΔΕ, in puncto Μ, ac concipiatur utrumque punctum Γ & Ζ coalescere in commune punctum occursus Μ: Oportet ducere, per punctum datum Η, rectam quæ auferat segmenta ΜΚ, ΜΛ rectangulum æquale rectangulo dato comprehendentia.

dentia. Hoc autem fieri potest juxta tres Casus; vel enim abscissum erit rectangulum ex ipsis ΛM, MΔ; vel ex ipsis BM, ME; vel tertio ab ipsis ΛM, ME.

Age rectam HΘ per punctum H ipsi AB parallelam; ac punctum Θ atque ipsæ HΘ, ΘM dabuntur tam magnitudine quam positione. Applicetur ad rectam ΘH rectangulum datum; & latitudo inde orta data erit: sitque ea recta MΠ utrinque ponenda. Quoniam vero rectangulum HΘ in MΠ æquale est rectangulo MK in MΛ, erit HΘ ad MK, hoc est ΘΛ ad ΛM, ut ΛM ad MΠ: quare, dividendo in primo & tertio Casu, & componendo in secundo, ΘM erit ad MΛ sicut ΛΠ ad ΠM; adeoque rectangulum ΘM in MΠ æquale erit rectangulo MΛ in ΛΠ. Sed rectangulum ΘM in MΠ datum est, ob utramque rectam datam; datum est igitur rect-



angulum MΛ in ΛΠ, applicandum ad rectam datam MΠ, excedens quadrato in primo & secundo Casu, deficiens vero quadrato in tertio, qui proinde Diorismum habet. Rectangulum autem minimum aufertur, quoties rectangulum ΘM in MΠ æquale est quadrato dimidii ipsius MΠ, sive cum MΠ æquale est quater ipsi MΘ. Cumq; MΠ in HΘ semper æquale sit rectangulo dato, rectangulum illud minimum æquale erit quater rectangulo HΘ in ΘM.

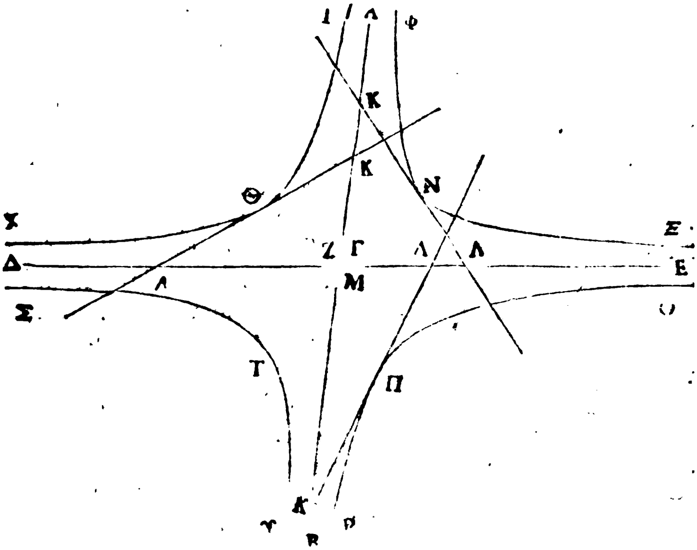
Componetur autem problema, si manente rectâ parallelâ HΘ, eidem applicetur rectangulum auferendum Ξ; ac fiat MΠ, ponenda ab utrâque parte puncti M, æqualis latitudini quæ resultat. Deinde ipsi MΠ applicetur rectangulum datum MΠ in ΘM excedens quadrato, in Casu primo & secundo; deficiens vero in tertio: & sint puncta applicationis Λ_2, Λ_3. Ducantur rectæ HKΛ. Dico illas satisfacere problemati. Quoniam enim rectangulum MΛ in ΛΠ æquale est rectangulo ΘM in MΠ, erit ΘM ad MΛ ut ΠΛ ad MΠ; ac componendo in primo & secundo Casu, vel dividendo in tertio, erit ΘΛ ad ΛM sicut ΛM ad MΠ. Sed ΘΛ est ad ΛM ut HΘ ad KM, quare HΘ est ad KM sicut ΛM ad MΠ. Est igitur rectangulum HΘ in MΠ æquale rectangulo KM in MΛ. Sed rectangulum ΘH in MΠ æquale est rectangulo dato Ξ, adeoque & rectangulum KM in MΛ; rectæ igitur HKΛ solvunt problema. Q. E. D.

In Casu autem tertio demonstratum est applicationem fieri non posse, si rectangulum datum minus fuerit quater rectangulo HΘ in ΘM. Tunc enim non nisi duæ rectæ duci possunt, juxta modos primum & secundum, punctis Λ æqualiter à punctis M & Π utrinque distantibus. Si æquale fuerit rectangulum datum Ξ quatuor rectangulis HΘ in ΘM, construetur modo singulari juxta tertium. Si vero majus fuerit eo, tum fiet dupliciter juxta modum tertium, ita ut omnino quatuor habeat solutiones.

Observandum autem est rectam MΠ à puncto M in contrarias partes puncti Θ collocari debere, in primo & secundo Casu; in tertio vero in easdem, sive versus Θ: quia in omnibus ΘΛ est ad ΛM ut ΛM ad MΠ, atque adeo si punctum Θ ex hypothesi sit intermedium inter Λ & M, ut in tertio Casu, etiam punctum Λ intermedium esse debet inter puncta M & Π. Recta itaque MΠ ad easdem partes puncti Λ, hoc est puncti Θ, ponenda est; & rectangulum applicandum deficiens quadrato. Quod si punctum Θ externum fuerit, externum erit & Λ; adeoque in contrarias partes puncti Θ ponenda recta MΠ, cui semper applicandum est rectangulum excedens quadrato, ut punctum Λ externum esse possit.

Tangent autem rectæ omnes datum rectangulum abscindentes binas oppositas Hyperbolas conjugatas, quorum commune centrum est punctum M, in occursu rectarum positione datarum: ipsæ vero rectæ ΛB, ΔE earundem communes Asymptoti sunt. Jam si fiant MK, MΛ æquales lateribus

ribus datis rectanguli auferendi, ac jungantur rectæ quævis Κ Λ, quæ bisecentur in punctis Θ, Ν, Π &c. erunt puncta illa Θ, Ν, Π puncta contactuum ipsarum Κ Λ cum Curvis Hyperbolicis describendis. Datis autem Asymptotis & puncto quovis, facili negotio ipsæ Curvæ describi possunt; ut jam dictum est. Sunt autem omnia rectangula segmento-



rum ex Asymptotis, ductâ Tangente quâvis abscissorum, ut Μ Κ in Μ Λ, inter se æqualia: per Prop. 43^am Lib. III. *Conicorum Apollonii.* Quare inventis punctis Θ, Ν, Π describantur Hyperbola Χ Θ Ι, Φ Ν Ξ, Ο Π Ρ, Σ Τ Υ: harum omnium Tangentes quælibet auferent rectangula data æqualia ab Asymptotis Α Β, Δ Ε; quod erat faciendum. Hinc etiam manifestum est punctum datum Η, unde ducendæ sunt rectæ Η Λ Κ, intra ambitus Hyperbolarum situm esse, quoties duobus tantum modis componi possit problema; si vero tribus fiat, Curvas ipsas tangere: inter Curvas autem & Asymptotos reperiri, quoties quatuor rectis per punctum Η ducendis idem præstari possit.

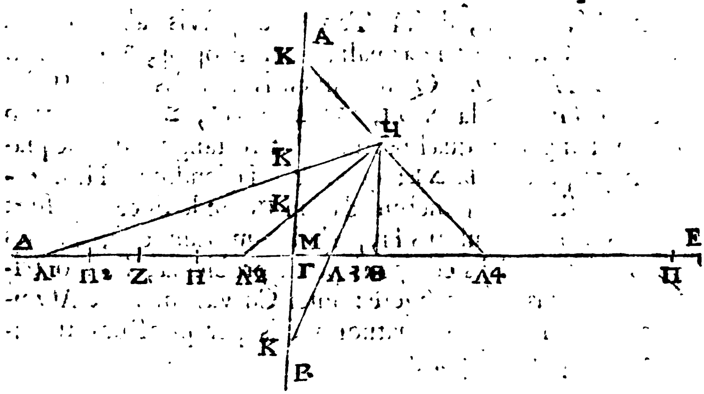
LOCUS QUARTUS.

Occurrant invicem rectæ Α Β, Δ Ε in puncto Μ, ac in rectâ Α Β sumatur punctum Μ vel Γ; in ipsâ vero Δ Ε punctum Ζ.

