This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

APOLLONII
PERGAEI CONICORVM
LIBRI QVATTVOR.

VNA' CVM PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATIBVS, ET COMMENTARIIS
EVTOCII ASCALONITAE.

SERENI ANTINSENSIS
PHILOSOPHI LIBRI DVO
NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITI.

QVAE OMNIA NVPER FEDERICVS
Commandinus Vrbinas mendis quamplurimis expurgata è Græco conuertit, & commentariis illuſtrauit.

Dela Libreria de el Colegio dela Comp.a de JHS de
Alcala.
Año de 1705

CVM PRIVILEGIO PII IIII. PONT. MAX.
IN ANNOS X.

BONONIAE,
EX OFFICINA ALEXANDRI BENATII.
M D LXVI.

De la Comp.a de Jesus de Alcala
87

se le presto al P.e Joseph de Martinez
año de 1641, en el mes de Março.
se le lleua a M.d

GVIDO VBALDO II.
VRBINATVM DVCI IIII.
ALMAEQVE VRBIS PRAEFECTO.

EX omnibus philoſophiæ partibus, ut nulla certior, atque ad ueritatis rationem accommodatior eſt, quàm quæ à græcis mathematice dicitur, ſic nulla obſcurior, atque ad cognoſcendum difficilior eſſe hoc tempore poteſt. Huius autem facti culpam, cū ipſa rei natura, & ſubtilitas, tum maxime occupata noſtrorum hominum in aliis artibus explicandis induſtria, ac nimia in pleriſque, ut uere dicam, rerum ab uſu uitæ communis remotarum negligentia ſuſtinet. Quòd ſi qua alia pars eſt, quæ noſtris incognita philoſophis, interpretationis lumen aliquod poſtulet, ea profecto eſt, quæ de conicis appellatur. quanquam enim à ueteribus diligenter tractata ſit, tamen eorum monumenta aut ad nos non peruenerunt, aut ita peruenerunt, ut uix propter multas uetuſtatis iniurias, maximaſq; difficultates intelligantur. Ac primus quidem, ut colligi poteſt, hanc conicorum diſputationem quattuor libris editis tractauit Euclides. quos deinde cum Apollonius Pergæus uir eximio ingenio, atque exquiſita doctrina præditus uſque ad octo perduxiſſet, incredibile eſt, quantam huic ſcientiæ acceſſionem, dignitatemq; adiunxerit. quorum quattuor primi græce ſcripti adhuc leguntur, reliqui temporum ſuperiorum calamitate deſiderantur. Verum cum in his demonſtrationes ille breues ferè, atque obſcuras attuliſſet, ac multa lemmata incognita pro notis adhibuiſſet, factum eſt, ut tantæ tollendæ difficultatis cauſſa multi ſe ad eorum expoſitionem contulerint. inter quos Pappus Alexandrinus, & Eutocius Aſcalonita reliquis facile eruditionis laude, & ingenii præſtiterunt. neque uero dubitandum eſt, quin illi huic ſtudio plurimum opis afferre hoc tempore poſſent, ſi eorum ſcripta aut multis paterent, aut ſatis emendata in manibus hominum uerſarentur. atque hæc quidem me cauſſa potisſimum impulit, ut huius diſciplinæ ſubleuandæ gratia, eos de græco conuerterem, ac commentariis quoque meis explicarem. nam cum in Archimedis & Ptolemæi libris aliquot interpretandis, qui ſine conicorum doctrina nulla ratione percipi poſſunt, demonſtrationes Apollonii multas adhibuerim, quæ ſine græco libro, quòd latinus corruptisſimus ſit, parum intelligantur; feci non inuitus, idq; multorum amicorum, quibus honeſte denegare non poteram, uoluntate, primum ut Apollonium ipſum quàm planiſſime poſſem, conuerterem, atque in hac parte, quæ plurimum egere auxilii uidebatur, ægræ propè ac laboranti mathematicæ diſciplinæ ſuccurrerem: deinde uero ut Pappi lemmata, atque Eutocii in Apollonium commentarios latinos facerem, in quibus, quòd plurimis affecti uitiis erant, plus etiam laboris, atque operæ, quàm in ipſo Apollonio poſui; quippe qui multis in locis demonſtrationes integras, quarum uix ueſtigia apparebant, inſtaurare neceſſe habui. poſt autem cum uehementius iam rei inchoatæ amore, atque communis utilitatis ſtudio, ut ſemper aliàs inflammatus eſſem, eoſdem etiam, ut omnia faciliora cognitu eſſent, propriis declarare commẽtariis uolui. quo factum eſt, ut doctrinæ infinitis quondam uetuſtatis, atque inſcitiæ tenebris inuolutæ non minimum lucis atque ſplendoris, ut res ipſa cognoſcere cupientibus indicabit, attulerim. Hæc igitur qualiacunque ſint, omnia uno colligata uolumine in tuo nomine ad communem omnium utilitatem hoc tempore edo, atque diuulgo, GVIDE VBALDE Dux præſtantiſſime. quod cũ facio, non ſolum officio meo ſeruio, ut in cuius ditione, atque imperio natus ſum, eum omni cultu, atque obſeruantia proſequar: ſed in eo etiam exemplum doctiſſimorũ hominum ſequor, ut à quo plurimum ornamenti, atque ſubſidii litteræ acceperunt, eum potiſſimum omnibus litterarum monumentis exornent. Tu autem is es, cuius familiæ magnam partem ornamentorum quæ retinent, ipſa doctrinæ ſtudia debeant. Nam FEDERICVS proauus tuus, qui primus Ducalem honorem ueſtram in familiam intulit, cum plurimis rei militaris laudibus floruit, tum maximam inde ſibi gloriam comparauit, quòd vnice litteras, litteratosq; ſemper dilexit. quod cum libri multi in eius nomine à doctis hominibus editi, tum bibliotheca, hebræorum, græcorum, & latinorum librorũ copia mirabiliter inſtructa teſtantur. cuius ueſtigia GVIDVS VBALDVS filius imitatus, & ipſe præter hæreditariam rei bellicæ laudem cum omnibus litteris fuit eruditus, tum eruditorum hominum ingenio mirifice ſemper eſt delectatus. quos eoſdem FRANCISCVS MARIA nepos eius, idemq; pater tuus, quanquam ſtudio rei militaris, cuius gloria præter ceteros floruit, intentus, ſummo ſtudio ſemper complexus eſt, ac mirifice coluit. Eorum omnium laudibus tu ita ſucceſſiſti, ut ad proprium decus, haud multum tibi ſit ex paterna, domeſticaq; gloria hauriendum. nam cum rem militarem ita tenes, ut in ea excellas; tum latinis, græcisq; litteris perinde doctus es, atque ſi totam in hoc ſtudio ætatem conſumpſeris. Itaque non ſolum inſignibus rei bellicæ decoratus ampliſſimis es, cum Venetarum copiarum, & Pontificiarum Dux fueris, atque PHILIPPI Hiſpaniarum Regis hodie in Italia Generalis, atque almæ urbis præfectus ſis, ſed etiam in hoc litterarum ſtudio eas tibi laudes peperiſti, quas nulla unquam poſteritatis obliuio obſcurabit. nam & bibliothecam tuam tam optimis libris adauxiſti, & litteris deditos homines complecti omni ſtudio, ac fouere non ceſſas. Inter quos quoniam me quoque eſſe tua humanitas uoluit, ingratus propè, atque impius ſim, niſi te, ut intimis animi mei ſenſibus colo, ſic omnibus ingenii mei monumentis, quoad poſſum, honorem. Vale.

Federicus Commandinus.

DE APOLLONIO EX PAPPO.

EVCLIDIS libros quattuor conicorum cum Apollonius expleuiſſet, ac quattuor alios adiunxiſſet; octo conicorum libros confecit. Ariſtæus autem qui ſcribit ea, quæ ad hoc uſque tempus tradita ſunt, ſolidorum locorum libros quinque conicis cohærentes uocauit. & qui ante Apollonium fuerunt, trium conicarum linearum, unam quidem coni acutianguli, alteram rectanguli, tertiam uero obtuſianguli coni ſectionem appellarũt. Quoniam autem in vnoquoque horum trium conorum differenter ſectorum tres lineæ fiunt, dubitans, ut apparet, Apollonius cur nam qui ante ſe hanc tractationem expleuerant, unam quidem acutianguli coni ſectionem uocauerunt, quæ poteſt & rectanguli, & obtuſianguli coni eſſe; alteram rectanguli, quæ poteſt & in acutiangulo, & obtuſiangulo cono reperiri; tertiam uero obtuſianguli, quæ & in acutiangulo, & rectangulo cono ineſſe poteſt; mutatis nominibus, quæ quidem acutianguli coni ſectio nominatur, ellipſim appellat; quæ rectanguli, parabolen, quæ uero obtuſianguli, hyperbolen; unicuique ab aliquo proprio accidente nomen imponens. ſpatium enim quoddam ad lineam quampiam comparatum in acutianguli coni ſectione deficiens fit quadrato; in obtuſianguli coni ſectione quadrato excedens; in rectanguli uero coni ſectione neque deficiens, neque excedens. Hoc autem illi accidit, quòd non conſiderauit iuxta unum duntaxat caſum plani conum ſecantis, & tres lineas gignentis, in unoquoque conorum aliam atque aliam fieri lineam, quam à coni proprietate nominarunt. Si enim ſecans planum ducatur uni lateri coni æquidiſtans, una tãtum ex tribus lineis efficitur ſemper eadem, quam Ariſtæus illius coni ſectionem appellauit.

EX EVTOCIO, ET GEMINO.

APollonius geometra natus eſt Pergæ, quæ Pamphiliæ ciuitas eſt, tempore Ptolemæi Euergetæ, ut tradit Heraclius in Archimedis uita. qui etiam ſcribit Archimedem quidem primum conica theoremata fuiſſe aggreſſum; Apollonium uero cum ea inueniſſet ab Archimede nondum edita, ſicut propria ſua edidiſſe. neque id uere, ut mea fert opinio. nam & Archimedes multis in locis uelut antiquioris conicorum inſtitutionis mentionem facere uidetur:

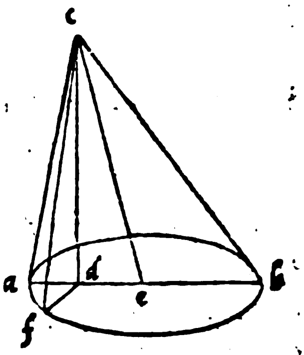
& Apollonius ea ſcribit, non ut à ſe ipſo inuenta. non enim dixiſſet, uberius & uniuerſalius hæc à ſe, quàm ab aliis tractata fuiſſe. Sed quod ſcribit Geminus uerum eſt. Antiqui, inquit, conum diffinientes, rectanguli trianguli circumuolutionem manente uno eorum, quæ circa rectum angulum ſunt, latere; & conos omnes rectos, & unam in ſingulis ſectionē fieri arbitrati ſunt: in rectangulo quidem cono vocatam parabolen; in obtuſiangulo hyperbolen; in acutiangulo autem ellipſim. atque ita nominatas apud ipſos ſectiones paſſim inuenias. Quemadmodum igitur antiquis illis in unaquaque triangulorum ſpecie contemplantibus duos rectos, primum in æquilatero, deinde in æquicruri, poſtea in ſcaleno, ætate poſteriores uniuerſale theorema demonſtrarunt eiuſmodi, Omnis trianguli interiores tres anguli duobus rectis ſunt æquales: ita & in coni ſectionibus; rectanguli quidem coni ſectionem dictam, in rectāgulo tantum cono contemplati ſunt; ſecto ſcilicet plano ad unum coni latus recto: obtuſianguli autem coni ſectionem in cono obtuſiangulo factam demonſtrarunt, & acutianguli ſectionem in cono acutiangulo; ſimiliter in omnibus conis ducentes plana ad unum eorum latus recta: quod & antiqua ſectionum nomina indicant. Verum poſtea Apollonius Pergæus uniuerſe inſpexit in omni cono tam recto, quàm ſcaleno omnes ſectiones ineſſe, iuxta plani ad conum differentem inclinationem. quamobrem illius temporis homines admirati mirificam conicorum theorematum demonſtrationem magnum geometram ipſum appellarunt. Hæc quidem Geminus in ſexto mathematicarum præceptionum libro ſcripta reliquit.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA IN PRIMVM LIBRVM CONICORVM APOLLONII.

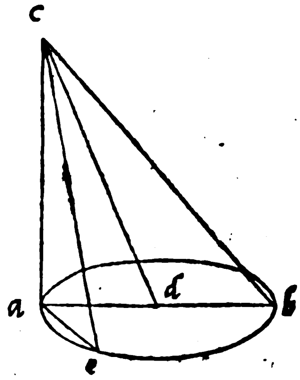
CVM COMMENTARIIS FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS.

LEMMA PRIMVM.

SIT conus, cuius baſis circulus a b, & uertex punctum c. Si igitur æquicruris eſt conus; manifeſto conſtat, lineas omnes, quæ ab ipſo c ad a b circuli circumferentiam ducuntur, inter ſe ſe æquales eſſe. Si uero ſcalenus eſt; oporteat inuenire, quæ maxima ſit, & quæ minima.



DVCATVR à puncto c ad planum circuli a b linea perpendicularis: quæ primum cadat intra circulũ; ſitq; c d: & ſumatur centrum eius, quod ſit e: & iuncta d e producatur in utramque partem ad puncta a b: deinde a c, c b iungãtur. Dico ipſam b c maximam eſſe, & a c minimam, linearum omnium, quæ à pũcto c ad circulum a b pertinent. Ducatur enim alia quædam linea
c f, & f d iungatur. maior igitur eſt b d, quàm d f: communis 7. tertii
autem c d: & anguli, qui ad d recti. ergo maior eſt b c, quàm c f. eodem modo & 2. diff. 11.
c f maior oſtendetur, quàm c a. ex quibus apparet lineam c b omnium maximam, 47. primi
a c uero minimam eſſe.



Ruſus à puncto c perpendicularis ducta cadat in ipſius a b circuli circumferentiam; quæ ſit c a: & cum circuli centro d copulata a d producatur in b: & b c iungatur. Dico b c maximam eſſe, & a c minimam. lineam igitur 18. primi
c b maiorem eſſe, quàm c a perſpicuum eſt. ducatur autem alia quædam linea c e; & iungatur a e. Itaque
quoniam a b diameter eſt, neceſſario maior erit, quàm 19. primi
a e; & continet a c cum ipſis a b, a e angulum rectum. 2. diff. un
ergo b c, quàm c e maior erit; & ſimiliter maior, decimi
quàm ceteræ omnes. Eodem modo & e c maior oſtendetur, quam c a. Quare ſequitur, ut b c maxima ſit, a c uero minima linearum omnium, quæ ab ipſo c ad circulum a b pertinent.

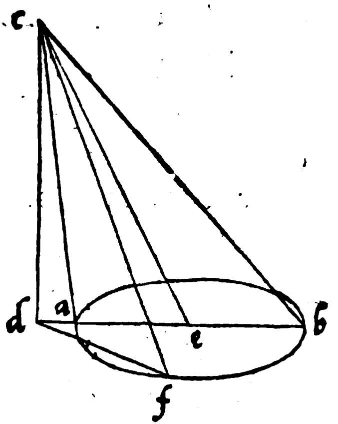
Iiſdem poſitis cadat perpendicularis c d extra circulum: & ad e circuli centrum ducta d e producatur: iunganturq; a c, b c. Dico b c maximam, & a c minimam eſſe omnium, quæ à puncto c ad a b circulum perducuntur. conſtat namq; b c maiorem eſſe ipſa c a. ſed & maior erit omnibus, quæ ab ipſo c in circumferentiam circuli a b cadunt. ducatur enim alia quædam linea c f: & d f iungatur. Cum igitur b d 8. tertii
per centrum tranſeat, maior eſt, quàm d f. eſt autem c d perpendicularis ad lineas 2. diff. un
d b, d f, quoniam & ad ipſum planum. ergo maior erit b c, quàm c f. & ſimiliter decimi
maior, quàm aliæ omnes. perſpicuum eſt igitur ipſam c b maximam eſſe. At uero
a c minimam hoc modo oſtendemus. Quoniam enim minor eſt a d, quàm d f; atque 8. tertii
eſt ad ipſas perpendicularis d c, minor erit a c, quam c f. & ita minor, quàm aliæ.

linea igitur a c minima eſt, & b c maxima omnium, quæ à puncto c ad a b circuli circumferentiam perducuntur.

Diffinitio prima Apollonii.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in utranq; partem producatur: &c.

Conuenienter Apollonius addidit, in utranque partem producatur: cum uniuſcuiuſque coni generationem tradat. Si enim æquicruris ſit conus fruſtra produceretur, quòd recta linea, quæ conuertitur circumferentiam circuli perpetuo contingit; quippe cum ab ea punctũ manens ſemper æquali diſtet interuallo. Sed quoniam poteſt & ſcalenus eſſe conus, in quo, ut iam demonſtratum eſt, & maximum, & minimum latus inuenitur, neceſſario illud appoſuit; ut quæ minima eſt linea, uſqueadeo augeri intelligatur, quoad fiat maximæ æqualis: & propterea circuli circumferentiam ſemper contingat.

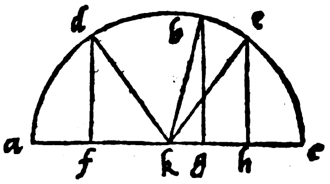


LEMMA II.

SIT linea a b c, & poſitione data a c; omnes autem, quæ ab ipſa a b c ad a c perpendiculares ducuntur, ita ſe habeant, ut quadratum uniuſcuiuſque ipſarum æquale ſit rectangulo baſis partibus, quæ ab ipſa ſecantur, contento. Dico a b c circuli circumferentiam eſſe; diametrum autem ipſius lineam a c.

5. ſecũdi.
& 47. primi.
& 15. diffin. primi.

DVCANTVR enim à punctis d b e perpendiculares d f, b g, e h. ergo quadratum d f æquale eſt rectangulo a f c: & quadratum b g rectangulo a g c: ipſum uero e h quadratum rectangulo a h c æquale. ſecetur a c bifariam in k; & d k, k b, k e iungantur. Itaq; quoniam a f c rectãgulum unà cum quadrato f k eſt æquale quadrato a k: & ipſi a f c æquale eſt d f quadratum: erit quadratum d f unà cũ ipſo f k, hoc eſt quadratum d k æquale quadrato a k. quare linea a k ipſi k d eſt æqualis. Similiter oſtendemus, & unamquamque linearum b k, e k, ipſi a k, uel k c æqualem eſſe. ergo a b c circuli circumferentia eſt circa centrum k, hoc eſt circa diametrum a c.

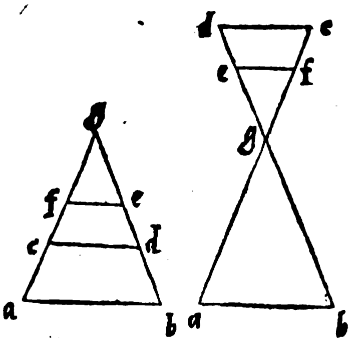


LEMMA III.

SINT tres lineæ æquidiſtantes a b, c d, e f: & in ipſas ducantur duæ rectæ lineæ a g f c, b g e d. Dico ut rectangulum quod fit ex a b, & e f ad quadratum c d, ita eſſe rectangulum a g f ad quadratum g c.

lemm. in 22. decimi.
4. ſexti

QVONIAM enim ut linea a b ad f e; hoc eſt ut rectangulum ex a b, & f e ad f e quadratum, ita linea a g ad ipſam g f; hoc eſt rectangulum a g f ad quadratum g f: erit ut rectãgulum ex a b & f e,



ad quadratum f e, ita rectangulum a g f ad quadratum g f. ſed ut quadratum f e ad quadratum c d, ſic quadratum f g ad quadratum g c. ex æquali igitur ut rectangulũ ex a b & f e ad quadratum c d, ſic rectangulum a g f ad g c quadratum. 4. & 22. ſexti.

LEMMA IIII.

SIT ut a b ad b c, ita a d ad d c: & ſecetur a c bifariam in puncto e. Dico rectangulum b e d quadrato e c æquale eſſe: itemq; rectangulum a d c æquale rectangulo b d e, & rectangulum a b c rectangulo e b d.

QVONIAM enim ut a b ad b c, ita eſt a d ad d c; erit componendo, ſumptisq; A
antecedentium dimidiis, & per conuerſionem rationis, ut b e ad e c, ita c e ad e d. rectãgulum igitur b e d B
æquale eſt c e quadrato. commune auferatur, quadratum 17. ſexti
ſcilicet e d. ergo quod relinquitur, rectangulum a d c rectangulo b d e eſt æquale. Rurſus quoniam C
rectangulum b e d æquale eſt quadrato c e, utraque auferantur à quadrato b e. reliquum igitur rectangulum a b c rectangulo e b d æquale erit. quæ omnia demonſtrare oportebat.

COMMENTARIVS.

ERIT componendo, ſumptisq; antecedentium dimidiis. & per conuerſionem A
rationis.] *Quoniam ut a b ad b c, ita a d ad d c; erit componendo ut a b, b c ad c b, ita a c ad c d; & antecedentium dimidia, ut e b ad b c, ita e c ad c d. eſt enim a e ipſius a c dimidia. quare per conuerſionem rationis ut b e ad e c, ita c e ad e d.*

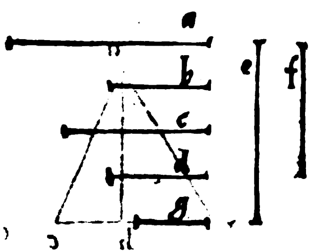
Commune auferatur, quadratum ſcilicet e d.] *Eſt enim quadratum c e æquale rectan-* B
gulo a d c unà cum quadrato e d: & rectangulum b e d æquale rectangulo b d e unà cum e d qua- 5. ſecũdi.
drato. quare ſublato communi; relinquitur rectangulum a d c rectangulo b d e æquale. 3

Rurſus quoniam rectangulum b e d æquale eſt quadrato e c, utraque auferantur à C
quadrato b e.] *Nam cum linea a c bifariam ſecetur in e, atque ipſi addatur linea c b; rectangu-* 6. ſecundi
lum a b c, & quadratum c e æqualia ſunt quadrato b e. rurſus quadrato b e æqualia ſunt utraque 2
rectangula e b d, b e d. ſi igitur ab ipſo b e quadrato æqualia auferantur, uidelicet rectangulum b e d, & quadratum c e; relinquitur rectangulum a b c rectangulo e b d æquale eſſe.

LEMMA V.

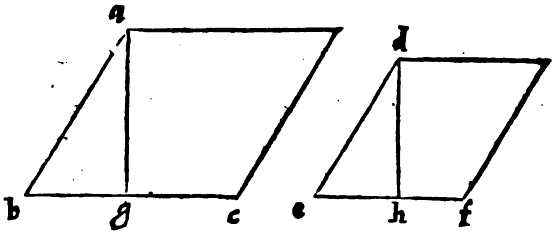
HABEAT a ad b proportionem compoſitã ex proportione c ad d, & ex proportione e ad f. Dico c ad d proportionem compoſitam habere ex proportione a ad b, & proportione f ad e.

FIAT enim proportio d ad g eadem, quæ eſt e ad f. & quoniam proportio a ad b compoſita eſt ex proportione c ad d, & proportione e ad f, hoc eſt d ad g: proportio autem compoſita ex proportione c ad d, & d ad g eſt eadem, quæ c ad g: erit ut a ad b, ita c ad g. Rurſus quoniam c ad d proportionem habet compoſitam ex proportione c ad g, & proportione g ad d: ſed proportio c ad g demonſtrata eſt eadem, quæ a ad b: & conuertendo proportio g ad d eadem eſt, quæ f ad e: habebit c ad d proportionem compoſitam ex proportione a ad b, & proportione f ad e.



LEMMA VI.

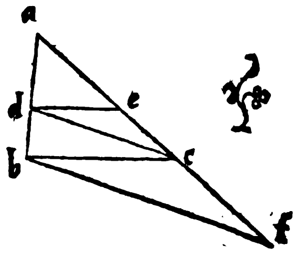
SINT duo parallelogramma a c, d f æquiangula, quorum angulus b ſit æqualis angulo e. Dico ut rectangulum a b c ad rectangulum d e f, ita eſſe parallelogrammum a c ad d f parallelogrammum.



Si enim anguli b e recti ſint, illud perſpicue conſtat: ſin minus, demittantur perpendiculares a g, d h. & quoniam angulus b æqualis eſt angulo e; & angulus ad g rectus æqualis recto ad h: erit triangulum a b g triangulo d e h æquiangulum. quare
4. ſexti ut b a ad a g, ita e d ad d h. ſed ut b a ad a g, ita rectangulum a b c ad rectangulum
1 quod a g, b c continetur: & ut e d ad d h, ita d e f rectangulum ad rectangulum contentum d h, e f. quare permutando ut rectangulum a b c ad rectangulum d e f, ita
36. primi. rectangulum, quod continetur a g, b c; hoc eſt parallelogrammum a c ad rectangulum contentnm d h, e f; hoc eſt ad parallelogrammum d f.

LEMMA VII.

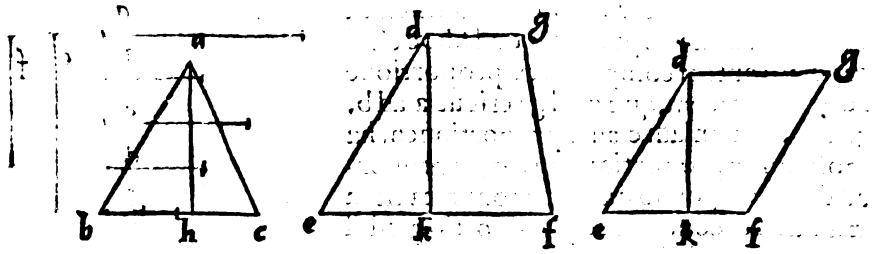
SIT triangulum a b c: ſitq́; b c æquidiſtans d e, & quadratum, quod fit ex c a æquale ſit rectangulo f a e. Dico iam ſi iungantur d c, b f, lineam b f, ipſi d c æquidiſtantem eſſe.



14. ſexti HOC uero manifeſte patet. quoniam enim ut
4 f a, ad a c, ita eſt c a ad a e; & ut c a ad a e, ita b a
2 ad a d: erit ut f a ad a c, ita b a ad a d. ergo d c, b f
inter ſe ſe æquidiſtantes ſunt.

LEMMA VIII.

SIT triangulum a b c: trapezium uero d e f g, ita ut a b c angulus angulo d e f ſit æqualis. Dico ut rectangulum a b c ad rectāgulum, quod continetur utraque ipſarum d g, e f & d e, ſic eſſe triangulum a b c ad trapezium d e f g.



DVCANTVR enim perpendiculares a h, d k. & quoniam angulus a b c æqualis
4. ſexti eſt angulo d e f; & qui eſt ad h rectus æqualis recto ad k; erit ut b a ad a h, ita e d
1 ad d k. ſed ut b a ad a h, ita rectangulum a b c ad id, quod continetur a h, b c: & ut e d

ad d k, ita rectangulum, quod continetur utraque d g, e f, & d e ad contentum utraque
d g, e f & d k. eſt autem triangulum a b c dimidium rectanguli contenti a h, b c: A
& trapezium d e f g dimidium eius, quod utraque d g, e f & d k continetur. ergo ut B
rectangulum a b c ad rectangulum contentum utraque d g, e f, & d e, ita eſt triangulum
a b c ad d e f g trapezium. Quod ſi a b c triangulum ſit, & d f parallelogrammũ; eadem ratione fiet, ut a b c triangulum ad d f parallelogrammum, ita rectangulum a b c ad duplum rectanguli d e f.

Ex quibus conſtat, rectangulum a b c, ſiquidem d f parallelogrammum ſit, C
æquale eſſe duplo rectanguli d e f: ſi uero ſit trapezium, æquale ei, quod utraque d g, e f & ipſa d e continetur.

COMMENTARIVS.

EST autem triangulum a b c dimidium rectanguli contenti a h, b c, & trapeziũ A
d e f g dimidium eius, quod utraque d g, e f & d k continetur.] *Iuncta enim d f erit triangulum e d f dimidium rectanguli contenti e f & d k: & triangulum d f g itidem dimidium eius, quod continetur d g & d k. ergo totum trapezium d e f g dimidium eſt rectanguli, quod utraque e f, d g, & ipſa d k continetur.*

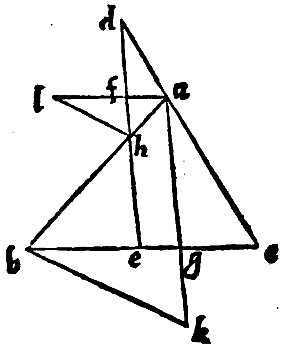
Ergo ut rectangulum a b c ad rectangulum contentum utraque d g, e f & d e, ita B
eſt triangulum a b c ad d e f g trapezium.] *Ex ante dictis enim colligitur ut rectangulum a b c ad rectangulum ex a h, & b c, ita eſſe rectangulum ex d g, e f & d e ad rectangulum ex d g, e f & d k. quare permutando ut rectangulum a b c ad rectangulum ex d g, e f, & d e, ita rectangulum ex a h & b c ad rectangulum ex d g, e f & d k; & ita eorum dimidia, hoc eſt triangulum a b c ad trapezium d e f g.*

Ex quibus conſtat rectangulum a b c, ſiquidem d f parallelogrammum ſit &c.] C
Sequitur hoc quando triangulum a b c parallelogrammo, uel trapezio d e f g ſit æquale. quod etiam ab Eutocio demonſtratur in cõmentarijs in 49 primi libri Apollonij. quare uериſimile eſt in Pappi uerbis hoc loco nonnulla deſiderari.

LEMMA IX.

Sit triangulum a b c, & producta c a ad d, ducatur ut contingit, recta linea d h e; cui quidem æquidiſtans ducatur a g: ipſi uero b c æquidiſtans a f. Dico ut quadratum a g ad rectangulum b g c, ita eſſe rectangulum d f h ad quadratũ f a.

PONATVR rectangulo b g c æquale rectangulum a g k: & rectangulo d f h A
æquale rectangulum a f l: & iungantur b k, h l. Quoniam igitur angulus ad c B
æqualis eſt angulo b k g: & angulus d a l in circulo æqualis angulo f h l: erit & C
angulus g k b angulo f h l æqualis. ergo ut b g ad g k, ita l f ad f h. eſt autem ut D
a g ad g b, ita h e ad e b: & ut h e ad e b, ita h f ad f a. Vt igitur a g ad g b, ita h f ad f a. Sed ut b g ad g k, ita alia quæpiam linea l f ad antecedentem f h. quare ex æquali in perturbata ratione, ut a g ad g k, ita l f ad f a. ut uero a g ad g k, ita quadratum a g ad rectangulum a g k, hoc eſt ad rectangulum b g c: & ut l f ad f a, ita rectangulum l f a, hoc eſt d f h ad quadratum f a. ergo ut quadratũ a g ad rectangulum b g c, ſic rectangulum d f h ad f a quadratum. Sed licet illud idem etiam per compoſitionem proportionum demonſtrare. Quoniam enim proportio a g ad g b eſt eadem, quæ h e ad e b; hoc eſt h f ad f a: proportio autem a g ad g c eadem, quæ d e ad e c; hoc eſt d f ad f a: erit proportio cõpoſita ex proportione a g ad g b, & ex pro



lem. in 22 decimi

portione a g ad g c, quæ quidem eſt quadrati a g ad rectangulum b g c, eadem, quæ
E componitur ex proportione h f ad f a: & ex proportione d f ad f a. hæc autem eſt proportio rectanguli d f h ad quadratum f a.

COMMENTARIVS.

A PONATVR rectangulo b g c æquale rectangulum a g k: & rectangulo d f h æquale rectangulum a f l.] *Deſiderantur fere omnia hæc in græco codice, quæ nos ſuppleuimus; Illud uero ita intelligendum eſt, ut producatur a g ad K; & fiat rectangulum a g k rectangulo b g c æquale; & rurſus producta a f ad l, fiat rectangulum a f l æquale rectangulo d f h.*

B Quoniam igitur angulus ad c æqualis eſt angulo b k g: & angulus d a l in circulo angulo f h l.] *Ex uigeſima prima tertij elementorum: ſunt enim puncta a b k c in circumferentia eiuſdem circuli, cum rectangulum a g k æquale ſit rectangulo b g c, ex conuerſa trigeſimæ quintæ eiuſdem: & eadem ratione puncta a d l h cadent in circumferentia alterius circuli.*

C Erit & angulus g k b angulo f h l æqualis.] *Namq; angulus ad c angulo d a l eſt æqualis, quod b c, f a æquidiſtantes ſint.* 29.primi.

D Ergo ut b g ad g k, ita l f ad f h.] *Sequitur enim ex iam dictis triangulum l f h triangulo b g k ſimile eſſe, quoniam angulus ad k angulo f h l eſt æqualis; ut demonſtratum fuit; & angulus l f h æqualis angulo l a g, hoc eſt ipſi b g k. ergo & reliquus reliquo æqualis erit.* 29.primi.

E Hæc autem eſt proportio rectanguli d f h ad quadratum f a.] *Ex quibus fit ut rectangulum d f h ad quadratum f a eandem habeat proportionem, quam quadratum a g ad rectangulum b g c. quod quidem oportebat demonſtrare.*

APOL-

APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIBER I.
CVM COMMENTARIIS EVTOCII ASCALONITAE, ET FEDERICI COMMANDINI.

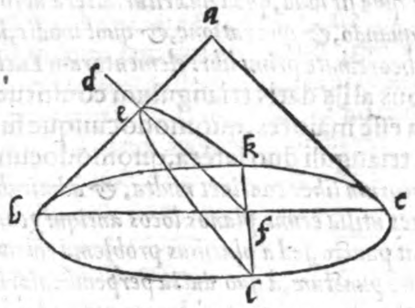
APOLLONIVS EVDEMO S. D.

Si et corpore uales, & aliæ res tuæ ex animi tui ſententia ſe habent, bene eſt; nos quidem ſatis belle habemus. Quo tempore tecum Pergami fui, animaduerti te cupidum intelligendi conica, quæ à nobis conſcripta ſunt. Itaque miſi ad te primum librum emendatum; reliquos deinceps miſſurus, cum animo ero tranquilliori; non enim arbitror te oblitum, quod à me accepiſti, quid ſcilicet cauſæ fuerit, cur ego hæc ſcribere aggreſſus ſim, rogatus à Naucrate Geometra, quo tempore Alexandriam ueniens apud nos fuit: & cur nos cum de illis, octo libris egiſſemus, maiorem ſtatim in his diligentiam adhibuimus. Nam cum ipſe Naucrates quamprimum eſſet nauigaturus, nos ea non emendauimus, ſed quæcunque ſe ſe nobis obtulerunt conſcripſimus; vtpote qui ea poſtremo eſſemus percurſuri. Quamobrem nunc tempus nacti, ut quæque emendamus, ita edimus. Et quoniam accidit nonnullos alios ex iis, qui nobiſcum fuerant, habuiſſe primum, & ſecundum librum antequam emendaretur, noli mirari ſi in quædam incidas, quæ aliter ſe habeant. Ex octo autem libris, quatuor primi huius diſciplinæ continent elementa: quorum primus quidem complectitur generationes trium coni ſectionum, & earum quæ oppoſitæ dicuntur; itemq; principalia ipſarum accidentia, à nobis & uberius & vniuerſalius, quam ab aliis, qui de ea re ſcripſerunt, elaborata. Secundus liber tractat ea, quæ attinent ad diametros, & ad axes ſectionum, & ad illas lineas, quæ cum ſectione non conueniunt, quæ à græcis ἀσύμπτωτοι appellantur: tum de aliis diſſerit, quæ & generalem & neceſſariam utilitatem ad determinationes afferunt. quas autem uocem diametros, & quos axes ex hoc libro cognoſces. Tertius liber continet multa, & admirabilia theoremata, quæ utilia erunt, & ad ſolidorum locorum compoſitiones, & ad determinationes. quorum complura, & pulcherrima & noua ſunt. Hæc nos perpendentes, animaduertimus non poſitam eſſe ab Euclide rationem componendi loci ad tres, & quatuor lineas; uerum ipſius tantummodo particulam quandam: atque hanc non ſatis feliciter: non enim fieri poterat, ut ea compoſitio recte perficeretur abſque iis, quæ à nobis inuenta ſunt. Quartus liber tradit, quot modis conorum ſectiones inter ſe ſe, & circuli circumferentiæ occurrere poſſint; & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab iis, qui ante nos fuerunt, memoriæ proditum eſt. coni ſectio, & circuli circumferentia, & oppoſitæ ſectiones ad quot puncta oppoſitis ſectionibus occurrant. Reliqui autem quatuor libri ad abundantiorem ſcientiam pertinēt. Quintus enim de minimis, & maximis magna ex parte agit. Sextus de æqualibus, & ſimilibus coni ſectionibus. Septimus continet theoremata, quæ determinandi uim habent. Octauus problemata conica determinata. At uero omnibus his editis, licet unicuiq;, qui in ea legēdo inciderit, ex animi ſui ſētētia iudicare. Vale.

EVTOCII ASCALONITAE IN PRIMVM LIBRVM CONICORVM APOLLONII EX PROPRIA EDITIONE COMMENTARIVS.

APOLLONIVS *geometra, Anthemi ſodalis chariſſime, natus eſt Pergæ, quæ Pamphiliæ ciuitas eſt, tempore Ptolemæi Euergetæ, ut tradit Heraclius in Archimedis uita. qui etiam ſcribit Archimedem quidem primum conica theoremata fuiſſe aggreſſum; Apollonium uero cum ea inueniſſet ab Archimede nondum edita, ſicut propria ſua edidiſſe. neque id uere, ut mea fert opinio. nam & Archimedes multis in locis uelut antiquioris conicorum inſtitutionis mentionem facere uidetur: & Apollonius ea ſcribit, non ut à ſe ipſo inuenta. non enim dixiſſet, uberius & uniuerſalius hæc à ſe, quam ab alijs tractata fuiſſe. Sed quod ſcribit Geminus uerum eſt, Antiqui, inquit, conum diffinientes, rectanguli trianguli circumuolutionem manente uno, eorum, quæ circa rectum angulum ſunt, latere; & conos omnes rectos, & unam in ſingulis ſectionem fieri arbitrati ſunt: in rectangulo quidem cono uocatam parabolen; in obtuſiangulo hyperbolen; in acutiangulo autem ellipſim; atq; ita nominatas apud ipſos ſectiones paſſim inuenias. Quemadmodum igitur antiquis illis in unaquaq; triangulorum ſpecie contēplantibus duos rectos, primũ in æquilatero, deinde in æquicruri, poſtea in ſcaleno, ætate poſteriores uniuerſale theorema demonſtrarunt eiuſmodi.* Omnis trianguli interiores tres anguli duobus rectis ſunt æquales: *ita & in coni ſectionibus; rectanguli quidem coni ſectionem dictam, in rectangulo tantum cono contemplati ſunt; ſecto ſcilicet plano ad unum coni latus recto: obtuſianguli autem coni ſectionem in cono obtuſiangulo factam demonſtrarunt, & acutianguli ſectionem in cono acutiangulo; ſimiliter in omnibus conis ducentes plana ad unum eorum latus recta. quod & antiqua ſectionum nomina indicant. Verum poſtea Apollonius Pergæus uniuerſe inſpexit in omni cono tã recto, quàm ſcaleno omnes ſectiones ineſſe, iuxta plani ad conum differentem inclinationem. quamobrem illius temporis homines admirati mirificam conicorum theorematum demonſtrationem magnum geometram ipſum appellarunt. Hæc quidem Geminus ſcripta reliquit in ſexto mathematicarum præceptionum libro. Quod autem dicit manifeſtum faciemus in ſubiectis figuris. ſit enim per axem coni triangulum a b c: & à quouis puncto e ducatur ipſi a b ad angulos rectos linea d e f: & per d f immiſſum planum, rectum ad ipſam a b conum ſecet. rectus eſt igitur uterque angulus a e d, a e f: rectanguloq; exiſtente cono, & angulo b a c recto, ut in prima figura apparet, duobus rectis æquales erunt anguli b a c, a e f. quare æquidiſtans erit linea d e f ipſi a c: & fiet in ſuperficie coni ſectio parabole, ſic dicta* ἀπὸ τοῦ παράλληλον εἶναι, *hoc eſt ab eo, quod linea d f, quæ communis ſectio eſt plani ſecantis, & trianguli per axem,*

Parabole unde

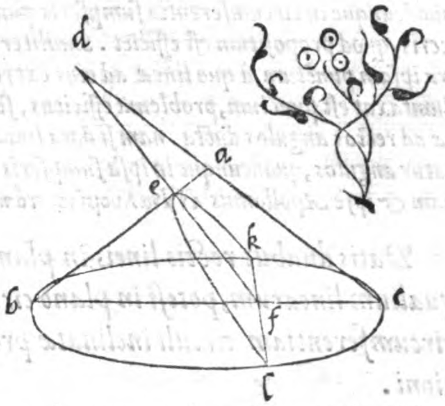


per axem, parallela ſit ipſi a c lateri trianguli. ſed ſi obtuſiangulus ſit conus, ut in ſecunda figura, obtuſo uidelicet exiſtente angulo b a c, & angulo a e f recto, anguli b a c, a e f duobus rectis maiores erunt, & non conueniet d e f cum ipſo a c latere ad partes, in quibus eſt f: ſed ad eas, in quibus ſunt a, & e, producta nimirum c a in d. faciet igitur ſecans planum in ſuperficie coni ſectionem hyperbolen dictam ἀπὸ τοῦ ὑπερβάλλειν, hoc eſt ab eo, quod anguli b a c, a e f excedant duos rectos: uel quòd d e f excedat uerticem coni: & cum ipſa c a extra conueniat.

Hyperbole unde.

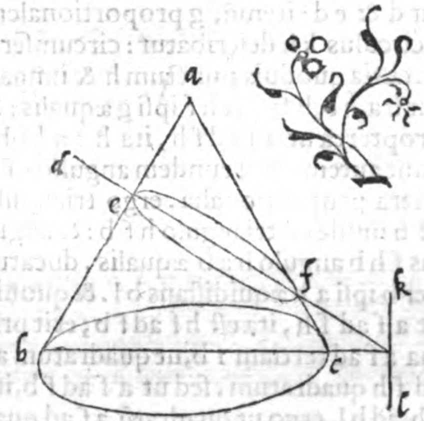
Quod ſi acutiangulus ſit conus, hoc eſt acuto exiſtente angulo b a c, erunt anguli b a c, a e f minores duobus rectis; & lineæ e f, a c productæ conuenient tandem in aliqua parte: augere namque, & in longius ducere conum poſſumus. erit igitur in ſuperficie ſectio, quæ appellatur ellipſis, διὰ τὸ ἐλλείπειν δύο ὀρθαῖς τὰς προειρημένας γωνίας, hoc eſt ob id, quòd dicti anguli à duobus rectis deficiant, uel quod ellipſis diminutus quidam circulus ſit.

Ellipſis unde



Ad huc quidem modum antiqui ponentes ſecans planum per d e f ad rectos angulos ipſi a b lateri trianguli per axē coni, & inſuper differentes conos, & propriam in unoquoque ſectionem. At Apollonius ponens conum, & rectum & ſcalenum differenti ipſius plani occurſu differentes efficit ſectiones. Sit enim, ut in ijſdem figuris, ſecans planum k e l: communis autem ſectio ipſius plani, & coni baſis, linea k l: communis rurſus ſectio eiuſdem & trianguli a b c ſit ipſa e f, quæ & diameter appellatur ſectionis. itaque in omnibus ſectionibus ponit lineam k l ad rectos angulos eſſe ipſi baſi trianguli a b c. Verum ſi e f æquidiſtans ſit a c, parabolen fieri k e l ſectionem in coni ſuperficie: ſi uero conueniat cum latere a c extra uerticem coni, ut in d, fieri ipſam K e l ſectionem hyperbolen. quod ſi conueniat intra, fieri ſectionem ellipſim, quam & θυρεὸν uocat.

Parabole quomodo fiat
Hyperbole.
Ellipſis.



Generaliter igitur parabolæ diameter æquidiſtans eſt uni lateri trianguli: hyperbolæ autem, & ellipſis diameter cum eo conuenit: hyperbolæ quidem ad partes uerticis coni, ellipſis uero ad partes baſis. Scire præterea illud oportet, parabolen, & hyperbolen ex eorum numero eſſe, quæ in infinitū augentur: at ellipſim non item. tota enim in ſe ipſam uergit, ſicuti circulus.

Parabole & Hyperbole in infinitū augētur.

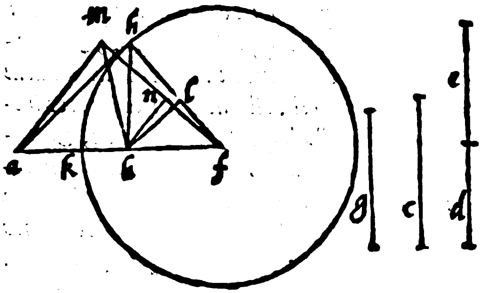
Cum autem plures editiones ſint, ut etiam ipſe Apollonius in epiſtola ſcribit: optimum fore iudicaui ex multis, quæ occurrerunt, manifeſtiora colligere: in ipſius uerbis quidem, ut legentibus ad hæc facilior pateret aditus: ſeorſum uero in commentarijs, ut par eſt, differentes demonſtrationis modos explicare. Itaque in epiſtola dicit, primos quatuor libros huius diſciplinæ elementa continere: quorum primus quidem complectitur generationes trium coni ſectionum, & earum, quæ oppoſitæ dicuntur, itemq; principalia ipſarum accidentia, hoc eſt quæcunque ipſis in prima generatione contingunt: habet enim & alia quædam conſequentia. ſecundus autem liber tractat ea, quæ attinent ad diametros, & ad axes ſectionum, & ad illas lineas, quæ cum ſectione non conueniunt, quæ à græcis ἀσύμπτωτοι appellantur: tum de alijs diſſerit, quæ & generalem, & neceſſariam utilitatem afferunt ad determinationes. determinatio autem duplex eſt, ut manifeſte patet, altera quidem poſt expoſitionem, ſignifi-

ἀσύμπτωτοι
Determinatio duplex

cans quid ſit illud, quod quæritur: altera uero propoſitionem uniuerſalem eſſe prohibens, quæ declarat quando, & qua ratione, & quot modis, id quod propoſitum eſt, fieri poſſit, ut in uigeſimo ſecundo theoremate primi libri elementorum Euclidis. Ex tribus rectis lineis, quæ æquales ſint tribus alijs datis triangulum conſtituere: oportet autem duas eiuſmodi lineas reliqua eſſe maiores, quomodocunque ſumantur: quippe cum demonſtratum ſit, omnis trianguli duo latera, quomodocunque ſumpta reliquo maiora eſſe. *Tertius, inquit, conicorum liber continet multa, & admirabilia theoremata, quæ ad ſolidorum locorum compoſitiones utilia erunt.* **loci plani.** *planos locos antiqui geometræ appellare conſueuerunt, quando non ab uno dũtaxat puncto, ſed à pluribus problema efficitur. ut ſiquis proponat, Data recta linea terminata, inuenire punctum, à quo ducta perpendicularis ad datam lineã, inter ipſius lineæ partes media proportionalis conſtituatur. locum eiuſmodi uocant geometræ, quoniam non unum dumtaxat eſt punctum, quod problema efficit, ſed locus totus, quem habet circumferentia circuli circa datam rectã lineam, ueluti circa diametrum deſcripti. ſi enim in data recta linea ſemicirculus deſcribatur; quodcunque in circumferentia ſumpſeris punctum, & ab ipſo perpendicularem ad diametrum duxeris, quod propoſitum eſt efficiet. Similiter autem data recta linea, ſi quis proponat inuenire extra ipſam punctum, à quo lineæ ad eius extrema ductæ inter ſe æquales ſint: & in hoc non unum dumtaxat eſt punctum, problema efficiens, ſed locus, quem continet linea, à puncto medio lineæ datæ ad rectos angulos ducta. nam ſi data linea bifariam ſecetur, & ab eo puncto linea ad rectos ducatur angulos, quodcunque in ipſa ſumpſeris punctum faciet illud, quod proponebatur. Simile quiddam & ipſe Apollonius* ἐν ἀναλυομένω τόπω *ſcribit.*

Datis duabus rectis lineis in plano, punctiſq; datis, & data proportione inæqualium linearum, poteſt in plano circulus deſcribi, ita ut lineæ à datis punctis ad circumferentiam circuli inclinatæ proportionem habeant eandem datæ proportioni.

Sint data puncta a b; proportio autem data, quam habet c ad d: ſitque c maior: & oporteat facere illud, quod propoſitum eſt. iungatur a b: & ad partes b producatur: & fiat ut d ad c, ita c ad aliam lineam, quæ maior erit, quàm d: ſit autem e d. rurſus fiat ut e ad a b, ita d ad b f, & c ad g. patet igitur lineam c proportionalem eſſe inter d & e d: itemq; g proportionalem inter a f, f b. **A** quare ſi ex centro f, & interuallo g circulus k h deſcribatur: circumferentia k h lineam a b ſecabit. Sumatur in circũferentia quoduis punctum h: & iungantur h a, h b, h f; erit h f ipſi g æqualis: & propterea ut a f ad f h, ita h f ad f b. Sunt autem circa eundem angulũ h f b latera proportionalia. **6.ſexti.** ergo triangulũ a f h ſimile eſt triangulo h f b: & angulus f h b angulo h a b æqualis. ducatur per b ipſi a h æquidiſtans b l. & quoniã ut a f ad f h, ita eſt h f ad f b; **cor.20. ſexti.** erit prima a f ad tertiam f b, ut quadratum a f ad f h quadratum. **4.ſexti.** ſed ut a f ad f b, ita a h ad b l. ergo ut quadratũ a f ad quadratum f h, ita a h ad b l. Rurſus quoniam angulus b h f æqualis eſt angulo h a b: **29.primi.** & angulus a h b angulo h b l æqualis, coalterni enim ſunt: & reliquus reliquo æqualis erit: & triangulum a h b ſimile triangulo b h l. **4.ſexti.** quare latera, quæ circum æquales angulos, proportionalia ſunt: uidelicet ut a h ad h b, ita h b ad b l: & ut quadratum a h ad quadratum h b, ita a h ad b l. erat autem ut a h ad b l, ita quadratum a f ad quadratum f h. ut igitur quadratũ a f ad quadratum f h, ita quadratum a h ad quadratum h b. **22.ſexti.** & idcirco ut a f ad f h, ita a h ad h b. **B** Sed ut a f ad f h, ita e d, ad c, & c ad d. ergo ut c ad d, ita a h ad h b. Similiter oſtendemus omnes alias lineas, quæ à punctis a b ad circumferentiam circuli inclinantur eandem proportionem habere, quam habet c ad d. itaque dico ſi à punctis a b ducantur



cantur lineæ ad aliud, quod non ſit in circumferentia circuli: ipſarum non eandem eſ-
ſe proportionem, quæ eſt c ad d. nam ſi eſſe poteſt, factum iam illud ſit ad pũctum m,
quod extra circumferentiam ſumatur (eo enim intra ſumpto idem abſurdum ſeque-
tur) & iunctis m a, m b, m f, ut eſt c ad d, ita ponatur a m ad m b. ergo ut e d ad d, ita C
quadratum e d ad quadratum c; & quadratum a m ad quadratum m b. ut autem e d D
ad d, ita poſita eſt a f ad f b. quare ut a f ad f b, ita quadratum a m ad quadratum
m b: & ex iis quæ proxime dicta ſunt, ſi à puncto b ducatur linea ipſi a m æquidiſtans; E
ut a f ad f b, ita demonſtrabitur quadratum a f ad f m quadratum. Sed demonſtra-
tum eſt ut a f ad f b, ita quadratum a f ad quadratum f h. ergo linea f h ipſi f m eſt 9. quinti
æqualis. quod fieri non poteſt.

Loci igitur plani eiuſmodi ſunt. ſolidi uero loci appellantur ex eo quod lineæ, per quas ipſo- Loci ſoli
rum problemata efficiuntur, à ſolidorum ſectione generationem habent, quales ſunt coni ſectio- di
nes, & complures aliæ. Sunt etiam alij loci ad ſuperficiem dicti, quibus ex eorum proprietate nomen impoſitum eſt. Inuehitur deinde Apollonius in Euclidem, non ut Pappus & alij non nulli arbitrantur, quòd duas medias proportionales non inuenerit: ſiquidem Euclides recte inuenit unam mediam proportionalem, non infæliciter, ut ipſe inquit: duas uero proportionales medias neque omnino in elementis inueſtigare aggreſſus eſt, & Apollonius de duabus medijs proportionalibus in tertio libro nihil inquirere uidetur. Sed ueriſimile eſt Euclidem in alio libro de locis conſcripſiſſe, qui ad manus noſtras non peruenerit. Quæ uero deinceps ſubiungit de quarto libro perſpicua ſunt. Quintus, inquit, liber de minimis & maximis magna ex parte agit. Quemadmodum enim in elementis didicimus, ſi ab aliquo puncto in circulum lineæ ducantur, earum quidem, quæ ad concauam ipſius circumferentiam pertinent, maximam eſſe quæ per centrum tranſit; earum uero, quæ ad conuexam, minimam eſſe, quæ inter dictum punctum, & diametrum interijcitur: ita & de coni ſectionibus in quinto libro inquirit. Sexti, ſeptimi, & octaui libri propoſitum manifeſte ab ipſo Apollonio explicatur. & hæc de epiſtola dicta ſint.

FED. COMMANDINI IN PROBLEMA
APOLLONII COMMENTARIVS.

Itemque g proportionalem inter a f, f b] *Quoniam enim ut d ad b f, ita eſt c ad g;* A
erit permutando ut d ad c, ita b f ad g. rurſus quoniam ut e ad a b, ita d ad b f ex 12. quinti, e d ad a f erit, ut d ad b f. Sed ut d ad b f, ita c ad g. ergo e d ad a f, ut c ad g: & permutando e d ad c, ut a f ad g: conuertendoq; c ad d e, ut g ad a f. erat autem d ad c, ut b f ad g: & ut d ad c, ita c ad d e. quare ut b f ad g, ita g ad a f: & propterea g media proportionalis eſt inter a f, f b. quod demonſtrare oportebat.

Sed ut a f ad f h, ita e d ad c.] *Proxime enim oſtendimus e d ad c ita eſſe, ut a f ad* B
g; hoc eſt ad f h ipſi g æqualem.

Ergo ut e d ad d ita quadratum e d ad quadratum c, & quadratum a m ad qua- C
dratum m b.] *Nam ut e d ad c, ita eſt c ad d: & ut c ad d, ita poſita eſt a m ad m b. qua-*
re ut e d ad c, ita a m ad m b: & ideo ut quadratum e d ad quadratum c, ita quadratum a m 22. ſexti
ad quadratum m b. ut igitur e d ad d, ita eſt quadratum e d ad quadratum c, & quadratum 20. ſexti
a m ad quadratum m b.

Vt autem e d ad d, ita poſita eſt a f ad f b.] *Superius namque demonſtratum eſt, ut* D
e d ad a f, ita eſſe d ad b f. quare & permutando ut e d ad d, ita a f ad f b.

Et ex iis quæ proxime dicta ſunt, ſi à puncto b ducatur linea ipſi a m æquidi- E
ſtans: ut a f ad f b, ita demonſtrabitur quadratum a f ad f m quadratum.] *Duca-*
tur per b ad m f linea b n, quæ ipſi a m æquidiſtet. erit ob ſimilitudinem triangulorum a m f,
b n f, ut a f ad f b, ita a m ad b n. Itaque quoniam ut a f ad f b, ſic eſt quadratum a m ad 4. ſexti
quadratum m b; & ſic quadratum a f ad quadratum f b: erit quadratum a m ad quadratum
m b, ut quadratum a f ad f b quadratum: & propterea linea a m ad m b, ut a f ad f b: con- 22. ſexti
uertendoque m b ad a m, ut f b ad a f. erat autem a m ad b n, ut a f ad f b. quare ex æquali
m b ad b n, ut b f ad f b. ſed eſt a m ad m b, ut a f ad f b: & ut a f ad f b, ita b f ad f b. ergo
ut a m ad m b, ita m b ad b n. Quoniam igitur circa æquales angulos a m b, m b n latera pro- 29. primi

6. ſexti *portionalia ſunt: erit triangulum abm ſimile triangulo mnb: & angulus bam æqualis angulo nmb. ſed triangulorum amf, mbf angulus fam eſt æqualis angulo fmb: & angulus ad f utrique communis. ergo & reliquus reliquo æqualis, & triangulum triangulo ſimile* 4. ſexti *erit. quare ut af ad fm, ita eſt fm ad fb. ut igitur prima af ad fb tertiam, ita quadratum af ad fm quadratum.* cor. 20. ſexti.

DIFFINITIONES PRIMAE.

A 1 SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in utramque partẽ producatur: & manente puncto conuertatur circa circuli circumferentiam, quouſque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri: ſuperficiem à recta linea deſcriptam, conſtantemq; ex duabus ſuperficiebus, ad uerticem inter ſe ſe aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam deſcribit in infinitum producta, uoco conicam ſuperficiem. 2 Verticem ipſius, manens punctum. 3 Axem, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur. 4 Conum autem uoco, figuram contẽtam circulo, & conica ſuperficie, quæ inter uerticem, & circuli circumferentiam interiicitur. 5 Verticem coni, punctum, quod & ſuperficiei conicæ uertex eſt. 6 Axem, rectã lineam, quæ à uertice ad circuli centrum perducitur. 7 Baſim, circulum ipſum. 8 Conorum rectos quidem uoco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus. 9 Scalenos uero, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent. B 10 Omnis curuæ lineæ, in uno plano exiſtentis diametrum uoco rectam lineam, quæ quidem ducta à linea curua; omnes lineas, quæ in ipſa ducuntur, cuidam lineæ æquidiſtantes bifariam diuidit. 11 Verticem lineæ terminum rectæ, qui eſt in ipſa linea. 12 Ordinatim ad diametrum applicari dicitur, unaquæque linearum æquidiſtantium. C 13 Similiter & duarum curuarum linearum in uno plano exiſtentium, diametrum quidem tranſuerſam uoco, rectam lineam, quæ omnes in utraque ipſarum ductas, lineæ cuidam æquidiſtantes bifariam diuidit. 14 Vertices linearum, diametri terminos, qui ſunt in ipſis lineis: 15 Rectam uero diametrum uoco, quæ inter duas lineas poſita, lineas omnes ductas, rectæ cuidam æquidiſtantes, & inter ipſas interiectas bifariam ſecat. 16 Ordinatim ad diametrum applicari dicitur unaquæque linearum æquidiſtantium. 17 Coniugatas diametros uoco curuæ lineæ & duarum curuarum, rectas lineas, quarum utraque diameter eſt, & lineas alteri æquidiſtantes bifariam diuidit. 18 Axem uero curuæ lineæ, & duarum curuarum, rectam lineã, quæ cum ſit diameter curuæ lineæ, uel duarum curuarum, æquidiſtantes ad rectos ſecat angulos. 19 Axes coniugatos curuæ lineæ, & duarum curuarum, rectas lineas, quæ cum ſint diametri coniugatæ, ipſis æquidiſtantes ad rectos angulos ſecant.

EVTO

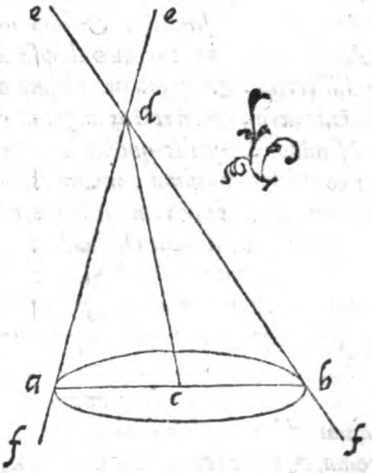
EVTOCIVS.

***Aggressvs** ad diffinitiones Apollonius tradit generationem conicæ ſuperficiei, non diffinitionem, quæ, quid res ſit, declarat: quamquam licebit utique ijs, qui uolent, & ex generatione ipſa diffinitionem colligere. At uero nos ijs, quæ ab Apollonio dicuntur, ex figuris lucem afferemus.*

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli: &c. A

Sit circulus a b, cuius centrum c: & punctum aliquod ſublime d: iunctáque d b in infinitum ex utraque parte producatur ad puncta e f. Si igitur recta linea d b feratur eo uſque in circuli a b circumferentia, quouſque punctum b rurſus in eum locum reſtituatur, à quo cœpit moueri: deſcribet ſuperficiem quandam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus, ad d punctum ſe ſe tangentibus. eam uoco conicam ſuperficiem; quæ & augetur in infinitum, cum recta linea d b, ipſam deſcribens in infinitum producitur. uerticem ſuperficiei dicit, punctum d: axem, rectam d c. conum uero appellat figuram contentam circulo a b, & ea ſuperficie, quam d b ſola deſcribit: coni uerticem punctum d: axem d c: & baſim, a b circulum. At ſi d c ad circulum, fuerit perpendicularis, rectum uocat conum; ſin minus, ſcalenum.

Deſcribetur autem conus ſcalenus, quando à centro circuli linea erigatur, quæ non ſit perpendicularis ad circuli planum: à puncto uero lineæ, quod eſt in ſublimi ad circuli circumferentiam recta linea ducatur: & manente puncto circa ipſam conuertatur: compræhenſa etenim figura conus erit ſcalenus. conſtat igitur lineam circum ductam in conuerſione quandoque maiorem; quandoque minorem, & quandoque æqualem fieri, ad aliud, atque aliud circuli punctum. quod tamen nos hoc modo demonſtrabimus.

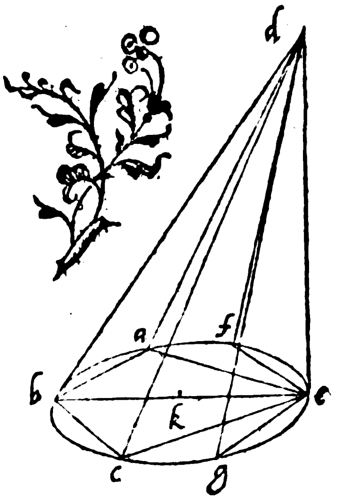


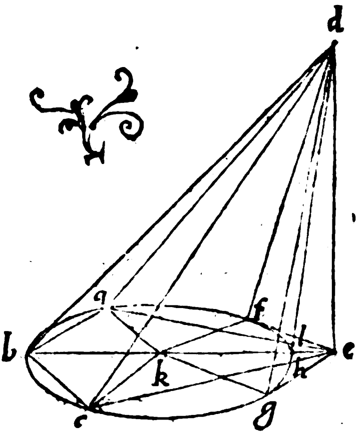
Si à uertice coni ſcaleni ad baſim rectæ lineæ ducantur; earum omnium una minima, & una maxima erit, duæ uero tantum ex utraque parte minimæ & maximæ inter ſe æquales. At quæ propinquior eſt minimæ ſemper minor erit, quàm quæ ab ipſa magis diſtat.

Sit conus ſcalenus, cuius baſis a b c circulus, uertex autem punctum d. & quoniam linea, quæ à uertice coni ſcaleni ad ſubiectum planum perpendicularis ducitur, uel in circumferentiam circuli a b c cadit, uel extra, uel intra. cadat primum in ipſam circumferentiam, ut in prima figura apparet, quæ ſit d e: ſumptóq; circuli centro k, ab ipſo e ad k ducatur linea e k, & producatur ad b. iungatur autem b d: & ex utraque parte puncti e ſumantur duæ circumferentiæ æquales f e, e g: itémq; ex utraque parte b ſumantur aliæ duæ æquales a b, b c: & iungantur f e e g, d f, d g, a e, e c, a b, b c, d a, d c. Quoniam igitur recta linea e f æqualis eſt ipſi e g: æquales enim circumferentias ſubtendunt: communis autem, & ad rectos angulos d e: erit baſis d f baſi d g æqualis. rurſus quoniam circumferentia a b æqualis eſt ipſi b c circumferentiæ, & eſt b e diameter circuli: reliqua e f a reliquæ e g c æqualis erit. quare & recta linea a e ipſi e c. Sed d e communis eſt utrique, & ad rectos angulos. baſis igitur a d æqualis eſt baſi d c. Similiter autem demonſtrabuntur inter ſe æquales, quæcunque ab ipſa d e, uel d b æqualiter diſtant. Rurſus quoniam triangulum eſt e d f, & angulus d e f rectus, linea d f, maior erit, quàm d e. & quoniam recta linea a e maior eſt, quàm recta e f, quòd & circumferentia e f a maior; quàm

29. tertii
4. primi
18. primi

47. primi ipſa e f circumferentia: communis uero & ad rectos angulos d e: baſis d f minor erit, quàm d a.
eadem quoque ratione, & d a minor, quàm d b. Quod cum oſtenſa ſit d e minor, quàm d f;
itemq; d f minor, quàm d a, & d a minor, quàm d b:
ſequitur ipſam d e minimam eſſe; d b uero maximam: &
quæ propinquior eſt ipſi d e ſemper minorem eſſe, quàm
quæ ab ipſa magis diſtat. Sed cadat perpendicularis d e
extra circulum a b c g f, ut in ſecunda figura: & rurſus
ſumatur circuli centrum K: iunctaque e h K producatur
ad b: & iungantur d b, d h. Sumantur præterea duæ circumferentiæ
æquales ex utraque parte puncti h, quæ ſint
f h, h g: & ex utraque parte ipſius b aliæ duæ ſumantur
a b b c, poſtremo iungantur e f, e g, f K, K g, d f, d g,
a b, b c, a K, K c, d a, d c. itaq; quoniam æqualis eſt circumferentia
27. tertii. h f ipſi h g: & angulus h K f angulo h K g
æqualis erit. Sed recta linea f K rectæ K g eſt æqualis,
ex centro enim ad circumferentiam ducuntur: & communis
8. primi K e, ergo baſis f e æqualis baſi g e. eſt autem communis,
& ad rectos angulos d e. baſis igitur d f baſi d g
eſt æqualis. Rurſus quoniam circumferentia b a æqualis
eſt circumferentiæ b c: & angulus a K b ipſi c K b, &
13. primi. reliquus ex duobus rectis a K e reliquo c K e æqualis erit. lineæ autem a K, K c inter ſe æquales,
ex centro enim ſunt; & communis ipſa k e. ergo & a e baſis æqualis baſi c e. rurſus cum
ſit d e communis, & ad rectos angulos, & d a baſis erit
baſi d c æqualis. ſimiliter & aliæ omnes ad inuicem
æquales demonſtrabuntur, quæ ab ipſa d b, uel d h æqualiter
diſtiterint. & quoniam e h minor eſt, quàm e f:
communis uero, & ad rectos angulos e d, erit baſis d h
8. tertii baſi d f minor. Rurſus quoniam linea, quæ à puncto e
ducta contingit circulum, maior eſt omnibus, quæ ab
eodem puncto in conuexam circumferentiam cadunt: &
36. tertii rectangulum a e l æquale eſt quadrato ipſius e f, quando
e f circulum contingit, ut oſtenſum eſt in tertio libro elementorum;
14. ſexti erit ut a e ad e f, ita e f ad e l. eſt autem e f
8. tertii maior, quàm e l, ſemper enim propinquior minimæ minor
14. quinti eſt ea, quæ plus diſtat. quare & a e maior quàm e f.
Sed communis, & ad rectos angulos eſt e d. baſis igitur
d f minor eſt baſi d a. rurſus cum ſit a k æqualis ipſi k b,
& communis k e: erunt duæ lineæ a k, k e duabus e k,
20. primi k b, hoc eſt toti e b æquales. Sed duæ a k, k e maiores
ſunt, quàm e a. ergo & b e maior quàm a e. communis
autem d e, & ad rectos angulos. quare baſis d a minor eſt baſi d b. Itaq; cum d h minor ſit,
quàm d f; & d f minor, quàm d a; & d a, quàm d b: minima erit d h; d b uero maxima: & ipſi
d h propinquior ſemper minor erit, quàm quæ magis diſtat.





Poſtremo cadat perpendicularis d e intra circulum a b c g f, ut in tertia figura: ſumptoq; circuli
centro k; & iuncta e k producatur in utramque partem ad puncta b h. & iungantur d b,
d h. ſumantur autem ex utraque parte puncti h circumferentiæ æquales f h, h g: & ex utraque
parte b ſumantur a b b c; denique iungantur e f, e g, f k, k g, d f, d g, k a, k c, e a, e c, d a, d c,
27. tertii a b, b c. Quoniam igitur h f circumferentia æqualis eſt circumferentiæ h g: & angulus h k f
4. primi angulo h k g eſt æqualis: linea uero k f æqualis ipſi k g: & k e communis. ergo & f e baſis
baſi g e æqualis erit. Sed eſt d e communis: & angulus f e d rectus æqualis recto g e d. quare
& baſis d f baſi d g æqualis. rurſus cum circumferentia a b æqualis ſit circumferentiæ b c;
angulus a k b angulo c k b æqualis erit. ergo & reliquus ex duobus rectis a k e reliquo c k e. eſt
autem linea a k æqualis k c: & communis k e. baſis igitur a e baſi c e æqualis. Sed cum d e communis
ſit: & angulus a e d æqualis angulo c e d, quod uterque rectus: erit & baſis d a baſi d c
æqualis.

æqualis. Eodem modo & omnes, quæ æqualiter diſtant ab ipſa d b, uel d h inter ſe æquales demonſtrabuntur. Itaque quoniam in circuli a b c diametro ſumitur punctum e, quod non eſt centrum circuli, erit e b maxima, e h uero minima: & ſemper ipſi e h propinquior minor ea, quæ diſtantior fuerit. quare e h minor, quàm e f. at e d communis eſt, & ad rectos angulos. baſis igitur d h minor baſi d f. rurſus cum e f minor ſit, quàm e a, communisq́; , & ad rectos angulos e d: baſis d f baſi d a minor erit. & eadem ratione baſis d a minor, quàm d b oſtendetur. Quoniam igitur minor eſt d h, quàm d f: & d f quàm d a; & d a quàm d b: minima erit d h, & d b maxima: & propinquior ipſi d h ſemper minor ea, quæ magis diſtat. 7.tertii

D

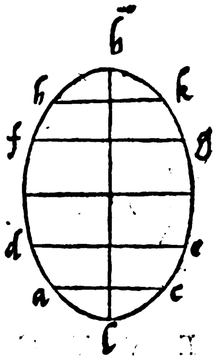
Omnis curuæ lineæ in uno plano exiſtentis diametrum uoco rectam lineam &c.

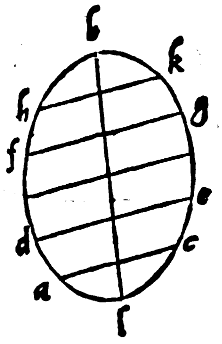
In uno plano dixit propter helicam cylindri & ſphæræ: hæ enim non ſunt in uno plano. Quod autem dicit eiuſmodi eſt. ſit curua linea a b c: & in ea æquidiſtantes a c, d e, f g, h k: à puncto autem b ducatur b l recta linea, quæ ipſas æquidiſtantes bifariam ſecet. lineæ igitur a b c diametrum, inquit, uoco rectam lineam b l: & uerticem punctum b. ordinatim uero ad ipſam b l applicari dicitur unaquaque linearum a c, d e, f g, h K. Quod ſi b l æquidiſtantes bifariam, & ad rectos angulos ſecet, axis appellatur.

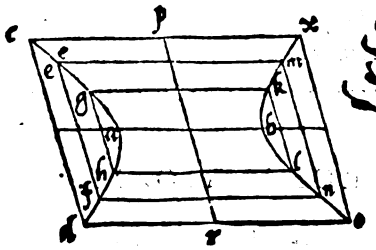
Similiter & duarum curuarum linearum, &c.

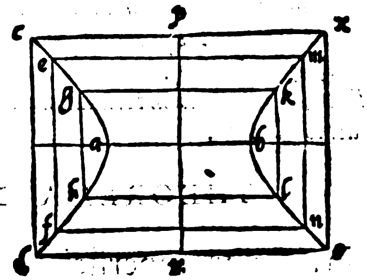
C

Si enim intellexerimus lineas a b, & in ipſis æquidiſtantes c d, e f, g h, K l, m n, x o: & diametrum a b ex utraque parte productam, quæ bifariam æquidiſtantes diuidat: ipſam quidem a b uoco diametrum tranſuerſam: uertices linearum puncta a b: ordinatim uero ad a b diametrum applicari dicuntur c d, e f, g h, K l, m n, x o. At ſi bifariam, & ad rectos angulos diuidat, tráſuerſus axis appellabitur. Si uero recta linea, ut p r ducta lineas c x, e m, g K, h l, f n, d o, ipſi a b æquidiſtátes bifariam ſecet: recta diameter dicitur. Ordinatim ad p r diametrum applicatur unaquæque linearum c x, e m, g K, h l, f n, d o. ſi bifariam, & ad rectos angulos ſecet, rectus axis dicitur. At uero ſi rectæ lineæ a b, p r ipſis æquidiſtantes bifariam ſecuerint, coniugatæ diametri. Quod ſi bifariam, & ad rectos angulos, coniugati axes uocabuntur.







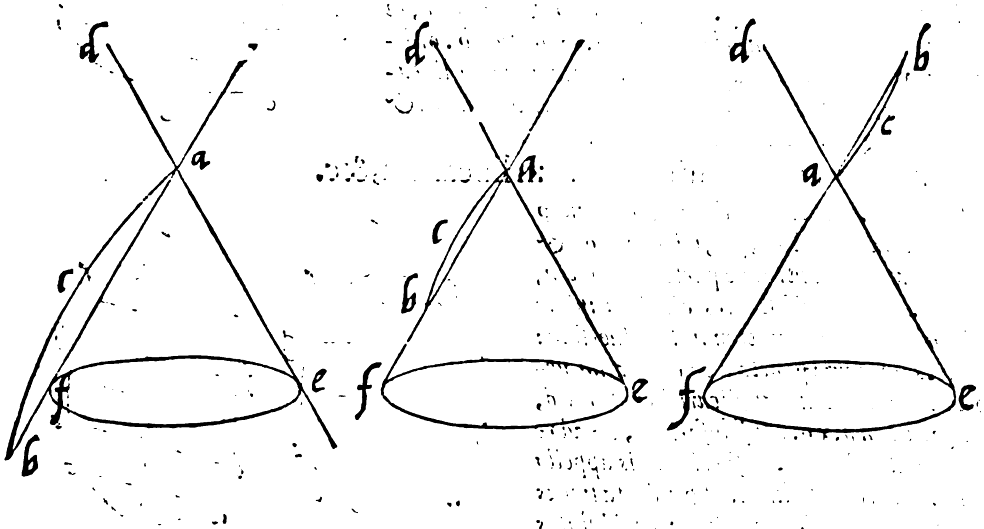


THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Rectæ lineæ, quæ à uertice ſuperficiei conicæ ad puncta, quæ in ſuperficie ſunt, ducuntur; in ipſa ſuperficie erunt.

Sit ſuperficies conica, cuius uertex a: & ſumpto in ea aliquo puncto b, iungatur recta linea a c b. Dico a c b in ſuperficie eſſe. Si enim fieri poteſt, non ſit in ſuperficie: & recta linea, quæ ſuperficiem deſcribit, ſit d e: circulus autem, in quo ipſa d e fertur, ſit e f. itaque ſi manente a feratur d e in e f circuli circumferentia, per b punctum tranſibit: atque erunt duarum linearum ijdem termini, quod eſt abſurdum. non igitur à puncto a ad b ducta linea extra ſuperficiem eſt. ergo in ipſa ſuperficie erit.

Ex quibus conſtat, ſi à uertice ad aliquod punctum eorum, quæ intra ſuperficiem ſunt, recta linea ducatur, intra; & ſi ad aliquod eorum, quæ ſunt extra, extra ſuperficiem cadere.



EVTOCIVS.

De figuris differentibus, uel caſibus theorematum illud ſcire oportet, caſum eſſe, quádo ea, quæ in propoſitione dantur, poſitione data ſint. ipſorum enim differens tranſmutatio, eadem concluſione manente, caſum facit. ſimiliter autem & à conſtructione tranſpoſita fit caſus. cum igitur theoremata plures caſus habeant, una eadémq; demonſtratio omnibus congruit, & iiſdem elementis: præter quàm in paucis quibuſdam, ut deinceps explicabimus. Statim namque primum theorema tres habet caſus, propterea quòd punctum b interdum quidem in ſuperficie inferiori ſumitur, & hoc duobus modis, uel ſupra circulum, uel infra: interdum uero in ea, quæ eſt ad uerticem. primum igitur theorema oſtendere proponit, non quælibet duo puncta coniungentem rectam lineam in ſuperficie eſſe, niſi quæ ad uerticem ipſum pertineat. cuius cauſa eſt, quòd conica ſuperficies efficitur à recta linea, quæ manentem terminum ad uerticem habet. Illud uero planè ita eſſe, in ſecundo theoremate demonſtratur.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si in alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad uerticem, duo puncta ſumantur: & quæ puncta coniungit recta linea ad uerticem non pertineat, intra ſuperficiem cadet: quæ uero eſt in directũ ipſi, cadet extra.

Sit

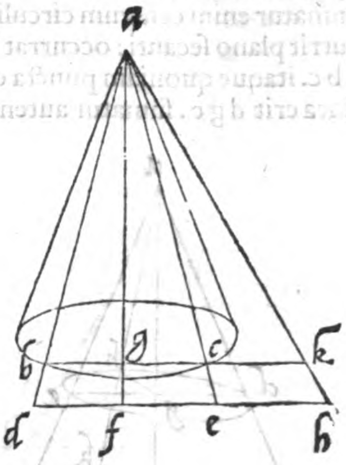
Sit conica ſuperficies, cuius uertex quidem a; circulus autem, in quo fertur linea ſuperficiem deſcribens, ſit b c & in alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad uerticem, ſumptis duobus punctis d e, linea d e ducatur, quæ ad punctum a non pertineat. Dico ipſam d e intra ſuperficiem cadere: & quæ eſt in directum ipſi, cadere extra. iungantur a d, a e, & producantur. cadent utique in circuli circumferentiam. cadant in puncta b c: & iungatur b c: erit igitur b c intra circulum. quare & intra conicam ſuperficiē. ſumatur in ipſo d e quoduis punctum f: iunctaq; a f producatur. cadet in lineam b c: nam triangulum b c a in uno plano exiſtit. itaque cadat in g. quoniam igitur punctū g eſt intra conicam ſuperficiem: & ipſa a g; & punctum f intra conicam ſuperficiem erit. ſimiliter autem demonſtrabuntur & omnia alia puncta lineæ d e eſſe intra conicam ſuperficiem. ergo & ipſa d e intra eandem cadet. producatur d e ad h. dico lineā e h extra conicam ſuperficiem eſſe. ſi enim fieri poteſt, aliquod ipſius punctum h non ſit extra, & iuncta a h producatur. cadet in ipſam circuli circumferentiam, uel intra; quod fieri non poteſt. cadit enim in lineam b c protractam, ut in k. quare e h extra conicam ſuperficiem erit. linea igitur d e cadet intra conicam ſuperficiem: & quæ eſt in directum ipſi, extra cadet.

1. huius

2. tertii

2. undecimi.

cor. 1. huius



EVTOCIVS.

SECVNDVM theorema tres habet caſus, propterea quod puncta d e ſumuntur quandoque in ſuperficie ſecundum uerticem, quandoque in inferiori: & id dupliciter, uel intra circulum, uel extra. Sciendum autem eſt in quibuſdam exemplaribus totum hoc theorema per argumentationem, quæ deducit ad id, quod fieri non poteſt, demonſtrari.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si conus plano per uerticem ſecetur, ſectio triangulum erit.

Sit conus, cuius uertex a; baſis autem circulus b c: & per a ſecetur plano aliquo, quod ſectiones faciat in ſuperficie a b, a c lineas; & in baſi lineam b c. Dico a b c triangulum eſſe. Quoniam enim à puncto a ad b ducta linea communis ſectio eſt plani ſecātis, & ſuperficiei conicæ, erit a b recta linea. Eadem ratione & ipſa a c. eſt autem & b c recta. quare triangulum eſt a b c. ſi igitur conus plano ſecetur per uerticem, ſectio triangulum erit.

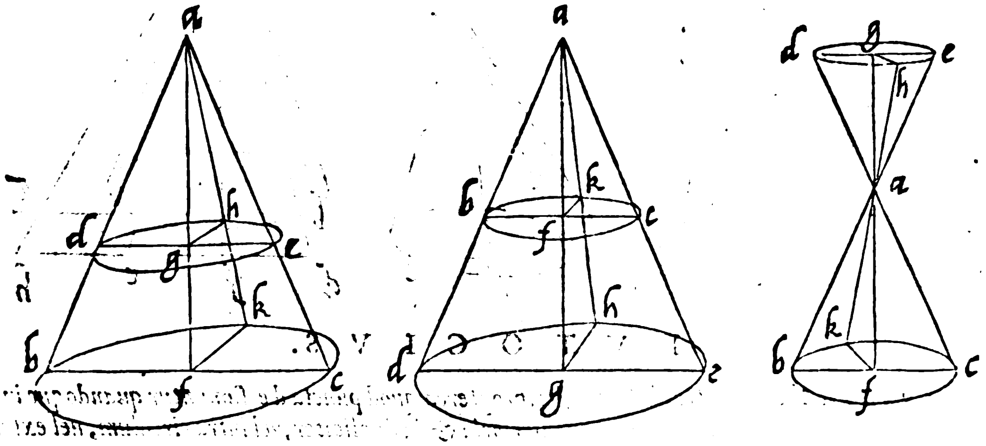
EVTOCIVS.

Tertivm theorema caſum non habet. oportet autem ſcire lineam a b rectam eſſe, cum ſit cõmunis ſectio plani ſecantis & ſuperficiei conicæ, quæ à recta linea manentem terminum ad verticẽ habente, deſcribitur. neque enim omnis ſuperficies ſecta plano ſectionem facit rectam lineam: neq; ipſe conus, niſi planum ſecans per uerticem tranſeat.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad uerticem plano ſecetur, æquidiſtante circulo, per quem fertur recta linea ſuperficiem deſcribens: planum, quod ſuperficie concluditur, circulus erit, centrum in axe habens: figura uero contenta circulo, & ea parte ſuperficiei conicæ, quæ inter ſecans planum & uerticem interiicitur, conus erit.

SIT conica ſuperficies, cuius uertex a: circulus autem, in quo fertur recta linea ſuperficiem deſcribens, b c: & ſecetur plano ipſi circulo b c æquidiſtante; quod ſectionem faciat in ſuperficie lineam d e. Dico d e circulum eſſe, qui centrum in axe habet.
6.diff. huius. Sumatur enim centrum circuli b c, quod ſit f: & a f iungatur. axis igitur eſt a f: & oc-
3.huius currit plano ſecanti: occurrat in g: & per a f planum ducatur. erit ſectio triangulum
3.undecimi. a b c. itaque quoniam puncta d g e ſunt & in plano ſecante, & in ipſo a b c plano: recta linea erit d g e. ſumatur autem in ipſa d e punctum aliquod h: & iuncta a h producatur, quæ circumferentiæ b c occurrat in k: iunganturq; g h, f k. & quoniam duo plana



16.undecimi d e, b c æquidiſtantia à plano a b c ſecantur; communes ipſorum ſectiones æquidiſtan-
4.ſexti. tes erunt. æquidiſtat igitur linea d e ipſi b c. & eadem ratione g h ipſi f k. quare ut f a ad a g, ita f b ad d g; f c ad g e; & f k ad g h; ſuntq; tres lineæ b f, f k, f c æquales inter ſe ſe. ergo & ipſæ tres d g, g h, g e inter ſe ſe æquales erunt. ſimiliter quoque oſtẽdentur æquales quæcunque à puncto g ad lineam d e ducuntur. circulus igitur eſt linea d e, centrum in axe habens.

Conſtat præterea figuram contentam circulo d e, & ea parte ſuperficiei conicæ, quæ inter dictum circulum, & punctum a interiicitur, conum eſſe: ſimulq; demonſtratum eſt communem ſectionem plani ſecãtis, & trianguli per axem diametrum eſſe ipſius circuli.

EVTOCIVS.

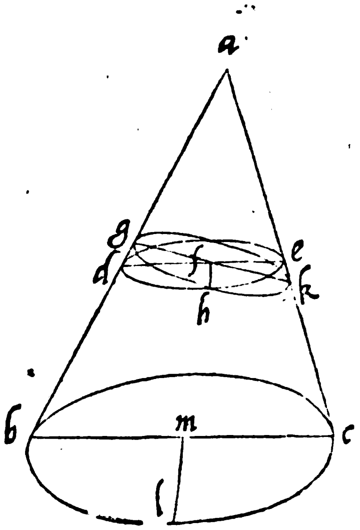
Casvs huius theorematis tres ſunt, quemadmodum & præcedentis & ſecundi.

THEO-

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

SI conus ſcalenus plano per axem ſecetur ad rectos angulos ipſi baſi; ſeceturq; altero plano ad triangulum per axem recto, quod ex uerticis parte triangulum abſcindat ſimile ei, quod per axem, ſubcontrarie uero poſitum: ſectio circulus erit. uocetur autem huiuſmodi ſectio ſubcontraria.

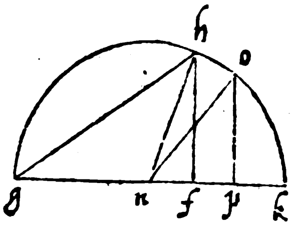
Sit conus ſcalenus, cuius uertex a punctum; baſis circulus b c: & ſecetur plano A
per axem, ad circulum b c recto, quod faciat ſectionem triangulum a b c. ſecetur au- B
tem, & altero plano ad rectos angulos ipſi a b c, quod ex parte a triangulum abſcindat a g k triangulo a b c ſimile, ſub contrarie uero poſitum; ut uidelicet angulus a k g æqualis, ſit a b c angulo: & faciat ſectionem in ſuperficie lineam g h k. Dico ipſam g h k circulum eſſe. Sumantur enim in lineis g h k, b c puncta quæpiam h l: à qui-
bus ad planum, quod per triangulum a b c tranſit, perpendiculares ducantur, ca- 38. unde.
dent hæ in communes planorum ſectiones. cadant ut h f, l m. æquidiſtans eſt igitur 6. undec.
h f ipſi l m. ducatur autem per f ipſi b c æquidi-
ſtans d f e. ergo planum, quod per f h, d e tranſit 15. unde.
æquidiſtans eſt baſi ipſius coni: & idcirco ſectio 4. huius
d h e circulus erit, cuius diameter d e. æquale eſt 8. & 17. ſexti.
igitur rectangulum d f e quadrato f h. Quòd cum
æquidiſtet d e ipſi b c, angulus a d e æqualis eſt 29. primi
angulo a b c. & ponitur angulus a k g angulo a b c
æqualis. ergo & a k g ipſi a d e æqualis erit. ſunt
autem & qui a d f anguli æquales, quòd ſint ad 15. primi.
uerticem. quare d f g triangulum ſimile eſt trian-
gulo k f e. & ut e f ad f k, ita g f ad f d. rectangu- 4. ſexti
lum igitur e f d æquale eſt rectangulo k f g. Sed 16. ſexti
rectangulum e f d demonſtratum eſt æquale qua- C
drato f h. ergo & k f g eidem æquale erit. ſimili
quoque ratione demonſtrabuntur & omnes, quæ
à linea g h k ad ipſam g k perpendiculares ducun-
tur, poſſe æquale ei, quod partibus ipſius g k conti- 2. lemm. pappi
netur. ſectio igitur circulus eſt, cuius diameter g k. D

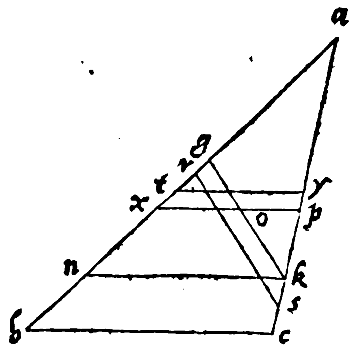


EVTOCIVS.

Quintum theorema caſum non habet. exordiens autem Apollonius expoſitionem. Secetur, A
inquit, conus per axem plano ad baſim recto. *Sed quoniam in cono ſcaleno iuxta unam*
duntaxat poſitionem triangulum per axem ad baſim rectum eſt: hoc ita faciemus; ſumentes nam-
que baſis centrum: ab eo erigemus lineam ad rectos angulos ipſi plano baſis: perq; eiuſmodi lineam,
& per axem planum ducentes, id, quod propoſitum fuerat, aſſequemur: oſtenſum etenim eſt in
undecimo libro elementorum Euclidis, ſi recta linea plano alicui ad rectos angulos fuerit, & omnia, 18. undecimi
quæ per ipſum ducuntur, plana eidem ad rectos angulos eſſe. conum uero ſcalenum poſuit, quoniam
in æquicruri planum baſi æquidiſtans idem eſt, quod ſub contrarie ductum. præterea ſecetur, in- B
quit, & altero, plano ad rectos angulos ipſi triangulo per axem, quod abſcindat ex
uerticis parte triangulum ſimile ipſi a b c, ſubcontrarie uero poſitum. *illud ita fiet. ſit*
triangulum per axem a b c: ſumaturq; in linea a b quoduis punctum g: & ad a g rectam lineam, 23. primi
& ad punctum in ea g, conſtituatur angulus a g k ipſi a c b æqualis. ergo triangulum a g k,
triangulo a b c ſimile erit; quamquam ſub contrariæ poſitum. itaque ſumatur in linea g k quod
libet punctum f, à quo erigatur f h ad rectos angulos ipſi plano trianguli a b c: & per lineas g k, 18. undecimi
h f planum ducatur. erit illud ad triangulum a b c rectum, quòd per lineam f h tranſeat: & faciet
id, quod faciendum proponebatur. In concluſione dicit, propter ſimilitudinem triangulo- C

rum dfg, efk æquale eſſe rectangulum dfe rectangulo gfk. *quod quidem & abſq; triangulorum*
ſimilitudine demonſtrari poteſt, hoc pacto: quoniam enim uterque angulorum akg, ade
21. tertii *æqualis eſt angulo, qui ad b, in eadem erunt portione circuli, puncta dgek compræhendentis. &*
35. tertii. *quoniam in circulo duæ rectæ lineæ de, gk ſeſe ſecant in f, rectangulum dfe æquale eſt rectangulo*
gfk. Similiter demonſtrabuntur & omnes lineæ ab ipſa ghk ductæ perpendiculares ad gk
D *rectam, poſſe æquale ei, quod partibus ipſius gk continetur.* circulus igitur ſectio eſt, cuius
diameter gk. *poſſumus autem hoc demonſtrare per deductionem ad id, quod fieri non poteſt. Si*
enim circulus; qui circa gk deſcribitur, non tranſit per h punctum; erit rectangulum kfg æquale
quadrato lineæ maioris ipſa fh, uel minoris, quod non ponitur. ſed & illud idem recta demonſtratione
oſtendemus. ſit linea quædam ghk, cui ſubtendatur recta
gk: ſumantur autem & in linea duo quæuis puncta h, o, à
quibus ad ipſam gk perpendiculares ducantur hf, op: ſitq; quadratum
fh æquale rectangulo gfk: & quadratum op æquale
ipſi gpk rectangulo. Dico lineam ghok circulum eſſe. ſecetur
enim gk recta biſariam in puncto n: & iungantur gh, hn, no.
Quoniam igitur recta linea gk ſecatur in partes æquales in n, &
5. ſecundi *in partes inæquales in f: rectangulum gfk unà cum quadrato*
nf æquale erit quadrato nk. ſed rectangulum gfk poſitum eſt
47. primi. *æquale quadrato hf. quare hf quadratum unà cum ipſo nf æquale eſt quadrato nk. æqualia autem*
ſunt hf, fn quadrata ipſi quadrato nh, cum angulus ad f ſit rectus. ergo quadratum nh
9. tertii *quadrato nk æquale erit. ſimiliter oſtendemus quadratum no æquale eſſe quadrato nk, linea*
igitur ghk circulus eſt, & eius diameter gk. fieri autem
poteſt, ut diametri de, gk quandoque æquales ſint, quandoq;
inæquales: nunquam tamen ſe ſe biſariam ſecabunt. ducatur
enim per k ipſi bc æquidiſtans nk. Quoniam igitur
maior eſt ba quam ac, & ipſa na, quàm ak maior erit.
eadem ratione & ka maior eſt, quàm ag propter ſubcontrariam
ſectionem. quare ſi à linea an abſciſſa fuerit æqualis
ipſi ak: inter puncta gn cadet, ut ax: & per x ducta
æquidiſtans ipſi bc ſecabit gk. ſecet ut xop. itaque quoniam
4. ſexti *æqualis eſt xa ipſi ak, & ſicut xa ad ap, ita ka ad*
9. quinti *ag ob ſimilitudinem triangulorum gka, xpa: erit ag ipſi*
ap æqualis, & reliqua gx ipſi pk. & quoniam anguli ad
puncta x, k inter ſe æquales ſunt, uterq; enim ipſorum æqua
lis eſt angulo ad b: ſunt autem & qui ad o æquales, quòd ſecundum uerticem: erit triangulum
xgo ſimile triangulo pok. ſed æqualis eſt gx ipſi pk. quare & xo ipſi ok, & go ipſi op, &
tota gk toti xp eſt æqualis, ex quibus conſtat, ſi inter gx ſumatur punctum r, & per r ducatur
rſ æquidiſtans gk; ipſam rſ maiorem eſſe, quàm gk, & propterea maiorem, quàm xp. ſi uero
inter puncta rx ſumatur aliud punctum, ut t; & per ipſum ducatur ty æquidiſtans xp: minor
erit ty, quàm xp; & ob id minor, quàm gk. præterea cum angulus xpk maior ſit angulo axp:
19. primi. *æqualis autem opk ipſi ogx: erit ogx angulus maior angulo gxo. ergo linea xo maior ipſa*
og: & idcirco xo maior op. Quod ſi quandoque contingat, ut altera ipſarum biſariam ſecetur,
tunc alteram in partes inæquales ſecari neceſſe erit.





FED. COMMANDINVS.

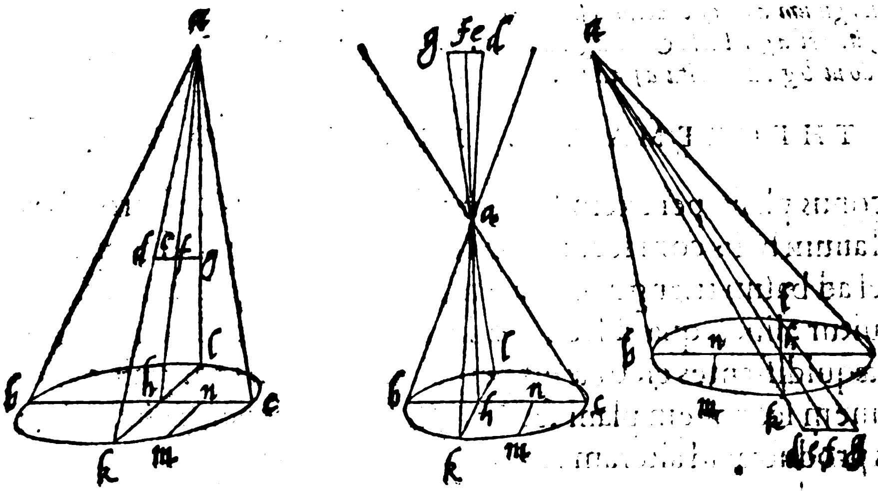
A Et ſecetur plano per axem ad circulum bc recto.] *Quomodo hoc faciendum ſit, demonſtrat etiam Serenus in libro de ſectione coni, propoſitione 14.*

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si conus plano per axem ſecetur; ſumatur autem aliquod punctum
A in ſuperficie coni, quod non ſit in latere trianguli per axem: & ab ipſo
ducatur recta linea, æquidiſtans cuidam rectæ, quæ perpendicularis eſt
à cir-

à circumferentia circuli ad trianguli baſim; triangulo per axem occurret, & ulterius producta uſque ad alteram ſuperficiei partem, bifariam ab ipſo triangulo ſecabitur.

Sit conus, cuius uertex a punctum: baſis autem circulus b c: ſeceturq; conus plano per axem, quod communem ſectionem faciat triangulum a b c: & ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt in b c circumferentia, ut ab m ducatur m n perpendicularis ad ipſam b c rectam: ſumatur quoque in ſuperficie coni punctum d, per quod ipſi m n æquidiſtans ducatur d e. Dico lineam d e occurrere ſuperficiei trianguli a b c, & ulterius productam in alteram partem coni, quouſque ad eius ſuperficiem pertineat, à trianguli a b c plano bifariam ſecari. iungatur a d, & producatur. occurret 1.huius
iam circumferentiæ circuli b c. occurrat in k, & à puncto k ad b c rectam perpendicularis ducatur k h l. æquidiſtans eſt igitur k h ipſi m n. quare & ipſi d e. ducatur ab 28. primi
a puncto ad h linea a h. itaque quoniam in triangulo a h k, ipſi h k æquidiſtat d e, B
conueniet d e producta cum linea a h. eſt autem a h in plano trianguli a b c. ergo d e trianguli a b c plano occurret. occurrat in f: & producatur d e f in rectum, quouſque ad ſuperficiem coni pertineat in g. Dico d f ipſi f g æqualem eſſe. Quoniam enim



puncta a g l ſunt & in ſuperficie coni, & in plano per a h, a k, d g, k l ducto, quod qui- 3.huius
dem triangulum eſt, cum per uerticem conum ſecet: erunt a g l in communi ſectione ſuperficiei coni, & ipſius trianguli. ergo recta linea eſt, quæ per a g l puncta tranſit. At cum in triangulo a l k, ipſi k h l baſi æquidiſtans ducta ſit d g: & à puncto a C
ducatur a f h: erit ut k h ad h l, ita d f ad f g. æqualis autem eſt k h ipſi h l, quod in 3.tertii
circulo b c perpendicularis ad diametrum ducitur k l. ergo & d f ipſi f g æqualis erit.

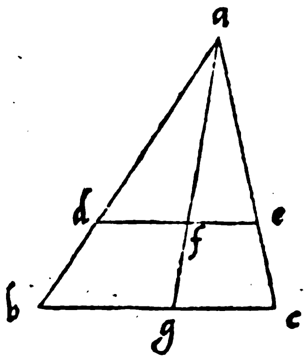
E V T O C I V S

Animadvertendvm eſt, non fruſtra apponi in propoſitione, oportere rectam lineam A
ductam à puncto ſuperficiei, æquidiſtantem eſſe cuidam rectæ, quæ à circuli circumferentia perpendicularis eſt ad baſim trianguli per axem. niſi enim hoc ita ſit, fieri non poteſt, ut recta linea à triangulo bifariam ſecetur, quod quidem ex deſcripta figura manifeſte apparet. Nam ſi linea m n, cui æquidiſtat d f g, ad ipſam b c non ſit perpendicularis: neque k l bifariam ſecabitur. eadem enim ratione colligimus, ut k h ad h l, ita eſſe d f ad f g. ergo & d g in partes inæquales ſecabitur ad punctum f. poteſt autem illud idem, tum infra circulum, tum in ſuperficie, quæ eſt ad uerticem, ſimiliter demonſtrari.

FED. COMMANDINVS.

B [1] Itaque quoniam in triangulo a h k, ipſi h k æquidiſtat d e, conueniet d e producta cum linea a h.] *Sequitur hoc ex ſecunda propoſitione perſpectiuæ Vitellionis. ſunt enim d e, h a in eodem plano; nam cum duas æquidiſtantes k h, d e coniungat recta linea k d: erunt ex ſeptima propoſitione undecimi elementorum tres lineæ h k, k d, d e in eodem plano. Sed & in eodem plano ſunt k h, h a ex ſecunda propoſitione eiuſdem libri. ergo d e, h a in eodem plano ſint neceſſe eſt.*

C [1] At cum in triangulo a l k ipſi k h l baſi æquidiſtans ducta ſit d g, & à puncto a ducatur a f h; erit ut k h ad h l, ita d f ad f g.] *Illud uero hoc lemmate demonſtrabimus.*



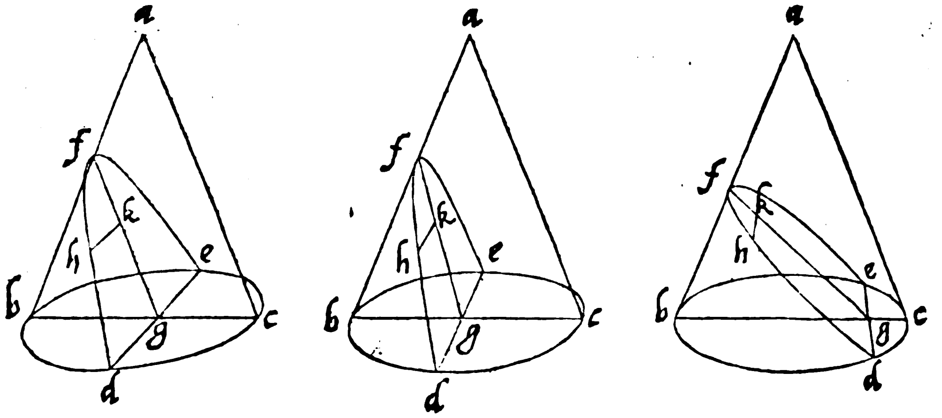
Sit triangulum a b c: & ducta d e ipſi b c æquidiſtante, à puncto a ad baſim ducatur a g, quæ lineam d e ſecet in f. Dico d f ad f e ita eſſe, ut b g ad g e.

29 primi [1] *Quoniam enim b c, d e æquidiſtant inter ſe, erunt anguli a b g, a d f æquales: itemq; æquales inter ſe anguli a g b, a f d. quare triangulum a d f ſimile eſt triangulo a b g. eadem quoq; ratione triangulum a f e oſtendetur ipſi a g c ſimile. ut igitur b g ad d f, ita eſt a g ad a f: & ut a g ad a f, ita g c ad f e. quare ut b g ad d f, ita g c ad f e. & permutando ut b g ad g c, ita d f ad f e.* 4. ſexti 11. quinti

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

SI conus plano per axem ſecetur: ſecetur autem & altero plano ſecante planum baſis coni ſecundum rectam lineam, quæ ſit perpendicularis, uel ad baſim trianguli per axem, uel ad eam, quæ in directum ipſi conſtituitur: lineæ quæ à ſectione in ſuperficie coni à plano facta ducuntur æquidiſtantes ei, quæ eſt perpendicularis ad trianguli baſim, in communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli per axem cadent: & ulterius productæ ad alteram ſectionis partem, ab ea bifariam ſecabuntur. & ſiquidem rectus ſit conus, linea, quæ eſt in baſi, perpendicularis erit ad communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli per axem: ſi uero ſcalenus, non ſemper, niſi cum planum, quod per axem ducitur, ad baſim coni rectum fuerit.

D [1] Sit conus, cuius uertex punctum a; baſis b c circulus: & ſecetur plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum a b c. ſecetur autem, & altero plano ſecante planum, in quo eſt circulus b c ſecundum d e rectam lineam, uel perpendicularem ad b c, uel ad eam, quæ in directum ipſi conſtituitur: & faciat ſectionem in ſuperficie coni, lineam d f e: communis autem ſectio plani ſecantis, & trianguli a b c ſit f g: & ſumatur in ſectione d f e punctum h, à quo linea h k ipſi d e æquidiſtans ducatur. Dico h k lineæ f g occurrere, & ulterius productam ad alteram partem ſectionis d f e, à linea f g bifariam ſecari. quoniã enim conus, cuius uertex a punctum, & baſis circulus b c, plano per axem ſecatur, quod ſectionem facit a b c triangulũ; ſumitur autem in ſuperficie pũctum h, quod non eſt in latere trianguli a b c; eſtq; d g ad b c perpendicularis: ducta per h linea h k, ipſi d g æquidiſtans, triangulo a b c occurret; & ulterius producta ad alteram partem ſuperficiei à triangulo bifariam ſecabitur. & quoniam, quæ per h ducitur æquidiſtans ipſi d e, occurrit triangulo a b c; atque eſt in plano ſectionis d f e: in communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli a b c cadet. ſed linea f g eſt communis 6. huius nis ſectio planorum. ergo per h ducta ipſi d e æquidiſtans cadit in lineam f g; & ulterius producta ad alteram ſectionis partem ab ea biſariam ſecatur. itaque uel conus eſt rectus, uel triangulum a b c, quod per axem tranſit, rectum eſt ad b c circulum, uel



neutrum horum contingit. ſit primum conus rectus: tunc & a b c triangulum ad circulum b c rectum erit. & quoniam planum a b c rectum eſt ad planum b c: & ad communem ipſorum ſectionem, uidelicet ad lineam b c in ipſo b c plano perpendicularis ducta eſt d e: erit d e & ad triangulum a b c perpẽdicularis; & ad omnes rectas lineas, 4.&3.diff. vndecimi quæ in triangulo a b c exiſtentes ipſam contingunt. quare & ad lineam f g. ſed non ſit conus rectus. ſi igitur triangulum per axem rectum eſt ad circulum b c; ſimiliter oſtẽdemus lineam d e ad f g perpendicularem eſſe. quod ſi triangulum per axem a b c nõ ſit rectum ad circulum b c, non erit ipſa d e ad f g perpendicularis. ſit enim, ſi fieri poteſt: eſt autem & perpendicularis ad b c. ergo d e ad utramque lineam b c, f g perpendicularis erit: & idcirco ad planũ, quod per lineas b c, f g ducitur. ſed planum per b c, 4. undecimi. f g, eſt a b c triangulum. linea igitur d e ad triangulum a b c eſt perpendicularis. quare & omnia, quæ per ipſam tranſeunt, plana ad a b c triangulum recta ſunt. planum ue- 18.undecimi ro, in quo eſt circulus b c per lineam d e tranſit. ergo b c circulus rectus eſt ad triangulum a b c: ac propterea triangulum a b c ad b c circulum rectum erit. quod non ponebatur. non igitur d e ad ipſam f g eſt perpendicularis.

Ex quibus conſtat lineam f g diametrum eſſe ſectionis d f e, cum li- 10.diffin. huius neas omnes, quæ in ipſa ducuntur, uni cuipiam æquidiſtantes biſariam ſecet. conſtat præterea fieri poſſe; ut lineæ æquidiſtantes à diametro f g biſariam quidem, non autem ad rectos angulos ſecentur.

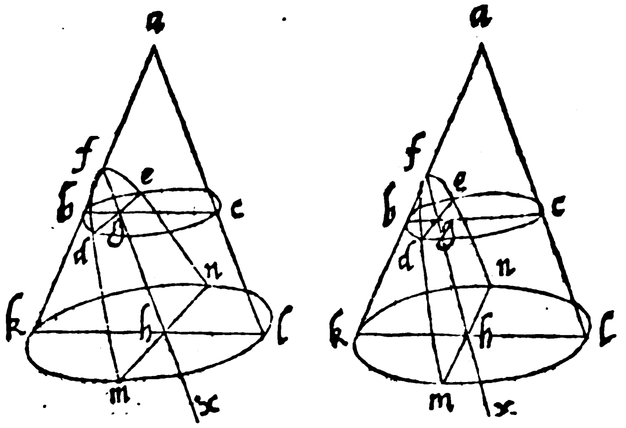
EVTOCIVS.

SEPTIMVM *theorema quatuor caſus habet; uel enim f g non occurrit lineæ a c, uel tribus modis occurrit, aut extra circulum, aut intra, aut in ipſo c puncto.*

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

SI conus plano ſecetur per axem: & ſecetur altero plano ſecante baſim coni ſecundum rectam lineam, quæ ad baſim trianguli per axem ſit perpendicularis: diameter autem ſectionis factæ in ſuperficie, uel æqui diſtet uni laterum trianguli, uel cum ipſo extra coni uerticẽ conueniat: & producantur in infinitum tum ſuperficies coni, tum planum ſecans: ſectio quoque ipſa in infinitum augebitur: & ex diametro ſectionis ad uerticem cuilibet lineæ datæ æqualem abſcindet linea, quæ quidem à coni ſectione ei, quæ eſt in baſi, æquidiſtans ducta fuerit.

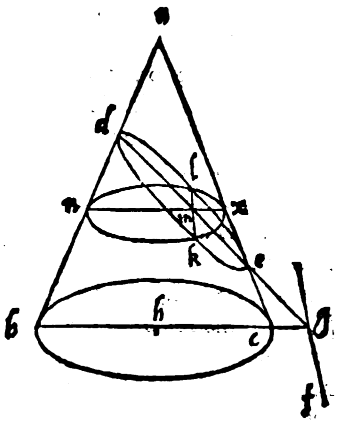
SIT conus, cuius uertex a punctum; baſis circulus b c: & ſecetnr plano per axẽ, quod ſectionem faciat, triangulum a b c: ſecetur etiam altero plano ſecante b c circulum ſecundum rectam lineam d e perpendicularem ad ipſam b c: & faciat ſectionem in ſuperficie, lineam d f e: diameter autem ſectionis d f e ſit f g, quæ uel ipſi a c æquidiſtet, uel producta extra punctum a cum ipſa conueniat. Dico ſectionem d f e augeri in infinitum, ſi & coni ſuperficies, & ſecans planum in infinitum producantur. His enim productis, ſimul producentur & lineæ a b, a c, f g. & quoniam f g uel æquidiſtans eſt ipſi a c, uel producta extra punctum a, cum ipſa conuenit; lineæ f g, a c ad partes g c productæ nunquam conuenient inter ſe ſe. producantur ergo: ſumaturq́; in linea f g quodlibet punctum h; & per h ducatur k h l ipſi b c æquidiſtans: ipſi uero d e æqui-
15. undecimi diſtans ducatur m h n. quare planum, quod per k l, m n tranſit, æquidiſtans eſt plano
per b c, d e: & idcirco circulus eſt k l m n planum. Sunt autem puncta d e m n & in pla-
4. huius no ſecante, & in ſuperficie coni. ergo & in ipſa communi ſectione erunt: ſectio igitur d f e aucta eſt uſque ad puncta m n. ex quibus apparet ſi tum coni ſuperficies, tum ſecans planum producantur ad k l m n circulum, & ſectionem ipſam d f e uſque ad m n puncta augeri. eadem ratione demõſtrabitur ſectionẽ m d f e n augeri in infinitum, ſi & ſuperficies coni, & planum ſecãs in infinitum producantur. perſpicuum igitur eſt cuilibet datæ lineæ æqualem abſcindere lineam quandam ex ipſa f h ad partes f. ſi enim datæ lineæ æqualem ponamus f x; & per x ipſi d e æquidiſtantem ducamus; conueniet ea cum ſectione, quemadmodum & quæ per h demonſtrata eſt cum eadem ad puncta m n conuenire. quare poterit linea quædam duci æquidiſtans ipſi d e, quæ cum ſectione cõueniat, & ex ipſa f g ad partes f lineæ datæ æqualem lineam abſcindat.

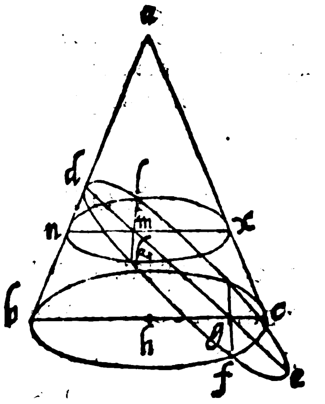


THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

SI conus plano ſecetur conueniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque baſi æquidiſtet, neque ſubcontrarie ponatur: ſectio circulus non erit.

SIT conus, cuius uertex a pũctum, baſis circulus b c: & ſecetur plano aliquo, neque baſi æquidiſtante, neque ſubcontrarie poſito, quod ſectionem faciat in ſuperficie lineam d k e. Dico d k e non eſſe circulum. Sit enim, ſi fieri poteſt: occurratq́; planum ſecans ipſi baſi; ita ut communis planorum ſectio ſit recta linea f g: centrum autem circuli b c ſit h; & ab h ad f g perpendicularis ducatur h g: deinde per h g, & axem producatur planum, quod in conica ſuperficie ſectiones faciat b a, a c rectas lineas. Quoniam niā igitur puncta d e g ſunt & in plano, quod per d k e tranſit, & in eo, quod per a b c, neceſſario in cōmuni ipſorum ſectione erunt. quare recta linea eſt d e g. ſumatur in linea d k e punctum aliquod k: & per k lineæ f g æquidiſtans ducatur k m l: erit k m ipſi m l æqualis. 6 huius quare d e diameter eſt circuli d k e l. ducatur deinde per m linea n m x ipſi b c æquidiſtās: eſt autem & k l æquidiſtans f g. ergo planum 15. undecimi quod per n x, k m ducitur, æquidiſtās eſt plano per b c, f g, hoc eſt ipſi baſi: proptereaq́; ſectio n k x l circulus erit. 4. huius & quoniam f g perpendicularis eſt ad b c g, ſequitur & k m 10. undecimi ad n x perpendicularem eſſe. quare rectangulum n m x æquale eſt quadrato k m. 8.17. ſexti ſed & rectangulum d m e æquale eſt k m quadrato, cum linea d k e l circulus ponatur, cuius diameter d e. rectangulum igitur n m x æquale eſt rectangulo d m e: & idcirco ut n m 14. ſexti ad m d, ita e m ad m x. 6 quare d m n triangulū ſimile eſt triangulo x m e: & angulus d n m æqualis m e x angulo. Sed d n m angulus angulo a b c eſt æqualis; æquidiſtat enim n x ipſi b c. ergo & angulus a b c æqualis erit angulo m e x. Subcontraria igitur ſectio eſt; quod non ponebatur. ex quibus manifeſte conſtat lineam d k e circulum non eſſe.

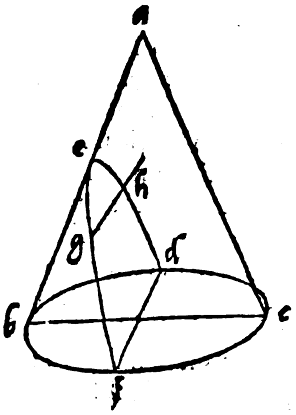




THEOREMA X. PROPOSITIO X.

SI in coni ſectione duo puncta ſumantur, recta linea, quæ eiuſmodi puncta coniungit, intra ſectionem cadet; & quæ in directum ipſi conſtituitur, cadet extra.

SIT conus, cuius uertex punctum a; baſis b c circulus: ſeceturq́; plano per axem & faciat ſectionem triangulum a b c: ſecetur autem & altero plano, quod in ſuperficie coni ſectionem faciat d e f lineam: & in ipſa d e f duo puncta ſumantur, quæ ſint g h. Dico rectam lineam, quæ g h puncta coniungit, intra ſectionem d e f cadere: & quæ in directum ipſi conſtituitur, extra. Quoniam enim conus, cuius uertex a punctum, & baſis circulus b c, plano ſecatur per axem, & in ſuperficie ipſius puncta quæpiam ſumuntur g h, quæ non ſunt in latere trianguli per axē: linea, quæ à puncto g, ad h ducitur, non pertinebit ad a. 2. huius ergo recta linea coniungens puncta g h intra conum, hoc eſt intra coni ſectionem d e f cadet: & quæ in directum ipſi conſtituitur, cadet extra.



EVTOCIVS

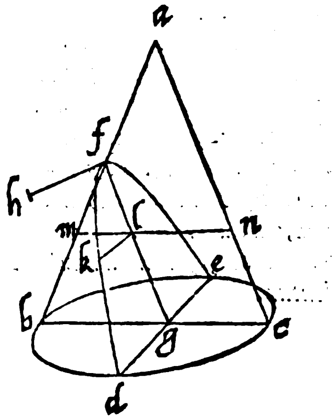
ANIMADVERTENDVM eſt decem hæc theoremata aptiſſime cohærentia inter ſe ſe, & continuata eſſe. Primum enim oſtendit rectas lineas, quæ in ſuperficie coni ad uerticem pertinent, in eadem permanere. Secundum contra oſtendit. Tertium explicat coni ſectionem, quæ per uerticem efficitur. Quartum ſectionem baſi æquidiſtantem. Quintum uero ſubcontrariam. Sextum eſt tanquam lemma ad ſeptimum, in quo oſtenditur oportere cõmunem ſectionem plani ſecantis, & circuli, qui eſt baſis coni, ad eius diametrum perpendicularem eſſe: atque hoc ita habente, lineas omnes, quæ ipſi æquidiſtantes ducuntur, à triangulo biſariam ſecari. Septimum tres alias ſectiones, earumq; diametrum oſtendit: & lineas, quæ ad ipſam diametrum ordinatim applicantur ei, quæ in baſi æquidiſtantes eſſe. In octauo demonſtrat, quod nos in principio diximus, uidelicet parabolen, & hyperbolen ex eorum numero eſſe, quæ in infinitum augentur. In nono ellipſim, quæ in ſe ipſam uergit tanquam circulus, quod planum ſecans cum utroque latere trianguli conueniat, circulum non eſſe: ſubcontraria etenim, & æquidiſtans ſectio circulum facit. Sed & illud ſcire oportet, diametrum ſectionis in parabola quidem unum dumtaxat trianguli latus ſecare, & ipſam baſim: in hyperbola ſecare, & latus, & lineam, quæ reliquo lateri ad partes uerticis producto in rectum conſtituitur: in ellipſi uero, & utrumque latus, & baſim ſecare. Poſſet fortaſſe quiſpiam arbitrari decimum theorema idem eſſe, quod ſecundum: ſed non ita res habet. illic enim in omni ſuperficie duo quæuis puncta ſumi aſſerit; hic in ea tantum linea, quæ à ſecante plano efficitur. At in tribus, quæ deinceps ſequuntur, theorematibus unamquanque ſectionem diligentius expendit: & principes earum proprietates declarat.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

SI conus plano per axem ſecetur: ſecetur autem & altero plano ſecante baſim coni ſecundum rectam lineam, quæ ad baſim trianguli per axem ſit perpendicularis: & ſit diameter ſectionis uni laterum trianguli per axem æquidiſtans: recta linea, quæ à ſectione coni ducitur æquidiſtans communi ſectioni plani ſecantis, & baſis coni, uſque ad ſectionis diametrum; poterit ſpatium æquale contento linea, quæ ex diametro abſciſſa inter ipſam & uerticẽ ſectionis interiicitur, & alia quadam, quæ ad lineam inter coni angulum, & uerticem ſectionis interiectam, eam proportionem habeat, quàm quadratum baſis trianguli per axem, ad id quod reliquis duobus trianguli lateribus continetur. dicatur autem huiuſmodi ſectio parabole.

SIT conus, cuius uertex punctum a; baſis b c circulus: ſeceturq; plano per axem,
quod ſectionem faciat triangulum a b c: & ſecetur altero plano ſecante baſim coni ſe
cundum rectam lineam d e, quæ ad b c ſit perpendicularis; & faciat ſectionem in ſu-
perficie coni d f e lineam: diameter autem ſectionis f g æquidiſtans ſit uni laterum
trianguli per axem, uidelicet ipſi a c; atque à puncto f lineæ f g ad rectos angulos du
A catur f h: & fiat ut quadratum b c ad rectangulum b a c, ita linea h f ad f a. ſumatur
præterea in ſectione quodlibet punctum k: & per k ducatur k l ipſi d e æquidiſtans.
Dico quadratum k l rectangulo h f l æquale eſſe. Ducatur enim per l ipſi b c æquidi-
15. undecimi ſtans m n: & eſt k l æquidiſtans ipſi d e. ergo planum, quod tranſit per k l m n plano per
4. huius b c d e, hoc eſt ipſi baſi coni æquidiſtat. ideoq; planum per k l m n circulus eſt, cuius
10. unde. diameter m n. eſt autem k l ad m n perpendicularis, quòd & d e ad b c. rectangulum
igitur m l n æquale eſt k l quadrato. itaque quoniam linea h f ad f a eſt ut quadratum
b c ad rectangulum b a c: quadratum autem b c ad b a c rectangulum compoſitam
proportionem habet ex proportione, quàm b c ad c a, & ex ea, quàm c b habet ad b a.
quare proportio h f ad f a componitur ex proportione b c ad c a, & c b ad b a. Vt au-

tem b c ad c a, ita m n ad n a, hoc eſt m l ad l f: & ut c b ad b a, ita n m ad m a, hoc eſt l m
ad m f, & reliqua n l ad f a. proportio igitur h f ad 19. quinti
f a componitur ex proportione m l ad l f, & n l ad
f a. ſed proportio compoſita ex proportione m l
ad l f, & n l ad f a eſt ea, quam habet m l n rectangulum 13. ſexti.
ad rectangulum l f a. ergo ut h f ad f a, ita rectangulum
m l n ad l f a rectangulum. ut autem h f
ad f a, ſumpta f l communi altitudine, ita h f l rectangulum 1. ſexti
ad rectangulum l f a. Vt igitur rectangulum
m l n ad ipſum l f a, ita rectangulum h f l ad
l f a: & idcirco æquale eſt rectangulum m l n rectangulo 9. quinti
h f l. ſed rectangulum m l n æquale eſt quadrato
k l. ergo quadratum k l rectangulo h f l æquale
erit. Vocetur autem huiuſmodi ſectio parabole;
& linea h f, iuxta quam poſſunt, quæ ad f g
diametrum ordinatim applicantur: quæ quidem
etiam recta appellabitur.



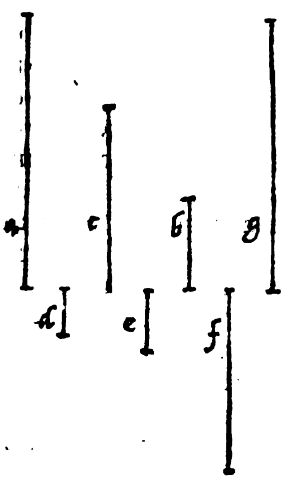
EVTOCIVS.

ET fiat ut quadratum b c ad rectangulum b a c, ita linea h f ad lineam f a.] A
Manifeſtum eſt, quod dicitur, præterquam quòd aliqua adhuc declaratione indiget. Sit rectangulo
b a c æquale rectangulum o p r: quadrato autem b c æquale id, quod ad lineam p r adiacens, latitudinem
habet p s: & fiat ut o p ad p s, ita a f ad f h. ergo factum iam erit, quod quærebamus. Quoniam
enim ut o p ad p s, ita a f ad f h; erit & conuertendo h f ad f a, ut s p ad p o: ut autem s p ad 1. ſexti.
p o, ita rectangulum s r ad ipſum r o, hoc eſt b c quadratum ad rectangulum b a c. Hoc autem & ad
duo quæ ſequuntur theoremata utile erit.

Quadratum autem b c ad b a c rectangulum B
compoſitam proportionem habet &c.] *Oſtenſum enim eſt in ſexto*
libro elementorum Euclidis, theoremate
uigeſimotertio, æquiangula parallelogrãma
inter ſe proportionem habere ex lateribus
compoſitam. Sed quoniam interpretes
inductione magis, quàm neceſſaria argumentatione
utuntur; uiſum eſt nobis illud ipſum
inueſtigare: quod tametſi ſcripſimus in
commentarijs, in quartum theorema ſecundi
libri Archimedis de ſphæra & cylindro,
& in primum magnæ conſtructionis Ptolemæi,
nihilominus tamen & hoc loco non inepte
repetetur; propterea quòd fortaſſe non omnes, qui hæc legent, in illos libros inciderunt: tum
etiam, quòd uniuerſa ferè conicorum tractatio eum argumentandi modum uſurpat. Proportio ex
proportionibus componi dicitur, quando proportionum quantitates inter ſe multiplicatæ
aliquam producunt. *Per quantitatem intelligendo numerum, à quo proportio ipſa denominatur.*
in multiplicibus quidem quantitas erit numerus integer; in reliquis uero habitudinibus
neceſſe eſt quantitatem numerum eſſe, & partem, ſeu partes; niſi forte quiſpiam uelit etiam ἀῤῥήτους,
uidelicet quæ exprimi non poſſunt, habitudines eſſe, quales ſunt magnitudinum irrationalium.
Itaque in omnibus habitudinibus ipſa quantitas multiplicatam conſequentem terminum producit
antecedentem. Sit igitur proportio a ad b: & ſumpto termino quolibet intermedio c, ſit proportionis
a c quantitas d: proportionis autem c b quantitas ſit e: & d multiplicans e producat f.
Dico f proportionis a b quantitatem eſſe: hoc eſt ſi f multiplicet b produci ipſum a. itaque multiplicet
f ipſum b, & producat g. Quoniam igitur d ipſum quidem e multiplicans producit f; 17. ſeptimi.
multiplicans autem c ipſum a produxit: erit f ad a, ut e ad c. Rurſus cum b multiplicans e faciat

e, & multiplicans f faciat g; erit ut e ad f, ita c ad g: & permutando ut e ad c, ita f ad g. ſed ut e ad c, ita erat f ad a. ergo g ipſi a eſt æqualis: & idcirco f multiplicans b producit a. proportionis igitur a b, f quantitas neceſſario erit: Non perturbentur autem qui in hæc inciderint, quòd illud ex aritbmeticis demonſtretur: antiqui enim huiuſmodi demonſtrationibus ſæpe uti conſueuerunt; quæ tamen mathematicæ potius ſunt, quàm arithmeticæ propter analogias. adde quod quæſitum aritbmeticum eſt; nam proportiones, proportionum quantitates, & multiplicationes primo numeris, ſecundo loco per numeros & magnitudinibus inſunt, ex illius ſententia, qui ita ſcripſit, ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι εἶμεν ἀδελφά. *hoc eſt, hæ enim mathematicæ diſciplinæ germanæ eſſe uidentur.*

9. quinti.

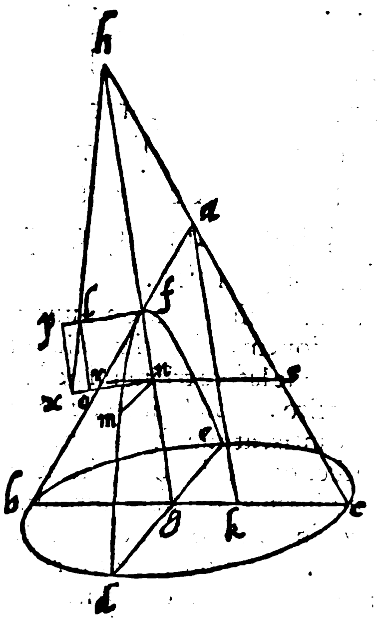


THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Si conus plano per axem ſecetur; ſecetur autem & altero plano ſecante baſim coni ſecundum rectam lineam, quæ ad baſim trianguli per axem ſit perpendicularis: & ſectionis diameter producta cum uno latere trianguli per axem, extra uerticem coni conueniat: recta linea, quæ à ſectione ducitur æquidiſtans communi ſectioni plani ſecantis, & baſis coni uſque ad ſectionis diametrum, poterit ſpatium adiacens lineæ, ad quam ea, quæ in directum conſtituitur diametro ſectionis, ſubtenditurq; angulo extra triangulum, eandem proportionem habet, quam quadratum lineæ, quæ diametro æquidiſtans à uertice ſectionis uſque ad baſim trianguli ducitur, ad rectangulum baſis partibus, quæ ab ea fiunt, contentum: latitudinem habens lineam, quæ ex diametro abſcinditur, inter ipſam & uerticem ſectionis interiectam; excedensq; figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ continetur linea angulo extra triangulum ſubtenſa, & ea, iuxta quam poſſunt quæ ad diametrum applicantur. uocetur autem huiuſmodi ſectio hyperbole.

Sit conus, cuius uertex a punctum, baſis circulus b c: & ſecetur plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum a b c: ſecetur autem & altero plano ſecante baſim coni, ſecundum rectam lineam d e ad b c baſim trianguli a b c perpendicularem: faciatq; ſectionem in ſuperficie coni lineam d f e: & ſectionis diameter f g producta cum ipſo a c latere trianguli a b c extra coni uerticem conueniat in puncto h: deinde per a ducatur linea a k diametro æquidiſtans, quæ ſecet b c: & ab f ducatur f l ad rectos angulos ipſi f g; fiatq; ut quadratum k a ad rectangulum b k c, ita h f linea ad lineam f l. Sumatur autem in ſectione quodlibet punctum m; & per m ducatur m n æquidiſtans d e; & per n ipſi f l æquidiſtans ducatur n o x. poſtremo iuncta h l, & ad x producta, per l x ipſi f n æquidiſtantes ducantur l o, x p. Dico lineam m n poſſe

ſpatium



ſpatium fx, quod quidem adiacet lineæ fl, latitudinem habens fn, exceditq; figura l x ſimili ei, quæ h f l continetur. Ducatur enim per n linea r n ſ æquidiſtans b c: eſt autem & m n ipſi d e æquidiſtans. ergo planum, quod 15. undecimi tranſit per m n r ſ æquidiſtat plano per b c d e, hoc eſt baſi coni. Si igitur planum per m n r ſ producatur, ſectio circulus erit, cuius 4. huius diameter r n ſ: atque eſt ad ipſam perpendicularis m n. ergo rectangulum r n ſ æquale eſt m n quadrato. itaque quoniam ut a k quadratum ad rectangulum b k c, ita eſt h f ad fl: proportio autem quadrati a k ad rectangulum b k c componitur ex proportione, quam habet a k ad k c, & ex ea, quam a k habet ad k b: & proportio h f ad fl compoſita erit ex proportione, a k ad k c, & proportione a k ad k b. ſed ut a k ad k c, ita h g ad g c, hoc eſt h n ad n ſ: & ut a k ad k b, ita f g ad g b, hoc eſt f n ad n r. proportio igitur h f ad f l componitur ex proportione h n ad n ſ, & f n, ad n r. at proportio compoſita ex proportione h n ad n ſ, & f n ad n r; eſt ea, quam h n f rectangulum habet ad rectangu- 23. ſexti lum ſ n r. ergo ut rectangulum h n f ad ſ n r, ita h f ad fl, hoc eſt h n ad n x. ut autem h n ad n x, ſumpta f n communi altitudine, ita h n f rectangulum ad rectangulum 1. ſexti f n x. quare ut rectangulum h n f ad rectangulum ſ n r, ita rectangulum h n f ad ipſum f n x: rectangulum igitur ſ n r æquale eſt rectangulo x n f. 9. quinti Sed quadratum m n oſtenſum eſt æquale rectangulo ſ n r. ergo quadratum m n rectangulo x n f æquale erit. rectangulum autem x n f eſt parallelogrammum x f. linea igitur m n poteſt ſpatium x f, quod lineæ fl adiacet; latitudinem habens f n, excedensq; figura l x ſimili ei, quæ h f l continetur. dicatur autem huiuſmodi ſectio hyperbole: & linea l f, iuxta quam poſſunt, quæ ad f g ordinatim applicantur. quæ quidem etiam recta appellabitur, tranſuerſa uero h f.

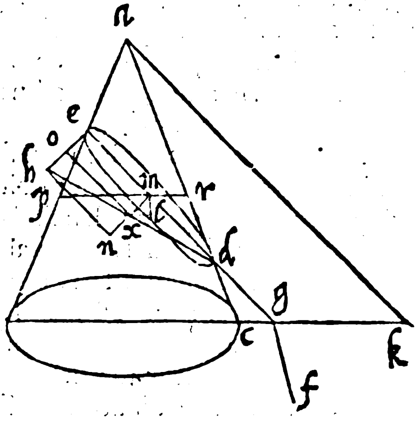
FED. COMMANDINVS.

Linea igitur m n poteſt ſpacium x f, quod lineæ fl adiacet, latitudinem habens fn, excedensq; figura l x ſimili ei, quæ h fl continetur] *Græca uerba ſic habent.* ἡ ἄρα μν δύναται τὸ ξζ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ζλ, πλάτος ἔχον τὴν ζν, ὑπερβάλλον τῷ λξ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν θζλ. *ex quibus ſatis perſpicue apparere poteſt, unde dicta ſit ſectio hyperbole.*

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

Si conus plano per axem ſecetur, & ſecetur altero plano conueniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque baſi coni æquidiſtet, neque ſubcontrarie ponatur: planum autem, in quo eſt baſis coni, & ſecans planum conueniant ſecundum rectam lineam, quæ ſit perpendicularis uel ad baſim trianguli per axem, uel ad eam, quæ in directum ipſi conſtituitur: recta linea, quæ à ſectione coni ducitur æquidiſtans communi ſectioni planorum uſque ad diametrum ſectionis poterit ſpatium adiacens lineæ, ad quam ſectionis diameter eam proportionem habeat, quam quadratum lineæ diametro æquidiſtantis à uertice coni uſque ad trianguli baſim ductæ, habet ad rectangulum contentum baſis partibus, quæ inter ipſam & rectas trianguli lineas interiiciuntur; latitudinem habens lineam, quæ ex diametro ab ipſa abſcinditur ad uerticem ſectionis, deficiensq; figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ diametro, & linea iuxta quam poſſunt, continetur. dicatur autem huiuſmodi ſectio ellipſis.

Sit conus, cuius uertex a punctum; baſis circulus b c: & ſecetur plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum a b c: ſecetur autem & altero plano, conueniente cum utroque latere trianguli per axem, neque baſi coni æquidiſtante, neque ſubcontrarie poſito, quod faciat ſectionem in ſuperficie coni lineam d e: & communis ſectio plani ſecantis, atque eius, in quo eſt baſis coni, ſit f g perpendicularis ad b c: diameter autem ſectionis e d: & ab e ducatur e h ad e d perpendicularis: perq; a ducta a k ipſi e d æquidiſtante, fiat ut quadratum a k ad rectangulum b k c, ita d e ad e h: ſumatur præterea in ſectione punctum l: & per l ipſi f g æquidiſtans ducatur l m. Dico l m poſſe ſpatium, quod lineæ e h adiacet, latitudinem habens e m, deficiensq: figura ſimili ei, quæ d e h continetur. iungatur enim d h: perq; m ducatur m x n æquidiſtans e h: & per h x puncta ipſi e m æquidiſtantes ducantur h n, x o: poſtremo per m ducatur p m r æquidiſtans b c. itaque quoniam p r æquidiſtat 15. undecimi b c; & l m ipſi f g; erit planum ductum per l m p r æquidiſtans plano per f g b c ducto, hoc eſt baſi coni. ſi igitur planum per l m p r 4. huius producatur, fiet ſectio circulus, cuius diameter p r. & eſt l m ad ipſam perpendicularis. ergo rectangulum p m r æquale eſt l m quadrato. Quod cum ſit, ut quadratum a k ad rectangulum b k c, ita d e ad e h; & proportio quadrati a k ad rectangulum b k c componatur ex proportione, quam habet a k ad k b, & ex ea, quam a k habet ad k c: ut autem a k ad k b, ita e g ad g b, hoc eſt e m ad m p: & ut a k ad k c, ita d g ad g c; hoc eſt d m ad m r: erit proportio d e ad e h compoſita ex proportione e m ad m p, & ex proportione d m ad m r. ſed proportio com- 23. ſexti poſita ex proportione e m ad m p, & d m ad m r eſt ea, quam e m d rectangulum habet ad rectangulum p m r. Quare ut rectangulum e m d ad ipſum p m r, ita d e ad e h; uidelicet d m ad m x. ut autem d m ad m x, ſumpta m e communi altitudine, ita rectangulum d m e ad rectangulum x m e. ergo ut d m e rectangulum ad rectangulum p m r, ita erit d m e rectangulum ad ipſum x m e. æquale igitur eſt rectangulum p m r rectangulo x m e. ſed rectangulum p m r demonſtratum eſt æquale quadrato l m. quare & ipſum x m e quadrato l m æquale erit. linea igitur l m poteſt ſpatium m o, quod quidem lineæ e h adiacet, latitudinem habens e m, deficiensq; figura o n, ſimili ei, quæ d e h continetur. Vocetur autem huiuſmodi ſectio ellipſis: & linea e h, iuxta quam poſſunt, quæ ad diametrum d e ordinatim applicantur; quæ quidem & recta uocabitur; e d uero tranſuerſa.



EVTOCIVS.

SCIRE *oportet hoc theorema tres habere deſcriptiones, ut ſæpius dictum eſt in ellipſi: uel enim de conuenit cum latere a c ſupra c punctum, uel in ipſo c, uel infra cum eo producto conuenit.*

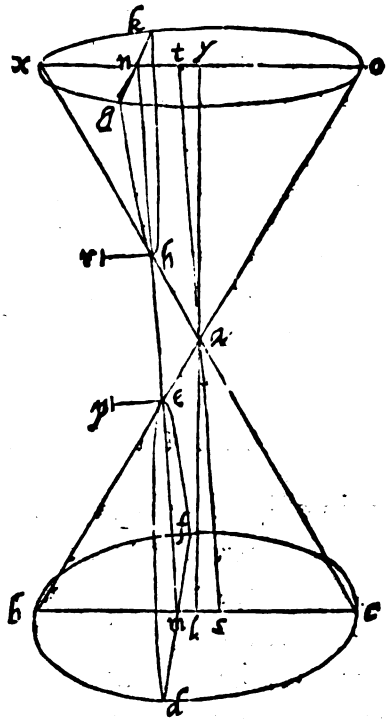
FED. COMMANDINVS.

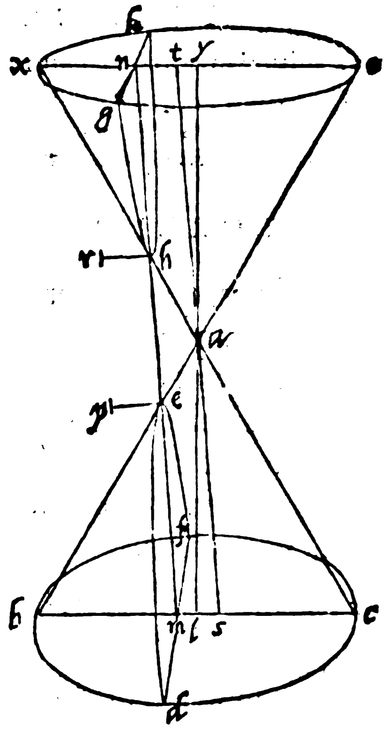
LINEA igitur l m poteſt ſpacium m o, quod quidem lineæ c h adiacet, latitudinem habens e m, deficiensq́; figura o n, ſimili ei, quæ d e h continetur] *Græca uerba ſunt hæc.* ἡ λμ ἄρα δύναται τὸ μο, ὃ παράκειται παρὰ τὴν θε πλάτος ἔχον τὴν εμ, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ον ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ δεθ. *ex quibus manifeſte conſtat, cur ea ſectio ellipſis appellata ſit.*

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XIIII.

Si ſuperficies, quæ ad uerticem ſunt, plano non per uerticem ſecentur; erit in utraque ſuperficierum ſectio, quæ uocatur hyperbole: & duarum ſectionum eadem erit diameter: lineæ uero, iuxta quas poſſunt applicatæ ad diametrum, æquidiſtantes ei, quæ eſt in baſi coni, inter ſe æquales erunt: & figuræ tranſuerſum latus utriſque commune; quod ſcilicet inter ſectionum uertices interiicitur. uocentur autem huiuſmodi ſectiones oppoſitæ.

Sint ad uerticem ſuperficies, quarum uertex a punctum: & ſecentur plano non per uerticem, quod ſectiones faciat in ſuperficie lineas d e f, g h k. Dico utramque ſectionum d e f, g h k hyperbolen eſſe. ſit enim circulus b d c f, in quo fertur recta linea ſuperficiem deſcribens; ducaturq́; in ſuperficie, quæ eſt ad uerticem, planum ipſi æquidiſtans x g o k: & communes ſectiones ipſarum ſectionum d e f, g h k, & circulorum ſint f d g k, quæ & æquidiſtantes erunt: 16. unde. axis autem conicæ ſuperficiei ſit recta linea l a y: circulorum centra l y: & ab l ad lineam f d perpendicularis ducta producatur ad b c puncta: perq́; b c, & axem planum ducatur, quod ſectiones faciat in circulis quidem rectas lineas x o, b c æquidiſtantes; in ſuperficie uero ipſas b a o, c a x: erit x o ad g k perpendicularis: 10. undeci. quoniam & b c perpendicularis eſt ad f d; & utraque eſt æquidiſtans. Quòd cum planum per axem ductum ſectionibus occurrat ad puncta m n, quæ ſunt intra lineas, planè conſtat ipſum etiã lineas ſecare in h e. ergo puncta m e h n erunt & in plano per axem, & in eo, in quo ſunt lineæ ipſæ; & 9. undecimi. propterea m e h n recta linea erit. conſtat etiam puncta x h a c in eadem recta eſſe, itemq́; b e a o; quòd ſint in ſuperficie conicã, & in plano per axem. Ducantur ergo à punctis h e ipſi h e ad rectos angulos lineæ h r, e p: perq; a lineæ m e h n æquidiſtans ducatur s a t; & fiat ut quadratum a s ad rectangulum b s c, ſic h e ad e p: & ut quadratum a t ad rectangulum o t x, ſic e h ad h r. itaq; quoniam conus, cuius uertex a, baſis b c circulus, ſecatur plano per axem, quod ſectionem facit triangulum a b c: ſecatur autem & altero plano, ſecante baſim coni ſecundum rectam lineam d m f, ad b c perpendicularem, quod ſectionem facit in ſuperficie d e f lineam: diameterq́; m e producta cum uno latere trianguli per axem extra coni uerticem conuenit: & per punctum a diametro ſectionis e m æquidiſtans ducitur a s: ab e uero ducitur e p, ad rectos angulos ipſi e m: atque eſt ut quadratum a s ad





rectangulum b s c, ita h e ad e p: erit ipſa d e f ſectio hyperbole: & e p recta linea, 12. huius iuxta quam poſſunt, quæ ad e m ordinatim applicantur: tranſuerſum uero figuræ latus h e. Eadem ratione & g h k hyperbole erit, cuius diameter h n: recta linea h r, iuxta quam poſſunt ordinatim ad h n applicatæ: & h e tranſuerſum figuræ latus. Dico præterea h r ipſi e p æqualem eſſe. Quoniam enim æquidiſtantes ſunt b c, x o, 4. ſexti, 23 ut a s ad s c, ita erit a t ad t x: & ut a s ad s b, ita a t ad t o. ſed proportio a s ad s c unà cum proportione a s ad s b, eſt ea quam habet a s quadratum ad rectangulum b ſ c: & proportio a t ad t x unà cum proportione a t ad t o, eſt quam habet quadratum a t ad rectangulum x t o. ergo ut quadratum a s ad rectangulum b ſ c, ita quadratum a t ad rectangulum x t o. ut autem quadratum a s ad b s c rectangulum, ita h e ad e p: & ut quadratum a t ad 11. quinti. rectangulum x t o, ita h e ad h r. ergo ut h e ad e p, ita e h ad h r. æqualis igitur eſt e p ipſi h r.

EVTOCIVS.

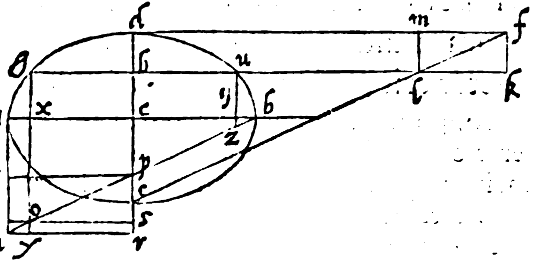
POTERAT *etiam hoc modo oſtendi; ut quadratum a s ad rectangulum b s c, ita eſſe quadra-* 4. ſexti *tum a t ad x t o rectangulum. Quoniam enim æquidiſtant b c, x o; erit ut c s ad s a, ita x t ad* lem. in 22 decimi *t a. & eadem ratione ut a s ad s b, ita a t ad t o. ergo ex æquali, ut c s ad s b, ita x t ad t o. & ideo ut quadratum c s ad rectangulum c s b, ita quadratum x t ad rectangulum x t o. ſed propter ſimilitudinem triangulorum ut quadratum a s ad quadratum s c, ita quadratum a t ad quadratum t x. quare ex æquali ut a s quadratum ad rectangulum b s c, ita quadratum a t ad rectangulum x t o. atque eſt ut quadratum a s ad rectangulum b ſ c, ita h e ad e p: & ut quadratum a t ad rectangulum x t o, ita e h ad h r. ut ergo h e ad e p, ita e h ad h r. æqualis igitur eſt e p ipſi h r. Hoc theorema caſum non habet. propoſitum autem idem eſt, quod etiam in tribus ſuperioribus; ſimiliter enim & oppoſitarum ſectionum principalem diametrum inquirit; & lineas, iuxta quas poſſunt, quæ ad ipſam ordinatim applicantur.*

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

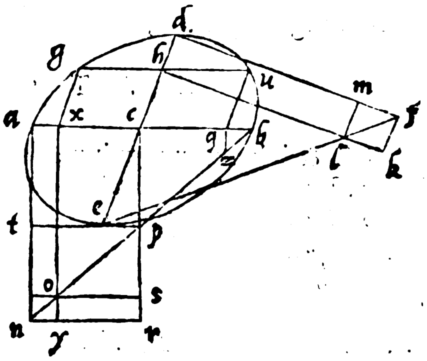
SI in ellipſi à puncto, quod diametrum bifariam diuidit ordinatim ducta linea ex utraque parte ad ſectionem producatur; & fiat ut producta ad diametrum, ita diameter ad aliam lineam: recta linea, quæ à ſectione ducitur ad productam, diametro æquidiſtans, poterit ſpatium adiacens tertiæ proportionali, latitudinem habens lineam, quæ inter ipſam, & ſectionem interiicitur, deficienſq; figura ſimili ei, quæ continetur linea, ad quam ducuntur; & ea iuxta quam poſſunt. Quòd ſi ulterius producatur ad alteram partem ſectionis, bifariam ſecabitur ab ea, ad quam applicata fuerit.

Sit ellipſis, cuius diameter a b, ſeceturq; a b bifariam in c puncto; & per c ordi-

natim



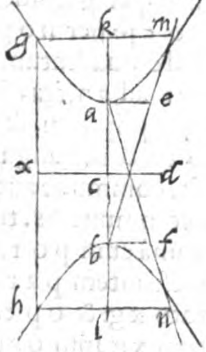
natim applicata ex utraque parte ad ſectionem producatur, quæ ſit d c e: à puncto
autem d ipſi d e ad rectos angulos ducatur d f: fiatq́; ut d c ad a b, ita a b ad d f: &
ſumpto quolibet puncto g in ſectione, per g ducatur g h ipſi a b æquidiſtans: & iungatur
e f. deinde per h ipſi d f æquidiſtans
ducatur h l: & per f l ducantur
ipſi h d æquidiſtantes f k, l m. Dico
lineam g h poſſe ſpatiũ d l, quod
quidem adiacet lineæ d f, latitudinem
habens d h; deficienſq́; figura
l f ſimili ei, quæ e d f continetur. ſit
enim linea a n, iuxta quam poſſunt
ordinatim applicatæ ad a b: iungaturq́;
b n; & per g quidem ipſi d e æquidiſtans ducatur g x: per x c ipſi a n æquidiſtantes
x o, c p: per n o p uero ducantur n y r, o s, t p, æquidiſtantes ipſi a b. æquale 13. huius
igitur eſt d c quadratum rectangulo a p: & quadratum g x rectangulo a o. itaque quoniam
ut b a ad a n, ita eſt b c ad c p; & p t ad t n: æqualis autem b c ipſi c a, hoc eſt
ipſi p t: & c p ipſi t n, & b p ipſi p n æqualis erit. ergo a p rectangulum æquale rectangulo 14. quinti
t r: & rectangulum x t ipſi t y. quòd cum rectangulum o t rectangulo o r 43. primi
æquale ſit, commune autem n o. erit rectangulum t y ipſi n s æquale; ſed t y eſt æquale
t x, & commune t s. totum igitur rectangulum n p; hoc eſt p a æquale erit rectangulo
a o unà cum p o rectangulo. quare p a rectangulum ſuperat rectangulum a o
ipſo o p. eſt autem p a rectangulum æquale c d quadrato: rectangulumq́; a o æquale
quadrato x g: & o p ei, quod lineis o s p continetur. ergo c d quadratum ſuperat
quadratum x g ipſo o s p rectangulo. & quoniam linea d e ſecatur in partes æquales
in c puncto, & in partes inæquales in h, rectangulum e h d unà cum quadrato c h, 5. ſecundi
hoc eſt x g æquale erit c d quadrato. ex quo ſequitur quadratum c d ſuperare x g A
quadratum, rectangulo e h d. Superabat autem, ut monſtratum eſt, & rectangulo
o s p. rectangulum igitur e h d rectangulo
o s p eſt æquale. Præterea cum
ſit ut d e ad a b, ita a b ad d f: erit ut cor. 20. ſexti
d e ad d f, ita d e quadratum ad quadratum
a b: hoc eſt quadratum c d ad quadratũ 15. quiti.
c b. atque eſt quadrato c d æquale 13. huius
p c a rectangulum, hoc eſt p c b. Vt
ergo e d ad d f, hoc eſt ut e h ad h l, hoc 4. & 1. ſexti.
eſt ut e h d rectangulum ad rectangulum
d h l, ita rectangulum p c b ad c b
quadratum: hoc eſt rectangulum p s o 4. ſexti
ad quadratum o s. ſed rectangulum
e h d æquale eſt ipſi p s o. rectangulum 9. quinti.
igitur d h l quadrato o s, hoc eſt quadrato
g h eſt æquale: & idcirco linea g h poteſt ſpatium d l, quod adiacet lineæ d f,
latitudinem habens d h, deficienſq́; figura f l ſimili ei, quæ e d f continetur. Dico in
ſuper g h productam ad alteram partem ſectionis ab ipſa d e biſariam ſecari. producatur
enim, occurratq́; ſectioni in puncto u: & per u ipſi g x æquidiſtans ducatur
u q: & per q ducatur q z æquidiſtans a n. Quoniam igitur g x ipſi u q eſt æqualis,
erit g x quadratum æquale quadrato u q. quadratum autem g x æquale eſt a x o rectangulo: 13. huius
& quadratum u q æquale rectangulo a q z. ergo ut o x ad z q, ita q a ad a x. 14. ſexti.
& eſt ut o x ad z q, ita x b ad b q. ut ergo q a ad a x, ita x b ad b q: & diuidendo ut 4
q x ad x a, ita x q ad q b. æqualis igitur eſt a x ipſi q b. eſt autem a c æqualis c b. quare 9. quinti.
& reliqua x c reliquæ c q: & idcirco g h ipſi h u eſt æqualis. linea igitur g h producta
ad alteram ſectionis partem ab ipſa d h biſariam ſecabitur.



THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

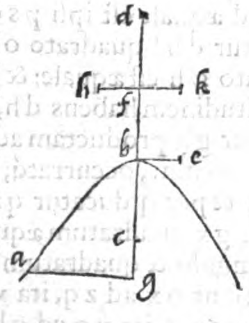
Sɪ per punctum, quod tranſuerſum latus oppoſitarum ſectionum bifariam diuidit, recta linea quædam ordinatim applicetur; ipſarum diameter erit, priori diametro coniugata.

Sint oppoſitæ ſectiones, quarum diameter a b: ſeceturq; a b bifariam in c puncto:
& per c ordinatim applicetur c d. Dico c d diametrum eſſe coniugatam ipſi a b. ſint
enim, iuxta quas poſſunt ordinatim applicatæ a e, b f: & iunctæ a f, b e producantur:
ſumpto autem in altera ſectione quouis puncto g, ducatur per g ipſi a b æquidiſtans
g h, & à punctis g h ordinatim applicentur g k, h l: deinde à punctis k l ipſis a e, b f
34. primi æquidiſtantes ducantur k m, l n. Quoniam igitur æqualis eſt g k ipſi h l, erit g k qua-
13. huius dratum quadrato h l æquale. Sed quadratum g k æqua-
le eſt rectangulo a k m; & quadratum h l rectangulo b l n.
ergo a k m rectangulum rectangulo b l n æquale erit. &
14. huius. cum æquales ſint a e, b f; erit ut a e ad a b, ita b f ad b a.
7. quinti ut autem a e ad a b, ſic m k ad k b: & ut f b ad b a, ſic n l
ad l a. quare ut m k ad k b, ſic n l ad l a. ſed ut m k ad k b
ſumpta k a communi altitudine, ita rectangulum m k a
ad rectangulum b k a: & ut n l ad l a ſumpta communi
altitudine b l, ita n l b rectangulum ad rectangulum a l b.
ergo ut rectangulum m k a ad rectangulum b k a, ita re-
ctangulum n l b ad ipſum a l b: & permutando ut m k a
rectangulum ad rectangulum n l b, ita b κ a rectangu-
A lum ad rectangulum a l b. eſt autem rectangulum m k a æquale rectangulo n l b. qua-
re & b κ a rectangulum rectangulo a l b; & propterea linea a k lineæ l b æqualis erit.
eſtq; a c æqualis c b. ergo & tota k c toti c l: & ideo g x ipſi x h æqualis. linea igitur
g h ab ipſa x c d bifariam ſecabitur: atque eſt ipſi a b æquidiſtans. ergo & x c d dia-
meter erit coniugata ipſi a b;



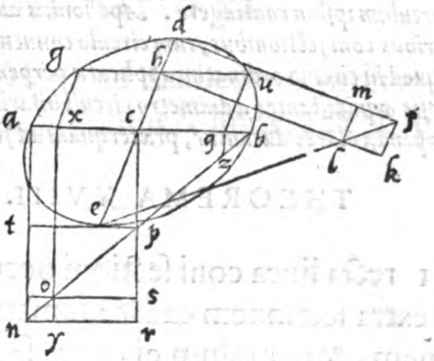
EVTOCIVS.

A QVARE & b k a rectangulum rectangulo a l b: & propterea linea a k lineæ l b
14. ſexti æqualis erit.] *Quoniam enim rectangulum b κ a ipſi a l b rectangulo eſt æquale; erit ut κ b*
ad a l, ita l b ad a κ: permutandoq; ut κ b ad b l, ita l a ad a k: & componendo ut κ l ad l b,
9. quinti. *ita l k ad k a. æqualis igitur eſt a k ipſi b l. Animaduertendum autem eſt in quintodecimo, &*
ſexto decimo theoremate Apollonio propoſitum fuiſſe, ut ſecundas & coniugatas, quas uocant,
diametros inquireret; tum ellipſis; tum hyperbole, ſeu oppoſitarum ſectionum: parabolæ enim eiuſ-
modi diametrum non habet. Sed & illud notatione dignum eſt, diame-
tros ellipſis intra recipi; hyperbolæ uero, & oppoſitarum ſectionum dia-
metros deſcribi extra. Oportet autem lineas, iuxta quas poſſunt ordi-
natim applicatæ, ſeu recta latera (græci ὀρθιας πλευρας *dicunt) & li-*
neas; quæ ipſis æquidiſtant, ad rectos angulos aptare: ordinatim uero
applicatas, & ſecundas diametros non omnino. maxime tamen deberent
in acuto angulo applicari, ut longe aliæ, & diuerſæ ab eis, quæ recto
lateri æquidiſtant, deprehenderentur. Poſt ſextum decimum theorema
diffinitiones tradit eius, quæ ſecunda diameter appellatur hiperbolæ &
ellipſis. quibus quidem nos ex figuris lucem afferre conabimur. Sit hy-
perbole a b, cuius diameter g c b d: linea uero, iuxta quam poſſunt, quæ
ad ipſam b e applicantur, ſit b e. patet igitur b c in infinitum augeri propter ſectionem, ut oſtenſum
eſt in octauo theoremate. Sed ipſa b d, quæ ſubtenditur angulo extra triangulum per axem, ter-
minata eſt. Itaque ſi bifariam ſecta b d in f: & à puncto a ordinatim applicata a g, per f lineæ
a g æquidiſtantem duxerimus h f κ, ita ut ſit h f ipſi f k æqualis, & quadratum h k æquale re-
ctangulo [illegible] b e: erit b k ſecunda diameter: hoc enim fieri poſſe perſpicuum eſt, quippe cum h k



extra

extra ſectionem cadens in infinitum produci poſſit; atque à linea infinita cuilibet datæ lineæ æqualis facile abſcindatur. punctum autem f uocat centrum, & lineam fb, & alias quæ ſimiliter à puncto f ad ſectionem ducuntur, ex centro appellat. atque hæc in hyperbola, & oppoſitis ſectionibus. conſtat ergo utramque diametrum terminatam eſſe: primam quidem per ſe ſe ex generatione ſectionis, ſecundam uero quòd media proportionalis ſit inter lineas terminatas, uidelicet inter primam diametrum, & eam iuxta quam poſſunt, quæ ad diametrum ordinatim applicantur. Sed in ellipſi id, quod dictum eſt, non dum apparet. Itaque cum ipſa in ſe ipſam uergat inſtar circuli; & omnes diametros intra recipiat, atque terminet; omnino in ellipſi, quæ media eſt proportionalis inter figuræ latera, ductaq; per centrum ſectionis, & à diametro biſariam diuiſa, ab ipſa ſectione terminatur. quod ex ijs, quæ dicta ſunt in quinto decimo theoremate oſtendere poſſumus. quoniam enim ut demonſtratum eſt, quæ ad lineam d e applicantur æquidiſtantes ipſi a b, poſſunt ſpatia tertiæ proportionali earum adiacentia, uidelicet lineæ fd: erit ut d e ad a b, ita a b ad d f. quare a b media proportionalis eſt inter e d, d f. & idcirco, quæ applicantur ad a b, ipſi d e æquidiſtantes, poterunt ſpacia adiacentia tertiæ proportionali ipſarum d e, a b, hoc eſt lineæ a n. ergo d e ſecunda diameter media eſt proportionalis inter b a, a n figuræ latera. Oportet autem hoc ſcire etiam ob commodam figurarum deſcriptionem. nam cum inæquales ſint a b, d e diametri, in circulo enim tantum ſunt æquales: conſtat lineam, quæ minori earum ad rectos angulos ducitur, ut hoc in loco d f, tanquam tertia proportionalis ipſarum d e, a b, utriſque maiorem eſſe. eam uero, quæ ad angulos rectos ducitur minori, ut a n, tanquam tertia proportionalis ipſarum a b, d e, utriſque eſſe minorem; ita ut quatuor continue proportionales ſint: ut enim a n ad d e, ſic eſt d e ad a b, & a b ad d f.



