APOLLONII PERGÆI

DE

SECTIONE RATIONIS

LIBRI DUO

Ex ARABICO MS^{to}. Latine Verſi.

ACCEDUNT

Ejuſdem de SECTIONE SPATII
Libri Duo Reſtituti.

Opus Analyſeos Geometricæ ſtudioſis apprime Utile.

PRÆMITTITUR
PAPPI ALEXANDRINI Præfatio
ad VII^{mum} Collectionis Mathematicæ,
nunc primum Græce edita:

Cum Lemmatibus ejuſdem PAPPI ad hos
Apollonii Libros.

Opera & ſtudio EDMUNDI HALLEY
Apud OXONIENSES
Geometriæ Profeſſoris Saviliani.

OXONII,
E THEATRO SHELDONIANO
Anno MDCCVI.

h

REVERENDO VIRO

D. *HENRICO ALDRICH*

S. T. P.

Ædis Chriſti Decano,

Summo bonarum Literarum,

Præſertim Mathematicarum,

Fautori ac Vindici,

Hæc APOLLONII PERGÆI Opuſcula,

E tenebris eruta ac reſtituta,

Ea qua par eſt humilitate,

In perpetuum grati animi teſtimonium,

Offert, dicat, conſecratque

EDMUNDUS HALLEY.

Præfatio ad Lectorem.

QUAMVIS *de scientiis Mathematicis, hâc nostrâ & superiore ætate, præclare meruerint Viri eruditi, qui* Algebram Speciosam, Arithmeticam Infinitorum, *nuperamque* Fluxionum *doctrinam adinvenerunt & excoluerunt: nihil tamen inde* Veterum *gloriæ detrahitur, qui Geometriam ad eam provexere perfectionem, quam facilius forsan fuisset posteris mirari, quam absque* Antiquorum *scriptis investigando assequi. Quod egregii consummatique Geometræ exstiterint, magnoque acumine & solertiâ præditi, abunde testantur vel* Euclidis *solius,* Archimedis, *&* Apollonii *quæ supersunt. Plurima quidem illi (ut cæteros taceam) nobilissimaque reliquerunt ingenii monumenta; quorum nonnulla, quæ scilicet manifestam præ se tulerunt utilitatem, quæque proinde conservari humani generis maxime intererat, temporis injuriam sceleratasque plusquam barbarorum manus effugerunt: dum illa, quæ penitiora scientiæ magisque abstrusa continebant, neminem nacta vindicem idoneum aut custodem fidelem, utcunque pretiosa, fatali strage periere. Hinc factum, ut, magno rei literariæ damno, hactenus desiderarint Mathematici libros istos de* Analysi Veterum, *quorum nomina & argumenta ex* Pappo *solo habemus, eaque haud satis integra; quod & ipse mutilus magnaque sui parte truncatus ad nos pervenerit. Universos sane deperditos existimavit & deflevit Orbis eruditus, donec liber* Arabicus *cui titulus,*

كتاب ابلونيوس فقطع الخطوط علي النسبة

felici fato, repertus erat in Bibl. Bodleianâ *inter* Codd. *MSS. Cl.* Seldeni: *ubi diu latitavit, ac forsan diutius aliquanto latitasset, nisi, paucis abhinc annis, in manus incidisset D.* Ed Bernardi, *Astronomiæ Professoris* Saviliani, *& linguarum Orientalium peritissimi: qui statim Codice inspecto comperit esse Traductionem* Arabicam Apollonii περὶ λόγου ἀποτομῆς.

Bernardus *igitur, libro præclaro invento lætatus, alacriter* *esse eidem Latine vertendo accingebat. Verum antequam vel decimam partem absolverat ab incœpto destitit, sive aliis studiis avocatus, sive operis difficultate perterritus: nam Codex ille non solum pessima manu exaratus erat, punctisque diacriticis plerumque destitutus, quibus in scripturâ* Arabicâ *literæ quamplurimæ solent distingui; sed & gravioribus adhuc vitiis laborabat, quod verba sæpiuscule & integras nonnunquam periodos omiserit, & Diagrammatum lineas literis male signatas & distinctas habuerit: adeo ut Divinatorem potius quam Interpretem ad sensum genuinum eruendum requisisse videretur. Postquam autem* Bernardus *è vivis excesserat, quicquid* Apollonii *traductum erat male habitum & neglectum jacebat, donec hortatu Viri Optimi & doctissimi D.* Henrici Aldrich *S. T. P. &* Ædis Christi Decani, *illud in manus sumpserat Collega meus* μαθηματικώτατ☉ D. Gregorius, Bernardi *in Cathedra* Saviliana *Successor dignissimus. Hic loca nonnulla in Versione* Bernardina *castigavit & supplevit, totamque manu eleganti in usum* Decani *describi curavit. Postquam autem, magno* Wallisio *ad superos migrante, munus Professorium, quod ille egregie ornaverat, in me collatum esset; & forte fortuna* Apollonii *apographum istud, humanitate* Decani *supra memorati, conspexissem: magna me incessit cupido tentandi quid ipse in reliquo* Apollonii *vertendo præstare potuerim. Opus sane arduum & impeditum aggressus sum, qui, Linguæ* Arabicæ *prorsus ignarus, librum in ea conscriptum, mendisque innumeris & Lacunis non paucis refertum, interpretandi onus in me susceperim. Verum beneficio Schedarum quas traduxerat* Bernardus, *& quæ mihi Clavis ad instar aditum aperuerunt ad* Apollonii *mentem investigandam, primum voces illas excerpsi de quibus ex Versione* Bernardi *liquido mihi constabat; dein ad argumentum respiciendo, & notas obscuriores iterum iterumque mecum evolvendo, quid sibi voluerunt paullatim deprehendi: & hâc quasi* deciphrandi *methodo (ut ita loquar) eousque progressus sum, ut totum fere librum perlegerim, ac quodammodo intellexerim; eundemque denuo pedetentim percurrendo, opus integrum, absque alterius cujuspiam auxilio, ad eam quam videtis formam perduxerim.*

Quod ad Codicem MS. attinet, qui nobis aureum Apollonii *libellum unicus conservavit; in eo, Librarii (ut suspicor) incuriâ, plurimas hinc inde periodos desiderari comperi; quas,*

prout

prout ſenſus & demonſtratio poſtulabat, verbis meis, ſed diverſo charactere excuſis, ſupplevi. Veruntamen non vanam præ ſe fert Antiquitatis ſpeciem, utpote qui primæ paginæ adſcriptum habeat Poſſeſſoris nomen, anno Hegiræ 633. *i. e.* Chriſti 1235. *unde liquet ante quingentos annos ſcriptum fuiſſe. Quo autem tempore adornata fuerit hæc Verſio, pro certo ſtatuere non poſſum: conjecturis tamen inductus credo, factam eſſe paulo poſt annum* Chriſti 820, *auſpiciis* Almaimonis Chalifæ *ſive* Imperatoris Saracenorum. *Qui, miro flagrans literarum amore, libros Philoſophorum & Mathematicorum optimos à* Græcis *Imperatoribus impetravit; atque id negotii popularibus ſuis dari voluit, ut eos, ſumma qua potuerunt fide & elegantia, in linguam* Arabicam *verterent.*

Jam ſi quæratur unde conſtat hunc tractatum genuinum eſſe Apollonii *fœtum? En tibi rationes, meo judicio, non contemnendas. Primo, in tot Loca & Caſus diviſus eſt uterque liber, quot utrique* Apollonii περὶ λόγου ἀποτομῆς *tribuit* Pappus, *in Præfatione ad* VII$^{\text{mum}}$ Collect. Math. 2$^{\text{do}}$ *Idem eſt numerus & ordo dioriſμῶν, iidemque Caſus dioriſtici.* 3° *Liber noſtri* Apollonii *ſecundus, eodem modo ac ille quem deſcribit* Pappus, *totus ad primum refertur, à quo etiam dioriſmos omnes mutuatur.* 4° *Lemmata eadem quæ in libro* Arabico *paſſim occurrunt, in principio libri ſeptimi (ut ab* Apollonio *deſumpta) demonſtrat* Pappus. 5° *Quatuor ultima* Pappi *Lemmata eodem ordine ac iiſdem fere verbis traduntur, quibus Maximarum & Minimarum Rationum termini, in limitationibus ad Caſus ſecundos & quartos Locorum* VI$^{\text{ti}}$ *&* VII$^{\text{mi}}$ *primi Libri noſtri. Denique Diagrammata fere omnia* Græcam *referunt Originem, eo quod linearum notas diſpoſitas habeant juxta ordinem Alphabeti* Græcorum, *qui ab illo Alphabeti* Arabum *plane diverſus eſt.*

Si quis objiciat librum hunc, ſimili licet argumento, methodo tamen Apollonianæ *plane diſſimili ſcriptum eſſe; quod in Caſibus univerſis ſingulas rerum minutias percurrat, & plurima fuſe demonſtret, quæ nulla videntur egere demonſtratione. Velim is cogitet, librum hunc ex eorum numero primum eſſe, quos ad* Artis Analyticæ *inſtitutionem adhibitos memorat* Pappus; *unde neceſſe habuerit Auctor quamplurima in diſcentium uſum plenius & enucleatius tradere, exemploque fertiliſſimi Problematis per omnes Caſus ſoluti commonſtrare,*

ſtrare,

strare, quid in simili proposito investigare debeat Analysta.

Hæc de Apollonii *libello jam primum in lucem edito; ex quo satis liquet, quo pacto* Veteres, *adhibitis proportionalium proprietatibus, Problemata plana ad æqualitatem duorum rectangulorum deducebant; quorum alterum quidem datum erat, alterius vero laterum summa vel differentia. Neque ulterius in exsequendâ Compositione progressi sunt, quia in sexto* Elementorum *Prop.* 28^{va} *&* 29^{va}, *& in Prop.* 58^{va} *&* 59^{va}, *iterumque Prop.* 84^{va} *&* 85^{va} Datorum Euclidis, *rectangulum datum excedens vel deficiens quadrato ad datam rectam applicare docemur; quæ quidem Effectiones coincidunt cum* Æquationum quadraticarum (*uti nunc loquimur*) *Constructionibus Geometricis. Methodus hæc cum* Algebrâ speciosâ *facilitate contendit, evidentiâ vero & demonstrationum elegantiâ eam longe superare videtur: ut abunde constabit, si quis conferat hanc* Apollonii *doctrinam* de Sectione Rationis *cum ejusdem Problematis Analysi Algebraicâ, quam exhibuit Clarissimus* Wallisius, *Tom.* II. *Operum Math. Cap.* LIV. *pag.* 220.

Ut vero methodum hanc præstantissimam magis adhuc illustrarem & Matheseos Studiosos pleniori demererer obsequio, ad libros Apollonii *de* Sectione Spatii *restituendos memet accinxi; nec inani, ut persuasissimum habeo, conatu. Nam per omnia ipsius* Apollonii *ordinem & argumenta assequutus mihi videor, quantum scilicet ex.* Pappi *descriptione vel aliunde licet conjicere: quam bene autem hoc præstiterim aliorum esto judicium. Denique cum Versioni nostræ, ad majorem problematis dilucidationem, optimum visum fuerit* Scholia *nonnulla inserere, quorum ope* Loca Geometrica, *rectas omnes datam rationem abscindentes contingentia, designari possint: itidem in* Sectione Spatii, *quo modo similium* Locorum *descriptio fieret demonstratum dedi, propriisque solutionibus attexui, ne quid in hac de* Sectionibus *doctrina desideraretur. Insuper ad calcem Præfationis* Pappi, *de qua mox dicturus sum, prima viginti* Lemmata *è Libro Septimo* Collect. Math. *excerpta adjeci; quia in demonstrationibus* Apollonii *de utrâque* Sectione *ea assumpta fuisse plane asserit* Pappus, *resque ipsa testatur.*

Valde quidem dolendum est, quod reliqui tractatus Veterum Analytici, à Pappo *memorati, aut perierint, aut nondum lucem*

lucem conspexerint. Nam minime dubito quin illorum nonnulli, Arabice *saltem versi, alicubi terrarum lateant, pulvere magis quam tenebris suis involuti. Quamobrem ut ab eruditis, quos ad Bibliothecas penitus excutiendas iterum iterumque hortor, melius faciliusque reperiantur & dignoscantur,* Pappi *Præfationem, non antehac* Græce, *immo vix* Latine *editam, operibus hisce præmisi; pristinæ integritati, quoad ejus fieri potuit, restitutam è duobus Codd. MSS. Bibliothecæ* Savilianæ. *Verum, ut ingenue fatear, manum adhuc medicam postulat. Nam ut* Græca Pappi *in hisce Codicibus sæpiuscule luxata sunt & depravata, præcipue in descriptione* Porismatum Euclidis, *(ubi nihil fere sani occurrit) ita in plerisque absurda adeo & insulsa erat* Commandini *Versio, ut necesse habuerim, aut passim eam emendare aut aliam de novo conficere.*

Quin & alias ob causas expoliri & publicari meruerit hæc Pappi *Præfatio.* PRIMO, *ut ex eâ ostendatur* Cartesium *falsò Veteres ignorantiæ insimulasse, quasi is primus mortalium Locum ad quatuor rectas ab* Euclide *incœptum componere noverit; cum tamen* Apollonius *hoc ipsum se effecisse non obscure indicaverit. Nam impossibile esse* * *dicit, perfectam ejus Compositionem exhibere, absque propositionibus quas ipse à se inventas prodidit in tertio* Conicorum: *quod idem est ac si dixisset, illis concessis facile & proclive fuisse* Euclidi *Locum composuisse. Et sane si quis contulerit solutionem illam operosam & immani calculo* Algebraico *perplexam, quam in principio Geometriæ suæ dedit* Cartesius, *cum admiranda illa concinnitate qua res tota Geometrice & absque omni calculo absolvitur, per Lemmata* XVII, XVIII, XIX. *Lib. primi* Princip. Math. Naturalis Philosophiæ, *adhibitis duabus propositionibus Lib.* III. Conic. *minime dubitabit quin* Apollonius *ipse hac in re majus quiddam præstiterit, quam ab eo præstitum existimat* Cartesius. *Insuper adjicere licet, quod ad problema de* Sectione Determinatâ, *ab* Apollonio *plenissime resolutum, tota redeat difficultas inveniendi punctum quintum in Loco describendo. Datis autem quinque punctis docet* Pappus *Locum Ellipticum perficere, Lib.* VIII. *Prop.* 13, 14. *Eodemque modo, nec difficilius, mutatis mutandis, Locus Hyperbolicus per data quinque puncta describitur.* SECUNDO, *ut palam fiat omnibus,* Regulam Guldini Centrobaricam, *inter inventa Geometrica superioris seculi præcipua* nume-

* Vide Pappi Prefat. p. XLII.

numeratam, ipsis etiam Veteribus innotuisse: cum Pappus, sub finem hujusce Præfationis, disertim nobile illud Theorema describat, quo mensurantur Solida omnia gyro Planorum quorumvis genita; modo habeantur eorundem Centra Gravitatis. Nam si ἀμφοισμα reddatur gyrans, ἀμφοιστικὸν vero gyrando genitum, res manifestior erit, quam ut probatione indigeat. Verum utrum hoc invenerit ipse Pappus, an à decessoribus suis acceperit, ex ipsius verbis haud liquet: pro certo tamen affirmare ausim, hanc Regulam illi perspectam fuisse, annis 1200 ante natum Guldinum.

Jam demum non diffitendum est, quod libris à Pappo descriptis denuo instaurandis operam navarint Mathematici recentiores. Duos quidem nostros de Sectione Rationis & Spatii quadantenus restituit Willibrordus Snellius, revocatos ad Sectionem Determinatam, ab ipso similiter instauratam. Tactionum doctrinam in Apollonio Gallo delineavit Franciscus Vieta. Loca plana à Fermato, in operibus ejus posthumis, miro acumine & judicio illustrata habemus: qui & Porismata Euclidis, opus longe difficillimum, redintegrare pollicitus est; verum fidem non liberavit. Denique Inclinationum problemata per omnes Casus exsecutus est Marinus Ghetaldus. Neque sane tantæ difficultatis sunt hæc omnia, ut alicui Artis Algebraicæ perito moram longam injiciant. Verum perpendendum est, aliud esse Problema aliqualiter resolutum dare, quod modis variis plerumque fieri potest, aliud methodo elegantissimâ id ipsum efficere; Analysi brevissimâ & simul perspicuâ, Synthesi concinnâ & minime operosâ. Hoc Veteres præstitisse argumento est Apollonii liber, quem impræsentiarum tibi sistimus: nec dubium est quin Pappus sub titulo τόπου ἀναλυομένου libros prædictos collegerit, ut exempla daret Analyseos Institutionis efficacissima, & discentium captui longe accommodatiora.

Alia quæ te moneam jam non supersunt; hoc tamen unum ne nescias, tantisper te morabor, donec narravero, me in hisce omnibus edendis plurimum adjutum fuisse à viro amicissimo & de re literaria præclare merito D. Joh. Hudsono S. T. P. Bibliothecæ Bodleianæ Præfecto: qui id sibi (qua est humanitate) curæ esse voluit, ut nitidior & emendatior prodiret libellus.

Vale & fruere.

Πάππου

Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως προοίμιον εἰς τὸ τῆς Συναγωγῆς ἕβδομον, περιέχον τὰ Λήμματα τοῦ ἀναλυομένου τόπου.

Ὁ Καλούμενος ἀναλυόμενος, Ερμόδωρε τέκνον, κατὰ σύλληψιν, ἰδία τίς ἐστιν ὕλη παρεσκευασμένη, μετὰ τὴν τῶν κοινῶν στοιχείων ποίησιν, τοῖς βουλομένοις ἀναλαμβάνειν ἐν γραμμαῖς δύναμιν εὑρετικὴν τῶν προτεινομένων αὐτοῖς προβλημάτων· καὶ εἰς τοῦτο μόνον χρησίμη καθεστῶσα. γέγραπται δὲ ὑπὸ τριῶν ἀνδρῶν, Εὐκλείδου τε τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου, καὶ Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου, κατὰ ἀνάλυσιν καὶ σύνθεσιν ἔχουσα τὴν ἔφοδον. ἀνάλυσις τοίνυν ἐστὶν ὁδὸς ἀπὸ τοῦ ζητουμένου, ὡς ὁμολογουμένου, διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων, ἐπί τι ὁμολογούμενον ἐν συνθέσει· ἐν μὲν τῇ ἀναλύσει τὸ ζητούμενον ὡς γεγονὸς ὑποθέμενοι, τὸ ἐξ οὗ τοῦτο συμβαίνει σκοπούμεθα· καὶ πάλιν ἐκείνου τὸ προηγούμενον, ἕως ἂν οὕτως ἀναποδίζοντες καταντήσωμεν εἰς τι τῶν ἤδη γνωριζομένων, ἢ τάξιν ἀρχῆς ἐχόντων. καὶ τὴν τοιαύτην ἔφοδον ἀνάλυσιν καλοῦμεν, οἷον ἀνάπαλιν λύσιν. ἐν δὲ τῇ συνθέσει ἐξ ὑποστροφῆς, τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὕστατον ὑποστησάμενοι γεγονὸς ἤδη, καὶ τὰ ἑπόμενα ἐκεῖ, ἐνταῦθα προηγούμενα κατὰ φύσιν τάξαντες, καὶ ἀλλήλοις ἐπισυνθέντες, εἰς τέλος ἀφικνούμεθα τῆς τοῦ ζητουμένου κατασκευῆς· καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν. διττὸν δέ ἐστιν ἀναλύσεως γένος. τὸ μὲν ζητητικὸν τἀληθοῦς, ὃ καλεῖται θεωρητικόν· τὸ δὲ ποριστικὸν τοῦ προτεθέντος λέγειν, ὃ καλεῖται προβληματικόν. ἐπὶ μὲν οὖν τοῦ θεωρητικοῦ γένους, τὸ ζητούμενον ὡς ὂν ὑποθέμενοι, καὶ ὡς ἀληθές, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν, καὶ ὡς ἔστι καθ' ὑπόθεσιν, προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον· ἐὰν μὲν ἀληθὲς ᾖ ἐκεῖνο τὸ ὁμολογούμενον, ἀληθὲς ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει· ἐὰν δὲ ψευδεῖ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ψεῦδος ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον. ἐπὶ δὲ τοῦ προβληματικοῦ γένους, τὸ προταθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν, προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον· ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατὸν ᾖ καὶ ποριστόν, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθέν, δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ προταθέν, καὶ πάλιν ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει· ἐὰν δὲ ἀδυνάτῳ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ἀδύνατον ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα. διορισμὸς δέ ἐστι προδιαστολὴ τοῦ πότε, καὶ πῶς, καὶ ποσαχῶς δυνατὸν ἔσται τὸ πρόβλημα. τοσαῦτα μὲν οὖν περὶ ἀναλύσεως καὶ συνθέσεως.

Τῶν δὲ προειρημένων τοῦ ἀναλυομένου βιβλίων ἡ τάξις ἐστὶ τοιαύτη. Εὐκλείδου δεδομένων βιβλίον ἕν· Ἀπολλωνίου λόγου ἀποτομῆς δύο, χωρίου ἀποτομῆς δύο, διωρισμένης τομῆς δύο· ἐπαφῶν δύο. Εὐκλείδου πορισμάτων τρία· Ἀπολλωνίου νεύσεων δύο, τοῦ αὐτοῦ τόπων ἐπιπέδων δύο, κωνικῶν ὀκτώ· Ἀρισταίου τόπων στερεῶν πέντε· Εὐκλείδου τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν δύο· Ἐρατοσθένους περὶ μεσοτήτων δύο. γίνεται βιβλία λγʹ, ὧν τὰς περιοχάς, μέχρι τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν, ἐξεθέμην σοι πρὸς ἐπίσκεψιν, καὶ τὸ πλῆθος τῶν τόπων, καὶ τῶν διορισμῶν, καὶ τῶν πτώσεων, καθ' ἕκαστον βιβλίον· ἀλλὰ καὶ τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα· καὶ οὐδεμίαν ἐν τῇ πραγματείᾳ τῶν βιβλίων καταλέλοιπα ζήτησιν, ὡς ἐνόμιζον.

Περὶ τῶν Δεδομένων Εὐκλείδου.