T 2 Cadat

Cadat autem punctum datum H ab altera parte ipsius AB: ac educendæ sint rectæ è puncto H quæ auferant segmenta datum rectangulum continentia. Patet autem hoc fieri posse juxta quatuor modos, recisis segmentis vel ex ipsis AM, ZΔ, vel ex AM, ZM, vel ex BM, ZE, vel denique ex ipsis AM, ZE.

Horum omnium eadem plane est resolutio. Per punctum H ipsi AB parallela ducatur recta HΘ, rectæ ΔE occurrens in puncto Θ; unde punctum Θ datum erit, atque adeo ipsæ rectæ ΘH, ΘM dabuntur magnitudine & positione. Applicetur ad rectam ΘH rectangulum datum Ξ; ac data erit latitudo inde orta, ut recta ZΠ. Erit igitur rectangulum ΘH in ZΠ æquale rectangulo dato Ξ, hoc est, rectangulo *MK in* ZΛ; adeoque ΘH erit ad MK sicut ΛZ ad ZΠ. Sed ΘH est ad MK sicut ΛΘ ad ΛM: quare ΘΛ est ad ΛM sicut ΛZ ad ZΠ. Componendo autem in Casu tertio, vel dividendo in cæteris, erit ΘM ad MΛ sicut ΛΠ ad ΠZ; rectangulum itaque ΘM in ΠZ æquale erit rectangulo MΛ in ΛΠ. Datum autem est rectangulum ΘM in ΠZ, ob datam utramque rectam; datur itaque rectangulum MΛ in ΛΠ, applicandum ad rectam datam MΠ excedens quadrato in primo ac tertio Casu, vel deficiens quadrato in secundo & quarto, ut habeantur puncta omnia Λ. Quoniam vero in omni Casu ΘΛ est ad ΛM sicut ΛZ ad ZΠ; ubicunque ex hypothesi punctum Λ intermedium esse debet inter Θ & M, punctum Z



quoque intermedium erit inter Λ & Π; ac proinde recta ZΠ ad contrarias partes à puncto Λ situm habebit. Si vero Λ externum fuerit, externum erit & Z; unde ad easdem partes

sive

sive versus punctum Λ semper collocanda est recta data ZΠ. Quod si juxta hanc regulam ponatur recta ZΠ, ad easdem partes ad quas jacet punctum H, respectu rectæ AB; applicandum erit rectangulum ΘM in ZΠ ad rectam MΠ deficiens quadrato; at si in contrarias partes ponenda sit recta ZΠ, rectangulum illud applicandum erit ad MΠ2 excedens quadrato. Atque hæc omnia obtinent in Locis sexto & septimo sequentibus.

Hinc manifestum est, in Casu primo ac tertio, applicandum esse rectangulum ΘM in ZΠ ad rectam MΠ2 excedens quadrato; ut habeantur puncta Λ1, Λ3: adeoque problemata illa semper possibilia esse, rectasque puncto Z propiores semper spatia minora auferre remotioribus. Constat etiam MΛ in tertio semper æquari ipsi Π2Λ in primo. Punctum autem Λ in tertio semper cadet inter puncta Θ & M, quia rectangulum ΠΛ in ΛM, hoc est ΘM in ΠZ, necessario minus est rectangulo ΘM in ΘΠ2.

Casus autem secundus & quartus requirunt, ut applicetur rectangulum ΘM in ZΠ ad rectam MΠ deficiens quadrato; ac proinde Casus hi Dioristici sunt. Non enim applicari potest ad rectam ΠM rectangulum quod majus fuerit quadrato ex dimidio ipsius ΠM; quo in Casu problema impossibile erit. Fiet autem modo singulari, si reperiatur punctum Λ in medio ipsius ΠM; sive si fuerit rectangulum ΘM in ΠZ æquale quadrato dimidii ipsius ΠM, hoc est, quadrato ipsius ΛM. Erit igitur ΘM ad MΛ sicut MΛ sive ΛΠ ad ΠZ; adeoque ΘM erit ad ΘΛ sicut MΛ ad ΛZ. Permutando autem ΘM erit ad MΛ sicut ΘΛ ad ΛZ. Quocirca ΘM erit ad ΘΛ sicut ΘΛ ad ΘZ; unde recta ΘΛ media proportionalis erit inter datas ΘM, ΘZ, adeoque data est.

Capiatur itaque media proportionalis inter ΘM, ΘZ, quæ sit ΘΛ: ac ponatur utrinque in recta ΔE, ut ΘΛ2, ΘΛ4. Ac jungatur utraque HKΛ. Manifestum est rectam HKΛ2, in secundo Casu, abscindere spatium maximum MK in ΛZ; alteram vero KHΛ4 in quarto, auferre spatium minimum. Etenim in secundo, accedente rectâ HΛ ad puncta Z vel M, minui potest recta MK vel ZΛ in nihilum; earumque alterâ evanescente evanescit etiam earundem rectangulum MK in ZΛ: quocirca in hoc casu recta HΛ2, bisecans ipsam MΠ, aufert rectangulum maximum. In quarto autem Casu, accedente

rectâ

rectâ K Λ ad parallelismum vel rectæ A B, vel ipsius Δ E, augetur rectangulum in infinitum; adeoque recta K Λ 4, per medium ipsius M Π ducta, aufert rectangulum minimum. Facile esset hæc ad modum Diorismῶn *Apollonii* demonstrare; sed, brevitati consulens, in exercitium studiosi Analystæ relinquenda potius censeo.

Componetur autem problema hoc modo. Manentibus descriptis, ductâque rectâ parallelâ Θ H, capiatur media proportionalis inter Θ M, Θ Z, ut Θ Λ; & utrinque ponatur recta Θ Λ, ad Λ 2 & Λ 4. Ducantur rectæ H Λ 2, K H Λ 4; & hæ auferent extrema rectangula M K in Λ Z; maximum quidem recta H Λ 2, minimum vero K Λ 4. Si igitur rectangulum datum Ξ majus fuerit maximo vel minus minimo, non componi potest problema juxta hos Casus. Si vero minus fuerit maximo, fiet dupliciter juxta secundum; si majus minimo dupliciter juxta quartum. Si æquale fuerit maximo, sola recta H Λ 2 satisfacit problemati, quod impossibile erit modo quarto. Si æquale fuerit minimo, sola recta K Λ 4 solvit problema juxta secundum impossibile. Modo autem primo & tertio rectangula quævis absque limitibus abscindi possunt. Fiat igitur ut rectangulum Z Π in Θ H æquale sit rectangulo dato Ξ, & utrinque ponatur recta Z Π super rectam Δ E. Dein ipsi M Π 2, utrisque Z Π, M Z simul sumptis æquali, utrinque applicetur rectangulum Θ M in Z Π excedens quadrato: sint illa rectangula M Λ 1 in Π 2 Λ 1 & M Λ 3 in Π 2 Λ 3. Si vero rectangulum Ξ nec majus fuerit maximo, nec minus minimo, applicari potest rectangulum Θ M in Π Z deficiens quadrato ad rectam M Π, differentiam ipsarum Z Π, Z M: Factâ autem utrinque applicatione, habebuntur puncta Λ 2 vel Λ 4, quæ in altero tantum horum Casuum, vel bina erunt vel unum tantum, juxta limitationes præcedentes. Minimum enim in quarto, multo majus est maximo in secundo. Inventis autem punctis Λ, ducantur & producantur rectæ H Λ: dico omnes illas abscindere rectangula M K in Z Λ rectangulo dato Ξ æqualia.

In omni autem Casu eadem est demonstratio. Quoniam enim rectangulum Θ M in Π Z æquale est rectangulo M Λ in Λ Π; erit Θ M ad M Λ sicut Λ Π ad Π Z; adeoque Θ Λ ad Λ M, hoc est Θ H ad K M, erit ut Λ Z ad Z Π; quocirca rectangulum Θ H in Z Π, hoc est rectangulum Ξ, per Constructionem, æquale

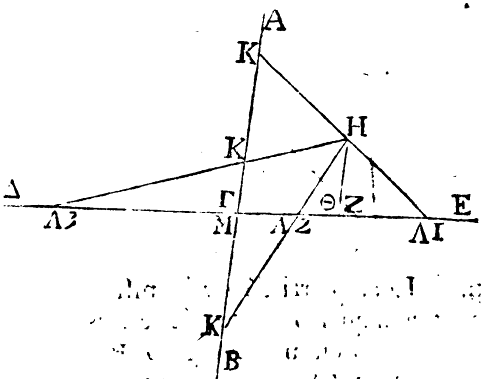
est

est rectangulo KM in ΛZ. Rectæ igitur omnes KHΛ ad hunc modum inventæ solvunt problema. Q. E. D.