DIFFINITIONES SECVNDAE.

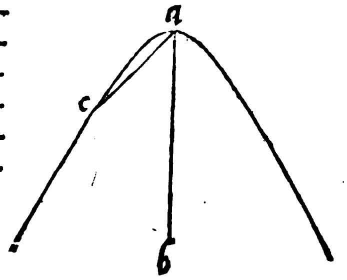
1 Punctum, quod hyperbolæ, & ellipſis diametrum biſariam diuidit, centrum ſectionis dicatur. 2 Et quæ à centro ad ſectionem perducitur, uocetur ex centro ſectionis. 3 Similiter & punctum quod tranſuerſum latus oppoſitarum ſectionum biſariam diuidit, centrum uocetur. 4 Quæ autem à centro ducitur æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt, mediamq; proportionem habet inter latera figuræ, & biſariam ſecatur à centro, ſecunda diameter appelletur.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

SI in coni ſectione à uertice ipſius ducatur recta linea æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt; extra ſectionem cadet.

Sit coni ſectio, cuius diameter a b. Dico lineam, quæ à uertice, hoc eſt ab a puncto ducitur æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt; extra ſectionem cadere. Si enim fieri poteſt, cadat intra, ut a c. Quoniam igitur in coni ſectione ſumptum eſt quodlibet punctum c; linea quæ ab ipſo c intra ſectionem ducitur, ordinatim appli-

7. huius catæ æquidiſtans, diametro occurrit, atque ab ipſa bifariam ſecatur. quare a c producta bifariam ſecabitur à linea a b, quod eſt abſurdum; quoniam producta extra ſectionem cadit. non igitur recta linea, quæ à puncto a ducitur ordinatim applicatæ æquidiſtans, cadet intra ſectionem. ergo extra cadet: & propterea ſectionem ipſam neceſſario continget.

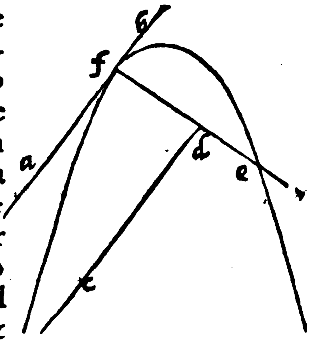


EVTOCIVS.

1 EVCLIDES *in quinto decimo theoremate tertij libri elementorum oſtendit lineam, quæ ab extremitate diametri ad rectos angulos ducitur, cadere extra; atque circulum ipſum contingere. Apollonius autem hoc loco uniuerſale quoddam demonſtrat, quod tum tribus coni ſectionibus, tum circulo conuenire poteſt. hoc enim differt circulus à coni ſectionibus, quod in circulo ordinatim applicatæ perpendiculares ſunt ad diametrum; neque enim aliæ lineæ ipſis æquidiſtantes à diametro circuli bifariam diuiduntur: at in tribus ſectionibus non omnino perpendiculares ducuntur, præterquàm ad ſolos axes.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

SI recta linea coni ſectioni occurrens, productaq; in utramque partem extra ſectionem cadat: ſumatur autem aliquod punctum intra ſectionem, & per ipſum ei, quæ ſectioni occurrit æquidiſtans ducatur: ducta linea & producta ex utraquæ parte ſectioni occurret.



Sit coni ſectio, atque ipſi occurrens recta linea a f b, quæ producta in utramque partem extra ſectionem cadat: ſumpto autem intra ſectionem puncto aliquo c; per c ipſi a b æquidiſtans ducatur c d. Dico c d productam ex utraque parte ſectioni occurrere. Sumatur enim aliquod punctum in ſectione, quod ſit e: & iungatur e f. quoniam igitur linea a b lineæ c d æquidiſtat: ipſiq; a b occurrit recta linea e f: & c d producta ipſi e f occurret. & ſiquidem cadet inter e f puncta, perſpicuum eſt ipſam ſectioni occurrere; ſi uero extra e, ſectioni prius occurret. ergo c d producta, ut ad partes d e occurrit ſectioni. ſimiliter demonſtrabitur, & ad partes a f eidem occurrere. linea igitur c d producta ex utraque parte ſectioni occuret. 2 primi libri uitellionis.

EVTOCIVS.

1 IN *aliquibus exemplaribus hoc theorema in parabola, & hyperbola tantummodo propoſitum oſtendit. Sed tamen præſtat propoſitionem uniuerſaliorem eſſe: quamquam de ellipſi, ut minime dubium, ab illis prætermiſſum uideri poteſt; linea enim c d intra ſectionem terminatam exiſtens, ſi producatur ex utraq; parte, neceſſario ipſam ſecabit. Sciendum autem eſt, eandem congruere demonſtrationem, etiamſi linea a f b ſecet ipſam ſectionem.*

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

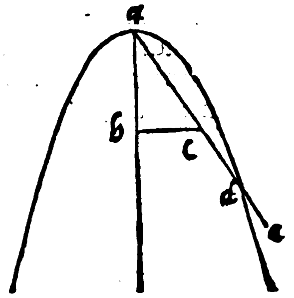
IN omni ſectione coni recta linea, quæ à diametro ducitur ordinatim applicatæ æquidiſtans, cum ſectione conueniet.

Sit coni ſectio, cuius diameter a b: ſumaturq; aliquod punctum b in diametro; & per b ducatur b c æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata fuerit. Dico b c productam

ctam cum ſectione conuenire. ſumatur enim quodlibet pũctum in ſectione d. eſt autem & punctum a in ſectione. ergo à puncto a ad d ducta linea intra ſectionem cadet. Quoniã igitur quæ ab a ducta eſt ordinatim applicatæ æquidiſtans, cadit extra ſectionem: & cum ipſa conuenit a d: itemq́; b c æquidiſtat ei; quæ ordinatim applicata eſt: ſequitur ut b c etiam cum a d conueniat. & ſi quidem conuenit inter puncta a d; perſpicuum eſt cum ſectione quoque conuenire: ſi uero extra d, ut ad punctum e, prius conueniet cum ſectione. ergo recta linea, quæ à puncto b ducitur ordinatim applicatæ æquidiſtans, cum ſectione conueniet.

10 huius

17. huius



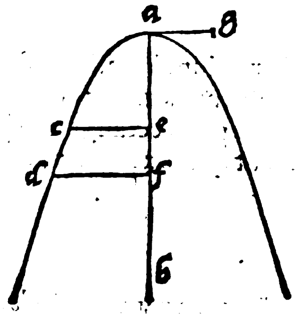
THEOREMA XX. PROPOSITIO XX.

Si in parabola duæ rectæ lineæ à ſectione ad diametrum ordinatim applicentur, ut eorum quadrata inter ſeſe, ita erunt & lineæ, quæ ab ipſis ex diametro ad uerticem abſcinduntur.

SIT parabole, cuius diameter a b: & in ipſa ſumantur puncta quæpiam c d; à quibus ad a b ordinatim applicentur c e, d f. Dico lineam f a ad ipſam a e ita eſſe, ut quadratum lineæ d f ad quadratum c e. ſit enim linea a g, iuxta quã poſſunt ordinatim applicatæ. erit quadratum d f rectangulo f a g æquale: & quadratum c e æquale rectãgulo e a g. quare ut quadratum d f ad quadratum c e, ita rectangulum f a g ad rectangulum e a g. ut autem rectangulum f a g ad rectangulum e a g, ita linea f a ad lineam a e. ergo ut quadratum d f ad quadratum c e, ita erit f a ad a e.

11. huius

1. huius



EVTOCIVS.

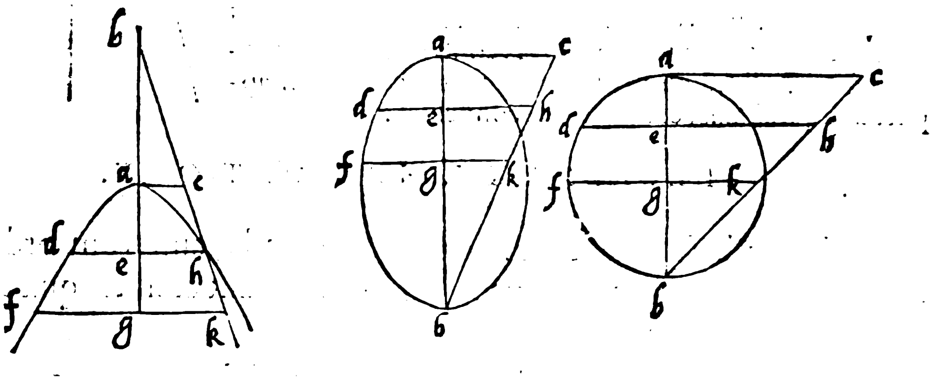
Ab hoc theoremate incipiens Apollonius deinceps in omnibus accidentia, quæ ipſi parabolæ inſunt, & non alij cuipiam magna ex parte oſtendit: deinde hyperbolæ, ellipſi, & circulo eadem ineſſe demonſtrat. Quoniam autem uon inutile uiſum eſt ijs, qui mechanica tradunt, ob inſtrumentorum penuriam, ſæpe numero per continuata puncta coni ſectiones in plano deſcribere: ex hoc theoremate ſuppeditatur modus ſumendi ea puncta continuata, per quæ parabole regulæ adminiculo deſignatur. ſi enim exponamus rectam lineam, ut a b: & in ea ſumamus puncta continuata e f: à quibus ad rectos angulos ipſi a b lineas e c, f d ducamus, ſumpto in linea e c quolibet puncto c; longius quidem ab e ſi latiorem parabolam facere libuerit; ſi uero anguſtiorem propius: & fiat ut a e ad a f, ita quadratum e c ad quadratum f d: puncta c d in ſectione erunt. ſimiliter autem ſumentur & alia puncta, per quæ parabole ipſa deſcribetur.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

Si in hyperbola, uel ellipſi, uel circuli circumferentia, rectæ lineæ ordinatim ad diametrum applicentur: erunt quadrata earũ ad ſpacia contenta lineis; quæ inter ipſas, & uertices tranſuerſi lateris figuræ interijciuntur, ut figuræ rectum latus ad tranſuerſum: inter ſe ſe uero, ut ſpacia, quæ interiectis, ut diximus lineis, continentur.

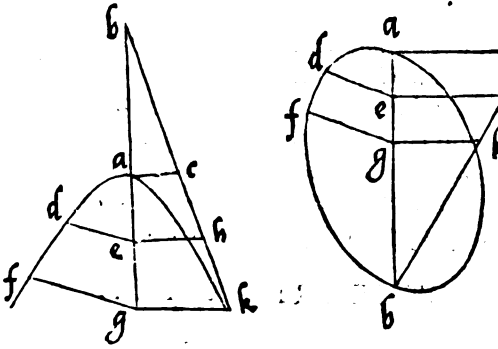
SIT hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b: linea autem, iuxta quam poſſunt applicatæ a c: & ad diametrum applicentur ordinatim d e, f g. Dico ut quadratum f g ad rectangulum a g b, ita eſſe lineam a c ad a b: ut uero quadratum f g ad quadratum d e, ita rectangulum a g b ad rectangulum a e b. iungatur enim b c figuram determinans: & per e g puncta ipſi a c æquidiſtantes ducantur e h, g k. quadratum igitur f g æquale eſt rectangulo k g a: & quadratum d e rectangulo h e a. Quoniam autem ut k g ad g b, ita eſt c a ad a b: & ut k g ad g b, ſumpta a g communi altitudine, ita rectangulum k g a ad rectangulum b g a: erit ut c a ad a b, ita rectangulum k g a, hoc eſt quadratum f g ad rectangulum b g a. Eadem ratione demonſtrabitur etiam ut quadratum d e ad rectangulum b e a; ita c a ad a b. ergo ut quadratum f g ad rectangulum b g a, ita quadratum d e ad b e a rectangulum: & permutando ut quadratum f g ad quadratum d e, ita rectangulum b g a ad rectangulum b e a.

12. huius
4. ſexti
1. ſexti
11. quinti



EVTOCIVS.

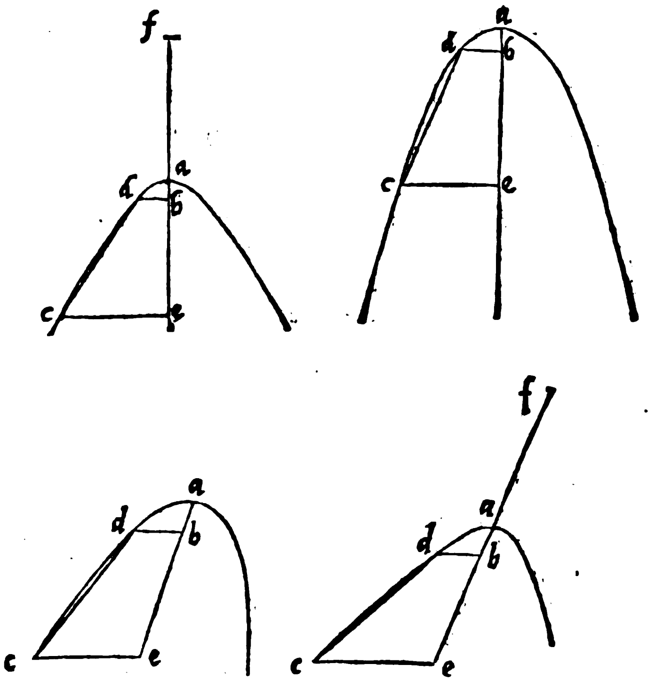
THEOREMA *manifeſtè exponitur, & caſum non habet. oportet autem ſcire lineam, iuxta quá poſſunt, uidelicet rectum figuræ latus in circulo quidem diametro æquale eſſe. quoniam enim c a ad a b eſt, ut quadratum d e ad rectangulum a e b: quadratum autem d e rectangulo a e b in circulo dumtaxat eſt æquale: ſequitur ut & c a æqualis ſit ipſi a b. ſed illud quoque attendendum eſt, lineas quæ in circuli circumferentia ordinatim applicantur, ad diametrum perpendiculares eſſe, atque in eadem recta linea, in qua ſunt æquidiſtantes ipſi a c. Per hoc autem theorema, eo modo quo dictum eſt in parabola, hyperbolen & ellipſim regulæ adminiculo deſcribemus. exponatur enim recta linea a b, & in infinitum producatur ad g: à puncto autem a ad rectos angulos ipſi a b ducatur a c: iunctaq; b c, & producta, ſumantur in linea a g puncta quædam e g: à quibus ipſi a c æquidiſtantes ducantur e h, g k: & fiat a g k rectangulum æquale quadrato f g: & rectangulum a e h æquale ipſi d e quadrato. tranſibit iam hyperbole per puncta a d f. Similiter eadem & in ipſa ellipſi conſtruemus.*



THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

SI parabolen, uel hyperbolen recta linea in duobus punctis ſecet, nō conueniens cum diametro ſectionis intra ſectionem; producta cum eadem diametro extra ſectionem conueniet.

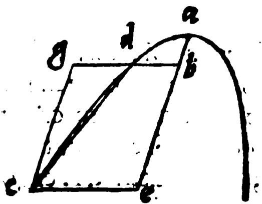
Sit



SIT parabole, uel hyperbole, cuius diameter a b; & ſecet quæpiam recta linea ſectionem in duobus punctis c d. Dico lineam c d productam conuenire cum ipſa a b extra ſectionem. applicentur enim à punctis c d ordinatim lineæ c e, d b: & ſit primum ſectio parabole. Quoniam igitur in parabola, ut quadratum c e ad quadratum d b: ita eſt e a ad a b: maior autem e a, quam a b: erit quadratum c e quadrato d b maius. quare & linea c e maior ipſa d b. & ſunt inter ſe ſe æquidiſtantes. ergo c d producta cum diametro a b extra ſectionẽ conueniet. ſed ſit ſectio hyperbole. itaque quoniam in hyperbola ut quadratum c e ad quadratum d b, ita eſt rectangulum f e a ad rectangulum f b a; quadratum c e maius erit quadrato d b. & ſunt æquidiſtantes. linea igitur c d producta cum diametro ſectionis extra ſectionem conueniet. A

FED. COMMANDINVS.

A ET ſunt inter ſeſe æquidiſtantes. ergo c d producta cum diametro a b extra ſectionem conueniet.] *Ducatur à puncto c linea c g diametro e b æquidiſtans; & producta b d, ipſi c g occurrat in g. Quoniam igitur c e, d b inter ſe ſe æquidiſtant; itemq; e b, c g: erit ipſum e g parallelogrammum: & anguli b e c, e c g æquales duobus rectis. quare b e c, e c d anguli duobus rectis ſunt minores. linea igitur c d cum ipſa e a ex parte a conueniet. quòd cum non conueniat intra ſectionem, extra conuenire neceſſarium eſt.* 29.primi

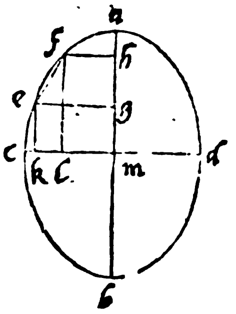


THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

SI ellipſim recta linea ſecet inter duas diametros; producta cum utraque earum extra ſectionem conueniet.

SIT ellipſis, cuius diametri a b, c d: & ſecet quædam recta linea ſectionem, uidelicet ipſa e f, inter duos diametros a b, c d interiecta. Dico e f productam conuenire cũ utraque earum extra ſectionem. applicentur enim à punctis e f ordinatim ad diame-

21.huius trum quidem a b lineæ e g, f h; ad c d uero e k, f l. eſt igitur ut quadratum e g ad quadratum f h, ita rectangulum b g a ad rectangulum b h a: ut autem quadratum f l ad quadratum e k, ita rectangulum d l c ad rectangulum d k c: atque eſt rectangulum b g a maius rectangulo b h a; etenim g propius accedit ad punctum, quod diametrum a b bifariam ſecat: & rectangulum d l c maius eſt rectangulo d k c. quadratum igitur e g maius eſt quadrato f h: & quadratum f l maius quadrato e k: idcircoq; linea e g maior, quàm ipſa f h: & f l maior, quàm e k. æquidiſtat autem e g ipſi f h, itemq; f l ipſi e k. ergo e f producta cũ utraque diametro a b, c d extra ſectionem conueniet.



EVTOCIVS.

Attendendvm eſt in propoſitione Apolloniũ duas diametros dicere. non ſimpliciter quaſcunque, ſed quæ coniugatæ diametri appellantur; quarum utraque ordinatim applicatæ æquidiſtás ducitur, mediamq; proportionem habet inter latera figuræ alterius diametri: & idcirco alteri æquidiſtantes lineas bifariam diuidit: ut in theoremate eſt demonſtratum. niſi enim ita ſit continget lineam inter duas diametros inter mediam alteri ipſarum æquidiſtare: quod non ponitur. quoniam autem g propius accedit ad punctum m, quod a b bifariam ſecat, quàm ipſum h: rectangulum quidem b g a unà cum quadrato g m æquale eſt quadrato a m: rectangulum uero b h a unà cum quadrato h m eidem eſt æquale: & quadratum h m maius quadrato g m: erit rectangulum b g a rectangulo b h a maius.

coniugatæ diametri.

16.huius

5.ſecundi

FED. COMMANDINVS.

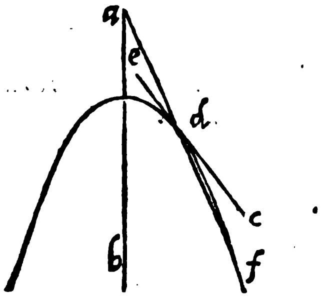
Hoc idem etiam in ipſo circulo euenit, ſumptis duabus diametris coniugatis: quod eodem prorſus modo demonſtrabitur.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXIIII.

Si parabolæ uel hyperbolæ recta linea in uno puncto occurrens, & producta ex utraque parte extra ſectionem cadat; cum diametro conueniet.

Sit parabole uel hyperbole, cui⁹ diameter a b: occurratq; ipſi recta linea c d e in puncto d: & producta ex utraq; parte extra ſectionem cadat. Dico lineam c d e cum diametro a b conuenire. Sumatur enim aliquod punctum f in ſectione; & iungatur d f. ergo d f producta conueniet cum diametro ſectionis. conueniat in a puncto. eſt autem c d e inter ſectionem & lineam f d a. linea igitur c d e producta cum diametro extra ſectionem conueniet.

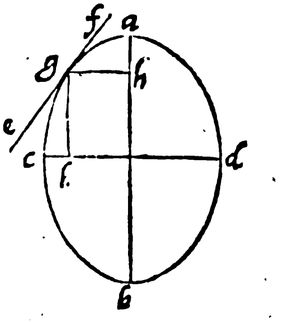
11.huius



THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

Si ellipſi recta linea occurrens inter duas diametros, & producta ex utraque parte cadat extra ſectionem; cum utriſque diametris conueniet.

Sit ellipſis, cuius diametri a b, c d: & ipſi occurrat recta linea e f inter duas diametros in puncto g: & producta ex utraque parte extra ſectionem cadat. Dico e f cum utriſque diametris a b, c d conuenire. applicentur enim à puncto g ad diametros a b, c d lineæ g h, g k. itaque quoniam g k æquidiſtat ipſi

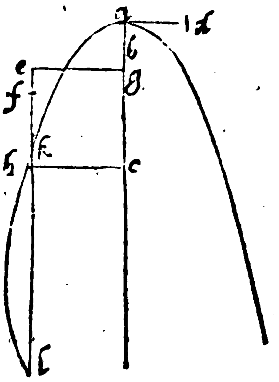


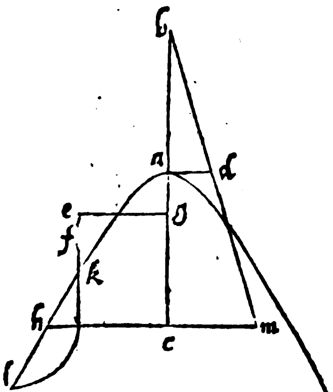
a b: conuenit autem quædam linea g f cum g k, & cum ipſa a b conueniet. Eodem modo & f e cum diametro c d conuenire demonſtrabitur. ex 2. primi libri Vitellionis.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVI.

Si in parabola, uel hyperbola recta linea ducatur diametro ſectionis æquidiſtans; in uno tantum puncto cum ſectione conueniet.

SIT primum parabole, cuius diameter a b c: rectum autem latus a d: & ipſi a b æquidiſtans ducatur e f. Dico e f productam cum ſectione conuenire. Sumatur enim in ipſa e f aliquod punctum e; à quo ducatur e g ordinatim applicatæ æquidiſtans; & quadrato e g maius ſit rectãgulum d a c: à puncto autem c ordinatim applicetur c h. ergo quadratum h c æquale eſt rectangulo d a c: atque eſt rectangulum d a c maius 11. huius quadrato e g. quadratum igitur h c quadrato e g maius erit; & idcirco linea h c maior linea e g: & ſunt æquidiſtantes inter ſe ſe. ergo e f producta ſecabit h c: proptereaq́; conueniet cum ſectione. conueniat in k. Dico in uno tantum puncto k conuenire. ſi enim fieri poteſt, conueniat etiam in l. Quoniam igitur parabolen recta linea ſecat in

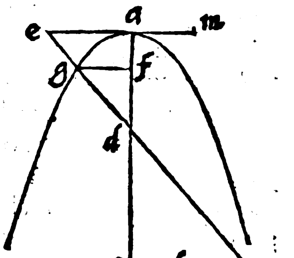




duobus punctis, ſi producatur conueniet cum diametro ſectionis; quod eſt abſurdũ. 22. huius poſitum enim eſt ipſi æquidiſtare. ergo e f in uno tantum puncto cum ſectione conueniet. Sit deinde ſectio hyperbole: tranſuerſum uero figuræ latus a b: & a d rectum: iungaturq́; b d, & producatur. iiſdem igitur, quæ ſupra, diſpoſitis, ducatur à puncto c ipſi a d æquidiſtans c m. & quoniam rectangulum m c a maius eſt rectangulo d a c: ipſiq́; m c a æquale eſt quadratum c h: & d a c rectangulum maius quadrato g e: erit & 12. huius quadratum c h quadrato g e maius: & ideo linea c h maior linea g e. et quibus eadem, quæ ſupra diximus, neceſſario ſequuntur.

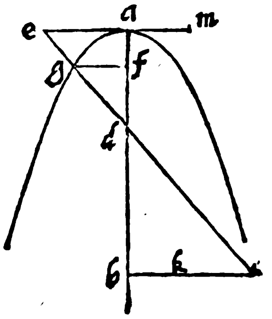
THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

Si parabolæ diametrum ſecet recta linea; producta in utramque partem cum ſectione conueniet.



SIT parabole, cuius diameter a b: & ipſam a b ſecet quæpiam recta linea c d intra ſectionem. Dico c d productam in utramque partem cum ſectione conuenire: ducatur enim à puncto a ordinatim applicatæ æquidiſtans a e. ergo a e extra ſectionem cadet. itaque uel c d ipſi a e æquidiſtat, uel non. & ſi quidem æquidiſtat, ordinatim 17. huius applicata eſt. quare producta in utramque partem conueniet cum ſectione. Quod ſi non æquidiſtat, producatur, 19. huius & conueniat cum a e in e puncto. conſtat igitur ipſam cum ſectione conuenire ad partes e. ſi enim conuenit cum

à e, multo prius ſectioni occurrit. Dico rurſus eandem, & ad alteras partes productam conuenire cum ſectione. ſit enim m a linea, iuxta quam poſſunt: & g f ordinatim applicetur: quadratum autem a d æquale ſit rectangulo b a f: & ordinatim applicata b k conueniat cum d e in c puncto. Quoniam igitur rectangulum f a b æquale
14. ſexti eſt quadrato a d; erit ut b a ad a d, ita d a ad a f: quare & reliqua b d ad reliquam d f,
19. quīti. 21. ſexti ut b a ad a d. & propterea ut quadratum b d ad quadratum d f, ita quadratum b a ad
cor. 20. ſe quadratum a d. Rurſus quoniam quadratum a d æquale eſt rectangulo b a f, ut b a ad
xti. a f, ſic erit quadratum b a ad quadratum a d; hoc eſt quadratum b d ad quadratũ d f.
4. & 22. ſe ut autem quadratum b d ad quadratum d f, ſic quadratum b c ad quadratum f g: & ut
xti 1. ſexti. b a ad a f, ſic rectangulum b a m ad rectangulum f a m. ut
11. quinti igitur quadratum b c ad quadratum f g, ita rectangulum
b a m ad ipſum f a m. & permutando ut quadratum b c ad
rectangulum b a m, ita quadratum f g ad rectangulum
11. huius f a m. at quadratum f g æquale eſt f a m rectangulo, pro-
14. quin- pter ſectionem. ergo & quadratum b c rectangulo b a m
ti æquale erit. eſt autem a m rectum figuræ latus: & b c or-
dinatim applicata. ſectio igitur tranſit per c punctum: &
linea c d in c cum ſectione neceſſario conuenit.

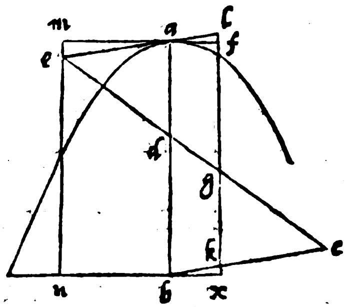


24

EVTOCIVS.

In aliquibus exemplaribus uigeſimiſeptimi theorematis talis legitur demonſtratio.

Sit parabole, cuius diameter a b: & hanc ſecet recta linea quædam g d intra ſectio-
nem. Dico g d productam ad utraſque partes cum ſectione conuenire. ducatur enim
17. huius per a punctum, ordinatim applicatæ æquidiſtans, quæ ſit a e. ergo a e cadet extra ſe-
ctionem. uel igitur g d ipſi a e æquidiſtat, uel non: & ſiquidem æquidiſtet, ordinatim
applicata eſt: ideoq; ſi producatur ad utraſque partes, bifariam ſecta à diametro con-
19. huius ueniet cum ſectione: ſi uero non æquidiſtet, ſed producta conneniat cum a e in e pun
cto; perſpicuum eſt ipſam cum ſectione conuenire ad partes e. nam ſi cum a e conue-
nit multo prius ſectioni occurrat neceſſe eſt. Dico etiam ad alteras partes productam
cum ſectione conuenire. ſit enim m a linea, iuxta quam poſſunt: & in rectum ipſi pro
ducatur a f. ergo m a ad a b eſt perpendicularis.
A fiat ut quadratum a e ad triangulum a e d, ſic li
nea m a ad a f: & per puncta m f, ipſi a b æquidi
B ſtantes ducantur f g k, m n. cum igitur quadrila-
terum ſit l a d g; & poſitione data l a, ducatur
c k b ipſi l a æquidiſtans, quæ abſcindat c k g
triangulum quadrilatero l a d g æquale: & per
b ipſi f a m æquidiſtans ducatur x b n. Itaque
quoniam ut quadratum a e ad triangulum a e d,
ita eſt linea m a ad a f: & ut quadratnm a e ad
a e d triangulum, ita quadratum c b ad triangu
lum d c b, etenim a e, c b inter ſeſe æquidiſtant:
& ipſas coniungunt c e, a b: ut autem m a ad a f, ita a m n b parallelogrãmum ad parallelogrammum a f x b: erit ut quadratum c b ad triangulum c d b, ita a m n b parallelogrammum ad parallelogrammum a f x b: & permutando ut quadratum c b ad parallelogrammum a m n b, ita c d b triangulum ad parallelogrammum a f x b. parallelogrammum autem a f x b triangulo c d b eſt æquale. quoniam enim c g k triangulum æquale eſt quadrilatero a l d g: & quadrilaterum g d b k utrique commune: erit l a b k parallelogrammum æquale triangulo c d b. Sed l a b k parallelogrammum æquale eſt parallelogrammo f a b x; quod ſit in eadem baſi a b, & in eiſdem parallelis a b, l x. ergo c d b triangulum parallelogrammo x f a b æquale erit. quare & quadratum c b æquale parallelogrammo a m n b: parallelogrammum autem m a b n rectangulo m a b æquale; quod m a ad a b ſit perpendicularis. ergo rectangulum m a b eſt æquale quadrato

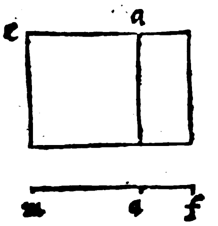


drato c b. atque eſt m a rectum figuræ latus; a b diameter; & c b ordinatim applicata, cum ipſi a e æquidiſtet. ex quibus ſequitur punctum c eſſe in ſectione. ergo d g c in G cum ſectione conuenit. quod demonſtrandum proponebatur.

EIVSDEM COMMENTARIVS IN PROPOSITVM THEOREMA.

A FIAT ut quadratum a e ad triangulum a e d, ſic linea m a ad a f.] *Demonſtratum eſt hoc in commentarijs in undecimum theorema. ſi enim deſcribentes quadratum lineæ a e ipſius lateri appoſuerimus ſpatium triangulo a e d æquale; factum iam erit quod quærebamus.*

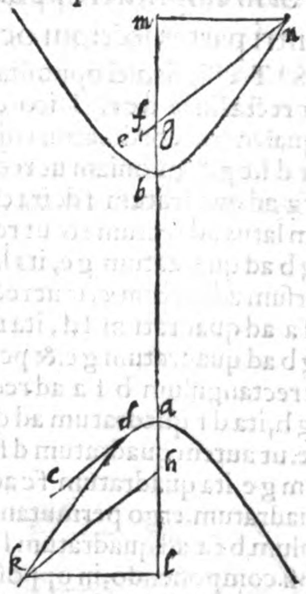
B Cum igitur quadrilaterum ſit l a d g, & poſitione data l a, ducatur c k b ipſi l a æquidiſtans, quæ abſcindat c k g triangulum quadrilatero l a d g æquale.] *Hoc ita faciemus. ſi enim, ut in elementis didicimus, dato rectilineo, uidelicet quadrilatero l a d g æquale, & triangulo dato a e d ſimile conſtituerimus triangulum s t y, ita ut latus s y lateri a d reſpondeat; & fecerimus g k ipſi s y æqualem, & t y æqualem g c; iuncta linea c k factum erit, quod quæritur. Quoniam enim angulus ad y æqualis eſt angulo ad d, hoc eſt ei, qui ad g; erit triangulum c g k æquale, ac ſimile triangulo s t y: & angulus c angulo e æqualis; qui quidem alterni ſunt. linea igitur c k æquidiſtat ipſi a e. conſtat autem lineam m a tangere ſectionem, quando a b ſit axis; alioquin ipſam ſecat; & omnino ad diametrum perpendicularis ducitur.* 35. ſexti 27. primi



THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXVIII.

Si recta linea unam oppoſitarum ſectionum contingat: ſumatur autem punctum intra alteram ſectionem: & per ipſum linea contingenti æquidiſtans ducatur: producta ad utraſque partes cum ſectione conueniet.

SINT oppoſitæ ſectiones, quarum diameter a b: & ſectionem, in qua eſt a contingat quædam recta linea c d: ſumatur autem aliquod punctum e intra alteram ſectionem: & per e ducatur e f ipſi c d æquidiſtans. Dico lineam e f productam ad utraſque partes cum ſectione conuenire. Quoniam enim oſtenſum eſt lineam c d productam conuenire cum diametro a b: atque eſt e f ipſi æquidiſtans: linea e f producta cum diametro conueniet. conueniat autem in g: & ipſi g b æqualis ponatur a h. deinde per h ducatur h k æquidiſtans e f: & ipſa k l ordinatim applicata, ponatur g m æqualis l h: ducaturq́; m n ordinatim applicatæ æquidiſtans: & g m in directum producatur. Itaque quoniam k l ipſi m n æquidiſtat; & k h ipſi g n: & eſt l m una, eademq́; recta linea: triangulum k h l ſimile eſt triangulo g m n. eſt autem l h æqualis g m. quare & k l ipſi m n æqualis erit. ideoq́; quadratum k l æquale quadrato m n. Rurſus quoniam l h æqualis eſt g m: & a h ipſi b g: communis autem a b: erit b l æqualis a m: & propterea rectangulum b l a rectangulo a m b æquale. ut igitur rectangulum b l a ad quadratū k l, ita rectangulum a m b ad quadratum m n. Sed ut rectangulum b l a ad k l quadratum, ita tranſuerſum figuræ latus ad latus rectum. quare ut rectangulum a m b ad quadratum m n, ita erit latus tranſuerſum ad rectum. ex quibus colligitur, punctum n in ſectione eſſe. ergo linea e f producta in puncto n cū ſectione conueniet. ſimiliter oſtendemus, ſi ex altera parte producatur, cum ſectione conuenire. 24. huius 21. huius



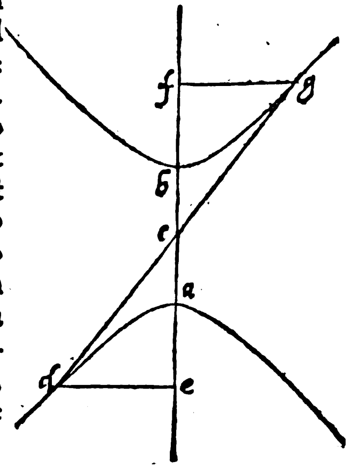
EVTOCIVS.

Qvod ſi c d hyperbolen ſecet, eadem nihilominus ſequentur, quemadmodum in decimaoctauo theoremate.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

Si in oppoſitis ſectionibus recta linea per cētrum ducta occurrat uni ſectioni, ulterius producta alteram quoque ſecabit.

Sint ſectiones oppoſitæ, quarum diameter a b: centrū D autem c. & linea c d ſectionem a d ſecet. Dico ipſam c d alteram quoque ſecare. ordinatim enim applicetur d e: ipſiq́; a e ponatur æqualis b f: & f g ordinatim ducatur. Quoniam igitur e a, b f æquales ſunt; & a b utriſque cōmunis; rectangulum b e a rectangulo a f b eſt æquale. & quoniam ut rectangulum b e a ad quadratum d e, ita eſt tranſuerſum latus ad rectum. Vt autem rectangulū a f b ad quadratum f g, ita latus tranſuerſum ad rectum. ergo ut rectangulum b e a ad quadratum d e; ſic rectangulum a f b ad f g quadratum. Sed æquale eſt rectangulum b e a rectangulo a f b. quadratū igitur d e quadrato f g eſt æquale. Quòd cum linea e c æqualis ſit c f; & d e ipſi f g; ſitq́; recta linea e f; & e d ipſi f g æquidiſtans: etit & d g recta linea. ergo c d ſectionem quoque alteram ſecabit.



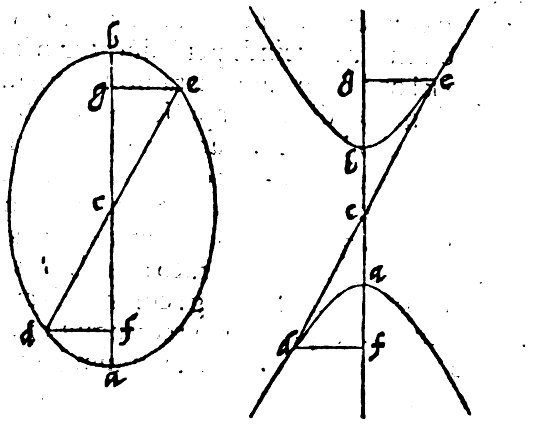
FED. COMMANDINVS.

ERIT & d g recta linea.] *Sequitur enim ex iam dictis triangulum c d e triangulo c g f ſimile eſſe: angulumq́; d c e angulo g c f æqualem.* 13. primi *ſed cum e f recta linea ſit, anguli g c f, g c e duobus rectis ſunt æquales: itémq́; anguli d c e, d c f. ergo & reliqui g c e, d c f inter ſe æquales erunt: &* 14. primi. *idcirco g c f, f c d æquales duobus rectis. quare d g recta linea ſit neceſſe eſt.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Si in ellipſi, uel oppoſitis ſectionibus recta linea ducatur, ad utraſque centri partes ſectioni occurrens; ad centrum bifariam ſecabitur.

SIT ellipſis, uel oppoſitæ ſectiones, quarum diameter a b, centrum c: & per c ducatur recta linea d c e. Dico c d ipſi c e æqualem eſſe. ordinatim enim applicētur d f, e g. & quoniam ut rectangulum 21. huius b f a ad quadratum f d, ita eſt tranſuerſum latus ad rectum: & ut rectāgulum a g b ad quadtatum g e, ita latus tranſuerſum ad rectum: erit ut rectangulum b f a ad quadratum f d, ita rectangulū a g b ad quadratum g e: & permutando ut rectangulum b f a ad rectangulum a g b, ita d f quadratum ad quadratum g e. ut autem quadratum d f ad quadratum g e, ita quadratum f c ad ipſum c g quadratum. ergo permutando ut rectan- A gulum b f a ad quadratum f c, ita rectangulum a g b ad quadratum c g. ut igitur in ellipſi componendo, in oppoſitis uero conuertendo, & per cōuerſionem rationis, quadratum a c ad quadratum c f, ſic quadratum b c ad quadratum c g: & permutando. quadratum autem a c æquale eſt quadrato c b. ergo & quadratum f c quadrato c g B æquale erit. idcircoq́; linea f c lineæ c g æqualis. & cum d f, g e inter ſe æquidiſtent, neceſſe eſt lineam d c ipſi c e æqualem eſſe.



EVTOCIVS.

Vt igitur in ellipſi componendo, in oppoſitis uero conuertendo, & per conuerſionem rationis.] *In ellipſi quidem ita dicemus. Quoniam ut rectangulum afb ad quadratum df, ita eſt rectangulum agb ad quadratum ge. Vt autem quadratum df ad quadratum fc, ita quadratum eg ad quadratum gc: erit ex æquali, ut rectangulum afb ad quadratum fc, ita rectangulum agb ad quadratum gc. & componendo ut rectangulum afb unà cum quadrato fc ad*
quadratum fc, hoc eſt quadratum ac ad quadratum cf (etenim recta linea ab ſecatur in partes 5. ſecūdi.
æquales ad punctum c, & in partes inæquales ad f) ita rectangulum agb unà cum quadrato gc ad quadratum gc; hoc eſt propter eandem cauſſam, quadratum bc ad cg quadratum. & permutando ut quadratum ac ad quadratum cb, ita fc quadratum ad quadratum cg. At uero in oppoſitis hoc modo. Quoniam ex æquali eſt ut rectangulum bfa ad quadratum fc, ita rectangulum agb ad cg quadratum: erit conuertendo ut quadratum fc ad rectangulum bfa, ita quadratum cg ad rectangulum agb: & per conuerſionem rationis, ut quadratum fc ad quadratum ca, ita quadratum gc ad cb quadratum. nam cum linea ab bifariam ſecetur in c, atque ei adijciatur fa,
erit rectangulum bfa unà cum quadrato ac æquale quadrato cf. quare cf quadratum exuperat 6. ſecūdi.
rectangulum bfa, ipſo ac quadrato. pulchre igitur dictum eſt ſequi illud per cõuerſionem rationis.

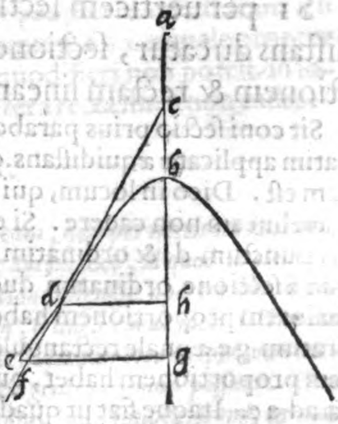
FED. COMMANDINVS.

Et cum df, ge inter ſe æquidiſtent, neceſſe eſt lineam dc ipſi ce æqualem eſſe.] B
Quoniam enim æquidiſtant df, ge, ſequitur angulum cfd æqualem eſſe angulo cge: & propterea triangulum cdf triangulo ceg ſimile. ergo ut fc ad cd, ita gc ad ce: & permutando ut fc ad cg, ita dc ad ce. æquales autem ſunt fc, cg, ut demõſtratum eſt. ergo & dc, ce æquales erunt.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

Si in tranſuerſo figuræ latere hyperboles ſumatur aliquod punctum, non minorem abſcindens ad uerticem ſectionis, quàm ſit dimidia tranſuerſi lateris figuræ; & ab ipſo recta linea ſectioni occurrat: ſi producatur intra ſectionem, ad ſequentes ipſius partes cadet.

Sit hyperbole, cuius diameter ab: & in ipſa ſumatur punctum aliquod c, non minorem abſcindens lineam cb, quàm ſit ipſius ab dimidia: & occurrat ſectioni quædam recta linea cd. Dico cd productam intra ſectionem cadere. Si enim fieri poteſt, cadat extra ſectionem, ut cde: & à quouis puncto e ordinatim applicetur eg;
itemq; ipſa dh. Sit autem primum linea ac æqualis cb. itaque quadratum eg ad 8. quinti.
quadratum dh maiorem proportionem habet, quam
quadratum fg ad quadratum dh: ut autem quadratum 4. & 22. ſexti.
eg ad dh quadratum, ſic quadratum gc ad quadratum
ch; propterea quod eg ipſi dh ſit æquidiſtans: & ut 21. huius
quadratum fg ad quadratum dh, ſic rectangulum agb
ad rectangulum ahb, propter ſectionem. quadratum
igitur gc ad quadratum ch proportionem maiorem
habet; quàm rectangulum agb ad rectangulum ahb: 17. quinti elemētorum apud Campanum.
& permutando quadratum gc ad rectangulum agb habet maiorem proportionem, quàm quadratum ch ad
rectangulum ahb. ergo diuidendo quadratum cb ad re- 29. eiuſdē
ctangulum agb maiorem habet proportionem, quàm A
quadratum cb ad rectangulum ahb. quod fieri non po- B
teſt. non igitur linea cde cadet extra ſectionem. quare
intra cadet; & idcirco quæ ab aliquo puncto lineæ ac ad C
ſectionem ducitur, multo magis cadet intra, quoniam & intra lineam cd cadet.



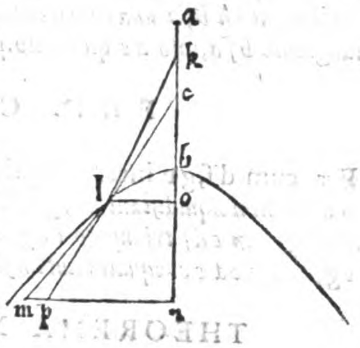
EVTOCIVS.

A Ergo diuidendo quadratum c b ad rectangulum a g b maiorem habet; quam quadratum c b ad rectangulum a h b.] *Quoniam enim recta linea a b bifariam ſecatur in c: & ipſi adijcitur linea b g, rectangulum a g b unà cum quadrato c b æquale eſt quadrato c g. ergo c g quadratum ſuperat rectangulum a g b quadrato c b: & propter eandem cauſſam quadratum c b ſuperat rectangulum a h b, ipſo c b quadrato. recte igitur Apollonius dixit, diuidendo illud concludi.* 6.ſecūdi

FED. COMMANDINVS.

B Quod fieri non poteſt.] *Quadratum enim c b ad rectangulum a h b maiorem proportionem habet, quàm ad rectangulum a g b, quippe cum rectangulum a g b ipſo a h b maius ſit.* 8.quinti.

C Et idcirco quæ ab aliquo puncto lineæ a c ad ſectionem ducitur, multo magis cadet intra.] *Sumatur enim in linea a c punctum k, à quo ducta k l ad ſectionem producatur in m. Dico lineam k l m multo magis intra ſectionem cadere. Si enim fieri poteſt, cadat extra, ordinatimq; applicentur m n, l o: & iuncta c l producatur, ut ſecet m n in p. cadet c l p intra ſectionem, ex ijs quæ proxime demonſtrata ſunt. Itaque quoniam lineæ m n, l o æquidiſtant, erunt triangula l k o, m k n ſimilia: & ſimilia inter ſe l c o, p c n. Sed trianguli l k o angulus k l o maior eſt angulo c l o trianguli l c o. ergo & angulus k m n angulo c p n maior erit, interior exteriore, quod fieri non poteſt. At ſi ponatur l m cadere quidem intra ſectionem, ſed extra lineam l p, uel in ipſam, nihilominus abſurdum ſequetur. conſtat ergo lineam k l m multo magis, quàm c l p intra ſectionem cadere. quod quidem demonſtrandum proponebatur.* 16. & 32. primi elementorū



COROLLARIVM.

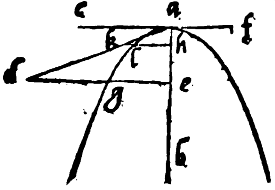
Ex iam demonſtratis ſequitur lineam, quæ hyperbolen contingit, ſi producatur ſecare diametrum inter uerticem & centrum ſectionis.

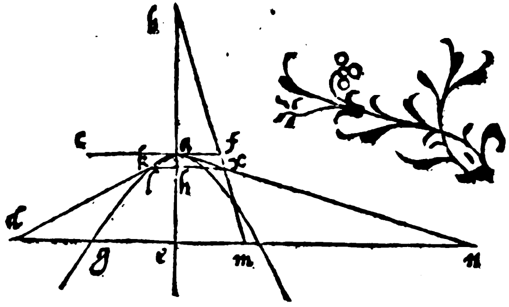
THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXII.

Si per uerticem ſectionis coni recta linea ordinatim applicatæ æquidiſtans ducatur, ſectionem continget: & in locum, qui inter coni ſectionem & rectam lineam interiicitur, altera recta linea non cadet.

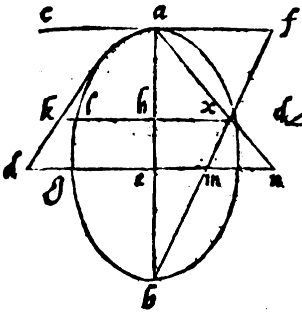
Sit coni ſectio prius parabole, cuius diameter a b; & à puncto a ducatur a c ordinatim applicatæ æquidiſtans. cadet linea a c extra ſectionem, quod ſupra demonſtratum eſt. Dico in locum, qui inter lineam a c & ſectionem interiicitur, alteram rectam lineam non cadere. Si enim fieri poteſt, cadat, ut a d: ſumaturq; in ipſa quodvis punctum d; & ordinatim applicetur d e. Sit autem linea a f, iuxta quam poſſunt, quæ à ſectione ordinatim ducuntur. & quoniam quadratum d e ad quadratum e a maiorem proportionem habet, quàm quadratum g e ad e a quadratum: eſtq; quadratum g e æquale rectangulo f a e. quadratum igitur d e ad quadratum e a maiorem proportionem habet, quàm rectangulum f a e ad quadratum e a; hoc eſt quàm f a ad a e. Itaque fiat ut quadratum d e ad quadratum e a, ſic f a ad a h: & per h ducatur h l k æquidiſtans e d. Quoniam igitur eſt, ut quadratum d e ad quadratum c a, ſic linea f a ad ipſam a h; hoc eſt rectangulum f a h ad quadratum a h: & ut quadratum 17.huius 8.quinti. 11.huius. A lemm.22 decimi.

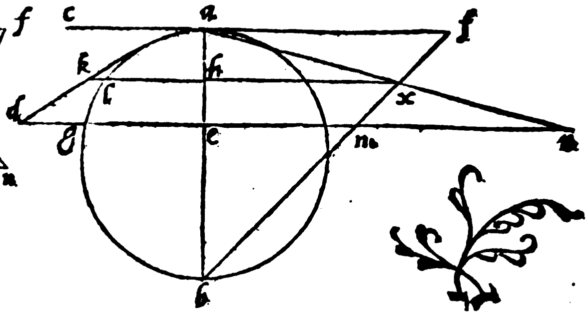
dratum d e ad quadratum e a, ita quadratum k h ad h a quadratum: rectangulo autem f a h æquale eſt quadratum l h. quare ut quadratum k h ad quadratum h a, ſic quadratum l h ad quadratum h a. æqualis eſt igitur linea k h ipſi h l. quod eſt abſurdum. non ergo in locum inter rectam lineam a c & ſectionem altera recta linea cadet.





Sit ſectio hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b: & rectum figuræ latus a f. iuncta autem b f producatur: & à puncto a ordinatim applicetur a c, quæ extra ſectionem cadet, ut oſtenſum eſt. Dico in locum, qui inter lineam rectam a c, & ſectionem interiicitur, alteram rectam lineam non cadere. cadat enim, ſi fieri poteſt; ut a d: & in ipſa ſumatur quoduis punctũ d, à quo d e ordinatim applicetur: & per e ducatur e m ipſi a f æquidiſtans. Et quoniam g e quadratum æqua-
le eſt rectangulo a e m; fiat rectangulum a e n quadrato d e æquale: & iuncta a n ſe- 12. & 13. huius.
cet f m in puncto x, deinde per x ipſi f a æquidiſtans ducatur x h: & per h ducatur
h l k æquidiſtans a c. Itaque cum quadratum d e æquale ſit rectangulo a e n, erit ut 14. uel 17 ſexti.





n e ad e d, ita d e ad e a. & idcirco ut linea n e ad e a, ita quadratum d e ad quadra- cor. 10. ſexti
tum e a. Sed ut n e ad e a, ita x h ad h a: & ut quadratum d e ad quadratum e a, ita
quadratum k h ad h a quadratum. ut igitur x h ad h a, ſic quadratum k h ad quadratum h a. ergo k h media proportionalis eſt inter x h, h a: & propterea quadratum k h æquale rectangulo a h x. eſt autem & quadratum l h rectangulo a h x æquale propter ſectionem. ergo quadratum k h æquale eſt quadrato h l: quod fieri non poteſt. in locum igitur, qui eſt inter rectam lineam a c & ſectionem altera recta linea non cadet.

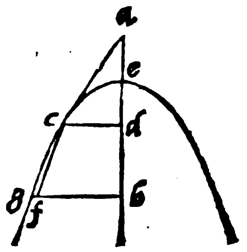
EVTOCIVS.

IN ſeptimodecimo theoremate ſimpliciter oſtendit rectam lineam, quæ per uerticem ducitur, ordinatim applicatæ æquidiſtans, ſectionem ipſam contingere. hoc autem loco, id quod in elementis circulo tantum ineſſe demonſtratur, uniuerſe in omni coni ſectione oſtendit. oportet autem ſcire, quod & illic demonſtratum eſt, nullum fortaſſe ſequi abſurdum, ſi linea curua inter ſectionem & lineam rectam cadat. at uero ut cadat recta linea, fieri non poteſt. ſecabit etenim ipſa, non continget ſectionem, quoniam duæ rectæ lineæ in eodem puncto contingentes eſſe non poſſunt. Cum autem hoc theorema multifariam demoſtretur in diuerſis editionibus, nos ſimpliciorem, & manifeſtiorem demonſtrationem ſecuti ſumus.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

SI in parabola ſumatur aliquod punctum, à quo recta linea ad diametrum ordinatim applicetur, & ei, quæ ab ipſa ex diametro abſcinditur ad uerticem, æqualis ponatur in directum ab eius extremitate: recta linea, quæ à facto puncto ducitur ad illud, quod ſumptum fuerat, ſectionem continget.

Sit parabole, cuius diameter a b: ſumptoq; in ea aliquo puncto c; linea c d ordinatim applicetur: & ipſi d e æqualis ponatur e a, & iungatur a c. Dico lineam ac productam extra ſectionem cadere. Si enim fieri poteſt, cadat intra, ut c f: & g b ordinatim applicetur. itaque quadratum g b ad quadratum
8. quinti c d maiorem proportionem habet, quàm quadratum f b
A ad quadratum c d: & ut quadratum f b ad quadratum c d,
20. huius ita quadratum b a ad quadratum a d. ut autem quadra-
13. quinti tum g b ad c d quadratum, ita linea b e ad e d. ergo b e ad
c d maiorem proportionem habet, quam b a quadratum
B ad quadratum a d. ſed ut b e ad e d, ita rectangulum b e a
quater ſumptum ad rectangulum a e d quater. rectangulum igitur b e a quater ad rectangulum a e d quater maiorem habet proportionem, quam quadratum b a ad qua-
27. quinti dratum a d: & permutando rectangulum b e a quater ad
apud Cã. quadratum a b maiorem proportionem habet, quàm rectangulum a e d quater ad
C quadratum a d: quod fieri minime poteſt. nam cum linea a e ipſi e d ſit æqualis, re-
D ctangulum a e d quater ſumptum æquale eſt quadrato a d: rectangulum uero b e a quater ſumptum quadrato b a eſt minus: neque enim punctum e lineam a b bifariam ſecat. linea igitur a c non cadet intra. quare ſectionē ipſam contingat neceſſe eſt.



FED. COMMANDINVS.

A ET ut quadratum f b ad quadratum c d, ita quadratum b a ad quadratum a d.] *Ob ſimilitudinem triangulorum f a b, c a d. quippe cum ponamus a c f lineam rectam eſſe.*

B Sed ut b e ad e d, ita rectangulum b e a quater ſumptum ad rectangulum a e d
1. ſexti quater.] *Nam ut b e ad e d, ita rectangulum b e a ad rectangulum a e d: ut autem rectangulum b e a ad rectangulum a e d, ita rectangulum b e a quater ſumptum ad rectangulum a e d itidem quater ſumptum, ex decima quinta quinti elementorum. quare ex undecima eiuſdem conſtat propoſitum.*

C Nam cum linea a e ipſi e d ſit æqualis, rectangulum a e d quater ſumptum æquale eſt quadrato e d.] *Quadratum enim a d ex quarta ſecundi elementorum æquale eſt quadratis a e, e d, & duobus rectangulis a e d. Sed quadrata a e, e d duobus rectangulis a e d æqualia ſunt, quòd lineæ a e, e d ſint æquales. ergo rectangulum a e d quater ſumptum quadrato a d æquale erit.*

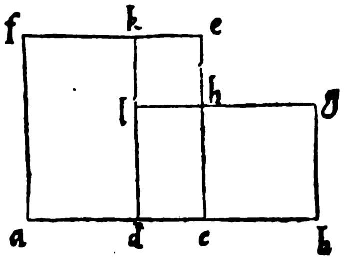
D Rectangulum uero b e a quater ſumptum quadrato b a eſt minus.] *Rurſus enim eadem ratione quadratum b a æquale eſt quadratis b e, e a, & duobus rectangulis b e a. Sed cum lineæ b e, e a inæquales ſint, duo rectangula b e a minora ſunt quadratis b e, e a, ut mox demonſtrabitur. rectangulum igitur b e a quater ſumptum minus eſt quadrato b a. illud uero nos hoc lemmate demonſtrabimus.*

SI recta linea in partes inæquales ſecetur, earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo, quòd bis dictis partibus continetur; & quadrato eius lineæ, qua maior pars ſuperat minorem.

Secetur recta linea a b in partes inæquales in c, ita ut a c maior ſit, quàm c b: & ipſi c b æqualis ponatur a d. Dico quadrata a c, c b æqualia eſſe rectangulo, quod bis a c b continetur; & quadrato lineæ d c; qua ſcilicet a c ipſam c b ſuperat. conſtituantur enim ex lineis a c, c b qua-

drata

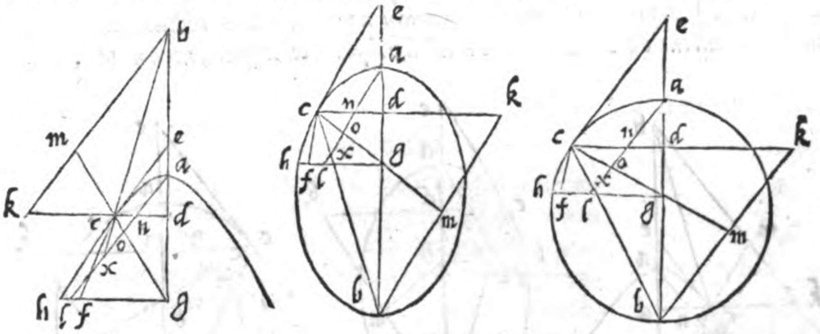
drata a c e f, c b g h: & per d ducta linea d k, quæ ipſi c e æquidiſtet, producatur g h ad d k in l. Itaque quoniam a d, c b æquales ſunt, & utrique communis d c; erit d b ipſi a c æqualis: ideoq; rectangula a k, d g erunt æqualia ei, quod bis a c b continetur. quadratum autem l h e k æquale eſt quadrato lineæ d c. ergo quadrata a c, c b æqualia ſunt rectangulo, quod bis continetur a c b; & lineæ d c quadrato: quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XXXIIII.

Si in hyperbola, uel ellipſi, uel circuli circumferentia ſumatur aliquod punctum: ab eoq; recta linea ad diametrum ordinatim applicetur: & quam proportionem habent lineæ interiectæ inter applicatam, & terminos tranſuerſi lateris figuræ, eandem habeant inter ſe partes lateris tranſuerſi, ita ut quæ ſunt ad uerticem partes ſibi ipſis reſpondeant: recta linea coniungens punctum, quod in tranſuerſo latere ſumitur, & punctum, quod eſt in ſectione, ſectionem ipſam continget.

Sit hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b; ſumaturq́; **A** aliquod punctum in ſectione, quod ſit c: & ab eo linea c d ordinatim applicetur: fiat autem ut b d ad d a, ſic b e ad e a: & iungatur e c. Dico lineam c e ſectionem contingere. Si enim fieri poteſt, ſecet, ut e c f: & ſumpto in ea aliquo puncto f ordinatim applicetur g f h: per puncta uero a b ducantur a l, b k, quæ ipſi e c æquidiſtent: & iunctæ d c, b c, g c ad puncta m x k producantur. Itaque quoniam ut b d ad d a, ita eſt

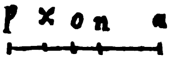


b e ad e a, & ut b d ad d a, ſic b k ad a n: ut autem b e ad e a, ita b c ad c x, hoc eſt b k ad 4. ſexti.
x n: erit ut b k ad a n, ita b k ad n x. æqualis eſt igitur a n ipſi n x. & propterea rectan- 2. ſexti
gulum a n x maius eſt rectangulo a o x. quare linea n x ad x o maiorem habet propor 9. quinti. B
tionem, quàm o a ad a n. Sed ut n x ad x o, ita k b ad b m. ergo k b ad b m maiorem
proportionem habet, quàm o a ad a n: ideoq́; rectangulum, quod fit ex k b, a n maius
eſt eo, quod ex b m, a o. Sequitur igitur rectangulum ex k b, a n ad quadratum c e ma
iorem proportionem habere quàm rectangulum ex m b, a o ad quadratum c e. at ue- C
ro ut rectangulum ex k b, a n ad quadratum c e, ſic rectangulum b d a ad quadratum
d e, propter ſimilitudinē triangulorum b k d, a n d, e c d: & ut rectangulum ex m b, a o

ad quadratum c e, ſic rectangulum b g a ad quadratum g e. ergo b d a rectangulum
27. quinti apud Cā. ad quadratum d e maiorem proportionem habet, quàm rectangulum b g a ad qua-
dratum g e. & permutando rectangulum b d a ad rectangulum a g b maiorem habet
21. huius proportionem, quàm quadratum d e ad e g quadratum. Sed ut rectangulum b d a
4. & 22. ſexti. ad ipſum a g b, ita quadratum c d ad quadratum g h: & ut quadratum d e ad qua-
dratum e g, ſic quadratum c d ad quadratum f g. quadratum igitur c d ad quadratum
g h maiorem proportionem habet, quàm quadratum c d ad quadratum f g: & idcirco linea h g minor eſt ipſa g f: quod fieri non poteſt. linea igitur e c non ſecat. quare ſectionem ipſam contingat neceſſe eſt.

EVTOCIVS.

SCIENDVM eſt lineam c d, quæ ad diametrum ordinatim applicatur, in hyperbola quidem determinare lineas b d, d a, & relinquere ipſam b a, quæ in proportionem linearum b d, d a ſecari debet; in ellipſi uero & circuli circumferentia contra euenit: nam cum ſecet lineam b a, neceſſe eſt ut inquiramus b e, e a in determinata proportione, in qua uidelicet ſunt b d, d a. neque enim difficile eſt data proportione, æqualem ipſi exhibere. Sed & illud ſcire oportet, in unaquaque ſectione duas deſcriptiones eſſe, nempe puncto f uel intra c, uel extra ſumpto, ita ut omnes caſus ſex ſint. utitur autem duobus lemmatibus, quæ nos deinceps conſcribemus.

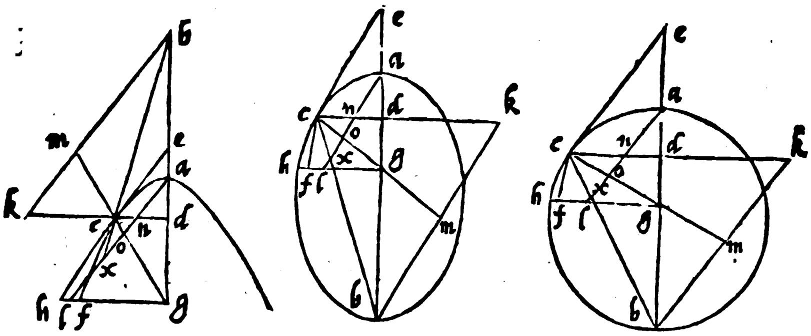


B Et propterea rectangulum a n x maius eſt rectangulo a o x. quare linea n x ad x o maiorem proportionem habet, quàm o a ad a n.] *Quoniam enim rectangulum a n x rectangulo a o x maius eſt, fiat rectangulo a n x æquale rectangulum, quod ipſa a o, & alia quapiam linea, uidelicet x p contineatur, quæ quidem maior erit, quàm x o.*
14. ſexti. *eſt igitur ut o a ad a n, ſic n x ad*
8. quinti. *x p. ſed n x ad x o maiorem proportionem habet, quàm ad x p. ergo o a ad a n minorem habet proportionem, quam n x ad x o: & ideo n x ad x o maiorem habet, quàm o a ad a n.*

Sed contra illud etiam conſtat, ſi n x ad x o maiorem proportionem habeat, quàm o a ad a n, & rectangulum a n x maius eſſe rectangulo a o x.

Fiat enim ut o a ad a n, ita n x ad aliam lineam maiorem ipſa x o, uidelicet ad x p. quare rectangulum a n x æquale eſt rectangulo, quod a o, x p continetur. rectangulum igitur a n x rectangulo a o x maius erit.

C At uero ut rectangulum ex k b, a n ad quadratum c e, ſic rectangulum b d a ad quadratum d e.] *Quoniam igitur ob linearum a n, e c, x b æquidiſtantiam, ut a n ad e c, ita*
4. ſexti *eſt a d ad d e: ut autem e c ad x b, ita e d ad d b. quare ex æquali, ut a n ad k b, ita a d ad d b:*



lemm. 22 decimi. *& propterea ut quadratum a n ad rectangulum ex a n, k b, ita quadratum a d ad rectangulum*
4. & 22. ſexti *a d b. Sed ut quadratum e c ad quadratum a n, ita quadratum e d ad quadratum d a. ergo ex æquali ut quadratum e c ad rectangulum ex x b, a n, ita quadratum e d ad rectangulum a d b: & conuertendo ut rectangulum ex x b, a n ad quadratum e c, ita rectangulum b d a ad quadratum d e.*

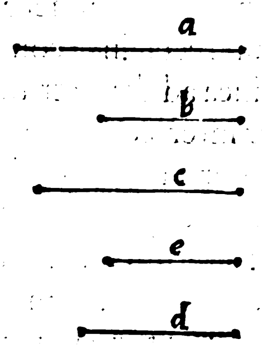
FED. COMMANDINVS.

Fiat autem, ut b d ad d a, ſic b e ad e a.] *In hyperbola quomodo illud fiat perſpicuum eſt: at uero in ellipſi, uel circulo, ſumatur in d b linea, quæ ſit æqualis d a: ſitq; d g, ut in propoſitis figuris; & fiat ut b g ad g d, ita b a ad a e. erit enim componendo, ut b d ad d g, hoc eſt ad d a ei æqualem, ita b e ad e a: quod faciendum proponebatur.* A

Et propterea rectangulum a n x maius eſt rectangulo a o x. quare linea n x ad x o maiorem proportionem habet quàm o a ad a n.] *Illud Pappus ad principium ſeptimi libri hoc lemmate demonſtrauit.* B

Habeat a ad b maiorem proportionem, quàm c ad d. Dico rectangulum contentum lineis a d maius eſſe eo, quod b c continetur.

Fiat enim ut a ad b, ita c ad e. ergo c ad e maiorem proportionem habet, quàm ad d. & idcirco e minor eſt, quàm d. Itaque poſita a communi altitudine, erit rectangulum ex a e minus rectangulo ex a d. Sed rectangulum ex a e æquale eſt ei, quod ex b c. rectangulum igitur ex b c minus eſt rectangulo ex a d: & propterea rectangulum ex a d maius eo, quod ex b c.



Similiter etiam ſi minor ſit proportio, rectangulum rectangulo minus erit.

Sed rurſus ſit rectangulum ex a d maius rectangulo ex b c. Dico a ad b maiorem habere proportionem, quàm c ad d.

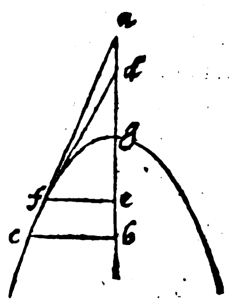
Ponatur namque rectangulo ex a d æquale rectangulum quod ex b e. erit rectangulum ex b e maius eo, quod ex b c. quare & e maior, quàm c. Vt autem a ad b, ita e ad d. Sed e ad d maiorem habet proportionem, quàm c ad d. ergo & a ad b habebit maiorem, quàm c ad d. 14. ſexti

At uero ut rectangulum ex k b, a n ad quadratum c e, ſic rectangulum b d a ad quadratum d e.] *Ex tertio lemmate Pappi.* C

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXV.

SI parabolen recta linea contingat, conueniens cum diametro extra ſectionem; quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abſcindet ex diametro ad uerticem ſectionis lineam æqualem ei, quæ inter ipſam & contingentem interiicitur: & in locum, qui eſt inter contingentem & ſectionem alia recta linea non cadet.

Sit parabole, cuius diameter a b: ordinatimq; applicetur b c: & ſit a c linea ſectionem contingens. Dico lineam a g ipſi g b æqualem eſſe. Si enim fieri poteſt, ſit inæqualis: & ipſi a g æqualis ponatur g e: linea autem e f ordinatim applicetur: & iungantur a f. ergo a f producta conueniet cum linea a c: quod fieri non poteſt; duarum enim rectarum linearum iidem termini eſſent. non ergo inæqualis eſt a g ipſi g b. quare neceſſario erit æqualis. Rurſus dico in locum, qui eſt inter a c, & ſectionem, aliam rectam lineam non cadere. Si enim fieri poſsit, cadat c d: ipſiq; g d æqualis ponatur g e: & e f ordinatim applicetur. ergo à puncto d ad f ducta linea contingit ſectionem. quare producta extra ipſam cadet: & propterea conueniet cum d c, eruntq; duarum linearum rectarum iidem termini; quod eſt abſurdum. non igitur in locum, qui eſt inter ſectionem, & lineam a c alia recta linea cadet.



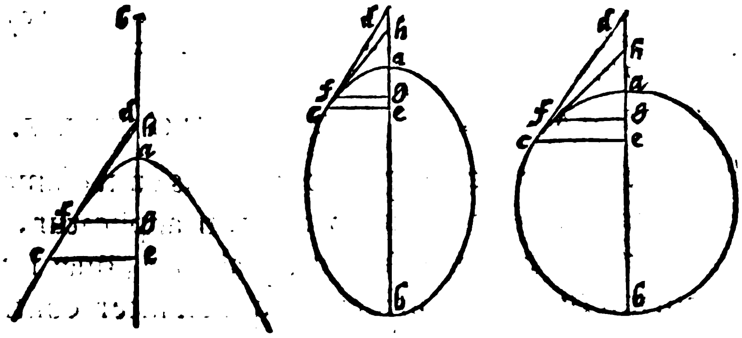
FED. COMMANDINVS.

1. ERGO a f producta conueniet cum linea a c: quod fieri non poteſt; duarum enim rectarum linearum iidem termini eſſent.] *Nam linea a f ex trigeſima tertia propoſitione huius ſectionem contingit. quare ſi producatur, cadet extra ſectionem; & id circo conueniet cum linea a c, ita ut ſint duarum linearum rectarum ijdem termini: quod eſt abſurdum; quoniam duæ rectæ lineæ ſuperficiem intra ſeſe concluderent. alia eſt enim linea, quæ à puncto a ad f; alia quæ ab eodem puncto ad c ducitur: quarum linearum ijdem termini erunt; unus uidelicet ad a, alter ad punctum, in quo linea a f cum a c conuenit.*

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVI.

SI hyperbolen, uel ellipſim, uel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea conueniens cum tranſuerſo figuræ latere: & à tactu recta linea ad diametrum ordinatim applicetur: erit ut linea, quæ interiicitur inter contingentem, & terminum tranſuerſi lateris ad interiectam inter eandem & alterum lateris terminum, ita linea, quæ eſt inter ordinatim applicatam, & terminum lateris ad eam, quæ eſt inter eandem & alterum terminum; adeo ut continuatæ inter ſe ſint, quæ ſibi ipſis reſpondent: & in locum, qui inter contingentem, & ſectionem coni interiicitur, altera recta linea non cadet.

Sit hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b: linea uero contingens ſit c d. & c e ordinatim applicetur. Dico ut b e ad e a, ſic eſſe b d ad



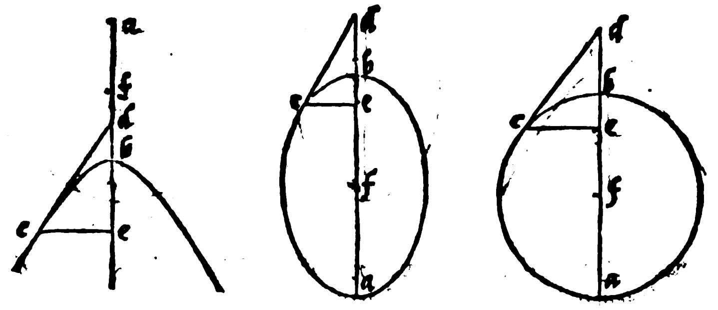
d a. Si enim non eſt ita, ſit ut b d ad d a, ſic b g ad g a: & ordinatim applicetur g f. ergo quæ à puncto d ad f ducitur recta linea ſectionem continget, & producta conueniet cum ipſa c d. quare duarum rectarum linearum iidem termini erunt: quod eſt abſurdum. Dico etiam in locum, qui inter ſectionem & lineam c d interiicitur, nullam rectam lineam cadere. Si enim fieri poteſt, cadat c h: & ut b h ad h a, ita fiat b g ad g a: & g f ordinatim applicetur. iuncta ergo h f, ſi producatur, conueniet cum ipſa h c; atque erunt duarum linearum rectarum iidem termini: quod fieri non poteſt. non ergo inter ſectionem & lineam c d altera recta linea cadet. 34. huius

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVII.

SI hyperbolen, uel ellipſim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: quæ interiicitur inter applicatam & centrum ſectionis

nis unà cum interiecta inter contingentem, & ſectionis centrum, continebit rectangulum æquale quadrato lineæ, quæ eſt ex centro ſectionis: ſed unà cum ea, quæ inter applicatam & contingentem interiicitur, continebit ſpatium, quod ad quadratum lineæ applicatæ eandem proportionem habet, quam tranſuerſum figuræ latus ad rectum.

SIT hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b: ducaturq́; linea contingens c d: & c e ordinatim applicetur: centrum autem ſit f. Dico rectangulum d f e quadrato f b æquale eſſe: & ut rectangulum d e f ad quadratũ e c, ita tranſuerſum latus ad rectum. quoniam enim c d contingit ſectionem; & ordinatim
applicata eſt c e: erit ut a d ad d b, ita a e ad e b. ergo componendo, ut utraque 36.huius
a d, d b ad d b, ita utraque a e, e b ad e b: & antecedentium dimidia. In hyperbola quidem in hunc modum argumentabimur. Sed utriuſque a e, e b dimidia eſt f e; ipſius autem a b dimidia f b. ut igitur f e ad e b, ita f b ad b d: & per conuerſionem rationis, ut e f ad f b, ita f b ad f d. quare rectangulum e f d quadrato f b eſt æquale. & 17. ſexti
quoniam ut f e ad e b, ita f b ad b d; hoc eſt a f ad b d: erit permutando ut a f ad f e,
ita d b ad b e: & componendo, ut a e ad e f, ita d e ad e b. ergo rectangulum a e b 16.ſexti.
æquale eſt rectangulo f e d. ſed ut rectangulum a e b ad quadratum c e, ita tranſuerſum 21.huius
latus ad rectum. Vt igitur rectangulum f e d ad quadratum e c, ita tranſuerſum latus ad rectum.



In ellipſi uero, & circuli circumferentia hoc modo. ſed utriuſque a d d b dimidia eſt d f; & ipſius a b dimidia f b. ergo ut f d ad d b, ita f b ad b e: & per conuerſionẽ
rationis, ut d f ad f b, ita b f ad f e. rectangulum igitur d f e æquale eſt quadrato b f. 17. ſexti
at uero rectangulum d f e rectangulo d e f unà cum quadrato f e eſt æquale: & quadratum 3.ſecũdi 6
b f æquale rectangulo a e b unà cum quadrato f e. commune auferatur, uidelicet
quadratum f e. reliquum igitur rectangulum d e f ad quadratum c e eſt ut rectangulum 7.quinti.
a e b ad idem c e quadratum. ſed ut rectãgulum a e b ad quadratum c e, ita tranſuerſum latus ad rectum. ergo ut rectangulum d e f ad quadratum e c, ita tranſuerſum latus ad rectum.

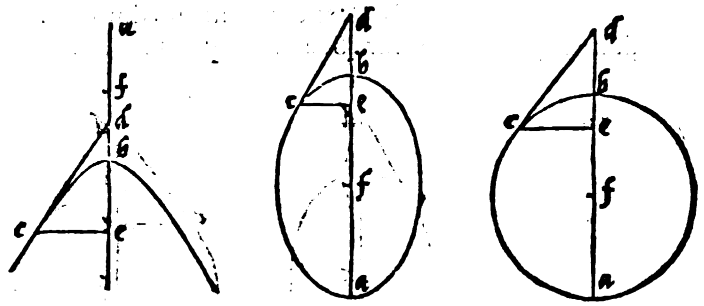
EVTOCIVS.

Ex his theorematibus patet, quomodo per datum punctum in diametro uel uertice ſectionis contingentem lineam ducere poſſimus.

FED. COMMANDINVS.

Ex iis, quæ demonſtrata ſunt, conſtat lineam c d contingere ſectionem, ſiue rectangulum d f e æquale ſit quadrato f b; ſiue d e f rectangulum ad quadratum e c eam proportionem habeat, quam tranſuerſum figuræ latus ad rectum.

Sit enim hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b: & ſumatur aliquod punctum c in ſectione; à quo recta linea c e ad diametrum ordinatim applicetur. ſit autem 17. ſexti *ſectionis centrum f: fiatq; ut e f ad f b, ita b f ad f d: & iungatur c d. erit rectangulum d f e quadrato f b æquale. itaque dico lineam c d ſectionem contingere. Quoniam enim in hyperbola eſt ut e f ad f b, ita b f ad f d: per conuerſionem rationis erit ut f e ad e b, ita f b ad b d: & antecedentium dupla. ſed lineæ a e, e b duplæ ſunt ipſius f e: & lineæ a d, d b duplæ f b. quare ut a e, e b ad e b, ita a d, d b ad d b: & diuidendo ut a e ad e b, ita a d ad d b. ergo ex trigeſima quarta huius lineæ c d ſectionem contingit. In ellipſi uero & circuli circumferentia, ut d f ad f b, ita eſt b f ad f e. quare per conuerſionem rationis, ut f d ad d b, ita f b ad b e, & antecedentium dupla. Sunt autem lineæ a d, d b ipſius f d duplæ, & a e, e b duplæ f b. Vt igitur a d, d b ad d b, ita a e, e b ad e b: &* 34. huius *diuidendo ut a d ad d b, ita a e ad e b. ex quibus ſequitur, ut linea c d ſectionem contingat.*



Rurſus eadem maneant; & in linea f b ſumatur punctum d, ita ut d e f rectangulum ad quadratum c e eam proportionem habeat, quam tranſuerſum figuræ latus ad latus rectum. Dico lineam c d contingere ſectionem. Quoniam enim rectangulum d e f ad quadratum c e eſt; ut tranſuerſum la-
21. huius *tus ad rectum; & ut tranſuerſum latus ad rectum, ita a e b rectangulum ad quadratum c e: erit re-*
9. quinti. *ctangulum d e f ad quadratum c e, ut rectangulum a e b ad idem quadratum: & propterea rectan-*
14. ſexti. *gulum a e b rectangulo d e f eſt æquale. ergo in hyperbola, ut a e ad e f, ita d e ad e b: & diuiden-*
do, permutandóq; ut a f, hoc eſt f b ad b d, ita f e ad e b: & per cõuerſionem rationis, ut b f ad f d,
16. ſexti. *ita e f ad f b. rectangulum igitur d f e quadrato f b eſt æquale. & ideo ex iis, quæ proxime demon-*
ſtrauimus, linea c d ſectionem continget. ſed in ellipſi, & circuli circumferentia, quoniam rectangu-
lum a e b æquale eſt rectangulo d e f, addito utrique quadrato f e; erit rectangulum a e b unà cum
5. ſecũdi. *quadrato f e æquale rectangulo d e f unà cum quadrato f e. rectangulo autem a e b unà cum qua-*
drato f e æquale eſt quadratum b f: & rectangulo d e f unà cum quadrato f e æquale rectangulum
d f e. ergo rectangulum d f e æquale eſt quadrato f b: & propterea linea c d ſectionem ipſam contin-
gat neceſſe eſt: quæ omnia demonſtrare oportebat. Ad hoc autem theorema quartum lemma Pap-
pi ſpectare uidetur.

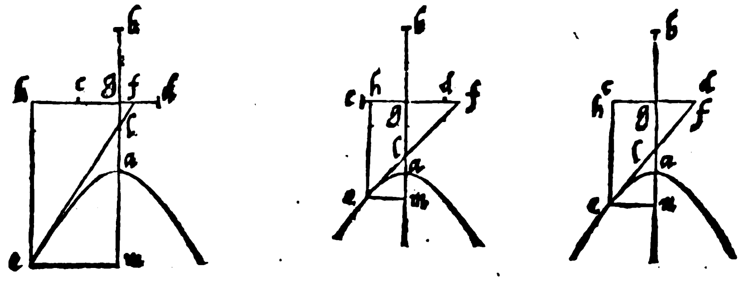
THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

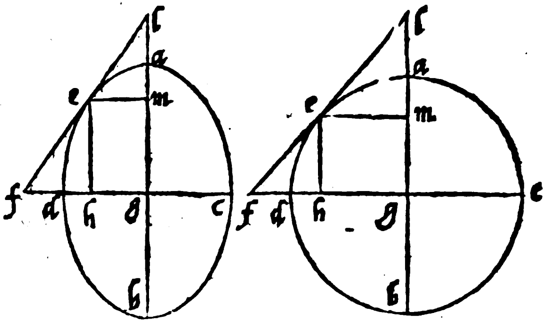
SI hyperbolen, uel ellipſim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum ſecunda diametro conueniat: & à tactu ad diametrum applicetur linea alteri diametro æquidiſtans: quæ interiicitur inter applicatam, & ſectionis centrum unà cum interiecta inter contingentem, & centrnm ſectionis, continebit rectangulum æquale quadrato, quod fit ex dimidia ſecundæ diametri: ſed unà cum ea, quæ inter applicatam, & contingentem interiicitur, ſpatium continebit, quod adquadratum applicatæ eam proportionem habeat, quam figuræ rectum latus ad tranſuerſum.

SIT hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a g b, ſecunda diameter c g d; linea uero ſectionem contingens ſit e l f, quæ conueniat cum c d in f:

& h e

& h e ipſi a b æquidiſtet. Dico rectangulum f g h quadrato c g æquale eſſe: & ut rectangulum
g h f ad quadratum h e, ita rectũ figuræ latus ad latus tranſuerſum. ordinatim
namque applicata m e, erit ut rectangulum g m l ad quadratum m e, ita tranſuerſum 37. huius
latus ad rectum. ſed ut tranſuerſum latus b a ad c d, ita c d ad latus rectum. ergo ut diff. 2. diametri.
tranſuerſum latus ad rectum, ita quadratum a b ad quadratnm c d: & ita horum quadratorum cor. 20. ſexti.
quartæ partes, uidelicet quadratum g a ad quadratum g c. ut igitur rectangulum
g m l ad quadratum m e, ita quadratum a g ad g c quadratum. ſed rectangulum 23. ſexti
g m l ad quadratum m e compoſitam proportionem habet ex proportione g m
ad m e, hoc eſt ad g h, & ex proportione l m ad m e. quare conuertendo proportio
quadrati m e ad rectangulum g m l componitur ex proportione e m ad m g, hoc eſt
h g ad g m, & ex proportione e m ad m l, hoc eſt f g ad g l. ergo quadratum c g ad 4. ſexti
quadratum g a compoſitam habet
proportionem ex proportione h g
ad g m, & ex proportione f g ad g l.
hæc autem eadem eſt, quæ rectanguli 23. ſexti
f g h ad rectangulum m g l. Vt igitur
rectangulum f g h ad m g l rectãgulum,
ita quadratum c g ad quadratum g a: & permutando ut rectangulum
f g h ad quadratum c g, ita rectangulum
m g l ad quadratum g a.
rectangulum autem m g l æquale 37. huius
eſt quadrato g a. ergo & rectangulum f g h quadrato c g æquale erit. Rurſus ut 21. huius
rectum latus ad tranſuerſum, ita quadratum e m ad rectangulum g m l. quadratum
uero e m ad rectangulum g m l compoſitam proportionem habet ex proportione 4. ſexti.
e m ad m g, hoc eſt g h ad h e; & ex proportione e m ad m l, hoc eſt f g ad g l; hoc eſt
f h ad h e. quæ proportio eadem eſt, quam habet rectangulum f h g ad quadratum
h e. ergo ut rectangulum f h g ad quadratum h e, ita rectum latus ad tranſuerſum.





Iſdem poſitis oſtendendum eſt, ut linea, quæ inter tangentem, & terminum ſecundæ diametri ad partes applicatæ interiicitur, ad eam, quæ inter tangẽtem, & alterum terminum ſecundæ diametri, ita eſſe lineam quæ eſt inter alterum terminum, & applicatam ad eam, quæ inter alterum terminum, & applicatam.

Quoniam enim æquale eſt rectangulum f g h quadrato g c, hoc eſt rectangulo c g d;
nam linea c g æqualis eſt ipſi g d: erit f g h rectãgulum rectangulo c g d æquale. ergo 14. ſexti.
ut f g ad g d, ita c g ad g h: & per conuerſionem rationis, ut g f ad f d, ita g c ad c h:
& antecedentium dupla. eſt autem ipſius g f dupla utraque e f, f d, propterea quod
c g eſt æqualis g d. & ipſius g c dupla d c. Vt igitur utraq; c f, f d ad f d, ita d c ad c h:
& diuidendo ut c f ad f d, ita d h ad h c. quod demonſtrare oportebat.

Ex iam dictis manifeſtum eſt lineam e f contingere ſectionem, ſiue rectangulum f g h æquale ſit quadrato g c, ſiue f h g rectangulum ad quadratum h e eam, quam diximus, proportionem habeat: conuerſo enim modo illud facile oſtendetur.

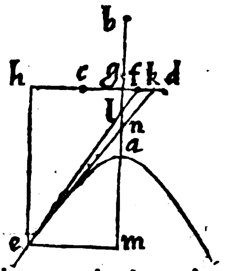
EVTOCIVS.

In aliquibus exemplaribus hoc theorema in ſola hyperbola demonſtratum inuenimus. Sed hoc loco uniuerſaliter demonſtratur, quoniam eadem contingunt & in alijs ſectionibus. Apollonio autem uiſum eſt non ſolum hyperbolen, ſed etiam ellipſim ſecundam diametrum habere, ut ſæpe ex ipſo in ſuperioribus didicimus. & in ellipſi quidem caſum non habet, in hyperbola uero tres habet caſus; punctum enim f, in quo linea ſectionem contingens cum ſecunda diametro conuenit, uel eſt infra d, uel in ipſo d, uel ſupra: & propterea punctum h ſimiliter tres locos obtinet. attendendum autem eſt, cum f cadit infra d, & h infra c cadere: cum uero f cadit in d, & h in c: & cum f ſupra d, & h ſupra c cadet.

FED. COMMANDINVS.

Ex iam dictis manifeſtum eſt lineam e f contingere ſectionem, ſiue rectangulum f g h æquale ſit &c.

Sit enim hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a g b, ſecunda diameter c g d: & ſumatur in ſectione aliquod punctum e; à quo ad diametrum ordinatim applicetur e m: & ad ſecundam diametrum ducatur e h, ipſi a b æquidiſtans. Sumpto autem in linea g d puncto f, ita ut rectangulum f g h æquale ſit quadrato c g; iungatur e f ſecans diametrum in l. Dico lineam e f ſectionem contingere. ſi enim fieri poteſt, non contingat ſectionem linea e l f, ſed alia linea e n k. Eodem modo, quo uſus eſt Apollonius, demonſtrabitur rectangulum k g h quadrato c g æquale eſſe. ſed eidem quadrato c g ponitur æquale rectangulum f g h. rectangulum igitur k g h rectangulo
1. ſexti *f g h eſt æquale. Vt autem rectangulum k g h ad rectangulum f g h, ita linea k g ad lineam f g. ergo linea k g æqualis eſt ipſi f g: quod fieri nullo modo poteſt. ſequitur igitur lineam e l f neceſſario ſectionem contingere. Iiſdem manentibus, habeat rectangulum f h g ad quadratum h e eandem proportionem, quam rectum latus ad tranſuerſum. Rurſus dico lineam e l f contingere ſectionem. habebit enim quadratũ h e ad rectangulum f h g proportionem eandem, quam tranſuerſum latus ad rectum. ſed proportio qua-*
4. ſexti *drati h e ad rectangulum f h g compoſita eſt ex proportione e h ad h f, hoc eſt l m ad m e, & ex proportione e h ad h g, hoc eſt g m ad m e: quæ quidem eſt ea, quam habet rectangulum g m l ad quadratum m e. ergo rectangulum g m l ad quadratum m e eſt, ut tranſuerſum latus ad rectum. quare ex his, quæ in antecedenti demonſtrauimus, linea e l f ſectionem continget.*



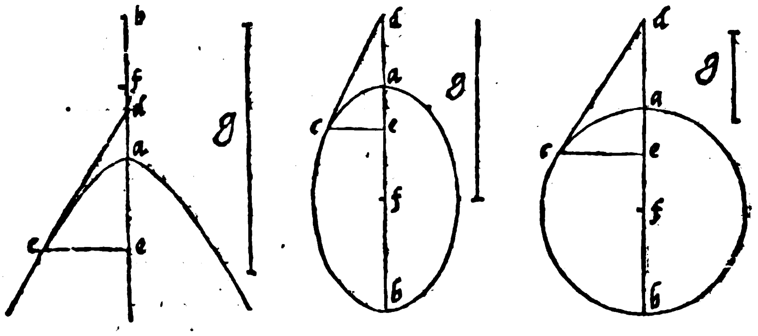
THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XXXIX.

Si hyperbolen, uel ellipſim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: ſumpta quauis linea ex duabus, quarum altera interijcitur inter applicatam, & centrum ſectionis; altera inter applicatã, & contingentem: habebit ad eam applicata proportionem compoſitam ex proportione, quam habet altera dictarum linearum ad applicatam, & ex proportione, quam rectum figuræ latus habet ad tranſuerſum.

Sit hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b; centrum autem l ducaturq; linea c d ſectionem contingens: & c e ordinatim applicetur. Dico c e ad alteram linearum f e, e d proportionem habere compoſitam ex proportione,

quam

quam habet rectum figuræ latus ad tranſuerſum, & ex ea quam altera dictarum linearum f e, e d habet ad ipſam e c. ſit enim rectangulum f e d æquale rectangulo, quod fit ex e c, & linea, in qua g. & quoniam ut rectangulum f e d ad quadratum c e, ita tranſuerſum latus ad rectum: 37. huius atque eſt rectangulum f e d rectãgulo ex e c, & g æquale: erit



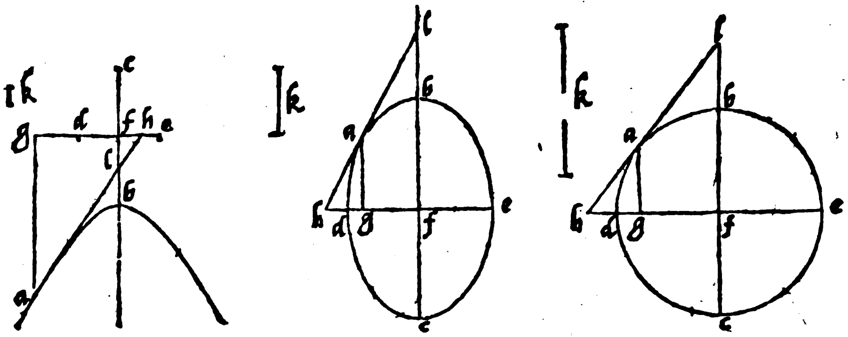
ut rectangulum ex e c, & g ad quadratum c e, hoc eſt, ut g ad c e, ita tranſuerſum latus ad rectum. Ruſus quoniam rectangulum f e d æquale eſt rectangulo ex e c & g: ut f e ad e c, ita erit g ad e d. habet autem c e ad e d proportionem cõpoſitam ex proportione; quam c e habet ad g, & ex ea, quam g ad e d: utq; c e ad g, ita eſt rectum latus ad tranſuerſum: & ut g ad e d, ita f e ad e c. ergo c e ad e d proportionem habebit compoſitam ex proportione, quam habet rectum latus ad tranſuerſum, & ex ea, quam f e habet ad e c.

lem. in 22 decimi
14. ſexti

THEOREMA XL. PROPOSITIO XL.

Si hyperbolen, uel ellipſim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum ſecunda diametro conueniat: & à tactu ad eandem diametrum linea applicetur, diametro alteri æquidiſtans: ſumpta qualibet linea ex duabus, quarum una inter applicatam, & ſectionis centrum interiicitur, altera inter applicatam, & contingentem: habebit ad ipſam applicata proportionem compoſitam ex proportione, quam habet tranſuerſum figuræ latus ad rectum, & ex ea, quam altera dictarum linearum habet ad applicatam.

SIT hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia a b, cuius diameter b f c, ſecunda diameter d f e: ducaturq; recta linea ſectionem contingens h l a; & ipſi b c æquidiſtans ducatur a g. Dico a g ad alteram linearum h g, g f proportionem habere

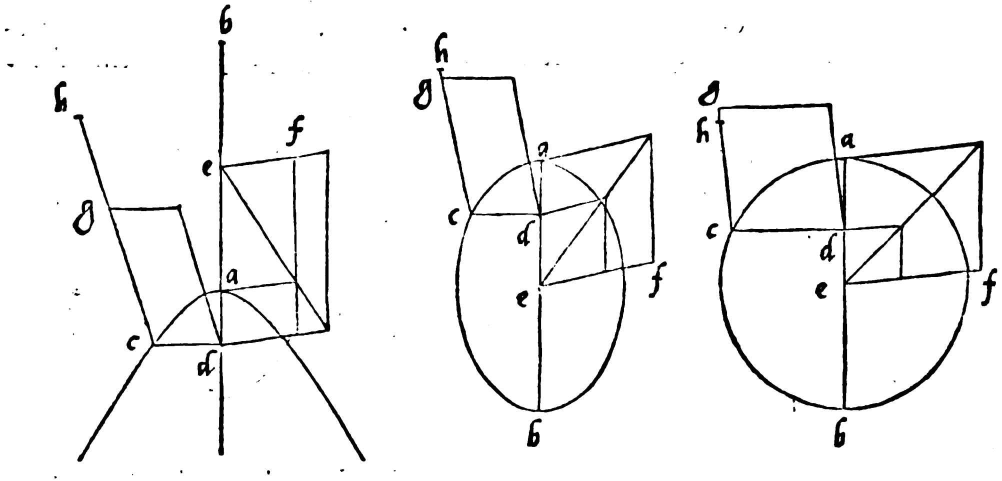


compoſitam ex proportione, quam habet tranſuerſum figuræ latus ad rectum, & ex ea quam altera dictarum linearum h g, g f habet ad ipſam g a. ſit enim rectangulum h g f rectangulo, quod fit ex g a, & linea k æquale. Itaque quoniam ut rectum latus ad 38. huius tranſuerſum, ita rectangulum h g f ad quadratum g a: rectangulo autem h g f æquale eſt,quod fit ex g a & k: erit rectangulum ex g a & k ad quadratum g a, hoc eſt k ad a g,ut latus rectum ad tranſuerſum.& quoniam a g ad g f compoſitam habet proportionem ex proportione,quam habet a g ad k,& ex ea,quã k ad g f: eſtq́, ut a g ad k, 14. ſexti ita tranſuerſum latus ad rectum: & ut k ad g f,ita h g ad g a,propterea quod rectangulum h g f æquale ſit ei,quod ex a g & k. conſtat ergo a g ad g f compoſitam habere proportionem ex ea, quam tranſuerſum latus ad rectum, & ex ea, quam h g habet ad g a.

THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLI.

Si in hyperbola,uel ellipſi,uel circuli circumferentia recta linea ordinatim applicetur ad diametrum: & ab applicata,& ea,quæ ex centro parallelogramma æquiangula deſcribantur: habeat autem applicata ad reliquum parallelogrammi latus proportionem compoſitam ex proportione,quam habet ea,quæ ex centro ad reliquum latus;& ex proportione,quam rectum figuræ ſectionis latus habet ad tranſuerſum: parallelogrammum factum à linea; quæ inter centrum, & applicatam interiicitur,ſimile parallelogrammo,quod fit ab ea,quæ ex centro, in hyperbola quidem maius eſt, quàm parallelogrammum ab applicata, parallelogrammo ab ea,quæ ex centro,in ellipſi uero,& circuli circũferentia unà cum parallelogrammo, quod fit ab applicata æquale eſt parallelogrammo ab ea quæ ex centro.

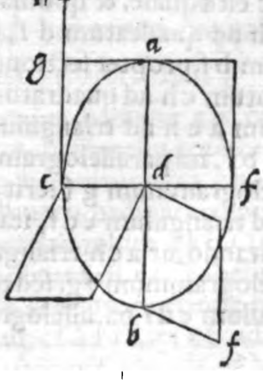
SIT hyperbole,uel ellipſis,uel circuli circumferentia, cuius diameter a b, cẽtrũ e:& ordinatim applicetur c d: à lineis autem e a,c d æquiangula parallelogramma deſcribantur,quæ ſint a f,d g:& habeat d c ad c g proportionem compoſitam ex proportione,quam habet a e ad e f,& ex ea, quam rectum figuræ latus habet ad trãſuerſum. Dico in hyperbola parallelogrammum,quod fit ex e d ſimile ipſi a f, parallelogrammis a f,g d æquale eſſe; in ellipſi uero, & circuli circumferentia parallelogrammum,quod fit ex e d ſimile a f,unà cum parallelogrammo g d ipſi a f eſſe æquale.fiat enim ut rectum figuræ latus ad tranſuerſum,ita d c ad c h. & quoniam ut d c ad c h, lem.in 22 decimi ita rectum latus ad tranſuerſum: ut autem d c ad c h. ita quadratum d c ad re- 21. huius ctangulum d c h: & ut rectum latus ad tranſuerſum, ita quadratum d c ad re- 9. quinti ctangulum b d a: erit rectangulum b d a rectangulo d c h æquale. rurſus quoniam d c ad c g proportionem habet compoſitam ex proportione, quam habet a e ad e f: & ex ea, quam rectum latus ad tranſuerſum, hoc eſt quam d c habet ad



ad c h. ſed d c ad c g compoſitam proportionem habet ex proportione d c ad c h, &
ex proportione h c ad c g: erit proportio compoſita ex proportione a e ad e f, &
ex proportione d c ad c h eadem, quæ componitur ex proportione d c ad c h; & ex
proportione h c ad c g. communis auferatur, proportio ſcilicet d c ad c h. reliqua
igitur proportio a e ad e f eadem eſt, quæ reliqua h c ad c g. ut autem h c ad c g, ita 1. ſexti
rectangulum h c d ad rectangulum g c d: & ut a e ad e f, ita quadratum a e ad rectangulum lem. in 22 decimi
a e f. ergo ut rectangulum h c d ad rectangulum g c d, ita quadratum a e ad rectangulum 11. quinti
a e f. ſed oſtenſum eſt rectangulum h c d æquale eſſe rectangulo b d a. ut
igitur rectangulum b d a ad rectangulum g c d, ita quadratum a e ad rectangulum
a e f: permutandoq́; ut rectangulum b d a ad quadratum a e, ita rectangulum g c d
ad ipſum a e f: & ut rectangulum g c d ad a e f rectangulum, ita parallelogrammum A
d g ad parallelogrammum f a: parallelogramma enim æquiangula ſunt, & proportionem 22. ſexti
habent compoſitam ex proportione laterum g c ad a e, & c d ad e f. quare ut rectangulum
b d a ad quadratum a e, ita parallelogrammum d g ad ipſum f a. Itaque
in hyperbola hoc modo concludemus. Vt omnia ſe habent ad omnia, ita unum ad B
unum. ergo ut rectangulum b d a unà cum quadrato a e ad a e quadratum, hoc eſt 6. ſecũdi
quadratum d e ad quadratum e a, ſic parallelogramma g d, a f ad parallelogrammũ
a f. Sed ut quadratum d e ad quadratum e a, ſic parallelogrammum, quod fit ex d e, ſimile, C
& ſimiliter deſcriptum ipſi a f ad parallelogrammum a f. ut igitur parallelogrãma
d g, a f ad parallelogrammum a f, ſic parallelogrammum ex d e deſcriptum ſimile
ipſi a f ad a f. ergo parallelogrammum ex d e, ſimile ipſi a f æquale eſt parallelogrãmis 9. quinti
g d, a f. In ellipſi uero & circuli circumferentia hoc modo. Quoniam ut totum, D
quadratum ſcilicet a e ad totum parallelogrammum a f, ſic ablatum rectangulũ a d b
ad ablatum parallelogrammum d g; erit reliquum ad reliquum, ſicut totum ad totũ. 19. quinti
Quòd ſi à quadrato e a auferatur rectangulum b d a, relinquetur quadratum d e. Vt 5. ſecũdi
igitur quadratum d e ad exceſſum, quo parallelogrammum a f excedit parallelogrãmum
d g, ſic quadratum a e ad parallelogrammum a f. ſed ut quadratum a e ad parallelogrammum E
a f, ſic quadratum d e ad parallelogrammum, quod fit ex d e, ſimile
ipſi a f. ergo ut quadratum d e ad exceſſum, quo parallelogrammum a f excedit ipſum
d g, ſic quadratum d e ad parallelogrammum ex d e, ſimile ipſi a f. parallelogrãmum
igitur ex d e ſimile a f æquale eſt exceſſui, quo parallelogrammum a f excedit 9. quinti
d g. quare ſequitur parallelogrammum ex d e ſimile a f unà cum parallelogrammo
d g ipſi a f æquale eſſe.

EVTOCIVS.

THEOREMA *hoc in hyperbola caſum non habet; in ellipſi uero, ſi applicata in centrum cadat, & reliqua eodem modo diſponantur, parallelogrammum, quod fit ab applicata parallelogrammo, quod ab ea, quæ ex centro æquale erit. ſit enim ellipſis, cuius diameter a b, centrum d: ordinatimq; applicetur c d: & ab ipſis c d, d a parallelogramma æquiangula deſcribantur, d g, a f: habeat autem d c ad c g proportionem compoſitam ex proportione, quam habet a d ad d f; & ex ea, quam rectum figuræ latus habet ad tranſuerſum. Dico parallelogrammum a f æquale eſſe parallelogrammo d g. Quoniam enim in ſuperioribus oſtenſum eſt, ut quadratum a d ad parallelogrammum a f, ita eſſe rectangulum a d b ad parallelogrammum d g: erit permutando, ut quadratum a d ad rectangulum a d b, ita parallelogrammum a f ad parallelogrammum d g. ſed quadratum a d æquale eſt rectangulo a d b. ergo parallelogrammum a f parallelogrammo d g æquale erit.*



FED. COMMANDINVS.

A ET ut rectangulum g c d ad a e f rectangulum, ita parallelogrammum d g ad parallelogrammum f a.] *Hoc etiam conſtat ex ſexto lemmate Pappi.*

B Vt omnia ſe habent ad omnia, ita unum ad unum] *In omnibus antiquis codicibus, quos uiderim ſic legitur* ὡς πάντα προς παντα, ἓν πρός ἕν. *Sed delenda ſunt, ut arbitror, tanquam ab aliquo addita; illud enim per compoſitam rationem colligi perſpicuum eſt.*

C Sed ut quadratum d e ad quadratum e a; ſic parallelogrammum, quod fit ex d e ſimile, & ſimiliter deſcriptum ipſi a f ad parallelogrammum a f.] *Quadratum enim d e ad quadratum e a duplam proportionem habet eius, quæ eſt lateris d e ad latus e a: & eandem proportionem habet parallelogrammum ex d e ſimile ipſi a f ad a f. ex corollario 20. ſexti elementorum.*

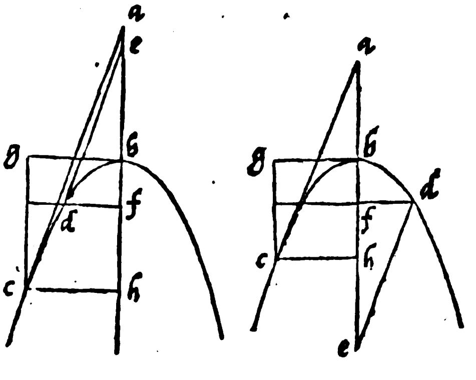
D Quoniam ut totum quadratum ſcilicet a e ad totum parallelogrammum a f.] *Demonſtratum enim eſt ſuperius, ut rectangulum b d a ad quadratum a e, ita eſſe parallelogrammum d g ad parallelogrammum f a. quare permutando rectangulum b d a ad parallelogrammum d g eſt, ut quadratum a e ad parallelogrammum a f.*

E Sed ut quadratum a e ad parallelogrammum a f, ſic quadratum d e ad parallelogrammum, quod fit ex d e ſimile ipſi a f.] *Erat enim ut quadratum d e ad quadratum e a, ſic parallelogrammum ex d e ſimile ipſi a f ad a f. ergo & permutando.*

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLII.

SI parabolen recta linea contingens cum diametro conueniat: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: ſumpto autem quouis puncto in ſectione, applicentur ad diametrum duæ lineæ, altera quidem contingenti æquidiſtans, altera uero æquidiſtans ei, quæ à tactu ordinatim applicata eſt: triangulum, quod ab ipſis conſtituitur, æquale erit parallelogrammo contento linea à tactu applicata, & ea, quæ interiicitur inter æquidiſtantem & uerticem ſectionis.

SIT parabole, cuius diameter a b: ducaturq; linea a c ſectionem contingens: & c h ordinatim applicetur. à quouis autem puncto d applicetur d f: & per d quidem ducatur d e ipſi a c æquidiſtans, per c uero ipſa c g æquidiſtans b f: denique per b ducatur b g, quæ ipſi h c æquidiſtet. Dico triangulum e d f æquale eſſe parallelogrammo f g. Quoniam enim a c ſectionem contingit, & ordinatim applicata eſt
A c h, erit a b æqualis ipſi b h; & a h dupla
35. huius. h b. triangulum igitur a h c parallelogrā-
20 mo b c eſt æquale. & quoniam ut quadra
tum c h ad quadratum d f, ita linea h b
B ad ipſam b f, propter ſectionem: ut autem
quadratum c h ad quadratum d f, ita tri-
1. ſexti angulum a c h ad triangulum e d f: & ut
h b ad b f, ita parallelogrammum g h ad
parallelogrammum g f: erit ut triangulū
a c h ad triangulum e d f, ita h g parallelogrammum ad parallelogrammum f g: & permutando, ut a c h triangulum ad parallelogrammum h g, ita triangulum e d f ad parallelogrammum f g. ſed triangulum a c h æquale eſt parallelogrammo h g. ergo triangulum e d f parallelogrammo f g æquale erit.



EVTOCIVS.

HOC theorema undecim habet caſus; unum quidem ſi d ſupra c ſumatur; conſtat enim lineas æquidiſtantes cadere intra ipſas a c h: alios autem quinque caſus habet, ſi d ſumatur infra c: nam linea d f æquidiſtans cadet extra c h, & d e uel inter a & b cadet, uel in ipſo b, uel inter b & h, uel in h, uel infra h: ut enim ſupra a cadat, fieri non poteſt: quoniam cum d ſit infra c, & quæ per ipſum æquidiſtans a c ducitur, infra a cadet. Quod ſi d ſumatur ex altera parte ſectionis, uel utræque æquidiſtantes inter b & h cadent: uel d f quidem cadet ſupra h c, punctum uero e uel in h, uel infra, uel rurſus e cadet infra h, & f, uel in h, ita ut c h d ſit recta linea, (quamquam tunc non exacte æquidiſtantium proprietas ſeruetur) uel infra h cadet. Oportet autem in demonſtratione quinque caſuum poſtremorum lineam d f uſque ad ſectionem, & ad ipſam g c produci. Sed ex his aliam quandam deſcriptionem mente concipere poſſumus, cum uidelicet ſumatur aliud punctum, & quæ in principio ſumptæ fuerant lineæ faciant id, quod dictum eſt. Sed hoc theorema eſt, non caſus.

FED. COMMANDINVS.

TRIANGVLVM igitur a h c parallelogrammo b c eſt æquale.] *Eſt enim parallelogrammum c h a duplum trianguli a h c, itemq; duplum parallelogrammi c h b, hoc eſt ipſius b c. quare ex nona quinti ſequitur triangulum a c h parallelogrammo b c æquale eſſe.* A 41.primi. 1.ſexti

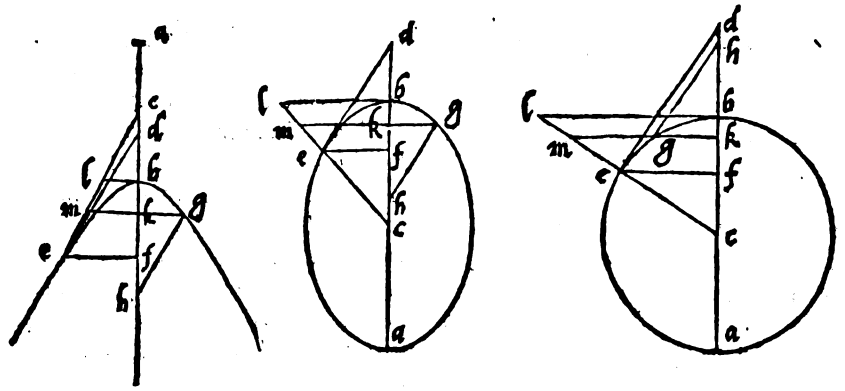
Vt autem quadratum c h ad quadratum d f, ita triangulum a c h ad triangulum e d f.] *Quadratum enim c h ad quadratum d f duplam proportionem habet eius, quæ eſt lateris c h ad d f ex cor. 20. ſexti: & ſimiliter eandem habet proportionem triangulum a c h ad triangulum e d f ipſi ſimile. ut igitur quadratum c h ad quadratum d f, ita triangulum a c h ad triangulum e d f.* B

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLIII.

SI hyperbolen, uel ellipſim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens conueniat cum diametro: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: huic uero æquidiſtans ducatur per uerticem ſectionis, quæ cum linea per tactum & centrum ducta conueniat: & ſumpto aliquo puncto in ſectione, ab eo ad diametrum duæ lineæ ducantur, una quidem contingenti æquidiſtans; altera uero æquidiſtans ei, quæ à tactu applicata eſt: triangulum ab ipſis factum in hyperbola minus erit, quàm triangulum, quod abſcindit linea per centrum, & tactum ducta, triangulo ab ea, quæ ex centro, ſimili abſciſſo: in ellipſi uero, & circuli circumferentia unà cum triangulo abſciſſo ad centrum æquale erit triangulo ſimili abſciſſo, quod ab ea quæ ex centro deſcribitur.

Sit hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b; centrum c: ducaturq́; linea d e ſectionem contingens: & iuncta c e, ordinatim applicetur e f. Sumatur autem aliquod punctum in ſectione, quod ſit g: & ducatur linea g h contingenti æquidiſtans: & g k m ordinatim applicetur: per b uero ordinatim applicetur b l. Dico triangulum k m c differre à triangulo c l b per triangulum g k h. Quoniam enim linea e d ſectionem contingit, ordinatim uero applicata eſt e f, habebit e f ad f d proportionem compoſitam ex proportione c f ad f e, & ex proportione recti lateris ad tranſuerſum. Sed ut e f ad f d, ita g k ad k h: & ut c f ad f e, ita c b ad b l. Ergo g k ad k h proportionem habebit compoſitam ex proportione c b ad b l: & ex 39.huius 4.ſexti.

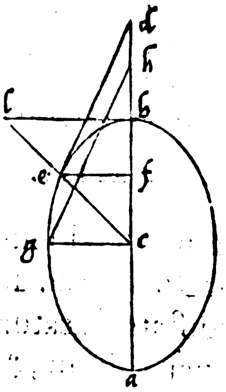
proportione recti lateris ad tranſuerſum, quare ex his, quæ in quadrageſimo primo theoremate oſtendimus, triangulum c k m à triangulo b c l differt, triangulo g h k:
15. quinti etenim in parallelogrammis triangulorum duplis hæc eadem demonſtrata ſunt.

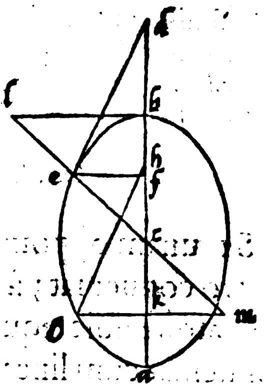


E V T O C I V S.

37. huius 14. ſexti *In aliquibus codicibus huius theorematis talis legitur demonſtratio.* Quoniam enim rectangulum
cor. 20. ſexti fcd æquale eſt quadrato cb, erit ut fc ad cb, ita bc ad cd. quare ut figura,
quæ fit ex fc ad figuram ex cb, ita linea fc ad cd. Sed ut figura ex fc ad figuram
1. ſexti ex cb, ita ecf triangulum ad triangulum lcb: & ut linea fc ad ipſam cd, ita cfc
9. quinti. triangulum ad triangulum ecd. Vt igitur ecf triangulum ad triangulum lcb, ita
triangulum ecf ad ipſum ecd. proptereaq; triangulum ecd triangulo lcb eſt æquale.
A ergo in hyperbola per conuerſionem rationis; & in ellipſi, conuertendo, diuidendoq;,
B & rurſus conuertendo, ut efc triangulum ad quadrilaterum elbf, ita triangulum
9. quint. ecf ad triangulum edf. quare triangulum edf æquale eſt quadrilatero elbf.
C Et quoniam ut quadratum fc ad cb quadratum, ita triangulum ecf ad triangulum
D lcb, in hyperbola quidem diuidendo; in ellipſi autem conuertendo, & per conuerſionem
E rationis, & rurſus conuertendo, erit ut rectangulum afb ad quadratum bc, ita
F quadrilaterum elbf ad triangulum blc: & ſimiliter ut quadratum cb ad rectangulum
akb, ita triangulum lcb ad quadrilaterum mlbk. ergo ex æquali ut rectangulum
afb ad rectangulum akb, ita elbf quadrilaterum ad quadrilaterum mlbk. ut
21. huius autem rectangulum afb ad rectangulum akb, ita quadratum ef ad quadratum gk:
& ut quadratum ef ad quadratum gk, ita triangulum edf ad triangulum ghk. quare
ut triangulum edf ad triangulum ghk, ita quadrilaterum elbf ad quadrilaterum
mlbk: & permutando ut triangulum edf ad quadrilaterum elbf, ita triangulum
ghk ad quadrilaterum mlbk. Sed triangulum edf oſtenſum eſt æquale quadrilatero
elbf. ergo & triangulum ghk quadrilatero mlbk eſt æquale. triangulum igitur
mck à triangulo lcb differt triangulo ghk.

Sed cum hæc demonſtratio obſcuritatem quandam habeat in proportionibus ellipſis, enitendum
E *eſt, ut ea, quæ breuiter dicta ſunt, latius explicentur.* Quoniam, inquit, ut quadratum fc
ad quadratum cb, ita triangulum ecf ad triangulum lcb, erit conuertendo, & per
conuerſionem rationis, rurſusq; conuertendo. *eſt enim conuertendo ut quadratum bc ad*
quadratum cf, ita lcb triangulum ad triangulum efc: & per conuerſionem rationis, ut quadratum
5. ſecundi *bc ad rectangulum afb (hoc eſt ad exceſſum, quo quadratum bc excedit quadratum cf, quoniam*
punctum c lineam ab bifariam ſecat,) ita triangulum lbc ad quadrilaterum lbfe: & conuertendo,
ut rectangulum afb ad quadratum bc, ita quadrilaterum lbfe ad lcb triangulum.
Habet autem in hyperbola caſus undecim, quot habebat præcedens theorema in parabola, &
præterea alium quendam, cum ſcilicet punctum, quod in g ſumitur idem ſit, quod e. tunc enim contingit
triangulum edf unà cum triangulo lbc æquale eſſe triangulo cef: quoniam oſtenſum eſt
triangulum edf quadrilatero lbfe æquale. quadrilaterum autem lbfe à triangulo cef ipſo lbc
trian-





triangulo differt. Sed in ellipſi uel punctum g idem eſt, quod e, uel ſupra e ſumitur, & tunc utraſque æquidiſtantes inter d & f cadere perſpicuum eſt. quòd ſi g ſumatur infra e, & ab eo ducta linea æquidiſtans ipſi e f cadat inter f & c, punctum h quinque caſus efficit: uel enim cadit inter d & b, uel in b, uel inter b & f, uel in f, uel inter f & c. ſi uero quæ per g ducitur applicatæ æquidiſtans in centrum c cadat, punctum h ſimiliter quinque efficit caſus. Attendendum tamen eſt triangulum factum à lineis, quæ ipſis d e, e f æquidiſtant, triangulo l b c æquale eſſe. Quoniam enim ut quadratum e f ad quadratum g c, ita triangulum e d f ad triangulum g h c, ſimilia enim triangula ſunt: & ut quadratum e f ad quadratum g c, ita rectangulum b f a ad rectangulum b c a, hoc eſt ad quadratum b c: erit ut triangulum e d f ad ipſum g h c, ita rectangulum b f a ad quadratum b c. ut autem rectangulum b f a ad quadratum b c, ita quadrilaterum l b f e ad triangulum l b c, quod demonſtratum iam fuit. ergo ut e d f triangulum ad triangulum g h c, ita eſt quadrilaterum l b f e ad triangulum l b c: & permutando ut triangulum e d f ad quadrilaterum l b f e, ita triangulum g h c ad triangulum l b c. ſed æquale eſt triangulum e d f quadrilatero l b f e. triangulum igitur g h c triangulo l b c eſt æquale. Poſſumus autem hæc etiam aliter probare, ſi dicamus in parallelogrammis triangulorum duplis eadem demonſtrata eſſe; uidelicet in quadrageſimo primo theoremate. Quòd ſi ducta per g æquidiſtans e f cadat inter c & a, producetur quidem, quouſq; linea c e cum ipſa conueniat; & punctum h ſeptem caſus efficiet. uel enim inter b & d cadit, uel in b, uel inter b & f, uel in f, uel inter f & c, uel in c, uel inter c & a, & in his caſibus contingit differentiam triangulorum l b c, g h κ infra conſtitui à lineis g k, e c productis. Si uero g ſumatur in altera parte ſectionis: & quæ per g ducitur ipſi e f æquidiſtans inter b & f cadat, producetur ob demonſtrationem, quouſq; ſecet ipſam l c: & punctum h faciet ſeptem caſus; uel inter b & f cadens, uel in f, uel inter f & c, uel in c, uel inter c & a, uel in a, uel infra a. & ſi g κ cadat inter f & c, punctum h quinque caſus efficiet, uel enim erit inter f & c, uel in c, uel inter c & a, uel in a, uel infra a. Sed ſi g k in centrum c cadat, punctum h caſus efficiet tres, uel inter c & a cadens, uel in a uel extra a. atque in his caſibus rurſus contingit triangulum g h κ æquale eſſe triangulo l b c. Denique ſi g k cadat inter c & a, punctum h uel cadet inter c & a, uel in a, uel extra. Itaque in ellipſi caſus omnes erunt quadraginta duo, & totidem in circuli circumferentia, ita ut huius theorematis caſus ſint nonaginta ſex. 21. huius

FED. COMMANDINVS IN DEMONSTRATIONEM,
QVAE AB EVTOCIO AFFERTVR.

Ergo in hyperbola per conuerſionem rationis.] *Quoniam enim eſt ut e c f triangulum ad triangulum l c b, ita triangulum e c f ad triangulum e c d: erit per conuerſionem rationis, ut e c f triangulum ad quadrilaterum e l b f, ita triangulum e c f ad triangulum e d f.* A

Et in ellipſi conuertendo, diuidendoq;, & rurſus conuertendo.] *Rurſus quoniam ut triangulum e c f ad triangulum l c b, ita triangulum e c f ad triangulum e c d: conuertendo erit ut l c b triangulum ad triangulum e c f, ita triangulum e c d ad triangulum e c f: diuidendoq;, ut quadrilaterum e l b f ad triangulum e c f, ita triangulum e d f ad triangulum e c f: & rurſus conuertendo ut triangulum e c f ad quadrilaterum e l b f, ita triangulum e c f ad e d f triangulum.* B

Et quoniam ut quadratum f c ad c b quadratum, ita triangulum e c f ad triangulum l c b.] *Sunt enim triangula e c f, l b c ſimilia, & duplam inter ſe proportionem habent eius, quæ eſt lateris ad latus ſimilis rationis, quemadmodum & ipſa quadrata.* C cor. 20. ſexti

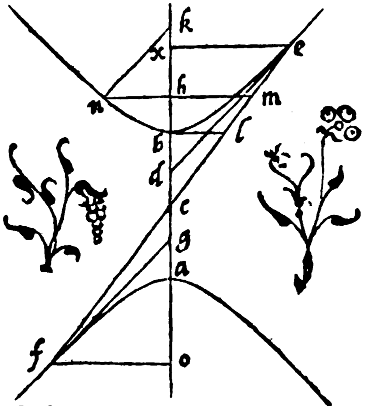
In hyperbola quidem diuidendo.] *Nam cum ſit ut quadratum f c, ad c b quadratum, ita triangulum e c f ad triangulum l c b; erit diuidendo, ut exceſſus, quo quadratum f c excedit c b quadratum, hoc eſt rectangulum a f b ex ſexta ſecundi elementorum, ad quadratum c b, ita quadrilaterum e l b f ad triangulum l c b.* D

F Et ſimiliter ut quadratum c b ad rectangulum a k b, ita triangulum l c b ad quadrilaterum m l b k.] *Quoniam enim ut quadratum x c ad c b quadratum, ita triangulum m c k ad triangulum l c b: ſimiliter demonſtrabitur ut rectangulum a k b ad b c quadratum, ita quadrilaterum m l b k ad triangulum l c b. quare & conuertendo.*

THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO XLIIII.

Si unam oppoſitarum ſectionum recta linea contingens cum diametro conueniat; à tactu uero ad diametrum linea ordinatim applicetur; atque huic æquidiſtans ducatur per uerticem alterius ſectionis, ut conueniat cum linea per tactum, & centrum ducta: ſumpto autem in ſectione quouis puncto, applicentur ad diametrum duæ lineæ, quarum altera contingenti æquidiſtet, altera æquidiſtet ei, quæ à tactu ordinatim applicata eſt: triangulum ab ipſis factum minus eſt, quàm triangulum, quod abſcindit applicata ad centrum ſectionis, triangulo ſimili abſciſſo ab ea, quæ ex centro.

Sint oppoſitæ ſectiones a f, b e, quarum diameter a b, centrum c: & ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt in ſectione f a, uidelicet à puncto f ducatur linea f g ſectionem contingens: ordinatimq; applicetur f o: & iuncta f c producatur, ut ad e: per b uero ducatur b l ipſi f o æquidiſtans: & ſumatur aliquod punctum in ſectionem b e, quod ſit n; à quo n h ordinatim applicetur: atque ipſi f g æquidiſtans ducatur n k. Dico triangulum n h k minus eſſe, quàm triangulum c m h, triangulo c b l. ducatur enim per e linea e d contingens e b ſectionem: & e x ordinatim applicetur. itaque quoniam oppoſitæ ſectiones ſunt f a, b e, quarum diameter a b: & linea f c e per centrum ducitur: & f g, e d ſectiones contingunt: erit d e ipſi f g æquidiſtans. eſt autem n k æquidiſtans f g. ergo & n k ipſi e d; & m h ipſi b l æquidiſtat. Quoniam igitur hyperbole eſt b e, cuius diameter a b, centrum c: & linea e d ſectionem contingit: ordinatimq; applicata eſt e x: & ipſi e x æquidiſtat b l: ſumpto autem in ſectione puncto n, ab eo ordinatim applicatur n h, & ipſi d e æquidiſtans ducitur n k: erit triangulum n h k minus, quàm triangulum h m c, ipſo c b l triangulo. hoc enim in quadrageſimo tertio theoremate oſtenſum eſt.



EVTOCIVS.

Itaque quoniam oppoſitæ ſectiones ſunt f a, b e; quarum diameter a b: & linea f c e per centrum ducitur: & f g, d e ſectiones contingunt: erit d e ipſi f g æquidiſtans.]
Quoniam igitur hyperbole eſt a f, lineaq; f g ſectionem contingit; & applicata eſt f o; erit rectangulum o c g æquale quadrato c a, ex trigeſimo ſeptimo theoremate: & ſimiliter rectangulum x c d quadrato c b æquale. eſt igitur ut rectangulum o c g ad quadratum a c, ita rectangulum x c d ad quadratum b c: & permutando ut rectangulum o c g ad rectangulum x c d, ita quadratum a c ad
ex demõſtratis in *ipſum c b: & idcirco rectangulum o c g æquale eſt rectangulo x c d. eſtq; linea o c æqualis ipſi c x.*
30. huius *ergo & g c ipſi c d. Sed f c ipſi c e eſt æqualis, ex trigeſimo theoremate. lineæ igitur f c, c g,*
15 primi *æquales ſunt ipſis e c, c d: anguloſq; æquales continent ad c, ſunt enim ſecundum uerticem. quare*
4 *& f g ipſi e d eſt æqualis; & angulus c g f angulo c d e: qui quidem anguli alterni ſunt. ergo f g*
27 *ipſi e d æquidiſtabit. Caſus huius theorematis duodecim ſunt, quemadmodum in hyperbola, ut diximus in quadrageſimo tertio theoremate, atque eadem eſt demonſtratio.*

FED. COMMANDINVS.

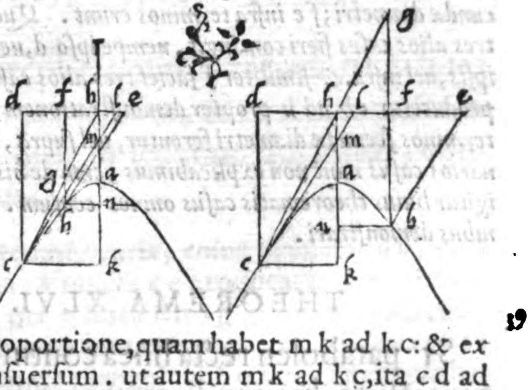
Ex his quæ ſuperius dicta ſunt, licet etiam illud demonſtrare.

Si unam oppoſitarum ſectionum recta linea contingat: & à tactu ducatur diameter uſque ad alteram ſectionem: quæ ab eo puncto ducatur lineæ ſectionem contingenti æquidiſtans, ſectionem ipſam continget.

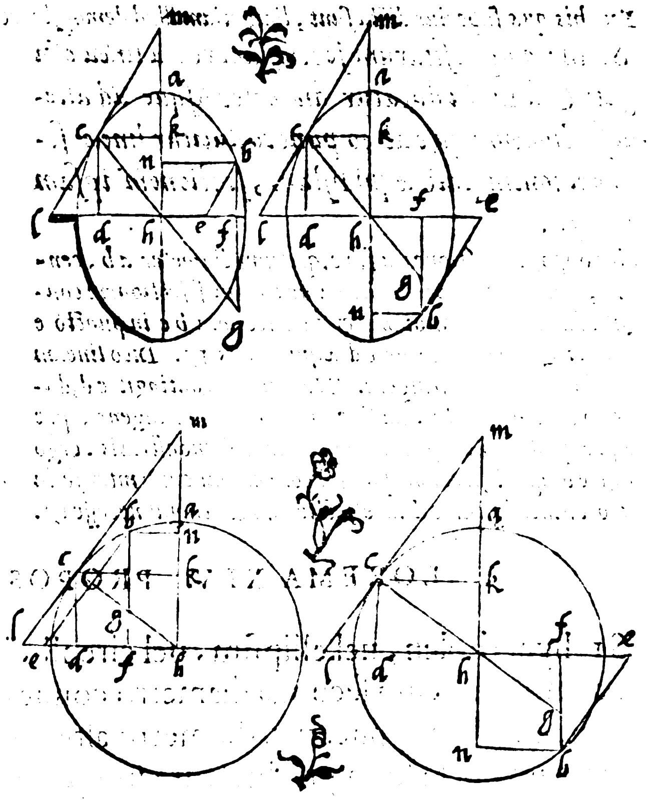
Sint oppoſitæ ſectiones a f, b e, quarum diameter a b, centrum c, ut in propoſita figura: & linea f g in f ſectionem contingat: ducatur autem diameter f c e ſectioni b c in puncto e occurrens: & ab eo ducatur e d æquidiſtans f g. Dico lineam e d ſectionem in e contingere. Nam ſi non contingit e d, ducatur ab eodem puncto alia linea ſectionem contingens, quæ ſit e p. æquidiſtabit e p lineæ f g, ex iam demonſtratis. ergo & ipſi e d: quod fieri non poteſt: conueniunt enim inter ſe in puncto e. linea igitur e d in e ſectionem contingat neceſſe eſt. 30. primi

THEOREMA XLV. PROPOSITIO XLV.

Si hyperbolen, uel ellipſim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum ſecunda diametro conueniat: & à tactu ad eandem diametrum linea applicetur, diametro alteri æquidiſtans: & per tactum & centrum ducta linea producatur: ſumpto autem in ſectione quouis puncto, ad ſecundam diametrum ducantur duæ lineæ, quarum una contingenti, altera applicatæ æquidiſtet: triangulum, quod ab ipſis conſtituitur, in hyperbola quidem maius eſt, quàm triangulum abſciſſum ab applicata ad centrum, triangulo, cuius baſis eſt linea contingens, & uertex centrum ſectionis: in ellipſi uero & circuli circumferentia, unà cum triangulo abſciſſo, æquale eſt triangulo, cuius baſis linea contingens, & uertex ſectionis centrum.



Sit hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia a b c, cuius diameter a h; ſecunda diameter h d; & centrum h: linea uero c m l ſectionem contingat in c: ducaturq; c d ipſi a h æquidiſtans: & iuncta c h producatur. ſumpto deinde in ſectione quouis puncto b, ducantur lineæ b e, b f, quæ ipſis l c, c d æquidiſtent. Dico triangulum b e f in hyperbola quidem maius eſſe, quàm triangulum g h f, triangulo l c h; in ellipſi uero & circuli circumferentia, unà cum triangulo f g h æquale eſſe triangulo c l h. ducantur enim c k, b n æquidiſtantes ipſi d h. & quoniam linea c m ſectionem contingit; atque applicata eſt c k; habebit 39. huius c k ad k h proportionem compoſitam ex proportione, quam habet m k ad k c: & ex ea, quam rectum figuræ latus habet ad tranſuerſum. ut autem m k ad k c, ita c d ad d l. ergo c k ad k h proportionem compoſitam habet ex proportione c d ad d l, & ex proportione recti lateris ad tranſuerſum. atque eſt triangulum c d l figura, quæ fit ex k h: & triangulum c h k, hoc eſt c d h, figura, quæ fit ex c k, hoc eſt ex d h. quare triangulum c d l in hyperbola quidem maius eſt, quàm triangulum c k h, triangulo facto ex a h, ſimili ipſi c d l: in ellipſi uero & circuli circumferentia unà cum ipſo c k h eidem triangulo eſt æquale. hoc enim in parallelogrammis triangulorum duplis in quadrageſimo primo theoremate eſt demonſtratum. Itaque quoniam triãgulum c d l à triangulo c k h, uel c d h differt triangulo, quod fit ex a h, ipſi c d l ſimili: differt autem & triangulo c h erit c h l triangulum æquale ei, quod fit ex a h, ſimile ipſi c d l. Rurſus quoniam triangulum b f e ſimile eſt triangulo c d l: & triangulum g f h triangulo c d h, ipſorum latera inter ſe eandem proportionem habent. atque eſt triangulum b f e, quod fit ex n h inter applicatam & centrum interiecta: triangulum uero g f h, quod fit ex b n applicata, hoc eſt ex f h. Ex iis igitur, quæ prius oſtenſa ſunt, triangulum b f e à triangulo g h f differt triangulo, quod fit ex a h, ſimili ipſi c d l. quare & triangulo c l h.



E V T O C I V S.

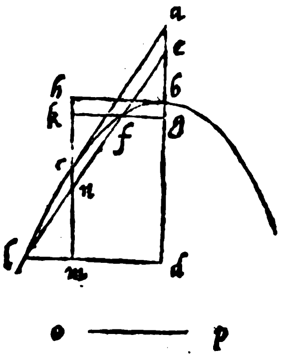
ATTENDENDVM eſt hoc theorema plures habere caſus: in hyperbola enim uiginti habet; nam punctum, quod pro b ſumitur, uel idem eſt, quod c, uel idem quod a: & tunc contingit triangulum factum ex a h ſimile ipſi d c l, idem eſſe, quod à lineis æquidiſtantibus ipſis d l, l c abſcinditur. Si uero b ſumatur inter a c, & puncta d l ſint ſupra terminos ſecundæ diametri, fient tres caſus: nam puncta f e uel ſupra terminos ferentur, uel in ipſos, uel infra; & ſi d l ſint in terminis ſecundæ diametri; f e infra terminos erunt. Quod ſi b ſumatur infra c; & h c ad c producatur, tres alios caſus fieri contingit, nempe ipſo d, uel ſupra terminos ſecundæ diametri exiſtente, uel in ipſis, uel infra. & ſimiliter f faciet tres alios caſus. ſin autem b ſumatur ex altera parte ſectionis, producetur c h ad h propter demonſtrationem: & b f, b e tres caſus efficient, quoniam f e uel ad terminos ſecundæ diametri ferentur, uel ſupra, uel infra. Ellipſis uero, & circuli circumferentiæ uarios caſus nunc non explicabimus, cum de his ſatis dictum ſit in præcedenti theoremate. erunt igitur huius theorematis caſus omnes centum. Sed poſſunt hæc eadem etiam in oppoſitis ſectionibus demonſtrari.

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO XLVI.

SI parabolen recta linea contingens cum diametro conueniat; quæ per tactum ducitur diametro æquidiſtans ad eaſdem partes ſectioni, lineas in ſectione ductas, quæ contingenti æquidiſtant, biſariam ſecabit.

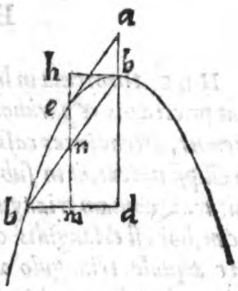
Sit

Sit parabole, cuius diameter a b d: & linea a c ſectionem contingat: per c uero ducatur h c m æquidiſtans a d: & ſumpto in ſectione quouis puncto l ducatur l n f e, quæ ipſi a c æquidiſtet. Dico l n ipſi n f æqualem eſſe. ducantur enim ordinatim b h, k f g, l m d. & quoniam ex his, quæ in quadrageſimo ſecundo theoremate demonſtrauimus, triangulum e l d æquale eſt parallelogrammo b m, & triangulum e f g parallelogrammo b k; erit parallelogrammum g m, quod relinquitur æquale quadrilatero l f g d. commune auferatur m d g f n quinquelaterum. reliquum igitur triangulum k f n reliquo l m n eſt æquale. Sed linea k f æquidiſtat l m. ergo f n ipſi n l æqualis erit.



EVTOCIVS.

Hoc theorema plures caſus habet. demonſtrabimus autem habita ratione caſuum quadrageſimi ſecundi theorematis; ut exempli cauſſa ſi f cadat in b, ita dicemus. Quoniam triangulum b d l æquale eſt parallelogrammo h b d m, commune auferatur n m d b, erit reliquum, triangulum ſcilicet l n m æquale reliquo h n b. In alijs autem ad hunc modum. Quoniam triangulum l e d parallelogrammo h b d m eſt æquale; & triangulum f e g parallelogrammo h b g k, erit reliquum l f g d æquale reliquo k g d m. Commune auferatur n f g d m. reliquum igitur triangulum l n m reliquo k n f eſt æquale.



FED. COMMANDINVS.

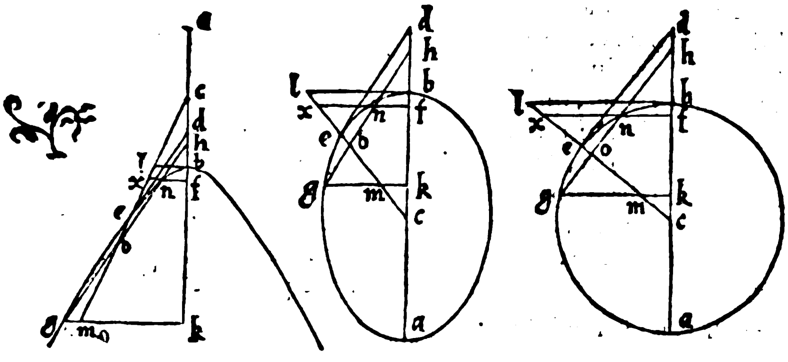
Sed linea k f æquidiſtat l m, ergo f n ipſi n l æqualis erit.] *Quoniam enim æquidiſtant k f, l m, angulus f k n æqualis eſt angulo l m n: anguli autem ad n ſecundum uerticem inter ſe ſunt æquales. ergo & reliquus æqualis reliquo: & triangulum f k n triangulo l m n ſimile. Itaque fiat ut f n ad n l, ſic n l ad aliam lineam, quæ ſit o p; erit linea f n ad o p, ut triangulum f k n ad ipſum l m n. quare linea f n lineæ o p eſt æqualis. Sed cum tres lineæ f n, n l, o p proportionales ſint, ſequitur rectangulum ex f n, o p; hoc eſt quadratum f n quadrato n l æquale eſſe: & propterea lineam f n lineæ n l æqualem.*

29. primi
15
cor. 20. ſexti
16. ſexti.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO XLVII.

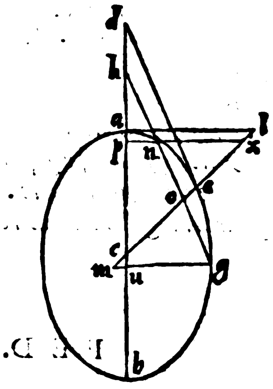
Si hyperbolen, uel ellipſim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat: per tactum, & centrum ducta linea ad eaſdem partes ſectioni, lineas, quæ in ſectione ducuntur, contingenti æquidiſtantes bifariam ſecabit.

Sit hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b, centrum c: ducaturq; d e ſectionem contingens: & iuncta c e producatur. Sumpto autem in ſectione quouis puncto n, ducatur per n linea h n o g ipſi d e æquidiſtans. Dico n o ipſi o g æqualem eſſe. applicentur enim ordinatim x n f, b l, g m k. ergo ex demonſtratis in quadrageſimo tertio theoremate triangulum h n f æquale eſt quadrilatero l b f x: & g h k triangulum quadrilatero l b k m. reliquum igitur n g k f quadrilaterum reliquo m k f x eſt æquale. commune auferatur o n f k m quinquelaterum.



erit reliquum triangulum o m g æquale reliquo o x n. atque eſt m g æquidiſtans n x. ergo n o ipſi o g eſt æqualis.

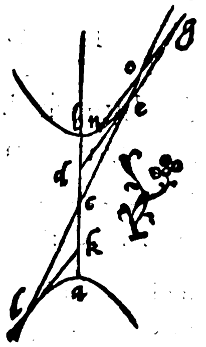
EVTOCIVS.



Hoc theorema in hyperbola tot habet caſus, quot habebat præcedens in parabola. demonſtrationes autem eorum faciemus, attendentes caſus quadrageſimi tertij theorematis: & in ellipſi itidem, ut in ſubiecta figura, cum punctum g extra ſumitur. Quoniam triangulum l a c æquale eſt triangulis h g u, u c m, hoc eſt triangulis o h c, o m g: atque eſt idem triangulum l a c æquale triangulo x p c, & quadrilatero l a p x, hoc eſt triangulo n h p: ex his, quæ demonſtrata ſunt in quadrageſimo tertio theoremate, erunt triangula x p c, n h p æqualia triangulis o h c, o m g. commune auferatur triangulum o h c. reliquum igitur triangulum x o n æquale eſt reliquo m o g: & eſt n x æquidiſtans m g. ergo n o ipſi o g eſt æqualis.

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO XLVIII.

SI unam oppoſitarum ſectionum recta linea contingens cum diametro conueniat: & per tactum & centrum linea producta ſecet alteram ſectionem: quæ in altera ſectione ducta fuerit, contingenti æquidiſtans à linea producta bifariam ſecabitur.



Sint oppoſitæ ſectiones, quarum diameter a b, centrum c: & linea k l ſectionem contingat: iunctaq́; l c producatur. ſumpto autem in b ſectione puncto n, per n ducatur n g, quæ æquidiſtet l k. Dico lineam n o ipſi o g æqualem eſſe. Ducatur enim per e ſectionem contingens e d. erit e d ipſi l k æquidiſtans: quare & ipſi n g. Quoniam igitur hyperbole eſt b n g, cuius centrum c: lineaq́; d e ſectionem contingit; & iuncta eſt c e: ſumpto autem in ſectione puncto n, per n ipſi d e æquidiſtans ducta eſt n g: ex iis, quæ in hyperbola oſtendimus, erit n o ipſi o g æqualis.

ex demõſtratis ab Eutocio i 44. huius

EVTOCIVS.

HVIVS *etiam theorematis caſus ita ſe habent, ut in quadrageſimo ſeptimo theoremate dictum eſt de hyperbolæ deſcriptione.*

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO XLIX.

Si parabolen recta linea contingens cum diametro conueniat: & per tactum ducatur linea diametro æquidiſtans: à uertice uero ducatur æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt: & fiat ut portio contingentis inter applicatam & tactum interiecta ad portionem æquidiſtantis, quæ itidem inter tactum, & applicatam interiicitur; ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ à ſectione ducta fuerit, æquidiſtans contingenti ad lineam, quæ per tactum ducitur diametro æquidiſtans, poterit rectangulum contentum inuenta linea, & ea, quæ inter ipſam & tactum interiicitur.

SIT parabole, cuius diameter m b c: & linea c d ſectionem contingat: per d uero ipſi b c æquidiſtans ducatur f d n: & f b ordinatim applicetur: fiatq; ut e d ad d f, ita quædam recta linea g ad duplam ipſius c d: & ſumpto in ſectione puncto k, ducatur per k ipſi c d æquidiſtans k l p. Dico quadratum k l æquale eſſe rectangulo, quod fit ex linea g & d l, hoc eſt diametro exiſtente d l lineam g eſſe rectum latus. applicentur enim ordinatim d x, k n m. & quoniam c d ſectionem contingit, ordinatim uero applicata eſt d x, erit c b æqualis b x. ſed b x eſt æqualis f d. ergo c b ipſi f d æqualis erit: & propterea triangulum e c b æquale triangulo e f d. commune addatur, figura ſcilicet d e b m n. quadrilaterum igitur d c m n æquale eſt parallelogrammo f m, hoc eſt triangulo k p m. commune auferatur quadrilaterum l p m n. ergo reliquum triangulum k l n parallelogrammo l c eſt æquale. angulus autem d l p æqualis eſt angulo k l n. quare rectangulum k l n duplum eſt rectãguli l d c. quoniam igitur ut e d ad d f, ita eſt linea g ad duplam ipſius c d: & ut e d ad d f, ita k l ad l n: erit ut g ad duplam c d, ita k l ad l n. ſed ut k l ad l n, ita quadratum k l ad rectangulum k l m: & ut g ad duplam c d, ita rectãgulum, quod fit ex g & d l ad duplum rectanguli c d l. quare ut quadratum k l ad rectangulum k l n, ita rectangulum ex g & d l ad duplum ipſius c d l rectanguli: & permutando. eſt autem k l n rectangulum æquale duplo rectanguli c d l. ergo quadratũ k l rectangulo ex g & d l æquale erit.

35. huius

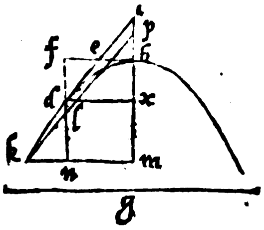
42. huius

8. lemm. pappi

4. ſexti

lemm. 22 decimi.

1. ſexti

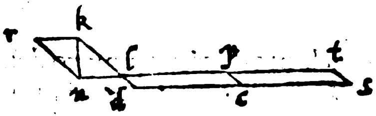


E V T O C I V S.

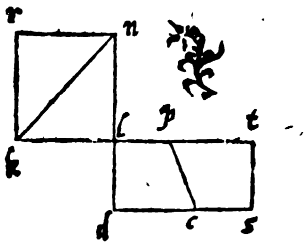
ERGO reliquum triangulum k l n parallelogrammo d l p c eſt æquale. angulus autem d l p æqualis eſt angulo k l n. quare rectangulũ k l n duplũ eſt rectanguli l d c] *Triangulum enim k l n ſeorſum deſcribatur: itemq; parallelogrammum d l p c. & quoniam triangulum k l n æquale eſt parallelogrammo d p, ducatur per n ipſi l k æquidiſtans, quæ ſit n r: & per k ducatur k r æquidiſtans l n. parallelogrammum igitur eſt l r, & duplum trianguli k l n. quare & parallelogrammi d p duplum. producantur d c, l p ad puncta s t: ponaturq; ipſi d c æqualis c s, & p t æqualis ipſi l p; & iungantur s t. ergo d t parallelogrammum eſt, duplum ipſius d p: & idcirco l r parallelogrammum æquale parallelogrammo l s. eſt autem & æquiangulum, quoniam anguli ad l ſecundum uerticem ſunt æquales. ſed æqualium, & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circa æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. ergo ut k l ad l t, hoc eſt ad d s, ita d l ad l n: proptereáq; rectangulum k l n æquale eſt rectangulo l d s. & cum d s dupla ſit ipſius d c, rectangulum k l n rectanguli l d c duplum erit.*

14. ſexti

16. ſexti.



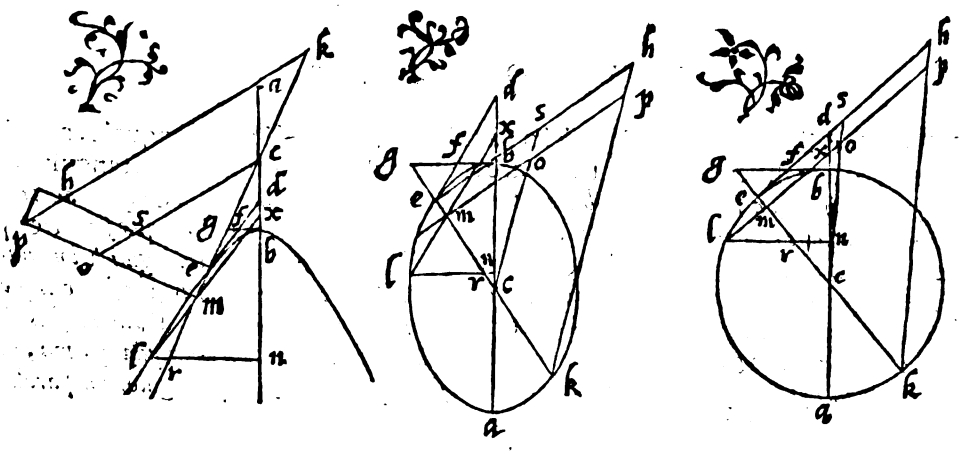
At ſi linea d c ipſi l p æquidiſtet, c p uero non æquidiſtet ipſi d l, erit d c p l trapezium, & tunc dico rectangulũ k l n æquale eſſe ei, quod linea d l, & utraque ipſarum c d, l p continetur. Si enim parallelogrammum l r compleatur, ſicuti prius: producanturq; d c, l p, ita ut ipſi l p æqualis ponatur c s, & ipſi d c æqualis p t; & iungantur s t: fiet d t parallelogrammum duplum ipſius d p: & eadem erit demonſtratio. Hoc autem utile eſt etiam ad ea, quæ ſequuntur.



THEOREMA L. PROPOSITIO L.

SI hyperbolen, uel ellipſim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat; & per tactum & centrum linea producatur: à uertice autem ordinatim applicata conueniat cum ea, quæ ducitur per tactum & centrum: fiatq; ut portio contingentis inter tactum & applicatam interiecta, ad portionem lineæ ductæ per tactum & centrum, quæ itidem inter tactum & applicatam interiicitur, ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ à ſectione ducitur contingenti æquidiſtans ad lineam per tactum & centrum ductam, poterit ſpatium rectangulum, quod adiacet inuentæ lineæ, latitudinem habens interiectam inter ipſam & tactum; in hyperbola quidem excedens figura ſimili contentæ linea dupla eius, quæ eſt inter centrum, & tactum, & inuenta linea; in ellipſi uero & circulo eadem deficiens.

SIT hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b, centrũ c: & linea d e ſectionem contingat. iuncta uero c e producatur ad utraſq; partes: ponaturq; c k ipſi e c æqualis: & per b ordinatim applicetur b f g: deinde per e ad rectos angulos ipſi e c ducatur e h: fiatq; ut f e ad e g, ita e h ad duplam ipſius e d: &



iuncta h k producatur: ſumpto denique in ſectione puncto l, per ipſum ducatur l m x quidem ipſi e d æquidiſtans; l r n uero æquidiſtans b g; & ipſi e h æquidiſtans m p. Dico quadratum l m rectangulo e m p æquale eſſe. ducatur enim per c linea c s o æquidiſtans k p. Itaque quoniam e c æqualis eſt ipſi c k; & ut e c ad c k, ita e s ad s h; erit

2. ſexti.

erit e s ipſi s h æqualis. & quoniam ut f e ad e g, ita h e ad duplam e d: atque eſt ipſius
e h dimidia e s: erit ut f e ad e g, ita s e ad e d. ut autẽ f e ad e g, ita l m ad m r. A
ergo ut l m ad m r, ita s e ad e d. ſed cum demonſtratum ſit triangulum r n c in hyperbola B
quidem maius eſſe, quàm triangulum c g b, hoc eſt triangulum c d e; in ellipſi C
uero & circulo minus, ipſo l n x triangulo communibus ablatis, in hyperbola ſcilicet
triangulo e c d, & n r m x quadrilatero, in ellipſi autẽ & circulo, triangulo m x c:
erit l m r triangulum quadrilatero m e d x æquale. atque eſt m x æquidiſtans d e, &
angulus l m r æqualis angulo e m x. ergo rectangulum l m r æquale eſt rectangulo, D
quod linea e m, & utraque ipſarum e d, m x continetur, eſt autem ut m c ad c e, ita &
m x ad e d, & m o ad e s. ut igitur m o ad e s, ita m x ad e d: & componẽdo ut utraque
m o, s e ad e s, ita utraque m x, d e ad e d. quare permutando, ut utraque m o, s e
ad utramque m x, d e, ita s e ad e d. Sed ut utraque m o, s e ad utramque m x, d e, ita rectangulum, 1. ſexti
quod continetur utraque m o, s e, & ipſa e m, ad contentum utraq; m x,
d e & e m. Vt autem s e ad e d, ita f e ad e g, hoc eſt l m ad m r; uidelicet quadratum
l m ad rectangulum l m r. quare ut rectangulum contentum utraque m o, s e, & e m
ad contentum utraque m x, d e & e m, ita quadratum l m ad rectangulum l m r: &
permutando ut rectangulum contentum utraque m o, s e, & e m ad quadratum m l,
ita contentum utraque m x, d e, & e m ad l m r rectangulum. eſt autem rectangulum
l m r æquale rectangulo, quod fit ex e m, & utraque m x, d e. ergo quadratũ l m æquale
eſt rectangulo ex e m, & utraque m o, s e. eſtq; e s ipſi s h æqualis, & s h ipſi o p. quadratum
igitur l m rectangulo e m p æquale erit.

EVTOCIVS.

CASVS *huius theorematis ita ſe habent, ut in quadrageſimo tertio, & ita caſus theorematis quinquageſimi primi.*

FED. COMMANDINVS.

VT autem f e ad e g, ita l m ad m r.] *Ob ſimilitudinem triangulorum f e g, l m r. nam* A
cum æquidiſtent g f, l r, angulus g f e æqualis eſt angulo r l m; & angulus f g e angulo l r m. ergo 29. primi
& reliquus reliquo æqualis, & triangulum f e g triangulo l m r ſimile erit.

Sed cum demonſtratum ſit triãgulum r n c in hyperbola quidem maius eſſe, quàm B
triangulum c g b.] *Etenim in quadrageſimo tertio huius demonſtratum eſt triangulum x l n in hyperbola minus eſſe, quàm triangulum c r n, triangulo c g b; in ellipſi uero & circuli circumferentia unà cum ipſo c r n æquale eſſe triangulo c g b.*

Hoc eſt triangulum c d e.] *Triangulum enim c d e triangulo c g b æquale demonſtratum* C
eſt in 43. huius, uidelicet in ſecunda demonſtratione, quam affert Eutocius in commentarijs.

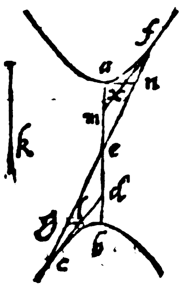
Ergo rectangulum l m r æquale eſt rectangulo, quod linea e m, & utraque ipſarum D
e d, m x continetur.] *Ex octauo lemmate Pappi, & ex ijs quæ Eutocius proxime demonſtrauit.*

Eſt autem ut m c ad c e, ita & m x ad e d, & m o ad e s.] *Ex quarta ſexti, ſunt enim* E
triangula c e d, c m x ſimilia: itemq; ſimilia inter ſe triangula c m o, c e s.

THEOREMA LI. PROPOSITIO LI.

SI quamlibet oppoſitarum ſectionum recta linea contingens cum diametro conueniat; & per tactum & centrum linea producatur uſque ad alteram ſectionem: à uertice uero ducatur linea æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt; conueniensq; cum linea per tactum, & centrum ducta: & fiat ut portio contingentis inter applicatam & tactum ad portionem lineæ ductæ per tactum, & centrum, quæ inter tactum & applicatam interiicitur, ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ in altera ſectione ducitur æquidiſtans contingenti, ad lineam per tactũ & centrum ductam, poterit rectangulum, quod adiacet inuentæ lineæ, latitudinem habens, lineam, quæ eſt inter ipſam & tactum; excedensq́; figura ſimili ei, quæ linea inter oppoſitas ſectiones interiecta & inuenta continetur.

SINT oppoſitæ ſectiones, quarum diameter a b, centrum e: & linea c d ſectionē
b contingat: iunctaq́; c e producatur: ordinatim uero applicetur b l g: & fiat ut l c ad
50.huius c g, ſic quædam recta linea k ad duplam c d. itaque perſpicuum eſt in ſectione b c li-
neas æquidiſtantes c d, quæ ducuntur ad lineam in directum ipſi e c productam, poſ-
ſe ſpatia adiacentia lineæ k; latitudinemq́; habentia lineam, quæ eſt inter ipſas & ta-
ctum, & excedentia figura ſimili contentæ linea c f & k: dupla eſt enim f c ipſius c e.
Dico igitur idem euenire in ſectione a f. Ducatur per f linea m f, quæ a f ſectionem
contingat: ordinatimq́; applicetur a x n. & quoniam oppoſitæ ſectiones ſunt b c, a f:
atque ipſas contingunt c d, m f; erit c d ipſi m f æqualis, & æqui-
uide Eut. in 44.huius diſtans. eſt autem c e æqualis e f. ergo & e d ipſi e m. Sed quoniã
ut l c ad c g, ita linea k ad duplam c d, hoc eſt m f; erit ut x f ad
f n, ita k ad duplam m f. atque eſt hyperbole a f, cuius diameter
a b: & m f ipſam contingit: ordinatim uero applicata eſt a n: &
50.huius ut x f ad f n, ita k ad duplam m f. ergo quæcunque à ſectione du
cuntur æquidiſtantes f m ad lineam, quæ in directum protendi-
tur ipſi e f, poterunt rectangulum contentum linea k, & interie-
cta inter ipſas & punctum f, excedensq́; figura ſimili ei, quæ linea
c f & k continetur.



46.huius Itaque his demonſtratis perſpicuum eſt in parabola
unamquamque rectarum linearum, quæ diametro ex generatione du-
47.huius cuntur æquidiſtantes, diametrum eſſe: in hyperbola uero, ellipſi & op-
48 poſitis ſectionibus unamquamque earum, quæ per centrum ducuntur.
49.huius Et in parabola quidem applicatas ad unamquamque diametrum, æquidi
50 ſtantes contingentibus, poſſe rectangula ipſi adiacentia: in hyperbola &
51 oppoſitis poſſe rectangula adiacentia ipſi, quæ excedunt eadem figura:
50 in ellipſi autem quæ eadem deficiunt. poſtremo quæcunque circa ſe-
ctiones adhibitis principalibus diametris demonſtrata ſunt, & aliis dia-
metris aſſumptis eadem contingere.