Περιέχει δὲ τὸ πρῶτον βιβλίον, ὅπερ ἐστὶ τῶν δεδομένων, ἅπαντα θεωρήματα ἐνενήκοντα· ὧν πρῶτα μὲν καθόλου ἐπὶ μεγεθῶν διαγράμματα κγʹ· τὸ δὲ δʹ καὶ τὸ κʹ ἐν εὐθείαις ἐστὶν ἀνάλογον ἄνευ θέσεως· τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ιδʹ ἐν εὐθείαις ἐστὶ θέσει δεδομέναις. τὰ δὲ τούτοις ἑξῆς ιʹ ἐπὶ τριγώνων ἐστὶ τῷ εἴδει δεδομένων ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ἑπτά, ἐπὶ τυχόντων ἐστὶν εὐθυγράμμων χωρίων εἴδει δεδομένων ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ἕξ, ἐν παραλληλογράμμοις ἔτι καὶ παραβολαῖς εἴδει δεδομένων χωρίων. τῶν δὲ ἐχομένων εʹ, τὸ μὲν πρῶτον * γραφόμενόν ἐστι, τὰ δὲ δʹ ἐπὶ τριγώνων χωρίων, ὅτι αἱ διαφοραὶ τῶν δυνάμεων τῶν πλευρῶν

πρὸς

πρὸς ταῦτα τὰ τρίγωνα χωρία λόγον ἔχουσι δεδομένον. τὰ δὲ ἑξῆς ἑπτὰ, ἕως τοῦ ο´ καὶ γ´, ἐν δυσὶ παραλληλογράμμοις, ὅτι διὰ τὰς ἐν ταῖς γωνίαις ὑποθέσεις ἐν δεδομένοις ἐστὶ λόγοις πρὸς ἄλληλα· ἔνια δὲ τούτων ἐπιλόγους ἔχει ὁμοίους ἐν δυσὶ τριγώνοις. ἐν δὲ τοῖς ἀφεξῆς ἓξ διαγράμμασιν, ἕως τοῦ ο´ καὶ θ´, δύο μέν ἐστιν ἐπὶ τριγώνων, δ´ δὲ ἐπὶ πλειόνων εὐθειῶν ἀνάλογον οὐσῶν. τὰ δὲ ἑξῆς τρία, ἐπὶ [illegible] εὐθειῶν ἀνάλογον οὐσῶν, * τὰ δ´ ἐστι, δοθέν τι περιεχουσῶν χωρίον. τὰ δὲ ἐπὶ πᾶσιν ὀκτὼ, ἕως ϛ, ἐν κύκλοις δείκνυται, τοῖς μὲν μεγέθει μόνον δεδομένοις, τοῖς δὲ καὶ θέσει· ὅτι διαγομένων εὐθειῶν διὰ δεδομένου σημείου τὰ γενόμενα δεδομένα.

Περὶ λόγου ἀποτομῆς β´.

Τῆς δ´ ἀποτομῆς τοῦ λόγου βιβλίων ὄντων δύο, πρότασίς ἐστι μία ὑποδιῃρημένη· διὸ καὶ μίαν πρότασιν οὕτω γράφω. Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν τῇ θέσει δοθεισῶν δύο εὐθειῶν, πρὸς τοῖς ἐπ´ αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις, λόγον ἐχούσας τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. Τὰς δὲ γραφὰς διαφόρους γενέσθαι καὶ πλῆθος λαβεῖν συμβέβηκεν, ὑποδιαιρέσεως γενομένης ἕνεκα, τῆς τε πρὸς ἀλλήλας θέσεως τῶν δεδομένων εὐθειῶν καὶ τῶν διαφόρων πτώσεων τοῦ δεδομένου σημείου, καὶ διὰ τὰς ἀναλύσεις καὶ συνθέσεις αὐτῶν τε καὶ τῶν διορισμῶν. Ἔχει γὰρ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον τῶν λόγου ἀποτομῆς τόπους ἑπτὰ, πτώσεις κδ´, διορισμοὺς δὲ πέντε, ὧν τρεῖς μέν εἰσι μέγιστοι, δύο δὲ ἐλάχιστοι· καί ἐστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ ε´ τόπου, ἐλάχιστος δὲ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ ἕκτου τόπου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τοῦ ζ´ τόπου, μέγιστοι δὲ οἱ κατὰ τὰς τετάρτας τοῦ ϛ´ καὶ τοῦ ἑβδόμου τόπου. Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιδ´, πτώσεις δὲ ξγ´, διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ ὅλον εἰς τὸ πρῶτον. Λήμματα δ´ ἔχει τὰ λόγου ἀποτομῆς κ´, αὐτὰ δὲ τὰ δύο βιβλία τῶν λόγου ἀποτομῆς θεωρημάτων ἐστὶ ρπα´, κατὰ δὲ Περικλέα πλειόνων ἢ τοσούτων.

Περὶ χωρίου ἀποτομῆς β΄.

Τῆς δὲ ἀποτομῆς τοῦ χωρίου βιβλία μέν ἐστι δύο, πρόβλημα δὲ κἀν τούτοις ἓν ὑποδιαιρούμενον δίς. καὶ τούτων μία πρότασίς ἐστι τὰ μὲν ἄλλα ὁμοίως ἔχουσα τῇ προτέρᾳ, μόνῳ δὲ τούτῳ διαφέρουσα τῷ δεῖν τὰς ἀποτεμνομένας δύο εὐθείας ἐν ἐκείνῃ μὲν λόγον ἐχούσας δοθέντα ποιεῖν, ἐν δὲ ταύτῃ χωρίον περιεχούσας δοθέν· ῥηθήσεται γὰρ οὕτω. Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν δοθεισῶν θέσει δύο εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ᾽ αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις χωρίον περιεχούσας ἴσον τῷ δοθέντι. καὶ αὕτη δὲ διὰ τὰς αὐτὰς αἰτίας τὸ πλῆθος ἔσχηκε τῶν γραφομένων. Ἔχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον χωρίου ἀποτομῆς τόπους ζ΄, πτώσεις κδ΄, διορισμοὺς ζ΄· ὧν τέσσαρες μὲν μέγιστοι, τρεῖς δὲ ἐλάχιστοι. καὶ ἔστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν δευτέραν πτῶσιν τοῦ πρώτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην πτῶσιν τοῦ β΄ τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ τετάρτου, καὶ ὁ κατὰ τὴν τρίτην τοῦ ἕκτου τόπου· ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ τρίτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν δ΄ τοῦ τετάρτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ ἕκτου τόπου. Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον τῆς χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιγ΄, πτώσεις δὲ ξ΄, διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ εἰς αὐτόν. θεωρήματα δὲ ἔχει τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον μη΄, τὸ δὲ δεύτερον οϛ΄.

Περὶ διωρισμένης τομῆς β΄.

Ἑξῆς τούτοις ἀναδέδονται τῆς διωρισμένης τομῆς βιβλία δύο, ὧν ὁμοίως τοῖς πρότερον μίαν πρότασιν πάρεστι λέγειν, διεζευγμένην δὲ ταύτην· τὴν δοθεῖσαν ἄπειρον εὐθεῖαν ἑνὶ σημείῳ τεμεῖν, ὥστε τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ᾽ αὐτῆς δοθεῖσι σημείοις, ἤτοι τὸ ἀπὸ μιᾶς τετράγωνον, ἢ τὸ ὑπὸ δύο ἀπολαμβανομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέντα λόγον ἔχειν, ἤτοι πρὸς τὸ ὑπὸ μιᾶς ἀπολαμβανομένης καὶ τῆς ἔξω δοθείσης, ἢ πρὸς τὸ ὑπὸ δύο ἀπολαμβανομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἐφ᾽ ὁπότερα χρὴ τῶν δοθέντων σημείων. Καὶ ταύτης, ἅτε δὶς διεζευγμένης καὶ περισκελεῖς διορισμοὺς ἐχούσης, διὰ πλειόνων ἡ δεῖξις γέγονεν ἐξ ἀνάγκης.

ἀνάγκης. δείκνυσι δὲ ταύτην Ἀπολλώνιος ἐπὶ ψιλῶν τῶν εὐθειῶν τριβακώτερον πειρώμενος, καθάπερ καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν πρώτων στοιχείων Εὐκλείδου. καὶ ταύτην πάλιν εἰσαγωγικώτερον ἐπαναγράφων δείξαστε καὶ εὐφυῶς διὰ τῶν ἡμικυκλίων. Ἔχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον προβλήματα ἕξ, ἐπιτάγματα ις', διορισμοὺς πέντε, ὧν μεγίστους μὲν δ', ἐλάχιστον δὲ ἕνα· καὶ εἰσὶ μέγιστοι μὲν, ὅ,τε κατὰ τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ δευτέρου προβλήματος, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ τετάρτου προβλήματος, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ε', καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἕκτου· ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ γ' ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. Τὸ δὲ δεύτερον διωρισμένης τομῆς ἔχει προβλήματα τρία, ἐπιτάγματα ἐννέα, διορισμοὺς τρεῖς· ὧν εἰσὶν ἐλάχιστοι μὲν, ὅ,τε κατὰ τὸ τρίτον τοῦ πρώτου, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ δευτέρου· μέγιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ τρίτου προβλήματος. Λήμματα δὲ ἔχει τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον κζ, τὸ δὲ δεύτερον κδ'. Θεωρημάτων δέ ἐστι τὰ δύο βιβλία διωρισμένης τομῆς πγ'.

Περὶ ἐπαφῶν β'.

Ἑξῆς δὲ τούτοις τῶν ἐπαφῶν ἐστι βιβλία δύο, προτάσεις δὲ ἐν αὐτοῖς δοκοῦσιν εἶναι πλείονες, ἀλλὰ καὶ τούτων μίαν τίθεμεν οὕτως ἔχουσαν· ἐξῆς σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων τριῶν ὁποιωνοῦν θέσει δοθέντων, κύκλον ἀγαγεῖν δι' ἑκάστου τῶν δοθέντων σημείων, εἰ δοθείη, ἐφαπτόμενον ἑκάστης τῶν δοθεισῶν γραμμῶν. ταύτης διὰ πλήθη τῶν ἐν ταῖς ὑποθέσεσι δεδομένων ὁμοίων ἢ ἀνομοίων κατὰ μέρος διαφόρους προτάσεις ἀναγκαῖον γίνεσθαι δέκα· ἐκ τῶν τριῶν γὰρ ἀνομοίων γενῶν τριάδες διάφοροι ἄτακτοι γίνονται δέκα. ἤτοι γὰρ τὰ δεδομένα, τρία σημεῖα, ἢ τρεῖς εὐθεῖαι, ἢ δύο σημεῖα καὶ εὐθεῖα, ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ σημεῖον, ἢ δύο σημεῖα καὶ κύκλος, ἢ δύο κύκλοι καὶ σημεῖον, ἢ δύο κύκλοι καὶ εὐθεῖα, ἢ σημεῖον καὶ εὐθεῖα καὶ κύκλος, ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ κύκλος, ἢ τρεῖς κύκλοι. Τούτων δύο μὲν τὰ πρῶτα δέδεικται ἐν τῷ τετάρτῳ βιβλίῳ τῶν πρώτων στοιχείων, ὅπερ * ἐῶ μὲν γράφων. τὸ μὲν γὰρ τριῶν δοθέντων σημείων μὴ ἐπ' εὐθείαν ὄντων τὸ αὐτό ἐστι τῷ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι. τὸ δὲ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν

μὴ

μὴ παραλλήλων οὐσῶν, ἀλλὰ τῶν τριῶν συμπιπτουσῶν, τὸ αὐτό ἐστι τῷ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι. τὸ γὰρ δύο παραλλήλων οὐσῶν καὶ μιᾶς ἐμπιπτούσης ὡς μέρος ὂν τοῦ β΄. ὑποδιαιρέσεως προγράφεται ἐν τούτοις· πάντα καὶ τὰ ἑξῆς ἓξ ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. Τὰ δὲ λειπόμενα δύο, τὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ κύκλου, ἢ τριῶν δοθέντων κύκλων, μόνον ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ, διὰ τὰς πρὸς ἀλλήλους θέσεις τῶν κύκλων τε καὶ εὐθειῶν πλείονας οὔσας καὶ πλειόνων διορισμῶν δεομένας. ταῖς προειρημέναις ἐπαφαῖς ὁμογενὲς πλῆθός ἐστι προβλημάτων, παραλειπόμενον ἀπὸ τῶν ἀναδιδόντων· προσυπεκδέδωκαν δέ τινες προτέρῳ τῶν εἰρημένων δύο βιβλίων· εὐσύνοπτον γὰρ καὶ εἰσαγωγικὸν μᾶλλον ἦν, ἐντελές τε καὶ συμπληρωτικὸν τοῦ γένους τῶν ἐπαφῶν. πάλιν μιᾷ περιλαβὼν ἅπαντα προτάσει, ἥτις τῆς προειρημένης λείπουσα μὲν ὑποθέσει, περιττεύουσα δὲ ἐπιτάγματι, οὕτως ἔχει. Ἐκ σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων ὁποιωνοῦν δύο δοθέντων κύκλον γράψαι τῷ μεγέθει δοθέντα, διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἢ τῶν δοθέντων παραγινόμενον, εἰ δοθείη, ἐφαπτόμενον δὲ ἑκάστης τῶν δεδομένων γραμμῶν· αὕτη περιέχει προβλημάτων ἤδη τὸ πλῆθος ἕξ. ἐκ τριῶν γὰρ διαφόρων τινῶν δυάδες ἄτακτοι διάφοραι γίνονται τὸ πλῆθος ἕξ· ἤτοι γὰρ δύο δοθέντων σημείων, ἢ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἢ δύο δοθέντων κύκλων, ἢ σημείου καὶ εὐθείας, ἢ σημείου καὶ κύκλου, ἢ εὐθείας καὶ κύκλου, τὸν δεδομένον τῷ μεγέθει κύκλον διαγράφειν δεῖ, ὡς εἴρηται· καὶ ταῦτα ἀναλῦσαι καὶ συνθεῖναι καὶ διορίζεσθαι κατὰ πτῶσιν. Ἔχει δὲ τὸ πρῶτον τῶν ἐπαφῶν προβλήματα ζ΄. τόδε δεύτερον προβλήματα δ΄. Λήμματα δὲ ἔχει τὰ δύο βιβλία κα΄. αὐτὰ δὲ θεωρήματά ἐστιν ξ΄.

Περὶ τῶν πορισμάτων Εὐκλείδου.

Μετὰ δὲ τὰς ἐπαφὰς ἐν τρισὶ βιβλίοις πορίσματά ἐστιν Εὐκλείδου, πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν, ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος. Οὐδὲν προστεθείκασι τοῖς ὑπ' Εὐκλείδου γραφεῖσι πρώτου, χωρὶς εἰ μή τινες τῶν πρὸ ἡμῶν ἀπειρόκαλοι δευτέρας γραφὰς ὀλίγοις αὐτῶν παρατεθείκασιν· ἑκάστου μὲν

πλῆθος

πλῆθος ὡρισμένον ἐχόντων ἀποδείξεων, * ὡς ἐδείξαμεν, τοῦ δὲ Εὐκλείδου μίαν ἑκάστου θέντος τοῦ μάλιστα ὑπεμφαίνουσαν. Ταῦτα δὲ λεπτὴν καὶ φυσικὴν ἔχει θεωρίαν καὶ ἀναγκαίαν καὶ καθολικωτέραν, καὶ τοῖς δυναμένοις ὁρᾶν καὶ πορίζειν ἐπιτερπῆ. ἅπαντα δὲ αὐτῶν τὰ εἴδη οὔτε θεωρημάτων ἐστὶ οὔτε προβλημάτων, ἀλλὰ μέσην πως τούτων ἐχούσης ἰδέας· ὥστε τὰς προτάσεις αὐτῶν δύνασθαι σχηματίζεσθαι ἢ ὡς θεωρημάτων ἢ ὡς προβλημάτων· παρ᾽ ὃ καὶ συμβέβηκεν, τῶν πολλῶν γεωμετρῶν τοὺς μὲν ὑπολαμβάνειν αὐτὰ εἶναι τῷ γένει θεωρήματα, τοὺς δὲ προβλήματα, ἀποβλέποντας τῷ σχήματι μόνον τῆς προτάσεως. τὰς δὲ διαφορὰς τῶν τριῶν τούτων ὅτι βέλτιον ᾔδεισαν οἱ ἀρχαῖοι, δῆλον ἐκ τῶν ὅρων. ἔφασαν γὰρ θεώρημα μὲν εἶναι τὸ προτεινόμενον εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου· πρόβλημα δὲ τὸ προβαλλόμενον εἰς κατασκευὴν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου· πόρισμα δὲ τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου. μετεγράφη δὲ οὗτος ὁ τοῦ πορίσματος ὅρος ὑπὸ τῶν νεωτέρων, μὴ δυναμένων ἅπαντα πορίζειν, ἀλλὰ συγχρωμένων τοῖς στοιχείοις τούτοις, καὶ δεικνύντων αὐτὸ μόνον τοῦθ᾽ ὅτι ἐστὶ τὸ ζητούμενον, μὴ ποριζόντων δὲ τοῦτο· καὶ ἐλεγχόμενοι ὑπὸ τοῦ ὅρου καὶ τῶν διδασκομένων, ἔγραψαν ἀπὸ συμβεβηκότος οὕτως. πόρισμά ἐστι τὸ λεῖπον ὑποθέσει τοπικοῦ θεωρήματος. τούτου δὲ τοῦ γένους τῶν πορισμάτων εἶδός ἐστιν οἱ τόποι, καὶ πλεονάζουσι ἐν τῷ ἀναλυομένῳ· κεχωρισμένων δὲ τῶν πορισμάτων ἤθροισται καὶ ἐπιγράφεται καὶ παραδίδοται, διὰ τὸ πολύχυτον εἶναι μᾶλλον τῶν ἄλλων εἰδῶν. τῶν γοῦν τόπων ἐστὶν ἃ μὲν ἐπιπέδων, ἃ δὲ στερεῶν, ἃ δὲ γραμμικῶν, καὶ ἔτι τῶν πρὸς μεσότητας. Συμβέβηκεν δὲ καὶ τοῦτο τοῖς πορίσμασι, τὰς προτάσεις ἔχειν ἐπιτετμημένας διὰ τὴν σκολιότητα πολλῶν συνήθως συνυπακουομένων, ὥστε πολλοὺς τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ μέρους ἐκδέχεσθαι, τὰ δὲ ἀναγκαιότερα ἀγνοεῖν τῶν σημαινομένων. περιλαβεῖν δὲ πολλὰ μιᾷ προτάσει ἥκιστα δυνατὸν ἐν τούτοις, διὰ τὸ καὶ αὐτὸν Εὐκλείδην οὐ πολλὰ ἐξ ἑκάστου εἴδους τεθεικέναι, ἀλλὰ δείγματος ἕνεκα τῆς πολυπληθίας * ἐν ἢ ὀλίγα πρὸς ἀρχήν. δεδομένον * τοῦ πρώτου βιβλίου τέθεικεν ὁμοειδῆ πάντα ἐκείνου τοῦ δαψιλεστέρου εἴδους τῶν τόπων, ὡς δέκα * τὸ πλῆθος. Διὸ καὶ περιλαβεῖν ταύτας μὴ παραλλήλων οὐσῶν, ἀλλὰ τῶν τριῶν συμπιπτουσῶν, τὸ αὐτό ἐστι τῷ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι. τὸ γὰρ δύο παραλλήλων οὐσῶν καὶ μιᾶς ἐμπιπτούσης ὡς μέρος ὂν τῆς β΄. ὑποδιαιρέσεως προγράφεται ἐν τούτοις· πάντα καὶ τὰ ἑξῆς ἓξ ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. Τὰ δὲ λειπόμενα δύο, τὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ κύκλου, ἢ τριῶν δοθέντων κύκλων, μόνον ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ, διὰ τὰς πρὸς ἀλλήλους θέσεις τῶν κύκλων τε καὶ εὐθειῶν πλείονας οὔσας καὶ πλειόνων διορισμῶν δεομένας. ταῖς προειρημέναις ἐπαφαῖς ὁμογενὲς πλῆθός ἐστι προβλημάτων, παραλειπόμενον ἀπὸ τῶν ἀναδιδόντων· προσανέδωκαν δέ τινες προτέρῳ τῶν εἰρημένων δύο βιβλίων· εὐσύνοπτον γὰρ καὶ εἰσαγωγικὸν μᾶλλον ἦν, ἐντελές τε καὶ συμπληρωτικὸν τοῦ γένους τῶν ἐπαφῶν. πάλιν μιᾷ περιλαβὼν ἅπαντα προτάσει, ἥτις τῆς προειρημένης λείπουσα μὲν ὑποθέσει, περιττεύουσα δὲ ἐπιτάγματι, οὕτως ἔχει. Ἐκ σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων ὁποιωνοῦν δύο δοθέντων κύκλον γράψαι τῷ μεγέθει δοθέντα, διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἢ τῶν δοθέντων παραγινόμενον, εἰ δοθείη, ἐφαπτόμενον δὲ ἑκάστης τῶν δεδομένων γραμμῶν· αὐτὴ περιέχει προβλημάτων ἤδη τὸ πλῆθος ἕξ. ἐκ τριῶν γὰρ διαφόρων τινῶν δυάδες ἄτακτοι διάφοραι γίνονται τὸ πλῆθος ἕξ· ἤτοι γὰρ δύο δοθέντων σημείων, ἢ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἢ δύο δοθέντων κύκλων, ἢ σημείου καὶ εὐθείας, ἢ σημείου καὶ κύκλου, ἢ εὐθείας καὶ κύκλου, τὸν δεδομένον τῷ μεγέθει κύκλον διαγαγεῖν δεῖ, ὡς εἴρηται· καὶ ταῦτα ἀναλῦσαι καὶ συνθεῖναι καὶ διορίζεσθαι κατὰ πτῶσιν. Ἔχει δὲ τὸ πρῶτον τῶν ἐπαφῶν προβλήματα ζ΄. τὸ δὲ δεύτερον προβλήματα δ΄. Λήμματα δὲ ἔχει τὰ δύο βιβλία κα΄. αὐτὰ δὲ θεωρήματά ἐστιν ξ΄.

Περὶ τῶν πορισμάτων Εὐκλείδου.