Rectangulum autem maximum & minimum eodem argumento determinantur, quo limites rationum habentur in *Sectione Rationis*, ad Locum sextum & septimum Libri primi. Maximum enim in Casu secundo æquale est rectangulo ΘH in excessum quo ipsæ ΘM, ΘZ simul sumptæ superant illam quæ potest quater rectangulum ΘM in ΘZ. Minimum vero in quarto æquale est rectangulo ΘH in rectam compositam ex utrâque ΘM, ΘZ, & illâ quæ potest quater rectangulum ΘM in ΘZ; simul sumptis.

LOCUS QUINTUS.

Occurrat jam recta parallela HΘ rectæ ΔE, in puncto Z coincidente cum puncto Θ. Ducendæ sunt rectæ quæ auferant rectangulum MK in ZΛ æquale rectangulo dato Ξ. Hoc autem fieri potest tribus modis, vel enim abscissa erunt segmenta ex ipsis ΑΜ, ZE, vel è BM, MZ, vel tertio ex ipsis ΑΜ, ZΔ. Una autem est Analysis omnium, eadem & facillima Compositio. Quoniam enim ZH est ad ZΛ ut MK ad ΛM, ob similia triangula, rectangulum ZH in ΛM æquale erit rectangulo ZΛ in MK. Datum autem est rectangulum ZΛ in MK, adeoque datur rectangulum ZH in ΛM. Datur vero recta ZH, adeoque & ΛM data est; ac dato puncto M punctum Λ quoq; datur: quare & rectæ HKΛ positione dantur.



Componetur autem problema si applicetur rectangulum datum Ξ ad rectam parallelam HZ vel HΘ; & latitudo, orta ex applicatione, ΛM, à puncto M utrinque ponatur ad Λ; dein ducantur rectæ duæ HΛ. Dico utramque problemati satisfacere. Ob similia enim triangula ZΛ est ad HZ sicut ΛM ad MK, adeoque rectangulum HZ in ΛM æquale est rectangulo

ZΛ

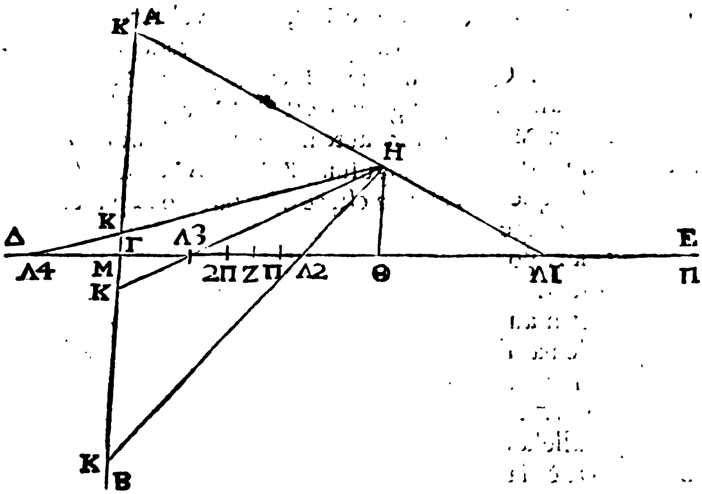
ZΛ in MK. Sed HZ in ΛM factum est ipsi Z æquale : erit igitur rectangulum ZΛ in MK rectangulo Z æquale. Q. E. D.

Abscindi autem nequit modo primo rectangulum quod minus sit rectangulo HZ in ZM; nec modo secundo quod majus fuerit eo. At si æquale fuerit rectangulo HZ in ZM, neutro modo fieri potest, coincidente recta KΛ cum parallela HZ, nec unquam ipsi AB occurrente. Problema autem possibile est in quovis rectangulo juxta Casum tertium.

LOCUS SEXTUS.

Cadat jam punctum Z, in recta ΔE sumptum, intra parallelas datas AB, HΘ. Ac manifestum est rectas duci posse quæ auferant rectangulum datum, sive MK in ZΛ, juxta quatuor modos: vel enim abscissa erunt segmenta ex ipsis ZE, AM; vel ex ZΘ, BM; vel ex ZM, MB; vel quarto ex ipsis ZΔ, AM.

Horum omnium Resolutio in nihilo fere differre invenie-



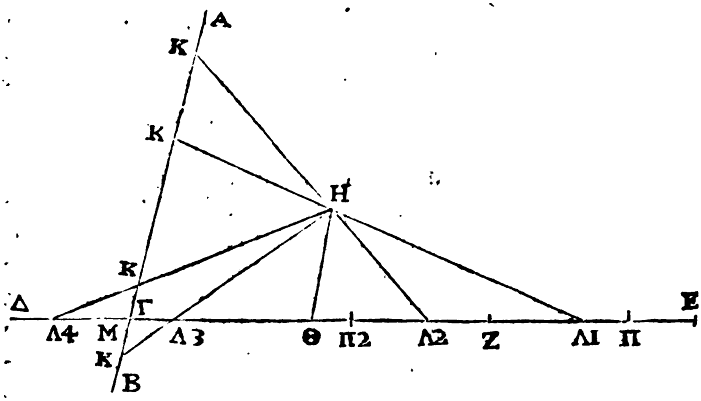
tur à Loci quarti Analysi; nisi quod hîc Casus primus coincidit cum quarto quarti, & tertius hujus cum secundo quarti &c. Facto enim rectangulo HΘ in ZΠ æquali rectangulo dato MK in ZΛ, erit in omni Casu ΘH ad MK, hoc est ΘΛ ad ΛM sicut ΛZ ad ZΠ; adeoque dividendo in primo & quarto Casu, vel componendo in secundo ac tertio ΘM erit ad MΛ ut ΛΠ ad ΠZ: rectangulum igitur ΘM in ΠZ æquale erit rectangulo ΜΛ in ΛΠ. Dato autem rectangulo ΘΜ in ΠΖ, datur quoque rectangulum ΜΛ in ΛΠ, ad rectam datam ΜΠ applicandum, ut habeantur puncta Λ. In Compositione itaque, applicato rectangulo auferendo Ξ ad rectam ΘΗ, sit latitudo inde orta recta ΖΠ; quæ ponatur utrinque à puncto Ζ versus Θ & Μ: & ad ΜΠ2 quæ differentia sit ipsarum ΖΜ, ΖΠ, applicetur rectangulum ΘΜ in ΖΠ excedens quadrato, in secundo & quarto Casu. In secundo autem cadet punctum Λ2 inter Θ & Ζ, quia rectangulum ΜΛ in ΛΠ2, sive ΘΜ in ΠΖ, minus est rectangulo ΘΜ in ΠΘ, ob ΠΖ minorem quam ΠΘ. Idemque majus est rectangulo ΜΖ in Π2Ζ, quia ΘΜ major est quam ΠΖ; adeoque punctum Λ2 nec ultra Θ, nec citra Ζ cadere potest. In primo autem & tertio Casu, applicetur dictum rectangulum deficiens quadrato ad rectam ΜΠ, quæ sit summa ipsarum ΜΖ, ΖΠ. Ac patet punctum Λ1 cadere ultra punctum Θ, quia rectangulum ΘΜ in ΠΖ majus est rectangulo ΘΜ in ΘΠ. In tertio verò cadet punctum Λ3 inter puncta Ζ & Μ, quia ΖΠ in ΘΜ majus est rectangulo ΖΠ in ΜΖ. Pari autem argumento ac in Loco quarto constat, Casum secundum ac quartum hujus semper possibiles esse, & segmenta rectangulum quodvis continentia auferri posse: primum autem & tertium determinationes habere; ac rectangulum extremum in primo minimum esse, in tertio maximum. Denique in his etiam rectangulum minimum in primo æquari rectangulo ipsius ΘΗ in rectam compositam ex utrâque ΘΜ, ΘΖ & illâ quæ potest quater rectangulum ΘΜ in ΘΖ simul sumptis. In tertio autem rectangulum maximum æquale esse rectangulo ΘΗ in excessum, quo utraque ΘΜ, ΘΖ superant illam quæ potest quater rectangulum ΘΜ in ΘΖ. Hæc omnia consequuntur ex eo quod puncta Λ1 & Λ3, per quæ rectæ ΗΛ auferentes extrema rectangula ducuntur, bisecant rectas ΜΠ: unde fit ut ΘΛ1, ipsi ΘΛ3 æqualis, media proportionalis sit inter ipsas ΘΖ, ΘΜ. Quocirca si rectangulum Ξ majus fuerit maximo ac minus minimo, non nisi modo secundo & quarto componi potest problema. Sin minus fuerit maximo vel majus minimo, quadrupliciter efficietur. At si æquale fuerit maximo, fiet modo singulari, juxta tertium: quemadmodum juxta primum, si æquale fuerit minimo. Impossibile autem est idem rectangulum juxta utrumque modum primum &

tertium auferri, quia minimum in primo multo majus est maximo in tertio. Quoniam vero in omni Casu fecimus rectangulum ΘM in ΠZ æquale rectangulo MΛ in ΛΠ; erit ΘM ad MΛ ut ΛΠ ad ΠZ, ac dividendo vel componendo ΘΛ erit ad ΛM ut ΛZ ad ZΠ. Sed ΘΛ est ad ΛM sicut ΘH ad KM; quare ΘH est ad KM ut ΛZ ad ZΠ: atque adeo rectangulum ΘH in ZΠ, hoc est rectangulum datum Z, æquale est rectangulo KM in ΛZ. Rectæ igitur omnes HKΛ ad hunc modum inventæ solvunt problema.