EVTOCIVS.

DIAMETRVM ex generatione uocat communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli per axem, quæ in ipſo cono efficitur; quam & principalem diametrum appellat. Dicit autem omnia accidentia ſectionum, quæ in ſuperioribus theorematibus demonſtrata ſunt, poſitis principalibus diametris, & alijs quibuſcunque diametris aſſumptis eadem contingere poſſe.

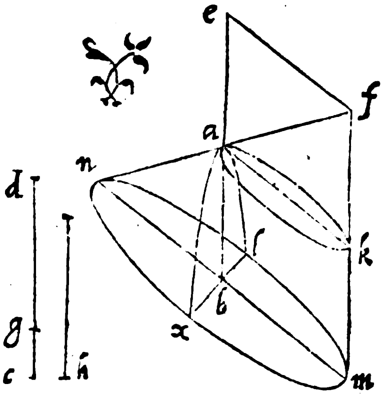
PROBLEMA I. PROPOSITIO LII.

Recta linea data in plano, ad unum punctum terminata, inuenire in plano coni ſectionem, quæ parabole appellatur, ita ut eius diameter ſit data linea; uertex, lineæ terminus; quæ uero à ſectione ad diametrum

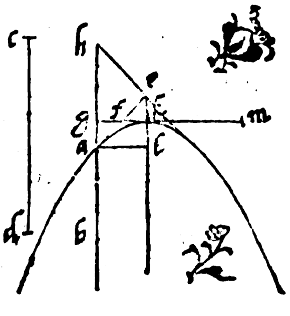
in dato

in dato angulo applicatur, poſſit rectangulum contentum linea, quæ eſt inter ipſam & uerticem ſectionis, & altera quadam data linea.

SIT recta linea data poſitione a b, ad a punctum terminata; altera autem magnitudine
data c d: & datus angulus primum ſit rectus. Itaque oportet in ſubiecto plano
inuenire parabolen, ita ut eius diameter ſit a b; & uertex a: rectum autem figuræ latus
c d: & ordinatim ductæ in recto angulo applicentur: boc eſt ut a b ſit axis. producatur
a b ad e: ſumaturq́; ipſius c d quarta pars c g: & ſit a e maior, quàm c g ipſarũ
autem c d, e a media proportionalis ſit h. eſt igitur ut c d ad e a, ita quadratum h ad cor. 20. ſe
e a quadratum. ſed c d eſt minor, quàm quadrupla ipſius e a. ergo & quadratũ h quadrati xti
e a minus eſt, quàm quadruplum: & propterea linea h minor, quàm dupla ipſius
e a. Cum igitur duæ lineæ e a, maiores ſint, quam h, fieri poteſt ut ex h, & duabus 22. primi
e a triangulum conſtituatur. ergo in linea e a cõſtituatur triangulum e a f rectum ad
ſubiectum planum, ita ut e a æqualis ſit a f; & h æqualis f e: ducaturq́; a k æquidiſtãs
e f; & f k ipſi e a. Deinde intelligatur conus, cuius
uertex f punctum; baſis autem circulus circa
diametrum k a, rectus ad planum, quod per
lineas a f, f k tranſit. erit igitur is conus rectus,
quoniam a f æqualis eſt f k. Itaque ſecetur conus 4. huius
plano, quod circulo k a æquidiſtet; faciatq́;
ſectionem circulum m n x, rectum uidelicet ad
planum trãſiens per m f, f n: & ſit circuli m n x,
& m f n trianguli communis ſectio m n. quare
m n circuli diameter eſt. cõmunis autem ſectio
plani ſubiecti, & circuli ſit x l. Quoniam igitur
circulus m n x rectus eſt & ad ſubiectum planũ,
& ad triangulum m f n: communis ipſorum ſectio 19. undecimi
x l ad m n f triangulum, hoc eſt ad k f a perpendicularis 3. diff. undecimi
erit. quare & ad omnes rectas lineas; quæ in triangulo ipſam contingunt; & ad utramque ipſarum m n, a b. Rurſus
quoniam conus baſim habens circulum m n x, uerticem uero punctum f, ſecatur plano
ad m f n triangulum recto, quod ſectionem facit circulum m n x; & ſecatur altero
plano ſubiecto, ſecante baſim coni ſecundum rectam lineam x l, perpendicularem ad
m n, quæ communis ſectio eſt circuli m n x, & m f n trianguli: communis autem ſectio
ſubiecti plani, & trianguli m f n, uidelicet a b, æquidiſtans eſt lateri coni f k m: erit coni 11. huius
ſectio in ſubiecto plano facta, parabole; cuius diameter a b: & lineæ à ſectione ad
ipſam ab ordinatim ductæ in recto angulo applicabuntur: æquidiſtantes enim ſunt lineæ
x l, quæ eſt ad a b perpendicularis. Et quoniam tres lineæ c d h, e a proportionales
ſunt; æqualis autem e a ipſi a f, & ipſi f k: atque h æqualis e f, & a k: erit ut c d ad
a k, ita a k ad a f. quare ut c d ad a f, ita quadratum a k ad a f quadratum, hoc eſt ad 20. ſexti
id, quod a f k continetur. ergo rectum ſectionis latus eſt c d: illud enim in undecimo
theoremate demonſtratnm fuit.



Iiſdem poſitis non ſit datus angulus rectus: intelligaturq́; ipſi æqualis, qui h a e continetur: & ſit a h dimidia c d: ab h uero ducatur h e ad a e perpendicularis: perq́; e ipſi b h æquidiſtans ducatur e l: & ab a ad e l perpendicularis a l. deinde ſecta e l bifariam in k, ab ipſo k ducatur k m ad rectos angulos ipſi e l: & ad puncta f g producatur: & quadrato a l æquale ſit rectangulum l k m. Itaque duabus rectis lineis l k, k m datis; l k quidem poſitione, quæ ad k terminatur; k m uero magnitudine: & dato angulo recto, deſcribatur parabole, ut dictum eſt, cuius diameter k l, uertex k, & rectum latus k m. tranſibit autem
per a, propterea quod quadratum a l rectangulo l k m eſt æquale: & linea a e ſectio- 33. huius

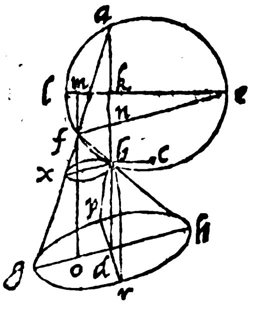


46.huius nem continget,quoniam l k æqualis eſt k e. ſed h a æquidiſtat e k l. ergo h a b diameter
erit ſectionis : & à ſectione ad eam applicatæ ipſi a e æquidiſtantes bifariam diuidentur
à linea a b:& in angulo h a e applicabuntur. quoniam igitur angulus a e h æqualis
eſt angulo a g f, & communis qui ad a; triangulum a h e ſimile eſt a g f triangulo.
4.ſexti. ut ergo h a ad a e,ita f a ad a g: & ideo ut dupla h a ad duplam a e, ita f a ad
15.quinti a g.ſed cum c d ſit dupla ipſius h a,erit ut f a ad a g,ita c d ad duplam a e. quare per
ea,quæ in 49. theoremate oſtenſa ſunt,erit c d rectum ſectionis latus.

PROLEMA II. IROPOSITIO LIII.

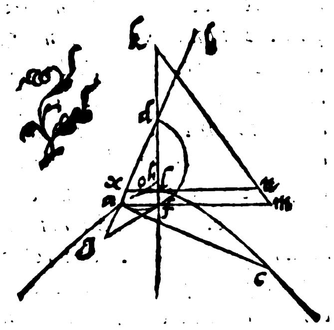
Datis duabus rectis lineis terminatis, quæ ad rectos inter ſe angulos
A conſtituantur : & altera producta ad eaſdem partes angulo recto, inuenire
in linea producta coni ſectionem,quæ hyperbole dicitur,in eodem
plano,in quo ſunt datæ lineæ; ita ut producta ſit diameter ſectionis, &
uertex punctum,quod ad angulum cõſiſtit : quæ uero à ſectione ad diametrum
applicatur,angulum faciens æqualem dato, poſſit rectangulũ,
quod adiacet alteri lineæ, latitudinem habens lineam interiectam inter
applicatam & uerticem ſectionis; excedenſq; figura ſimili, & ſimiliter
poſita ei,quæ datis à principio lineis continetur.

SINT datæ rectæ lineæ terminatæ a b,b c,ad rectos inter ſe angulos: & producatur
a b ad d. oportet igitur in plano,quod per a b c tranſit,inuenire hyperbolen,ita
ut eius diameter ſit a b d,uertex b punctum,& rectum figuræ latus b c.quæ uero à ſectione
ad b d in dato angulo applicentur,poſſint rectangula adiacentia ipſi b c,quæ
latitudines habeant lineas interiectas inter ipſas,& punctum b : excedantq; figura ſimili,&
ſimiliter poſita ei,quæ lineis a b,b c continetur. ſit datus angulus primum rectus;
B & ex linea a b planum attollatur,rectum ad ſubiectum planum, in quo circa lineã
a b circulus deſcribatur a e b f; ita ut pars diametri circuli, quæ in portione a e b
comprehenditur ad partem comprehenſam in portione a f b, non maiorem proportionem
habeat,quàm a b ad b c.& ſecetur a e b circumſerentia bifariam in e : ducaturq;
1.tertii à puncto e ad a b perpendicularis e k : & ad l producatur. ergo e l diameter
eſt circuli.Quod ſi ut a b ad b c,ita fuerit e k ad k l, utemur puncto l; ſin minus fiat
ut a b ad b c,ita e k ad minorem ipſa k l, quæ ſit k m : & per m ducatur m f æquidiſtans
27 tertii. a b:iunctiſq; a f,e f,f b,per b ducatur b x ipſi f e æquidiſtans. Itaque quoniam
29.primi. angulus a f e æqualis eſt angulo e f b : angulus autem a f e angulo
a x b;& e f b ipſi f b x:erit & f b x angulus angulo f x b æqualis.
6.primi. quare & linea f b æqualis lineæ f x. intelligatur conus,
cuius uertex f,& baſis circulus circa diametrum b x,rectus ad
f b x triangulum. erit utique is conus rectus,quia f b æqualis
eſt f x.producãtur f b,f x,m f: & ſecetur conus plano, quod circulo
b x æquidiſtet. erit ea ſectio circulus, qui ſit g p h r. ergo
g h circuli diameter eſt. communis autem ſectio circuli g h,&
ſubiecti plani ſit p d r. erit p d r ad utranque ipſarum g h, d b
perpendicularis. uterque enim circulorum x b, h g rectus eſt
ad triangulum f g h. ſed & ſubiectum planum ad f g h rectum
19.undecimi eſt.ergo communis ipſorum ſectio p d r,erit & ad f g h perpendicularis, & ad omnes
rectas lineas,quæ in eo plano conſiſtentes, ipſam contingunt. Quoniam igitur conus,
cuius baſis eſt circulus g h,& uertex f, ſecatur plano ad f g h triangulum recto;
quod facit ſectionem circulum; ſecatur autem, & altero plano ſubiecto, ſecante baſim
coni ſecundum rectam lineam p d r,perpendicularem ad g d h : & communis ſectio
ſubiecti plani,& trianguli f g h;uidelicet d b producta ad b conuenit cum g f in
[illegible].huius puncto a : erit ex iis,quæ demonſtrata ſunt,ſectio p b r hyperbole,cuius uertex b : &
ordi-



ordinatim ductæ ad diametrum b d in recto angulo applicabuntur. æquidiſtantes
etenim ſunt ipſi p d r. præterea quoniam ut a b ad b c, ita eſt e k ad k m: & ut e k ad 2. ſexti
k m, ita e n ad n f, hoc eſt rectangulum e n f ad n f quadratum: erit ut a b ad b c, ita lem. in 22 decimi
e n f rectangulum ad quadratum n f. ſed e n f rectangulũ æquale eſt rectangulo a n b, 35. tertii
ergo ut a b ad b c, ita rectangulum a n b ad n f quadratum. rectangulum autem a n b 23. ſexti
ad n f quadratum proportionem habet compoſitam ex proportione a n ad n f: & ex
proportione b n ad n f. ſed ut a n ad n f, ita a d ad d g, & f o ad o g: & ut b n ad n f, 4. ſexti
ita f o ad o h. quare a b ad b c proportionem compoſitam habet ex proportione f o
ad o g, & ex proportione f o ad o h: hoc eſt ex proportione quadrati f o ad rectangulum 23. ſexti
g o h. eſt igitur ut a b ad b c, ita quadratum f o ad g o h rectangulum. atque C
eſt f o æquidiſtans a d. Sequitur ergo, ut a b ſit tranſuerſum figuræ latus, & b c rectum:
etenim hæc in duodecimo theoremate oſtenſa ſunt.

Non ſit autem datus angulus rectus: ſintq; rectæ lineæ datæ a b, a c: & datus angulus
æqualis ſit ei, qui b a h continetur. oportet igitur deſcribere hyperbolen, ita ut
eius diameter ſit a b, & rectũ latus a c: ductæ uero ad diametrum in angulo b a h applicentur.
ſecetur a b bifariam in d: & in linea a d deſcribatur ſemicirculus a f d: & ducatur D
quædam recta linea f g in ſemicirculum, æquidiſtans a h; faciensq; proportionem E
quadrati f g ad rectangulum d g a eandem, quam habet c a ad duplam a d: & iuncta
f h d producatur. ipſarum autem f d, d h media proportionalis ſit d l: ponaturq;
ipſi l d æqualis d k; & quadrato a f æquale rectangulum l f m: & iungatur k m. deinde
per l ad rectos angulos ipſi x f ducatur l n. & ad x producatur. datis ergo duabus rectis
lineis terminatis, & ad rectos inter ſe angulos, k l, l n deſcribatur hyperbole, cuius
tranſuerſum quidem latus ſit x l; rectum uero l n; & à ſectione ad diametrum ductæ
in recto angulo applicentur, & poſſint rectangula adiacentia lineæ l n, quæ latitudines
habeant interiectas inter ipſas & punctum l, excedantq; figura ſimili ipſi x l n.
tranſibit igitur ſectio per a, cum quadratum a f æquale ſit rectãgulo l f m: & linea a h F
ſectionem continget; rectangulum enim f d h quadrato
d l eſt æquale. ergo a b diameter eſt ſectionis. Et quoniã 47. huius
ut c a ad duplam a d, hoc eſt ad a b, ita quadratum f g ad
rectangulum d g a: ſed c a ad duplam a d compoſitam
proportionem habet ex proportione c a ad duplam a h, 15. quinti
& ex proportione duplæ a h ad duplã d a, hoc eſt ex proportione 4. ſexti
h a ad a d, hoc eſt f g ad g d: habebit c a ad a b
proportionem compoſitam ex proportione c a ad duplam
a h, & ex proportione f g ad g d. habet autem &
quadratum f g ad rectangulum d g a proportionem cõpoſitam
ex proportione f g ad g d, & ex proportione f g
ad g a. proportio igitur compoſita ex proportione c a

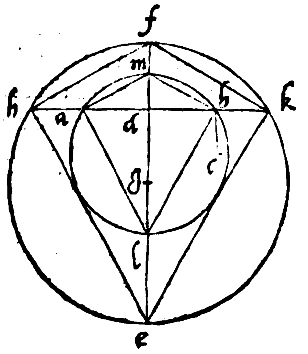


ad duplam a h, & ex proportione f g ad g d eadem eſt, quæ proportio compoſita ex
proportione f g ad g d, & ex proportione f g ad g a. Communis auferatur proportio,
quæ eſt f g ad g d. ergo ut c a ad duplam a h, ita f g ad g a. & ut f g ad g a, ita o a 4. ſexti
ad a x. ut igitur c a ad duplam a h, ita o a ad a x. Quod cum ita ſit, erit a c linea, iuxta
quam poſſunt, quæ à ſectione ducuntur: hoc enim in quinquageſimo theoremate demonſtratum
eſt.

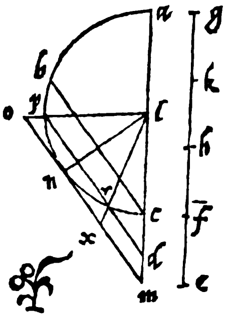
EVTOCIVS.

ET ex linea a b planum attollatur, rectum ad ſubiectum planum, in quo circa lineã B
a b circulus deſcribatur a e b f, ita ut pars diametri circuli, quæ in portione a e b
comprehenditur ad partem comprehenſam in portione a f b, non maiorem proportionem
habeat, quàm a b ad b c.] *Sint duæ rectæ lineæ a b, b c; & oporteat circa a b circulum
deſcribere, cuius diameter à linea a b ita diuidatur, ut pars ipſius, quæ eſt ad e ad reliquã partem
non maiorem proportionem habeat, quàm a b ad b c. ponatur nunc eandem habere: ſeceturq;
a b biſariam in d: & per d ad rectos angulos ipſi a b, ducatur e d f: & fiat ut a b ad b c, ita e d,
ad d f: atque e f biſariam ſecetur. conſtat ergo, ſi quidem a b ſit æqualis b c; & e d ipſi d f æqualẽ*

eſſe: & ideo punctum d lineam e f bifariam ſecare: ſi uero a b ſit maior b c, & e d ipſa d f, punctũ quod bifariam lineam e f ſecat, infra d cadet: & ſi minor ſit, cadet ſupra. ſed infra cadat ut g: & centro quidem g; interuallo autem g f circulus deſcribatur. neceſſarium utique eſt eum, uel per puncta a b tranſire, uel extra, uel intra. & ſi tranſeat per a b, factum iam erit, quod oportebat. ſi uero trãſeat extra, producatur a b in utranque partem, ut conueniat cum circumferentia circuli in punctis h k: iunctiſq; f h, h e, e k, k f; ducatur per b linea m b, æquidiſtans f k: & b l æquidiſtans k e. & iungantur m a, a l, quæ ipſis f h, h e æquidiſtabunt, propterea quod æquales inter ſe ſint a d, d b: itemq; h d, 31. tertii. d k, & e d f ad rectos angulos ipſi h k. Quoniam igitur angulus, qui ad k rectus eſt: & m b, b l æquidiſtãt ipſis f k, k e: 29. quinti erit & qui ad b rectus. & eadem ratione, qui ad a. quare circulus circa m l deſcriptus per puncta a b tranſibit. Itaque deſcribatur, ſitq; m a l b. & quoniam 4. ſexti. m b æquidiſtans eſt ipſi f k, erit ut f d ad d m, ita k d ad d b: & ſimiliter ut k d ad d b, ita e d ad d l: & permutando, ut e d ad d f, ita l d ad d m. ergo ut a b ad b c, ita l d ad d m. Quod ſi circulus circa f e deſcriptus ſecet lineam a b, idem nihilominus demonſtrabitur.



D Et in linea a d deſcribatur ſemicirculus a f d, & ducatur quædam recta linea f g in ſemicirculum, æquidiſtans a h; facienſq; proportionem quadrati f g ad rectangulum d g a eandem, quam habet c a ad duplam a d.] *Sit ſemicirculus a b c circa diametrum a c: data autem proportio ſit e f ad f g: & oporteat facere ea, quæ propoſita ſunt. ponatur ipſi e f æqualis f h: & h g in puncto k bifariam diuidatur: ducaturq; in ſemicirculo quæpiam recta linea c b, in angulo a c b: & à centro l ad ipſam perpendicularis ducatur, quæ producta occurrat circuli cir-* 29. primi 16. tertij, *cumferentia in n: & per n ipſi c b æquidiſtans n m. ergo n m circulum contingit. Itaque fiat ut f h ad h k, ita m x ad x n: & ipſi x n æqualis ponatur n o. iungantur autem l x, l o, quæ ſemicirculum in punctis r p ſecent: & ducatur p r d. Quoniam igitur x n æqualis eſt n o, communiſq; & ad rectos angulos n l; erit l o ipſi l x æqualis. Sed l p eſt æqualis l r. ergo &* 2. ſexti. *reliqua p o reliquæ r x; & propterea p r d ipſi o m æquidiſtat. eſt autem ut f h ad h k, ita m x ad x n. & ut h k ad h g, ita x n ad x o. ex æquali igitur ut f h ad h g, ita m x ad x o: conuertendoq; ut g h ad h f, ita o x ad x m: & componendo ut g f ad f h, hoc eſt ad f e, ita o m ad m x: hoc eſt p d ad d r. ut autem p d ad d r, ita rectangulum p d r* 36. tertij. *ad d r quadratum. Sed rectangulum p d r æquale eſt rectangulo a d c. ergo ut g f ad f e, ita a d c rectangulum ad quadratum d r: & conuertendo ut e f ad f g, ita quadratum d r ad rectangulum a d c.*



FED. COMMANDINVS.

A Inuenire in linea producta coni ſectionem, quæ hyperbole dicitur.] *Græcus codex ita habet,* εὑρεῖν ἐπὶ τῆς προσεκβληθείσης κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολήν. *Sed uide ne uerba illa.* ἐπὶ τῆς προσεκβληθείσης, *ſuperuacanea ſint: ſtatim enim ſubiungit.* ὅπως ἡ μὲν προσεκβληθεῖσα διάμετρος εἴη τῆς τομῆς.

C Eſt igitur ut a b ad b c, ita quadratum f o ad g o h rectangulum.] *Ad hunc locum ut opinor, nonum Pappi lemma pertinet, in quo oſtenditur, ut quadratum f o ad rectangulum g o h, ita eſſe rectangulum a n b ad n f quadratum.*

E Facienſq; proportionem quadrati f g ad rectangulum d g a eandem, quam habet c a ad duplam a d.] *In græco codice legitur* ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ζη πρὸς τὸ ὑπὸ δηα λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αγ πρὸς αβ. *ſed legendum eſt, ut apud Eutocium.* τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αγ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αδ. *quod etiam ex ijs, quæ ſequuntur perſpicue apparet.*

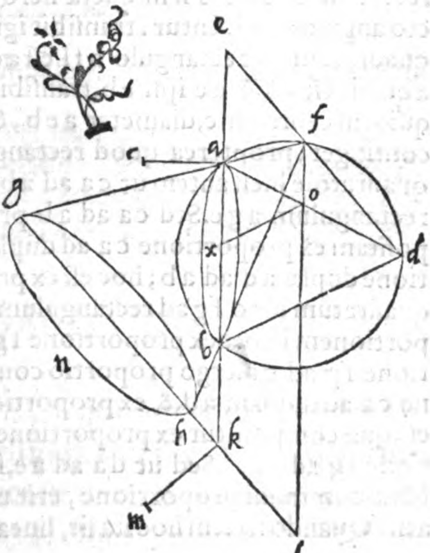
F Et linea a h ſectionem continget: rectangulum enim f d h quadrato d l eſt æquale.] 17. ſexti *Nam cum inter lineas f d, d h proportionalis facta ſit d l, rectangulum f d h æquale eſt quadrato d l. quare ex ijs, quæ demonſtrauimus in commentarijs in trigeſimam ſeptimam propoſitionem huius, linea a h ſectionem ipſam contingat neceſſe eſt.*

PRO

PROBLEMA III. PROPOSITIO LIIII.

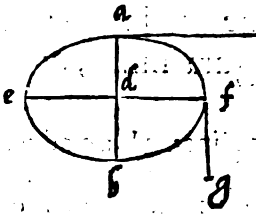
DATIS duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter ſe angulos, inuenire circa diametrum alteram ipſarum, coni ſectionem, quæ ellipſis appellatur, in eodem plano, in quo ſunt datæ lineæ: ita ut uertex ſit punctum ad rectum angulum: & à ſectione ad diametrum applicatæ in angulo dato poſsint rectangula adiacentia alteri lineæ, quæ latitudinem habeant, lineam inter ipſas & uerticem ſectionis interiectam, deficiantq; figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ datis rectis lineis continetur.

Sint datæ rectæ lineæ a b, a c ad rectos angulos conſtitutæ, quarum maior a b. Ita-
que oportet in ſubiecto plano deſcribere ellipſim, ita ut eius diameter ſit a b, uertex
a, & rectum latus a c: ductæ uero à ſectione ad a b in dato angulo applicentur: & poſ-
ſint ſpatia adiacentia lineæ a c, quæ latitudines habeant, lineas interiectas inter ipſas,
& punctum a: deficiantq; figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ lineis b a, a c conti-
netur. Sit datus angulus primum rectus: & ex linea a b planum attollatur, rectum
ad ſubiectum planum; in quo ad a b circuli portio a d b deſcripta bifariam diuidatur
in d: & iungantur d a, d b: ponatur autem ipſi a c æqualis a x: & per x ducatur x o
æquidiſtans b d: & per o ipſa o f æquidiſtans a b: iunctaq; d f conueniat cum a b pro
ducta in puncto e. erit igitur ut b a ad a c, ita b a ad a x; hoc eſt d a ad a o, hoc eſt d e 7. quinti.
ad e f. deinde iungantur a f, f b, & producantur: ſumaturq; in f a quod uis punctum 4. ſexti
g: & per g ipſi d e æquidiſtans ducatur g l, quæ cum a b producta conueniat in k. de-
nique producatur f o: & conueniat cum g k in l. Quoniam igitur circumferentia a d
æqualis eſt ipſi d b; & angulus a b d angulo d f b æqualis erit. & quoniam angulus e f a 26. tertii
æqualis eſt duobus angulis f a d, f d a; atque eſt f a d angulus æqualis angulo f b d, & 32. primi
f d a ipſi f b a: erit angulus e f a æqualis angulo d b a, hoc eſt b f d. Sed cum d e æqui-
diſtet ipſi l g: & angulus e f a æqualis eſt angulo f g h: & d f b ipſi f h g. quare ſequitur, 29. primi.
ut f g h angulus angulo f h g ſit æqualis: & linea f g lineæ f h. Itaque circa g h deſcri- 6. primi
batur circulus g h n, rectus ad triangulum h g f: & intelligatur conus, cuius baſis cir-
culus g h n, & uertex punctum f. erit is conus rectus, quod g f æqualis ſit f h. & quo-
niam circulus g h n rectus eſt ad h g f planum: eſt autem & planum ſubiectum rectum
ad planum, quod per g h f tranſit: commu-
nis ipſorum ſectio ad planum per g h f per-
pendicularis erit. communis autem ſectio ſit 19. undecimi
linea κ m. ergo k m perpendicularis eſt ad
utramque ipſarum a κ, k g. Rurſus quoniam
conus, cuius baſis eſt circulus g h n, & uer-
tex f, ſecatur plano per axem, quod facit ſe-
ctionem triangulum g h f: ſecatur autem, &
altero plano per a κ, k m tranſeunte, quod eſt
ſubiectum planum, ſecundum rectam lineam
k m, perpendicularem ad g k: & planum occur-
rit ipſis g f, f h lateribus coni: erit facta ſectio 13. huius
ellipſis, cuius diameter a b. ductæ uero à ſectio
ne ad a b in recto angulo applicabuntur; ſunt
enim ipſi k m æquidiſtantes. & quoniam ut d e
ad e f, ita rectangulum d e f, hoc eſt b e a ad qua 16. tertii
dratum e f: rectangulum autem b e a ad quadra
tum e f compoſitam proportionem habet ex
proportione b e ad e f, & ex proportione a e
ad e f: utque b e ad e f, ita b k ad k h, hoc eſt f l 4. ſexti
ad l h: & ut a e ad e f, ita a k ad k g; hoc eſt f l ad

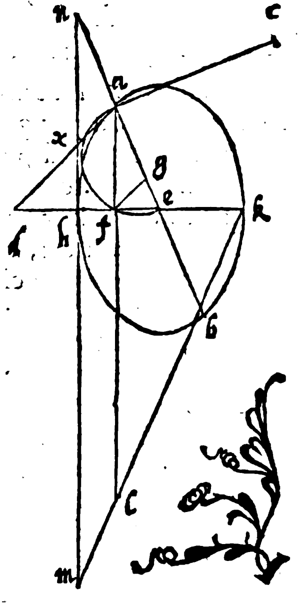


A l g: habebit b a ad a c proportionem compoſitam ex proportione f l ad l g; & ex pro
portione f l ad l h. quæ quidem proportio eadem eſt, quã habet quadratum f l ad g l h
rectangulum. ergo ut b a ad a c, ita f l quadratum ad rectangulum g l h. Quòd cum
ita ſit, linea a c rectum erit figuræ latus, ut oſtenſum eſt in 13. theoremate.

Iiſdem poſitis, ſit linea a b minor ipſa a c: & oporteat circa diametrum a b ellip-
ſim deſcribere, ita ut a c rectum ſit figuræ latus. Secetur a b bifariam in d; à quo ad
rectos angulos ipſi a b ducatur e d f: & rectangulo b a c æquale ſit quadratum f e: &
linea f d æqualis d e: lineæ uero a b æquidi-
ſtans ducatur f g: & fiat ut c a ad a b, ita e f
B ad f g. maior eſt igitur e f quàm f g. Itaque
quoniam rectangulum c a b æquale eſt qua-
drato e f, ut c a ad a b, ita eſt quadratum f e
15. quinti ad quadratum a b; & quadratum f d ad d a
quadratũ. ut autem c a ad a b, ita e f ad f g.
ergo ut e f ad f g, ita quadratum f d ad qua-
dratum d a. ſed quadratum f d æquale eſt rectangulo f d e. quare ut e f ad f g, ita re-
ctangulum e d f ad d a quadratum. Duabus igitur rectis lineis terminatis, aptatiſq;
ad rectos inter ſe angulos, quarum maior eſt e f, deſcribatur ellipſis, ita ut e f diame-
C ter ſit, & f g rectum figuræ latus. tranſibit utique ſectio per a, quoniam ut rectangu-
lum f d e ad quadratum d a, ita eſt e f ad f g: atque eſt a d æqualis d b. tranſibit igitur
etiam per b, ac propterea ellipſis circa a b deſcripta erit. & quoniam ut c a ad a b, ita
quadratum f d ad quadratum d a: atque eſt quadratum d a rectangulo a d b æquale:
D erit ut c a ad a b, ita d f quadratum ad rectangulum a d b. quare a c rectum eſt figu-
ræ latus.

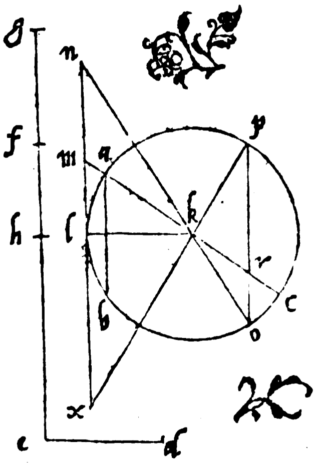


E Sed non ſit datus angulus rectus: ſitq; ipſi æqualis b a d: & ſecta a b bifariam in e,
circa lineam a e ſemicirculus a f e deſcribatur; in quo ipſi a d æquidiſtãs ducatur f g;
ita ut faciat proportionem quadrati f g ad rectangulum a g e eandem, quam habet li
nea c a ad a b: & iunctæ a f, e f producantur: & ſumatur ipſarum d e, e f media pro-
portionalis e h, cui æqualis ponatur e k. fiat autem qua-
drato a f æquale rectangulum h f l: iungaturq; k l: & per h
ipſi h f ad rectos angulos ducatur m h x, æquidiſtans ipſi
31. tertii a f l; rectus eſt enim angulus, qui ad f. Itaque datis duabus
rectis lineis terminatis, & ad rectos inter ſe angulos k h,
h m, deſcribatur ellipſis, cuius diameter tranſuerſa k h, &
rectum figuræ latus h m: ductæ uero à ſectione ad h k, in re
13. huius cto angulo applicentur. tranſibit igitur ſectio per a, quia
quadratum f a rectangulo h f l eſt æquale. Et quoniam h e
æqualis eſt e k, & a e ipſi e b, tranſibit & per b ſectio; cuius
F quidem centrum e, diameter a e b, & linea d a ſectionem
continget; propterea quod rectangulum d e f æquale eſt
quadrato e h. eſt autem ut c a ad a b, ita f g quadratum ad
rectangulum a g e. Sed c a ad a b proportionem habet cõ
poſitam ex proportione c a ad duplam a d, & ex propor-
tione duplæ a d ad a b; hoc eſt ex proportione d a ad a e.
quadratum uero f g ad rectangulum a g e compoſitã pro-
portionem habet ex proportione f g ad g e, & ex propor-
tione f g ad g a. ergo proportio compoſita ex proportio-
ne c a ad duplam a d, & ex proportione d a ad a e, eadem
eſt, quæ componitur ex proportione f g ad g e, & propor-
4. ſexti tione f g ad g a. Sed ut d a ad a e, ita f g ad g e. ergo ſu-
blata communi proportione, erit ut c a ad duplam a d, ita f g ad g a; hoc eſt x a ad
G a n. Quando autem hoc ita ſit, linea a c rectum eſt figuræ latus.



EVTOCIVS.

Et ſecta a b bifariam in e, circa lineam a e ſemicirculus a f e deſcribatur, in quo ipſi a d æquidiſtans ducatur f g, ita ut faciat proportionem quadrati f g ad rectangulum a g e eandem, quam habet linea c a ad a b.] *Sit ſemicirculus a b c, in quo recta linea quæpiam a b: ponáturq; duæ rectæ lineæ inæquales d c, e f: & producatur e f ad g, ut ſit f g æqualis d e: & e g in h bifariam diuidatur. Sumpto autem circuli centro* k, *ab eo ducatur perpendicularis ad a b, quæ circumferentiæ circuli occurrat in l: perq; l ipſi a b æquidiſtans ducatur l m: &* k *a producta conueniat cum l m in puncto m. deinde fiat ut h f ad f g, ita l m ad m n: atque ipſi l n æqualis ſit l x: & iunctæ n* k, k *x producantur adeo, ut à completo circulo ſecentur in punctis o p: & iungatur o r p. Quoniam igitur ut h f ad f g, ita eſt l m ad m n; componendo erit ut h g ad g f, ita l n ad n m: & conuertendo ut f g ad g h, ita m n ad n l. ut autem f g ad g e, ita m n ad n x: & diuidendo ut g f ad f e, ita n m ad m x. quòd cum n l æqualis ſit l x, communiſq; & ad rectos angulos l* k; *erit &* k *n æqualis* k *x. & eſt* k *o ipſi* k *p æqualis. æquidiſtans igitur eſt n x ipſi o p: atque ob id triangulum* k *m n ſimile triangulo* k *r o: & triangulum* k *m x ipſi* k *r p. ergo ut* k *m ad* k *r, ita m n ad r o. Sed ut* k *m ad* k *r, ita m x ad p r. quare ut m n ad r o, ita m x ad p r: & permutando ut n m ad m x, ita o r ad r p. ut autem n m ad m x, ita g f ad f e, hoc eſt d e ad e f: & ut o r ad r p, ita quadratum o r ad rectangulum o r p. ergo ut d e ad e f, ita o r quadratum ad rectangulum o r p. atque eſt rectangulum o r p rectangulo a r c æquale, ut igitur d e ad e f, ita quadratum o r ad rectangulum a r c.* 35.tertii



FED. COMMANDINVS.

A Habebit b a ad a c proportionem compoſitam.] *Superius namq; demoſtratum eſt b a ad a c ita eſſe, ut d e ad e f.*

B Itaque quoniam rectangulum c a b æquale eſt quadrato e f, ut c a ad a b, ita eſt quadratum f e ad quadratum a b.] *Cum enim rectangulum c a b quadrato e f ſit æquale, erit ut c a ad e f, ita e f ad a b. quare ut c a ad a b, ita quadratum c a ad quadratum e f, hoc eſt quadratum e f ad a b quadratum.* 14.ſexti cor.20. ſexti

C Tranſibit utique ſectio per a, quoniam ut rectangulum f d e ad quadratum d a, ita eſt e f ad f g.] *Ex uigeſima prima propoſitione huius.*

D Quare a c rectum eſt figuræ latus.] *Ex eadem uigeſima prima.*

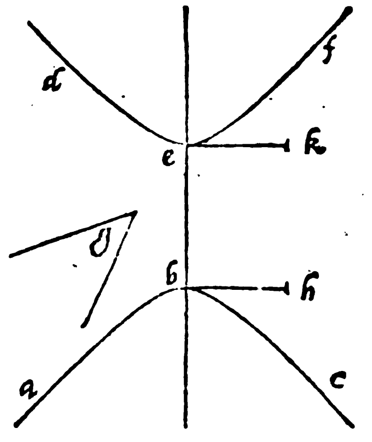
F Et linea d a ſectionem continget, propterea quod rectangulum d e f æquale eſt quadrato e h.] *Ex ijs, quæ nos demóſtrauimus in trigeſimam octauam propoſitionem huius libri.*

G Quando autem hoc ita ſit, linea a c rectum eſt figuræ latus.] *Ex quinquageſima propoſitione huius.*

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO LV.

Datis duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter ſe angulos; inuenire oppoſitas ſectiones, quarum diameter ſit una datarum linearum; & uertices lineæ termini: applicatæ uero ab utraque ſectione in dato angulo poſſint ſpatia adiacentia alteri lineæ, excedentiaq; figura ſimili ei, quæ datis lineis continetur.

Sint datæ rectæ lineæ terminatæ ad rectos inter ſe angulos b e, b h: & datus angulus ſit g. oportet utique circa unam linearum b e, b h ſectiones oppoſitas deſcribere; ita ut ductæ à ſectione lineæ in angulo g applicentur. Datis igitur duabus rectis lineis b e, b h deſcribatur hyperbole a b c, cuius diameter tranſuerſa ſit b e; & rectum figuræ latus h b: ductæ uero ad lineam, quæ in directum ipſi b e conſtituitur, applicentur in angulo g; quod quomodo fieri oporteat, iam dictum eſt. Ducatur per e linea e k ad rectos angulos ipſi b e, quæ ſit æqualis b h: & deſcribatur ſimiliter alia hyperbole d e f; ita ut eius diameter ſit b e, rectum figuræ latus e k; & ductæ à ſectione ordinatim applicentur in angulo, qui deinceps eſt ipſi g. conſtat igitur b e ſectiones eſſe oppoſitas, quarum diameter eſt una: duo uero recta latera inter ſe æqualia.



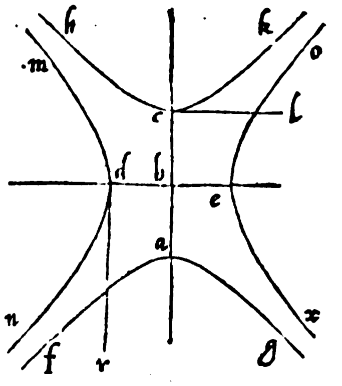
PROBLEMA V. PROPOSITIO LVI.

DATIS duabus rectis lineis, ſe ſe bifariam ſecantibus, circa utramque ipſarum ſectiones oppoſitas deſcribere, ita ut rectæ lineæ ſint coniugatæ diametri: & quarumlibet oppoſitarum ſectionum diameter poſſit figuram aliarum oppoſitarum.

55. huius

diff. ſec. diamet.

Sint datæ rectæ lineæ bifariam ſe inuicem ſecantes a c, d e. oportet iam circa utramque ipſarum diametrum oppoſitas ſectiones deſcribere, ita ut a c, d e coniugatæ ſint in ipſis: & d e quidem poſsit figuram earum, quæ circa a c ſnnt: a c uero figuram earum poſsit, quæ circa d e. Sit quadrato d e æquale rectangulum a c l: ſitq; l c ipſi c a ad rectos angulos: & duabus datis rectis lineis, ad rectos inter ſe angulos conſtitutis, a c, c l deſcribantur oppoſitæ ſectiones f a g, h c k, quarum diameter tranſuerſa ſit c a, & rectum latus c l: ductæ autem à ſectionibus ad c a in dato angulo applicentur. erit ipſa d e ſecunda diameter oppoſitarum ſectionum, quod mediam proportionem habeat inter latera figuræ: & ordinatim applicatæ æquidiſtans ad b bifariam ſecetur. Sit rurſus quadrato a c æquale rectangulum e d r: & ſit r d ad rectos angulos ipſi d e. itaque datis duabus rectis lineis, ad rectos inter ſe angulos, e d, d r, ſectiones oppoſitæ, m d n, o e x deſcribantur, quarum tranſuerſa diameter d e, & d r rectum figuræ latus: ductæ uero à ſectionibus applicentur ad d e in dato angulo, linea a c ſecunda diameter erit ſectionum m d n, o e x. ergo a c lineas ipſi d e æquidiſtantes inter ſectiones f a g, h c k bifariam ſecat; d e uero æquidiſtantes ipſi a c, quod facere oportebat. uocentur autem huiuſmodi ſectiones coniugatæ.



EVTOCIVS.

SCRIPSIMVS *in commentarijs in decimum theorema, quod nam fuerit propoſitum Apollonio in primis tresdecim theorematibus: & in Commentarijs in ſextum decimun de tribus ſequentibus dictum eſt. At uero in ſeptimo decimo aſſerit Apollonius rectam lineam, quæ per uerticem ducitur, ordinatim applicatæ æquidiſtans, extra ſectionem cadere. In decimo octauo lineam, quæ utcunque contingenti æquidiſtans intra ſectionem ducitur, ipſam ſecare. In decimo nono lineam,*

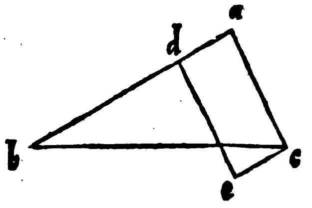
neam, quæ ducitur ab aliquo puncto diametri, ordinatim applicatæ æquidiſtans, cum ſectione conuenire. In uigeſimo, & uigeſimo primo lineas in ſectionibus ordinatim applicatas inquirit, quomodo inter ſeſe habeant: itemq; diametri portiones, quæ ab ipſis fiunt. In uigeſimo ſecundo, & uigeſimo tertio tractat de linea, quæ in duobus punctis ſectioni occurrit. In uigeſimo quarto, & uigeſimo quinto de ea, quæ ipſi occurrit in uno puncto tantum, hoc eſt de linea, quæ ſectionem contingit. In uigeſimo ſexto de ea, quæ diametro parabolæ, & hyperbolæ æquidiſtans ducitur. In uigeſimo ſeptimo de linea ſecante parabolæ diametrum, quippe quæ ex utraque parte ſectioni occurrat. In uigeſimo octauo de ea, quæ æquidiſtans ducitur contingenti unam oppoſitarum ſectionum. In uigeſimo nono de ea, quæ per centrum oppoſitarum ſectionum tranſiens producitur. In trigeſimo de linea tranſeunte per centrum ellipſis, & oppoſitarum ſectionum, quæ producta à centro bifariam diuiditur. In trigeſimo primo de linea hyperbolen contingente, quæ quidem diametrum ſecat inter centrum, & uerticem ſectionis. In 32.33.34.35.36. de lineis contingentibus agitur. In trigeſimo ſeptimo de contingentibus, & de ijs, quæ à tactu applicantur in hyperbola & ellipſi. In trigeſimo octauo de contingentibus hyperbolen, & ellipſim, quo pacto ſe habeant ad ſecundam diametrum. In trigeſimo nono & quadrageſimo de ijſdem agit, compoſitas ex his proportiones inquirens. In quadrageſimo primo de parallelogrammis deſcriptis ab applicata, & ea, quæ ex centro hyperbolæ & ellipſis. In quadrageſimo ſecundo aſſerit triangulum in parabola ex contingente, & applicata factum æquale eſſe ei parallelogrammo, quod cum æqualem altitudinem habeat, in dimidia baſi conſtituitur. In quadrageſimo tertio inquirit in hyperbola & ellipſi, quomodo ſe habeant inter ſeſe triangula, quæ à contingentibus & applicatis fiunt. In quadrageſimo quarto idem inquirit in oppoſitis ſectionibus. In quadrageſimo quinto itidem in ſecunda diametro hyperbolæ & ellipſis. In quadrageſimo ſexto de alijs parabolæ diametris, quæ ſunt poſt diametrum principalem. In quadrageſimo ſeptimo de alijs diametris hyperbolæ & ellipſis. In quadrageſimo octauo de alijs diametris oppoſitarum ſectionum. In quadrageſimo nono de lineis, iuxta quas poſſunt applicatæ ad alias parabolæ diametros. In quinquageſimo de ijſdem in hyperbola, & ellipſi. In quinquageſimo primo de ijſdem in oppoſitis ſectionibus. Itaque cum hæc ſcripſiſſet, addidiſſetq; epilogum quendam, in quinquageſimo ſecundo problema illud oſtendit; quomodo parabole in plano deſcribatur. In quinquageſimo tertio quomodo deſcribatur hyperbole. In quinquageſimo quarto, quomodo ellipſis. In quinquageſimo quinto, quomodo oppoſitæ ſectiones. In quinquageſimo ſexto, quomodo deſcribantur oppoſitæ ſectiones illæ, quas coniugatas appellamus.

PRIMI LIBRI FINIS.

PAPPI ALEXANDRINI LEMMATA IN SECVNDVM LIBRVM CONICORVM APOLLONII.

LEMMA PRIMVM.

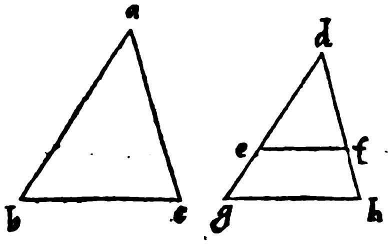
DATIS duabus rectis lineis a b, b c, & data recta d e: in ipſas a b, b c coaptare lineam, ipſi d e æqualem, & æquidiſtantem.



Hoc autem manifeſtum eſt. nam ſi per e ducatur e c æquidiſtans a b; & per c ipſi d e æqui diſtans ducatur c a, erit a c e d
34. primi parallelogrammum: & propterea a c ipſi d e & æqualis, & æquidiſtans; quæ quidem in datas rectas lineas a b, b c coaptata erit.

LEMMA II.

Sint duo triangula a b c, d e f: ſitq; ut a b ad b c, ita d e ad e f: & a b quidem ſit æquidiſtans d e; b c uero ipſi e f. Dico & a c ipſi d f æquidiſtantem eſſe.



Producatur enim b c; & conueniat cum d e,
29. primi. d f in punctis g h. eſt igitur angulus e æqualis
angulo g, hoc eſt ipſi b; propterea quod duæ li-
neæ a b, b c duabus d e, e f æquidiſtant. Itaque
quoniam ut a b ad b c, ita eſt d e ad e f: & an-
6. ſexti. guli ad b e ſunt æquales; erit angulus c æqua-
28. primi lis angulo f, hoc eſt angulo h. ergo linea a c ipſi
d h eſt æquidiſtans.

LEMMA III.

Sit recta linea a b: ſintq; æquales a c, d b: & inter c d ſumatur quoduis punctum e. Dico rectangulum a d b unà cum rectangulo c e d æquale eſſe rectangulo a e b.

Secetur enim c d bifariam in f, quomodocunque ſe habeat ad e punctum. & quo-
5. ſecũdi. niam rectangulum a d b unà cum quadrato f d æquale eſt quadrato f b: quadrato au-
tem f d rectangulum c e d unà cum quadrato f e eſt æqua
le: & quadrato f b æquale rectangulum a e b unà cum
quadrato f e: erit rectangulum a d b unà cum rectangulo
c e d, & quadrato f e æquale rectangulo a e b & quadrato
f e. commune auferatur quadratum f e. reliquum igitur
a d b rectangulum unà cum rectangulo c e d æquale eſt rectangulo a e b.

LEMMA IIII.

Sit recta linea a b: & æquales ſint a c, d b; & inter c d quoduis punctum e ſumatur. Dico rectangulum a e b æquale eſſe rectangulo c e d, & rectangulo d a c.

Secetur

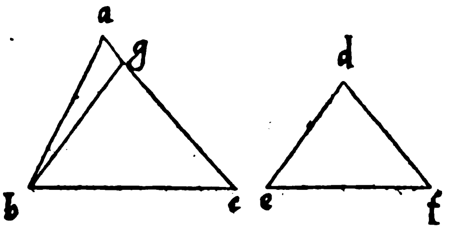
Secetur enim c d in f bifariam, quomodocumque ſe habeat ad punctum e. quare tota a f ipſi f b eſt æqualis. rectangulum igitur a e b unà cum quadrato e f æquale eſt quadrato a f. Sed rectangulum d a c unà cum c f quadrato quadrato a f eſt æquale. ergo rectangulum a e b unà cum quadrato e f æquale eſt rectangulo d a c, & c f quadrato. quadratum autem c f eſt æquale rectangulo c e d, & quadrato e f. quare ſublato communi, nempe quadrato e f, erit quod relinquitur rectangulum a e b æquale rectãgulo c e d, & rectangulo d a c.

A
5. ſecundi
6.

L E M M A V.

Sint duo triangula a b c, d e f: & ſit angulus quidem c æqualis angulo f: angulus uero b angulo e maior. Dico lineam b c ad c a minorem proportionem habere, quàm e f ad f d.

Conſtituatur enim angulus c b g æqualis angulo e: & eſt angulus c angulo f æqualis. ergo ut b c ad c g, ita e f ad f d. Sed b c ad c a minorem habet proportionem, quàm b c ad c g. quare & b c ad c a minorem proportionem habebit, quàm e f ad f d.

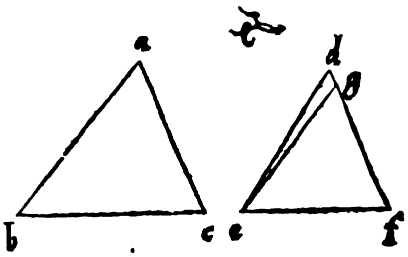


4. ſexti.
8. quinti

L E M M A VI.

Habeat rurſus b c ad c a maiorem proportionem, quàm e f ad f d: & ſit angulus c æqualis angulo f. Dico angulum b angulo e minorem eſſe.

Quoniam enim b c ad c a maiorem proportionem habet, quàm e f ad f d: ſi fiat ut b c ad c a, ita e f ad aliam quandam: erit ea minor, quàm f d. Itaque ſit f g: & e g iungatur. cum igitur circa æquales angulos latera proportionalia ſint; angulus b eſt æqualis angulo f e g: & propterea angulo e minor erit.



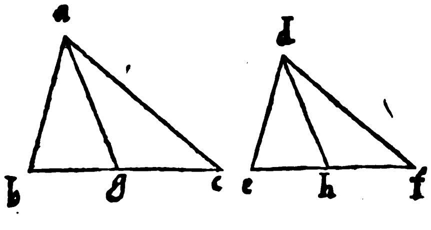
6. ſexti

L E M M A VII.

Sint triangula ſimilia a b c, d e f: & ducantur a g, d h, ita ut ſit rectangulum b c g ad quadratum c a, ſicut rectangulum e f h ad quadratum f d. Dico triangulum a g c triangulo d h f ſimile eſſe.

Quoniam enim eſt ut rectangulum b c g ad quadratum c a, ita rectangulum e f h ad quadratum f d: & proportio rectanguli b c g ad quadratum c a compoſita eſt ex proportione b c ad c a, & proportione g c ad c a: proportio autem rectanguli e f h ad quadratum f d componitur ex proportione e f ad f d: & proportione h f ad f d: quarum quidem proportio b c ad c a eadem eſt, quæ e f ad f d, propter ſimilitudinem triangulorum: erit reliqua g c ad c a eadem, quæ h f ad f d. & ſunt circa æquales angulos latera proportionalia. ergo triangulum a c g triangulo d f h

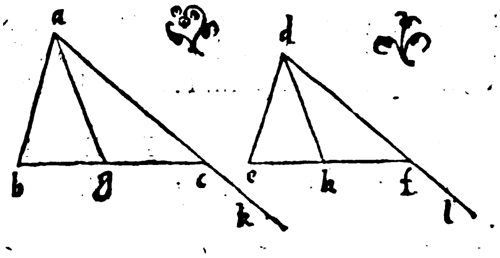
23. ſexti



6. ſexti

ſimile erit. Hoc igitur ex coniuncta proportione in eum, quem diximus, modũ demonſtratur. Sed licet & aliter demonſtrare abſque coniuncta proportione.

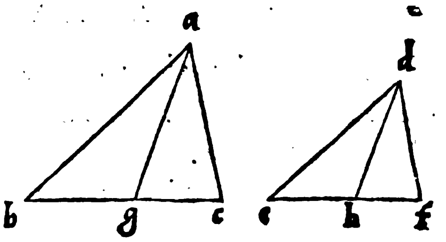
14.ſexti ALITER. Ponatur enim rectangulo b c g æquale rectangulum a c k. ergo ut b c ad c k, ita a c ad c g. Rurſus ponatur rectangulo e f h æquale rectangulum d f l. erit ut e f ad f l, ita d f ad f h. Sed poſitum eſt, ut rectangulum b c g, hoc eſt rectangulum lemm. 22 decimi. a c k ad quadratum a c, uidelicet ut a c ad c k, ita rectangulum e f h, hoc eſt d f l ad quadratum d f, uidelicet ut d f ad f l: Vt autem b c ad c a, ita e f ad f d, ob ſimilitudi- 22.quinti nem triangulorum. ergo ut b c ad c k, ita e f ad f l. Sed ut b c ad c k, ita a c ad c g, quod demonſtratum eſt: itemq; ut e f ad f l, ita d f ad f h. quare ut a c ad c g, ita erit d f ad f h: & ſunt circa æquales angulos. triangulum igitur a c g ſimile eſt triangulo d f h. & eadem ratione triangulum a g b triangulo d h e, quòd & a b c triangulum ipſi d e f ſimile ſit.



LEMMA VIII.

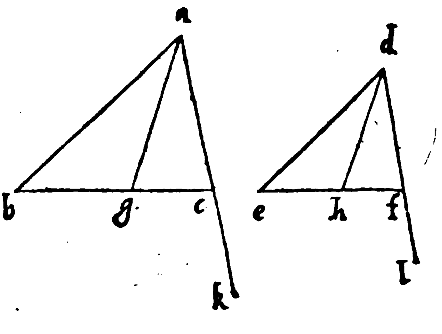
Sit triangulum quidem a b c ſimile triangulo d e f; triangulum uero a b g triangulo d e h ſimile. Dico ut rectangulum b c g ad quadratum c a, ita eſſe rectangulum e f h ad quadratum f d.

Quoniam enim propter ſimilitudinem triangulorum totus angulus a toti d eſt æqualis: angulus autem b a g æqualis eſt angulo e d h: erit reliquus g a c reliquo h d f æqualis. Sed & angulus c eſt 4. ſexti æqualis angulo f. eſt igitur ut g c ad c a, ita h f ad f d. ut autem b c ad c a, ita e f ad f d. ergo & compoſita proportio compoſitæ proportioni eadem erit: idcircoq; ut rectangulum b c g ad quadratum c a, ita rectangulum e f h ad quadratum f d.



ALITER ABSQVE CONIVNCTA PROPORTIONE.

Ponatur rectangulo b c g æquale rectangulum a c k: & rectangulo e f h æquale rectangulum d f l, erit rurſus ut b c ad c k, ita a c ad c g. ut autem e f ad f l, ita d f ad f h: & eadem ratione, qua ſupra demonſtrabimus, ut a c ad c g, ita eſſe d f ad f h. ergo ut b c ad c k, ita e f ad f l. Sed ut b c ad c a, ita e f ad f d, ob triangulorum ſimilitudinem. ex æquali igitur ut k c ad c a, hoc eſt ut rectangulum k c a, hoc eſt rectangulum b c g ad quadratum c a, ita l f ad f d; hoc eſt rectangulum l f d, hoc eſt rectangulum e f h ad quadratũ f d. quod demõſtrare oportebat.

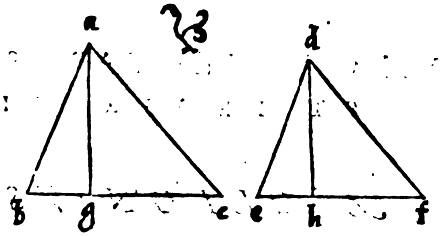


LEMMA IX.

Similiter demonſtrabimus, ſi ut rectangulum b c g ad quadratum a c, ita fuerit rectangulum e f h ad quadratum f d: & triangulum a b c ſimile triangulo d e f: & triangulum a b g triangulo d e h ſimile eſſe.

LEMMA X.

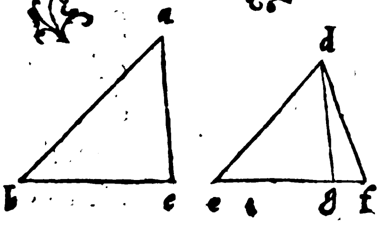
Sint duo triangula ſimilia a b c, d e f: & ducantur perpendiculares a g, d h. Dico ut rectangulum b g c ad quadratum a g, ita eſſe rectangulum e h f ad quadratum d h.



Hoc autem ex ijs, quæ ſupra dicta ſunt, perſpicue conſtat.

LEMMA XI.

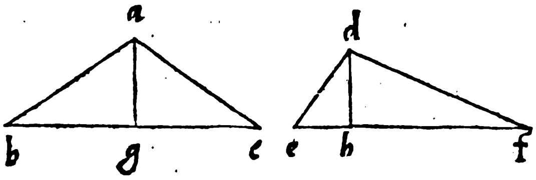
Sit æqualis quidem angulus b angulo e: angulus uero a angulo d minor. Dico c b ad b a minorem proportionē habere, quàm f e ad e d.



Quoniam enim angulus a minor eſt angulo d, conſtituatur angulo a æqualis angulus e d g. eſt igitur ut c b ad b a, ita g e ad e d. ſed g e ad e d minorem habet proportionem, quàm f e ad e d. ergo & c b ad b a minorem proportionem habebit, quam f e ad e d. ſimiliter & omnia alia eiuſmodi oſtendemus.

LEMMA XII.

Sit ut rectangulum b g c ad quadratum a g, ita rectangulum e h f ad quadratum d h: & ſit b g quidem æqualis g c: c g uero ad g a minorem proportionem habeat, quàm f h ad h d. dico f h maiorem eſſe ipſa h e.



Quoniam enim quadratum c g ad quadratum g a minorem proportionem habet, quàm quadratum f h ad quadratum h d: quadratum autem c g æquale eſt rectangulo b g c: habebit b g c rectangulum ad quadratum a g minorem proportionem, quàm quadratum f h ad quadratum h d. ſed ut b g c rectangulum ad quadratum a g, ita poſitum eſt rectangulum e h f ad quadratum h d. ergo rectangulum e h f ad quadratum h d, minorem proportionem habet, quàm quadratum f h ad quadratum h d. maius igitur eſt quadratum f h rectangulo e h f. quare & linea f h maior erit linea h e. 8. quinti.

APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIBER II.
CVM COMMENTARIIS EVTOCII ASCALONITAE, ET FEDERICI COMMANDINI.

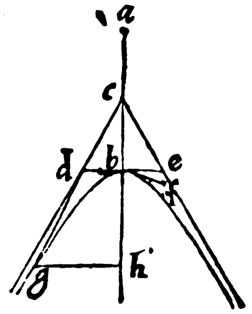
APOLLONIVS EVDEMO S. D.

SI uales bene eſt, ego quidem ſatis commode habeo. Apollonio filio meo dedi, ut ad te perferret ſecundum librum conicorum, quæ à nobis conſcripta ſunt. tu eum diligenter percurres: & communicabis cum iis, qui eo tibi digni uidebuntur. Philonidæ etiam geometræ, quo cum tibi Epheſi amicitiam conciliaui, ſi quando in iſthæc Pergami loca uenerit, legendum dabis. & tu cura ut ualeas.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI hyperbolen recta linea ad uerticem contingat: & ab ipſo ex utraque parte diametri ſumatur æqualis ei, quæ poteſt quartam figuræ partem; lineæ, quæ à ſectionis centro ad ſumptos terminos contingentis ducuntur, cum ſectione non conuenient.

SIT hyperbole, cuius diameter a b; centrum c; & rectum figuræ latus b f: linea uero d e ſectionem contingat in b: & quartæ parti figuræ, quæ continetur lineis a b, b f æquale ſit quadratum utriuſque ipſarum d b, b e: & iunctæ c d, c e producantur. Dico eas cum ſectione non conuenire. ſi enim fieri poteſt, conueniat c d cum ſectio-
lem. in 22 ne in g: & à g ordinatim applicetur g h. ergo g h æquidiſtans eſt ipſi d b. & quoniam
decimi ut a b ad b f, ita eſt quadratum a b ad rectangulum a b f: quadratum autem c b
quarta pars eſt quadrati a b: & quadratum b d itidem quarta
15. quinti pars rectanguli a b f: erit ut a b ad b f, ita quadratum c b ad
A b d quadratum; hoc eſt quadratum c h ad quadratum h g.
B ſed ut a b ad b f, ita eſt rectangulum a h b ad quadratum h g.
quare ut c h quadratum ad quadratum h g, ita rectangulum
9. quinti a h b ad h g quadratum. ex quibus ſequitur rectangulũ a h b
C quadrato c h æquale eſſe: quod eſt abſurdum. ergo c d cum ſe-
ctione non conuenit. ſimiliter demonſtrabitur neque ipſam
D c e conuenire cum ſectione. ſunt igitur lineæ c d c e aſym-
ptoti, hoc eſt cum ſectione non conuenientes.



E V T O C I V S.

EXPLICATVRVS ſecundum librum conicorum amiciſſime Anthemi, illud prædicere oportere exiſtimo, me ea tantummodo in ipſum conſcribere, quæ ex primo libro intelligi poſſunt. Primum theorema caſum non habet, lineæ enim d c, c e ſectionis aſymptoti cum ſint, eædem manent in omni tum diametro, tum linea contingente.

FED. COMMANDINVS.

HOC eſt quadratum c h ad quadratum h g.] *Quoniam enim ponitur lineam c d productam cum ſectione conuenire in g: erit ex quarta ſexti, ut c b ad b d, ita c h ad h g. quare ex 22. eiuſdem, ut quadratum c b ad b d quadratum, ita quadratum c h ad quadratum h g.* A

Sed ut a b ad b f, ita eſt rectangulum a h b ad quadratum h g.] *Ex uigeſima prima primi libri huius.* B

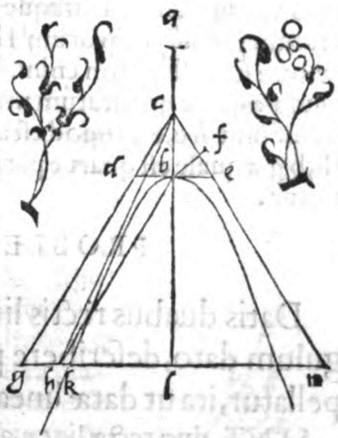
Quod eſt abſurdum.] *Eſt enim quadratum c h æquale rectangulo a h b unà cum quadrato b c ex ſexta ſecundi libri elementorum.* C

Sunt igitur lineæ c d, c e aſymptoti, hoc eſt cum ſectione non conuenientes.] *Has Græci ἀσυμπτώτους τῇ τομῇ uel ſimpliciter ἀσυμπτώτους appellant. quare nobis deinceps, ut uno uerbo dicamus, græca uoce uti liceat.* D ἀσύμπτωτοι

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Iſdem manentibus demonſtrandum eſt non eſſe alteram aſymptoton, quæ angulum d c e diuidat.

SI enim fieri poteſt, ſit c h: & per b ipſi c d æquidiſtãs ducatur b h, quæ cum c h in h puncto conueniat: ipſi uero b h ponatur æqualis d g; & iuncta g h ad k l m producatur. Quoniam igitur b h, d g æquales ſunt, & æquidiſtantes; & ipſæ d b, g h æquales & æquidiſtantes ſint neceſſe eſt. (33. primi.) ſecatur autem a b bifariam in c: & ipſi adiungitur quædam linea b l. ergo rectangulum a l b unà cum c b quadrato æquale eſt quadrato c l. (6. ſecũdi.) ſimiliter quoniam g m ipſi d e æquidiſtat: atque eſt d b æqualis b e; & g l ipſi l m æqualis erit. (A) quòd cum g h ſit æqualis d b, erit g k ipſa d b maior: (B) eſtq; k m maior b e, quoniam & ipſa l m. (C) rectangulum igitur m k g maius eſt rectangulo d b e; hoc eſt quadrato d b. (D) & quoniam ut a b ad b f, ita eſt quadratum c b ad b d quadratum: ut autem a b ad b f, ita a l b rectangulum ad quadratum l k: (21. primi huius.) erit ut quadratum c b ad b d quadratum, ita a l b rectangulum ad quadratum l k. (11. quinti) ſed ut quadratum c b ad quadratum b d, ita quadratum c l ad quadratum l g. (4. & 22. ſexti.) ergo ut quadratum c l ad quadratum l g, ita a l b rectangulum ad quadratum l k. Itaque cum ſit, ut totum quadratum c l ad totum quadratum l g, ita ablatum rectangulum a l b ad ablatum quadratum l k: (E) erit reliquũ quadratum c b ad reliquum rectangulum m k g, ut quadratum c l ad quadratum l g; hoc eſt ut quadratum c b ad b d quadratum. ergo rectangulo m k g æquale eſt quadratum b d: (9. quinti.) quod fieri non poteſt: oſtẽſum eſt enim eo maius. non igitur linea c h aſymptotos eſt, uidelicet cum ſectione non conueniens.



EVTOCIVS.

HOC *theorema caſum non habet, ſi quidem linea b h ſectionem omnino in duobus punctis ſecat. quoniam enim æquidiſtans eſt c d, cum ipſa c h conueniet. quare prius cum ſectione conueniat neceſſe eſt.*

FED. COMMANDINVS.

SIMILITER quoniam g m ipſi d e æquidiſtat; atque eſt d b æqualis b e: & g l ipſi l m æqualis erit.] *Ex ijs, quæ nos demonſtrauimus in commentarijs in ſextam propoſitionem primi libri huius.* A

Erit g k ipſa d b maior.] *Nam cum ponatur c h aſymptotos, punctum h extra ſectionem cadet, uidelicet extra punctum k; & idcirco linea g k maior erit, quàm g h, hoc eſt quàm d b.* B

Eſtq; k m maior b e, quoniam & ipſa l m.] *Eſt enim in triangulo c l m, ut c l ad l m, ita* C *c b ad b e:& permutando ut l c ad c b,ita l m ad b e.ſed l c maior eſt c b. ergo & l m maior b e. atque eſt k m maior l m.multo igitur k m ipſa b e maior erit.*

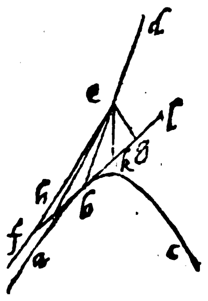
D Et quoniam ut a b ad b f,ita eſt quadratum c b ad b d quadratum.] *Ex demonſtratis in prima propoſitione huius libri.*

E Itaque cum ſit ut totum quadratum c l ad totum quadratum l g, ita ablatum re-
ctangulum a l b ad ablatum quadratum l k: erit reliquū &c.] *Quoniam enim rectangu-*
6.ſecūdi *lum a l b unà cum quadrato c b æquale eſt quadrato c l, ſi à quadrato c l auſeratur rectangulum*
a l b reliquum erit c b quadratum. Rurſus quoniam recta linea g m ſecatur in partes æquales in l,
ecūdi. *& in partes inæquales in k: rectangulum m k g unà cum quadrato l k æquale eſt quadrato l g.*
ergo ſi à quadrato l g auferatur l k quadratum,relinquetur rectangulum m k g. cum igitur ſit,ut
quadratum c l ad quadratum l g, hoc eſt ut totum ad totum, ita rectangulum a l b ad quadratum
19.quinti *l k, ablatum ſcilicet ad ablatum; erit reliquum ad reliquum, hoc eſt quadratum c b ad rectangu-*
lum m k g, ut totum ad totum.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si hyperbolen contingat recta linea,cum utraque aſymptoton conueniet,& ad tactum bifariam ſecabitur:quadratum uero utriuſque eius portionis æquale erit quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum per tactum ductam conſtituitur.

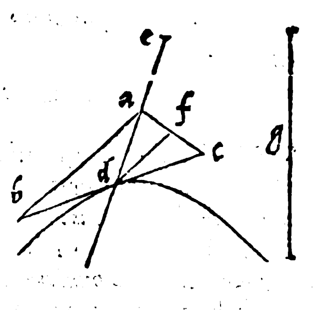
SIT hyperbole a b c,cuius centrum e:& aſymptoti ſint f e, e g: quædam uero re-
cta linea h k ſectionem contingat in puncto b. Dico h k productam cū lineis f e,e g
conuenire.ſi enim fieri poteſt,non conueniat; & iuncta b e producatur: ſitq; ipſi b e
47. primi huius. æqualis e d.diameter igitur eſt b d.ponatur quartæ parti figuræ,
quæ eſt ad b d æquale quadratum utriuſque ipſarum h b, b k: &
1.huius iungantur h e,e k. ergo h e,e k aſymptoti ſunt,quod fieri nequit.
2.huius poſitum eſt enim aſymptotos eſſe f e, e g. quare h k producta cū
ipſis f e,e g conuenit.itaque conueniat in punctis f g. Dico qua-
dratum utriuſque ipſarum f b,b g æquale eſſe quartæ parti figu-
ræ,quæ fit ad b d.non enim,ſed ſi fieri poteſt,ſit quartæ parti eius
figuræ æquale quadratum utriuſque ipſarum h b, b k. aſymptoti
igitur ſunt h e,e k; quod eſt abſurdum.ergo quadratum utriuſq;
f b,b g æquale eſt quartæ parti figuræ, quæ ad ipſam b d conſti-
tuitur.



PROBLEMA I. PROPOSITIO IIII.

Datis duabus rectis lineis angulum continentibus, & puncto intra angulum dato,deſcribere per punctum coni ſectionē, quæ hyperbole appellatur,ita ut datæ lineæ ipſius aſymptoti ſint.

SINT duæ rectæ lineæ a b,a c angulum ad a continentes: ſitq; datum punctum
d: & oporteat per d circa aſymptotos b a c hyperbolen
deſcribere.iungatur a d;& ad e producatur,ita ut d a ſit
æqualis a e:& per d ipſi a b æquidiſtans ducatur d f:pona
turq; a f æqualis f c.iuncta uero c d producatur ad b: &
quadrato c b æquale fiat rectangulum ex d e,& g.deinde
53. primi huius. producta a d circa ipſam per d hyperbole deſcribatur,
ita ut applicatæ ad diametrum poſſint rectangula adiacen
tia lineæ g;excedentiaq; figura ipſi d e g ſimili. Quoniam
2.ſexti. igitur æquidiſtans eſt d f ipſi b a,& c f æqualis f a;erit c d
ipſi d b æqualis.ergo quadratum c b quadruplum eſt qua
drati c d.atque eſt quadratū c b æquale rectangulo d e g.



Vtrumque igitur quadratorum b d,d c quarta pars eſt figuræ,quæ lineis d e g continetur.quare b a,a c deſcriptæ hyperbolæ aſymptoti ſunt. 1.huius

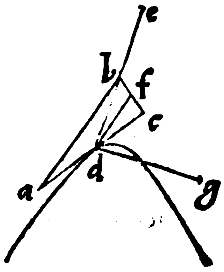
FED. COMMANDINVS.

Hoc problema ab Apollonio conſcriptum non eſt, ſed ab alio aliquo additum: quod ex Eutocij uerbis perſpicue apparet: is enim in commentarijs in quartam propoſitionem ſecundi libri Archimedis de ſphæra & cylindro ita ſcribit. ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυμπτώτους γράψαι ὑπερβολήν, δείξομεν οὕτως, ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. *id eſt, quo autem modo oporteat per datum punctum circa datas aſymptotos deſcribere hyperbolē, demonſtrabimus in hunc modum, quoniam id per ſe ipſum in conicis elementis non ponitur. ſubiungit poſtea Eutocius demonſtrationem eandem, quæ hoc loco habetur, ut credibile ſit, uel Eutocium ipſum, uel alium ex Eutocio hoc problema inſeruiſſe. Adde quod Pappus inter lemmata, quæ conſcripſit in quintum librum conicorum Apollonij, idem problema per reſolutionem, cõpoſitionemq; explicauit, quod minime feciſſet, niſi ab ipſo Apollonio illud fuiſſet omiſſum. ſed Pappi lemma apponere libuit.*

Duabus rectis lineis a b, b c poſitione datis: & dato puncto d; per d circa aſymptotos a b, b c hyperbolen deſcribere.

Factum iam ſit.ergo b eſt ipſius centrum:iungatur d b,& producatur,quæ diame-
ter erit: ponaturq; ipſi d b æqualis b e.datum igitur eſt punctum b. quare & punctū A B
e dabitur,& diametri terminus:ducatur à puncto d ad lineā b c perpendicularis d f. C D
ergo punctum f datum erit. Rurſus ponatur ipſi b f æqualis f c. erit & c datum: & 27.Dat.
iuncta c d producatur ad a,quæ poſitione data erit.ſed & poſitione data eſt a b.qua- 25
re & ipſum a:eſt autem & c datum. ergo linea a c magnitudine dabitur: atque erit E
a d æqualis d c; propterea quòd b f eſt æqualis f c. Itaque figuræ,quæ ad diametrum 2. ſexti. F
e d conſtituitur, ſit d g rectum latus. erit utraque ipſarum a d, d c poteſtate quarta
pars rectanguli eius,quod e d g continetur.ſed & quarta pars eſt quadrati a c.rectan
gulum igitur e d g quadrato a c eſt æquale.datum autem eſt a c quadratum. ergo &
datum rectangulum e d g:& data eſt e d.quare ipſa d g,& punctum g datur. Quoniā G
igitur poſitione datis duabus rectis lineis in plano e d, d g, quæ ad rectos inter ſe an-
gulos conſtituuntur;& à dato puncto d facta eſt ſectio hyperbole,cuius diameter qui
dem eſt e d,uertex autem d punctum: & à ſectione ad diametrum applicatæ in dato
angulo a d b applicantur:& poſſunt ſpatia adiacentia ipſi d g,latitudinesq; habentia H
lineas ex diametro abſciſſas,quæ inter ipſas,& punctum d interijciuntur: & exceden
tia figura ſimili ei,quæ lineis e d g continetur:erit ipſa ſectio poſitione data.

Componetur autem problema in hunc modum.Sint duæ rectæ lineæ a b, b c poſi-
tione datæ: & datum punctum d: iunctaq; d b producatur ad
e,ut ſit b e ipſi d b æqualis: & ducatur perpendicularis d f,po K
naturq; ipſi b f æqualis f c; & iuncta c d ad a producatur: at-
que ipſi e d aptetur ad rectos angulos d g, ita ut quadrato a c
æquale ſit rectāgulum e d g:& deſcribatur hyperbole circa dia- L
metrum d e,ut in reſolutione dictum eſt. Dico iam factum eſſe
quod proponebatur. Quoniam enim b f eſt æqualis f e,erit &
a d ipſi d c æqualis.quare utraque ipſarum a d,d c poteſtate eſt
quarta pars quadrati a c, hoc eſt rectanguli e d g, hoc eſt figu-
ræ,quæ ad diametrum conſtituitur. demōſtratum autem eſt in
ſecundo libro conicorum lineas a b,b c ipſius hyperbolæ aſym propoſ.1
ptotos eſſe.



COMMENTARIVS.

Datum igitur eſt punctum b] *Ex 25. libri Datorum: ſunt enim a b,b c poſitione datæ.* A

Quare & punctum e dabitur] *Ex 27. eiuſdem libri.* B

Ducatur à puncto d ad lineam b c perpendicularis d f] *Videtur hic locus corruptus eſſe: non enim ducenda eſt d f ad ipſam b c perpendicularis, niſi quando lineæ a b, b c rectum an-* C *gulum continent: quippe cum neceſſe ſit lineam d f ipſi a b æquidiſtare, ut ex proxime dictis appa ret. legendum igitur eſt hoc modo. Ducatur à puncto d ad b c linea d f, quæ ipſi a b æquidiſtet. & ita legendum erit infra: alioqui non ſequeretur a d æqualem eſſe d c; propterea quòd b f ſit æqualis f c.*

D Ergò punctum f datum erit] *Ex 25. libri Datorum: nam & linea d f poſitioue datur.*

E Ergo linea a c poſitione dabitur] *Ex 26. eiuſdem.*

F Erit utraque ipſarum a d, d c poteſtate quarta pars rectanguli eius, quod e d g cõtinetur] *Deſideratur in græco codice,* τέταρτον, *uel* δ.

G Quare ex ipſa d g, & punctum g datur] *Eſt enim ex 14. uel 17. ſexti, ut c d ad a c, ita a c ad d g: & data eſt a c. ergo & ipſa d g. eſtq; datum punctum d. quare & c dabitur.* 2. Datorũ 26

H Et poſſunt ſpatia adiacentia ipſi d g] *In græco codice mendoſe legebatur g a.*

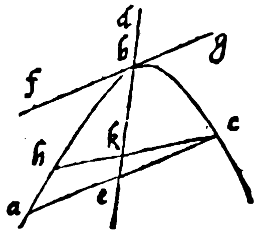
K Et ducatur perpendicularis d f] *Legendum, ut diximus, & ducatur d f ipſi a b æquidiſtans.*

L Et deſcribatur hyperbole circa diametrum d e] *Ex 53. primi libri huius.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO V.

SI parabolæ, uel hyperbolæ diameter lineam quandam bifariam ſecet; quæ ad terminum diametri contingit ſectionem æquidiſtans eſt lineæ bifariam ſectæ.

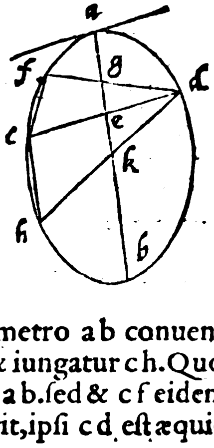
Sit parabole, uel hyperbole a b c, cuius diameter d b e: & linea f b g ſectionem contingat. ducatur autem quædam linea a e c in ſectione, faciens a e æqualem e c. Dico a c æquidiſtãtem eſſe ipſi f g. niſi enim ita ſit, ducatur per c ipſi f g æquidiſtans c h: & iungatur h a. Quoniam igitur parabole, uel hyperbole eſt a b c, cuius diameter quidem d e, contingens autem f g: atque ipſi f g æquidiſtat c h: erit c κ æqualis k h. ſed & c e ipſi e a eſt æqualis. ergo a h æquidiſtans eſt κ e; quod fieri non poteſt: producta enim cum ipſa b d conuenit. 46. primi huius. 2. ſexti. 22. primi huius.

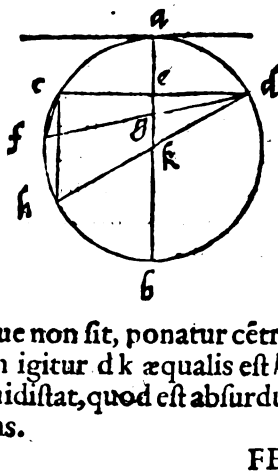


THEOREMA V. PROPOSITIO VI.

SI ellipſis, uel circuli circumferentiæ diameter lineam quandam nõ per centrum tranſeuntem bifariam ſecet; quæ ad terminum diametri contingit ſectionem, æquidiſtans erit bifariam ſectæ lineæ.

Sit ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b: & a b lineam c d non trãſeuntem per centrum bifariã ſecet in e. Dico lineam, quæ ad a ſectionem contingit, ipſi c d æquidiſtantem eſſe. non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit lineæ ad a contingenti æquidiſtans d f. æqualis igitur eſt d g ipſi g f. eſt autem & d e æqualis e c. ergo c f ipſi g e æquidiſtat, quod eſt abſurdum: 47. primi huius. 2. ſexti.

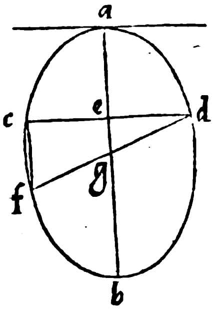




A ſiue enim punctum g centrum B ſit ſectionis a b; linea c f cum diametro a b conueniet, ſiue non ſit, ponatur cẽtrum κ: iunctaq; d k producatur ad h; & iungatur c h. Quoniam igitur d k æqualis eſt k h, & d e ipſi e c; erit c h æquidiſtans a b. ſed & c f eidem æquidiſtat, quod eſt abſurdum. ergo quæ ad a ſectionem contingit, ipſi c d eſt æquidiſtans.

FED. COMMANDINVS.

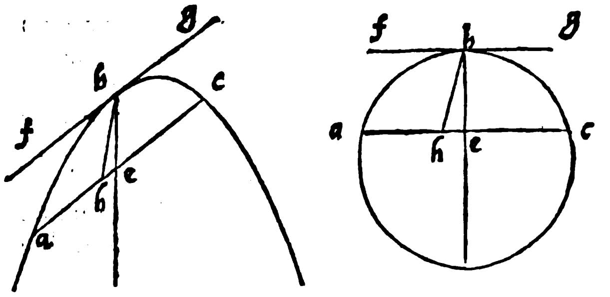
A Siue enim punctum g centrum ſit ſectionis a b, linea c f cum diametro a b conueniet: ſiue non ſit.] *Si linea ad a ſectionem contingens non æquidiſtat ipſi c d, ſit lineæ contingenti ad a æquidiſtans d g f; & iungatur f c. ponatur autem primum g ſectionis centrum eſſe. Itaque d g æqualis eſt g f: & eſt d e æqualis e c. ergo f c ipſi g e æquidiſtat: quod eſt abſurdum: linea enim, quæ tranſit* 4.diff.ſecundarũ. *per centrum, contingenti ad a æquidiſtans, diameter eſt ipſi a b coniugata: & propterea f c, quæ ellipſim uel circulum ſecat inter duas diametros, cum utriſque conueniet ex uigeſima tertia primi huius. ſi uero g non ſit centrum ſectionis, idem abſurdum ſequetur: namque f c itidem inter duas diametros ſecans cum ipſis conueniat neceſſe eſt.*



B Ponatur centrum k: iunctaq; d k producatur ad h.] *Si d f per centrum non tranſeat, ſit centrum k; & ducta d k h iungatur h c. erit d k æqualis k h. eſt autem & d e æqualis e c. quare h c æquidiſtat* 30. primi huius. *ipſi a b. ſed eidem æquidiſtat c f. quod eſt abſurdum. Quoniam enim f c cum c h, quæ eſt æquidiſtans a b conuenit; & cum ipſa a b neceſſario conueniet, ex ſecunda propoſitione primi libri Vitellionis. Adde quod alind abſurdum ſequitur, uidelicet lineas h c, c f uni & eidem a b æquidiſtantes, etiam inter ſe ſe æquidiſtare, quæ tamen in puncto c conueniunt.* 30. primi.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VII.

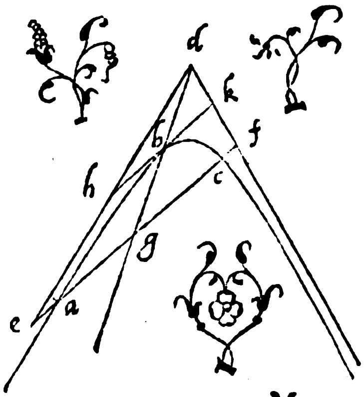
SI coni ſectionem, uel circuli circumferentiam recta linea contingat: & huic æquidiſtans ducatur in ſectione: & bifariam diuidatur: quæ à tactu ad punctum lineam bifariam diuidens iungitur, ſectionis diameter erit.



Sit coni ſectio, uel circuli circumferentia a b c, quam contingat recta linea f g: & ipſi f g æquidiſtãs ducatur a c: bifariamq; in e diuidatur: & iungatur b e. Dico b e ſectionis eſſe diametrum. nõ enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit diameter b h. ergo a h ipſi h c eſt æqualis, quod eſt abſurdũ. eſt enim a e æqualis e c. non igitur b h diameter erit ſectionis. ſimiliter demonſtrabimus nullam aliam, præterquam ipſam b e, diametrum eſſe.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VIII.

Si hyperbolæ recta linea occurrat in duobus punctis, producta ex utraque parte cũ aſymptotis conueniet: & lineæ, quæ ex ipſa abſciſſæ inter ſectionem, & aſymptotos interiiciuntur, æquales erunt.

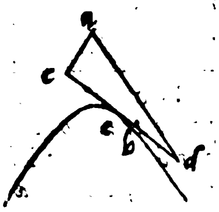


Sit hyperbole a b c, cuius aſymptoti ſint e d, d f, & ipſi a b c occurrat quædam recta linea a c. Dico a c productam ex utraque parte cum aſymptotis conuenire. ſecetur enim a c bifariam in g: & iungatur d g. diameter igitur eſt ſectionis. 7.huius quare linea ad b contingens ipſi a c æquidiſtat. 5.huius ſit autem contin-

3. huius gens h b k, quæ conueniet cum ipſis e d, d f. Quoniam igitur a c æquidiſtat k h: & k h
2. primi Vitell. conuenit cum k d, d h; & a c cum e d, d f conueniet. Itaque conueniat in punctis e f.
6. primi huius. eſt autem h b æqualis b k. ergo f g ipſi g e: & propterea f c ipſi a e æqualis erit.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

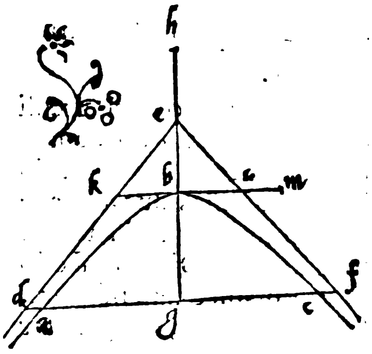
SI recta linea aſymptotis occurrens ab hyperbola bifariam ſecetur; in uno tantum puncto ſectionem contingit.

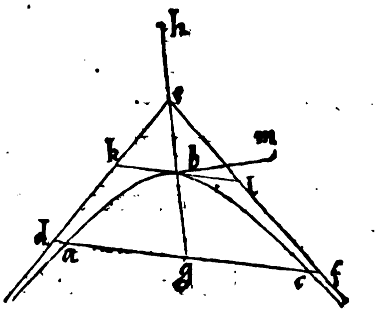


Recta enim linea c d occurrens aſymptotis c a, a d ſecetur ab hyperbola bifariam in puncto e. Dico c d in alio puncto ſectionem non contingere. ſi enim fieri poteſt, contingat in b. ergo c e 8. huius æqualis eſt b d: quod eſt abſurdum; poſuimus enim c e ipſi e d, æqualem eſſe. non igitur c d in alio puncto ſectionem contingit.

THEOREMA IX. PROPOSITIO X.

SI recta linea ſectionem ſecans cum utraque aſymptoton conueniat; rectangulum contentum rectis lineis, quæ inter aſymptotos & ſectionẽ interiiciuntur, æquale eſt quartæ parti figuræ factæ ad diametrum, quæ æquidiſtantes ipſi ductæ lineæ bifariam diuidit.





A Sit hyperbole a b c, cuius aſymptoti d e, e f: & ducatur quædam recta linea d f ſectionem, & aſymptotos ſecans: diuidatur autem a c bifariam in g: iunctaque g e, ponatur ipſi b e æqualis e h: & à puncto b ducatur b m ad angulos rectos ipſi h e b. deinde fiat ut rectangulum h g b ad B a g quadratum, ita linea h b ad b m. diameter igitur eſt b h: & b m rectum figuræ latus. Dico rectangulum d a f æquale eſſe quartæ parti figuræ, quæ lineis h b, b m continetur: & ſimiliter eidem eſſe æquale rectangulum d c f. ducatur enim per b linea C k b l ſectionem contingens, quæ æquidiſtans erit ipD ſi d f. Itaque quoniam demonſtratum eſt, ut h b ad b m, ita eſſe quadratum e b ad b k quadratum; hoc E eſt quadratum e g ad quadratum g d. Vt autem h b ad b m, ita rectangulum h g b ad quadratum a g: F erit ut totum quadratum e g ad totum quadratum g d, ita ablatum rectangulum h g b ad ablatum quadratum g a. ergo reliquum quadratum e b ad reliquum rectangulum d a f eſt, ut quadratum e g ad quadratum g d; hoc eſt ut quadratum e b ad b k 9. quinti. quadratum. æquale igitur eſt rectangulum d a f quadrato b k. ſimiliter demonſtrabitur & rectangulum G d c f quadrato b l æquale. & eſt quadratum k b æH quale quadrato b l. ergo & d a f rectangulum rectangulo d c f æquale erit.

FED. COMMANDINVS.

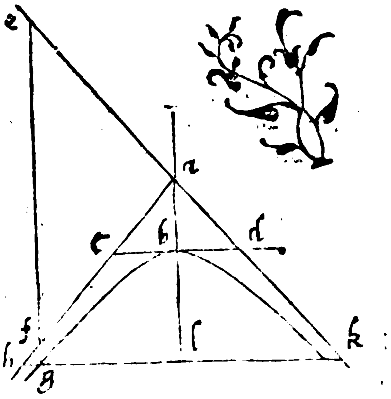
A ET ducatur quædam recta linea d f ſectionem, & aſymptotos ſecans.] *Intelligendum eſt lineam d f ſectionem in punctis a c ſecare.*

B Diameter igitur eſt b h: & b m rectum figuræ latus.] *Ex uigeſima prima primi libri huius, ſiue eius conuerſa.*

Quæ æquidiſtans erit ipſi d f.] *Ex quinta huius.* C
Itaque quoniam demonſtratum eſt, ut h b ad b m, ita quadratum e b ad b k qua- D
dratum.] *In prima huius.*
Vt autem h b ad b m, ita rectangulum h g b ad quadratum a g.] *Ex poſitionė.* E
Erit ut totum quadratum e g ad totum quadratum g d.] *Vide quæ ſcripſimus in ſe-* F
cundam huius.
Et eſt quadratum k b æquale quadrato b l.] *Eſt enim linea* k *b æqualis ipſi b l, ex ter-* G
tia huius.
Ergo & d a f rectangulum rectangulo d c f æquale erit.] *Ex quibus ſequitur illud,* H
quod demonſtrare oportebat, uidelicet unumquodque rectangulorum d a f, d c f æquale eſſe quadra
to k b, uel b l, hoc eſt quartæ parti figuræ, quæ lineis h b, b m continetur. 3. huius

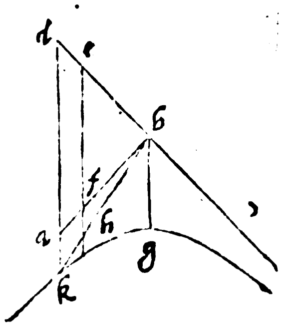
THEOREMA X. PROPOSITIO XI.

SI utramque linearum continentium angulum, qui deinceps eſt an- A
gulo hyperbolen continenti, ſecet recta linea; in uno tantum puncto
cum ſectione conueniet: & rectangulum conſtans ex iis, quæ interiiciun-
tur inter lineas angulum continentes, & ſectionem, æquale erit quartæ
parti quadrati ex diametro, quæ ſecanti lineæ æquidiſtans ducitur.



Sit hyperbole, cuius aſymptoti c a, a d: & producta d a ad e, per aliquod punctum
e ducatur e f, quæ lineas e a, a c ſecet. perſpicuum eſt e f in uno tantum puncto cum
ſectione conuenire. nam quæ per a ipſi e f æquidiſtans ducitur, ut a b, ſecat angulum
c a d; proptereaq́; conueniet cum ſectione: & ipſius diameter erit. quare e f cum ſe- B
ctione conuenit in uno tantum puncto. conue- C
niat in g. Dico rectangulum e g f quadrato a b D
æquale eſſe. ducatur enim per g ordinatim h g l k.
ergo quæ in puncto b ſectionem contingit æqui-
diſtans eſt ipſi h g: ſit autem c d. Itaque quoniam E
c b eſt æqualis b d; quadratum c b, hoc eſt rectan- F
gulum c b d ad b a quadratum proportionem ha 23. ſexti
bet compoſitam ex proportione c b ad b a; & ex
proportione d b ad b a. ſed ut c b ad b a, ita h g 4. ſexti
ad g f: & ut d b ad b a, ita k g ad g e. ergo propor
tio quadrati c b ad quadratum b a compoſita eſt
ex proportione h g ad g f, & proportione k g ad
g e. proportio autem rectanguli k g h ad rectan-
gulum e g f ex eiſdē proportionibus componitur. quare ut rectangulum k g h ad re 23. ſexti
ctangulum e g f, ita quadratum c b ad b a quadratum: & permutando ut rectangu-
lum k g h ad quadratum c b, ita rectangulum e g f ad quadratum a b. ſed demonſtra- G
tum eſt rectangulum k g h æquale quadrato c b. ergo & e g f rectangulum quadrato 14. quin-
a b æquale erit. ti

EVTOCIVS.



I*N aliquibus exemplaribus hoc theorema aliter demonſtratur.* Sit
hyperbole, cuius aſymptoti a b, b c: producaturq́; in rectum
b e d: & ducatur e f, ut contingit, ſecans lineas b d, b a. Dico
e f cum ſectione conuenire. Si enim fieri poteſt, non conue-
niat: & per b ipſi e f æquidiſtans ducatur b g. ergo b g dia-
meter eſt ſectionis. conſtituatur ad lineam e f parallelogram- H
mum, quadrato b g æquale, excedens figura quadrata, quod
ſit e h f: & iuncta b h producatur. conueniet ea cum ſectio- K
ne. conueniat in k: & per k ducatur k a d æquidiſtans b g. er- L
go rectangulum d k a quadrato b g eſt æquale. & ideo æquale

16. primi huius. rectangulo e h f, quod eſt abſurdum. conſtat igitur e f cum ſectione conuenire, atque in uno tantum puncto, quoniam diametro b g eſt æquidiſtans.

FED. COMMANDINVS.

A Si utraque linearum continentium angulum, qui deinceps eſt angulo hyperbolen continenti.] *Angulum hyperbolen continentem uocat Apollonius eum, quem aſymptoti inter ſe ſe conſtituunt: reliquum uero ex duobus rectis, eum qui deinceps eſt, appellat, qui quidem una aſymptoton & altera producta continetur.*

B Proptereaq; conueniet cum ſectione.] *Ex ſecunda huius.*

C Et ipſius diameter erit.] *Ex corollario quinquageſimæ primæ primi huius.*

D Quare e f cum ſectione conuenit in uno tantum puncto.] *Ex uigeſima ſexta primi huius.*

E Ergo quæ in puncto b ſectionē contingit, æquidiſtans eſt ipſi h g.] *Ex quinta huius.*

F Itaque quoniam c b eſt æqualis b d.] *Ex tertia huius.*

G Sed demonſtratum eſt rectangulum k g h æquale quadrato c b.] *In decima huius.*

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM QVAM AFFERT EVT.

H Conſtituatur ad lineam e f parallelogrammum quadrato b g æquale, excedens figura quadrata; quod ſit e h f.] *Ex uigeſima nona ſexti elementorum.*

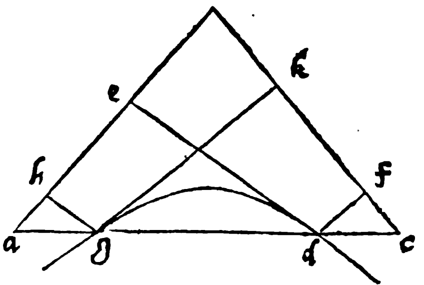
K Conueniet ea cum ſectione.] *Ex ſecunda huius.*

L Ergo rectangulum d k a quadrato b g eſt æquale.] *Ex ijs, quæ proxime dicta ſunt. quare ſi quis hanc demonſtrationem loco præcedentis eſſe uelit; neceſſe habebit illud ipſum similiter demonſtrare.*

M Quod eſt abſurdum.] *Poſt hæc uerba in græco codice non nulla deſiderantur, qualia fortaſſe hæc ſunt, linea enim d k maior eſt, quàm e h; & k a maior, quàm h f. Illud uero perſpicue apparet. nam ut b k ad k d, ita eſt b h ad h e: & permutando ut k b ad b h, ita k d ad h e. Rurſus ut b k ad k a, ita b h ad h f: permutandoq; ut k b ad b h, ita k a ad h f. Sed eſt b k maior quàm b h. maior igitur eſt d k, quàm e h: & k a itidem maior, quàm h f.*

THEOREMA XI. PROPOSITIO XII.

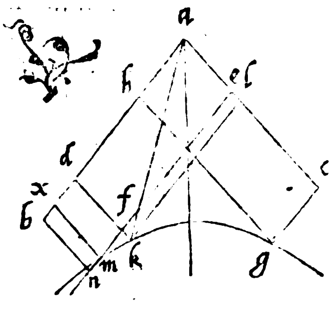
Si ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt in ſectione ad aſymptotos duæ rectæ lineæ in quibuslibet angulis ducantur: & ab altero puncto in ſectione ſumpto ducantur aliæ lineæ his ipſis æquidiſtantes: rectangulum ex æquidiſtantibus conſtans æquale eſt ei, quod fit ex iis, quibus illæ æquidiſtantes ductæ fuerant.



Sit hyperbole, cuius aſymptoti a b, b c: & ſumatur in ſectione aliquod punctum d: atque ab eo ad lineas a b, b c ducantur d e, d f. Sumatur autem & alterum punctum g in ſectione; per quod ducantur g h, g k ipſis d e, d f æquidiſtantes. Dico rectangulum e d f rectangulo h g K æquale eſſe. iungatur enim d g, & ad puncta a c
10. huius producatur. Itaque quoniam æquale eſt rectan
14. ſexti. 4 gulum a d c rectangulo a g c; erit ut g a ad a d, ita d c ad c g. ſed ut g a ad a d, ita g h ad d e: & ut d c ad c g, ita d f ad g K. quare ut g h ad
16. ſexti d e, ita d f ad g k. rectangulum igitur e d f rectangulo h g k eſt æquale.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

Si in loco aſymptotis & ſectione terminato, quædam recta linea A ducatur, alteri aſymptoton æquidiſtans; in uno puncto tantum cum ſectione conueniet.



Sit hyperbole, cuius aſymptoti c a, a b: ſumaturq; aliquod punctum e: & per e ipſi a b æquidiſtans ducatur e f. Dico e f cum ſectione conuenire. Si enim fieri poteſt, non conueniat: & ſumatur punctum g in ſectione, per quod ipſis b a, a c æquidiſtantes ducantur g c, g h: & rectangulo c g h æquale ſit rectãgulum a e f; iunctaq; a f, ſi producatur, cum ſectione conueniet. 2.huius conueniat in puncto K: & per κ ducantur κ l, κ d ipſis b a, a c æquidiſtantes. ergo rectangulum c g h æqua B le eſt rectangulo l K d. ponitur autem & rectangulo a e f æquale. rectangulum igitur d K l, hoc eſt a l k rectangulo a e f æquale erit: quod fieri non poteſt, ſi quidem k l maior eſt, quam e f; & l a maior, quàm a e. quare e f conueniet cum ſectione. conueniat in m. Dico eam in alio puncto non conuenire. nam ſi fieri poteſt, conueniat etiam in n; & per m n ipſi c a æquidiſtantes ducantur m x, n b. ergo rectangulum e m x rectangulo e n b eſt equale: quod eſt abſurdum. non igitur in alio puncto cum ſectione conueniet.

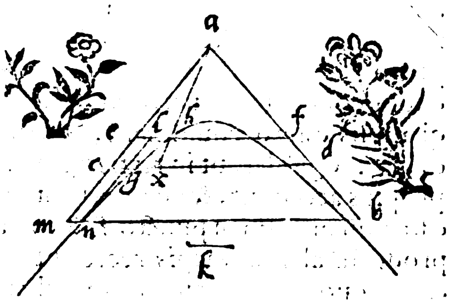
FED. COMMANDINVS.

Si in loco aſymptotis & ſectione terminato, quædam recta linea ducatur.] *Locum intelligit extra ſectionem, qui aſymptotis & ſectione ipſa circumſcribitur.* A

Ergo rectangulum c g h æquale eſt rectangulo l k d.] *Ex præmiſſa.* B

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIIII.

Aſymptoti, & ſectio in infinitum productæ ad ſe ipſas propius accedunt: & ad interuallum perueniunt minus quolibet dato interuallo.



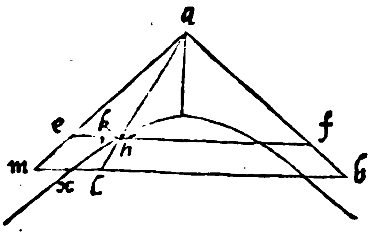
Sit hyperbole, cuius aſymptoti a b, a c: & datum interuallum ſit k. Dico aſymptotos a b, a c & ſectionem productas ad ſe ſe propius accedere. & peruenire ad interuallum minus interuallo k. Ducantur enim lineæ contingenti æquidiſtantes e h f, c g d: iungaturq; a h; & ad x producatur. Quoniam ergo rectangulum A c g d rectangulo f h e eſt æquale; erit ut d g ad 14.ſexti f h, ita h e ad c g. ſed d g maior eſt f h. ergo & 14. quiti e h ipſa c g eſt maior. ſimiliter demonſtrabimus eas, quæ deinceps ſequuntur, minores eſſe. Itaque ſumatur interuallum e l minus interuallo k: & per l ipſi a c æquidiſtans ducatur l n. ergo l n cum ſectione conueniet. conueniat in n: perq; n ducatur m n b æqui B diſtans e f. quare m n eſt æqualis e l: & propterea interuallo κ maior erit. 34 primi

Ex hoc manifeſtum eſt, lineas a b, a c ad ſectionem accedere pro- C pius, quàm omnes aliæ aſymptoti: & angulum b a c minorem eſſe quo- D libet angulo, qui aliis eiuſmodi lineis continetur.

EVTOCIVS.

IN *aliquibus exemplaribus illud aliter demonſtratum inuenitur.*

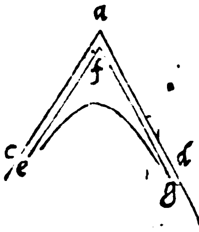
Aſymptotos & ſectionem peruenire ad interuallum minus quolibet interuallo dato.

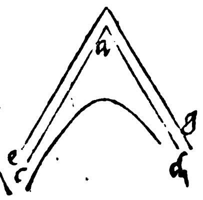


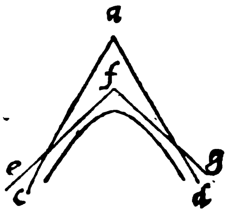
Iiſdem enim manentibus, ſumatur interuallum
e k dato interuallo minus: fiatq́; ut k e ad e h, ita
h a ad a l: & per l ipſi e f æquidiſtans ducatur m x
8. quinti l b. Quoniam igitur x b ad h f maiorem propor-
14. ſexti tionem habet, quàm l b ad h f. Vt autem x b ad
h f, ita h e ad m x, propterea quod rectangulum
19. huius f h e rectangulo b x m eſt æquale: habebit h e ad
m x maiorem proportionem, quàm l b ad h f. ſed
4. ſexti ut l b ad h f, ita l a ad a h: & ut l a ad a h, ita h e ad
8. quinti e k: quare h e ad m x maiorem proportionem habet, quàm h e ad e K. minor igitur
eſt m x, quàm e K.

Inueniuntur in aliquibus codicibus etiam hæc theoremata, quæ à nobis tanquam ſuperuacanea
14. huius *ſublata ſunt. Quoniam enim demonſtratum eſt, aſymptotos propius accedere ad ſectionem, & ad interuallum peruenire, quolibet dato interuallo minus; ſuperuacuum fuit hæc inquirere: quod neque demonſtrationes aliquas habent, ſed dumtaxat figurarum differentias. uerum ut ijs, qui in hæc inciderint, ſententiam noſtram aperiamus, exponantur hoc loco ea, quæ nos, ut ſuperuacanea ſuſtulimus.*

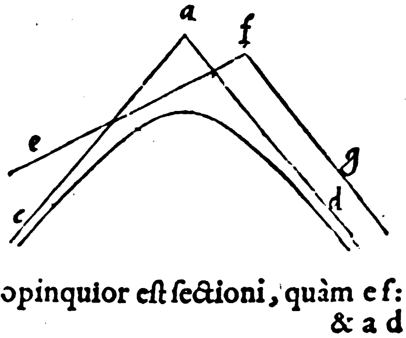
Aſymptoti, de quibus dictum eſt, propius accedunt ad ſectionem, quàm aliæ, ſi quæ ſint aſymptoti.



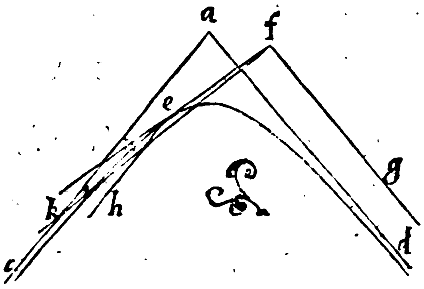




Sit hyperbole, cuius aſymptoti c a, a d. Dico c a ad a d ſectionem accedere propius, quàm aliæ aſymptoti, ſi quæ ſint. Namque ut in prima figura, lineas e f, f g aſymptotos eſſe non poſſe, manifeſte conſtat: quòd linea e f æquidiſtans ſit c a; & f g
13. huius ipſi a d: demonſtratum ſiquidem eſt eas; quæ in loco aſymptotis & ſectione terminato ducuntur, alteri aſymptoto æquidiſtantes, cum ſectione conuenire: ſi uero, ut in ſecunda figura apparet, e f, f g ſint aſymptoti, quippe quæ ipſis c a, a d æquidiſtant, tamen c a a d ad ſectionem propius accedunt, quàm e f, f g. Quòd ſi, ut in tertia figura, c a, a d in infinitum producantur, ad ſectionem propius accedunt, & ad interuallum perueniunt minus quolibet dato interuallo. ſed e f, f g, quanquam in puncto f, & intra angulum propinquiores ſint ſectioni, tamen productæ ab ipſa magis recedunt: interuallum enim, quo nunc diſtant, eſt quolibet alio interuallo minus. Rurſus ſint aſymptoti e f, f g, ut in quarta figura, conſtat etiam hoc modo c a propinquiorem eſſe ſectioni, quàm e f, ſiue e f æquidiſtans ſit c a, ſiue cum ipſa conueniat. & ſi quidem punctum, in quo conuenit cum a c, ſit infra eam, quæ per f ſectionem contingit, ſecabit e f ſectionem ipſam; ſi uero ſit in loco intermedio inter contingentem & angulum, non perueniet ad interuallum minus dato interuallo. quare c a propinquior eſt ſectioni, quàm e f: & a d



& ad propinquior, quàm f g, per eadem, quæ diximus in tertia figura.

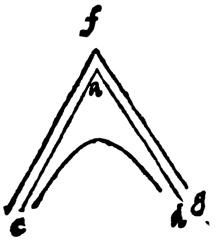


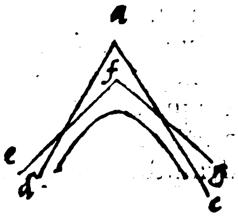
At uero lineam, quæ conuenit cum a c, infra eam, quæ per f ducta ſectionem contingit, cum ſectione ipſa conuenire, ſic demōſtrabitur.

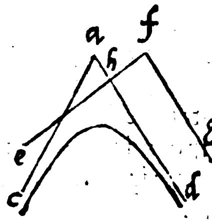
Contingat f e ſectionem in e: & punctum, in quo e f cum c a conuenit, ſit ſupra f k. Dico f k conuenire cum ſectione. ducatur enim per tactū e ipſi c a aſymptoto æquidiſtans e h. ergo e h ſectionem in puncto e tantum ſecat. Itaque quoniam a c ipſi e h eſt æquidiſtans: & f k conuenit cum a c; & cum e h conueniat neceſſe eſt. quare & cum ipſa ſectione. 13. huius.

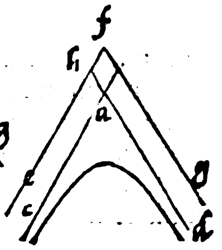
SI eſt alter angulus rectilineus, qui hyperbolen contineat, non eſt minor angulo hyperbolen continente, de quo ante dictum eſt.

Sit hyperbole, cuius aſymptoti c a, a d: aliæ uero aſymptoti ſint e f, f g. Dico angulum ad f non minorem eſſe angulo ad a. ſint enim primum e f, f g ipſis c a, a d æquidiſtantes. ergo angulus ad f non eſt minor eo, qui ad a: ſi uero non ſint æquidiſtantes, ut in ſecunda figura, conſtat maiorem eſſe angulum ad f angulo c a d. Sed in tertia figura angulus f h a, eo qui ad a maior eſt; & qui ad f æqualis eſt angulo f h a. Denique in quarta figura angulus, qui ad uerticē, maior eſt angulo, qui itidem ad uerticem conſtituitur. non igitur angulus ad f angulo, qui ad a, minor erit.









FED. COMMANDINVS.

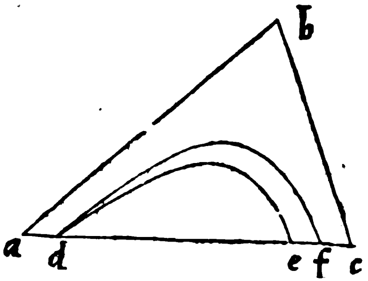
A Quoniam ergo rectangulum c g d rectangulo f h e eſt æquale.] *Ex decima huius: utrumque enim eſt æquale quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum conſiſtit.*

B Ergo l n cum ſectione conueniet.] *Ex decima tertia huius.*

C Ex hoc manifeſtum eſt lineas a b, a c ad ſectionem accedere propius, quàm omnes aliæ aſymptoti.] *Hoc demonſtrauit Eutocius in commentarijs. aſymptotos autem uocat etiam alias lineas, quæ cum ſectione non conueniunt.*

D Et angnlum b a c minorem eſſe quolibet angulo, qui alijs eiuſmodi lineis contine tur.] *Non conſentit hoc cum ijs, quæ tradit Eutocius: oſtendit enim angulum, qui alijs eiuſmodi lineis continetur, non eſſe minorem angulo b a c. quare uel locus corrigendus eſt, uel intellige punctū, in quo aliæ aſymptoti conueniunt idem eſſe, quod a, uel in ipſis aſymptotis, uel etiam intra ipſas cōtineri: ita enim fiet, ut angulus b a c quolibet alio eiuſmodi angulo ſit minor. Illud autem, quod hoc loco demonſtratur accidere aſymptotis & ſectioni, ut ſcilicet in infinitum productæ nō coeant, ſed ad ſeipſas propius accedant, & ad interuallum perueniant quolibet dato interuallo minus, accidit etiam duabus hyperbolis, quæ circa eaſdem aſymptotos deſcribuntur, quod Pappus demonſtrare aggreſſus eſt in lemmatibus in quintum librum conicorum Apollonij. ſed quoniam ea demonſtratio ob temporum iniurias & deprauata eſt, & manca; non inutile erit uerba ipſius latine reddita in* *medium afferre, ut quæ perobſcura ſunt explicemus; quæ uero ad demonſtrationem deſiderari uidentur, ſuppleamus. eſt enim res admirabilis, & diligenti contemplatione digniſſima.*

PAPPI LEMMA.



Circa aſymptotos a b, b c hyperbolæ d e, d f deſcribantur. Dico eas inter ſe non conuenire.

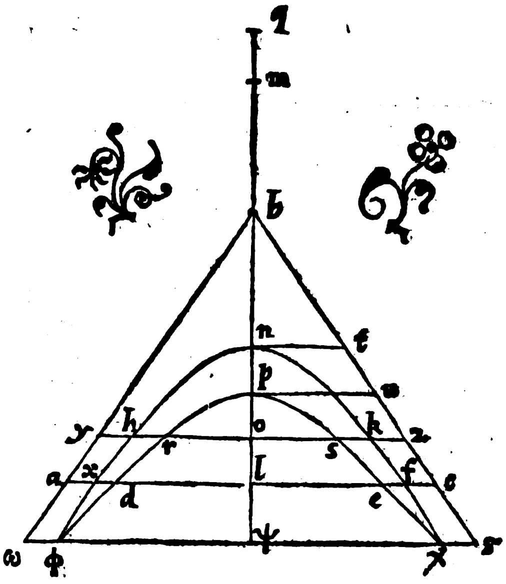
Si enim fieri poteſt, conueniant ad punctum d: & per d in ſectiones ducatur recta linea a d e f c. erit propter d f ſectionem linea a d æqualis f c: & propter ſectionem d e erit a d æqualis e c. quare f c ipſi c e eſt æqualis. quod fieri non poteſt. non igitur ſectiones inter ſe conueniunt.

Dico præterea eas, ſi in infinitum augeantur, ad ſe ſe propius accedere, & ad minus interuallum peruenire.

A B C Ducatur enim alia linea h k: & ſit diameter, cuius terminus m. erit igitur ut rectã-
D gulum m l n ad quadratum l x, ita tranſuerſum figuræ latus ad latus rectum: ut autem
E m o p rectangulum ad quadratum o r, ita tranſuerſum latus ad rectum. ergo ut rectã-
gulum m l n ad quadratum l x, ita rectangulum m o p ad quadratum o r: & permu-
F tando. rectangulum uero m l n maius eſt rectãgulo m o p. Quare linea x f maior erit
G quàm r s. atque eſt propter ſectiones f d x æquale rectangulo k r h. minor igitur eſt
H K x d, quàm h r. quare ſemper ad minus interuallum perueniunt. ſed & illud facile con-
ſtare poteſt: ſi enim utraque ipſarum ad aſymptotos propius accedit, & ad ſe ſe pro-
pius accedant neceſſe eſt.

COMMENTARIVS.

A Ducatur enim alia linea h k.] *Sint duæ hyperbolæ x n f, d p e circa eaſdem aſymptotos a b, b c deſcriptæ, ut docetur in quarta propoſitione huius libri. & intelligantur rectæ lineæ a x d l e f c, b r o s k ad earum diametrum b l ordinatim applicatæ; quæ inter ſe æquidiſtabunt: utraque enim æquidiſtat lineæ in p uel n ſectionem contingenti, ex quinta huius.*



B Et ſit diameter, cuius terminus m.] *Non poteſt idem terminus eſſe diametri utriuſque ſectionis. producatur enim l p n b diameter in puncta m q, ita ut ſit m b æqualis ipſi b n, & b q æqualis b p. erit punctum m terminus diametri ſectionis x n f, & q terminus diametri ſectionis d p e; quòd b ſit utriuſque centrum. quare mirum uidetur Pappũ uno, eodemq; puncto m uti pro termino utriuſque diametri. niſi fortaſſe intelligamus duo puncta, qui termini ſunt, eadem littera notari. quod nouum eſt, & inuſitatum.*

C Erit igitur ut rectangulum m l n ad quadratum l x, ita tranſuerſum figuræ latus ad latus rectum.] *Ex 21. primi libri huius.*

D Vt autem m o p rectãgulum ad quadratum o r, ita tranſuerſum latus ad rectum.] *Hoc eſt ut rectangulum q o p ad quadratum o r, ita figura, quæ fit ad p q diametrum*

metrum ſectionis d p e tranſuerſum latus ad rectum: alia enim ſunt huius figuræ latera, atque ea,
de quibus proxime dictum eſt: quamquam eandem inter ſe proportionem habeant. nam ut figuræ,
quæ fit ad n m diametrum ſectionis x n f tranſuerſum latus ad rectum, ita eſt figuræ ad diametrũ
p q ſectionis d p e tranſuerſum latus ad rectum: quod facile demonſtrabitur hoc modo. Ducatur li-
nea n t ſectionem x n f contingens in n: & ducatur p u, quæ ſectionem d p e contingat in p. æqui
diſtabunt n t, p u inter ſeſe: utraque enim æquidiſtat lineæ a c, uel h k: & fient triangula b n t, 5 huius
b p u ſimilia. ergo ut b n ad n t, ita b p ad p u: & ut quadratum b n ad n t quadratum, ita qua- 4. ſexti
dratum b p ad quadratum p u. ſed ut quadratum b n ad quadratum n t, ita figuræ, quæ fit ad dia- 22
metrum u m tranſuerſum latus ad rectum, ex ijs, quæ tradita ſunt in prima huius: & eadem ratio
ne ut quadratum b p ad quadratum p u, ita figuræ, quæ fit ad diametrum p q tranſuerſum latus ad
rectum. ergo ut figuræ ad diametrum u m tranſuerſum latus ad rectum, ita figuræ ad p q tranſuer
ſum latus ad rectum. ex quibus conſtat hyperbolas x n f, d p c inter ſe ſimiles eſſe, itemq; alias, quæ
cunque circa eaſdem aſymptotos hoc pacto deſcribuntur.

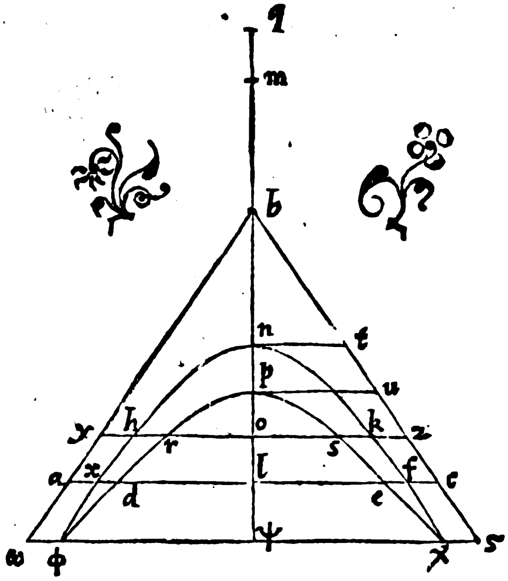
Ergo ut rectangulum m l n ad quadratum l x, ita rectangulum m o p ad quadratũ E
o r.] Sequitur enim ex iam dictis, ut rectangulum m l n ad quadratum l x, ita eſſe rectangulum
q o p ad quadratum o r. quare & permutando ut m l n rectangulum ad rectangulum q o p, ita qua
dratum l x ad o x quadratum.

Rectangulum uero m l n maius eſt rectangulo m o p.] Hoc eſt rectangulum m l n ma F
ius rectangulo q o p. nam rectangulum m l n maius eſt rectangulo q l p. ergo rectangulo q o p mul
to maius erit; quòd punctũ o ſupra l ſumatur. Illud autem ita demonſtrabimus. rectangulum enim 3. ſecūd
m l n æquale eſt rectangulo m n l, & quadrato n l; quorum quadratum n l eſt æquale duobus qua 4
dratis n p, p l, & ei, quod bis n p l continetur. ſimiliter rectangulum q l p eſt æquale rectangulo
q p l, & p l quadrato; quorum rectangulum q p l rurſus eſt æquale tribus rectangulis, rectangulo
ſcilicet contento lineis m n, p l; & contento q m, p l; & rectangulo n p l: quæ duo poſtrema rectan- 1. ſecūdi.
gula ſunt æqualia ei, quod bis n p l cōtinetur; eſt enim q m ipſi n p æqualis. Itaque ſublatis utrin
que communibus, nempe quadrato p l, & rectangulo, quod bis continetur n p l; relinquitur ex alte
ra quidem parte rectangulum m n l unà cum quadrato n p; ex altera uero rectangulum contentum
m n, & p l. ſed rectangulum m n l eſt æquale duobus rectangulis, uidelicet rectangulo m n p, & ei, 1. ſecūdi
quod m n, & p l continetur. rectangulũ igitur m l n maius eſt, quàm q l p, quadrato n p, & m n p
rectangulo. Vt autem rectangulum m l n ad quadratum l x, ita rectangulum q l p ad quadratum
l d: & permutando. ex quibus ſequitur quadratum x l maius eſſe quadrato l d. ergo linea x l maior
erit, quàm l d: & tota x f maior, quàm d e, & multo maior quàm r s. Hæc eò ſpectare uidentur,
ut oſtendat ſectionẽ d p e intra ipſam x n f contineri. quod tamen abſque his ex alijs, quæ in princi
pio dicta ſunt, ſatis conſtat. ſi enim punctum p, per quod ſectio d p e tranſit, infra n ſumitur; & ſe
ctiones inter ſe ſe conuenire non poſſunt: ſuperuacaneum quodammodo fuit in his tantopere immo-
rari. Sed uereor, ne locus corruptus ſit, ut Pappus aliud quoddam potius, quàm hoc oſtendere nolue
rit. non enim ex dictis apparet lineam r k minorem eſſe, quàm d f. quod ad propoſitum concluden-
dum præmonſtrare oportebat.

Atque eſt propter ſectiones rectangulum f d x æquale rectangulo k r h.] Hæc nos G
ita reſtituimus: nam græcus codex habet, rectangulum f d x æquale rectangulo s r h: & mendoſe,
ut uidetur: rectangulum enim f d x eſt æquale rectangulo k r h, ut demonſtrabimus: & ideo maius
rectangulo s r b. Producatur h k ex utraque parte adeo, ut ſecet aſymptoton a b in y, & aſym-
ptoton b c in z. Quoniam igitur ut y b ad b a, ita y z ad a c, atque eſt y b minor, quàm b a: erit & 4. ſexti
y z, quàm a c minor. ſed ex ijs, quæ proxime demonſtrata ſunt, a d minor eſt quàm y r: & f c mi- 14. quiti
nor, quàm k z; aſymptoti enim & ſectio productæ ad ſeipſas propius accedunt. quare ſi ex linea
y z demantur y r, k z; & ex a c demantur a d, f c: relinquitur r k multo minor quàm d f. Itaque
propter ſectionem d p e rectangulum y r z æquale eſt rectangulo a d c; utraque enim ſunt æqualia
quadrato p u, ex decima huius: & propter ſectionem x n f rectangulum y h z eſt æquale rectangu .1
lo a x c; quòd utraque ſint æqualia quadrato n t. rectãgulum uero y h z unà cum rectangulo h r k
eſt æquale rectangulo y r z, & rectangulum a x c unà cum rectangulo x d f æquale rectangulo
a d c; quod idem Pappus demonſtrauit in lemmatibus huius libri, lemmate tertio. quare ſi à rectan
gulo y r z auferatur rectangulum y h z, relinquitur rectangulum h r k: & ſi à rectangulo a d c
auferatur rectangulum a x c, relinquitur x d f rectangulum: ac propterea rectangulum h r k re-
ctangulo x d f eſt æquale. Vt igitur r k ad d f, ita eſt x d ad h r. ſed r k minor oſtenſa eſt, quàm 14. ſexti

d f. ergo & x d quàm h r minor erit.

H Quare ſemper ad minus interuallum perueniunt] *Non ſolum ad minus interuallum perueniunt, ſed ad interuallum quolibet dato interuallo minus. producantur enim ſectiones unà cum aſymptotis, quouſque interuallum, quod interijcitur inter aſymptotos, & ſectionem d p e, ſit dato interuallo minus; quod quidem fieri poſſe ex 14. huius apparet. erit tunc interuallum inter ſectiones interiectum multo minus interuallo dato. & quáquam hæ ſectiones in infinitum producantur, nunquam tamen inter ſe conueniunt, ut à Pappo ſuperius eſt demonſtratum: & ex proxime traditis aliter demonſtrare poſſumus in hunc modum. ſi enim fieri poteſt, conueniant in φ χ: & ducatur linea φ χ diametrum ſecans in ψ, qua primum æquidiſtet lineis a c, y z, ut ſit ad diametrum b ψ ordinatim applicata. Eodem modo, quo ſupra demonſtrabimus rectangulum m ψ n maius eſſe ractangulo q ψ p: & ut rectangulum m ψ n ad quadratum φ ψ, ita rectangulum q ψ p ad idem φ ψ quadratum: & permutando rectangulum m ψ n ad rectangulum q ψ p, ut quadratum φ ψ ad ſemetipſum. ergo rectangulum m ψ n æquale eſt rectangulo q ψ p. ſed et maius: quod eſt abſurdum.*



ALITER. Si ſectiones conueniant in φ χ, producatur linea φ χ uſque ad aſymptotos in puncta ω ς. erit rectangulum ω φ ς propter ſectionem x n f æquale quadrato n t: & propter ſectionem d p e æquale quadrato p u. quare quadratum n t quadrato p u æquale erit. Itaque quoniam ut quadratum n t ad quadratum p u, ita quadratum n b ad quadratum b p; erit & quadratum n b æquale quadrato b p: & ideo linea n b lineæ b p æqualis. quod itidem eſt abſurdum. non igitur hæ ſectiones inter ſe conueniunt. Quòd ſi linea φ χ non æquidiſtet lineis a c, y z: diuidatur bifariam in puncto ψ, & iuncta ψ b producatur ad m q: ſecet autem hyperbolas d p e, x n f in punctis p n: & ab ipſis ducantur p u, n t ſectiones contingentes, quæ lineis a c, y z æquidiſtabunt, ex quinta huius: fiatq; b m æqualis b n, & b q æqualis b p. erit n m ſectionis x n f: & p q ſectionis d p e diameter tranſuerſa. quare ſimiliter, ut ſupra, demonſtrabimus nullo modo fieri poſſe, ut hæ ſectiones inter ſe conueniant. 10. huius

K Sed & illud facile conſtare poteſt, ſi enim utraque ipſarum ad aſymptotos propius accedit, & ad ſe ſe propius accedant neceſſe eſt.] *Vide quomodo hæc ratio neceſſitatem habeat: poſſet enim quis dicere utramque ſectionem accedere quidem propius ad aſymptotos, ſed tamen pari interuallo, ita ut ſemper inter ſe ſe æquidiſtent.*

THEOREMA XIIII. PROSITIO XV.

Oppoſitarum ſectionum aſymptoti communes ſunt.

Sint

Sint oppoſitæ ſectiones, quarum diameter a b, & centrum
c. Dico ſectionum a b aſymptotos communes eſſe. Ducantur
enim per puncta a b lineæ d a e, f b g, quæ ſectiones contin-
gant. æquidiſtantes igitur ſunt d a e, f b g. Abſcindantur li- A
neæ d a, a e, f b, b g, ita ut cuiuſque earum quadratum æquale
ſit quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum a b conſtituitur.
ergo d a, a e, f b, b g inter ſe ſunt æquales. iungantur c d, c e, e f, B
c g. perſpicuum igitur eſt d c, c g in eadem recta linea contine- C
ri; itemq; e c, c f; propterea quòd æquidiſtantes ſunt d a e, f b g.
Itaque quoniam hyperbole eſt, cuius diameter a b; contin-
gens autem d e; & unaquæque linearum d a, a e poteſt quar-
tam partem figuræ, quæ ad a b conſtituitur: erunt d c, c e aſymptoti. & eadem ratio D
ne ipſius b ſectionis aſymptoti erunt f c, c g. oppoſitarum igitur ſectionum aſympto
ti communes ſunt.

FED. COMMANDINVS.

Aequidiſtantes igitur ſunt d a e, f b g.] *Vtraque enim æquidiſtat lineis, quæ ad diametrum* A
a b ordinatim applicantur.

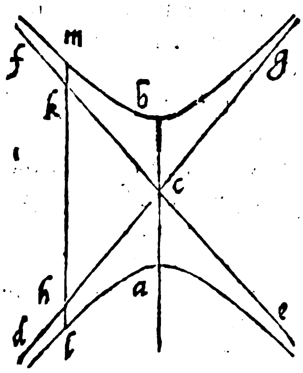
Ergo d a, a e, f b, b g inter ſe ſunt æquales.] *Ex 14. primi huius. nam tranſuerſum latus* B
a b eſt utrique commune, & recta figuræ latera inter ſe æqualia.

Perſpicuum igitur eſt d c, c g in eadem recta linea contineri: itemq; e c, c f, propte C
rea quòd æquidiſtantes ſunt d a e, f b g.] *Quoniam enim d a e, f b g inter ſe æquidiſtant,*
erit angulus d a c angulo g b c æqualis. linea uero a c eſt æqualis c b: & d a ipſi g b. quare & 29. primi
baſis d c baſi c g, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt. angulus igitur a c d eſt æqua- 4
lis angulo b c g. ſed duo anguli d c a, d c b ſunt æquales duobus rectis. itemq; g c b, g c a. quare re- 13
liquus ex duobus rectis, angulus d c b eſt æqualis reliquo a c g. Duo igitur anguli d c a, a c g duo-
bus rectis æquales erunt. & idcirco d c, c g in eadem recta linea continentur. Eodem quoque mo- 14. primi
do e c, c f in eadem recta linea contineri demonſtrabimus.

Erunt d c, c e aſymptoti.] *Ex prima huius.* D

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVI.

SI in oppoſitis ſectionibus, quædam recta linea ducatur, ſecans utramque linearum continentium angulum, qui deinceps eſt angulo ſectiones continenti: cum utraque oppoſitarum in uno tantum puncto conueniet: & lineæ, quæ ex ipſa abſciſſæ inter aſymptotos, & ſectiones interiiciuntur, æquales erunt.



Sint oppoſitæ ſectiones a b, quarum quidem centrum
c; aſymptoti uero d c g, e c f: & ducatur quædam recta li-
nea h κ, quæ utramque d c, c f ſecet. Dico h K produ-
ctam cum utraque ſectione in uno tantum puncto con-
uenire. Quoniam enim ſectionis a aſymptoti ſunt d c,
c e; & ducta eſt quædam recta linea h k, ſecans utramque
continentium angulum, qui deinceps eſt angulo ſectio-
nem continenti, uidelicet d c f: producta h k cum ſectio A
ne a conueniet; & ſimiliter cum ſectione b. conueniat
in punctis l m: & per c ipſi l m æquidiſtãs ducatur a c b.
æquale igitur eſt rectangulum k l h quadrato a c; & re- B
ctangulum h m k quadrato c b. quare & k l h rectan- C
gulum æquale eſt rectangulo h m k: & idcirco linea h l li- D
neæ k m eſt æqualis.

FED. COMMANDINVS.

A Producta h k cum ſectione a conueniet; & ſimiliter cum ſectione b.] *Ex undecima huius.*

B Aequale eſt igitur rectangulum k l h quadrato a c; & rectangulum h m k quadrato c b.] *Ex eadem.*

G Quare & k l h rectangulum eſt æquale rectangulo h m k.] *Quoniam enim linea a c lineæ c b eſt æqualis, quod e ſit ſectionis centrum; erit & quadratum a c quadrato c b æquale.*

D Et idcirco linea h l lineæ k m eſt æqualis.] *Illud nos hoc lemmate demonſtrabimus.*

Sit recta linea a b, in qua ſumantur duo puncta c d: ſitq; rectangulum d a c æquale rectangulo c b d. Dico lineam a c ipſi b d æqualem eſſe.

Si enim fieri poteſt, ſit a c maior, quàm b d: & addita utrique communi c d, erit a d maior, quàm c b: & propterea rectangulum d a c maius rectangulo c b d. ſed & æquale: quod eſt abſurdum. linea igitur a c ipſi b d eſt æqualis.

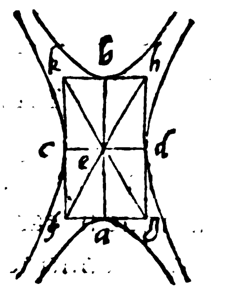
ALITER. *Poſſumus etiam recta demonſtratione uti hoc modo.*

14.ſexti *Quoniam enim rectangulum d a c rectangulo c b d eſt æquale, erit ut a d ad d b, ita b c ad*
9.quinti. *c a: & componendo ut a b ad b d, ita b a ad a c. ergo linea a c ipſi b d æqualis erit.*

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVII.

Oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ appellantur, aſymptoti communes ſunt.

Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur, quarum diametri coniugatæ
a b, c d; & centrum e. Dico earum aſymptotos communes eſſe. ducantur enim lineæ
A ſectiones in punctis a, b, c, d, contingentes, quæ ſint f a g, g d h, h b k, k c f ergo pa-
B rallelogrammum eſt f g h k. Itaq; ſi iungantur f e h, k e g, erunt
C f e h, k e g rectæ lineæ, & diametri ipſius parallelogrammi,
C D quæ à puncto e bifariam ſecabuntur. & quoniam figura, quæ
ad diametrum a b conſtituitur, æqualis eſt quadrato c d: &
E F eſt c e æqualis e d: unumquodque quadratorũ f a, a g, k b,
G b h erit quarta pars figuræ, quæ conſtituitur ad a b. ergo
f e h, k e g ſectionum a b aſymptoti ſunt. ſimiliter demonſtrabimus ſectionum c d eaſdem eſſe aſymptotos. oppoſitarũ igitur ſectionum, quas coniugatas dicimus, aſymptoti communes ſunt.



FED. COMMANDINVS.

A Ergo parallelogrammum f g h k.] *Aequidiſtant enim f g, k h lineis, quæ ad a b diametrum ordinatim applicantur: quare & inter ſe ſe. & eadem ratione k f, h g inter ſe æquidiſtant.*

B Erunt f e h, k e g rectæ lineæ, & diametri ipſius parallelogrammi.] *Hoc demonſtrauimus in quintam decimam huius, uidelicet f e h in eadem recta linea contineri, & ſimiliter k e g.*

C Quae à puncto e biſariam ſecabuntur.] *Hoc etiam eodem in loco demonſtrauimus.*

D Et quoniam figura, quæ ad diametrum a b conſtituitur, æqualis eſt quadrato c d.] *Quoniam enim linea c d ſectionum a b ſecunda diameter eſt, coniugata ipſi a b, mediam proportionem habet inter figurarum latera, ex diffinitione ſecundæ diametri. quare ut a b ad c d, ita c d*
17.ſexti. *ad rectum figuræ latus: & idcirco rectangulum, quod fit ex a b, & latere recto, quadrato c d eſt æquale.*

E Et eſt c e æqualis e d.] *Aliter enim non eſſet ſecunda diameter.*

F Vnumquodque quadratorum f a, a g, k b, b h erit quarta pars eius figuræ.] *Nã*

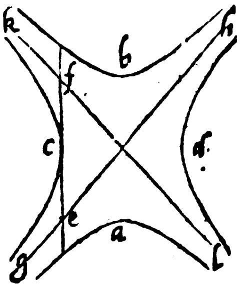
cum

cum c d æquidiſtet f g, k h, & a b ipſis f k, g h; erunt lineæ f a, k b æquales c e; & a g, b h ipſi c d. quare uniuſcuiuſque quadratum quarta pars eſt quadrati c d, hoc eſt figuræ eius, quæ ad a b conſtituitur. 34. primi 20. ſexti

Ergo ſ e h, K e g ſectionum a b aſymptoti ſunt.] *Ex prima huius.* G

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVIII.

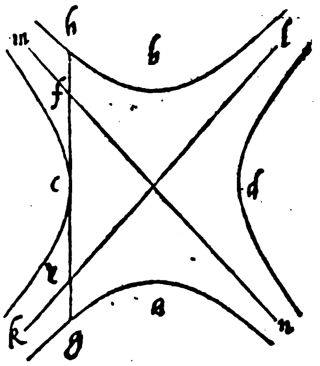
SI uni oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ dicuntur, occurrat recta linea; & producta ad utraſque partes extra ſectionem cadat: cum utraque ſectionum, quæ deinceps ſunt, in uno tantum puncto conueniet.



Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ dicuntur a b c d; & ipſi c occurrat recta linea e f, quæ producta ad utraſque partes extra ſectionem cadat. Dico e f cum utraque ſectione a b conuenire in uno tantum puncto. ſint enim g h, K l ſectionum aſymptoti. ergo e f ſecabit utramque g h, k l: & propterea cum ſectionibus a b in uno tantum puncto conueniet. 3. huius 16. huius

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XIX.

SI in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ducatur recta linea, quamuis ipſarum contingens; cum ſectionibus, quæ deinceps ſunt, conueniet: & ad tactum bifariam ſecabitur.



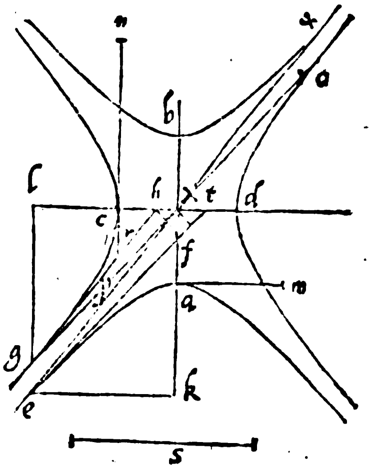
Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ dicuntur a b c d: & ſectionem c contingat recta linea e f. Dico e f productam conuenire cum ſectionibus a b: & ad punctum c bifariam ſecari. Nam ipſam quidem conuenire cum ipſis a b manifeſte patet. Itaque conueniat in punctis g h. Dico c g ipſi c h eſſe æqualem. ducantur enim ſectionum aſymptoti k l, m n. æquales igitur ſunt e g, ſ h: Itemq; c e, c f. ergo & tota c g toti c h æqualis erit. ex antecedente. 16. huius 3. huius

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XX.

SI unam oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ appellantur, recta linea contingat; & per ipſarum centrum ducantur duæ lineæ, una quidem per tactum, altera uero contingenti æquidiſtans, quouſque occurrat uni earum ſectionum, quæ deinceps ſunt: recta linea, quæ in occurſu ſectionem contingit, æquidiſtans erit lineæ per tactum, & centrum ductæ; quæ uero per tactus & centrum ducentur, oppoſitarum ſectionum coniugatæ diametri erunt.

Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur, quarum diametri coniugatæ ſint a b, c d; centrum x: & ſectionem a contingat recta linea e f, quæ producta conueniat cum c χ in t: & iuncta e χ ad x producatur. deinde per χ ducatur ipſi e f æquidiſtans χ g: & per g contingens ſectionem h g. Dico h g ipſi χ e æquidiſtare: & g o e x coniugatas diametros eſſe. applicentur enim ordinatim e k, g l, c r p: lineæ uero, A

B iuxta quas poſſunt applicatæ, ſint a m, c n. Quoniam igitur, ut b a ad a m, ita eſt n c
C ad c d: & ut b a ad a m, ita rectangulum χ k f ad quadratum k e: ut uero n c ad c d,
ita quadratum g l ad rectangulum χ l h: erit ut rectangulum χ k f ad quadratum k e,
ita quadratum g l ad rectangulum χ l h. Sed rectangulum χ κ f ad k e quadratum
proportionem compoſitam habet ex proportione
χ k ad K e, & ex proportione f k ad k e: & quadratum
g l ad rectangulum χ l h proportionem habet
23. ſexti compoſitam ex proportione g l ad l χ & proportione
g l ad l h. proportio igitur compoſita ex proportione
χ k ad κ e, & proportione f K ad k e eadem
eſt, quæ componitur ex proportione g l ad l χ, &
D proportione g l ad l h. quarum quidem proportio
f κ ad K e eadem eſt, quæ g l ad l χ; lineæ enim e κ,
k f, f e æquidiſtant ipſis χ l, l g, g χ. reliqua igitur proportio
χ k ad k e eadem erit, quæ g l ad l h. Quòd
cum circa æquales angulos, qui ad κ l, latera proportionalia
6. ſexti ſint; triangulum c k χ ſimile erit triangulo
g h l, & æquales habebit angulos, ſub quibus eiuſdem
rationis latera ſubtenduntur: ergo æqualis eſt angulus
29. primi e χ k angulo l g h. eſt autem & totus k χ g æqualis
toti l g χ. quare reliquus e χ g reliquo h g χ eſt
E æqualis; ac propterea linea e χ ipſi g h æquidiſtat.

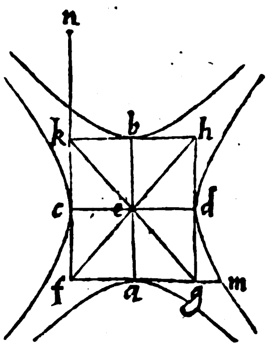


F Itaque fiat ut p g ad g r, ita h g ad lineam, in qua s. erit linea s dimidia eius, iuxta
quam poſſunt, quæ ad diametrum o g applicantur in ſectionibus c d. Sed a b ſectionum
G ſecunda diameter eſt c d, cum qua conuenit ipſa e t. rectangulum igitur ex t χ &
k e æquale eſt quadrato c χ: ſi enim à puncto e ipſi k χ æquidiſtantem duxerimus, rectangulum,
quod fit ex t χ, & linea, quæ inter χ & æquidiſtantem interiicitur, quadra-
H K to c χ æquale erit. quare ut t χ ad k e, ita t χ quadratum ad quadratum χ c. ut autem
L M t χ ad k e, ita t f ad f e; hoc eſt triangulum t χ f ad rriangulum e χ f. & ut quadratum
N t χ ad quadratum χ c, ita triangulum t χ f ad triangulum X c p; hoc eſt ad triangulum
g h X. Vt igitur triangulum t X f ad triangulum e X f, ita t X f triangulum ad triangulum
9. quinti. g h X: & ideo triangulum g h X æquale eſt triangulo X e f. habet autem & angulum
O h g X angulo X e f æqualem; quoniam e X quidem æquidiſtat g h; & e f ipſi g X.
15. ſexti 16. ergo latera quæ ſunt circa æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent;
eſtq́; ut g h ad e X, ita e f ad g X. rectangulũ igitur h g X æquale eſt rectangulo X e f.
P Itaque quoniam ut linea s ad h g, ita r g ad g p: & ut r g ad g p, ita X e ad e f; æquidiſtant
enim. quare ut s ad h g, ita X e ad e f. Vt autem s ad h g, ſumpta X g communi
altitudine, ita eſt rectangulum ex s & X g ad rectangulum h g X. & ut X e ad e f,
lemin 22 decimi ita quadratum X e ad rectangulum X e f. Vt igitur rectangulum ex s & X g ad rectangulum
h X g, ita X e quadratum ad rectangulum X e f: & permutando ut rectangulum
ex s & g X ad quadratum X e, ita rectangulum h g X ad rectangulum X e f.
Sed æquale eſt rectangulum h g X rectangulo X e f. ergo rectangulũ ex s & g X æquale
eſt quadrato X e: & rectangulum ex s & g X quarta pars eſt figuræ, quæ ad g o conſtituitur;
nam & g X eſt dimidia ipſius g o, & s dimidia eius, iuxta quam poſſunt: quadratum
uero e X quarta pars eſt quadrati e x, quod e X æqualis ſit X x. ergo quadratum
e x æquale eſt figuræ ad g o conſtitutæ. ſimiliter demonſtrabimus & quadratum
g o figuræ, quæ fit ad c x, eſſe æquale. ex quibus ſequitur, ut e x, g o oppoſitarum ſectionum
a b, c d diametri coniugatæ ſint.

FED. COMMANDINVS.

A Deinde per χ ducatur ipſi e f æquidiſtans χ g.] *Intelligendum g X productam ſectioni occurrere in o puncto.. Apollonius punctum, in quo recta linea ſectioni, uel alteri lineæ occurrit σύμπτωσιν uocat, nobis occurſum latine liceat appellare.*

Quo-



Quoniam igitur, ut b a ad a m, ita eſt n c ad c d.] *Hoc ita demonſtrabimus. ſint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur, quarum diametri coniugatæ a b, c d; centrum e; & aſymptoti f h, g k: iunganturq; f a g, g d h, h b x, k c f: ſit autem ſectionis a rectum latus a m, & ſectionis c rectum latus c n. Dico ut b a ad a m, ita eſſe n c ad c d. Quoniam enim ut b a ad a m, ita eſt quadratum e a ad quadratum a f, quod in prima propoſitione oſtenſum fuit: & eadem ratione, ut n c ad c d, ita quadratum f c ad quadratum c e. ſed ut quadratum e a ad quadratum* 22. ſexti *a f, ita eſt f c quadratum ad quadratum c e; quòd e a, f c æquales ſint;* 34. primi *itemq; æquales a f, c e. ergo ut b a ad a m, ita n c ad c d.* B

Et ut b a ad a m, ita rectangnlum χ k f ad quadratũ x e.] *Ex 37. primi huius.* C

Quarum quidem proportio f k ad k e eadem eſt, quæ g l ad l χ; lineæ enim e k, k f, f e ipſis χ l, l g, g χ æquidiſtant.] *Cum enim g χ æquidiſtet e f; & l g ipſi k f; erit angulus e f k æqualis angulo g χ k, hoc eſt angulo χ g l: angulus autem e k f* 29. primi *æqualis eſt ipſi χ l g, quòd & e k æquidiſtet l χ. reliquus igitur angulus reliquo eſt æqualis: &* 34 *triangulum f k e triangulo g l χ ſimile. quare ut f k ad k e, ita g l ad l χ.* D

Ac propterea linea e χ ipſi g h eſt æquidiſtans.] *Ex 28. primi. ſed hoc etiam ex ſecundo lemmate Pappi conſtare poteſt.* E

Erit linea s dimidia eius, iuxta quam poſſunt, quæ ad diametrum o g applicãtur.] *Ex 51. primi huius.* F

Rectangulum igitur ex e χ & x e æquale eſt quadrato c χ. ſi enim à puncto e ipſi k χ æquidiſtantem duxerimus, rectangulum, quod fit ex t χ, & ea, quæ &c.] *Ex 38. primi huius.* G

Quare ut t χ ad k e, ita t χ quadratum ad quadratum χ c.] *Quoniam enim rectangulum ex t χ & k e æquale eſt quadrato χ c; erunt tres lineæ t χ, χ c, k e proportionales. ergo ut t χ ad k e, ita quadratum t χ ad χ c quadratum, ex corollario 2c. ſexti.* H

Vt autem t χ ad k e, ita t f ad f e.] *Ex 4. ſexti, propter ſimilitudinem triangulorum t f χ, e f k.* K

Hoc eſt triangulum t χ f ad triangulum e χ f.] *Ex prima ſexti.* L

Et ut quadratum t χ ad quadratum χ c, ita triangulum t χ f ad triangulum χ c p] M *Rurſus cum tres lineæ proportionales ſint t χ, χ c, k e; erit triangulum t χ f ad triangulum χ c p,* cor. 20. ſexti. *ut t χ ad k e; ſunt enim ea triangula inter ſe ſimilia, quòd p χ æquidiſtet f t. ut autem t χ ad k e, ita t χ quadratum ad quadratum χ c. triangulum igitur t χ f ad triangulum χ c p, eſt ut quadratum t χ ad χ c quadratum.*

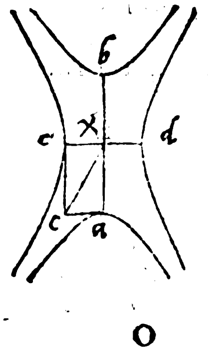
Hoc eſt ad triangulum g k χ.] *Eſt enim triangulum g h χ triangulo χ c p æquale, quod probatum eſt in ſecunda demonſtratione 43. primi huius.* N

Habet autem & angulum h g χ angulo χ e f æqualem, quoniam e χ quidem æquidiſtat g h, & e f ipſi g χ.] *Angulus enim h g χ eſt æqualis angulo g χ e, hoc eſt ipſi χ e f.* 29. primi O

Et ut r g ad g p, ita χ e ad e f, æquidiſtant enim.] *Ex quarta ſexti, nam triangula r g p, χ e f ſimilia ſunt, quòd etiam χ f ipſi r p æquidiſtet.* P

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXI.

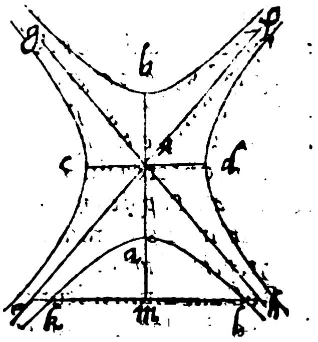
Iiſdem poſitis oſtendendum eſt punctum, in quo contingentes lineæ conueniunt, ad unam aſymptoton eſſe.



Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur; & earum diametri a b c d: ducanturq; contingentes a e, e c. Dico punctum e ad aſymptoton eſſe. eſt enim quadratum c χ æquale quartæ parti figuræ, quæ ad a b conſtituitur: quadrato autẽ c χ æquale eſt quadratum a e. ergo quadratum a e quartæ parti dictæ figuræ erit æquale. Itaque iungatur e χ. aſymptotos igitur eſt eχ: & propterea punctum e ad ipſam aſymptoton neceſſario conſiſtit.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXII.

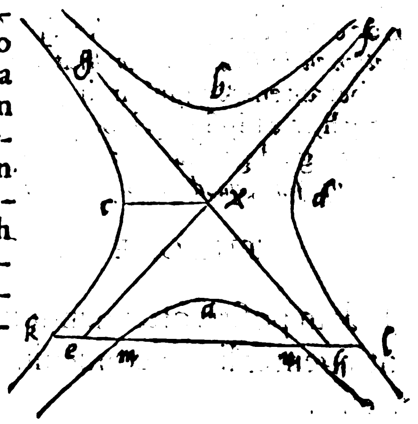
SI in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ex centro ad quamuis ſectionem ducatur recta linea; & huic æquidiſtans altera ducatur, quæ cum una ex ſectionibus, quæ deinceps ſunt, & cum aſymptotis conueniat: rectangulum conſtans ex portionibus lineæ ductæ inter ſectionem, & aſymptotos interiectis, quadrato lineæ, quæ ex centro ducitur, æquale erit.



Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coiugatæ appellantur a b c d; quarum aſymptoti e χ f, g χ h: & ex centro χ ducatur quædam recta linea χ c d: & huic æquidiſtans ducatur e k l h, quæ & ſectionem, quæ deinceps eſt, & aſymptotos ſecet. Dico rectangulum e k h quadrato c χ æquale eſſe. ſecetur enim k l bifariã in m; & iuncta m χ producatur. diameter igitur eſt a b ipſarum a b ſectionum. Et quoniã
5.huius linea, quæ in puncto a ſectionem contingit, æquidiſtans eſt ipſi e h: erit e h ad diametrum a b ordinatim applicata. centrum autem eſt χ. ergo a b, c d coniugatæ ſunt dia-
20. huius metri: proptereaq; quadratum c χ æquale eſt quartæ par
10.huius ti figuræ, quæ ad a b conſtituitur. ſed quartæ parti dictæ figuræ æquale eſt rectangulum h k e. rectangulũ igitur h k e quadrato c χ æquale erit.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIII.

SI in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ex centro ducatur quædam recta linea ad quamuis ſectionem; & huic æquidiſtans ducatur, quæ cum tribus, quæ deinceps ſunt, ſectionibus conueniat: rectangulum conſtans ex portionibus lineæ ductæ inter tres ſectiones interiectis, duplum erit quadrati eius lineæ, quæ ex centro ducitur.



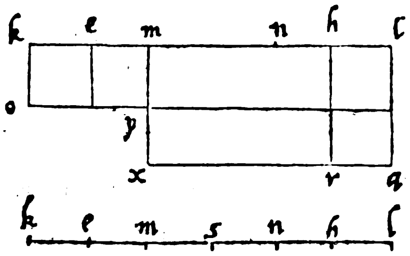
Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur a b, c d: quarum centrum ſit χ: & à puncto χ ad quamuis ſectionem ducatur quædam recta linea χ c: atque huic æquidiſtans ſit k l, quæ cum tribus deinceps ſectionibus conueniat. Dico rectangulum k m l quadrati c χ duplum eſſe. ducan-
A tur enim aſymptoti ſectionum e f, g h. ergo quadratum c χ æquale eſt utrique rectangulorum h
B m e, h k e. rectangulum autem h m e unà cum rectangulo h k e æquale eſt rectangulo l m k; propterea quòd extremæ lineæ ſunt æquales. rectangulum igitur l m k quadrati c χ duplum erit.

EVTOCIVS.

B Rectangulum autem h m e unà cum rectangulo h k e æquale eſt rectangulo l m k; propterea quòd extremæ lineæ ſunt æquales.] *Sit recta linea l k: & ſit l h æqualis e k; & h n ipſi e m: ducantur autem à punctis m k perpendiculares lineæ m x, k o: ita ut m x ſit æqualis m k, & k o æqualis k e; & compleantur parallelogramma x h, h a. Itaque quoniam m x æqualis eſt m k, hoc eſt p o: & l h æqualis k e, hoc eſt k o: erit h a parallelogrammum parallelogrammo*

grammo m o æquale. commune apponatur x h. totum igitur parallelogrammum l x æquale eſt duobus parallelogrammis x h, m o; hoc eſt h o, p r. eſt autem parallelogrammum l x, quod continetur l m k: & parallelogrammum h o continetur h k e; & parallelogrammum p r, h m e. ſed licet & aliter idem demonſtrare.

Secetur m n bifariam in s: conſtat igitur & l k in s bifariam ſecari, & rectangulum h k e æquale eſſe rectangulo l e k, quod h k ſit æqualis l e. Et quoniam l k ſecatur in partes æquales in s, & in partes inæquales in e; erit rectangulum l e k unà cum quadrato e s æquale quadrato s k. quadratum autem e s rectangulo h m e unà cum quadrato s m eſt æquale. ergo quadratum s k æquale eſt rectangulo l e k, hoc eſt h k e, & rectangulo h m e unà cum quadrato s m. eadẽ ratione erit quadratum s k æquale rectangulo l m k, & quadrato s m. quare rectangulum h k e unà cum rectangulo h m e, & quadrato s m æquale eſt rectangulo l m k, & quadrato s m. commune auferatur quadratum s m. reliquum igitur rectangulum h k e unà cum rectangulo h m e eſt æquale rectangulo l m k. 5. ſecũdi.



FED. COMMANDINVS.

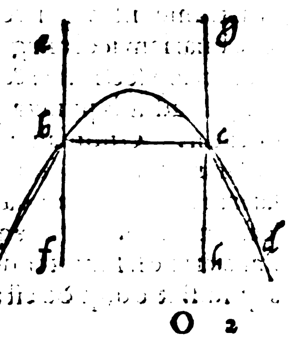
A Ergo quadratum c x æquale eſt utrique rectangulorum h m e, h k e.] *Eſt enim ex antecedenti propoſitione rectangulum h m e æquale quadrato c x: & ex undecima huius rectangulum h k e eidem quadrato c x eſt æquale.*

B Rectangulum autem h m e unà cum rectangulo h k e æquale eſt rectangulo l m k, propterea quòd extremæ lineæ ſunt æquales.] *Hoc apparet ex tertio & quarto lemmate Pappi, quamquam in tertio aliter concludat. oſtendit enim rectangulum l e k unà cum rectangulo h m e æquale eſſe rectangulo l m k. ſed cum l h, k e ſint æquales, rectangulum h k e æquale eſt ipſi l e k. quare ſequitur rectangulum h k e unà cum rectangulo h m e æquale eſſe rectangulo l m k. Eutocius ſecundam demonſtrationem ex Pappo ſumpſit. Nos uero priuſquam in lemmata Pappi, uel Eutocij commentarios incideremus, illud ex prima ſecundi libri elementorum in hunc modum demonſtrauimus.*

Iiſdem quæ ſupra manentibus dico rectangulum h m e unà cum rectangulo h k e æquale eſſe rectangulo l m k. eſt enim rectangulum h K e æquale rectangulo m K e, unà cum eo, quod fit ex h m & K e. commune apponatur rectangulum h m e. ergo rectangula h m e, h K e æqualia ſunt rectangulis h m e, m K e, unà cum eo, quod fit ex h m, & K e. Rurſus rectangulum l m K æquale eſt rectangulo h m K unà cum eo, quod ex l h, & m K conſtat; hoc eſt rectangulo e K m: eſt enim e K æqualis l h, quorum quidem rectangulum h m K eſt æquale rectangulo h m e, unà cum eo, quod fit ex h m, & K e. ergo rectangulum l m K æquale eſt rectangulis h m e, e K m, unà cum eo, quod fit ex h m, K e. quibus quidem æqualia erant rectangula h m e, h K e. rectangulum igitur h m e unà cum rectangulo h K e æquale eſt rectangulo l m K. 1. ſecũdi

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIIII.

Si parabolæ duæ rectæ lineæ occurrant, utraque in duobus punctis: & nullius ipſarum occurſus alterius occurſibus contineatur: conuenient inter ſe ſe extra ſectionem.



Sit parabole a b c d, cui duæ rectæ lineæ a b, c d occurrant, ita ut nullius ipſarum occurſus alterius occurſibus contineatur. Dico eas productas inter ſe conuenire. Ducantur enim per b c diametri ſectionis e b f, g c h. æquidiſtantes igitur ſunt: & utraque ſectionem in uno tantum puncto ſecat. Itaque iuncta cor. 51. 1. huius b c anguli e b c, g c b duobus rectis ſunt æquales: & idcirco lineæ b a, d c angulos duobus rectis minores efficiunt. ergo inter ſe ſe extra ſectionem conuenient. 26. 1. huius

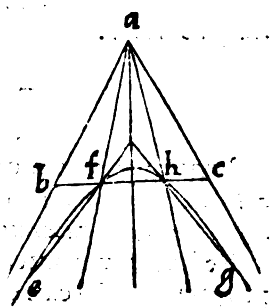
EVTOCIVS.

Animaduertendum eſt Apollonium συμπτώσεις, hoc eſt occurſus, appellare puncta, in quibus lineæ a b, c d ſectioni occurrunt. et obſeruare oportet, ut puncta extra ſe ſe poſita ſint. eadem etiam eueniunt in ipſis contingentibus.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXV.

Si hyperbolæ occurrant duæ rectæ lineæ, utraque in duobus punctis; nullius autem ipſarum occurſus alterius occurſibus contineatur: conuenient quidem inter ſe ſe extra ſectionem, ſed tamen intra angulum, qui hyperbolen continet.