Μετὰ δὲ τὰς ἐπαφὰς ἐν τρισὶ βιβλίοις πορίσματά ἐστιν Εὐκλείδου, πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν, ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος. Οὐδὲν προστεθείκασι τοῖς ὑπ' Εὐκλείδου γραφεῖσι πρώτου, χωρὶς εἰ μή τινες τῶν πρὸ ἡμῶν ἀπειρόκαλοι δευτέρας γραφὰς ὀλίγοις αὐτῶν παρατεθείκασιν· ἑκάστου μὲν

πλῆθος

πλῆθος ὡρισμένον ἔχοντος ἀποδείξεων, * ὡς ἐδείξαμεν, τοῦ γὰρ Εὐκλείδου μίαν ἑκάστου θέντος τῶν μάλιστα ὑπεμφαινουσῶν. Ταῦτα γὰρ λεπτὴν καὶ φυσικὴν ἔχει θεωρίαν καὶ ἀναγκαίαν καὶ καθολικωτέραν, καὶ τοῖς δυναμένοις ὁρᾷν καὶ πορίζειν ἐπιτερπῆ. ἅπαντα δὲ αὐτῶν τὰ εἴδη οὔτε θεωρημάτων ἐστὶ οὔτε προβλημάτων, ἀλλὰ μέσην πως τούτων ἐχούσης ἰδέας· ὥστε τὰς προτάσεις αὐτῶν δύνασθαι σχηματίζεσθαι ἢ ὡς θεωρημάτων ἢ ὡς προβλημάτων· παρ' ὃ καὶ συμβέβηκεν, τῶν πολλῶν γεωμετρῶν τοὺς μὲν ὑπολαμβάνειν αὐτὰ εἶναι τῷ γένει θεωρήματα, τοὺς δὲ προβλήματα, ἀποβλέποντας τῷ σχήματι μόνον τῆς προτάσεως. τὰς δὲ διαφορὰς τῶν τριῶν τούτων ὅτι βέλτιον ᾔδεισαν οἱ ἀρχαῖοι, δῆλον ἐκ τῶν ὅρων. ἔφασαν γὰρ θεώρημα μὲν εἶναι τὸ προτεινόμενον εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου· πρόβλημα δὲ τὸ προβαλλόμενον εἰς κατασκευὴν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου· πόρισμα δὲ τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου. μετεγράφη δὲ οὗτος ὁ τοῦ πορίσματος ὅρος ὑπὸ τῶν νεωτέρων, μὴ δυναμένων ἅπαντα πορίζειν, ἀλλὰ συγχρωμένων τοῖς στοιχείοις τούτοις, καὶ δεικνύντων αὐτὸ μόνον τοῦθ' ὅτι ἐστὶ τὸ ζητούμενον, μὴ ποριζόντων δὲ τοῦτο· καὶ ἐλεγχόμενοι ὑπὸ τοῦ ὅρου καὶ τῶν διδασκομένων, ἔγραψαν ἀπὸ συμβεβηκότος οὕτως. πόρισμά ἐστι τὸ λεῖπον ὑποθέσει τοπικοῦ θεωρήματος. τούτου δὲ τοῦ γένους τῶν πορισμάτων εἶδός ἐστιν οἱ τόποι, καὶ πλεονάζουσι ἐν τῷ ἀναλυομένῳ· κεχωρισμένων δὲ τῶν πορισμάτων ἤθροισται καὶ ἐπιγράφεται καὶ παραδίδοται, διὰ τὸ πολύχυτον εἶναι μᾶλλον τῶν ἄλλων εἰδῶν. τῶν γοῦν τόπων ἐστὶν ἃ μὲν ἐπιπέδων, ἃ δὲ στερεῶν, ἃ δὲ γραμμικῶν, καὶ ἔτι τῶν πρὸς μεσότητας. Συμβέβηκεν δὲ καὶ τοῦτο τοῖς πορίσμασι, τὰς προτάσεις ἔχειν ἐπιτετμημένας διὰ τὴν σκολιότητα πολλῶν συνήθως συνυπακουομένων, ὥστε πολλοὺς τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ μέρους ἐκδέχεσθαι, τὰ δὲ ἀναγκαιότερα ἀγνοεῖν τῶν σημαινομένων. περιλαβεῖν δὲ πολλὰ μιᾷ προτάσει ἥκιστα δυνατὸν ἐν τούτοις, διὰ τὸ καὶ αὐτὸν Εὐκλείδην οὐ πολλὰ ἐξ ἑκάστου εἴδους τεθεικέναι, ἀλλὰ δείγματος ἕνεκα τῆς πολυπληθίας * ἐνῆ ὀλίγας πρὸς ἀρχήν. δεδομένον * τοῦ πρώτου βιβλίου τέθεικεν ὁμοειδῆ πάντα ἐκείνου τοῦ δαψιλεστέρου εἴδους τῶν τόπων, ὡς δέκα * τὸ πλῆθος. Διὸ καὶ περιλαβεῖν ταύτας ἐν μιᾷ προτάσει ἐνδεχόμενον εὑρόντες οὕτως ἐγράψαμεν.

Ἐὰν ὑπτίου ἢ παρυπτίου ἢ παραλλήλου * ἑτέρα τρία τὰ ἐπὶ μιᾶς σημεῖα δεδομένα ᾖ, τὰ δὲ λοιπὰ πλὴν ἑνὸς ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, καὶ τοῦθ' ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. τοῦτ' ἐπὶ τεσσάρων μὲν εὐθειῶν εἴρηται μόνων, ὧν οὐ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰσίν· ἀγνοεῖται δὲ ἐπὶ παντὸς τοῦ προτεινομένου πλήθους ἀληθὲς ὑπάρχον οὕτω λεγόμενον. ἐὰν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πάντα δὲ ἐπὶ μιᾶς αὐτῶν δεδομένα ᾖ, καὶ τῶν ἐπὶ ἑτέρας ἕκαστον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας· ἢ καθολικώτερον οὕτως, ἐὰν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πάντα δὲ τὰ ἐπὶ μιᾶς αὐτῶν σημεῖα δεδομένα ᾖ, τῶν δὲ λοιπῶν τὸ πλῆθος ἐχόντων τρίγωνον ἀριθμὸν, ἡ πλευρὰ τούτου ἕκαστον ἔχει σημεῖον ἁπτόμενον εὐθείας θέσει δεδομένης, ὧν τριῶν μὴ πρὸς γωνίαν ὑπάρχον τριγώνου χωρίου ἕκαστον λοιπὸν σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. τὸν δὲ στοιχειωτὴν οὐκ εἰκὸς ἀγνοῆσαι τοῦτο, τὴν δ' ἀρχὴν μόνην τάξαι. καὶ ἐπὶ πάντων δὲ τῶν πορισμάτων φαίνεται ἀρχὰς καὶ σπέρματα μόνα πληθῶν πολλῶν καὶ μεγάλων καταβεβληκέναι, ὧν ἕκαστον οὐ κατὰ τὰς τῶν ὑποθέσεων διαφορὰς διαστέλλειν δεῖ, ἀλλὰ κατὰ τὰς τῶν συμβεβηκότων καὶ ζητουμένων· αἱ μὲν ὑποθέσεις ἅπασαι διαφέρουσιν ἀλλήλων εἰδικώταται οὖσαι, τῶν δὲ συμβαινόντων καὶ ζητουμένων ἕκαστον ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὂν πολλαῖς ὑποθέσεσι διαφόροις συμβέβηκε.

Ποιητέον οὖν ἐν μὲν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ ταῦτα τὰ γένη τῶν ἐν ταῖς προτάσεσι ζητουμένων. (ἐν ἀρχῇ μὲν τοῦ ζ' διάγραμμα τοῦτο) Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων πρὸς θέσει δεδομένην εὐθεῖαν κλασθῶσιν, ἀποτέμνη δὲ μία ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς τῷ ἐπ' αὐτῆς δεδομένῳ σημείῳ, ἀποτεμεῖ καὶ ἡ ἑτέρα ἀπὸ ἑτέρας λόγον ἔχουσαν δοθέντα. ἐν δὲ τοῖς ἑξῆς, ὅτι τόδε τὸ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης εὐθείας· ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς τήνδε δοθείς· ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἥδε θέσει δεδομένη ἐστίν· ὅτι ἥδε ἐπὶ δοθὲν νεύει· ὅτι λόγος τῆσδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι λόγος τῆσδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε κατηγμένην· ὅτι λόγος τοῦδε τοῦ * χωρίου πρὸς τὸ ὑπὸ δοθεί-

σης

σης καὶ τῆσδε· ὅτι τοῦδε τοῦ χωρίου ὁ μὲν τι δοθέν ἐστιν, ὁ δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τόδε τὸ χωρίον, ἢ τόδε μετά τινος χωρίου δοθέντος ἐστιν, * ἐκεῖνο δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἥδε μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα, λόγον ἔχει πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ὑπὸ τοῦ δοθέντος καὶ τῆσδε, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δοθέντος καὶ τῆς ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι λόγος τῆσδε καὶ τῆσδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι ἥδε ἀποτέμνει ἀπὸ θέσει δεδομένων δοθὲν περιεχούσας.

Εν δὲ τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ ὑποθέσεις μὲν ἕτεραι, τῶνδε ζητουμένων τὰ μὲν πλείονα τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, περισσὰ δὲ ταῦτα· ὅτι τόδε τὸ χωρίον ἤτοι λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν, ἢ μετὰ δοθέντος λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶνδε καὶ * συναμφοτέρου τῶνδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τὸ ὑπὸ τῆσδε καὶ συναμφοτέρου τῆσδέ τε καὶ τῆς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα· καὶ τὸ ὑπὸ τῆσδε καὶ τῆς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα, λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος συναμφοτέρου πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι δοθὲν τὸ ὑπὸ τῶνδε.

Εν δὲ τῷ τρίτῳ βιβλίῳ αἱ μὲν πλείονες ὑποθέσεις ἐπὶ ἡμικυκλίων εἰσίν, ὀλίγαι δὲ ἐπὶ κύκλου καὶ τμημάτων· τῶν δὲ ζητουμένων τὰ μὲν πολλὰ παραπλησίως τοῖς ἔμπροσθεν, περισσὰ δὲ ταῦτα· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶνδε· ὅτι λόγος τοῦ ἀπὸ τῆσδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶνδε τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ἀπὸ τῆσδε τῷ ὑπὸ δοθέντος καὶ ἀπολαμβανομένης ὑπὸ καθέτου ἕως δοθέντος· ὅτι συναμφότερος καὶ πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἐστί τι δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τόδε δοθὲν περιέξουσι τῷ εἴδει τρίγωνον· ὅτι ἐστί τι δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τοῦδε ἴσας ἀπολαμβάνουσι περιφερείας· ὅτι ἥδε ἤτοι ἐν παραθέσει ἐστίν, ἢ μετά τινος εὐθείας ἐπὶ τὸ δοθὲν νευούσης δοθεῖσαν περιέχει γωνίαν. ἔχει δὲ τὰ τρία βιβλία τῶν πορισμάτων λήμματα λη, αὐτὰ δὲ θεωρημάτων ἐστὶν ροα.

Τόπων ἐπιπέδων β'.

Τῶν τόπων καθόλυ οἱ μὲν εἰσὶν ἐφεκτικοὶ, ὡς καὶ Ἀπολλώνιος περὶ τῶν στοιχείων λέγει σημείυ μὲν τόπον σημεῖον, γραμμῆς δὲ τόπον γραμμὴν, ἐπιφανείας δὲ ἐπιφάνειαν, στερεῦ δὲ στερεόν· οἱ δὲ διεξοδικοὶ, ὡς σημείυ μὲν γραμμὴν, γραμμῆς ἐπιφάνειαν, ἐπιφανείας δὲ στερεόν. οἱ δὲ ἀναστροφικοὶ, ὡς σημείυ μὲν ἐπιφάνειαν, γραμμῆς δὲ στερεόν. τῶν δὲ ἐν τῷ ἀναλυομένῳ, οἱ μὲν τῶν θέσει δεδομένων ἐφεκτικοί εἰσιν· οἱ δὲ ἐπίπεδοι λεγόμενοι, καὶ οἱ στερεοὶ καὶ γραμμικοὶ διεξοδικοί εἰσι σημείων. οἱ δὲ πρὸς ἐπιφανείαις ἀναστροφικοὶ μὲν εἰσὶ σημείων, διεξοδικοὶ δὲ γραμμῶν. οἱ μέν τοι γραμμικοὶ ἀπὸ τῶν πρὸς ἐπιφάνειαν δείκνυνται. λέγονται δὲ ἐπίπεδοι μὲν τόποι ἤτοί τε περὶ ὧν ἐπάγομεν, καθόλυ ὅσοι εἰσὶν εὐθεῖαι γραμμαὶ ἢ κύκλοι· στερεοὶ δὲ, ὅσοι εἰσὶ κώνων τομαὶ, παραβολαὶ ἢ ἐλλείψεις, ἢ ὑπερβολαί. γραμμικοὶ δὲ τόποι λέγονται ὅσοι γραμμαί εἰσιν ὔτε εὐθεῖαι, ὔτε κύκλοι, ὔτε τις τῶν εἰρημένων κωνικῶν τομῶν. οἱ δὲ ὑπὸ Ἐρατοσθένυς ἐπιγραφέντες τόποι πρὸς μεσότητας, ἐκ τῶν προειρημένων εἰσὶ τῷ γένει· ἀπὸ δὲ τῆς ἰδιότητος τῶν ὑποθέσεων * ἐκείνοις. οἱ μὲν ὖν ἀρχαῖοι τῶν ἐπιπέδων τόπων τύτων τάξιν ἀποβλέποντες ἐστοιχείωσαν· ἧς ἀμελήσαντες οἱ μετ' αὐτὺς προσέθηκαν ἑτέρυς, ὡς ὐκ ἀπείρων τὸ πλῆθος ὄντων, εἰ θέλοι τις προσγράφειν ὐ τῆς τάξεως ἐκείνης ἐχόμενα. θήσω ὖν τὰ μὲν προσκείμενα ὕστερα, τὰ δὲ τῆς τάξεως πρότερα, μιᾷ περιλαβὼν προτάσει ταύτῃ. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι, ἤτοι ἀπὸ ἑνὸς δεδομένυ σημείυ ἢ ἀπὸ δύο, καὶ ἤτοι ἐπ' εὐθείας ἢ παράλληλοι, ἢ δεδομένην περιέχυσαι γωνίαν, καὶ ἤτοι λόγον ἔχυσαι πρὸς ἀλλήλας, ἢ χωρίον περιέχυσαι δεδομένον· ἅπτηται δὲ τὸ τῆς μιᾶς πέρας ἐπιπέδυ τόπυ θέσει δεδομένυ, ἅψεται καὶ τὸ τῆς ἑτέρας πέρας ἐπιπέδυ τόπυ θέσει δεδομένυ, ὁτὲ μὲν τῦ ὁμογενῦς, ὁτὲ δὲ τῦ ἑτέρυ· καὶ ὁτὲ μὲν ὁμοίως κειμένυ πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ὁτὲ δὲ ἐναντίως· ταῦτα δὲ γίνεται παρὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὑποκειμένων. τὰ δὲ προσκείμενα ἐν ἀρχῇ ὑπὸ Χαρμάνδρυ γ' συμφωνεῖ ταῦτα. Ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης τὸ ἓν πέρας ᾖ δεδομένον, τὸ ἕτερον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης.

κοίλης. Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης. Ἐὰν τριγώνου χωρίου μεγέθει δεδομένου ἡ βάσις θέσει καὶ μεγέθει δεδομένη ᾖ, ἡ κορυφὴ αὐτοῦ ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. ἕτερα δὲ τοιαῦτα. Ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης, καὶ παρά τινα θέσει δεδομένην εὐθεῖαν ἠγμένης, τὸ ἓν πέρας ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ἅψεται καὶ τὸ ἕτερον εὐθείας δεδομένης. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας δύο εὐθείας, παραλλήλας ἢ συμπιπτούσας, καταχθῶσιν ἐν δεδομέναις γωνίαις ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον· ἢ ὧν ἡ μία, μεθ᾽ ἧς πρὸς ἣν ἡ ἑτέρα λόγον ἔχει δοθέντα, δεδομένη ἐστ᾽ ἅψεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν ὦσιν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι θέσει δεδομέναι, καὶ ἐπ᾽ αὐτὰς ἀπό τινος σημείου καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἡ δὲ τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ κατηγμένης, μετὰ τοῦ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, καὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας παραλλήλους καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ᾽ αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις εὐθείας, ἤτοι λόγον ἐχούσας δοθέντα [ἢ χωρίον περιεχούσας δεδομένον, ἢ ὥστε τὰ ἐπ᾽ αὐτῶν τῶν κατηγμένων δεδομένα εἴδη, ἢ τὴν ὑπεροχὴν τῶν εἰδῶν ἴσην εἶναι δεδομένῳ χωρίῳ] τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας.

Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον περιέχει τάδε: Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ᾖ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν δοθέντι χωρίῳ διαφέροντα, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν δὲ ὦσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἤτοι εὐθείας ἢ περιφερείας. Ἐὰν ᾖ θέσει δεδομένη εὐθεῖα, καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς δοθὲν σημεῖον, καὶ ἀπὸ τούτου διαχθεῖσά τις πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τοῦ πέρατος ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην, καὶ ᾖ τὸ ἀπὸ τῆς διαχθείσης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἧς ἀπολαμβάνει, ἤτοι πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, ἢ πρὸς ἑτέρῳ δοθέντι σημείῳ ἐπὶ τῆς θέσει δεδομένης, τὸ πέρας τῆσδε ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, ἐστιν, καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς μιᾶς τοῦ ἀπὸ τῆς ἑτέρας δοθέντι μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ ὁσωνοῦν δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ἑνὶ σημείῳ, καὶ ἢ τὰ ἀπὸ πασῶν εἴδη ἴσα δοθέντι χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου παρὰ τὴν θέσει ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπολαμβανομένη ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς δοθέντι σημείῳ· καὶ ἢ τὰ ἀπὸ τῶν κεκλασμένων εἴδη ἴσα τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης, τὸ πρὸς τῇ κλάσει σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἐντὸς κύκλου θέσει δεδομένου δοθέν τι σημεῖον ᾖ, καὶ δι' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός· καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς ἄχρι τοῦ δοθέντος ἐντὸς σημείου, ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, ἢ τῷ μόνῳ, ἢ τούτῳ τε καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐντὸς δύο τμημάτων, τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν τοῦτο μὲν σημεῖον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ὁ δὲ κύκλος μὴ ὑπόκειται, τὰ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ δεδομένου σημεῖα ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας τῆς αὐτῆς. ἔχει δὲ τὰ τόπων ἐπιπέδων δύο βιβλία θεωρήματα ἤτοι διαγράμματα ρμζ, λήμματα δὲ ὀκτώ.

Νεύσεων δύο.

Νεύειν λέγεται γραμμὴ ἐπὶ σημεῖον, ἐὰν ἐπεκβαλλομένη ἐπ' αὐτὸ παραγίνηται. καθόλου δὲ τὸ αὐτό ἐστιν, ἐάν τε ἐπὶ δοθὲν νεύειν σημεῖον λέγηται· ἐάν τε ἐστί τι ἐπ' αὐτῆς δοθέν· ἐάν τε διὰ δοθέντος ἐστὶ σημείου. Ἐπέγραψαν δὲ ταῦτα Νεύσεις ἀφ' ἑνὸς τῶν εἰρημένων. Προβλήματος δὲ ὄντος καθολικοῦ τούτου· δύο δοθεισῶν γραμμῶν θέσει, θεῖναι μεταξὺ τούτων εὐθεῖαν τῷ μεγέθει δεδομένην, νεύουσαν ἐπὶ δοθὲν σημεῖον. ἐπὶ ταύτης τῶν ἐπὶ μέρους διάφορα τὰ ὑποκείμενα ἐχόντων, ἃ μὲν ἦν ἐπίπεδα, ἃ δὲ στερεά, ἃ δὲ γραμμικά. τῶν δ' ἐπιπέδων ἀποκληρώσαντες τὰ πρὸς πολλὰ χρησιμώτερα, ἔδειξαν προβλήματα ταῦτα. θέσει δεδομένων ἡμικυκλίου τε καὶ εὐθείας πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, ἢ δύο ἡμικυκλίων ἐπ' εὐθείας ἐχόντων τὰς βάσεις, θεῖναι

δοθεῖσαν

δοθεῖσαν τῷ μεγέθει εὐθεῖαν μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν, νεύουσαν ἐπὶ γωνίαν ἡμικυκλίου. καὶ ῥόμβου δοθέντος, καὶ ἐπεκβλημένης μόνης μιᾶς πλευρᾶς, ἁρμόσαι ὑπὸ τὴν ἐκτὸς γωνίαν δεδομένην τῷ μεγέθει εὐθεῖαν νεύουσαν ἐπὶ τὴν ἀντικρὺς γωνίαν. καὶ θέσει δοθέντος κύκλου ἐναρμόσαι εὐθεῖαν μεγέθει δεδομένην νεύουσαν ἐπὶ δοθέν. τούτων δὲ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ τεύχει δέδεικται, τὸ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἡμικυκλίου καὶ εὐθείας, ἔχον πτώσεις τέσσαρας, καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἔχον πτώσεις δύο, καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ῥόμβου πτώσεις ἔχον δύο. Ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ τεύχει, τὸ ἐπὶ τῶν δύο ἡμικυκλίων, τῆς ὑποθέσεως πτώσεις ἐχούσης δέκα· ἐν δὲ ταύταις ὑποδιαιρέσεις πλείονες διοριστικαὶ, ἕνεκα τοῦ δεδομένου μεγέθους τῆς εὐθείας. Τὰ μὲν οὖν ἐν τῷ ἀναλυομένῳ τόπῳ ἐπίπεδα, τοῦτ' ἔστιν ἃ καὶ πρότερα δείκνυται, χωρὶς τῶν Ἐρατοσθένους μεσοτήτων· ὕστατα γὰρ ἐκεῖνα. τοῖς δὲ ἐπιπέδοις ἐφεξῆς τὴν τῶν στερεῶν ἡ τάξις ἀπαιτεῖ θεωρίαν. Στερεὰ δὲ καλοῦσι προβλήματα, οὐχ ὅσα ἐν στερεοῖς σχήμασι προτείνεται, ἀλλ' ὅσα διὰ τῶν ἐπιπέδων μὴ δυνάμενα δειχθῆναι, διὰ τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν δείκνυται. ὥστε ἀναγκαῖον πρότερον περὶ τούτων γράφειν. τὴν μὲν οὖν ἀναδιδομένων κωνικῶν στοιχείων πρότερον Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου πέντε τεύχη, ὡς ἂν τοῖς ἤδη δυνατοῖς οὖσι ταῦτα παραλαμβάνειν ἐπιτομώτερον γεγραμμένα. ἔχει δὲ τὰ τῶν νεύσεων βιβλία δύο θεωρήματα ἤτοι διαγράμματα ρκε', λήμματα δὲ λη'.