LOCUS SEPTIMUS.

Cadat jam punctum Z, in rectâ ΔE sumptum, *ultra punctum* Θ; ac ducendæ sint rectæ HKΛ per datum punctum H, quæ auferant rectangulum ZΛ in KM æquale dato. Patet hoc fieri posse quatuor modis; ablatis segmentis, vel ex ipsis ΛM, ZE; vel ex ΛM, ZΘ; vel ex BM, ZM; vel denique ex ipsis ΛM, ZΔ.

Quoniam rectangulum MK in ZΛ datum est, eidem æquale fiat rectangulum ΘH in ZΠ; unde ob datam ΘH, ipsa quoque ZΠ data erit: Est itaque ΘH ad KM, hoc est ΘΛ ad ΛM, ut ΛZ ad ZΠ. Dividendo autem in Cas. I, II, & IV, vel componendo in tertio; ΘM erit ad MΛ ut ΛΠ ad ΠZ; atque adeo rectangulum ΘM in ΠZ æquale erit rectan-



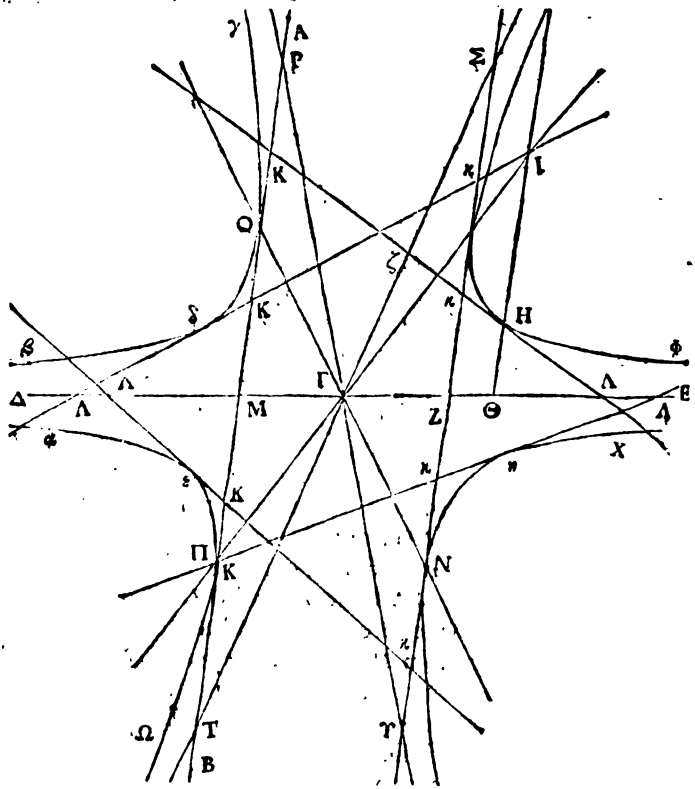
gulo MΛ in ΛΠ, applicandum ad rectam datam MΠ. Dantur itaque per 58^{um} & 59^{um} *Dat. Euclid.* puncta applicationum Λ; adeoque rectæ ipsæ HKΛ positione datæ sunt.

Mani-

Manifestum autem est applicandum esse rectangulum illud deficiens quadrato in Casu primo & tertio, excedens vero quadrato in secundo & quarto. Hi autem omnes Casus possibiles sunt, neque limitibus obnoxii, ob easdem causas propter quas Locus quartus in *Sectione Rationis* diorismum non habet. Est enim rectangulum M Λ1 in Π Λ1, hoc est Θ M in Z Π, minus rectangulo quovis M Z in Z Π; quia M Z majus est quam Θ M: adeoque cadet punctum Λ1 inter Z & Π. Similiter, quia Θ M in Z Π minus est rectangulo M Θ in Θ Π, cadet semper punctum Λ3 inter puncta M, Θ, quæcunque fuerit magnitudo dati rectanguli. Cadet etiam Λ2 semper inter puncta Z & Θ, quia rectangulum Θ M in Π Z minus est rectangulo M Z in Z Π2; uti majus est rectangulo M Θ in Θ Π2.

Componetur itaque problema eodem modo quo præcedentia; applicato enim rectangulo dato Ξ ad rectam parallelam Θ H, sit Latitudo inde resultans Z Π; quæ utrinque ponatur à puncto Z, versus E & M, ad Π & Π2: dein applicetur utrinque rectangulum Θ M in Z Π ad rectam M Π deficiens quadrato, & erunt puncta applicationum Λ1, Λ3. Applicetur etiam ad M Π2 idem rectangulum Θ M in Z Π excedens quadrato; & habebuntur puncta applicationum Λ2, Λ4. Ducantur quatuor rectæ H Λ, si opus est ad K producendæ; dico omnes has problema solvere, hoc est, auferre rectangula Z Λ in M K æqualia rectangulo Ξ. Demonstratio autem eadem est omnino cum præcedentibus. Nam cum, per constructionem, rectangulum M Λ in Λ Π æquale sit rectangulo Θ M in Z Π, erit Θ M ad M Λ sicut Λ Π ad Π Z: componendo autem vel dividendo Θ Λ erit ad M Λ sicut Λ Z ad Π Z. Sed Θ Λ est ad M Λ sicut H Θ ad K M; quare H Θ est ad K M ut Λ Z ad Z Π; atque adeo rectangulum H Θ in Z Π æquale erit rectangulo K M in Λ Z. Est autem rectangulum H Θ in Z Π æquale rectangulo Ξ. Quocirca rectangulum K M in Λ Z æquale est rectangulo dato Ξ. Q. E. D.

Ut autem in Loco tertio, rectæ omnes datum spatium abscindentes, binas oppositas & conjugatas Hyperbolas contingunt; sic etiam in his quatuor ultimis Locis, rectæ omnes, rectangulum datum M K in Z Λ auferentes, tangunt binas Hyperbolas oppositas, quodammodo etiam conjugatas, nec multo majori opere describendas: est enim recta Δ M Z E communis Asymptotos. Ipsi A B parallela per punctum Z ducatur recta ΣZΥ; dein ad rectam datam ZM applicetur rectangulum datum MK in ZΛ, sitque latitudo ZΞ, ZN; MΠ, MO, utrinque à punctis Z & M ponenda. Jungantur ipsæ ΞΠ, NO, sese intersecantes in puncto Γ; quod (ob parallelas & æquales ZΞ, MΠ; ZN, MO) reperietur in medio ipsius ZM; eritque punctum Γ utrarumque oppositarum Hyperbolarum commune centrum: rectæ vero ΞΓΠ, NΓO earundem erunt diametri transversæ. Utrisque autem conjugata semidiameter



eadem erit; nempe recta ZΞ vel MO. His si æquales fiant ΞΣ, OP, & ab altera parte NΥ, ΠΤ; erunt rectæ ΣΓΤ, PΓΥ, Hyperbolarum Asymptoti; puncta quoque N, Ξ, O, Π tangent ipsas Hyperbolas describendas. Dantur itaque & Asymptoti, & in unaquâque Hyperbolâ punctum unum; unde facili negotio puncta quotlibet invenire licet, locumque quæsitum