Sit hyperbole, cuius aſymptoti a b, a c: & duæ rectæ lineæ e f, g h ſectioni occurrant, ita ut nullius ipſarum occurſus occurſibus alterius contineatur. Dico e f g h productas extra ſectionem quidem, ſed tamen intra angulum b a c inter ſe cõuenire. iunctæ enim a f, a h producantur; & iungatur f h. Itaque quoniam e f, g h productæ ſecant angulos a f h, a h f; & ſunt dicti anguli duobus rectis minores, conuenient inter ſe ſe extra ſectionem quidem, ſed tamen intra angulum b a c. ſimiliter demonſtrabimus e f, g h inter ſe conuenire, etiam ſi ſectionem contingant.



FED. COMMANDINVS.

Similiter demonſtrabimus e f, g h inter ſe conuenire, etiam ſi ſectionem contingãt] *Conuenire ſcilicet intra angulum aſymptotis contentum, quod quidem etiam patere poteſt ex corollario trigeſimæ primæ primi huius. linea enim, quæ hyperbolen contingit, ſi producatur ſecat diametrum inter uerticem & centrum ſectionis. Idem quoque euenire perſpicuum eſt, ſi altera quidem linea ſectionem contingat, altera uero in duobus punctis ſecet.*

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVI.

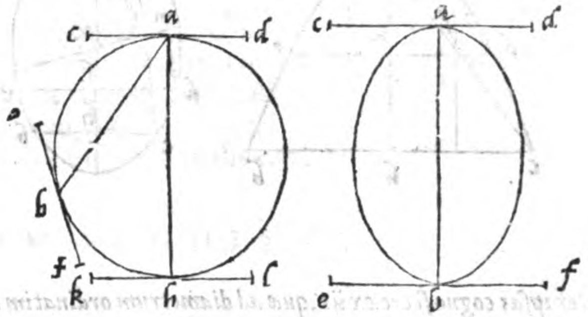
Si in ellipſi, uel circuli circumferentia duæ rectæ lineæ non tranſeuntes per centrum ſe inuicem ſecent; biſariam ſe ſe non ſecabunt.

Si enim fieri poteſt, in ellipſi, uel circuli circumferentia duæ rectæ lineæ c d, e f non tranſeuntes per centrũ ſe ſe biſariam ſecẽt in g: ſitq; h centrum ſectionis: & iuncta g h ad a b puncta producatur. Quoniam igitur a b diameter eſt, ipſam e f biſariam ſecans; linea, quæ ad a ſectionem contingit, æquidiſtans erit e f. ſimiliter demonſtrabimus eandem etiam ipſi c d æquidiſtare. ergo e f æquidiſtat c d, quod eſt abſurdum. non igitur e f, c d ſe ſe biſariam ſecant. 6. huius 30. primi

THEO

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVII.

SI ellipſim, uel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingant: & ſi quidem ea, quæ tactus coniungit per centrum tranſeat ſectionis: contingentes lineæ ſibi ipſis æquidiſtabunt: ſin minus, conuenient inter ſe ſe ad eaſdem centri partes.



Sit ellipſis, uel circuli circumferentia a b, quam contingant duæ rectæ lineæ c a d, eb f: iungaturq́; a b: & primo tranſeat per centrum. Dico c d ipſi e f æquidiſtantem eſſe. Quoniam enim a b diameter eſt ſectionis: & c d in puncto a ipſam cõtingit; erit c d æquidiſtans lineis, quæ ad diametrum a b ordinatim applicantur: & ſimili ratione e f erit eiſdem æquidiſtans. ergo c d æquidiſtat e f. Si uero a b per centrum non tranſeat, ut apparet in ſecunda figura, ducatur a h diameter: & per h contingens K h l. æquidiſtat igitur k l ipſi c d. quare e f producta ad eaſdem partes centri, in quibus eſt a b, cum c d conueniet.

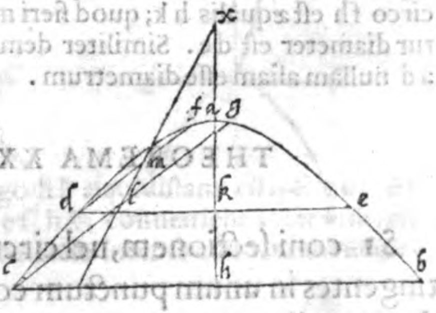
THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVIII.

SI in coni ſectione, uel circuli circumferentia duas lineas æquidiſtantes recta linea bifariam ſecet, diameter erit ſectionis.

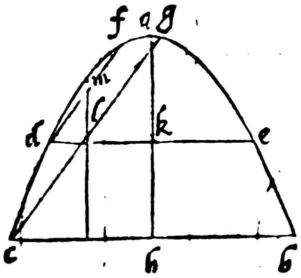
In ſectione enim coni duæ lineæ æquidiſtantes a b, c d in punctis e f bifariam ſecentur: & iuncta e f producatur. Dico e f ſectionis diametrum eſſe. Si enim non eſt, ſit g h f diameter, ſi fieri poſsit. ergo quæ in puncto g contingit ſectionem, æquidiſtans eſt ipſi a b. quare & ipſi c d. eſt autem g h diameter. ergo c h, h d æquales ſunt, quod eſt abſurdum: poſuimus enim c e æqualem e d. non igitur g h diameter eſt ſectionis. ſimiliter demonſtrabimus neque aliam quampiam eſſe diametrum, præterquam ipſam e f. ergo e f ſectionis diameter erit. 5.&6. huius.

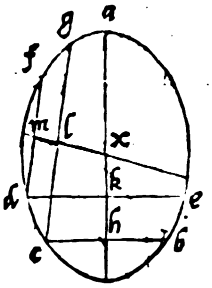
EVTOCIVS.

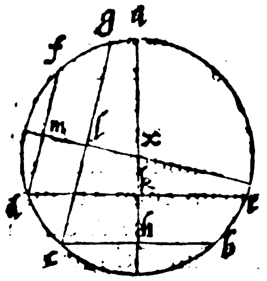
NON inutile erit data in plano curua linea, inueſtigare utrum circuli circumferentia ſit, uel alia ex coni ſectionibus; an uero ab his ipſis diuerſa. Itaque ſit a b c; & oporteat ſpeciem ipſius inueſtigare. ſumantur in linea aliqua puncta c d, per quæ ducantur intra ipſam lineæ æquidiſtantes c b, d e: & rurſus ab iiſdem punctis aliæ æquidiſtantes ducantur c g, d f: bifariamq; ſecentur; c b, d e quidem in h k punctis; c g, d f uero in l m; & iungantur h k, l m. ſi igitur omnes, quæ ipſi c b æquidiſtant, à linea h K; & quæ æquidiſtant c g ab ipſa m l bifariam diuidantur; erit a b c una ex coni ſectionibus, cuius diametri h k, m l; ſin minus, non erit. Sed quæ ſit ex quatuor comperiemus, lineas h k, l m in infinitum producentes utraque ex parte; uel enim æquidiſtant, & eſt parabole: uel ad partes quidem h l inter ſe conueniunt,



& eſt ellipſis, aut circulus: uel ad alteras partes, & eſt hyperbole. ellipſim uero à circulo diſtinguemus ex puncto, in quo conueniunt h x, m l, quod eſt centrum. ſi enim ab eo ad lineam ducta ſint æquales, conſtat a b c circuli circumferentiam eſſe; ſin minus, ellipſim. Poſſumus autem &







aliter ipſas cognoſcere ex iis, quæ ad diametrum ordinatim applicantur, uidelicet c b, d k. nam ſi fuerit ut quadratum c b ad quadratum d k, ita b x ad a k, parabole erit; At ſi c b quadratum ad quadratum d k maiorem quidem habuerit proportionem, quàm h a ad a k, hyperbole; ſi uero minorem, ellipſis. Sed etiam ex lineis contingentibus eaſdem diſcernere licebit, ſi ea, quæ ſuperius dicta ſunt, ipſis ineſſe in memoriam redigemus.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXIX.

SI coni ſectionem, uel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in idem punctum conueniant; & ab eo ad punctum, quod lineam tactus coniungentem bifariam ſecat, alia linea ducatur; ſectionis diameter erit.

Sit coni ſectio, uel circuli circumferentia, quam contingant rectæ lineæ a b, a c, in punctum a conuenientes: & ducta b c ſecetur bifariam in d: & iungatur a d. Dico a d diametrum eſſe ſectionis. Si enim fieri poteſt, ſit d e diameter: & iungatur c e, quæ ſectionem ipſam ſecabit. Secet autem in f: & per f ipſi c d b ducatur æquidiſtans f h g. Itaque quoniam c d æqualis eſt d b, erit & f h ipſi h g æqualis. Sed linea, quæ in l contingit ſectionem, æquidiſtans eſt b c: & eſt f g eidem æquidiſtans. ergo f g æquidiſtat lineæ ſectionem in puncto l contingenti: & idcirco f h eſt æqualis h k; quod fieri minime poteſt. non igitur diameter eſt d e. Similiter demonſtrabimus, præter a d nullam aliam eſſe diametrum.

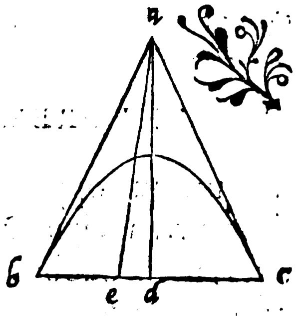
ex demõſtratis in 6. primi huius.

5. huius

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXX.

SI coni ſectionem, uel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in unum punctum conueniant: diameter, quæ ab eo puncto ducitur, lineam tactus coniungentem bifariam ſecabit.

Sit



Sit coni ſectio, uel circuli circumferentia b c: & ducantur duæ rectæ lineæ b a, a c ipſam contingentes, quæ conueniant in a: & iuncta b c per a ducatur ſectionis diameter a d. Dico b d ipſi d c æqualem eſſe. non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit b e æqualis e c: & iungatur a e. ergo a e diameter eſt ſectionis. eſt autem & a d: quod eſt abſurdum. A
B
Si enim ſectio eſt ellipſis, punctum a, in quo conueniunt diametri, centrum erit ſectionis extra ipſam: quod fieri non poteſt. ſi uero ſit parabole, diametri ipſius inter ſe ſe conuenient: quòd ſi hyperbole, quoniam lineæ b a, a c ſectioni occurrunt, & unius occurſus alterius occurſu non continetur; conuenient inter ſe ſe intra angulum hyperbolen continentem. 25.huius
ſed & in ipſo angulo; centrum enim ponitur, cum d a, a e diametri ſint: quod eſt abſurdum. non igitur b e ipſi e c æqualis erit.

FED. COMMANDINVS.

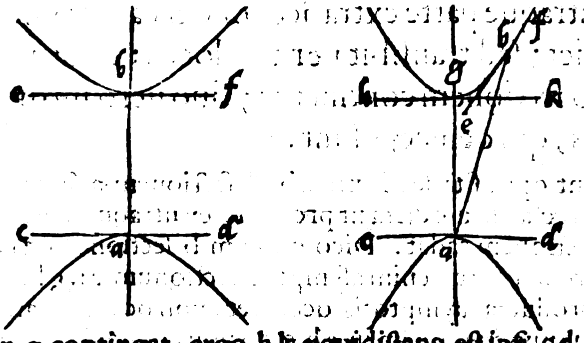
Ergo a e diameter eſt ſectionis.] *Ex antecedente.* A

Eſt autem & a d: quod eſt abſurdum.] *Nam ſi ſint duæ diametri a c, a d, ſequitur abſurdum in omnibus coni ſectionibus. in parabola enim ſequitur diametros inter ſe ſe conuenire, quas æquidiſtantes eſſe conſtat. ſed in reliquis, quoniam diametri in centro conueniunt, erit a ipſarum centrum. quare in ellipſi & circulo centrum extra ponitur, quod fieri non poteſt. In hyperbola uero cum lineæ b a, a c ipſam contingant, conuenient quidem extra, ſed tamen intra angulum, qui hyperbolen continet. atqui conueniunt in ipſo angulo, uidelicet in eius centro: quod itidem eſt abſurdum.* B

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXI.

Si utramque oppoſitarum ſectionum duæ rectæ lineæ contingant; & ſi quidem ea, quæ tactus coniungit, per centrum tranſeat, contingentes lineæ æquidiſtantes erunt; ſin minus, conuenient inter ſe ſe ad eaſdem partes centri.

Sint oppoſitæ ſectiones a b: & ipſas contingant c a d, e b f: linea uero, quæ ex a ad b ducitur, primum tranſeat per centrum ſectionum. Dico c d ipſi e f æquidiſtantem eſſe. Quoniam enim oppoſitæ ſectiones ſunt, quarum diameter a b: & unam earum cõtingit linea c d in puncto a: quæ per b ipſi c d æquidiſtans ducitur, ſectionem continget. contingit autem e f. ergo c d ipſi e f eſt æquidiſtans. A
ſed non tranſeat per centrum, quæ ex a ad b ducitur: ſitq; ſectionũ diameter a g: & h K ſectionem in g contingat. ergo h k æquidiſtans eſt ipſi c d. Et quoniam hyperbolen duæ rectæ lineæ contingunt e f, h k; conuenient inter ſe ſe. 25.huius
eſt autem h K ipſi c d æquidiſtans. quare & c d, e f productæ inter ſe conueniant neceſſe eſt, & ad eaſdem centri partes. 2. primi Vitell.

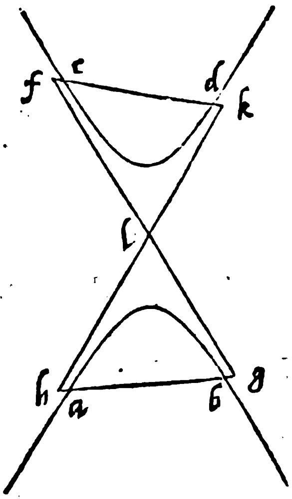


FED. COMMANDINVS.

Quæ per b ipſi c d æquidiſtans ducitur, ſectionem continget.] *Illud uero nos demonſtrauimus in commentarijs in 44. primi huius.*

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXII.

Si utrique oppoſitarum ſectionum rectæ lineæ occurrant, ipſas uel in uno puncto contingentes, uel in duobus ſecantes; & productæ inter ſe conueniant: punctum, in quo cõueniunt, erit in angulo, qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti.



A Sint oppoſitæ ſectiones, quas uel in uno puncto contingant, uel in duobus ſecent rectæ lineæ a b, c d: & productæ inter ſe conueniant. Dico punctum, in quo conueniunt, eſſe in angulo, qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti. ſint enim ſectionum aſymptoti f g, h k.
8. huius ergo a b producta aſymptotis occurret. occurrat in h g punctis. & quoniam ponimus lineas c d, h g inter ſe conuenire, neceſſe eſt ut conueniant in locum, qui eſt ſub
B angulo h l f, uel k l g. ſimiliter idem demonſtrabitur, etiam ſi a b, c d ſectiones contingant.

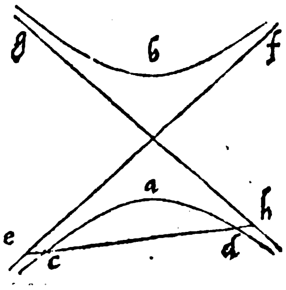
FED. COMMANDINVS.

A Dico punctum, in quo conueniunt, eſſe in angulo, qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti.] *In angulo intellige in loco, qui eſt ſub lineis angulum continentibus.*

B Similiter idem demonſtrabitur, etiam ſi a b, c d ſectiones contingant.] *Nam quamquam contingant ſectiones, tamen aſymptotis occurrent ex tertia huius. idem quoque ſequetur, ſi altera contingat ſectionem, altera in duobus punctis ſecet.*

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXIII.

Si uni oppoſitarum ſectionum recta linea occurrens, & producta ex utraque parte extra ſectionem cadat; cum altera ſectione non conueniet; ſed tranſibit per tres locos; quorum unus quidem eſt ſub angulo ſectionem continente; duo uero ſub iis angulis, qui deinceps ſunt.



A Sint oppoſitæ ſectiones a b: & ſectionem a ſecet quædam recta linea c d; ita ut producta ex utraque parte extra ſectionem cadat. Dico c d cum b ſectione non conuenire. ducantur enim aſymptoti ſectionum e f, g h. ergo c d producta aſymptotis occurret. non occurret autem
8. huius in aliis punctis, quàm in e h. ergo non conueniet cum ſectione b: & per tres locos tranſibit. ſi enim cum utraque
B oppoſitarum ſectionum conueniret, nulli ipſarum in duobus punctis occurreret, propter ea, quæ ſuperius demonſtrata ſunt.

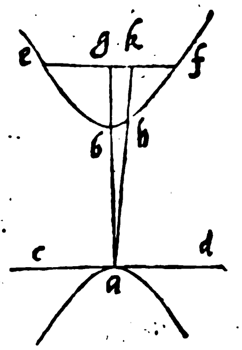
FED. COMMANDINVS.

A Non occurret autem in aliis punctis. quàm in e h.] *Alioqui ſequeretur, ut duarum rectarum linearum ijdem termini eſſent, quod eſt abſurdum.*

B Si enim cum utraque oppoſitarum ſectionum conueniret, nulli ipſarum in duobus punctis occurreret.] *Nam linea, quæ ſecat utramque continentium angulum, qui deinceps eſt angulo ſectiones continenti, cum utraque oppoſitarum ſectionum in uno tantum puncto conuenit, ex 16. huius. Idem etiam eueniet, ſi linea c d ſectionem contingat, quoniam producta cum utraque aſymptoton conueniet, ex terti huius; & reliqua ſimiliter demonſtrabuntur.*

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIIII.

Si unam oppoſitarum ſectionum recta linea contingat: & huic æquidiſtans ducatur in altera ſectione; quæ à tactu ad mediam lineæ æquidiſtantis ducitur, oppoſitarum ſectionum diameter erit.



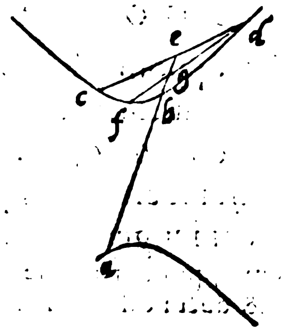
Sint oppoſitæ ſectiones a b, quarum unam, uidelicet a cõtingat in a puncto recta linea c d: ipſiq; c d æquidiſtans ducatur e f in altera ſectione: & ſecta e f in g biſariam, iungatur a g. Dico a g oppoſitarum ſectionum diametrũ eſſe. ſi enim fieri poteſt, ſit diameter a h k. ergo quæ in h ſectionem contingit, æquidiſtans eſt ipſi c d. ſed & c d ipſi e f eſt æquidiſtans. quare ea, quæ contingit ſectionem, æquidiſtat e f: & propterea e k ipſi k f eſt æqualis: quod fieri non poteſt. eſt enim e g æqualis g f. non igitur a h diameter eſt oppoſitarum ſectionum: ex quibus manifeſte conſtat a b ipſarum diametrum eſſe.

5. huius

47. primi huius.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XXXV.

Si diameter in una oppoſitarum ſectionum rectam lineam biſariam ſecet: quæ in termino diametri contingit alteram ſectionem; lineæ biſariam ſectæ erit æquidiſtans.

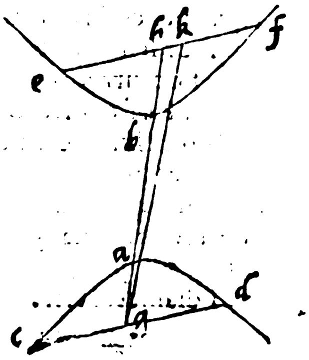


Sint oppoſitæ ſectiones a b, quarum diameter a b in b ſectione rectam lineam c d biſariam ſecet in e. Dico lineam, quæ in puncto a ſectionem contingit, ipſi c d æquidiſtantem eſſe. ſi enim fieri poteſt, ſit lineæ in a contingenti æquidiſtans d f. ergo d g ipſi g f eſt æqualis. ſed & d e æqualis eſt e c. æquidiſtat igitur c f ipſi e g: quod eſt abſurdum; producta enim c f cum ipſa e g conueniet. quare neque d f lineæ ad a contingenti eſt æquidiſtans, neque alia quæpiam præter ipſam c d.

48. primi huius.
2. ſexti
22. primi huius.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXVI.

Si in utraque oppoſitarum ſectionum rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes ducantur: quæ ipſarum medium coniungit, oppoſitarum ſectionum diameter erit.



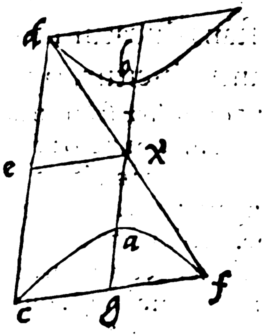
Sint oppoſitæ ſectiones a b: in quarum utraque ducantur rectæ lineæ c d, e f inter ſe æquidiſtantes: & in punctis g h biſariam ſecentur: & iungatur g h. Dico g h diametrum eſſe oppoſitarum ſectionum. ſi enim non eſt, ſit g K. ergo quæ in a ſectiones contingit, ipſi c d eſt æquidiſtãs:

5. huius

& idcirco ipſi e f. æquales igitur ſunt e k, k f. quod fieri non poteſt: quoniam & e h, h f ſunt æquales. ergo g k non eſt diameter oppoſitarum ſectionum. quare relinquitur g h ipſarum diametrum eſſe.

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVII.

Si oppoſitas ſectiones recta linea ſecet, non tranſiens per centrum; quæ à medio ipſius ad centrum ducitur oppoſitarum ſectionum diameter erit, quæ recta appellatur; tranſuerſa uero diameter, ipſi coniugata eſt ea, quæ à centro ducitur æquidiſtans lineæ bifariam ſectæ.



Sint oppoſitæ ſectiones a b: & ipſas ſecet recta linea c d, non tranſiens per centrum, quæ bifariam in e diuidatur: ſitq; ſectionum centrum χ: & iungatur χ e: & per χ ipſi c d æquidiſtans ducatur a b. Dico a b, e χ diametros eſſe coniugatas oppoſitarum ſectionum. ducta enim d χ ad f
A producatur; & iungatur c f. æqualis igitur eſt d χ ipſi χ f.
2. ſexti eſt autem & d e æqualis e c. ergo e χ, c f inter ſe æquidi-
B ſtant. Itaque producatur b a ad g. & quoniã d χ, χ f ſunt
6. huius æquales, & e χ, g f æquales erunt. & propterea ipſæ c g, g f.
C ergo quæ ad a ſectionem contingit, æquidiſtans eſt c f.
16. primi huius. quare & ipſi e χ. lineæ igitur a b, e χ oppoſitarum ſectionum coniugatæ diametri erunt.

FED. COMMANDINVS

A Aequalis igitur eſt d χ ipſi χ f.] *Ex 30. propoſitione primi huius.*

B Et quoniam d χ, χ f ſunt æquales, & e χ, g f æquales erunt.] *Cum enim e χ, c f æquidiſtent, erit triangulum d e χ ſimile triangulo χ g f. quare ut d χ ad χ e, ita χ f ad f g: & permutando ut d χ ad χ f, ita e χ ad g f. æqualis igitur eſt e χ ipſi g f.* 14. quĩti

C Et propterea ipſæ c g, g f.] *Nam & c g eidem e χ eſt æqualis, ex trigeſima quarta primi elementorum.*

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVIII.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingant, in unum punctum conuenientes: quæ ab eo puncto ad medium lineæ tactus coniungentis ducitur, oppoſitarum ſectionum diameter erit, quæ recta uocatur; tranſuerſa uero, ipſi coniugata, quæ per centrum ducitur, lineæ tactus coniungenti æquidiſtans.

Sint oppoſitæ ſectiones a b, quas rectæ lineæ c χ, χ d contingant: & ducta c d bifariam diuidatur in e. & iungatur e χ. Dico e χ diametrum rectam eſſe; tranſuerſam uero, ipſiq; coniugatam, quæ per centrum ducitur lineæ c d æquidiſtans. ſit enim
8. huius
A diameter e f, ſi fieri poteſt: & ſumatur quoduis punctum f. ergo d χ ipſi e f occurret. occurrat in f puncto, & iungatur c f. con-
B ueniet igitur c f cum ſectione. cõueniat autem in a: & per a ducatur a b, quæ lineæ c d ſit æquidiſtans. Itaque quoniam e f diameter eſt, ſecans c d bifariam: & ipſi æquidiſtantes lineas bifariam ſecabit. quare a g ipſi g b eſt æqualis. ſed cum c e ſit æ-
C qualis e d; erit in triangulo c f d linea a g æqualis g k. ex quo
D ſequitur & g k ipſi g b æqualem eſſe: quod fieri non poteſt. non igitur e f diameter erit.

FED.

FED. COMMANDINVS.

Ergo d χ ipſi e f occurrit.] *Si enim à puncto d linea ordinatim applicetur in b ſectione, æquidiſtabit lineæ e f. quare & d X ipſi e f occurrat neceſſe eſt, ex ſecunda propoſitione Vitellionis.* A

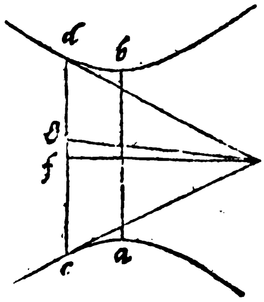
Conueniet igitur c f cum ſectione.] *Nam cum c X contingat ſectionem, linea c f eandem neceſſario ſecabit, ex 32. primi huius.* B

Erit in triangulo c f d linea a g æqualis g b.] *Vide quæ ſcripſimus in ſextam primi huius.* C

Non igitur e f diameter erit.] *Deeſt hoc loco principalis concluſio, quam nos ſupplere debemus: ex his enim neceſſario colligitur, lineam e X oppoſitarum ſectionum diametrum rectam eſſe. at uero tranſuerſam eſſe eam, quæ per centrum ducitur ipſi c d æquidiſtans, demonſtrabimus, ut in antecedenti propoſitione.* D

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXIX.

SI oppoſitas ſectiones contingant duæ rectæ lineæ in unum punctū conuenientes; quæ per punctum illud, & per centrum ducitur, lineam tactus coniungentem biſariam ſecabit.



Sint oppoſitæ ſectiones a b, quas duæ rectæ lineæ c e, e d
contingant: & iuncta c d ducatur diameter e f. Dico c f
ipſi f d eſſe æqualem. ſi enim non ita ſit, ſecetur c d biſa-
riam in g: & iungatur g e. ergo g e diameter eſt. ſed & e f A
eſt diameter. punctum igitur e centrum erit: idcircoq; li- B
neæ, quæ contingunt ſectiones, in centro ipſarum conue-
nient: quod eſt abſurdum. conſtat ergo c f ipſi f d æqua- C
lem eſſe.

FED. COMMANDINVS.

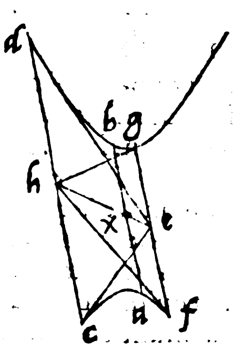
Ergo g e diameter eſt.] *Ex antecedenti propoſitione.* A

Punctum igitur e centrum erit.] *Centrum enim eſt, in quo oppoſitarum ſectionum diametri conueniunt.* B

Quod eſt abſurdum.] *Si quidem lineæ, quæ contingunt oppoſitas ſectiones, extra centrum earum conueniunt, uidelicet in angulo, qui deinceps eſt angulo ſectiones continenti; ut conſtat ex trigeſima ſecunda huius.* C

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XL.

SI oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes in unum conueniant: & per punctum, in quo conueniunt, linea ducatur, tactus coniungenti æquidiſtans, & ſectionibus occurrens: quæ ab occurſibus ad medium lineæ tactus coniungentis ducuntur, ſectiones ipſas contingunt.



Sint oppoſitæ ſectiones a b, quas duæ rectæ lineæ c e,
e d contingant: iungaturq; c d: & per e ducatur f e g ipſi
c d æquidiſtans. ſecta autem c d biſariam in h, iungantur
f h, h g. Dico f h, h g ſectiones contingere. ducatur enim
e h. ergo e h recta diameter eſt, tranſuerſa uero, ipſi con A
iugata, quæ per centrum ducitur æquidiſtans c d. Itaque
ſumatur centrum χ, & ducatur a χ b ipſi c d æquidiſtās.

ergo h e,a b coniugatæ diametri ſunt.atque ordinatim applicata eſt c h ad ſecundam
B diametrum; & c e ſectionem contingit, ſecundæ diametro occurrens. rectangulum
igitur e χ h æquale eſt quadrato dimidiæ ſecundæ diametri; hoc eſt quartæ parti figu
ræ,quæ ad a b conſtituitur.& quoniam f e ordinatim applicatur; & iungitur f h,per
C ſpicuum eſt f h contingere ſectionem a.ſimiliter & g h continget ſectionem b. lineæ
igitur f h,h g ſectiones a b neceſſario contingunt.

FED. COMMANDINVS.

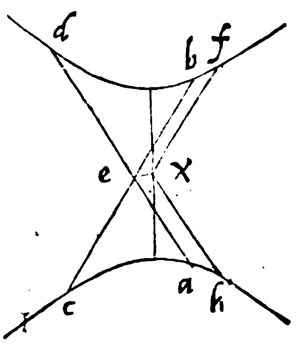
A Ergo e h recta diameter eſt,tranſuerſa uero ipſi coniugata.] *Ex 38. huius.*

B Rectangulum igitur e χ h æquale eſt quadrato dimidiæ ſecundæ diametri.] *Ex 38. primi huius.*

C Perſpicuum eſt f h contingere ſectionem a.] *Ex ijs, quæ nos demonſtrauimus in commentarijs 38. primi huius.*

THEOREMA XL. PROPOSITIO XLI.

SI in oppoſitis ſectionibus duæ rectæ lineæ ſe inuicem ſecent, non tranſeuntes per centrum, ſe ſe bifariam non ſecabunt.



Sint oppoſitæ ſectiones a b, in quibus duæ rectæ lineæ
c b,a d per centrum non tranſeuntes,ſe inuicem ſecent in
e. Dico eas bifariam ſe ſe non ſecare.ſi enim fieri poteſt, ſe
cent ſe ſe bifariam: ſitq; χ ipſarum centrum. & iungatur
A e χ.ergo e χ diameter eſt.ducatur per χ lineæ b c æquidi
B ſtans χ f.erit χ f diameter ipſi e χ coniugata. quæ igitur
in f ſectionem contingit, eſt æquidiſtans e χ. Eadem ra
tione ſi ducatur h X æquidiſtans a d, quæ in h contingit
ſectionem ipſi e X erit æquidiſtans. ergo quæ contingit
ſectionē in f æquidiſtans eſt lineæ in h contingenti,quod
C fieri non poteſt:conueniunt enim inter ſe ſe, ut iam demõ
ſtratum eſt.non igitur c b, a d per centrum non tranſeun
tes ſe ſe bifariam ſecant.

FED. COMMANDINVS.

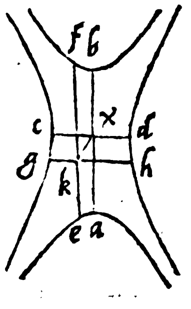
A Ergo e X diameter eſt.] *Ex 37. huius.*

B Erit X f diameter ipſi e X coniugata.] *Ex eadem.*

C Conueniunt enim inter ſe ſe,ut iam demonſtratum eſt.] *Cum enim linea tactus f h coniungens non tranſeat per centrum, quæ ſectionem contingit in f, non æquidiſtabit lineæ in h contingenti, ſed cum ea conueniet ad eaſdem partes centri, ex 34. primi huius.*

THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLII.

SI in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ ſe inuicem ſecent, non tranſeuntes per centrum; bifariam ſe ſe non ſecabunt.



Sint oppoſitæ ſectiones,quæ coniugatæ appellantur a b,c d: &
in ipſis duæ rectæ lineæ e f,g h non tranſeuntes per centrum ſe in
uicem ſecent in κ. Dico e f,g h ſe ſe bifariam non ſecare. ſi enim
fieri poteſt,ſecent ſe bifariam:& ſit X ſectionum centrum. duca-
tur autem a b æquidiſtans e f.& c d ipſi g h æquidiſtans; & iun-
A gatur k X.ergo k X,a b coniugatæ diametri ſunt.& ſimiliter con
AB iugatæ ſunt diametri κ X, c d, quare linea contingens ſectionem
in a æquidiſtat lineæ in c contingenti : quod fieri non poteſt:
C conueniunt enim inter ſe ſe, quoniam contingens in c ſectiones

ab ſecat: & contingens in a ſecare ipſas c d. patet igitur eas conuenire in locum, qui eſt ſub angulo a X c. non igitur e f, g h per centrum non tranſeuntes, ſe ſe bifariã ſecãt. D

FED. COMMANDINVS.

A Ergo k χ, a b coniugatæ diametri ſunt.] *Ex trigeſima ſeptima huius.*

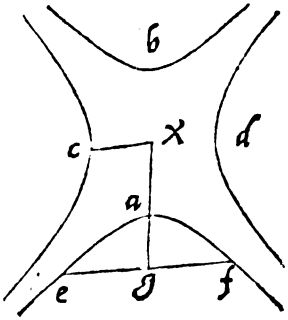
B Quare linea contingens ſectionem in a æquidiſtat lineæ in c contingenti.] *Nam quæ in a ſectionem contingit, æquidiſtans eſt ipſi k χ: & ſimiliter quæ contingit in c eidem eſt æquidiſtans. quæ autem æquidiſtant uni & eidem, & inter ſe ſe æquidiſtant. linea igitur contingens ſectionem in a æquidiſtat ei, quæ in ipſo c contingit.* 30. primi

C Conueniunt enim inter ſe ſe, quoniam contingens in c ſectiones a b ſecat: & contingens in a ſecat ipſas c d.] *Ex decima nona huius.*

D Patet igitur eas conuenire in locum, qui eſt ſub angulo a χ c.] *Conueniunt enim ad eam asymptoton, quæ inter a χ. χ c interijcitur, ex uigeſima prima huius.*

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLIII.

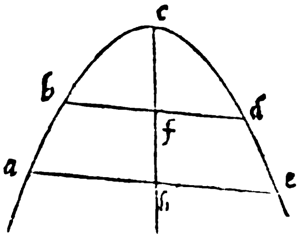
Si unam oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ appellantur recta linea in duobus punctis ſecet: & a centro duæ lineæ ducantur, una quidem ad medium lineæ ſecantis, altera uero ipſi æquidiſtans: erunt hæ oppoſitarum ſectionum coniugatæ diametri.



Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur a b, c d: & ſectionem a quædam recta linea ſecet in duobus punctis e f: & e f bifariam diuidatur in g. ſit autem X ſectionum centrum: iungaturq; X g: & c X ipſi e f æquidiſtans ducatur. Dico a X, X c coniugatas diametros eſſe. Quoniam enim diameter eſt a X, & lineam e f bifariam ſecat; quæ in a cõtingit ſectionem æquidiſtans eſt ipſi e f. 5. huius quare & ipſi c X. & quoniam oppoſitæ ſectiones ſunt, & unam ipſarum, uidelicet a quædam recta linea in a contingit; a centro uero X ducuntur duæ lineæ, una quidem X a ad tactum, altera uero c X contingenti æquidiſtans: 20. huius erunt a X, X c ſectionum coniugatæ diametri: hoc enim ſuperius demonſtratum eſt.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XLIIII.

Data coni ſectione diametrum inuenire.



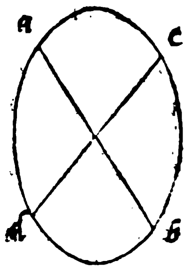
Sit data coni ſectio, in qua puncta a b c d e: & oporteat ipſius diametrum inuenire. Itaque factum iam ſit; & diameter ſit c h: ductis autem ordinatim lineis d f, e h, & productis; erit d f æqualis f b; & e h ipſi h a. ſi igitur ordinabimus b d, a e, ut ſint poſitione æquidiſtantes; data erunt puncta h f, quare & h f c poſitione data erit.

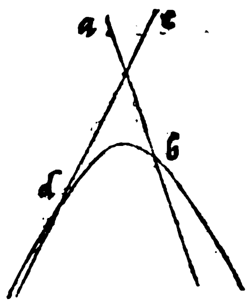
Componetur autem in hunc modum. ſit data coni ſectio, in qua a b c d e puncta: ducanturq; lineæ b d, a e inter ſe æquidiſtantes: & in punctis f h bifariam diuidantur. ergo iuncta f h diameter erit ſectionis. Eadem ratione & infinitas diametros inueniemus.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XLV.

DATA ellipſi, uel hyperbola cẽtrum inuenire.

Hoc autem manifeſte conſtat. Si enim duæ ſectionis diametri a b, c d ducantur; punctum, in quo ſe ſecant, centrum erit ſectionis, ut poſitum iam eſt.

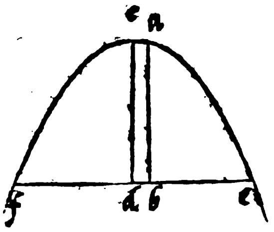




PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XLVI.

DATA coni ſectione axem inuenire.

Sit coni ſectio data primum parabole, in qua puncta f c e. Itaque oportet ipſius axem inuenire. Ducatur enim diameter a b: & ſi quidem a b ſit axis, factum erit, quod proponebatur; ſin minus, ponatur iam factum eſſe: & ſit axis c d. ergo c d ipſi a b eſt æquidiſtans: & quæ ad ipſam ducuntur perpendiculares bifariam diuidit. Sed perpendiculares ad c d, & ad ipſam a b perpendiculares ſunt. ergo c d bifariam diuidit perpendiculares, quæ ad a b ducuntur. ſi igitur ordinabimus e f perpendicularem ad a b, erit ea poſitione data: & idcirco e d æqualis d f. quare punctum d datum erit. dato autem d puncto, & ducta d c, quæ lineæ a b poſitione datæ ſit æquidiſtans; erit & ipſa d c poſitione data.



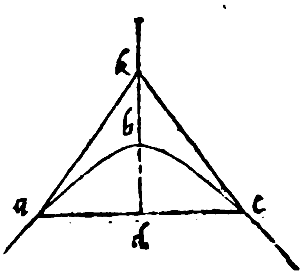
Componetur autem in hunc modum. ſit data ſectio parabole, in qua puncta f c e: ducaturq́; diameter a b: & b e ad ipſam perpendicularis, quæ ad f producatur. ſi ergo e b ſit æqualis b f, perſpicuæ conſtat a b axem eſſe: ſin minus, diuidatur e f in d bifariam: & ipſi a b æquidiſtans ducatur c d. erit utique c d ſectionis axis; eſt enim diametro æquidiſtans; hoc eſt diameter, quæ lineam e f & bifariam, & ad rectos angulos diuidit. Datæ igitur parabolæ axis inuentus eſt c d. Itaque patet unum eſſe parabolæ axem. nam ſi alius axis ſit, ut a b, erit ipſi c d æquidiſtans, & ſecabit e f. quare & bifariam ſecabit. ergo b e eſt æqualis b f. quod fieri non poteſt.

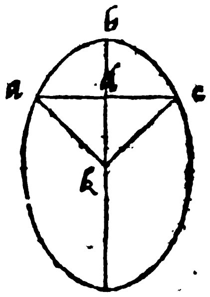
PROBLEMA V. PROPOSITIO XLVII.

DATA hyperbola, uel ellipſi axem inuenire.

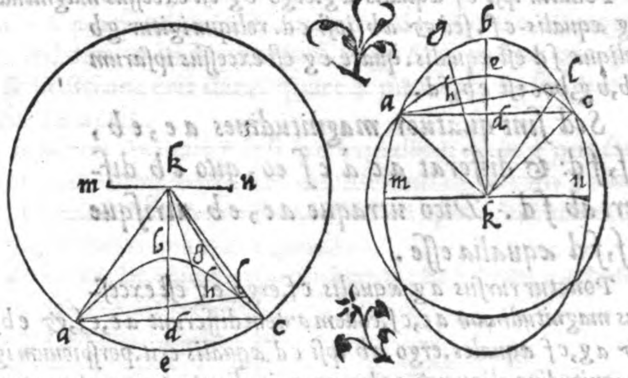
Sit hyperbole, uel ellipſis a b c; & oporteat ipſius axem inuenire. Sit iam inuentus: & ſit K d: centrum uero ſectionis ſit k. ergo k d lineas, quæ ad ipſam ordinatim applicantur, bifariam, & ad rectos angulos ſecat. Itaque ducatur perpendicularis c d a; & k a, k c iungantur. Quoniã igitur c d æqualis eſt d a; & c K ipſi K a eſt æqualis. ergo ſi punctum K datum ſit, erit linea c k data. quare ex centro k & interuallo c k circulus deſcriptus, & per ipſum a tranſibit, & erit poſitione datus. eſt autem & a b c ſectio data poſitione. ergo & punctum a. ſed & c eſt datum. da-

26. libri datorum





ta igitur poſitione linea c a:& eſt c d ipſi d a æqualis. ergo punctum d datur: ſed & ipſum K. linea igitur d k poſitione data erit. Componetur autem hoc modo, ſit data hyperbole, uel ellipſis a b c:& ſumpto k ipſius centro, in ſectione ſumatur quod uis punctum c: & ex centro k, interualloq; k c circulus deſcribatur c e a. ducta uero c a bifariam ſecetur in d: & iungãtur k c, k d, k a: & K d ad b producatur. Itaque quoniam a d eſt æqualis d c:& d k communis: erunt duæ lineæ c d, d k duabus a d d K æquales:& baſis K a æqualis baſi k c. quare linea k d b ipſam a d c bifariam, & ad rectos angulos ſecat: & idcirco k d eſt axis. ducatur per K ipſi c a æquidiſtans m k n. ergo m n eſt axis ſectionis ipſi b K coniugatus. 26. libri datorum 7. 82. primi



THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLVIII.

His autem demonſtratis, reliquum eſt, ut oſtendamus non eſſe alios axes ipſarum ſectionum.

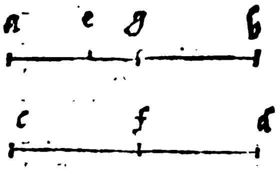
Si enim fieri poteſt, ſit axis alius K g. ergo ducta perpendiculari a h, ex iis, quæ ſupra diximus, erit a h æqualis h l. quare & a K ipſi K l. ſed & ipſi k c. ſunt igitur K l, K c inter ſe æquales. quod eſt abſurdum. At uero circulum a e c non occurrere ſectioni in alio puncto inter a c, in hyperbola quidem perſpicuum eſt: ſed in ellipſi, ducantur perpendiculares c r, l s. & quoniam K c eſt æqualis k l, A
ex centro enim ſunt: erit & quadratum c K quadrato k l æquale. quadrato autem k c æqualia ſunt quadrata c r, r K: & quadrato K l æqualia quadrata l s, s k. ergo quadrata c r, r k quadratis l s, s K æqualia erunt. quo igitur differt quadratum c r a quadrato l s, e o quadratum s k differt à quadrato K r. Rurſus quoniam rectangulum m r n unà cum quadrato r k æquale eſt quadrato K m: rectangulum autem m s n unà cum quadrato s k eidem k m quadrato eſt æquale: erit rectangulum m r n unà cum quadrato r k æquale rectangulo m s n unà cum s K quadrato. ergo quo differt quadratum s k à quadrato k r, eo rectangulum m r n differt à rectangulo m s n. ſed 47. primi B 5. ſecũdi
demonſtratum eſt, quo quadratum s K differt à quadrato K r, eo differre c r quadratum à quadrato l s. quo igitur differt quadratum c r à quadrato l s, eo rectangulum m r n à rectangulo m s n differt. Itaque cum applicatæ ſint, c r, l s; erit ut quadratum c r ad rectangulum m r n, ita quadratum l s ad rectangulum m s n. demonſtratum autem eſt in utriſque eundem eſſe exceſſum. ergo quadratum c r rectangulo m r n eſt æquale: & quadratum l s æquale rectangulo m s n. circulus igitur eſt linea l c m. quod eſt abſurdum. poſuimus enim ellipſim eſſe. D C E F

E V T O C I V S.

Quo igitur differt quadratum c r à quadrato l s, eo quadratum s K differt à quadrato k r. B

Sint duæ magnitudines æquales a b, c d: & diuidantur in partes inæquales in punctis e f. Dico quo differt a e à c f, eo e b differre ab f d.

Ponatur ipſi c f æqualis a g.ergo e g eſt exceſſus magnitudinum a g,a c;hoc eſt c f,a c:eſt enim a g æqualis c f.ſed & a b ipſi c d. reliqua igitur g b reliquæ f d eſt æqualis. quare e g eſt exceſſus ipſarum e b,b g,hoc eſt e b,f d.



Sed ſint quatuor magnitudines a e, e b, c f, f d: & differat a c à c f eo, quo e b differt ab f d. Dico utraque a e, e b utriſque c f, f d æqualia eſſe.

Ponatur rurſus a g æqualis c f.ergo e g eſt exceſſus magnitudinum a e,c f.eodem autem differunt a e,c f,& e b, f d. æquales igitur ſunt g b,f d.ſed & a g,c f æquales.ergo a b ipſi c d æqualis erit.perſpicuum igitur eſt,ſi prima excedat ſecundam, magnitudine aliqua;& eadem magnitudine tertia quartam excedat: primam & quartam, ſecundæ & tertiæ æquales eſſe iuxta arithmeticam proportionem. Itaque his poſitis, ſi ſit ut prima ad tertiam, ita ſecunda ad quartam: prima quidem tertiæ æqualis erit: ſecundæ uero quartæ. poteſt enim hoc in alijs demonſtrari, propterea quòd in uigeſimo quinto theoremate quinti libri elementorum Euclidis demonſtratum eſt, ſi quatuor magnitudines proportionales ſint, primam & quartam reliquis duabus maiores eſſe.

FED. COMMANDINVS.

A Et quoniam k ç eſt æqualis K l, ex centro enim ſunt.] *Nam ſi ponamus utraque puncta c l eſſe in ellipſi & circulo, erunt lineæ k c, k l ex circuli centro: & idcirco inter ſe æquales.*

C Quo igitur differt quadratum c r à quadrato s l,eo rectangulum m r n à rectangulo m s n differt.] *Ex his ſequitur per ea, quæ Eutocius hoc loco demonſtrauit, quadratum c r unà cum rectangulo m s n æquale eſſe quadrato s l unà cum m r n rectangulo.*

D Itaque cum applicatæ ſint c r, l s, erit ut quadratum c r ad rectangulum m r n, ita quadratum l s ad rectangulum m s n.] *Ex uigeſima prima primi huius: quadratum enim c r ad rectangulum m r n eam proportionem habet, quam figuræ rectum latus ad tranſuerſum, & eandem habet quadratum l s a d rectangulum m s n. quare ſequitur, ut quadratum c r ad m r n rectangulum, ita eſſe quadratum l s ad rectangulum m s n.*

11.quinti

E Ergo quadratum c r rectangulo m r n eſt æquale.] *Si enim fieri poteſt, non ſit æquale quadratum c r rectangulo m r n. & cum quadratum c r ad rectangulum m r n eandem proportionem habeat, quam quadratum l s ad m s n rectangulum; erit ex uigeſima quinta quinti elementorum quadratum c r unà cum rectangulo m s n,uel maius, uel minus quadrato s l unà cum rectangulo m r n: quod eſt abſurdum;ſupra enim demonſtrauimus ea inter ſe ſe æqualia eſſe.*

F Circulus igitur eſt lineam l c m.] *Ex 2. lemmate Pappi in primum librum, & ex ijs, quæ Eutocius in quintam propoſitionem primi libri demonſtrauit.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XLIX.

DATA coni ſectione, & puncto non intra ſectionem dato, ab eo rectam lineam ducere, quæ ſectionem contingat.

Sit data coni ſectio primum parabole, cuius axis b d:& oporteat à puncto non intra ſectionem dato rectam lineam ducere, ut ante propoſitum eſt. Itaque datum punctum uel eſt in linea, uel in axe, uel in loco, quod extra relinquitur. ſit primum in linea, quod ſit a: ponaturq; iam factum eſſe: & ſit linea a e. ducatur autem

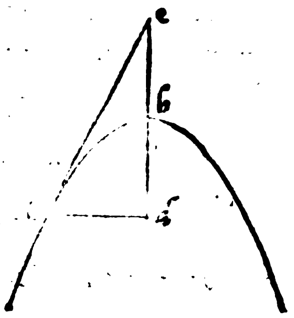
A B perpendicularis a d, quæ poſitione data erit: & erit b e æqualis b d. at b d eſt data. data igitur eſt b e: eſtq; pun

C ctum b datum. ergo & punctum e. ſed datum quoque

D eſt a punctum. linea igitur a e poſitione data erit.

Componetur autem in hunc modum. Ducatur ex puncto a perpendicularis a d: ponaturq; b e ipſi b d

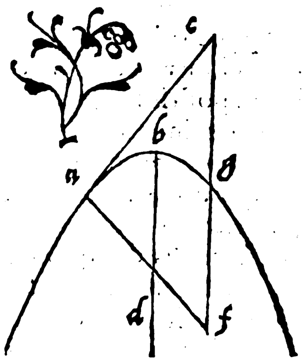
E æqualis: & iungatur a e. lineam igitur a e ſectionem con-



contingere manifeſto conſtat. Sit rurſus punctum e in axe datum: ductaq; iam ſit linea a e ſectionem contingens: & perpendicularis ducatur a d. ergo b e eſt æqualis **P** b d: & eſt data b e. quare & b d. ſed datum eſt b punctum. ergo & d datum erit. quòd **G H** cum d a perpendicularis ſit, & poſitione erit data. quare & punctum a. ſed & e datum. linea igitur a e poſitione data erit.

Componetur uero in hunc modum. ponatur ipſi b e æqualis b d: & à puncto d ducatur d a ipſi e d perpendicularis: iungaturq; a e. manifeſtum eſt lineam a e contingere ſectionem. 35. primi huius. ſed & illud conſtat ſi datum punctum ſit idem, quod b, lineam, quæ ab eo perpendicularis ducitur, ſectionem ipſam contingere. **K**

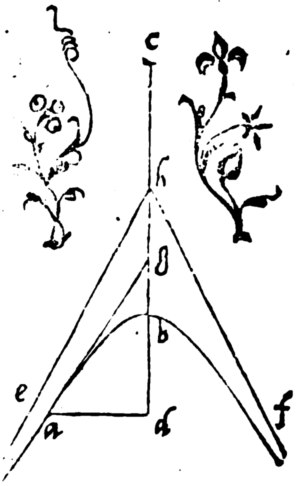
Sit datum punctum c, & factum iam ſit, quod proponebatur: ſitq; linea c a contingens: & per c ducatur c f æquidiſtans axi, hoc eſt ipſi **L** b d. ergo c f poſitione data eſt: & à puncto a ad c f ordinatim applicetur a f. erit c g æqualis g f: & g eſt datum. datum igitur erit & ipſum f. ordinatim autem applicatur f a, hoc eſt æquidiſtans ei, quæ in g ſectionem contingit. data igitur eſt f a poſitione: & idcirco punctum a datum. ſed & punctum c. ergo c a poſitione data erit.



Componetur autem hoc modo. ducatur per c ipſi b d æquidiſtans c f: ponaturq; f g æqualis g c: & ei, quæ in g contingit ſectionem, æquidiſtans ducatur f a: & a c iungatur. perſpicuum igitur eſt lineam a c facere illud, quod faciendum proponebatur.

Sit rurſus hyperbole, cuius axis c b d, centrum h, & aſymptoti h e, h f: punctum uero datum, uel in ſectione erit, uel in axe, uel intra angulum lineis e h f contentum; uel in loco, qui deinceps eſt; uel in una aſymptoton continentium ſectionem, uel in loco intermedio inter continentes angulum ad uerticem eius, qui lineis f h e comprehenditur.

Itaque ſit primum in ſectione, ut a: factumq; iam ſit, & linea a g ſectionem contingat. ducatur autem perpendicularis a d: & b c ſit tranſuerſum figuræ latus. erit ut c d ad d b, ita c g ad g b. ſed proportio **M** c d ad d b eſt data, quòd utraque data ſit. proportio igitur c g ad g b erit data. & eſt data b c. quare & g **N** datum. ſed & ipſum a. ergo a g poſitione data erit.



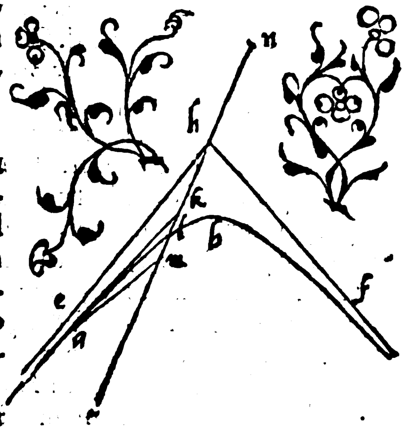
Componetur autem ſic. Ducatur à puncto a perpendicularis a d: & proportio c g ad g b eadem ſit, quæ c d ad d b: & iungatur a g. patet igitur lineam **O** a g contingere ſectionem.

Rurſus ſit datum punctum g in axe: & factum iam ſit: ducaturq; contingens a g: & a d perpendicularis. erit eadem ratione, ut c g ad g b, ita c d ad d b: & data eſt c b d. 36. primi huius. ergo punctum d datum. eſt autem d a perpendicularis. quare & poſitione data erit: & eſt ſectio data poſitione. datum igitur eſt a punctum. ſed & ipſum g. ergo a g poſitione dabitur. Componetur autem hoc modo. ponantur alia eadem: & fiat proportio c d ad d b eadem, quæ eſt c g ad g b: & ducta d a perpendiculari, iungatur a 34. primi huius. g. conſtat igitur lineam a g facere illud, quod proponebatur: & à puncto g ad partes oppoſitas alterã duci lineam, quæ ſectionem contingat.

Iiſdem poſitis, ſit datum punctum k in loco, qui intra angulum e h f continetur: & oporteat ab eo puncto lineam ducere, quæ ſectionem contingat. ponatur iam factum eſſe: & ſit linea contingens k a: iungatur autem k h, & producatur adeo, ut ipſi l h ſit æqualis h n. omnia igitur data erunt. quare & ipſa l n. Itaque ordinatim applicetur a m ad m n. erit ut n k ad k l, ita n m ad

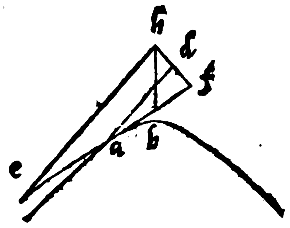
Q

m l. proportio autem n k ad x l eſt data. data igitur erit & proportio n m ad m l.
27.libri datorum eſtq́, punctum l datum. ergo & m; & ordinatim applicata
eſt m a, æquidiſtans ei quæ in l ſectionem
28.dato. contingit. quare & m a datur poſitione. at poſitione
datur ſectio a l b. ergo & punctum a. ſed & x
26 datur. data igitur erit linea a k.



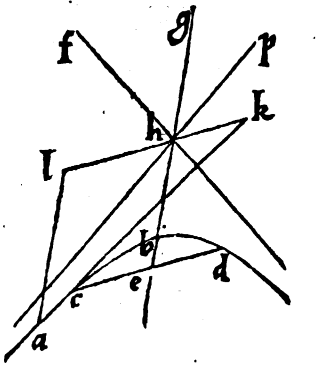
Componetur autem hoc modo. ponantur alia
eadem: & ſit datum punctum k: iunctaq́; k h producatur:
& ſit h n æqualis l h. fiat autem ut n x ad
k l, ita n m ad m l: & ei, quæ in l ſectionem contingit,
I æquidiſtans ducatur m a; & k a iungatur. ergo
k a contingit ſectionem. & manifeſtum eſt ab
eodem puncto k ad partes oppoſitas alteram lineam
duci, quæ ſectionem contingit.

Iiſdem poſitis ſit punctum f datum in una aſymptoton
continentium ſectionem: oporteatq́; à
puncto f ducere lineam, quæ ſectionem contingat.
Itaque ponatur factum eſſe: & ſit linea contingens
ſ a e: & per a ducatur a d ipſi e h æquidiſtās.
P erit h d æqualis d ſ, quoniam & ſ a ipſi a e eſt æqualis:
26. Dato. & data eſt ſ h: ergo & punctum d datum. data
7 quoque erit poſitione d a, quæ per d ducitur
28 æquidiſtans ipſi h e poſitione datæ: & ſectio data
eſt poſitione. ergo & punctum a. ſed & f datum.
linea igitur f a e poſitione data erit.



Componetur autem hoc pacto. ſit ſectio a b, cuius aſymptoti e h, h f: & datum pū-
ctum f ſit in una aſymptoton ſectionem continentium: ſecta autem f h bifariam in
2.ſexti d, ducatur per d linea d a ipſi h e æquidiſtans: & iungatur f a. Quoniam igitur f d
Q eſt æqualis d h: & f a ipſi a e æqualis erit. quare ex iis, quæ demonſtrata ſunt, linea f a
ſectionem contingit.

Iiſdem poſitis ſit datum punctum k in loco, qui deinceps eſt angulo ſectionem con-
tinenti: & oporteat ab ipſo k lineam ducere, quæ contingat ſectionem. Itaque factum
iam ſit: & ſit linea k a: iunctaq́; k h producatur. erit ea poſitione
data. ſi igitur in ſectione ſumatur punctum c, &
28.libri datorum per c ducatur c d ipſi k h æquidiſtans: erit c d data poſitione.
at ſi c d bifariam ſecetur in e; iunctaq́; h e producatur;
37.huius & poſitione data erit, diameter ſcilicet ipſi k h coniugata.
ponatur h g æqualis b h: & per a ducatur a l æquidiſtans
b g. Quoniam igitur k l, b g coniugatæ diametri
ſunt, & a k ſectionem cōtingit: ipſiq́; b g æquidiſtans
R ducta eſt a l: erit rectangulum k h l æquale quartæ parti
figuræ, quæ ad b g conſtituitur. quare & ipſum datum
erit. eſt autem k h data. ergo & h l. ſed & poſitione. eſtq́;
datum punctum h. ergo & l. & cum per l ducta ſit l a æquidiſtans
b g poſitione datæ, ipſa quoque poſitione dabitur.
At ſectio etiam datur poſitione. quare & a punctum.
ſed & k. ergo linea a k poſitione data erit.



Componetur autem ſic. ponantur alia eadem: ſitq́; datum punctum k in loco, quē
diximus: & iuncta k h producatur. ſumpto autem in ſectione puncto c, ducatur c d
ipſi k h æquidiſtans: & c d bifariam in e ſecetur: iunctaq́; e h producatur: & ipſi b h
37.huius ponatur æqualis h g. ergo g b tranſuerſa diameter eſt, ipſi k l h coniugata. deinde po-
natur quartæ parti figuræ, quæ eſt ad b g, æquale rectangulum k l h: perq́; l ipſi b g
S æquidiſtans ducatur l a: & k a iungatur. linea igitur k a ſectionem continget per con-
uerſionem trigeſimi octaui theorematis primi libri. At ſi in loco inter f h p interie-
cto

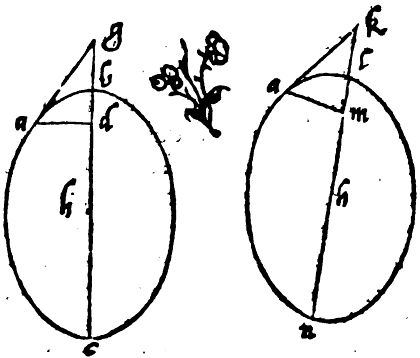
cto aliquod punctum detur, quod propoſitum eſt, fieri non poteſt. linea enim contingens ſecabit g h. quare & utrique ipſarum f h, h p occurret; quod eſt abſurdum, ex ijs, quæ in 31. theoremate primi libri, & in tertio huius demonſtrata ſunt.

Iiſdem poſitis ſit ſectio data ellipſis: datum uero pũctum in ſectione a. & oporteat ab ipſo a ducere lineam, quæ ſectionem contingat. Itaque ponatur factum eſſe: ſitq; linea contingens a g: & ab a ad b c axem ordinatim applicetur a d. erit punctum d datum: & ut c d ad d b, ita erit c g ad g b. ſed proportio c d ad d b eſt data. ergo & proportio c g ad g b data erit: & idcirco punctum g. ſed & a. quare & a g erit poſitione data.

36. primi huius.

Componetur autem hoc pacto. ducatur perpendicularis a d: & c g ad g b proportio eadem ſit, quæ proportio c d ad d b: iungaturq; a g. conſtat igitur a g ſectionem contingere, quemadmodum & in hyperbola.

34. primi huius.



Sit rurſus datum punctum k, à quo oporteat contingentem lineam ducere. Itaque factum iam ſit: & ſit linea k a: ductaq; k l h ad h centrum producatur in n. erit ea poſitione data. quòd ſi a m ordinatim applicetur, erit ut n k ad k l, ita n m ad m l. proportio autem n k ad k l eſt data. ergo & data proportio n m ad m l. quare & punctum m: & applicata eſt m a; æquidiſtat enim lineæ in l contingenti. ergo m a poſitione dabitur: & idcirco punctũ a. ſed & ipſum K eſt datum. linea igitur k a poſitione data erit.

38. primi huius.

Compoſitio autem eadem eſt, quæ ſupra.

FED. COMMANDINVS

Quæ poſitione data erit.] *Ex 30. propoſitione libri Datorum Euclidis.* A

Et erit b e æqualis b d.] *Ex 35. primi huius.* B

Ergo & punctum e.] *Ex 27. libri Datorum.* C

Linea igitur a e poſitione data erit.] *Ex 26. eiuſdem.* D

Lineam igitur a e ſectionem contingere manifeſto conſtat.] *Ex 33. primi huius.* E

Ergo b e eſt æqualis b d.] *Ex 35. eiuſdem.* F

Ergo & d datum.] *Ex 27. libri Datorum.* G

Quod cum d a perpendicularis ſit, & poſitione data erit.] *Ex 29. eiuſdem.* H

Sed & illud conſtat, ſi datum punctum ſit idem quod b.] *Ex 17. primi huius.* K

Ergo c f poſitione data erit.] *Ex 28. libri Datorum.* L

Erit ut c d ad d b, ita c g ad g l.] *Ex 36. primi huius.* M

Et eſt data b c. quare & g datum.] *Quoniam enim linea b c data in datam proportionem diuiditur, erunt & c g, g b datæ ex ſeptima libri Datorum, & eſt datum punctum c. ergo & g erit datum ex 27. eiuſdem.* N

Patet igitur lineam a g contingere ſectionem.] *Ex 34. primi huius.* O

Erit h d æqualis d f, quoniam & f a ipſi a e eſt æqualis.] *Nam cum f a ſit æqualis a e ex tertia huius, & f d ipſi d h æqualis erit, ex ſecunda ſexti elementorum.* P

Quare ex ijs, quæ demonſtrata ſunt, linea f a ſectionem contingit.] *Ex 9. huius.* Q

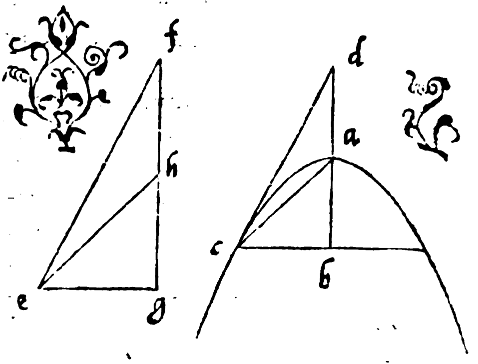
Erit rectangulum K h l æquale quartæ parti figuræ, quæ ad b g conſtituitur.] *Eſt enim ex 38. primi huius, rectangulum k h l æquale quadrato, quod fit ex dimidia ſecundæ diametri, hoc eſt æquale quartæ parti figuræ ad b g conſtitutæ; quoniam ſecunda diameter mediam proportionem obtinet inter figuræ latera, ex diffinitione ſecundæ diametri.* R

Linea igitur K a ſectionem contingit per conuerſionem trigeſimi octaui theorematis.] *Hunc locum nos reſtituimus, etenim in græco exemplari numerus theorematis deerat, ut de eius demonſtrationem in commentarijs, quæ nos in 38. primi huius conſcripſimus.* S

PROBLEMA VII. PROPOSITIO L.

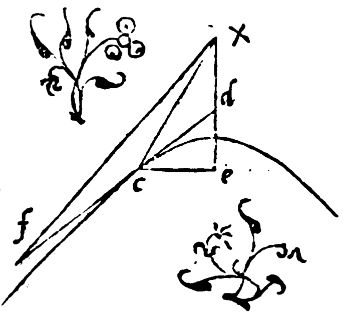
Data ſectione coni, lineam contingentem ducere, quæ cum axe ad partes ſectionis angulum faciat, dato angulo acuto æqualem.

Sit coni ſectio primum parabole,cuius axis a b.Itaque oportet lineam ducere,quæ
ſectionem contingat,& cum a b faciat an-
gulum ad partes ſectionis, dato angulo a-
cuto æqualem. ponatur factum eſſe: & ſit
linea c d.datus igitur eſt b d c angulus. du
catur perpendicnlaris b c. eſt autem angu
A lus,qui ad b datus.quare data eſt propor-
tio d b ad b c.ſed d b ad b a proportio eſt
B data.proportio igitur a b ad b c data erit.
C & datus angulus,qui ad b. ergo & b a c an
gulus eſt datus.& eſt ad lineam b a, quæ da
tur poſitione; & ad datum punctum a. li-
D nea igitur c a poſitione dabitur. at ſectio
data eſt poſitione. ergo pũctum c datum;
& linea c d ſectionem contingit. quare & poſitione data erit.

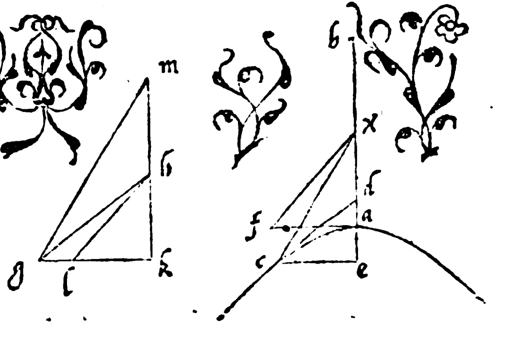


Componetur autem problema hoc modo. ſit data coni ſectio primum parabole, cuius axis a b: datus autem angulus acutus, qui lineis e f g continetur: ſumptoq́, in linea e f puncto e, ducatur perpendicularis e g: & f g in h bifariam ſecetur: & iungatur h e. deinde angulo g h e æqualis conſtituatur angulus b a c: & ducta perpendiculari b c, lineæ b a ponatur æqualis a d: & c d iungatur. ergo linea c d ſectionem contingit. Dico angulum c d b angulo e f g æqualem eſſe. Quoniam enim eſt ut f g ad g h, ita d b ad b a: & ut h g ad g e, ita a b ad b c: erit ex æquali ut f g ad g e, ita d b ad b c. ſed anguli, qui ad g b recti ſunt. angulus igitur f angulo d eſt æqualis.

E Sit ſectio hyperbole: ponaturq́; iam factum eſſe,& linea c d ſectionem contingat.
ſumpto autem χ ſectionis centro, iungatur c χ: & c e
37. primi huius. perpendicularis ducatur. ergo data eſt proportio rectã
guli χ e d ad quadratum e c: eadem enim eſt, quæ tranſ-
F uerſi lateris ad rectum. proportio autem quadrati c e
ad quadratum e d eſt data: quòd datus ſit uterque an-
G gulorum c d e, d e c. quare & rectanguli χ e d ad qua-
H dratum e d proportio data erit. & idcirco proportio
K χ e ad e d. ſed angulus qui ad e eſt datus. ergo & qui ad
χ. & ad lineam χ e poſitione datam, & ad datum pun-
L ctum χ ducta eſt χ c in dato angulo. ergo & χ c poſi-
tione dabitur. data eſt autẽ & ipſa ſectio poſitione.qua-
re & c pũctum: & ducta eſt c d contingens. linea igitur c d poſitione erit data. Ita-
M que ducatur f χ ſectionis aſymptotos. ergo c d producta aſymptoto occurret. occur
N rat in f. erit f d e angulus angulo f χ d maior: & propterea in compoſitione proble-
matis oportebit datum angulum acutũ maiorem eſſe, quàm ſit dimidius eius, quem
aſymptoti continent.

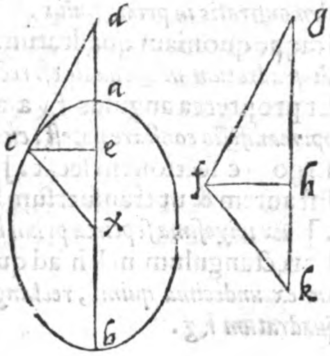


Componetur autem problema hoc
modo. Sit data hyperbole, cuius axis
quidem a b, aſymptotos autem χ f: & da
tus angulus acutus k h g, qui ſit maior
angulo a χ f; ſitq́; angulo a χ f æqualis
angulus k h l: & a puncto a ad rectos an
gulos ipſi a b ducatur a f; in linea uero
g h ſumatur aliquod punctum g, à quo
ad h k perpẽdicularis ducatur g k. Quo
niam igitur angulus f χ a angulo l h k eſt
O æqualis: & anguli ad a k recti ſunt: erit



ut χa ad a f,ita h k ad k l:& h k ad k l maiorem proportionem habet,quàm ad k g: 8.quinti.
ergo & χa ad a f maiorem habet proportionem,quàm h k ad k g:& idcirco quadratum
χa ad a f quadratum maiorem habet, quàm quadratum h k ad quadratum k g.
Vt autem quadratum χa ad quadratum a f, ita tranſuerſum figuræ latus ad rectum. P
quare tranſuerſum figuræ latus ad rectum maiorem proportionem habet, quàm quadratum
h k ad quadratum k g. ſi igitur fiat ut quadratum χa ad quadratum a f, ita
aliud quoddam ad quadratum K g; erit illud quadrato h k maius. ſit rectangulum 8.quinti
m k h: & iungatur g m. Itaque quoniam quadratum m k maius eſt rectangulo m k h, Q
habebit quadratum m K ad quadratum K g maiorem proportionem, quàm rectangulum
m k h,ad idem k g quadratum, hoc eſt maiorem,quàm quadratum χa ad quadratum
a f. Quòd ſi rurſus fiat, ut quadratum m k ad quadratum k g,ſic quadratum
χa ad aliud quoddam: erit id minus quadrato a f;& recta linea, quæ à χ ad ſumptum
punctum ducitur, triangula ſimilia efficiet: ac propterea angulus fχa angulo g m k R
erit maior. ponatur angulo g m κ æqualis angulus aχc. ergo χc ſectionem ſecat. ſecet S
in c:& à c ducatur c d ſectionem contingens: & c e perpendicularis. triangulum
igitur cχe ſimile eſt triangulo g m κ. quare ut quadratum χe ad quadratum e c, ita 4.& 22.ſexti.
quadratum m k ad quadratum K g. eſt autem ut tranſuerſum figuræ latus ad rectum,
ita rectangulum χe d ad quadratum e c:& rectangulum m k h ad quadratum k g: & T
conuertendo, ut quadratum c e ad rectangulum χe d, ita quadratum k g ad rectangulum V
m k h. ex æquali igitur ut quadratum χe ad rectangulum χe d, ita quadratum
m k ad rectangulum m k h: proptereaq́; ut χe ad e d, ita m k ad k h. Sed ut c e ad
eχ, ita erat g k ad κ m. quare rurſus ex æquali ut c e ad e d, ita g K ad k h: & ſunt anguli,
qui ad e k recti. angulus igitur ad d angulo g h k eſt æqualis. 6.ſexti

Sit ſectio ellipſis, cuius axis a b: & oporteat lineam ducere, quæ ſectionem contingat;
& cum axe ad partes ſectionis faciat angulum dato angulo acuto æqualem. Itaque
factum ſit: & ſit linea c d. ergo angulus c d a eſt datus: & ducatur perpendicularis
c e. proportio igitur quadrati d e ad quadratum e c data eſt. Sit ſectionis centrum
χ:& iungatur cχ. erit proportio quadrati c e ad rectangulum d eχ data: eadem enim 37. 1. huius.
eſt, quæ proportio recti lateris ad tranſuerſum. ergo dabitur proportio quadrati d e
ad rectangulum d eχ: & idcirco proportio d e ad eχ. proportio autem d e ad e c 8.datorū
eſt data. data igitur & proportio c e ad eχ. ſed
angulus, qui ad e rectus eſt. ergo datus angulus 41.datorum.
ad χ, qui quidem eſt ad lineam poſitione datam,
& ad datum punctum. quare datum erit punctum
c:& linea c d à dato puncto ducitur, & ſectionem
contingit. ergo poſitione data erit.



Componetur autem problema hoc modo. ſit datus angulus acutus f g h: ſumaturq́; in linea f g punctum f: & f h perpendicularis ducatur. deinde fiat ut rectum latus ad tranſuerſum, ita quadratum f h ad rectangulum g h k. & iungatur k f. ſit autem ſectionis centrum χ: & angulo h κ f æqualis angulus conſtituatur aχc:& ducatur c d, ſectionem contingens. Dico lineam c d facere illud, quod proponebatur; uidelicet angulum c d e angulo f g h æqualem eſſe. Quoniam enim ut χe ad e c, ita κ h ad h f, erit ut quadratū χe ad quadratū e c, ita k h quadratū ad ipſum h f. eſt autem & ut quadratū c e ad rectangulū d eχ, ita quadratum f h ad rectangulum g h k: utraque enim proportio eadem eſt, quæ recti lateris ad tranſuerſum. quare ex æquali ut quadratum χe ad rectangulum χe d, ita quadratum k h ad rectangulum K h g. ergo ut linea χe ad e d, ita eſt k h ad h g. eſtq́; ut χe ad e c, ita k h ad h f. ex æquali igitur ut d e ad e c, ita g h ad h f. quòd cum circa rectos angulos latera proportionalia ſint, angulus c d e angulo f g h eſt æqualis. linea igitur c d facit illud, quod propoſitum fuerat. 6.ſexti

FED. COMMANDINVS.

A QVARE data eſt proportio d b ad b c.] *Cum enim anguli c d b, d b c dati ſint, erit & b c d reliquus ex duobus rectis datus: quare ex quadrageſima propoſitione libri datorum Euclidis, triangulum d c b dabitur ſpecie: & propterea laterum ipſius proportio data erit.*

B Proportio igitur a b ad b c data erit.] *Ex octaua propoſitione libri datorum, utraque enim ipſarum a b, b c ad eandem d b proportionem habet datam.*

C Et datus angulus, qui ad b. ergo & b a c angulus eſt datus.] *Ex quadrageſima prima eiuſdem libri. datur namque triangulum a b c ſpecie. ergo & reliqui ipſius anguli dabuntur.*

D Linea igitur c a poſitione dabitur.] *Ex uigeſima nona eiuſdem libri.*

E Angulus igitur f angulo d eſt æqualis.] *Ex ſexta ſexti elementorum.*

F Proportio igitur quadrati c e ad quadratum e d eſt data, quòd datus ſit uterque angulorum c d e, d e c.] *Datus eſt enim angulus c d e, itemq; d e c, qui eſt rectus. ergo & reliquus e c d; & triangulum d c e ſpecie dabitur, ex quadrageſima propoſitione datorum. data eſt igitur proportio lateris c e ad e d: & idcirco ex quinquageſima eiuſdem, quadrati c e ad quadratum e d proportio data ſit neceſſe eſt.*

G Quare & rectanguli χ e d ad quadratum e d proportio data erit.] *Ex octaua eiuſdem. data eſt enim utriuſque proportio ad quadratum e c.*

H Et idcirco proportio χ e ad e d.] *Eadem namque eſt, quæ rectanguli χ e d ad quadratum e d, ex prima ſexti elementorum, uel ex lemmate in 22. decimi.*

K Sed angulus, qui ad e eſt datus, ergo & qui ad χ.] *Quoniam enim proportio χ e ad e d eſt data: & data proportio c e ad e d, ex ijs, quæ ſupra dicta ſunt: erit ex octaua datorum χ e ad e c proportio quoque data: & eſt datus angulus ad e rectus. ergo triangulum χ e c ſpecie datur, ex quadrageſima prima eiuſdem, & propterea reliqui ipſius anguli dati erunt.*

L Ergo & χ c poſitione dabitur.] *Ex uigeſima nona eiuſdem.*

M Ergo c d producta aſymptoto occurret.] *Ex tertia huius.*

N Erit f d e angulus angulo f χ d maior.] *Ex decima ſexta primi elementorum.*

O Erit ut χ a ad a f, ita h K ad K l.] *Ex quarta ſexti, ſequitur enim ex iam dictis triangulum f χ a triangulo g h k ſimile eſſe.*

P Vt autem quadratum χ a ad quadratum a f, ita trãſuerſum figuræ latus ad rectum.] *Ex demonſtratis in prima huius.*

Q Itaque quoniam quadratum m k maius eſt rectangulo m k h.] *Nam ex prima ſecundi quadratum m k æquale eſt rectangulo m k h, & rectangulo k m h.*

R Et propterea angulus f χ a angulo g m k maior erit.] *Hoc etiam ex ſexto lemmate Pappi manifeſto conſtare poteſt: cum m k ad k g maiorem habeat proportionem, quàm χ a ad a f.*

S Ergo χ c ſectionem ſecat.] *Ex ſecunda huius.*

T Eſt autem & ut tranſuerſum latus ad rectum, ita rectangulum χ e d ad quadratum e c.] *Ex trigeſima ſeptima primi huius.*

V Et rectangulum m k h ad quadratum k g.] *Ex ijs, quæ ſuperius oſtenſa ſunt. quare ſequitur ex undecima quinti, rectangulum χ e d ad quadratum e c ita eſſe, ut rectangulum m k h ad quadratum k g.*

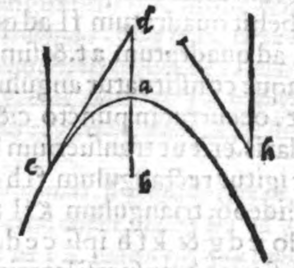
PROBLEMA VIII. PROPOSITIO LI.

DATA ſectione coni, lineam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum, dato angulo acuto æqualem.

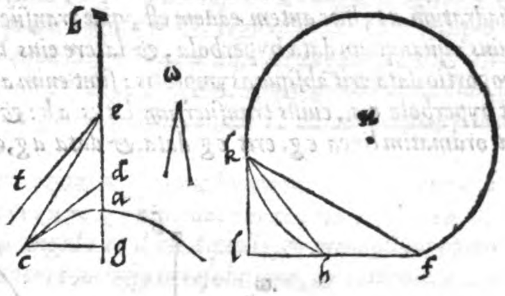
Sit data coni ſectio primum parabole, cuius axis a b: & datus angulus h. Itaque oportet ducere lineam, quæ parabolen contingat; & cum diametro, quæ per tactum ducitur, contineat angulum æqualem dato angulo h. factum iam ſit: & linea contingens ſit c d, quæ quidem cum diametro e c per tactum ducta faciat angulum e c d, angulo

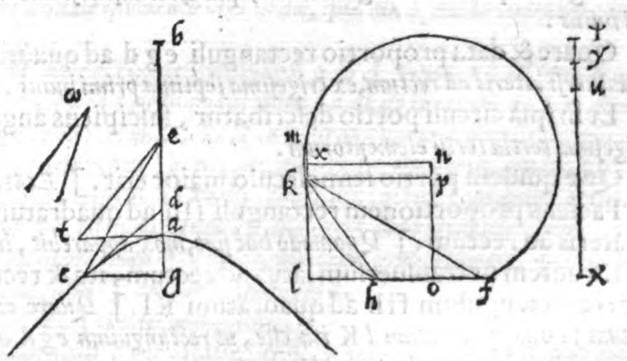
gulo h æqualem: & axi in puncto d occurrat. Quoniam
igitur a d æquidiſtat e c, angulus a d c angulo e c d 46. primi huius.
eſt æqualis: & datus eſt angulus e c d; eſt enim æqualis
angulo h. ergo & a d c angulus datus erit. 29. primi element.

Componetur autem hoc modo. Sit parabole, cuius
axis a b: & datus angulus h. Ducatur linea c d ſectionem 50. huius
cōtingens, quæ cum axe faciat angulum c d a æqualem
angulo h: & per c ducatur e c ipſi a b æquidiſtans.
Itaque quoniam angulus h angulo a d c eſt æqualis: angulus
autem a d c eſt æqualis angulo e c d: & h angulus
angulo e c d æqualis erit.



Sit ſectio hyperbole, cuius axis a b, centrum e, & aſymptotos e t: datus autem angulus
acutus ſit ω: & linea c d ſectionem contingat: iungaturq́; c e faciens illud,
quod propoſitum eſt: & c g perpendicularis ducatur. Itaque proportio tranſuerſi A
lateris ad rectum data eſt: quare & data proportio rectanguli e g d ad quadratum c g. B
exponatur recta linea data f h: & in ipſa circuli portio deſcribatur, ſuſcipiens angulum C
æqualem angulo ω; quæ quidem portio ſemicirculo maior erit: & ab aliquo puncto D
eorum, quæ ſunt in circumferentia,
uidelicet à puncto k ducatur perpendicularis
k l, faciens proportionem rectanguli E
f l h ad quadratum l k eandem, quæ
eſt tranſuerſi lateris ad rectum: & iungantur
f k, K h. quoniam igitur angulus
f k h eſt æqualis angulo e c d: eſt autem F
ut tranſuerſum latus ad rectum, ita & rectangulum
e g d ad quadratum c g: & rectangulum
f l h ad quadratum k l: erit G
triangulum K f l triangulo c e g ſimile:
& triangulum f h K ſimile triangulo e d c. quare angulus k f h angulo c e d eſt æqualis. H
Componetur autem hoc modo. ſit data hyperbole a c, cuius axis a b, centrum e;
& aſymptotos e t. datus autem angulus acutus ſit ω: & data proportio tranſuerſi lateris K
ad rectum ſit eadem, quæ lineæ ψ χ ad χ u: & ψ u in y bifariam ſecetur. deinde
exponatur data recta linea f h: & in ipſa circuli portio maior ſemicirculo deſcribatur, 33. tertii,
quæ ſuſcipiat angulum æqualem angulo ω: ſitq́; f k h. ſumatur autem circuli centrum
n; à quo ad f h perpendicularis ducatur n o: & n o ſecetur in p, ita ut n p ad p o eandem
habeat proportionem, quam y u ad u χ: & per p ipſi f h æquidiſtans ducatur
p K: & à k ad f h productam perpendicularis K l ducatur. deinde iungantur f K, K h:
producaturq́; l k ad m: & ab n ad k m ducatur n x perpendicularis. æquidiſtat igitur 28. primi
n x ipſi f h: proptereaq́; ut n p ad p o, hoc eſt y u ad u χ, ita x k ad k l: & antecedentium L M
dupla, ut ψ u ad u χ, ita
m k ad k l: componendoq́; ut
ψ χ ad χ u, ita m l ad l k. ſed lem. in 22 decimi
ut m l ad l k, ita rectangulum
m l K ad quadratum l k. Vt
igitur ψ χ ad χ u, ita rectangulum
m l k ad quadratum N
l k: hoc eſt rectangulum f l h
ad l k quadratum: ut autem
ψ χ ad χ u, ita tranſuerſum latus
ad rectum. ergo ut rectangulum
f l h ad quadratum l k,
ita tranſuerſum latus ad rectum.
ducatur à puncto a linea a t ad rectos angulos ipſi a b. & quoniam ut quadratum O
e a ad quadratum a t, ita eſt tranſuerſum latus ad rectum: & ut tranſuerſum latus

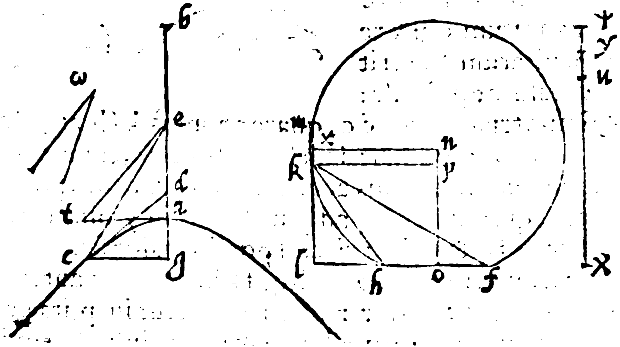




ad rectum, ita rectangulum f l h ad quadratum l k: quadratum autem f l ad l k quadratum
8. quinti. maiorem proportionem habet, quàm rectangulum f l h ad quadratum l k:
P habebit quadratum f l ad quadratum l K maiorem proportionem, quàm quadratum
e a ad quadratum a t. & ſunt anguli ad a l recti: angulus igitur f angulo e minor erit.
Q Itaque conſtituatur angulus a e c æqualis angulo l f k. ergo linea e c ſectioni occurret. occurrat in puncto c: & à c ducatur c d contingens ſectionem; & c g perpendi-
37. primi huius. cularis. erit ut tranſuerſum latus ad rectum, ita rectangulum e g d ad quadratum c g.
Vt igitur rectangulum f l h ad quadratum l k, ita rectangulum e g d ad quadratum
R S c g: ideoq; triangulum K f l triangulo c e g eſt ſimile: & triangulum K h l ſimile triangulo c d g: & k f h ipſi c e d. quare e c d angulus angulo f k h, hoc eſt ipſi ω eſt æqua-
T lis. ſi uero tranſuerſi lateris ad rectum proportio ſit æqualis ad æquale; linea k l cir-
V culum f k h continget: & à centro ad k ducta æquidiſtans erit f h: & ipſa problema efficiet.

FED. COMMANDINVS.

A ITAQVE proportio tranſuerſi lateris ad rectum data eſt.] *Quoniam enim poſitione data eſt et aſymptotos, ſi à puncto a ducatur ad rectos angulos ipſi a e linea a t, quæ aſympto-*
29. dator. *to in t occurrat; erit a t data: & data proportio e a ad a t. quare & proportio quadrati e a ad*
1. *quadratum a t; hoc autem eadem eſt, quæ tranſuerſi lateris ad rectum, ex demonſtratis in prima*
50. *huius; quanquam data hyperbola, & latere eius tranſuerſo, ſtatim tranſuerſi lateris ad rectum*
proportio data erit abſque aſymptotis: ſunt enim aſymptoti recto latere quodammodo poſteriores.
Sit hyperbole c a, cuius tranſuerſum latus a b: & ſumpto in ſectione quouis puncto c, ducatur ad
30. prima datorum. *b a ordinatim linea c g. erit c g data: & data a g, & g b. quoniam igitur datæ ſunt b g, g a, &*



lem. in 22 decimi 50. 8. datorum. *earum proportio dabitur, hoc eſt proportio rectanguli b g a ad quadratum g a: eſtq; data c g. ergo & data proportio a g ad g c. & idcirco quadrati a g ad quadratum g c. proportio igitur rectanguli b g a ad quadratum c g data erit, quæ eſt tranſuerſi lateris ad rectum, ex uigeſima prima primi huius.*

B Quare & data proportio rectanguli e g d ad quadratum c g.] *Eadem enim eſt, quæ tranſuerſi lateris ad rectum, ex trigeſima ſeptima primi huius.*

C Et in ipſa circuli portio deſcribatur, ſuſcipiens angulum æqualem angulo a.] *Ex trigeſima tertia tertij elementorum.*

D Quæ quidem portio ſemicirculo maior erit.] *Ex trigeſima prima eiuſdem tertij.*

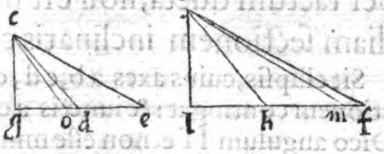
E Faciens proportionem rectanguli f l h ad quadratum l k eandem, quæ eſt tranſuerſi lateris ad rectum.] *Quomodo hoc fiat, mox apparebit, in problematis compoſitione.*

F Eſt autem ut tranſuerſum latus ad rectum, ita & rectangulum e g d ad quadratum c g: & rectangulum f l h ad quadratum K l.] *Quare ex undecima quinti ſequitur rectan-*
13. ſexti. *gulum f l h ad quadratum l K ita eſſe, ut rectangulum e g d ad quadratum g c. proportio autem rectanguli f l h ad quadratum l K componitur ex proportione f l ad l K, & proportione h l ad*
G *l K: & proportio rectanguli e g d ad quadratum g c componitur ex proportione e g ad g c, & d g ad g c. ergo proportio compoſita ex proportionibus f l ad l K, & h l ad l K eadem eſt, quæ componitur*

ponitur ex proportionibus e g ad g c, & d g ad g c.

G Erit triangulum k f l triangulo c e g ſimile: & triangulum f h K ſimile triangulo e d c.] *Eſt enim f l ad l K, ut e g ad g c: quod poſtea demonſtrabimus. Cum igitur circa æquales angulos l g latera proportionalia ſint: triangulum f l K ſimile erit triangulo e g c. quare angulus ad f angulo ad c eſt æqualis: & angulus f K l angulo e c g. erat autem & f K h angulus æqualis angulo e c d. ergo & reliquus h K l reliquo d c g æqualis: & triangulum K f h ſimile triangulo c e d. Itémq; triangulum h k l triangulo d c g.* 6. ſexti

At uero f l ad l k ita eſſe, ut e g ad g c, hoc modo demonſtrabimus. ſi enim fieri poteſt, ſit proportio f l ad l k maior, quàm e g ad g c: erit h l ad l K proportio minor, quàm d g ad g c, quoniam proportio compoſita ex proportionibus f l ad l k, & h l ad l K eadem eſt, quæ componitur ex proportionibus e g ad g c, & d g ad g c: quod ſupra oſtenſum eſt. Itaque fiat ut e g ad g c, ita m l ad l k. erit m l minor, quàm f l. Rurſus fiat ut h l ad l k, ita o g ad g c. eadem ratione minor erit o g, quàm d g. Quoniam igitur m l ad l k eandem habet proportionem, quam e g ad g c: & ſunt anguli ad l g recti inter ſe æquales: triangulum m l k triangulo e g c ſimile erit. rurſus quoniam o g ad g c eandem proportionem habet, quam h l ad l k, erit & triangulum o g c ſimile ipſi h l k. angulus igitur e c g æqualis eſt angulo m K l: & angulus o c g æqualis angulo h k l. ergo reliquus e c o reliquo m k h æqualis erit. quod fieri non poteſt: ponebatur enim angulus e c d æqualis angulo f k h: & eſt angulus e c o maior angulo e c d. quare multo maior eſt angulo m K h. idem ſequetur abſurdum, ſi proportio f l ad l K ponatur minor, quàm e g ad g c. ex quibus conſtat f l ad l k eandem habere proportionem, quam e g ad g c. 8. quinti



H Quare angulus k f l angulo c e d eſt æqualis.] *Hunc locum nos ita correximus, in græco enim exemplari legebatur.* ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζκθ γωνία, τουτέστιν ἡ ω τῇ ὑπὸ εγδ, *hoc eſt, quare angulus f k h, uidelicet angulus ω angulo e c d eſt æqualis, & mendoſe, ut opinor. concluderet enim, quod antea poſuerat: eſſetq; eadem concluſio in reſolutione, & compoſitione problematis, quod eſt abſurdum.*

K Et aſymptotos e t.] *Hæc nos addidimus, quæ in græco exemplari non erant: ſed tamen deſiderari uidebantur.*

L Propterea q; ut n p ad p o, hoc eſt ψ u ad u χ, ita x k ad k l.] *Quoniam enim n x, p K æquidiſtant ipſi f h, & inter ſe æquidiſtabunt: æquidiſtant autem & n o, x l. quod utraque ad f h ſit perpendicularis. quare n p k x, p o l k parallelogramma ſunt. & ideo x K eſt æqualis n p, & k l ipſi p o.* 30. primi. 28 34. primi

M Et antecedentium dupla, ut ψ u ad u χ, ita m k ad k l.] *Nam cum ſit ut y u ad u χ, ita x k ad K l: ut autem ψ u ad y u, ita m k ad x k, eſt enim & m K ipſius x K dupla, quoniam n x perpendicularis ad m K, ipſam bifariam diuidit, per tertiam propoſitionem tertij libri elementorum: erit ex æquali ut ψ u ad u χ, ita m k ad K l.*

N Hoc eſt rectangulum f l h ad l k quadratum.] *Rectangulum enim f l h eſt æquale rectangulo m l k, quòd utrumque ſit æquale quadrato eius lineæ, quæ ab l ducta circulum contingit, ex 36. tertij elementorum.*

O Ducatur à puncto a linea a t ad rectos angulos ipſi a b.] *Linea a t in puncto a ſectionem contingit, & aſymptoto occurrit in t. ergo quadratum e a ad quadratum a t eam proportionem habet, quam tranſuerſum latus ad rectum, ex ijs, quæ in prima huius demonſtrantur.*

P Habebit quadratum f l ad quadratum l k maiorem proportionem, quàm quadratum e a ad quadratum a t. & ſunt anguli a l recti. angulus igitur f angulo e minor erit.] *Quoniam enim quadratum f l ad quadratum l K maiorem proportionem habet, quàm quadratum e a ad quadratum a t, habebit linea f l ad l k maiorem proportionem, quàm e a ad a t. quare ex ſexto lemmate Pappi angulus f angulo e minor erit.*

Q Ergo linea e c ſectioni occurret.] *Ex ſecunda huius.*

R Ideoq; triangulum k f l triangulo c e g eſt ſimile.] *Nam angulus c e g factus eſt æqualis angulo f: & angulus g rectus æqualis eſt recto l. ergo & reliquus reliquo æqualis erit: & triangulum k f l triangulo c e g ſimile.*

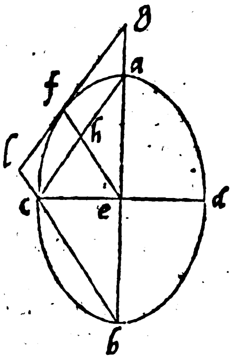
S Et triangulum k h l ſimile triangulo c d g: & k f h ipſi c e d.] *Conſtat hoc ex ſeptimo* *lemmate Pappi.*

T Si uero tranſuerſi lateris proportio ſit æqualis ad æquale.] *Hoc eſt ſi tranſuerſum latus ſit æquale recto.*

V Linea kl circulum fkh continget: & à centro ad k ducta æquidiſtans erit fh.] *Si enim à centro n ad circumferentiam circuli ducatur linea nk, quæ ipſi fh æquidiſtet: & à k ad fh productam demittatur perpendicularis kl; linea kl circulum continget ex 16. propoſitione tertij elementorum, quoniam & ad ipſam nk eſt perpendicularis.*

THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO LII.

Si ellipſim recta linea contingat, angulus, quem facit cum diametro per tactum ducta, non eſt minor angulo deinceps ei, qui lineis ad mediam ſectionem inclinatis continetur.



Sit ellipſis, cuius axes ab, cd, centrum e: & ſit axium maior ab: linea uero gfl ſectionem contingat: & iunctis ac, cb, fe, producatur bc ad l. Dico angulum lfe non eſſe minorem angulo lca. linea enim fe, uel eſt æquidiſtans ipſi lb, uel non æquidiſtans. Sit primum æquidiſtans: & eſt ae æqualis eb. ergo & ah ipſi hc eſt æqualis. Sed fe diameter eſt. linea igitur, quæ in f ſectionem contingit, ipſi ac eſt æquidiſtans. eſt autem & fe æquidiſtans lb. quare parallelogrammum eſt fhcl. & idcirco angulus lfh æqualis eſt angulo lch. Quoniam igitur utraque ipſarum ae, eb eſt maior ec, angulus acb eſt obtuſus. ergo acutus angulus lch, & lfe: & propterea gfe obtuſus erit. ſed non ſit ef æquidiſtans lb: & ducatur fk perpendicularis. non igitur angulus lbe æqualis eſt ipſi fea. rectus autem angulus ad e recto ad k eſt æqualis. ergo triangulum cbe non eſt ſimile triangulo fek: & ideo non eſt ut quadratum be ad quadratum ec, ita quadratum ek ad quadratum kf. Sed ut quadratum be ad quadratum ec, hoc eſt, ut rectangulum aeb ad quadratum ec, ita tranſuerſum latus ad rectum: & rectangulum gke ad quadratum kf. ergo linea gk non eſt æqualis ipſi ke.

2.ſexti

5.huius

34. primi

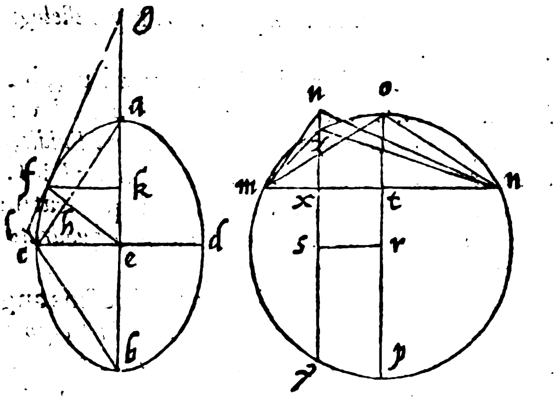
A

13.primi.

B

C

D



Exponatur circuli portio myn, ſuſcipiens angulum æqualem angulo acb. angulus autem acb eſt obtuſus. ergo circuli portio myn eſt ſemicirculo minor. fiat igitur ut gk ad ke, ita nx ad xm: & per x ad rectos angulos ipſi mn ducatur yxχ: & my, yn iungantur. ſecetur autem mn bifariam in t: & ad rectos angulos ducatur otp. erit otp diameter. ſit r circuli centrum, à quo perpẽdicularis ducatur rs; & iungãtur mo, on. itaq; angulus mon eſt æqualis angulo acb: & utraque ipſarum ab, mn in punctis et bifariam ſecatur: ſuntq; anguli ad et recti. triangula igitur otn, eeb inter ſe ſimilia erunt. ergo ut quadratum nt ad quadratum to, ita quadratum be ad ec quadratum. & cum tr ſit æqualis sx, & ro maior, quàm sy; habebit or ad rt maiorem proportionem, quàm ys ad sx. & per conuerſionem rationis ro ad ot minorem proportionem habebit, quàm sy ad yx: & antecedentium dupla po ad ot minorem habebit, quàm χy ad yx: diuidendoq; pt ad to minorem, quàm χx ad xy. ſed ut pt ad to, ita quadratum tn ad quadratum to; & quadratum be ad quadratum ec; & tranſuerſum latus ad rectum; & rectangulum gke ad quadratum kf. ergo rectangulum gke ad quadratum kf minorẽ habet proportionem,

31. tertii.

E

F

G

8. quinti.

30.quinti

H

29.quinti

K

L

tionem, quàm χ x ad x y, hoc eſt quàm rectangulum χ x y ad quadratum x y; hoc eſt rectangulum n x m ad quadratum x y. ſi igitur fiat, ut rectangulum g k e ad quadratum k f, ita rectangulum n x m ad aliud quoddam: erit illud maius quadrato x y. ſit quadratum x u. Itaque quoniam ut g k ad k e, ita n x ad x m: & ſunt k f, x u ad rectos angulos: & ut rectangulum g k e ad quadratum k f, ita rectangulum n x m ad quadratum x u: erit angulus g f e æqualis angulo n u m. ergo maior eſt angulus n y m, hoc eſt a c b angulo g f e. qui uero deinceps eſt, uidelicet l f h eſt maior angulo l c h. non igitur angulus l f h angulo l c h minor erit. 22 decimi 35. tertii. 8. quinti. L

FED. COMMANDINVS.

Quoniam igitur utraque ipſarum a e, e b eſt maior e c; angulus a c b eſt obtuſus.] *Si enim ex centro e, & interuallo e a deſcribatur circulus a q b: & producatur e c uſque ad eius circumferentiam in q: iunganturq; a q, q b: erit angulus a q b rectus. quare a c b eſt obtuſus.* A 31. tertii 21. primi

Ergo acutus angulus l c h & l f e: & propterea g f e obtuſus erit.] *Hoc idcirco dixit, ut ex duobus angulis, quos diameter cum linea contingente efficit, acutum intelligamus, non obtuſum, qui eſt ex parte g. hæc enim omnia ſequenti problemati inſeruire perſpicuum eſt.* B

Non igitur angulus l b e æqualis eſt ipſi f e a.] *Quoniam enim lineæ b l, e f non ſunt æquidiſtantes, ſi producantur, conuenient inter ſe ſe: atque erit angulus f e k exterior quolibet interiore & oppoſito maior, ex 16. primi elementorum.* C

Et ideo non eſt ut quadratum b c ad quadratum e c, ita quadratum e k ad quadratum k f.] *Græcus codex corruptus eſt, quem nos ita reſtituimus.* οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βε πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, τὸ ἀπὸ κε, πρὸς τὸ ἀπὸ κζ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ βε πρὸς τὸ ἀπὸ εγ τὸ ὑπὸ αεβ πρὸς τὸ ἀπὸ εκ, καὶ ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ τὸ ὑπὸ ηκε πρὸς τὸ ἀπὸ κζ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ηκ τῇ κε. *Sed tamen ante ea uerba.* οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ηκ τῇ κε, *ueriſimile eſt non nulla deſiderari in hanc ſententiam. non igitur eſt, ut rectangulum g k e ad quadratum K f, ita quadratum e K ad quadratum k f. quare rectangulum g k e quadrato K e non eſt æquale. Hæc autem magis perſpicua eſſent. ſi hoc modo explicarentur. ergo triangulum c b e non eſt ſimile triangulo f e k, & ideo non eſt ut b e ad e c, ita e k ad k f: neque ut quadratum b e ad quadratum c c, ita quadratum e k ad quadratum K f. ſed ut quadratum b e ad quadratum e c, hoc eſt ut rectangulum a e b ad quadratum e c, ita tranſuerſum latus ad rectum: & ut tranſuerſum latus ad rectum, ita rectangulum g k e ad quadratum k f. non igitur ut rectangulum g k e ad quadratum k f, ita eſt quadratum e K ad quadratum k f. quare rectangulum g k e quadrato k e non eſt æquale. ut autem rectangulum g k e ad quadratum k e, ita linea g k ad K e. ergo linea g k non eſt æqualis ipſi K e.* D 4. ſexti 22. ſexti. 21. primi huius. 37. primi huius.

Secetur autem m n bifariam in f.] *Non enim punctum x cadit in medio lineæ m n, quem admodum neque k in medio g e, cum oſtenſum ſit g K non eſſe æqualem k c.* E

Itaque angulus m o n eſt æqualis angulo a c b: & utraque ipſarum a b, m n in punctis e t bifariam ſecatur.] *Poſt ea uerba deſiderari non nulla uidentur, cuiuſmodi hæc ſunt. quare angulus t o n eſt æqualis angulo e c b. eſt enim angulus t o n dimidius anguli m o n, & e c b dimidius ipſius a c b.* F

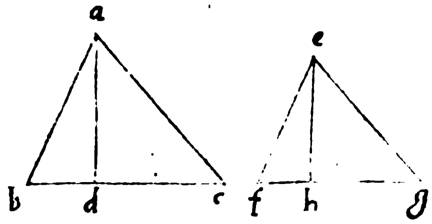
Et r o maior quàm s y.] *Eſt enim linea o p maior, quàm y χ: & ut o p ad y χ, ita r o dimidia o p, ad s y dimidiam y χ. ergo r o maior erit, quàm s y.* G 15. tertii.

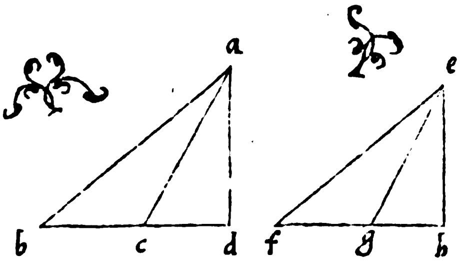
Et antecedentium dupla p o ad o t minorem habebit, quàm χ y ad y x.] *Fiat ut r o ad o t, ita s y ad aliam, quæ ſit y z. erit y z maior quàm y x. ut autem p o, ad r o, ita χ y ad s y. ex æquali igitur, ut p o ad o t, ita χ y ad y z. ſed χ y ad y z minorem habet proportionem, quàm ad y x. ergo & p o ad o t minorem proportionem habebit, quàm χ y ad y x.* 15. quinti H 8. quinti

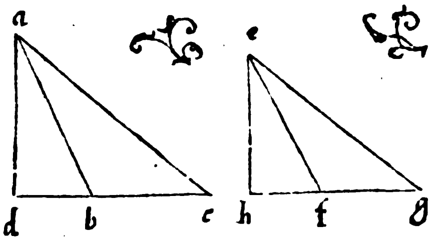
Sed ut p t ad t o, ita quadratum t n ad quadratum t o.] *Ex corollario uigeſimæ ſexti, ſunt enim tres lineæ p t, t n, t o proportionales. ut autem quadratum t n ad quadratum t o, ita quadratum b e ad quadratum e c; hoc eſt rectangulum a e b ad quadratum e c, hoc eſt tranſuerſum latus ad rectum: & ut tranſuerſum latus ad rectum, ita rectangulum g K e ad quadratum k f. ergo ut p t ad t o, ita rectangulum g K e ad quadratum K f. & propterea rectangulum g k e ad quadratum k f minorem proportionem habet, quàm χ x ad x y.* K cor. 8 ſexti. 21. 1. huius. 37 primi huius.

Itaque quoniam ut g k ad k e, ita n x ad x m: & ſunt k f, x u ad rectos angulos: & ut rectangulum g k e ad quadratum k f, ita rectangulum n x m ad quadratum x u: erit L angulus g f e æqualis angulo n u m.] *Illud ucro not hoc lemmate demonſtrabimus, quoniam à Pappo demonſtratum eſſe non apparet.*

Sint trianguli a b c, e f g: & ductis a d, e h perpendicularibus ad baſes b c, f g, ſit ut b d ad d c, ita f h ad h g: ſitq; ut rectangulum b d c ad quadratum d a, ita f h g rectangulum ad quadratũ h e. Dico triangulum e f h triangulo a b d ſimile eſſe: triangulumq; e h g ſimile triangulo a d c, & triangulum e f g triangulo a b c. Quon reenim eſt, ut b d ad d c, ita f h ad h g; & utiam ad d c, ita quadratum b d ad rectangulum b b d ut autem f h ad h g, ita quadratum f h ad d c: ctangulum f h g. ergo ut quadratum b d ad rectangulum b d c, ita quadratum f h ad rectangulum f h g. ſed ut rectangulum b d c ad quadratũ d a, ita erat rectãgulum f h g ad quadratum h e. ex æquali igitur ut quadratum b d ad quadratum d a, ita quadratum f h ad quadratum h e. quare ut linea b d ad d a, ita linea f h ad h e: & eadem ratione demonſtrabitur, ut linea c d ad d a, ita eſſe lineam g h ad h e. Cum igitur circa æquales angulos, uidelicet circa rectos, qui ſunt ad d h, latera proportionalia ſint: triangulum e h f ſimile erit triangulo a d b; & triangulum e h g triangulo a d c. quare angulus f e h æqualis eſt angulo b a d: et angulus h e g angulo d a c. angulus igitur f e g angulo b a c eſt æqualis: & eſt angulus e f g æqualis angulo a b c: & angulus e g f angulo a c b. ergo & triangulum e f g triangulo a b c ſimile erit. quod oportebat demonſtrare.



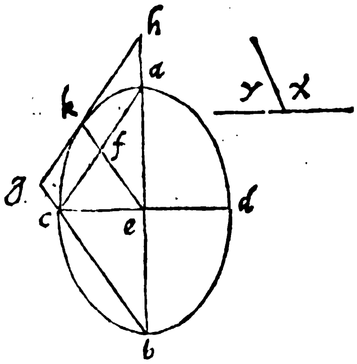




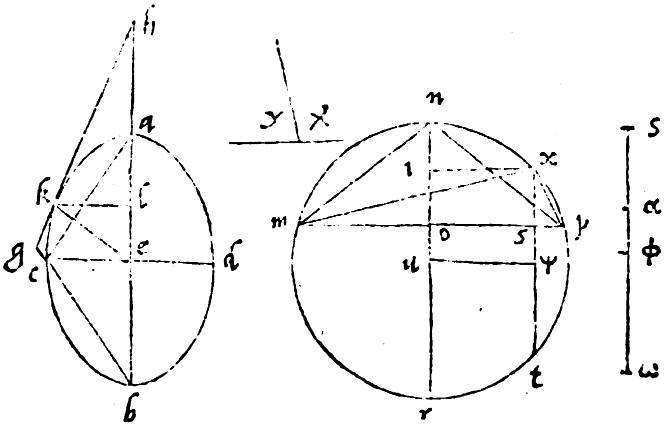
PROBLEMA IX. PROPOSITIO LIII.

Data ellipſi contingentem lineam ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto æqualem. oportet autem acutum angulum datum non eſſe minorem angulo deinceps ei, qui lineis ad mediam ſectionem inclinatis continetur.

Sit data ellipſis, cuius maior axis a b; minor c d; & centrum e: & iungantur a c, c b. A datus autem angulus ſit y, non minor angulo a c g. quare & a c b angulus non eſt minor angulo χ. ergo angulus y uel eſt maior angulo a c g, uel ipſi æqualis. ſit primum æqualis: & per e ducatur e k ipſi b c æquidiſtans: & per k contingens ſectionem k h. 2. ſexti Quoniam igitur a e eſt æqualis e b: & ut a e ad e b, ita a f ad f c: erit a f ipſi f c æqualis: & eſt K 5. huius. e diameter. ergo quæ in k ſectionem cõtingit, hoc eſt h k g, æquidiſtat ipſi a c. ſed & e K æquidiſtat b g. 34. primi. parallelogrãmum igitur eſt k f c g: & ob id angulus g k e angulo g c f æqualis. angulus autem g c f eſt æqualis angulo dato y. ergo & g k e angulo y æquales erit. Sit deinde angulus y maior angulo a c g. erit contra angulus χ minor a c b angulo. Exponatur circulus; & ab eo auferatur portio m n p, ſuſcipiens angulum æqualem angulo χ: & m p bifariam ſecta in o, & per o ducatur n o r ad rectos angulos



los ipſi m p; & iungantur m n, n p. angulus igitur m n p minor eſt angulo a c b: anguli
autem m n p dimidius eſt angulus m n o: & anguli a c b dimidius eſt a c e. ergo m n o
angulus angulo a c c eſt minor: & qui ad e o anguli recti ſunt. quare linea a e ad e c B
maiorem proportionem habet, quàm m o ad o n: & ideo quadratum a e ad e c quadratum
maiorem habet proportionem, quàm quadratum m o ad quadratum o n.
Sed quadratum a e æquale eſt rectangulo a e b: & quadratum m o æquale rectangulo
m o p, hoc eſt ipſi n o r. ergo rectangulum a e b ad quadratum e c, hoc eſt tranſuerſum 35. tertii.
latus ad rectum, maiorem proportionem habet, quàm rectangulum n o r ad quadratum C
o n; hoc eſt quàm linea r o ad o n. Itaque fiat ut tranſuerſum latus ad rectum, ita lem. in 12
ωα ad ας: & ως bifariam ſecetur in φ. Quoniam igitur tranſuerſum latus ad rectum decimi
maiorem proportionem habet, quàm r o ad o n: habebit & ωα ad ας maiorẽ propor
tionẽ quàm r o ad o n: & componendo ως ad ςα maiorem habebit, quàm r n ad n o. 28. quinti apud Cã.
ſit u circuli centrum. ergo φς ad ςα maiorem D
habet proportionem, quàm u n ad n o: diuidendoq́; φα ad ας maiorem 29. quinti. apud Cã.
habet, quàm u o ad o n. fiat ut φα ad ας, ita
u o ad minorem ipſa o n, hoc eſt ad o i: perq́; i ducatur i x ipſi m p æquidiſtans: E
& ducatur x s t æquidiſtans n r, & u ψ
æquidiſtans eidem m p. erit igitur ut φα ad ας, F
ita u o ad o i & ψ s ad s x: componẽdoq́; ut φς
ad ςα, ita ψ x ad x s: & antecedentium dupla, ut ως ad ςα, ita t x ad x s: & diuidendo,
ut ωα ad ας, hoc eſt ut tranſuerſum latus ad rectum, ita t s ad s x. iungantur m x
x p: & ad lineam a e, & ad e punctum conſtituatur angulus a e K æqualis angulo
m p x: & per κ ducatur K h ſectionem contingens, & κ l ordinatim applicetur. Itaque
quoniam angulus m p x æqualis eſt angulo a e k: & rectus angulus, qui ad s, eſt
æqualis recto, qui ad l. erit triangulum x s p ſimile triangulo k l e; & ut tranſuerſum
latus ad rectum, ita eſt t s ad s x, hoc eſt rectangulum t s x ad quadratum x s, hoc eſt lem. in 12 decimi
rectangulũ m s p ad quadratum x s. ſimile igitur eſt triangulum h l κ triangulo m s x; 35. tertii.
& triangulum h κ e ſimile ipſi m x p: & propterea angulus m x p eſt æqualis angulo G
h κ e: eſt autem m x p angulus æqualis angulo m n p, hoc eſt angulo χ. quare & h k e angulus
angulo χ eſt æqualis. angulus igitur deinceps g k e ei, qui deinceps eſt angulo y,
æqualis erit. ergo ducta eſt linea g h ſectionem contingens, quæ cum diametro κ e per
tactum ducta facit g k e angulum dato angulo y æqualem. quod feciſſe oportebat.



FED. COMMANDINVS.

DATVS autem angulus ſit y non minor angulo a c g. quare & a c b angulus non A
eſt minor angulo χ.] *Si enim angulus y ſit æqualis angulo a c g, & angulus χ angulo a c b*
æqualis erit: ſi uero y angulo a c g ſit maior, erit χ minor ipſo a c b. quare ſequitur angulum a c b
non eſſe minorem angulo χ.

Quare linea a e ad e c maiorem proportionem habet, quàm m o ad o n.] *Hoc* B
in undecimo lemmate Pappi demonſtratur.

Quàm rectangulum n o r ad quadratum o n.] *Hæc nos appoſuimus, quæ in græco* C
exemplari deeſſe uidebantur.

Ergo φς ad ςα maiorem habet proportionem, quàm u n ad n o.] *Quoniam enim* D
ως ad ςα maiorem proportionem habet, quàm r n ad n o: & antecedentium dimidia φς ad ςα
habebit maiorem proportionem, quàm u n ad n o.

E Perq́; i ducatur i x ipſi m p æquidiſtans: & ducatur x s t æquidiſtans n r: & u ψ æquidiſtans eidem m p.] *Hunc locum ita reſtituimus, nam in græco exemplari, ut opinor, nonnulla deſunt.*

F Erit igitur ut φ α ad α ϛ, ita u o ad o i, & ψ s ad s x.] *Eſt enim ψ s æqualis u o, & s x æqualis o i, propterea quòd parallelogramma ſunt o u ψ s, o i x s.*

G Simile igitur eſt triangulum h l x triangulo m s x, & triangulum h k e ſimile ipſi m x p.] *Hoc eodem modo demonſtrabitur, quo uſus eſt Pappus in ſeptimo lemmate, nam rectangulum h l e ad quadratum l k eſt, ut tranſuerſum latus ad rectum, hoc eſt ut rectangulum m s p ad quadratum s x.*

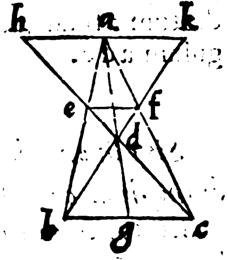
SECVNDI LIBRI FINIS.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA IN TERTIVM LIBRVM CONICORVM APOLLONII.

LEMMA PRIMVM.

SIT deſcripta figura a b c d e f g: & ſit b g æqualis g c. Dico e f ipſi b c æquidiſtantem eſſe.

Ducatur enim per a linea h k æquidiſtans b c: & b f, c e ad puncta k h producantur. Itaque quoniam b g eſt æqualis g c; erit & h a ipſi a k æqualis . ergo ut b c A B ad h a, hoc eſt ut b e ad e a, ita b c ad k a, hoc eſt c f ad f a. quare e f ipſi b c eſt æquidiſtans. 2. ſexti



COMMENTARIVS.

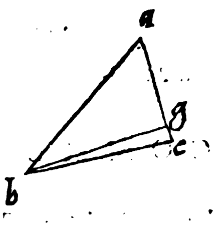
A Erit & h a ipſi a k æqualis .] *Ob ſimilitudinem triangulorum b d g, k d a: itemq; triangulorum c d g, h d a. eſt enim ut b g ad g d, ita k a ad a d: & ut d g ad g c, ita d a ad a h. ex æquali igitur ut b g ad g c, ita k a ad a h. Sed b g eſt æqualis g c. ergo & k a ipſi a h æqualis erit .* 14. quinti

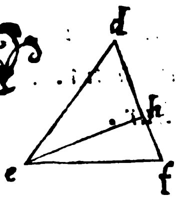
B Ergo ut b c ad h a, hoc eſt ut b e ad e a, ita b c ad k a, hoc eſt c f ad f a.] *Sunt enim triangula ſimilia b e c, a e h: & triangula b f c, k f a itidem ſimilia.*

LEMMA II.

Sint duo triangula a b c, d e f, quæ angulos a, d æquales habeant: & ſit rectangulum b a c æquale rectangulo e d f. Dico triangulum triangulo æquale eſſe.

Ductis enim perpendicularibus b g, e h, erit ut b g ad b a, ita e h ad e d. 4. ſexti. ergo ut rectangulum ex b g & a c ad rectangulum b a c, ita rectangulum ex e h & d f ad rectangulum e d f: 1. ſexti. & permutando ut rectangulum ex b g & a c ad rectangulum ex e h & d f, ita rectangulum b a c ad rectangulum e d f. eſt autem rectangulum b a c rectangulo e d f æquale. ergo & rectangulum ex b g & a c æquale rectangulo ex e h & d f. Sed rectanguli ex b g & a c dimidium eſt a b c triangulum: 41. primi & rectanguli ex e h & d f dimidium triangulum d e f. triangulum igitur a b c triangulo d e f æquale erit. Perſpicuum autem eſt & parallelogramma ipſorum dupla inter ſe æqualia eſſe.



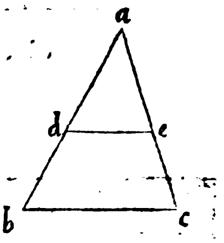


COMMENTARIVS.

ERGO ut rectangulum ex b g & a c ad rectangulum b a c, ita rectangulum ex e h & d f ad rectangulum e d f.] *Ex prima ſexti. eſt enim rectangulum ex b g & a c ad rectangulum b a c, ut b g ad b a, quòd eandem altitudinem habeant, uidelicet lineam a c; & ſimiliter rectangulum ex e h & d f ad rectangulum e d f, ut e h ad e d. quare ex undecima quinti ſequitur propoſitum.*

LEMMA III.

Sit triangulum a b c; & ſit d e ipſi b c æquidiſtans. Dico ut quadratum a b ad quadratum a d, ita eſſe triangulum a b c ad triangulum a d e.



Quoniam enim triangulum a b c ſimile eſt triangulo a d e; habebit a b c triãgulum ad ipſum a d e duplam proportionem eius, quæ eſt b a ad a d. Sed & quadratum a b ad quadratum a d duplam proportionem habet eius, quæ eſt b a ad a d. ergo ut quadratum a b ad quadratum a d, ita erit a b c triangulum ad triangulum a d e.

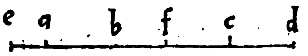
19. ſexti
20. ſexti.
11. quinti

LEMMA IIII.

Sint lineæ a b, c d inter ſe æquales, & ſumatur quoduis punctum e. Dico rectangulum c e b ſuperare rectangulum c a b, rectangulo d e a.

6. ſecũdi.

Secetur enim b c bifariàm in f. ergo punctum f lineam quoque a d bifariam ſecat. & quoniam rectangulum c e b unà cum b f quadrato æquale eſt quadrato e f. rectangulum autem d e a unà cum quadrato a f æquale eſt quadrato e f: atque eſt quadratum a f æquale rectangulo c a b unà cum b f quadrato: commune auferatur quadratum b f. reliquum igitur rectangulum c e b æquale eſt rectangulo c a b unà cum rectangulo d e a. quare c e b rectangulum ſuperat rectangulum c a b, ipſo d e a rectangulo. quod demonſtrare oportebat.



COMMENTARIVS.

Commune auferatur quadratum b f.] [*Sequitur enim ex iam dictis rectangulum c e b unà cum quadrato b f æquale eſſe rectangulis d e a, c a b unà cum quadrato b f.*

LEMMA V.

Si uero punctum e ſit inter a & b, rectangulum c e b minus eſt, quàm rectangulum c a b, eodem ipſo ſpatio, uidelicet rectangulo d e a, quod ſimili ratione demonſtrabitur.

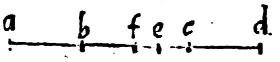
COMMENTARIVS.

6. ſecũdi
5.

Quod ſimili ratione demonſtrabitur.] *Eſt enim rectangulum c a b unà cum b f quadrato æquale quadrato a f; & rectangulum d e a unà cum quadrato e f æquale eſt quadrato a f. quadratum uero e f eſt æquale rectangulo c e b, unà cum b f quadrato. ergo rectangulum c a b unà cum quadrato b f æquale eſt rectangulis d e a, c e b unà cum quadrato b f. & dempto communi quadrato b f, relinquitur rectangulum c a b æquale rectangulis d e a, c e b. rectangulum igitur c e b minus eſt, quàm rectangulum c a b, rectangulo d e a.*

LEMMA VI.

Quòd ſi e punctum ſit inter b & c, eadem ratione rectangulum c e b minus eſt, quàm rectangulum a e d, rectangulo a b d.

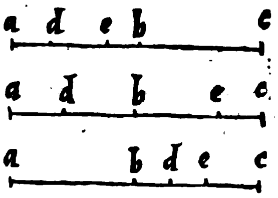


COMMENTARIVS.

NAM cum rectangulum a e d unà cum quadrato e f æquale ſit quadrato a f: rectangulum uero a b d unà cum quadrato b f eidem quadrato a f ſit æquale; & quadratum b f æquale rectangulo c e b unà cum e f quadrato: dempto communi quadrato e f, ſequitur rectangulum a e d æquale eſſe rectangulo a b d unà cum rectangulo c e b. ergo c e b rectangulum minus eſt, quàm rectangulum a e d, rectangulo a b d. id quod demonſtrandum proponebatur. 5. ſecūdi

LEMMA VII.

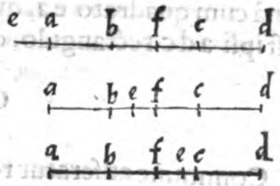
Sit linea a b æqualis ipſi b c: & duo puncta d e ſumantur. Dico quadratum a b quater ſumptum æquale eſſe rectangulo a d c bis unà cum rectangulo a e c bis, & quadratis d b, b e bis ſumptis.



Hoc autem perſpicuum eſt. quadratum enim a b bis ſumptum propter bipartitas ſectiones æquale eſt rectangulo a d c bis, & quadrato d b bis. Itemq; quadratum a b bis eſt æquale rectangulo a e c bis, & bis e b quadrato. 5. ſecūdi.

LEMMA VIII.

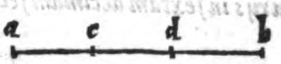
Sit linea a b æqualis ipſi c d: & ſumatur punctum e. Dico quadrata a e, e d æqualia eſſe quadratis b e, e c, & rectangulo a c d bis ſumpto.



Secetur b c bifariam in f. & quoniam quadratum d f bis ſumptum æquale eſt rectangulo a c d bis, & bis quadrato c f: appoſito communi quadrato e f bis; erit rectangulum a c d bis, unà cum quadratis c f, f e bis, æquale quadratis d f, f e bis ſumptis. ſed quadratis d f, f e bis ſumptis æqualia ſunt quadrata a e, e d. quadratis autem c f, f e bis ſumptis æqualia ſunt b e, e c quadrata. quadrata igitur a e, e d æqualia ſunt quadratis b e, e c, & rectangulo a c d bis ſumpto. 9. & 10. ſecundi.

LEMMA IX.

Sit rectangulum b a c unà cum c d quadrato æquale quadrato a d. Dico c d ipſi d b æqualem eſſe.



Commune enim auferatur quadratum c d. erit reliquum, quod continetur a c, d b æquale rectangulo d c a. æqualis igitur eſt d c ipſi d b.

COMMENTARIVS.

HOC lemma eſt ueluti conuerſum ſextæ propoſitionis ſecundi libri elementorum, in cuius demonſtratione cum non nulla deſiderari uideantur, nos planius & apertius explicare tentabimus, hoc modo.

Commune auferatur quadratum c d. erit reliquum rectangulum b a c æquale rectangulo d a c, unà cum rectangulo d c a. eſt enim ex ſecunda propoſitione ſecundi libri elementorum quadratum a d æquale rectangulo d a c. unà cum rectangulo a d c, hoc eſt unà cum rectangulo d c a, & quadrato c d ex tertia eiuſdem. Sed ex prima rectangulum b a c æquale eſt rectangulo d a c unà cum eo, quod b d & a c continetur. quare rurſus ablato communi rectangulo d a c, relinquitur rectangulum contentum b d & a c æquale rectangulo d c a. æqualis igitur eſt linea c d ipſi d b. 4. ſexti

LEMMA X.

Sit rectangulum a c b unà cum quadrato c d æquale d b quadrato. Dico lineam a d æqualem eſſe d b.

Ponatur ipſi c d æqualis d e. ergo rectangulum c b e unà cum quadrato d e, hoc eſt quadrato c d, æquale eſt d b quadrato: hoc eſt rectangulo a c b unà cum quadrato c d. quare rectangulum c b e eſt æquale rectangulo a c b: & propterea linea a c æqualis ipſi e b. ſed & c d æqualis eſt d e. tota igitur a d toti d b eſt æqualis. 1.ſexti:

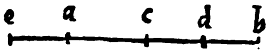
COMMENTARIVS.

Hoc lemma conuerſum eſt quintæ propoſitionis ſecundi libri elementorum.

Quare rectangulum c b e eſt æquale rectangulo a c b.] *Nempe ablato communi uidelicet c d quadrato.*

LEMMA XI.

Sit rurſus rectangulum b a c unà cum d b quadrato æquale quadrato a d. Dico lineam c d æqualem eſſe d b.



Ponatur enim ipſi d b æqualis a e. & quoniam rectangulum b a c unà cum quadrato d b, hoc eſt cum quadrato e a, æquale eſt quadrato a d:
A commune auferatur rectangulum d a c. ergo reliquum, quod b d & a c continetur, uidelicet rectangulum e a c
B unà cum quadrato e a, quod eſt rectangulum c e a, æquale
C eſt ipſi a d c rectangulo. quare linea e a, hoc eſt b d ipſi d c eſt æqualis.

COMMENTARIVS.

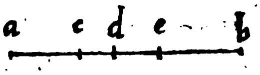
A Commune auferatur rectangulum d a c.] *Eſt enim rectangulum b a c æquale rectangulo d a c, unà cum eo, quod b d & a c continetur; quadratum uero a d æquale rectangulo d a c, unà cum rectangulo a d c.* 1.ſecũdi 2.ſecũdi.

B Quod eſt rectangulum c e a.] *Ex tertia ſecundi libri elementorum.*

C Quare linea e a, hoc eſt b d ipſi d c eſt æqualis.] *Hoc nos demonſtrauimus in commentarijs in ſextam decimam ſecundi huius.*

LEMMA XII.

Sit recta linea a b, in qua ſumantur tria puncta c d e, ita ut b e ſit æqualis e c, & rectangulum a e d æquale quadrato c e. Dico ut b a ad a c, ita eſſe b d ad d c.



Quoniam enim rectangulum a e d æquale eſt quadrato
A B c e; erit ut a e, ad e c, ita c e ad e d. quare per cõuerſionem rationis; antecedentibusq́; bis ſumptis; & diuidendo, ut b a ad a c, ita erit b d ad d c.

COMMENTARIVS.

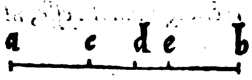
Hoc lemma, & quod ſequitur in græcis codicibus corruptiſſima erunt, quæ nos ita reſtituimus.

A Erit ut a e ad e c, ita c e ad e d.] *Hæc nos addidimus perſpicuitatis cauſſa, in græco enim codice* *cōdice tantum legitur ἀνάλογον.*

Quare per conuerſionem rationis, antecedentibusq́; bis ſumptis, & diuidendo, ut B
b a ad a c, ita erit b d ad d c.] *Quoniam enim ut a e ad e c, ita c e ad e d, erit per conuerſio-
nem rationis ut e a ad a c, ita e c ad c d; & antecedentium dupla, ut b a, a c ad c a, ita b c ad c d;
eſt enim b c ipſius c e dupla. ergo diuidendo ut b a ad a c, ita eſt b d ad d c.*

LEMMA XIII.

Sit rurſus rectangulum b c d æquale quadrato c e, & a c ipſi c e æqualis. Dico rectangulum a b e æquale eſſe rectangulo c b d.



Quoniam enim rectangulum b c d quadrato c e eſt
æquale, ut b c ad c e, hoc eſt ad c a, ita erit c e, hoc eſt a c ad
c d: & tota ad totam; & per conuerſionem rationis: & ſpa- A
tium ſpatio æquale. ergo rectangulum a b e æquale eſt
c b d rectangulo. Sed illud etiam conſtat, rectangulum ſcilicet a d e ipſi b d c æqua- B
le eſſe. ſi enim à quadrato c e & à rectangulo b c d auferatur commune quadratum
c d, quæ relinquentur æqualia erunt.

COMMENTARIVS.

Et tota ad totam, & per conuerſionem rationis: & ſpatium ſpatio æquale.] *Quo-* A
*niam enim eſt ut b c ad c a, ita a c ad c d: erit componendo, ut tota b a ad a c, hoc eſt ad totam e c,
ita pars a d ad partem d c. ergo reliqua b d ad reliquam d c, ut b a ad a c: & per conuerſionem* 19. quiti.
rationis d b ad b e, ut a b ad b c. rectangulum igitur a b e rectangulo c b d eſt æquale. 16. ſexti.

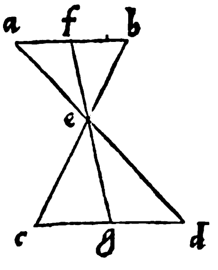
*Sed hoc etiam aliter demonſtrare poſſumus. nam cum linea a e bifariam ſecetur in c, atque ipſi
addatur e b; erit rectangulum a b e unà cum e c quadrato æquale quadrato c b. ſed eidem c b qua* 6. ſecũdi.
drato æqualia ſunt utraque rectangula c b d, b c d. rectangulum igitur a b e unà cum quadrato e c 2
*æquale eſt rectangulo c b d unà cum rectãgulo b c d. quare ſublato quadrato e c ex altera parte, &
ex altera rectangulo b c d, quæ inter ſe æqualia ſunt; ſequitur rectangulum a b e rectangulo c b d
æquale eſſe.*

Sed illud etiam conſtat, rectangulum ſcilicet a d e ipſi b d c æquale eſſe.] *Cum enim* B
a c ſit æqualis c e, rectangulum a d e unà cum c d quadrato æquale eſt quadrato c e. ſed rectangu- 5. ſecũdi
lum b d c unà cum quadrato c d eſt æquale rectangulo b c d, hoc eſt quadrato c e. quare ſublato 3.
communi quadrato c d, relinquitur rectangulum a d e rectangulo b d c æquale.

*ALITER quoque idem demonſtrari poteſt hoc pacto. Quoniam ut tota b a ad e c, ita eſt pars
a d ad d c; erit & reliqua b d ad d e, ut a d ad d c: & propterea rectangulum a d e æquale re-* 16. ſexti.
ctangulo b d c.

LEMMA XIIII.

In duas æquidiſtantes a b, c d per idem punctum e tres lineæ ducantur a e d, b e c, f e g. Dico ut rectangulum a e b ad rectangulum a f b, ita eſſe rectangulum c e d ad c g d rectangulum.



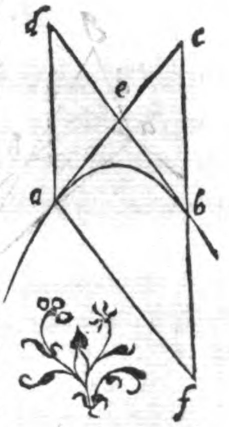
Hoc per compoſitam proportionem manifeſtum eſt. ut enim a e ad e d, ita eſt a f ad d g: & ut b e ad e c, ita f b ad g c: & componuntur ex his proportionibus ſpatia. conſtat igitur propoſitum. Sed licet & aliter demonſtrare abſque compoſita proportione hoc pacto. Quoniam enim ut a e ad e b, ita eſt d e ad e c; erit rectangulum a e b ad quadratum e b, ut rectangulum d e c ad quadratum e c. ut autem quadratum e b ad quadratum b f, ita quadratum e c ad c g quadratũ. quare ex æquali ut rectangulum a e b ad quadratum b f, ita rectangulum d e c ad quadratum c g. ſed ut quadratum b f ad rectãgulũ b f a, ita quadratum cg ad rectangulum cgd. ex æquali igitur ut rectangulum aeb ad rectangulum afb, ita rectangulum ced ad rectangulum cgd.

COMMENTARIVS.

Hoc per compoſitam proportionem manifeſtum eſt.] *Cum enim lineæ ab, cd inter ſe æquidiſtent, erit aef triangulum ſimile triangulo deg: & triangulum feb ſimile ipſi gec. quare ut ea ad af, ita ed ad dg: & ut eb ad bf, ita ec ad cg. proportio autem rectanguli aeb ad rectangulum afb componitur ex proportione ea ad af, & proportione eb ad bf: & proportio rectanguli ced ad rectangulum cgd componitur ex proportione ed ad dg, & proportione ec ad cg. quare cum proportiones ex quibus componuntur, eædem ſint, ſequitur rectangulum aeb ad afb rectangulum ita eſſe, ut rectangulum ced ad rectangulum egd.*

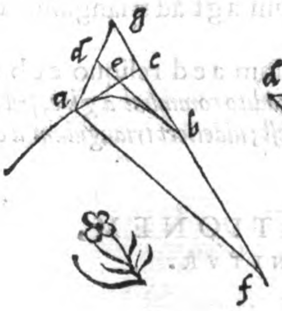
APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIBER III.
CVM COMMENTARIIS EVTOCII ASCALONITAE, ET FEDERICI COMMANDINI.
THEOREMA I. PROPOSITIO I.

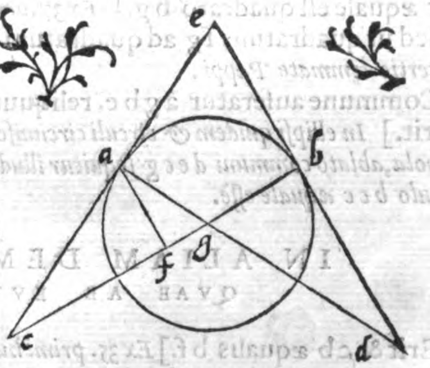
SI coni ſectionem, uel circuli circumferentiam rectæ lineæ contingentes inter ſe conueniant: & per tactus ducantur diametri, quæ cõtingentibus occurrant: triangula ad uerticem facta ſibi ipſis æqualia erunt.



Sit coni ſectio, uel circuli circumferentia a b; quam contingant rectæ lineæ a c, b d conuenientes in puncto e: & per tactus a, b diametri ſectionis c b, d a ducantur, quæ contingentibus occurrant in punctis c d. Dico triangulum a d e triangulo e b c æquale eſſe. ducatur enim à puncto a linea a f ipſi b d æquidiſtãs, quæ ordinatim applicata erit: & in parabola quidem parallelogrammum a b d f æquale erit triangulo a c f. A quare ablato communi a e b f, triangulum a d e, quod relinquitur, æquale eſt triangulo c b e.

In alijs uero conueniant diametri in centro g. & quoniam ordinatim applicata eſt B
a f: & a c ſectionem contingit; rectangulum f g c æquale eſt quadrato b g. ut igitur 14. ſexti.
f g ad g b, ita eſt b g ad g c. quare ut f g ad g c, ita quadratum f g ad quadratum g b. 20.
ſed ut quadratum f g ad quadratum g b, ita triangulum a g f ad triangulum d g b: C
& ut f g ad g c, ita triangulum a g f ad triangulum a g c. ergo ut triangulum a g f ad 1. ſexti
triangulum a g c, ita triangulum a g f ad triangulum d g b. & propterea triangulum
a g c triangulo d g b eſt æquale. Cõmune auferatur a g b e. reliquum igitur triangu- 9. quinti
lum a e d reliquo c e b æquale erit. D





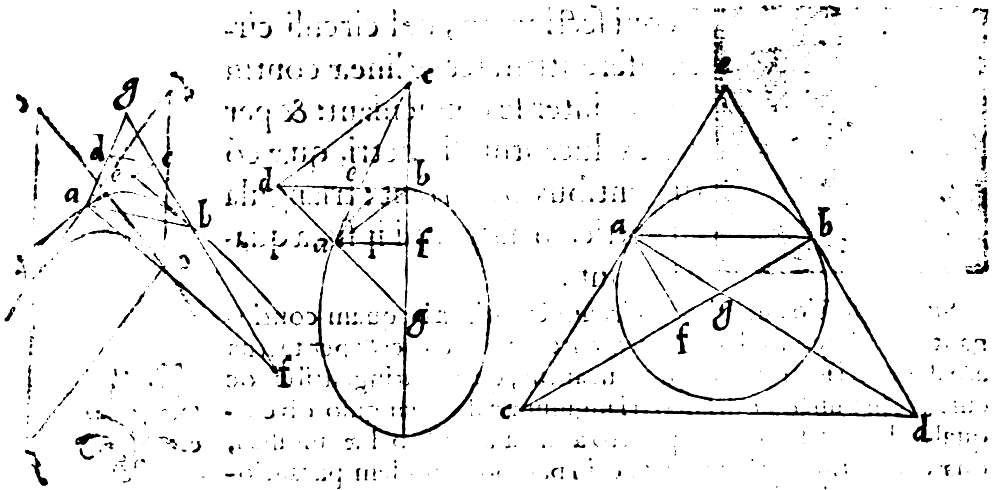
EVTOCIVS.

Tertius conicorum liber, amiciſſime Anathemi, dignus ab antiquis exiſtimatus eſt, in quem multum ſtudij, ac diligentiæ conferretur: id, quod uariæ ipſius editiones oſtendunt. ſed neque epiſtolam habet, quemadmodum alij libri, neque commentarios in ipſum docti alicuius uiri ex ijs, qui ante nos fuerunt, quanquam in eo multa ſint cõtemplatione digniſſima; ut ipſe Apollonius in proœmio totius libri aſſerit. omnia autem à nobis manifeſte explicata ſunt, ac demõſtrata ex præcedentibus libris,

& commentarijs, quos in ipſos conſcripſimus. Inuenitur etiam alia demonſtratio, in parabola quidem, huiuſmodi.

E Quoniam a c ſectionem contingit, & ordinatim applicata eſt a f, erit & c b æqualis b f: & b f ipſi a d. ergo a d, c b inter ſe æquales ſunt. ſed & æquidiſtantes. triangu-
34. primi.
F lum igitur a d e æquale eſt, & ſimile triangulo e b c.] *In alijs uero hoc pacto,*

G H Iungantur a b, c d: & quoniam ut f g ad g b, ita eſt b g ad g c: & ut f g ad g b, ita a g
K ad g d: eſt enim a f ipſi d b æquidiſtans. ergo ut b g ad g c, ita a g ad g d: & propter-
L ea a b æquidiſtat ipſi c d. triangulum igitur a d c æquale eſt triangulo b d e: & com-
M muni c d e ablato, relinquitur triangulum a d e triangulo c b e æquale.



A *Hoc theorema in parabola quidem, & hyperbola non habet caſus: in ellipſi uero, & circuli circumferentia duos habet: ſiquidem contingentes lineæ in tactibus duntaxat diametris occurrunt: & ipſis productis uel occurrunt, ſicuti in propoſita figura, uel ad alteras partes, in quibus eſt e, quemadmodum & in hyperbola.*

FED. COMMANDINVS.

A Et in parabola quidem parallelogrammum a b d f æquale erit triangulo a c f.] *Ex 42. primi huius.*

B Et quoniam ordinatim applicata eſt a f: & a c ſectionem contingit: rectangulum f g c æquale eſt quadrato b g.] *Ex 37. primi huius.*

C Sed ut quadratum f g ad quadratum g b, ita triangulum a g f ad triangulum d g b] *Ex tertio lemmate Pappi.*

D Commune auferatur a g b e. reliquum igitur triangulum a e d reliquo c e b æquale erit.] *In ellipſi quidem & circuli circumferentia ablato, uel addito communi a g b e, ſed in hyperbola, ablato communi d e c g ſequitur illud, quod propoſitum eſt; uidelicet triangulum a e d triangulo b c c æquale eſſe.*

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM,
QVAE AB EVTOCIO PONITVR.

E Erit &, c b æqualis b f.] *Ex 35. primi huius.*

F Triangulum igitur a d c æquale eſt, & ſimile triangulo e b c.] *Eſt enim ex 29. primi angulus d æqualis angulo b: & angulus a angulo c: ſuntq; anguli ad uerticem æquales: triangula igitur æqualia, & ſimilia erunt.*

G Et quoniam ut f g ad g b, ita eſt b g ad g c.] *Eſt enim rectangulum f g c æquale quadrato b g ex 37. primi huius.*

H Et ut f g ad g b, ita a g ad g d.] *Ex quarta ſexti, quod triangula a g f, d g b ſimilia ſunt.*

K Et propterea a b æquidiſtat ipſi c d.] *Nam cum ſit a g ad g d, ut b g ad g c, erit permutando*

tando c g ad g d, ut b g ad g a: & ſunt circa eoſdem, uel æquales angulos latera proportionalia. ergo triangulum c g d ſimile eſt triangulo b g a: & angulus g d c angulo g a b æqualis. linea igitur d c lineæ a b eſt æquidiſtans. ſed illud etiam poſſumus ex primo lemmate Pappi demonſtrare. iuncta enim g e lineam a b bifariam ſecabit ex 30. ſecundi libri huius. quare & ipſam c d, ex demonſtratis in ſextam propoſitionem primi libri huius. 6. ſexti. 28. primi K

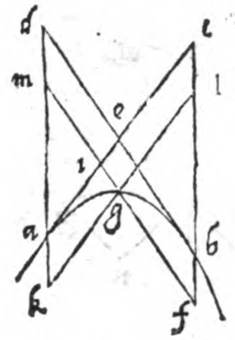
Triangulum igitur a d c æquale eſt triangulo b d c.] *Ex 37. primi elementorum.* L

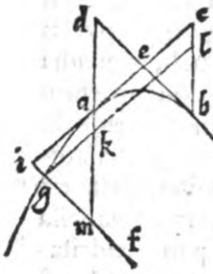
Et communi c d e ablato, relinquitur triangulum a d e triangulo c b e æquale.] *Verum eſt hoc in hyperbola quidem ſemper, in ellipſi uero & circuli circumferentia in uno tantum caſu. nam in altero caſu ablato communi c g d, & communi a e b addito, ſequitur triangulum a d e æquale eſſe triangulo c b e.* M

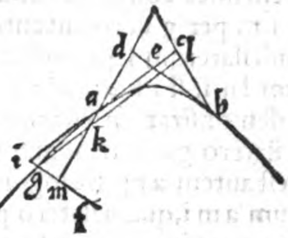
THEOREMA II. PROPOSITIO II.

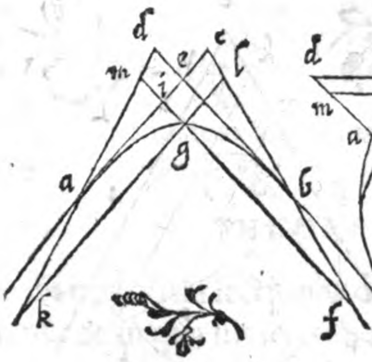
Iiſdem poſitis ſi in coni ſectione, uel circuli circumferentia ſumatur aliquod punctum: & per ipſum æquidiſtantes contingentibus uſque ad diametros ducantur: quadrilaterum factum ad unam contingentium, & ad unam diametrorum, æquale erit triangulo, quod ad eandem contingentem, & ad alteram diametrum conſtituitur.

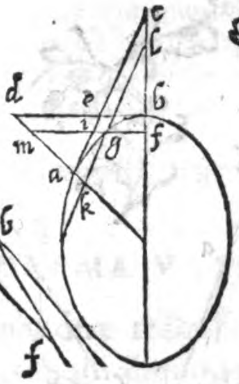
Sit coni ſectio, uel circuli circumferentia a b, quã contingant rectæ lineæ a e c, b e d: & diametri ſint a d, b c: ſumpto autem in ſectione puncto g, ducantur g k l, g m f contingentibus æquidiſtantes. Dico triangulũ a i m æquale eſſe quadrilatero c l g i. Quoniam enim oſtenſum eſt g k m triangulum æquale quadrilatero a l; commune apponatur, uel auferatur quadrilaterũ i k. ergo triangulũ a i m quadrilatero c g eſt æquale.

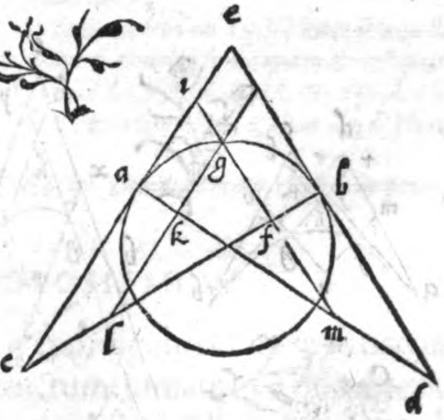






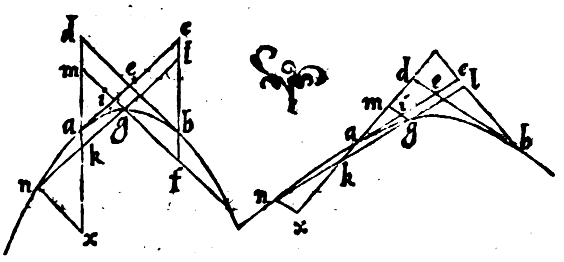






EVTOCIVS.

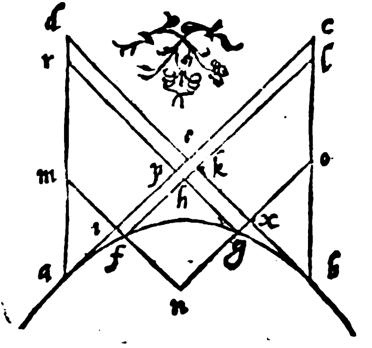
Caſus huius theorematis inuenientur per quadrageſimum ſecundum, & quadrageſimum tertiũ theorema primi libri, & per commentarios, quos in ea conſcripſimus. oportet autem ſcire, ſi punctum g inter a b ſumatur, ita ut æquidiſtantes ſint d e b, m g f, itemq; a e c, k g l, & protrahatur l k uſque ad ſectionem in n: & per n ducatur n x ipſi b d æquidiſtans: ex iĳs, quæ tradita ſunt in theoremate quadrageſimo nono, & quinquageſimo primi libri, & in ipſis commentariĳs: erit triangulum k n x æquale quadrilatero k c. ſed triangulum k n x ſimile eſt triangulo k g m, cum m g æquidiſtans ſit n x. eſt autem & æquale, quoniam linea contingens eſt a c, cui æquidiſtat g n: & diameter eſt m x: & n k æqualis k g. Quoniam igitur triangulum k n x æquale eſt quadrilatero k c, & triangulo k g m: communi ablato a g, reliquum triangulum a i m reliquo c g quadrilatero æquale erit.

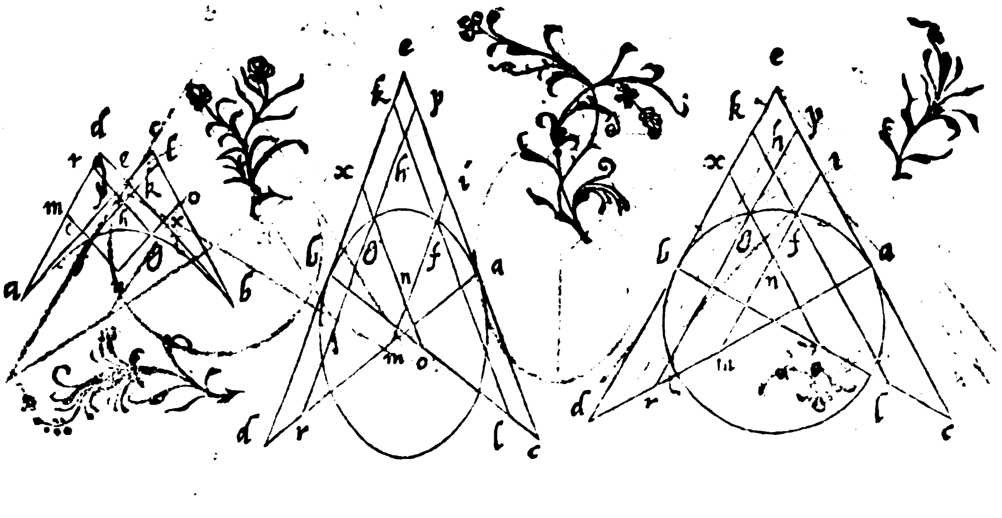


THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Iiſdem poſitis ſi in coni ſectione, uel circuli circumferentia duo puncta ſumantur; & per ipſa ducantur æquidiſtantes contingentibus uſque ad diametros: quadrilatera, quæ ab ipſis fiunt, in diametris conſtituta, inter ſe æqualia erunt.

Sit coni ſectio, uel circuli circũferentia: lineæq; contingentes. & diametri, ſicuti dictum eſt: & ſumptis in ſectione duobus punctis f g, ducantur per f quidem lineæ contingentibus æquidiſtantes f h k l, n f, i m: per g uero ducantur n g x o, g h p r. Dico quadrilaterum l g quadrilatero m h, & quadrilaterum l n ipſi r n æquale eſſe. Quoniam enim antea demonſtratum eſt triangulum r p a æquale quadrilatero g c. & triangulum a i m quadrilatero c f: eſt autem a r p triangulum maius, quàm triangulum a m i, quadrilatero p m: erit & quadrilaterum c g maius, quàm c f, eodem p m quadrilatero: & propterea quadrilaterum c g æquale eſt quadrilateris c f, p m; hoc eſt ipſis c h, r f. commune auferatur c h. reliquum igitur quadrilaterum l g æquale eſt reliquo h m. quare & totum l n toti r n æquale erit.





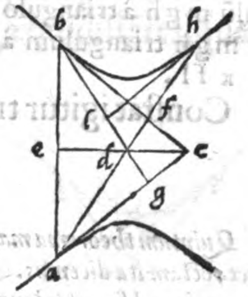
EVTOCIVS.

Hoc eheorema plures caſus habet, quos ut in antecedente inueniemus. ſed animaduertendum eſt duo puncta, quæ ſumuntur, uel eſſe inter duas diametros, uel extra, & ad eaſdem partes. nam ſi alterum quidem extra ſumatur, alterum uero inter diametros, non conſtituentur quadrilatera, de quibus in propoſitione dictum eſt: ſed neque ad utraſque diametrorum partes conſtituentur.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes inter ſe conueniant; & per tactus ducantur diametri contingentibus occurrentes: triangula, quæ ad contingentes conſtituuntur, ſibi ipſis æqualia erunt.

Sint oppoſitæ ſectiones ab, quas contingant rectæ lineæ ac, bc in puncto c conuenientes: ſitq; ſectionum centrum d: & iunctis ab, cd producatur cd uſque ad e iungantur etiam ad, bd, & ad fg producantur. Dico triangulum agd æquale eſſe triangulo bdf: &
acf triangulum triangulo bcg. Ducatur enim per h contingens
ſectionem hl, quæ ipſi ag æquidiſtabit. & quoniam ad A B
æqualis eſt dh, erit agd triangulum æquale triangulo hld. C
ſed & triangulum dhl æquale eſt triangulo bdf. ergo & trian- D
gulum agd triangulo bdf: & propterea triangulum acf ipſi bcg eſt æquale.



EVTOCIVS.

*In propoſitione huius theorematis, & eorum quæ ſequuntur, oportet ſcire, Apollonium indeterminate dicere oppoſitas ſectiones. & nonnulli quidem codices habent duas contingentes in una ſectione: nonnulli uero non duas contingentes in una, ſed ſingulas in utraque ſectione contingentes,
quæ inter ſe conueniunt (uti dictum eſt in ſecundo libro) in angulo, qui deinceps eſt angulo aſym- propoſ. 32
ptoton. & ita eueniunt ea, quæ in propoſitione dicuntur. licet autem iis, qui uolunt hoc ex deſcriptionibus conſiderare. quanquam ſi unam quidem ſectionum duæ rectæ lineæ contingant, quæ per punctum in quo conueniunt, & per centrum ducitur linea tranſuerſa diameter eſt: ſi uero utranque ſectionem ſingulæ lineæ contingant; quæ per dictum punctum & centrum ducitur, recta eſt diameter oppoſitarum ſectionum.*

FED. COMMANDINVS.

Quæ ipſi ag æquidiſtabit.] *Ex iis, quæ ab Eutocio demonſtrata ſunt in quadrageſimam* A
quartam primi huius.

Et quoniam ad eſt æqualis dh.] *Ex trigeſima primi huius.* B

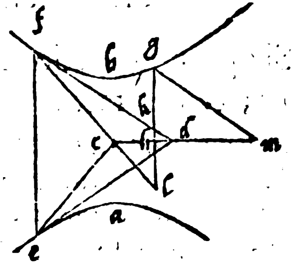
Erit agd triangulum æquale triangulo hld.] *Nam cum lineæ ag, hl inter ſe æquidi-* C
ſtent, erit angulus agd æqualis angulo hld: & anguli qui ad d æquales ſunt; quare & reliquus 29 primi.
æqualis reliquo & triangulum triangulo ſimile. ut igitur ad ad dh, ita gd ad dl, & ag ad hl. 15
ſed ad eſt æqualis dh. ergo & gd æqualis dl, & ag ipſi hl: & idcirco triangulum agd triangulo hld æquale erit.

Sed & triangulum dhl æquale eſt triangulo bdf.] *Demonſtratum eſt hoc in prima* D
propoſitione huius libri.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant: & in qua uis ſectionum aliquod punctum ſumatur, à quo ducantur duæ lineæ, una quidem contingenti æquidiſtans, altera uero æquidi ſtans ei, quæ tactus coniungit: triangulum, quod ab ipſis cōſtituitur ad diametrum per occurſum ductam, à triangulo, quod eſt ad occurſum contingentium, differt triangulo facto ad contingentem & ad diametrum, quæ per tactum ducta fuerit.

Sint oppoſitæ ſectiones a b, quarum centrum c; & lineæ contingentes ſint e d, d f, quæ ſibi ipſis occurrant in d. iunctaq; e f & c d; ac producta, iungantur f c, e c, & producantur: in ſectione autem ſumatur aliquod punctum g; per quod ducatur g k h l æquidiſtans e f; & g m æquidiſtans d f. Dico triangulum
A g h m à triangulo h k d differre triangulo k l f. Quoniā enim oſtenſa eſt c d diameter oppoſitarum ſectionum: & e f ad ipſam ordinatim applicatur: & g k h l quidem
B ducitur æquidiſtans e f; m g uero æquidiſtans d f triangulū m g h à triangulo c l h differt triangulo c d f. quare m g h triangulum à triangulo k h d differt triangulo k f l.

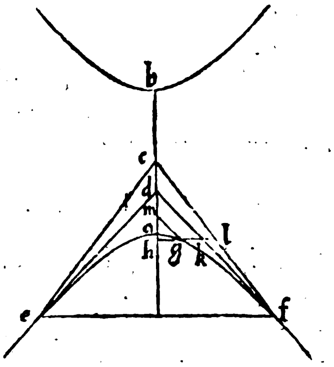


Conſtat igitur triangulum k f l quadrilatero m g k d æquale eſſe.

EVTOCIVS.

Quintum theorema manifeſtum eſt. Verum in figura quidem, quæ unam diametrum habet, uidelicet rectam ita dicemus. Quoniam oſtenſum eſt triangulum g h m *maius eſſe, quàm triangulū* c l h, *triangulo* c d f; *erit triangulum* g h m *triangulo* c h l, *& triangulo* c d f *æquale. ergo & æquale triangulo* k d h *unà cum triangulo* f l k. *triangulum igitur* g m h *à triangulo* k d h *differt triangulo* k l f. *commune auferatur triangulum* h d k. *quare reliquum* k l f *triangulum æquale eſt quadrilatero* k d m g.