Κωνικῶν η'.

Τὰ Εὐκλείδου βιβλία δ' κωνικῶν Ἀπολλώνιος ἀναπληρώσας καὶ προσθεὶς ἕτερα δ', παρέδωκεν η' κωνικῶν τεύχη. Ἀρισταῖος δὲ, ὃς γράφει τὰ μέχρι τοῦ νῦν ἀναδιδόμενα στερεῶν τόπων τεύχη ε' συνεχῆ τοῖς κωνικοῖς, ἐκάλει, καὶ οἱ πρὸ Ἀπολλωνίου, τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν, τὴν μὲν ὀξυγωνίου, τὴν δὲ ὀρθογωνίου, τὴν δ' ἀμβλυγωνίου κώνου τομήν. ἐπειδὴ ἐν ἑκάστῳ τῶν τριῶν τούτων κώνων διαφόρως τεμνομένων αἱ τρεῖς γίγνονται γραμμαί· διαπορήσας, ὡς φαίνεται, Ἀπολλώνιος τί δή ποτε ἀπεκληρώσαντο οἱ πρὸ αὐτοῦ, ἣν μὲν ἐκάλουν ὀξυγωνίου κώνου τομὴν δυναμένην καὶ ὀρθογωνίου καὶ ἀμβλυγωνίου εἶναι.

εἶναι· τὴν δὲ ὀρθογωνίου, εἶναι δυναμένην ὀξυγωνίου τε καὶ ἀμβλυγωνίου· τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου δυναμένην εἶναι ὀξυγωνίου τε καὶ ὀρθογωνίου· μεταθεὶς τὰ ὀνόματα καλεῖ τὴν μὲν ὀξυγωνίου καλουμένην Ἔλλειψιν, τὴν δὲ ὀρθογωνίου Παραβολήν, τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου Ὑπερβολήν, ἑκάστην δὲ ἀπό τινος ἰδίου συμβεβηκότος. χωρίον γάρ τι παρά τινα γραμμὴν παραβαλλόμενον, ἐν μὲν τῇ ὀξυγωνίου κώνου τομῇ ἐλλεῖπον γίνεται τετραγώνῳ· ἐν δὲ τῇ ὀρθογωνίου οὔτε ἐλλεῖπον οὔθ' ὑπερβάλλον. τοῦτο δ' ἔπαθεν μὴ προνοήσας ὅτι, κατά τινα μίαν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου τέμνοντος τὸν κῶνον, ἄλλη καὶ ἄλλη τῶν γραμμῶν γίνεται, ἣν ὠνόμασεν ἀπὸ τῆς ἰδιότητος τοῦ κώνου. ἐὰν γὰρ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀχθῇ παράλληλον μιᾷ τοῦ κώνου πλευρᾷ, γίγνεται μία μόνη τῶν τριῶν γραμμῶν, ἀεὶ ἡ αὐτή, ἣν ὠνόμασεν ὁ Ἀρισταῖος ἐκεῖνος τοῦ τμηθέντος κώνου τομήν. ὁ δ' οὖν Ἀπολλώνιος οἷα περιέχει τὰ ὑπ' αὐτοῦ γραφέντα κωνικῶν η' βιβλία λέγει, κεφαλαιωδῶς θεὶς προδήλωσιν ἐν τῷ προοιμίῳ τοῦ πρώτου ταύτην. "περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων, καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπιπλεῖον, καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξειργασμένα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα. τὸ δὲ δεύτερον τὰ περὶ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων συμβαίνοντα, καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρείαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς. τίνας δὲ διαμέτρους ἢ τίνας ἄξονας καλῶ, εἰδήσεις ἐκ τούτου τοῦ βιβλίου. τὸ δὲ τρίτον, πολλὰ καὶ παντοῖα θεωρήματα χρήσιμα πρός τε τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων, καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλείονα καλὰ καὶ ξένα. ἃ καὶ κατανοήσαντες εὕρομεν μὴ συντεθειμένον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ γ' καὶ δ' γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριόν τι αὐτοῦ, καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ δυνατὸν ἄνευ τῶν προσευρημένων τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. τὸ δὲ τέταρτον, ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμπίπτουσι· καὶ ἄλλα ἐκ περισσοῦ, ὧν οὐδέτερον ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν γέγραπται, κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλει, καὶ ἔτι ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλουσι. τὰ δὲ λοιπὰ δ' περιουσιαστικώτερα· ἔστι γὰρ τὸ μὲν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων ἐπιπλεῖον· τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων τομῶν· τὸ δὲ διορισ-

διοριστικῶν θεωρημάτων· τὸ δὲ κωνικῶν προβλημάτων διωρισμένων. Ἀπολλώνιος μὲν ταῦτα. ὃν δέ φησιν ἐν τῷ τρίτῳ τόπον ἐπὶ γ΄ καὶ δ΄ γραμμὰς μὴ τελειωθῆναι ὑπὸ Εὐκλείδου, οὐδ' ἂν αὐτὸς ἐδυνήθη, οὐδ' ἄλλος οὐδείς, ἀλλ' οὐδὲ μικρόν τι προσθεῖναι τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γραφεῖσι, διά γε μόνων τῶν προδεδειγμένων ἤδη κωνικῶν, ἄχρι τῶν κατ' Εὐκλείδην· ὡς καὶ αὐτὸς μαρτυρεῖ λέγων ἀδύνατον εἶναι τελειωθῆναι χωρὶς ὧν αὐτὸς προγράφειν ἠναγκάσθη. ὁ δὲ Εὐκλείδης ἀποδεχόμενος τὸν Ἀρισταῖον, ἄξιον ὄντα ἐφ' οἷς ἤδη παραδεδώκει κωνικοῖς· καὶ μὴ φθάσας ἢ μὴ θελήσας ἐπικαταβάλλεσθαι τούτων τὴν αὐτὴν πραγματείαν (ἐπιεικέστατος ὢν, καὶ πρὸς ἅπαντας εὐμενὴς τοὺς καὶ κατὰ ποσὸν συναύξειν δυναμένους τὰ μαθήματα, ὡς δεῖ, καὶ μηδαμῶς προσκρουστικὸς ὑπάρχων, καὶ ἀκριβὴς μὲν, οὐκ ἀλαζονικὸς δὲ καθάπερ οὗτος) ὅσον δυνατὸν ἦν δεῖξαι τοῦ τόπου διὰ τῶν ἐκείνου κωνικῶν ἔγραψεν, οὐκ εἰπὼν τέλος ἔχειν τὸ δεικνύμενον· τότε γὰρ ἦν ἀναγκαῖον ἐξελέγχειν· νῦν δ' οὐδαμῶς, ἐπείτοι καὶ αὐτὸς ἐν τοῖς κωνικοῖς ἀτελῆ τὰ πλεῖστα καταλιπὼν οὐκ εὐθύνεται. προσθεῖναι δὲ τῷ τόπῳ τὰ λειπόμενα δεδύνηται, προφαντασιωθεὶς τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γεγραμμένοις ἤδη περὶ τοῦ τόπου, καὶ σχολάσας τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου μαθηταῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ πλεῖστον χρόνον, (ὅθεν ἔσχεν καὶ τὴν τοσαύτην ἕξιν) * οὐκ ἂν πάθη. οὗτος δὲ ὁ ἐπὶ γ΄ καὶ δ΄ γραμμὰς τόπος, ἐφ' ᾧ μεγαφρονεῖ προσθείς, χάριν ὀφείλων εἰδέναι τῷ πρώτῳ γράψαντι, τοιοῦτός ἐστι.

Ἐὰν γὰρ θέσει δεδομένων τριῶν εὐθειῶν, ἀπό τινος τοῦ αὐτοῦ σημείου καταχθῶσιν ἐπὶ τὰς τρεῖς ἐν δεδομέναις γωνίαις εὐθεῖαι· καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ δύο κατηγμένων περιεχομένου ὀρθογωνίου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τετράγωνον, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένου στερεοῦ τόπου, τουτέστι μιᾶς τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν. καὶ ἐὰν ἐπὶ δ΄ εὐθείας θέσει δεδομένας καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ δύο κατηγμένων, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο κατηγμένων, ὁμοίως τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης κώνου τομῆς. Ἐὰν μὲν γὰρ ἐπὶ δύο μόνας, ἐπίπεδος ὁ τόπος δέδεικται. Ἐὰν δὲ ἐπὶ πλείονας τεσσάρων, ἅψεται τὸ σημεῖον τόπων οὐκέτι

γνωρίμων,

γνωρίμων, ἀλλὰ γραμμῶν μόνον λεγομένων, ποδαπῶν δὲ, ἢ τινὰ ἐχουσῶν ἴδια οὐκέτι *· ὧν μίαν, οὐδὲ τὴν πρώτην καὶ συμφανεστάτην εἶναι δοκοῦσαν, συντεθείκασιν, ἀναδείξαντες χρησίμην οὖσαν. αἱ δὲ προτάσεις αὐτῶν εἰσίν.

Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας εὐθείας πέντε καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, καὶ λόγος ᾖ δεδομένος τοῦ ὑπὸ τριῶν κατηγμένων περιεχομένου στερεοῦ παραλληλεπιπέδου ὀρθογωνίου, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο κατηγμένων καὶ δοθείσης τινὸς περιεχόμενον παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον, ἅψεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης γραμμῆς. Ἐὰν δὲ ἐπὶ ἕξ, καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ τῶν τριῶν περιεχομένου καὶ εἰρημένου στερεοῦ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν τριῶν, πάλιν τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης. Ἐὰν δὲ ἐπὶ πλείονας τῶν ἕξ, οὐκέτι μὲν ἔχουσι λέγειν, λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ τῶν δ' περιεχομένου τινὸς πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν, ἐπεὶ οὐκ ἔστι τι περιεχόμενον ὑπὸ πλειόνων ἢ τριῶν διαστάσεων. συγκεχωρήκασι δὲ ἑαυτοῖς οἱ βραχὺ πρὸ ἡμῶν ἑρμηνεύειν τὰ τοιαῦτα, μηδὲ ἓν μηδαμῶς διαληπτὸν σημαίνοντες· τὸ ὑπὸ τῶν δ' περιεχόμενον λέγοντες, ἐπὶ τὸ ἀπὸ τῆσδε τετράγωνον, ἢ ἐπὶ τὸ ὑπὸ τῶν δ'. παρῆν δὲ διὰ τῶν συνημμένων λόγων ταῦτα καὶ λέγειν καὶ δεικνύναι καθόλου, καὶ ἐπὶ τῶν προειρημένων προτάσεων καὶ ἐπὶ τούτων τὸν τρόπον τοῦτον. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, καὶ δεδομένος ᾖ ὁ λόγος ὁ συνημμένος ἐξ οὗ ἔχει μία κατηγμένη πρὸς μίαν κατηγμένην, καὶ ἑτέρα πρὸς ἑτέραν, καὶ ἄλλη πρὸς ἄλλην, καὶ ἡ λοιπὴ πρὸς δοθεῖσαν, ἐὰν ὦσιν ζ'· ἐὰν δὲ η', καὶ ἡ λοιπὴ πρὸς λοιπήν· τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης γραμμῆς. καὶ ὁμοίως ὅσαι ἂν ὦσιν περισσαὶ ἢ ἄρτιοι τὸ πλῆθος· τούτων ὡς ἔφην ἑπομένων τῷ ἐπὶ δ' τόπῳ· οὐδὲ ἓν οὖν τεθείκασιν ὥστε τὴν γραμμὴν εἰδέναι. τοῦθ' οἱ βλέποντες ἥκιστα ἐπαίρονται, καθάπερ οἱ πάλαι καὶ τῶν τὰ κρείττονα γραψάντων ἕκαστος. ἐγὼ δὲ καὶ πρὸς ἀρχαῖς ἐπὶ τῶν μαθημάτων καὶ τῆς ὑπὸ φύσεως προκειμένης ζητημάτων ὕλης κινουμένους ὁρῶν ἅπαντας, αἰδούμενος ἐγὼ καὶ δείξας γε πολλῷ κρείσσονα καὶ πολλὴν προφερόμενα ὠφέλειαν *. ἵνα δὲ μὴ κεναῖς χερσὶ τοῦτο φθεγξάμενος ὧδε χωρισθῶ τοῦ λόγου, ταῦτα δώσω τοῖς ἀναγνοῦσιν.

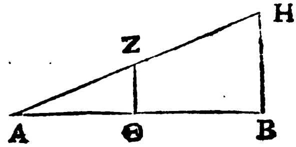
Ὁ μὲν τῶν τελείων ἀμφοιστικῶν λόγος συνῆπται, ἔκ τε τῶν ἀμφοισμάτων, καὶ τῶν ἐπὶ τοὺς ἄξονας ὁμοίως κατηγμένων εὐθειῶν ἀπὸ τῶν ἐν αὐτοῖς κεντροβαρικῶν σημείων. Ὁ δὲ τῶν ἀτελῶν ἔκ τε τῶν ἀμφοισμάτων καὶ τῶν περιφερειῶν, ὅσας ἐποίησε τὰ ἐν αὐτοῖς κεντροβαρικὰ σημεῖα. Ὁ δὲ τούτων περιφερειῶν, δῆλον ὡς ἔκ τε τῶν κατηγμένων, καὶ ὧν περιέχουσιν αἱ τούτων ἄκραι, εἰ καὶ εἶεν πρὸς τοῖς ἄξοσιν ἀμφοιστικῶν, γωνιῶν.

Περιέχουσι δὲ αὗται αἱ προτάσεις, σχεδὸν οὖσαι μία, πλεῖστα ὅσα καὶ παντοῖα θεωρήματα γραμμῶν τε καὶ ἐπιφανειῶν καὶ στερεῶν, πάνθ' ἅμα καὶ μιᾷ δείξει· καὶ τὰ μὴ προδεδειγμένα καὶ τὰ ἤδη ὡς καὶ τὰ ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶν στοιχείων. ἔχει δὲ τὰ η΄ βιβλία τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν θεωρήματα, ἤτοι διαγράμματα υπζ΄· λήμματα δὲ, ἤτοι λαμβανόμενα, ἔστιν εἰς αὐτὰ ο΄.

Πάππου Λήμματα εἰς τὰ λόγου καὶ χωρίου ἀποτομῆς.

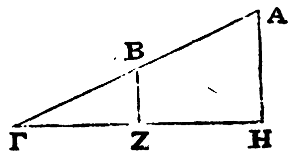
α'. ΤΗΝ δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς Γ πρὸς Δ, καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὴν ΑΒ εἰς τὸν τῆς Γ πρὸς τὴν Δ λόγον. ἔκλινα πρὸς τὴν ΑΒ εὐθεῖαν γωνίᾳ τυχούσῃ εὐθεῖαν τὴν ΑΗ· καὶ τῇ μὲν Γ ἴσην ἀφεῖλον τὴν ΑΖ, τῇ δὲ Δ τὴν ΖΗ· καὶ ἐπιζεύξας τὴν ΒΗ ταύτῃ παράλληλον ἤγαγον τὴν ΖΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς ΖΗ, ἴση δέ ἐστιν ἡ μὲν ΑΖ τῇ Γ, ἡ δὲ ΖΗ τῇ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. διῄρηται ἄρα κατὰ τὸ Θ σημεῖον.



β'. Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, Δ, εὑρεῖν ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἄλλην τινὰ πρὸς τὴν Δ.

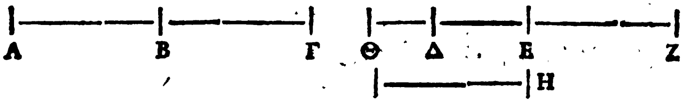
Πάλιν ἔκλινά τινα εὐθεῖαν τὴν ΓΗ ἐν τυχούσῃ γωνίᾳ, καὶ τῇ Δ ἴσην ἀπεθέμην τὴν ΓΖ· ἐπέζευξα τὴν ΒΖ, καὶ ταύτῃ παράλληλον ἤγαγον τὴν ΑΗ. γίνεται οὖν πάλιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΓΖ, τουτέστι πρὸς τὴν Δ. εὕρηται ἄρα ἡ ΖΗ. ὁμοίως κἂν ἡ τρίτη δοθῇ, τὴν τετάρτην εὑρήσομεν.



γ'. Ἐχέτω τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι καὶ κατὰ σύνθεσιν, τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτως ἄλλό τι τὸ Η πρὸς

πρὸς τὸ ΕΖ· καὶ τὸ Η ἄρα πρὸς τὸ ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· μεῖζον ἄρα ἐστὶν τὸ Η τοῦ ΔΕ. κείσθω αὐτῷ ἴσον τὸ ΘΕ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτω τὸ ΘΕ πρὸς ΕΖ, τὸ δὲ ΘΖ πρὸς τὸ ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΕΖ· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ.



δʹ. Πάλιν δὴ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ· ὅτι καὶ τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΕΖ.

Πάλιν γὰρ ἐπεὶ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ, ἐὰν ποιῶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ΕΖ, ἔσται ἔλασσον τοῦ ΔΕ. ἔστω δὲ τὸ ΕΘ· γίνεται ἄρα καὶ ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ οὕτω τὸ ΘΖ πρὸς τὸ ΖΕ. τὸ δὲ ΘΖ πρὸς τὸ ΖΕ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ· τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ.

εʹ. Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι καὶ ἐναλλὰξ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ.

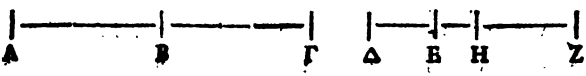
Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ΕΖ· φανερὸν δὴ ὅτι μεῖζον ἔσται τοῦ ΔΕ. ἔστω τὸ ΗΕ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΗΕ οὕτω τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΗΕ, τουτέστι ἤπερ τὸ ΒΓ πρὸς ΕΖ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ. τὰ δ' αὐτὰ κἂν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ὅτι καὶ ἐναλλάξ. ἔσται γὰρ καὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ

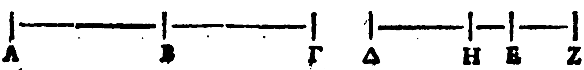
οὕτως

οὕτως ἄλλό τι πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι πρὸς ἐλάσσονα τοῦ ΔΕ. καὶ λοιπὰ τὰ αὐτά.

ϛʹ. Τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ· ὅτι ἀναστρέψαντι τὸ ΓΑ πρὸς ΑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΕ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ οὕτω τὸ ΔΖ πρὸς ἄλλό τι· ἔσται δὴ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΖΕ. ἔστω πρὸς τὸ ΖΗ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΑΒ οὕτω τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ. τὸ δὲ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΕ. Ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ· ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΔΕ. ἔσται γὰρ ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ οὕτω τὸ ΔΖ πρὸς μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ ΖΕ. καὶ τὰ λοιπὰ φανερά.



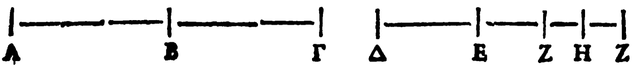


ζʹ. Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι ἀνάπαλιν τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΔ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτως τὸ ΔΕ πρός τι· ἔσται δὴ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΕΖ, ὥστε πρὸς τὸ ΕΗ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶ ὡς τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ οὕτω τὸ ΗΕ πρὸς τὸ ΕΔ. τὸ δὲ ΗΕ πρὸς ΕΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΕ πρὸς ΕΔ. Ὁμοίως δὲ κἂν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ, ἀνάπαλιν τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ μεί-

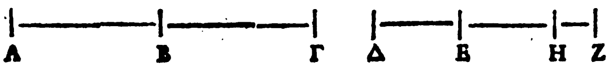
ζονα

ζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΕ πρὸς ΕΔ. ἔσται γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτω τὸ ΔΕ πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖ. τὰ δὲ λοιπὰ φανερά. καὶ φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι ἐὰν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ, καὶ τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ. ἐὰν δὲ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ, καὶ τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ.



η'. Ἐχέτω δὴ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι καὶ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΔΖ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ οὕτω τὸ ΒΓ πρός τι. ἔσται δὲ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΕΖ. ἔστω πρὸς τὸ ΗΕ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς ὅλην τὴν ΔΗ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ· ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ. καὶ φανερὸν ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ πρὸς ὅλην τὴν ΔΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ· κἂν ἐλάσσων τοῦ μέρους, μείζων ὅλης.

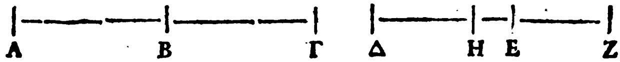


θ'. Ἐχέτω δὴ πάλιν ὅλη ἡ ΑΓ πρὸς ὅλην τὴν ΔΖ μείζονα λόγον ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ· ὅτι καὶ λοιπὴ ἡ ΒΓ πρὸς λοιπὴν τὴν ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΗ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς λοιπὴν τὴν ΗΖ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ. ἡ δὲ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΖΗ· καὶ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ μείζονα λόγον

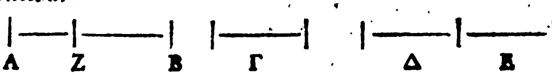
ἔχει

ἔχει ἤπερ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ. ἐὰν ᾖ ὅλης πρὸς τὴν ὅλην ἐλάσσων, τῆς λοιπῆς ἐλάσσων.



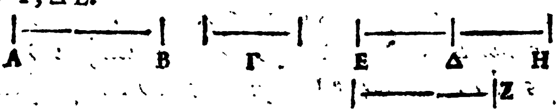
ι'. Ἔστω μεῖζον μὲν τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ Δ τῷ Ε· ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ Ε.

Κείσθω γὰρ τῷ Γ ἴσον τὸ ΒΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΖ πρὸς τὸ Γ οὕτω τὸ Δ πρὸς τὸ Ε. ἀλλὰ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΖ πρὸς τὸ Γ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ Ε. καὶ φανερὸν ὅτι ἂν ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ Γ, τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, διὰ τὸ ἀνάπαλιν.