situm exhibere. Descriptis autem oppositis Hyperbolis Η Ξ Φ, Ω Π α; ac Χ Ν Ψ, β Ο γ: dico rectas omnes easdem aliquo modo contingentes abscindere rectangula Μ Κ in Ζ Λ æqualia spatio dato, sive rectangulo Μ Ζ in Ζ Ξ. Quoniam enim rectæ Σ Υ, Α Β parallelæ sunt, continguntque Hyperbolas oppositas in punctis Ξ, Π; ac ducitur Tangens alia ut Κ κ Η Λ, contingens Hyperbolam Η Ξ Φ in puncto Η, occurrensque ipsi Ζ Ξ in κ: erit per 42dam III. *Conic. Apollonii*, rectangulum κ Ξ in Π Κ æquale quadrato ex Ζ Ξ, hoc est rectangulo Ζ Ξ in Π Μ. Hinc κ Ξ erit ad Ξ Ζ ut Μ Π ad Π Κ; adeoque dividendo κ Ζ erit ad Ζ Ξ ut Μ Κ ad Κ Π. Permutando autem κ Ζ erit ad Μ Κ, hoc est Ζ Λ ad Λ Μ, sicut Ζ Ξ vel Μ Π ad Π Κ; quare per conversionem rationis Ζ Λ erit ad Ζ Μ ut Μ Π ad Μ Κ. Erit igitur rectangulum Ζ Μ in Μ Π sive Ζ Ξ æquale rectangulo Ζ Λ in Μ Κ. Sed fecimus rectangulum Ζ Μ in Μ Π æquale spatio dato; quapropter rectæ omnes Κ κ Η Λ abscindunt spatia Μ Κ in Ζ Λ æqualia dato. His autem æqualia sunt rectangula omnia Ζ κ in Μ Λ, quia Ζ Λ est ad κ Ζ ut Μ Λ ad Κ Μ. Et argumento omnino simili idem demonstrabitur in Tangente quâvis κ Κ δ Λ, Λ ε Κ κ, Κ κ κ Λ, quomodocunque ductâ. Locum itaque exhibuimus quæsitum. Puncta autem contactûs habebuntur dividendo bifariam partes Tangentium inter Asymptotos interceptas, ut ζ Λ in puncto Η: vel capiendo Λ Θ ad Λ Ζ ut Μ Λ ad Λ Ζ + Μ Λ; unde consequens est Λ Θ mediam esse proportionalem inter Θ Ζ, Θ Μ.

Manifestum autem est puncti Η situm esse in spatio infinito Α Δ Β, si fuerit problema juxta Casus Loci quarti; sive si fuerit punctum Μ intermedium inter Ζ & Θ. In spatio autem infinito Σ Ε Υ collocari, si fuerit Ζ inter Θ & Μ; ut in Loco sexto. Intra vero parallelas datas Α Β, Σ Υ reperiri, in omni casu Loci septimi. In ipsâ vero rectâ Σ Ζ Υ positum esse punctum Η, si fuerit juxta Locum quintum. Præterea si punctum Η tangat aliquam ex his Curvis, patet tribus rectis solvi posse problema. Si fuerit Η intra Curvarum ambitus, duabus tantum. Quod si exterius fuerit, vel inter Asymptotos & Hyperbolas, vel intra angulos Ρ Γ Σ, Τ Γ Υ, duci possunt quatuor omnino rectæ per idem punctum datum, rectangulum datum abscindentes.

APOL-

APOLLONII PERGÆI

De Sectione Spatii,

SIVE

ΠΕΡΙ ΧΩΡΙΟΥ ΑΠΟΤΟΜΗΣ,

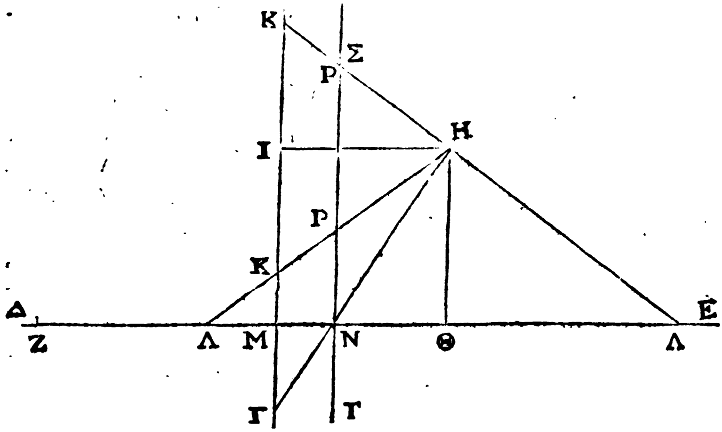
Liber Secundus Restitutus.

APOLLONII quidem liber secundus de Sectione spatii, teste *Pappo*, in sexaginta Casus divisus est (non septem, ut perperam habent MSS *Saviliani* & *Commandini* traductio; errore orto ex eo quod in Græcis Codicibus scribatur ζ pro ξ). Cum enim *Sectio Rationis* in Lib. II. sexaginta tres habeat Casus; ac Locus septimus in *Sectione Spatii* omissus sit ὡς φανερὸς, tribus constans Casibus: manifestum est sexaginta Casus habuisse librum hunc secundum. Qui vero perlegerit hos sexaginta tres Casus in *Sectione Rationis*, illos omnes ad tres formulas facile reduci deprehendet: idemque etiam in *Sectione Spatii* fieri posse. Vel enim puncta data Z vel Γ reperientur in rectis parallelis ΗΘ, ΗΙ, coincidentia cum punctis Θ vel Ι; vel erunt in eâdem rectâ data tria puncta Η, Γ, Ζ: vel his conditionibus liber erit situs utriusque puncti Γ & Ζ in rectis positione datis ΑΒ, ΔΕ.

CAPUT I.

Imprimis autem capiatur ad libitum in recta ΑΒ punctum Γ, in ipsâ vero ΔΕ punctum Ζ; ita ut nec Ζ reperiatur in concursu parallelæ ΗΘ cum rectâ ΔΕ, nec Γ in concursu ipsius ΑΒ cum parallelâ ΗΙ: neque sint tria puncta Η, Γ, Ζ in eâdem rectâ. His positis una eademque erit in unoquoque Casu & Analysis & Synthesis. Jungatur enim recta ΗΓ, ac, si opus sit, producatur ea ad occursum cum rectâ ΔΕ in Ν. Datum est igitur punctum Ν, ac ratio ipsius ΗΓ ad ΗΝ quoque datur. Per Ν ipsi ΑΒ parallela ducatur recta ΣΝΤ, quæ proinde

proinde positione data est. Ob similia vero triangula, ΓK est ad NP sicut ΓH ad HN; adeoque ratio ΓK ad NP datur; hoc est ratio rectanguli ΓK in ZΛ ad rectangulum NP in ZΛ. Sed rectangulum ΓK in ZΛ datur; quare rectangulum NP in ZΛ etiam datur. Jam dantur positione rectæ duæ ΔE, ΣT;



& in ΔE sumitur punctum Z, in ipsâ vero ΣT punctum N, & oportet ducere per punctum H rectam HPΛ, quæ auferat rectangulum ZΛ in NP datum. Dantur autem positione rectæ omnes HPΛ, per Casus Loci IV[ti], si fuerit punctum N intermedium inter Z & Θ: vel per Casus Loci VI[ti], si fuerit Z inter Θ & N: vel denique per Casus omnes Loci septimi si fuerit Θ inter puncta N & Z.

Componentur autem omnia hujusmodi problemata si producatur recta HΓ ad N, ac ductâ rectâ ΣNT ipsi AB parallela, fiat ut HΓ ad HN ita rectangulum auferendum Ξ ad aliud O. Dantur autem rectæ duæ ΔE, NΣ sese intersecantes in puncto N; ac in ΔE sumitur punctum Z, in ipsâ vero ΣNT punctum N. Ducantur igitur per punctum datum H rectæ HPΛ (per casus requisitos è Locis prædictis Lib. I,) quæ auferant segmenta NP, ZΛ rectangula æqualia rectangulo O continentia. Dico easdem rectas abscindere etiam segmenta ΓK & ZΛ quæ comprehendant rectangula æqualia dato Ξ. Quoniam enim ΓK est ad NP sicut HΓ ad HN, erunt etiam rectangula ΓK in ZΛ ad rectangula NP in ZΛ, in eadem ratione. Sed Ξ est ad O etiam in ratione HΓ ad HN: quare invertendo &

2 permu-

permutando, rectangulum O erit ad ΝΡ in ΖΛ, ut rectangulum Ξ ad ΓΚ in ΖΛ. Sed fecimus ΝΡ in ΖΛ æquale rectangulo O; quare etiam rectangula ΓΚ in ΖΛ æqualia sunt rectangulo Ξ. Q. E. D.