In figura uero, quæ tranſuerſum diametrum habet, hoc modo. Quoniam prius demonſtratum eſt c l h *triangulum maius eſſe, quàm triangulum* m h g, *triangulo* c d f; *erit* c h l *triangulum æquale triangulo* h g m *unà cum triangulo* c f d. *commune auferatur quadrilaterum* c d k l. *reliquū igitur* k h d *triangulum æquale eſt triangulo* h g m *unà cum triangulo* k l f. *rurſus commune auferatur* m h g. *ergo triangulum* k f l, *quod relinquitur, quadrilatero* g m d k *æquale erit. Caſus habet plures, quos ex demonſtratis in quadrageſimo, & quadrageſimoquinto theoremate primi libri addiſcere oportet. Cum autem dicitur, auferatur, uel apponatur quadrilaterū, uel triangulum, ablationes, & appoſitiones iuxta proprietatem caſuum faciemus. ſed quoniam ea, quæ ſequuntur, plures caſus continent ob punctorum ſumptiones, & æquidiſtantes lineas, ne confuſionem legentibus afferamus, multas figuras deſcribētes, unam in ſingulis theorematibus faciemus, quæ oppoſitas ſectiones, & diametros, & lineas contingentes habeat; ut ſeruetur illud, quod in propoſitione dictum eſt. his poſitis & lineas æquidiſtantes, quouſque alijs occurrant, ducemus, in occurſu elementa collocantes, ita ut unuſquiſque ſeruans ea, quæ conſequuntur, facile poſſit caſus omnes demonſtrare.*

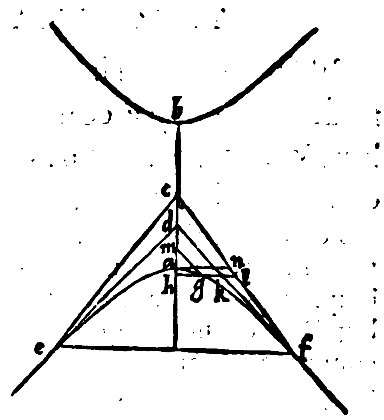


FED. COMMANDINVS.

A Quoniam enim c d oſtenſa eſt diameter oppoſitarum ſectionum.] *Nam in primo caſu, cum ſcilicet duæ lineæ contingunt utramque ſectionem, erit* c d *diameter recta: quod elicitur ex trigeſima octaua & trigeſima nona ſecundi libri huius. In ſecundo autem caſu quando duæ lineæ alteram tantum ſectionem contingunt, diameter erit tranſuerſa, quod apparet ex uigeſima nona & trigeſima eiuſdem.*

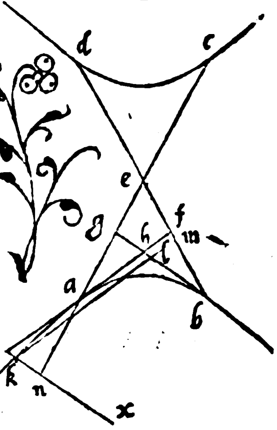
Trian-

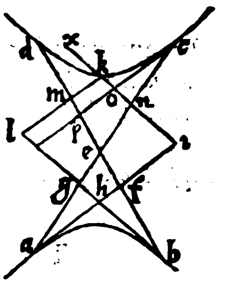
Triangulum m g h à triangulo c l h differt triangulo c d f.] *Cóſtat hoc in primo caſu ex quadrageſima quinta primi huius. ſed in altero caſu hoc modo demonſtrabitur. Iiſdem enim manentibus, quæ in figura, à uertice ſectionis linea a n ordinatim applicetur, quæ ipſam f c in puncto n ſecet. triangulum igitur m g h à triangulo c l h differt, triangulo c n a, ex quadrageſima tertia primi huius. ſed triangulum c d f triangulo c n a eſt æquale, ut oſtenſum eſt in quadrageſima tertia primi libri huius, in ſecunda demonſtratione, quæ ab Eutocio conſcribitur. ergo triangulum m g h à triangulo c l h differt triangulo c d f.*



THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Iiſdem poſitis ſi in una oppoſitarum ſectionum aliquod punctum ſumatur:& ab eo ducantur rectæ lineæ,contingentibus æquidiſtãtes,quæ & contingentibus, & diametris occurrant:quadrilaterum ab ipſis factum ad unam contingentium,& ad unam diametrorum, æquale erit triangulo, quod ad eandem contingentem,& ad alteram diametrum conſtituitur.



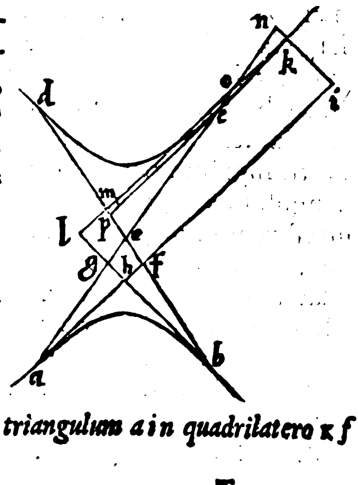


Sint oppoſitæ ſectiones,quarũ diametri a e c,b e d: & ſectionem a b contingant rectæ lineæ a f, b g conuenientes inter ſe in pũcto h: ſumatur autem aliquod punctum k in ſectione,à quo æquidiſtantes contingentibus ducantur k l m, k n x. Dico quadrilaterum k f æquale eſſe triangulo a i n. Quoniam enim oppoſitæ ſectiones ſunt a b c d: & ſectionem a b contingit recta linea a f,ipſi b d occurrens: & ducta eſt k l æquidiſtans a f: triangulum a i n quadrilatero k f æquale erit.

FED. COMMANDINVS.

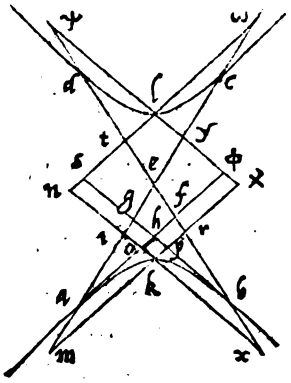
Triangulum a i n quadrilatero k f æquale erit.] *In figura enim, quæ hic apponi ſolet, uidelicet habente punctum κ in ſectione a b; quanquam ad ſecundam propoſitionem huius magis pertinere uideatur: ſit punctum o, ubi linea κ m diametrum a c ſecat. ergo ex ijs, quæ demonſtrata ſunt in quinquageſima primi, uel ex ſecunda huius, triangulum* k *o n æquale eſt quadrilatero a o m f: & appoſito communi a i* k *o, triangulum a i n quadrilatero* k *f eſt æquale. In prima uero earum, quas nos addidimus: quæ ſcilicet punctum* k *in ſectione c d habet inter c & d: ducatur c o p ſectionem contingens. erit triangulum c o n æquale quadrilatero κ p: & appoſito communi o e, triangulum c p e, hoc eſt triangulum b g e, hoc eſt a f e æquale quadrilatero κ e. rurſus apponatur commune e i. triangulum igitur a i n quadrilatero* k *f æquale erit. ſed in ſecunda figura, quæ punctum* k *habet in ſectione d c extra c: triangulum* k *o n æquale eſt quadrilatero o p: & triangulum a e f æquale triangulo c p e. ergo communi f e o* k *i appoſito, erit triangulum a i n quadrilatero κ f æquale.*

2.huius
4 huius
1.huius



THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Iiſdem poſitis ſi in utraque ſectione aliqua puncta ſumantur: & ab ipſis ducantur lineæ contingentibus æquidiſtantes, quæ & contingentibus, & diametris occurrant: quadrilatera à lineis ductis conſtituta ad diametros, inter ſe æqualia erunt.



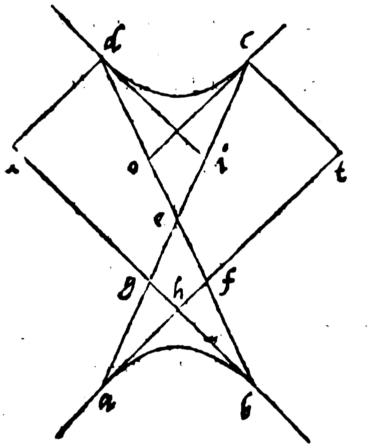
Ponantur enim eadem, quæ ſupra: & in utraque ſectione puncta k l ſumantur: per quæ ducantnr m k p r χ, n s t l ω ipſi a f æquidiſtantes: & n i o k x, χ φ y l ψ æquidiſtantes b g. Dico ea euenire, quæ in propoſitione dicta ſunt. nam 1. huius. cum triangulnm a o i quadrilatero r o æquale ſit, commune apponatur e o. erit totum triangulum a e f æquale quadrilatero k e. eſt autem & b g e triangulum quadrilatero l e æquale: & triangulum a e f triangulo b g e. ergo & quadrilaterum l e æquale eſt quadrilatero i k r e. commune apponatur n e. totum igitur t k toti i l: & k y ipſi r l æquale erit.

FED. COMMANDINVS.

Eſt autem & b g e triangulum quadrilatero l e æquale.] *Hoc nos demonſtrauimus in antecedente, ſed cum triangulum a f e ſit æquale quadrilatero l e, quod etiam demonſtrauimus, fortaſſe licebit illud, quod propoſitum eſt expeditius oſtendere abſque triangulo b g e. Quoniam enim triangulum a e f æqnale eſt quadrilatero* k e: *& eſt æquale quadrilatero l e, erit & quadrilaterum l e ipſi* k e *æquale: & communi appoſito n e, totum t* k *toti i l: & totum* K y *toti r l æquale erit.*

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Iiſdem poſitis pro punctis k l ſumantur c d, in quibus diametri cum ſectionibus conueniant: & per ipſa contingentibus æquidiſtantes ducantur. Dico d g quadrilaterum quadrilatero f c: & quadrilaterum x i quadrilatero t o æquale eſſe.



A B Quoniam enim triangulum a g h oſtenſum eſt æquale triangulo b h f: & linea, quæ
4. ſexti à puncto a ducitur ad b æquidiſtat lineæ à puncto g ad f ductæ: erit ut a e ad e g, ita
b e ad e f: & per conuerſionem rationis, ut e a ad a g, ita e b ad b f. eſt autem ut e a
ad a e, ita d b ad b e: utraque enim utriuſque eſt dupla. ergo ex æquali, ut c a ad a g, ita d b ad b f. & ſunt
C triangula ſimilia propter lineas æquidiſtantes. ut igitur c t a triangulum ad triangulum a h g, ita triangulum x d b ad triangulum b h f: & permutando. triangulum autem a h g æquale eſt triangulo b h f. ergo & c t a triangulum triangulo x d b eſt æquale. quorum triangulum a h g æquale eſt triangulo b h f, ut oſtenſum eſt. reliquum igitur quadrilaterum d h eſt æquale quadrilatero c h: & propterea quadrilaterū d g qua-
D drilatero c f. Itaque quoniam c o æquidiſtat a f, triangulum c o e æquale eſt triangulo a f e. ſimiliter autem
E & triangulum d e i triangulo b e g. ſed b e g triangulum triangulo a e f eſt æquale. ergo & triangulū c o e triangulo d i e. eſtq; g d quadrilaterum æquale quadrilatero f c. totum igitur x i toti o t æquale erit.

FED.

FED. COMMANDINVS.

A Quoniam enim triangulum a g h oſtenſum eſt æquale triangulo b h f.] *In 1. huius.*

B Et linea, quæ à puncto a ducitur ad b æquidiſtat lineæ à puncto g ad f ductæ.] *Hoc ex primo lemmate Pappi apparere poteſt.*

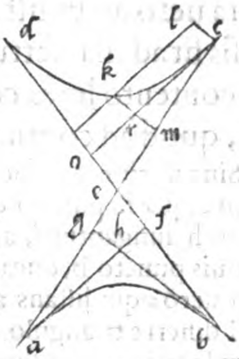
C Vt igitur c t a triangulum ad triangulum a h g, ita triangulum x d b ad triangulum b h f.] *Quoniam enim ut c a ad a g, ita eſt d b ad b f, erit ut quadratum c a ad quadratum a g, ita quadratum d b ad quadratum b f. ut autem quadratum c a ad quadratum a g, ita triangulum c t a ad triangulum g h a quòd triangula ſimilia ſint: & eadem ratione ut quadratum d b ad quadratum b f, ita triangulum x d b ad triangulum h f b, ex tertio lemmate Pappi. ergo ut c t a triangulum ad triangulum g h a, ita triangulum x d b ad triangulum h b f.*

D Itaque quoniam c o æquidiſtat a f, triangulum c o e æquale eſt triangulo a f e.] *Sunt enim triangula c o e, a f e ſimilia: & eſt a e æqualis e c. quare ſequitur, ut & alia latera, & idcirco ipſa triangula inter ſe æqualia ſint.*

E Sed b e g triangulum triangulo a e f eſt æquale.] *Oſtenſum eſt hoc in prima huius.*

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

IISDEM poſitis, ſi alterum quidem punctum ſit inter diametros, ut K; alterum uero ſit idem, quod unum punctorum c d, ut c: & æquidiſtantes ducantur. Dico triangulum c e o æquale eſſe quadrilatero K e: & quadrilaterum l o æquale ipſi l m.



Illud uero perſpicuè apparet. nam cum demonſtratum ſit A
c e o triangulum æquale triãgulo a e f: triangulumq́; a e f æqua B
le quadrilatero K e & triangulum c e o quadrilatero K e æqua C D
le erit. ergo & triangulum c r m quadrilatero K o. & quadrilaterum l m quadrilatero l o eſt æquale.

FED. COMMANDINVS.

A Nam cum demonſtratum ſit c e o triangulum æquale triãgulo a e f.] *In quarta huius.*

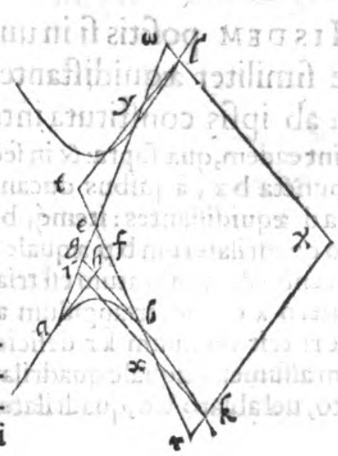
B Triangulumq́; a e f æquale quadrilatero K e.] *Hoc nos ſupra demonſtrauimus in ſextam huius.*

C Ergo & triangulum c r m quadrilatero K o.] *Ablato nimirum communi quadrilatero o m. Atqui hoc prius per ſe patet ex ſecunda huius; linea enim c o ſectionem contingit: ex quo contra ſequitur, appoſito communi o m, triangulum c e o quadrilatero k e æquale eſſe.*

D Et quadrilaterum l m quadrilatero l o eſt æquale.] *Nam cum triangulum c e m æquale ſit quadrilatero K o, communi appoſito l r, erit l m quadrilaterum quadrilatero l o æquale.*

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

IISDEM poſitis ſumantur K l, non tamen in punctis, in quibus diametri ſectionibus occurrunt. demonſtrandum eſt quadrilaterum l t r x quadrilatero ω χ K i æquale eſſe.



Quoniam enim rectæ lineæ a f, b g ſectionem contingunt; & per tactus diametri a e, b e ducuntur; &
ſunt l t, K i contingentibus æquidiſtantes triangulum A
t y e maius eſt quàm triangulum y ω l, triangulo e f a.
ſimiliter & triangulum x e i maius eſt, quàm triangulum x r K, triangulo b e g. ſed triangulum a e f æqua- B
le eſt triangulo b e g. quare eodem exceſſu & triangulum t y e excedit triangulum y ω l, & triangulum x e i

C excedit ipſum x r k. triangulum igitur t y e unà cum triangulo x r k æquale eſt triangulo x e i unà cum triangulo y ω l. commune apponatur k x e y l χ. ergo quadrilaterum l t r χ quadrilatero ω χ k i eſt æquale.

FED. COMMANDINVS.

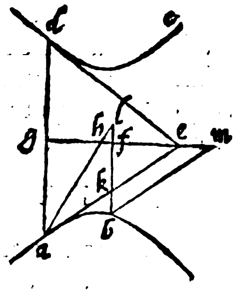
A Triangulum t y e maius eſt quàm triangulum y ω l, triangulo e f a.] *Ex quadrageſima tertia primi huius.*

B Sed triangulum a e f æquale eſt triangulo b e g.] *Ex prima huius.*

C Triangulum igitur t y e unà cum triangulo x r k æquale eſt triangulo x e i unà cum triangulo y ω l.] *Hoc demonſtrauit Eutocius in commentarijs in quadrageſimam octauá 2. huius.*

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

IISDEM poſitis ſi in quauis ſectione punctum ſumatur: & ab ipſo lineæ æquidiſtantes ducantur; una quidem contingenti æquidiſtans; altera uero æquidiſtans ei, quæ tactus coniungit: triangulum, quod ab ipſis fit ad diametrum per occurſum contingentium ductam, à triangulo contento linea contingente, & diametro per tactum, differt triangulo, quod ad contingentium occurſum conſtituitur.



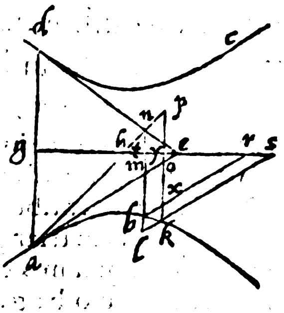
Sint ſectiones oppoſitæ a b, c d: & lineæ contingentes a e, d e, quæ in puncto e ſibi ipſis occurrant. ſit autem centrum h: iunganturq́; a d, & e h g: & ſumpto in ſectione a b quouis puncto b, ducatur b f l quidem ipſi a g æquidiſtans b m uero æquidiſtans a e. Dico triangulũ b f m à triangulo a k l differre triangulo k e f. lineam enim a d ab ipſa e h bifariam ſecari perſpicuum eſt: & e h diametrum eſſe coniugatã ei, quæ per h ducta ipſi a d æquidiſtat. quare a g applicata eſt ad e g. Quoniam igitur g e diameter eſt; lineaq́; a e ſectionem contingit: & applicata eſt a g: ſumpto autem in ſectione puncto b; ad e g applicatur b f, ipſi a g æquidiſtans; & b m æquidiſtans a e: triangulum b m f à triangulo l h f differt triangulo h a e. ergo b m f triangulum à triangulo a k l differt k f e triangulo.

45. primi huius.

Conſtat igitur quadrilaterum b k e m triangulo l k a æquale eſſe.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

IISDEM poſitis ſi in una ſectione ſumantur duo puncta: & ab utriſque ſimiliter æquidiſtantes ducantur: quadrilatera ab ipſis conſtituta inter ſe æqualia erunt.

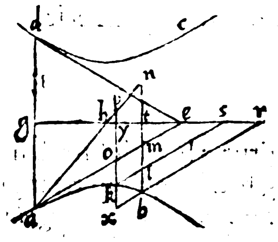


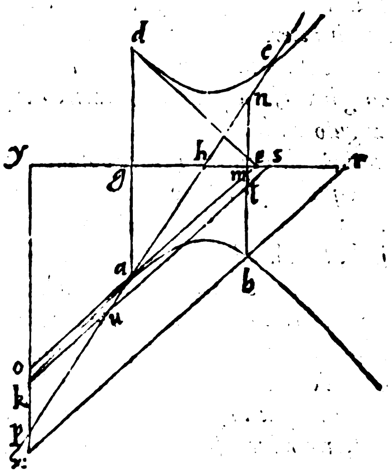
Sint eadem, quæ ſupra: & in ſectione a b ſumantur quæuis puncta b k; à quibus ducantur lineæ b l m n, k x o y p ipſi a d æquidiſtantes: itemq́; b x r, k l s æquidiſtantes a e. Dico quadrilaterum b p æquale eſſe quadrilatero k r. Quo-
A niam enim demonſtratum eſt triangulum a o p æquale quadrilatero k o e s; & triangulum a m n æquale quadrilatero b m e r: erit reliquum k r deficiens quadrilatero b o, uel
B ipſum aſſumens, æquale quadrilatero m p: & communi appoſito, uel ablato b o, quadrilaterum b p quadrilatero x s æquale erit.

FED.

FED. COMMANDINVS.

Quoniam enim demonſtratum eſt, triangulum a o p æquale quadrilatero k o e s: & triangulum a m n æquale quadrilatero b m e r] *Demonſtratur hoc in antecedente. triangulum namque* k s y *maius eſt, quàm triangulum p h y, triangulo h a e, ex quadrageſima quinta primi huius. ſed triangulũ a p o unà cum triangulo y o e æquale eſt triangulo p h y unà cum triangulo h a e. quare ſequitur triangulum* k s y *maius eſſe, quàm triangulum a o p, triangulo y o e: & demto communi y o e, reliquum a o p triangulum quadrilatero* k o e s *eſt æquale. Rurſus linea b n ſecet diametrum e h in puncto t. erit triangulum b r t maius, quàm triangulum n h t, triangulo h a e. triangulum autem a m n unà cum ipſo e t m æquale eſt triangulo n h t unà cum h a e. ergo triágulum b r t maius erit, quàm triangulum a m n, triágulo e t m: & dempto communi triangulo e t m, quod relinquitur triangulum a m n quadrilatero b m e r æquale erit. Itaque in prima figura, cum triangulum a o p excedat triangulum a m n, quadrilatero m p: & quadrilaterum* k o e s *excedat b m e r, quadrilatero* k r, *dempto tamen ex eo prius quadrilatero b o: ſi ipſum b o quadrilaterum utrinque apponatur, erit quadrilaterum* K r, *hoc eſt x s quadrilatero b p æquale. In ſecunda uero figura triangulum a m n excedit triangulum a o p, quadrilatero m p: & quadrilaterum b m e r excedit* k o e s, *quadrilatero* k r, *dempto tamen ex eo quadrilatero b o. quare b o utrique addito, erit quadrilaterum* k r *æquale quadrilatero l p. Denique in tertia figura, quoniam triangulum a o p eſt æquale quadrilatero* k o e s, *dempto communi* k o a u, *reliquum triangulum u* k p *æquale erit quadrilatero u a e s. eſt autem triangulo a m n æquale quadrilaterum b m e r. triangulum igitur u* k p *unà cum quadrilatero b m e r, æquale eſt triangulo a m n unà cum quadrilatero u a e s: & dempto ex utriſque communi l m e s, reliquum u* K p *triangulum unà cum b l s r eſt æquale triágulo a m n unà cum u a m l. Quòd ſi utriſque addatur commune x p u l b, erit quadrilaterum* k r *æquale quadrilatero x p n b. ſimili ratione & alia eiuſmodi demonſtrare licebit.*

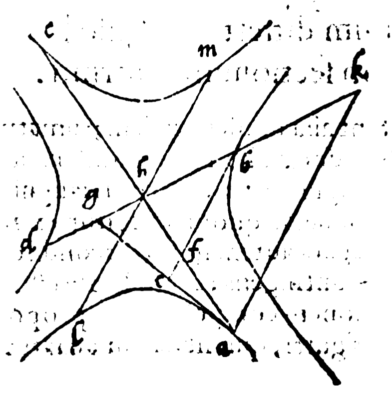




THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

SI in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, rectæ lineæ contingentes ſectiones, quæ deinceps ſunt, in unum punctum conueniant; & per tactus diametri ducantur: triangula, quorum communis uertex eſt ſectionum centrum, inter ſe æqualia erũt.

Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur a b c d; & ſectiones a b contingant rectæ lineæ a e, b e in puncto e conuenientes: ſit autem centrum h, & iunctæ a h, b h ad c d producantur. Dico b f h triangulum triangulo a g h æquale eſſe. ducantur enim per a h lineæ a k, h l m ipſi b e æquidiſtantes. & quoniam b f e ſectionem contingit; & per tactum diameter eſt d h b: duciturq́; l m æquidiſtans b e; erit l m diameter coniugata ipſi



10. ſecũdi huius.

d b; quæ ſecunda diameter appellatur: & propterea a k ad b d ordinatim eſt applicata. contingit autem a g. ergo rectangulum k h g æquale eſt quadrato b h: & ut k h ad h b, ita b h ad h g. ſed ut k h ad h b, ita k a ad b f, & a h ad h f. ut igitur a h ad h f, ita b h ad h g. & ſunt anguli b h f, g h f duobus rectis æquales. ergo a g h triangulum triangulo b h f æquale erit.

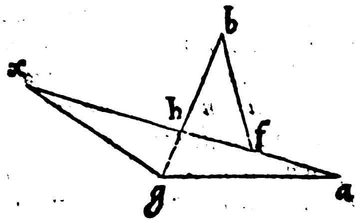
38. primi huius.
14. ſexti.

EVTOCIVS.

Vt igitur a h ad h f, ita b h ad h g. & ſunt anguli b h f, g h f duobus rectis æquales. ergo a g h triangulum triangulo b h f æquale erit.

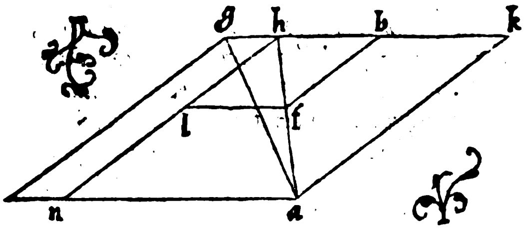
Deſcribantur ſeorſum triangula: & producta a h ad x, fiat ut g h ad h b, ita f h ad h x. Itaque quoniam ut b h ad h g, ita eſt a h ad h f: erit a h ipſi h x æqualis. & propterea triangulum a g h æquale triangulo g h x. ſed ut x h ad h f, ita b h ad h g: & circa æquales angulos, qui ſunt ad uerticem h latera ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. triangulum igitur f h b triangulo g h x eſt æquale: & idcirco æquale triangulo a g h.

9. quinti
2. ſexti
15. ſexti



Sed & aliter demonſtrare poſſumus triangula æqualia eſſe. Quoniam enim oſtenſum eſt, ut k h ad h b, ita b h ad h g: & ut k h ad h b, ita a k ad b f: erit ut a k ad b f, ita b h ad h g. quare rectangulum ex a k & h g æquale eſt rectangulo f b h. & cum anguli g h l, h b f ſint æquales, ſi parallelogramma romboidea deſcripſerimus, iiſdem lateribus contenta, quæ angulos ad b h æquales habeant, etiam inter ſe ſe æqualia erunt, propterea quòd latera ex cõtraria parte ſibi ipſis reſpondent: atque erit romboides f b h l in angulo b trianguli h b f duplum; cuius quidem diameter eſt f h; romboides autem, quod continetur g h, & linea æquali a k, uidelicet h l n in angulo g h n, duplum trianguli a g h. ſunt enim in eadem baſi g h, & ſub eadem lineis, quæ à puncto a ducitur ipſi g h æquidiſtans. triangulum igitur a g h triangulo f b h æquale eſſe manifeſto conſtat.

16. ſexti.
29. primi
14. ſexti
41. primi
15. quinti



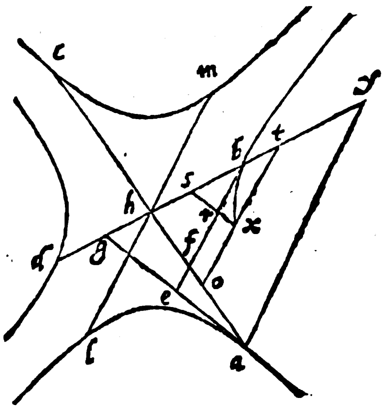
THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XIIII.

IISDEM poſitis, ſi in quauis ſectione punctum ſumatur: & ab ipſo ducantur lineæ æquidiſtantes contingentibus uſque ad diametros: triangulum, quod ad centrum conſtituitur, à triangulo circa eundem angulum differt triangulo baſim habente lineam contingentem, & uerticem ſectionum centrum.

Sint alia quidem eadem; ſumatur autem punctum in b ſectione, quod ſit x; & per ipſum ducatur x r s æquidiſtans a g; & x o t æquidiſtans b e. Dico triangulum o h t à triangulo x t s differre triangulo h b f. ducatur enim à puncto a linea a y ipſi b f
A æquidiſtans. quoniam igitur ex iis, quæ dicta ſunt, ſectionis a l diameter eſt l h m: coniugata autem ipſi, & ſecunda diameter d h b: atque à puncto a ducitur a g ſectionem contingens; & applicata eſt a y, quæ ipſi l m æquidiſtat: habebit a y ad y g pro-
C portionem compoſitam ex proportione h y ad y a: & ex proportione tranſuerſi lateris figuræ, quæ fit ad l m ad latus rectum. ſed ut a y ad y g, ita x t ad t s: & ut h y ad

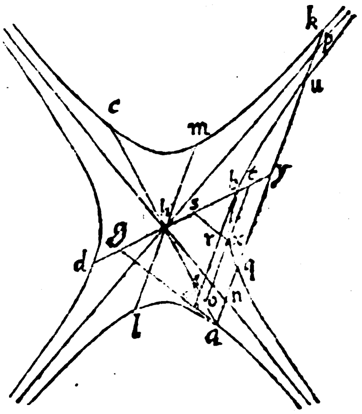
y a, ita

D ya, ita ht ad to, & hb ad bf. ut autem figuræ, quæ ad lm, tranſuerſum latus ad rectum, ita figuræ, quæ ad bd rectum latus ad tranſuerſum. ergo xt ad ts proportionem habebit compoſitam ex proportione hb ad bf, hoc eſt ht ad to; & ex proportione recti lateris figuræ, quæ eſt ad bd, ad latus tranſuerſum. E quare per ea, quæ demonſtrata ſunt in quadrageſimo primo theoremate primi libri, triangulum tho à triangulo xts differt triangulo bfh: & propterea triangulo agh.



FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur ex iis, quæ dicta ſunt ſectionis al diameter eſt lhm: coniugata autem ipſi, & ſecunda diameter dhb.] *Hoc ex uigeſima propoſitione ſecundi libri Apollonij conſtare poteſt: ſed tamen nos ex alijs demonſtrare conabimur. Producatur enim ay uſque ad ſectionem cm in k, quæ ſectionem b ſecet in punctis qu: conueniet enim ay cum utraque ſectione al, cm in uno tantum puncto, quod in ſexta decima ſecundi huius demonſtratur: & erunt ay, yk inter ſe æquales ductis namque ſectionum aſymptotis nh, hp, linea an eſt æqualis pk ex ſexta decima, quam diximus: & nq æqualis up, ex octaua eiuſdem: ſed & qy æqualis eſt yu, quod qu contingenti bc æquidiſtet.* 47. primi huius. *ergo ay, yk inter ſe æquales ſunt. Itaque quoniam linea aK oppoſitas ſectiones al, cm ſecat, non tranſiens per centrum: & à puncto ipſius medio y ad centrum h ducitur yhbd: erit ex trigeſima ſeptima ſecundi huius dhb oppoſitarum ſectionum diameter, quæ recta appellatur; lhm uero, quæ æquidiſtat ak, tranſuerſa ipſi coniugata. Poteſt etiam hoc oſtendi ex quadrageſima tertia eiuſdem. nam cum linea qu ſectionem b in duobus punctis ſecet: & per centrum h ad medium quidem lineæ qu ducta ſit hy: lhm uero ipſi æquidiſtans: erunt lm, bd ſectionum coniugatæ diametri: & idcirco ſectionis al diameter eſt lm; & db ipſi coniugata, & ſecunda diameter.*

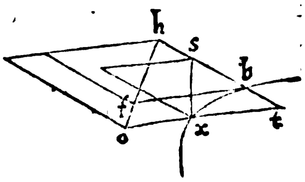


B Et applicata eſt ay, quæ ipſi lm æquidiſtat.] *Applicatur enim ay ad diametrum db ordinatim, quoniam ut demonſtrauimus, linea ak ab ipſa db bifariam ſecatur.*

C Habebit ay ad yg proportionem compoſitam ex proportione hy ad ya, & ex proportione tranſuerſi lateris figuræ, quæ fit ad lm, ad latus rectum.] *Ex quadrageſima primi huius: recta enim linea ag ſectionem al contingens cum ſecunda diametro conuenit: & à puncto a ad eandem diametrum applicatur ay, alteri diametro lm æquidiſtans, ut oſtendimus.*

D Vt autem figuræ, quæ ad lm tranſuerſum latus ad rectum, ita figuræ ad bd rectum latus ad tranſuerſum.] *Hoc ita eſſe nos demonſtrauimus in commentarijs in uigeſimam ſecundi huius.*

E Quare per ea, quæ demonſtrata ſunt in quadrageſimo primo theoremate primi libri, triangulum tho à triangulo xts differt triangulo bfh: & propterea triangulo agh.] *Deſcribantur enim à lineis xt, hb, ht parallelogramma æquiangula xts, hbf, hto in triangulorum angulis. & quoniam linea xt in ſectione b ad diametrum ordinatim applicatur: habetq; xt ad ts proportionem compoſitam ex proportione hb ad bf: & proportione recti lateris ad tranſuerſum: & eſt parallelogrammum hto ſimile parallelogrammo hbf, quod triangulum triangulo ſimile: erit ex quadrageſima prima primi huius parallelogrammum hto maius, quàm parallelogrammum xts, parallelogrammo hbf. ſed parallelo-*

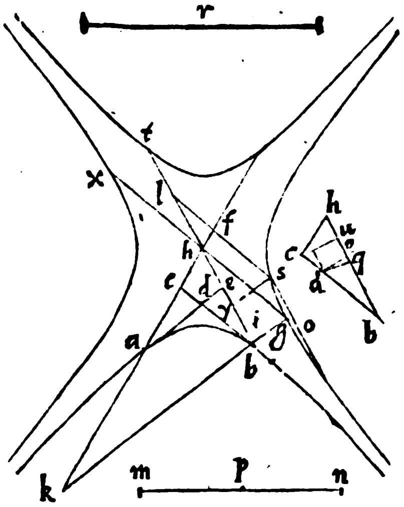


gramma triangulorum dupla ſunt. triangulum igitur h t o à triangulo x t s differt triangulo h b f, hoc eſt triangulo a g h, quod ipſi h b f eſt æquale, ex antecedenti.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

SI unam oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ appellantur, rectæ lineæ contingentes conueniant; & per tactus diametri ducantur: ſumatur autem punctum in quauis ſectionum coniugatarum: & ab ipſo ducantur æquidiſtantes contingentibus uſque ad diametros: triangulum, quod ab ipſis ad ſectionem conſtituitur, maius eſt, quàm triangulum, quod ad centrum, triangulo baſim habente lineam contingentem, & uerticem centrum ſectionum.

Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ dicuntur; a b, g s, t, x, quarum centrum h: & ſectionem a b contingant a d e, b d c: & per tactus a b diametri a h f, b h t ducantur. Sumatur autem in g s ſectione punctum s; à quo ducatur s f l ipſi b c æquidiſtans, & s y æquidiſtans a e. Dico s l y triangulum maius eſſe, quàm triangulum h l f, triangulo h c b. ducatur enim per h, x h g æquidiſtans b c: & per g ipſi a e æqui-
A diſtans ducatur K i g: & s o æquidiſtans b t. qua-
re perſpicuum eſt diametrum x g coniugatam eſ-
B ſe ipſi b t: & s o, quæ æquidiſtat b t ad h g o ordi-
natim eſſe applicatam: itemq; parallelogrammū
eſſe s l h o. quoniam igitur b c ſectionem contin-
git; ducitur q; b h per tactum; & contingit altera
a e: fiat ut d b ad b e, ita linea m n ad duplam ip-
C ſius b c: erit m n linea, quæ figuræ ad b t conſti-
tutæ rectum latus appellatur. ergo ſecta m n bi-
D fariam in p, ut d b ad b e, ita eſt m p ad b c. Dein
de fiat ut x g ad t b, ita t b ad lineam r. erit & r
latus rectum figuræ, quæ fit ad x g. Itaque quo-
niam ut d b ad b e, ita m p ad c b: & ut d b ad
lem in 22 decimi b e, ita quadratum d b ad d b e rectangulum: ut
autem m p ad c b, ita rectangulum ex m p & b h
1. ſexti. ad rectangulum c b h: erit ut quadratum d b ad
rectangulum d b e, ita rectangulum ex m p & b h
ad rectangulum c b h. Sed rectangulum ex m p,
E & b h æquale eſt quadrato h g: propterea quòd
20. ſexti. quadratum x g eſt æquale rectangulo ex t b & m n: & rectangulū ex m p & b h quar-
ta pars eſt rectanguli ex t b, & m n: quadratum uero g h eſt item quarta pars quadrati
x g. ut igitur quadratum d b ad rectangulum d b e, ita eſt quadratum g h ad rectangu
lum c b h: & permutando ut quadratum d b ad quadratum g h, ita rectangulum d b e
F ad c b h rectangulum. ſed ut quadratum d b ad quadratum g h, ita triangulum d b e
G ad triangulum g h i; ſimilia enim ſunt: & ut rectangulum d b e ad rectangulum c b h,
ita d b e triangulum ad triangulum c b h. ut ergo triangulum d b e ad triangulum
9. quinti. g h i, ita triangulum d b e ad ipſum c b h triangulum. quare triangulum g h i trian-
gulo c b h eſt æquale: & idcirco triangulum g h K à triangulo h i K differt, triangulo
g h i; hoc eſt triangulo c b h. Rurſus quoniam h b ad b c compoſitam proportionem
15. quinti habet ex proportione h b ad m p, & ex proportione m p ad b c: & ut h b ad m p, ita
H K t b ad m n, & linea r ad x g. ut autem m p ad b c, ita d b ad b e: habebit h b ad b c
proportionem compoſitā ex proportione d b ad b e, & proportione r ad x g. Quòd
cum æquidiſtent b c, s l; triangulum h c b ſimile eſt triangulo h l f: & ob id ut h b ad
b c, ita



b c, ita eſt h l ad l f. quare b l ad l f compoſitam proportionem habet ex proportione lineæ r ad x g; & proportione d b ad b e; hoc eſt g h ad h i. Quoniam igitur hyperbole eſt s g, cuius diameter quidem x g, rectum uero latus r: & ab aliquo ipſius pũcto s applicatur s o: deſcribiturq; ab ea, quæ ex centro, uidelicet ab h g figura h i g: & ab applicata s o, uel h l ipſi æquali figura h l f: ab h o autem, quæ eſt inter centrum & applicatam, uel ab s l ipſi h o æquali deſcribitur s l y figura, ſimilis figuræ h i g, quæ fit ab e a, quæ ex centro: & proportiones habet compoſitas, ut dictum eſt: erit triangulum s l y maius, quam h l f triangulum, triangulo h c b. L

FED. COMMANDINVS.

Quare perſpicuum eſt diametrum x g coniugatam eſſe ipſi b t.] *Ex uigeſima ſecundi huius: linea enim b c ſectionem contingit: & per centrum h ducitur t h b quidem ad tactum: x h g uero contingenti æquidiſtans.* A

Et s o, quæ æquidiſtat b t ad h g o ordinatim eſſe applicatam.] *Si enim per g ducatur linea ſectionem contingens, æquidiſtabit ipſi t h b ex eadem uigeſima ſecundi, quare & ipſi s o: propterea q; ex quadrageſima ſeptima primi huius s o ad h g o ordinatim erit applicata.* B

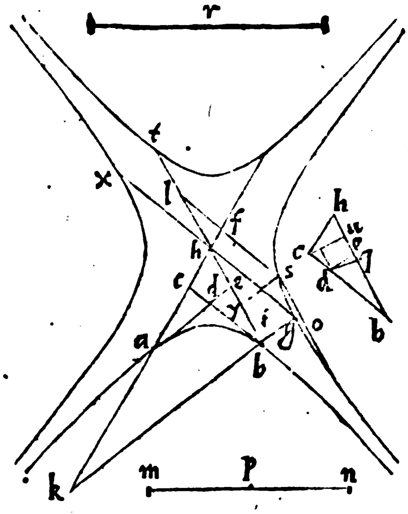
Erit m n linea, quæ figuræ ad b t conſtitutæ rectum latus appellatur.] *Ex quinquageſima primi huius.* C

Erit & r rectum latus figuræ, quæ fit ad x g.] *Eſt enim ſectionis s g diameter, ſiue tranſuerſum latus x g: & b t ſecunda diameter ipſi coniugata, ut dictum eſt. ſecunda autem diameter mediam proportionem habet inter figuræ latera, quod ex eius diffinitione apparet.* D

Propterea quòd quadratum x g æquale eſt rectangulo ex t b & m n.] *Ex diffinitione ſecundæ diametri: nam x g ſecunda diameter eſt ſectionis a b, cuius quidem tranſuerſum latus eſt t b, rectum uero m n.* E

Sed ut quadratum d b ad quadratum g h; ita triangulum d b e ad triangulum g h i, ſimilia enim ſunt.] *Triangula enim d b e, g h i ſimilia ſunt ob æquidiſtantiam linearum d b, h g: itemq; linearum a e, K g. quare triangulum d b e ad ipſum g h i duplam proportionem habet eius, quæ eſt lineæ d b ad g h. & ſimiliter quadratum d b ad quadratum g h proportioné habet eiuſdem proportionis duplam. ut igitur quadratum d b ad quadratum g h, ita triangulum d b e ad triangulum g h i.* F 19. ſexti.

Et ut rectangulum d b e ad rectangulum c b h, ita d b e triangulum ad triangulum c b h.] *Deſcribantur ſeorſum triangula d b e, c b h: & ducantur perpendiculares d q, c u, erunt d b q c b u triangula inter ſe ſimilia. quare ut d q ad d b, ita eſt c u ad c b: ut autem d q ad d b, ita rectangulum ex d q & b e ad rectangulum d b e, ex prima ſexti elementorum: & eadem ratione ut c u ad c b ita rectangulum ex c u & b h ad rectágulum c b h. ergo ut rectangulum ex d q & b e ad rectangulum d b e, ita rectangulum ex c u & b h ad rectangulum c b h: & permutando, rectangulum ex d q & b e ad rectangulum ex c u & b h, ut d b e rectangulum ad rectangulum c b h. rectangulum autem ex d q & b e duplum eſt trianguli d b e: & rectangulum ex c u, & b h duplum trianguli c b h. ergo ut rectangulum d b e ad rectangulum c b h, ita d b e triangulum ad triangulum c b h.* G

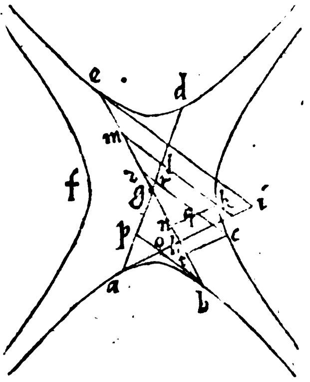


Et linea r ad x g.] *Vt enim figuræ, quæ ad t b cóſtituitur, tráſuerſum latus t b ad rectú m n, ita figuræ, quæ ad x g rectum latus r ad x g tranſuerſum; quod nos in 20. ſecúdi huius oſtendimus.* H

Vt autem m p ad b c, ita d b ad b e.] *Patuit hoc ſupra.* K

Erit triangulum s l y maius, quàm h l f triangulum, triangulo h c b.] *Nam ex quadraſima prima primi huius ſequitur triangulum s l y maius eſſe, quàm triangulum h l f, triangulo g h i; hoc eſt triangulo c b h, quod ipſi g h i eſt æquale, ut oſtenſum eſt ſuperius.* L

Illud autem, quod hic demonſtrat Apollonius, ſequitur, etiam ſi rectæ lineæ ſectiones oppoſitas contingant. Sint enim oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur, a b c, d e f, cuius centrum g: & ſectiones a b, d e contingant rectæ lineæ a h i, e i in puncto i conuenientes: perq; a e ductis diametris a g d, e g b, ſumatur in ſectione c punctum k, *à quo ducatur* K *l m quidem ipſi e i æquidiſtans; &* k *n æquidiſtans a i. Dico triangulum* k *m n maius eſſe, quàm triangulum l m g, triangulo g a b. Ducatur per b linea b o p ſectionem in b contingens, quæ ipſi c i æquidiſtabit ex demonſtratis ab Eutocio in quadrageſimam quartam huius. quare &* k *m æquidiſtat b p. Itaque quoniam ſectionem a b contingunt rectæ lineæ a o, o b: & à puncto* k *in ſectione ſumpto ducuntur* k *l m,* k *n contingentibus æquidiſtantes: eodem modo, quo ſupra, demonſtrabitur triangulum* K *m n maius, quàm triangulum l m g, triangulo g a b. atque hoc eſt quod demonſtrandum proponebatur. Ex iam dictis etiam illud Theorema oſtendi poteſt.*

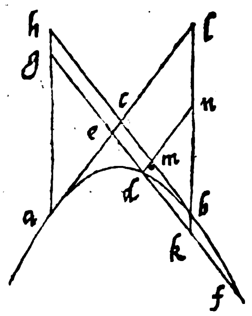


Iiſdem poſitis, ſi in qua uis ſectione aliqua puncta ſumantur: & ab ipſis ducantur lineæ contingentibus æquidiſtantes, quæ & contingentibus, & diametris occurrãt; quadrilatera à lineis ductis conſtituta ad diametros inter ſe æqualia erunt.

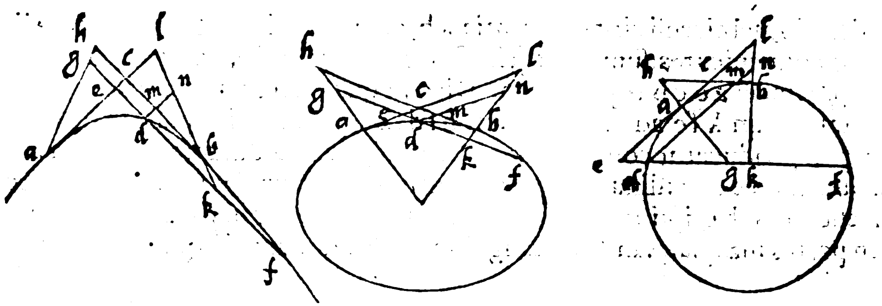
Maneant enim eadem, quæ ſupra: & in ſectione c aliud punctum ſumatur, quod ſit c; atque ab eo ducantur c q r s, c t contingentibus æquidiſtantes. Dico quadrilaterum k *l r q quadrilatero c q n t æquale eſſe. ex ijs enim, quæ demonſtrata ſunt, triangulum c s t maius eſt, quàm triangulum r s g, triangulo g a b. quare quadrilaterum c r g t triangulo g a b eſt æquale. & ſimili ratione cum triangulum* k *m n maius ſit, quàm triangulum l m g, triangulo g a b, erit & quadrilaterum* k *l g a æquale eidem g a b triangulo. quadrilatera igitur c r g t,* k *l g n inter ſe æqualia erunt: & dempto communi quadrilatero r g n q, relinquetur quadrilaterum* k *l r q quadrilatero c q n t æquale; quod quidem demonſtrare oportebat.*

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

Si coni ſectionem, uel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in unum conueniant: & ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt in ſectione, ducatur linea uni contingentium æquidiſtans, quæ & ſectionem & alteram contingentium ſecet: ut quadrata contingentium inter ſe ſe, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter ſectionem, & contingentem, ad quadratum lineæ inter æquidiſtantem & tactum interiectæ.



Sit coni ſectio, uel circuli circumferentia a b, quam con
tingant rectæ lineæ a c, c b, in puncto c conuenientes: &
ſumpto aliquo puncto d in ſectione, ab eo ducatur d f, quæ
ipſi c b æquidiſtet. Dico ut quadratum b c ad c a qua-
dratum, ita eſſe rectangulum f e d ad quadratum e a. du-
cantur enim per a b diametri a g h, k b l: & per d ducatur
46. & 47. primi huius. d m n æquidiſtans a l. perſpicuum eſt, lineam d k ipſi k f
æqualem eſſe: triangulumq; a e g æquale quadrilatero d l:
2. huius & triangulum b l c triangulo a c h. Itaque quoniam f K
1. huius æqualis eſt k d, & ipſi adiicitur d e; rectangulum f e d unà
6. ſecũdi element. cum d κ quadrato æquale erit quadrato k e. eſt autem
3. lemma Pappi. triangulum e l K ſimile triangulo d n k. quare & e k quadratum ad quadratum k d,
ita triangulum e l k ad triangulum d n k: & permutando ut totum quadratum e k ad
19. quiti. totum triangulum e l k, ita ablatum quadratum d k ad ablatum triangulum d n k. ergo & reliquum f e d rectangulum ad reliquum quadrilaterum d l, ut quadratum e k
ad trian-



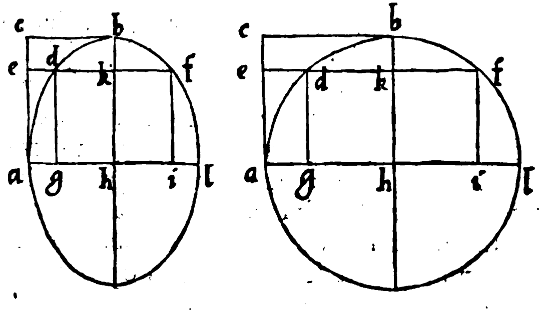
ad triangulum e l h. ſed ut quadratum e k ad e l k triangulum, ita eſt quadratum c b ad triangulum l c b. ut igitur f e d rectangulum ad quadrilaterum d l, ita quadratum c b ad l c b triangulum. eſt autem quadrilaterum d l triangulo a e g æquale; & triangulum l c b æquale triangulo a h c. quare ut rectangulum f e d ad triangulum a e g, ita quadratum c b ad a h c triangulum: & permutando ut rectangulum f e d ad quadratum c b, ita a e g triangulum ad triangulum a h c. ſed ut triangulum a g e ad triangulum a h c, ita quadratum e a ad a c quadratum. ergo ut rectangulum f e d ad quadratum c b, ita quadratum e a ad quadratum a c. & permutãdo ut quadratum b c ad quadratum c a, ita f e d rectangulum ad quadratum e a. 3. lemma Pappi.

EVTOCIVS.

In aliquibus codicibus hoc theorema, ut ſeptimum decimum apponitur. ſed re uera caſus eſt ſexti decimi theorematis; eo enim tantum differt, quòd lineæ contingentes a c, c b diametris æquidiſtant, alia uero eadem eſſe conſtat. In commentarijs igitur illud ponere oportebat, ut ſcripſimus in quadrageſimnm primum theorema primi libri.

Si in ellipſi & circulo diametri, quæ tranſeunt per tactus, contingentibus æquidiſtantes ſint, eadem prorſus euenient, quæ in propoſitione dicuntur.

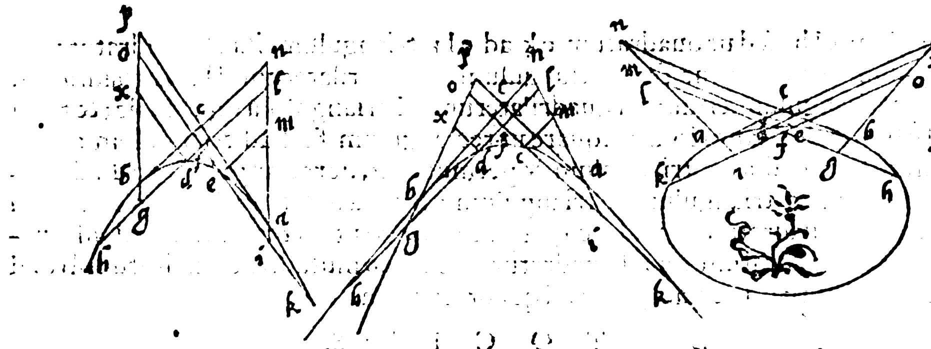
Quoniam enim ut quadratum b h ad rectangulum l h a, ita d g quadratum ad rectangulum l g a: atque eſt rectangulum quidẽ l h a quadrato a h æquale: rectangulũ autẽ l g a æquale rectangulo i a g; quòd linea a h æqualis ſit h l, & d k ipſi k f: proptereaq́, g h æqualis h i, & a g ipſi i l: erit ut quadratum a h ad h b quadratum; hoc eſt quadratum b c ad quadratum c a; ita rectangulum i a g ad quadratum d g; hoc eſt rectangulum f e d ad e a quadratum. 21. primi huius.



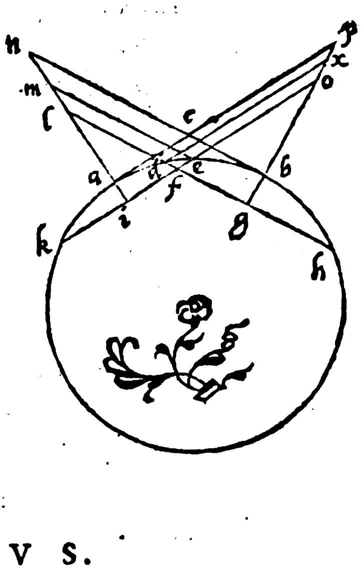
THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

Si coni ſectionem, uel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in unum conueniant: ſumantur autem in ſectione duo quæuis puncta: & ab ijs ducantur lineæ contingentibus æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis & lineæ occurrant: ut quadrata contingentium inter ſe ſe, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter ſectionem & linearum occurſum ad rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.

Sit coni ſectio, uel circuli circumferentia a b, quam contingant a c, c b rectæ lineæ, in puncto c conuenientes: ſumanturq; in ſectione puncta d e, & ab ipſis ducantur e f i k, d f g h, quæ lineis a c, c b æquidiſtent. Dico ut quadratum a c ad c b quadratum, ita eſſe rectangulum k f e ad rectangulnm h f d. ducantur enim per a b diametri a l m n, b o x p: & producantur contingentes lineæ; & ipſis æquidiſtantes uſque ad diametros: & à punctis d e æquidiſtantes contingentibus ducatur d x, e m. Iam conſtat k i **A** æqualem eſſe i e: & h g ipſi g d. Quoniam igitur k e ſecatur in partes æquales in puncto i, & in partes inæquales in f: 5. ſecũdi rectangulum k f e unà cum f i quadrato æquale eſt



B quadrato e i: & cum triangula ſimilia ſint ob lineas æquidiſtantes, erit ut totum quadratum e i ad totum i m e triangulnm, ita ablatum quadratum i f ad ablatum triangulum f i l. quare & reliquum k f e rectangulum ad reliquum quadrilaterum f m, eſt ut totum quadratum e i ad totum i m e triangulum. ſed ut quadratum e i ad triangulum i m e, ita quadratum a c ad triangulum c a n. ut igitur k f e rectangulum ad quadrilaterum f m, ita quadratum a c ad c a n **C** triangulum. atque eſt æquale triangulum c a n tri- **D** angulo c p b, & quadrilaterum f m quadrilatero f x. ergo ut rectangulum k f e ad f x quadrilaterum, ita quadratum a c ad triangulum c p b. ſimiliter demonſtrabitur & ut rectangulum h f d ad quadrilaterum f x, ita eſſe quadratum c b ad triangulum c p b. Itaque quoniam ut rectangulum k f e ad quadrilaterum f x, ita quadratum a c ad c p b **E** triangulum: & conuertendo, ut quadrilaterum f x ad rectangulum h f d, ita triangulum c p b ad quadratum c b: erit ex æquali ut quadratum a c ad c b quadratum, ita rectangulum K f e ad rectangulum h f d.



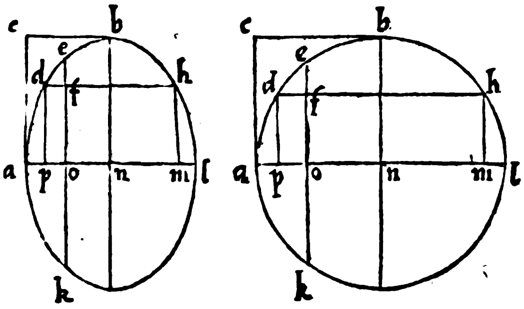
E V T O C I V S.

Hoc etiam theorema ſimiliter ac præcedens poſitum eſt, quod nos ut caſum auferentes, hoc loco conſcripſimus.

Si in ellipſi, & circuli circumferentia diametri, quæ per tactus ducuntur, æquidiſtantes ſint contingentibus a c, c b; erit itidem ut quadratum a c ad quadratum c b, ita rectangulum K f e ad rectangulum d f h.

Ducantur enim per d h ordinatim applicatæ d p, h m. & quoniam ut quadratum a c ad c b quadratum, ita quadratum b n ad quadratum n a, hoc eſt ad rectangulum 21. primi huius. a n l. ut autem quadratum b n ad rectangulum a n l, ita quadratum d p, hoc eſt quadratum f o ad rectangulum a p l; & quadratum e o ad rectangulum a o l: erit & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum. ſed ſi à quadrato e o auferatur d p quadratũ, hoc

5. ſecũdi. hoc eſt quadratum f o; relinquitur rectangulum K f e: eſt enim K o ipſi o e æqualis. F rurſus ſi à rectangulo a o l auferatur rectangulum a p l, relinquitur m o p rectangulum, hoc eſt rectangulum h f d: namque a p eſt æqualis m l, & p n ipſi n m. ut igitur quadratum a c ad quadratum c b, ita reliquum rectangulum K f e ad reliquum h f d. Quòd ſi punctum f extra ſectionem cadat, additiones & ablationes contra facere oportebit.



FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur K e ſecatur in partes æquales in puncto i, & in partes inæquales in f, rectangulum K f e una cum f i quadrato æquale eſt quadrato e i.] *Ita quidem argumentabimur cum punctum f intra ſectionem cadit: ſed cum cadit extra, in hunc modum dicemus. Quoniam* k e *in puncto* i *biſariam ſecatur, & ipſi adijcitur recta linea* e f*; erit rectangulum* k f e *unà cum* e i *quadrato æquale quadrato* c f. *ſunt autem triangula* f l i, e m i *inter ſe ſimilia. quare cum ſit ut totum quadratum* i f *ad totum triangulum* f l i, *ita ablatum quadratum* e i *ad ablatum* e m i *triangulum; erit & reliquum rectangulum* k f e *ad reliquum quadrilaterum* f m, *ut* i f *quadratum ad triangulum* f l i. *cetera, quæ deinceps ſequuntur; eodem modo concludemus.*

B Et cum triangula ſimilia ſint ob lineas æquidiſtantes, erit ut totum quadratum e i ad totum i m e triangulum, ita ablatum quadratum i f ad ablatum triangulum f i l.] *Eſt enim per tertium lemma Pappi ut quadratum* e i *ad quadratum* i f, *ita triangulum* i m e *ad* f i l *triangulum. quare & permutando ut quadratum* e i *ad triangulum* i m e, *ita quadratum* i f *ad triangulum* f i l.

C Atque eſt æquale triangulum c a n triangulo c p b.] *Ex prima huius.*

D Et quadrilaterum f m quadrilatero f x.] *Ex tertia huius.*

E Et conuertendo, ut quadrilaterum f x ad rectangulum h f d, ita triangulum c p b ad quadratum c b.] *Superius enim demonſtratum eſt, ut rectangulum* h f d *ad quadrilaterum* f x, *ita quadratum* c b *ad triangulum* c p b.

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM,

QVAE AB EVTOCIO AFFERTVR.

F Rurſus ſi à rectangulo a o l auferatur rectangulum a p l, relinquitur m o p rectangulum.] *Nam rectangulum* a o l *æquale eſt rectangulo* m o p *unà cum rectangulo* a p l*; quod quidem primum demonſtratum eſt à Pappo in tertio, & quarto eorum lemmatum, quæ in ſecundum librum Apollonij conſcripſit: deinde ab Eutocio in commentarijs in uigeſimam tertiam ſecundi huius.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes in unum conueniant: ſumatur autem in quauis ſectione aliquod punctum: & ab eo ducatur linea uni contingentium æquidiſtans, quæ & ſectionem & alteram contingentium ſecet: ut quadrata contingentium inter ſe ſe, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter ſectionem & con tingentem ad quadratum lineæ inter æquidiſtantem & tactum interiectæ.

Sint oppoſitæ ſectiones a b, m n: & contingentes lineæ a c l e, b c h, quæ in puncto c conueniant: per tactus autem ducantur diametri a m, b n: & ſumatur in ſectione m n quoduis punctum d, à quo ducatur d f g e ipſi b c æquidiſtans. Dico ut quadratum b c ad quadratum c a, ita eſſe rectãgulum f e d ad quadratum a e. ducatur enim per d ipſi a c æquidiſtans d x. & quoniam hyperbole eſt a b, cuius diameter b n: lineaq; b h ſectionem contingit: & ipſi æquidiſtat d f: erit f o æqualis o d: adiungitur autem d e. ergo rectangulum f e d unà cum d o quadrato æquale eſt quadrato o e. & cum c l æquidiſtet d x, triangulum e o l ſimile eſt triangulo d o x. eſt igitur ut totum quadratũ e o ad triangulum e o l, ita ablatum quadratũ d o ad ablatum d o x triangulum. quare & reliquum rectangulum f e d ad quadrilaterum d l, ut e o quadratum ad triangulum e o l. ſed ut quadratum e o ad e o l triangulum, ita quadratum b c ad triangulum b c l. ut igitur rectangulum f e d ad quadrilaterum d l, ita quadratum b c ad b c l triangulum. æquale autem eſt quadrilaterum d l triangulo a e g. & triangulum b c l triãgulo a c h. ergo ut f e d rectangulum ad triangulum a e g, ita quadratum b c ad a c h triangulum. ſed ut triangulum a e g ad quadratum e a, ita triangulum a c h ad quadratum a c. ex æquali igitur ut quadratum b c ad quadratum c a, ita rectangulum f e d ad e a quadratum.

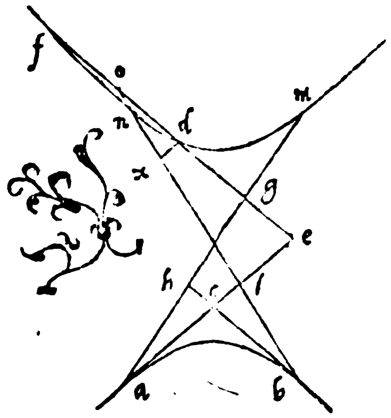
A 6. ſecũdi

19. quinti

B

C

D



EVTOCIVS.

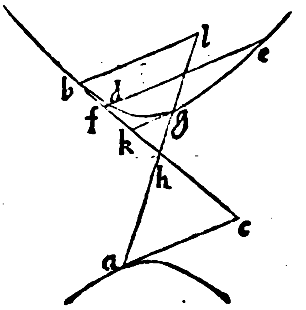
In aliquibus exemplaribus alia demonſtratio huius theorematis inuenitur, cum utramque ſectionem contingentes rectæ lineæ conueniant.

Sint enim oppoſitæ ſectiones a b, quas contingant lineæ a c, c b in puncto c conuenientes: ſumaturq; aliquod punctum d in b ſectione: & ab eo ducatur d e f, ipſi a c æquidiſtans. Dico ut quadratum a c ad c b quadratum, ita eſſe rectangulum e f d ad quadratum f b. ducatur enim per a diameter a h g: & per b g ducantur b l, g κ æquidiſtantes e f. Quoniam igitur b h in puncto b hyperbolen contingit: & ordinatim applicata eſt b l: erit ut a l ad l g, ita a h ad h g. ſed ut a l ad l g, ita c b ad b k. & ut a h ad h g, ita a c ad k g. quare ut c b ad b k, ita a c ad k g: & permutando ut a c ad c b, ita g K ad K b. ſed ut quadratum a c ad quadratum c b, ita quadratum g K ad K b quadratum: & ut quadratum g K ad quadratum K b, ita demonſtratum eſt rectangulum e f d ad quadratum f b. ergo ut quadratum a c ad c b quadratum, ita e f d rectangulum ad quadratum f b.

E F

G

H



FED. COMMANDINVS.

A Erit f o æqualis o d.] *Ex 48. primi huius.*

B Sed ut quadratum e o ad e o l triangulum, ita quadratum b c ad triangulum b c l] *Eſt enim triangulum b c l ſimile triangulo e o l, propterea quòd linea e o æquidiſtat contingenti b c. ergo triangulum e o l ad triangulum b c l duplam proportionem habet eius, quæ eſt lineæ e o ad b c. quadratum autem e o ad quadratum b c proportionem itidem habet duplam eiuſdem proportionis*

19. ſexti

20. ſexti.

portionis. ut igitur quadratum e o ad b c quadratum, ita triangulum e o l ad triangulum b c l: & permutando ut quadratum e o ad e o l triangulum, ita quadratum b c ad triangulum b c l.

Aequale autem eſt quadrilaterum d l triangulo a e g.] *Ex ſexta huius.* C

Et triangulum b c l triangulo a c h.] *Ex prima huius.* D

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM
QVAM PONIT EVTOCIVS.

Erit ut a l ad l g, ita a h ad h g.] *Ex 36. primi huius.* E

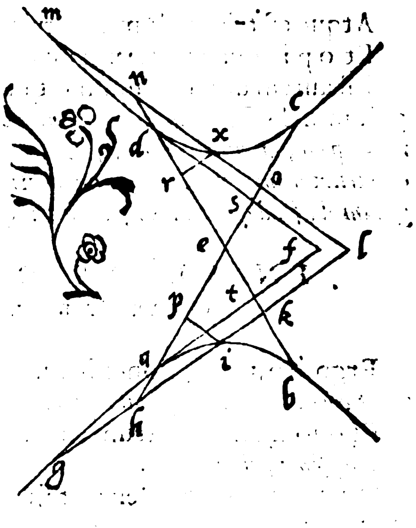
Sed ut a l ad l g, ita c b ad b k.] *Nam cum triangula a h c, l h b ſimilia ſint, erit ut a h ad h c, ita l h ad h b: & permutando ut a h ad h l, ita c h ad h b: componendoq; ut a l ad l h, ita c b ad b h. ut autem h l ad l g, ita h b ad b k. ex æquali igitur ut a l ad l g, ita c b ad b K.* F

Et ut a h ad h g, ita a c ad K g] *Ob ſimilitudinem uidelicet triangulorum a h c, g h k.* G

Et ut quadratum g K ad quadratum K b, ita demonſtratum eſt rectāgulum e f d ad quadratum f b.] *Demonſtratur hoc in 16. huius.* H

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes in unum conueniant: & ducantur contingentibus æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis, & ſectioni occurrant: ut quadrata contingentium inter ſe ſe, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter ſectionem, & linearū occurſum, ad rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.



Sint oppoſitæ ſectiones, quarum diametri a c, b d, centrum e; & contingentes a f, f d, quæ in f conueniant: ſumantur autem quæuis puncta: & ab ipſis ducantur g h i k l, m n x o l lineis a f, f d æquidiſtantes. Dico ut a f quadratum ad quadratum f d, ita eſſe rectangulum g l i ad rectangulum m l x. ducantur enim per x i lineæ x r, i p æquidiſtantes ipſis a f, f d. Itaque quoniam ut quadratum a f ad a f s triangulum, ita quadratum h l ad triangulum h l o: & quadratum h i ad triangulum h i p: erit & reliquum rectangulum g l i ad reliquum i p o l quadrilaterum, ut quadratum a f ad triangulum a f s. atque eſt triangulum a f s triangulo d f t æquale. & o p i l quadrilaterum quadrilatero k r x l. ut igitur quadratum a f ad triangulum d t f, ita rectangulum g l i ad quadrilaterū r x l k. eſt autem ut triangulum d t f ad f d quadratum, ita quadrilaterum r x l k ad rectangulū m l x. ergo ex æquali ut quadratum a f ad f d quadratū, ita rectangulum g l i ad rectangulum m l x.

6. ſecūdi 19. quinti

A

B

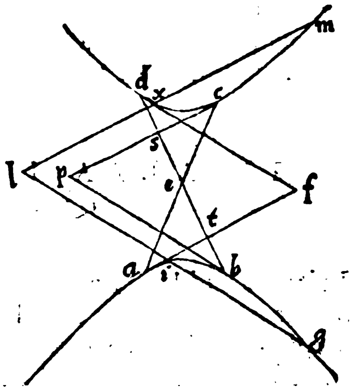
C

EVTOCIVS.

In aliquibus codicibus demonſtratio huius theorematis inuenitur huiuſmodi.

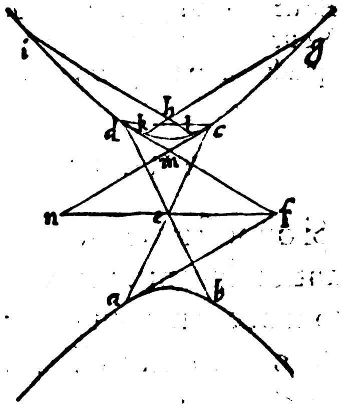
Ducatur m l quidem ipſi f a æquidiſt ans, quæ ſectionem d c ſecet; g l uero æqui-

diſtans fd, & ipſam a b ſecans. demonſtrandum eſt
ut quadratum d f ad ſa quadratum, ita eſſe rectan-
gulum g l i ad rectangulum m l x. ducatur enim per
tactus a d diametri a c, d b: & per c b ipſæ b p, p c
D contingentibus æquidiſtantes. ergo b p, p c ſectio-
E nes in punctis b c contingunt. & quoniam e centrũ
eſt ſectionum, erit b e ipſi e d æqualis, & a e æqualis
F e c. quare cum æquidiſtent a t f, c s p, & t e æqualis
G erit e s: & propterea b s ipſi d t: triangulumq; b p s
triãgulo d t f æquale. linea igitur b p æqualis eſt d f:
H & ſimiliter c p æqualis a f demonſtrabitur. ſed ut
quadratum b p ad p c quadratum, ita eſt rectangu-
lum g l i ad rectangulum m l x. ut igitur quadratum
d f ad quadratum f a, ita g l i rectangulum ad rectan
gulum m l x.



ALITER IN IDEM.

Rurſus ducatur utraque linearum g h k, i h l æqui
diſtans contingenti, ſecanſq; d c ſectionem. oſten-
dendum eſt ut quadratum d f ad quadratum fa, ita
eſſe rectangulum i h l ad rectangulum g h k. duca-
tur enim per a tactũ diameter a c & per c ipſa c m,
K quæ æquidiſtet a f. ergo c m continget ſectionem
L c d in puncto c: atque erit ut quadratũ d m ad qua-
dratum m c, ita rectangulum i h l ad rectangulum
M g h k. ut autem d m quadratum ad quadratum m c,
ita quadratum d f ad quadratum f a. quare ut qua-
dratum d f ad fa quadratum, ita rectangulum i h l
ad rectangulum g h k.



FED. COMMANDINVS.

A Atque eſt triangulum a f s triangulo d f t æquale.] *Ex quarta huius.*

B Et o p i l quadrilaterum quadrilatero k r x.] *Ex ſeptima huius.*

C Eſt autem ut triangulum d t f ad f d quadratum, ita quadrilaterum r x l k ad rectã gulum m l x.] *Eodem enim modo, quo ſupra demonſtratum eſt, rectangulum g l i ad quadrilaterum i p l o, ut quadratum a f ad triangulum a f s: demonſtrabitur etiam m l x rectangulum ad quadrilaterum r x l* k *eſſe, ut quadratum d f ad triangulum d t f: quare & convertendo, ut triangulum d t f ad quadratum f d, ita erit quadrilaterum r x l k ad m l x rectangulum.*

IN ALIAS DEMONSTRATIONES
QVAE AB EVTOCIO AFFERVNTVR.

D Ergo b p, p c ſectiones in punctis b c contingunt.] *Hoc nos demonſtrauimus in commentarijs in quadrageſimam quartam primi huius.*

E Et quoniam e centrum eſt ſectionum, erit b e ipſi e d æqualis & a e æqualis e c.] *Ex trigeſima primi huius.*

F Quare cum æquidiſtent a t f, c s p, & t e æqualis erit e s.] *Quoniã enim lineæ a t f, c s p inter ſe æquidiſtant, erunt triangula a t e, c s e ſimilia & propterea ut a e ad e t, ita c e ad e s: & permutando ut a e ad e c, ita t e ad e s. lineæ igitur t e, e s inter ſe æquales ſunt. & addita s c ipſi e b, & t e ipſi e d, erit & b s æqualis d t.*

G Triangulumq; b p ſ triangulo d e f æquale.] *Rurſus enim ob lineas æquidiſtantes b p, d f, itemq; a f, c p: triangulum b p s ſimile eſt triangulo d t f; & ut s b ad b p, ita t d ad d f: & permutando ut b s ad d t, ita b p ad d f. eſt autem b s æqualis d t, ut demonſtratum eſt. ergo & b p*

ipſi

ipſi d f. ex quibus conſtat triangulum b p s triangulo d t f etiam æquale eſſe. G

Sed ut quadratum b p ad p c quadratum, ita eſt rectangulum g l i ad rectangulum m l x.] *Ex proxime demonſtratis.* H

Ergo c m continget ſectionem c d in puncto c.] *Ex iis, quæ demonſtrauimus in quadrageſimam quartam primi huius.* K

Atque erit ut quadratum d m ad quadratum m c, ita rectangulum f h l ad rectangulum g h K.] *Ex 17. huius.* L

Vt autem d m quadratum ad quadratum m c, ita quadratum d f ad quadratum f a.] M *Iiſdem enim manentibus ducatur d c: & iuncta f e producatur, ut cum linea c m in puncto n conueniat. erit ex trigeſima ſeptima & trigeſima nona ſecundi huius, f e n recta diameter oppoſitarum ſectionum; quæ ipſi d c æquidiſtabit: & idcirco triangula d m c, f m n inter ſe ſimilia erunt. Itaque ut f m ad m n, ita d m ad m c: & permutando ut f m ad m d, ita n m ad m c. ergo componendo, conuertendoq; ut m d ad d f, ita m c ad c n: & rurſus permutando, ut d m ad m c, ita d f ad c n. eſt autem f a ipſi c n æqualis, quod iam demonſtratum fuit. quare ut d m ad m c, ita d f ad f a. ut igitur quadratum d m ad m c quadratum, ita quadratum d f ad quadratum f a.*

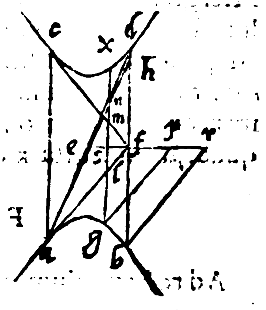
A

THEOREMA XX. PROPOSITIO XX.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant: & per occurſum ducatur linea tactus coniungenti æquidiſtans, quæ ſecet utramque ſectionem: ducatur autem alia linea æquidiſtans eidem; ſectionesq;, & contingentes ſecans: erit ut rectangulum contentum lineis, quæ inter occurſum contingentium & ſectiones interiiciuntur ad quadratum lineæ contingentis, ita rectangulum, quod continetur lineis inter ſectiones & contingentem interiectis, ad quadratum lineæ ad tactum abſciſſæ.

Sint oppoſitæ ſectiones a b, c d, quarum centrum e, & a f, f c lineæ contingentes. iungantur autem a c, e f, a e, & protrahantur: perq; f ducatur b f h d ipſi a c æquidiſtans: & ſumpto in ſectione quouis puncto g, ducatur g l s m n x æquidiſtans a c. Dico ut rectangulum b f d ad quadratum f a, ita eſſe rectangulum g l x ad quadratum a l. ducantur enim à punctis g b lineæ g p, b r æquidiſtantes ipſi a f. & quoniam ut quadratum b f ad b f r triangulum, ita quadratum g s ad triangulum g s p: & quadratum l s ad triangulum l s f: erit & reliquum rectangulum g l x ad quadrilaterum g l f p, ut quadratum b f ad triangulum b f r. quadratum autem b f æquale eſt rectãgulo b f d: triangulumq; b r f triangulo a f h: & quadrilaterum g l f p triangulo a l n. ergo ut rectangulum b f d ad triangulum a f h, ita g l x rectangulum ad triangulum a l n. ſed ut triangulum a f h ad quadratum a f, ita triangulum a l n ad quadratum a l. ex æquali igitur, ut rectangulum b f d ad quadratum f a, ita rectangulum g l x ad quadratum a l.

A
B
C D
E



FED. COMMANDINVS.

Erit & reliquum rectangulum g l x ad quadrilaterum g l f p, ut quadratum b f ad triangulum b f r.] *Ex decima nona quinti. nam rectangulum g l x unà cum quadrato l s æquale eſt quadrato g s. quare ſi à quadrato g s auferatur l s quadratum, relinquitur rectangulum g l x.* A 5. ſecũdi

Vt quadratum b f ad triangulum b f r.] *Deſiderabantur hæc in græco codice, quæ nos ſuppleuimus.* B

Quadratum autem b f æquale eſt rectangulo b f d.] *Lineæ enim b f, f d æquales ſunt, cum recta diameter ſit e f, ut ex 38. & 39. ſecundi huius manifeſte apparet.* C

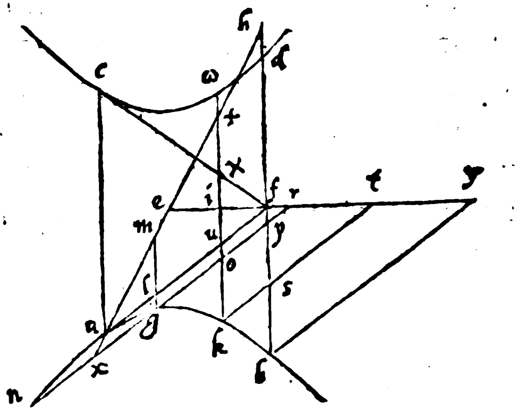
D Triangulumq; brf triangulo a f h.] *Nam ex quadrageſima quinta primi huius, triangulum b r f maius eſt, quàm triangulum e h f, triangulo f a e. quare ſequitur triangulum b r f æquale eſſe duobus triangulis e h f, e a f, hoc eſt æquale triangulo a f h.*

E Et quadrilaterum g l f p triangulo a l n.] *Ex quinta huius.*

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

Iiſdem poſitis ſi in ſectione duo puncta ſumantur: & per ipſa ducantur rectæ lineæ; una quidem contingenti æquidiſtans, altera uero æquidiſtans lineæ tactus coniungenti; quæ & ſibi ipſis, & ſectionibus occurrant: erit ut rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter occurſum contingentium, & ſectiones ad quadratum contingentis, ita rectangulum contentum lineis inter ſectiones, & linearum occurſum interiectis, ad rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur. A

Sint eadem, quæ ſupra: & ſumptis in ſectione punctis g k, per ea ducantur n x g o, p r, k s t ipſi a f æquidiſtantes; & g l m, k o u i χ ψ ω æquidiſtantes a c. Dico ut rectangulum b f d ad quadratum f a, ita eſſe k o ω rectangulum ad rectangulum n o g. Quoniam enim eſt ut quadratum a f ad triangulum a f h, ita quadratum a l ad a l m triangulum, & quadratum x o ad triangulum x o ψ, & quadratum x g ad triangulum x g m: erit ut totũ quadratum x o ad totum triangulũ x o ψ, ita quadratum x g ablatum ad ablatũ triangulum x g m. quare & reliquum rectangulum n o g ad reliquum quadrilaterum g o ψ m erit, ut quadratũ B a f ad a f h triangulum. ſed triangulũ C a f h æquale eſt triangulo b y f: & quadrilaterum g o ψ m quadrilatero k o r t. ergo ut quadratum a f ad triangu- D lum b y f, ita rectangulum n o g ad quadrilaterum k o r t. ut autem triangulum b y f ad quadratum b f, hoc eſt ad rectangulum b f d, ita demonſtratum eſt quadrilaterum k o r t ad rectangulum k o ω. ex æquali igitur ut a f quadratum ad rectangulum b f d, ita rectangulum n o g ad rectangulum k o ω: & conuertendo ut rectãgulum b f d ad quadratum f a, ita k o ω rectangulum ad rectangulum n o g.



FED. COMMANDINVS.

A Ad rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.] *Hæc nos addidimus, quæ in græco codice deſiderari uidebantur, uel alia in eandem ſententiam.*

B Sed triangulum a f h æquale eſt triangulo b y f.] *Sequitur hoc ex quadrageſima quinta primi huius, ut nos proxime oſtendimus.*

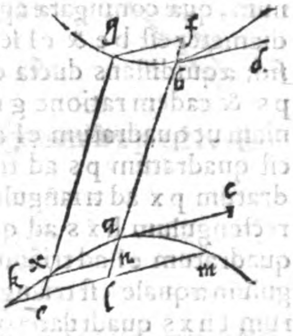
C Et quadrilaterum g o ψ m quadrilatero k o r t.] *Ex 12. huius.*

D Vt autem triangulum b y f ad quadratum b f, hoc eſt ad rectangulum b f d, ita demonſtratum eſt quadrilaterum k o r t ad rectangulum k o ω.] *Demonſtrabimus enim, ut in antecedente, rectangulum* k o ω *ad quadrilaterum* K o r t *ita eſſe, ut quadratum b f, hoc eſt rectangulum b f d ad triangulum b f y. quare & conuertendo.*

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

Si oppoſitas ſectiones contingant duæ rectæ lineæ, inter ſe æquidiſtantes

ſtantes: ducantur autem aliæ lineæ, quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant; una quidem contingenti æquidiſtans, altera uero æquidiſtans ei, quæ tactus coniungit: erit ut tranſuerſum latus ad rectum figuræ, quæ ad lineam tactus coniungentem conſtituitur, ita rectangulum contentum lineis inter ſectionem & linearum occurſum interiectis ad rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.



Sint oppoſitæ ſectiones a b, quas contingant rectæ lineæ a c, b d inter ſe æquidiſtantes: & iuncta a b, ducatur e x g ipſi a b æquidiſtans, & k e l m æquidiſtans a c. Dico ut a b ad rectum figuræ latus, ita eſſe g e x rectangulum ad rectangulum k e m. ducantur enim per x g lineæ g f, x n ipſi a c æquidiſtantes. & quoniam a c, b d æquidiſtantes inter ſe, ſectiones contingunt, erit & a b diameter, & lineæ k l, x n, g f ad ipſam ordinatim applicabuntur. ut igitur a b ad rectum latus, ita b l a rectangulum ad quadratum l k, & rectãgulum b n a ad quadratum n x, hoc eſt ad quadratum l e. quare ut totũ rectangulum b l a ad totum quadratum k l, ita erit rectangulum b n a ablatum, hoc eſt f a n; quòd n a, b f æquales ſint, ad ablatum quadratũ l e. reliquum igitur f l n rectangulum ad reliquum rectangulum k e m erit ut a b ad rectum latus. eſt autem rectangulum f l n æquale ipſi g e x. ergo ut a b tranſuerſum figuræ latus ad rectum, ita g e x rectangulum ad rectangulum k e m.

A B C D

FED. COMMANDINVS.

Erit & a b diameter.] *Nam ſi a b non eſt diameter, per centrum non tranſibit. quare a c, b d conuenient inter ſe ſe ad eaſdem partes centri ex trigeſima prima ſecundi huius, quod quidẽ fieri non poteſt, ponebantur enim æquidiſtantes.* A

Vt igitur a b ad rectum latus, ita b l a rectangulum ad quadratum l k.] *Ex uigeſima prima primi huius.* B

Quod n a, b f æquales ſint.] *Eſt enim ut quadratum n x ad rectangulum b n a, ita ſectionis a rectum latus ad tranſuerſum: & ut quadratum f g ad rectangulum a f b, ita ſectionis b rectum latus ad tranſuerſum. harum autem ſectionum tranſuerſum latus idem eſt, uidelicet a b: & ſectionis a latus rectum eſt æquale recto lateri ſectionis b; quod apparet ex decima quarta primi huius. ut igitur quadratum n x ad rectangulum b n a, ita quadratum f g ad a f b rectangulum: & permutando ut quadratum n x ad quadratum f g, ita rectangulum b n a ad rectangulum a f b. ſed quadratum n x eſt æquale quadrato f g; quòd linea n x æqualis f g, eſt enim n x g l parallelogrammum. ergo rectangulum b n a rectangulo a f b eſt æquale: & propterea ſequitur lineam n a ipſi f b æqualem eſſe, ex lemmate, quod conſcripſimus in ſextam decimam ſecundi huius.* C

21. primi huius.

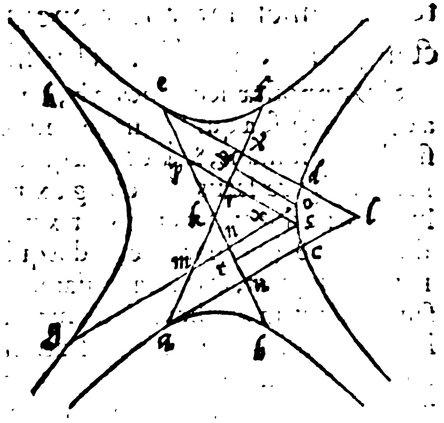
Reliquum igitur f l n rectangulum ad reliquum rectangulum k e m, erit ut a b ad rectum latus.] *Rectangulum enim b l a ſuperat rectangulum b n a rectangulo f l n: quod Pappus in quarto lemmate demonſtrauit.* D

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

Si in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ oppoſitas ſectiones contingentes conueniant in quauis ſectione: ducantur autem aliquæ lineæ contingentibus æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis, & aliis ſectionibus oppoſitis occurrant: ut quadrata contingentium inter ſe ſe, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ inter ſectiones, & occurſum interiiciuntur, ad rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.

Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur a b, c d, e f, g h, ſitq; earum centrum K: & ſectiones a b, e f contingant rectæ lineæ a u c l, e χ d l, conuenientes in l: & iunctæ a K, e k ad b f producantur. à puncto autem g ducatur g m n x o ipſi a l æquidiſtans: & à puncto h ducatur h p r x s æquidiſtans e l. Dico ut quadratum e l ad quadratum l a, ita eſſe h x s rectangulum ad rectangulum g x o. ducatur enim per s linea s t æquidiſtās a l: & per o ducatur o y ipſi e l æquidiſtans. Quoniam igitur oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ appellantur, a b, c d, e f, g h diameter eſt b e: & e l ſectionem contingit: ipſiq; æquidiſtans ducta eſt h s: erit h p æqualis p s: & eadem ratione g m æqualis m o. & quoniam ut quadratum e l ad e u l triangulum, ita A eſt quadratum p s ad triangulum p t s: & quadratum p x ad triangulum p n x: erit & reliquũ rectangulum h x s ad quadrilaterum t n x s, ut A quadratum e l ad triãgulum e u l. ſed e u l triangulum B æquale eſt triangulo a l χ: & quadrilaterum t n x s quadrilatero x r y o. ut igitur quadratum e l ad a l χ triangulum, ita re- C ctangulum h x s ad quadrilaterum x r y o. ut autem triangulum a l χ ad quadratum a l, ita quadrilaterum x r y o ad rectangulum g x o. ergo ex æquali ut quadratum e l ad quadratum l a, ita eſt h x s rectangulum ad rectangulum g x o.

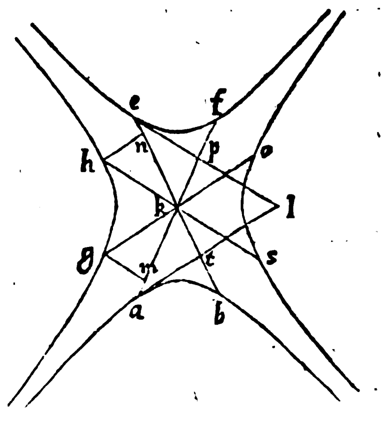
5. ſecūdi & 19. quinti



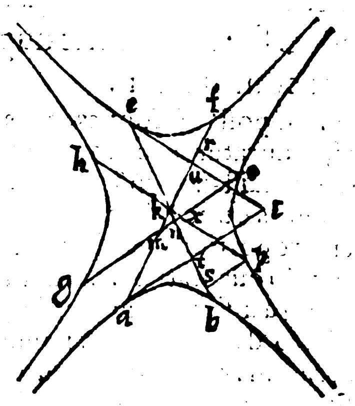
E V T O C I V S.

Hoc theorema plures habet caſus, quemadmodum & alia, uerum quoniam in aliquibus exemplaribus loco theorematum caſus deſcripti inueniuntur, & aliæ quædam demonſtrationes, nobis uiſum eſt ipſas auferre. Vt autem ij, qui in hæc inciderunt, ex differenti appoſitione ſententiam meam perpendere poſſint, eas in commentarijs expoſuimus.

Itaque contingentibus æquidiſtantes g k o, h k s per centrum, quod ſit k tranſeat. Dico iam ut quadratum e l ad quadratum l a, ita etiam eſſe rectangulum h K s ad rectangulum g K o. ducantur enim per g h lineæ g m, h n, quæ contingentibus æquidi- D ſtent. erit triangulum g K m triangulo a K t æquale: triangulum autem h k n æquale triangulo e k p: E & triangulo e K p æquale a k t triangulum. ergo triangulum g k m ipſi h k n æquale erit. ſed ut quadratum e l ad triangulum l e t, ita quadratum h K ad triangulum h k n. atque eſt triangulum l e t æquale triangulo l a p: triangulum uero h k n triangulo g K m. ut igitur quadratum e l ad triangulum l a p, ita quadratum h k ad triangulum g k m: & ut triangulum l a p ad quadratum l a, ita triangulum g k m ad quadratum g k. ergo ex æquali ut quadratum e l ad quadratum l a, ita quadratum h k, hoc eſt rectangulum h k s ad quadratum g k, hoc eſt ad rectangulum g k o.



Iiſdem manētibus ſi linea h k p, quæ ipſi e l æquidiſtans ducitur, tranſeat per k centrum; g o uero per centrum non tranſeat: dico ſimiliter ut quadratum e l ad quadratum l a, ita eſſe rectangulum h x p ad rectangulum g x o. ducantur enim per o p F contingentibus æquidiſtantes, o r, p s. & quoniam triangulum m o r maius eſt, quàm triangulum m n k, triangulo a k t: triangulum autem a k t æquale eſt triangulo k s p: erit



erit mor triangulum æquale triangulis mnk,
ksp. quare ſublato communi, uidelicet triangulo
mxκ, reliquum quadrilaterum xs quadrilatero
xr eſt æquale. Quòd cum ſit ut quadratum el ad
triangulum elt, ita quadratum kp ad triangu-
lum κps, & ita quadratum Kx ad triangulum
kxn: erit ut quadratum el ad elt triangulum,
ita reliquum, rectangulum ſcilicet hxp ad qua-
drilaterum xs. eſt autem triangulum elt æquale
triangulo alu, & quadrilaterum xr quadrilatero
xs. ergo ut quadratum el ad triangulum alu, ita
rectangulum hxp ad quadrilaterum xs. & ea- G
dem ratione, ut triangulum alu ad quadratum
al, ita quadrilaterum xs ad rectangulum gxo.
ex æquali igitur ut quadratum el ad quadratum la, ita rectangulum hxp ad rectan-
gulum gxo.

FED. COMMANDINVS.

Sed eul triangulum æquale eſt triangulo alχ.] *Ex quarta huius.* A

Et quadrilaterum tnxs quadrilatero xryo.] *Hoc nos ſupra demonſtrauimus in commentarijs in quintam decimam propoſitionem huius libri.* B

Vt autem triangulum alχ ad quadrilaterum al, ita quadrilaterum xryo ad rectangulum gxo.] *Eodem enim modo, quo ſupra, demonſtrabimus rectangulum gxo ad quadrilaterum xryo ita eſſe, ut quadratum al ad alχ triangulum. quare & conuertendo quadrilaterum xryo ad rectangulum gxo erit, ut triangulum alχ ad quadratum al.* C

IN ALIAS DEMONSTRATIONES,
QVAE AB EVTOCIO AFFERVNTVR.

Erit triangulum gkm triangulo akt æquale; triãgulum autem hkn æquale triangulo ekp.] *Hoc enim ſupra demonſtratum eſt in quinta decima propoſitione huius libri.* D

Et triangulo ekp æquale aκt triangulum.] *Ex quarta huius.* E

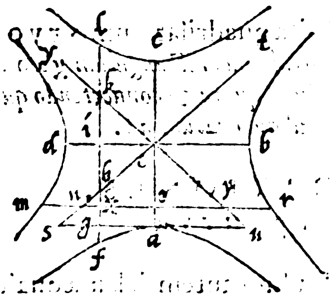
Et quoniam triangulum mor maius eſt, quàm triangulum mnk, triangulo akt.] F
Ex eadem quinta decima huius.

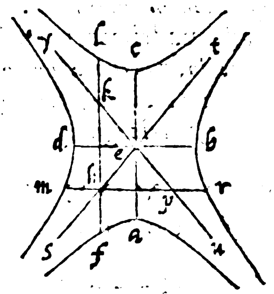
Et eadem ratione ut triangulum alu ad quadratum al, ita quadrilaterum xs ad G
rectangulum gxo.] *Vt enim quadratum al ad triangulum alu, ita eſt quadratum mo ad triangulum mor: & ita quadratum mx ad triangulum mxk. quare reliquum rectangulum gxo ad quadrilaterum xr erit ut quadratum al ad triangulum alu: & conuertendo quadrilaterum xr, hoc eſt xs ad rectangulum gxo, ut triangulum alu ad quadratum al.*

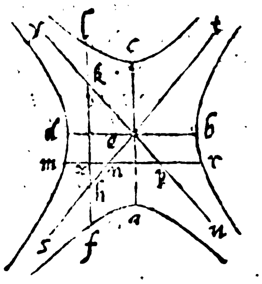
THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXIIII.

Si in oppoſitis ſectionibus, quas coniugatas appellamus, à centro ad ſectiones ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una quidem ſit tranſuerſa diameter, altera uero recta· & ducantur aliæ lineæ his diametris æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant, ita ut occurſus ſit in loco inter quatuor ſectiones intermedio: rectangulum contentum portionibus lineæ diametro tranſuerſæ æquidiſtantis, unà cum eo, ad quod rectangulum ex portionibus lineæ æquidiſtantis rectæ diametro propor tionem habet eandem, quam diametri rectæ quadratum ad quadratum tranſuerſæ: æquale erit duplo quadrati, quod à dimidia tranſuerſæ diametri conſtituitur.

Sint oppoſitæ ſectiones, quas coniugatas appellamus a, b, c, d, quarum centrum e,
perq; e ducatur a e c traſuerſa diameter; & d e b recta; & ducantur f g h i k l, m n x
o p r æquidiſtantes ipſis a c, d b, quæ in puncto x conueniant: ſit autem x prius intra
angulum s e u, uel y e t. Dico rectangulum f x l unà cum eo, ad quod rectangulum
m x r proportionem habet eandem, quam d b quadratum ad quadratum a c, æquale
eſſe duplo quadrati a e. ducantur enim asymptoti ſectionum s e t, y e u: & per a ducatur
A s g a u ſectionem contingens. Quoniam igitur rectangulum s a u æquale eſt
quadrato d e; erit ut rectangulum s a u ad quadratum e a, ita quadratum d e ad e a
13. ſexti. quadratum. rectangulum autem s a u ad quadratum e a proportionem habet compoſitam
4. ſexti. ex proportione s a ad a e; & ex proportione u a ad a e. ſed ut s a ad a e, ita
n x ad x h: & ut u a ad a e, ita p x ad x K. quare proportio quadrati d e ad quadratum
23. ſexti. e a componitur ex proportione n x ad x h, & proportione p x ad x k. proportio
autem rectanguli p x n ad rectangulum k x h compoſita eſt ex eiſdem proportionibus.
ut igitur quadratum d e ad e a quadratum, ita rectangulum p x n ad rectangulum
12. quinti k x h. & propterea ut quadratum d e ad quadratum e a, ita quadratum d e,
B unà cum rectangulo p x n ad quadratum e a unà cum rectangulo k x h. atque eſt qua







C dratum d e æquale rectangulo p m n, hoc eſt rectangulo r n m; & quadratũ a e æquale
rectangulo k f h, hoc eſt l h f. quare ut quadratum d e ad quadratum e a, ita rectangulum
p x n unà cum rectangulo r n m ad rectangulum k x h unà cum rectangulo
D l h f. rectangulum autẽ p x n unà cum rectangulo r n m æquale eſt rectangulo r x m.
ergo ut quadratum d e ad quadratum e a, ita r x m rectangulũ ad rectangulum k x h
E unà cum rectangulo k f h. Itaque demonſtrare oportet rectangulum f x l unà cum rectangulo
k x h, & rectangulo K f h æquale eſſe duplo quadrati e a. commune auferatur
quadratum a e; hoc eſt rectangulum k f h. reliquum igitur rectãgulum k x h unà
cum rectangulo l x f demonſtrandum eſt æquale quadrato a e. quod quidem ita ſe habet.
nam rectangulum K x h unà cum rectangulo l x f æquale eſt rectangulo k f h,
hoc eſt a e quadrato.

Conueniant deinde f l, m r in una aſymptoton ad punctum h. erit rectangulum f h l æquale quadrato a e; & rectangulum m h r æquale quadrato d e. quare ut quadratum d e ad quadratum e a, ita rectangulum m h r ad rectangulum f h l. & propterea oſtendendum eſt duplum rectanguli f h l æquale duplo quadrati a e. Illud uero ita eſſe perſpicue conſtat.

F Sit poſtremo x intra angulum s e y, uel u e t. erit ſimiliter ob coniunctionem proportionum,
ut quadratum d e ad quadratum e a, ita p x n rectangulum ad rectangulum
k x h. ſed quadrato d e rectangulum p m n, hoc eſt r n m eſt æquale; & quadrato
G a e æquale rectangulum l h f. ergo ut rectangulum r n m ad rectangulum l h f
ita ablatum p x n rectangulum ad ablatum rectangulum k x h. reliquum igitur re-

ctan-

ctangulum r x m ad reliquum, uidelicet ad exceſſum, quo quadratum a e excedit re-
ctangulum k x h eſt ut quadratum d e ad quadratum e a. Itaque demonſtrare opor- H
tet rectãgulum f x l unà cum exceſſu, quo quadratum a e excedit k x h rectangulum
æquale eſſe duplo quadrati a e. Commune auferatur a e quadratum, hoc eſt rectan-
gulum f h l. ergo demonſtrandum eſt reliquum rectangulum k x h unà cum exceſſu, K
quo quadratum a e excedit rectangulum K x h, quadrato a e æquale eſſe. quod qui-
dem ita eſt: nam minus, hoc eſt rectangulum k x h unà cum exceſſu eſt æquale maio-
ri, uidelicet quadrato a e.

FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur rectangulum s a u æquale eſt quadrato d e.] *Ex quinquageſima ſexta primi, & prima ſecundi huius; utrumque enim eſt æquale quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum a c conſtituitur.*

B Atque eſt quadratum d e æquale rectangulo p m n.] *Ex undecima ſecundi huius.*

C Hoc eſt rectangulo r n m.] *Sunt enim lineæ m n, p r inter ſe æquales ex octaua ſecundi huius.*

D Rectangulum autem p x n unà cum rectangulo r n m æquale eſt rectãgulo r x m.] *Hoc nos demonſtrauimus in commentarijs in ſextum lemma Pappi.*

E Itaque demonſtrare oportet rectangulum f x l unà cum rectangulo k x h.] *Eſt enim quadratum d b ad quadratum a c, ut quadratum d e ad quadratum e a, quòd utrumque utriuſque quadruplum ſit. ergo ut quadratum d b ad quadratum a c, ita rectangulum r x m ad rectangulum k x h unà cum rectangulo k f h. rectangulum autem k x h unà cum rectangulo l x f eſt æquale rectangulo K f h, hoc eſt quadrato a e, quod nos in quintum Pappi lemma demonſtrauimus. ſi igitur utrique addatur commune quadratum a e, erit rectangulum f x l unà cum rectangulo k x h, & quadrato a e, hoc eſt rectangulo K f h, æquale rectangulo k f h, & quadrato a e; hoc eſt duplo quadrati a e. quod quidem demonſtrare oportebat.*

F Erit ſimiliter ob coniunctionem proportionum, ut quadratum d e ad quadratum e a.] *Hoc demonſtrabitur eadem prorſus ratione, qua ſupra uſi fuimus.*

G Reliquum igitur rectangulum r x m ad reliquum uidelicet ad exceſſum, quo quadratum a e excedit rectangulum K x h.] *Nam rectangulum p m n, hoc eſt r n m excedit p x n rectangulum, rectangulo r x m, ut demonſtrauimus. quare reliquum rectangulum r x m ad reliquum, quo rectangulum l h f, hoc eſt quadratum a e excedit rectangulum k x h, erit ut rectangulum r n m ad rectangulum l h f, hoc eſt ut quadratum d e ad quadratum e a, uidelicet ut quadratum d b ad quadratum a c.*

H Eſt ut quadratum d e ad quadratum e a.] *Hæc nos addidimus, quæ deſiderari uidebantur.*

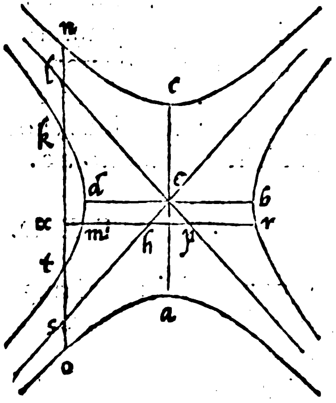
K Ergo demonſtrandum eſt reliquum rectangulum K x h unà cum exceſſu, quo quadratum a e excedit rectangulum k x h quadrato a e æquale eſſe.] *Rectangulum enim f x l excedit rectangulum f h l, rectangulo K x h.*

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

IISDEM poſitis, ſit linearum ipſis a c, b d æquidiſtantium occurſus in una ſectionum d b, atque in puncto x, ut poſitum eſt. Dico rectangulum contentum portionibus lineæ, quæ tranſuerſæ diametro æquidiſtat, uidelicet o x n, maius eſſe, quàm illud, ad quod rectangulum ex portionibus lineæ æquidiſtantis rectæ diametro, hoc eſt r x m, eandem proportionem habet, quam rectæ diametri quadratum ad quadratũ trãſuerſæ, duplo quadrati eius, quod à dimidia tranſuerſæ diametri cõſtituitur.

Eſt enim propter eãdem rationem, ut quadratum d e ad quadratum e a, ita rectan A
gulum p x h ad rectangulum s x l. quadratum autem d e æquale eſt rectangulo p m n; B

C & quadratum e a æquale rectangulo l k s. ergo ut quadratum d e ad quadratum e a, ita p m h rectangulum ad rectangulum l k s. Itaque quoniam ut totum rectangulum p x h ad totum l x s,
D ita ablatum rectangulum p m h ad ablatum l k s, hoc
E eſt ad l t s; erit & reliquum r x m ad reliquum t x K, ut d e quadratum ad quadratum e a. oſtendere igitur oportet rectangulum o x n maius eſſe, quàm rectangulum t x k, duplo quadrati a e. commune auferatur
F t x k. ergo oſtendendum relinquitur rectãgulum o t n
G æquale duplo quadrati a e; hoc autem ita eſſe manifeſto apparet.



FED. COMMANDINVS.

A Eſt enim propter eandem rationem, ut quadratum d e ad quadratum e a.] *Ex demonſtratis in antecedente.*

B Quadratum autẽ d e æquale eſt rectangulo p m h.] *Ex undecima ſecundi huius, ut dictum eſt.*

C Et quadratum e a æquale rectangulo l k s.] *Ex decima ſecundi huius, ita uero corrigendum eſt, nam in græco codice legitur* λ ο σ *& ita inferius in multis locis.*

D Ita ablatum rectangulum p m h ad ablatum l k s hoc eſt ad l t s.] *Nos hæc ita reſtituimus, in græco enim codice legebatur,* οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ π μ θ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ λ ο σ, τουτέστι τὸ ὑπὸ υ σ ο: *hoc eſt ita ablatum rectangulum p m h ad ablatum l o s, hoc eſt ad y s o.*

E Erit & reliquum r x m ad reliquum t x k, ut d e quadratum ad quadratum e a.] *Nam rectangulum p x h ſuperat rectangulum r x m, rectangulo p m h, ex quarto lemmate Pappi; rectangulum uero l x s ex ſexto lemmate eiuſdem ſuperat rectangulum t x k, rectangulo l k s.*

F Commune auferatur t x k. ergo oſtendendum relinquitur rectangulum o t n æquale duplo quadrati a e.] *Rectangulum enim o x n eſt æquale rectangulo t x K unà cum rectangulo o t u.* ex 2. parte 5. lem.

G Hoc autem ita eſſe manifeſto apparet.] *Ex uigeſima tertia ſecundi huius.*

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVI.

QVOD ſi æquidiſtantium occurſus ad punctum x ſit in una ſectionum a c, ut poſitum eſt; rectangulum, quod continetur portionibus lineæ æquidiſtantis tranſuerſæ diametro, hoc eſt l x f minus erit, quàm illud, ad quod rectangulum portionibus alterius lineæ contentum, hoc eſt r x g, eandem proportionem habet, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſuerſæ, duplo quadrati eius, quod à dimidia tranſuerſæ diametri conſtituitur.

Quoniam enim propter eadem, quæ prius dicta ſunt,
A ut quadratum d e ad quadratum e a, ita eſt u x s rectan-
B gulum ad rectangulum k x h: habebit totum rectangulum r x g ad rectangulum κ x h unà cum quadrato a e, proportionem eandem, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſuerſæ. ergo demonſtrare oportet rectangulũ l x f minus eſſe, quàm rectangulum κ x h unà cum quadrato a e, duplo a e quadrati. commune auferatur quadratum a e. reliquum igitur rectangulum l x f demonſtrandum eſt minus, quàm k x h, quadrato a e; hoc eſt rectangulo l h f: quod quidem ita ſe habet.
C nam rectangulum l h f unà cum l x f æquale eſt rectangulo k x h.

FED. COMMANDINVS.

A Vt quadratum d e ad quadratum e a, ita eſt u x s rectangulum ad rectangulum k x h. *Ob compoſitionem uidelicet proportionum.*

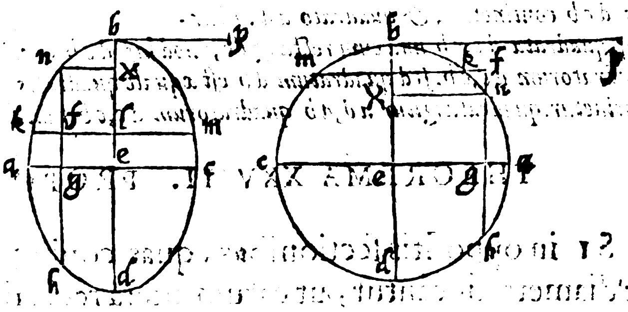
B Habebit totum rectangulum r x g ad rectangulum k x h unà cum quadrato a e, proportionem eandem, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſuerſæ.] *Quoniam enim eſt ut quadratum d e ad quadratum e a, ita rectangulum u x s ad rectangulum k x h: erit quoque ut quadratum d e ad quadratum e a, ita quadratum d e unà cum rectangulo* 12. quinti *u x s ad quadratum e a unà cum rectangulo k x h. ſed quadrato d e æquale eſt rectangulum u g s: hoc eſt r s g. quare ut quadratum d e ad quadratum e a, ita rectangulum u x s unà cum r s g rectangulo ad rectangulum K x h unà cum quadrato a e: rectangulum autem u x s unà cum rectangulo r s g eſt æquale rectangulo r x g ex quinto lemmate. ut igitur quadratum d e ad quadratum e a, hoc eſt, ut rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſuerſæ, ita rectangulum r x g ad rectangulum k x h unà cum a e quadrato.*

C Nam rectangulum l h f unà cum l x f æquale eſt rectangulo k x h.] *Ex quarto lemmate Pappi.*

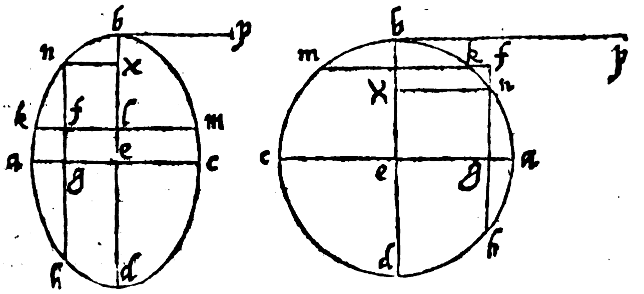
THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVIII.

Si in ellipſi, uel circuli circumferentia coniugatæ diametri ducantur, quarum altera quidem ſit recta, altera uero tranſuerſa: & ducantur duæ rectæ lineæ diametris æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis & ſectioni occurrant: quadrata ex portionibus lineæ æquidiſtantis tranſuerſæ diametro, quæ inter ſectionem, & linearum occurſum interiiciuntur, aſſumentia figuras ex portionibus lineæ, quæ rectæ diametro æquidiſtat, inter linearum occurſum, & ſectionem interiectis, ſimiles, & ſimiliter deſcriptas ei, quæ ad rectam diametrum conſtituitur, quadrato tranſuerſæ diametri æqualia erunt.

Sit ellipſis, uel circuli circumferentia a b c d, cuius centrum e: ducanturq; ipſius duæ coniugatæ diametri, recta quidem a e c, tranſuerſa uero b e d: & ducantur k f l m, n f g h, quæ ipſi a c, b d æquidiſtent. Dico quadrata n f, f h aſſumentia figuras ex k f, f m ſimiles, & ſimiliter deſcriptas ei, quæ fit ad a c, quadrato b d æqualia eſſe. ducatur enim à puncto n linea n x æquidiſtans a e, quæ ad b d ordinatim applicata erit: & b p ſit rectum figuræ latus. Quoniam igitur ut b p ad a c, A ita eſt a c ad b d; erit ut p b cor. 20. ſexti ad b d, ita a c quadratum ad B quadratum b d. quadratum autem b d eſt æquale figuræ, quæ ad a c conſtituitur. ergo ut p b ad b d, ita quadratum a c ad figuram quæ eſt ad a c. ſed ut quadratum a c ad figuram, quæ ad a c, ita quadratum n x ad figuram, quæ fit ab n x ſimilem ei, quæ ad a c. ergo & ut p b ad b d, ita quadratum n x ad figuram, quæ ab n x, ſimilem ei, quæ ad a c. eſt autem & ut p b ad b d, ita n x quadratum ad rectangulum b x d. quare figura, C quæ fit ab n x, hoc eſt ab f l, ſimilis ei, quæ ad a c, rectangulo b x d eſt æqualis. 9. quinti Eodem modo demonſtrabimus figuram, quæ fit à x l, ſimilem illi, quæ ad a c, rectangulo b l d æqualem eſſe. Et quoniam recta linea n h ſecatur in partes æquales in g, D & in partes inæquales in f; quadrata h f, f n dupla ſunt quadratorum h g, g f, hoc eſt n g, g f. eadem quoque ratione quadrata m f, f x quadratorum x l, l f ſunt dupla. &



figuræ, quæ fiunt ab m f, f k, ſimiles ei, quæ ad a c, duplæ ſunt figurarum ſimilium, quæ à x l, l f. figuræ autem, quæ fiunt à x l, l f rectangulis b l d, b x d ſunt æquales: & quadrata n g, g f æqualia ſunt quadratis x e, e l. ergo quadrata n f, f h unà cum figuris k f, f m ſimilibus ei, quæ ad a c, dupla ſunt rectangulorum b l d, b x d, & quadratorum x e e l. 5. ſecũdi Itaque quoniam recta linea b d ſecatur in partes æquales in e, & in partes inæquales in x; rectangulū b x d unà cum x e quadrato æquale eſt quadrato b e. Similiter & rectāgulum b l d unà cum quadrato l e æquale eſt b e quadrato. quare rectangula b x d, b l d, & quadrata x e, l e æqualia ſunt duplo quadrati b e. quadrata igitur n f, f h unà cum figuris k f, f m ſimilibus ei, quæ ad a c, dupli quadrati b ə ſunt dupla. atque eſt quadratum b d duplū dupli quadrati b e. ergo quadrata n f, f h aſſumentia figuras k f, f m ſimiles ei, quæ ad a c, quadrato b d æqualia erunt.



FED. COMMANDINVS.

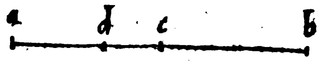
A Quoniam igitur ut b p ad a c, ita eſt a c ad b d.] *Ex diffinitione ſecundæ diametri, quæ mediam proportionem habet inter figuræ latera.*

B Quadratum autem b d eſt æquale figuræ, quæ ad a c conſtituitur.] *Habet enim b d mediam proportionem inter latera figuræ, quæ fit ad a c, ex decima quinta primi huius.*

C Eſt autem & ut p b ad b d, ita n x quadratum ad rectangulum b x d.] *Ex uigeſima prima primi huius.*

D Et quoniam recta linea n h ſecatur in partes æquales in g, & in partes inequales in f, quadrata h f, f n dupla ſunt quadratorum h g, g f.] *Hoc demonſtrauit Euclides in ſecundo libro elementorum, propoſitione nona. ſed & aliter demonſtrare poſſumus, hoc pacto.*

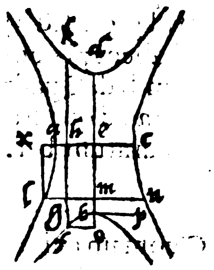
Secetur recta linea a b in partes æquales ad punctum c, & in partes inæquales ad d. Dico quadrata a d, d b quadratorum d c, c b dupla eſſe.] *Quoniam enim a c, c b æquales ſunt, erit a d linea, qua b c ipſam c d ſuperat. ergo ex ijs, quæ demonſtrauimus in trigeſimam tertiam propoſitionem primi huius, quadrata d c, c b æqualia ſunt rectangulo, quod bis d c b continetur, & quadrato a d. Idcirco quadrata d c, c b unà cum rectangulo, quod bis d c b continetur, & quadrato a d, dupla ſunt* 4. ſecũdi *quadratorum d c, c b. ſed quadratum d b eſt æquale quadratis d c, c b, & rectangulo, quod bis d c b continetur. quadrata igitur a d, d b quadratorum d c, c b ſunt dupla. quod demonſtrare oportebat.*



THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXVIII.

SI in oppoſitis ſectionibus, quas coniugatas appellamus, coniugatæ diametri ducantur, ut earum altera recta ſit, altera tranſuerſa: & ducantur duæ rectæ lineæ diametris æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant: quadrata ex portionibus lineæ æquidiſtantis rectæ diametro, quæ inter linearum occurſum, & ſectiones interiiciuntur, ad quadrata ex portionibus alterius lineæ, quæ tranſuerſæ diametro æquidiſtat, inter ſectiones & occurſum linearum interiectis; eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſuerſæ.

Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur a b c d, quarum diameter quidem
recta ſit a e c, tranſuerſa uero b e d: & ipſis æquidiſtantes ducatur f g h k, l g m n,
quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant. Dico quadrata l g, g n ad quadrata f g, g k
eandem proportionem habere, quam a c quadratum ad quadratum b d. à punctis
enim l f ordinatim applicentur l x, f o, quæ æquidiſtantes erunt diametris a c, b d: &
à puncto b ducatur ipſius b d rectum latus b p. Itaque conſtat ut p b ad b d, ita eſſe A
quadratum a c ad b d quadratum, & quadratum a e ad quadratum e b; & quadratum B C
f o ad rectangulum b o d; & rectangulum c x a ad quadratum D
l x. eſt igitur ſicut unum antecedentium ad unum conſequentium, E
ita antecedentia omnia ad omnia conſequentia. quare
ut quadratum a c ad quadratum b d, ita rectangulum c x a
unà cum quadrato a e, & quadrato o f, hoc eſt e h, ad rectangulum
d o b unà cum quadrato b e, & quadrato l x, hoc eſt m e.
ſed rectangulum c x a unà cum quadrato a e æquale eſt quadrato 6. ſecũdi.
x e: & rectangulum d o b unà cum quadrato b e æquale quadrato
o e. ergo ut a c quadratum ad quadratũ b d, ita ſunt quadrata
x e, e h ad quadrata o e, e m; hoc eſt quadrata l m, m g ad
quadrata f h, h g. quadratorum autem l m, m g dupla ſunt quadrata l g, g n, ut demonſtratum F
eſt: & quadratum f h, h g quadrata f g, g k ſunt dupla. ut igitur quadratum a c
ad quadratum b d, ita l g, g n quadrata ad quadrata f g, g k.



FED. COMMANDINVS.

Itaque conſtat, ut p b, ad b d, ita eſſe quadratum a c ad b d quadratum.] *Eſt enim* A
a c proportionalis inter p b, b d, ex diffinitione ſecundæ diametri. quare per corollarium decimæ nonæ
ſexti, ut p b ad b d, ita quadratum p b ad quadratum a c; & ita quadratum a c ad b d quadratum.

Et quadratum a e ad quadratum e b.] *Ex 15. quinti.* B

Et quadratum f o ad rectangulum b o d.] *Nam ex uigeſima prima primi huius, ut figu-* C
ræ rectum latus ad tranſuerſum, hoc eſt ut p b ad b d, ita f o quadratum ad rectangulum b o d. D

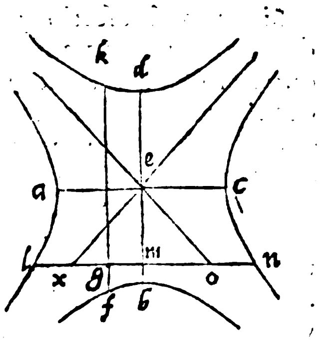
Et rectangulum c x a ad quadratum l x.] *Eſt enim ex eadem 21. primi huius, ut ſectionis*
a tranſuerſum latus ad rectum, hoc eſt ut quadratum a c ad quadratum b d, ita rectangulum c x a
ad quadratum l x.

Eſt igitur ſicut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita antecedentia o- E
mnia ad omnia conſequentia.] *Ex 12. quinti.*

Quadratorum autem l m, m g dupla ſunt quadrata n g, g l, ut demonſtratum eſt.] F
In ſecundo libro elementorum propoſitione nona, ut diximus.

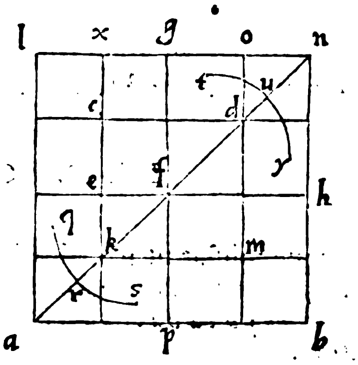
THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

Iiſdem poſitis ſi linea recta diametro æquidiſtans ſecet aſymptotos; quadrata ex portionibus ipſius, quæ inter linearum occurſum, & aſymptotos interiiciuntur, aſſumentia dimidium quadrati facti à recta diametro, ad quadrata ex portionibus lineæ, quæ tranſuerſæ diametro æquidiſtat, inter occurſum linearum, & aſymptotos interiectis, eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſuerſæ.



Sint eadem, quæ ſupra: & linea l n ſecet aſymptotos in
A punctis x o. demonſtrandum eſt, quadrata x g, g o aſſumen
B tia dimidium quadrati a c, hoc eſt duplũ quadrati e a, hoc
eſt duplum rectanguli l x n, ad quadrata f g, g k eandẽ pro
portionem habere, quam a c quadratum ad quadratũ b d.
C Quoniam enim l x æqualis eſt o n, quadrata l g, g n ſupe-
rant quadrata x g, g o, duplo rectanguli l x n. ergo quadra-
ta x g, g o una cum duplo quadrati a c, æqualia ſunt qua-
D dratis l g, g n. ſed l g, g n quadrata ad quadrata f g, g k ean
dem habent proportionem, quam quadratum a c ad qua-
dratum b d. Quadrata igitur x g, g o unà cum duplo qua-
drati e a ad quadrata f g, g k eandem proportionem habent, quam a c quadratum
ad quadratum b d.

EVTOCIVS.



E Quoniam enim l x æqualis eſt o n; quadrata l g, g n ſuperant quadrata x g, g o, duplo rectanguli l x n.] *ſit recta linea l n; auferanturq; ab ipſa æquales l x, n o; & figura deſcribatur. manifeſtum eſt ob ſimilitudinem, & propterea quòd linea l x eſt æqualis n o, quadrata l c, d n, a k, m b inter ſe æqualia eſſe. Quoniam igitur quadrata, quæ fiunt ex l g, g n, ſunt quadrata a f, f n: & quæ ex g x, g o ſunt k f, f d; ſequitur ut quadrata ex l g, g n ſuperent quadrata ex g x, g o, gnomonibus q r s, t u y. Quòd cum rectangulum g d ſit æquale rectangulo m p, & rectangulum e i ipſi m h; erunt gnomones q r s, t u y æquales rectangulis a m, d b. ſed a m eſt æquale l d; rectangula uero l d, d b ſunt, quæ l x n, hoc eſt l o n continentur. ergo quadrata ex l g, g n, hoc eſt a f, f n, ſuperant quadrata ex g x, g o, hoc eſt k f, f d, duplo rectanguli l x n, hoc eſt rectangulis l d, d b.*

FED. COMMANDINVS.

A Aſſumentia dimidium quadrati a c, hoc eſt duplum quadrati e a.] *Cum enim linea a c dupla ſit ipſius a e, erit quadratum a c quadrati a e quapruplum, ex 20. ſexti.*

B Hoc eſt duplum rectanguli l n x.] *Ex 10. ſecũdi huius, & ex diffinitione ſecundæ diametri.*

C Quoniam enim l x æqualis eſt o n, quadrata l g, g n ſuperant quadrata x g, g o duplo rectanguli l x n.] *Conſtat etiam hoc ex octauo lemmate Pappi.*

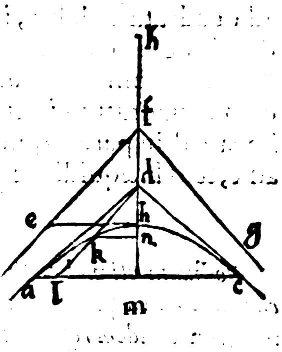
D Sed l g, g n quadrata ad quadrata f g, g k eandem habent proportionẽ, quam quadratum a c ad quadratum b d.] *Ex antecedente.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Si hyperbolen contingentes duæ rectæ lineæ ſibi ipſis occurrant: & per tactus linea producatur: per occurſum uero ducatur linea uni aſymptoton æquidiſtans, ſectionemq; & lineam coniungentem tactus ſecãs; quæ interiicitur inter occurſum, & lineam tactus coniungentem à ſectione bifariam diuidetur.

Sit hyperbole a b c, quam contingant rectæ lineæ a d, d c: aſymptoti uero ſint e f, f g: & iuncta a c, ducatur per d linea d k l æquidiſtans e f. Dico d k ipſi k l æqualem eſſe. iungatur enim f d, b m, & ex utraque parte producatur, ut ſit f h æqualis f b: & per

b k



b k ducantur b e,k n æquidiſtantes a c,quæ ordinatim appli
catæ erunt.& quoniam triangulum ſe b ſimile eſt triangulo
d k n, erit ut quadratum d n ad quadratum n k, ita quadra- 4. ſexti. 22
tum ſb ad b e quadratum. Vt autem quadratum ſb ad qua- A
dratum b e,ita linea h b ad rectum latus. quare ut quadratũ
d n ad quadratum n k,ita h b ad rectum latus. ſed ut h b ad B
rectum latus, ita rectangulum h n b ad quadratum n k. ut
igitur quadratum d n ad quadratum n k, ita h n b rectangu
lum ad quadratum n k. ergo rectangulum h n b quadrato 9. quinti.
d n eſt æquale. eſt autem & rectangulum m ſ d æquale qua- C
drato ſb,propterea quòd linea a d ſectionem contingit, &
a m ordinatim eſt applicata. quare rectangulum h m b unà D
cum quadrato b ſ æquale eſt rectangulo m ſ d unà cum d n quadrato. ſed rectangu- E
lum h n b unà cum quadrato b ſ eſt æquale quadrato ſ n. ergo & rectangulum m ſ d
unà cum quadrato d n æquale eſt quadrato ſ n: idcircoq́; linea d m ad punctum n bi F
fariam ſecatur, adiunctam habens d ſ: & K n,l m æquidiſtantes ſunt. linea igitur d k ip 1. ſext
ſi k l eſt æqualis.

FED. COMMANDINVS.

Vt autem quadratum ſb ad quadratum b e,ita linea h b ad latus rectum.] *Ex de-* A
monſtratis in prima ſecundi huius.

Sed ut h b ad rectum latus,ita rectangulum h n b ad quadratum n K.] *Ex uigeſima* B
prima primi huius.

Eſt autem & rectangulum m ſ d æquale quadrato ſb,propterea quòd linea a d ſe- C
ctionem contingit,& a m ordinatim eſt applicata.] *Ex 37. primi huius.*

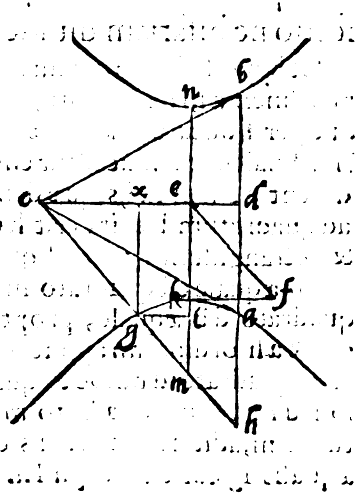
Quare rectangulum h n b unà cum quadrato b ſ æquale eſt rectangulo m ſ d unà D
cum d n quadrato.] *Si enim æqualibus æqualia addantur, quæ fient æqualia erunt.*

Sed rectangulum h n b unà cum quadrato b ſ eſt æquale quadrato ſ n.] *Ex 6. ſecun* E
di elementorum.

Idcircoq́; linea d m ad punctum n biſariam ſecatur adiunctam habens d ſ.] *Ex no-* F
no lemmate Pappi & ijs, quæ in ipſum conſcripſimus.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant: & per tactus linea producatur: per occurſum uero ducatur linea aſymptoto æquidiſtans, quæ ſectionem & lineam tactus coniungentem ſecet: linea inter occurſum, & eam, quæ tactus coniungit, interiecta à ſectione biſariam diuidetur.



Sint oppoſitæ ſectiones a b; & contingentes lineæ
a c,c b: iunctaq́; a b producatur: aſymptotos uero ſit
e ſ; & per c ducatur c g h,ipſi e ſ æquidiſtans. Dico
c g æqualem eſſe g h. iungatur enim c e, & ad d pro-
ducatur: & per e g ducantur e K m n, g x ipſi a b
æquidiſtantes: & per K g ducantur k ſ,g l æquidiſtan-
tes c d. Quoniam igitur triangulum k ſ e ſimi-
le eſt triangulo m l g,ut quadratum e k ad quadratũ 4. ſexti 22
k ſ,ita erit m l quadratum ad quadratum l g. ſed ut
quadratum e K ad quadratum k ſ,ita demonſtratum A
eſt n l k rectangulum ad quadratum l g. ergo rectan- 9. quiti.
gulum n l k quadrato m l eſt æquale. commune appo
natur quadratum k e. rectangulum igitur n l k unà 6. ſecûdi, 14. quinti
cum quadrato K e,hoc eſt quadratum l e, hoc eſt g x,
æquale eſt quadratis m l,k e. ut autem quadratũ g x B

14. quīti ad quadrata m l, k e, ita quadratum x c ad quadrata l g, k f. ex quibus ſequitur quadratū x c æquale eſſe quadratis g l, k f. atque eſt quadratū g l æquale quadrato x e:
C D & quadratum k f æquale quadrato dimidiæ ſecundæ diametri, hoc eſt rectangulo
E c e d. quadratum igitur c x quadrato x e, & rectāgulo c e d eſt æquale ac propterea
linea c d in partes quidem æquales ſecatur ad punctum x, in partes uero inæquales
2. ſexti ad e, & d h æquidiſtat g x. ergo c g ipſi g h æqualis erit.

EVTOCIVS.

Poſſumus etiam hoc theorema demonſtrare, ut antecedens, ſi duæ rectæ lineæ ſectionem unam contingant. ſed quoniam omnino idem eſt, atque illud, quod in una hyperbola demonſtratum fuit, demonſtratio eadem repetatur.

FED. COMMANDINVS.

A Sed ut quadratum e k ad quadratum k f, ita demonſtratum eſt n l k rectangulum ad quadratum l g.] *In antecedente ſcilicet.*

B Vt autem quadratū g x ad quadrata m l, K e, ita quadratum x c ad quadrata l g,
k f.] *Nam ob ſimilitudinem triangulorum c x g, g l m, f k e, ut linea g x ad x c, ita erit e k ad*
k f: & permutando ut g x ad e k, ita x c ad k f & eadem ratione demonſtrabitur ut m l ad
e k, ita l g ad K f. quare & componendo, ut m l, e k, ad e k, ita l g, k f ad k f: conuertendoq; ut
e k ad m l, e k, ita k f ad l g, k f. Quoniam igitur ut g x ad e k, ita x c ad k f: & ut e K ad
22. ſexti *m l, e k, ita k f ad l g, K f: erit ex æquali ut g x ad m l, e K, ita x c ad l g, k f. ergo ut quadratum*
g x ad m l, e k quadrata, ita quadratum x c ad quadrata l g, k f.

C Et quadratum K f æquale quadrato dimidiæ ſecundæ diametri.] *Quadratum enim K f eſt æquale quartæ parti figuræ, quæ fit ad diametrum k u, ex prima ſecundi huius: & cum ſecunda diameter mediam proportionem habeat inter figuræ latera, erit dimidiæ ipſius quadratum itidem æquale quartæ parti figuræ.*

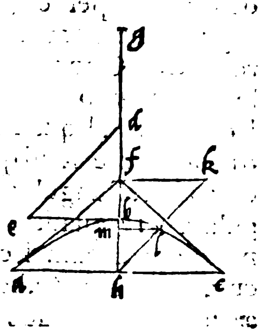
D Hoc eſt rectangulo c e d.] *Ex 38. primi huius.*

E Ac propterea linea c d in partes quidem æquales ſecatur ad punctum x, in partes uero inæquales ad e.] *Ex decimo lemmate Pappi.*

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXII.

Si hyperbole duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant: & per tactus linea producatur: per occurſum uero contingentium ducatur linea, tactus coniungenti æquidiſtans: & per punctum, quod coniungentem tactus bifariam ſecat, ducatur linea æquidiſtans alteri aſymptoton: quæ inter dictum punctum, & lineam æquidiſtantem intercipitur, à ſectione bifariam diuidetur.

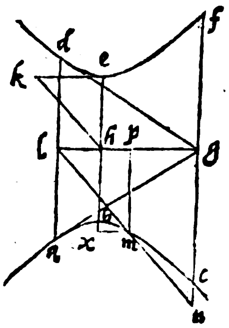
Sit hyperbole a b c, cuius centrum d: & aſymptotos d e: contingant autem ſectio-
30. ſecūdi huius. nem lineæ a f, f c: iunganturq; c a, & f d; & ad g h producatur. erit a h æqualis h c. ita-
que per f ducatur f k ipſi a c æquidiſtans: & per h, h l k æquidiſtans d e. Dico k l ipſi
l h æqualem eſſe. ducantur enim per b l lineæ b e, l m, quæ æqui
diſtent a c. iam ex iis, quæ demonſtrata ſunt, ut quadratum d b
ad quadratum b e, ita erit h m quadratum ad quadratum m l;
9. quinti & rectangulum g m b ad quadratum m l. rectangulum igitur
37. primi huius. g m b æquale eſt quadrato m h. eſt autem & h d f rectangulum
quadrato d b æquale; propterea quòd a f ſectionem contin-
git, & a h ordinatim applicata eſt. ergo rectangulum g m b unà
6 ſecundi cum quadrato d b, hoc eſt quadratum d m æquale eſt rectangu
11. lemma Pappi. lo h d f una cum quadrato m h: & ideo linea f h bifariam ſeca-
tur in m, adiunctam habens d f: ſuntq; k f, l m æquidiſtantes.
2. ſexti æqualis igitur eſt K l ipſi l h.



THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant: & per tactus linea producatur: per occurſum uero cõtingentium ducatur linea tactus coniungenti æquidiſtãs: & per punctum, quod coniungentem tactus bifariam ſecat, ducatur linea æquidiſtans alteri aſymptoton, cõuenienſq; cum ſectione, & cum linea æquidiſtante per occurſum ducta: quæ inter dictum punctum, & lineam æquidiſtantem intericitur, à ſectione bifariam diuidetur.

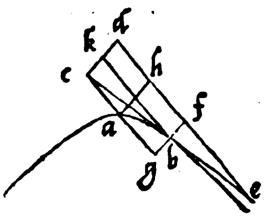
Sint oppoſitæ ſectiones abc, def & contingentes lineæ ag, gd: centrum autem ſit
h, & aſymptotos hk: ductaq; hg producatur: & iuncta ald, quæ bifariam ſecabitur 3[illegible]. ſecundi huius.
in l, ducantur per g, h lineæ cgf, bhe ipſi ad æquidiſtantes: & per l ducatur lmn æ-
quidiſtans hK. Dico lm æqualem eſſe mn. applicentur enim à punctis em lineæ ek,
mx æquidiſtantes gh: & per m ducatur mp æquidiſtans ad. Quoniam igitur ex ijs,
quæ ante demonſtrata ſunt, ut quadratum he ad quadratum ek, ita eſt rectangulum
bxe ad quadratum xm erit ut he quadratum ad quadratum 12. quinti
ek, ita rectangulum bxe unà cum quadrato he; hoc eſt qua-
dratum hx ad quadrata ke, xm. quadratum autem ke oſten- 38 primi huius.
ſum eſt æquale rectangulo ghl & quadratum xm æquale eſt
quadrato hp. ut igitur quadratum he ad quadratum ek, ita
quadratum hx, hoc eſt mp ad rectangulum ghl unà cum qua 4. ſexti
drato hp. ſed ut quadratum he ad quadratum ek, ita eſt qua- 22.
dratum mp ad quadratum pl. quare ut quadratũ mp ad qua-
dratum pl, ita quadratum mp ad rectangulum ghl unà cum
quadrato hp: & propterea quadratum lp rectãgulo ghl unà 9. quinti.
cum quadrato hp æquale erit. ergo recta linea lg in partes æ-
quales ſecatur ad p, & in partes inæquales ad h. & ſunt æquidi- 19. lemma Pappi.
ſtantes mp, gn. linea igitur lm ipſi mn eſt æqualis. 2 ſexti.



THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XXXIIII.

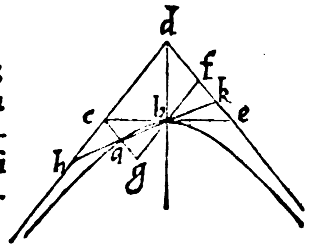
Si in una aſymptoton hyperbolæ aliquod punctum ſumatur: ab eoq; recta linea ſectionem contingat· & per tactum ducatur æquidiſtãs aſymptoto: quæ per dictum punctum tranſit, alteri aſymptoton æquidiſtans, à ſectione bifariam diuidetur.

Sit hyperbole ab, aſymptoti uero cd, de: & ſumpto in linea cd quouis puncto c per ipſum ducatur cbe ſectionem contingens: & per b quidem ducatur fbg æquidiſtans cd; per c autem cag, quæ ipſi de æquidiſtet. Dico lineam ca æqualem eſſe ag. ducatur enim per a linea ah, æquidiſtans cd; & per b linea bk, æquidiſtans de. Itaque quoniam cb æqualis eſt be, erit & ck ipſi kd; & df ipſi fe æqualis. quòd cum rectangulum kbf æquale ſit rectangulo cah, & linea bf æqualis dk, hoc eſt cK, & ah ipſi dc: rectangulum dca æquale erit rectangulo Kcg. Vt igitur dc ad cK, ita cg ad ac. eſt autem dc ipſius ck dupla. ergo & cg dupla ca. idcircoq; linea ca ipſi ag eſt æqualis.



A B
C
D

EVTOCIVS.



ALITER. Sit hyperbole a b, cuius aſymptoti c d, d e;
& contingens c b e. æquidiſtantes autem c a g, f b g. Dico c a
ipſi a g æqualem eſſe. coniungatur enim a b, & ad h k pro-
E ducatur. Itaque quoniam c b æqualis eſt b e; erit & k b ipſi
F G b a æqualis. ſed & k b eſt æqualis a h. ergo & c a ipſi a g æ-
qualis erit.

FED. COMMANDINVS.

A Itaque quoniam c b æqualis eſt b e.] *Ex tertia ſecundi huius.*

B Erit & c K ipſi k d, & d f ipſi f e æqualis.] *Ex ſecunda ſexti.*

C Quòd cum rectangulum k b f æquale ſit rectangulo c a h.] *Ex 12. ſecundi huius.*

D Vt igitur d c ad c k, ita c g ad a c.] *Ex 15. ſexti.*

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM
QVAM AFFERT EVTOCIVS.

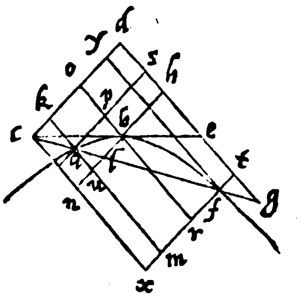
E Itaque quoniam c b æqualis eſt b e, erit & k b ipſi b a æqualis.] *Ob ſimilitudinem nanque triangulorum a b c, K b e, erit ut c b ad b a, ita e b ad b k: & permutando ut c b ad b e, ita a b ad b k. æqualis igitur eſt k b ipſi b a.*

F Sed & k b æqualis a h.] *Ex octaua ſecundi huius. unde ſequitur & b a æqualem eſſe a h.*

G Ergo & c a ipſi a g æqualis erit.] *Cum enim triangulum a b g ſit æquale triangulo a b c, & linea b a æqualis a h; rurſus eadem ratione demonſtrabitur linea c a æqualis a g.*

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXV.

Iiſdem poſitis ſi à ſumpto puncto recta linea ducatur; ſectionem in duobus punctis ſecans; erit ut tota ad eam, quæ extra ſumitur, ita inter ſe ſe portiones illius, quæ intra ſectionem continetur.

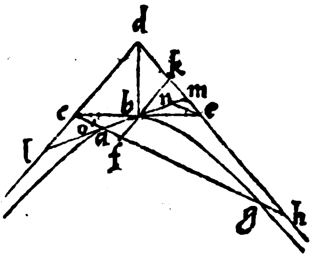


Sit a b hyperbole, cuius aſymptoti c d, d e; contingensq; c b e; & h b æquidiſtans:
ducatur autem per c recta linea c a l f g, quæ ſectionem in punctis a f ſecet. Dico ut
f c ad c a, ita eſſe f l ad l a. ducantur enim per puncta c a b f lineæ c n x, k a u m, o p b r,
f y, ipſi d e æquidiſtantes: & per a f ducantur a p s, t f r m x
A æquidiſtantes c d. Quoniam igitur æqualis eſt a c ipſi f g,
34. primi. erit & k a æqualis t g. ſed k a eſt æqualis d s. ergo & t g ip-
B ſi d s eſt æqualis: & propterea c k ipſi d y. Rurſus quoniam
c K æqualis eſt d y; & d k ipſi c y æqualis erit. Vt igitur d k
C D ad k c, ita y c ad c K. & ut y c ad c K, ita f c ad c a. ſed ut f c
1. ſexti. ad c a, ita m k ad k a: & ut m k ad k a, ita m d rectangulū
ad rectangulum d a. Vt autem d k ad k c, ita rectangulum
h k ad rectangulum K n. ergo ut rectangulum m d ad re-
E ctangulum d a, ita rectangulum h k ad ipſum k n. atque eſt
F rectangulum a d æquale rectangulo d b, hoc eſt ipſi o n: eſt
enim linea c b æqualis b e, & d o ipſi o c. quare ut rectangulum d m ad o n, ita h k
19. quinti ad k n. reliquum igitur m h ad reliquum b k eſt, ut totum d m ad totum o n. Quòd
cum rectangulum k s æquale ſit h o, commune auferatur d p. erit reliquum k p reli-
G quo p h æquale. commune apponatur a b. totum igitur k b æquale eſt a h: & ut m d
1. ſexti. ad d a, ita m h ad h a. ſed ut m d ad d a, ita linea m k ad K a, hoc eſt f c ad c a. Vt au-
4. ſexti. tem m h ad h a, ita m u ad u a, hoc eſt f l ad l a. ergo ut f c ad c a, ita f l ad l a.

EVTO

EVTOCIVS.

ALITER. Sit hyperbole ab, cuius aſymptoti cd, de: & à puncto c linea quidē
cb ducta ſectionem contingat; cagh uero in duobus punctis ſecet & per b ducatur
fbk ipſi cd æquidiſtans. itaque demonſtrare oportet ut gc ad ca, ita eſſe gf ad fa.
coniungatur enim ab, atque ad lm producatur: & à pūcto
e ducatur en æquidiſtans ch. Quoniam igitur cb
æqualis eſt be, & ca ipſi en eſt æqualis, & ab ipſi bn.
ſed cum bm ſit æqualis la, erit nm exceſſus linearum 8. ſecundi
la, ab. Et quoniam in triangulo amh ducta eſt en ipſi huius.
ah æquidiſtans, ut am ad mn, ita erit ah ad ne. & eſt 4. ſexti
ne æqualis ac. Vt igitur ha ad ac, ita am ad exceſſū
linearum ab, bm, hoc eſt lb ad exceſſum linearum la, 8 ſecundi
ab. Vt autem ha ad ac, ita gc ad ca eſt enim ca æqualis huius.
hg. ergo ut gc ad ca, ita lb ad exceſſum linearum H
la, ab; & cf ad exceſſum linearum ca, af. ſed quoniam quærebatur, ſi ut gc ad ca,
ita ſit gf ad fa, demonſtrare oportet, ut tota gc ad totam ca, ita eſſe gf ablatam ad
ablatam fa, & reliquam cf ad reliquam, uidelicet ad exceſſum linearum ca, af. quare K
demonſtrandum eſt ut gc ad ca, ita cf ad exceſſum linearum ca, af.



FED. COMMANDINVS.

Quoniam igitur æqualis eſt ac ipſi fg, erit & κa æqualis tg.] *Linea ac eſt æqualis fg ex octaua ſecundi huius, quare ob ſimilitudinem triangulorum aκc, gft, eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur κa ipſi tg æqualis.* A

Et propterea ck ipſi dy.] *Eſt enim ſimiliter ck æqualis ft, hoc eſt ipſi dy.* B

Et ut yc ad cκ, ita fc ad ca.] *Ex quarta ſexti ob ſimilitudinem triangulorum fcy, acκ.* C

Sed ut fc ad ca, ita mκ ad κa.] *Ob ſimilitudinem triangulorum acκ, afm.* D

Atque eſt rectangulum ad æquale rectangulo db.] *Ex 12. ſecundi huius.* E

Hoc eſt ipſi on, eſt enim linea cb æqualis be.] *Nam cum ſit linea cb æqualis be ex tertia ſecundi huius, erit ob ſimilitudinem triangulorum cbn, ebh, & hb æqualis bn, idcircoq; rectangulum ho rectangulo on æquale.* F

Et ut md ad da, ita mh ad ha.] *Superius enim demonſtrauit, ut rectangulum md ad da, ita eſſe mh ad hk.* G

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM
QVAM SCRIBIT EVTOCIVS.

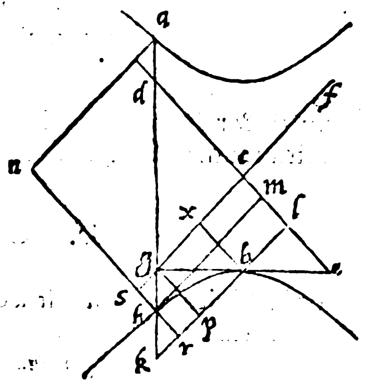
Et cf ad exceſſum linearum ca, af.] *Nanque ut gc ad ca, ita eſt lb ad exceſſum linearum la, ab: ut autem lb ad exceſſum linearum la, ab, ita cf ad exceſſum linearum ca, af, quod mox demonſtrabimus. ergo ut gc ad ca, ita cf ad exceſſum ca, af. eſt enim ob ſimilitudinem triangulorum acl, afb, ut la ad ab, ita ca ad af: & diuidendo ut exceſſus, quo la excedit ab ad ipſam ab, ita exceſſus, quo ca excedit af ad ad af, & conuertendo. Rurſus quoniam ut la ad ab, ita ca ad af; erit componendo ut lb ad ba, ita cf ad fa. Sed ut ab ad exceſſum, quo la excedit ab, ita af ad exceſſum, quo ca excedit af. ex æquali igitur ut lb ad exceſſum linearum la, ab, ita cf ad exceſſum linearum ca, af.* H

Quare demonſtrandum eſt, ut gc ad ca, ita cf ad exceſſum linearum ca, af.] *Hoc autem eſt, quod proxime demonſtrauit. ſed licet etiam in hunc modum concludere. ſit enim oa exceſſus, quo linea ca ipſam af excedit; ut ſit co æqualis af. Quoniam igitur eſt ut tota gc ad totam ca, ita cf ablata ad ablatam ao; erit & reliqua gf ad reliquam oc, hoc eſt ad fa, ut gc ad ca. quod demonſtrare oportebat.* K

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVI.

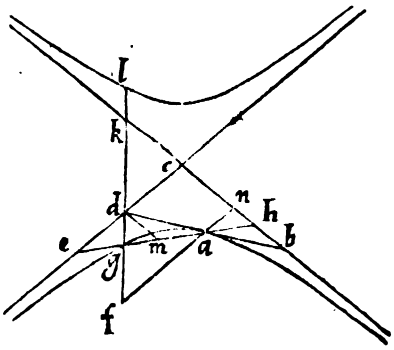
Iiſdem poſitis, ſi à puncto ducta linea, neque ſectionem in duobus punctis ſecet, neque æquidiſtans ſit aſymptoto, ſed cum oppoſita ſectione conueniat: erit ut tota ad lineam, quæ inter ſectionem, & æquidiſtantem per tactum ductam interiicitur, ita quæ eſt inter oppoſitam ſectionem, & aſymptoton ad eam, quæ inter aſymptoton & alteram ſectionẽ.

Sint oppoſitæ ſectiones a b, quarum centrum c; aſymptoti d e, f g: & in linea g c ſumatur punctum g; à quo ducatur g b e quidem ſectionem contingens; g h uero
A neque æquidiſtans ipſi c e, neque ſectionem in duobus punctis ſecans. iam conſtat h g
B producta m conuenire cum linea c d: & propterea cum ſectione a, ut demonſtratum eſt. Conueniat igitur in puncto a: & per b ducatur k b l æquidiſtans c g. Dico ut a k ad k h, ita eſſe a g ad g h. ducantur enim à punctis a h lineæ h m, a n, quæ ipſi c g æquidiſtent: & à punctis b g h
C ducantur b x, g p, r h s n, quæ æquidiſtent d e. Ita-
D que quoniã a d æqualis eſt g h. erit ut a g ad g h,
2. ſexti. ita d h ad h g. Vt autem a g ad g h, ita n s ad s h: & ut d h ad h g, ita c s ad s g. Vt igitur n s ad s h,
1. ſexti. ita c s ad s g. ſed ut n s ad s h, ita rectangulum n c ad rectangulum c h. & ut c s ad s g, ita rectangulum c r ad rectangulum r g. ergo ut rectangulum n c ad rectangulum c h, ita rectangulum c r
12. quinti ad ipſum r g. & ut unum ad unum, ita omnia ad omnia, quare ut n c ad c h, ita totum n l ad c h &
3 ſecũdi huius. 12 r g. & quoniam e b eſt æqualis b g, erit & l b ipſi b p æqualis: & rectangulum l x æquale rectangulo b g. ſed rectangulum l x rectangulo c h eſt æquale. ergo & b g ipſi
E c h. Vt igitur n c ad c h, ita totum l n ad b g, & g r; hoc eſt ad r x. ſed r x eſt æquale l h, quoniam & c h ipſi b h, & m b ipſi x h. ergo ut n c ad c h, ita n l ad l h. Vt autem n c ad c h, ita n s ad s h, hoc eſt a g ad g h. & ut n l ad l h, ita linea n r ad r h, hoc eſt a k ad K h. quare ut a k ad k h; ita a g ad g h.

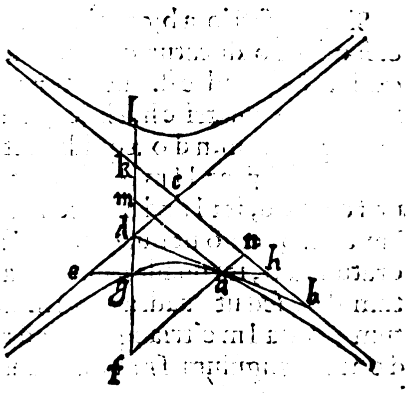


E V T O C I V S.

A L I T E R. Sint oppoſitæ ſectiones a l, quarum aſymptoti b k, d c, & contingens b a d. ducatur autem l k d g f: & ſit f a ipſi c d æquidiſtans. demonſtrandum eſt ut l f ad f g, ita l d
I ad d g. coniungatur enim a g, & ad e h protrahatur. erit a h æqualis e g, & h g ipſi a e. ducatur per
8. ſecũdi huius. 3 d linea d m æquidiſtans c h. ergo b a ipſi a d eſt
F æqualis: & h a ipſi a m. quare m g eſt exceſſus linearum h a, a g; hoc eſt a g, g e. & quoniam b k æquidiſtat d m, ut h g ad g m, ita erit k g ad g d. atque eſt a e æqualis h g, & l d ipſi k g. ergo ut l d ad d g, ſic a e ad g m, hoc eſt ad exceſſum linearũ
G a g, g e. ſed ut a e ad exceſſum linearum a g, g e, ita d f ad exceſſum linearum d g, g f. ergo ut l d ad d g, ita d f ad exceſſum linearum d g, g f. & ut unũ ad unum, ita omnia ad omnia. ut igitur l d ad d g
H ita tota l f ad d g, & exceſſum linearum d g, g f: hoc eſt ad g f.



ALITER Sint eadem, quæ ſupra, & per a ducatur a m ipſi b c æquidiſtans. Quoniam igitur b a eſt æqualis a d, erit & k m æqualis m d. & cum æquidiſtantes ſint h k, a m, ut g m ad m k, ita erit g a ad a h, hoc eſt a g ad g e. Vt autem a g ad g e, ita f g ad g d: & ut g m ad m k, ita dupla ipſius g m ad duplam m k. ergo ut f h ad g d, ita dupla g m ad duplam m k. atque eſt l g dupla g m: eſt enim l k ipſi d g æqualis, & k m ipſi m d: & d k dupla k m. Vt igitur l g ad k d, ita f g ad g d: & permutando, ut l g ad g f, ita k d ad d g. quare componendo ut l f ad f g, ita k g ad g d, hoc eſt l d ad d g.



2, ſexti

16. ſecũdi huius.

FED. COMMANDINVS.

A Iam conſtat h g productam conuenire cum linea c d.] *Quoniam enim linea g h non æquidiſtat c e, neque ſectionem in duobus punctis ſecat, neceſſe eſt ut conueniat cum ipſa c d ad partes d: nam ſi conueniret ad partes c, ſectioni prius occurreret; atque ita eam in duobus punctis ſecaret, quod non ponitur.*

B Et propterea cum ſectione a ut demonſtratum eſt.] *In undecima ſecundi huius.*

C Itaque quoniam a d æqualis eſt g h.] *Ex ſexta decima ſecundi huius.*

D Erit ut a g ad g h, ita d h ad h g. ut autem a g ad g h, ita n s ad s h, & ut d h ad h g, ita e s ad s g.] *Hunc locum nos reſtituimus; in græco enim exemplari ita legebatur.* ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ ηθ, ἐστὶν ὡς ἡ αη πρὸς ηθ, ἡ νσ πρὸς σε, ὡς δὲ ἡ δθ πρὸς θη, ἡ γσ πρὸς ση.

E Sed r x eſt æquale l h, quoniam & c h ipſi b h.] *Vereor ne codex mendoſus ſit; non enim uideo, quorſum hæc faciant. At uero r x ipſi l h æquale eſſe manifeſto conſtat. nam ſi à rectangulo c r auferantur æqualia, uidelicet rectangulum b c, & rectangulum c h; quæ remanent r x & l h æqualia erunt. Sed & aliter idem conſtare poteſt. eſt enim rectangulum b h utrique commune, & m b æquale x h, ex duodecima ſecundi huius. quare fortaſſe hoc modo legendum eſt. ſed r x eſt æquale l h, quoniam & c h ipſi b c, & m b ipſi x h, ut utrumque demõſtrationis modũ innuat.*

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM,
QVAE AB EVTOCIO AFFERTVR.

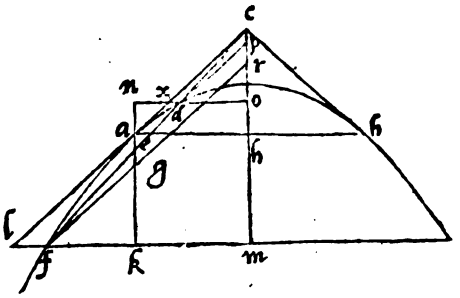
F Et h a ipſi a m.] *Ob ſimilitudinem triangulorum a b h, a d m.*

G Sed ut a e ad exceſſum linearum a g, g e, ita d f ad exceſſum linearum d g, g f.] *Hoc demonſtrabimus, ut in antecedente.*

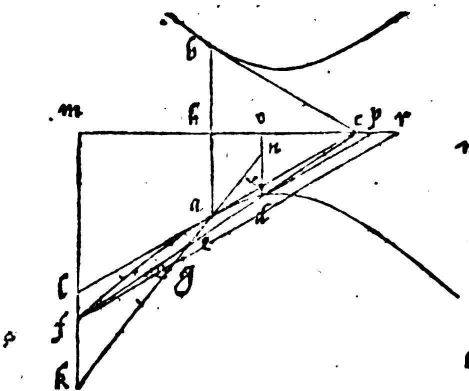
H Hoc eſt ad g f.] *Linea enim d g unà cum exceſſu, quo exceditur à g f, eſt ipſi g f æqualis.*

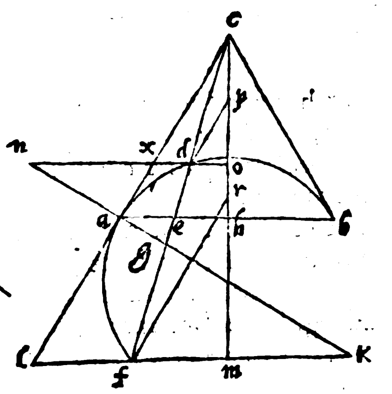
THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVII.

SI coni ſectionem, uel circuli circumferentiam, uel ſectiones oppoſitas, contingentes duæ rectæ lineæ ſibi ipſis occurrant; & per tactus linea producatur; ab occurſu uero contingentium ducatur linea ſectionem in duobus punctis ſecans: erit ut tota ad eam, quæ extra ſumitur, ita portiones inter ſe ſe, quæ à linea tactus coniungente fiunt.



Sit coni ſectio a b;contingenteſq; a c,c b: & iuncta a b ducatur c d e f. Dico ut f c ad c d,ita eſſe f e ad e d. ducantur enim per c a ſectionis diametri c h,a k:& per f d ducantur d p,f r,l f m,n d o æquidiſtantes a h, l c.
4.ſexti Quoniam igitur l f m æquidiſtat x d o, erit ut f c ad c d, ita l f ad x d, & f m ad d o, &
22.ſexti l m ad x o. ergo ut quadratum l m ad quadratum x o, ita quadratum f m ad quadratum d o.
A ſed ut quadratum l m ad quadratum x o,ita l m c triangulum ad triãgulum x c o:
B & ut quadratum f m ad quadratum d o,ita triangulum f r m ad triangulum d p o. quare ut triangulum l c m ad triangulum x o c, ita f r m triangulum ad triangulum d p o;
19. quĩti & ita reliquum quadrilaterum l c r f ad reliquum x c p d.
C eſt autem l c r f quadrilaterum triangulo a l k æquale, &





quadrilaterum x c p d æquale triangulo a n x. Vt igitur quadratum l m ad quadratum x o,ita a l k triangulum ad triangulum a n x.
D ſed ut quadratum l m ad quadratum x o, ita quadratum f c ad quadratum c d: & ut triangulum a l k ad triangulum a n x,ita quadratum l a ad quadratum a x;
E & quadratum f e ad quadratum e d. ergo
22.ſexti. ut quadratum f c ad quadratum c d, ita f e quadratum ad quadratum e d: & ideo ut linea f c ad c d, ita f e ad e d.

FED. COMMANDINVS.

A Sed ut quadratum l m ad quadratum x o,ita l c m triangulum ad triangulũ x c o.]
20.ſexti
19
Quadratum enim l m ad quadratum x o duplam proportionem habet eius; quæ eſt l m ad x o. ſed & triangulum l c m ad triangulum x c o proportionem habet duplam eius, quæ eſt l m ad x o; ſimilia namque ſunt triangula l c m, x c o. ergo ut quadratum l m ad quadratum x o, ita triangulum l c m ad triangulum x c o.

B Et ut quadratum f m ad quadratũ d o, ita triangulum f r m ad triangulum d p o.] *Ob ſimilitudinem triangulorum f r m, d p o, ut dictum eſt.*

C Eſt autem l c r f quadrilaterum triangulo a l k æquale, & quadrilaterum x c p d æquale triangulo a n x.] *Nam in coni ſectione, circuli circumferentia, & ſectionibus oppoſitis diameter, quæ per occurſum contingentium ducitur, uidelicet per punctum c bifariam ſecat lineam tactus coniungentem ex trigeſima, & trigeſima nona ſecundi huius; & propterea lineæ a h b, f m ad diametrum c h ordinatim applicatæ ſunt. ergo ex iis, quæ demonſtrantur in quadrageſima nona, & quinquageſima primi huius quadrilaterum x c p d triangulo a n x eſt æquale: & quadrilaterum a c r g (ſecet enim linea a k ipſam f r in g) æquale triangulo f g k. quare utrique addito quadrilatero l a g f, erit totum quadrilaterum l c r f æquale triangulo l a k. In oppoſitis uero*

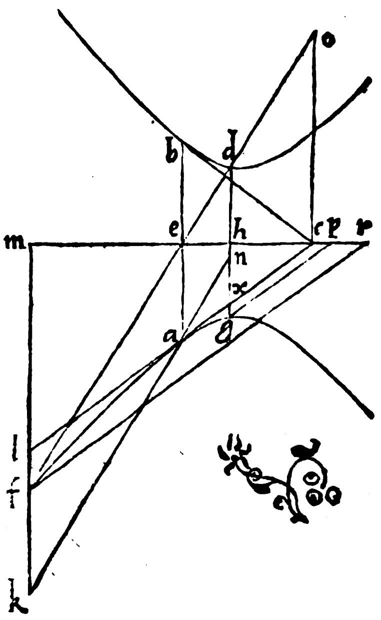
uero ſectionibus illud idem ſequitur ex demonſtratis in undecima huius.