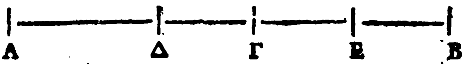
ια'. Ἀλλὰ ἔστω μεῖζον μὲν τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἔλασσον δὲ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ.

Φανερὸν μὲν οὖν καὶ ἄνευ ἀποδείξεως. εἰ γὰρ ὄντος ἴσου τοῦ ΔΕ τῷ Ζ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ἐλάσσονος ὄντος πολλῷ μείζονα λόγον ἕξει. δι' ἀποδείξεως δὲ οὕτως. Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἐὰν ποιῶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ Ζ, ἔσται μεῖζον τοῦ Ζ, ὥστε καὶ τοῦ ΔΕ. ἔστω οὖν αὐτῷ ἴσον τὸ ΗΕ· τὸ ΗΕ ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ. ἀλλ' ὡς τὸ ΗΕ πρὸς τὸ Ζ, οὕτω τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, καὶ φανερὸν ὅτι ὅπου τὸ ἔλασσον ἀεὶ ἐλάσσονα. καὶ ὅτι μεῖζον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ τοῦ ὑπὸ τῶν Γ, ΔΕ· ἴσον γὰρ αὐτῷ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν Γ, ΕΗ, ὅ ἐστι μεῖζον τοῦ ὑπὸ τῶν Γ, ΔΕ.



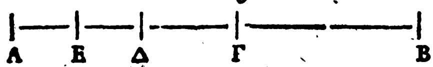
ιβ'. Εὐιβ'. Εὐθεῖα ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ· ὅτι πάντα μὲν τὰ μεταξὺ τῶν ΑΓ σημείων εἰς ἐλάσσονας λόγους διαιρεῖ τὴν ΑΒ τοῦ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, πάντα δὲ τὰ μεταξὺ τῶν ΓΒ εἰς μείζονας.

Εἰλήφθω γὰρ σημεῖα ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Γ τὰ Δ, Ε. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων μὲν ἡ ΔΑ τῆς ΑΓ, μείζων δὲ ἡ ΔΒ τῆς ΒΓ, ἡ ΔΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν ΑΓ ἤπερ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΓΒ· καὶ ἐναλλὰξ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΒΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν Α, Γ σημείων. Πάλιν, ἐπεὶ μείζων μέν ἐστιν ἡ ΕΑ τῆς ΑΓ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΕΒ τῆς ΒΓ· ἡ ΕΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἐναλλὰξ ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν μεταξὺ τῶν Γ, Β λαμβανομένων σημείων.



ιγ'. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τμηθῇ δίχα κατὰ τὸ Γ, πάντων τῶν λαμβανομένων σημείων μέγιστον ἀποτέμνει τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ τὸ Γ σημεῖον.

Ἐὰν γὰρ ληφθῇ σημεῖον τὸ Δ, γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ. τὰ δὲ αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα.



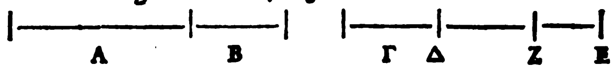
ιδ'. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἀεὶ τὸ ἔγγιον τοῦ Γ τοῦ ἀπωτέρου μεῖζον χωρίον ποιεῖ. Εἰλήφθω γὰρ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ Ε μεταξὺ τῶν ΑΔ. Δεικτέον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ, ὧν τὸ ἀπὸ ΔΓ ἐλασ-

σον

σὺν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ.

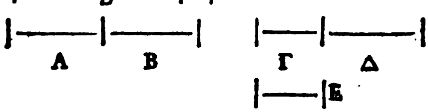
ιε'. Εἰ γὰρ εἴη τὸ Α μετὰ τοῦ Β ἴσον τῷ Γ μετὰ τοῦ ΔΕ, καὶ ἔλασσον τὸ Β τοῦ ΔΕ· μεῖζον ἂν γένοιτο τὸ Α τοῦ Γ.

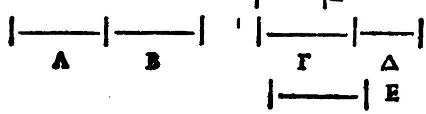
Κείσθω γὰρ τῷ Β ἴσον τὸ ΔΖ· τὸ Α ἄρα μετὰ τοῦ ΔΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΕ μετὰ τοῦ Γ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ Α ἴσον ἐστὶ τοῖς Γ καὶ ΖΕ, ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ.



ιϛ'. Η Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· καὶ ἡ Γ ἄρα πρὸς τὴν Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν Δ· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ Ε τῆς Δ, καὶ κοινὸν ὕψος ἡ Α. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΑ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓ· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ. Ὁμοίως καὶ ἐὰν ἐλάσσων ὁ λόγος γένηται, ἔλασσον καὶ τὸ χωρίον τοῦ χωρίου. Ἀλλὰ δὴ ἔστω πάλιν μεῖζον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ὅτι ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. Κείσθω γὰρ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ· γίνεται ἄρα μεῖζον μὲν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ὥστε καὶ ἡ Ε τῆς Γ μείζων. ὡς δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Δ. ἡ δὲ Ε πρὸς τὴν Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β. ὁμοίως καὶ ἀναστρέψαντι.

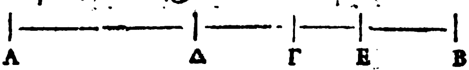




ιζ'. Δύο

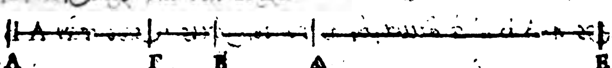
ιζ. Δύο εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΒΔ, καὶ τῇ ΑΔ ἴση κείσθω ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΓΕ ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ ΑΒΓ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΕ ὑπερέχει τῇ ΓΕ, ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΕ· συναμφότερος δὲ ἡ ΑΒΕ δύο εἰσὶν αἱ ΒΔ, δύο δὲ αἱ ΒΔ δύνανται τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.



ιη. Ἔστω δὲ πάλιν τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΓΕ σύγκειται ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΓ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΕ ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ΓΔ, ΔΕ· ἴση δέ ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΔΕ· ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΓ, τουτέστιν ἐκ συναμφοτέρου τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ δύο τῶν ΒΔ· δύο δὲ αἱ ΒΔ δύνανται τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΓ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.



ιθ. Πάλιν τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον ἡ ΒΔ, καὶ τῇ ΓΔ ἴση κείσθω ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΑΕ ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΒΓ.

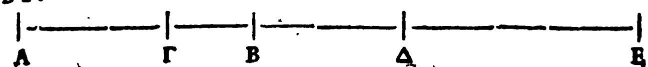
Ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ ΑΒΓ συναμφοτέρου τῆς ΕΒΓ ὑπερέχει τῇ ΑΕ, συναμφότερος δὲ ἡ ΕΒΓ, δύο εἰσὶν αἱ ΒΔ, τουτέστιν ἡ δυναμένη τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΑΕ ἄρα ἐστὶν ἡ

ὑπεροχὴ

ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

κʹ. Πάλιν τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΒΔ, καὶ τῇ ΓΔ ἴση κείσθω ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΑΕ ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ, καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΕ σύγκειται ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΕ, ἴση δέ ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΔΓ, ἡ ΑΕ ἄρα σύγκειται ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΓ, τουτέστιν ἐκ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ καὶ δύο τῶν ΒΔ. δύο δὲ αἱ ΒΔ δύνανται τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΑΕ ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῶν ΑΒΓ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.



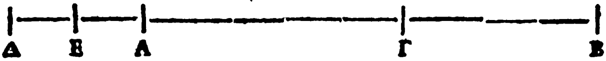
Ταύτῃ λαμβάνεται εἰς τὴν τοῦ λόγου Ἀποτομὴν, ταύτῃ καὶ εἰς τὴν τοῦ χωρίου Ἀποτομὴν λαμβάνεται, διαφερόντως μόνον.

Πρόβλημα εἰς τὸ δεύτερον λόγου Ἀποτομῆς, χρήσιμον εἰς τὸ τοῦ ιγʹ. τόπου ἀνακεφαλαίωσιν.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, λαβεῖν ἐπιβάλλοντα τὴν ΑΔ δοθὲν τὸ Δ, ποιοῦν τὸν τῆς ΒΔ πρὸς ΔΑ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

Ἔστω γεγονὸς, καὶ ἡ ὑπεροχὴ ἔστω ἡ ΑΕ (ἐν γὰρ τοῖς ἐπάνω εὕρομεν αὐτήν) ἔσται οὖν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΕ. καὶ ἐναλλὰξ καὶ διελόντι καὶ χωρίον χωρίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΑ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΑ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ· καὶ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΓΕ παράκειται ὑπερβάλλον τετραγώνῳ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Δ. Συντεθήσεται δὲ οὕτως· ἔστω ἡ ὑπεροχὴ ἡ ΕΑ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΑ ἴσον πάλιν τῇ ΓΕ παραβεβλήσθω ὑπερβάλλον τετρα-

τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ ΓΔΕ. λέγω ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖόν ἐστι τὸ Δ. Ἐπεὶ γὰρ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΑ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ, ἀνάλογον καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΑΕ, ἥτις ἐστὶν ἡ ὑπεροχή. Τὰ δ' αὐτὰ καὶ ζητοῦμεν λαβεῖν σημεῖον ποιοῦν ὡς τὴν ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ, καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ. ὅ. ἔ. δ.



Τὸ πρῶτον λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ἑπτὰ, πτώσεις κδ', διορισμοὺς δὲ πέντε· ὧν τρεῖς μὲν μέγιστοι, δύο δ' ἐλάχιστοι. καί ἐστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ ε' τόπου, ἐλάχιστος δὲ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ ς' τόπου, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τοῦ ζ'· μέγιστοι δὲ οἱ κατὰ τὰς τετάρτας τοῦ ς' καὶ τοῦ ζ'. Τὸ δεύτερον λόγου ἀποτομῆς [ἔχει τόπους ιδ', πτώσεις δὲ ξγ', διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου, ἀπάγεται γὰρ ὅλον εἰς τὸ πρῶτον. Τὸ πρῶτον χωρίου ἀποτομῆς] ἔχει τόπους ζ', πτώσεις κδ', διορισμοὺς δὲ ἑπτά· ὧν τέσσαρες μέγιστοι, τρεῖς δ' ἐλάχιστοι· καὶ ἔστι μέγιστος μὲν ὁ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ πρώτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην [τοῦ δευτέρου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν δευτέραν] τοῦ τετάρτου τόπου καὶ ὁ [κατὰ τὴν τρίτην τοῦ ἕκτου· ἐλάχιστοι δὲ, ὁ] κατὰ τὴν τρίτην τοῦ τρίτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν τετάρτην τοῦ τετάρτου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ ἕκτου. Δεύτερον χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιγ', πτώσεις ξ', διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ εἰς αὐτό.

Ἐπιζητήσειεν ἄν τις διὰ τί ποτε μὲν τὸ λόγου ἀποτομῆς δεύτερον ἔχει τόπους ιδ', τὸ δὲ χωρίου ιγ' ἔχει. Ὁ δὲ διὰ τόδε, ὅτι ὁ ἕβδομος ἐν τῷ τοῦ χωρίου ἀποτομῆς τόπος παραλείπεται ὡς φανερός. ἐὰν γὰρ αἱ παράλληλοι ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ πέρατα πίπτωσιν, οἷα ἐὰν διαχθῇ δοθὲν ἀποτέμνει χωρίον· ἴσον γὰρ γίνεται τῷ ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν περάτων καὶ τῆς ἀμφοτέρων τῶν ἐξ ἀρχῆς τῇ θέσει δοθεισῶν εὐθειῶν συμβολῆς. ἐν δὲ τῷ λόγου ἀποτομῆς οὐκέτι ὁμοίως· διὰ τοῦτο οὖν προσέχει τόπον ἕνα εἰς τὸ ἕβδομον τοῦ δευτέρου, καὶ τὰ λοιπὰ ὄντα τὰ ὄντα.

Quæ uncis inclusimus desunt & in MSS. nostris & quibus usus est Commandinus, *sed ex descriptione præmissâ restituimus.*

Pappi Alexandrini Præfatio ad ſeptimum Collectionis Mathematicæ, quo continentur Lemmata Loci *de Reſolutione*.

LOCUS de Reſolutione inſcriptus, *Hermodore* fili, ut paucis dicam, propria quædam eſt materia, in eorum uſum deſignata, qui, perceptis communibus Elementis, in Geometriâ facultatem ſibi comparare deſiderant inveſtigandi ſolutiones propoſitorum problematum; & in hunc finem ſolummodo utilis. Traditur autem à tribus viris, *Euclide* nempe Elementorum ſcriptore, *Apollonio Pergæo*, & *Ariſtæo* ſeniore. Procedit vero per modum Reſolutionis & Compoſitionis. Reſolutio autem eſt methodus, quâ à quæſito quaſi jam conceſſo, per ea quæ deinde conſequuntur, ad concluſionem aliquam, cujus ope Compoſitio fiat, perducamur. In reſolutione enim, quod quæritur ut jam factum ſupponentes, ex quo antecedente hoc conſequatur expendimus; iterumque quodnam fuerit hujus antecedens; atque ita deinceps, uſque dum in hunc modum regredientes, in aliquid jam cognitum loco-que principii habitum incidamus. Atque hic proceſſus Analyſis vocatur, quaſi dicas, inverſa ſolutio. E contrario autem in Compoſitione, cognitum illud, in Reſolutione ultimo loco acquiſitum, ut jam factum præmittentes; & quæ ibi conſequentia erant, hic ut antecedentia naturali ordine diſponentes, atque inter ſe conferentes, tandem ad Conſtructionem quæſiti pervenimus. Hoc autem vocamus Syntheſin. Duplex autem eſt Analyſeos genus, vel enim eſt veri indagatrix, diciturque Theoretica; vel propoſiti inveſtigatrix, ac problematica vocatur. In Theoretico autem genere, quod quæritur, revera ita ſe habere ſupponentes, ac deinde per ea quæ conſequuntur, quaſi vera ſint (ut ſunt ex Hypotheſi) argumentantes; ad evidentem aliquam concluſionem procedimus. Jam ſi concluſio illa vera ſit, vera quoque eſt propoſitio de qua quæritur; ac demonſtratio reciproce reſpondet Analyſi. Si vero in falſam concluſionem incidamus, falſum quoque erit de quo quæritur. In Proble-

matico

matico vero genere, quod proponitur ut jam cognitum ſiſtentes, per ea quæ exinde conſequuntur, tanquam vera, perducimur ad concluſionem aliquam: quod ſi concluſio illa poſſibilis ſit ac ποριστὸν, quod Mathematici *Datum* appellant; poſſibile quoque erit quod proponitur: & hîc quoque demonſtratio reciproce reſpondebit Analyſi. Si vero incidamus in concluſionem impoſſibilem, erit etiam problema impoſſibile. Diorismus autem ſive determinatio eſt qua diſcernitur quibus conditionibus quotque modis problema effici poſſit. Atque hæc de Reſolutione & Compoſitione dicta ſunto. Prædictorum autem *de Reſolutione* librorum hic eſt ordo. Datorum *Euclidis* Liber unus. *Apollonii* de Sectione Rationis Libri II. Ejuſdem de Sectione Spatii II. De Sectione determinatâ II. De Tactionibus II. *Euclidis* Poriſmatum III. *Apollonii* de Inclinationibus II. Ejuſdem de Locis planis II. Conicorum VIII. *Ariſtæi* de Locis ſolidis V. *Euclidis* de Locis ad Superficiem II. *Eratoſthenis* de mediis proportionalibus II. Fiunt libri numero XXXIII. quorum contenta, uſque ad *Apollonii Conica*, conſiderationi tuæ ſubjicere volui; una cum numero Locorum & Diorismῶν, Caſuumque in unoquoque Libro; ac præterea adjeci *Lemmata* requiſita. Neque credo à me omiſſum eſſe quidquam notatu dignum in deſcriptione horum Librorum.

De Datis Euclidis I.

Primus Liber, nempe *Data Euclidis*, continet omnino Theoremata nonaginta; quorum priora viginti tria ſunt de magnitudinibus in genere, vigeſimus autem quartus, de rectis proportionalibus non datis poſitione. Quæ deinceps quatuordecim, de rectis poſitione datis. Quæ ſequuntur decem, de Triangulis ſpecie ſed non poſitione datis. Proxima ſeptem ſunt de quibuſcunque ſpatiis rectilineis, ſpecie tantum, ſed non poſitione datis. Sex quæ deinceps ſunt, de parallelogrammis & de applicationibus ſpatiorum ſpecie datorum agunt. E quinque autem ſequentibus, primum jam deſcriptum eſt, (*nempe Dat.* 49um.) reliqua vero quatuor ſunt de Triangulorum Areis, quod differentiæ poteſtatum laterum Triangulorum, datam habeant rationem ad eorundem Areas. His ſubjuncta ſeptem uſque ad LXXIIIum ſunt

de

de duobus parallelogrammis; quod juxta angulorum Hypotheses habeant rationem datam inter se; quædam vero eorum Consectaria habent similia in duobus Triangulis. E sex autem subsequentibus propositionibus usque ad 79^{am}, duæ quidem sunt de Triangulis, quatuor vero reliquæ sunt de pluribus rectis proportionalibus. Tres proximæ sunt de duabus rectis datum spatium comprehendentibus [*quarum summa vel differentia datur, vel etiam differentia potestatum.*] Cæteræ vero omnes octo usque ad nonagesimam, in circulis demonstrantur, vel magnitudine tantum datis, vel etiam positione; quod rectarum per datum punctum ductarum quæ fiunt è segmentis *rectangula* data sint.

De Sectione Rationis II.

Duo quidem sunt Libri de *Sectione Rationis*, sed unam tantum faciunt propositionem subdivisam: quare unam illam sic describo. "Per datum punctum rectam lineam ducere, "quæ auferat à duabus rectis positione datis segmenta, pun-"ctis in iisdem datis adjacentia, datam rationem inter se "habentia." Diversas autem multasque figuras habere contigit, ob subdivisionem factam; & ob diversas rectarum datarum inter se positiones, Casusque puncti dati differentes; propterque Analyses & Compositiones horum Casuum, ut & Diorismῶn. Habet autem Liber primus de Sectione Rationis Loca septem, Casus viginti quatuor, Diorismos vero quinque: quorum tres sunt maximi, & duo minimi. Maximus quidem est ad Casum tertium Loci V. Minimi vero sunt ad Casus secundos Locorum VI & VII^{mi}. Reliqui autem maximi sunt ad Casus quartos eorundem Locorum VI & VII^{mi}. Liber posterior de Sectione Rationis Loca habet quatuordecim. Casus vero LXIII; Determinationes autem ex primo, ad quem quasi totus refertur. Lemmata habent hi duo libri viginti. Itidemque figuras (sive schemata) habent CLXXXI. vel etiam plures juxta *Periclem*.

De Sectione Spatii II.

Duo sunt libri de *Sectione Spatii*, sed in his non continetur nisi unum problema subdivisum. Propositio autem hæc

una

una quoad cætera priori similis est, ac solo hoc differt; quod in illâ oporteat segmenta duo abscissa rationem habere datam, in hâc vero datum continere rectangulum. Exprimetur vero ad hunc modum: "Per datum punctum rectam lineam "ducere, quæ auferat à rectis duabus positione datis segmenta, datis in ipsis punctis adjacentia, quæ rectangulum "æquale dato comprehendant." Hæc etiam propositio ob easdem causas plurimas quoque habet figuras. Liber autem prior de Sectione Spatii septem habet Loca, Casus viginti quatuor, ac Diorismos septem; quorum quatuor maximi sunt, tres vero minimi. Maximus autem est ad Casum secundum Loci primi; ut & ad primum secundi. Similiter ad secundum Casum quarti & tertium sexti. Minimi vero sunt ad Casum tertium Loci tertii, ad quartum quarti, ut & ad primum sexti Loci. Secundus liber de Sectione Spatii Loca habet XIII, & Casus LX; Determinationes vero ex primo, ad quem totus refertur. Constat autem liber primus Theorematis quadraginta octo; secundus vero LXXVI.

De Sectione Determinatâ II.

His subjiciuntur libri duo de *Sectione Determinatâ*, quas etiam ad modum præcedentium unam propositionem dicere liceat, sed disjunctam: quæ hujusmodi est. "Datam rectam "infinitam in uno puncto secare, ita, ut è rectis interceptis "inter illud & puncta in illâ data, vel quadratum ex unâ, "vel rectangulum sub duabus interceptis, datam habeat ra-"tionem, vel ad contentum sub *aliâ* unâ interceptâ & datâ "quâdam; vel etiam ad contentum sub duabus *aliis* inter-"ceptis: idque ad quam partem velis punctorum datorum." Hujus autem, quasi bis disjunctæ, & intricatos Diorismos habentis, per plura necessario facta est demonstratio. Hanc autem dedit *Apollonius* communi methodo tentamen faciens, ac solis rectis lineis usus, ad exemplum secundi libri Elementorum primorum *Euclidis*; ac rursus idem demonstravit ingeniose quidem, & magis ad institutionem accommodate, per semicirculos. Habet autem primus liber Problemata sex, Epitagmata, *sive Dispositiones punctorum*, sedecim; Diorismos quinque: quorum quatuor quidem Maximi sunt, Minimus vero unus. Sunt autem maximi, ad secundum Epitagma secundi

cundi problematis; item ad tertium quarti problematis; ad tertium quinti & ad tertium sexti. Minimus vero est ad tertium Epitagma tertii problematis. Secundus liber de Sectione determinata tria habet Problemata, Dispositiones novem, Determinationes tres; è quibus Minima sunt ad tertium primi, ut & ad tertium secundi; Maximum autem est ad tertium tertii problematis. Lemmata habet liber primus XXVII, secundus vero XXIV. Insunt autem in utroque libro de Sectione determinatâ Theoremata octoginta tria.

De Tactionibus II.