Determinantur autem duo Casus, in utroque Loco, ubi Θ non est intermedium inter puncta Ν & Ζ: Ac juxta Diorismos Loci quarti & sexti, manifestum est quod, si capiatur ΘΛ media proportionalis inter ΘΝ, ΘΖ; ac ponatur ea ad utramque partem puncti Θ; dein ducantur rectæ ΗΡΚΛ, ΚΣΗΛ; utraque recta ΗΛ auferet rectangulum extremum: nempe rectangulum ΡΝ in ΖΛ majus, ac ΣΝ in ΖΛ *minus*, quovis alio rectangulo, juxta Casus illos à rectis ΖΘ, ΝΣ, vel ΖΕ, ΝΣ auferendo. Rectangulum autem maximum æquale erit contento sub ΗΘ & excessum quo utræque ΖΘ, ΘΝ simul sumptæ superant illam quæ potest quater rectangulum ΖΘ in ΘΝ. Minimum vero æquale erit contento sub ΗΘ & utrasque ΖΘ, ΘΝ, una cum illâ quæ potest quater rectangulum ΖΘ in ΘΝ simul sumptas; per limitationes Loci IV^ti^ & VI^ti^ Libri primi. Quoniam vero rectangulum ΝΡ in ΖΛ est ad rectangulum ΓΚ in ΖΛ ut ΝΡ ad ΓΚ, hoc est, ut ΗΘ ad ΓΙ, erit rectangulum maximum ΓΚ in ΖΛ æquale rectangulo ΓΙ in $\Theta Z + \Theta N - \sqrt{4 Z\Theta N}$. Pariter erit rectangulum minimum æquale rectangulo ΓΙ in $\Theta Z + \Theta N + \sqrt{4 Z\Theta N}$.

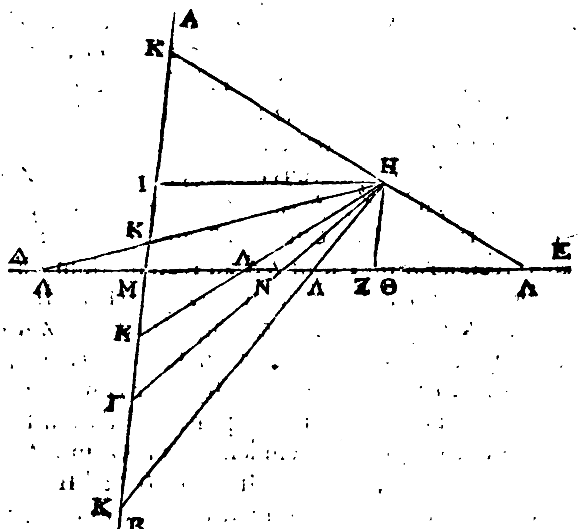
Hinc evidenter consequitur quod, si ductâ rectâ ΗΝΓ, punctum Ν intermedium fuerit inter Θ & Ζ; vel punctum Ζ inter Θ & Ν; non nisi duobus modis componi possit problema, quoties rectangulum datum Ξ majus fuerit maximo vel minus minimo. Si vero æquale fuerit maximo vel minimo, fieri potest juxta tres formas. Quod si minus fuerit rectangulo $\Gamma I \times \Theta Z + \Theta N - \sqrt{4 Z\Theta N}$; vel majus quam $\Gamma I \times \Theta Z + \Theta N + \sqrt{4 Z\Theta N}$; tum quatuor diversis rectis abscindi possunt segmenta ΓΚ, ΖΛ spatium datum comprehendentia; uti etiam in omni Casu ubi punctum Θ intermedium reperitur inter puncta Ζ & Ν. Hi enim reducuntur ad Casus Loci septimi Lib. I. nec opus est ut in his deducendis diutius immoremur. Hæc autem particulatim demonstrata erant in octo Locis (nempe I, III, IV, V, IX, XI, XII, & XIII.) Libri secundi *Apollonii*, in Casus XL subdivisis, ad exemplum Lib. II. de *Sectione Rationis*. Sed Resolutio & Compositio ut & demonstratio in omnibus fere eadem est.

CAPUT

CAPUT II.

Coincidat jam punctum Z cum puncto Θ, ac capiatur ad libitum punctum Γ in recta A B. Si vero puncta H & Γ fuerint ad diversas partes rectæ Δ E, habebimus Casus Loci secundi. Si ad easdem; ac Γ fuerit ultra I versus A, proponuntur Casus Loci septimi. Quod si reperiatur Γ inter puncta M & I, Locus erit octavus *Apollonio*, cui correspondet nonus in *Sectione Rationis*. Singuli autem Loci quaternos habent Casus, quos tamen omnes eadem omnino methodo & resolvere & construere licet.

Ducatur enim recta H K Λ auferens rectangulum Γ K in Z Λ æquale dato. Jungatur H N Γ, occurrens ipsi Δ E in puncto N. Ob similia triangula, erit Z Λ ad Z H ut H I ad I K; atque etiam Z N ad Z H ut H I ad I Γ: erit igitur rectangulum Z Λ in I K æquale rectangulo Z N in I Γ (utrumque enim æquale est rectangulo dato Z H in H I.) Quocirca Λ Z erit ad Z N ut Γ I ad I K; adeoque in omni Casu Z Λ erit ad Λ N ut I Γ ad Γ K. Rectangulum igitur Z Λ in Γ K æquale erit rectangulo Λ N in I Γ. Sed rectangulum Z Λ in Γ K datum est, ergo &



rectangulum Λ N in I Γ. Data autem recta I Γ, ipsa quoque N Λ datur. Cumque punctum N datur, punctum Λ etiam datur; atque adeo recta H K Λ positione datur.

Componentur itaque omnia hujus generis problemata, si ductâ rectâ H N Γ applicetur rectangulum datum Ξ ad rectam Γ I; & à puncto N ponantur utrinque rectæ N Λ æquales latitudini inventæ. Jungantur ambæ H Λ K. Dico utramque satisfacere problemati. Quoniam enim rectangulum I K in Z Λ æquale est rectangulo I Γ in Z N; erit K I ad I Γ ut N Z ad Z Λ; adeoque dividendo vel componendo K Γ erit ad I Γ ut N Λ ad Λ Z. Quapropter rectangulum K Γ in Z Λ æquale erit rectangulo I Γ in N Λ. Hoc autem fecimus rectangulo Ξ æquale; erit igitur rectangulum K Γ in Z Λ æquale rectangulo Ξ. Q. E. D. Etiamsi vero quatuor Casus habeant singuli hi Loci apud *Apollonium*, non nisi duabus rectis rectangulum quodvis datum abscindere licet, utrinque ab ipsa H Γ æqualiter distantibus. Manifestum est autem rectas puncto N propiores abscindere semper minora spatia remotioribus.

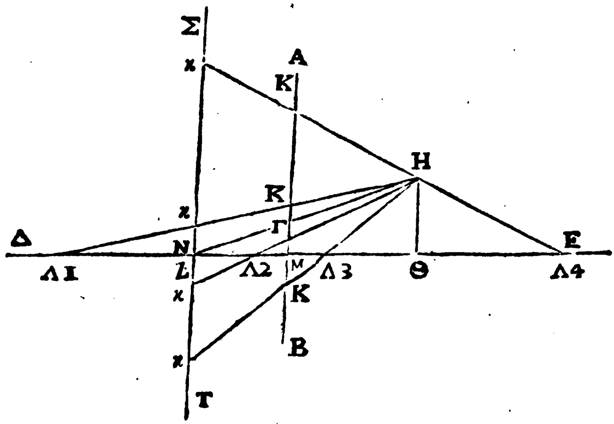
CAPUT III.

Coincidat autem punctum N cum puncto Z; ita ut tria illa H, Z, Γ sint in eâdem rectâ. Jam si intermedium fuerit Z vel Γ, proponuntur Casus Loco sexto in *Sectione Rationis* analogi. Si vero intermedium ponatur H, Locus erit undecimus ejusdem; qui, ob omissum in Lib. II. de *Sectione Spatii* septimum, ab *Apollonio* decimus numerabatur. Uterque autem Locus quatuor Casus habet.

Ducatur recta H K Λ, auferens rectangulum Γ K in Z Λ dato æquale, ac ipsi A B per punctum Z vel N agatur parallela Σ Z T. Junctâ rectâ H Γ Z, erit ut H Γ ad H Z ita Γ K ad Z κ, atque adeo rectangulum Γ K in Z Λ ad rectangulum Z κ in Z Λ, erit in eadem ratione. Datur autem ratio H Γ ad H Z, ut & rectangulum Γ K in Z Λ: quare rectangulum Z κ in Z Λ datur. Ventum est igitur ad Casus Loci tertii Lib. I. Dantur enim rectæ duæ Σ T, Δ E; ac in utrâque sumitur commune punctum Z; oportet autem ducere per punctum datum H rectas H K Λ, spatia dato æqualia abscindentes, ut Z κ in Z Λ.