Sed ut quadratum l m ad quadratum x o, ita quadratum f c ad quadratum c d.] D
Nam ut l m ad x o, ita l c ad c x; & ut l c ad c x, ita f c ad c d. ergo ut l m ad x o, ita f c ad c d: 4. ſexti
& propterea ut quadratum l m ad quadratum x o, ita quadratum f c ad ipſum c d. 2

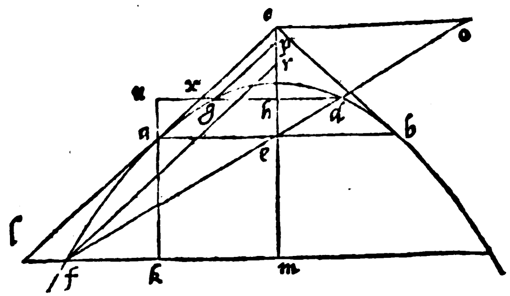
Ita quadratum l a ad quadratum a x, & quadratum fe ad quadratum e d.] *Eſt enim* 2
ut l a ad a c, ita f e ad e c, ut autem c a ad a x, ita c e ad e d. ex æquali igitur ut l a ad a x, ita f e E
ad e d; & ut quadratum l a ad quadratum a x, ita f e quadratum ad quadratum c d. 2. ſexti

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Iisdem poſitis ſi per contingentium occurſum ducatur recta linea, tactus coniungenti æquidiſtans; & per punctum, quod coniungentem tactus bifariam diuidit, ducatur linea ſecans, & ſectionem ipſam in duobus punctis, & lineam æquidiſtantem per occurſum ductam: erit ut tota ad eam, quæ extra ſumitur inter ſectionem, & lineam æquidiſtantem, ita portiones inter ſe ſe, quæ à linea tactus coniungente efficiuntur.



Sit ſectio a b, quam contingant re-
ctæ lineæ a c, c b. ſitq́; a b coniungens
tactus & diametri a n, c m. manifeſtum A
eſt lineam a b ad punctum e bifariam
ſecari. Itaque ducatur à puncto c linea
c o ipſi a b æquidiſtans & per e duca-
tur f e d o. Dico ut f o ad o d, ita eſſe
f e ad e d. Ducantur enim à punctis
f d, lineæ l f k m, d h g x n, æquidiſtan-
tes a b; & per f g ducantur f r, g p,
quæ ipſi l c æquidiſtent. Eodem mo-
do, quo ſupra, demonſtrabimus ut qua B
dratum l m ad quadratum x h, ita qua-
dratum l a ad quadratum a x. atque eſt C
ut quadratum l m ad quadratum x h,
ita l c quadratum ad quadratum c x, &
quadratum f o ad quadratum o d. ut D
autem quadratum l a ad quadratum
a x, ita f e quadratum ad quadratum
e d. ergo ut quadratum f o ad quadra- 22. ſexti
tum o d, ita quadratum f e ad quadra-
tum e d. & ut linea f o ad o d, ita f e
ad e d.



FED. COMMANDINVS.

Manifeſtum eſt lineam a b ad punctum e bifariam ſecari.] *Ex trigeſima, & trigeſima nona ſecundi huius, ut ſupra ad notauimus.* A

Eodem modo, quo ſupra, demonſtrabimus, ut quadratum l m ad quadratum x h, ita quadratum l a ad quadratum a x.] *Demonſtrabimus enim, ut quadratum l m ad quadratum x h, ita triangulum a l k ad triangulum a n x. ſed ut triangulum a l K ad triangulum a n x, ita quadratum l a ad quadratum a x:*

utrumque enim proportionem habet duplam eius, quæ eſt l a ad a x. ergo ut quadratum l m ad quadratum x h, ita quadratum l a ad quadratum a x.

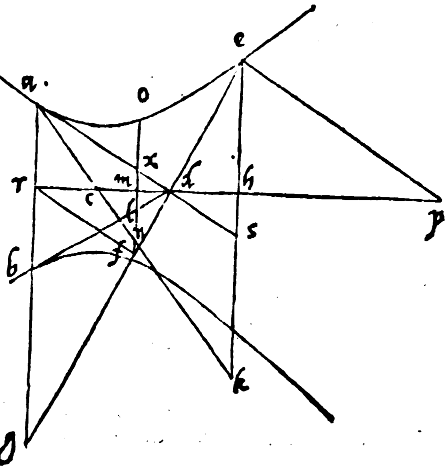
C Atque eſt ut quadratum l m ad quadratum x h, ita l c quadratum ad quadratum c x; & quadratum f o ad quadratum o d.] *Eſt enim ut l c ad c x, ita f o ad o d, propterea quòd lineæ c o, x d inter ſe ſe æquidiſtant.*

D Vt autem quadratum l a ad quadratum a x, ita quadratum f e ad quadratum e d.] *Rurſus cum æquidiſtantes ſint a e, x d, erit ſ e ad e d, ut l a ad a x.*

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XXXIX.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant: & per tactus linea producatur: ab occurſu uero contingentium ducta linea, & utramque ſectionem, & lineam tactus coniungentem ſecet: erit ut tota ad eam, quæ extra ſumitur, inter ſectionem & coniungentem tactus, ita portiones inter ſe ſe, quæ inter ſectiones & contingentium occurſum interiiciuntur.

Sint oppoſitæ ſectiones a b; quarum centrum c: & lineæ contingentes a d, d b: iunctæ uero a b, c d producãtur; & per d ducatur e d f g. Dico ut e g ad g f, ita eſſe e d ad d f. iungatur enim a c, producaturq́;: & per e f ducantur e h s k, f n l m x o ipſi a b
A æquidiſtantes, & e p, f r æquidiſtantes a d. Quoniam igitur f x, e s inter ſe æquidiſtant, & ad ipſas ducuntur e f, x s, h m; erit ut e h ad h s, ita f m ad m x: & permutan-
22. ſexti do ut e h ad f m, ita h s ad m x. ergo ut quadratum e h ad quadratum f m, ita quadratum h s, ad quadratum m x. ut autem quadratum e h ad quadratum f m, ita e h p triangulum ad triangulum f m r: & ut quadratum h s ad quadratum m x, ita triangulum d h s ad d m x triangulum. ergo ut triangulum e h p ad triangulum f m r, ita triangu-
B lum d h s ad triangulum d m x. Sed triangulum e h p triangulis a s k, h d s eſt æquale: & triangulum f m r æquale triangulis a x n, d m x. Vt igitur triangulum d h s ad triangulum d m x, ita triangulum a s k unà cum triangulo d h s ad triangulum a x n unà cum
19. quiti. triangulo d m x. quare & reliquum triangulum a s k ad reliquum a x n erit, ut triangulum d h s ad ipſum d m x. ut autem triangulum a s k ad a x n, ita quadratum k a ad qua-
C dratum a n; hoc eſt quadratum e g ad quadratum g f: & ut triangulum d h s ad triangulum d m x, ita quadratum h d ad quadratum d m, hoc eſt quadratum e d ad quadratum
D d f. ergo ut e g ad g f ita e d ad d f.



FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur f x, e s inter ſe æquidiſtant; & ad ipſas ducuntur e f, x s, h m: erit ut e h ad h s, ita f m ad m x.] *Fiunt enim triangula ſimilia e d h, f d m; itemq́; ſimilia inter ſe d h s, d m x. quare ut e h ad h d, ita f m ad m d; & ut d h ad h s, ita d m ad m x. ex æquali igitur ut e h ad h s, ita f m ad m x.*

B Sed triangulum e h p triangulis a s k, h d s eſt æquale: & triangulum f m r æquale triangulis a x n, d m x.] *Ex undecima huius.*

C Hoc eſt quadratum e g ad quadratum g f.] *Ob ſimilitudinem triangulorum* k n e, a n g.

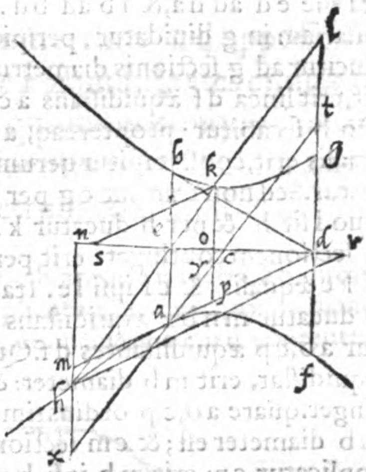
Ergo

Ergo ut e g ad g f, ita e d ad d f.] *Ex ijs, quæ dicta ſunt, ſequitur, ut quadratum e g ad* D
quadratum g f, ita eſſe quadratum e d ad d f quadratum. ergo ex 22. ſexti ut linea e g ad g f,
ita eſt e d ad d f.

THEOREMA XL. PROPOSITIO XL.

Iiſdem poſitis ſi per occurſum contingentium ducatur recta linea, tactus coniungenti æquidiſtans; & à puncto, quod coniungentem tactus bifariam diuidit, ducatur linea ſecans utranque ſectionem, & æquidiſtātem ei, quæ tactus coniungit: erit ut tota ad eam, quæ extra ſumitur inter æquidiſtantem & ſectionē, ita portiones inter ſe ſe, quæ inter ſectiones, & coniungentem tactus interiiciuntur.

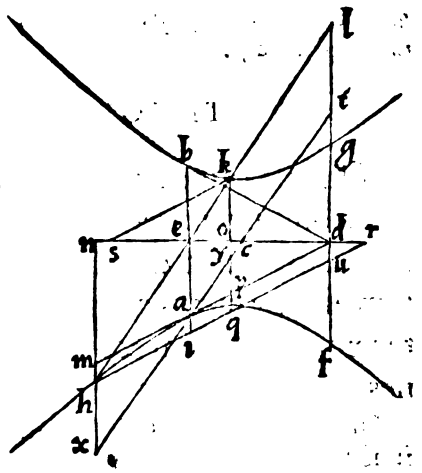
Sint oppoſitæ ſectiones a b, quarum centrum c: & contingentes lineæ a d, d b:
iungaturq; a b, & c d e. erit a e ipſi e b æqualis. ducatur per d linea f d g æquidiſtās A
a b: & per e quomodocunque contingat h e k l. Dico ut h l ad l k, ita eſſe h e ad e k.
ducantur enim à punctis h k lineæ h n m x, k o p ipſi a b æquidiſtantes; & h r, k s
æquidiſtantes a d: & ducatur a c x t. Itaque quoniam in lineas æquidiſtantes x m, k p
cadunt x a y, m a p; erit ut x a ad a y, ita m a ad a p. Vt autem x a ad a y, ita h e ad B C
e k: & ut h e ad e k, ita h n ad K o, propter ſimilitudinem triangulorum h e n, K e o.
quare ut h n ad K o, ita m a ad a p: & idcirco ut quadratum h n ad quadratum k o,
ita m a quadratum ad quadratum a p. ſed ut quadratum D
h n ad quadratum K o, ita triangulū h r n
ad triangulum κ s o: & ut quadratum m a ad quadratum
a p, ita x m a triangulum ad triangulum
a y p. ut igitur triangulū h r n ad triangulum k s o,
ita triangulum x m a ad triangulum a y p. triangulum E
autem h r n triangulis x a m, m n d eſt æquale:
& triangulū κ s o æquale triangulis a y p, p o d.
ergo ut triangulum x a m unà cum triāgulo m n d
ad triangulum a y p unà cum triangulo p o d, ita
x m a triangulum ad triangulum a y p. quare & reliquum
triangulum m n d ad reliquum d o p eſt,
ut totum ad totum. ſed ut triangulum x m a ad triangulum
a y p, ita quadratum x a ad a y quadratum.
& ut triangulum m n d ad triangulum d o p,
ita m n quadratum ad quadratū p o. ergo ut quadratum
m n ad quadratum p o, ita quadratum x a
ad quadratum a y. Vt autem quadratum m n ad
quadratum p o, ita n d quadratum ad quadratum d o: & ut quadratum x a ad quadratum F
a y, ita quadratum h e ad quadratum e k. ſed ut quadratum n d ad quadratum G
d o, ita quadratum h l ad quadratum l K. ut igitur quadratum h e ad quadratū
e κ, ita h l quadratum ad quadratū l K. & propterea ut linea h e ad e k, ita h l ad l k.



FED. COMMANDINVS.

Erit a e ipſi e b æqualis.] *Ex 39. ſecundi huius.* A
Erit ut x a ad a y, ita m a ad a p.] *Ob ſimilitudinem triangulorum a m x, a p y.* B
Vt autem x a ad a y, ita h e ad e k.] *Producantur e a, o p uſque ad lineam h r in pun-* C
cta i q: erit h i ipſi m a æqualis, & h q æqualis m p. ergo ut x a ad a y, ita m a ad a p, hoc eſt 34 primi
h i ad i q: & ut h i ad i q, ita h e ad e k. ut igitur x a ad a y, ita h e ad e k. 2. ſexti.
Sed ut quadratum h n ad quadratum k o, ita triangulum h r n ad triangulū K s o] D
Sunt enim triangula h r n, κ s o inter ſe ſimilia.

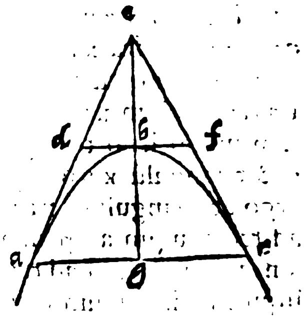
E Triangulum autem h r n triãgulis x a m, m n d
eſt æquale: & triangulum k s o æquale triangulis
a y p, p o d.] *Ex undecima huius.*
F Et ut quadratum x a ad quadratũ a y, ita quadratum h e ad quadratum e k.] *Superius enim oſtenſum eſt, ut x a ad a y, ita h e ad e k.*
G Sed ut quadratum n d ad quadratum d o, ita
quadratum h l ad quadratum l k.] *Secet enim d f
lineam h r in u. erit ut n d ad d o, ita m d ad d p, hoc eſt
h u ad u q. ſed ut h u ad u q, ita h l ad l K. quare ut n d
ad d o, ita h l ad l K. & ut quadratum n d ad quadratum d o, ita quadratum h l ad quadratum l k.*

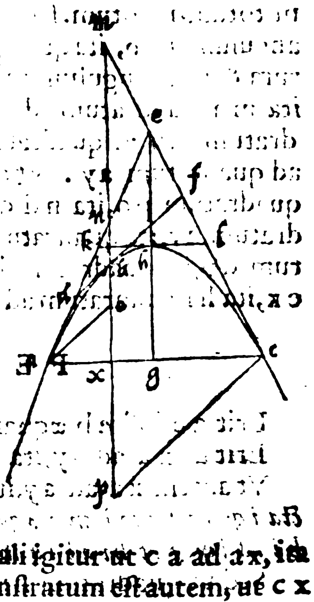


THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLI.

Si parabolen contingentes tres rectæ lineæ inter ſe conueniant, in eandem proportionem ſecabuntur.

Sit parabole a b c, quam rectæ lineæ a d e, e f c, d b f contingant. Dico ut c f ad f e,
ita eſſe e d ad d a, & f b ad b d. coniungatur enim a c: &
A bifariam in g diuidatur. perſpicuum eſt lineam, quæ ab e
B ducitur ad g ſectionis diametrum eſſe. ſi igitur per b tranſit,
C erit linea d f æquidiſtans a c, & ab e g bifariam in puncto
D b ſecabitur: proptereaq; a d ipſi d e; & e f ipſi f c æqualis erit. conſtat igitur uerum eſſe illud, quod proponebatur. Sed non tranſeat e g per b, ſed per aliud punctum,
E quod ſit h. & per h ducatur k h l æquidiſtans a c, quæ in
h ſectionem continget. erit per ea, quæ dicta ſunt, a k ipſi k e æqualis, & c l ipſi l e. Itaque per punctum quidem
b ducatur m n b x æquidiſtans e g: per a c uero ducantur a o, c p æquidiſtantes d f. Quoniam igitur m b ipſi e h
F æquidiſtat, erit m b diameter: & d f in b ſectionem continget. quare a o, c p ordinatim applicabũtur. & quoniam
35. primi huius. m b diameter eſt; & c m ſectionẽ contingit; ordinatimq;
applicatur c p: erit m b ipſi b p æqualis. ergo m f ipſi f c.
2. ſexti. Quòd cum m f ſit æqualis f c; & e l ipſi l c; ut m c ad c f,
ita eſt e c ad c l: & permutando ut m c ad c e, ita f c ad c l.
4. ſexti Vt autem m c ad c e, ita x c ad c g. ergo ut f c ad c l, ita
x c ad c g. ſed ut g c ad c a, ita l c ad c e; quòd utraque
G utriuſque dupla ſit. ex æquali igitur, ut e c ad c f, ita a c ad
c x: & per conuerſionem rationis, ut c e ad e f, ita c a ad
a x: diuidendoq; ut c f ad f e, ita c x ad x a. Rurſus quoniã
diameter eſt m b, contingitq; a n: & ordinatim applicatur
35. primi huius. a o, erit n b ipſi b o, & n d ipſi d a æqualis. eſt autem & e k
æqualis k a. ergo ut e a ad a k, ita n a ad a d. & permutando
4. ſexti do ut e a ad a n, ita k a ad a d. ſed ut e a ad a n, ita g a ad
a x. quare ut k a ad a d, ita g a ad a x. atque eſt ut c a ad
a g, ita e a ad a k: utraque enim utriuſque eſt dupla. ex æquali igitur ut c a ad a x, ita
e a ad a d: & diuidendo ut c x ad x a, ita e d ad d a. demonſtratum eſt autem, ut c x
H ad x a, ita c f ad f e. ergo ut c f ad f e, ita e d ad d a. Rurſus quoniam ut c x ad x a, ita





c p ad a o. & eſt linea quidem c p dupla b f, quòd c m ipſius m f ſit dupla; linea uerò a o dupla d b, quòd & a n ipſius n d. Vt igitur c x ad x a, ita f b ad b d, & c f ad f e, & e d ad d a.

FED. COMMANDINVS.

Perſpicuum eſt lineam, quæ ab e ducitur ad g ſectionis diametrum eſſe.] *Ex 29. ſecundi huius.* A

Si igitur per b tranſit, erit linea d f æquidiſtans a c.] *Ex 5. ſecundi huius.* B

Et ab e g bifariam in puncto b ſecabitur.] *Eſt enim d b ad b f, ut a g ad g c, quod demonſtrauimus in commentarijs in ſextam primi huius.* C

Proptereaq; a d ipſi d e, & c f ipſi f e æqualis erit.] *Sequitur ex iam dictis, & ex 35. primi huius, lineam g b ipſi b e æqualem eſſe. quare ex ſecunda ſexti, & a d ipſi d e, & c f ipſi f e eſt æqualis.* D

Quæ in h ſectionem continget.] *Ex 32. primi huius, quod & aliter cõſtare poteſt. ſi enim k h l non contingit ſectionem, ducatur per h linea contingens, quæ æquidiſtabit ipſi a g c, ex quinta ſecundi huius. ſed cum k h l eidem æquidiſtet, erunt ambæ inter ſe æquidiſtantes, quod eſt abſurdum: ſiquidem in puncto h conueniunt.* E

Erit m b diameter.] *Ex demonſtratis in 46. primi huius.* F

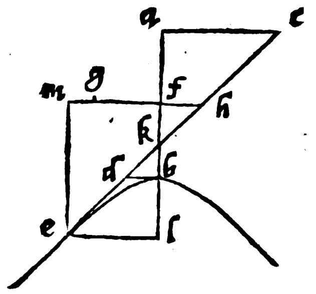
Ex æquali igitur ut e c ad c f, ita a c ad c x.] *Sequitur hoc ex æquali, & conuertendo.* G

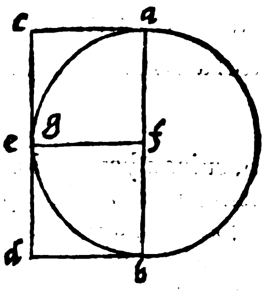
Rurſus quoniam ut c x ad x a, ita c p ad a o] *Ob ſimilitudinẽ triangulorum c p x, x a o.* H

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLII.

Si in hyperbola, uel ellipſi, uel circuli circumferentia, uel oppoſitis ſectionibus ab extremo diametri ducantur lineæ æquidiſtantes ei, quæ ordinatim applicata eſt: & alia quæpiam linea quomodocunque contingens ducantur: abſcindet ex ipſis lineas continentes rectangulum æquale quartæ parti figuræ, quæ ad eandem diametrum conſtituitur.

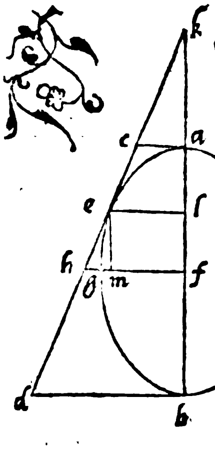
Sit aliqua prædictarum ſectionum, cuius diameter a b: atque à punctis a b ducantur lineæ a c, b d æquidiſtantes ei, quæ ordinatim applicata eſt: & alia quæpiam linea c e d in puncto e ſectionem contingat. Dico rectangulum lineis a c, b d contentum





æquale eſſe quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum a b conſtituitur. ſit enim ſectionis centrum f: & per f ducatur f g h ipſis a c, b d æquidiſtãs. Itaque quoniam a c, b d æquidiſtantes ſunt, & eſt æquidiſtans f g: erit f g diameter ipſi a b coniugata. ergo quadratum f g æquale eſt quartæ parti figuræ, quæ fit ad a b. ſi igitur in ellipſi & circulo linea f g per e tranſit, æquales ſunt a c, f g, b d: & ideo per ſe manifeſtum eſt, rectangulum, quod continetur a c, b d æquale eſſe quadrato f g, hoc eſt quartæ parti figuræ, quæ ad a b conſtituitur. ſed non tranſeat per e: & d c, b a productæ conueniant

in κ: ducaturq́; per e linea quidem e l ipſi a c æquidiſtãs:
A e m uero æquidiſtans a b. Quoniam igitur rectangulum
B κ f l quadrato a f eſt æquale; ut κ f ad f a, ita erit a f ad
C f l. eſt autem ut K f ad f a, hoc eſt ad f b, ita k a ad a l: & con
uertendo ut b f ad f k, ita l a ad a K: componendoq́; uel
D diuidendo, ut b k ad k f, ita l κ ad κ a. ſed ut b K ad k f,
ita d b ad f h: & ut l κ ad k a, ita e l ad c a. ergo ut d b
E ad f h, ita e l ad c a: & propterea rectangulum cõtentum
d b, c a æquale eſt ei, quod f h, e l continetur, hoc eſt rectã-
F gulo h f m: rectangulum autem h f m eſt æquale quadrato
f g; hoc eſt quartæ parti figuræ, quæ ad a b. rectangulum
igitur ex d b, c a æquale eſt quartæ parti figuræ, quæ ad dia
metrum a b conſtituitur.



FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur rectangulum k f l quadrato a f eſt æquale.] *Ex trigeſima ſeptima primi huius.*

B Vt K f ad f a, ita erit a f ad f l.] *Ex 15. ſexti.*

C Eſt autem ut k f ad f a, hoc eſt ad f b, ita k a ad a l.] *In hyperbola hoc ſequitur ex 12. quinti. Quoniam enim ut* k f *ad* f a, *ita* a f *ad* f l, *erit ut* k f *ad* f a, *ita* k f, *&* f a *ad* a f, *&* f l, *hoc eſt* k a *ad* a l. *ſed in ellipſi & circulo ita dicemus. Quoniam ut* κ f *ad* f a, *ita* a f *ad* f l, *per conuerſionem rationes erit ut* f k *ad* k a, *ita* f a *ad* a l: *& permutando ut* κ f *ad* f a, *ita* k a *ad* a l.

D Sed ut b k ad K f, ita d b ad f h: & ut l k ad k a, ita e l ad c a.] *Hæc nos addidimus perſpicuitatis cauſſa, quæ tamen deſiderari uidebantur.*

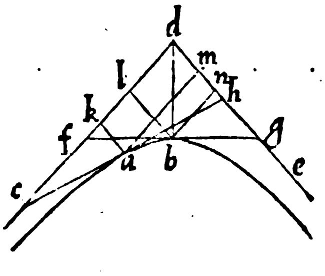
E Et propterea rectangulum contentum d b, c a æquale eſt ei, quod f h, e l continetur.] *Ex 16. ſexti.*

F Rectangulum autem h f m æquale eſt quadrato f g.] *Ex 38. primi huius.*

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLIII.

Si hyperbolen recta linea contingat, abſcindet ex aſymptotis ad ſectionis centrum lineas continentes rectangulum æquale ei, quod continetur lineis ab altera contingente abſciſsis ad uerticem ſectionis, qui eſt ad axem.

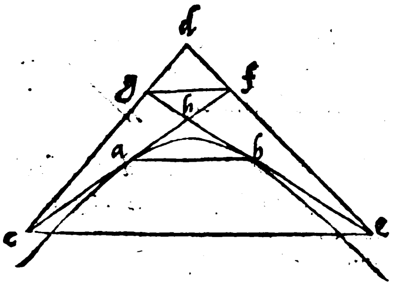
Sit hyperbole a b, cuius aſymptoti c d, d e; & axis b d: ducatur autem per b linea
f b g ſectionem contingens: & alia quæpiam utcunque contingens ducatur c a h. Di-
co rectangulum f d g rectangulo c d h æquale eſſe. Ducãtur enim à punctis a b lineæ
a κ, b l, quæ ipſi d g æquidiſtent; & lineæ a m, b n, quæ æ-
quidiſtent c d. Quoniam igitur c a h ſectionem contingit;
3. ſecũdi huius. erit c a æqualis a h. quare c h dupla eſt h a; & c d ipſius
a m; & d h ipſius a κ dupla. ergo rectangulum c d h qua
4. ſexti. druplum eſt rectanguli k a m. Eodem modo demonſtrabi
20 12. ſecũdi huius. tur rectangulum f d g rectanguli l b n quadruplum. Sed
rectangulum k a m eſt æquale rectangulo l b n. rectangu-
lum igitur c d h rectangulo f d g æquale erit. ſimiliter de-
monſtrabitur etiam ſi d b ſit alia quæpiam diameter, &
non axis.

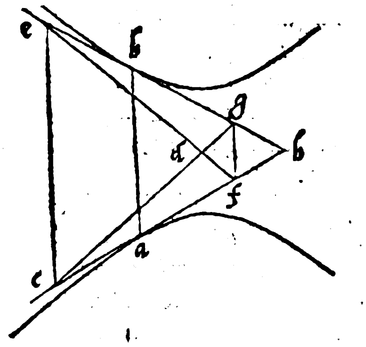


THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO XLIIII.

Si hyperbolen, uel oppoſitas ſectiones contingentes duæ rectæ lineæ aſymptotis occurrant; quæ ad occurſus ducuntur, lineæ tactus coniungenti æquidiſtantes erunt.

Sit hyperbole, uel oppoſitæ ſectiones a b: aſymptoti uero c d, d e; & contingentes c a h f, e b h g. iunganturq; a b, f g, c e. Dico eas inter ſe æquidiſtantes eſſe. Quoniam enim rectangnlum c d f æquale eſt rectangulo g d e; ut c d ad d e, ita erit g d ad d f. A 15. ſexti.

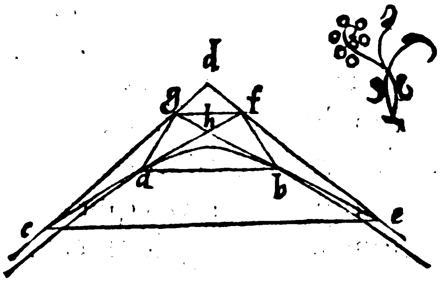


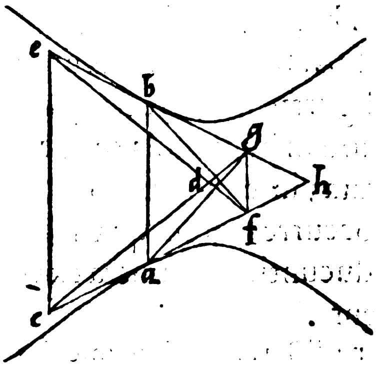


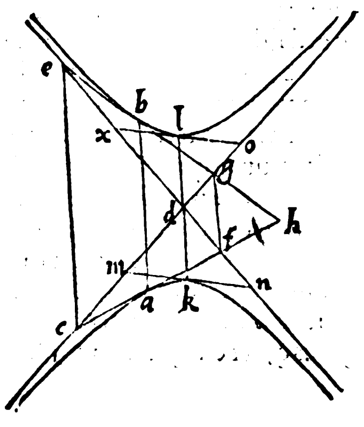
æquidiſtat igitur c e ipſi g f: & ideo ut h g ad g e, ita h f ad f c. Vt autem e g ad g b, ita c f ad f a: utraque enim utriuſque eſt dupla. ergo ex æquali ut h g ad g b, ita h f ad f a. linea igitur g f ipſi a b eſt æquidiſtans. B C D

EVTOCIVS.

Demonſtratis lineis c e, g f inter ſe æquidiſtantibus, coniungantur g a, f b. & quoniam æquidiſtant f g, c e; erit triangulum c g f triangulo e g f æquale. atque eſt triangulum quidem c g f duplum trianguli a g f; quod linea c f ipſius f a ſit dupla: triangulum uero e g f duplum trianguli b g f. ergo triangulum a g f triangulo b g f eſt æquale: & propterea linea f g ipſi a b æquidiſtat. In oppoſitis uero ſectionibus, ſi linea a b per centrum d non tranſeat, ducatur per d ipſi e c æquidiſtans K *d l: & per* K *l ducantur m* k *n, x l o, quæ ſectiones contingant. Quoniam igitur rectangulum x d o æquale eſt rectangulo m d n: rectangulum autem x d o rectangulo e d g eſt æquale: & rectangulum m d n æquale rectangulo c d f: ſequitur rectangulum e d g rectangulo c d f æquale eſſe.* 1. ſexti. 59. primi. 43. huius

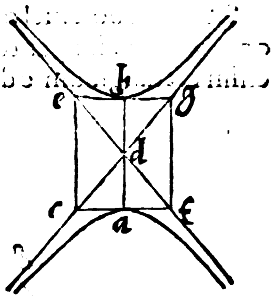






FED. COMMANDINVS.

A Quoniam enim rectangulum c d f æquale eſt rectãgulo g d e, ut c d ad d e, ita erit g d ad d f.] *Hoc in hyperbola ita eſſe ex antecedente conſtat: ſed in oppoſitis ſectionibus, cum linea a b per centrum d non tranſit, ab Eutocio in fine commentarij demonſtratur. Quòd ſi a b tranſeat per d, illud facile conſtare poteſt. deſcripta etenim figura lineæ c f, e g æquidiſtantes ſunt. quare triangula a d f, b d e ſimilia: & cum a d ſit æqualis d b, etiam inter ſe æqualia erunt. Eadem quoque ratione æqualia oſtendentur triangula c d a, g d b. ergo totum triangulum c d f toti g d e eſt æquale: & ex quintadecima propoſitione ſexti elementorum, ut c d ad d g, ita eſt e d ad d f: permutandoq; ut c d ad d e, ita g d ad d f. ergo c e, g f inter ſe æquidiſtant.*



Præterea ex demonſtratis in quinta decima ſecundi huius, lineæ c a, a f, e b, b g æquales ſunt: ideoq; & æquales & æquidiſtantes lineæ, quæ ipſas coniungunt, cum igitur c e, f g æquidiſtent ipſi a b, etiam inter ſe ſe æquidiſtabunt.

B Aequidiſtat igitur c e ipſi g f.] *Cum enim ſit ut c d ad d e, ita g d ad d f: & angulus ad d, uel communis, uel æqualis: erit triangulum g d f triangulo c d e ſimile: & angulus d g f æqualis angulo d c e. ergo g f, c e inter ſe æquidiſtent neceſſe eſt.*

6. ſexti
27. primi
28

C Et ideo ut h g ad g e, ita h f ad f c.] *In oppoſitis ſectionibus ſequitur illud ex ſecunda ſexti. At uero in ellipſi ob ſimilitudinem triangulorum c h e, g h f, ut e h ad h g, ita eſt c h ad h f: & componendo, conuertendoq; ut h g ad g e, ita h f ad f c. Hic autem incipit demonſtrare lineam g f ipſi a b æquidiſtantem eſſe, quod quidem ab Eutócio etiam aliter demonſtratur.*

D Linea igitur g f ipſi a b eſt æquidiſtans.] *Ex ſecunda ſexti in oppoſitis ſectionibus. ſed in hyperbola cum ſit ut h g ad g b, ita h f ad f a, & conuertendo, diuidendoq; erit ut b h ad h g, ita a h ad h f: & permutando ut b h ad h a, ita g h ad h f. ſunt autem anguli ad h inter ſe æquales. triangulum igitur a h b ſimile eſt triangulo g h f, & angulus a b g æqualis angulo b g f. quare g f ipſi a b æquidiſtat.*

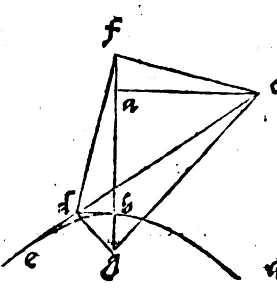
6. ſexti

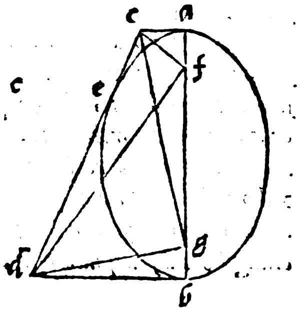
THEOREMA XLV. PROPOSITIO XLV.

Si in hyperbola, uel ellipſi, uel circuli circumferentia, uel oppoſitis ſectionibus ab extremo axis lineæ ad rectos angulos ducantur, & quartæ parti figuræ æquale rectangulum comparetur ad axem ex utraque parte; quod in hyperbola quidem, & ſectionibus oppoſitis excedat figura quadrata; in ellipſi uero deficiat: & ducatur linea ſectionem contingens, occurrensq; eis, quæ ſunt ad rectos angulos: lineæ, quæ ab occurſibus ducuntur ad puncta ex comparatione facta, angulos rectos ad ea efficient.

Sit una dictarum ſectionum, cuius axis a b: & lineæ a c, b d ad rectos angulos ducãtur. contingat autem c e d: & quartæ parti figuræ æquale rectangulum comparetur ex utraque parte, ſicuti dictum eſt; uidelicet rectangulum a f b, & a g b: & coniungantur c f, c g, d f, d g. Dico angulum c f d, & angulum c g d rectũ eſſe. Quoniam enim oſtenſum eſt rectangulum ex a c, b d æquale quartæ parti figuræ, quæ ad a b conſtituitur: atque eſt rectangulum a f b æquale quartæ parti eiuſdem figuræ: rectangulum ex a c, b d rectangulo a f b æquale erit. ergo ut c a ad a f, ita f b ad b d: & ſunt anguli, qui ad a b recti. angulus igitur a c f angulo b f d eſt æqualis: angulusq; a f c æqualis angulo f d b. &

42. huius
15. ſexti
6. ſexti.





quoniam

quoniam angulus c a f eſt rectus, anguli a c f, a f c uni recto æquales erunt. demonſtratum autem eſt angulum a c f æqualem eſſe angulo d f b. ergo c f a, d f b anguli uni recto ſunt æquales. reliquus igitur angulus d f c rectus eſt. ſimiliter & angulus c g d rectus demonſtrabitur. 32. primi

FED. COMMANDINVS.

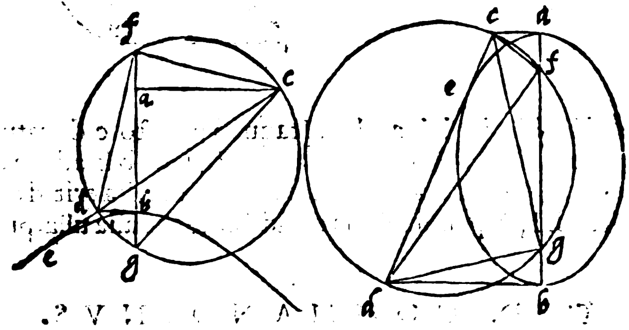
Reliquus igitur angulus d f c rectus eſt.] *In ellipſi ſcilicet, nam in hyperbola angulus d f c ex duobus angulis c f a, d f b conſtat.*

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO XLVI.

Iiſdem poſitis lineæ coniunctæ æquales facient angulos ad contingentes.

Iiſdem nanque poſitis, dico angulum a c f angulo d c g; & angulum c d f angulo b d g æqualem eſſe, Quoniam enim oſtendimus utrunque angulorum c f d, c g d rectum eſſe: ſi circa diametrum c d circulus deſcribatur per puncta f g tranſibit. quare angulus d c g æqualis eſt angulo d f g, quòd ſint in eadem circuli portione. angulus autem d f g angulo a c f eſt æqualis, ut demonſtratum fuit. ergo & d c g angulus æqualis erit angulo a c f. Eodem modo & angulus c d f angulo b d g æqualis oſtendetur.

in antecedente.
31. tertii.
21. tertii.

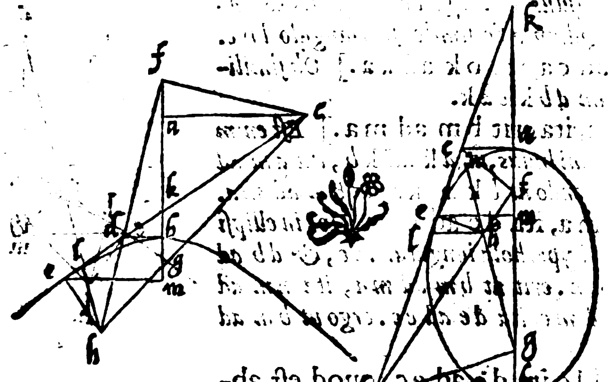


in antecedente.

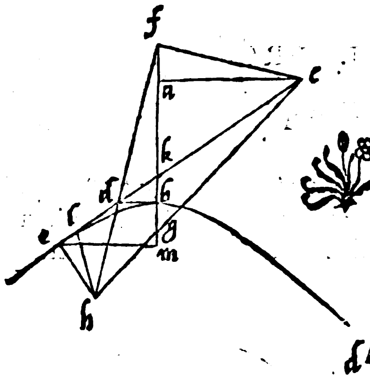
THEOREMA XLVII. PROPOSITIO XLVII.

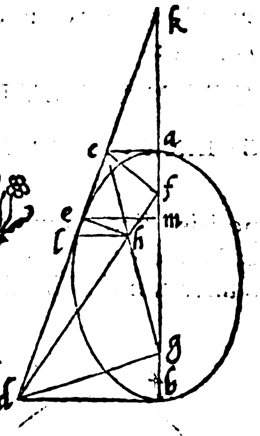
Iiſdem poſitis linea ab occurſu coniunctarum ad tactum ducta, perpendicularis eſt ad contingentem.

Ponantur eadem, quæ prius; & lineæ c g, f d ſibi ipſis occurrant in h: & c d, b a productæ occurrant in k: coniungaturq; e h. Dico e h ad c d perpendicularem eſſe. ſi enim non eſt ita, ducatur à puncto h ad c d perpendicularis h l. Quoniam igitur an- A



gulus c d f æqualis eſt angulo g d b, & angulus d b g rectus æqualis recto d l h: triangulum d g b triangulo l h d ſimile erit. quare ut g d ad d h, ita b d ad d l. Sed ut g d 4. ſexti
B ad d h, ita f c ad c h, propterea quòd anguli ad f g recti, & qui ad h æquales ſunt. &
C ut f c ad c h, ita a c ad c l, ob ſimilitudinem triangulorum a f c, l c h. Vt igitur b d ad
D d l, ita a c ad c l: & permutando ut d b ad c a, ita d l ad l c. ut autem d b ad c a, ita





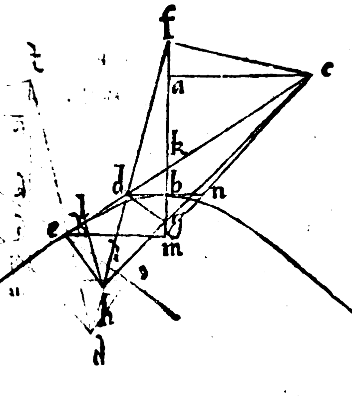
b k ad k a. ergo ut d l ad l c, ita b k ad k a. Itaque à puncto e ducatur linea e m ipſi
E a c æquidiſtans, quæ ad a b ordinatim applicata erit; & ut b k ad k a, ita erit b m ad
F G m a. ſed ut b m ad m a, ita d e ad e c. quare ut d l ad l c, ita erit d e ad e c: quod eſt abſurdum. non igitur h l perpendicularis eſt ad l c, neque alia ulla, præter ipſam h e.

FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur angulus c d f æqualis eſt angulo g d b.] *Eſt enim ex antecedente angulus c d f æqualis angulo g d h: itemq; angulo l d ex quintadecima primi elementorum. ergo angulus g d b ipſi l d b eſt æqualis. eſt autem & d b g rectus æqualis recto d l b. triangulum igitur d g b triangulo d b l ſimile erit.*

B Et qui ad h æquales ſunt.] *In ellipſi enim anguli ad h ſunt ſecundum uerticem. ſed in hyperbola idem eſt utrique communis. ergo & reliquus reliquo æqualis, & triangulum f c h triangulo g d h ſimile erit.*

C Ob ſimilitudinem triangulorum a f c, l c h.] *Namque angulus f a c rectus eſt æqualis angulo c l h, qui rectus ponitur; & angulus f c a ipſi l c h æqualis ex antecedente. ergo triangulum a f c ſimile eſt triangulo l h c.*



D Vt autem d b ad c a, ita b k ad k a.] *Ob ſimilitudinem triangulorum d b k, c a k.*

E Et ut b k ad k a, ita erit b m ad m a.] *Eſt enim ex trigeſima ſexta primi huius, ut d k ad k b, ita a m ad m b. quare & conuertendo ut b k ad k a, ita b m ad m a.*

F Sed ut b m ad m a, ita d e ad e c.] *Hoc in ellipſi perſpicuum eſt, ſed in hyperbola iungatur m c, & d b ad ipſam producatur in n. erit ut b m ad m a, ita n m ad m c. ut autem n m ad m c, ita d e ad e c. ergo ut b m ad m a, ita d e ad e c.* 2. ſexti. 4. ſexti.

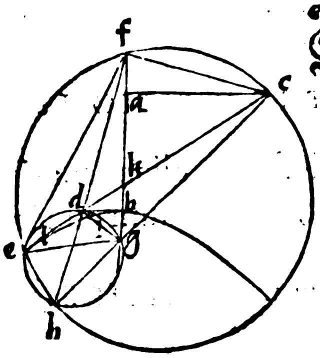
G Quare ut d l ad l c, ita d e ad e c, quod eſt abſurdum.] *Si enim fieri poteſt, ſit ut d l ad l c, ita d e ad e c. erit conuertendo ut c l ad l d, ita c e ad e d: & diuidendo ut c d ad d l, ita c d ad d e. ergo ex nona quinti d l eſt æqualis d e, pars toti, quod eſt abſurdum.*

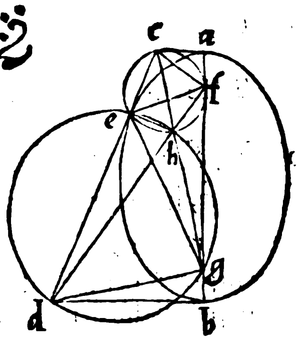
THEO

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO XLVIII.

Iiſdem poſitis, oſtendendum eſt lineas, quæ à tactu ducuntur, ad puncta ex comparatione facta, æquales continere angulos ad contingentem.

Ponantur eadem, quæ prius: & coniungantur e f, e g. Dico angulum c e f angulo g e d æqualem eſſe. Quoniam enim anguli d g h, d e h recti ſunt: circulus circa diametrum d h deſcriptus per puncta e g tranſibit. quare angulus d h g æqualis erit angulo d e g in eadem enim portione conſiſtunt. Similiter & c e f angulus angulo c h f eſt æqualis, & angulus c h f angulo d h g; quod ſint ſecundum uerticem. angulus igitur A c e f angulo g e d æqualis erit.





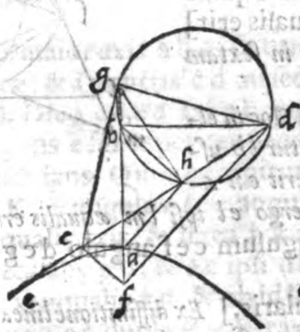
FED. COMMANDINVS.

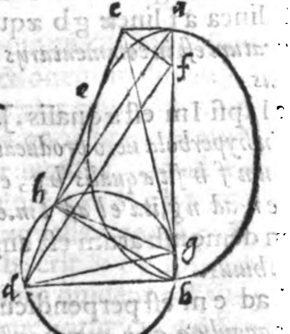
Quod ſint ſecundum uerticem.] *Intelligendum eſt hoc in ellipſi, nam in hyperbola eſt idem angulus.* A

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO XLIX.

Iiſdem poſitis ſi ab aliquo punctorum ad contingentem perpendicularis agatur, quæ à facto puncto ducuntur ad axis extrema, rectos angulos continebunt.

Ponantur eadem; & à puncto g ad c d ducatur perpendicularis g h; & a h, b h iungantur. Dico angulum a h b rectum eſſe. Quoniam enim angulus d b g, & d h g A eſt rectus, ſi circa diametrum d g circulus deſcribatur, tranſibit per puncta h b, & an A gulus g h b angulo b d g æqualis erit. angulus autem a g c oſtenſus eſt æqualis angu





lo b d g.ergo g h b angulus æqualis eſt angulo a g c,hoc eſt angulo a h c:& propterea angulus c h g angulo a h b.ſed rectus eſt angulus c h g.ergo & a h b rectus erit.

FED. COMMANDINVS.

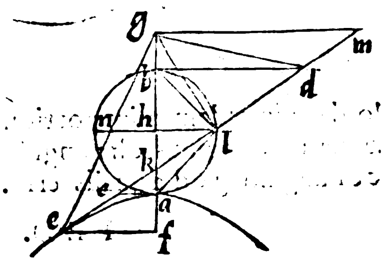
A Angulus autem a g c oſtenſus eſt æqualis angulo b d g.] *In 45. huius.*

B Hoc eſt angulo a h c.] *Sunt enim anguli c a g, c b g recti. quare ſi circa diametrum c g circulus deſcribatur, per puncta a h tranſibit; & anguli a g c, a h c in eadem circuli portione inter ſe æquales erunt.*

C Et propterea angulus c h g angulo a h b.] *Addito ſcilicet utrique angulo communi; in hyperbola quidem b h c, in ellipſi uero a h g angulo.*

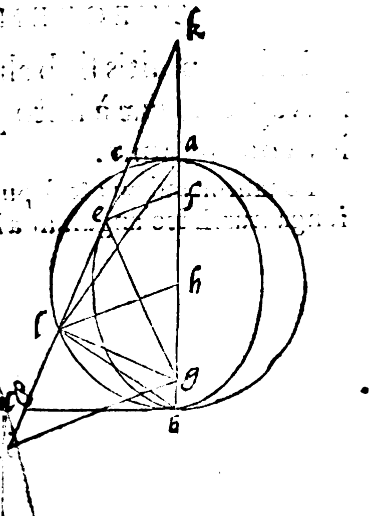
THEOREMA L. PROPOSITIO L.

Iiſdem poſitis, ſi à centro ſectionis ducatur linea contingenti occurrens; æquidiſtansq; lineæ per tactum, & per unum punctorum ductæ: dimidio axis æqualis erit.



Sint eadem, quæ ſupra, & centrum ſit h. iungatur autem e f: & lineæ d c, b a inter ſe conueniant in K: & per h ducatur h l æquidiſtans e f. Dico l h ipſi h b æqualem eſſe. Iungantur enim e g, a l, l g, l b: & per g ducatur g m ipſi e f æquidiſtans. A Quoniam igitur rectangulum a f b eſt æquale rectangulo a g b; & linea a f lineæ g b æqualis erit. eſt autem & a h æqualis h b. ergo & f h ipſi h g: B C & propterea e l ipſi l m eſt æqualis. Itaque quoniam demonſtratum eſt angulum c e f angulo d e g æqualem eſſe: eſtq; angulus c e f æqualis angulo e m g: erit & e m g angulus ipſi m e g æqualis: & linea e g lineæ g m. ſed & e l eſt æqualis l m, ut demonſtrauimus. D linea igitur g l ad e m eſt E perpendicularis. eſt autem & angulus a l b rectus. quare ſi circa diametrum a b circulus deſcribatur, per punctum l tranſibit. atque eſt a h æqualis h b. ergo & h l, quæ eſt ex centro circuli, ipſi h b æqualis erit.

29. primi.



FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur rectangulum a f b eſt æquale rectãgulo a g b: & linea a f lineæ g b æqualis erit] *Hoc à nobis demonſtratum eſt in commentarijs in ſextam decimam ſecundi huius.*

B Et propterea e l ipſi l m eſt æqualis.] *Hoc in ellipſi manifeſtum eſt, in hyperbola uero producatur l b uſque ad e g in n: & cum f b ſit æqualis b g, erit e n æqualis n g. ut autem e n ad n g, ita e l ad l m. ergo e l ipſi l m æqualis erit.*

2. ſexti.

C Itaque quoniam demonſtratum eſt angulum c e f angulo d e g æqualem eſſe.] *In quadrageſima octaua huius.*

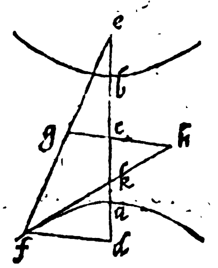
D Linea igitur g l ad e m eſt perpendicularis.] *Ex diffinitione lineæ perpendicularis. ſequitur enim ex dictis angulum g l e angulo g l m eſſe æqualem.*

E Eſt autem & angulus a l b rectus.] *Ex antecedente.*

THEOREMA LI. PROPOSITIO LI.

Si in hyperbola, uel oppoſitis ſectionibus ad axem comparetur rectangulum æquale quartæ parti figuræ: excedensq; figura quadrata: & à punctis ex comparatione factis ad quamlibet ſectionem rectæ lineæ inclinẽtur: maior minorem quantitate axis ſuperabit.

Sit hyperbole, uel oppoſitæ ſectiones, quarum axis a b, centrum c: & quartæ parti
figuræ æquale ſit utrumq; rectangulorum a d b, a e b: & à punctis e d ad ſectionem inclinentur
e f, f d. Dico e f ipſam f d ſuperare quantitate a b. ducatur enim per f linea
f K h ſectionem contingens: & per c ducatur g c h æquidiſtans f d. erit angulus k h g 29. primi
angulo K f d æqualis; alterni enim ſunt: & angulus K f d æqualis A
angulo g f h. ergo & g f h ipſi g h f, lineaq; f g lineæ g h, &
linea f g ipſi g e æqualis erit; quod & a e æqualis ſit d b, & a c B
ipſi c b, & d c ipſi c e. eſt igitur linea g h æqualis g e: & ob id
f e ipſius g h dupla. Itaque quoniam demonſtrata eſt c h ipſi C
c b æqualis; erit e f utriuſque g c, c b dupla. ſed ipſius quidem D
g c dupla eſt f d; ipſius uero c b dupla a b. linea igitur e f utrique
f d, a b eſt æqualis: & propterea e f ipſam f d ſuperat quantitate a b.



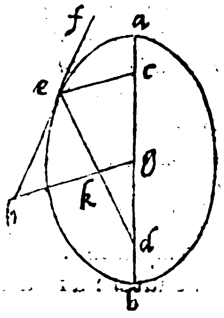
FED. COMMANDINVS.

Et angulus K f d æqualis angulo g f h.] *Ex 40. octaua huius.* A
Quod & a e æqualis ſit d b.] *Superius enim demonſtrauimus e b ipſi a d æqualem eſſe,* B
quare addita utrique a b, erit a e æqualis b d. uereor tamen, ne potius legendum ſit: quod & a d
æqualis ſit b e. hoc enim ad propoſitum magis attinere uidetur.
Itaque quoniam demonſtrata eſt c h ipſi c b æqualis.] *In antecedente ſcilicet.* C
Sed ipſius quidem g c dupla eſt f d.] *Eſt enim ut f e ad e g, ita f d ad g c. ſed f e dupla* D
eſt e g. ergo & f d ipſius g c dupla. 4. ſexti.

THEOREMA LII. PROPOSITIO LII.

Si in ellipſi ad maiorem axem ex utraque parte comparetur rectangulum æquale quartæ parti figuræ, deficiensq; figura quadrata: & à punctis ex comparatione factis ad ſectionem rectæ lineæ inclinentur; ipſi axi æquales erunt.

Sit ellipſis, cuius maior axis a b: & ſit utrumque rectangulorum a c b, a d b æquale
quartæ parti figuræ: & à punctis c d ad ſectionem inclinentur
rectæ lineæ c e, e d. Dico c e, e d axi a b æquales eſſe. Ducatur
enim linea contingens e f h: & per centrum, quod ſit g, ducatur
g K h ipſi c e æquidiſtans. Quoniam igitur angulus c e f eſt æqualis A
angulo h e K, & angulus f c e angulo e h k; & e h K angulus
ipſi h e k æqualis erit; & linea h k æqualis lineæ k e. &
quoniam a g eſt æqualis g b, & a c ipſi d b; erit & c g ipſi g d
æqualis. ergo & e K æqualis k d. & ob id linea quidem e d dupla 2. ſexti
eſt h k; linea uero e c dupla k g. Vtraque igitur c e, e d ipſius B
h g eſt dupla. ſed & a b dupla h g. quare a b ipſis c e, e d C
æqualis erit.



FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur angulus c e f eſt æqualis angulo h e κ.] *Ex 40. octaua huius.*

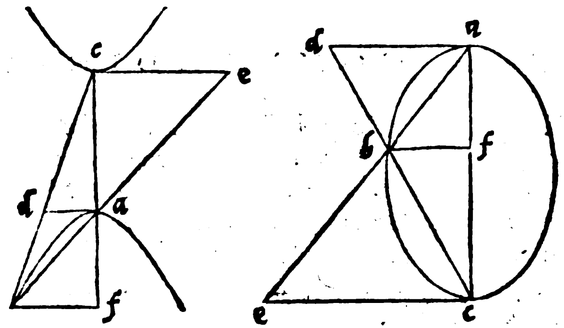
B Et ob id linea quidem e d dupla eſt h κ.] *Eſt enim d e dupla e k, hoc eſt h κ, quæ ipſi k e æqualis demonſtrata eſt.*

C Sed & a b dupla h g.] *In quinquageſima enim huius demonſtrauit h g æqualem eſſe g a.*

THEOREMA LIII. PROPOSITIO LIII.

Si in hyperbola, uel ellipſi, uel circuli circumferentia, uel ſectionibus oppoſitis ab extremo diametri ducantur lineæ ordinatim applicatis æquidiſtantes; & à dictis terminis ad idem ſectionis punctum lineæ ductæ ſecent æquidiſtantes: rectangulum ex abſciſsis factum æquale erit figuræ, quæ ad eandem diametrum conſtituitur.

Sit una dictarum ſectionum a b c, cuius diameter a c: ducanturq; a d, c e ordinatim applicatis æquidiſtantes: & a b e, c b d producantur. Dico rectangulum contentum a d, c e figuræ, quæ fit ad a c æquale eſſe. à puncto enim b linea b f ordinatim
A applicetur. ergo ut rectangulum a f c ad quadratum f b, ita tranſuerſum figuræ latus
B ad rectum; & ita quadratum a c ad ipſam figuram. ſed rectanguli a f c ad quadratū
23.ſexti C f b proportio componitur ex proportione a f ad f b, & proportione c f ad f b. ergo



proportio figuræ ad quadratum a c compoſita eſt ex proportione b f ad f a, & pro-
D portione b f ad f c. Vt autem a f ad f b, ita a c ad c e: & ut c f ad f b, ita c a ad a d.
E proportio igitur figuræ ad quadratum a c componitur ex proportione e c ad c a, &
23.ſexti d a ad a c. ſed rectangulum contentum a d, c e ad a c quadratum ex eiſdem proportionibus componitur. ergo ut figura ad quadratum, ita eſt rectangulum contentum a d, c e ad quadratum a c. rectangulum igitur contentum a d, c e figuræ, quæ fit ad a c æquale erit.

FED. COMMANDINVS.

A Ergo ut rectangulum a f c ad quadratum f b, ita tranſuerſum figuræ latus ad rectum.] *Ex 21. primi huius.*

B Et ita quadratum a c ad ipſam figuram.] *Eſt enim ut tranſuerſum latus ad rectum, ita quadratum tranſuerſi lateris, hoc eſt quadratum a c ad rectangulum dictis lateribus contentum, hoc eſt ad figuram ipſam, ex prima ſexti, uel ex lemmate in 22. decimi elementorum.*

C Ergo proportio figuræ ad quadratum a c compoſita eſt ex proportione b f ad f a; & proportione b f ad f c.] *Quoniam enim ut rectangulum a f c ad quadratum f b, ita quadratum a c ad ipſam figuram; erit conuertendo, ut quadratum f b ad rectangulum a f c, ita figura ipſa ad quadratum a c. ſed proportio quadrati f b ad rectangulum a f c componitur ex proportione b f ad f a, & b f ad f c. ergo & proportio figuræ ad quadratum a c ex eiſdem proportionibus componitur.*

D Vt autem a f ad f b, ita a c ad c e; & ut c f ad f b ita c a ad a d.] *Ex quarta ſexti ob* *ſimilitudinem triangulorum a b f, a e c: & triangulorum c b f c d a.*

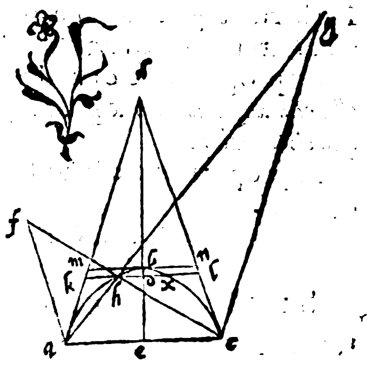
Proportio igitur figuræ ad quadratum a c componitur ex proportione e c ad c a. E
& d a ad a c.] *Nam conuerſa proportio ex eiſdem proportionibus conuerſis componitur, ut ſuperius probatum eſt. uereor tamen ne hæc propoſitio ab aliquo inuerſa ſit, manifeſtior enim eſſet, ſi hoc modo explicaretur.*

A puncto enim b linea b f ordinatim applicetur. ergo ut quadratum f b ad rectangulum a f c, ita rectum figuræ latus ad tranſuerſum: & ita figura ipſa ad quadratum a c. ſed proportio quadrati f b ad rectangulum a f c componitur ex proportione b f ad f a; & proportione b f ad f c. ergo & proportio figuræ ad quadratum a c ex eiſdem proportionibus componitur. Vt autem b f ad f a, ita e c ad c a: & ut b f ad f c, ita d a ad a c. proportio igitur figuræ ad quadratum a c compoſita eſt ex proportione e c ad c a, & proportione d a ad a c. & reliqua, quæ deinceps ſequuntur.

THEOREMA LIIII. PROPOSITIO LIIII.

SI coni ſectionem, uel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ ſibi ipſis occurrant: & per tactus ducantur contingentibus æquidiſtantes: à tactibus uero ad idem ſectionis punctum ductæ lineæ, æquidiſtantes ſecent: rectangulum ex abſciſsis conſtans ad quadratum lineæ tactus coniungentis, proportionem habebit compoſitam ex proportione, quam habet quadratum portionis lineæ ab occurſu contingentium ad punctum medium coniungentis tactus ductæ, quæ eſt intra ſectionem, ad reliquæ portionis quadratum: & ex proportione, quam habet rectangulum ex contingentibus factum ad quartam partem quadrati lineæ tactus coniungentis.

Sit coni ſectio, uel circuli circumferentia a b c; quam contingant rectæ lineæ a d, d c: & iuncta a c, bifariam in puncto e diuidatur: iungaturq; d b e. à puncto autem a ducatur linea a f ipſi c d æquidiſtans: & à puncto c linea c g æquidiſtans a d. denique ſumpto in ſectione quouis puncto h, iungantur a h, c h: & ad puncta g f producantur. Dico rectangulum conſtans ex a f, c g ad quadratum a c proportionem habere compoſitam ex proportione quadrati e b ad quadratum b d, & proportione rectanguli a d c ad quartam partem quadrati a c; hoc eſt ad rectangulum a e c. Ducatur enim à puncto quidem h linea h k l x o: à puncto autem b linea b m n, quæ ipſi
a c æquidiſtent. perſpicuum eſt lineam m n ſectionem contingere. & cum a e ſit æqua A B
lis e c, erit & m b ipſi b n æqualis; & k o ipſi o l; & h o ipſi o x; & k h ipſi x l. Itaque C D E
quoniam b m m a ſectionem contingunt, & ipſi m b æquidiſtans ducta eſt k h l; erit ut quadratum a m ad quadratum m b, hoc eſt ad rectangulum m b n, ita a k quadratum ad rectangulum x k h, hoc eſt ad rectangulum l h k: & permutando ut quadratũ
a m ad quadratum a k, ita m b n rectangulum ad rectangulum l h k, ut autem rectan F
gulum ex n c m a ad quadratum a m, ita rectãgulum ex l c, k a ad quadratum a k. ergo ex æquali ut rectangulum ex n c, m a ad rectangulum m b n, ita rectan-
gulum ex l c, k a ad rectangulum l h k. ſed rectangu- D
lum ex l c, k a ad rectangulum l h k proportionem
habet compoſitam ex proportione c l ad l h, hoc eſt G
f a ad a c, & proportione a k ad k h, hoc eſt g c ad H
c a. hæc autem eadem eſt, quæ proportio rectanguli ex g c, f a ad quadratum a c. Vt igitur rectangulum ex n c, m a ad rectangulum m b n, ita rectãgulum ex g c, f a ad quadratum a c. rectangulum uero ex n c, m a ad rectangulum m b n, ſumpto medio rectangulo n d m, habet proportionem compoſitam ex propor-



tione rectanguli ex n c, m a ad rectangulum n d m, & proportione rectanguli n d m ad rectangulum m b n. ergo & rectangulum ex g c, ſ a ad quadratum a c compoſitam habet proportionem ex proportione rectanguli ex n c, m a ad rectangulum n d m, &
K proportione rectanguli n d m ad rectangulum m b n. ſed ut rectangulum ex n c, m a
L ad rectangulum n d m, ita quadratum c b ad quadratum b d: & ut rectãgulum n d m ad rectangulum m b n, ita rectangulum c d a ad rectangulum a e c. rectangulum igitur ex g c, ſ a ad quadratum a c compoſitam propoſitionem habet ex proportione quadrati e b ad b d quadratum, & proportione rectanguli c d a ad rectangulũ a e c.

EVTOCIVS.

F Vt autem rectangulum ex n c, m a ad quadratum a m, ita rectangulum ex l c, k a ad quadratum a k.] *Quoniam enim ut a d ad d m, ita c d ad d n, erit per conuerſionem rationis ut d a ad a m, ita d c ad c n. eadem quoque ratione, & conuertendo demonſtrabitur ut k a ad a d, ita l c ad c d. ergo ex æquali & conuertendo ut m a ad a k, ita n c ad c l: & permutando ut m a ad n c, ita a k ad c l. Vt igitur rectangulum ex n c, m a ad quadratum a m, ita rectangulum ex l c, k a ad quadratum a k.*

K Sed ut rectangulum ex n c, m a ad rectangulum n d m, ita quadratum e b ad quadratum b d.] *Nam cum rectangulum ex a m, c n ad rectangulum n d m compoſitam proportionem habeat ex proportione a m ad m d, & proportione c n ad n d: ut autem a m ad m d, ita e b ad b d: & ut c n ad n d, ita e b ad b d: habebit rectangulum ex a m, c n ad rectangulum n d m*
20.ſex:i *proportionem duplam eius, quæ eſt e b ad b d. ſed & quadratum e b ad quadratum b d duplam proportionem habet eius, quæ eſt e b ad b d. quare ut rectangulum ex a m, c n ad rectangulũ n d m, ita quadratum e b ad b d quadratum.*

L Et ut rectangulum n d m ad rectangulum m b n, ita rectangulum c d a ad rectangulum a e c.] *Quoniam enim rectangulum n d m ad rectangulum m b n proportionem habet*
4.ſexti *compoſitam ex proportione d n ad n b, & proportione d m ad m b: ut autem d n ad n b, ita d c ad c e: & ut d m ad m b, ita d a ad a e: habebit quoque proportionem compoſitam ex proportione d c ad c e, & proportione d a ad a e: quæ quidem proportio eadem eſt, quam rectangulum c d a habet ad rectangulum a e c. ut igitur rectangulum n d m ad rectangulum m b n, ita rectangulum c d a, ad rectangulum a e c.*

FED. COMMANDINVS.

A Perſpicuum eſt lineam m h ſectionem contingere.] *Ex trigeſima ſecunda primi huius.*

B Et cum a e ſit æqualis e c, erit & m b ipſi b n æqualis, & k o ipſi o l.] *Ex demonſtratis in ſextam primi huius.*

C Et h o ipſi o x.] *Ex quadrageſima ſexta, & quadrageſima ſeptima primi huius.*

D Et x h ipſi x l.] *Quoniam enim k o eſt æqualis o l, & h o ipſi o x, erit & reliqua k h reliquæ x l æqualis.*

E Itaque quoniam m b, m a ſectionem contingunt, & ipſi m b æquidiſtans ducta eſt k h l; erit ut quadratum a m ad quadratum m b, hoc eſt ad rectangulum m b n, ita a k quadratum ad rectangulum x k h.] *Ex ſexta decima huius.*

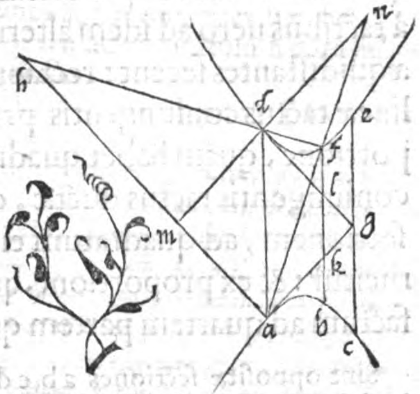
G Ex proportione c l ad l h, hoc eſt f a ad a c.] *Ob ſimilitudinem triangulorum l h c, c f a. eſt enim angulus l c h æqualis angulo a f c: & angulus l h c angulo f c a. quare & reliquus reliquo eſt æqualis.*

H Et proportione a k ad k h, hoc eſt g c ad c a.] *Sunt enim triangula k h a, a c g inter ſe ſimilia.*

THEOREMA LV. PROPOSITIO LV.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant: & per occurſum ducatur linea coniungenti tactus æquidiſtans: per tactus uero ducantur æquidiſtantes contingentibus: & à tactibus ad idem alterius ſectionis punctum ducantur lineæ, quæ æquidiſtantes ſecent: rectangulum ex abſciſsis conſtans ad quadratum lineæ tactus coniungentis eandem proportionem habebit, quam rectangulum ex contingentibus factum ad quadratum lineæ ab occurſu ad ſectionem ductæ, quæ quidem coniungenti tactus æquidiſtet.

Sint oppoſitæ ſectiones a b c, d e f, quas contingant rectæ lineæ a g, g d: & iuncta
a d, ducatur per g linea c g e, ipſi a d æquidiſtans: & à puncto a ducatur a m æqui-
diſtans d g: atque à d linea d m æquidiſtans a g.
Sumatur autem in ſectione d f aliquod pũctum
f: & iungantur a f n, d f h. Dico ut quadratum A
c g ad rectangulum a g d, ita eſſe a d quadratum
ad rectangulum ex a h, n d. ducatur enim per f
linea f l k b, quæ ipſi a d æquidiſtet. Quoniam B
igitur demonſtratum eſt, ut quadratum c g ad
quadratum g d, ita rectangulum b l f ad l d quadratum: & eſt c g æqualis g e; & b k ipſi l f: erit
ut quadratum c g ad quadratum g d, ita rectangulum k f l ad quadratum l d: eſt autem & ut qua- D
dratum d g ad rectangulum d g a, ita quadratũ
d l ad rectangulum ex d l, a k. ergo ex æquali ut
quadratum c g ad rectangulum d g a, ita rectangulum k f l ad rectangulum ex d l, a k. ſed proportio rectanguli k f l ad rectangulum
ex d l, a k componitur ex proportione f k ad κ a, & proportione f l ad l d. ut autem E
f k ad k a, ita a d ad d n: & ut f l ad l d, ita d a ad a h. proportio igitur quadrati c g ad rectangulum d g a compoſita eſt ex proportione a d ad d n, & proportione d a ad a h. ſed quadrati a d ad rectangulum ex a h, n d proportio ex eiſdem componitur. ergo ut quadratum c g ad rectangulum a g d, ita eſt a d quadratum ad rectangulum ex a h, n d: & conuertendo ut rectangulum a g d ad quadratum c g, ita rectangulum ex a h, n d ad quadratum a d.



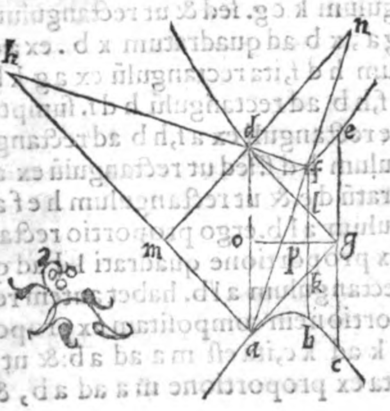
FED. COMMANDINVS.

Dico ut quadratum c g ad rectangulum a g d, ita eſſe a d quadratum ad rectangu- A
lum ex a h, n d.] *Sic habent græci codices, ſed ego potius ita legendum arbitror. Dico ut rectangulum a g d ad c g quadratum, ita eſſe rectangulum ex a h, n d ad quadratum a d. hoc enim eſt, quod & in principio proponit, & in fine concludit.*

Quoniam igitur demonſtratum eſt, ut quadratum c g ad quadratum g d, ita rectan- B
gulum b l f ad l d quadratum.] *In uigeſima huius.*

Et eſt c g æqualis g e: & b κ ipſi l f.] *Secetur li-* C
nea a d bifariam in puncto o, & iungatur g o, quæ lineam b f in p ſecet. erit o g oppoſitarum ſectionum diameter recta; tranſuerſa uero, quæ per centrum ducitur, ipſi a d æquidiſtans. ergo c g eſt æqualis g e, & b p ipſi p f. ſed & k p æqualis eſt p l, quoniam & a o ipſi o d. reliqua igitur b k reliquæ l f eſt æqualis.

Eſt autem & ut quadratum d g ad rectangulum D
d g a, ita quadratum d l ad rectãgulum ex d l, a k.]
Quoniam enim æquidiſtant a d, b f, ut d l ad l g, ita erit 2. ſexti.
a K ad k g: componendoq; ut d g ad g l, ita a g ad g k:
& per conuerſionem rationis, ut g d ad d l, ita g a ad
a k: & permutando ut d g ad g a, ita d l ad a κ. Vt uero lem in 22 decimi;
d g ad g a, ita quadratum d g ad rectangulum d g a: & ut



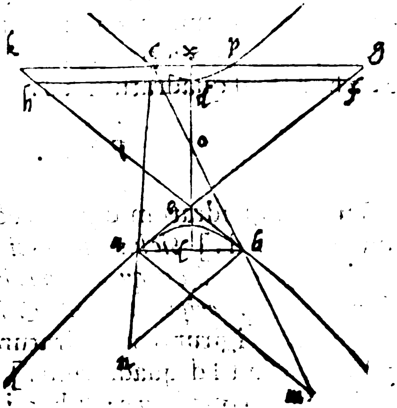
d l ad a K, ita d l quadratum ad rectangulum ex d l, & a K. ergo ut quadratum d g ad rectangulum d g a, ita quadratum d l ad rectangulum ex d l: & a K.

E Vt autem f K ad k a, ita a d ad d n: & ut f l ad l d, ita d a ad a h.] *Ob ſimilitudinem triangulorum a f k, n a d; itemq; triangulorum l f d, a d h.*

THEOREMA LVI. PROPOSITIO LVI.

Si unam oppoſitarum ſectionum duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant: & per tactus ducantur contingentibus æquidiſtantes: à tactibus uero ad idem alterius ſectionis punctum ducantur lineæ, quæ æquidiſtantes ſecent: rectangulum ex abſciſſis conſtans ad quadratum lineæ tactus coniungentis proportionem habebit compoſitam ex proportione, quam habet quadratum portionis lineæ ad pũctum medium coniungentis tactus ductæ, quæ eſt inter dictum punctum, & alteram ſectionem, ad quadratum eius, quæ inter ſectionem & occurſum interiicitur: & ex proportione, quam habet rectangulum ex contingentibus factum ad quartam partem quadrati lineæ tactus coniungentis.

Sint oppoſitæ ſectiones a b, c d, quarum centrum o: lineæq; contingentes a e f g, b e h k: & iuncta a b diuidatur bifariam in l; & iungatur l e, & ad d producatur à puncto autem a ducatur a m ipſi b e æquidiſtans: & à puncto b ducatur b n æquidiſtans a e. denique ſumpto in c d ſectione quouis puncto c, iungantur c b m, c a n. Dico rectangulum ex b n, a m conſtans ad quadratum a b proportionem habere compoſitam ex proportione quadrati l d ad quadratum d e, & proportione rectanguli a e b ad quartam partem quadrati a b; hoc eſt ad rectangulum a l b. ducantur enim à punctis c d lineæ c g k, d h f, quæ æquidiſtent a b. Cum igitur a l ſit æqualis l b,



A erit & h d ipſi d f æqualis: & k x ipſi x g. ſed e x

B eſt æqualis x p. ergo & k c ipſi p g. Et quoniam

C a b c d oppoſitæ ſectiones ſunt: lineæq; contingentes, b e h k, a e f g, & ducta eſt k g æquidiſtans h d: erit ut quadratum b h ad quadratum h d, ita quadratum b k ad rectangulum p k c. quadratum au-

D tem h d eſt æquale rectangulo h d f: & rectangulum p K c rectangulo k c g. ergo ut quadratum b h ad rectangulum h d f, ita quadratum b k ad rectangulum k c g. ſed & ut rectangulum ex f a, h b ad quadratum h b, ita rectangulum ex

E g a, k b ad quadratum k b. ex æquali igitur ut rectangulum ex a f, h b ad rectangulum h d f, ita rectangulũ ex a g k b ad rectangulum k c d. proportio autẽ rectãguli ex a f, h b ad rectangulũ h d f. ſumpto medio rectangulo h e f, componitur ex proportione rectanguli ex a f, h b ad rectangulum h e f, & proportione rectanguli h e f ad rectan-

F gulum h d f. ſed ut rectangulũ ex a f, h b ad rectãgulum h e f, ita quadratum l d ad qua-

G dratũ d e. & ut rectangulum h e f ad rectangulum h d f, ita rectangulum a e b ad rectangulum a l b. ergo proportio rectanguli ex a g, k b ad rectangulum k c g compoſita eſt ex proportione quadrati l d ad quadratum d e, & proportione rectanguli a e b ad rectangulum a l b. habet autem rectangulum ex a g, k b ad rectangulum k c g proportionem compoſitam ex proportione b k ad k c, & proportione a g ad g c. Vtq; b k ad k c, ita eſt m a ad a b: & ut a g ad g c, ita n b ad b a. proportio igitur compoſita ex proportione m a ad a b, & proportione n b ad b a, quæ quidem eadem eſt, quam

quam habet rectangulum ex a m, b n ad quadratum a b; cōponitur ex proportione quadrati l d ad quadratum d e, & proportione rectanguli a e b ad rectangulum a l b.

FED. COMMANDINVS.

A Cum igitur a l ſit æqualis l b; erit h d ipſi d f æqualis, & k x ipſi x g.] *Ob ſimilitudinem triangulorum a e l, f e d, g e x: & triangulorum b e l, h e d, k e x.*

B Sed eſt c x æqualis x p. ergo & k c ipſi p g.] *c x eſt æqualis x p ex quadrageſima ſeptima primi huius, quare & reliqua k c reliquæ p g æqualis erit.*

C Et quoniam a b, c d oppoſitæ ſectiones ſunt; lineæq́; contingentes b e h k; a e f g & ducta eſt k g æquidiſtans h d: erit ut quadratum b h ad quadratum h d, ita quadratum b k ad rectangulum p k c.] *Ex decima octaua huius.*

D Quadratum autem h d eſt æquale rectangulo h d f: & rectangulum p k c rectangulo k c g.] *Nam h d eſt æqualis d f, ut demonſtratum eſt, & g c ipſi p k.*

E Sed & ut rectangulum ex f a, h b ad quadratum h b, ita rectangulum ex g a, k b ad quadratum k b.] *Quoniam enim triangula a e b, h e f, k e g ſimilia ſunt, erit ut f e ad e a, ita h e ad e b: & componendo ut f a ad a e, ita h b ad b e. eadem quoque ratione demonſtrabimus, ut g a ad a c, ita k b ad b e. quare & conuertendo ut e a ad a g, ita e b ad b k. erat autem ut f a ad a e, ita h b ad b e. ergo ex æquali ut f a ad a g, ita h b ad b k: & permutando ut f a ad h b, ita g a ad k b. Sed ut f a ad h b, ita rectangulum ex f a, h b ad quadratum h b: & ut g a ad k b, ita rectangulum ex g a, k b ad quadratum k b ex prima ſexti, uel ex lemmate in 22. decimi. ut igitur rectangulum ex f a, h b ad quadratum h b, ita rectangulum ex g a, k b ad quadratum k b.*

F Sed ut rectangulum ex a f, h b ad rectangulum h e f, ita quadratum l d ad quadratum d e.] *Nam rectangulum ex a f, h b ad rectangulum h e f proportionem habet compoſitam ex proportione a f ad f e, & proportione b h ad h e. Vt autem a f ad f e, ita l d ad d e; & ut b h ad h e, ita l d ad d e. rectangulum igitur ex a f, h b ad rectangulum h e f duplam proportionem habet eius, quæ eſt l d ad d e. ſed & quadratum l d ad quadratum d e proportionem habet eiuſdem proportionis duplam. ergo ut rectangulum ex a f, h b ad rectangulum h e f, ita quadratum l d ad quadratum d e.*

G Et ut rectangulum h e f ad rectangulum h d f, ita rectangulum a e b ad rectangulum a l b.] *Rectangulum enim h e f ad rectangulum h d f proportionem compoſitam habet ex proportione e h ad h d, & proportione e f ad f d. Vt autem e h ad h d, ita e b ad b l; & ut e f ad f d, ita e a ad a l. quare rectangulum h e f ad rectangulum h d f proportionem quoque compoſitam habebit ex proportione e b ad b l; & proportione e a ad a l; quæ quidem proportio eadem eſt, quam habet rectangulum a e b ad rectangulum a l b. ergo ut rectangulum h e f ad rectangulum h d f, ita erit rectangulum a e b ad rectangulum a l b. hoc etiam ex quartodecimo lemmate Pappi conſtare poteſt.*

TERTII LIBRI FINIS.

APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIBER IIII.
CVM COMMENTARIIS EVTOCII ASCALONITAE, ET FEDERICI COMMANDINI.

APOLLONIVS ATTALO S. D.

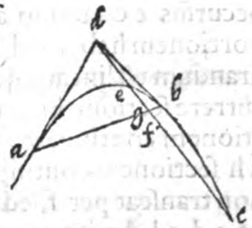
PRIVS quidem ex octo libris, quos de conicis compoſuimus, tres primos edidi ad Eudemum Pergamenum ſcriptos. Eo autem mortuo cum reliquos ad te mittere decreuerimus, quòd meorum ſcriptorum lectionem ambitioſe deſideras, in præſentia quartum librum mittimus. in eo hæc continentur, ad quot puncta plurima conorum ſectiones inter ſe ſe, & circuli circumferentiæ occurrere poſsint, niſi totæ totis congruant. præterea coni ſectio, & circuli circumferentia, & oppoſitæ ſectiones oppoſitis ſectionibus ad quot puncta plurima occurrant: ad hæc alia non pauca his ſimilia. Ex his quod primo loco dictum eſt, Conon Samius ad Traſideum ſcribens explicauit, non recte in demonſtrationibus uerſatus. Itaque Nicoteles Cyrenæus eum leuiter reprehendit. De ſecundo Nicoteles in libro contra Cononem mentionem ſic fecit, tanquam quod demonſtrari facile poſſet. Sed tamen nos neque ab ipſo, neque ab alio quopiam demonſtratum inuenimus. Tertium uero, & eiuſdem generis alia, ne in mentem quidem alicui unquam ueniſſe comperimus. At quæ diximus ab aliis demonſtrata non fuiſſe, omnia multis, ac uariis, nouisq; theorematibus indigent, quorum plurima in tribus primis libris, reliqua in hoc expoſuimus. Horum igitur contemplatio non paruam utilitatem affert, & ad compoſitiones problematum, & ad determinationes. Nicoteles quidem ob diſſenſionem, quæ illi cum Conone erat, ſcribit nihil eorum, quæ à Conone inuenta ſunt, ad determinationes pertinere. quod ille falſo affirmat, nam & ſi omnino abſque his determinationes reddere poſsimus, tamen ex his ipſis non nulla facilius percipiuntur; uelut hoc, quòd aliquid multipliciter fiat, uel quotupliciter, uel rurſus quòd nullo modo fiat. quæ quidem cognitio, ſi anteceſſerit, ad quæſtiones magnam præſtat facultatem. præterea ad diffinitionum reſolutiones theoremata hæc ualde utilia ſunt. quæ etiam ſi abſit utilitas, propter ipſas demonſtrationes digna ſunt, ut recipiantur. multa enim alia in mathematicis diſciplinis ob hoc ipſum, & non ob aliquod aliud recipere conſueuimus.

EVTOCIVS.

QVARTVS liber Anthemi Sodalis chariſſime quæſtionem quidem habet, quot modis conorum ſectiones inter ſe ſe, & circuli circumferentiæ; itemq; oppoſitæ ſectiones oppoſitis ſectionibus occurrant. Sed eſt tamen elegans, & legentibus perſpicuus, præſertim ex editione noſtra: ac ne commentarijs quidem ullis indiget: quod enim deeſt ipſæ explent adſcriptiones. In eo autem omnia demonſtrantur argumentatione ducente ad id, quod fieri non poteſt; ſicut & Euclides fecit in ijs, quæ de ſectionibus, circulo, & tactionibus conſcripſit. quæ ſanè ratio & ad uſum accommodata, & neceſſaria Ariſtoteli, ac Geometris, præcipue uero Archimedi uiſa eſt. Itaque tibi quatuor libros perlegenti licebit ex conicorum tractatione reſoluere, & componere quodcumque propoſitum fuerit. quo circa & ipſe Apollonius in principio libri dixit quatuor libros ad huius diſciplinæ elementa ſufficere: reliquos autem quatuor ad abundantiorem ſcientiam pertinere. perlege igitur eos diligenter: & ſi tibi placuerit reliquos ad eandem formam à nobis edi, id quoque Deo duce fiet. Vale.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI in coni ſectione uel circuli circumferentia aliquod punctum extra ſumatur: atque ab eo ad ſectionem ducantur duæ rectæ lineæ, una quidem contingens, altera uero in duobus punctis ſecans: & quam proportionem habet tota linea ſecans ad partem ſui ipſius, quæ extra ſumitur inter punctum & ſectionem interiecta: in eandem diuidatur, quæ eſt intra, ita ut rectæ lineæ eiuſdem rationis ad unum punctum conueniant: quæ à tactu ad diuiſionem ducitur occurret ſectioni: & quæ ab occurſu ducitur ad punctum, extra ſumptum ſectionem continget.



Sit coni ſectio, uel circuli circumferentia a b c; & puncto extra ſectionem ſumpto, quod ſit d, ab eo ducatur linea d b quidem contingens ſectionem in b: d e c uero in punctis e c ſecans: & quam proportionem habet c d ad d e, eandem habeat c f ad f e. Dico lineam, quæ à puncto b ad f ducitur, occurrere ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad d, ſectionem contingere. Quoniam enim linea d c ſectionem in duobus punctis ſecat, non erit ipſius diameter. quare licebit per d & diametrum, & lineam contingentem ducere. ducatur à puncto d linea d a ſectionem contingens: & iuncta b a ſecet
ipſam e c non in f, ſed in alio puncto g, ſi fieri poſsit. Itaque A
quoniam lineæ b d, d a ſectionem contingunt: & ad tactus ducta eſt b a: linea uero c d ſectionem in punctis c e ſecat; & ipſam a b ſecat in g: erit
ut c d ad d e, ita c g ad g e, quod eſt abſurdum. poſuimus enim, ut c d ad d e, ita eſ- B
ſe c f ad f e. non igitur b a ſecat e c in alio puncto. quare in ipſo f ſecet neceſſe eſt.

FED. COMMANDINVS.

Itaque quoniam lineæ b d, d a ſectionem contingunt, & ad tactus ducta eſt b a; linea uero c d ſectionem in punctis c e ſecat; & ipſam a b ſecat in g, erit ut c d ad d e, ita c g ad g e.] *Ex trigeſima ſeptima tertij huius.* A

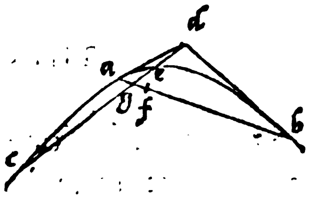
Quod eſt abſurdum.] *Nam cum poſuerimus c f ad f e, ut c d ad d e, eſſet c g ad g e ut c f ad f e; & permutando g c ad c f, ut g e ad e f. eſt autem g c maior, quàm c f. ergo & g e maior, quàm e f, ſed & minor. quod fieri non poteſt.* B

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Haec quidem communiter in omnibus ſectionibus demonſtrata ſunt. at in ſola hyperbola, ſi linea d b ſectionem contingat: & d c in punctis e c ſecet: puncta uero e c contineant tactum ad b: & punctum d ſit intra angulum aſymptotis compræhenſum: ſimiliter fiet demonſtratio. poſſumus enim à puncto d aliam ducere contingentem d a, & quæ reliqua ſunt ad demonſtrationem, perficere.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

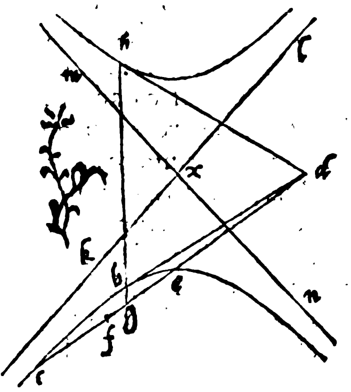
Iisdem exiſtentibus puncta e c tactum ad b non contineant: ſitq; punctum d intra angulum aſymptotis compræhenſum. poterimus à puncto d alteram contingentem ducere, quæ ſit d a, & reliqua ſimiliter demonſtrare.



THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Iisdem poſitis, ſi occurſus e c contineant tactum ad b: & punctum d ſit in angulo, qui deinceps eſt angulo asymptotis compræhenſo: linea, quæ à tactu ad diuiſionem ducitur, occurret oppoſitæ ſectioni: & quæ ab occurſu ducitur eandem ſectionem continget.

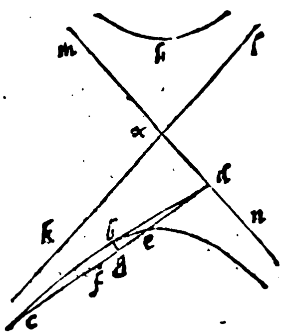
Sint oppoſitæ ſectiones b h, quarum aſymptoti k l, m x n: & punctum d ſit in angulo l x n. ab eo autẽ ducta linea d b ſectionem contingat: & d c ſecet, ita ut occurſus e c tactum ad b contineant: & quam proportionem habet c d ad d e, habeat c f ad f e. demonſtrandum eſt lineam, quæ à puncto b ad f ducitur, occurrere ſectioni h: & quæ ab occurſu ducitur ad d ſectionem contingere, ducatur enim à puncto d linea d h ſectionem contingens: & iuncta h b, ſi fieri poſſit,
37.tertii huius. non tranſeat per f, ſed per aliud punctum g. eſt igitur ut c d ad d e, ita c g ad g e. quod eſt abſurdum: poſuimus enim, ut c d ad d e, ita eſſe c f ad f e.



THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Iisdem poſitis, ſi punctum d ſit in una aſymptoton; quæ à puncto b ad f ducitur, eidem aſymptoto æquidiſtabit.

Ponantur enim eadem; & punctum d ſit in aliqua aſymptoton, uidelicet in m n. demonſtrandum eſt lineam, quæ à puncto b ipſi m n æquidiſtans ducitur,
35.tertii huius. in punctum f cadere. non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit b g. erit igitur ut c d ad d e, ita c g ad g e. quod eſt abſurdum.



THEO-

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

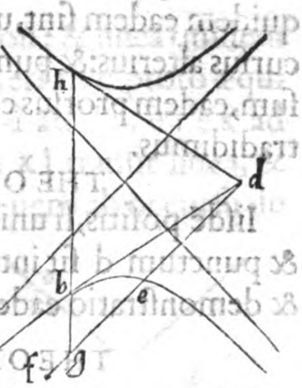
Si in hyperbola aliquod punctum extra ſumatur, à quo ad ſectionem ducantur duæ rectæ lineæ; altera quidem contingens; altera uero æquidiſtans uni aſymptoton: & portio æquidiſtantis inter ſectionem, & punctum interiecta, æqualis ſit ei, quæ intra ſectionem continetur: linea, quæ à tactu ad factum punctum ducitur occurret ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad punctum extra ſumptum ſectionem continget.

Sit hyperbole a e b, & ſumatur aliquod punctum extra, quod ſit d, ſit autem primo d intra angulum aſymptotis contentum: & ab ipſo d linea quidem d b ducta ſectionem contingat; d e f uero æquidiſtet alteri aſymptoton: ponaturq; ipſi d e æqualis e f. Dico lineam, quæ à puncto b ad f ducitur, occurrere ſectioni, & quæ ab occurſu ducitur ad d, ſectionem contingere. Ducatur enim d a, quæ ſectionem contingat: & iuncta b a ſecet ipſam d e, ſi fieri poteſt, non in f, ſed in alio puncto g. erit d e æqualis e g, quod eſt abſurdum, ponebatur enim d e ipſi e f æqualis. 30. tertii huius.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Iiſdem poſitis, ſit punctum d in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur. Dico etiam ſic eadem euenire.

Ducatur enim d h ſectionem contingens, & iuncta h b, ſi fieri poteſt, non cadat in f, ſed in aliud punctum g. ergo d e eſt æqualis e g. quod eſt abſurdum; ponebatur enim d e æqualis e f. 31. tertii huius.



THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Iiſdem poſitis, ſit punctum d in una aſymptoton; & reliqua eadem fiant. Dico lineam, quæ à tactu ad extremam partem ſumptæ ducitur; æquidiſtantem eſſe aſymptoto, in qua eſt punctum d.

Sint enim eadem, quæ ſupra: ponaturq; ipſi d e æqualis e f: & à puncto b ducatur b g æquidiſtans m n, ſi fieri poſſit. æqualis igitur eſt d e ipſi e g. quod eſt abſurdum: poſuimus enim d e ipſi e f æqualem eſſe.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si ab eodem puncto duæ rectæ lineæ ducantur, quarum utraque coni ſectionem, uel circuli circumferentiam in duobus punctis ſecet: & quam proportionem habent totæ lineæ ad portiones, quæ extra ſumuntur, in eam diuidantur, quæ ſunt intra, ita ut partes eiuſdem rationis ad idem punctum conueniant: quæ per diuiſiones ducitur linea ſectioni in duobus punctis occurret: & quæ ab occurſu ad punctum extra ſumptum ducuntur, ſectionem contingent.

Sit aliqua prædictarum ſectionum a b, & ab aliquo puncto d ducatur lineæ d e, d f quæ ſectionem ſecent; illa quidem in h e punctis, hæc uero in f g: & quam proportionem habet e d ad d h, eandem habeat e l ad l h: & rurſus quam habet f d ad d g, habeat f k ad k g. Dico lineã, quæ ab l ad k ducitur utraque ex parte occurrere ſectioni; & quæ ab occurſibus ducuntur ad d ſectionem contingere. Quoniam enim utraque linearum e d, d f ſectionem in duobus punctis ſecat, poterimus ab ipſo d ſectionis diametrum ducere. quare & contingentes ex utraque parte. ducantur igitur d a, d b, quæ ſectionem contingant: & iuncta b a, ſi fieri poſſit, non tranſeat per l k, ſed uel per alterum ipſorum tantũ, uel per neutrum. tranſeat primo per l, tantum, & lineam f g in puncto m ſecet. ergo ut f d ad d g, ita f m ad m g, quod eſt abſurdum; ponitur enim ut f d ad d g, ita f k ad k g. ſi uero linea b a per neutrum punctorum k l tranſeat, in utraque ipſarum d e, d f, id quod eſt abſurdum ſequetur.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Hæc quidem communiter in omnibus, at in ſola hyperbola, ſi alia quidem eadem ſint, unius autem rectæ lineæ occurſus contineant occurſus alterius: & punctum d ſit intra angulum aſymptotis comprehenſum, eadem prorſus euenient, quæ dicta ſunt, ut in ſecundo theoremate tradidimus.

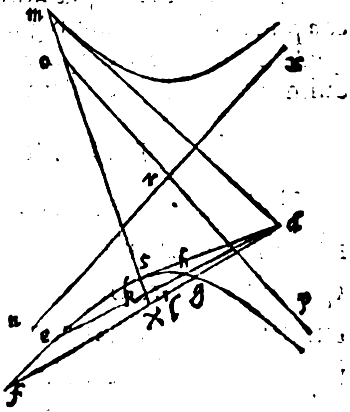
THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

Iiſdẽ poſitis, ſi unius lineæ occurſus occurſus alterius non contineãt, & punctum d ſit intra angulum aſymptotis comprehenſum; & figura, & demonſtratio eadem erit, quæ in tertio theoremate.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

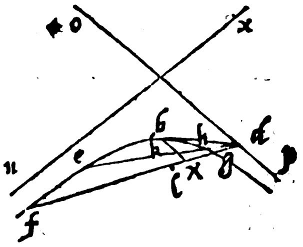
Iiſdem poſitis ſi occurſus unius lineæ, alterius occurſus contineant: & punctum ſumptum ſit in angulo deinceps ei, qui aſymptotis comprehenditur: linea per diuiſiones ducta, ſi producatur, occurret oppoſitæ ſectioni: & quæ ab occurſibus ducuntur ad punctum d, oppoſitas ſectiones contingent.

Sit hyperbole e g, cuius aſymptoti n x, o p, & centrum r: punctum uero d ſit in angulo x r p: & ducantur d e, d f, quarum utraque hyperbolen in duobus punctis ſecet: & puncta e h a punctis f g cõtineantur ſitq; ut e d ad d h, ita e k ad k h: & ut f d ad d g, ita f l ad l g. demonſtrandum eſt lineã per k l ductam occurrere ſectioni e f, & ei, quæ ipſi opponitur: & quæ ab occurſibus ducuntur ad d, ſectiones contingere. ſit ſectio oppoſita m: & a puncto d ducantur d m, d s, quæ ſectiones contingant: iunctaq; m s, ſi fieri poſſit, non tranſeat per k l, ſed uel per alterum ipſorum, uel per neutrum. tranſeat primũ per k, & ſecet f g in χ. eſt igitur ut f d ad d g, ita f χ ad χ g, quod eſt abſurdom: ponitur enim ut f d ad d g, ita f l ad l g. ſi uero m s per neutrum punctorum k l tranſeat, in utraque ipſarum e d, d f eueniet illud, quod fieri non poteſt.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

Iiſdem poſitis ſi punctum d ſit in una aſymptoton, & reliqua eadem exiſtãt: quæ per diuiſiones tranſit linea aſymptoto, in qua eſt punctum, æquidiſtabit; & producta occurret ſectioni: quæ uero ab occurſu ad pũctum ducitur, ſectionem continget.

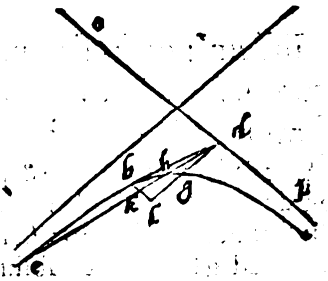


Sit hyperbole, & aſymptoti: ſumptoq; in una aſymptoton puncto d, ducantur rectæ lineæ, & diuidantur, ut dictum eſt: & ab ipſo d linea d b ſectionem contingat. Dico eam, quæ à puncto b ducitur ipſi o p æquidiſtans, per pũcta k l tranſire. ſi enim non, uel per unum ipſorum tranſibit, uel per neutrum. tranſeat primò per k tantum. qnare ut f d ad d g, ita f x ad x g. quod eſt abſurdum. non igitur à puncto b ducta æquidiſtans p o per unum tantum eorum tranſibit. ergo per utrumque tranſeat neceſſe eſt.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XIIII.

Iiſdem poſitis ſi punctum d ſit in una aſymptoton: & linea quidem d e ſectionem in duobus punctis ſecet; d g uero alteri aſymptoto æquidiſtans ſecet in uno tantum, quod ſit g: fiatq; ut e d ad d h, ita e K ad K h: & ipſi d g ponatur æqualis g l: quæ per puncta K l tranſit linea, & aſymptoto æquidiſtabit, & ſectioni occurret: quæ uero ab occurſu ducitur ad d, ſectionem continget.

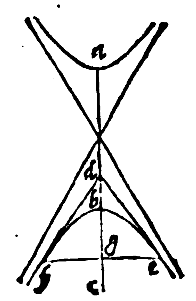
Similiter enim, ut in ſuperioribus, ducta linea d b contingente, dico eam, quæ à puncto b ducitur, aſymptoto p o æquidiſtans, per puncta k l tranſire. ſi enim per K ſolum tranſeat, non erit d g ipſi g l æqualis; quod eſt abſurdum: ſi uero per l ſolum, non erit ut e d ad d h, ita e K ad K h. Quòd ſi neque per K tranſeat, neque per l, in utriſque id, quod eſt abſurdum, ſequetur. ergo per utraque puncta tranſire neceſſarium eſt.



THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Si in ſectionibus oppoſitis inter duas ſectiones ſumatur aliquod punctum, & ab ipſo duæ lineæ ducantur; altera quidem contingens unam oppoſitarum; altera uero utramque ſecans: & quam proportionem habet linea inter ſectionem, quam non contingit, & punctum interiecta ad lineam, quæ eſt inter punctum, & alteram ſectionem, eandem habeat linea quædam maior ea, quæ inter ſectiones interiicitur ad exceſſum ipſius in eadem recta, & ad eundem terminum cum linea eiuſdem rationis: quæ à termino maioris lineæ ad tactum ducitur, occurret ſectioni, & quæ ab occurſu ducitur ad ſumptum punctum, ſectionem cõtinget.

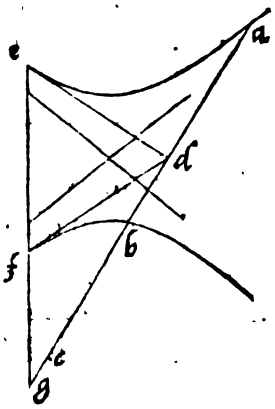
Sint ſectiones oppoſitæ a b: ſumptoq; inter ſectiones aliquo puncto d, intra angulum aſymptotis contentum, ab ipſo ducatur linea quidem d f cõtingens ſectionem; a d b uero ſectiones ſecans: & quam proportionem habet a d ad d b, habeat a c ad c b. demonſtrandum eſt, lineam à puncto f ad c productam occurrere ſectioni. & eam, quæ ab occurſu ducitur ad d ſectionem contingere. Quoniam enim punctum d eſt intra angulū, 49. ſecūdi huius. qui ſectionem continet; poterimus ab ipſo d aliam contingentem ducere, quæ ſit d e: & iuncta f e, ſi fieri poteſt, per c non tranſeat, ſed per aliud punctum g. erit igitur ut a d ad d b. ita 36. primi huius. a g ad g b, quod eſt abſurdum: poſuimus enim ut a d ad d b ita eſſe a c ad c b.



THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

Iiſdem poſitis, ſit punctum d in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur: & reliqua eadem fiant. Dico lineam à puncto f ad c productam occurrere oppoſitæ ſectioni: & quæ ab occurſu ducitur ad d, eandem ſectionem contingere.

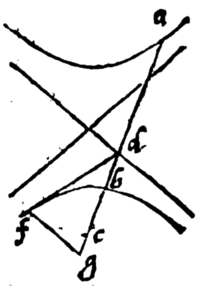
Sint enim eadem, quæ ſupra: & punctum d ſit in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur: atque à pūcto d ducatur d e ſectionem a contingens: iuncta autem e f, & producta, ſi fieri poteſt, non tranſeat per c, ſed 39. tertii. huius. per aliud punctum g: erit ut a g ad g b, ita a d ad d b; quod eſt abſurdum: ponebatur enim ut a d ad d b, ita a c ad c b.



THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

Iiſdem poſitis ſit punctum d in una aſymptoton. Dico lineam, quæ ab f ad c ducitur, aſymptoto, in qua eſt punctum, æquidiſtare.

Sint eadem, quæ ſupra: & punctum d in una aſympto ton: ductaq; per f eidem aſymptoto æquidiſtans non 36. tertii huius. tranſeat per c, ſi fieri poteſt, ſed per g. erit ut a d ad d b, ita a g ad g b, quod eſt abſurdum. ergo quæ à puncto f ducitur aſymptoto æquidiſtans per punctum c trāſibit.

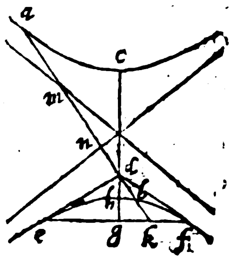


THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si in ſectionibus oppoſitis aliquod punctum ſumatur inter duas ſectiones: & ab ipſo duæ lineæ ducantur, utramque ſectionem ſecantes: & quam proportionem habent interiectæ inter unam ſectionem & punctum ad eas, quæ inter idem punctum, & alteram ſectionem interiiciuntur, eandem habeant lineæ maiores iis, quæ ſunt inter ſectiones oppoſitas ad exceſſus ipſarum: quæ per terminos maiorum linearum tranſeūt, occurrent ſectionibus: & quæ ab occurſibus ad ſumptum punctum ducuntur, ſectiones contingent.

Sint oppoſitæ ſectiones a b: & punctum d inter ſectiones: quod quidem primum ponatur in angulo aſymptotis contento: & per d lineæ a d b, c d h ducantur. maior igitur eſt a d, quàm d b, & c d maior, quàm d h; quoniam b n eſt æqualis a m: quàm uero

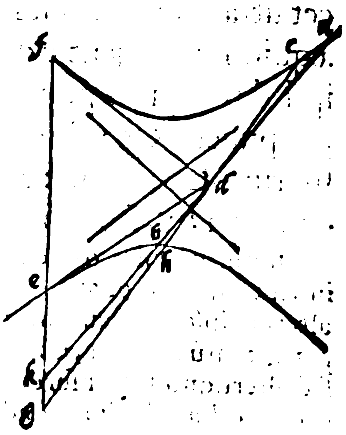
uero proportionem habet a d ad d b, habeat a k ad k b: & quã c d habet ad d h, habeat c g ad g h. Dico lineam, quæ per k g tranſit, occurrere ſectioni; & quæ à puncto d ad occurſus ducuntur, ſectionem contingere. Quoniam enim punctum d eſt in angulo aſymptotis cõtento, poſſumus ab eo duas lineas contingentes ducere. Itaque ducantur d e, d f: & e f iungatur, quæ per puncta k g tranſibit. ſi enim non, uel tranſibit per unum ipſorum tantum, uel per neutrum. & ſi quidem per unum tantum, altera linearum in eandem proportionem ad aliud punctum ſecabitur; quod fieri non poteſt: ſi uero per neutrum, in utriſque id, quod fieri non poteſt, continget.



THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

Sumatur punctum d in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur: ducanturq; rectæ lineæ ſectiones ſecantes: & ut dictum eſt, diuidantur. Dico eam, quæ per k g producitur, occurrere utrique ſectionum: & quæ ab occurſibus ducuntur ad d ſectiones contingere.

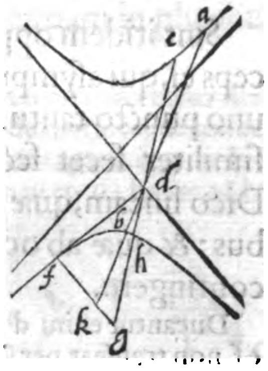
Ducantur enim à puncto d lineæ d e, d f, quæ utramque ſectionem contingant. ergo quæ ducitur per e f, per k g tranſibit. ſi enim non, uel tranſibit per alterum ipſarum, uel per neutrum; & rurſus eodem modo id, quod eſt abſurdum, concludetur.



THEOREMA XX. PROPOSITIO XX.

Si ſumptum punctum ſit in una aſymptoton, & reliqua eadem fiant: linea, quæ tranſit per terminos exceſſuum, aſymptoto, in qua eſt punctũ æquidiſtabit: & quæ à puncto ducitur ad occurſum ſectionis, & lineæ per terminos tranſeuntis, ſectionem continget.

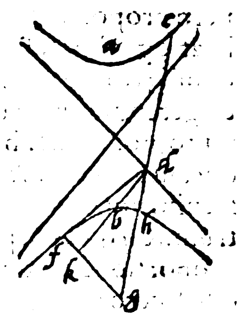
Sint oppoſitæ ſectiones a b: & punctum d ſit in una aſymptoton: & reliqua eadem fiant. Dico lineam, quæ per k g tranſit, occurrere ſectioni; & quæ ab occurſu ad d ducitur, ſectionem contingere. ducatur enim à puncto d contingens linea d f: & ab f ducatur aſymptoto æquidiſtans, in qua eſt punctum d. tranſibit igitur ea per puncta k g; alioqui uel per alterum tantum tranſibit, uel per neutrum: & ita ea, de quibus dictum eſt, abſurda ſequentur.



THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

Sint rurſus oppoſitæ ſectiones a b: ſitq; punctum d in una aſymptoton: & linea quidem d b k in uno tantum puncto occurrat ſectioni b, alteri aſymptoto æquidiſtans; linea uero c d h g utrique ſectioni occurrat: & ut c d ad d h, ita c g ad g h: & ipſi d b æqualis ſit b k. Dico lineam, quæ per puncta k g tranſit, occurrere ſectioni; aſymptotoq́; , in qua eſt punctum d, æquidiſtare: & quæ ab occurſu ad punctum d ducitur, ſectionem contingere.

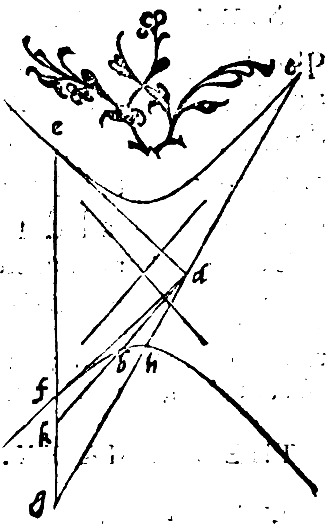
Ducatur enim linea contingens d f: & ab f ducatur æquidiſtans aſymptoto, in qua eſt d. tranſibit ea per puncta k g: alioqui eadem abſurda ſequantur neceſſe eſt.



THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

Sint ſimiliter oppoſitæ ſectiones, aſymptotiq́; : & punctum d ſumatur in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur: linea uero c d h ſecet utraſque ſectiones: & d b alteri aſymptoto æquidiſtet: ſitq́; ut c d ad d h, ita c g ad g h: & ipſi d b æqualis ponatur b k. Dico lineam, quæ per puncta k g tranſit, occurrere utrique oppoſitarum ſectionum: & quæ ab occurſibus ducuntur ad d, ſectiones eaſdem contingere.

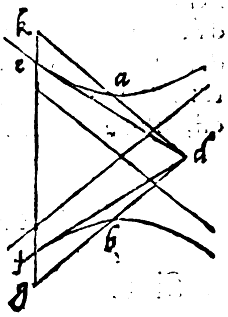
Ducantur enim d e, d f, quæ ſectiones contingant: & iuncta e f, ſi fieri poſſit, non tranſeat per k g: ſed uel per alterum ipſorum tantum, uel per neutrum. & ſiquidem per g tantũ tranſeat, linea d b non erit æqualis ipſi b k, ſed alteri, quod eſt abſurdum. ſi uero tantum per k, non erit ut c d ad d h, ita c g ad g h, ſed alia quædam ad aliã. Quod ſi per neutrum ipſorum k g tranſeat, utraque abſurda ſequentur.



THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

Sint itidem oppoſitæ ſectiones a b: punctumq́; d ſit in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur: & linea quidem b d ſectionem b in uno puncto tantum ſecet, alteri aſymptoto æquidiſtans: linea uero d a ſimiliter ſecet ſectionem a: ſitq́; d b ipſi b g æqualis; & d a ipſi a k. Dico lineam, quæ tranſit per k g occurrere ſectionibus; & quæ ab occurſibus ad d ducuntur, ſectiones contingere.

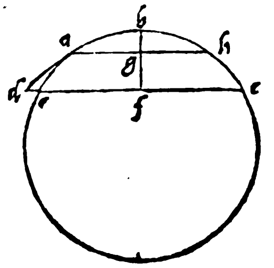
Ducantur enim d e, d f, quæ contingant ſectiones: & iuncta e f non tranſeat per k g, ſi fieri poteſt, ſed uel per alterum ipſorum, uel per neutrum. ex quibus ſequitur, ut uel d a non ſit æqualis a k, ſed alij cuipiam, quod eſt abſurdum: uel d b non ſit æqualis b g: uel neutra neutræ ſit æqualis: & ita in utriſque idem continget abſurdum. linea igitur e f per puncta k g neceſſario tranſibit.



THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXIIII.

Coni ſectio coni ſectioni, uel circuli circumferẽtiæ non occurrit ita, ut pars quidem eadem ſit; pars uero non ſit communis.

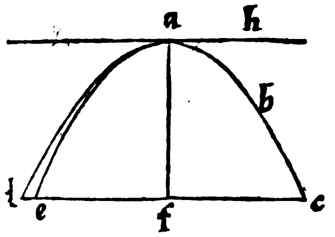
Si enim fieri poteſt, coni ſectio d a b c circuli circumferentiæ e a b c occurrat, ut ipſarum communis pars ſit eadem a b c, non communis autem a d, a e: & ſumpto in ipſis puncto h iungatur h a: & per quoduis punctum e ducatur d e c, æquidiſtãs a h: ſectaq́; a h bifariam in g, ducatur per g diameter b g f. ergo quæ per b ipſi a h æquidiſtans ducitur, utramque ſectionem continget: & æquidiſtabit d e c: eritq́; in altera quidem ſectione d f æqualis f c. in altera uero e f æqualis f c. quare & d f ipſi f e æqualis erit. quod fieri non poteſt.



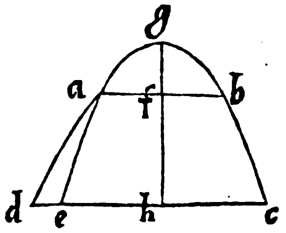
32. primi huius.
30 primi elem.
46. & 47. primi huius.

EVTOCIVS.

ALITER. Sint ſectiones d a b c, e a b c: ducaturq́; linea d e c quomodocũque cõtingat: & per a ipſi d e c æquidiſtans ducatur a h. ſi igitur a h intra ſectiones cadit, congruet ea demonſtratio, quæ ab Apollonio affertur: ſi uero contingit in puncto a, & utraſque ſectiones continget. ergo diameter alterius ſectionis, quæ ab a ducitur, reliquæ etiam diameter erit: & propterea in puncto f ſecabit, & lineam d c, & c e. quod fieri non poteſt.



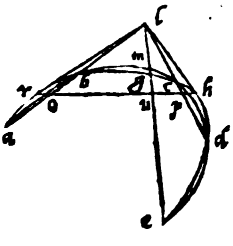
ALITER. Sint ſectiones d a b c, e a b c, ut dictum eſt: & in communi ipſarum parte a b c ſumatur punctum b: & ducta a b bifariam ſecetur in f, perq́; f ducatur diameter g f h: & per c linea c e d ipſi a b æquidiſtans. Quoniam igitur f h diameter eſt, quæ bifariam ſecat lineam a b; erit a b ordinatim applicata, & æquidiſtat c e d. ergo c e bifariam ſecatur in h. ſed in ſectione e a b c deſcripta eſt e c; & in ſectione d a b c, ipſa c d. linea igitur e h lineæ h d eſt æqualis. quod fieri non poteſt.

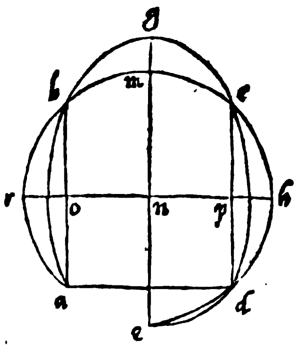


THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

Coni ſectio coni ſectionem, uel circuli circumferentiam in pluribus punctis, quàm quatuor non ſecat.

Si enim fieri poteſt, ſecet in quinque punctis a b c d e: ſintq́; a b c d e occurſus dein
ceps, nullum intermedium relinquentes: & iunctæ a b, c d producantur, quæ conue- A
nient inter ſe extra ſectionem in parabola & hyperbola. Itaque conueniant in l: &
quam proportionem habet a l ad l b, habeat a o ad o b: quam uero d l habet ad l c,
habeat d p ad p c. ergo quæ à puncto p ad o iuncta produci- B
tur ex utraque parte, occurret ſectioni: & quæ ab occurſibus
ducuntur ad l ſectiones contingent. occurrat in punctis h r: &
h l, l r iungantur. contingent igitur hæ ſectiones; & e l utrãque
ſecabit, quoniam inter b c nullus eſt occurſus. Itaque ſecet in C
punctis m g. ergo in altera quidem ſectione erit ut e l ad l g, ita
e n ad n g: in altera autem ut e l ad l m, ita e n ad n m, quod fie
ri non poteſt. quare neque illud, quod à principio ponebatur. ſi
uero a b, d c æquidiſtent, ſectiones erunt ellipſis, uel circuli circumferentia. diuidan-
tur a b c d bifariam in o p; & iuncta p o ad utraſque partes producatur, quæ ſectio-
nibus occurrat in h r. erit igitur h r diameter ſectionum, & a b, c d ad ipſam ordina- D
tim applicabuntur. quare à puncto r ducta e n m g ipſis a b, c d æquidiſtans, ſecabit





lineam h r,& utramque ſectionem, propterea quod
E alius occurſus non eſt præter a b c d e. ergo ex ijs, quæ dicta ſunt, in altera quidem ſectione erit e n æqualis n m, in altera uero e n æqualis n g. quare n m ipſi n g eſt æqualis. quod fieri non poteſt.

FED. COMMANDINVS.

A Et iunctæ a b, c d producantur, quæ conuenient inter ſe extra ſectionem in parabola,& hyperbola.] *Ex 24. & 25. ſecundi huius.*

B Ergo quæ à puncto p ad o iuncta producitur ex utraque parte occurrit ſectioni,& quæ ab occurſibus ducuntur ad l ſectiones contingunt.] *Ex nona huius.*

C Itaque ſecet in punctis m g. ergo in altera quidem ſectione, erit ut e l ad l g, ita e n
ad n g, in altera autẽ ut &c.] *Sit linea l g maior, quàm l m, erit contra n m maior, quàm n g.*
8. quinti. *habebit igitur e l ad l m maiorem proportionem, quàm e l ad l g. ut autem e l ad l m, ita e n ad*
n m,& ut e l ad l g, ita e n ad n g. ergo e n ad n m maiorem proportionem habet, quàm e n ad
14. quinti *n g: & idcirco n m minor eſt, quàm n g. ſed & erat maior. quod fieri non poteſt.*
10.

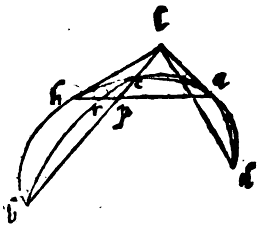
D Erit igitur h r diameter ſectionum.] *Ex 28. ſecundi huius.*

E Ergo ex ijs, quæ dicta ſunt, in altera quidem ſectione erit e n æqualis n m, in altera uero e n æqualis n g.] *Sunt enim & e m, e g ad diametrum h r ordinatim applicatæ.*

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVI.

Si dictarum linearum aliquæ in uno puncto ſe ſe contingant, non occurrent ſibi ipſis ad alia puncta plura, quàm duo.

Contingant enim ſe ſe duæ quæpiam dictarnm linearum in puncto a. Dico eas non occurrere ſibi ipſis ad alia puncta plura, quàm duo. nam ſi fieri poteſt, occurrant ad puncta b c d: ſintq́; occurſus deinceps, nullum intermedium relinquentes: & iuncta b c producatur. à puncto autem a ducatur cõtingens a l, quæ quidem continget duas ſectiones,& cum linea b c cõueniet. Conueniat in l:& fiat ut c l ad l b, ita c p ad p b: 9. huius. iungaturq́; a p,& producatur. occurret ea ſectionibus, & quæ ab occurſibus ad punctum l ducuntur, ſectiones contingent. Itaque occurrat in punctis h r, & iungantur h l, l r, quæ contingent ſectiones. ergo quæ à puncto d ad l ducitur utramque ſectionem ſecabit; & eadem quæ dicta ſunt, abſurda ſequentur. non igitur ſe ſecant ad plura puncta, quàm duo. ſi uero in ellipſi,& circuli circumferentia c b ipſi a l æquidiſtet, ſimiliter demonſtrationem faciemus, lineam a h diametrum oſtendentes.

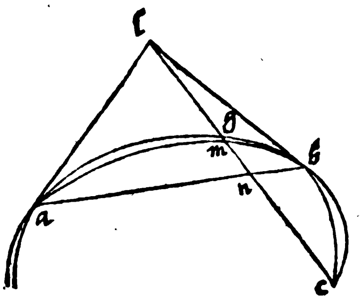


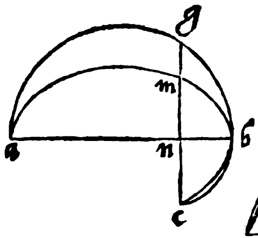
THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

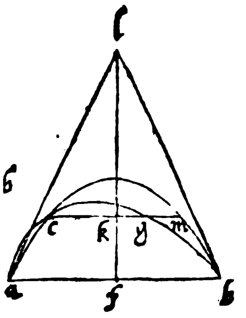
Si prædictarum linearum aliquæ in duobus punctis ſe ſe contingant, in alio puncto ſibi ipſis non occurrent.

Prædictarum enim linearum duæ ſe ſe contingant in duobus punctis a b. Dico eas ad aliud punctum ſibi ipſis non occurrere. nam ſi fieri poteſt, occurrant etiam ad punctum c: ſitq́; primum c extra a b tactus: & ab ipſis ducantur lineæ contingentes, quæ in punctum l conueniant, ut in prima figura apparet. contingent igitur hæ utramquæ ſectionem: & iuncta c l utramque ſecabit. ſecet in punctis g m, & iungatur

tur a n b. ergo in altera quidem ſectione erit, ut c l ad l g, ita c n ad n g; in altera uero, ut c l ad l m, ita c n ad n m. quod eſt abſurdum.







At ſi c g æquidiſtans ſit lineis ad puncta a b contingentibus, ut in ellipſi in ſecunda figura, iungemus lineam a b, quæ ſectionum diameter erit. ergo utraque linearum c g, c m in puncto n bifariam ſecabitur; quod eſt abſurdum. non igitur ſectiones ad aliud punctum ſibi ipſis occurrunt, ſed ad a b tantum.

27. ſecundi huius.

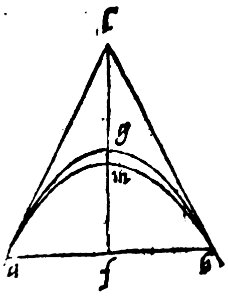
Sit deinde c inter tactus, ut in tertia figura perſpicuum eſt ſectiones non contingere ſe ſe ad punctum c: quoniam ad duo tantum contingentes ponebantur. ſecent igitur ſe ipſas in c: & à punctis a b ducantur a l, l b, quæ ſectiones contingant: iungaturq; a b, & in f bifariam diuidatur. ergo à puncto l ad f ducta diameter erit, quæ quidem per c non tranſibit: ſi enim tranſeat, quæ per c ipſi a b æquidiſtans ducitur, continget utramque ſectionem, quod fieri non poteſt. Itaque ducatur à puncto c linea c k g m æquidiſtans a b. erit in altera quidem ſectione c k æqualis k g: in altera uero c k æqualis k m. quare k m ipſi k g eſt æqualis; quod fieri non poteſt. Eodem modo ſi contingentes inter ſe æquidiſtent, ex iis, quæ diximus, illud, quod fieri non poteſt, concludetur.

29. ſecũdi huius.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXVIII.

Parabole parabolen non contingit, præterquàm in uno puncto.

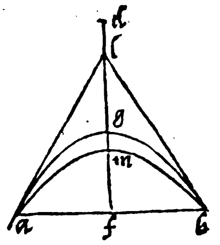
Si enim fieri poteſt, parabolæ a g b, a m b in punctis a b ſe ſe contingant: & ducantur lineæ contingentes a l, l b. contingent hæ utraſque ſectiones; & in punctum l conuenient. Itaque iuncta a b, ſecetur bifariam in f, & ducatur l f. quoniam igitur duæ lineæ a g b, a m b ſe ſe contingunt in punctis a b ad aliud punctum ſibi ipſis non occurrent. quare l f utramque ſectionem ſecabit. ſecet in g m. ergo in altera quidem ſectione erit l g æqualis g f; in altera uero l m æqualis m f. quod fieri non poteſt. non igitur parabole parabolen, præterquam in uno puncto, contingit.



ex precedente.
35. primi huius.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

Parabole hyperbolen non contingit in duobus punctis extra ipſam cadens.



Sit parabole quidem a g b, hyperbole uero a m b: & ſi fieri poteſt, ſe ſe contingant in punctis a b. & ab ipſis ducantur lineæ utrãque ſectionem contingentes, quæ in l conueniant: iunctaq́; a b biſariam ſecetur in f: & l f ducatur. Itaque quoniam ſectiones a g b, a m b ſe ſe contingunt in punctis a b, ad aliud punctum ſibi
27.huius ipſis non occurrent. quare l f in alio, atque alio puncto ſectiones
29.ſecūdi huius. ſecat. ſecet in g m; & producatur l f, quæ in centrum hyperbolæ cadet: ſitq́; centrum d. ergo propter hyperbolen, ut f d ad d m, ita
A erit m d ad d l: & ita reliqua f m ad m l. eſt autem f d maior, quàm d m. ergo & f m
19.qu iti. 14 maior, quàm m l. ſed propter parabolen, erit f g æqualis g l. quod fieri non poteſt.
35. primi huius.

FED. COMMANDINVS.

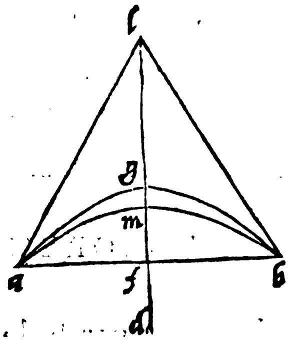
A Ergo propter hyperbolen, ut f d ad d m, ita m d ad d l.] *Eſt enim ex 37. primi hu-*
14. ſexti. *ius, rectangulum f d l quadrato d m æquale. ergo ut f d ad d m, ita m d ad d l, & ita reliqua*
19. quiti. *f m ad m l.*

B Quod fieri non poteſt.] *Eſſet enim g f minor, quàm f m.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Parabole ellipſim, uel circuli circumferentiam non contingit in duobus punctis intra ipſam cadens.

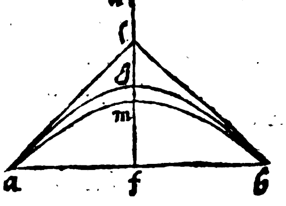
Sit ellipſis, uel circuli circumferentia a g b, parabole uero a m b: & ſi fieri poteſt, in duobus punctis a b ſe ſe contingant: & ab ipſis ducantur lineæ contingentes ſectiones, quæ conueniant in punctum l: iunctaq́; a b ſecetur in f biſariam: & ducatur l f. ſecabit igitur l f utramque ſectionem in alio, atque alio puncto, uti dictum eſt. ſecet in g m: & producatur l f uſque ad d, quod ſit centrum ellipſis, uel
37. primi huius. circuli. ergo propter ellipſim & circulum, erit ut l d ad d g,
14. ſexti ita g d ad d f: & reliqua l g ad g f. eſtq́; l d maior, quàm d g. ergo & l g maior, quàm g f. ſed propter parabolen, erit l m æqualis m f. quod fieri non poteſt.



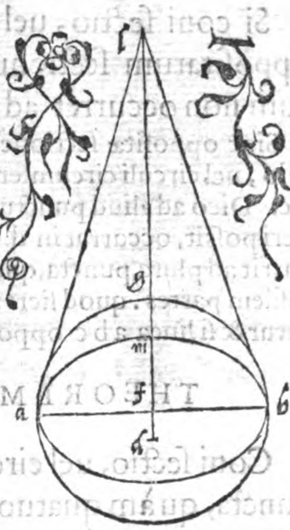
THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

Hyperbole hyperbolen idem centrum habens in duobus punctis non continget.

Hyperbolæ enim a g b, a m b idem habentes centrum d, ſi fieri poteſt, in punctis a b ſe ſe contingant: & ducantur ab ipſis lineæ contingentes, quæ inter ſe conueniant
30. ſecūdi huius. a l, l b: iunctaq́; d l producatur: & iungatur a b. ergo d f ſecat biſariam lineam a b in f: & utraſque ſectiones in
37. primi huius. g m ſecat. quare propter hyperbolen a g b, rectangulum f d l eſt æquale quadrato d g: & propter hyperbolen a m b, rectangulum f d l æquale eſt quadrato d m. quadratum igitur m d quadrato d g æquale erit. quod fieri non poteſt.



THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXII.



Si ellipſis ellipſim, uel circuli circumferentiam, idem centrum habens in duobus punctis contingat: linea coniungens tactus per centrum tranſibit.

Contingant enim ſe ſe dictæ lineæ in punctis a b: & iuncta a b, per a b puncta ducantur lineæ ſectiones contingentes, quæ ſi fieri poſsit, conueniant in l: & linea a b in f biſariam diuidatur: & iungatur l f. ergo l f diameter eſt ſectionum. Sit centrum d, ſi fieri poteſt. rectangulum igitur d l f propter alteram quidem ſectionem eſt æquale quadrato d g; propter alteram uero æquale quadrato d m. quare g d quadratum quadrato d m æquale erit: quod fieri non poteſt. non igitur lineæ contingentes à punctis a b ductæ conueniunt. ergo æquidiſtant inter ſe ſe: & idcirco linea a b diameter eſt, quæ per centrum tranſibit. id quod demonſtrandum proponebatur.

29. ſecũdi huius.

37. primi huius.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

Coni ſectio, uel circuli circumferentia, coni ſectioni, uel circuli circumferentiæ, quæ non ad eaſdem partes conuexa habeat, ad plura puncta, quàm duo non occurret.

Si enim fieri poteſt, coni ſectio, uel circuli circumferentia a b c coni ſectioni, uel circuli circumferentiæ a d b e c occurrat ad plura puncta, quàm duo, non habens conuexa a b c ad eaſdem partes. Quoniam igitur in linea a b c ſumuntur tria puncta a b c; & a b, b c iunguntur: continent angulum ad eaſdem partes, in quibus ſunt concaua lineæ a b c: & ſimili ratione lineæ a b, b c eundem angulum continent ad eas partes, in quibus ſunt concaua lineæ a d b e c. ergo dictæ lineæ ad eaſdem partes habent concaua, & conuexa. quod fieri non poteſt.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XXXIIII.

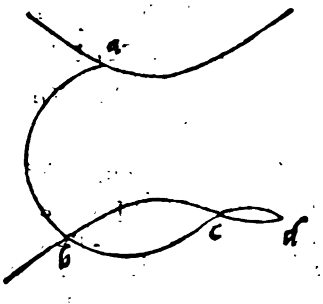
Si coni ſectio, uel circuli circumferentia occurrat uni oppoſitarum ſectionum in duobus punctis: & lineæ, quæ inter occurſus interiiciuntur, ad eaſdem partes concaua habeant: producta linea ad occurſus alteri oppoſitarum ſectionum non occurret.

Sint oppoſitæ ſectiones d, a c f: & coni ſectio, uel circuli circumferentia a b f occurrat alteri oppoſitarum ſectionum in duobus punctis a f: habeantq; a b f, a c f concaua ad eaſdem partes. Dico lineam a b f productam ſectioni d non occurrere. iungatur enim a f. & quoniam d a c f oppoſitæ ſectiones ſunt: & recta linea a f in duobus punctis hyperbolen ſecat, producta non occurret oppoſitæ ſectioni d. quare neque linea a b f eidem occurret.

33. ſecũdi huius.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXV.

Si coni ſectio, uel circuli circumferentia uni oppoſitarum ſectionum occurrat; reliquæ ipſarum non occurret ad plura puncta, quàm duo.



Sint oppoſitæ ſectiones a b: & ipſi a occurrat coni ſectio, uel circuli circumferentia a b c: ſecetq; b in punctis b c. Dico ad aliud punctum ipſi b non occurrere. ſi enim fieri poſſit, occurrat in d. ergo linea b c d ſectioni b c occurrit ad plura puncta, quàm duo, non habens concaua ad 33.huius eaſdem partes. quod fieri non poteſt. ſimiliter demonſtrabitur & ſi linea a b c oppoſitam ſectionem contingat.

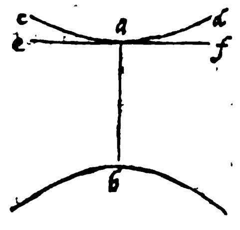
THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVI.

Coni ſectio, uel circuli circumferentia oppoſitis ſectionibus ad plura puncta, quàm quatuor non occurret.

ex antecedente. Hoc autem perſpicue conſtat; nam linea occurrens uni oppoſitarum ſectionum; reliquæ non occurrit ad plura puncta, quam duo.

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVII.

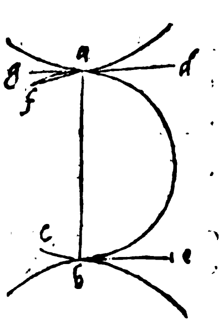
Si coni ſectio, uel circuli circumferentia unam oppoſitarum ſectionum concaua ſui parte contingat, alteri oppoſitarum non occurret.



Sint oppoſitæ ſectiones a b: & ſectionem a contingat linea c a d. Dico c a d ſectioni b non occurrere. ducatur enim per a punctum linea contingens e a f, quæ utramque linearum continget in a. quare non occurret ſectioni b; & propterea neque linea c a d eidem occurret.

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Si coni ſectio, uel circuli circumferentia utramque oppoſitarum ſectionum contingat in uno puncto; oppoſitis ſectionibus in alio puncto non occurret.



Sint oppoſitæ ſectiones a b: coni autem ſectio, uel circuli circumferentia a b c utramque ipſarum in punctis a b contingat. Dico lineam a b c oppoſitis ſectionibus a b in alio puncto non
A occurrere. Quoniam enim a b c ſectionem a in uno puncto contingit, ſectioni b occurrens: non continget ſectionem a concaua ſui parte. Similiter demonſtrabitur neque ita contingere ſectionem b. Ducantur lineæ a d, b e contingentes ſectiones a b; quæ & lineam a b c contingent: ſi enim fieri poteſt, altera ipſarum
B ſecet; ſitq; a f. ergo inter lineam a f contingentem, & inter ſectionem a, cadit linea intermedia g, quod eſt abſurdum. lineæ igitur a d, b e ipſam quoque a b c contingent. ex quo apparet lineam a b c ad aliud punctum oppoſitis ſectionibus non occurrere.

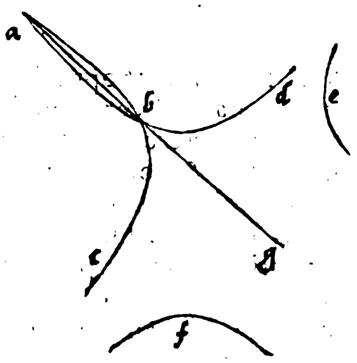
FED. COMMANDINVS.

Quoniam enim a b c ſectionem a in uno puncto contingit, ſectioni b occurrẽs, non continget ſectionem a concaua ſui parte.] *Si enim fieri poteſt, contingat ſectionem a concaua ſui parte. ergo ex antecedente, alteri oppoſitarum ſectioni non occurret. Sed & occurrit ſectioni b, quod eſt abſurdum.* A

Ergo inter lineam a f contingentem, & inter ſectionem a, cadit linea intermedia g, quod eſt abſurdum.] *Ex demonſtratis in trigeſima ſexta primi huius. in græcis autem codicibus ante hæc uerba, non nulla alia legebantur, quæ nos tanquam ſuperflua omiſimus.* B

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XXXIX.

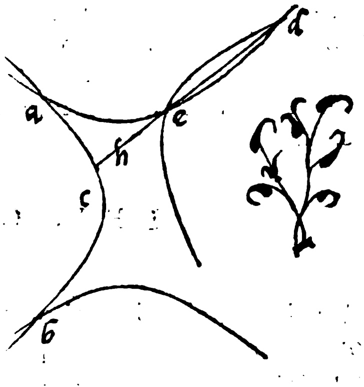
Si hyperbole uni oppoſitarum ſectionum in duobus punctis occurrat, conuexa habens è regione ſita; quæ ipſi opponitur ſectio, alteri oppoſitarum non occurret.



Sint oppoſitæ ſectiones a b d, f: & hyperbole a b c ſectioni a b d occurrat in punctis a b, habens conuexa è regione ſita: ſitq; ſectioni a b c oppoſita ſectio e. Dico ipſam e ſectioni f non occurrere. iungatur enim a b, & ad g producatur. Quoniam igitur a b g recta linea ſecat hyperbolen a b d, producta ex utraque parte extra ſectionem cadet. quare non occurret ſectioni f. ſimiliter propter hyperbolen a b c, neque occurret oppoſitæ ſectioni e. ergo ſectio e ſectioni f non occurret. 33. ſecũdi huius.

THEOREMA XL. PROPOSITIO XL.

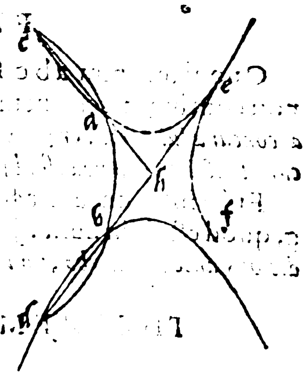
Si hyperbole occurrat utrique oppoſitarum ſectionum; quæ ipſi opponitur ſectio, nulli oppoſitarum in duobus punctis occurret.



Sint oppoſitæ ſectiones a b: & a c b hyperbole utrique occurrat. Dico ſectionem, quæ ipſi a c b opponitur, ſectionibus a b non occurrere in duobus punctis. ſi enim fieri poteſt, occurrat in punctis d e: & iuncta d e producatur. ergo propter ſectionem d e recta linea d e ſectioni a b non occurret: & propter ſectionem a e d, non occurret ipſi b: per tres enim locos tranſibit, quod fieri non poteſt. Similiter demonſtrabitur neque ſectioni b in duobus punctis occurrere. Eadem etiam ratione utramque ipſarum non continget. ducatur enim linea contingens h e, quæ continget utramque ſectionem. ergo propter ſectionem d e ipſi a c non occurret: & propter ſectionem a e non occurret ſectioni b. quare neque a c ſectio ſectioni b occurret quod non ponitur. 33. ſecũdi huius. 33. ſecũdi huius.

THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLI.

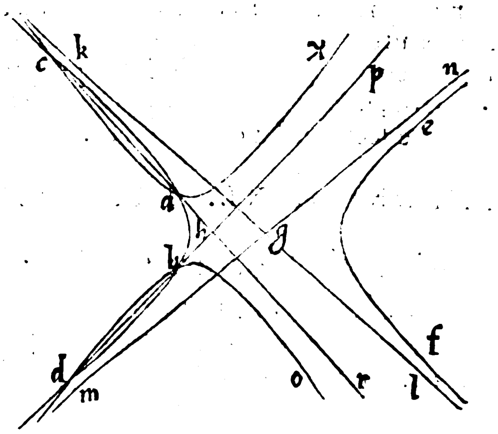
Si hyperbole utramque oppoſitarum ſectionum in duobus punctis ſecet, conuexa habens è regione utrique ſita; quæ ipſi opponitur ſectio nulli oppoſitarum occurret.



Sint oppoſitæ ſectiones a b: & hyperbole c a b d utramque ſecet in duobus punctis, conuexa habens è regione utriſq; ſita. Dico ſectionem oppoſitam e f nulli ipſarum a b occurrere. ſi enim fieri poteſt, occurrat ſectioni a in puncto e: & iunctæ c a, d b producantur; conuenient hæ inter ſe ſe. Itaque conueniant in h. erit igitur h in angu-
25. ſecũdi huius. lo aſymptotis ſectionis c a b d contento; cui opponitur ſectio e f. ergo quæ à puncto e ad h ducitur, cadit intra angulum contentum lineis a h b. Rurſus quoniam hyperbole eſt c a e, occurruntq; ſibi ipſis c a h, h e: & c a occurſus non continent occurſum e: punctum h erit inter aſymptotos ſectionis c a e. atq; eſt ipſi oppoſita ſectio b d. ergo quæ à puncto b ducitur ad h intra angulum c h e cadit, quod eſt abſurdum; cadebat enim intra angulum a h b. non igitur e f alicui oppoſitarum ſectionum a b occurret.

EVTOCIVS.

ALITER. Sint oppoſitæ ſectiones a b: & hyperbole c a b d utramque ipſarum in punctis c a b d ſecet: & ſit ſectio ipſi oppoſita e f. Dico e f nulli oppoſitarum ſectionum occurrere. iunctæ enim d b, c a producantur: & conueniant inter ſe in
25. ſecũdi huius. puncto h. erit igitur h inter aſymptotos ſectionis c a b d. ſint c a b d ſectionis aſymptoti k g l, m g n. perſpicuum eſt lineas n g l ſectionem e f continere. At
33. ſecũdi huius. linea c a h ſectionem c a x in duobus punctis c a ſecat. ergo producta ex utraque parte non occurret oppoſitæ ſectioni d b o: ſed erit inter b o, & lineam g l. Similiter & d b h producta ſectioni c a x non occurret, ſed erit inter a x, & g n. Quoniam igitur p h, h r non occurrentes ſectionibus a b, continent aſymptotos n g l, & multo magis ſectionem e f; ſequitur ut e f nulli oppoſitarum ſectionum occurrat.



FED. COMMANDINVS.

Rurſus quoniam hyperbole eſt c a e, occurruntq; ſibi ipſis c a h, h e; & c a occurſus non continent occurſum e: punctum h erit inter aſymptotos ſectionis c a e. *Vereor ne locus corruptus ſit, neq; enim punctum h neceſſario cadere uidetur inter aſymptotos ſectionis*
25. ſecũdi huius. *c a e, niſi linea e h ſectionem c a e, uel contingat, uel in duobus punctis ſecet; quod non ponitur. præterea quomodo ex his abſurdum ſequatur, non facile apparet. ſed tamen poſſumus demonſtrationem abſoluere in hunc modum.*

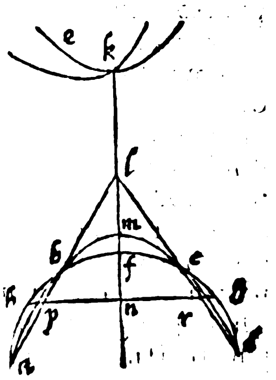
Rurſus quoniam recta linea d b h ſectionem d b o ſecat in duobus punctis, producta non occurret oppoſitæ ſectioni c a e. quare ſi à puncto e eiuſdem ſectionis linea ducatur e h, cadet extra ipſam h b, hoc eſt extra angulum a h b: quod eſt abſurdum; cadebat enim intra. non igitur e f ulli oppoſitarum ſectionum a b occurret.

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM,
QVAM AFFERT EVTOCIVS.

Sed erit inter b o & lineam g l.] *Recta enim linea c a b r, quæ hyperbolen c a b d in duobus punctis ſecat, ſi producatur, aſymptoto* k g l *occurret ad partes* k *ex octaua ſecundi huius. quare ei non occurret in alio puncto, & inter ſectionem b o, & aſymptoton g l cadet. Eadem quoque ratione recta linea d b h p inter a x ſectionem, & aſymptoton g n cadat neceſſe eſt.*

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLII.

Si hyperbole unam oppoſitarum ſectionum in quatuor punctis ſecet, quæ ipſi opponitur ſectio, non occurret alteri oppoſitarum.



Sint oppoſitæ ſectiones a b c d, e; & hyperbole ipſam a b c d ſecet in quatuor punctis a b c d: ſitq; ei oppoſita ſectio k. Dico k ſectioni e non occurrere. ſi enim fieri poteſt, occurrat in k: & iunctæ a b, c d producantur, quæ inter ſe conuenient. A conueniant in l: & quam proportionem habet a l ad l b, habeat a p ad p b: quam uero habet d l ad l e, habeat d r ad r c. ergo linea, quæ per p r producitur, utrique ſectioni occurret: B & quæ ab l ad occurſus ducuntur ſectionem contingent. iungatur k l, & producatur. ſecabit ea angulum b l c, & ſectiones in alio, atque alio puncto. Itaque ſecet in f m. ergo propter oppoſitas ſectiones a h f g d, k, erit ut n k ad k l, ita n f ad f l: & propter ſectiones a b c d, e, ut n k ad k l, ita erit n m ad m l. quod fieri non poteſt. non igitur ſectiones e k ſibi ipſis occurrunt.

FED. COMMANDINVS.

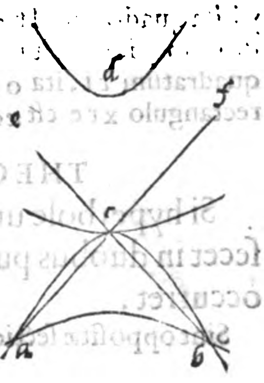
A Quæ inter ſe conuenient.] *Ex uigeſima quinta ſecundi huius.*

B Ergo lineæ, quæ per p r producitur, utrique ſectioni occurret; & quæ ab l ad occurſus ducuntur, ſectionem contingent.] *Ex nona huius.*

C Ergo propter oppoſitas ſectiones a h f g d, k, erit ut n k ad k l, ita n f ad f l.] *Eſt enim per trigeſimam ſextam primi huius, ut* k n *ad* n f, *ita* k l *ad* l f. *quare & permutando ut* n k *ad* k l, *ita* n f *ad* f l.

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLIII.

Si hyberbole alteri oppoſitarum ſectionum in duobus punctis occurrat, concaua habens ad eaſdem partes; alteri uero occurrat in uno puncto: quæ ipſi opponitur ſectio nulli oppoſitarum occurret.



Sint oppoſitæ ſectiones a b, c: & hyperbole a c b ſectioni quidem a b in punctis a b occurrat: ſectioni uero c occurrat in uno puncto c: ſitq; ipſi a c b oppoſita ſectio d. Dico d nulli ſectionum a b, c occurrere. iungantur enim a c, b c, & producantur. lineæ igitur a c, b c ſectioni d non occurrent. 33. ſecũdi huius. ſed neque occurrent ſectioni c præterquam in uno puncto c: ſi enim in alio puncto; oppoſitæ ſectioni a b non occurrent. poſitum autem eſt, a c, b c, occurrere ſectioni a b. quare ſequitur, ut a c, b c ſectioni c in uno puncto c occurrant; ſectioni uero d nullo modo. ergo d erit ſub angulo e c f: & propterea ſectionibus a b, c minime occurret.

THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO XLIIII.

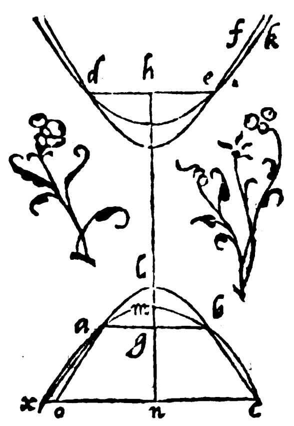
Si hyperbole uni oppoſitarum ſectionum occurrat in tribus punctis; quæ ipſi opponitur alteri oppoſitarum, præterquam in uno puncto, non occurret.

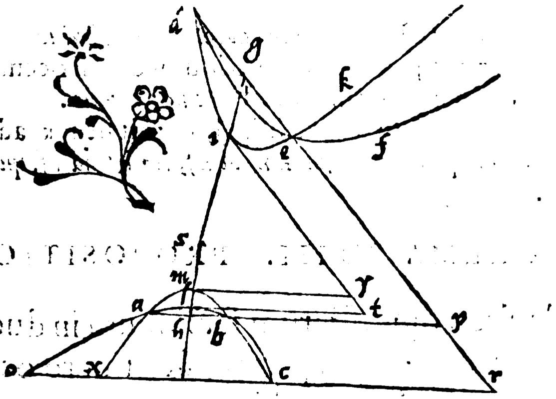
Sint oppoſitæ ſectiones a b c, d e f: & hyperbole a m b c occurrat a b c ſectioni in tribus punctis a b c. ſit autem ſectioni a m b c oppoſita ſectio d e k, & ipſi a b c oppoſita d e f. Dico d e k non occurrere ſectioni d e f, præterquam in uno puncto. ſi enim fieri poteſt, in punctis d e occurrat: & iungantur a b, d e; quæ uel æquidiſtantes ſunt inter ſe, uel non æquidiſtantes. ſint primum æquidiſtantes: ſecenturq; a b, d e bifariam in punctis g h: & iungatur g h. eſt igitur g h diameter omnium ſectionum: atque ad eam applicantur ordinatim a b, d e. Ducatur à puncto c linea c n o x æquidiſtans a b. erit & ipſa ad diametrum ordinatim applicata: & ſectionibus in alio, atq; alio puncto occurret. Si enim in eodem puncto, non occurrerent ſectiones ſibi ipſis in tribus punctis, ſed in quatuor. ergo in ſectione a m b erit c n ipſi n x æqualis & in a l b ſectione, c n æqualis n o. quare o n eſt æqualis n x: quod fieri non poteſt. Sed non ſint æquidiſtantes a b, d e: producanturq; & conueniant in p: & ducatur c o ipſi a p æquidiſtans; quæ cum d p producta conueniat in r. Secentur autem a b, d e bifariam in punctis g h: & per g h ducantur diametri g i h, h l m s: atque à punctis i l m lineæ i y t, m y, l t ſectiones contingant. erit igitur i t æquidiſtans d p: & l t, m y æquidiſtantes ipſis a p, o r. & quoniam ut quadratum m y ad quadratum y i, ita rectangulum a p b ad rectangulum d p e; erit ut quadratum m y ad quadratum

36. ſecũdi huius.

5. ſecũdi huius.

19. tertii huius.



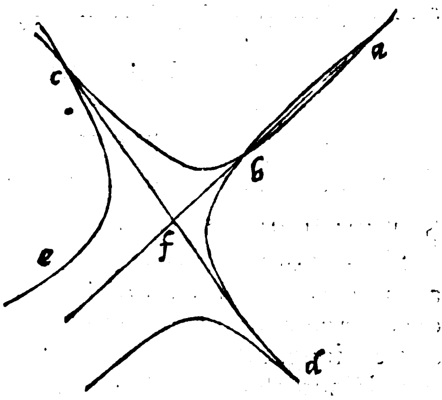


y i, ita quadratum l t ad quadratum t i. Eadem ratione, ut quadratum m y ad quadratum y i, ita erit rectangulum x r c ad rectangulum d r e. ſed ut quadratum l t ad quadratum t i, ita o r c rectangulum ad rectangulum d r e. ergo rectangulum o r c rectangulo x r e eſt æquale. quod fieri non poteſt.

THEOREMA XLV. PROPOSITIO XLV.

Si hyperbole unam oppoſitarum ſectionum contingat, alteram uero ſecet in duobus punctis; quæ ipſi opponitur ſectio, nulli oppoſitarum occurret.

Sint oppoſitæ ſectiones a b c, d, & hyperbole a b d ſectionem quidem a b c in pun ctis a b ſecet; ſectionem uero d contingat in d: & ſit hyperbole a b d oppoſita ſectio c e. Dico c e nulli ipſarum a b c, d occurrere. ſi enim fieri poteſt, occurrat ipſi a b c in c puncto: iungaturq́; a b: & per d ducatur contingens, quæ cum linea a b conueniat in f. punctum igitur f erit intra aſymptotos a b d ſectionis. eſt autem ipſi oppoſita ſectio c e. ergo quæ à puncto c ad f ducitur cadit intra angulum lineis b f d contentum. Rurſus quoniam hyperbole eſt a b c, cui occurrunt lineæ a b, c f: & a b occurſus occurſum c non continent: erit punctum f intra aſymptotos ſectionis a b c. opponitur autem ipſi ſectio d. quæ igitur à c ad f ducta fuerit, intra angulum a f c cadet: quod eſt abſurdum; cadebat enim & intra angulum b f d. quare c e nulli oppoſitarum ſectionum a b c, d occurret.



FED. COMMANDINVS.

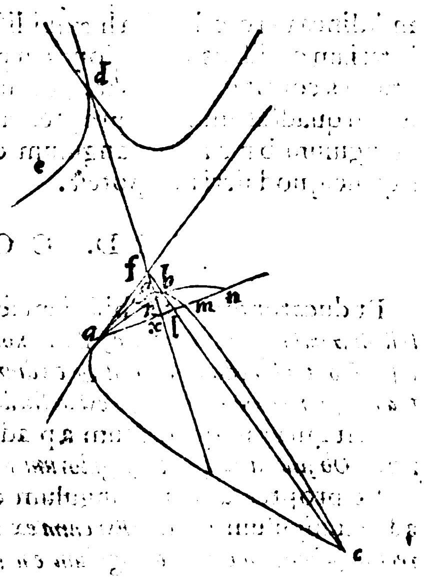
Rurſus quoniam hyperbole eſt a b c, cui occurrunt lineæ a b, c f: & a b occurſus occurſum c non continent: erit punctum f intra aſymptotos ſectionis a b c.] *Hoc non neceſſario ſequi uidetur, niſi linea c f ſectionem a b c uel contingat, uel in duobus punctis ſecet, quod non ponitur, ut etiam ſuperius diximus in commentarijs in* 41. *huius. poteſt tamen ſimiliter demonſtratio perfici hoc modo.*

Rurſus quoniam recta linea d f ſectionem d contingit, ſi prodncatur non occurret oppoſitæ ſectioni a b c. ergo à puncto c eiuſdem ſectionis ducta ſinea ad f, cadet extra ipſam f d, hoc eſt extra angulum b f d: quod eſt âbſurdum; cadebat enim intra. quare c e nulli oppoſitarum ſectionum a b c, d occurret.

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO XLVI.

Si hyperbole unam oppoſitarum ſectionum in uno puncto contingat; & ſecet in duobus punctis; quæ ipſi opponitur ſectio, alteri oppoſitarum non occurret.

Sint oppoſitæ ſectiones a b c, d; & hyperbole a g c ſectionem a b c contingat quidem in pũcto a; ſecet uero in b c: & ipſi a g c oppoſita ſit ſectio e. Dico e ſectioni d non occurrere. ſi enim fieri poteſt, occurrat in d: iunctaq́; b c producatur ad f: & à puncto a ducatur linea a f contingens. ſimiliter demonſtrabitur punctum f eſſe intra angulum aſymptotis contentum: & linea a f utraſque ſectiones continget: & d f producta ſecabit A ſectiones inter a b, uidelicet in punctis g k. quam uero proportionem habet c f ad f b, habeat c l ad l b: & iuncta a l producatur; quæ ſectiones in alio atque alio puncto ſecabit. r.huius. ſecet in m n. ergo quæ à puncto f ad m n ducuntur ſectiones contingent: & ſimiliter ijs, quæ dicta ſunt propter alteram quidem ſectionem, ut x d ad d f, ita erit x g ad g f: 36. primi huius, & permutãdo. propter alteram uero, ut x d ad d f, ita x k

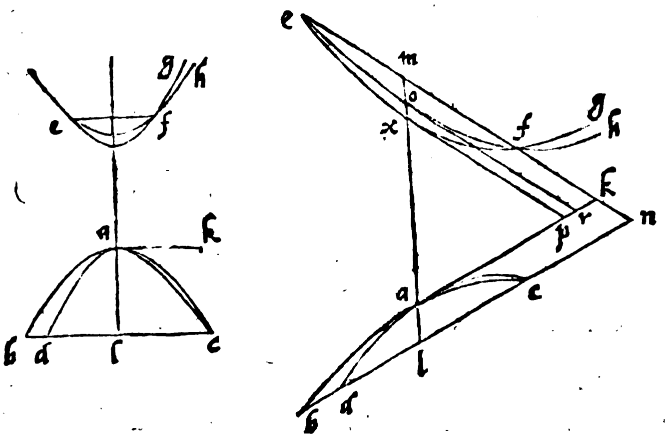


ad k f. quod fieri non poteſt. non igitur ſectio alteri oppoſitarum occurret.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO XLVII.

Si hyperbole unam oppoſitarum ſectionum contingens in alio puncto ſecet; quæ ipſi opponitur ſectio alteri oppoſitarum non occurret præterquam in uno puncto.

Sint oppoſitæ ſectiones a b c, e f g: & hyperbole quædam d a c contingat a b c in a, & in c ſecet: opponaturq; ipſi d a c ſectio e f h. Dico eam alteri oppoſitarum non occurrere, præterquam in uno puncto. ſi enim fieri poteſt, occurrat in duobus punctis e f: iungaturq; e f: & per a ducatur ſectiones contingens a k. uel igitur a k, e f
A æquidiſtantes ſunt inter ſe, uel non. ſint primum æquidiſtantes: & ducatur diameter bifariam ſecans ipſam e f, quæ per a tranſibit: atque erit diameter duarum coniugatarum. ducatur etiam per c linea c l d b æquidiſtans ipſis a k, e f. ſecabit igitur eas ſectiones in alio, atque alio puncto: & in altera quidem erit c l æqualis l d, in altera uero c l æqualis l b. quod fieri non poteſt. ſed non ſint æquidiſtantes a k, e f: & cōueniant



in k, linea uero c d ipſi a h æquidiſtans ducta cōueniat cum e f in n: & diameter a m bifariam diuidens e f, ſectiones in punctis x o ſecet: atque ab x o ducantur x p, o r ſe-
B ctiones contingentes. erit igitur ut quadratum a p ad quadratum p x, ita quadratū
C a r ad quadratum r o: & propterea ut rectangulum d n c ad rectangulum e n f, ita re-
D ctangulum b n c ad rectangulum e n f. ergo rectangulum d n c rectangulo b n c eſt æquale. quod fieri non poteſt.

FED. COMMANDINVS.

A Et ducatur diameter bifariam ſecans ipſam e f, quæ per a tranſibit.] *Si enim fieri poteſt, diameter à medio lineæ e f ducta non tranſeat per a, ſed per aliud punctum: & ducatur linea à puncto a ad medium e f. erit & ea diameter ex 34. ſecundi huius. quare duæ diametri inter ſe extra centrum conuenient, quod eſt abſurdum.*

B Erit igitur ut quadratum a p ad quadratum p x, ita quadratum a x ad quadratum r o.] *Ob ſimilitudinem triangulorum a p x, a r o.*

C Et propterea ut rectangulum d n c ad rectangulum e n f, ita rectangulum b n c ad rectangulum e n f.] *Eſt enim ex 19. tertij huius, ut quadratum a p ad quadratum p x, ita rectangulum d n c ad rectangulum e n f, & ita rectangulum b n c ad idem e n f.*

D Ergo rectangulum d n c rectangulo b n c eſt æquale.] *Ex nona quinti elementorum.*

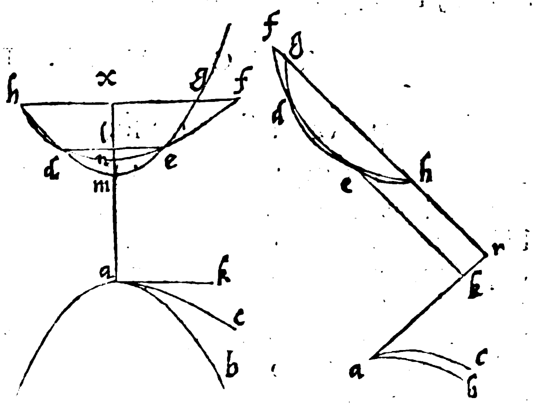
THEO

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO XLVIII.

Si hyperbole unam oppoſitarum ſectionum in uno puncto contingat; quæ ipſi opponitur ſectio, alteri oppoſitarum non occurret ad plura puncta, quàm duo.