His ordine subnexi sunt libri duo *de Tactionibus*, in quibus plures inesse propositiones videntur; sed & ex his unam etiam faciemus, ad hunc modum se habentem. "E punctis "rectis & circulis, quibuscunque tribus positione datis, circu-"lum ducere per singula data puncta, qui, si fieri possit, "contingat etiam datas lineas." Ex hac autem ob multitudinem in Hypothesibus datorum, tam similium quam dissimilium *generum*, fiunt necessario decem propositiones diversæ; quia ex tribus dissimilibus generibus fiunt diversæ triades inordinatæ numero decem. Data etenim esse possunt vel tria puncta; vel tres rectæ; vel duo puncta & recta; vel duæ rectæ & punctum; vel duo puncta & circulus; vel duo circuli & punctum; vel duo circuli & recta; vel punctum, recta & circulus; vel duæ rectæ & circulus; vel tres circuli. Horum duo quidem prima problemata ostenduntur in libro quarto primorum Elementorum. Nam per tria data puncta, quæ non sint in linea recta, circulum ducere, idem est ac circa datum triangulum circumscribere. Problema autem in tribus datis rectis non parallelis, sed inter se occurrentibus, idem est ac dato triangulo circulum inscribere. Casus vero duarum rectarum parallelarum cum tertiâ occurrente, quasi pars esset secundæ subdivisionis, cæteris permittitur. Deinde proxima sex problemata continentur in primo libro. Reliqua duo, nempe de duabus rectis datis & circulo, & de tribus datis circulis, sola habentur in secundo libro; ob multas diversasque positiones circulorum & rectarum inter se, quibus fit ut etiam plurium determinationum opus sit. Prædictis his Tactionibus congener est ordo problematum,

quæ

quæ ab editoribus omissa fuerant. Nonnulli autem priori horum librorum illa præfixerunt: Compendiosus enim & introductorius erat tractatus ille, & ad plenam de Tactionibus doctrinam absolvendam maxime idoneus. Hæc omnia rursus una propositio complectitur, quæ quidem quoad Hypothesim magis quam præcedentia contracta est, superaddita autem est conditio ad constructionem: estque hujusmodi. "E punctis, rectis, vel circulis, datis duobus quibuscunque, "describere circulum magnitudine datum, qui transeat per "punctum vel puncta data, ac, si fieri possit, contingat etiam "lineas datas." Continet autem hæc propositio sex problemata: ex tribus enim quibuscunque diversis generibus fiunt Duades inordinatæ diversæ numero sex. Vel enim datis duobus punctis, vel duabus rectis, vel duobus circulis, vel puncto & recta, vel puncto & circulo, vel recta & circulo, oportet circulum magnitudine datum describere, *qui data contingat*; hæc autem resolvenda sunt & componenda ut & determinanda juxta Casus. Liber primus *Tactionum* problemata habet septem; secundus vero quatuor. Lemmata autem ad utrumque librum sunt XXI; Theoremata LX.

De Porismatis Euclidis III.

Post *Tactiones* in tribus libris habentur *Porismata Euclidis*: collectio artificiosissima multarum rerum, quæ spectant ad Analysin difficiliorum & generalium problematum, quorum quidem ingentem copiam præbet Natura. Nihil vero additum est iis quæ *Euclides* primum scripserat, præterquam quod Scioli nonnulli, qui nos præcesserunt, sequentibus editionibus pauca de suis immiscuerint. Apud hos enim unumquodque Porisma definitum habet demonstrationum numerum: cum *Euclides* ipse non nisi unam, eamque maxime evidentem, in singulis posuerit. Habent autem subtilem & naturalem contemplationem, necessariamque & maxime universalem, atque iis qui singula perspicere atque investigare valent admodum jucundam. Specie autem hæc omnia neque Theoremata sunt, neque Problemata; sed mediæ quodammodo inter hæc naturæ, ita ut eorum propositiones censeri possint, vel inter Theoremata, vel Problemata: unde factum est ut nonnulli è Geometris hæc genere Theoremata esse contendant, alii vero Problemata esse; respicientes ad formam tantum propositionis. Differentias autem horum trium melius intellexisse Veteres manifestum est ex definitionibus. Dixerunt enim Theorema esse quo aliquid proponitur demonstrandum: Problema quo proponitur aliquid construendum: Porisma vero esse quo aliquid proponitur investigandum. A Neotericis autem immutata est hæc Porismatis definitio, qui, quum hæc omnia proprio Marte investigare haud potuerint, Elementa hæc adhibuerunt, contenti demonstrare tantum quid sit quod quæritur, absque illius investigatione: & quamvis à definitione & ab ipsâ doctrinâ redarguerentur, hoc tamen modo definierunt. Porisma est quod deest in Hypothesi Theorematis Localis. Hujus autem generis Porismatum Loca Geometrica sunt species; quæ quidem redundare videntur in libris de Resolutione: ac seorsim à Porismatis collecta sub propriis titulis traduntur, eo quod magis diffusa & copiosa sit hæc præ cæteris speciebus. E Locis enim quædam Plana sunt, quædam Solida, quædam Linearia, & præter hæc sunt Loca ad medietates, sive à mediis proportionalibus orta. Accidit hoc etiam Porismatis, propositiones habere contractas & in compendium redactas, omissis pluribus quæ pro more subintelligi solent: unde evenit Geometras non paucos ex parte tantum rem percipere, dum ea quæ inter ostensa magis necessaria sunt haud capiunt. Multa vero ex istis in unâ propositione comprehendere vix possibile est, quia ipse *Euclides* non multa in unaquaque specie posuerit: sed, ut ostenderet copiosiorem scientiam, pauca tantum, quasi ad jacienda in singulis principia, scripta reliquerit. Datum *** primi libri omnino ejusdem speciei est cum uberrima illa Locorum specie, ut decem ** sint numero. Quare hujus propositiones unâ solâ comprehendi posse animadvertentes, rem ad hunc modum describimus. "Duabus rectis "in eodem plano positione datis, * vel occurrentibus inter se "vel * parallelis, si dentur in unâ earum tria puncta: cæ"tera vero puncta præter unum tangant rectam positione "datam, etiam hoc quoque tanget rectam positione datam." Hoc autem de quatuor tantum rectis dicitur, quarum non plures quam duæ per idem punctum transeunt. In quolibet autem rectarum numero quomodo se res habeat vulgo ignoratur. "Si quotcunque rectæ occurrant inter se,

"nec

"nec plures quam duæ per idem punctum; data vero sint
"puncta omnia in earum unâ, unumquodque autem pun-
"ctum in altera tangat rectam positione datam." Vel gene-
ralius sic. "Si quotcunque rectæ occurrant inter se, neque
"sint plures quam duæ per idem punctum; omnia vero
"puncta in unâ earum data sint; reliquorum numerus erit
"Numerus Triangularis, cujus latus exhibet numerum pun-
"ctorum rectam positione datam tangentium. Quod si tres
"fuerint hujusmodi intersectiones, quæ non reperiantur ad
"angulos trianguli, (*hoc est, si fuerint in rectâ lineâ*:) una-
"quæque intersectio reliqua tanget positione datam." *Eu-
clidem* autem hoc nescivisse haud verisimile est, sed principia
sola respexisse: nam per omnia Porismata non nisi prima
principia, & semina tantum multarum & magnarum rerum
sparsisse videtur. Hæc autem juxta Hypothesium differen-
tias minime distinguenda sunt; sed secundum differentias ac-
cidentium & quæsitorum. Hypotheses quidem omnes inter
se differunt, cum specialissimæ sint: accidentium vero &
quæsitorum unumquodque, cum sit unum idemque, multis
diversisque Hypothesibus contingit.

Talia itaque inquirenda offeruntur in primi libri propo-
sitionibus: (in principio septimi habetur Diagramma huc
spectans) "Si à duobus punctis datis inflectantur duæ rectæ
"ad rectam positione datam, abscindat autem earum una à
"rectâ positione datâ segmentum dato in eâ puncto adja-
"cens, auferet etiam altera ab aliâ rectâ segmentum datam
"habens rationem." Deinde in subsequentibus: "Quod pun-
"ctum illud tangit rectam positione datam. Quod ratio ipsius
". . . . ad rectam . . . . data est. Quod ratio ipsius . . . . ad
"partem abscissam . . . . datur. Quod hæc recta . . . . posi-
"tione datur. Quod hæc ad datum punctum vergit. Quod
"data est ratio ipsius . . . . ad interceptam inter punctum . .
"& datum punctum . . Quod data est ratio rectæ . . . . ad
"aliquam à puncto . . ductam. Quod datur ratio rectan-
"guli * * ad rectangulum sub datâ & ipsâ . . . . Quod hujus
"rectanguli unum latus datum est, alterum vero rationem
"habet ad rectam abscissam. Quod rectangulum hoc vel so-
"lum, vel una cum quodam dato spatio est * * illud vero
"rationem datam habet ad partem abscissam. Quod recta
". . . . una cum aliâ ad quam . . . . est in ratione datâ, rati-

"onem habet datam ad interceptam inter punctum .. & "datum punctum.. Quod contentum sub quâdam datâ & "rectâ .... æquale est contento sub aliâ datâ & interceptâ "inter punctum .. & datum .. Quod datur ratio rectæ "...., atque etiam ipsius ...., ad interceptam inter pun- "ctum .. & datum. Quod recta .. .. aufert à positione "datis segmenta rectangulum datum comprehendentia."

In secundo libro Hypotheses quidem diversæ sunt. Inquirenda vero ut plurimum eadem ac in primo: prætereaque hæc. "Quod rectangulum illud .... in .... rationem ha- "bet ad partem abscissam, vel per se, vel adjuncto quodam "dato rectangulo. Quod datur ratio rectanguli sub .... "& .... ad partem abscissam. Quod data est ratio rectanguli "sub utrâque .... & .... simul sumptâ, & utrâque ipsa- "rum .. .. & .... etiam simul sumptârum, ad partem ab- "scissam. Quod contentum sub ipsâ .... & utrâque ipsa- "rum .... & .... quæ ad rectam .... rationem datam ha- "bet; atque etiam contentum sub .... & illâ quæ ad ipsam "..... datam habet rationem, sunt in data ratione ad ἀποτο- "μήν. Quod datur ratio utriusque ...., ... simul sumptæ "ad interceptam inter punctum .. & datum punctum .. "Quod datum est rectangulum sub ipsis .... & ...."

In tertio libro plures sunt Hypotheses de semicirculis; paucæ autem de Circulo & segmentis. Inquirendorum vero maxima pars affinis est præcedentibus. Insuper vero hæc sese offerunt. "Quod datur ratio rectanguli .... in .... ad "rectangulum .... in ....Quod datur ratio quadrati ipsius "..... ad partem abscissam. Quod rectangulum sub ipsis ".... & .... *æquale est* rectangulo sub datâ .... & interceptâ "inter punctum .. & datum punctum .. Quod quadra- "tum ipsius .... *æquale est* contento sub datâ .... & in- "terceptâ inter Cathetum & punctum datum .... Quod "rectæ ...., ... una cum illâ ad quam .... datam habet "rationem, simul sumptæ, datam habent rationem ad par- "tem abscissam. Quod datur punctum aliquod, à quo si du- "cantur rectæ ad puncta quævis .. continebunt illæ tri- "angulum specie datum. Quod datur aliquod punctum à "quo si ducantur rectæ ad puncta quævis .., abscindent "illæ *è circulo* æquales circumferentias. Quod recta .. .. "vel erit in Parathesi, vel cum quâdam aliâ rectâ versus

"pun-

"punctum datum vergente datum continebit angulum." Habent autem tres Porismatum libri Lemmata XXXVIII, Theoremata vero CLXXI.

Hactenus Porismatum *descriptio, nec mihi intellecta nec lectori profutura. Neque aliter fieri potuit: tam ob defectum Schematis cujus fit mentio; unde rectæ satis multæ, de quibus hic agitur, absque notis Alphabeticis, ullove alio distinctionis charactere, inter se confunduntur: quàm ob omissa quædam ac transposita vel aliter vitiata in propositionis generalis expositione; unde quid sibi velit* Pappus *haud mihi datum est conjicere. His adde dictionis modum nimis contractum, ac in re difficili, qualis hæc est, minime usurpandum.*

De Locis Planis II.

Loca in genere hoc modo distribuuntur. Alia sunt ἐφεκτικὰ, sive adæquata; de quibus *Apollonius* ante propria Elementa hæc habet: "Puncti locus est punctum, Lineæ linea, Superficiei superficies, Solidique solidum." Alia vero διεξοδικὰ, quasi dicas progressiva; quo sensu Puncti locus est linea, Lineæ superficies, ac Superficiei solidum. Alia demum ἀναστροφικὰ sive circumgressiva, si ita loqui liceat, quo modo puncti locus est Superficies, ac lineæ Solidum. Ex his quæ Analysim Geometricam spectant, Loca datorum positione ἐφεκτικὰ sunt. Quæ vero plana, solida & linearia dicuntur, sunt loca διεξοδικὰ punctorum: Loca vero ad superficies sunt ἀναστροφικὰ punctorum & διεξοδικὰ linearum. Linearia vero post loca ad Superficiem demonstrationes suas habent. Jam loca plana, de quibus hîc agitur, in genere sunt lineæ quæcunque vel rectæ vel circulares: solida vero sunt Coni sectiones omnes, nempe Parabolæ, Ellipses, vel Hyperbolæ quævis. Linearia vero dicuntur lineæ omnes quæ nec rectæ nec circuli sunt, neque aliquæ è dictis Coni sectionibus. Quæ vero ab *Eratosthene* Loca ad Medietates dicuntur, ejusdem quidem generis sunt, sed ob proprietates Hypothesium *diversa sunt* ab illis * * * * * *. Veteres igitur, hunc Locorum planorum ordinem respicientes, Elementa tradiderunt; quem cum negligerent posteriores, alia *improprie* apposuerunt; quasi loca illa multitudine infinita non fuerint, si quis singula recensere velit, nullâ hujus ordinis habitâ ratione. Postpositis igitur jam descriptis, quæque ordine priora sunt

præ-

Præmittens, hac unâ Propositione rem complectar. "Si du-
"cantur rectæ duæ, vel ab eodem dato puncto, vel à duobus,
"quæ vel sint in lineâ rectâ, vel parallelæ, vel datum contineant
"angulum, vel datam habeant inter se rationem, vel datum
"comprehendant spatium; contingat autem terminus unius
"Locum planum positione datum: continget etiam alterius
"terminus Locum planum positione datum, interdum quidem
"ejusdem generis, interdum vero diversi; interdum similiter
"positum respectu rectæ lineæ, interdum contrario modo si-
"tum." Atque hæc quidem fiunt propter differentias sub-
jectorum. Consentanea vero his sunt tria illa quæ in princi-
pio *Charmandri* reperiuntur; nempe, "Si rectæ cujusvis
"magnitudine datæ terminus unus datus sit, alter terminus
"continget concavam circuli circumferentiam positione da-
"tam. Si à duobus datis punctis inflectantur rectæ datum
"angulum continentes, commune earum punctum tanget
"circumferentiam concavam positione datam. Si sit area
"Trianguli magnitudine data, ac basis quoque magnitudine
"ac positione detur; vertex ejus continget rectam positione
"datam." Alia vero sunt hujusmodi. "Si rectæ magnitu-
"dine datæ, & à quapiam positione datâ æquidistantis, unus
"terminus contingat Locum planum positione datum; alter
"quoque terminus Locum planum positione datum continget.
"Si à quodam puncto ad duas rectas positione datas, vel
"parallelas vel occurrentes inter se, ducantur in datis angu-
"lis rectæ, quæ datam habeant rationem inter se; vel qua-
"rum una, simul cum eâ ad quam altera datam habet ratio-
"nem, data fuerit; continget punctum rectam positione da-
"tam. Si fuerint quotcunque rectæ positione datæ, & ad
"ipsas à quodam puncto ducantur rectæ in datis angulis;
"sitque rectangulum sub datâ quâdam & unâ è ductis rectis,
"simul cum rectangulo sub datâ & aliâ ductâ, æquale rect-
"angulo sub datâ & tertiâ ductâ; & sic de cæteris: contin-
"get punctum rectam positione datam. Si à quodam puncto
"ad positione datas duas parallelas ducantur rectæ in datis
"angulis, abscindentes rectas, ad puncta in ipsis data adja-
"centes, quæ vel fuerint in datâ ratione [vel datum spatium
"comprehendant, vel ita ut summa vel differentia data-
"rum specierum ex ipsis ductis, æqualis fuerit dato spatio]
"punctum illud continget rectam positione datam."

Hæc

Hæc autem continentur in secundo libro. "Si à duobus
"datis punctis inflectantur rectæ, quarum quadrata dato spa-
"tio inter se differunt, punctum concursûs tanget rectam po-
"sitione datam. Si vero fuerint in datâ ratione, tanget
"idem vel lineam rectam vel circumferentiam circuli. Si
"sit recta positione data, & in ipsâ datum sit punctum, unde
"ducatur quædam recta terminata; ab hujus autem termino
"demittatur normalis ad rectam positione datam: sit vero
"quadratum ductæ æquale rectangulo sub datâ quâdam &
"interceptâ, vel inter punctum datum, vel etiam inter aliud
"quodvis punctum datum in positione datâ sumptum, &
"normalem: terminus hujus ductæ continget circuli circum-
"ferentiam positione datam. Si à duobus datis punctis infle-
"ctantur rectæ, & sit quadratum unius quadrato alterius dato
"majus quam in ratione; continget punctum circumferen-
"tiam positione datam. Si à quotcunque datis punctis in-
"flectantur rectæ ad unum punctum, sitque summa specie-
"rum ab omnibus factarum æqualis dato spatio, punctum il-
"lud continget circumferentiam positione datam. Si à duo-
"bus datis punctis inflectantur rectæ; à puncto autem con-
"cursûs ducatur recta positione datæ normalis, quæ auferat
"à rectâ positione datâ segmentum puncto dato adjacens, ac
"sit summa quadratorum è rectis inflexis æqualis rectan-
"gulo sub datâ & segmento intercepto: punctum illud con-
"cursus tanget circumferentiam positione datam. Si intra cir-
"culum positione datum detur punctum quodlibet, ac per idem
"ducatur recta quævis, in quâ sumatur punctum aliquod
"extra circulum: sit autem quadratum interceptæ inter pun-
"cta illa æquale rectangulo sub totâ & parte exteriore ad
"circulum terminatâ, vel soli, vel etiam adjuncto rectan-
"gulo sub segmentis duobus interioribus: punctum extra
"sumptum datam positione rectam continget. Quod si pun-
"ctum illud tangat rectam positione datam, circulus vero non
"descriptus sit; puncta illa duo, ad utramque partem puncti
"dati, contingent ejusdem circuli positione dati circumferen-
"tiam." Habent autem duo libri de Locis planis Theore-
mata sive diagrammata CXLVII. Lemmata vero VIII.

De

De Inclinationibus II.

Inclinare dicitur linea ad punctum, si producta ad ipsum pervenit: universim autem idem est, sive dicatur linea inclinare ad datum punctum, sive in eâ partem aliquam datam esse: sive per datum punctum transire. Inscripti autem sunt hi libri *Inclinationes* ab horum uno. Problema vero generale hoc est: " Duabus lineis positione datis, inter eas " inserere rectam magnitudine datam, quæ ad datum pun- " ctum pertingat." E particularibus autem Problematis, diversa subjecta habentibus, quædam plana sunt, quædam solida, quædam etiam linearia. Selecta vero è planis, quæ ad plura magis utilia visa sunt, hæc demonstrantur. " Datis " positione semicirculo & rectâ quæ basi normalis sit; vel " duobus semicirculis in eâdem rectâ bases habentibus; inserere " rectam magnitudine datam inter duas illas lineas, quæ ad " angulum semicirculi pertingat." Et " Rhombo dato & " producto uno ejus latere, adaptare, sub angulo ejus exte- " riore, rectam magnitudine datam ad angulum oppositum " vergentem." Et " In circulo positione dato inserere re- " ctam magnitudine datam, quæ ad datum punctum pertin- " gat." In primo autem libro demonstratur Problema de uno semicirculo & recta; quod quidem quatuor Casus habet: ut & illud de circulo in duos Casus divisum: atque etiam illud de rhombo, duos quoque Casus habens. In secundo vero habetur unicum Problema de duobus semicirculis, cujus ex Hypothesi decem sunt Casus; atque horum etiam plures sunt subdivisiones dioristicæ, propter datam magnitudinem rectæ inserendæ.

Hæc igitur in Loco *de Resolutione* plana reperiuntur, quæ scilicet prius ordine demonstrantur, absque Medietatibus *Eratosthenis*, nonnisi ultimo loco adhibendis. Exactis autem planis, solidorum contemplationem ordo postulare videtur. Solida vero vocant Problemata, non quæ de figuris solidis proponuntur, sed quæ, cum non possint per plana demonstrari, trium linearum Conicarum opem requirunt: ita ut prius de illis necesse sit scribere. Primus itaque Elementa Conica protulit *Aristæus* senior, in quinque libris; quasi in eorum usum qui jam hæc satis percipere valent, compendiosius conscriptis. Habent autem Inclinationum Libri duo Theoremata sive diagrammata CXXV, Lemmata vero XXXVIII.

De Conicis VIII.

Quatuor *Conicorum* libros ab *Euclide* receptos fusius explicavit *Apollonius*; adjectisque quatuor aliis, edidit octo Conicorum volumina. *Aristæus* autem (qui hactenus solus est autor de Locis Solidis, conscriptis quinque libris argumento Conicis conjuncto) & quotquot *Apollonio* priores fuerunt, tres Conicas lineas, Acutanguli, Rectanguli & Obtusanguli Coni Sectiones nominârunt. Quoniam vero in quolibet horum trium Conorum, diverso modo sectorum, omnes hæ tres producantur lineæ; *Apollonius*, ut videtur, non contentus Antecessorum placitis (cum sectio illa, quam dixerunt Coni acutanguli sectionem, etiam in Cono rectangulo vel obtusangulo secari possit; uti & sectio Coni rectanguli dicta, in acutangulo vel obtusangulo; cumque etiam obtusanguli Coni sectio possit tum acutanguli tum rectanguli sectio esse) mutatis nominibus sectionem Coni, acutanguli dictam, Ellipsin vocavit; rectanguli Parabolam; Obtusanguli vero Hyperbolam: singulas à proprio quodam accidente. Rectangulum enim quoddam ad rectam quandam applicatum, in Acutanguli Coni sectione deficiens fit quadrato; *in Obtusanguli excedens quadrato*; in rectanguli vero sectione neque deficiens neque excedens. Hoc autem admisit, non percepto, quod, juxta certum quendam casum in situ plani Conum secantis, alia atque alia ex his lineis generetur. Nam si planum secans parallelum fuerit uni Coni lateri, una sola ex tribus lineis producitur, semper eadem; quam tamen *Aristæus* ille secti Coni nomine appellavit.