Componetur autem problema, si fiat ut H Γ ad H Z ita rectangulum datum Ξ ad rectangulum aliud O; ac ducantur rectæ H κ Λ auferentes à rectis Σ T, Δ E rectangula Z κ in Z Λ æqualia rectangulo O. Hoc autem semper fieri potest duobus modis ad formam Casuum primi & secundi Loci III. Casus autem

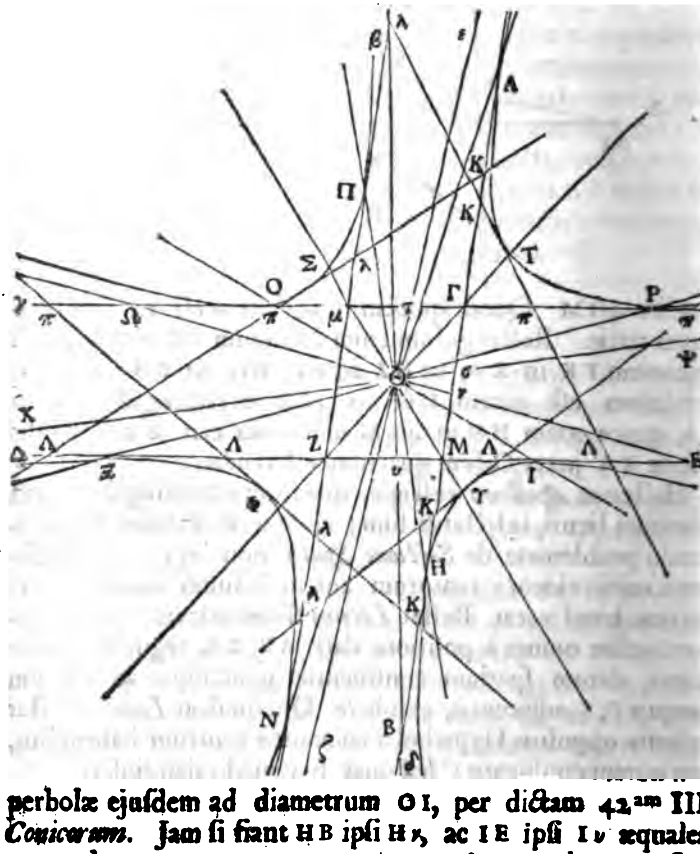
autem tertius ejusdem limitem habet; nec eo modo abscindi potest rectangulum ΓΚ in ΖΛ, quod minus fuerit rectangulo



ΗΘ in 4ΘΜ. Quod quidem manifestum est ex prædicto Loco tertio. Rectangulum enim minimum κΖ in ΖΛ est ad minimum ΓΚ in ΖΛ, ut ΗΖ ad ΗΓ, sive ut ΖΘ ad ΘΜ: minimum est autem ΗΘ in 4ΖΘ è rectangulis Ζκ in ΖΛ, quare etiam ΗΘ in 4ΘΜ minimum erit è rectangulis ΓΚ in ΖΛ juxta Casum quartum auferendis.

Hactenus *Apollonii* vestigia, quantum ex analogiâ horum librorum licuit, insectatus sum; ejusque methodum in resolvendo problemate de *Sectione Spatii* non levi indicio assecutus mihi videor: tantorum autem Casuum minutias percurrere haud vacat. Restat *Locum Geometricum*, quem tangunt rectæ omnes à positione datis ΑΒ, ΔΕ, segmenta auferentes, datum spatium continentia punctisque ad libitum sumptis Γ, Ζ adjacentia, exhibere. Qui quidem *Locus* constat ex binis oppositis Hyperbolis commune centrum habentibus, non autem conjugatis; sed quas hoc modo descripseris.

Per punctum Γ ipsi ΔΕ; ac per Ζ ipsi ΑΒ parallelæ duæ ducantur ut ΡΓμΩ ac ΠμΖΝ; sese intersecantes in μ. Fiant ΖΜ in ΖΠ & ΓΜ in ΓΡ æqualia rectangulo auferendo Ξ: atque ipsæ ΖΠ, ΓΡ dantur. Ponantur ΖΝ, ΓΛ, ΓΗ æquales ipsi ΖΠ, uti & ΓΟ, ΖΞ, ΖΙ ipsi ΓΡ æquales: ac manifestum est quatuor rectas parallelas contingere *Locum* quæsitum in punctis Λ, Η, Π, Ν; Ρ, Ο, Ι, Ξ. Jungantur puncta opposita ΟΙ, ΠΗ, ΛΝ, ΞΡ, & habebimus quatuor diametros occurrentes inter se in communi Hyperbolarum centro Θ, in medio junctæ rectæ ZΓ, quæ proinde erit quoque diameter. Conjugata autem semidiameter ad transversam diametrum HΠ, erit recta Hν, quæ media est proportionalis inter HΓ & HM æqualem ipsi Πμ: recta vero Iυ, media proportionalis inter IZ & IM ipsi Oμ æqualem, erit conjugata semidiameter Hy-



perbolæ ejusdem ad diametrum OI, per dictam 42^{am} III. *Conicorum.* Jam si fiant HB ipsi Hν, ac IE ipsi Iυ æquales, ac producantur utræque EνΘα, BυΘβ, erunt hæ oppositarum Hyperbolarum HTI, OΣΠ Asymptoti duæ. Datis autem Asymptotis & punctis O, Π; H, I, Curvæ ipsæ per 4^{am} II^{di}. *Conicorum* levi negotio describuntur. Similiter, si capiatur Aσ media proportionalis inter AT, AM; ac fiat in MA producta Aε ipsi Aσ æqualis, ac producatur recta εΘζ: erit hæc

hæc una Asymptotorum Oppositarum Curvarum Α Τ Ρ, Ξ Φ Ν, occurrens ipsi Γ μ in puncto π. Fiat etiam Ρ Ψ ipsi Ρ π æqualis, atque erit recta Ψ φ Θ Χ altera earundem Asymptotorum. Dantur quoque puncta Α, Ρ; Ν, Ξ; unde & ipsæ Hyperbolæ dantur positione, per eandem 4^{am} II^{di}.

Descriptis autem utrisque Hyperbolis; dico rectas omnes easdem contingentes abscindere è rectis Α Β, Δ Ε, segmenta Γ Κ & Ζ Λ rectangula æqualia rectangulis Ζ Μ in Ζ Π vel Γ Μ in Γ Ρ continentia; hoc est rectangulo Ξ æqualia. Occurrant enim Tangentes rectæ parallelæ Π Ζ Ν in punctis λ, ipsi vero Ο Γ Ρ in punctis π. Capiatur autem, Exempli gratiâ, recta Κ λ π Λ contingens Curvam Π Σ Ο. Ob parallelas Tangentes Α Η, Π Ν, erit, per 42^{am} III^{i} *Conic.* rectangulum Η Κ in Π λ æquale rectangulo Η Γ in Π μ; unde Κ Η ad Η Γ ut μ Π ad Π λ; ac dividendo Κ Γ erit ad Η Γ ut μ λ ad λ Π. Permutando autem Κ Γ erit ad μ λ, hoc est Γ π ad π μ, ut Η Γ sive Ζ Π ad Π λ; unde per Conversionem rationis, Γ π erit ad Γ μ sive Ζ Μ, ut Ζ Π ad Ζ λ; atque adeo rectangulum Γ π in Ζ λ æquale erit rectangulo Ζ Μ in Ζ Π, hoc est rectangulo Ξ, per Constructionem. Huic autem æquale est rectangulum Κ Γ in Ζ Λ; quia Κ Γ est ad Γ π ut Ζ λ ad Ζ Λ. Ergo constat propositio; nec pluribus opus est, cum eodem omnino argumento, mutatis mutandis, idem de quâvis aliâ Tangente demonstrari possit.