Sint oppoſitæ ſectiones a b, d e g: & hyperbole a c ſectionem a b in puncto a contingat: ſitq; ipſi a c oppoſita ſectio d e f. Dico d e f non occurrere ſectioni d e g ad plura puncta, quàm duo. ſi enim fieri poteſt, occurrat ad puncta tria d e h: & ducatur recta linea a k, ſectiones a b, a c contingens. iuncta uero d e producatur: & ſint primum a k, d e inter ſe æquidiſtantes: ſeceturq; d e bifariam in l: & iungatur a l. erit igitur a l diameter duarum coniugatarum, quæ ſectiones inter puncta d e ſecat in m n: quoniam d l e in puncto l bifariam ſecta eſt. ducatur ab h linea h x g f æquidiſtans d e. ergo in altera quidem ſectione erit h x æqualis x f; in altera uero h x æqualis x g. quare x f ipſi x g eſt æqualis: quod fieri non poteſt. ſed non ſint a k, d e æquidiſtantes, conueniantq; in k: & reliqua eadem fiant. producta uero a k occurrat ipſi f h in r. ſimiliter atque in ijs, quæ dicta ſunt, demonſtrabimus ut rectangulum d k e ad quadratum a k, in ſectione f d e, ita eſſe rectangulum f r h ad quadratum r a: & in ſectione g d e, ita rectangulum g r h ad quadratum r a. rectangulum igitur g r h æquale eſt rectangulo f r h: quod fieri non poteſt. ergo d e f ipſi d e g ad plura puncta, quàm duo, non occurret.

34. ſecun di huius.



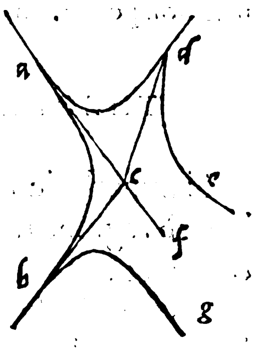
FED. COMMANDINVS.

Intelligatur hyperbole, quæ unam oppoſitarum ſectionum contingit, uel eaſdem partes concaua habens; alioquin hæc uera non eſſent, quod ex 52. huius manifeſto apparere poteſt.

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO XLIX.

Si hyperbole contingat utramque oppoſitarum ſectionum; quæ ipſi opponitur ſectio nulli oppoſitarum occurret.

A Sint oppoſitæ ſectiones a b: & hyperbole a b utramque ipſarum in punctis a b contingat: opponaturq; ei ſectio e. Dico e nulli ſectionum a b occurrere. ſi enim fieri poteſt, occurrat ſectioni a in d: & à punctis a b ducantur lineæ contingentes ſectiones, B quæ quidem intra aſymptotos ſectionis a b conuenient. C conueniant in c: & iungatur c d. ergo c d eſt in loco intermedio inter a c, c b. ſed eſt etiã inter b c, c f. quod fieri non poteſt. non igitur e ſectionibus a b oppoſitis occurret.



EVTOCIVS.

A Dico e nulli ſectionum a b occurrere.] *Ducantur enim à punctis a b lineæ contingentes ſectiones, quæ conueniant inter ſe in puncto c, uidelicet intra angulum ſectionem a b continentem. Itaque conſtat lineas a c, b c, ſi producantur, aſymptotis ſectionis e non occurrere, ſed ipſas continere, & multo magis continere ſectionem e. Quoniam igitur a c ſectionem a d contingit, non occurret ipſi b g. ſimiliter oſtendemus lineam b c ſectioni a d non occurrere. ergo ſectio e nulli ipſarum a d, b g ſectionum occurret.*

25. ſecũdi huius.

ex demõſtratis in 33. ſecũdi huius.

33

FED. COMMANDINVS.

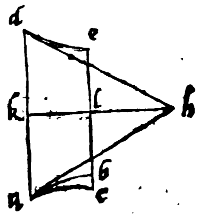
B Ergo c d eſt in loco intermedio inter a c, c b.] *Hoc eſt à puncto d ſectionis e d ducta linea ad c intra angulum a c b cadet.*

C Sed eſt etiam inter b c, c f.] *Quoniam enim linea b c ſectionem b contingit, producta non occurret oppoſitæ ſectioni a d. quare ſi à puncto d eiuſdem ſectionis linea ducatur ad c, intra angulum b c f cadet; quod eſt abſurdum, cadebat enim intra angulum a c b.*

THEOREMA L. PROPOSITIO L.

Si utraque oppoſitarum ſectionum in uno puncto contingat, ad eaſdem partes concaua habens; in alio puncto non occurret.

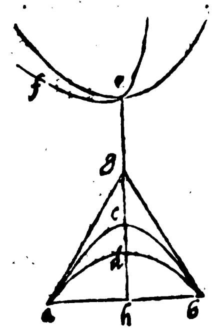
Contingant enim ſe ſe oppoſitæ ſectiones in punctis a d. Dico eas in alio puncto ſibi ipſis non occurrere. ſi enim fieri poteſt, occurrant in e. & quoniam hyperbole una oppoſitarum ſectionum in d contingens, ſecat in e, ſectio a b 47. huius ipſi a c, præterquam in uno puncto non occurret. ducantur à punctis a d lineæ a h, h d, quæ ſectiones contingant: iunctaq́; a d, per e ducatur e b c ipſi a d æquidiſtans, & per h ducatur ſe 39. ſecũdi huius. cunda diameter oppoſitarum ſectionum h l k, quæ ſecabit a d bifariam in k. ergo utraque e b, e c in puncto l bifariam ſecabitur: & propterea b l æqualis erit l c; quod fieri non poteſt. non igitur in alio puncto ſibi ipſis occurrent.



THEOREMA LI. PROPOSITIO LI.

Si hyperbole unam oppoſitarum ſectionum contingat in duobus punctis; quæ ipſi opponitur ſectio, alteri oppoſitarum non occurret.

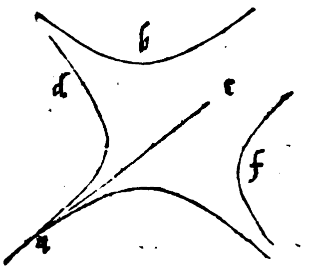
Sint oppoſitæ ſectiones a d b, e: & hyperbole a c ſectionem a d b in duobus punctis a b contingat: opponaturq́; ipſi a c ſectio f. Dico f ipſi e nõ occurrere. ſi enim fieri poteſt, occurrat in e: & à punctis a b ducantur contingentes ſectiones a g, g b: iungaturq́; a b, & e g, ac producatur. ſecabit igitur ſectiones in alio, atque alio puncto: & ſit e g c d h. Itaque quoniam a g, g b ſectiones contingunt: & a b coniun- 36. primi huius. git tactus, erit in altera quidem coniugatione, ut h e ad e g, ita h d ad d g; in altera uero ut h e ad e g, ita h c ad c g; quod fieri non poteſt. non igitur ſectio f ipſi e occurret.



THEOREMA LII. PROPOSITIO LII.

Si hyperbole unam oppoſitarum ſectionum contingat, conuexa habens è regione ſita; quæ ipſi opponitur ſectio, alteri oppoſitarum non occurret.

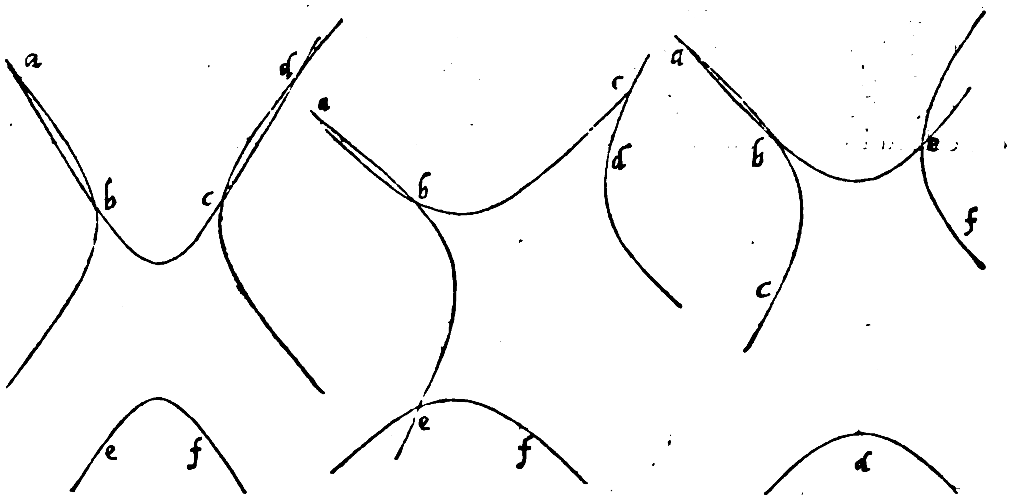
Sint oppoſitæ ſectiones a b: & hyperbole quædam a d ſectionem a in puncto a contingat: ipſi autem a d opponatur f. Dico f ſectioni b non occurrere. Ducatur enim à puncto a linea a c ſectiones contingens. ergo a c propter ipex demõſtratis in 33. ſecũdi huius. ſam a d ſectioni f non occurret: & propter a non occurret ſectioni b. quare a c inter b f ſectiones cadat neceſſe eſt: & idcirco b ſectioni f non occurrere manifeſto conſtat.



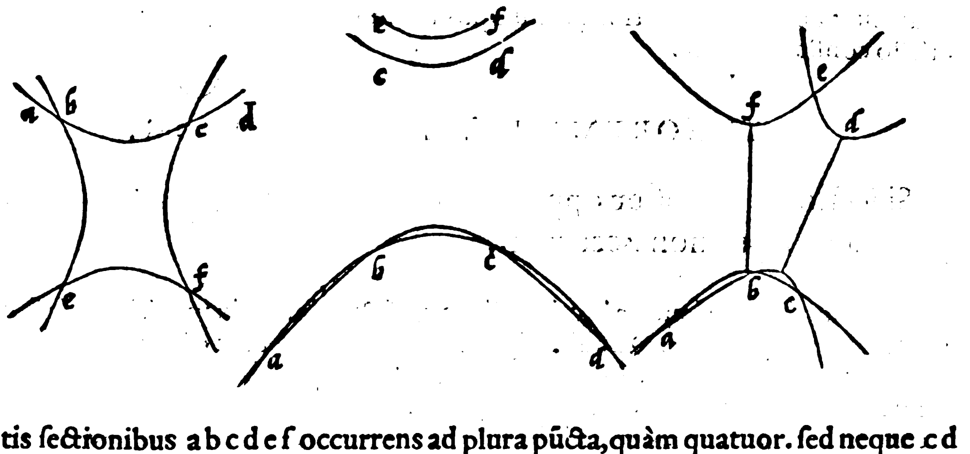
THEOREMA LIII. PROPOSITIO LIII.

Oppoſitæ ſectiones oppoſitas non ſecant in pluribus punctis, quàm quatuor.

Sint oppoſitæ ſectiones a b, c d, & aliæ oppoſitæ a b c d, e f; & ſecet prius a b c d ſectio
utramque ipſarum a b, c d in quatuor punctis a b c d, conuexa habens è regione
ſita; ut in prima figura apparet. ergo quæ ſectioni a b c d opponitur, hoc eſt e f nulli 41.huius
ipſarum a b, c d occurret. ſed a b c ſectionem quidem a b ſecet in punctis a b, ipſam
uero c d in uno puncto c, ut in ſecunda figura. quare e f non occurret ſectioni 39.huius
c d. ſi autem ſectioni a b occurrit e f in uno tantum puncto occurrit: nam ſi in duobus
punctis ſectio a b c, quæ ipſi opponitur, non occurret alteri c d. atqui in uno puncto 41.huius



c occurrere ponitur. quòd ſi a b c ſectionem a b e in duobus punctis a b ſecet:
ut in tertia figura, occurret quidem e f ſectioni a b e, ſectioni uero d non occurret,
atque ipſi a b e occurrens non occurret ad plura puncta, quàm duo. ſi uero a b c d 35.huius
utramque ſecet in uno puncto, ut in quarta figura, e f nulli ipſarum in duobus pũctis 40.huius
occurret. ergo propter ea, quæ dicta ſunt, & ipſorum conuerſa, ſectiones a b c d, e f
oppoſitis ſectionibus b e, c f non occurrent ad plura puncta, quàm quatuor. At ſi ſectiones
ad eaſdem partes concaua habeant: atque altera alteram in quatuor punctis
a b c d ſecet, ut in quinta figura, ſectio e f alteri non occurret. rurſus enim erit a b oppoſitis 42.huius



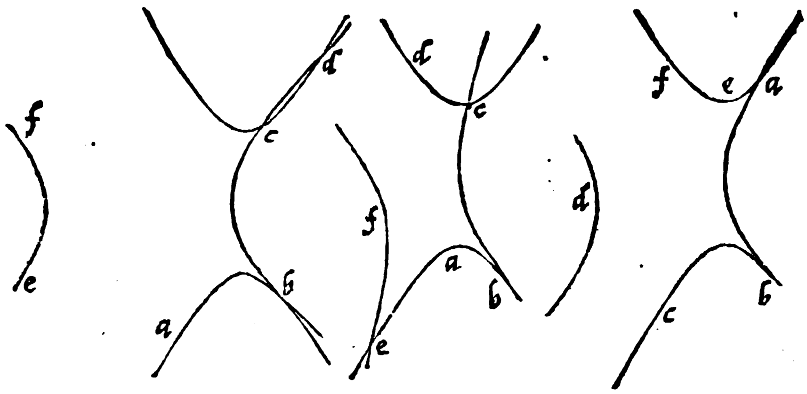
ſectionibus a b c d e f occurrens ad plura pũcta, quàm quatuor. ſed neque c d 36.huius
occurret ipſi e f. ſi autem, ut in ſexta figura, ſectio a b c alteri occurrat in tribus pun 44 huius

ctis, e f alteri in uno tantum puncto occurret. & eodem modo in reliquis dicemus. Quoniam igitur iuxta omnes diſtinctiones conſtat illud, quod propoſitum eſt, oppoſitæ ſectiones oppoſitis ad plura puncta, quàm quatuor, non occurrent.

THEOREMA LIIII. PROPOSITIO LIIII.

Si oppoſitæ ſectiones oppoſitas in uno puncto contingant; non occurrent ſibi ipſis ad alia puncta plura, quàm duo.

Sint oppoſitæ ſectiones a b c d: & aliæ b c d, e f: & b c d contingat a b in puncto b, conuexa habens è regione ſita: occurratq; primum b c d ſectio ipſi c d in duobus pũctis c d, ut in prima figura apparet. Quoniam igitur b c d in duobus punctis ſecat, 39.huius cõuexa habens è regione ſita, ſectio e f ipſi a b non occurret. Rurſus quoniam b c d 52.huius contingit a b in b, conuexa habens è regione ſita, non occurret e f ſectioni c d. quare e f nulli ſectionum a b, c d occurret. occurrunt igitur ſibi ipſis ad duo tantum 52.huius puncta c d. ſed b c ſecet c d in uno puncto c, ut in ſecunda figura. ergo e f ſectioni quidẽ



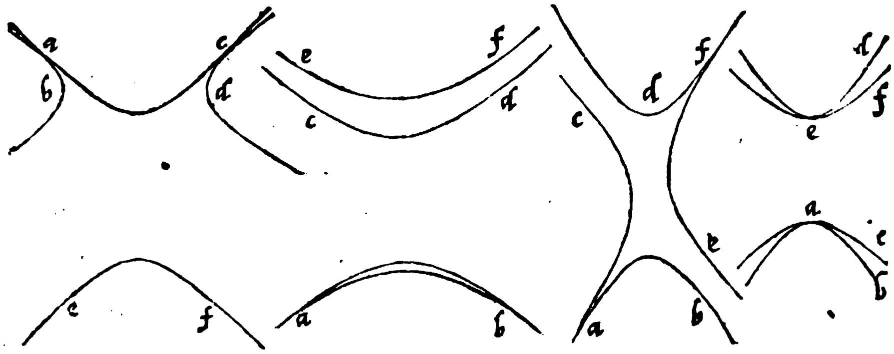
c d non occurret; ipſi uero a b occurret in uno puncto tantum; ſi enim in duobus 39.huius punctis, non occurret b c ipſi c d. atqui in uno puncto occurrere ponebatur. Quòd 52.huius ſi b c non occurrat ſectioni d, ut in tertia figura, propter ea, quæ dicta ſunt, e f ipſi d 35.huius non occurret: & non occurret ipſi a b ad plura puncta, quàm duo. At uero ſi ſectiones ad eaſdem partes concaua habeant, demonſtrationes eædem accommodabũtur. quare iuxta omnes diſtinctiones illud, quod propoſitum eſt, ex iam demonſtratis manifeſto conſtare poteſt.

THEOREMA LV. PROPOSITIO LV.

Si ſectiones oppoſitæ oppoſitas contingant in duobus punctis; in alio puncto ſibi ipſis non occurrent.

Sint oppoſitæ ſectiones a b, c d: & aliæ a c, e f: & primum in punctis a c ſe ſe contingant, ut in prima figura. Quoniam igitur a c utramque a b, c d contingit in punctis 49.huius a c, ſectio e f nulli ipſarum occurret. Contingant autem ſe ſe, ut in ſecunda figura. ſi- 51.huius militer c d ipſi e f non occurrere demonſtrabitur. ſed contingant ut in tertia figura, ſectio quidem c a ſectionem a b in a; ſectio uero d ipſam e f in f. & quoniam c a cõtingit a b, conuexa habens è regione ſita, e f ſectioni a b non occurret. rurſus quoniam

niam fd contingit e f, non occurret c a ipſi d f. Denique ſi c a contingat a b in a, & e f contingat e d in e, habentes concaua ad eaſdem partes, ut in quarta figura, in alio



puncto ſibi ipſis non occurrent: neque e f occurret ipſi a b. iuxta omnes igitur diſtinctiones ex iam demonſtratis conſtat illud, quod proponebatur. 50. huius

FED. COMMANDINVS.

Et quoniam c a contingit a b, conuexa habens è regione ſita.] *Vide ne hic locus corruptus ſit, uel figura ipſa, nam cum c a contingat a b, quæ ipſi opponitur, uidelicet e f oppoſitæ ſectioni f d ex quinquageſima ſecunda huius occurrere non poteſt.*

QVARTI LIBRI APOLLONII FINIS.

SERENI

ANTINSENSIS PHILOSOPHI
LIBRI DVO.

VNVS DE SECTIONE CYLINDRI,
ALTER DE SECTIONE CONI.

A' FEDERICO COMMANDINO VRBINATE
E' GRAECO CONVERSI, ET
COMMENTARIIS ILLVSTRATI.

CVM PRIVILEGIO PII IIII. PONT. MAX.
IN ANNOS X.

BONONIAE,
EX OFFICINA ALEXANDRI BENATII.
M D LXVI.

FRANCISCO MARIAE II. GVIDI VBALDI VRBINATVM DVCIS PRIMOGENITO.

VERISSIMVM illud græci tragici dictum eſſe, πόνοι πόνω πόνον φέρειν cum ſæpe aliàs in rebus mathematicis illuſtrandis ſum expertus, Illuſtriſſime Princeps, tum maxime proximis his diebus, cum Apollonii Pergæi libros conicorum, difficiles in primis, atque obſcuros ſummo labore, atque incredibili animi contentione conuerti. neque enim eo contentus fui, quod ſatis eſſe ad leuandam priſtinam aliqua ex parte difficultatem uidebatur, ſed rei dilucidandæ cauſſa commentarios etiam, atque expoſitiones aliquot mihi addendas exiſtimaui. nunc uero eiuſdem rei amore captus, ac quodammodo erudito eiuſmodi labore delectatus, addo propter argumenti ſimilitudinem libros Sereni Antinſenſis duos, quorum in primo agitur de ſectione cylindri, in ſecundo de ſectione coni, quæ fit per uerticem, ex qua uariæ triangulorum ſpecies oriuntur. quæ res cum maxima contemplatione digniſſima, tum à nemine alio adhuc litteris, memoriæq; mandata eſt. Hoc autem eò libentius feci, quòd ſciebam Sereni libros ab omnibus mathematicarum ſcientiarum ſtudioſis uehementisſime expeti, quippe qui neque latinitate donati, neque vulgati eſſent, ſed ſcripti apud paucos tantum legerentur. Viſum eſt autem mihi conuenire, cum Apollonium GVIDO VBALDO patri tuo Illuſtriſſimo dicarem, Serenum nomini tuo conſecrare. primum quòd quæ mea in patrem, eadem in filios obſeruantiæ ratio eſt; deinde quòd hæc ipſa ad artem, ſtudiumq; rei bellicæ mirifice pertinent. quo uſque adeo ipſe teneris, ut procedente ætate facile ſi fortuna paululum aſpirauerit, cum ſcientia, tum uirtute maiorum, in primiſq; aui tui gloriam, cuius nomen refers, ſuperaturus eſſe uidearis. ut illud omittam, quòd pueritiam tuam non minus mathematicis diſciplinis percipiendis traduxiſti, quàm latinis, ut aſſolet, litteris, in quibus excellis. Quæ quoniam uerisſima eſſe nemo dubitat, qui ego iuſtius hoc munere erga domum veſtram, teq; ipſum pietatis teſtimonium, atque induſtriæ qualiſcunque monumentum dicarem, quam tibi, neminem habui. Vale.

Federicus Commandinus.

SERENI ANTINSENSIS PHILOSOPHI LIBER PRIMVS DE SECTIONE CYLINDRI.

CVM COMMENTARIIS FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS.

SERENVS CYRO S. D.

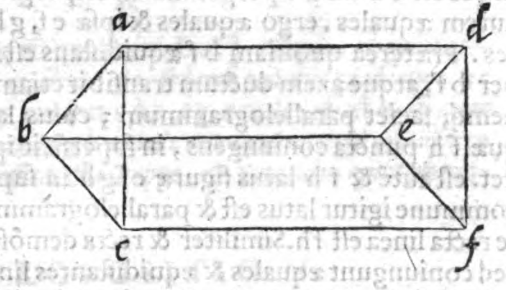
CVm uideam quamplurimos, amice Cyre, eorum qui in geometria uerſantur, arbitrari tranſuerſam Cylindri ſectionem longe diuerſam eſſe ab ea ſectione coni, quæ ellipſis appellatur; nõ committendum putaui, ut ab errore non auerterem tum eos ipſos, qui ita arbitrantur, tum eos, qui ab his illud ita eſſe perſuaderi poſſent. quamquam abſurdum omnino uideatur, Geometras ipſos de problemate geometrico ſine demonſtratione quicquam affirmare: oratio enim probabilis, & ſine ullo artificio à geometria alieniſſima eſt. Itaque quoniam hi ita ſentiunt, nos autem non aſſentimur, libuit geometrice demonſtrare unam, atque eandem ſpecie ſectionem neceſſario fieri in utriſque figuris, in cono, inquam, & Cylindro, ſi modo ratione quadam, & non ſimpliciter ſecentur. Quemadmodum autem ueteres, qui conica tractarunt, non contenti communi intelligentia coni, nempe quod à triangulo rectangulo conſtitueretur: uniuerſalius & artificioſius de ipſo conſcripſerunt, non tantum rectos, ſed etiam ſcalenos conos ſtatuentes: ita & nobis faciendum erit. nam cum cylindri ſectionem nobis tractandam propoſuerimus, non ſolum rectum cylindrum, ſed etiam ſcalenum ponentes, quæ ad hanc contemplationem pertinent, latius, fuſiusq; explicabimus. & quãquam certo ſciam neminem fore, qui facile admittat, non omnem conum rectum eſſe, communi notione id ſuadente: tamen contemplationis gratia melius eſſe iudicaui uniuerſaliori diffinitione ipſum cõprehendere: etenim cylindri recti ſectio eadem eſt, quæ ellipſis recti coni. ſed cylindro uniuerſalius accepto, ſectionem eius omni pariter ellipſi eandem eſſe neceſſario continget. id quod nos in hoc libro probare inſtituimus. Attendenda autem prius hæc ſunt, quæ ad propoſitã materiam diffinite oportet,

DIFFINITIONES.

1 Si igitur duorum circulorum æqualium, & æquidiſtantium diametri ſemper inter ſe ſe æquidiſtãtes, & ipſæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur: & unà circumferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quouſque rurſus in eum locum reſtituatur, à quo moueri cœpit: ſuperficies, quæ à circumlata linea deſcribitur, cylindrica ſuperficies uocetur; quæ quidem & in infinitum augeri poteſt, linea ipſa deſcribente in infinitum producta. 2 Cylindrus, figura, quæ circulis æquidiſtantibus, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta continetur. 3 Cylindri baſis, circuli ipſi. 4 Axis, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur. 5 Latus autem cylindri linea, quæ cum recta ſit, & in ſuperficie ipſius cylindri: baſes utraſque contingit; quam & circumlatam cylindri ſuperficiem deſcribere antea diximus. 6 Cylindrorum, recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus. 7 Scaleni autem, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent. Sed & hæc ex Apollonio ſcire oportet. 8 Omnis lineæ curuæ, in uno plano exiſtentis diameter uocetur recta linea, quæ quidem ducta à linea curua, omnes, quæ in ipſa ducuntur rectæ cuipiam æquidiſtantes bifariam diuidit. 9 Vertex lineæ, terminus ipſius rectæ, qui eſt ad lineam. 10 Ordinatim ad diametrum applicari dicitur unaquæque linearum æquidiſtantium. 11 Coniugatæ diametri dicantur, quæ quidem à linea ordinatim ductæ ad coniugatas diametros, ipſas ſimiliter diuidunt. 12 His igitur poſitis & in tranſuerſis ſectionibus cylindri punctum, quod diametrum bifariam diuidit, centrum ſectionis uocetur. 13 Quæ à centro ad lineam perducitur, dicatur ea, quæ ex centro. 14 Quæ uero per cẽtrum ſectionis tranſit, æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt, & terminatur ab ipſa linea, ſecunda diameter dicatur. demonſtrabitur enim lineas omnes in ſectione ductas, quæ quidem diametro æquidiſtant bifariam ſecare. 15 Illud etiam determinãdum eſt. Similes ellipſes eſſe, quarum coniugatæ diametri ſe ſe ad angulos æquales ſecantes eandem habent proportionem.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si duæ rectæ lineæ ſe ſe tangentes, duabus rectis lineis ſe ſe tangentibus æquidiſtent, & ſint utræque utriſque æquales: quæ terminos earum coniungunt rectæ lineæ, & ipſæ æquales, & æquidiſtantes erunt.

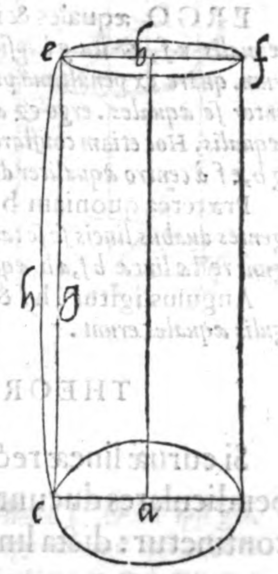


SINT duæ rectæ lineæ ſe ſe tangentes a b, b c; quæ duabus rectis lineis ſe ſe tangentibus d e, e f æquidiſtent: ſitq; a b æqualis d e, & b c ipſi e f: & iungantur a c, d f. Dico lineas a c, d f & æquales eſſe, & æquidiſtãtes. iunctis enim a d, b e, c f, quoniam a b ipſi d e eſt æ-
qualis, & æquidiſtans; erit a d & æqua- 33. primi
lis, & æquidiſtans ipſi b e. Rurſus quoniam b c ipſi c f eſt æqualis, & æquidi-
ſtans; & c f æqualis & æquidiſtans erit ipſi b e. Quare a d, c f æquales inter ſe ſe & æ- 30. primi
quidiſtantes erunt: ac propterea ipſæ quoque a c, d f. quod propoſitum fuerat oſtendendum.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

S I cylindrus plano ſecetur per axem, ſectio parallelogrammum erit.

SIT cylindrus, cuius baſes circuli circa centra a b: axis autem a b recta linea: & ducatur per a b planum ſecans cylindrum, faciensq; ſectiones, in circulis quidem rectas lineas c d, e f, quæ diametri ſunt; in ſuperficie autem cylindri ipſas e g c, d f. Dico utramque linearum e g c, d f rectam eſſe. Si enim fieri poteſt, non ſint rectæ: & ducatur recta e h c. Quoniam igitur linea e g c & e h c recta in plano e d conueniunt ad e c puncta: atque eſt e g c in ſuperficie cylindri: ipſa e h c in cylindri ſuperficie non erit. &
quoniam circuli a b æquales ſunt, & æquidiſtantes; ſecan- 16. undecimi
turq; à plano e d communes ipſorum ſectiones æquidiſtantes erunt, atque etiam æquales, cum diametri ſint æqualium circulorum. Itaque ſi manentibus a b punctis diametros a c, b e intelligamus circumferri, & unà cum ipſis rectam lineam e h c circa circulos a b, quouſque rurſus in eundem locum reſtituantur, à quo moueri cœperunt: recta e h c cylindri ſuperficiem deſcribet: & erit h punctum in ſuperficie ipſa. atqui erat extra ſuperficiem; quod fieri nullo modo poteſt. recta igitur linea eſt e g c. ſimiliter & recta eſt ipſa
f d: & coniungunt æquales, & æquidiſtantes lineas e f, c d. pa- 33. primi
rallelogrammum igitur erit ipſum e d. quod oſtendiſſe oportebat.

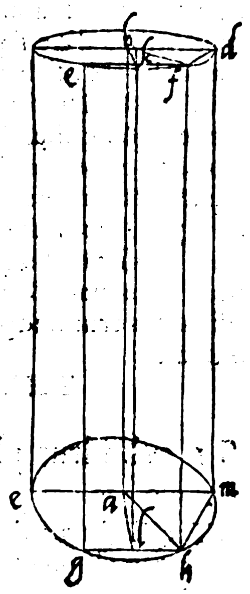


THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si cylindrus plano ſecetur æquidiſtante ei parallelogrammo, quod fit per axem, ſectio parallelogrammum erit, æquales ipſi angulos habẽs.

SIT cylindrus, cuius baſes circuli circa centra a b; & axis a b recta linea; parallelogrammum autem per axem c d: & ſecetur cylindrus altero plano e f g h, æquidiſtante ipſi c d parallelogrammo; quod faciat ſectiones, in baſibus quidem rectas lineas e f, g h; in ſuperficie autem cylindri ipſas e g, f h. Dico figuram e g h f parallelogrammum eſſe, æquiangulum ipſi c d. Ducatur à centro b ad e f perpendicularis b k: perq; lineas k b, b a ducto plano, communes ſectiones ſint a l, k l: & iungantur b f, a h.
Quoniam igitur circulus a circulo b æquidiſtat; & c h planum plano c d: ſecanturq; 16. unde.
ab ipſo a b k l plano: linea a l æquidiſtabit lineæ b k; & k l ipſi b a. quare k a paralle- 34. primi
logrammum eſt: ideoq; linea k l æqualis eſt lineæ b a; & b k ipſi a l. Et quoniam b k 10. unde.
quidem ipſi a l æquidiſtat, k f uero ipſi l h: & b k f angulus æqualis erit augulo a l h.

atque eſt b k ad k f perpendicularis. perpendicularis eſt igitur a l ad ipſam l h. ſunt A autem æquales. ergo æquales & ipſæ e f, g h, & æquidiſtan- B tes. Præterea quoniam b f æquidiſtans eſt ipſi a h; planum per b f, atque axem ductum tranſibit etiam per a h: ſectionemq; faciet parallelogrammum; cuius latus recta linea, quæ f h puncta coniungens, in ſuperficie ipſius cylindri exiſtet. eſt autẽ & f h latus figuræ e f g h in ſuperficie cylindri. commune igitur latus eſt & parallelogrammi per axem. quare recta linea eſt f h. Similiter & recta demõſtrabitur ipſa e g. Sed coniungunt æquales & æquidiſtantes lineas e f, g h. ergo ipſum e h parallelogrammum erit. Dico inſuper & æquiangulum eſſe c d parallelogrammo. Quoniam enim duæ lineæ d b, b f duabus lineis m a, a h æquidiſtant; ſuntq; quatuor lineæ æquales; & ipſæ f d, m h inter ſe æquales erunt, & æquidiſtantes, ex primo theoremate. ergo & æquales, & æquidiſtan- C tes ipſæ f h, d m. eſt autem & l h ipſi a m æquidiſtans. angulus igitur l h f parallelogrammi e h æqualis eſt angulo a m d parallelogrammi c d. Quare parallelogrammum e h parallelogrammo c d æquiangulum erit.



COMMENTARIVS.

A ERGO æquales & ipſæ e f, g h, &c.] *Nam cum ſit b k ad e f perpendicularis, erit e k* 5. tertij. *æqualis k f, & ita g l ipſi l h: ſed æquales ſunt b f, a h, ſemidiametri ſcilicet æqualium circulorum. quare ex penultima primi quadratum k f æquale erit quadrato l h; & idcirco lineæ k f, l h inter ſe æquales. ergo & æquales ipſæ e k, g l: & addita utrinque æquali, erit tota e f toti g h æqualis. Hoc etiam conſtare poteſt ex 14. tertij. ſunt enim a, b circuli inter ſe æquales; & lineæ g h, e f à centro æqualiter diſtant.*

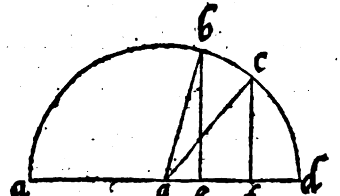
B Præterea quoniam b f æquidiſtans eſt ipſi a h.] *Sunt enim duæ lineæ b k, k f ſeſe tangentes duabus lineis ſeſe tangentibus a l, l h æquales, & æquidiſtantes. quare quæ ipſas coniungunt rectæ lineæ b f, a h æquales erunt, & æquidiſtantes, ex prima huius.*

C Angulus igitur l h f &c.] *Ex decima undecimi, & eadem ratione reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si curuæ lineæ recta ſubtendatur; & quæ à linea ad ſubtenſam perpendiculares ducuntur, poſſint æquale ei, quod ipſius ſubtenſæ partibus continetur: dicta linea circuli circumferentia erit.

SIT curua linea a b d; & quæ ei ſubtenditur recta a d: ducantur autem b e, c f perpendiculares ad ipſam a d: ponaturq; quadratum b e æquale rectangulo a e d, & quadratum c f æquale ipſi a f d. Dico lineam a b d circuli circumferentiam eſſe. ſecetur enim a d bifariam in puncto g, & iungantur g b, g c. Quoniam igitur quadratum g d æquale eſt quadrato b e, & quadrato g e: quadratum autem b g æquale quadratis g e, e b: erit linea b g ipſi g d æqualis. & ſimiliter demonſtrabitur c g æqualis g d, & aliæ eodem modo. Semicirculus igitur eſt linea a b d.

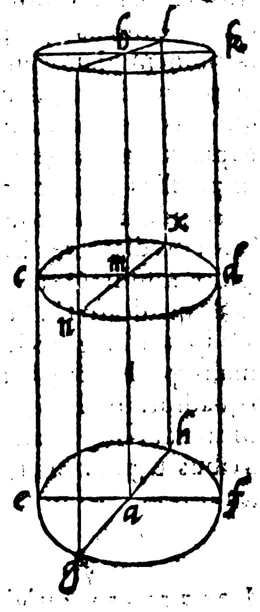


COMMENTARIVS.

QVONIAM igitur quadratum g d æquale eſt quadrato b e.] *Eſt enim ex quinta ſecundi quadratum g d æquale rectangulo a e d, & quadrato g e. ſed cum ponatur quadratum b e æquale rectangulo a e d: erit quadratum g d duobus quadratis b e, e g æquale: & eſt quadratum g b æquale iiſdem ex penultima primi. Ergo quadratum g b æquale erit quadrato g d; & idcirco linea g b ipſi g d eſt æqualis. Hoc autem demonſtratum eſt à Pappo, & Eutocio in quintam propoſitionem primi libri conicorum Apollonij.*

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

SI cylindrus plano baſibus æquidiſtante ſecetur; ſectio circulus erit, centrum habens in axe.



Sit cylindrus, cuius baſes quidem circuli a b; axis autem a b recta: & ſecetur plano
baſibus æquiſtante, quod faciat ſectionem in ſuperficie cylin
dri lineam c x d. Dico ipſam c x d circuli circumferentiam
eſſe. Deſcribantur in circulo a diametri e f, g h: & per utram-
que ipſarum, & axem ducantur plana cylindrum ſecantia;
quæ faciant ſectiones parallelogramma ipſa: & ſit parallelo-
grammi e k, & plani c x d communis ſectio c d: parallelo-
grammi autem g l, & eiuſdem plani communis ſectio n x.
Quoniam igitur planum c x d æquidiſtat circulo a: & ſecan-
tur à plano e k: linea c d lineæ e f eſt æquidiſtans: & eadem
ratione linea n x æquidiſtans ipſi g h. Itaque quoniam b a
utrique c e, d f æquidiſtat; & eſt e a æqualis a f: erit c m ipſi A
m d æqualis. Similiter quoque cum ſit g a æqualis a h: & n m
æqualis erit m x. Sunt autem a e, a g æquales. ergo & m c,
m n æquales erunt. quare omnes m c, m d, m n, m x inter ſe
æquales. & ſimili ratione aliæ æquales oſtendentur, quæcun-
que à puncto m ad lineam c x d pertinent. circulus igitur eſt B
ſectio c x d, qui centrum habet in linea a b. Illud uero mani-
feſte patet. nam cum punctum m ſit in tribus planis; & in ip-
ſa a b communi planorum ſectione neceſſario erit, hoc eſt
in ipſo axe.

COMMENTARIVS.

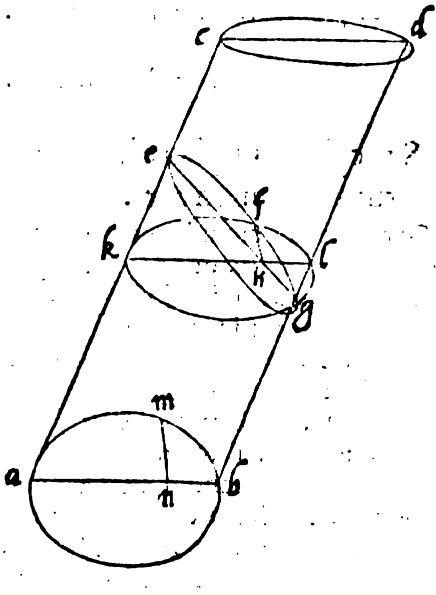
Erit c m ipſi m d æqualis.] *Nam cum & linea c d æquidiſtet lineæ e f, & n x ipſi g h,* A
parallelogramma erunt ipſa e m, m f, g m, m h; & ideo linea c m æqualis ipſi e a; m d ipſi a f; n m
ipſi g a; & m x ipſi a h. quare æqualibus exiſtentibus e a, a f, g a, a b: & ipſæ c m, m d, m n, m x
æquales erunt.

Circulus igitur eſt ſectio c x d, qui centrum habet in linea a b.] *Sequitur ex demon-* B
ſtratis ſectionem eiuſmodi non ſolum circulum eſſe, ſed & æqualem circulis baſium; quod ipſe Se-
renus tanquam notum omiſit. Cum enim parallelogrammum ſit e d: linea c d diameter ſectionis
æqualis eſt diametro baſis e f. quare & circulus circulo æqualis erit.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

SI cylindrus ſcalenus plano per axem ſecetur, ad rectos angulos ipſi baſi: ſecetur autem & altero plano, recto ad parallelogrammum per axem, quod faciat communem ſectionem in parallelogrammo rectam lineam, æquales angulos continentem iis, qui ſunt parallelogrammi, non autem ipſius baſibus æquidiſtantem: ſectio circulus erit. uocetur autem talis ſectio ſubcontraria.

Sit cylindrus ſcalenus, cuius parallelogrammum per axem a d, ad rectos angulos exiſtens ipſi baſi: ſecetur autem cylindrus & altero plano e f g, ad parallelogrammum a d recto, quod in ipſo communem ſectionem faciat, rectam lineam e g baſibus a b, c d minime æquidiſtantem: ita ut contineat angulum g e a æqualem angulo e a b; angulum uero e g b æqualem ipſi a b g. Dico ſectionem e f g circulum eſſe. Sumatur aliquod punctum in linea e g, quod ſit h: & ad rectos angulos ipſi e g ducatur h f in e f g
4 diff. undecimi plano. ergo f h perpendicularis eſt ad planum a d. ducatur per h ipſi a b æquidiſtans k h l: ponaturq; ipſi a b ad rectos angulos m n: & per f h, k l ducatur planum, faciens ſectionem k f l. Quoniam igitur m n in baſis plano exiſtens, perpendicularis eſt ad a b communem planorum ſectionem; erit ipſa
6 undecimi m n perpendicularis ad planum a d. quare
15 f h, m n æquidiſtantes ſunt. Sed & æquidiſtantes ipſæ k l a b. ergo æquidiſtantia quoque,
per præcedente quæ per illas tranſeunt plana. Sectio igitur k f l æquidiſtans eſt baſi: ideoq; k f l circulus eſt, & eius diameter k l, cui ipſa f h ad rectos
8. & 17. ſexti angulos inſiſtit. Quare rectangulum k h l eſt
6. primi æquale quadrato f h. At rectangulo k h l æquale eſt ipſum e h g rectangulum, cum ſit e h
A æqualis ipſi h k, & g h ipſi h l, propterea quòd ad baſes e k, l g anguli æquales ſunt. ergo quadratum f h æquale eſt rectangulo e h g; atque eſt f h ad e g perpendicularis. ſimiliter autem & ſi ad e g alia ducatur æquidiſtans ipſi f h, poterit æquale ei, quod
B partibus e g continetur; circulus igitur eſt e f g ſectio, cuius diameter e h g recta linea.



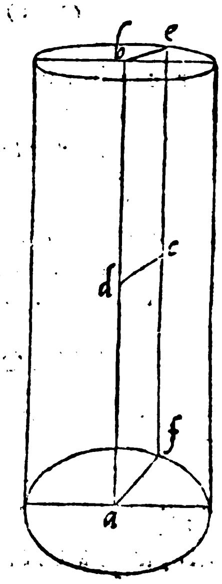
COMMENTARIVS.

A PROPTEREA quòd ad baſes e k, l g anguli æquales ſunt.] *Poſitum enim eſt angulum g e a æqualem eſſe angulo e a b, & e g b ipſi a b g. Quòd cum anguli e a b, e k l æquales ſint,*
29. primi. *erunt & ipſi h e k, h k e æquales: & ita æquales eorum coalterni h g l, h l g.*

B Circulus igitur eſt e f g ſectio.] *Ex quarta huius.*

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII

Cylindro dato, & puncto in ſuperficie eius; per dictum punctum latus cylindri ducere.



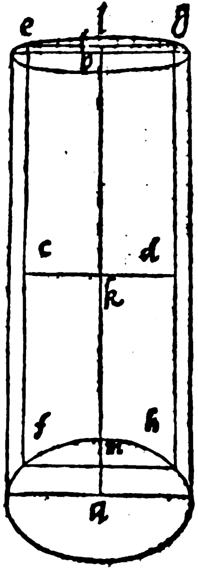
Sit cylindrus, cuius baſes circuli a b; axis a b recta linea; & datum punctum in eius ſuperficie c: oporteat autem per c ducere cylindri latus. Agatur à puncto c perpendicularis ad lineam a b, quæ ſit c d: & per a b, c d lineas ducatur planum cylindrum ſecans. ſectio igitur per c tranſibit, & faciet in ſuperficie rectam lineam e c f, quæ quidem cylindri latus erit.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si in ſuperficie cylindri duo puncta ſumātur non exiſtentia in latere parallelogrammi per axem: quæ dicta puncta coniungit recta linea intra cylindri ſuperficiem cadet.

Sit cylindrus, cuius baſes circuli a b: ſumanturq́; in ſuperficie eius duo puncta c, d, quæ non ſint in uno latere parallelogrammi per axem: & iungatur c d. Dico ipſam c d intra cylindri ſuperficiem cadere. Si enim fieri poteſt, uel in ſuperficiem eius, uel extra ſuperficiem cadat. & quoniam puncta c d non ſunt in latere cylindri: ducatur per c quidem latus e c f: per d uero ipſum g d h: & iungantur e g, f h. ergo e g f h intra circulos cadent. Sumatur aliquod punctum in linea c d, quod ſit k. uel igitur k erit in ſuperficie cylindri, uel extra. Sit primum in ſuperficie: & per k ducatur latus cylindri, l k m recta linea: quæ quidem cadens in circumferentias e g, f h ſi producatur neutram rectarum e g, f h ſecabit. quare l m non erit in plano f e g h. ſed punctum k eſt in ipſa l m. non igitur k erit in plano f e g h. Quoniam autem c d eſt in ipſo f e g h plano; & in c d eſt punctum k: erit k in eodem f e g h plano. Quare k in dicto plano erit, & non erit. quod fieri non poteſt. non igitur c d eſt in ſuperficie cylindri. Sed ſit extra: ſumaturq́; in circumferentia e g aliquod punctum l: & iungatur k l. ergo k l ex utraque parte producta neutram rectarum e f, g h ſecabit. quare non erit in plano f e g h. reliqua uero, ſicuti ſuperius manifeſte concludentur.

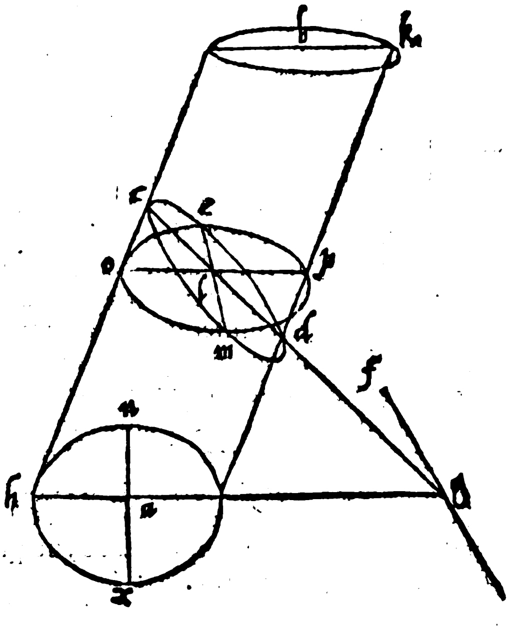
2. tertii.



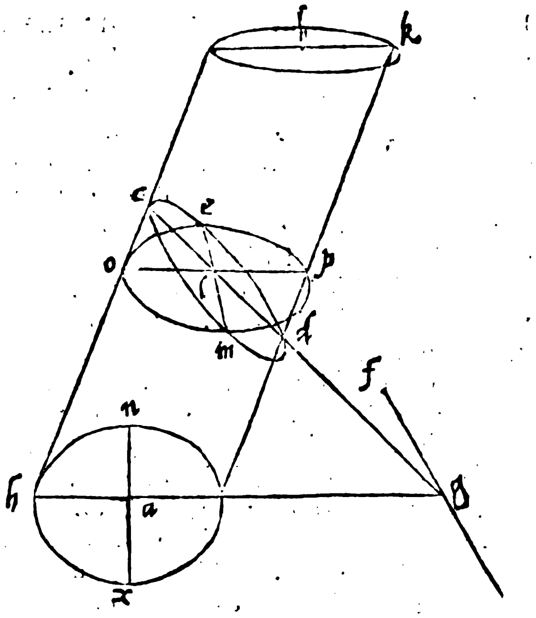
THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si cylindrus plano ſecetur, neque baſibus æquidiſtante, neque ſubcontrarie poſito, neque per axem, neque æquidiſtante ei, quod per axem fit parallelogrammo; ſectio neque circulus, neque parallelogrammum erit.

Sit cylindrus, cuius baſes circuli a b: & ſecetur plano neque æquidiſtante baſibus, neque ſubcontrarie poſito, neque per axem, neque axi æquidiſtante. Vel igitur ſecans planum baſes utraſq; ſecabit, uel alteram tantum, uel neutram. Primum uero neutram ſecet: & faciat in ſuperficie cylindri lineam c e d. Dico c e d ſectionem, neque circulum eſſe, neque rectilineum. Nam rectilineum non eſſe manifeſto conſtat. Sit enim rectilineum, ſi fieri poteſt: & ſumatur latus quodpiam ipſius c e. Quoniam igitur in cylindri ſuperficie duo puncta c e ſumuntur, in eodem latere cylindri non exiſtentia; latus enim in duobus punctis talem lineam non ſecat: erit recta linea, quæ puncta c e coniūgit in ſuperficie ipſius cylindri: quod quidem fieri non poſſe iam demonſtra-

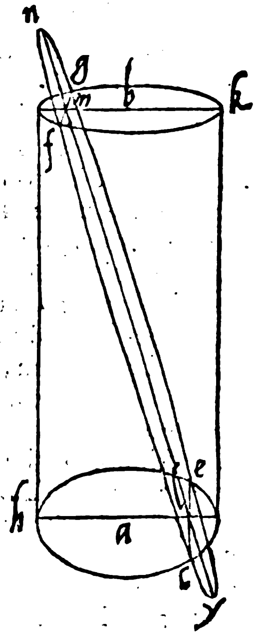


tum eſt. non igitur recta linea eſt c e, neque ipſum c e d rectilineum. demonſtrandum deinceps eſt, neque circulum eſſe. Quoniam enim ſectionis c e d planum plano circuli a non eſt æquidiſtans: ſi plana producantur, ipſa ſe inuicem ſecabunt. ſecent ergo ſe ſe, & ſit ipſorum communis ſectio f g: perq; a centrum ducatur h a g ad f g perpendicularis: & per h a, & axem ducatur planum, faciens in cylindro ſectionem parallelogrammum h k; in ſectione autem c e d rectam lineam c d: & ſecta c d bifariam in puncto l, ducantur ipſi f g æquidiſtantes; per l quidem linea e l m, per a uero ipſa n a x. 9. undecimi quare m e, n x inter ſe ſe æquidiſtantes erunt. ducatur deinde planum per e m, baſi cylindri æquidiſtans, quod faciat 5. huius in cylindro ſectionem o e p m. erit o e p m ſectio circulus, cuius diameter o p bifariam ſecatur in l: nam cum triangula l o c, l p d ſimilia ſint, & ſit c l æqualis l d: erit & o l ipſi l p æqualis. quare e l m circuli o e p diameter erit. & quoniam linea o l lineæ h a æquidiſtat; & linea 10. undecimi l m ipſi a x: angulus o l m angulo h a x eſt æqualis, rectus igitur eſt angulus B o l m, & linea e l perpendicularis ad o p circuli diametrum. ex quo ſequitur quadratum e l æquale eſſe rectangulo o l p. Quoniam autem ſectio non eſt ſubcontraria, an- C gulus l o c angulo o c l æqualis non erit: & idcirco latus o l lateri c l inæquale. non igitur quadratum o l, hoc eſt rectangulum o l p æquale eſt quadrato c l, hoc eſt rectangulo c l d. Sed rectangulo o l p æquale eſt quadratum e l. quare quadratum e l non eſt æquale rectangulo c l d: & propterea ſectio c e d non eſt circulus. demonſtratum autem eſt neque rectilineum eſſe. quæ quidem omnia demonſtraſſe oportebat.



D Simul uero & illud demonſtratum eſt rectam lineam, quæ in ſectione ipſi f g æquidiſtans ducta bifariam diuidit c d, diametro baſis æqualem eſſe.

Sed ſecet planum etiam ipſas baſes, baſim quidem a recta linea c e, ipſam uero b, recta f g: perq; a ducatur h a l perpendicularis ad c e: & per h a diametrum, & axem ducatur planum, quod faciat ſectionem h k parallelogrammum: plani autem f e, & h k parallelogrammi communis ſectio ſit l m. Quoniam igitur planum f e, neq; per axem ductum eſt, E neque axi æquidiſtans; linea l m in infinitum protracta ſecabit ipſum axem. quare & lineam h n axi æquidiſtantem: utræque enim ſunt in h k plano. ſecet in puncto n, & producatur h n utramque in partem. Itaque ſi axe, & circulis manentibus ipſa h n circumferatur unà cum diametris, quouſque redeat in eum locum, à quo moueri cæpit: cylindri ſuperficies ſecundum altitudinem augebitur: & producto plano f e, augebitur etiam ſectio uſque in punctum n. Illud idem continget & ex parte c l. erit ergo n g e r cylindri ſectio, qualis in præcedenti theoremate. ex quibus ſequitur neque circulum eſſe, neque rectilineum. Quare ſectio c e g f neque rectilineum eſt, neque circulus, neque portio circuli; ſed erit ſectio eiuſmodi cylindri ſectionis portio.



COMMENTARIVS.

A QVONIAM igitur in ſuperficie cylindri duo puncta c e ſumuntur.] *Cum enim poſitum ſit cylindrum ſecari plano neque per axem ducto, neque axi æquidiſtante; non erunt dicta duo puncta in uno latere cylindri. Quare ſequitur, ut quæ ea coniungit recta linea intra cylindri ſuperficiem cadat, & non in ipſa ſuperficie. quod in præmiſſa demonſtratum iam fuit.*

B Rectus igitur eſt angulus o l m.] *Eſt enim angulus h a x rectus, quod linea n x æquidiſtat*
lineæ f g. quare & ipſe o l m rectus erit. 29. primi

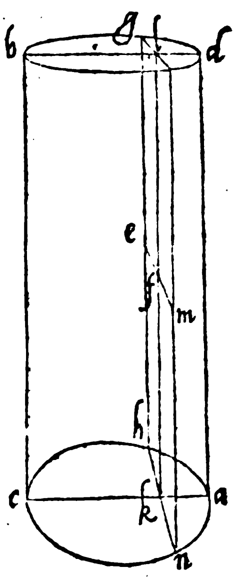
C Angulus l o c angulo o c l æqualis non erit.] *Ex ijs, quæ in ſexta huius demonſtrata ſunt.*

D Simul uero & illud demonſtratum eſt, rectam lineam.] *Demonſtratum namque eſt lineam e l m circuli o e p diametrum eſſe. ergo æqualis erit diametro baſis, cum circuli o e p, h n x ſint æquales. quod & nos proxime oſtendimus in commentarijs in quintam huius.*

E Linea l m in infinitum protracta ſecabit ipſum axem, quare & lineam h n axi æquidiſtantem.] *Demonſtrauit illud Vitellio in propoſitione ſecunda libri primi perſpectiuæ.*

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

SI cylindrus plano per axem ſecetur: ſumatur autem aliquod punctum in eius ſuperficie, quod non ſit in latere parallelogrammi per axẽ: & ab ipſo ducatur recta linea æquidiſtans rectæ cuipiam, quæ in eodem plano exiſtit, in quo cylindri baſis, & ad rectos angulos incidit baſi parallelogrammi per axem: cadet ea intra parallelogrammum; & producta uſque ad alteram partem ſuperficiei ab ipſo parallelogrammo bifariam ſecabitur.



SIT cylindrus, cuius baſes a b circuli, & parallelogrammum per axem c d: ſumatur autem aliquod punctum e in ſuperficie cylindri & ab ipſo ducatur recta linea e f
æquidiſtans rectæ cuipiam, quæ perpendicularis ſit ad c a
baſim parallelogrammi per axem. Dico lineam e f intra c d
parallelogrammum cadere; & ſi ulterius producatur uſque
ad alteram partem ſuperficiei, ab ipſo parallelogrammo bi-
fariam ſecari. Ducatur enim per e linea h e g æquidiſtans
axi, quæ baſis circumferentiam ſecet in h; & per h ducatur
h k æquidiſtans lineæ perpendiculari ad c a, cui etiam æqui-
diſtantem poſuimus e f. ergo & h k ipſam c a ſecabit. Itaq; A
per rectas lineas g h, h k ducatur planum ſecans cylindrum,
quod faciat ſectionem parallelogrammum g n: & iungatur
k l, communis ſectio parallelogrammorũ, c d, n g. Quoniam B
igitur lineæ e f, h k uni, & eidem æquidiſtant; atque eſt h k in
plano k g: & ipſa e f in k g plano erit. quare producta inci-
det in l k, quæ eſt in eodem met plano. linea igitur e f intra
c d parallelogrammum cadet. Perſpicuum autem eſt, ſi ad
alteram partem producatur uſque in punctum m, quod eſt
in ſuperficie cylindri; bifariam ſecari in f. nam cum diameter
c a perpendicularis ſit ad h k: erit h k ipſi k n æqualis. ſed 3. tertii
æquidiſtantes ſunt lineæ m n, l k, g h. ergo m f ipſi f e æqua- C
lis erit.

COMMENTARIVS.

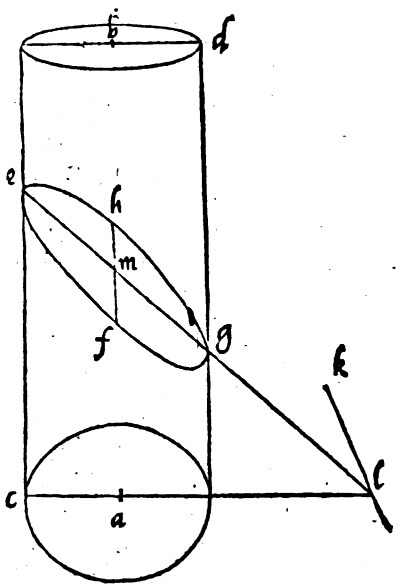
A ERGO & h k ipſam c a ſecabit.] *Ex ſecunda primi Vitellionis. Secabit autem & ad angulos rectos, ex uigeſima nona primi elementorum, quod ipſe poſtea tanquam manifeſtum aſſumit.*

B Quoniam igitur lineæ e f, h k uni & eidem æquidiſtant.] *Lineæ e f, h k uni & eidem æquidiſtantes, & inter ſe ſe æquidiſtabunt: & ducta e h linea, erunt utræque in eodem plano, in quo ipſa e h, hoc eſt in plano k g. quare producta c f incidet in l k æquidiſtantem ipſi g h, & in eodem exiſtentem plano, ex ſecunda primi Vitellionis.*

C Ergo m f ipſi f e æqualis erit.] *Aequidiſtant enim & ipſæ e m, h n, ut dictum eſt. quare parallelogramma ſunt h f, f n. quòd cum æquales ſint h k, k n, & ipſæ e f, f m æquales erunt.*

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

SI cylindrus ſecetur plano, baſis planum extra circulum ſecante: cõmunis autem planorum ſectio perpendicularis ſit ad baſim parallelogrãmi per axem, uel ad eam, quæ in rectum ipſi conſtituitur: rectæ lineæ, quæ à ſectione in ſuperficie cylindri à ſecante plano facta ducuntur, æquidiſtantes lineæ perpendiculari ad baſim parallelogrammi per axem, uel ad eam, quæ in rectum ipſi conſtituitur, in communem ſectionem planorum cadent; & productæ uſque ad alteram ſectionis partem, à cõmuni planorum ſectione bifariam diuidentur: quæ uero perpendicularis eſt ad baſim parallelogrammi per axem, uel ad eam, quæ in rectum ipſi conſtituitur, cylindro recto exiſtente, etiam ad communem planorum ſectionem, parallelogrammi ſcilicet per axem, & ſecantis plani perpendicularis erit; ſcaleno autem exiſtente cylindro non item, præterquam cum parallelogrammum per axem ad ipſam baſim cylindri rectum fuerit.



SIT cylindrus, cuius baſes quidem circuli a b; parallelogrammum autem per axẽ c d: & ſecetur plano, ut dictũ eſt, quod faciat ſectionem e f g h, ita ut plani ſectionis e f g h, & baſis a c cõmunis ſectio ſit recta linea k l, ad ipſam c a l perpendicularis: & à ſectione e f g h ducatur linea f m æquidiſtans ipſi k l, quæ producta pertineat ad alteram partem ſuperficiei in puncto h. Dico lineam f m cadere in e g, & ipſi m h æqualem eſſe. Nam quoniam in ſectione e f g h ducta eſt f m æquidiſtãs k l; intra c d parallelogrammum cadet. Quoniam autem f m eſt in plano e f g h, atque eſt e g communis ſectio ipſius, & parallelogrammi c d: cadet f m in e g; & f m ipſi m h æqualis erit, quod patet ex antecedenti theoremate. Reliquum eſt ut oſtendamus, ſi cylindrus rectus ſit, uel planum c d rectum ad baſim cylindri; lineam k l ad ipſam e g l perpendicularem eſſe. Quoniam enim c d planum ad planum baſis rectum eſt; & k l in baſis plano exiſtens perpendicularis eſt ad c a l communem planorum ſectionem, & ad reliquum ipſius c d parallelogrammi planum perpendicularis erit. Quod ſi planum c d non ſit rectum ad baſim, k l ad l e perpendicularis non erit. Si enim fieri poteſt, ſit 4. unde. 18. k l perpendicularis ad l e: eſt autem & ad l c perpendicularis. quare & ad planum, quod per ipſas tranſit; hoc eſt ad c d. planum igitur per k l, hoc eſt planum baſis ad c d planum rectum erit: quod non ponitur. ergo k l ad l e non eſt perpendicularis.

Ex iam demonſtratis conſtat lineam e g ſectionis e f g h diametrum eſſe: omnes enim, quæ ad ipſam ducuntur, æquidiſtantes lineæ k l, ut f h bifariam diuidit.

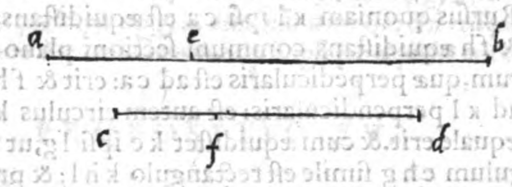
COMMENTARIVS.

ET ad reliquum ipſius c d parallelogrammi planum perpendicularis erit.] *Nam cum planum c d rectum ſit ad baſis planum; linea k l, quæ eſt in eadem baſi, perpendicularis ad c l communem planorum ſectionem, & ad ipſum c d planum perpendicularis erit. quare & ad e g l, & ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano exiſtentes ipſam contingunt.* 4. diff. undecimi 3. diff.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

SI duæ rectæ lineæ ſimiliter ſecentur, erit ut quadratum primæ ad quadratum ſecundæ; ita quod fit ex primæ partibus rectangulum ad rectangulum ex partibus ſecundæ.

Rectæ namque lineæ a b, c d ſimiliter ſecentur in punctis e f. Dico ut quadratum a b ad quadratum c d, ita eſſe rectãgulum a e b ad rectangulum c f d. Quoniam enim ut a e ad e b, ſic c f ad f d; erit componendo, permutandoq; ut a b ad c d, ſic e b ad f d. & rurſus quoniam ut a e ad e b, ita c f ad f d rectangulũ a e b ad rectangulum c f d duplam proportionem habebit eius, quæ eſt e b ad f d; hoc eſt, quæ a b ad c d. ſed & quadratum a b ad quadratum c d duplam eius, quæ eſt a b ad c d proportionem habet. ergo ut quadratum a b ad c d quadratum, ita rectangulum a e b ad rectangulum c f d. quod demonſtrandum proponebatur.



COMMENTARIVS.

Rectangulum a e b ad rectangulum c f d duplam proportionem habet eius, quæ eſt e b ad f d.] *Rectangula enim a e b, c f d ſimilia ſunt, quod latera habeant proportionalia. quare ex corollario uigeſimæ ſexti in dupla ſunt proportione laterum ſimilis rationis. habebit igitur rectangulũ a e b ad ipſum c f d duplã proportionem eius, quæ eſt e b ad f d, hoc eſt quæ a b ad c d. & eadem ratione quadratum a b ad c d quadratum duplam habebit eius. quæ eſt a b ad c d. quare ex undecima quinti ſequitur rectangulum a e b ad ipſum c f d eſſe, ut quadratum a b ad quadratum c d.*

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

Si cylindrus plano ſecetur per axem; & ſecetur altero plano baſis planum ſecante, ita ut communis ſectio baſis, & ſecantis plani perpendicularis ſit ad baſim parallelogrammi per axem, uel ad eam, quæ in rectum ipſi conſtituitur: à ſectione autem ad diametrum ducatur linea communi planorum ſectioni æquidiſtans: poterit dicta linea ſpatium quoddam, ad quod rectangulum diametri ſectionis partibus contẽtum eam proportionem habet, quam diametri ſectionis quadratum ad quadratum diametri baſis.

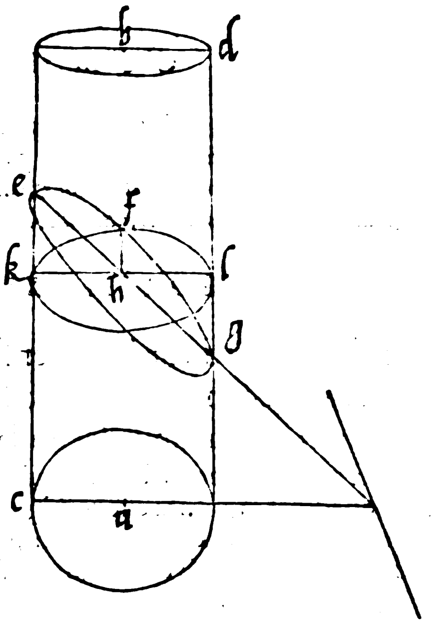
SIT cylindrus, cuius baſes a b circuli; & parallelogrammum per axem c d: ſecetur autem cylindrus plano occurrenti plano baſis ſecundum rectam lineam, quæ ad ipſam c a productam ſit perpendicularis: ſitq́; ſectio facta e f g, & communis ſectio parallelogrammi c d, & ſecantis plani linea e g, diameter exiſtens ſectionis, ut oſtenſum eſt: ſumpto deinde in ſectione quouis puncto f, ab eo ad diametrum ducatur recta linea f h, æquidiſtans communi planorum ſectioni. cadet f h ex iis, quæ demonſtrata ſunt, in ipſam e g. Dico rectangulum e h g ad quadratum f h eam proportionem habere, quam diametri e g quadratum ad quadratum diametri baſis. Ducatur enim per h linea k h l æquidiſtans ipſi c a: & per f h, k l rectas lineas planum ducatur, quod faciat ſectionem k f l. Itaque quoniam linea k l æquidiſtans eſt lineæ c a, & f h æquidiſtans communi planorum ſectioni, quæ in baſis plano exiſtit: & quæ per ipſas tranſeunt plana inter ſe æquidiſtantia erunt. quare circulus eſt ſectio k f l.

in præcedenti

11. huius

15. undecimi

5. huius



A Rurſus quoniam k l ipſi c a eſt æquidiſtans; & f h æquidiſtans communi ſectioni planorum, quæ perpẽdicularis eſt ad c a: erit & f h ad k l perpendicularis: eſt autem circulus k f l. ergo quadratum f h rectangulo k h l

B æquale erit. & cum æquidiſtet k c ipſi l g, ut k h ad h l, ita eſt e h ad h g. ergo rectangulum e h g ſimile eſt rectangulo k h l: & propterea ut rectangulum e h g ad ipſum k h l, hoc eſt ad quadratum f h, ita quadratum diametri e g ad quadratum k l, hoc eſt ad quadratum diametri baſis.

C O M M E N T A R I V S.

A RVRSVS quoniam k l ipſi c a eſt æquidiſtans, & f h æquidiſtans communi planorum ſectioni.] *Sequitur ex his, & decima undecimi angulum f h l æqualem eſſe angulo, qui continetur communi planorum ſectione, & linea c a. quare cum hic rectus ſit, & ille neceſſario rectus erit; & linea f h perpendicularis ad k l, proportionalis erit inter k h, h l. quadratum igitur f h æquale eſt rectangulo k h l.*

8. ſexti 17

B Et cum æquidiſtet k e ipſi l g, erit ut k h ad h l, ita e h ad h g.] *Triangulum enim e h k ſimile eſt triangulo g h l; quòd anguli h ad uerticem æquales ſint: qui uero ad k l recti. reliquus igitur angulus reliquo eſt æqualis: & ut k h ad h e, ita h l ad h g: & permutando ut k h ad h l, ita e h ad h g. quare ex iis, quæ in antecedenti theoremate demõſtrata ſunt, rectangulum e h g ad rectangulum k h l, hoc eſt ad quadratum f h erit, ut quadratum e g ad quadratum k l; hoc eſt ut quadratum diametri ſectionis e g ad quadratum diametri baſis.*

15. primi

4. ſexti

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XIIII.

Recta linea, quæ per punctum, quod diametrum ſectionis bifariam diuidit ordinatim in ſectione applicatur, ſecunda diameter erit.

Sit ſectionis e f g diameter e g, quæ bifariam ſecetur in h: & f h m ordinatim applicetur. Dico f m ſecundam diametrum eſſe ſectionis. Ducatur enim linea n o x æquidiſtans e g: & ducantur n p, x r ipſi f m æquidiſtantes. ergo & n p, x r ordinatim ap-

ex diffinitione.

plicatæ

A plicatæ ſunt. Itaque quoniam quadratum n p ad rectangulum e p g eandem habet proportionem, quam quadratum diametri baſis cylindri ad quadratum diametri ſectionis; & habet quadratum x r ad rectangulum e r g hanc eandem proportionem: erit ut quadratum n p ad rectangulum e p g, ita quadratum x r ad rectangulum e r g. & permutando. eſt autem quadratum n p æquale quadrato x r; parallelogrāmum enim eſt n p r x. ergo & rectangulum e p g
B æquale eſt rectangulo e r g. & ablata ſunt ab æqualibus quadratis e h, h g. quare reliquum quadratum p h reliquo quadrato h r æquale erit. æqualis igitur eſt p h ipſi h r, hoc eſt n o ipſi o x. Eadem ratione & aliæ omnes ipſi e g æquidiſtantes ab f m bifariam ſecabuntur. ergo f m ſecunda diameter eſt ſectionis.

COMMENTARIVS.

A Itaque quoniam quadratum n p ad rectangulum e p g.] *Ex antecedenti theoremate, & conuertendo.*

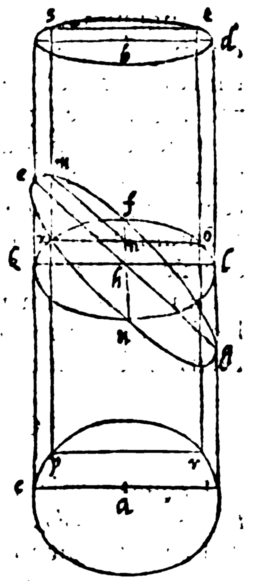
B Et ablata ſunt ab æqualibus quadratis e h, h g.] *Eſt enim ex quinta ſecundi quadratum e h æquale rectangulo e p g, & quadrato p h. Et eadem ratione quadratum e h, hoc eſt h g æquale rectangulo e r g, & quadrato h r. quare ſi à quadrato e h auferatur rectangulum e p g, & ab ipſo h g quadrato auferatur e r g rectangulum æquale ipſi e p g, ut demonſtratum eſt: erit reliquum reliquo æquale, hoc eſt quadratum p h quadrato h r. & idcirco linea p h ipſi h r æqualis erit.* 22. ſexti

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

SI cylindrus plano ſecetur baſis planum ſecante; communis autem ſectio plani baſis, & ſecantis plani perpendicularis ſit ad baſim parallelogrammi per axem, uel ad eam, quæ in rectum ipſi conſtituitur: quæ à ſectione ad diametrum ducitur linea, æquidiſtans communi planorum ſectioni iam dictæ, poterit ſpatium quoddam, ad quod rectangulum diametri partibus contentum eam proportionem habet, quam diametri ſectionis quadratum ad quadratum ſecundæ diametri: quæ uero à ſectione ad ſecundam diametrum ducitur, æquidiſtans diametro, poterit ſpatium, ad quod rectangulum ex ſecundæ diametri partibus eam habet proportionem, quam quadratum ſecundæ diametri ad ipſum diametri quadratum.

Sit cylindrus, & conſtruantur omnia, ſicut in decimo tertio theoremate. Quoniam igitur oſtenſum eſt, rectangulum e h g ad quadratum f h ita eſſe, ut quadratum e g ad quadratum diametri baſis, hoc eſt ad quadratum eius, quæ ordinatim applicata bifariam ſecat ipſam e g, ut demonſtratum eſt in nono theoremate. quæ autem ordinatim applicatur; & bifariam diametrum ſecat, ſecunda diameter eſt, ex præcedenti theoremate. ergo ut quadratum diametri e g ad quadratum ſecundæ diametri, ita rectangulum e h g ad quadratum f h: quod oſtendiſſe oportebat. Sed ponatur punctum h bifariam ſecare diametrum e g, & lineam f h u ordinatim applicatam: erit f u ſecunda diameter. ducatur autem ad ipſam linea m n æquidiſtans e g. Dico rectangulum u n f ad quadratum m n eam proportionem habere, quam quadratum u f ſecundæ diametri ad quadratum diametri ſectionis e g. Ducatur per lineam m n planum æquidiſtans parallelogrammo c d, per axem cylindrum ſecanti. faciet id ſectionem parallelogrammum, quod ſit r s: & communes ſectiones ipſius, & æquidi- 3. huius

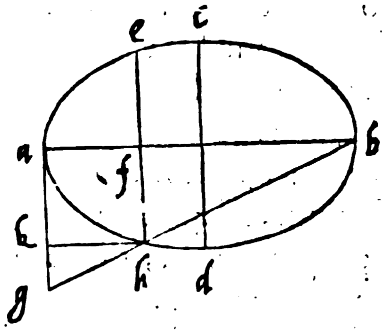
ſtantium planorum ſint s t, x o, p r: ipſius uero, & plani ſectio-
nis e f g communis ſectio m n. Itaque quoniam æquidiſtan-
tia plana c d, r s ſecantur à plano k f l: communes eorum ſe-
ctiones æquidiſtantes erunt. æquidiſtans eſt igitur h k ipſi n x.
10. unde. erat autem & h e ipſi n m æquidiſtans. ergo angulus k h e
æqualis eſt angulo x n m: & cum parallelogrammum s r pa-
rallelogrammo c d æquiangulum ſit, quod demonſtrauimus
in tertio theoremate; angulus s p r angulo e c a æqualis erit,
hoc eſt s x o ipſi e k h. Similia igitur triangula ſunt e k h,
4. ſexti m x n: quare ut k h ad h e, ita x n ad n m, & ut quadratum k h
22 15. quinti ad quadratum h e, hoc eſt ut quadratum u f ſecundæ diametri
ad quadratum diametri e g, ita quadratum x n ad n m quadra
8. & 17. ſe tum. Sed quadratum x n æquale eſt rectangulo u n f, quod
xti k f l circulus ſit, & h f perpendicularis ad k h, x n. ut igitur
quadratum u f ſecundæ diametri ad quadratum diametri e g,
ita rectangulum u n f ad quadratum m n. quod propoſuimus
demonſtrandum.



THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

SI in cylindri ſectione coniugatæ diametri ſint, & fiat, ut diameter ſectionis ad ſecundam diametrum, ita ſecunda diameter ad aliam quampiam: quæ à ſectione ad diametrum ordinatim applicata eſt, poterit ſpatium, quod adiacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam, quæ inter ordinatim applicatam & ſectionem interiicitur; & deficiens figura ſimili ei, quæ diametro ipſa & tertia proportionali continetur.

Sit cylindri ſectio, cuius diameter quidem a b, ſecunda uero diameter c d, & fiat ut
a b ad c d, ita c d ad a g: apteturq́; a g
ipſi a b ad rectos angulos: & iuncta
b g applicetur e f ordinatim ad a b: &
ducatur f h ipſi a g æquidiſtans, & h k
A æquidiſtans a f. Dico quadratum e f
æquale eſſe rectangulo a h. eſt enim ut
quadratum a b ad c d quadratum, ita
linea a b ad ipſam a g, hoc eſt b f ad
f h: ut autem quadratum a b ad qua-
dratum c d, ita rectangulum b f a ad
quadratum e f: & ut b f ad f h, ita b f a
rectangulum ad rectãgulum h f a; hoc
eſt ad a h rectangulum. quadratum igi-
tur e f æquale erit rectãgulo a h; quod
quidem adiacens tertiæ proportionali a g latitudinem habet a f, & deficit figura g k h, ipſi g a b ſimili. Vocetur autem a b tranſuerſum figuræ latus, & a g latus rectum.



B Ex quibus manifeſte conſtat, cylindri ſectionem a b c ellipſim eſſe.

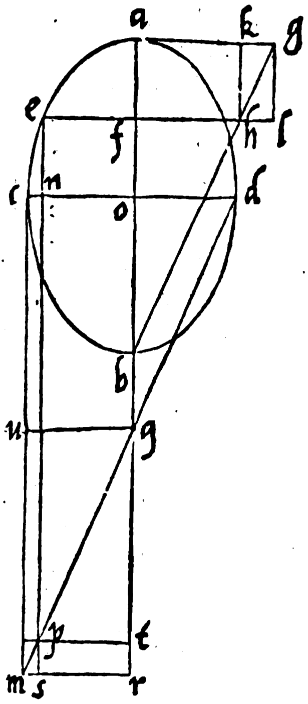
Quæcunque enim hoc loco demonſtrata ſunt ineſſe ipſi ſectioni, omnia ſimiliter & coni ellipſi inſunt, ut demonſtratum eſt in elementis conicis, theoremate quinto decimo, iis, qui eius theorematis uim diligenter perceperint. & nos in noſtris in idipſum commentariis geometrice demonſtrauimus.

COMMENTARIUS.

A EST enim ut quadratum a b, ad c d quadratum, ſic linea a b ad ipſam a g.] *Cum enim*

enim ſint tres lineæ proportionales a b, c d, a g, erit ut quadratum a b ad quadratum c d, ita linea cor.20. ſexti a b ad lineam a g, hoc eſt b f ad f h, quoniam triangulum b f h ſimile eſt triangulo b a g: & ex an- 4.ſexti. tecedente ut quadratum a b ad quadratum c d, ita rectangulum b f a ad quadratum e f. quare re- 11.quinti rectangulum b f a ad quadratum e f eſt, ut b f ad f h. Vt autem b f ad f h, ita & b f a rectangulum 1. ſexti ad rectangulum h f a, hoc eſt ad rectangulum a h. ergo quadratum e f rectangulo a h æquale erit. 9.quinti.

Ex quibus manifeſte conſtat, cylindri ſectionem a b c ellipſim eſſe.] B Sumit hoc loco Serenus in ellipſi lineam, iuxta quam poſſunt, quæ à ſectione ad diametrum ordinatim applicantur, eſſe eam, ad quam ſecunda diameter eandem proportionem habet, quam diameter ad ipſam ſecundam diametrum. quod quidem dicit elici poſſe ex quintadecima primi conicorum Apollonij, ſi quis diligenter eius theorematis uim introſpiciat, additq; ſe idipſum demonſtraſſe in ſuis in Apollonium commentarijs. Sed quoniam ea ad manus noſtras non peruenerunt, nos illud idem tentabimus Apollonij ueſtigijs inſiſtentes.

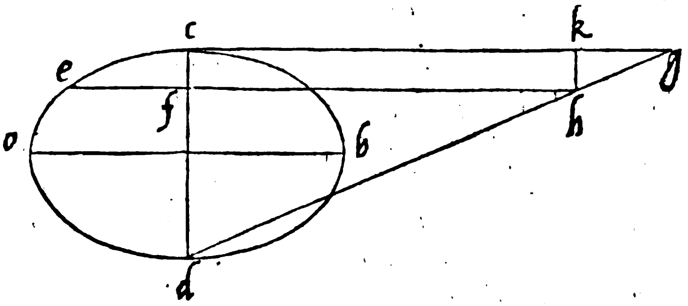


Sit ellipſis, cuius diameter a b, ſecunda diameter c d: & fiat ut a b ad c d, ita c d ad a g, quæ in puncto a aptetur ipſi a b ad angulos rectos: & iungatur b g. ſumpto autem in ellipſi puncto e, ab eo ad diametrum ordinatim applicetur e f; & ab f ad b g ducatur f h æquidiſtans ipſi a g. deinde à punctis h g æquidiſtantes ipſi a f ducantur; h k quidem ad a g; g l uero ad ipſam f h protractam. Dico quadratum lineæ e f æquale eſſe rectangulo a f h, quod adiacet tertiæ proportionali a g, latitudinem habens a f, & deficiens figura g l h ſimili ei, quæ h a g continetur. fiat enim ut c d ad a b, ita a b ad c m: ponaturq; c m ad angulos rectos ipſi c d: & iungatur m d. à puncto autem e ad c d ordinatim applicetur e n, & ab n, & à centro ellipſis, ubi eſt punctum o, ad m d ducantur n p, o q æquidiſtantes ipſi c m; completoq; parallelogrammo c m r o, producatur n p uſque ad m r in punctum s. denique per p q æquidiſtantes ipſi c d ducantur p t ad o r, & q u ad c m. erit quadratum d o æquale rectangulo c q, ex ijs, quæ demonſtrata ſunt ab Apollonio in quinta decima propoſitione iam dicta. Et quoniam ut d c ad c m, ita d o ad o q, & 4. ſexti q u ad u m: atque eſt d o ipſi o c æqualis, hoc eſt ipſi q u: & o q, hoc eſt c u ipſi u m æqualis erit. quare rectangulum c q æquale eſt 1. ſexti rectangulo u r, & rectangulum n u ipſi u s. Et cum rectangula u p, 43.primi. p r inter ſe æqualia ſint, appoſito utrique communi m p, erit u s æquale m t. Sed u s demonſtratum eſt æquale ipſi n u. ergo n u, m t æqualia ſunt: & rurſus communi appoſito u t, totum m q, hoc eſt q c æquale utriſque c p, p q. quare q c excedit c p ipſo p q, quod continetur p t q: eſt autem c q quadrato a o æquale, & c p æquale quadrato e n. Quadratum igitur 5.ſecundi a o excedit quadratum e n rectangulo p t q. Itaque quoniam a b ſecatur in partes æquales in o, & in partes inæquales in f; erit rectangulum b f a unà cum quadrato f o, hoc eſt e n æquale quadrato a o: & propterea quadratum a o excedet quadratum e n, rectangulo b f a. Excedebat autem ipſo p t q rectangulo. quare rectangulum p t q æquale eſt ipſi b f a. Præterea quoniam ut a b ad c d, ita c d ad a g: erit ut b a ad a g, ita quadratum a b ad quadratum c d, hoc eſt quadra- cor.20. ſexti tum a o ad quadratum o d. eſt autem quadrato a o æquale rectangulum q o c, hoc eſt q o d. ut ergo b a ad a g, hoc eſt b f ad f h, hoc eſt rectangulum b f a ad rectangulum a f h, ita rectangulum q o d 15. quiti. ad quadratum o d, hoc eſt rectangulum q t p ad quadratum t p. At rectangulum q t p æquale eſt rectangulo b f a, ut demonſtratum eſt. quare quadratum t p, hoc eſt quadratum e f rectangulo a f h 9. quinti æquale erit. ex quibus ſequitur lineam a g eam eſſe, iuxta quam poſſunt, quæ à ſectione ad diametrum ordinatim applicantur. quod demonſtratum uolebamus.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

SI in cylindri ſectione coniugatæ diametri ſint; & fiat ut ſecunda diameter ad diametrum, ita diameter ad aliam lineam: quæ à ſectione ad ſecundam diametrum ordinatim applicatur poterit ſpatium, quod adiacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam, quæ inter ordinatim applicatam, & ſectionem interiicitur; & deficiens figura ſimili ei, quæ ſecunda diametro, & tertia proportionali inuenta continetur.

Sit cylindri ſectio a b c d: & fiat ut c d ſecunda diameter ad diametrum a b, ita a b ad c g: ponaturq; c g ad rectos angulos ipſi c d; & d g iungatur. deinde ad c d ordinatim applicetur e f: & ducatur f h quidem ipſi c g æquidiſtans; h k uero æquidiſtans c d. Dico quadratum e f parallelogrammo c h æquale eſſe. Quoniam enim ut quadratum c d ad quadratum a b, ita linea d c ad ipſam c g, hoc eſt d f ad f h. Sed ut quadratum c d ad quadratum a b, ita rectangulum d f c ad quadratum e f; quod demonſtratum iam eſt. (15. huius; 1. ſexti.) ut autem d f ad f h, ita rectangulum d f c ad rectangulum h f c, hoc eſt ad c h. ergo quadratum e f æquale eſt rectangulo c h, (9. quinti) quod quidem adiacet tertiæ proportionali c g, latitudinem habens f c, & deficiens figura h k g ſimili ei, quæ d c g continetur.

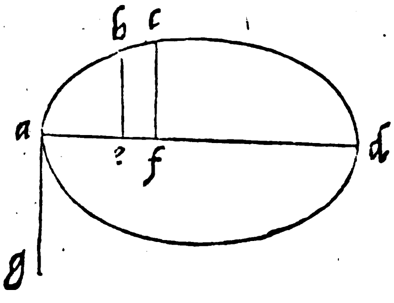


Hæc autem manifeſtiſſime inſunt ellipſi, ut ex quinto decimo theoremate conicorum apparet. Quare ſequitur ſectionem cylindri a b c d neceſſario ellipſim eſſe.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si in ſectione cylindri rectæ lineæ ad diametrum ordinatim applicentur, erunt quadrata earum ad ſpatia contenta lineis, quæ inter ipſas, & terminos tranſuerſi lateris figuræ interiiciuntur, ut rectum figuræ latus ad tranſuerſum: inter ſe ſe uero, ut ſpatia, quæ lineis ſimiliter ſumptis continentur.

Sit cylindri ſectio a b c d, cuius diameter quidem, & tranſuerſum figuræ latus a d: rectum uero latus a g: & ad ipſam a d ordinatim applicentur b e, c f. Dico quadratum b e ad rectangulum a e d ita eſſe, ut g a ad a d. & quadratum b e ad c f quadratum, ut rectangulum a e d ad rectangulum a f d. Quoniam enim ut quadratum ſecundæ diametri ad diametri quadratum, ita eſt quadratum b e ad rectangulum a e d: (15. huius) & a g rectum latus ad tranſuerſum a d: erit ut rectum latus ad tranſuerſum, ita b e quadratum ad rectangulum a e d: & ita ſimiliter quadratum c f ad rectangulum a f d. quare & permutando ut quadratum b e ad c f quadratum, ita erit rectangulum a e d ad rectangulum a f d. quod demonſtrandum proponebatur. Et hæc in ellipſi contingere demonſtratum eſt in conicis elementis, theoremate uigeſimo primo. quamquam & ex aliis multis ſectiones eaſdem eſſe oſtendere poſſumus per ea, quæ ipſis communiter accidunt. Verum principaliora accidentia fere dicta ſunt. & cum hucuſque progreſſus fuerim, non ad me attinet eorum, quæ relinquuntur ſingula perſequentem in alienis uerſari: neceſſe eſt enim eum, qui de ellipſi

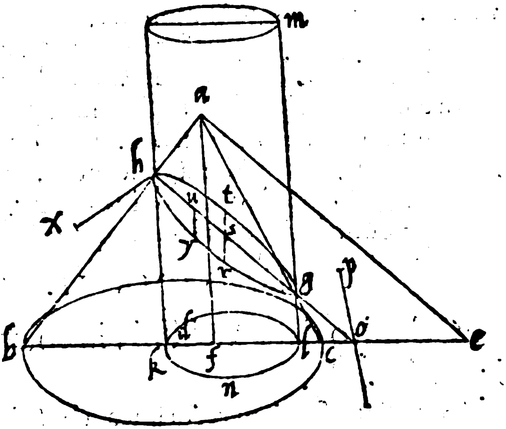


lipſi ſubtiliter diſputare uelit, in medium afferre quæcũque de ipſa ab Apollonio Pergæo conſcripta fuerunt. Sed ſi cui ſorte placeat ulterius contemplari, licebit hæc comparare cum iјs, quæ in primo conicorum libro traduntur: & ex eo illud quod propoſitum eſt concludere. etenim quæcumque in illis contingunt circa coni ſectionem, quæ ellipſis appellatur, eadem & circa ſectionem cylindri contingere ex ijs, quæ hoc loco demonſtrata ſunt, facile intelliget. quare ab his abſtinens, cum lemmatia nonnulla appoſuero, quæ ſectiones eaſdem eſſe quodammodo oſtendunt, ad alia me conuertam.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

Itaque dico fieri poſſe, ut conum ſimul & cylindrum una eademq́; ellipſi ſectos oſtendamus.

Exponatur triangulum ſcalenum a b c in baſi b c, quæ bifariam in d ſecetur, ſitq́; a b maior, quàm a c: & ad rectam lineam c a, & ad a punctum conſtituatur angulus c a e, qui uel maior ſit angulo a b c, uel minor. occurrat autem a e lineæ b c e in puncto e: & inter b e, e c media proportionalis ſit e f: iunctaq́; a f, ducatur in triangulo linea h g ipſi a e æquidiſtans: & per puncta h g ducantur h k, l g m æquidiſtantes a f: & compleatur parallelogrammum k m. deinde per lineam b e ducto plano ad rectos angulos ipſi plano b a e, deſcribatur in eo circa diametrum quidem k l circulus k n l, qui cylindri baſis erit, & eius parallelogrammum per axem k m: circa diametrum uero b c deſcribatur circulus b x c pro baſi coni, cuius triangulum per axem ſit a b c: & protracta h g ad o, ducatur in circulorum plano linea o p ad rectos angulos ipſi b e: perq́; o p, o h ducatur planum, quod faciet ſectionem in cono, cuius baſis circulus b x c. ſit autem ea ſectio h r g. ergo recta linea h g diameter eſt ſectionis: qua quidem bifariam diuiſa in s, ad ipſam ordinatim applicẽtur ſecunda diameter r s t, & alia quæuis y u: fiatq́; ut quadratum h g diametri ſectionis h r g ad quadratum r t ſecundæ diametri eiuſdem ſectionis, ita g h tranſuerſum figuræ latus ad rectũ h χ. Quoniam igitur h k quidem ipſi a f æquidiſtat; h o uero æquidiſtat a e: erit ut quadratum a e ad quadratum e f, ita h o quadratum ad quadratum o k. ſed ut quadratum a e ad rectangulum b e c, hoc eſt ad quadratum e f, ita quadratum h g diametri ſectionis coni ad quadratum r t ſecundæ diametri eiuſdem ſectionis. ut autem quadratum h o ad quadratum o k, ita quadratum h g ad quadratum k l, hoc eſt ita quadratum h g diametri ſectionis cylindri ad quadratum ſecundæ diametri eiuſdem cylindri ſectionis, ſicut demonſtratum eſt ſuperius. quare ſecunda diameter ſectionis cylindri æqualis eſt ipſi r t ſecundæ diametro ſectionis coni: diuiditurq́; h g bifariam in puncto s, & ipſi ad rectos angulos ducitur ſecunda diameter cylindri ſectionis, quemadmodum & ipſa r t. ergo r t ſecunda diameter eſt tum coni, tum cylindri ſectionis. ſimiliter & h g eſt diameter coni ſectionis & cylindri: & propterea punctum r in coni, & cylindri ſuperficie erit. Rurſus quoniam in ſectionibus coni & cylindri eædem diametri ſunt h g, r t: & tertia proportionalis eadem erit, hoc eſt h χ rectum latus figuræ. quare h χ & in cylindri ſectione rectum eſt figuræ latus. Quoniam igitur ut g h ad h χ, ita rectangulum g u h ad quadratum u y: atque oſtenſum eſt in cylindri ſectione, ut tranſuerſum figuræ latus ad rectum, ita rectangulum diametri partibus cõtentum ad quadratum eius, quæ ad ipſam ordinatim applicata partes efficit; erit & in cylindri ſectione ut g h tranſuerſum figuræ latus ad h χ rectum, ita rectangulum g u h ad quadratum lineæ

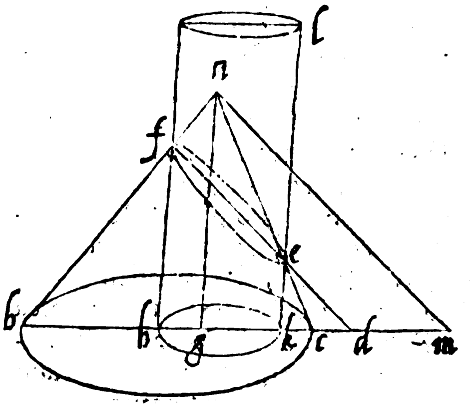


æqualis y u, & ad angulos æquales ductæ ad h g. ſed linea æqualis y u, & ad æquales angulos ad ipſam ducta in punctum u, non alia eſt ab ipſa y u. ergo u y & in cylindri ſectione erit; ac propterea punctum y in coni ſuperficie exiſtens, & in cylindri erit ſuperficie. Similiter demonſtratio fiet & in alijs, quæ ad ipſam ordinatim applicabũtur. linea igitur h r g in ſuperficiebus utrarumque figurarum continetur. quare una eademq; ſectio eſt in utriſque figuris. prætereà quoniam angulus c a e, uidelicet a g h factus eſt, uel maior, uel minor angulo, qui ad b; ſectio non erit ſubcontraria: ideoq; h r g non eſt circulus; ellipſis igitur. quare coni expoſiti, ac cylindri ſectio eadem ellipſis erit. quod oportebat demonſtrare.

PROBLEMA I. PROPOSITIO XX.

Cono dato, & ellipſi, in eo cylindrum eadem ellipſi coni ſectum inuenire.

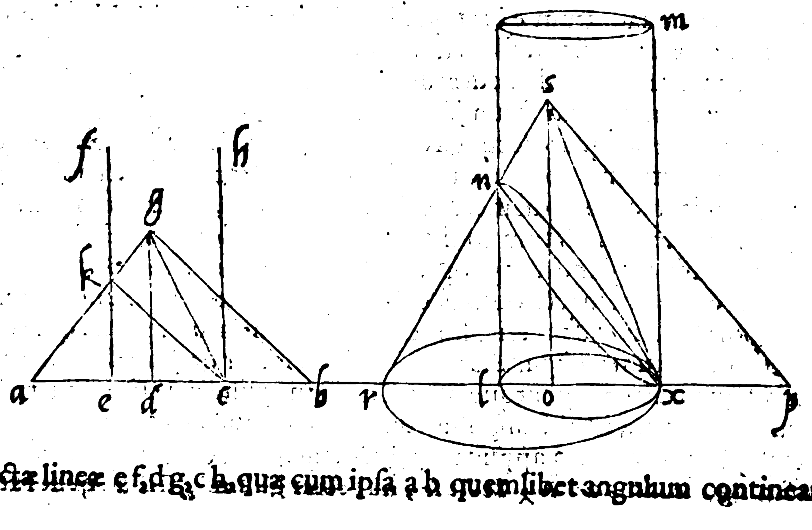
SIT datus conus, cuius per axem triangulum ſit a b c: & data in ipſo ellipſis, cuius diameter f e; quæ protrahatur ad d: & ipſi f d æquidiſtans ducatur a m: interq; b m, m c proportionalis ſit m g: & iũcta a g, per puncta f e ducantur f h, k e l, quæ ipſi a g æquidiſtent: & compleatur parallelogrammum h l. Itaque ſi intelligamus cylindrum, cuius baſis quidem ſit circulus circa diametrum h k: parallelogrammum uero per axẽ h l: erit & in ipſo cylindro ſectio, cuius diameter f e: & ſimiliter, atque in antecedenti theoremate, demõſtrabimus ſecundam diametrum eandem eſſe; & item omnes, quæ ad diametrum ordinatim applicantur. Inuentus igitur eſt cylindrus, qui ſecatur data ellipſi coni dati. quod facere oportebat.



PROBLEMA II. PROPOSITIO XXI.

Cylindro dato & ellipſi, in eo conum eadem ellipſi cylindri ſectum inuenire.

Exponatur ſeorſum recta linea a b: & in ea ſumatur quoduis punctum d: fiatq; ut a b ad b d, ita d b ad b c: ut autem a b ad b c, ita a d ad d e. & à punctis e d c attollantur rectæ lineæ e f, d g, c h, quæ cum ipſa a b quemlibet angulum contineant: & in-



ter ſe ſe æquidiſtent. deinde per c ducatur recta linea c k ſecans e f d g: iunctaq; a k conueniat cum d g in puncto g: & iungatur g b. His igitur ſeorſum in hunc modum conſtitutis, ſit datus cylindrus, cuius parallelogrammum per axem l m; & datæ in eo ellipſis diameter ſit n x: ſeceturq; l x baſis parallelogrammi in eandem proportionem, in quam ſecta eſt e c: & ſit ut e d ad d c, ita l o ad o x. Rurſus fiat ut e c ad c b, ita l x ad x p: ut autem c e ad e a, ita x l ad l r: & per o ducatur o s æquidiſtans parallelogrammi lateribus: ductaq; r n conueniat cum o s in s: & iungantur s p, s x. quoniam igitur recta linea r p ſimiliter ſecta eſt, atque a b; erit ut r p ad p o, ita o p ad p x. ſed ut r p ad p x, ita r o ad o l, hoc eſt ita r s ad s n. æquidiſtat igitur s p ipſi n x. quòd ſi intelligamus conum, cuius quidem baſis ſit circulus circa diametrum r x, triangulum uero per axem s r x; erit & in eo ſectio, cuius diameter n x. Eodem modo, quo ſupra, demonſtrabitur & ſecundam diametrum eandem eſſe, & omnes, quæ ad diametrum ordinatim applicantur. conus igitur ſectus eſt eadem ellipſi dati cylindri, quod feciſſe oportuit.

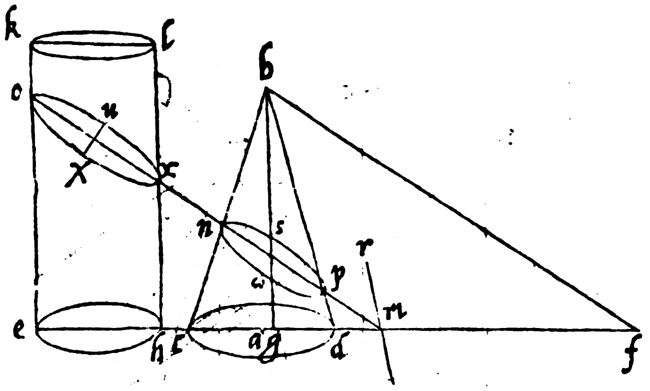
COMMENTARIVS.

Fiatq; ut a b ad b d, ita d b ad b c: ut autem a b ad b c, ita a d ad d e.] *Hunc locum nos reſtituimus, nam in græco codice non nulla deſiderabantur.*

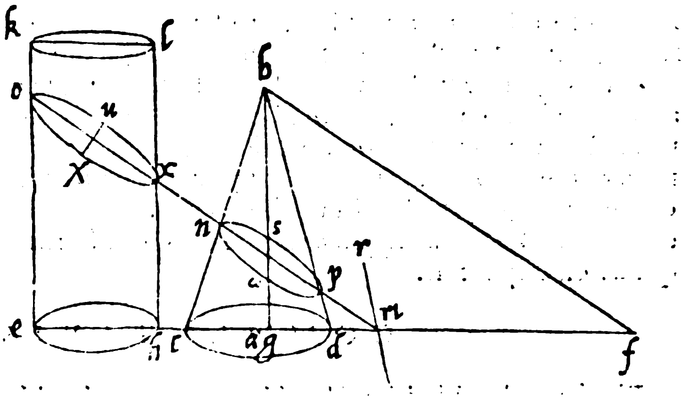
PROBLEMA III. PROPOSITIO XXII.

Cono dato inuenire cylindrum, & utroſque eodem plano ſecare, quod ſectiones in utriſque ſimiles ellipſes efficiat.

SIT conus datus, cuius baſis quidem circulus circa centrum a, uertex b punctũ; triangulum uero per axem c b d ad baſim coni rectum: producaturq; in utrãque partem a c e, a d f: & ad rectam lineam d b, & ad b punctum in ipſa conſtituatur angulus d b f, uel maior, uel minor ipſo b c d: atque inter c f, f d media proportionalis: ſumatur f g: & b g iungatur: cylindri autem quæſiti baſis ſit, uel circulus a, uel alius aliquis in eodem plano exiſtens, nihil enim differt. Itaque ſit is circulus circa diametrum e h; & per puncta e h ipſi b g æquidiſtãtes ducãtur e k, h l. in eodem igitur plano ſunt, in quo triangulum c b d. & quoniam b f ſecat b g, ſi producatur ſecabit etiam omnes, quæ ipſi b g æquidiſtant, in infinitum productas. & ſimiliter ipſi b f æquidiſtantes ſecabũt eas, quæ æquidiſtant b g. ducatur m n, quæ ipſi b f æquidiſtet: & producta ſecet h l e k in punctis x o: ipſi uero e h æquidiſtans ducatur k l: & circa k l diametrum circulus deſcribatur æquidiſtans ei, qui eſt circa e h: intelligaturq; cylindrus, cuius baſes quidem circuli e h, k m; parallelogrãmum uero per axem k h, quod & ad baſim rectum eſt. Si igitur per m ducatur linea m r ad rectos angulos ipſi c d f baſi, quæ ſit in eodem plano, in quo circulus a: & per lineas m r, m o planum ducatur; faciet id ſectionem in cono quidẽ ellipſim n s p, cuius diameter n p: in cylindro uero ellipſim o u x, cuius diameter o x. Dico ellipſim n s p ipſi o u x ſimilem eſſe. quoniam enim o m, b f inter ſe æquidiſtãt; itemq; æquidiſtant e k, h l, b g, & linea e f communiter omnes ſecat; erit ut o m ad m e, hoc eſt ut o x ad h o, ita b f ad f g. quare ut quadratum o x ad quadratum h e,



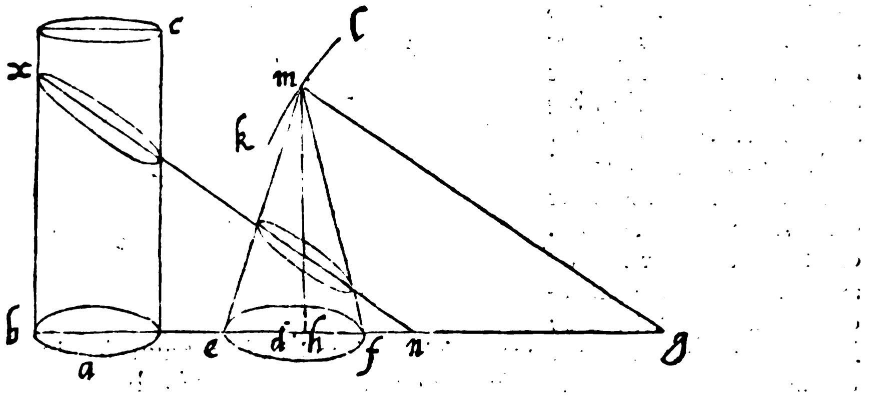
ita b f quadratum ad quadratum f g, hoc eſt ad rectangulum c f d. ſed ut quadratum o x diametri ad quadratum h e, ita quadratum diametri o x ad quadratum coniugatæ diametri, uidelicet u χ. ut autem quadratum b f ad rectangulum c f d, ita quadratum diametri n p ad quadratum coniugatæ diametri s ω. ergo ut quadratum o x ad quadratū u χ, ita quadratum n p ad s ω quadratū: ac propterea ut o x ad cōiugatam diametrum u χ, ita n p ad diametrum coniugatam s ω. At uero diametrum o x ſecare u χ ad rectos angulos; itemq́; n p ſimiliter ſecare s ω manifeſte apparet; quoniā χ u, ω s & inter ſe ſe, & ipſi m r æquidiſtantes recta linea m o ſecat. ſectio igitur o u x ſimilis eſt ſectioni n s p: & neutra earum eſt circulus, quippe cum ſectio ſubcontraria non ſit. angulus enim d b f, uidelicet b p n non eſt æqualis angulo b c d. quare utraque ſectionum o u x, n s p ellipſis erit: & ſunt ſimiles inter ſe ſe. quod feciſſe oportebat.



PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XXIII.

Cylindro dato inuenire conū, & utroſque ſecare eodem plano, quod ſectiones faciat in utriſque ellipſes ſimiles.

SIT cylindrus datus, cuius baſis circulus a: & parallelogrammum per axem b c, ad baſim rectum: & producatur b a. coni uero quæſiti baſis ſit, uel circulus a, uel alius aliquis in eodem exiſtens plano, ut qui eſt circa diametrum e f, cuius centrum d. & ſumpto quouis puncto g in linea f g, inter e g, g f media proportionalis ſit g h: & centro g, interualloq́; uel maiore, uel minore, quàm ſit g h, deſcribatur in plano b c



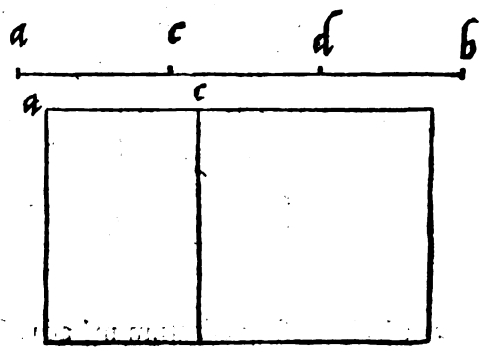
circuli circumferentia k l, perq́; h ducatur h m parallelogrammi b c lateribus æquidiſtans: & iungantur m e, m f, m g. poſtea ducatur n x ipſi m g æquidiſtans, quæ triangulum, & parallelogrammum ſecet. Itaque ſi per n x eodem modo, quo ante dictū eſt, planum ducatur, ſectio in utroque ſimilis erit. demonſtratio autem eadem, quæ ſupra. uerum ſectiones ellipſes eſſe, non circulos perſpicue conſtat; quadratum enim m g factum eſt uel maius, uel minus quadrato g h, hoc eſt rectangulo e g f.

COMMENTARIVS.

PERQVE h ducatur h m parallelogrammi b c lateribus æquidiſtans.] *Hoc eſt ducatur à puncto b linea ad circuli deſcripti circumferentiam in punctum m, quæ lateribus parallelogrammi b c ſit æquidiſtans. ut autem hoc fiat, licet ſemper interuallum ſumere maius, quàm g h, minus non item, niſi cum cylindrus ſcalenus fuerit, & ita inclinatus ad partes coni, ut illud ipſum, quod diximus perfici poſſit. Itaque oportet interuallum uel maius eſſe, uel minus ipſa g h: nam ſi ſumeretur æquale, ſectiones ſubcontrariæ eſſent: & idcirco non ellipſes, ſed circuli in ſectione gignerentur.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXIIII.

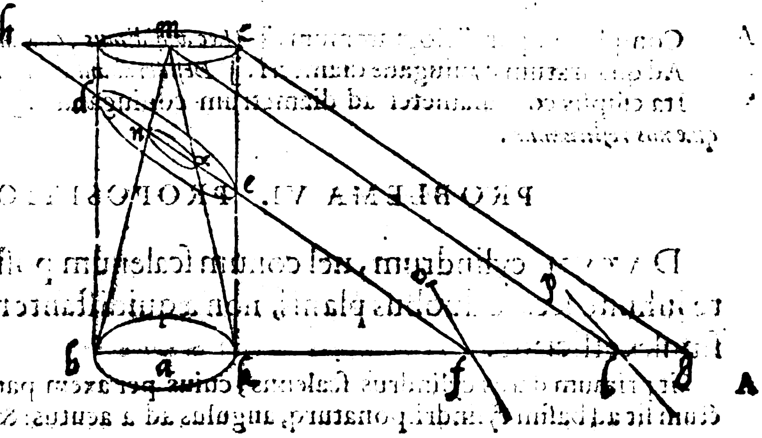
SIT recta linea a b, quæ ſecetur in punctis c d, & non ſit a c maior, quàm d b. Dico ſi ad a c comparetur ſpatium æquale quadrato c b, excedens figura quadrata; latus exceſſus maius quidem eſſe, quàm c d; minus uero, quàm c b.



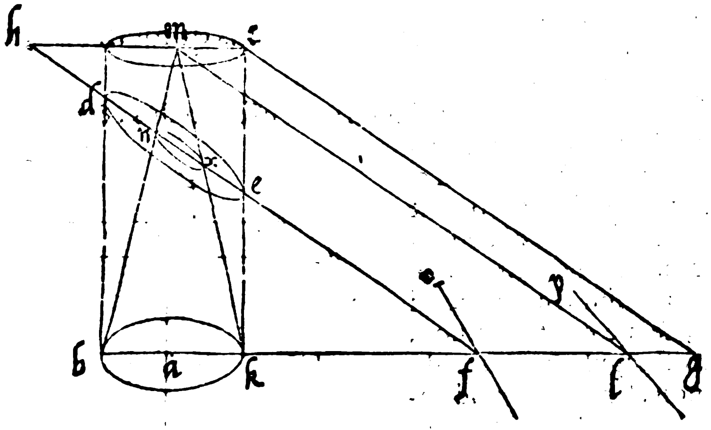
Si enim fieri poteſt, ponatur c d primum latus eſſe exceſſus. & quoniam id, quod ad a c comparatur, excedens quadrato c d; idem eſt quod rectãgulum a d c: eſt autem & æquale quadrato c b: erit rectangulum a d c quadrato c b æquale. Sed quadratum c b non eſt minus quadrato a d. cum enim d b non ſit minor, quàm a c; neque erit c b minor, quàm ipſa a d. rectangulum igitur a d c quadrato a d non eſt minus; quod fieri non poteſt. Idem abſurdum ſequetur, ſi latus exceſſus ponatur minus, quàm c d. Sed rurſum ſit c b exceſſus latus. erit rectangulum a b c quadrato c b æquale. quod fieri non poteſt. Idem ſequetur etiam, ſi latus exceſſus ponatur maius ipſa c b. latus igitur exceſſus maius erit, quàm c d, & minus, quàm c b.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXV.

DATO cylindro ellipſi ſecto, conum conſtituere in eadem baſi cylindri, eademq; altitudine; & ſectum eodem plano, quod ſectionem faciat ellipſim cylindri ellipſi ſimilem.



Sit datus cylindrus, cuius baſis quidem circulus circa centrum a: parallelogrammum uero per axem b c: & in eo diameter datæ ellipſis ſit d e, quæ producta occurrat b a in f: per c ducatur c g ipſi d f æquidiſtans, & occurrens lineæ b a in g: & protractæ rectæ lineæ f e h, compleatur parallelogrammum. Quoniam igitur parallelogrammi h g, latus ſg lateri h c eſt æquale: latus autem h c non eſt minus ipſa b κ: neque ſg ipſa b k minor erit. Si igitur ad lineam b k comparetur ſpatium æquale quadrato k g, excedens figura quadrata; latus exceſſus maius erit, quàm k ſ, & minus, quàm k g, ex iis, quæ proxime demonſtrata ſunt. Itaque ſit latus exceſſus k l: & per l ipſi g c æquidiſtans ducatur l m: & iunctis m b, m κ, intelligatur conus, cuius uertex punctum m; baſis circulus a; & triangulum per axem b m k. Si igitur intelligamus conum ſectum eodem plano, à quo facta eſt e d diameter ſectionis cylindri: erit & in cono ſectio, cuius diameter n x. & quoniam ad lineam b k comparatum eſt ſpatium æquale quadrato κ g, excedens quadrato k l: rectangulum b l k quadrato k g æquale erit. & ſunt d b, k c inter ſe æquidiſtantes: itemq; æquidiſtantes d ſ, m l, c g. ut igitur d ſ ad ſb, ita c g ad g k: & idcirco ut quadratum d ſ ad quadratum ſb, ita quadratum c g ad quadratum g k, hoc eſt quadratum m l ad rectangulum b l k. Sed ut quadratum d ſ ad quadratum ſb, ita quadratum e d ad quadratum b k, hoc eſt quadratum diametri ellipſis cylindri e d ad quadratum coniugatæ diametri. & ut quadratum m l ad rectangulum b l κ, ita quadratum diametri ellipſis coni ad coniugatæ diametri quadratum.



B ergo ut quadratum diametri ellipſis cylindri ad quadratum coniugatæ diametri: ita diametri ellipſis coni quadratum ad quadratum coniugatæ diametri. Vt igitur diameter ellipſis cylindri ad coniugatam diametrum,

C ita ellipſis coni diameter ad coniugatam diametrum. Sunt autem ſecundæ diametri perpendiculares ad diametros; utræque enim æquidiſtant lineis ſo, l p, quæ ſunt ad rectos angulos ipſi b g. quare coni ellipſis ellipſi cylindri ſimilis erit: & facta eſt ab eodem plano. conſtitutusq; eſt conus in eadem baſi, & eadem altitudine. quæ omnia feciſſe oportebat.

COMMENTARIVS.

A Compleatur parallelogrammum.] *Hæc addidimus, quæ in græco codice non erant.*

B Ad quadratum coniugatæ diametri.] *Deſiderabantur hæc in græcis codicibus.*

C Ita ellipſis coni diameter ad diametrum coniugatam.] *Hæc etiam deſiderabantur. quæ nos reſtituimus.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXVI.

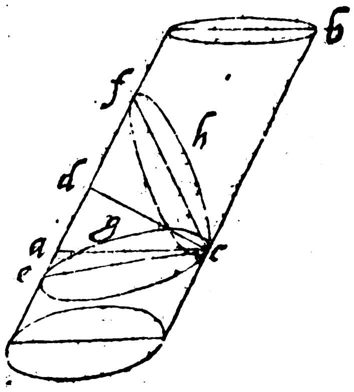
DATVM cylindrum, uel conum ſcalenum poſſumus ex eadem parte infinite ſecare duobus planis, non æquidiſtanter poſitis, quæ ellipſes ſimiles efficiant.

A Sit primum datus cylindrus ſcalenus; cuius per axem parallelogrammum a b rectum ſit ad baſim cylindri: ponaturq; angulus ad a acutus: & per c ducatur c d ad latus a d tus a d perpendicularis. minima igitur eſt c d omnium, quæ inter æquidiſtantes a d, c b cadunt. ſumantur ex utraque parte puncti d æquales rectæ lineæ e d, d f, & e c, c f iungantur. erit e c ipſi c f æqualis. Si igitur per e c, c f iuxta prædictum modum plana ducantur, ſecabunt cylindrum. itaque ſecent, & faciant ellipſes e g c, f h c. Dico eas inter ſe ſimiles eſſe. quoniam enim ut quadratum e c ad quadratum c a, ita quadratum f c ad quadratum c a: proportio autem quadrati e c ad quadratum c a eſt proportio quadrati e c diametri ſectionis ad quadratum coniugatæ diametri; & proportio quadrati f c ad quadratum c a eſt proportio quadrati diametri ſectionis f c ad quadratum coniugatæ ipſi diametri: erit ut e c diameter ad coniugatam diametrum, ita & diameter f c ad coniugatam ſibi ipſi diametrum. Sed & ad æquales angulos ſecantur utræque diametri, ut ſæpius oſtenſum eſt. ergo ſimiles inter ſe ſunt e g c, f h c ellipſes. Quòd ſi alias ſumpſeris æquales lineas ex utraque parte puncti d, rurſus aliæ duæ ellipſes inter ſe ſimiles conſtituentur. Notandum autem eſt in cylindro ellipſes ex eadem parte ſimiles & æquales eſſe; propterea quòd proportio diametrorum ad eandem lineam a c neceſſario eadem ſit.

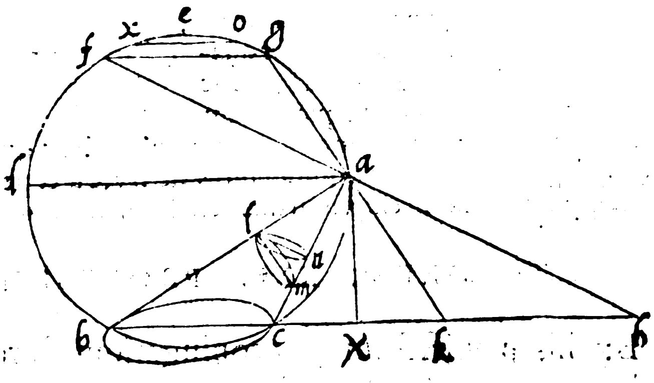
4. primi elementorum.

7. quinti

9. huius.



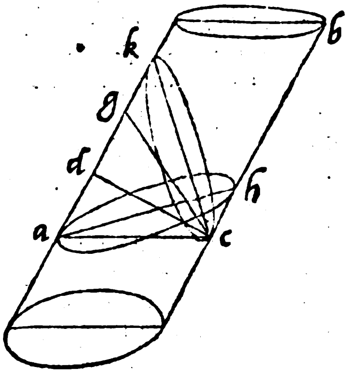
Sed ſit datus conus ſcalenus, cuius per axem triangulum a b c, ad baſim coni rectum. Sitq́; a b maior, quàm a c: & circa ipſum circulus deſcribatur: & per a ducatur a d æquidiſtans b c, quæ circulum ſecabit. deinde circumferentia d a biſariam ſecta in e, ſumatur in ipſa punctum f, & ducatur f g æquidiſtans d a: iunctisq́; f a, g a, & productis, occurrat f a quidem lineæ b c in h; g a uero in κ. ergo ut a k ad κ g, ita a h ad h f. Sed ut a k ad κ g, ita quadratum a k ad rectangulum g k a: & ut a h ad h f, ita quadratum a h ad rectangulum f h a. ut igitur quadratum a k ad rectangulum g k a, hoc eſt ad rectangulum b κ c, ita quadratum a h ad rectangulum f h a, hoc eſt ad rectangulum b h c. Itaque ſi ducantur rectæ lineæ æquidiſtantes, l m quidem æquidiſtans a k: l n uero æquidiſtans a h: & per ipſas plana conum ſecantia, ſimiles ellipſes efficientur. quoniam enim ut quadratum a k ad rectangulum b k c, ita quadratum a h ad rectangulum b h c: ut autem quadratum a κ ad rectangulum b κ c, ita quadratum l m diametri ellipſis ad quadratum coniugatæ diametri: & ut quadratum a h ad rectangulum b h c, ita quadratum l n diametri ellipſis ad coniugatæ ipſi diametri quadratum: erit ut diameter l m ad coniugatam diametrum, ita l n diameter ad diametrum ipſi coniugatam: & idcirco l m, l n ſimilium ellipſium diametri ſunt. quod demonſtrandum fuerat. At ſi alias lineas ipſi f g æquidiſtantes ducamus, ut x o; & à punctis x o lineas iungentes protrahamus ad b h; & ipſis æquidiſtantes in triangulo ducamus: rurſus duæ aliæ ellipſes inter ſe ſimiles conſtituentur: atque hoc in infinitum. quod facere oportebat.



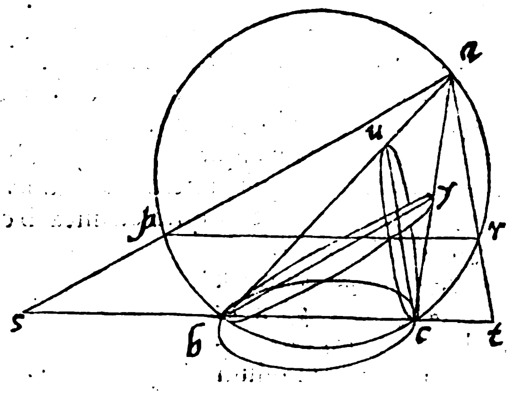
36. tertii.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXVII.

DATVM cylindrum ſcalenum, uel conum poſſumus ex oppoſitis partibus infinite ſecare duobus planis, quæ ellipſes ſimiles efficiant.



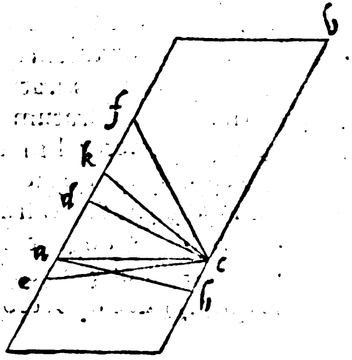
Sit primum cylindrus, ut in ſuperiori figura: & lineæ a d æqualis ponatur d g. æqualis igitur eſt a c ipſi c g. & quoniam linea, quæ à puncto a ad c b ducitur, maior eſt utraque ipſarum a c, c g; & maior omnibus, quæ à c inter puncta a g cadunt: manifeſtum eſt ſi ex oppoſitis partibus ducantur duæ rectæ lineæ inter ſe æquales, ea, quæ à puncto c ducitur, cadet ſupra g. Itaque ducantur ex oppoſitis partibus a h, c k æquales inter ſe ſe; & per ipſas plana ducantur, ellipſes facientia: erit ut quadratum h a diametri ellipſis ad quadratum a c, hoc eſt ad quadratum coniugatæ diametri, ita quadratum k c diametri ellipſis ad quadratum a c, hoc eſt ad quadratum diametri ipſi coniugatæ. ergo k c, a h ellipſium ſimilium diametri ſunt.



Sit deinde conus, ut ſupra: & producta c b, oporteat ex utriſque partibus ducere plana, quæ ellipſes ſimiles efficiant. ducatur in circulo quædam recta linea p r, ipſi b c æquidiſtans: & iunctæ a p, a r ad puncta s, t producantur. Vt igitur a s ad s p, ita a t ad t r: & ut quadratum a s ad rectangulum a s p, hoc eſt ad rectangulum c s b, ita quadratum a t ad rectangulum a t r, hoc eſt ad rectangulum b t c. quare ſi rectas lineas in triangulo duxerimus, ipſis s a, a t æquidiſtantes, ut b y, c u: & per eas plana ellipſes facientia: erunt b y, c u ſimilium ellipſium diametri, ex iis, quæ ſuperius demonſtrata ſunt.

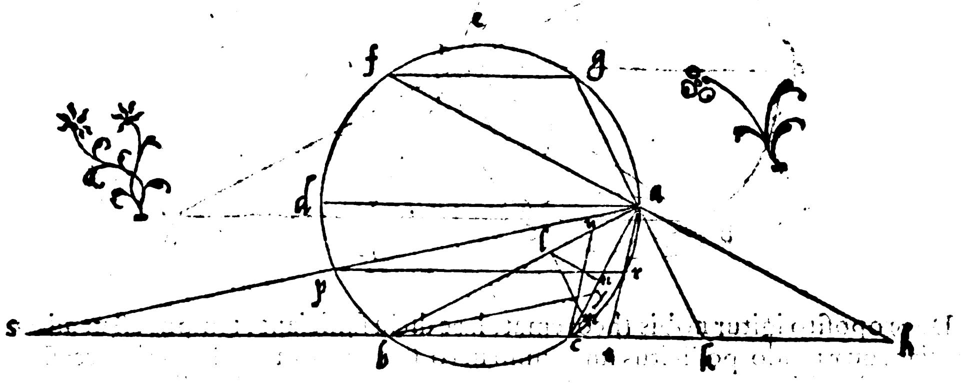
THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXVIII.

Ex his manifeſtum eſt, coniugationi ſimilium ellipſium, quæ ex eadem parte fit, ſimilem eſſe coniugationem quandam ſimilium ellipſium ex oppoſitis partibus, quippe quæ diametros habet ex contraria parte diametris reſpondentes.

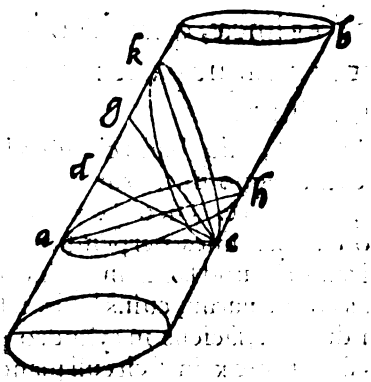


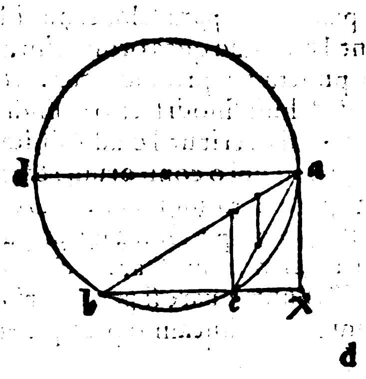
Si enim in cylindri deſcriptione fiat ut quadratum e c, uel c f ad quadratum c a, ita quadratum c a ad quadratum a h, uel c k; erit ut quadratum utrarumque e c, c f ad quadratum c a, hoc eſt ut quadratum diametri ſimilium ellipſium, quæ ex eadem parte fiunt ad quadratum ſecundæ diametri coniugatæ, ita quadratum c a ad quadratum utrarumque a h, c k: hoc eſt ita quadratum ſecundæ diametri ſimiliũ ellipſium, quæ ex oppoſitis partibus fiunt, ad quadratum coniugatæ diametri. Vt igitur alterius coniugationis diameter ad ſecundam diametrum, ita alterius coniugationis ſecunda diameter ad diametrum.

In cono autem, ſi rurſus fiat ut g a ad a x, ita a p ad p s; erit ut a x ad k g, ita p s ad s a: hoc eſt ut quadratum a k ad rectangulum g k a, ita rectangulum p s a ad quadratum a s. Sed ut quadratum a k ad rectangulum g k a, hoc eſt ad rectangulum b k c, ita quadratum diametri duarum ſimilium ellipſium, quæ ex eadem parte fiunt,

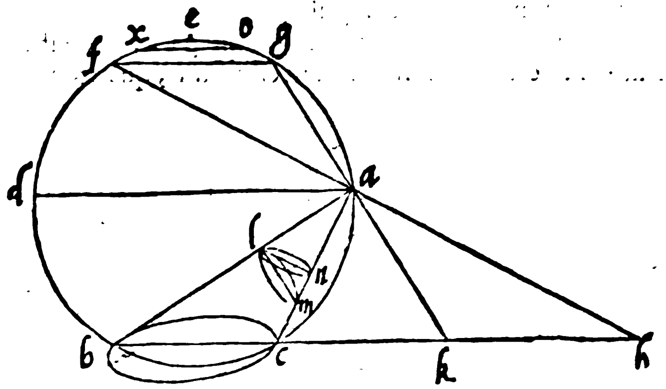


uidelicet l n, uel l m ad quadratum ſecundæ diametri coniugatæ: ut autem rectangulum p s a, hoc eſt c s b ad quadratum s a, ita quadratum ſecundæ diametri ſimilium ellipſium, quæ ex oppoſitis partibus fiunt, ad coniugatæ diametri quadratum. ergo ut alterius coniugationis diameter ad ſecundam diametrum, ita alterius coniugationis ſecunda diameter ad diametrum. ex quibus apparet, in omni cylindro, & cono conſtitui duas coniugationes ellipſium inter ſe ſimilium, quæ ex contraria parte reſpondentes diametros habent: & præter has quatuor nullam aliam conſtitui ſimilem, niſi ipſis æquidiſtantes. etenim ſemper ſectiones æquidiſtantes ſimiles faciunt ellipſes faciunt, ſi modo ellipſes faciunt: atque in cylindro quidem planum per lineam c g ductum ſectionem facere ſubcontrariam; & propterea circulum: in cono autem ſi ad punctum a linea circulum contingat, ut a χ: & in triangulo ducantur lineæ ipſi a χ æquidiſtantes, quoniam quadratum a χ rectangulo b χ c eſt æquale, plana per dictas lineas tranſeuntia ſectiones facere circulos: ſi quidem & hæc ſubcontraria ſectio eſt, quod diligenter intuenti perſpicuum fiet. præterea data ellipſi in cylindro ſcaleno, & cono, tres alias ſimiles inueniri poſſe, unam quidem ipſi datæ coniugatam, duas uero coniugatas inter ſe ſe, atque aliis ſimiles, propterea quod diametros habent ex contraria parte diametris reſpondentes. oportet autem neque datam ſectionem ſubcõtrariam eſſe; huic enim nulla ſimilis conſtituitur, præter æquidiſtantes: neque ipſius diametrum æquidiſtare ei, quæ per e uel per a ducitur in coni deſcriptione, etenim ſola ipſa eſt; quoniam per e ducta æquidiſtans ipſi a d circulum contingit, &





cadit extra, nec eſt aliud punctum compar puncto e, quemadmodum eſt o ipſi x, & f ipſi g.



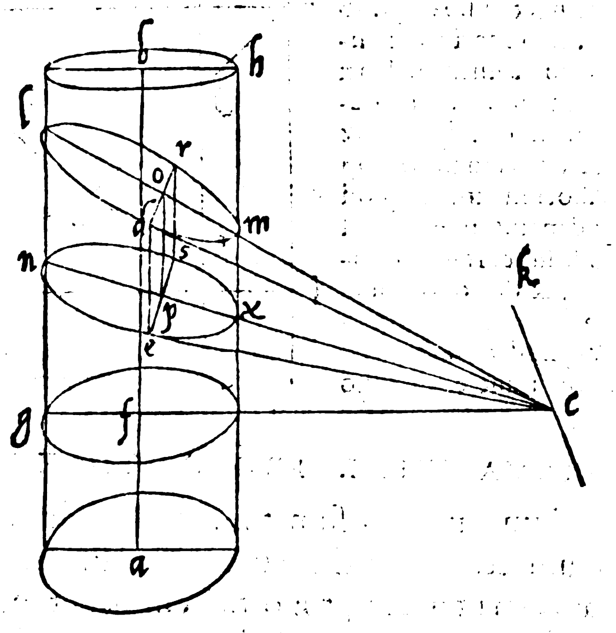
De propoſito igitur nobis theoremate hæc dicta ſufficiant. tempus eſt ut ad ea aggrediar, quæ modo pollicitus ſum. mihi uero futuræ contemplationis occaſio non intempeſtiua fuit, nempe hæc. Pitho geometra in quodam eius libro æquidiſtantes lineas explicans non contentus iis, quæ ſcripſerat Euclides, eas aptisſime exemplo declarauit. dixit enim lineas æquidiſtantes eſſe, quales in parietibus, uel pauimento columnarum umbras à lampade è regione ardente, uel lucerna factas uidemus. quod tametſi omnibus non paruum riſum mouerit, mihi tamen ridiculum non uidetur propter meam in auctorem, qui amicus noſter eſt, obſeruantiam. Sed uideamus quomodo hoc mathematice ſe habeat. talis enim contemplatio huius loci propria eſt; quippe cum per ea, quæ proxime demonſtrata ſunt, propoſitum oſtendatur.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIX.

RECTAE lineæ, quæ ab eodem puncto cylindricam ſuperficiem contingunt ex utraque parte: omnes in unius parallelogrammi lateribus tactiones faciunt.

Sit cylindrus, cuius baſes circuli a b, axis a b recta linea: & ſumatur aliquod punctum c extra: à quo ducantur c d, c e cylindri ſuperficiem contingentes ex eadem parte in punctis d e. Dico d e puncta tactuum in una recta linea eſſe. ducatur enim à puncto c ad a b linea perpendicularis c f: & per c f ducatur planum æquidiſtans plano circuli a, quod faciat in cylindro ſectionem circulum circa centrum f, ita ut cylindrus conſtituatur, cuius baſes b f circuli; axisq́; recta linea b f: & per c f & axem planum ducatur, faciens in cylindro parallelogrammum g h: ipſi uero f c ad rectos angulos ducatur c k in f circuli plano: & per c k & utramque ipſarum c d, c e plana ducantur cylindrum ſecantia, quæ faciant in ſuperficie quidem cylindri lineas l d m, n e x; in plano uero parallelogrammi l m c, n x c rectas lineas. diametri igitur ſectionum ſunt l m; n x, ad quas ordinatim applicentur d o, e p: & ad alteram partem ſuperficiei in puncta r s producantur. Itaque quoniam c d contingit lineam l d m r in puncto d: & huiuſmodi ſectio cylindri oſtenſa eſt ellipſis, non circulus: ordinatimq́; applicata eſt d o: erit ut l c ad c m, ita l o ad o m, quod demonſtratum fuit ab Apollonio prop. 36 in primo libro conicorum: & eadem ratione ut n c ad c x, ita n p ad p x. eſt autem n g ipſi h m æquidiſtans. quare ut l c ad c m, ita n c ad c x: & propterea ut l o ad o m, ita n p ad p x. linea igitur puncta o p coniungens eſt in plano g h; & utrique ipſarum b a, h m æquidiſtat. & quoniam d o, e p æquidiſtant ipſi c k, etiam inter ſe ſe æquidiſtabunt. quare ſi per eas planum ducatur, ſecabit parallelogrammum h g ſecundum rectam lineam o p: atque erit planum p e d o æquidiſtans plano alicui eorum,

rum, quæ per b a ducta ſecant g h. planum igitur p e d o ſectionem facit in cylindro parallelogrammum, ut oſtenſum eſt theoremate tertio: & linea e d eſt communis ſectio ipſius & ſuperficiei cylindri. quare e d recta linea eſt, & parallelogrammi latus.

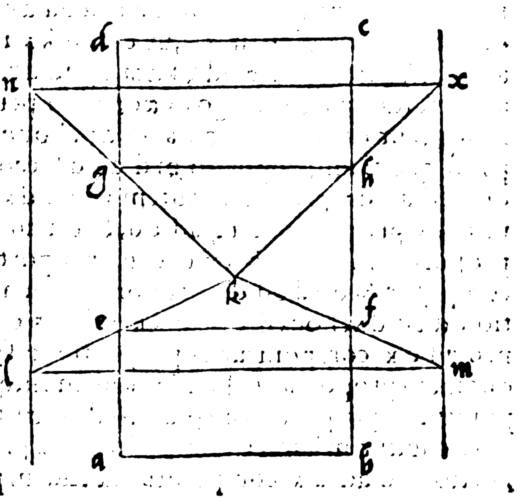


Similiter idem & in aliis contingentibus demonſtrabitur; fientq; rurſus tactus ex altera parte in punctis r s, quæ ſunt in una linea, ipſi e d æquidiſtante. Omnes igitur lineæ contingentes in unius parallelogrammi lateribus tactiones faciunt. quod demonſtrandum proponebatur.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXX.

Hoc demonſtrato. Sit parallelogrammum a b c d: & eius baſi a b æquidiſtantes ducantur e f, g h: ſumpto autem aliquo puncto k, non exiſtente in plano parallelogrammi, iungantur k e, k f, k g, k h; quæ productæ occurrant plano cuipiam æquidiſtanti ipſi a b c d in punctis l m n x: & iungantur l n, m x. Dico lineam m x ipſi l n æquidiſtantem eſſe.

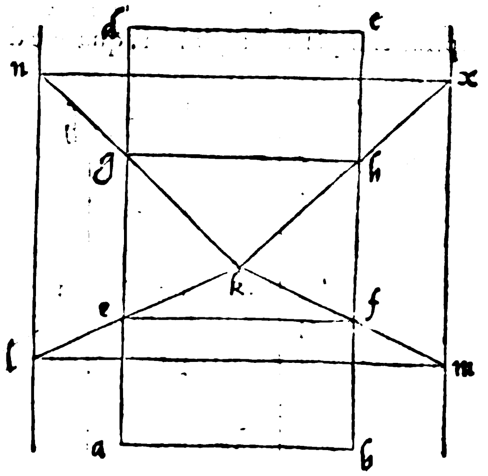
Planum enim per lineas k l, e f ductum ſecabit etiam planum l m n x: & in eo communem ſectionem faciet rectam lineam l m, ipſi e f æquidiſtantem. ſimiliter & planum per k n, g h ductum faciet n x æquidiſtantem g h. Quoniam igitur l k n triangulum ab æquidiſtantibus planis a b c d, l m x n ſecatur, communes ipſorum ſectiones n l, g e inter ſe æquidiſtantes ſunt. & eadem ratione æquidiſtantes x m, h f. quare ut e k ad k l, ita g k ad k n; & ut g k ad k n, ita g h ad n x. ſed ut e k ad k l, ita e f ad l m. ut igitur e f ad l m, ita g h ad n x: & permutando. eſt autem e f æqualis g h. ergo & l m ipſi n x: & ſunt æquidiſtantes inter ſe: linea igitur m x ipſi l n eſt æquidiſtans.



16. unde.

13. primi

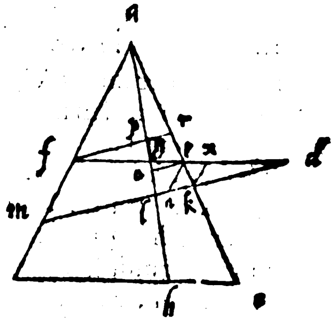
Si igitur punctum x ponamus eſſe corpus illuminans: & a c parallelogrammum, quod eius radiis opponatur, ſiue per ſe ſe, ſiue in cylindro: continget radios, qui ab ipſo k producuntur, terminari rectis lineis m l, n x: & quod intra lineas m l, n x continetur, umbroſum eſſe. Itaque demonſtratum iam eſt lineam d a ipſi c b, & n l ipſi x m æquidiſtare. uerum non ita apparent; nam interuallorum l m, n x quod propius uiſui eſt, illud maius uidetur. ſed hæc ex opticis ſumenda ſunt. Itaque quoniam propoſitum eſt, & de cono ſimile contemplari, propterea quòd ellipſis communis ſit & cono, & cylindro; dictum eſt autem de cylindro: age nunc & de cono dicamus.



THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXXI.

Si extra triangulum punctum ſumatur: & ab eo ducatur quædam recta linea triangulum ſecans: à uerti ce autem ad baſim alia agatur, quæ ſecet lineam ductam, ita ut quam proportionem habet tota ad partem extra triangulum aſſumptam, eandem habeat eius, quæ intra triangulum continetur, maior portio ad minorem: quælibet recta linea, quæ ex eodem puncto ducta triangulum ſecat, ab ea, quæ à uertice ad baſim ducitur, in eandem proportionem ſecatur. Quòd ſi lineæ ab eo puncto in triangulum ductæ ſecentur in eandem proportionem: recta linea, quæ ipſas ſecat in triangulo, per trianguli uerticem neceſſario tranſibit.

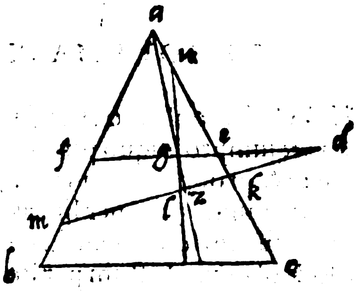
Sumatur enim aliquod punctum d extra triangulum a b c; à quo ducatur recta linea d e f triangulum ſecans: & à uertice a ad baſim ducatur a g h, quæ ſecet f d, ita ut f d ad d e eandem proportionem habeat, quam f g ad g e. deinde ducatur alia linea d k l m. Dico ut m d ad d k, ita eſſe m l ad l k. per puncta enim e k ducantur lineæ e n, k x ipſi a b æquidiſtantes: & per e f ducantur e o, f p r æquidiſtantes m d. Quoniam igitur in triangulo a m k ducta eſt e n ipſi a m æquidiſtans: erit ut n e ad e k, ita m a ad a k, hoc eſt f a ad a r. Rurſus quoniam f a æquidiſtat k x, ut e k ad k x, ita eſt e a ad a f. eſt autem ut n e ad e k, ita f a ad a r. & ut e k ad k x, ita e a ad a f. ergo ex æquali in perturbata ratione, ut e n ad k x, ita e a ad a r, hoc eſt e o ad p r. & quoniam proportio m d ad d k eadem eſt, quæ f d ad d x: proportio autem f d ad d x componitur ex propoitione f d ad e d, & e d ad d x: erit proportio m d ad d k ex eiſdem proportionibus compoſita. Sed f d ad d e proportio eadem eſt, quæ f g ad g e, ut poſuimus: & proportio e d ad d x, hoc eſt e n ad x k oſtenſa eſt eadem, quæ o e ad p r. ergo proportio m d ad d k componitur ex proportione f g ad g e, & proportione o e ad p r. Rurſus quoniam proportio m l ad l k eadem eſt, quæ f p ad p r: & proportio f p ad p r componitur ex proportione f p ad o e, hoc eſt f g ad g e, & proportione o e ad p r. proportio igitur m l ad l k compoſita eſt ex proportione f g ad g e, & o e ad p r. Sed proportio m d ad d k componitur ex eiſdem proportionibus, quod oſtenſum iam fuit.



ergo ut m d ad d k, ita m l ad l k. Similiter & de aliis, quæ à puncto d ductæ fuerint, demonſtrabitur; omnes enim à linea a h in eandem, quam diximus, proportionem ſecabuntur.

Quòd ſi à puncto d ductæ lineæ in eandem proportionem ſecentur; ita ut quam proportionem habet f d ad d e, eandem habeat f g ad g e: & rurſus quam habet m d ad d k, habeat m l ad l k: recta linea proportionaliter ſecans eas, quæ in triangulo cõtinentur, uidelicet f e, m k, per uerticem trianguli neceſſario tranſibit.

Si enim fieri poteſt, tranſeat extra uerticem per punctum u; & ducatur recta linea a g z. Quoniam igitur ex iis, quæ proxime demonſtrata ſunt, linea quædam a z à uertice ducta ſecat f d, ita ut quam proportionem habet f d ad d e, habeat f g ad g e: & ipſam m d in eandem proportionem ſecabit: eritq; ut m d ad d k: ita m z ad z k, quod eſt abſurdum; poſuimus enim ut m d ad d k, ita eſſe m l ad l k. quare l g producta non tranſibit per aliud punctum, quàm per uerticem trianguli, quod demonſtrare oportebat.

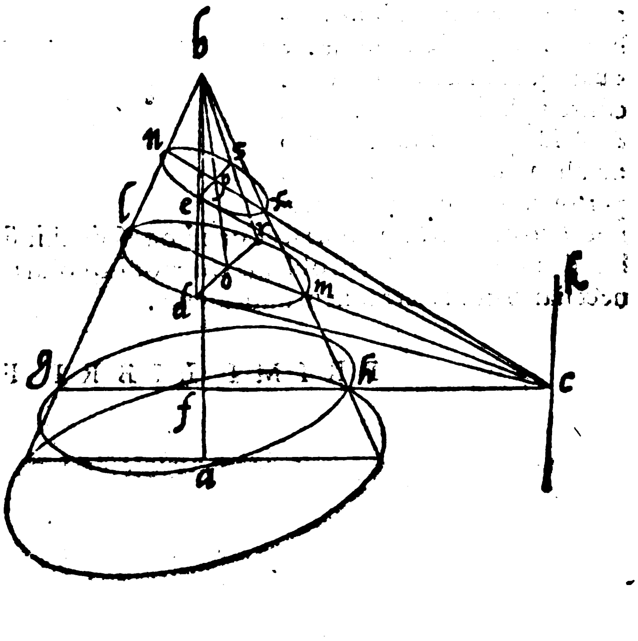


THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXII.

Rectæ lineæ, quæ ab eodem puncto conicam ſuperficiem contingunt ex utraque parte; omnes in unius trianguli lateribus tactiones faciunt.

SIT conus, cuius baſis quidem circulus circa centrum a; uertex b punctum; axis autem recta linea a b: & ſumpto aliquo puncto c extra conum, ab eo ducantur c d, c e rectæ lineæ, conicam ſuperficiem ex eadem parte contingentes. Dico puncta tactionum e d in eadem recta linea eſſe. Ducatur à puncto c ad a b perpendicularis c f: & per c f ducatur planum æquidiſtans plano circuli a, quod ſectionem in cono faciat circulum circa centrum f, ita ut conus conſtituatur, cuius baſis circulus f, & axis f b. Rurſus per c f & axem aliud plauum ducatur, faciens in cono triangulum b g h; & ipſi c f ad rectos angulos agatur c k, quæ in circuli f plano exiſtat: deinde per c k, & utramque ipſarum c d, c e ducantur plana conum ſecantia, quæ faciant in coni quidem ſuperficie lineas l d m, n e x; in plano autem trianguli b g h rectas lineas l c, n c. diametri igitur ſectionum l d m, n e x ſunt l m, n x rectæ lineæ. Itaque ad diametros l m, n x ordinatim applicentur d o, e p: & ad alteram partem ſuperficiei in puncta r s producantur. Quoniam igitur recta linea c d cõtingit lineam l d m in puncto d: & d o ordinatim applicata eſt: erit ut l c ad c m, ita l o ad o m. Eadem quoque ratione, ut n c ad c x, ita erit n p ad p x. ergo ex proxime demonſtratis recta linea, quæ coniungit puncta o p, ſi

36. primi conicor.

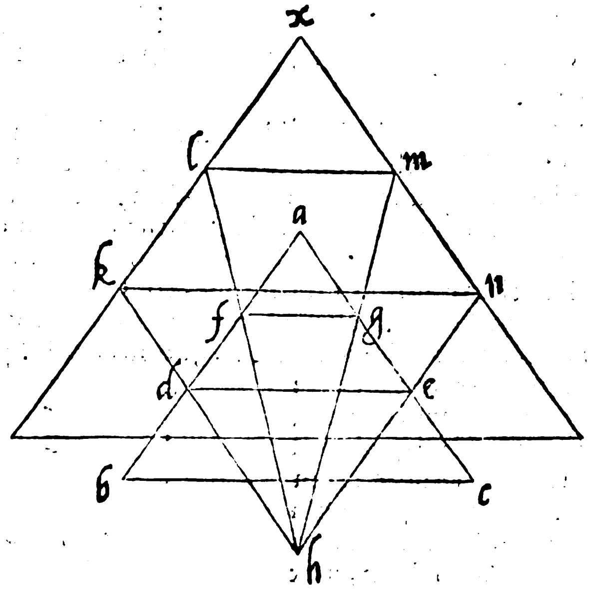


producatur, per uerticem tranſibit. ducatur igitur o p b . & quoniam e s , d r ipſi c k ſunt æquidiſtantes; etiam inter ſe æquidiſtantes, & in uno plano erunt. Itaque planum per lineas b p o, & e s, d r ductum ſectionem faciet in coni ſuperficie triangulum. ergo puncta e d, quæ ſunt in ſuperficie coni, & in latere erunt trianguli, ſecantis triangulum b g h ſecundum rectam lineam b p o. Similiter demõſtrabitur idem euenire in alijs, & in contingentibus, ad puncta r s. rectæ igitur lineæ, quæ à puncto c ductæ conicam ſuperficiem contingunt, omnes in unius trianguli lateribus tactiones faciunt. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXIII.

HOC demonſtrato, ſit triangulum a b c, cuius baſi b c æquidiſtantes ducantur d e f g: & ſumpto aliquo puncto h, quod non ſit in trianguli plano, iungantur h d, h f, h g, h e; & productæ occurrant plano alicui, quod plano a b c æquidiſtet, in punctis k l m n. planum igitur per lineas d e, k h ductum ſecabit etiam planum k l m n; & in eo communem ſectionem faciet rectam lineam k n, ipſi d e æquidiſtantem. Eodem modo & planum ductum per lineas f g, l h faciet rectam lineam l m æquidiſtantem ipſi f g. quoniam igitur planum k h l æquidiſtantibus planis a b c, k l m n ſecatur, communes ipſorum ſectiones k l, d f æquidiſtantes ſunt. & eadem ratione æquidiſtantes m n, g e. ergo productæ k l, n m conuenient inter ſe ſe. conueniant in x: & cum duæ lineæ k x, x n duabus d a, a e æquidiſtent, angulus ad x angulo ad a æqualis erit. Rurſus cum duæ x k, k n æquidiſtent duabus a d, d e, erit angulus x k n angulo a d e æqualis, triangula igitur x k n, a b c inter ſe ſe ſimilia erunt. Quòd ſi punctum h fingamus eſſe corpus illuminans, & triãgulum a b c eius radijs oppoſitum, ſiue per ſe ſe, ſiue in cono, continget radios, qui ab ipſo h emittuntur, per triangulum a b c facere triangulum umbræ x k n ipſi a b c ſimile. & quamquam hæc ad opticam contemplationem pertineãt, & ob id à propoſita tractatione aliena uideantur, tamen perſpicue cõſtat, ſine ijs, quæ hoc loco de coni & cylindri ſectione, hoc eſt de ellipſi & rectis lineis cum contingentibus demonſtrata ſunt, problema eiuſmodi abſolui non poſſe: quare non temere, ſed neceſſario de his ſermonem inſtituimus.

10. undecimi



PRIMI LIBRI FINIS.

SERENI ANTINSENSIS PHILOSOPHI LIBER SECVNDVS DE SECTIONE CONI.

CVM COMMENTARIIS FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS.

SERENVS CYRO S. D.

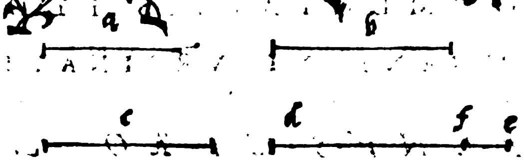
CVM ſectio conorum optime Cyre, quæ per uerticem efficitur, triangula quidem in conis cõſtituat, uariam autem, & perpulchram habeat contemplationem: & à nullo eorum, qui ante nos fuerunt, quòd ſciam, pertractata ſit: optime me facturum exiſtimaui, ſi locum hunc non inexplicatum relinquerem; perſcriberemq; de his quæcumque mihi in mentem uenerunt. maiorem autem ferè partem eorum, quæ profundiore geometria indigere uidentur, arbitror me hoc libro complexum eſſe. neque enim mirum uideri debet, ſi aliquid, quod ſcribi oporteret, prætermiſerim; utpote qui primus ad hanc contẽplationem ſim aggreſſus. quamobrem par eſt, uel te, cum in horum ſtudium incubueris, uel poſteriorum aliquem, qui in hæc inciderit, à me impulſum, ea, quæ prætermiſſa ſunt, ſupplere. ſunt tamen non nulla, quæ conſulto præterierim, uel quòd manifeſta eſſent, uel quòd ab aliis tractata. ſiquidem in omni cono ſectionem triangulum eſſe, quãdo per uerticem ſecetur, cum ab aliis demonſtratum ſit, nos omiſimus, ne aliena noſtris inuentis inſererentur. Quæ autem in promptu eſſent, & quæ unuſquiſque per ſe nullo negocio intelligere poſſet, non exiſtimaui me ſcribere oportere, ne legentium animos parum attentos facerem. ſed iam ad id, quod propoſitum eſt, accedamus.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI quatuor rectarum linearum prima ad ſecundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam: rectangulum contentum prima & quarta maius eſt eo, quod ſecunda & tertia continetur.

Habeat recta linea a ad lineam b maiorem proportionem, quàm c ad d e. Dico rectangulum ex a & d e rectangulo ex b & c maius eſſe. Quoniam enim a ad b maiorem proportionem habet, quàm c ad d e; ſit ut a ad b, ita c ad d f. rectangulum

Igitur ex a & d f æquale eſt rectangulo ex b & c. maius autem eſt, quod fit ex a, & d e eo, quod ex a & d f. ergo rectangulum ex a & d e rectangulo ex b & c maius erit.

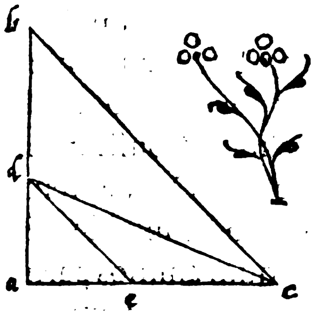


COMMENTARIVS.

MAIVS autem eſt, quod fit ex a & d e eo, quod ex a & d f.] *Sequitur enim ex iam dictis, & octaua quinti lineam d e maiorem eſſe, quàm d f. quippe cum c ad d f maiorem proportionem, quàm ad d e, habere ponatur. Hoc idem demonſtrauit Pappus, ut adnotauimus in 34. primi libri conicorum Apollonij: & eodem in loco Eutocius.*

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

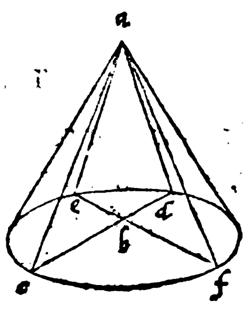
SI in triangulo orthogonio ab altero angulorum ad unum latus, quod eſt circa rectum angulum linea ducatur: habebit ducta linea ad eam, quæ inter ipſam & perpendicularem interiicitur, maiorem proportionem, quàm quæ à principio ſubtenditur recto angulo ad iam dictum latus.



SIT triangulum orthogonium a b c, rectum habens angulum ad a: & ab uno angulorum, uidelicet à c ad a b linea c d ducatur. Dico c d ad d a maiorem proportionem habere, quàm c b ad b a. ducatur enim linea d e ipſi b c æquidiſtans. & quoniam rectus eſt angulus d a c, angulus d e c obtuſus erit. maior igitur eſt c d, quàm d e: 32. primi 19
& idcirco c d ad d a maiorem proportionem habet, quàm e d ad d a, hoc eſt quàm c b ad b a.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

SI conus rectus planis per uerticem ſecetur, eorum, quæ in ſectionibus fiunt triangulorum, æquales habentia baſes inter ſe æqualia erunt.



SIT conus rectus, cuius uertex a punctum; & baſis circulus circa centrum b. Itaque hoc cono per uerticẽ planis ſecto; fiant triangula a c d, a e f, æquales baſes habentia. triangula enim ex his ſectionibus fieri alibi oſtenſum eſt. Dico triangula a c d, a e f æqualia eſſe. nam cum baſes ſint æquales; itemq; æquales inter ſe a c, a d, a e, a f: & triangulum triangulo æquale erit.

A
B

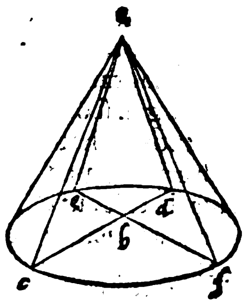
COMMENTARIVS.

A Triangula enim ex his ſectionibus fieri alibi oſtenſum eſt.] *Oſtendit hoc Apollonius in primo libro conicorum propoſitione tertia.*

B Itemq; æquales inter ſe ac, ad, ae, af.] *Conſtat hoc ex generatione coni recti; uniuſcuiuſque enim earum quadratum æquale eſt quadrato axis coni unà cum quadrato ſemidiametro baſis.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

In conis rectis ſimilia triangula inter ſe æqualia ſunt.

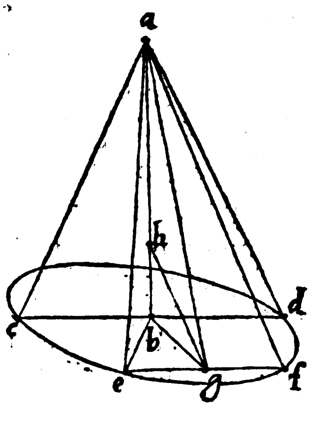


SIT enim in propoſita figura acd triangulum triangulo aef ſimile. Dico & æquale eſſe. quoniam enim ut ac ad cd, ita ae ad ef; erit permutando ut ca ad ae, ita cd ad ef. & ſunt ca, ae æquales. ergo & æquales cd, 3.huius ef. triangula uero æqualium baſium, quæ in conis rectis fiunt, inter ſe ſunt æqualia. ergo & acd, aef triangula æqualia erunt.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si conus rectus planis per uerticem ſecetur, & per axem, & extra axem; ſitq; axis non minor ſemidiametro baſis: eorum, quæ fiunt, triangulorum maximum eſt illud, quod per axem conſtituitur.

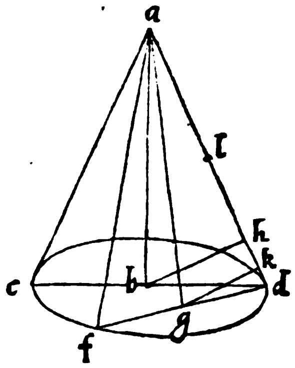
SIT conus, cuius uertex a; baſis circulus circa b centrum; & axis ab. Itaque cono per uerticem ſecto, fiant triangula per axem quidem acd, extra axem uero aef: ponaturq; ef ipſi cd æquidiſtans: & axis uidelicet ab non minor ipſa bc. Dico acd triangulum triangulo aef maius eſſe. iungatur be: & ab ipſo b ad ef perpendicularis ducatur bg. ergo ef in g biſariam diuidetur; & iuncta ag perpendicularis erit 3.tertii ad ef: triangulum enim eaf æquicrure eſt. Quoniam igitur ab non eſt minor ſemidiametro be: & eſt eg minor be: erit ab ipſa eg maior. Itaque abſcindatur bh æqualis eg: communis autem bg. ergo duæ hb, bg duabus eg, gb æquales ſunt: & angulus egb æqualis angulo gbh, quòd uterque rectus. baſis igitur eb baſi hg eſt æqualis: & triangulum triangulo ſimile. quare ut be ad eg, ita gh ad hb. ſed gh ad hb maiorē proportionem habet, quàm ga ad ab, ut proxime demonſtrauimus; 2.huius orthogonium enim triangulum eſt abg. ergo be ad eg, hoc eſt cb ad eg, hoc eſt cd ad ef maiorem proportionem habet, quàm ga ad ab. rectangulum igitur, quod fit ex cd, ba maius eſt eo, quod ex ef ga, per primum theorema. ſed rectãguli quidem ex cd ba dimidium eſt acd triangulum: rectanguli uero ex ef, ga dimidium eſt triangulum aef. quare triangulum acd maius eſt triangulo aef, & maius alijs omnibus, quæ baſes habent æquales triangulo aef, hoc eſt ipſi æqualibus. Similiter demonſtrabitur, & in alijs ſectionibus, quæ extra axem fiunt. triangulum igitur per axem omnium maximum erit.



THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

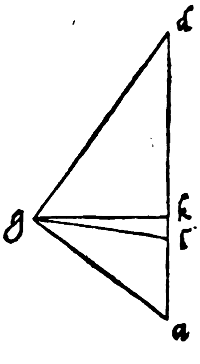
LICET idem & aliter uniuerſalius demonſtrare, ex omnibus ſimpliciter triangulis,quod maiorem baſim habet, illud maius eſſe.