Apollonius autem ipse, de iis quæ continentur in octo libris Conicorum à se conscriptis, hæc habet; summariam hanc descriptionem in præfatione primi tradens. "Continet liber "primus origines trium sectionum, ut & oppositarum secti"onum; earundemque præcipua symptomata, plenius & uni"versalius, quam in aliorum scriptis reperiuntur, elaborata. "Secundus habet quæ ad Diametros & Axes sectionum & op"positarum pertinent, ut & ad Asymptotos; aliaque quæ ge-

 "neralem

"neralem ac necessarium præbent usum ad Diorismos. Quas
"vero diametros, qualesque axes nomino ex hoc libro disces.
"Tertius habet multa & omnigena Theoremata utilia ad
"compositiones Locorum solidorum, & ad Determinationes:
"quorum plurima perpulchra & nova sunt. Hisce autem
"perpensis animadverti, non compositum fuisse ab *Euclide*
"locum ad tres vel quatuor lineas, sed particulam tantum
"ejus, atque hanc non satis feliciter: impossibile enim erat
"absque prædictis propositionibus perfectam ejus composi-
"tionem exhibere. Quartus docet quotupliciter Coni secti-
"ones vel inter se, vel cum circuli circumferentiâ occurrere
"possint; atque insuper alia, de quibus nihil ab iis qui
"ante nos fuerunt memoriæ proditum est: nimirum quot
"punctis Coni sectio vel circuli circumferentia vel etiam
"sectiones oppositæ oppositis sectionibus occurrant. Reli-
"qui quatuor libri penitiorem magis spectant scientiam:
"Primus enim ex iis magnâ ex parte agit de Maximis & Mi-
"nimis: Secundus de æqualibus & similibus sectionibus:
"Tertius tradit Theoremata dioristica, sive determinandi
"vim habentia: Quartus vero habet Problemata Conica de-
"terminata." Hactenus *Apollonius*. Quem vero in tertio ait Locum ad tres vel quatuor lineas ab *Euclide* non perfectum fuisse, neque ipse poterat, neque aliquis alius explere; vel tantillum adjicere iis quæ scripserat *Euclides*, solâ ope Conicorum illorum, quæ ad ea usque tempora demonstrata ferebantur. Id quod & ipse *Apollonius* testatur, dum dicit, "Im-
"possibile fuisse compositionem perfici, absque iis quæ ipse
"invenire necesse habuit." *Euclides* autem excipiens *Aristæum* nuper editis Conicis de Mathesi præclare meritum, nolensque alios prævenire, vel sese alterius negotio immiscere (erat enim ingenio mitissimus, & erga omnes (ut par erat) benignus, qui vel tantillum Mathematicas disciplinas promovere poterant, aliisque nullo modo infensus; sed summe accuratus, minimeque (uti hic) gloriosus) quantum de Loco possibile erat ostendi per illius Conica, scriptis mandavit; non affirmans perfecta esse quæ demonstraverat: nam sic jure meritoque reprehendi potuisset. Nequaquam vero hoc modo: siquidem & ipse *Apollonius*, plurima in Conicis imperfecta relinquens, minime ab aliis redarguitur. Poterat quidem ea adjecisse, quæ ad Locum absolvendum deerant, ani-

mo

mo complexus ea quæ *Euclides* de Loco scripserat, & operam dans *Euclidis* discipulis *Alexandriæ* longo tempore (unde exquisitam adeo in Mathematicis peritiam est assequutus) haud tamen illud sustinuit efficere. Locus autem ad tres vel quatuor lineas (de quo ob nonnulla adjecta tantopere se jactat; cum potius primo scriptori gratias referre debuisset) hujusmodi est: "Tribus rectis positione datis, si à quodam puncto "ducantur rectæ ad tres illas in datis angulis; detur autem ratio rectanguli sub duabus ductis contenti ad quadratum reliquæ: punctum continget locum solidum positione datum, "hoc est, aliquam è tribus lineis Conicis. Si vero ad quatuor "rectas positione datas ducantur rectæ in datis angulis; ac "data fuerit ratio rectanguli sub duabus ductis ad rectangulum sub duabus reliquis ductis: punctum similiter tanget Coni sectionem positione datam." Demonstratur autem Locum esse planum, si ad duas tantum positione datas ducantur rectæ. Si vero ducantur ad plures quam quatuor; continget punctum Loca nondum cognita, sed Lineas tantum dictas. Quales vero sint, quasve proprietates habeant, nondum compertum est. Harum unam, eamque neque primam, neque maxime conspicuam, utilem fore existimantes, composuerunt. Hisce autem propositionibus constant: "Si "ab aliquo puncto ad quinque rectas positione datas ducantur rectæ in datis angulis; ac detur ratio solidi parallelepipedi rectanguli sub tribus ductis contenti ad parallelepipedum solidum rectangulum sub duabus reliquis & datâ "quâdam contentum: punctum illud continget locum linearem positione datum. Si autem ducantur ad sex, ac ratio "data sit dicti solidi sub tribus contenti, ad illud quod sub "tribus reliquis continetur: rursus punctum continget lineam positione datam." Quod si plures fuerint quam sex, non amplius habent dicere, quod ratio data sit contenti sub quatuor ductis ad contentum sub reliquis; quoniam non datur aliquod contentum sub pluribus quam tribus dimensionibus. Sibimet autem in his plus justo concesserunt, qui paulo ante nos hæc interpretati sunt; nihil quidem quod ullo modo complecti possumus in medium proferentes: cum scilicet quod quatuor dimensionibus constet, vel Biquadrati vel Supersolidi sub quatuor rectis nomine comprehenderint. Licebit autem per compositas rationes hæc & dicere & de-

 monstrare

monstrare universim; tam in prædictis propositionibus quam in superioribus: ad hunc modum. "Si à quodam puncto ad "rectas positione datas ducantur rectæ in datis angulis; & "data sit ratio composita ex rationibus quas habet una è du-"ctis ad unam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & re-"liqua ad datam, si fuerint septem; vel si fuerint octo, & "reliqua ad reliquam: continget punctum illud lineam po-"sitione datam. Ac pari modo fiet, quotcunque fuerint du-"ctæ pares vel impares numero." Hæc vero consequuntur Locum ad quatuor rectas. Nihil igitur protulerunt unde cognosci poterit quænam sit illa linea. Qui vero difficultatem perspexere, rem minime aggressi sunt; ad exemplum Veterum & Scriptorum omnium melioris notæ. Ego autem, quum plurimos viderim circa principia in disciplinis Mathematicis occupatos, disquisitionibusque Physicis operam navantes, erubui sane, eo quod facile esset multo præstantiora ac utiliora proferre. Ne vero, quasi hoc gratis dixissem, alienus à ratione jam videar, hæc parum quidem cognita propalabo.

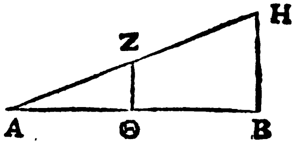
Figuræ perfecto gyro genitæ rationem habent compositam ex ratione gyrantium, & ex illâ rectarum similiter ad axes ductarum ab ipsarum gyrantium Gravitatis centris. Ratio vero incompleto gyro genitarum fit ex ratione gyrantium & arcuum quos descripsêre earundem centra Gravitatis. Manifestum autem est horum arcuum rationem componi ex ratione ductarum ad axes, & ex illâ angulorum quos continent ductarum extremitates, si ad axes genitarum æstimantur.

Hæ vero propositiones, quæ fere una sunt, plurima & varia complectuntur Theoremata de lineis, superficiebus & solidis, unâ eademque demonstratione; quorum nonnulla quidem nondum demonstrata sunt; alia vero jam olim, uti ea quæ occurrunt in duodecimo Elementorum. Habent autem libri octo Conicorum *Apollonii* Theoremata sive Diagrammata CCCCLXXXVII, Lemmata vero LXX.

Lemmata Pappi *ad Libros de Sectione Rationis & Spatii.*

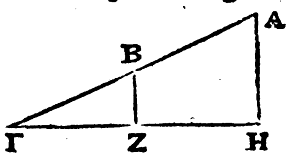
I. **DATAM** rectam lineam in data ratione secare.

Sit recta data AB, ratio autem data ut Γ ad Δ: oportet rectam AB dividere in ratione ipsius Γ ad Δ. Inclinetur sub quovis angulo ad rectam AB recta AH; & termino rationis Γ æqualem aufer AZ, ipsi vero Δ rectam ZH: dein junctâ BH, ipsi parallela ducatur ZΘ. Quoniam enim AΘ est ad ΘB ut AZ ad ZH; AZ vero æqualis est ipsi Γ, ZH autem ipsi Δ: erit igitur AΘ ad ΘB ut Γ ad Δ. Dividitur itaque *in ea ratione* AB in puncto Θ.



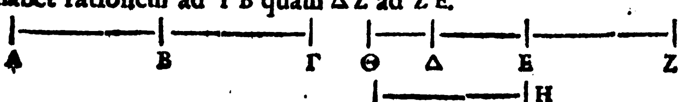
II. Datis tribus rectis AB, BΓ, Δ, invenire aliam quandam quæ sit ad Δ sicut AB ad BΓ.

Rursus inclinetur recta quædam ΓH sub quovis angulo; & fiat ΓZ ipsi Δ æqualis. Junge BZ, ipsique parallela ducatur AH. Est igitur AB ad BΓ sicut HZ ad ZΓ, hoc est, ad Δ. Quare HZ est recta quæsita. Similiter si daretur tertia quartam inveniremus.



III. Habeat AB ad BΓ majorem rationem quam ΔE ad EZ: componendo erit ratio AΓ ad ΓB major ratione ΔZ ad ZE.

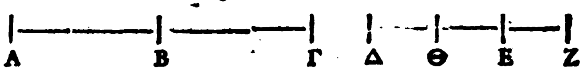
Fiat enim ut AB ad BΓ ita alia quædam ut H ad EZ; habebit igitur H ad EZ majorem rationem quam ΔE ad EZ, unde major erit H quam ΔE. Eidem ponatur ΘE æqualis. Quoniam autem AB est ad BΓ ut ΘE ad EZ, *erit componendo ut* AΓ *ad* ΓB *ita* ΘZ *ad* EZ. Sed ΘZ majorem habet rationem ad EZ quam ΔZ ad EZ; quare etiam AΓ majorem habet rationem ad ΓB quam ΔZ ad ZE.



IV. Rur-

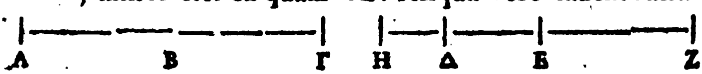
IV. Rursus habeat AB minorem rationem ad BΓ quam habet ΔE ad EZ; erit etiam ratio AΓ ad ΓB minor ratione ΔZ ad ZE.

Quoniam AB minorem habet rationem ad BΓ quam ΔE ad EZ; si fiat ut AB ad BΓ ita quædam alia ad EZ, erit illa minor quam ΔE, nempe EΘ. Quapropter *componendo* AΓ erit ad ΓB sicut ΘZ ad ZE. Sed ΘZ minorem habet rationem ad ZE quam ΔZ ad ZE, adeoque AΓ ad ΓB minorem quoque habet rationem quam ΔZ ad ZE.



V. Habeat autem AB ad BΓ majorem rationem quam ΔE ad EZ: permutando erit ratio AB ad ΔE major ratione BΓ ad EZ.

Fiat enim ut AB ad BΓ, ita alia quædam ad EZ. Patet eam majorem esse quam ΔE: sit autem illa HE. Permutando igitur erit ut AB ad HE ita BΓ ad EZ. Sed AB majorem habet rationem ad ΔE quam AB ad HE, hoc est, quam BΓ ad EZ; quare AB ad ΔE majorem habet rationem quam BΓ ad EZ. Pariter si minor fuerit ratio AB *ad* BΓ *quam* ΔE *ad* EZ; etiam permutando, AB *ad* ΔE *minorem habebit rationem quam* BΓ *ad* EZ. Nam si fiat ut AB ad BΓ ita alia quædam ad EZ, minor erit ea quam ΔE: reliqua vero eadem sunt.

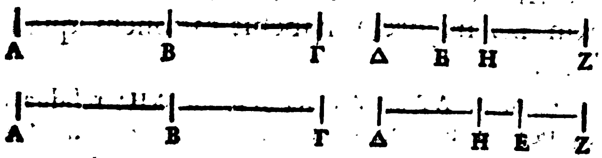


VI. Habeat AΓ ad ΓB majorem rationem quam ΔZ ad ZE: per conversionem rationis ΓA ad AB minorem habebit rationem quam ZΔ ad ΔE.

Fiat enim ut AΓ ad ΓB ita ΔZ ad aliam quandam, quæ minor erit quam ZE, ut ZH. Per conversionem rationis erit AΓ ad AB ut ΔZ ad ΔH. Sed ΔZ ad ΔH minorem habet rationem quam ΔZ ad ΔE, *quare* AΓ *ad* AB *minorem habet rationem quam* ΔZ *ad* ΔE. Similiter si AΓ ad ΓB minorem habeat rationem quam ΔZ ad ZE. Per conversionem rationis, AΓ majorem habet rationem ad AB quam ΔZ ad ΔE.

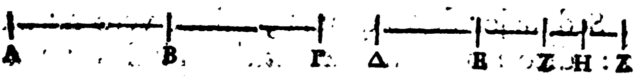
erit

erit enim ut AΓ ad ΓB ita ΔZ ad aliam, majorem quam ZE. Cætera evidentia sunt.



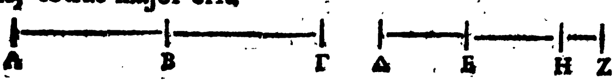
VII. Habeat rursus AB ad BΓ majorem rationem quam ΔE ad EZ: invertendo ΓB ad BA minorem habet rationem quam EZ ad EΔ.

Fiat enim ut AB ad BΓ ita ΔE ad aliam, ut EH, quæ minor erit quam EZ: invertendo itaque erit ut ΓB ad BA ita EH ad EΔ. Sed EH ad EΔ minorem habet rationem quam ZE ad EΔ; *quare* ΓB *ad* BA *minorem habet rationem quam* ZE *ad* EΔ. Similiter si AB minorem habeat rationem ad BΓ quam ΔE ad EZ; invertendo ΓB ad BA majorem habebit rationem quam ZE ad EΔ. Nam ut AB ad BΓ ita erit ΔE ad majorem quam EZ. Reliqua vero manifesta sunt. Ex his etiam consequitur, quod, si AB majorem habeat rationem ad BΓ quam ΔE ad EZ, EZ etiam ad ΔE majorem habebit rationem quam ΓB ad BA. Si vero AB ad BΓ minorem habeat rationem quam ΔE ad EZ, minor quoque erit ratio EZ ad ΔE quam ΓB ad BA.



VIII. Habeat AB ad ΔE majorem rationem quam BΓ ad EZ: erit ratio ipsius AB ad ΔE major ratione AΓ ad ΔZ.

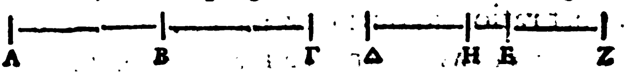
Fiat enim ut AB ad ΔE ita BΓ ad aliam quandam, ut HE, minorem quam EZ: tota igitur AΓ ad totam ΔH est ut AB ad ΔE. Sed AΓ ad ΔH majorem habet rationem quam ad ΔZ; igitur AB ad ΔE majorem habet rationem quam AΓ ad ΔZ. Ac manifestum est totam AΓ ad totam ΔZ minorem habere rationem quam AB ad ΔE. Quod si minor fuerit ratio partis, totius major erit.



IX. Ha-

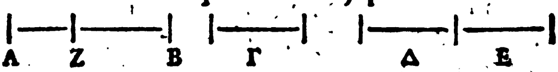
IX. Habeat rursus tota ΑΓ ad totam ΔΖ majorem rationem quam ΑΒ ad ΔΕ: residua ΒΓ ad residuam ΕΖ majorem habebit rationem quam ΑΓ ad ΔΖ.

Fiat enim ut ΑΓ ad ΔΖ ita ΑΒ ad ΔΗ; residua igitur ΒΓ ad residuam ΗΖ erit etiam ut ΑΓ ad ΔΖ. Sed ΒΓ ad ΕΖ majorem habet rationem quam ad ΖΗ, quare ratio ΒΓ ad ΕΖ major est ratione ΑΓ ad ΔΖ. Si vero ratio totius ad totam minor fuerit, minor quoque erit ratio residuæ *ad residuam.*



X. Sit ΑΒ major quam Γ, Δ vero ipsi Ε æqualis: majorem habebit rationem ΑΒ ad Γ quam est ratio Δ ad Ε.

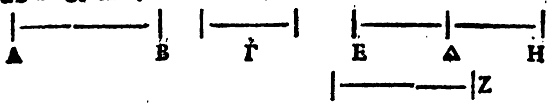
Ponatur enim ΒΖ ipsi Γ æqualis, atque erit ΒΖ ad Γ sicut Δ ad Ε. Sed ΑΒ majorem habet rationem ad Γ quam ΒΖ ad Γ: ΑΒ igitur majorem habet rationem ad Γ quam Δ ad Ε. Patet etiam quod, si minor fuerit ΑΒ quam Γ, ΑΒ minorem haberet rationem ad Γ quam Δ ad Ε, per conversam.



XI. Sed major sit ΑΒ quam Γ, minor vero ΔΕ quam Ζ: dico majorem esse rationem ipsius ΑΒ ad Γ quam ΔΕ ad Ζ.

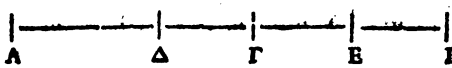
Hoc manifestum est etiam absque demonstratione. Si enim, dum ΔΕ ipsi Ζ æqualis fuerat, ΑΒ majorem habuerit rationem ad Γ quam ΔΕ ad Ζ; jam cum minor eâ ponatur, multo majorem habebit rationem. Hoc autem modo demonstrabitur. Quoniam major est ΑΒ quam Γ; si fiat ut ΑΒ ad Γ ita alia quædam ad Ζ: major erit ea quam Ζ, sicut & quam ΔΕ. Æqualis autem sit ipsi ΕΗ. ΕΗ igitur majorem habet rationem ad Ζ quam ΔΕ ad Ζ. Sed ut ΗΕ ad Ζ ita ΑΒ ad Γ. Quare ratio ΑΒ ad Γ major est ratione ΔΕ ad Ζ. (Ac manifestum est, si ΑΒ minor fuerit quam Γ, minorem semper fore rationem, *quoties* ΔΕ *vel est æqualis vel major quam* Ζ.) Majus quoque erit rectangulum ΑΒ in Ζ rectangulo ΔΕ in

Γ, æquale enim est rectangulo E H in Γ, quod majus est contento sub Γ & Δ E.



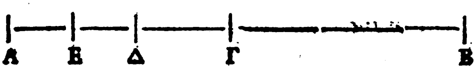
XII. Secetur recta A B in puncto Γ. Dico puncta omnia inter A & Γ dividere rectam A B in minores rationes quam habet A Γ ad Γ B: puncta vero omnia inter Γ & B in rationes majores.

Capiantur enim puncta Δ, E ab utraque parte ipsius Γ. Jam quoniam Δ A minor est quam A Γ, Δ B vero major quam B Γ; Δ A minorem habet rationem ad A Γ quam Δ B ad B Γ; permutando itaque A Δ ad Δ B minorem habet rationem quam A Γ ad Γ B. Idemque demonstratur de punctis omnibus inter A & Γ. Rursus quia E A major est quam A Γ, E B vero minor quam B Γ; E A majorem habebit rationem ad A Γ quam E B ad B Γ: quare permutando A E ad E B majorem habet rationem quam A Γ ad Γ B. Pari modo idem probatur de punctis reliquis inter Γ & B sumendis.



XIII. Dividatur recta A B bifariam in puncto Γ. Dico rectangulum ad punctum Γ abscissum, sive A Γ in Γ B, majus esse quovis alio segmentis quibuslibet aliis contento.

Sumatur enim aliud punctum ut Δ; atque erit rectangulum A Δ B, una cum quadrato ipsius Γ Δ, æquale quadrato ex A Γ, hoc est rectangulo A Γ B. Majus itaque est rectangulum A Γ in Γ B rectangulo A Δ in Δ B. Idem constat de punctis reliquis.



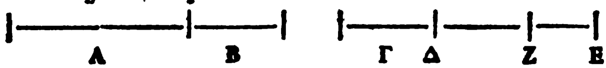
XIV. Dico quoque quod punctum propius puncto Γ adjacens, rectangulum semper efficit majus remotiore.

Sumatur enim aliud punctum ut E inter A & Δ. Demonstrandum est majus esse rectangulum A Δ B rectangulo A E B.

Quoniam enim rectangulum AΔB una cum quadrato ex ΔΓ æquale est quadrato ipsius AΓ; atque etiam rectangulum AEB una cum quadrato ex EΓ æquale est eidem quadrato ex AΓ: erit rectangulum AΔB cum quadrato ex ΔΓ æquale rectangulo AEB cum quadrato ex EΓ. Ex his autem quadratum ex ΔΓ minus est quadrato ex EΓ. Rectangulum igitur reliquum AΔB majus est reliquo rectangulo AEB.

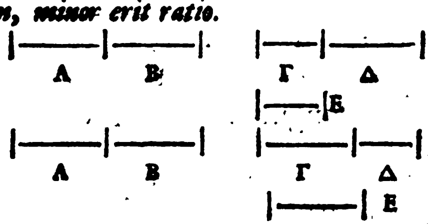
XV. Nam si sit A una cum B æqualis ipsi Γ cum ΔE; sit vero B minor quam ΔE: major erit A quam Γ.

Ponatur ΔZ ipsi B æqualis: A igitur una cum ΔZ æqualis erit ipsi ΔE una cum Γ. Communis auferatur ΔZ; & reliquum A æquale erit reliquis Γ & ZE simul sumptis; ac propterea A major erit quam Γ.