Hinc aperitur alia, & à præcedentibus diversa, methodus componendi problemata hæc in rectis non parallelis, referendo ea ad duo priora Loca Lib. I. Quoniam enim rectangulum Ζ Π in Μ Η æquale est cuivis rectangulo Π λ in Η Κ, à rectâ quâvis Κ Λ contingente Hyperbolas Ο Σ Π, Η Τ Ι, diametroque Π Η occurrente, abscisso; eademque recta Κ Λ abscindit etiam rectangulum Ζ Λ in Γ Κ æquale rectangulo dato Ζ Π in Ζ Μ: Si in recta Π Ζ Ν loco Ζ capiatur punctum Π, & in Α Β punctum Η loco puncti Γ; ac fiat ut Ζ Μ ad Μ Η ita rectangulum auferendum Ξ ad aliud Ο: deinde per punctum quodvis datum ducantur (juxta Casum II. Loci primi, vel Casum II. & III^{um} Loci secundi Lib. I.) rectæ duæ Κ Λ auferentes rectangula Π λ in Η Κ æqualia rectangulo Ο, hoc est rectangulo Ζ Π in Μ Η: manifestum est easdem rectas Κ Λ abscindere semper rectangula Γ Κ in Ζ Λ æqualia rectangulo Ξ, sive Ζ Π in Μ Ζ. Similiter si capiantur puncta Α & Ν

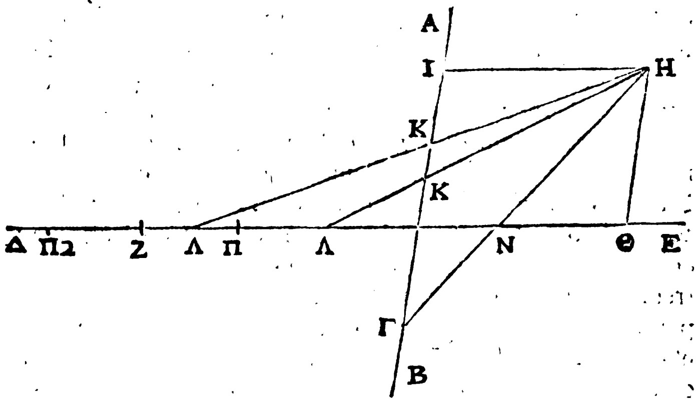
loco

loco ipsorum Γ & Z; ac ducantur rectæ duæ KΛ auferentes, per eosdem Casus, rectangula ΛK in NΛ æqualia rectangulo MΛ in ZN: eædem rectæ abscindent etiam rectangula ΓK in ZΛ æqualia rectangulo dato ΛΓ sive ZN in ZM, hoc est, rectangulo Ξ. Constat autem bis duas semper duci posse rectas, juxta Cas. II. & III. Loci secundi, quia limites non habent hi Casus: adeoque semper quatuor dari responsa, si fuerit punctum datum intra parallelas AB, NΠ. Determinatur autem Loci primi Casus secundus; unde certis tantum conditionibus possibile erit problema, si punctum unde ducendæ sunt rectæ, fuerit extra parallelas illas. Limites autem habentur ex iis quæ in Loco illo tradita sunt. Hæc *omnia* etiam demonstrari possunt in rectis duabus parallelis ΔΞ, PΩ, eodem modo easdem oppositas Hyperbolas contingentibus: quia rectæ omnes KΛ, auferentes rectangula ΞΛ in Pπ æqualia rectangulo ΞM in ΓP; atque etiam auferentes rectangula IΛ in Oπ æqualia rectangulo IM in ΓO, abscindunt quoque rectangula ΓK in ZΛ æqualia rectangulo ΓM in PΓ vel ZΞ, hoc est, rectangulo dato Ξ, per Constructionem. Q. E. D.

Hæc autem levia sunt Prop. 42[dæ] III[i] *Conicorum* Corollaria nec pluribus prosequenda. Quoniam vero *Pappo* visum est has duas, *Rationis* nempe & *Spatii*, Sectiones, totidem generalibus Propositionibus, in Præfatione ad VII[mum]. descriptas dare; experiri placuit an earundem etiam solutiones pari compendio tradi non possint. Cumque quæ hactenus dicta sunt, harum Artium Studiosos tantum respicere videantur; Mathematicorum peritos jam alloquor; utriusque problematis generalem effectionem omnium simplicissimam ac maxime concinnam expositurus; unde etiam admiranda analogia & affinitas inter has duas satis superque elucebit.

Duabus rectis AB, ΔE positione datis, cæterisque ut in præcedentibus; ducantur utrique datæ parallelæ HΘ, HI: ac jungatur recta ΓH, ad occursum cum recta ΔE si opus fuerit producenda. Eidem autem occurrat in puncto N. Deinde applicetur rectangulum auferendum ad rectam ΓI, ita ut rectangulum ΓI in ZΠ æquale fuerit rectangulo dato Ξ: ac ad utramque partem ponatur recta ZΠ, ad Π & Π2. Applicetur jam rectangulum ZΠ in ΘN excedens quadrato, utrinque ad rectam NΠ2; ac si fieri possit, etiam ad NΠ deficiens

deficiens quadrato; & habebuntur omnia puncta Λ: per quæ ducantur rectæ H K Λ. Dico rectas omnes H K Λ solvere problema. Quoniam enim rectangulum N Λ in Λ Π æquale est rectangulo Θ N in Z Π, erit Λ Π ad Π Z sicut Θ N ad N Λ; atque adeo Π Λ erit ad Λ Z ut Θ N ad Θ Λ. Sed Θ N est ad Θ Λ sicut I K ad I Γ (ob æqualia rectangula Θ N in I Γ & Θ Λ in I K). Erit igitur Π Λ ad Λ Z sicut K I ad I Γ. Quocirca Π Z erit ad Z Λ ut K Γ ad I Γ: unde rectangulum Π Z in I Γ, quod æquale fecimus rectangulo Ξ, erit quoque rectangulo Γ K in Z Λ æquale. Adeoque rectæ H K Λ solvunt problema.



Quod si auferenda fuerit ratio Γ K ad Z Λ, quæ fuerit ut N ad O; Iisdem manentibus, fiat ut N ad O ita I Γ ad Z Π, ac ponatur Z Π utrinque ad Π & Π2. Dein applicetur rectangulum Θ N in Z Π excedens quadrato, utrinque ad rectam Θ Π; atque etiam, si fieri possit, applicetur idem deficiens quadrato ad rectam Θ Π2: ac puncta applicationum designabunt possibilia quæque puncta Λ, per quæ ductæ rectæ H K Λ solvant problema. Quoniam enim rectangulum Θ Λ in Λ Π æquale est rectangulo Θ N in Π Z, erit Θ Λ ad Θ N sicut Z Π ad Π Λ. Sed Θ Λ est ad Θ N sicut I Γ ad I K (ob rationem modo dictam) igitur Γ I est ad I K ut Z Π ad Π Λ: adeoque Γ I erit ad Γ K sicut Z Π ad Λ Z. Permutando autem Γ I erit ad Z Π sicut Γ K ad Z Λ. Sed fecimus Γ I ad Z Π sicut N ad O. Quapropter Γ K est ad Z Λ sicut N ad O. Q. E. D.

Insuper adnotare licet, quemadmodum in *Sectione Spatii*, in Casibus ubi Θ non fuerit intermedium inter Z & N, rectangulum

angulum maximum æquale est eo quod fit sub $\mathrm{I\Gamma}$ in $\Theta N + \Theta Z - \sqrt{4 N\Theta Z}$; minimum vero æquale rectangulo ΓI in $\Theta N + \Theta Z + \sqrt{4 N \Theta Z}$. Sic in Sectione Rationis, cum punctum N non fuerit inter Θ & Z, ratio minima eadem est ac ratio ipsius ΓI ad $\Theta N + NZ - \sqrt{4 \Theta NZ}$: maxima vero ratio erit ut eadem ΓI ad $\Theta N + NZ + \sqrt{4 \Theta NZ}$.

Reducitur autem problema de ducendâ Tangente ad Curvam Parabolicam, (cujus duæ quælibet Tangentes aliquo modo dentur, una cum puncto contactûs in utrâque; vel si dentur tres Tangentes cum puncto contactûs in earum aliquâ; vel etiam quatuor Tangentes absque puncto) ad illud de *Sectione Rationis*, per ea quæ in Scholiis ad finem *libri* utriusque tradita sunt; quia rectæ omnes datam Parabolam contingentes, auferunt à datis Tangentibus segmenta datam inter se rationem habentia, ad modum eo loci demonstratum. Per priora autem duo Loca *Sectionis Spatii* Lib. I. datis magnitudine & positione diametris quibusvis conjugatis vel Ellipseos vel Hyperbolæ, duobus modis designantur Tangentes à dato quovis puncto ad contactum Conisectionis ducendæ, etiamsi Curva non descripta fuerit. Nam si per extremitates unius diametri ducantur rectæ duæ alteri diametro parallelæ, & rectâ de puncto dato ducendâ abscindantur segmenta rectangulum æquale quadrato alterius semidiametri continentia, extremitatibusque prioris diametri in parallelis datis adjacentia; per conversam propositionis 42^{dæ} Lib. III. *Conic.* constat rectam illam contingere Ellipsin vel Hyperbolam, cujus sunt diametri datæ. Compositio autem fiet per Cas. I^{um} & III^{um}. Loci primi, vel primum secundi in Ellipsi; & per II^{dum}. primi, vel II^{um}. & III^{um}. secundi Loci in Hyperbola: ut perpensis iis quæ pag. 143, 144. tradidimus manifestum erit. Atque hic est usus harum Sectionum non contemnendus quidem: sed & ad altiora, nempe ad solidorum Problematum Compositiones, eas adhibuisse Veteres, apud summum Geometram non levis est suspicio.

FINIS.