Secto namque cono fiant triangula a c d,a f d,ita ut baſes c d, f d inter ſe ad termi-
num d conueniant: & ſit c d maior ipſa f d,ſiue per centrum tranſeat,ſiue non. Di-
co triangulum a c d maius eſſe triangulo a f d. ducantur enim ad f d, c d perpendi-
culares a b,a g;& ad a d ducatur b h perpendicularis. Itaque quoniam c d maior eſt
ipſa f d; erit eius dimidia b d maior d g. ergo quadratum b d quadrato d g maius
A erít:& propterea reliquum quadratum b a minus quadrato a g. quadratum igitur
B a b ad quadratum b d minorem proportionem habet,quàm a g quadratum ad qua
C dratum g d. ſed ut quadratum a b ad quadratum b d,ita linea a h ad h d.ergo a h ad
h d minorem habet proportionem, quàm quadratum a g ad quadratum g d. fiat ut
quadratum a g ad quadratum g d,ita a k ad k d;& iungatur g k,quæ ad a d perpen-
dicularis erit, ut demonſtrabitur. quoniam igitur ponimus a b non minorem ipſa
D b d,erit a b uel maior b d,uel ipſi æqualis. Sit primum maior.ergo a h maior eſt h d.
ſecetur a d biſariam in l. & quoniam rectangulum a h d minus eſt,quàm quadratum
5.ſecundi a l,quadrato l h;rectangulum uero a k d minus, quàm quadratum a l, quadrato l k;
& maius eſt quadratum l k quadrato l h: erit rectangulum a h d,hoc eſt quadratum b h maius rectangulo a k d,hoc eſt quadrato g k.linea igitur b h maior eſt linea g k: ſuntq; b h , g k altitudines triangulorũ a b d, a g d.quare triangulum a b d maius eſt triangulo a g d & eorum dupla, uidelicet triangulum a c d maius triangulo a f d. ſed triangnlo a f d æquale eſt quodcũque baſim habet ipſi f d æqualem. triangulum igitur a c d maius eſt quolibet triangulo,cuius baſis eſt æqualis ipſi f d.Quòd ſi a b ſit æqualis b d,erit & a h ipſi h d æqualis. & ſimiliter rectangulum a h d, hoc eſt quadratum b h maius erit rectangulo a k d, hoc eſt quadrato g k: proptereaq; linea b h maior g k: & triangulum a b d triangulo a g d maius, Eodem modo demonſtrabitur etiam,ſi alias baſes duxerimus. quare triangulum ſic habens maiorem baſim triangulo minorem habente maius erit. At uero lineam g k ad a d perpendicularem eſſe hoc modo oſtendetur.



Sit triangulum orthogonium a g d,& à puncto g ad baſim ducatur g k, ita ut quam proportionẽ habet quadratum a g ad quadratum g d; habeat linea a k ad k d. Dico g k ad a d perpendicularem eſſe.

Si enim non eſt ita, ſit g l perpendicularis. ut igitur quadratum a g ad quadratum g d, ita a l ad l d: erat autem ut a g quadratum ad quadratum g d,ita a k ad k d.quare ut a l ad l d, ita erit a k ad k d:quod eſt abſurdum.non igitur g l eſt perpendicularis. Similiter oſtendemus neque aliam ullam perpẽdicularem eſſe, præter ipſam g k. ergo g k ad a d perpendicularis erit.



COMMENTARIVS.

A ET propterea reliquum quadratum b a minus quadrato a g.] *Sunt enim ex penultima primi elementorum duo quadrata a b , b d æqualia quadrato a d: & ſimiliter duo quadrata a g,* *a g, g d, æqualia eidem. quadrata igitur a b, b d quadratis a g, g d ſunt æqualia. quorum quidem quadratum b d maius eſt g d quadrato. ergo reliquum quadratum a b reliquo a g minus erit.*

B Quadratum igitur a b ad quadratum b d minorem proportionem habet, quàm a g quadratum ad quadratum g d.] *Nam cum quadratum a b minus ſit quadrato a g, habebit a b quadratum ad quadratum b d minorem proportionem, quàm quadratū a g ad idem b d quadratum. Rurſus cum g d ſit minor ipſa b d, erit & quadratum g d minus quadrato b d. ergo quadratum a g ad quadratum b d minorem proportionem habet, quàm ad g d quadratum. Quadratum igitur a b ad quadratum b d multo minorem proportionem habebit, quàm a g quadratum ad quadratum g d.*

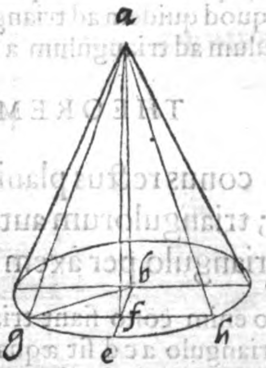
C Sed ut quadratum a b ad quadratum b d, ita linea a h ad h d.] *Cum enim triangulum a b d rectangulum ſit, & b h ad baſim perpendicularis, erit ex corollario octauæ ſexti a b proportionalis media inter d a, a h: itémq; b d proportionalis inter a d, d h. Vt igitur h a ad a b, ita a b ad a d. quare ut quadratum a b ad quadratum a d, ita linea h a ad a d. & eodem modo oſtendetur, ut quadratum b d ad quadratum d a, ita h d ad d a: conuertendoq; ut quadratum d a ad quadratum b d, ita d a ad h d. ergo ex æquali ut quadratum a b ad quadratum b d, ita a h ad h d.* cor. 20. ſexti.

D Ergo a h maior eſt h d.] *Etenim demonſtratum eſt a h ad h d eſſe, ut quadratum a b ad quadratum b d. ſed cum a b ſit maior b d, & quadratum a b quadrato b d maius erit: ideóq; a h maior ipſa h d.*

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

SI in cono recto triangulum per axem maximum ſit triangulorum omnium, quæ extra axem conſtituuntur: axis coni non minor erit ſemidiametro baſis.

SIT conus, cuius uertex quidem a punctum; axis a b recta linea; baſis autem circulus circa centrum b: & triangulum per axem a c d, quod maximum ſit omnium triangulorum, quæ extra axem in cono conſtituuntur. Dico lineam a b ſemidiametro baſis non minorem eſſe. ſi enim fieri poteſt, ſit minor: & ducatur in circulo linea b e ad c d perpendicularis. Quoniā igitur angulus a b e rectus eſt, linea, quæ puncta a e coniungit, maior eſt ſemidiametro b e. quare ſi à pūcto a in angulo a b e aptetur recta linea ipſi ſemidiametro æqualis, inter puncta b & e cadet. Itaque aptetur, & ſit a f: perq́; f ducatur g h ipſi c d æquidiſtans: & b g iungatur. fient triangula a b f, g b f ſimilia, ut in quinto theoremate eſt demonſtratum, & latera eiuſdem rationis inter ſe æqualia erunt. Vt igitur f a ad a b, ita b g ad g f, hoc eſt c b ad g f. quare rectangulum a b c æquale eſt rectangulo a f g, hoc eſt triangulum per axem æquale triangulo a g h: quod fieri non poteſt, poſuimus enim triangulum a c d maximum eſſe. non igitur a b minor eſt ſemidiametro baſis. 16. ſexti



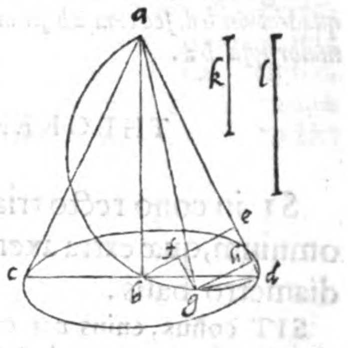
COMMENTARIVS.

Fient triangula a b f, g b f ſimilia, ut in quinto theoremate eſt demonſtratum.] *In quinto theoremate ſimilitudo triangulorum demonſtratur ex ſexta ſexti elementorum, in hoc uero ex ſeptima eiuſdem demonſtrabitur. Quoniam enim duo triangula a f b, g b f unum angulum a b f uni angulo g f b æqualem habent; eſt enim uterque rectus: & circa alios angulos a f b, g b f latera proportionalia, immo uero æqualia, cum ponatur a f æqualis ſemidiametro baſis, hoc* *eſt ipſi g b: & ſit b f utrique communis: reliquorum autem angulorum b a f, b g f uterque minor recto: triangula a f b, g b f inter ſe ſimilia & æqualia erunt.*

PROBLEMA I. PROPOSITIO VIII.

Conum rectum, cuius axis non ſit minor ſemidiametro baſis, plano per uerticem ducto ita ſecare, ut faciat triangulum, quod ad triangulum per axem proportionem habeat datam. oportet autem datam proportionem eſſe minoris ad maius.

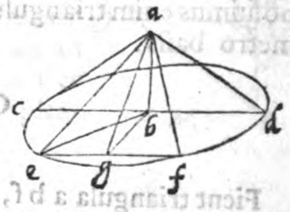
SIT coni uertex a, baſis circulus circa b centrum, & triangulum per axem a c d; in quo a b eſt perpendicularis: & oporteat conum ſecare triangulo, quod ad triangulum a c d proportionem datam habeat. ſit autem data proportio, quæ eſt k minoris ad l maiorem. Quoniam igitur triangulum a b d rectangulum eſt, deſcribatur circa ipſum ſemicirculus: atque à puncto b ducatur b e perpendicularis: & quam proportionem habet k ad l, eandem habeat f e ad e b: deinde per f ducatur f g ipſi e d æquidiſtans, & per g ipſa g h æquidiſtans f e. erit f e æqualis ipſi g h. Iraque quoniam ut k ad l, ita f e ad e b, hoc eſt g h ad b e: ut autem g h ad b e, ita rectangulum ex g h & a d ad rectangulum ex b e, & a d: & ut rectangulum ex g h & a d ad rectangulum ex b e & a d, ita eorum dimidia, uidelicet triangulum a g d ad triangulum a b d: erit ut k ad l, ita a g d triangulum ad triangulum a b d. quare triangulum a g d ad ipſum a b d eſt in data proportione. Si igitur in baſi coni aptabimus lineam duplam lineæ g d perq; ipſam & uerticē planum ducemus, faciet id in cono triangulum ipſius a g d duplū: quod quidem ad triangulum a c d eandem proportionem habebit, quam a g d triangulum ad triangulum a b d, hoc eſt quam k habet ad l. cor.20.ſexti.



THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

SI conus rectus planis per uerticem ſecetur, & per axem, & extra axem; triangulorum autem, quæ fiunt extra axem unum aliquod æquale ſit triangulo per axem: axis coni ſemidiametro baſis minor erit.

Secto enim cono fiant triangula, per axem quidem a c d, extra axem uero a e f, quod triangulo a c d ſit æquale: ſitq; e f ipſi c d æquidiſtans; & a b, a g perpendiculares: & iungantur b e, b g. Dico axem a b ſemidiametro b d minorem eſſe. Quoniam enim a e f triangulum æquale eſt triangulo a c d; & eorum dupla æqualia erunt, uidelicet rectangulum ex e f & g a æquale rectangulo ex
14. ſexti c d & b a. ergo ut c d ad e f, hoc eſt c b ad e g, hoc eſt b e ad e g, ita g a ad a b. quòd cum duo triangula b e g, g a b unum angulum e g b uni angulo a b g æqualem habeant; eſt enim uterque rectus; circa alios autem angulos latera proportionalia: ſitq; reliquorum e b g, a g b uterque recto
7. ſexti minor: triangula inter ſe ſimilia ernnt. Vt igitur e g ad
9. quinti g b, ita a b ad b g. quare a b ipſi e g eſt æqualis. Sed e g minor eſt ſemidiametro b e. ergo a b coni axis ſemidiametro b e minor erit. quod demonſtrandum proponebatur.



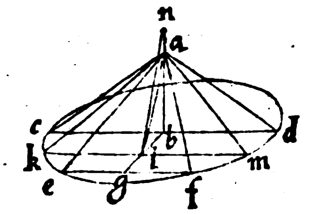
Quoniam autem demonſtratum eſt in lineis æquidiſtantibus c d e f; conſtat

conſtat idem ſequi, etiam ſi non ſint æquidiſtantes, quippe cum oſtenſum 3.huius: ſit triangula baſes æquales habentia inter ſe æqualia eſſe.

THEOREMA IX. PROPOSITIO X.

IISDEM manentibus demonſtrandum eſt, ſi rurſus planum ducatur per uerticem conum ſecans, faciensq; in baſi rectam lineam, cuius magnitudo inter baſes æqualium triangulorum contineatur: triangulum illud utriſque triangulis æqualibus maius eſſe.

Sit ut in antecedenti figura triangulum per axem a c d æquale triangulo baſim habenti e f: & ducatur quælibet recta linea k m, cuius magnitudo ſit inter c d, e f. ponatur autem utrique earum æquidiſtans: & per ipſam & uerticem planum ducatur. Dico triangulum a k m utroque ipſorum a c d, a e f maius eſſe. Secetur enim rurſus k m biſariam in l, & iungantur a l, b k, b l. Itaque quoniam a c d triangulum æquale eſt triangulo a e f: erit a b ipſi e g, hoc eſt dimidiæ e f æqualis, ut proxime demonſtratum fuit. Sed k l eſt maior e g: ergo & k l ipſa a b maior erit. ponatur b n æqualis k l, & l n iungatur. eadem ratione, qua ſupra, demonſtrabimus triangulum b k l æquale & ſimile triangulo l n b. quare ut b k ad k l, hoc eſt ut c b ad k l, hoc eſt c d ad k m, ita l n ad n b. Sed l n ad n b minorem proportionem habet, quàm l a ad a b. ergo & c d ad k m minorem habet proportionem, quàm l a ad a b. & propterea rectangulum ex c d & b a minus eſt rectangulo 1.huius ex k m & l a, hoc eſt triangulum a c d minus triangulo a k m. triangulum igitur a k m triangulo a c d, & triangulo a e f maius erit.

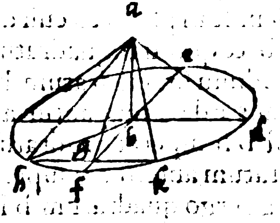


Idem demonſtrabitur etiam in omnibus triangulis, quorum baſis magnitudine inter c d, e f continetur, nihil enim differt ſi baſes non ſint æquidiſtantes, ut ſupra demonſtratum fuit.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XI.

DATUM conum rectum, cuius axis ſit minor ſemidiametro baſis, plano per uerticem ita ſecare, ut faciat triangulum æquale ei, quod per axem conſtituitur.

Sit datus conus rectus, cuius axis quidem a b; triangulum uero per axem a c d: & oporteat eum plano per uerticem ita ſecare, ut faciat triangulum triangulo a c d æquale. ducatur in circulo per centrum linea e b f ad rectos angulos ipſi c d. & quoniam a b minor eſt ſemidiametro baſis, aptetur a g ſubtendens angulum a b f, quæ ſemidiametro ſit æqualis, quod quidem facile effici poteſt: deinde per g ducatur h g k ipſi c d æquidiſtans. ergo h g k ad g biſariam ſecatur; & ad e b f eſt perpendicularis. ducatur per lineas h k, g a planum, quod triangulum a h k efficiat. Dico a h k triangulo a c d æquale eſſe. iungatur enim b h. & quoniam a g eſt æqualis b h, erit ut a g ad g b, ita h b ad b g. quòd cum duo triangula b h g, g a b unum angulum uni angulo æqualem habeant; ſunt enim h g b, a b g utrique recti: & circa alios angulos latera proportionalia: reliquorum uero uterque recto minor; erunt b h g,

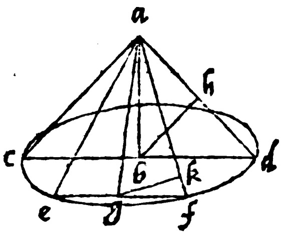


g a b triangula inter ſe ſimilia. quare ut b h ad h g, hoc eſt c d ad h κ, ita g a ad a b: idcircoq́; rectangulum, quod fit ex c d, & b a æquale eſt rectangulo ex h k & g a: & eorum dimidia, uidelicet triangulum a c d æquale triangulo a h k. quod facere oportebat.

THEOREMA X. PROPOSITIO XII.

Si conus rectus planis per uerticem ſecetur; & in uno eorum triangulorum, quæ fiunt, linea à uertice ad baſim perpendicularis ducta æqualis ſit dimidiæ baſis: erit illud triangulum maius omnibus triangulis diſsimilibus, quæ in cono conſtituuntur.

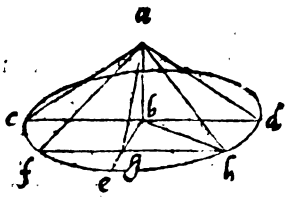
Sit in cono recto triangulum a c d, quod perpendicularem a b æqualem habeat ipſi b d dimidiæ c d baſis. Dico a c d triangulum maius eſſe omnibus triangulis diſsimilibus, quæ in cono conſtituuntur. Sumatur enim aliud quoduis triangulum a e f ipſi diſsimile, in quo ſit perpendicularis a g: & à puncto quidem b ad a d perpendicularis ducatur b h; à puncto autem g ad a f itidem ducatur perpendicularis g κ. Quoniam igitur triangulum a c d diſsimile eſt triangulo a e f: & a b d ipſi a g f diſsimile erit. Sunt autem orthogonia, & æquicrure eſt a b d. ergo a g f non eſt æquicrure. & quadratum quidem a b æquale eſt quadrato b d; quadratum uero a g quadrato g f eſt inæquale. Sed ut a b quadratum ad quadratum b d, ita linea a h ad h d: & ut quadratum a g ad quadratum g f, ita a k ad k f. linea igitur a d in partes æquales diuiditur; & a f in partes inæquales. Itaque quoniam id, quod æqualibus partibus continetur, maius eſt contento partibus inæqualibus: erit a h d rectangulum maius rectangulo a k f. ſed rectangulo a k d æquale eſt b h quadratum: & rectangulo a k f æquale quadratum g k. quadratum igitur b h quadrato g κ maius erit: idcircoq́; linea b h maior, quàm g κ: & ut b h ad g κ, ita rectangulum ex b h & a d ad rectangulum ex g κ & a f; & dimidium ad dimidium, hoc eſt triangulum a b d ad triangulum a g f. maius igitur eſt a b d triangulum triangulo a g f, & eorum dupla, uidelicet triangulum a c d maius triangulo a e f. Similiter oſtendetur maius eſſe omnibus triangulis diſsimilibus ipſi a c d. quod demonſtrare oportebat.



PROBLEMA III. PROPOSITIO XIII.

Datvm conum rectum, cuius axis ſit minor ſemidiametro baſis, plano per uerticem ita ſecare, ut faciat triangulum maius omnibus triangulis diſsimilibus, quæ in cono conſtituuntur.

Sit datus conus rectus, cuius uertex quidem a punctum; baſis circulus circa centrum b; axis uero a b, minor ſemidiametro baſis: & oporteat conum ita ſecare, ut ante dictum eſt. Ducatur planum per axem, quod faciat triangulum a c d. erit a b perpendicularis, & minor b d. deinde in plano circuli ducatur b e ad rectos angulos ipſi c b: & quo d b quadratum ſuperat quadratum b a, eius dimidium ſit quadratum b g: perq́; g ducatur f g h, æquidiſtans c d: & iungantur a g, b h. Itaque quadratum b d, hoc eſt b h ſuperat quadratum b a duobus quadratis b g: quadratum autem a g ſuperat quadratum a b, uno quadrato b g. ergo quadratum b h ſuperat quadratum a g ipſo b g quadrato. Sed quadratum b h ſuperat g h quadratum, quadrato b g. quadratum igitur b h utrumque quadratum a g, g h eodem quadrato ſuperabit: & propterea



qua-

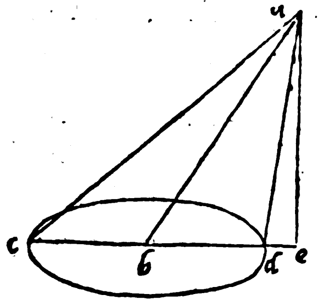
quadratum a g æquale eſt quadrato g h, & linea a g lineæ g h æqualis. eſt autem & f g æqualis g h. quare a g æqualis eſt dimidiæ ipſius f h. Si igitur per f h, g a planum ducatur, fiet in cono triangulum, quod ſit a f h. Itaque quoniam triangulum eſt in cono a f h, à cuius uertice perpendicularis ducta a g æqualis eſt dimidiæ baſis: erit 12. huius a f h triangulum maius omnibus triangulis diſsimilibus, quæ in ipſo cono conſtituuntur. quod facere oportebat.

COMMENTARIVS.

ERGO quadratum b h ſuperat quadratum a g, ipſo b g quadrato.] *Quoniam enim quadratum b h ſuperat quadratum b a, duobus quadratis b g: & quadratum a g ſuperat quadratum b a, quadrato b g: erit quadratum b h æquale quadrato b a unà cum duobus quadratis b g; & quadratum a g æquale quadrato b a unà cum quadrato b g. Sed b a quadratum unà cum duobus quadratis b g ſuperat quadratum b a unà cum quadrato b g, ipſo quadrato b g. ergo & quadratum b h ſuperabit quadratum a g, eodem b g quadrato.*

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XIIII.

Datum conum plano per axem ad rectos angulos ipſi baſi ſecare.

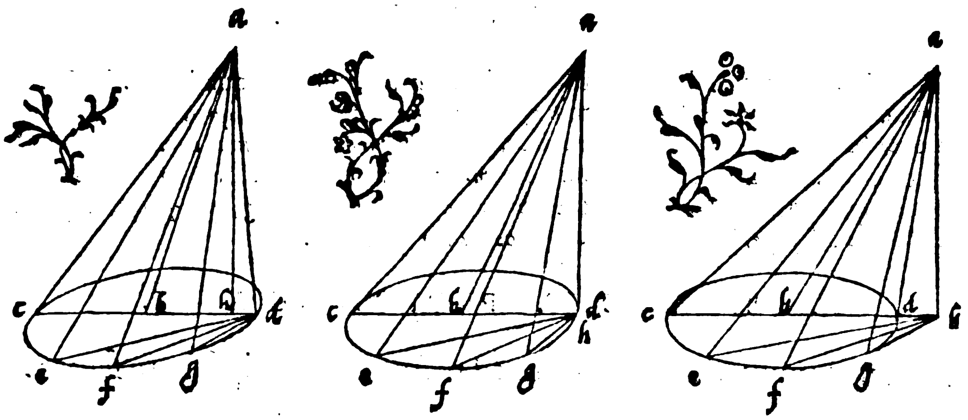


Sit datus conus, cuius uertex a punctum, baſis circulus circa centrum b; axis uero a b: & oporteat conũ ſecare per lineam a b ad rectos angulos ipſi baſi. Si igitur conus ſit rectus, perſpicuum eſt lineam a b ad baſim perpendicularem eſſe: & ob id omnia, quæ per ipſam tranſeunt plana ad rectos angulos erunt. 18 undecimi quare & triangulum a c d per lineam a b ductum ad rectos angulos erit ipſi baſi. Sed ſit conus ſcalenus. ergo a b non eſt ad baſim perpendicularis. cadat à uertice a perpendicularis ad baſis planum in puncto e: & iuncta e b, producatur trianguli a b e planum, quod in cono ſectionem faciat triangulum a c d. Dico a c d triangulum ad rectos angulos eſſe baſi coni. Quoniam enim a e perpendicularis eſt ad baſis planum: & omnia, quæ per ipſam a e tranſeunt, plana eidem ad rectos angulos erunt. ergo & triangulum a c d ad rectos angulos erit plano baſis. id quod feciſſe oportebat.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XV.

SI conus ſcalenus plano per axem ſecetur ad rectos angulos ipſi baſi, triangulum in cono factum ſcalenum erit, cuius maius latus maxima erit linearum omnium, quæ à uertice coni ad baſis circumferentiam ducuntur: & minus latus linearum omnium ſimiliter ductarum minima erit; aliarum uero, quæ maxime propinquior eſt, maior erit, quàm quæ ab ipſa magis diſtat.

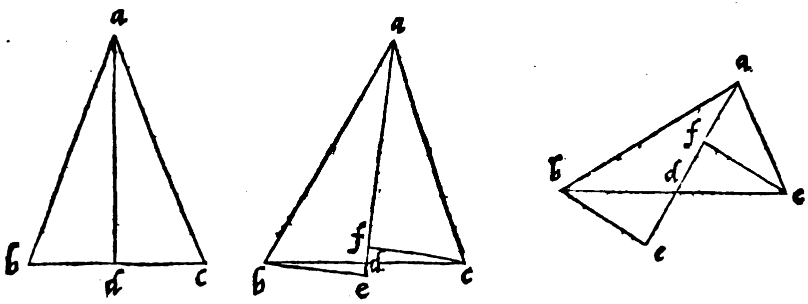
Sit conus ſcalenus, cuius uertex a punctum, baſis circulus c e d, & axis a b. cono autem ſecto per axem ad rectos angulos ipſi c e d circulo, fiat triãgulum a c d: & axis ad partes d uergat. Cum igitur conus ſcalenus ſit, non eſt a b perpendicularis ad circulum c e d. ducatur a h ad ipſum perpendicularis, quæ erit in plano trianguli a c d, & in lineam c b d productam cadet. Itaque quoniam maior eſt c h, quàm h d, & quadratum c h quadrato h d erit maius. commune apponatur quadratum h a. quadrata igitur c h, h a maiora ſunt quadratis d h, h a, hoc eſt quadratum c a maius quadrato a d. ergo linea a c maior ipſa a d. Dico a c maximam eſſe linearum omnium, quæ à uertice ad baſis circumferentiam pertinent: & a d minimam. ducantur enim h e, h f, h g. & quoniam h c maxima eſt omnium, quæ à puncto h in circumferentiam cadunt: erit quadratum h c maximum quadratorum h e, h f, h g, h d. commune apponatur quadratum h a. ergo quadrata, quæ fiunt à lineis c h, h a, maiora ſunt eis, quæ fiunt ab e h, h a; f h, h a; g h, h a; d h, h a; hoc eſt quadratum c a maius eſt quolibet qua-



dratorum a e, a f, a g, a d. quare linea a c maior eſt qualibet linearum a e, a f, a g, a d. Similiter demonſtrabitur etiam aliis maiorem eſſe. linea igitur a c, ut diximus, maxima eſt omnium linearum, quæ in ipſo cono ducuntur. Eadem ratione demonſtrabitur lineam a d minimam eſſe. aliarum uero a e maior eſt, quàm a f: & a f maior, quàm a g: & ſemper propinquior ipſi a c, maior quàm, quæ ab ea magis diſtat. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XVI.

Si in triangulo à uertice ad punctum, quod baſim bifariam diuidit, recta linea ducatur: quadrata ex lateribus facta æqualia erunt quadratis, quæ fiunt ex baſis partibus, & duplo quadrati eius lineæ, quæ à uertice ad baſim ducta fuerit.



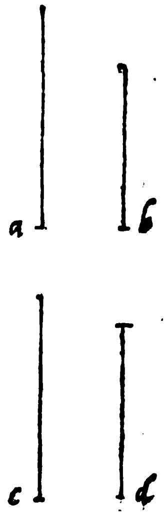
Sit triangulum a b c, cuius baſis ſecetur bifariam in d; & ducatur a d. Dico quadrata b a, a c quadratis b d, d c, & duplo quadrati a d æqualia eſſe. Si enim æquicrure ſit a b c triangulum, demonſtratio manifeſta erit, propterea quò d uterque angulorum, qui ad d eſt rectus. Sed ſit b a maior, quàm a c. ergo b d a angulus maior eſt angulo a d c. producatur a d, & ad ipſam perpendiculares ducantur b e, c f. Similia igitur ſunt triangula ortho gonia e b d, c f d, propter linearum b e, f c æquidiſtantiã. quare ut b d ad d c, ita e d ad d f. æqualis autem eſt b d ipſi d c, ergo & e d æqualis d f.

d f; & rectangulum a d e rectangulo a d f æquale: & duplum rectanguli a d e duplo 1. ſexti
rectanguli a d f. Itaque quoniam quadratum a b maius eſt quadratis a d, d b, duplo 12. ſecundi
rectanguli a d e, hoc eſt duplo rectanguli a d f: quadratum uero a c minus eſt quadra-
tis a d, d c, duplo rectanguli a d f: erunt quadrata b a, a c æqualia quadratis b d, d c & 13. ſecundi
duplo quadrati a d. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XVII.

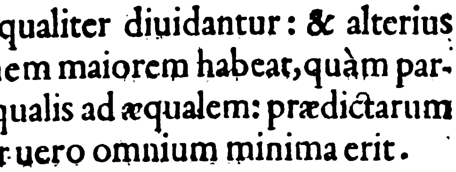
SI quatuor linearum prima ad ſecundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam: & quadratum primæ ad quadratum ſecundæ maiorem habebit proportionem, quàm tertiæ quadratum ad quadratum quartæ. Quòd ſi quadratum primæ ad quadratum ſecundæ maiorem proportionem habeat, quàm tertiæ quadratum ad quadratum quartæ: & prima ad ſecundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam.

Sint quatuor rectæ lineæ a b c d: & habeat a ad b maiorem proportionem, quàm c ad d. Dico quadratum ipſius a ad quadratum b maiorem habere proportionem, quàm quadratum c ad d quadratum. quoniam enim proportio a ad b maior eſt, quàm c ad d, erit dupla maioris proportionis maior, quàm dupla minoris. eſt autem proportionis maioris a ad b, dupla proportio quadrati a ad quadratum b: & proportionis c ad d minoris dupla proportio quadrati c ad quadratum d. ergo proportio quadrati a ad quadratum b maior eſt proportione quadrati c ad quadratum d. Rurſus quadratum a ad quadratum b maiorem proportionem habeat, quàm quadratum c ad quadratum d. Dico a ad b maiorem proportionem habere, quàm c ad d. Nam cum proportio quadrati a ad quadratum b maior ſit, quàm quadrati c ad quadratum d; erit maioris proportionis dimidia maior, quàm dimidia minoris. ſed proportionis quidem quadrati a ad quadratum b maioris, dimidia eſt proportio a ad b; proportionis uero minoris quadrati c ad quadratum d, dimidia eſt c ad d proportio: proportio igitur a ad b maior eſt, quàm c ad d. quod demonſtrare oportebat.



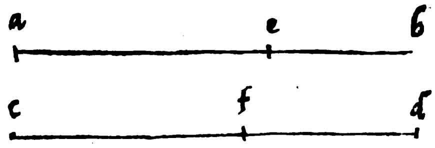
THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVIII.

SI duæ magnitudines æquales inæqualiter diuidantur: & alterius partium maior ad minorem proportionem maiorem habeat, quàm partium alterius maior ad minorem, uel æqualis ad æqualem: prædictarum partium maior omnium maxima, minor uero omnium minima erit.



Sint duæ magnitudines æquales a b, c d: diuidaturq; a b in e, & c d in f: & ſit a e maior, quàm e b: & c f non minor quàm f d, ita ut a e ad e b maiorem proportionem habeat, quàm c f ad f d. Dico magnitudinum a e, e b, c f, f d maximam quidem eſſe a e, e b uero minimam. Quoniam enim a e ad e b maiorem proportionem habet, quàm
c f ad f d: & componendo a b, ad b e maiorem habebit, quàm c d ad d f: permutan- 28.quinti
doq; a b ad c d maiorem, quàm e b ad f d. eſt autem a b ipſi c d æqualis. minor igi- 27.quinti

f

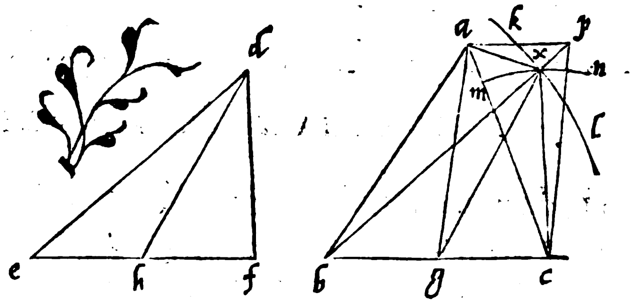


tur e b quàm fd: eſtq́; d f non maior, quàm fc. quare & e b quàm c f minor. Sed & erat minor, quàm a e. ergo e b minima erit. Rurſus quoniam a b eſt æqualis c d, quarum e b minor eſt quàm d f; erit reliqua a e maior, quàm reliqua c f: & c f non eſt minor, quàm fd. quare & a e maior, quàm fd. erat autem & maior, quàm e b. ergo a e omnium maxima erit, & e b minima.

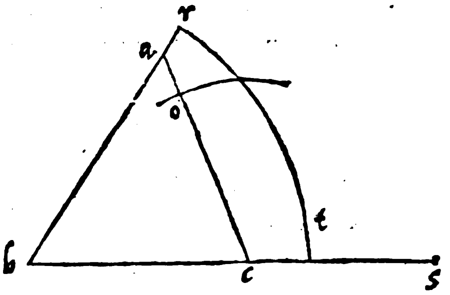
THEOREMA XV. PROPOSITIO XIX.

Si duo triangula & baſes æquales habeant, & lineas, quæ à uertice ad punctum, quod baſim bifariam ſecat, ducuntur: alterius autem maius latus ad minus maiorem proportionem habeat, quàm reliqui maius latus ad minus, uel æquale ad æquale; triangulum illud, cuius maius latus ad minus maiorem habet proportionem, altero minus erit.

Sint duo triangula a b c, d e f; baſes b c, e f æquales habentia: quarum utraque bifariam ſecetur in punctis g h: ductæq́; a g, d h inter ſe æquales ſint: & ſit e d maior, quàm d f. b a uero non minor, quàm a c, ita ut e d ad d f maiorem proportionem habeat, quàm b a ad a c. Dico d e f triangulum minus eſſe triangulo a b c. Quoniam enim b c, e f & æquales ſunt, & in partes æquales diuiduntur: ſuntq́; æquales a g, d h: erunt & quæ ex ipſis efficiuntur quadrata æqualia. quadrata igitur b g, g c unà cum duplo quadrati a g æqualia ſunt quadratis e h, h f unà cum duplo quadrati d h: ſed quadratis b g, g c unà cum duplo quadrati a g æqualia ſunt quadrata b a, a c,
16. huius ut oſtenſum eſt: & quadratis e h, h f unà cum duplo quadrati d h æqualia quadrata e d d f. utraque igitur quadrata b a, a c, utriſque e d d f æqualia erunt. & quoniam
17. huius e d ad d f maiorem proportionem habet, quàm b a ad a c; habebit quadratum e d ad quadratum d f maiorem proportionem, quàm quadratum b a ad quadratum a c. Quòd cum duarum magnitudinum æqualium, uidelicet eius, quæ conſtat ex quadratis b a a c, & eius, quæ ex quadratis e d d f, maior pars ad minorẽ, uidelicet quadratũ e d ad quadratum d f maiorem proportionem habeat, quàm reliqua pars ad reliquũ; uidelicet quàm quadratum b a ad a c quadratum: erit quadratum e d, quod eſt maximum, utroque quadrato b a, a c maius: quadratum uero d f minimum, utroque b a a c minus, ex antecedenti theoremate. quare linea e d maior eſt utraque ipſarum b a, a c; & d f utraque minor. Circulus igitur, qui ex centro b, & interuallo ipſi e d æquali deſcribitur, uidelicet x l tranſibit ultra lineam b a: & circulus ex centro c, interualloq́; æquali ipſi d f deſcriptus, hoc eſt m n ſecabit lineam a c. qui quidem duo circuli k l, m n ſeſe inuicem ſecabunt, ut demonſtrabitur. ſecent autem ſeſe in puncto x: & iungantur x a, x b, x g, x c. eſt igitur b x ipſi e d æqualis, & x c æqualis d f: eratq́; b c æqualis e f. Quare totum triangulum b x c triangulo e d f eſt æquale: ac propterea x g æqualis d h, hoc eſt ipſi a g. ex quibus ſequitur angulum x a g acutum eſſe. & quoniam b a non eſt minor a c, angulus a g b angulo a g c non erit minor. angulus igitur a g c non eſt maior recto. erat autem x a g angulus recto minor. ergo anguli c g a, x a g duobus rectis minores ſunt: & linea a x ipſi g c non eſt æquidiſtans. ducatur per a ipſi b c æquidiſtans



a p; & b x p protrahatur: iungaturq; c p. triangulum igitur a b c triangulo p b c eſt æquale: & idcirco b a c maius eſt ipſo b x c, hoc eſt e d f. quod oportebat demonſtrare. 38. primi.



Circulos autem k l, m n ſe ſe inuicem ſecare, hoc modo demonſtrabitur.

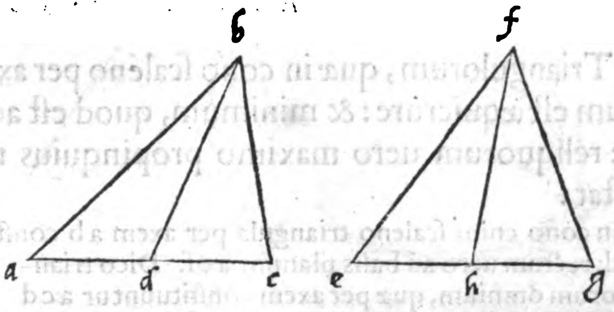
Sit enim ipſi e d æqualis b a r: & ipſi d f æqualis c s, quæ ſit in eadem recta linea b c. tota igitur b s æqualis eſt utrique e f, f d. & quoniam utraque e f, f d maior eſt e d: erit & b s ipſa e d maior. Itaque circulus ex centro b, & interuallo b r deſcriptus ipſam b s ſecabit: & cum c s, quæ eſt æqualis d f minor ſit c a; circulus ex centro c, interualloq; c s deſcriptus ſecabit a c. ſecet in o. ergo tranſibit per circumferentiam r t. circuli igitur k l, m n ſe ſe inuicem ſecabunt.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XX.

Si duo triangula inæqualium laterum & baſes æquales habeant, & lineas, quæ à uertice ad punctum baſim bifariam ſecans ducuntur: minoris trianguli maius latus ad minus maiorem proportionem habebit, quàm maioris maius latus ad minus.

Sint triangula a b c, e f g, baſes a c, e g æquales habentia; quæ bifariam ſecentur in punctis d h; & ſint æquales b d; f h: ſit autem maius triangulum e f g, & a b maior, quàm b c; itemq; e f quàm f g maior. Dico a b ad b c maiorem habere proportionem, quàm e f ad f g. ſi enim non ita ſit, uel eandem proportionem habebit, uel minorem. Sit primum, ſi fieri poteſt, ut a b ad b c, ita e f ad f g. ergo ut a b quadratum ad quadratum b c, ita quadratum e f ad quadratum f g: & componendo, permutandoq; ut utraque quadrata a b, b c ad utraque e f, f g, ita quadratum b c ad quadratum f g. Sed utraque quadrata a b b c utriſque e f, f g ſunt æqualia. ergo & quadratum b c æquale eſt quadrato f g; & idcirco reliquum a b quadratum reliquo e f æquale erit. linea igitur a b æqualis eſt e f; & b c ipſi f g. Sed & baſes ſunt æquales. ergo triangulum a b c æquale eſt triangulo e f g, quod eſt abſurdum; erat enim triangulum a b c minus. non igitur a b ad b c proportionem habet eandem, quam e f ad f g. Sed rurſus ſi fieri poteſt, a b ad b c minorem proportionem habeat, quàm e f ad f g. habebit e f ad f g maiorem proportionem, quàm a b ad b c. quare triangulum e f g minus erit triangulo a b c, ex proxime demonſtratis; quod eſt abſurdum: ponebatur enim maius. non ergo a b ad b c minorem proportionem habet, quàm e f ad f g. demonſtratum autem eſt neque eandem habere. relinquitur igitur ut a b ad b c maiorem habeat proportionem, quàm e f ad f g.

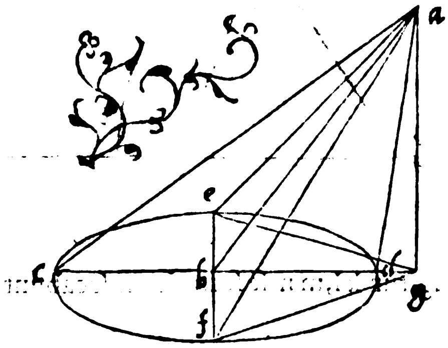
16. huius

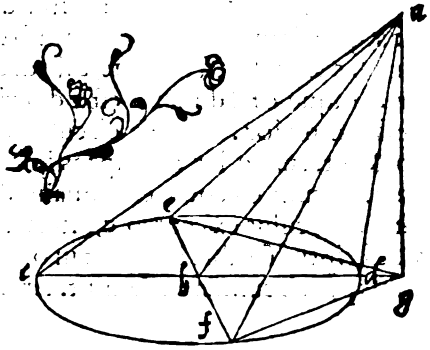


PROBLEMA V. PROPOSITIO XXI.

Datum conum ſcalenum plano per uerticem ita ſecare, ut in cono triangulum æquicrure efficiat.

Sit datus conus ſcalenus, cuius axis a b: & baſis c e d circulus: oporteatq́; eum ita ſecare, uti dictum eſt. Secetur primo per axem plano a c d ad rectos angulos ipſi circulo c e d: & ducatur perpendicularis a g, quæ cadet in lineam c d, trianguli a c d baſim: ipſi uero c d ad rectos angulos agatur e f in circuli plano: perq́; e f, & per uerticem a planum ducatur, quod faciat triangulum a e f. Dico a e f triangulum æquicrure eſſe.





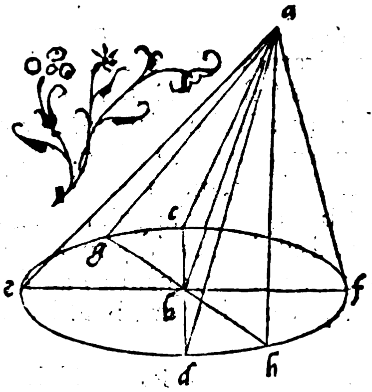
iungantur enim e g, f g. & quoniam c d ipſam e f ſecans ad rectos angulos, biſariam ſecat: erit e g æqualis g f: communis autem a g: & uterque angulorum a g e, a g f rectus. ergo e a eſt æqualis a f: & idcirco triangulum a e f eſt æquicrure.

Ex quibus conſtat omnia triangula, quæ baſes habent ad rectos angulos ipſi c d, æquicruria eſſe. Demonſtrandum etiam eſt ea triangula, quæ baſes habent non ad rectos angulos ipſi c d, non eſſe æquicruria.

Ponatur enim e f in eadem figura non eſſe ad rectos angulos ipſi c d. erunt e g, f g inæquales: communis autem a g, & ad ipſas perpendicularis. ergo e a, a f inæquales ſunt, & triangulum e a f non eſt æquicrure.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXII.

Triangulorum, quæ in cono ſcaleno per axem conſtituuntur, maximum eſt æquicrure: & minimum, quod eſt ad rectos angulos baſi coni: reliquorum uero maximo propinquius maius eſt eo, quod plus diſtat.



In cono enim ſcaleno triangula per axem ab conſtituantur: æquicrure quidem a c d; rectum uero ad baſis planum a e f. Dico triangulorum omnium, quæ per axem conſtituuntur a c d maximum eſſe, & a e f minimum. Sit enim aliud triangulum per axem a g h. & quoniam conus ſcalenus 15.huius eſt; uergat axis a b ad partes f. ergo linea a e maxima eſt omnium, quæ à puncto a ad baſis circumferentiam ducuntur; & a f minima. quare e a maior eſt, quàm a g: & f a minor quàm a h. Itaque cum duo triangula a e f, a g h baſes e f, g h æquales habeant, & lineam a b eandem, quæ à uertice ad punctum baſim biſariam ſecans ducitur: habeatq́; e a ad a f maiorem proportionem, quàm g a ad a h: erit a e f triangulum minus triangulo a g h. Similiter etiam demonſtrabitur minus omnibus aliis triangulis per axem. ergo a e f minimum eſt omnium triangulorũ, quæ per axem conſtituuntur. Rurſus in triangulis a g h, a c d, & baſes æquales ſunt, & eadem, quæ ducitur à uertice ad pun-

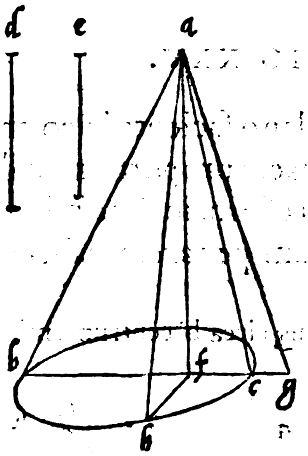
ctum

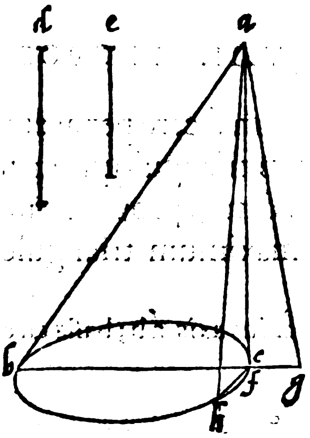
ctum baſim bifariam ſecans: habetq́; g a ad a h maiorem proportionem, quàm c a ad a d. ſunt enim c a, a d æquales. ergo g a h triangulum minus eſt triangulo c a d. ſimiliter demonſtrabitur, omnia triangula per axem ducta triangulo c a d minora eſſe. triangulum igitur a c d maximum eſt omnium triangulorum, quæ per axem conſtituuntur; & a e f minimum. quod demonſtrare oportebat. Eodem modo demonſtrabitur propinquius maximo maius eſſe eo, quod plus diſtat.

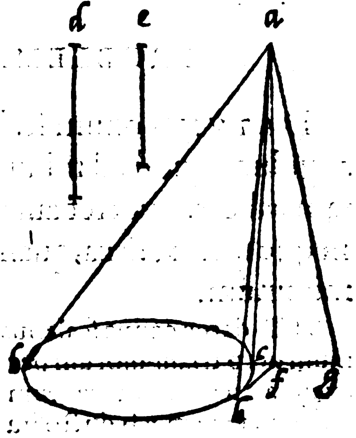
PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXIII.

IN dato cono ſcaleno à uertice ad circumferentiam baſis lineam ducere, ad quam maxima proportionem datam habeat. oportet autem datam proportionem eſſe maioris ad minus, & minorem eſſe ea, quam habet maxima linearum, quæ in cono ducuntur ad minimam.

SIT conus datus baſim habens b c circulum, cuius diameter b c: uerticem uero punctum a; & triangulum per axem a b c, ad rectos angulos ipſi b c circulo. ergo b a linearum, quæ à uertice coni ducuntur maxima eſt: & a c minima. Itaque oporteat à puncto a ad circumferentiam circuli ducere lineam, ad quam ipſa b a proportionẽ habeat eandem, quam habet recta linea d maior ad e minorem. habeat autem d ad e minorem proportionem, quàm b a ad a c. ducatur à puncto a ad b c perpendicularis a f: protrahaturq́; b f g, & ut d ad e, ita ſit b a ad aliam quampiam a g, quæ coaptetur ſub angulo a g f. ergo b a ad a g minorem proportionem habet, quàm b a ad a c: & propterea g a maior eſt, quàm a c, & g f maior, quàm f c. Quoniam igitur ut quadratum d ad quadratum e, ita quadratum b a ad quadratum a g: erit quadratũ



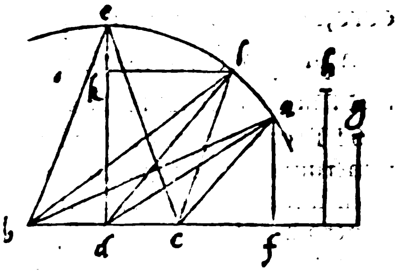




b a quadrato a g maius; hoc eſt quadrata b f, f a maiora quadratis a f, f g. commune auferatur quadratum a f. ergo reliquum b f quadratũ maius eſt quadrato f g: & ideo linea b f ipſa f g maior. erat autem c f minor, quàm f g. quare g f maior eſt, quàm f c, & minor quàm f b. Coaptetur igitur in circulo linea f h ipſi f g æqualis: & iungatur a h. Itaque quoniam h f ipſi f g eſt æqualis: communis autem f a: & utrique ipſarum ad rectos angulos: erit baſis h a æqualis baſi a g. Sed ut d ad e, ita eſt b a ad a g, hoc eſt b a ad a h. eſtq́; d ad e in data proportione. ergo & b a ad a h in data proportione erit. ducta igitur eſt a h, ad quam ipſa b a proportionem habet datam. quod facere oportebat.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXIIII.

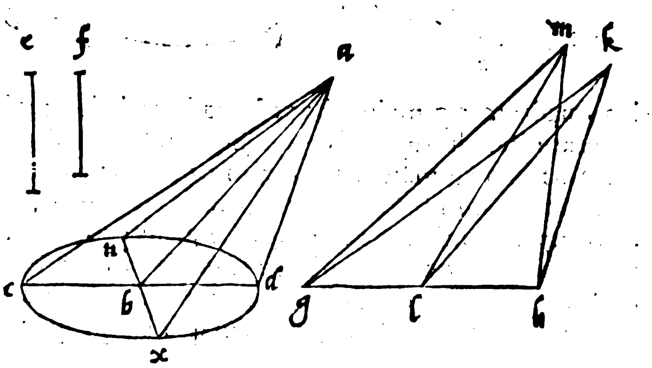
SIT datum triangulum ſcalenum a b c, cuius latus b a maius ſit latere a c: & baſis b c bifariam in d ſecetur, ducaturq́; a d: ſit autem e d perpendicularis ad b c; & æqualis ipſi d a:& ſit a f ad eandem b c perpendicularis; oporteatq́; aliud triangulum conſtituere maius triangulo a b c, quod habeat lineam ductam à uertice ad punctum baſim bifariam ſecans, utrique ipſarum d e, d a æqualem: & ad triangulũ a b c proportionem eandem habeat, quàm h maior ad g minorem. habeat autem h ad g non maiorem proportionem, quàm d e ad a f.



ITAQVE centro d, & interuallo d a circulus e a deſcribatur, qui per e tranſibit. & quoniam proportio h ad g non maior eſt proportione d e ad a f erit uel eadem, uel minor. Sit primum eadem: & iungantur e b, e c. eſt igitur ut h ad g, ita e d ad a f: & ut e d ad a f, ita rectangulum ex e d, b c ad rectangulum ex a f, b c. ergo ut h ad g, ita rectangulum ex e d, b c ad rectangulum ex a f, b c. Sed rectanguli ex e d, b c dimidium eſt e b c triangulum: & rectanguli ex a f, b c, dimidium eſt triangulum a b c. triangulum igitur b e c ad triangulum b a c eam proportionem habet, quam h ad g, hoc eſt datam. Habeat deinde h ad g minorem proportionem, quàm e d ad a f: & fiat ut h ad g, ita k d ad a f: perq́; k ducatur k l ipſi c d æquidiſtans: & iungantur l b, l c. Quoniam igitur ut h ad g, ita k d ad a f: ut autem k d ad a f, ita b l c triangulum ad triangulum b a c: triangulum b l c ad triangulum b a c datam habet proportionem, uidelicet quàm h ad g: & habet l d ipſi d a æqualem. quod faciendum proponebatur.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXV.

DATVM conum ſcalenum ſecare per axem plano faciente in eo triangulum, quod ad minimum triangulorum per axem proportionem datam habeat. oportet autem datam proportionem eſſe maioris ad minus, neque maiorem ea, quam maximum triangulorum per axem habet ad minimum.



SIT datus conus ſcalenus, cuius axis a b; baſis circulus, circa b centrum: minimum uero triangulorum per axem a c d: & oporteat eum plano per axem a b ducto ita ſecare, ut faciat triangulum, quod ad triangulũ a c d proportionem quidem habeat eandem, quam recta linea e maior ad f minorem, non autem maiorem, quàm maximum triangulorum per axẽ habet ad minimum a c d. Si igitur e ad f proportionem habeat eandem, quàm maximum triangulorum per axẽ ad minimum; ducemus per b rectam lineam in circulo ad rectos angulos ipſi c d: & per eam & axem planum producentes, habebimus triangulum æquicrure, quod maximum eſt omnium, quæ per axem conſtituuntur, ut demonſtratum fuit; habetq́; ad triangulum a c d proportionem eandem, quam e ad f, uidelicet datam. Sed habeat

22.huius

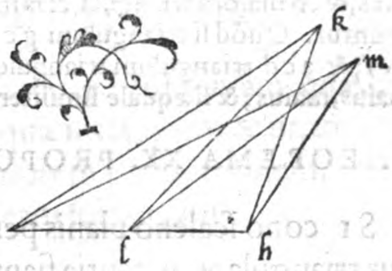
nunc

nunc e ad f proportionem minorem, quàm maximum triangulorum per axem ad minimum; & deſcribatur ſeorſum recta linea g h æqualis ipſi c d; & in ea triangulum k g h triangulo a c d ſimile, ita ut k g ſit æqualis a c, & aliæ alijs itidem æquales. prætera in linea g h conſtituatur triangulum, habens eam, quæ à uertice ad punctum baſim bifariam ſecans ducitur, ipſi k l æqualem: habensq́; ad triangulum k g h proportionem eandem, quam e ad f. erit conſtituti trianguli uertex ad partes g, ut mox demonſtrabitur. ſit autem illud triangulum m g h, ita ut latus m g ſit maius ipſo m h. quoniam igitur m l eſt æqualis l κ, & g l communis: angulus autem k l g maior angulo m l g: erit k g maior ipſa m g. & eſt k g æqualis c a. ergo c a, quàm m g maior erit. Rurſus quoniam k h eſt minor, quàm m h: itemq́; m h minor, quàm m g: erit k h ipſa m g minor. quòd cum m g ſit minor, quàm a c maxima earum, quæ in cono ducuntur: & maior, quàm a d minima; fieri poteſt ut à uertice ad baſis circumferẽtiam ducatur recta linea æqualis ipſi m g, quemadmodum antea tradidimus. ducatur ergo, & ſit a n; iunganturq́; n b x, a x. & quoniam a n eſt æqualis m g; & n b ipſi g l, & b a ipſi l m: erit totum a n b triangulum triangulo m g l æquale: angulusq́; a b n æqualis angulo m l g. quare & a b x angulus ipſi m l h æqualis. Rurſus quoniam a b eſt æqualis l m, & b x ipſi l h. angulusq́, a b x angulo m l h: erit & a x æqualis m h. ſed a n æqualis erat m g: & baſis n x baſi g h. triangulum igitur a n x eſt æquale triangulo g m h. at triangulum g m h ad triangulũ g κ h, hoc eſt ad ipſum c a d habet eandẽ proportionem, quam e ad f. ergo & triangulum a n x ad a c d triangulum proportionem habet eandem, quam e ad f. Conſtitutũ eſt igitur triangulum per axem a n x, quemadmodum proponebatur.

ex præcedenti

23. huius

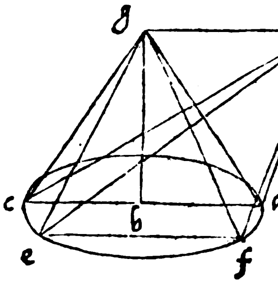
Quòd ſi quis dicat triangulum in linea g h deſcriptũ, maius ſcilicet triangulo g k h ad partes h uerticem habere, abſurdum ſequetur. Sit enim ita, ſi fieri poteſt. & quoniã æquales ſunt k l, m l: communis autem l g: erit m l g angulus maior angulo k l g. quare & m g maior, quàm k g. Eadem ratione demonſtrabitur k h maior, quàm h m. & cum m g ſit maior, quàm g k, & m h minor, quàm h κ; habebit m g ad g k maiorem proportionẽ, quàm m h ad h k: permutandoq́; g m ad m h maiorem, quàm g k ad k h. triangulum igitur g m h triangulo g k h eſt minus; quod fieri non poteſt. ponebatur enim maius. quare triangulnm g m h non ad partes h, ſed ad eas, in quibus eſt g, uerticem habebit.



THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXVI.

SI conus ſcalenus plano per axem ſecetur ad rectos angulos ipſi baſi: & linea, quæ à uertice facti trianguli ad baſim perpendicularis ducitur, non minor ſit baſis ſemidiametro: erit triangulum ad rectos angulos baſi maximum omnium, quæ extra axem in cono conſtituuntur, & baſes habent dicti trianguli baſi æquidiſtantes.

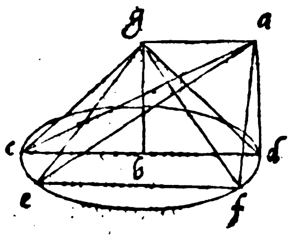
SIT conus, cuius uertex a; baſis circulus circa b centrum; & ſecetur plano per axem, quod faciat a c d triangulum ad rectos angulos baſi coni: linea uero, quæ à pũcto a ad c d perpendicularis ducitur, non ſit minor ſemidiametro baſis. Dico triangulum a c d maximum eſſe omnium, quæ in cono conſtituuntur, & baſes habent ipſi c d æquidiſtantes. ducatur enim in circulo linea e f æquidiſtans c d: & in ipſa triangulum a e f deſcribatur: in plano autem a c d trianguli ad rectos angulos ipſi c d erigatur b g: & ducatur a g eidem c d æquidiſtans. erit linea b g æqualis ei, quæ à puncto a ad c d perpendicularis ducta fuerit. Itaque iunctis g c, g d, g e, g f, intelligatur conus, cuius uertex g, axis g b, & baſis circulus circa b centrum deſcriptus; atque in co intelligantur triangula, per axem quidem g c d, extra axem uero g e f. Quoniam igitur b g non eſt minor ſemidiametro baſis; triangulum g c d ex iam demonſtratis, maius erit triangulo g e f; & maius omnibus triangulis, quæ in cono conſtituuntur, baſesq́; habent ipſi c d æquidiſtantes. Sed triangulum g c d æquale eſt triangulo a c d, quòd ſit in eadem baſi, & in eiſdem parallelis; triangulumq́; g e f æquale triangulo a e f. ergo triangulum a c d triangulo a e f eſt maius. Similiter etiam maius demonſtrabitur omnibus alijs, quæ baſes habent æquidiſtantes ipſi c d. triangulum igitur a c d omnium eiuſmodi triangulorum maximum eſt, quod demonſtrare oportebat. 5.huius



THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVII.

At ſi à puncto a ad c d perpendicularis ducta minor ſit ſemidiametro baſis: non erit triangulum a c d maximum omnium, quæ baſes ipſi c d æquidiſtantes habent. demonſtratio autem & figura eadem eſt.

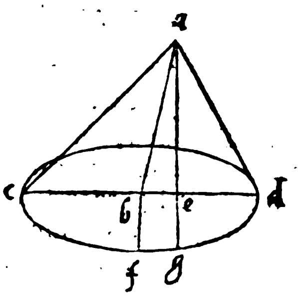
Quoniam enim g b minor eſt ſemidiametro baſis; triangulum g c d non erit maximum omnium, quæ baſes habent ipſi æquidiſtantes: ſi quidem ut demonſtrauimus, & eo maiora triangula, & minora, & æqualia conſtituuntur. Quòd ſi triangulum g c d minus ſit triangulo g e f; & a c d triangulum triangulo a e f erit minus; & ſi maius, maius; & ſi æquale ſimiliter æquale erit.



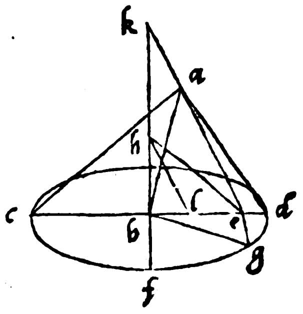
THEOREMA XX. PROPOSITIO XXVIII.

Si cono ſcaleno planis per uerticem ſecto, in baſibus æquidiſtantibus triangula æquicruria fiant: ſitq́; axis coni non minor ſemidiametro baſis. triangulum æquicrure per axem tranſiens maximum erit omnium æquicrurium, quæ ex ea parte, ad quam axis inclinat, conſtituuntur.

SIT conus, cuius axis a b, baſis circulus circa b centrum: trianguli uero per axẽ conſtituti ad rectos angulos ipſi circulo, baſis ſit c b d: & angulus a b d minor ſit angulo recto, ita ut a b ad partes d inclinet: ſitq́; a b non minor ſemidiametro baſis. Dico triangulum æquicrure per a b tranſiens maximum eſſe æquicrurium omnium, quæ inter puncta b d baſes habent. Sumatur enim in linea b d contingens punctum e: & ipſi c d ad rectos angulos ducatur in circulo b f, e g: & iungatur a e. Itaque b a uel minor eſt, quàm a e, uel non minor. ponatur primum b a non minor, quàm a e: & eſt e g minor, quàm b f. ergo a b ad a e maiorem proportionem habet, quàm e g ad b f: & idcirco a b f rectangulum maius eſt rectangulo a e g. Sed rectangulo a b f æquale eſt triangulum baſim habens duplam ipſius b f, & altitudinem a b, hoc eſt triangulum æquicrure per axem conſtitutum: rectangulo autem a e g eſt æquale triangulum, cuius baſis dupla eſt e g, & altitudo a e. ergo triangulum æquicrure per axem maius eſt æquicruri per a e conſtituto. Similiter quoque triangulum per axem triangulorum omnium, quæ inter b d baſes habent, maximum demonſtrabitur. I.huius



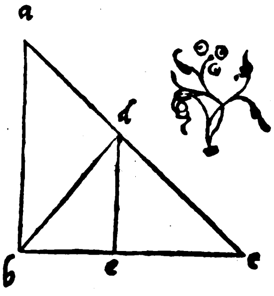
Sed ſit b a minor, quàm a e. & quoniam angulus a b e minor eſt recto, ducatur in plano trianguli a b e linea b h perpendicularis ad c d, quæ ipſi e g ſit æqualis: & iungantur h e, b g. Cum igitur angulus a b e angulo a e b ſit maior: erit angulus a e b minor recto: rectus autem eſt h b e. ergo lineæ h b, a e productæ inter ſe conuenient. cõueniant ad punctum κ: & per h ducatur h l ipſi k e æquidiſtans. Itaque quoniam h b eſt æqualis e g, communis autem b e, & angulos æquales continent; uidelicet rectos: erit b g ipſi h e æqualis. Rurſus quoniã rectus eſt angulus h b l, linea h e maior erit, quàm h l. ergo b h ad h e minorem proportionem habet, quàm b h ad h l: ut autem b h ad h l, ita b κ ad κ e. quare b h ad h e minorem habet proportionem, quàm b k ad k e. Sed b k ad k e habet minorem, quàm b a ad a e, ut in ſequenti theoremate oſtendetur. multo igitur b h ad h e minorem habebit proportionem, quàm b a ad a e. ergo b a ad a e maiorẽ proportionem habet, quàm b h ad h e, uidelicet, quàm e g ad g b, hoc eſt ad b f. quòd cum b a ad a e maiorem habeat proportionem, quàm e g ad b f: erit rectangulum a b f maius rectangulo a e g. Sed rectangulo a b f æquale eſt triangulum æquicrure per axem: & rectangulo a e g æquale triangulum æquicrure per a e, cuius baſis ſit dupla e g. maius igitur eſt triangulum æquicrure per axem triangulo æquicruri per a e conſtituto. Eadem ratione demonſtrabitur maius alijs, quorum baſes inter puncta b d continentur. quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIX.

Si in triangulo orthogonio ab angulo recto ad ſubtenſam quædam linea ducatur; habebit ducta ad partem, quæ inter ipſam & unam continẽtium angulum rectum interiicitur, maiorem proportionem, quàm reliqua rectum angulum continens ad lineam ſubtenſam.

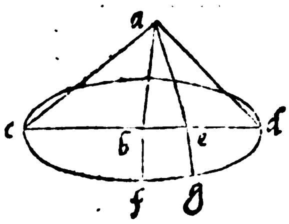
SIT triangulum a b c rectum habens angulum ad b, à quo ad a c baſim ducatur linea b d. Dico b d ad d c maiorem proportionem habere, quàm b a ad a c. ducatur enim per d linea d e ipſi a b æquidiſtans. & quoniam recti anguli ſunt ad e; maior erit b d, quàm d e. ergo b d ad d c maiorem habet proportionem, quàm e d ad d c. ſed ut e d ad d c, ita b a ad a c. maiorem igitur proportionem habebit b d ad d c, quàm b a ad a c. ex quibus conſtat b a ad a c minorem habere proportionem, quàm b d ad d c. id quod nobis ad antecedens utile erit.



THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXX.

Si cono ſcaleno planis per uerticem ſecto, in baſibus æquidiſtantibus æquicruria triangula conſtituantur ex ea parte, ad quam axis inclinat; & dictorum triangulorum unum aliquod æquale ſit triangulo æquicruri per axem: recta linea, quæ à uertice ad baſim trianguli perpendicularis ducitur, ipſo axe maior erit.

SIT conus ſcalenus, cuius uertex a; axis a b ad partes d inclinans: & baſis circulus circa centrum b: trianguli autem per axẽ ad rectos angulos circulo baſis ſit c b d:

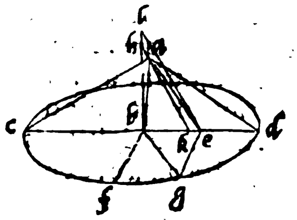


& ad ipſam c d perpendiculares b f, e g in circulo ducantur: iungaturq́; a e: & ponatur triangulum æquicrure per a e, e g tranſiens æquale eſſe triangulo per a b, b f, hoc eſt triangulo æquicruri per axem. Dico a e maiorem eſſe ipſa a b. Quoniam enim triangulum æquicrure per a e, e g æquale eſt triangulo per a b, b f: erit rectangulum a e g æ-
14. ſexti. quale a b f rectangulo. Vt igitur b f ad e g, ita e a ad a b; ſed b f eſt maior quàm e g. ergo & e a, quàm a b maior erit.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXXI.

Si cono ſcaleno per uerticem planis ſecto in baſibus æquidiſtantibus æquicruria triangula conſtituantur ex ea parte, ad quam axis inclinat: & dictorum triangulorum unum aliquod æquale ſit triangulo æquicruri per axem: axis coni ſemidiametro baſis minor erit.

SIT conus ſcalenus, cuius uertex a; axis a b ad partes d inclinans; & baſis circulus circa b centrũ: trianguli uero per axem ad rectos angulos circulo baſis ſit c b d: & ad ipſam c d perpendiculares in circulo ducantur b f, e g: iungaturq́; a e: & ponatur triangulo per a b: & duplam b f tranſeunti, hoc eſt triangulo æquicruri per axem æquale triangulum æquicrure per a e, & duplam e g. Dico axem a b ſemidiametro baſis minorem eſſe. Quoniam enim angulus a b e minor eſt recto, ducatur in plano
A trianguli a b e linea b h ad rectos angulos ipſi c d. & quoniam e a maior eſt, quàm a b, ex ijs, quæ in antecedente demonſtrata ſunt, angulus b e a minor eſt recto: rectus autem h b e. ergo lineæ h b, e a productæ inter ſe conuenient. conueniant in h. Cum igitur triangulum æquicrure per axem ſit æquale rectangulo a b f: triangulum uero æquicrure per a e, & duplam e g æquale ſit rectangulo a e g: & ſint triangula æquicruria inter ſe æqualia: erit rectangulum a b f rectãgulo a e g æquale. ergo ut b a ad a e, ita e g ad b f, hoc eſt ad g b. Sed b a ad a e maiorem habet proportionem, quàm b h ad h e per uigeſimam nonam huius. ergo ut b a ad a e, ita b h ad minorẽ, quàm h e,
B & ad maiorem, quàm h b. Sit ut b a ad a e, ita b h ad h k: & per e ducatur e l æquidiſtans k h, conueniensq́; cum b h in l. Itaque quoniã ut b a ad a e, ita b h ad h k, hoc eſt b l ad l e: ut autem b a ad a e, ita e g ad g b: erit ut b l ad l e, ita e g ad g b. ſunt igitur duo triangula l b e, g e b, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, nempe rectum: circa alios autem angulos, qui ad l g latera habent proportionalia; & reliquorum angulorum
7. ſexti. uterque eſt acutus. ergo triangula l b e, g e b inter ſe ſimilia ſunt: & ut l b ad b e, ita g e ad e b. quare l b ipſi g e eſt æqualis. minor autem eſt e g ſemidiametro baſis.
C ergo & b l ſemidiametro baſis minor erit. & quoniam utræque e l, l b maiores ſunt, quàm utræque e a, a b. ut autem e l ad l b, ita e a ad a b: & componendo ut utræque e l, l b ad b l, ita utræque e a, a b ad b a: permutandoq́;. ſed maiores ſunt utræque e l, l b, quàm utræque e a, a b. ergo & l b maior erit, quàm b a. oſtenſa eſt autem l b minor ſemidiametro baſis. quare & b a ſemidiametro baſis minor erit. quod demonſtrare oportebat.



COMMENTARIVS.

A ET quoniam e a maior eſt, quàm a b, ex ijs, quæ demonſtrata ſunt, angulus b e a minor eſt recto.] *Nam cum e a ſit maior, quàm a b, erit ex decima octaua primi elementorum angulus a b e maior angulo b e a. ſed angulus a b e eſt minor recto. ergo b e a angulus recto multo minor erit.*

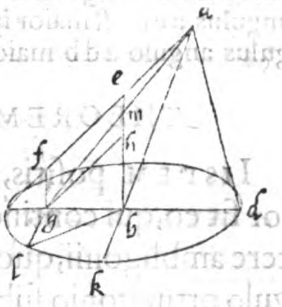
B Et ad maiorem, quàm h b.] *Eſt enim b a minor ipſa a e, ut proximè demonſtratum fuit. quare & b h minor erit ea, ad quam ita ſe habet, ut b a ad a e.*

C Et quoniam utræque e l, l b maiores ſunt quàm utræque e a, a b.] *Ex uigeſima prima primi elementorum.*

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXXII.

SI cono ſcaleno planis per uerticem ſecto, in baſibus æquidiſtantibus triangula æquicruria conſtituantur ex ea parte, à qua axis declinat: triangulum æquicrure per axem tranſiens non erit omnium eiuſmodi triangulorum minimum.

SIT conus ſcalenus, cuius axis a b; baſis circulus circa b centrum; plani uero per axem ducti ad rectos angulos circulo, & ipſius circuli communis ſectio ſit diameter c b d: ſitq; a b d angulus recto minor. Dico triangulum æquicrure per axem tranſiens non eſſe minimum omnium triangulorum æquicrurium, quæ inter puncta c b baſes habent. iungatur enim a c: & in triangulo a b c ad rectos angulos ipſi c d ducatur b e. Itaque quoniam c e maior eſt ſemidiametro baſis c b, ſit e f æqualis ſemidiametro, & f g ducatur ipſi e b æquidiſtans: iungaturq; a m g. & rurſus ducatur g h æquidiſtans f e. ergo f h parallelogrammum eſt: & propterea f e ipſi g h eſt æqualis, & g h æqualis ſemidiametro baſis. denique in circuli plano ducantur g l, b k ad rectos angulos ipſi c d: & iungatur b l. Quoniam igitur duo triangula orthogonia h g b, l b g rectos angulos æquales habent: & circa alios angulos latera proportionalia, & reliquorum uterque eſt acutus; erunt ea triangula inter ſe ſimilia; & ideo ut g h ad h b, ita b l ad l g. habet autem g h ad h b maiorem proportionem, quàm g m ad m b: & g m ad m b item maiorem quàm g a ad a b. ergo g h ad h b maiorem proportionem habebit, quàm g a ad a b. ſed ut g h ad h b, ita b l, hoc eſt b k ad l g. quare b k ad l g maiorem habet proportionem, quàm g a ad a b. rectangulum igitur a b k maius eſt rectangulo a g l, hoc eſt triangulum æquicrure per axem maius triangulo æquicruri per a g, cuius baſis eſt ipſius l g dupla. non ergo triangulum æquicrure per axem minimum eſt omnium eiuſmodi triangulorum, quæ inter puncta b c baſes habent. 7. ſexti A 1. huius

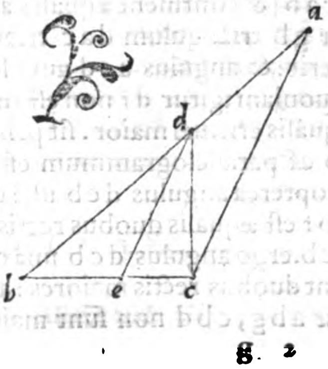


COMMENTARIVS.

A HABET autem g h ad h b maiorem proportiouem, quàm g m ad m b.] *Ex ſecunda huius.*

B Et g m ad m b item maiorem, quàm g a ad a b.] *Illud autem nos hoc lemmate demonſtrabimus.*

Sit triangulum ambligonium a b c; & ab angulo eius obtuſo c ducatur c d perpẽdicularis ad b c, quæ lineam b a in d ſecet. Dico b d ad d c maiorem proportionem habere, quàm b a ad a c.

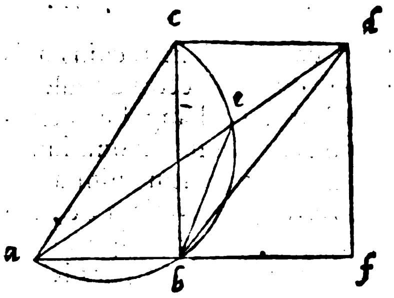


Ducatur enim à puncto d ad b c linea d e ipſi a c æquidiſtans. erit ob triangulorum b d e, b a c ſimllitudinem, ut b d ad d e, ita b a ad a c. ſed cum d e ſit maior, quàm d c, ſubtenditur enim angulo d c e recto: habebit b d ad d c maiorem proportionem, quàm b d ad d e, hoc eſt, quàm b a ad a c. 8. quinti.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXIII.

Si in eadem baſi duo triangula conſtituantur: & alterius quidem latus ſit ad rectos angulos baſi: alterius uero ad angulos obtuſos: ſitq; ambligonii trianguli altitudo non minor altitudine orthogonii: angulus, qui ad orthogonii uerticem angulo, qui ad uerticem ambligonii maior erit.

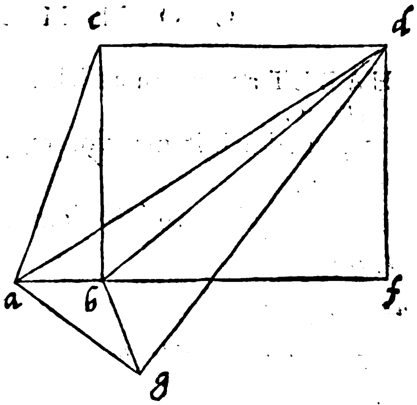
Conſtituantur in baſi a b triangula a c b, a d b: angulusq; a b c ſit rectus: & a b d
obtuſus: linea uero, quæ à puncto d ad a b ba-
ſim perpendicularis ducitur, uidelicet d f non
minor ſit perpendiculari c b. Dico angulum
a c b angulo a d b maiorem eſſe. Quoniã enim
æquidiſtantes ſunt b c, d f, & ad rectos angulos
ipſi a b f; non minor autem d f, quàm c b: erit
19. primi. d c b angulus nõ minor recto. quare a d maior
eſt, quàm a c. & cum triangulum a b c orthogo
nium ſit; in ſemicirculo continetur, cuius dia-
meter a c. ergo deſcriptus circa ipſam ſemicir-
culus lineam a d ſecabit. ſecet in e, & e b iunga-
21. tertii. tur. erit a e b angulus æqualis angulo a c b. ſed
16. primi angulus a e b eſt maior ipſo a d b. ergo a c b an
gulus angulo a d b maior erit.



THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXIIII.

Iisdem poſitis, ſi trianguli orthogonii angulus ad uerticem nõ maior ſit eo, qui continetur linea uertices triangulorum coniungente, & latere ambligonii, quod obtuſum angulum cum baſi efficit: linea in triangulo orthogonio ſubtenſa angulo recto ad eam, quæ eſt ad rectos angulos baſi, minorem habet proportionem, quàm ſubtenſa angulo obtuſo in ambligonio ad eam, quæ eſt ad angulos obtuſos.

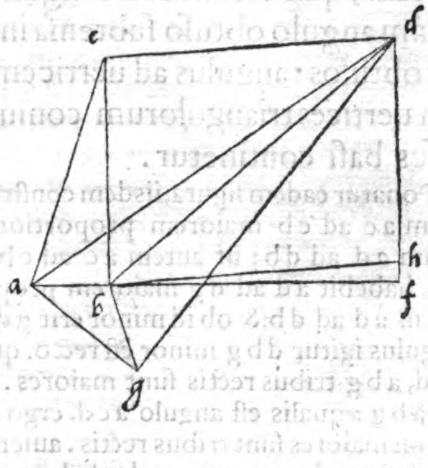
Deſcribantur triangula; & ſit a c b angulus non maior angulo c d b. Dico a c ad
c b minorem habere proportionem, quàm a d
ad d b. Quoniam enim angulus a c b maior eſt
in antecedente. angulo a d b, ut oſtenſum fuit: & angulus c a b
maior d a b angulo: conſtituatur ipſi quidem
angulo a c b æqualis angulus a d g: angulo au-
tem c a b æqualis d a g. erunt triangula a c b,
a d g inter ſe ſimilia. quare ut d a ad a c, ita g a
A ad a b: & continent æquales angulos. iuncta igi
6. ſexti tur g b triangulum d a c triangulo g a b ſimi-
le erit: & angulus a c d angulo a b g æqualis.
Quoniam igitur d f non eſt minor ipſa c b; uel
æqualis erit, uel maior. ſit primum æqualis. er-
go c f parallelogrammum eſt rectangulum: &
B propterea angulus d c b unà cum angulis c b d
C d b f eſt æqualis duobus rectis. ſed angulo c d b, hoc eſt d b f non eſt maior angulus
29. primi a c b. ergo angulus d c b unà cum angulis c b d, a c b, uidelicet anguli a c d, c b d non
ſunt duobus rectis maiores: angulo autem a c d æqualis eſt angulus a b g. anguli igi
tur a b g, c b d non ſunt maiores duobus rectis. apponatur angulus a b c rectus,



quare

quare anguli a b g, a b d non ſunt maiores tri- D 19. primi 8. quinti
bus rectis: & idcirco d b g reliquus ex qua-
tuor rectis non eſt recto minor. maior igitur
d g, quàm d b. & a d ad d g minorem habet
proportionem, quàm a d ad d b. Sed ut a d
ad d g, ita a c ad c b. ergo a c ad c b minorem
proportionem habebit, quàm a d ad d b.

Sed ſit d f maior, quàm c b. ergo d c b angulus eſt obtuſus. Itaque ducatur b h ipſi c d æquidiſtans. & quoniam angulus d c b unà cum angulis c b d, d b h eſt æqualis duobus rectis: angulo autem c d b, hoc eſt d b h non eſt maior angulus a c b: erunt eadem ratione, qua ſupra, anguli a c d, c b d, hoc eſt a b g, c b d non maiores duobus rectis. ergo a b d, a b g non ſunt maiores tribus rectis; &
d b g non eſt recto minor. quare g d maior eſt, quàm d b; ideoq; a d ad d g minorem E
habet proportionem, quàm a d ad d b. quod demonſtrare oportebat.



COMMENTARIVS.

A ET continent æquales angulos.] *Factus eſt enim angulus d a g æqualis ipſi c a b. quare dempto communi angulo d a b, reliquus g a b reliquo d a c æqualis erit.*

B Et propterea angulus d c b unà cum angulis c b d, d b f eſt æqualis duobus rectis.] *Ex 29. primi elementorum.*

C Sed angulo c d b, hoc eſt d b f non eſt maior angulus a c b.] *Ex poſitione ſcilicet.*

D Et idcirco d b g reliquus ex quatuor rectis.] *Ex 13. primi elementorum.*

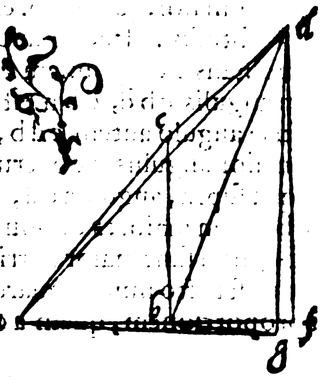
E Ideoq; a d ad d g minorem habet proportionem, quàm ad d b, quod demonſtrare oportebat.] *Non hoc eſt, quod demonſtrare oportet, ſed illud potius a c ad c b minorem proportionem habere, quàm a d ad d b, quod quidem ex his eodem, quo ſupra, modo concludetur. Hoc theorema à Sereno ita quidem demonſtratum inuenitur. Sed non uideo cur neceſſe ſit ducere lineam ipſi e d æquidiſtantem, & demonſtrationem in duas partes ſecare. nam ſiue angulus d c b rectus ſit, ſiue obtuſus, trianguli b c d tres angulos duobus rectis æquales eſſe manifeſto conſtat. Quare una eademq; demonſtratio in utroque caſu ſatisfacere poterit, hoc modo.*

Deſcribantur triangula; & ſit a c b angulus non maior angulo c d b. Dico a c ad c b minorem habere proportionem, quàm a d ad d b. Quoniam enim angulus a c b maior eſt angulo a d b, ut oſtenſum fuit: & angulus c a b maior d a b angulo: conſtituatur ipſi quidem angulo a c b æqualis angulus a d g: angulo autem c a b æqualis d a g. erunt triangula a c b, a d g inter ſe ſimilia. quare ut d a ad a c, ita g a ad a b; & continent æquales angulos. iuncta igitur g b triangulum d a c triangulo g a b ſimile erit. angulus autem b c d unà cum angulis c b d, c d b eſt æqualis duobus rectis: & angulo c d b non eſt maior angulus a c b. ergo b c d angulus unà cum angulis c b d, a c b, uidelicet anguli a c d, c b d non ſunt duobus rectis maiores. Sed angulo a c d æqualis eſt angulus a b g, propter ſimilitudinem triangulorum a c d, a b g. anguli igitur a b g, c b d non ſunt maiores duobus rectis. apponatur angulus a b c rectus. quare anguli a b g, a b d non ſunt maiores tribus rectis: & idcirco d b g reliquus ex quatuor rectis non eſt recto minor. maior igitur eſt d g, quàm d b: & a d ad d g minorem habet proportionem, quàm ad d b. ſed ut a d ad d g, ita a c ad c b. ergo a c ad c b minorem proportionem habebit, quàm a d ad d b. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXV.

IISDEM poſitis, ſi in triangulo orthogonio ſubtenſa angulo recto ad eam, quæ eſt ad rectos angulos baſi maiorem proportionem habeat, quàm angulo obtuſo ſubtenſa in ambligonio ad eam, quæ eſt ad angulos obtuſos: angulus ad uerticem orthogonij maior eſt angulo, qui linea uertices triangulorum coniungente, & ea, quæ eſt ad angulos obtuſos baſi continetur.

Ponatur eadem figura, iisdem constructis. Quoniam a c ad c b maiorem proportionem habet, A quàm a d ad d b: ut autem a c ad c b, ita a d ad d g: habebit a d ad d g maiorem proportionem, quàm a d ad d b: & ob id minor erit g d, quàm d b, B angulus igitur d b g minor eſt recto. quare reliqui C a b d, a b g tribus rectis ſunt maiores. Sed angulus a b g æqualis eſt angulo a c d. ergo a c d, a b d anguli maiores ſunt tribus rectis. auferatur angulus rectus a b c. erunt a c d, c b d anguli duobus D rectis maiores. Quoniam igitur angulus b c d unà cum angulis a c b, c b d eſt maior duobus rectis; unà uero cum ipſis c d b, c b d eſt duobus rectis æqualis: ſequitur angulum a c b angulo c d b maiorem eſſe.



COMMENTARIVS.

A VT autem a c ad c b, ita a d ad d g.] *Poſitum enim eſt triangulum a d g triangulo a c b ſimile.*

B Angulus igitur d b g minor eſt recto.] *Nam cum ſit g d minor, quàm d b, erit ex decima octaua primi angulus d g b maior angulo d b g. ergo d b g eſt recto minor; ſi enim eſſet rectus, trianguli b d g tres anguli duobus rectis maiores eſſent.*

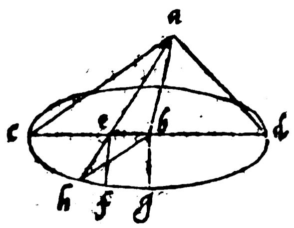
C Sed angulus a b g æqualis eſt angulo a c d.] *Ob triangulorum a c d, a b g ſimilitudinem.*

D Quoniam igitur angulus b c d unà cum angulis a c b, c b d eſt maior duobus rectis.] *Sunt enim hi tres anguli æquales angulis a c d, c b d, qui duobus rectis maiores erant.*

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXVI.

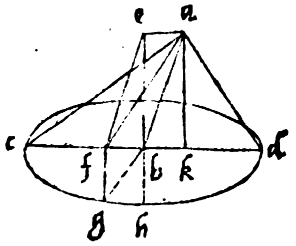
SI cono ſcaleno per uerticem planis ſecto, in baſibus æquidiſtantibus triangula æquicruria conſtituantur ex ea parte, à qua axis declinat: triangulum æquicrure per axem tranſiens omnium eiuſmodi triangulorum neque maximum, neque minimum erit.

Sit conus, cuius axis a b, & baſis circulus circa b centrum: plani uero per axem ad rectos angulos circulo, & ipſius circuli communis ſectio ſit c b d; ſitq; a b d angulus recto minor. Dico triangulum æquicrure per axem triangulorum omnium æquicrurium, quæ baſes habent inter puncta c b, neque maximum eſſe, neque minimum. uel enim axis eſt minor baſis ſemidiametro, uel maior, uel ipſi æqualis. ſit primum minor. & quoniam a b minor eſt ſemidiametro baſis, aptetur a e æqualis ſemidiametro: perq; puncta b & e ducantur in circulo e f b g ad rectos angulos ipſi c d: & angulo a e b æqualis conſtituatur e b h: & h e iungatur. quoniã igitur utraque a e, b h æqualis eſt ſemidiametro: communis 6. ſexti autem b e, & continent æquales angulos: & reliqua latera æqualia, & triangula inter A ſe ſimilia erunt. ergo ut e a ad a b, ita b h ad h e. & quoniam e f maior eſt, quàm e h; æquales autem b g, b h; habebit b h ad h e maiorem proportionem, quàm b g ad f e.

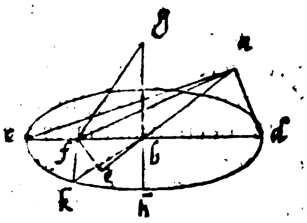


Sed

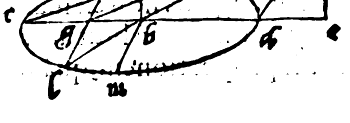
Sed ut b h ad h e, ita e a ad a b. quapropter e a ad a b maiorem proportionem habet,
quàm b g ad e f: & idcirco rectangulum a e f maius eſt rectangulo a b g: hoc 1.huius
eſt triangulum æquicrure per a c, cuius baſis eſt dupla e f, maius triangulo æquicruri
per axem. triangulum igitur æquicrure per axem non eſt omnium eiuſmodi
triangulorum maximum. Sed ſit axis a b ſemidiametro æqualis. Itaque angulus
a b d recto minor, uel minor eſt medietate recti, uel non. Sit primum non minor
medietate recti: & per a in plano ad circulum recto ducatur a e ipſi c b æquidiſtans,
& e f æquidiſtans a b: iungaturq́; f a: in circulo autem ducantur b h, f g ad rectos angulos
ipſi c d & b g iungatur. Quoniam igitur angulus a b d non eſt minor medietate
recti: neque b a e medietate recti minor erit. ergo e b a, hoc eſt f e b non eſt maior
medietate recti: & ideo f e b angulus non maior eſt
angulo e a b. Itaque duo triangula f e b, f a b in eadem
baſi conſtituta ſunt: & perpendicularis à puncto a ad c d
ducta, uidelicet a k non eſt minor ipſa e b: angulus autem
f e b orthogonii trianguli non maior angulo e a b.
quare ex trigeſimo quarto theoremate, f e ad e b minorem
habet proportionem, quàm f a ad a b. Sed ut f e B
ad e b, ita b g, hoc eſt b h ad f g, æqualis enim eſt e f ipſi
ſemidiametro. ergo b h ad f g minorem habet proportionem,
quàm f a ad a b: & propterea rectangulum a b h 1.huius
minus eſt rectangulo a f g, hoc eſt triangulum æquicrure
per axem minus triangulo æquicruri per a f. non igitur
triangulum æquicrure per axem omnium eiuſmodi triangulorum
maximum erit.



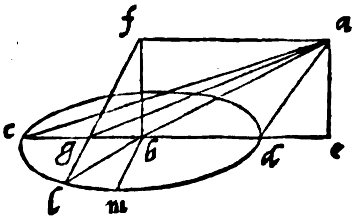
Sit deinde a b d angulus minor medietate recti: & producatur
a b uſque ad e, ita ut b e ſit æqualis dimidio ſemidiametri:
in plano autem ad circulum recto, in quo
eſt a e ducatur e f ad ipſam perpendicularis: & b g perpendicularis
ad c d: & angulo f b g ſubtendatur f g æqualis
ſemidiametro: iungaturq́; f a. Quoniam igitur angulus
a b d, hoc eſt f b e minor eſt medietate recti: rectus
autem, qui ad e: erit b e maior quàm e f: & eſt quadratum C
f b æquale quadratis f e, e b, quorum quidem quadratum e b maius eſt quadrato 47.primi
f e. ergo quadratum f b minus eſt, quàm duplum quadrati b e: & propterea quadratum D
f g maius, quàm duplum quadrati f b. reliqui igitur quadrati b g erit quadratum E
f g minus, quàm duplum. & quoniam e b dimidia eſt ſemidiametri; quod bis
continetur a b, b e æquale eſt quadrato b a. Sed quadratum f a eſt æquale quadratis 12.ſecūdi
a b, b f, & duplo rectanguli a b e. duplum uero rectanguli a b e æquale eſt quadrato
a b. quadratum igitur f a duplo quadrati a b, & quadrato b f æquale erit. ergo quadratum
f a maius eſt, quàm duplum quadrati a b. demonſtratum autem eſt quadratum
f g minus, quàm duplum quadrati g b. quadratum igitur f g ad quadratum
g b minorem proportionem habet, quàm quadratum f a ad a b quadratum.
ergo & f g ad g b minorem habet proportionem, quàm f a ad a b. Quòd ſi rurſus 17.huius
in circulo ducantur f k, b h ad rectos angulos ipſi c d, & iungatur b h: habebit b h ad F
f k minorem proportionem, quàm f a ad a b. Triangulum igitur æquicrure per axem
minus eſt triangulo æquicruri per a f ducto. quare triangulum æquicrure per axem
non erit omnium triangulorum, de quibus dictum eſt, maximum.



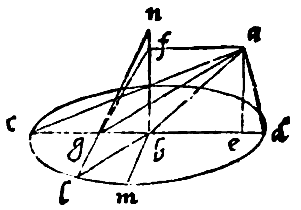
Denique ſit axis a b ſemidiametro maior: & in
plano ad circulum recto ducatur a e ad c d perpendicularis:
quæ uel minor erit ſemidiametro, uel non
minor. Sit primum minor: perq́; a ducatur a f
ipſi c d æquidiſtans: & per b ipſa b f æquidiſtans
a e: & conſtituatur angulus b f g non maior angulo
f a b: iungaturq́; g a. Rurſus ex iam demonſtratis 34.huius



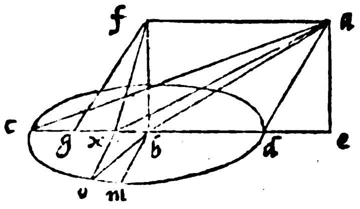
gf ad fb minorem proportionem habebit, quàm ga ad ab: Itaque quoniam fb æqualis ae eſt minor ſemidiametro: & gf maior, quàm fb: erit fg uel maior ſemidiametro, uel minor, uel æqualis. Sit primum æqualis, & in circulo ducantur gl, bm ad ipſam cd perpendiculares, ut ſuperius factum eſt: & iungatur bl. per ea, quæ ſæpius demonſtrata ſunt, habebit ga ad ab maiorem proportionem, quàm bm ad gl. quare triangulum æquicrure per ag, gl maius eſt triangulo per axem æquicruri.



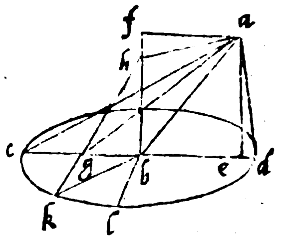
Si uero fg eſt minor ſemidiametro, ſit gn ſemidiametro æqualis. & quoniam ga ad ab maiorem proportionem habet,
2. huius quàm gf ad fb: gf uero ad fb maiorem habet, quàm gn ad nb: habebit ga ad ab maiorem proportionem, quàm gn ad nb, hoc eſt quàm bm ad gl; & ita triangulum æquicrure per ag, gl triangulo æquicruri per axem maius erit.



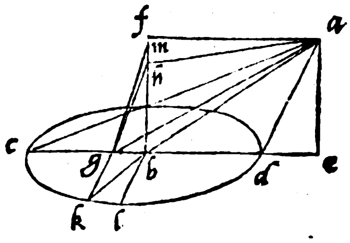
At ſi fg ſit ſemidiametro maior, ducatur fx ipſi æqualis. Quoniam igitur xfb angulus non eſt maior angulo fab, iuncta xa ad ab maiorem proportionem habebit, quàm xf ad fb: ut autem xf ad fb, ita bm ad xo. ergo xa ad ab maiorem proportionem habebit, quàm mb ad xo: & propterea triangulum æquicrure per ax xo maius eſt triãgulo æquicruri per axem.



Sit perpendicularis ae non minor ſemidiametro; & fb ſemidiametro æqualis: iungaturq́; af; & ducatur linea, ut contingit ah: conſtituatur autem bhg angulus non maior angulo hab; & iungatur ga. habebit rurſus ex iis, quæ demonſtrata ſunt, gh ad hb minorem proportionem, quàm ga ad ab. & quoniam hb minor eſt ſemidiametro: maior autem gh, quàm hb: erit gh uel æqualis ſemidiametro, uel minor, uel maior. ſit primum æqualis; & ducantur in circulo gk, bl ad rectos angulos ipſi cd. Cum igitur ga ad ab maiorem habeat proportionem, quàm gh ad hb: & ut gh ad hb, ita bl ad gk: ga ad ab maiorem proportionem habebit, quàm bl ad gx. ergo triangulum æquicrure per ag, gk triangulo æquicruri per axem maius erit.



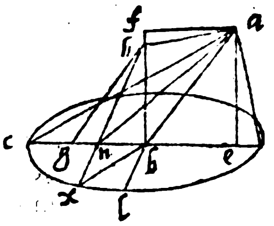
Si uero hg eſt minor ſemidiametro, ſit ſemidiametro æqualis gm. Itaque quoniam ga ad ab maiorem habet propor-
2. huius tionem, quàm gh ad hb: & gh ad hb, item maiorem, quàm gm ad mb: habebit ga ad ab maiorem proportionem, quàm gm ad mb, hoc eſt, quàm bl ad gk. Quare & ita maius erit triangulum æquicrure per ag, gk, triangulo per axem æquicruri.



Quòd ſi gh eſt maior ſemidiametro, aptetur hn ſemidiametro æqualis; iungaturq́; na; & in circulo rurſus ipſi cb ad rectos angulos ducatur nx. Quoniam igitur nhb angulus non eſt maior angulo hab: nh ad hb minorem habet proportionem, quàm na ad ab: ut autem nh ad hb, ita bl ad nx. quare bl ad nx minorem habebit proportionem, quàm na ad ab. maius igitur eſt triangulum æquicrure per

an

a n, n x triangulo æquicruri per axem. ex quibus ſequitur triangulum æquicrure per axem dictorum triangulorum æquicrurium non eſſe maximum: demonſtratum autem eſt in trigeſima ſecunda huius generaliter neque minimũ eſſe. ergo neque maximum neque minimum erit. quod oportebat demonſtrare.



COMMENTARIVS.

A ET quoniam e f maior eſt, quàm e h.] *Nam cum triangula a e b, h b e ſimilia ſint, erit angulus b e h, æqualis ſcilicet angulo e b a, obtuſus, & maior recto b e f. quare punctum h inter c & f cadit: & propterea ex ſeptima tertij elementorum maior eſt e f, quàm e h.*

B Sed ut f e ad e b, ita b g, hoc eſt b h ad f g: æqualis enim eſt e f ipſi ſemidiametro.] *Etenim e f eſt æqualis ipſi a b, quam ſemidiametro æqualem poſuimus. ſunt igitur duo triangula f e b, b g f, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, nempe rectum: & circa alios angulos latera proportionalia, immo uero æqualia: & reliquorum angulorum uterque eſt minor recto. ergo ea & æqualia, & inter ſe ſimilia erunt. Vt igitur f e ad e b, ita erit b g ad g f; hoc eſt b h ad f g.*

C Erit b e maior, quàm e f.] *Quoniam enim angulus f b e minor eſt medietate recti; & rectus, qui ad e; erit b f e maior medietate recti; & ideo maior, quàm f b e. quare ſequitur lineam b e ipſa e f maiorem eſſe.* 19. primi.

D Et propterea quadratum f g maius, quàm duplum quadrati f b.] *Quoniam enim f g æqualis ſemidiametro, dupla eſt ipſius b e: erit quadratum f g quadrati b e quadruplum. quadratum autem f b minus eſt, quàm duplum quadrati b e. ergo quadratum f g maius erit, quàm duplum quadrati f b.*

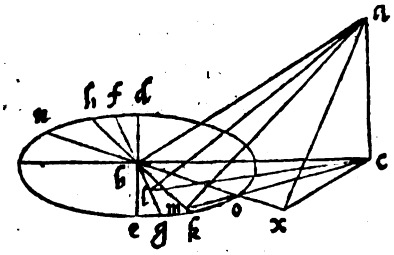
E Reliqui igitur quadrati b g, erit quadratum f g minus, quàm dnplum.] *Nam cum quadratum f g ſit æquale duobus quadratis f b, b g: ſitq; quadratũ f b minus, quàm duplum quadrati b e; erit reliquum quadratum b g maius, quàm duplum eiuſdem b e quadrati, & ideo quadratum f g quadrati b g minus erit, quàm duplum.*

F Habebit b h ad f k minorem proportionem, quàm f a ad a b.] *Erit enim triangulum b k f ſimile triangulo f g b: quod ſuperius demonſtratum eſt. Cum igitur f g ad g b minorem habeat proportionem, quàm f a ad a b; & b k, hoc eſt b h ad f k minorem proportionem habebit, quàm f a ad a b.*

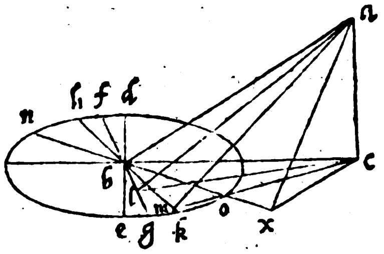
THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXVII.

IN omni cono ſcaleno, cum triangula per axem poteſtate infinita ſint; lineæ, quæ à uertice coni ad baſes dictorum triangulorum perpendiculares ducuntur, omnes in unius circuli circumferentiam cadunt: qui quidem eſt in eodem plano, in quo baſis coni, & circa diametrum interiectam inter centrum baſis, & perpendicularem, quæ à uertice coni ad dictum planum ducitur.

SIT conus ſcalenus, cuius uertex a punctum; baſis circulus circa centrum b; & axis a b: à puncto autem a ad baſis planũ perpendicularis ſit a c. & iungatur c b, cui ex pũcto b ad rectos angulos ducatur b d in eodem plano: & ducantur, ut contingit, lineæ f g, k h. erunt d e, f g, h k baſes triangulorum, quæ per axem tranſeunt. Itaque à puncto a ad lineas d e, f g, h k perpendiculares ducantur a b, a l, a m. At uero axem a b perpendicularem eſſe ad d e: & perpendiculares a l, a m ad partes b g, b k cadere deinceps oſtendetur. Dico pũcta b l m

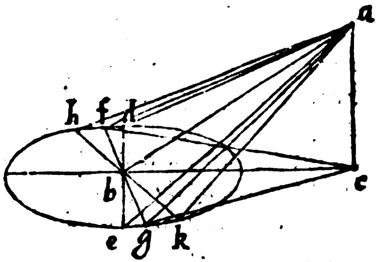


in unius circuli circumferentia eſſe, cuius diameter eſt recta linea b c. iungãtur enim c l, c m. & quoniam a l perpendicularis eſt ad f g, erit f l a angulus rectus. Rurſus 3. diff. un decimi quoniam a c ad baſis planum eſt perpendicularis; anguli a c b, a c l, a c m recti erunt. quare cum a b quadratum æquale ſit quadratis b l, l a: & quadratũ l a quadratis l c, c a æquale: erit quadratum a b æquale tribus quadratis b l, l c, c a. eſt autem & æquale quadratis b c, c a. quadrata igitur b c, c a quadratis b l, l c, c a æqualia ſunt. commune auferatur quadratum c a. erit reliquum quadratum b c æquale quadratis b l, l c: & idcirco angulus b l c in baſis plano rectus. Rurſus quoniam quadratum a b æquale eſt quadratis b m, m a: & quadratum m a æquale quadratis m c, c a: erit a b quadratum æquale quadratis b m, m c, c a. ſed & æquale eſt quadratis b c, c a. ergo communi c a ablato, relinquitur quadratum b c quadratis b m, m c æquale. rectus igitur angulus eſt & b m c in baſis plano: quare puncta b l m ſunt in circumferentia circuli, cuius diameter eſt b c. Similiter & ductis alijs quibuſcunque lineis, ut n o x, idem contingere demonſtrabimus. quod quidem demonſtrare oportebat.



Axem uero a b perpendicularem eſſe ad ipſam d e; & perpendiculares a l, a m cadere ad partes b g, b k: hoc modo oſtendemus.

Iunctis enim a d, a e, erit d a e triangulum æquicrure: & ideo linea, quæ à uertice a ad punctum baſim bifariam diuidens ducitur, perpendicularis eſt ad d e. iungantur c f, c g, a f, a g. & quoniã angulus f b c obtuſus eſt, acutus autem c b g; erit linea f c maior, quàm c g: & quadratum f c maius quadrato c g. ergo communi appoſito quadrato a c; quadrata f c, c a quadratis g c, c a maiora ſunt; hoc eſt quadratum f a maius quadrato a g. maior igitur eſt f a, quàm a g: ſuntq; f b, b g inter ſe æquales; communis autem b a; & maior f a, quàm a g. ergo angulus f b a obtuſus eſt, & a b g acutus. linea igitur à puncto a ad f g perpendicularis ducta ad partes b g cadit. Eodem modo & in alijs demonſtrabitur.

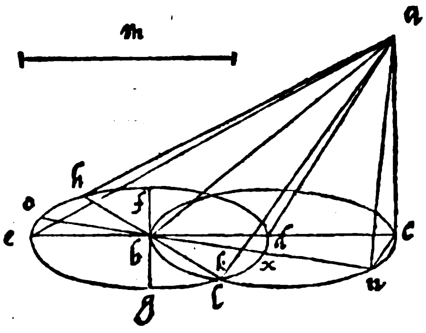


Quare conſtat dictas perpendiculares à puncto ſublimi ad circuli circumferentiam cadentes in coni ſuperficie ferri: cuius quidem baſis eſt circulus à caſu perpendicularium deſcriptus, & uertex idem, qui eſt primi coni uertex.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO XXXVIII.

IN cono ſcaleno dato aliquo triangulo per axem, quod neque maximum ſit, neque minimum: inuenire aliud triangulum per axem, quod unà cum dato, utriſque maximo & minimo per axem ſit æquale.

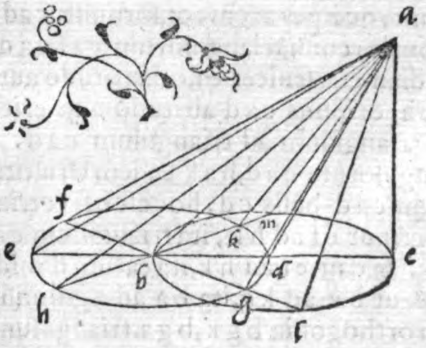
SIT conus ſcalenus, cuius uertex a punctum; baſis circulus circa centrũ b; axis autem a b; & a c ad baſis planum perpendicularis. ducaturq; per c & b centrum linea c d b e; cui ad rectos angulos ſit f b g. triangulorum igitur, quæ per axem tranſ- 22. huius eunt, maximum quidem erit illud, cuius baſis f g, & a b altitudo, ut ſæpius demonſtratum eſt: minimum uero, cuius baſis e d, & altitudo a c. Sit datum triangulum per axem, quod baſim habeat h k, altitudinemq; a l & oporteat aliud triangulum per axẽ inuenire, quod unà cum eo, cuius baſis h k, & altitudo a l utriſque maximo & minimo ſit mo ſit æquale. Itaque quoniam a l perpendicularis eſt ad baſim h k, erit punctum l in circumferentia circuli, cuius diameter b c, ex proxime demonſtratis. deſcribatur circulus b l c: & quo utræque lineæ b a, a c ſuperant a l, ei ſit æqualis m. Quoniam igitur linearum, quæ à puncto a ad circumferentiam b l c ducuntur, maxima quidem eſt a b, minima uero a c: erit a l minor, quàm a b, & maior, quàm a c. Sed a l unà cnm m eſt æqualis utriſque b a, a c, quarum a l eſt minor, quàm a b. ergo m, quàm a c maior erit; & quadratũ m maius quadrato a c. ſint quadrato m æqualia quadrata a c, c n, linea c n in circulo aptata: ducaturq́; n x b o; & n a iungatur. erit angulus b n c in ſemicirculo rectus. quadratum autem a b æquale eſt quadratis b c, c a; & quadratum b c æquale quadratis b n, n c. ergo quadratum a b quadratis b n, n c, c a æquale erit. quorum quadratis n c, c a æquale eſt quadratum n a. quadratum igitur a b eſt æquale quadratis b n, n a: & idcirco angulus b n a rectus. quare a n eſt altitudo trianguli per axem; cuius baſis o b x. & quoniam quadratum m eſt æquale quadratis a c, c n: & quadratum a n eiſdem quadratis æquale; linea m lineæ a n æqualis esit. quare utræque lineæ l a, a n æquales utriſque b a, a c: & rectangulum contentum diametro, & utriſque l a, a n æquale ei, quod diametro & utriſque b a, a c cõtinetur. ſed rectangulum ex diametro, & utriſque b a, a c duplum eſt trianguli maximi, & minimi, quorum baſes f g, e d, & altitudines b a, a c: rectangulum uero ex diametro, & utriſque l a, a n duplum eſt triangulorum, quorum baſes h k, o x, & altitudines l a, a n. triangulà igitur, quorum baſes h k, o x, & altitudines l a, a n æqualia ſunt triangulis maximo & minimo per axem: & datum eſt triangulum in baſi h k. ergo triangulum per axem in baſi o x inuentum eſt, quod unà cum dato utriſque maximo & minimo ſit æquale.



THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXIX.

SI duorum triangulorum per axem baſes abſcindant æquales circumferentias ad diametrum, quæ per lineam perpendicularem ducitur; triangula inter ſe æqualia erunt. uocentur autem eiuſdem ordinis. ὁμοταγὴ

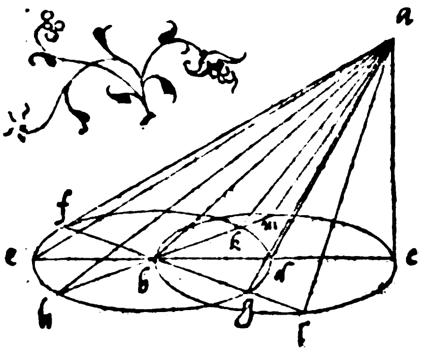
SIT conus, cuius uertex a punctum; baſis circulus circa centrum b; & axis a b: perpendicularis autem ad baſim a c: & per c punctum perpendicularis diameter ſit c d b e: ducanturq́; f b g, h b k, quæ ad e d æquales circumferentias k d, d g abſcindãt. Dico triangula per axem, quorum baſes f g, h k, inter ſe æqualia eſſe. deſcribatur enim circa b c diametrũ circulus b l c m, & iungantur a l, a m, quæ perpendiculares erunt: 37. huius a l quidem ad f g; a m uero ad h k. & quoniam angulus c b m æqualis eſt angulo c b l; & linea m b ipſi b l æqualis erit. ſed quadratũ a b quadratis a m, m b eſt æquale: itemq; æquale quadratis a l, l b. ergo quadrata a m, m b æqualia ſunt a l, l b quadratis. quorum quadratũ m b eſt æquale quadrato b l. reliquum igitur quadratum m a æquale eſt quadrato a l; & linea l a æqualis ipſi a m, quæ quidem ſunt triangulorum altitudines; quorũ



baſes fg, hk. ergo triangula per axem in baſibus fg, hk conſtituta inter ſe æqualia erunt. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XL.

Triangulorum per axem, quæ eiuſdem ſunt ordinis, & æqualia & inter ſe ſimilia erunt.



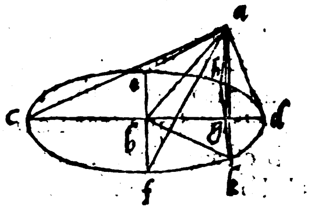
SINT triangula eiuſdem ordinis, ut in antecedenti figura fag, hak. Dico & æqualia, & ĩter ſe ſimilia eſſe. æqualia enim iam demonſtrata ſunt: ſimilia uero hoc modo demonſtrabimus. Quoniam ab in utroque triangulorum ducta eſt à uertice ad punctum, quod baſim bifariam diuidit: & quadratum ab quadratis am, mb eſt æquale; itemq́; æquale quadratis al, lb; quorum quadratum am æquale eſt quadrato al: erit reliquum mb quadratum quadrato bl æqnale: & linea mb æqualis ipſi bl. quare & tota mh toti lf. eſt autem ma æqualis la. ergo & quæ ex ipſis efficiuntur, quadrata inter ſe ſunt æqualia, hoc eſt quadratum af æquale quadrato ah: & propterea linea af lineæ ah. ſimiliter etiam ak ipſi ag æqualis demonſtrabitur. Sed & baſes fg, hk ſunt æquales. triangula igitur fag, hak, & æqualia, & inter ſe ſimilia erunt.

Manifeſtum autem eſt, & huius theorematis conuerſum.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XLI.

Si coni ſcaleni axis æqualis ſit baſis ſemidiametro; erit ut maximum triangulorum, quæ per axem conſtituũtur ad minimum, ita minimum ad æquicrure, quod eſt ad rectos angulos baſi.

Sit conus ſcalenus, cuius uertex punctum a; & axis ab recta linea, quæ ſit æqualis ſemidiametro baſis: baſis uero circulus circa b centrum: & triangulorum per axem, ad rectos quidem angulos baſi ſit cad, æquicrure autem eaf. erit eaf maximum omnium, quæ por axem conſtituuntur, & cad minimum, ex iis, quæ prius demonſtrata ſunt. Ducatur à puncto a ad baſim perpendicularis ag, quæ in diametrum cd cadet: & hgk ad rectos angulos ipſi cd ducaturq́; planum faciens triangulum æquicrure hak, quod ad baſim rectum erit. Dico ut triangulum eaf maximum ſcilicet eorum, quæ per axem conſtituuntur ad cad minimum, ita cad ad æquicrure hak. 18. undecimi Quoniam enim triangulorum eaf, cad baſes ſunt æquales, diametri ſcilicet ef, cd: altitudo autem trianguli eaf eſt ba: & ipſius cad altitudo ag: erit ut ba ad ag, ita eaf triangulum ad triangulum cad. Rurſus quoniam triangulorum cad, hak eadem eſt altitudo ag: trianguli autem cad baſis cd, hoc eſt ef: & trianguli hak baſis hk: erit ut ef ad hk, ita triangulum cad ad triangulum hak. Sed ut ef ad hk, ita earum dimidiæ, hoc eſt bk ad kg: & ut bk ad kg, ita ba ad ag: ſimilia etenim ſunt triãgula orthogonia bgk, bga. triangulum igitur cad ad triangulum hak eſt ut ba ad ag. erat autem & triangulum eaf ad ipſum cad, ut ba ad ag. ergo ut eaf triangulum ad triangulum cad, ita cad ad triangulum hak. quod oportebat demonſtrare.

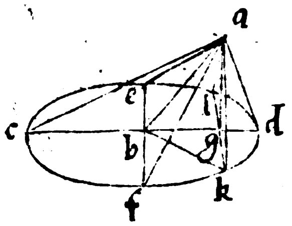


THEO-

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XLII.

RVRSVS ſit ut triangulum eaf ad cad, ita cad ad hak. Dico axem ba ſemidiametro baſis æqualem eſſe.

Quoniam enim ut triangulum eaf ad cad, ita ba ad ag: & ut eaf ad cad, ita cad ad hak: erit ut cad ad hak, ita ba ad ag. Vt autem cad ad hak, ita ef ad hk, hoc eſt bk ad kg. ergo ut ba ad ag, ita bk ad kg. & ſunt triangula bag, bkg ſimilia: & eiuſdem rationis ab, bk. linea igitur ab ipſi bk, uidelicet ſemidiametro baſis æqualis erit. quod oſtendendum proponebatur.



Simul uero & illud oſtenſum eſt in altera demonſtratione triangulum eaf ſimile eſſe triangulo hak.

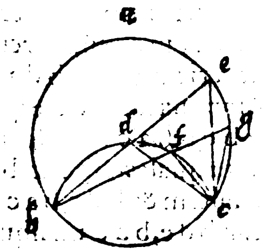
Vt enim ef ad hk, ita ba ad ag. triangulum autem eaf ad triangulum hak duplam habet proportionem eius, quam triangulum cad habet ad triangulum hak: eſtq; cad triangulum ad triangulum hak, ut cd, hoc eſt, ut ef ad hk. quare triangulum eaf ad ipſum hak duplam proportionem habebit laterum eiuſdem rationis, uidelicet ef, hk: & idcirco triangula eaf, hak inter ſe ſimilia erunt. ex cõuerſa 19. ſexti

Ex quibus perſpicuum eſt, ſi coni ſcaleni axis æqualis ſit baſis ſemidiametro; triangulum æquicrure ad rectos angulos baſi, ſimile eſſe triangulo per axem æquicruri: & contra, ſi triangulum æquicrure ad rectos angulos baſi ſimile ſit triangulo per axem æquicruri; coni axem ſemidiametro baſis æqualem eſſe. quod ex iam demonſtratis facile intelligi poteſt.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XLIII.

SI circulus circulum ſecet per centrum ipſius deſcriptus: & ab altera eorum ſectione ducantur lineæ ſecantes circumferentiam, quæ per centrum tranſit, & ad alterius circuli circumferentiam protrahantur: recta linea inter conuexam alterius circuli circũferentiam, & inter concauam alterius interiecta æqualis eſt lineæ, quæ à communi ſectione lineæ ductæ, & circumferentiæ per centrum, ad alteram communem circulorum ſectionem perducitur.

SIT circulus abc circa centrum d: & per d alius circulus dbc deſcribatur, ſecans priorem circulum in punctis bc: ducanturq; rectæ lineæ; per d quidem bde; alia uero ut contingit bfg: & dc, fc iungantur. Dico lineam gf ipſi fc æqualem eſſe. A iungantur enim ec, cg. & quoniam angulus bdc æqualis eſt angulo bfc: erit reliquus edc reliquo gfc æqualis. 21. tertii ſed & æqualis eſt dec ipſi fge, quod in eadem circumferentia conſiſtat. reliquus igitur eſt æqualis reliquo; & triangula inter ſe ſimilia ſunt: æquicrure autem eſt triangulum cde. B C ergo & æquicrure efg: & linea gf ipſi fc æqualis. ſimiliter & in aliis lineis ductis idem demonſtrabitur. Rurſus in eadem figura ponatur ed ipſi dc æqualis, & gf æqualis fc, circumferentia bdc bifariam in d puncto diuiſa. Dico circulum ex centro d, & inter-



T

uallo d b, uel d c deſcriptum per puncta e g tranſire. Quoniam enim angulus e d c æqualis eſt angulo g f c: & ſunt triangula e d c, g f c æquicruria, anguli b e c, b g c inter ſe æquales erunt: & propterea in eodem circulo continebuntur. circulus igitur ex centro d, & interuallo d b deſcriptus per puncta e g tranſibit. quod oportebat demonſtrare.

COMMENTARIVS.

A Dico lineam g f ipſi f c æqualem eſſe.] *In græco codice ita legitur.* λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ε δ τῇ δγ, ἡ δὲ ζη τῇ ζγ, *hoc eſt, dico lineam e d lineæ d c, & g f ipſi f c æqualem eſſe. Nos primam partem ueluti ſuperuacaneam ſuſtulimus. tantum enim abeſt, ut demonſtret lineam e d ipſi d c eſſe æqualem, quod per ſe ſe ex circuli diffinitione apparet, ut etiam eo tanquam noto ad propoſitum demonſtrandum utatur.*

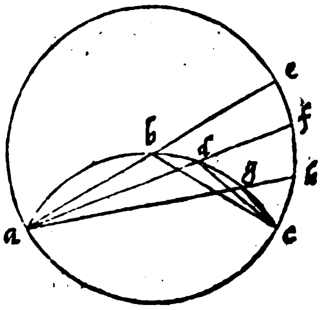
B Equicrure autem eſt triangulum c d e.] *Sunt enim d e, d c à centro circuli ad circumferentiam ductæ æquales. illud autem nos addidimus, quod in græcis codicibus deſiderabatur.*

Et linea g f ipſi f c æqualis.] *Hoc loco etiam nonnulla alia ſuſtulimus, quæ ſuperuacanea uidebantur.*

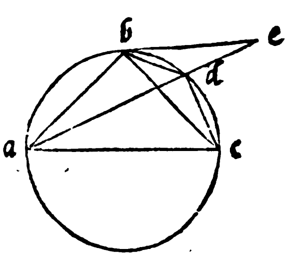
THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XLIIII.

Si in portione circuli inflectantur rectæ lineæ; maxima quidem erit, quæ ad punctum medium inflectitur: aliarum uero ſemper ipſi propinquior, remotiore maior erit.

In portione enim a b c inflectantur rectæ lineæ; a b c quidem, ita ut circumferentia a b c bifariam in b ſecetur; a d c uero, & a g c ut contingit. Dico a b c maximam eſſe omnium, quæ in portione a b c inflectuntur: & a d c ipſa a g c maiorem eſſe. Quoniam enim a b circumferentia circumferentiæ b c eſt æqualis; & recta linea a b æqualis erit b c. Itaque centro b & interuallo b a, uel b c circulus a e f h c deſcribatur: & producantur a b e, a d f, a g h. ergo ex antecedenti theoremate e b ipſi b c eſt æqualis, & f d æqualis d c, & h g ipſi g c. Quoniam igitur a e diameter eſt circuli a e f; erit a e omnium, quæ in circulo ducuntur, maxima; & a f maior quàm a h. Sed ipſi a e æqualis eſt a b c, & ipſi a f æqualis a d c, & a h æqualis a g c. ergo a b c omnium maxima eſt, & a d c maior, quàm a g c: & ita ſemper ea, quæ propinquior eſt puncto circumferentiæ medio, remotiore maior erit. quod demonſtrandum proponebatur.

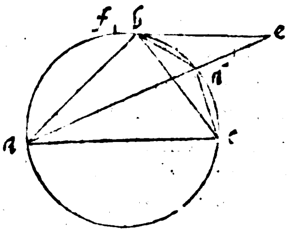


ALITER. Sit circulus a b c, & in portione a b c, inflectatur a b c recta linea, ita ut circumferentia a b c bifariam in b diuidatur. Dico lineam a b c maximam eſſe omnium, quæ in eadem portione inflectuntur. Inflectatur enim a d c, & a d e producatur, ita ut d e ipſi d c ſit æqualis: iunganturq; b d, b e. Quoniam igitur circumferentia a b æqualis eſt b c circumferentiæ: & in circumferentia quidem a b angulus b d a, in circumferentia uero b c angulus b a c con-
27.tertij. ſiſtit: erit angulus b d a angulo b a c æqualis. Communis apponatur b d c. ergo utrique anguli b d e, b d a utriſque b d e, b a c æquales ſunt: & ſunt b d e, b d a duobus rectis æquales. ergo & b d e, b a c æquales duobus rectis.
22.tertii, ſunt autem & b d c, b a c æquales duobus rectis. Vtrique igitur b d e, b a c utriſque b d c, b a c æquales ſunt; & communi dempto b a c, reliquus b d e reliquo b d c eſt æqualis.



lis. Itaque quoniam c d eſt æqualis d e, & communis b d: ſuntq; circa æquales an-
gulos: baſis c b baſi b e æqualis erit. & quoniam a b, b e maiores ſunt ipſa a e: utriſ- 4 .primi.
que uero a b, b e æqualis eſt a b c: & a e æqualis ipſi a d c: erit a b c, quàm a d c ma- 20.
ior. Similiter & aliis maior oſtendetur. ergo a b c maxima eſt omnium, quæ in por-
tione inflectuntur.

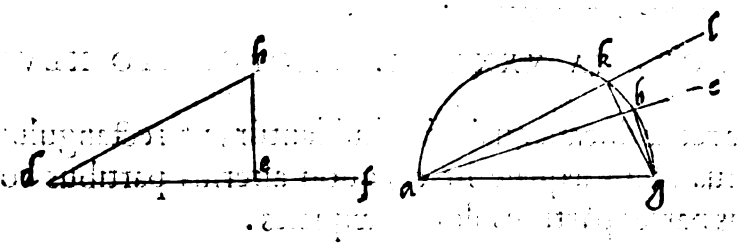
Sed ſit punctum circumferentiæ medium ad f. Dico lineam a b c, quæ puncto f propinquior eſt, ipſa a d c remotiore maiorem eſſe. Quoniam enim circumferentia a f b maior eſt, quàm circumferentia b d c; angulus b d a angulo b a c eſt maior; & communi apposito b d e; erunt b d e, b d a anguli maiores angulis b d e, b a c. ergo b d e, b a c ſunt duobus rectis minores. & ſunt b d c, b a c æquales duobus rectis. anguli igitur b d c, b a c angulis b d e,
b a c maiores ſunt: & communi b a c dempto, reliquus b d c maior eſt reliquo b d e.
& quoniam c d eſt æqualis d e, & communis b d; erit baſis c b baſi b e maior. Sunt 24. primi
autem a b, b e maiores, quàm a e: & a b c maior, quàm a b, b e. ergo a b c ipſa a e,
hoc eſt a d c maior erit.



THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XLV.

SI quatuor rectis lineis inæqualibus exiſtentibus quadrata maximæ & minimæ æqualia ſint quadratis reliquarum: recta linea conſtans ex maxima & minima minor erit ea, quæ ex reliquis conſtat.

Sint quatuor rectæ lineæ a b, b c, d e, e f: quarum maxima ſit a b; & b c minima: d e uero non ſit minor, quàm e f: & ſint quadrata a b, b c, quadratis d e, e f æqualia. Dico lineam a c minorem eſſe, quàm d f. Ducantur enim ad rectos angulos b g, e h: & ponatur b g ipſi b c æqualis; & e h æqualis e f: iunctiſq; a g, d h, deſcribatur ſemicirculus circa triangulum a b g orthogonium. & quoniam quadrata a b, b c, hoc eſt a b, b g quadratis d e, e h ſunt æqualia; erit quadratum a g æquale quadrato d h: & linea a g ipſi d h æqualis. eſt autem e h maior, quàm b g. quare aptata in ſemicirculo linea, quæ ſit æqualis e h, angulum b g a ſecabit. Itaque aptetur, & ſit g κ: & iuncta a k producatur, ut ſit k l æqualis k g. Quoniam igitur quadrata a k, k g quadratis a b, b g æqualia ſunt: quadrata autem a b, b g æqualia quadratis d e e h: erunt quadra

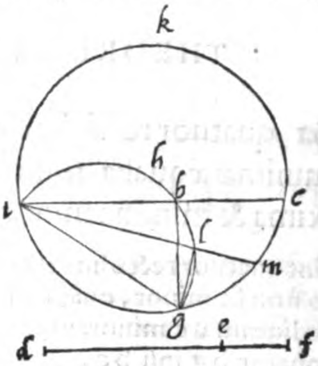


ta a k, k g quadratis d e, e h æqualia: quorum quadratum κ g eſt æquale quadrato e h. reliquum igitur quadratum a k reliquo d e æquale erit; & linea a k lineæ d e æqualis. ergo triangulum a k g eſt æquale & ſimile triangulo d e h; & linea a l æqualis ipſi d f. Itaque quoniam recta linea a κ non eſt minor, quàm k g: neque a k circumferentia minor erit, quàm circumferentia κ g. quare cum in circuli portione inflectantur lineæ a k g, a b g: ſitq; a k g uel ad punctum circumferentiæ medium, uel ipſi propinquior; erit ex antecedenti theoremate a k g maior, quàm a b g, hoc eſt a l, uidelicet d f maior, quàm a c. minor eſt igitur a c, quàm d f. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XLVI.

Si duæ rectæ lineæ inæquales diuidantur: & partium minoris quadrata æqualia ſint quadratis partium maioris: earum omnium maxima quidem erit maior minoris pars, minor uero minima.

Sint rectæ lineæ a b c, d e f in b, e punctis ita diuiſæ, ut d e ſit maior, quàm e f: & a b non minor, quàm b c: ſitq; a c maior, quàm d f: quadrata uero a b, b c quadratis d e, e f ſint æqualia. Dico harum linearum a b, b c, d e, e f maximam d e, & e f minimam eſſe. Ducatur enim ipſi a c ad rectos angulos b g, quæ ſit æqualis b c: & iungatur a g: circa triangulum uero a b g orthogonium ſemicirculus deſcribatur. Quoniam igitur a b recta linea non eſt minor, quam b g; neque a b circumferentia, circumferentia b g minor erit: & idcirco circumferentiæ a b g punctum medium, uel eſt ad b, uel in circumferentia a b, ut ad h. Itaque ex puncto circumferentiæ a b g medio, tanquàm ex centro, & interuallo a h, uel h g circulus deſcriptus & per punctum c tranſibit, ut ſupra demonſtratum eſt. 43.huius deſcribatur, & ſit a k c g. & quoniam quadratum d f maius eſt quadratis d e, e f: & quadrata d e e f quadrato a g ſunt æqualia: erit quadratum d f maius quadrato a g: & linea d f, quàm a g maior: minor autem d f, quàm a c. ergo inter lineas a c, a g aptari poterit in circulo a k c g linea ipſi d f æqualis. aptetur: ſitq; a l m, & iungatur l g. erit ex iam demonſtratis l m æqualis l g. Sed a l eſt maior, quàm a b; & a b non minor, quàm b g. ergo a l utraque ipſarum a b, b g maior erit: & l g utraque a b, b g minor. linearum igitur a b, b g, a l, l g maxima eſt a l, & minima l g. Sed b g eſt æqualis b c: & a l ipſi d e: & l g, hoc eſt l m ipſi e f, ut oſtendimus. ergo linearum a b, b c, d e, e f maxima eſt d e, & e f minima. quod propoſitum fuerat demonſtrandum.

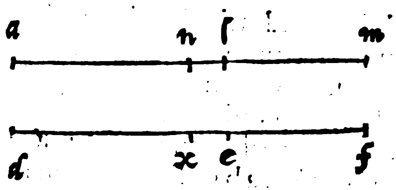


COMMENTARIVS.

Et l g utraque a b, b g minor.] *Si enim l g non eſt minor utraque a b b g, quoniam a l eſt utraque ipſarum maior: erunt utræque a l l g maiores utriſque a b b g, quod eſt abſurdum; demonſtratum etenim eſt ſupra minores eſſe.* 44.huius

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XLVII.

Si duæ rectæ lineæ æquales ita diuidantur, ut rectangulum contentum partibus unius æquale ſit ei, quod alterius partibus continetur: erunt unius partes partibus alterius æquales.

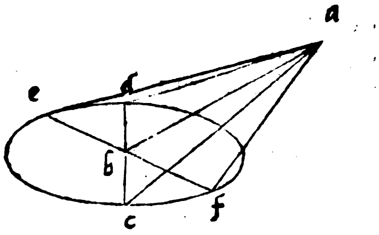


Sint rectæ lineæ inter ſe æquales a l m, d e f in punctis l e ita diuiſæ, ut rectangulum a l m rectangulo d e f ſit æquale. Dico lineam a l ipſi d e æqualem eſſe. Quoniam enim a m eſt æqualis d f; & earum dimidiæ æquales erunt. ergo & quadratum dimidiæ a m eſt æquale quadrato dimidiæ d f. itaque ſi a m bifariam diuiſa fuerit in l: rectangulum a l m eſt dimidiæ quadratum. ergo & d f bifariam diuiditur in e, quoniam rectangulum d e f æquale eſt quadrato dimidiæ a m, uidelicet dimidiæ d f: ſin minus, diuidantur bifariam in punctis n x. æqualis igitur eſt n m ipſi x f: & propterea quadratum

dratum n m quadrato x f æquale, hoc eſt rectangulum a l m unà cum quadrato n l æquale rectangulo d e f unà cum x e quadrato: quorum rectangulum a l m æquale eſt rectangulo d e f. ergo reliquum n l quadratum æquale quadrato x e, & linea n l lineæ x e æqualis. eſt autem & n m æqualis x f. reliqua igitur l m ipſi e f, & a l ipſi d e æqualis erit. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XLVIII.

Si conus ſcalenus per axem ſecetur; eorum, quæ fiunt triãgulorum, quod maius eſt, maiorem perimetrum habet: & cuius trianguli maior perimeter, illud maius eſt.



Secetur conus ſcalenus per axem a b, & ex ſectione fiant a c d, a e f triangula, quorum maius a c d, ita ut e a quidem ſit maior, quàm
a f; c a uero non minor, quàm a d. Dico a c d peri
metrum perimetro a e f maiorem eſſe. Quoniam
enim æquales ſunt c d, e f baſes; communis autem
ducta eſt b a à uertice ad punctum, quod ipſas bi-
fariam ſecat: & triangulum a e f minus eſt triangu
lo a c d: habebit e a ad a f maiorem proportionẽ,
quàm c a ad a d, ut in uigeſimo theoremate eſt de
monſtratum. ergo e a maxima eſt quatuor linea- A
rum, & a f minima: quod etiam demonſtratum eſt.
& quoniam quadrata à maxima & minima, hoc eſt
quadrata e a, a f quadratis c a, a d ſunt æqualia; erunt utræque lineæ e a, a f minores B
utriſque c a, a d, ex antecedenti theoremate. apponatur e f, c d. tota igitur a e f perimeter tota perimetro a c d eſt minor. ergo maioris trianguli perimeter maior erit.

Ex quibus perſpicuum eſt in conis ſcalenis, maximi quidem triangulorum, quæ fiunt per axem, hoc eſt æquicruris perimetrum eſſe maximam, minimi uero, hoc eſt eius, quod eſt ad rectos angulos baſi coni, perimetrum minimam eſſe: & aliorum ſemper quod maius eſt maiorem perimetrum habere, quàm quod minus.

Rurſus ponatur trianguli c a d perimeter maior perimetro e a f. Dico triangulum
a c d triangulo e a f maius eſſe. Quoniam enim a c d perimeter maior eſt perime-
tro e a f; æqualis autem c d ipſi e f; erunt reliquæ c a, a d reliquis e a, a f maiores. ſed
quadrata c a, a d æqualia ſunt quadratis e a, a f. ergo quatuor linearum c a, a d, e a, a f
maxima quidem eſt e a, minima uero a f; quæ omnia ante demonſtrata ſunt. quare e a C
ad a f maiorem habet proportionem, quàm d a ad a c. Itaque quoniam duo triangu
la c a d, e a f baſes æquales habent, & lineam, quæ à uertice ad punctum baſim biſeriã
ſecans ducitur, habent eandem; alterius autem maius latus ad minus maiorem pro-
portionem babet, quam alterius maius latus ad minus, uel æquale ad æquale: trian-
gulum e a f minus erit. triangulum igitur c a d maius eſt triangulo e a f. quod de- D
monſtrare oportebat.

COMMENTARIVS.

ERGO e a maxima eſt quatuor linearum, & a f minima.] *Quoniam enim e a ad a f* A
maiorem habet proportionem, quàm c a ad a d; habebit & e a quadratum ad quadratum a f ma- 17.huius
iorem proportionem, quàm quadratum c a ad quadratum a d. ſed quadrata e a, a f æqualia ſunt
quadratis c a, a d; quod ex ſexta decima huius apparet, utraque enim ſunt æqualia duobus quadra-
tis ſemidiametrorum, & duplo quadrati a b. ergo ex decima octaua huius quatuor quadratorum
e a, a f, c a, a d maximum eſt e a, & minimum a f: & idcirco linearum c a, a f, c a, a d maxima eſt
e a, & a f minima.

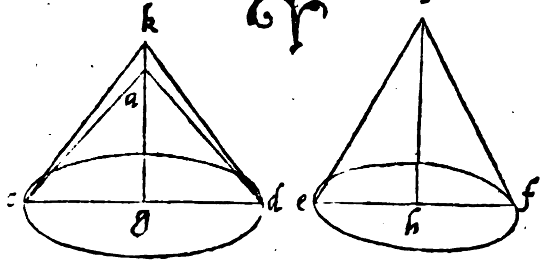
B Erunt utræque lineæ e a, a f minores utriſque c a, a d ex antecedenti theoremate.] *Ex quadrageſima quinta huius.*

C Quæ omnia ante demonſtrata ſunt.] *In quadrageſima ſexta huius.*

D Triangulum e a f minus erit.] *Ex decima nona huius.*

THEOREMA XL. PROPOSITIO XLIX.

Rectorum conorum æqualium, & diſſimilium triangula per axem ex contraria parte reſpondent ſuis baſibus.



Sint recti coni æquales & diſſimiles, quorum uertices a b puncta; axes a g, b h: &
triangula per axem a c d, b e f: baſes
autem circuli circa diametros c d, e f.
Dico ut triangulum a c d ad triangulum b e f, ita eſſe e f baſim ad baſim
c d. Quoniã enim coni ſunt æquales,
15. duodecimi erit ut circulus circa centrum g ad circulum circa h, ita axis b h ad a g axẽ:
A circulus autem circa g ad circulum
circa h duplam proportionem habet
eius, quam c d habet ad e f. ſit inter
b h & a g media proportionalis k g;
B & iungantur k c, k d. erit ut c d ad e f,
C ita b h ad k g: & k g ad g a. Quoniam
igitur ut c d ad e f, ita b h ad k g: erit
triangulum b e f triangulo k c d æquale. & quoniam ut c d ad e f, ita k g ad g a. ut
D autem k g ad g a, ita k c d triangulum ad triangulum a c d: erit ut c d ad e f, ita triangulum k c d, hoc eſt b e f ad triangulum a c d. ergo ut a c d triangulum ad triangulũ b e f, ita baſis e f ad c d baſim. triangula igitur expoſita ex contraria parte ſuis baſibus reſpondent.

COMMENTARIVS.

A 2. duodecimi cor. 20 ſexti. Circulus autem circa g ad circulum circa h duplam proportionem habet eius, quam c d habet ad e f.] *Circulus enim circa g ad circulum circa h eſt ut quadratum c d ad quadratum e f. quadratum uero c d ad e f quadratum, duplam habet proportionem eius, quam c d habet ad e f. ergo circulus circa g ad circulum circa h duplam proportionem habebit eius, quam c d ad e f.*

B Erit ut c d ad a f, ita b h ad k g, & k g ad g a.] *Sequitur ex iam dictis axem b h ad axem a g duplam habere proportionem eius, quam habet c d ad e f. ſed b h ad a g duplam proportionem habet eius, quam b h ad k g, & k g ad g a. ergo ut c d ad e f, ita erit b h ad k g, & k g ad g a.*

C Quoniam igitur ut c d ad e f, ita b h ad k g, erit triangulum b e f triangulo k c d æquale.] *Erit enim ex quarta decima ſexti rectangulum ex e f, & b h æquale ei, quod fit ex c d & k g. ſed rectanguli ex e f, & b h triangulum b e f eſt dimidium: & rectanguli ex c d & k g dimidium eſt triangulum k c d. triangulum igitur b e f triangulo k c d æquale erit.*

D Vt autem k g ad g a, ita k c d triangulum, ad triangulum a c d.] *Nam ut k g ad g a, ita rectangulum ex c d, & k g ad rectangulum ex c d, & g a; & ita horum dimidia, hoc eſt triangulum k c d ad triangulum a c d.*

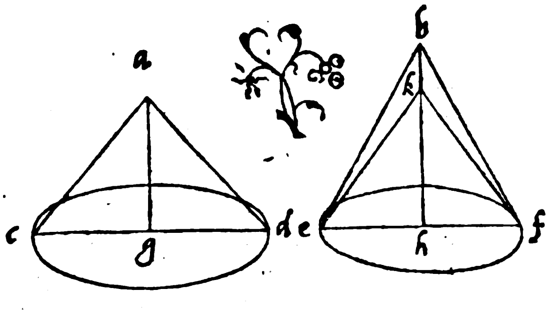
THEOREMA XLI. PROPOSITIO L.

Quorum conorum rectorum triangula per axem ex contraria parte reſpondent ſuis baſibus, ii inter ſe ſunt æquales.

Sint conorum uertices quidem a b; axes a g, b h rectæ lineæ: triangula uero per

axem

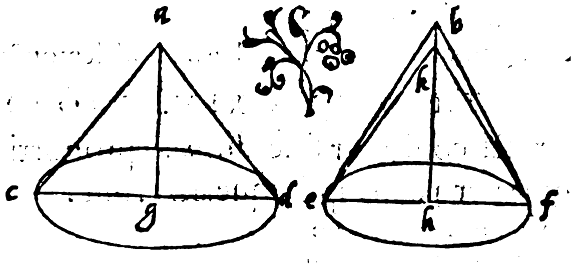
axem a c d,b e f.& ſit ut c d ad e f,ita triangulum b e f ad triangulum a c d. Dico conos inter ſe æquales eſſe,fiat enim ut b e f triãgulum ad triangulum a c d, ita a c d ad triangulum k e f. ergo triangulum b e f ad triangulum k e f duplam habet proportionem eius,quam triangulum a c d ad ipſum k e f. Quoniam igitur ut c d ad e f, ita b e f triangulum ad triangulum a c d: ut autem triangulum b e f ad ipſum a c d, ita a c d ad triangulum k e f: erit ut c d ad e f,ita a c d triangulum ad triangulum k e f. quare cum triangula a c d,k e f inter ſe ſint,ſicuti baſes, ſub eadem erunt altitudine. ex cõuerſa primæ ſexti ergo a g ipſi k h eſt æqualis. habet autem circulus g ad circulum h duplam proportionem eius, quam c d diameter ad diametrum e f:& ut c d ad e f, ita triãgulum a c d ad triangulum k e f.ergo circulus g ad circulum h duplã proportionem habet eius, quam c a d triangulum ad triangulum e k f. habebat autem & triangulum e b f ad triangulum e k f duplam proportionem eius, quam c a d triangulum ad triangulum e k f. ergo ut circulus g ad circulum h, ita e b f triangulum ad triangulum e k f, hoc eſt recta linea b h ad rectam h k. eſt autem h k ipſi a g æqualis. Vt igitur circulus g ad circulum h, ita recta linea b h ad a g.& ſunt b h,a g axes conorum,qui ex contraria parte reſpondent baſibus, uidelicet circulis g h.ergo coni a g c d,b h e f inter ſe æquales ſunt. 15.duodecimi



THEOREMA XLII. PROPOSITIO LI.

Si conorum rectorum baſis ad baſim duplam proportionem habeat eius, quam conus ad conum, triangula per axem inter ſe æqualia erunt.

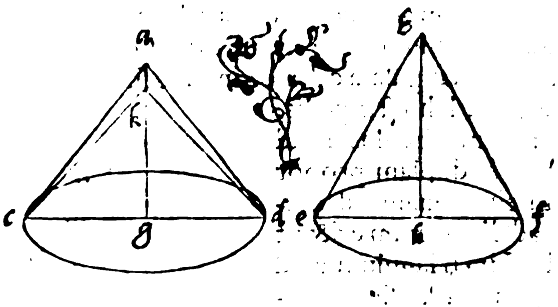
Sint coni recti, quorum uertices a b puncta; baſes circuli circa centra g,h: & triangula per axes a c d,b e f.habeat autem circulus g ad circulum h duplam proportionem eius,quam a g c d conus ad conum b h e f. Dico triangula a c d,b e f inter ſe æqualia eſſe.Sit enim ut a g c d conus ad conum b h e f, ita b h e f ad conum k h e f: & quoniam circulus g ad circulum h duplam proportionem habet, quam a g c d conus ad conum b h e f. conus autem a g c d ad conum k h e f proportionem duplam habet,quam a g c d conus ad conum b h e f: erit ut circulus g ad circulum h, ita conus a g c d ad conum k h e f. quare cum a g c d, k h e f coni inter ſe ſint, ſicuti baſes; æqualem habebunt altitudinẽ, ex conuerſa undecimæ duodecimi elementorũ. ergo a g ipſi k h eſt æqualis.Quoniam igitur circulus g ad circulum h duplam proportionẽ habet,quam a g c d conus ad conum b h e f,hoc eſt quam conus b h e f ad conum k h e f,hoc eſt quam b h ad h k: habet autem circulus g ad circulum h duplam proportionem,quam c d ad e f:erit ut c d ad e f,ita b h ad h k,hoc eſt ad a g. triangula igitur a c d,b e f inter ſe æqualia erunt. quod oportebat demonſtrare. 14. duodecimi



THEOREMA XLIII. PROPOSITIO LII.

Si triangula per axem inter ſe æqualia ſint:& baſis ad baſim duplam proportionem habebit eius,quam conus habet ad conum.

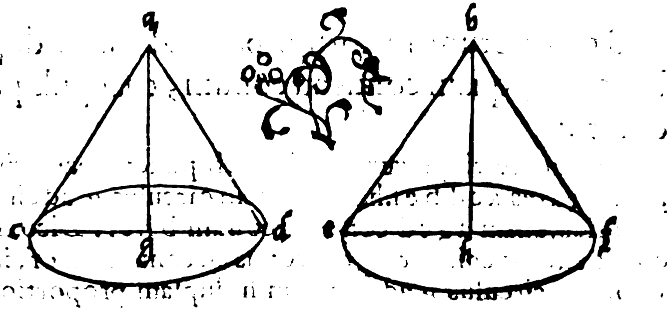
Deſcribantur rurſus prædicti coni: & ponantur triangula a c d, b e f inter ſe æqualia. demonſtrandum eſt circulum g ad circulum h duplam proportionē habere eius, quam a g c d conus habet ad conum b h e f. Sit enim ut recta linea b h ad rectam a g, ita a g ad g k. Quoniam igitur triangula a c d, b e f ſunt æqualia; erit ut c d ad e f, ita b h ad a g; hoc eſt a g ad g k. & quoniam circulus g ad circulum h duplam habet proportionem, quam c d ad e f, hoc eſt quam b h ad a g: habetq́; b h ad g k duplam proportionem, quam b h ad a g: erit ut circulus g ad circulum
15. duodecimi h, ita b h ad k g. Conus igitur k g c d cono b h e f eſt æqualis.
14. duodecimi ut autē c d ad e f, ita eſt a g ad g k: & ut a g ad g k, ita a g c d conus ad conū k g c d, hoc eſt ad conum b h e f. ergo ut c d ad e f, ita a g c d conus ad conum b h e f. Sed circulus g ad circulum h duplam habet proportionem, quam c d ad e f. circulus igitur g ad circulum h, hoc eſt baſis a g c d coni ad baſim coni b h e f duplam proportionē habet, quam a g c d conus ad conum b h e f, quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO LIII.

Recti coni æquealti duplam inter ſe proportionem habent eius, quam triangula per axem.

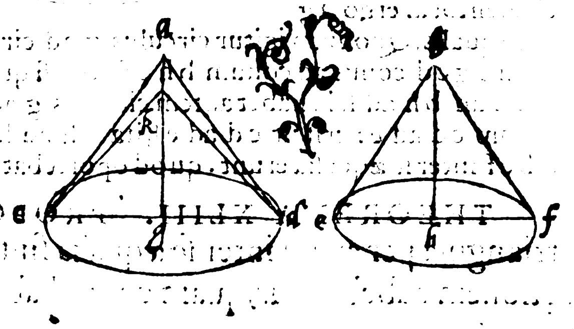
Deſcribantur ijdem coni: & ſit axis a g æqualis b h. Dico a g c d conum ad conum b h e f duplam proportionem habere eius, quam triangulum a c d habet ad triangulum b e f. Quoniam enim circulus g ad circulum h duplam proportionem habet, quam c d ad e f: & ut circulus g ad circulum h, ita a g c d conus ad conum b h e f: ſunt enim æque alti: habebit conus a g c d ad conum b h e f duplam proportionem, quam c d ad e f, hoc eſt quā a c d triangulum ad triangulum b e f. quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA XLV. PROPOSITIO LIIII.

Si recti coni inter ſe ſe duplam proportionem habeant eius, quam triangula per axem; ipſi æquealti erunt.

Deſcribantur coni, & ponatur a g c d conus ad conū b h e f duplam habere proportionem eius, quam triangulum a c d ad triangulum b e f. Dico a g ipſi b h æqualem eſſe. Ponatur enim triangulo b e f æquale triangulum k c d. & quoniā a g c d conus ad conum b h e f duplam proportionem habet,



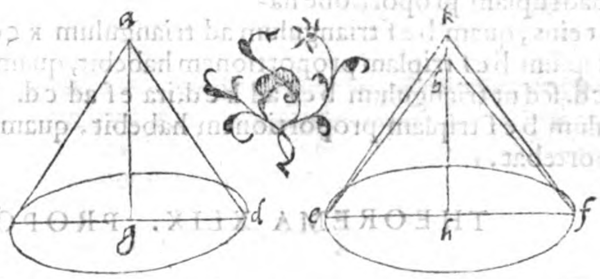
quam

quam acd triangulum ad triangulum bef: eſt autem triangulum bef æquale triangulo kcd: habebit agcd conus ad conum bhef duplam proportionem, quam triãgulum acd ad triangulũ kcd, hoc eſt quam ag ad gk, hoc eſt quam agcd conus ad conum kgcd. ergo ut conus agcd ad kgcd conum, ita kgcd conus ad conum bhef. Quoniam igitur conorum kgcd, bhef, triangula per axem kcd, bef æqualia ſunt; baſis coni g ad baſim h duplam proportionem habebit, quam kgcd conus ad conum bhef, ut in quinquageſima ſecunda huius demonſtratum eſt. Sed ut kgcd conus ad conum bhef, ita conus agcd ad conum kgcd, & recta linea ag ad gk. circulus igitur g ad circulum h duplam proportionem habet, quam ag ad gk, ſed & duplam habet proportionem, quam diameter cd ad ef diametrum. ergo ut cd ad ef, ita ag ad gk. Itaque quoniam triangulum kcd triangulo bef eſt æquale, ut cd ad ef, ita erit bh ad kg. oſtenſum eſt autem ut cd ad ef, ita ag ad gk. quare ut bh ad kg, ita ag ad gk. æqualis igitur eſt ag ipſi bh. quod oportebat demonſtrare. 9.quinti

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO LV.

SI recti coni ex contraria parte reſpondeant ſuis axibus; triangula per axem inter ſe æqualia erunt.

Deſcribantur coni; & ſit ut agcd conus ad conum bhef, ita axis bh ad ag axem. Dico triangula acd, bef inter ſe æqualia eſſe. ſit enim agcd cono conus æquealtus khef. & quoniam ut agcd conus ad conum bhef, ita eſt recta linea bh ad ag: æqualis autem kh ipſi ag: erit ut agcd conus ad conum bhef, ita bh ad hk; hoc eſt, bhef conus ad conum khef. conus igitur agcd ad conum khef duplam proportionem habet, quam bhef conus ad conum khef. Sed ut bhef conus ad conum khef, ita bef triangulum ad triangulum kef. ergo conus agcd ad conum khef duplam proportionem habet, quam bef triangulum ad triangulum kef. habet autem conus agcd ad conum æquealtum khef duplam proportionem, quam acd triangulum ad triangulum kef, ut demonſtratum eſt in quinquageſima tertia huius. quare ut bef triangulum ad triangulum kef, ita triangulum acd ad triangulum kef. Triangulum igitur acd triangulo bef eſt æquale. quod demonſtrandum proponebatur.



THEOREMA XLVII. PROPOSITIO LVI.

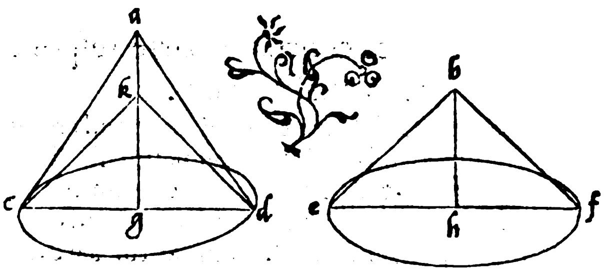
SI triangula per axem inter ſe æqualia ſint; & coni ex contraria parte ſuis axibus reſpondebunt.

Ponatur acd triangulum triangulo bef æquale. Dico ut agcd conus ad conum bhef, ita eſſe axem bh ad ag axem. in eadem enim figura, & conſtructione, quoniam triangulum acd æquale eſt triangulo bef, erit ut acd triangulum ad triangulum kef, ita triangulum bef ad kef triangulum. ſed conus agcd ad conum æquealtum khef duplam proportionem habet, quam acd triangulum ad triangulum kef: & ut triangulum acd ad triangulum kef, ita triangulum bef ad triangulum kef. Conus igitur agcd ad conum khef duplam proportionem habebit, quam triangulum bef ad ipſum kef. hoc eſt, quam conus bhef ad conum khef. ergo ut agcd conus ad conũ bhef, ita conus bhef ad khef, hoc eſt ita bh ad hk. eſt autẽ kh ipſi ag æqualis. Vt igitur agcd conus ad conum bhef, ita bh axis ad axem ag. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO LVII.

SI coni recti ex contraria parte ſuis baſibus reſpondeant; triangula per axem inter ſe triplam proportionem habebunt eius, quam baſis habet ad baſim ex contraria parte.

Deſcribantur coni; & ſit ut a g c d conus ad conum b h e f, ita h baſis ad baſim g. Dico a c d triangulum ad triangulum b e f triplam proportionem habere eius, quam e f habet ad c d. Ponatur enim ipſi b h æqualis k g. erunt coni æquealti k g c d, b h e f inter ſe ſe, ut eorum baſes. Quoniam igitur ut a g c d conus ad conum b h e f, ita h baſis ad baſim g: & ut baſis h ad baſim g, ita conus b h e f ad conum k g c d; erit ut a g c d conus ad conum b h e f, ita b h e f ad ipſum k g c d conum. quare conus a g c d ad conum k g c d duplam proportionem habet eius, quam conus b h e f ad conum k g c d. ſed ut conus a g c d ad k g c d, ita a c d triangulum ad triangulum k c d. triangulum igitur a c d ad ipſum k c d duplam proportionem habet, quam b h e f conus ad conum æquealtum k g c d. conus autem b h e f ad ipſum k g c d duplam proportionem habet, quam triangulum b e f ad triangulum k c d. ergo triangulum a c d ad triangulū k c d quadruplam proportionē habet eius, quam b e f triangulum ad triangulum k c d: & propterea triangulum a c d ad ipſum b e f triplam proportionem habebit, quam triangulum b e f ad triangulum k c d. ſed ut triangulum b e f ad k c d, ita e f ad c d. Triangulum igitur a c d ad triangulum b e f triplam proportionem habebit, quam e f ad c d. quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA XLIX. PROPOSITIO LVIII.

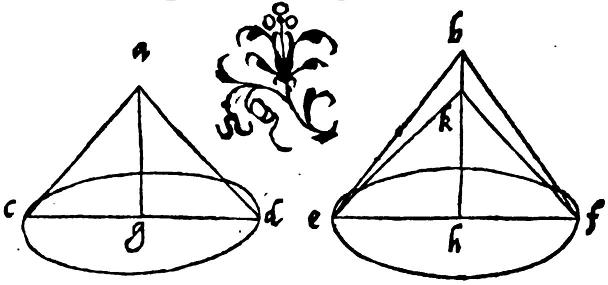
QVORVM conorum rectorum triangula per axem inter ſe triplam proportionem habent eius, quam baſis ad baſim ex contraria parte: hi coni ſuis baſibus ex contraria parte reſpondebunt.

In eadem figura, & conſtructione habeat a c d triangulum ad triangulum b e f triplam proportionem eius, quam e f baſis trianguli ad c d baſim. Dico ut a g c d conus ad conum b h e f, ita eſſe h baſim coni ad baſim g. Quoniam enim a c d triangulum ad triangulum b e f triplam proportionem habet eius, quam e f ad c d; ut autem e f ad c d, ita b e f triangulum ad triangulum K c d æquealtum; habebit triangulum a c d ad triangulum b e f triplam proportionem, quam b e f triangulum ad ipſum K c d. ergo triangulum a c d ad triangulum K c d quadruplam proportionem habebit, quam b e f triangulum ad triangulum K c d. ut autem triangulum a c d ad ipſum K c d, ita a g c d conus ad conum K g c d. conus igitur a g c d ad conum K g c d quadruplam proportionem habet eius, quam triangulum b e f ad triangulum k c d. ſed conus b h e f ad conum K g c d æquealtum duplam proportionem habet, quam triangulum b e f ad triangulum K c d. ergo conus a g c d ad conum K g c d duplam habebit proportionem eius, quam b h e f conus ad conum K g c d. Quare ut conus a g c d ad conum b h e f, ita b h e f conus ad conum k g c d. Sed ut b h e f conus ad conum K g c d, ita h baſis ad baſim g. Vt igitur a g c d conus ad conum b h e f, ita baſis h ad g baſim. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA L. PROPOSITIO LIX.

SI rectus conus ad conum rectum duplam proportionem habeat eius, quam baſis ad baſim; triangulum per axem ad triangulum per axem triplam proportionem habebit, quam trianguli baſis ad baſim.

Deſcribantur coni, & ponatur a g c d conus ad conum b h e f duplam proportionem habere eius, quam g baſis coni habet ad h baſim. Dico triangulum a c d ad triangulum b e f triplam habere proportionem, quam c d baſis trianguli ad baſim e f. ſit ipſi a g æqualis κ h. erunt coni æquealti a g c d, k h e f inter ſe ſe, ſicuti baſes. Quoniam igitur a g c d conus ad conum b h e f duplam proportionem habet, quam g baſis ad baſim h: ut autem baſis g ad h, ita a g c d conus ad conum k h e f: habebit a g c d conus ad conum b h e f duplam proportionem, quam a g c d conus ad conum k h e f. ergo ut a g c d conus ad conum κ h e f, ita k h e f ad b h e f conum. & quoniam coni a g c d, K h e f æquealti ſunt; habebit a g c d conus ad conum K h e f duplam proportionem, quam triangulum a c d ad triangulum k e f: quod demonſtratum iam eſt. Vt autem a g c d conus ad conum K h e f, ita & conus K h e f ad b h e f conum: & K e f triangulum ad triangulum b e f. ergo k e f triangulum ad triangulum b e f duplam proportionem habet, quam triangulum a c d ad triangulum k e f: ac propterea triangulum a c d ad triangulum b e f triplam habebit proportionem, quam a c d triangulum ad triangulum κ e f. Sed ut triangulum a c d ad triangulum κ e f, ita baſis c d ad e f baſim: ſunt enim triangula æquealta. Triangulum igitur a c d ad triangulum b e f triplam proportionem habet, quam c d baſis ad baſim e f. quod demonſtraſſe oportuit.



THEOREMA LI. PROPOSITIO LX.

SI triangulum per axem ad triangulum per axem triplam proportionem habeat eius, quam trianguli baſis ad baſim; conus ad conum duplam proportionem habebit, quam coni baſis ad baſim.

In eadem enim figura triangulum a c d ad triangulum b e f triplam proportionem habeat, quam baſis c d ad e f baſim: & rurſus ponatur ipſi a g æqualis k h. Quoniam igitur triangulum a c d ad triangulum b e f triplam proportionem habet, quam c d ad e f: ut autem c d ad e f, ita a c d triangulum ad triangulum k e f: habebit a c d triãgulum ad triangulum b e f triplam proportionem, quam triangulum a c d ad ipſum κ e f. ergo k e f triangulum ad triangulum b e f duplam proportionem habet, quam a c d triangulum ad triangulum k e f. Sed ut triangulum k e f ad triangulum b e f, ita K h e f conus ad conum b h e f. conus igitur K h e f ad conum b h e f duplam proportionem habebit, quam a c d triangulum ad triangulum K e f. habet autem & a g c d conus ad conum æquealtum K h e f duplam proportionem, quam a c d triangulum ad triangulum K e f. ergo ut conus a g c d ad conum K h e f, ita k h e f ad b h e f conum: & idcirco a g c d conus ad conum b h e f duplam proportionem habet, quam a g c d conus ad conum K h e f, hoc eſt quam baſis g ad h baſim. quod demonſtrare oportebat.

LIBRORVM SERENI FINIS.