XVI. Habeat A ad B majorem rationem quam Γ ad Δ. Dico majus esse rectangulum sub A & Δ rectangulo sub B & Γ.

Fiat enim ut A ad B ita Γ ad E: majorem itaque rationem habet Γ ad E quam ad Δ, unde minus est E quam Δ; ac sumptâ A in communem altitudinem, minus erit rectangulum A in E rectangulo A in Δ. Sed rectangulum AE æquale est rectangulo BΓ; minus itaque est rectangulum BΓ rectangulo AΔ: hoc est, AΔ majus est rectangulo BΓ. Similiter si minor fuerit ratio, minus quoque erit rectangulum rectangulo. Quinetiam si rectangulum A in Δ majus fuerit quam B in Γ, ratio ipsius A ad B major erit ratione Γ ad Δ. Ponatur enim ipsi AΔ æquale rectangulum BE; majus ergo erit rectangulum BE quam BΓ; unde & E major erit quam Γ. Sed ut A ad B, ita E ad Δ. Est vero ratio E ad Δ major ratione Γ ad Δ; adeoque etiam ratio A ad B major erit. *Pariter si minus fuerit rectangulum, minor erit ratio.*



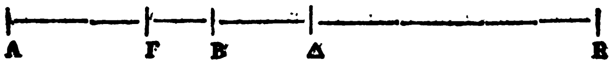
XVII. Inter

XVII. Inter duas rectas ΑΒ, ΒΓ media proportionalis sit ΒΔ, ac fiat ΔΕ ipsi ΑΔ æqualis. Dico ΓΕ excessum esse quo utræque ΑΒ, ΒΓ simul sumptæ superant illam quæ potest quater rectangulum ΑΒ in ΒΓ.

Quoniam enim utræque ΑΒ, ΒΓ excedunt utrasque ΑΒ, ΒΕ differentiâ ΓΕ, erit ΓΕ excessus quo utræque ΑΒ, ΒΓ, utrasque ΑΒ, ΒΕ excedunt; ipsæ autem ΑΒ, ΒΕ simul sumptæ duæ sunt ΒΔ. Sed duæ ΒΔ possunt quater rectangulum ΑΒ in ΒΓ. Quare ΓΕ excessus est quo utræque ΑΒ, ΒΓ simul sumptæ superant illam quæ potest quater rectangulum ΑΒΓ.

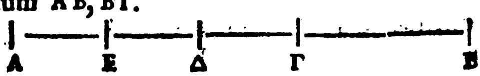
XVIII. Rursus sit ΒΔ media proportionalis inter ΑΒ, ΒΓ; ac fiat ΔΕ ipsi ΔΑ æqualis. Dico rectam ΓΕ componi ex utrisque ΑΒ, ΒΓ, & ex illâ quæ potest quater rectangulum ΑΒ, ΒΓ simul sumptis.

Quoniam enim ΓΕ componitur ex ipsis ΓΔ, ΔΕ; ac ΑΔ æqualis est ipsi ΔΕ; componetur etiam ΓΕ ex ipsis ΑΔ, ΔΓ; hoc est ex utrisque ΑΒ, ΒΓ & duabus ΒΔ simul sumptis. Sed duæ ΒΔ possunt quater rectangulum ΑΒ in ΒΓ. Recta igitur ΓΕ composita est ex utrisque ΑΒ, ΒΓ & ex eâ quæ potest quater rectangulum ΑΒ in ΒΓ.



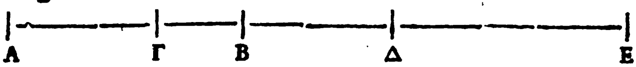
XIX. Rursus ΒΔ sit media proportionalis inter ΑΒ, ΒΓ, & ponatur ΔΕ ipsi ΓΔ æqualis. Dico rectam ΑΕ excessum esse quo utræque ΑΒ, ΒΓ superant illam quæ potest quater rectangulum ΑΒ, ΒΓ.

Quoniam enim utræque ΑΒ, ΒΓ superant utrasque ΕΒ, ΒΓ, excessu ΑΕ; ac utræque ΕΒ, ΒΓ duæ sunt ΒΔ, sive illâ quæ potest quater rectangulum ΑΒ in ΒΓ. Igitur ΑΕ est excessus quo utræque ΑΒ, ΒΓ superant illam quæ potest quater rectangulum ΑΒ, ΒΓ.



XX. Rursus sit ΒΔ media proportionalis inter ΑΒ, ΒΓ; & ponatur ΔΕ ipsi ΓΔ æqualis. Dico rectam ΑΕ componi ex utrisque ΑΒ, ΒΓ & ex eâ quæ potest quater rectangulum ΑΒ in ΒΓ.

Quoniam enim ΑΕ componitur ex ipsis ΑΔ, ΔΕ; ac ΔΕ ipsi ΓΔ æqualis est: componetur itaque ΑΕ ex ipsis ΑΔ, ΔΓ; hoc est ex utrisque ΑΒ, ΒΓ & ex duabus ΒΔ. Sed duæ ΒΔ possunt quater rectangulum ΑΒ, ΒΓ. Composita est igitur recta ΑΕ ex utrisque ΑΒ, ΒΓ & ex eâ quæ potest quater rectangulum ΑΒ in ΒΓ.



Assumuntur Lemmata hæc tum ad *Sectionem Rationis*, tum ad *Sectionem Spatii*; diverso tamen modo.

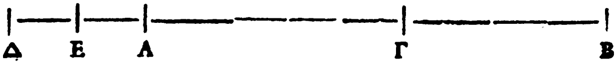
Problema ad secundum de Sectione Rationis; *utile ad Recapitulationem Loci decimi tertii.*

Datis duabus rectis ΑΒ, ΒΓ, sumere in productâ ΑΔ punctum datum Δ, tale ut ΒΔ eandem habeat rationem ad ΔΑ, quam habet ΓΔ ad excessum quo utræque ΑΒ, ΒΓ superant illam quæ potest quater rectangulum ΑΒ in ΒΓ.

Puta factum, & sit excessus ille recta ΑΕ (in præmissis enim invenimus eam) est igitur ΒΔ ad ΔΑ ut ΓΔ ad ΑΕ; quare permutando ac dividendo, dein *conferendo* rectangulum *extremorum* cum rectangulo *mediorum*, rectangulum ΒΓ in ΕΑ æquale erit rectangulo ΓΔ in ΔΕ. Datum autem est rectangulum ΒΓ in ΕΑ, ac proinde datur ΓΔ in ΔΕ; quod quidem applicatur ad rectam datam ΓΕ excedens quadrato: datum igitur est punctum Δ. Componetur autem hoc modo. Sit excessus ille recta ΕΑ, & applicetur rectangulum æquale rectangulo ΒΓΕ excedens quadrato ad rectam ΓΕ; nempe rectangulum ΓΔ in ΔΕ. Dico punctum Δ esse punctum quæsitum. Quoniam enim rectangulum ΒΓ in ΕΑ æquale est rectangulo ΓΔ in ΔΕ: Resolutâ in proportionem æqualitate, dein componendo & permutando, erit ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΔ ad ΑΕ, quæ excessus est. Eodem modo fiet, si velimus su-

mere

mere punctum tale, ut ΒΔ ſit ad ΔΑ ut ΓΔ ad rectam compoſitam ex utriſque ΑΒ, ΒΓ & illâ quæ poteſt quater rectangulum ΑΒ, ΒΓ. Q. E. D.



Primus liber de *Sectione Rationis* habet Loca ſeptem, Caſus viginti quatuor, Dioriſmos quinque; quorum tres ſunt Maximi, duo vero Minimi. Et Maximus quidem eſt ad Caſum tertium Loci V^{ti}. Minimi autem ſunt ad Caſus ſecundos Locorum VI^{ti} & VII^{mi}. Maximi reliqui ſunt ad Caſus quartos eorundum Locorum VI^{ti} & VII^{mi}. Secundus de *Sectione Rationis* [*habet Loca quatuordecim, Caſus* LXIII. *Dioriſmos vero ex primo, ad quem totus refertur. Primus liber de Sectione Spatii*] habet loca ſeptem, Caſus XXIV. Dioriſmos ſeptem, quorum quatuor Maximi ſunt, tres autem Minimi. Maximus autem eſt ad Caſum II. Loci primi, ut & ad primum [*ſecundi Loci*; *ſimiliter ad ſecundum*] quarti, [*& ad tertium ſexti Loci. Minimi vero ſunt*] ad tertium Caſum tertii Loci, ad quartum quarti, & ad primum ſexti. Secundus liber de *Sectione Spatii* Loca habet XIII. Caſus LX. & Dioriſmos ex primo, ad quem totus refertur.

Quæret fortaſſe aliquis unde factum ſit, ut ſecundus liber de *Sectione Rationis* quatuordecim Loca contineat, cum idem de *Sectione Spatii* tredecim tantum habeat. Fit autem ob hanc cauſam; quia ſeptimus Locus in *Sectione Spatii* omiſſus eſt, ut manifeſtus. Nam ſi utræque parallelæ cadant ſuper terminos datos, quæcunque recta ducta fuerit, abſcindet rectangulum datum; æquale nempe illo quod continetur ſub duabus interceptis inter terminos & concurſum ambarum rectarum principalium poſitione datarum. Hoc autem aliter ſe habet in *Sectione Rationis*. Quapropter excedit uno Loco ad ſeptimum ſecundi, atque ita deinceps.

APOL-

APOLLONII PERGÆI
De Sectione rationis,
SIVE
ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ ΑΠΟΤΟΜΗΣ,
LIBER PRIOR.

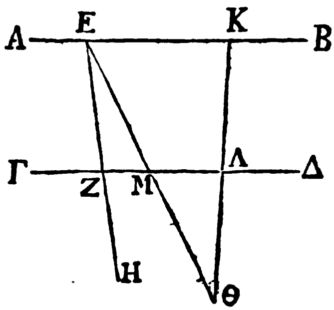
SINT duæ rectæ lineæ infinitæ in eodem plano positione datæ, quæ vel invicem æquidistent vel sese intersecent; & datum sit in utrâque illarum punctum: sitque etiam ratio data: & præterea datum sit punctum extra rectas datas. Ducere oportet à puncto dato lineam rectam, quæ occurrens rectis positione datis, ab ipsis auferat segmenta quæ sint inter se in ratione datâ.

Primo sint duæ rectæ positione datæ invicem parallelæ ut ΑΒ, ΓΔ; & sumatur in rectâ ΑΒ punctum Ε, & in ΓΔ punctum Ζ: rectaque rectis datis occurrens sit ΕΖΗ. Cadet autem punctum datum vel intra angulum ΔΖΗ, vel intra angulos ΒΕΖ, ΔΖΕ, vel intra spatia iisdem adjacentia.

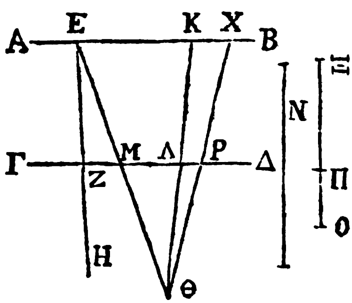
LOCUS PRIMUS.

Cadat autem primo intra angulum ΔΖΗ, ut punctum Θ. Rectæ vero lineæ, quæ à puncto Θ ductæ auferunt à rectis positione datis segmenta, datis punctis Ε, Ζ adjacentia, in ratione datâ, admittunt tres casus; quatenus vel resecantur segmenta ex ΕΒ, ΖΔ, vel ex ΕΑ, ΖΔ, vel denique ex ipsis ΕΑ, ΖΓ.

Caſ. I. Cadat autem recta ſecundum modum primum, ut recta ΘΚ. Auferat iſthæc à rectis ΕΒ, ΖΔ ſegmenta ΒΚ, ΖΛ, habentia inter ſe rationem rationi datæ æqualem; ac jungatur recta ΕΘ. Poſitione igitur data eſt ipſa ΕΘ. Sed etiam ΓΔ poſitione datur, datum eſt igitur punctum Μ. Quoniam autem dantur puncta Ε, Μ, Θ, etiam datur ratio rectæ [ΕΜ ad ΜΘ, & componendo datur quoque ratio] ΕΘ ad ΘΜ. Verum ratio ΕΘ ad ΘΜ æqualis eſt rationi ΕΚ *ad* ΜΛ, *quare ratio* ΕΚ *ad* ΜΛ *data eſt. Datur autem ratio* ΕΚ *ad* ΖΛ, *quare ratio* ΖΛ *ad* ΜΛ *quoque datur; ac dividendo ratio* ΜΖ *ad* ΜΛ *etiam data eſt. Sed recta* ΖΜ *magnitudine datur, adeoque ipſa* ΜΛ *magnitudine data eſt; & ob datum punctum* Μ *punctum* Λ *quoque datur: unde recta* ΘΛΚ *poſitione datur. Quoniam autem recta* ΜΛ *minor eſt quam* ΖΛ, *ratio* ΒΚ *ad* ΜΛ *ſive* ΕΘ *ad* ΘΜ *major erit ratione* ΕΚ ad ΖΛ, hoc eſt, ratione data. Oportet igitur rationem datam minorem eſſe ratione ΕΘ ad ΘΜ.



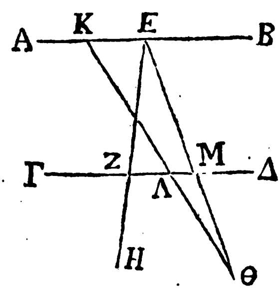
Componetur autem Problema hoc modo. Manente figurâ jam deſcriptâ, ac junctâ rectâ ΕΘ: manifeſtum eſt rationem datam minorem eſſe debere ratione ΕΘ ad ΘΜ. Eſto igitur illa æqualis rationi Ν ad ΞΟ. Ac fiat ut ΕΘ ad ΘΜ ita Ν *ad* ΞΠ, *minorem quam* ΞΟ; *dein fiat ut* ΟΠ *ad* ΠΞ, ita ΖΜ ad ΜΛ: & connexa ΘΛ producatur in directum. Dico quod recta ΘΛΚ ſola ſolvit problema. Quod ſic oſtenditur. Quoniam ΖΜ eſt ad ΜΛ ut ΟΠ ad ΠΞ, erit componendo ΖΛ ad ΛΜ ut ΞΟ ad ΞΠ: ac invertendo ut ΛΜ ad ΖΛ ita ΠΞ ad ΞΟ. Cum autem ΕΘ eſt ad ΘΜ ut ΕΚ ad ΜΛ, erit etiam ΕΚ ad ΜΛ ſicut Ν ad ΞΠ. Sed ΜΛ eſt ad ΛΖ ut ΠΞ ad ΞΟ; adeoque ex æquo erit ΕΚ ad ΛΖ ut Ν ad ΞΟ. Ducta eſt igitur



igitur recta ΘK per punctum Θ, quæ aufert segmenta EK, ZΛ habentia inter se rationem rationi datæ æqualem. Recta igitur ΘK solvit problema. Aio autem illam solam hoc præstare. Nam si fieri potest, alia idem efficiat, ut recta ΘX. Aufert ergo recta ΘX rationem EX ad ZP æqualem rationi datæ. Quoniam vero ΛM minor est quam recta ΛZ, erit ratio PΛ ad ΛM major ratione PΛ ad ΛZ. Et componendo erit ratio PM ad MΛ major ratione PZ ad ΛZ. Ut autem PM ad MΛ, ita XE ad EK: ergo ratio XE ad EK major est ratione PZ ad ΛZ: ac permutando erit ratio XE ad PZ major ratione EK ad ZΛ. Ostensum autem est rectam ΘK problema solvere, id quod non præstat altera, adeoque ea sola.

Manifestum autem est quod rectæ puncto Z propiores, rationes minores abscindunt quam remotiores ab eo.

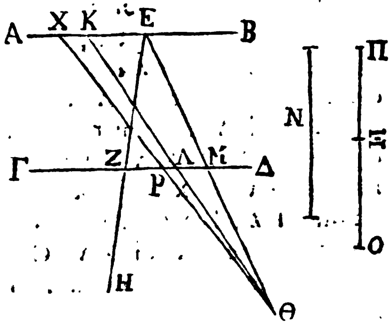
Cas. II. Iisdem manentibus ducatur, juxta casum secundum, recta ΘK auferens à rectis EA, ZΔ rationem EK ad ZΛ æqualem rationi datæ; & jungatur recta EΘ. Positione igitur datur EΘ. Data autem est positione ΓΔ; datur itaque punctum M; utraque adeo recta ΘE, ΘM datur: quare ratio EΘ ad ΘM etiam datur. Est autem EΘ ad ΘM ut EK ad ΛM; quare ratio KE ad ΛM datur. Sed ratio KE ad ZΛ data est; ratio igitur ZΛ ad ΛM data erit. Et componendo ratio ZM ad MΛ datur; adeoque cum recta ZM magnitudine data sit, etiam ipsa ΛM magnitudine data erit. Datum autem est punctum M, quare punctum Λ datum erit; ac dato puncto Θ, datur positione recta ΘΛK. Quoniam autem recta ΛM potest esse vel æqualis ipsi ΛZ, vel major vel minor ea; igitur rationes non habent limites.



Componetur autem problema hoc modo. Permanente figura jam descripta, jungatur recta EΘ; sitque ratio data eadem quæ N ad ΞO. Et fiat N ad ΞΠ sicut EΘ ad ΘM; ac ut OΠ ad ΠΞ sic ZM ad MΛ. Jungatur ΘΛ ac producatur in K. Dico rectam ΘK solvere problema, sive KE

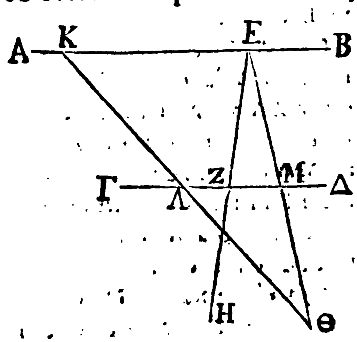
esse

esse ad ZΛ ut N ad ΞO. Quoniam autem EΘ est ad ΘM ut KE ad ΛM, necnon ut N ad ΠΞ; erit etiam KE ad ΛM ut N ad ΠΞ. Item quia OΠ est ad ΠΞ ut ZM ad MΛ, erit, dividendo & invertendo, ΛM ad ΛZ ut ΠΞ ad ΞO. Quare ex æquo erit KE ad ZΛ ut N ad ΞO. Recta itaque ΘK solvit problema. Dico autem illam solam hoc præstare. Nam si fieri potest, ducatur alia, ut recta ΘX, auferens rationem XE ad PZ rationi datæ parem. Sed XE *major est quam* EK, *ac* ZP *minor quam* ZΛ; *unde* ratio XE ad ZP major est ratione EK ad ZΛ, adeoque recta XΘ majorem aufert rationem quam KΘ.



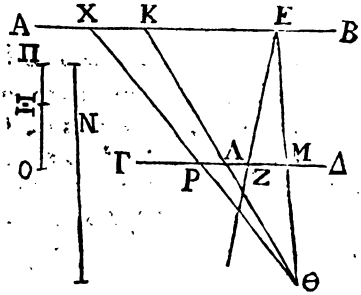
Manifestum autem est rectas puncto Z propiores, rationes majores abscindere quam rectæ remotiores ab illo.

Cas. III. Iisdem autem manentibus, ducatur secundum casum tertium, recta ΘK auferens è rectis EA, ZΓ rationem EK ad ZΛ rationi datæ æqualem; ac jungatur EΘ Datur igitur positione ipsa EΘ. Sed ob rectam ΓΔ positione datam, punctum M & ratio EΘ ad ΘM etiam dantur. Est autem ut EΘ ad ΘM ita EK ad ΛM: quare ratio EK ad ΛM datur. Sed ratio EK ad ZΛ datur, adeoque etiam ratio MΛ ad ZΛ data est: ac dividendo ratio MZ ad ZΛ datur. At recta MZ datur, quare recta ZΛ positione & magnitudine datur. Punctum autem Z datum est, adeoque & punctum Λ datur: ac dato puncto Θ, recta ΘΛK positione datur. Quoniam autem ZΛ minor est ΛM, erit ratio EK ad ZΛ major ratione EK ad ΛM. At vero EK est ad ΛM ut EΘ ad ΘM; quapropter ratio EK ad ZΛ major est ratione EΘ ad ΘM: adeoque ratio data major esse debet ratione EΘ ad ΘM.



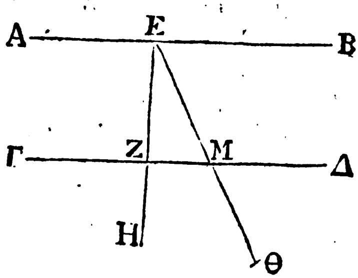
Componetur autem problema hoc modo. Manente figura jam

jam descripta, connectatur recta $E\Theta$. Oportet enim rationem datam majorem esse ratione $E\Theta$ ad ΘM. Sit adeo ratio N ad $\Xi\Pi$ major ratione $E\Theta$ ad ΘM. Fiatque ut $E\Theta$ ad ΘM ita N ad $O\Pi$; & ut $O\Xi$ ad $\Xi\Pi$ ita MZ ad $Z\Lambda$; & ducatur & producatur $\Theta\Lambda$ ad K. Dico rectam $\Theta\Lambda K$ solvere problema. Quoniam enim MZ est ad $Z\Lambda$ ut $O\Xi$ ad $\Xi\Pi$, erit componendo $M\Lambda$ ad ΛZ ut $O\Pi$ ad $\Pi\Xi$. Item quia $E\Theta$ est ad ΘM, sive EK ad $M\Lambda$, ut N ad $O\Pi$; atque etiam $M\Lambda$ ad ΛZ ut ΠO ad $\Pi\Xi$: ex æquo erit EK ad ΛZ ut N ad $\Pi\Xi$. Recta itaque ΘK solvit problema. Dico & eam solam. Nam si fieri possit, ducatur alia, ut recta ΘX, abscindens rationem XE ad PZ rationi datæ æqualem. Quoniam autem recta ΛZ minor est quam ΛM, erit ratio $P\Lambda$ ad ΛZ major ratione $P\Lambda$ ad ΛM: ac Componendo erit ratio PZ ad $Z\Lambda$ major ratione PM ad $M\Lambda$. At PM est ad $M\Lambda$ ut XE ad EK; quare ratio XE ad EK minor est ratione PZ ad $Z\Lambda$: ac permutando, ratio XE ad PZ minor erit ratione KE ad ΛZ. Recta igitur ΘK majorem abscindit rationem quam recta ΘX.



Rectæ autem ductæ propiores puncto Z, majores abscindunt rationes quam quæ sunt remotiores ab eo.

Resolvimus ergo problema secundum omnes modos, atque compositionem illius ostendimus. Iisdem autem manentibus ducatur recta $E\Theta$: & ratio data vel minor erit quam ratio $E\Theta$ ad ΘM, vel ei æqualis, vel denique major. Si autem fuerit ratio data minor ratione $E\Theta$ ad ΘM, componetur quidem problema juxta duos modos, nempe primum & secundum. Sed componi nequit modo tertio, quia ratio data non est major ratione $E\Theta$ ad ΘM. Si fuerit data ratio æqualis rationi $E\Theta$ ad ΘM, componetur quidem problema secundo modo. Non autem componi potest modo primo,

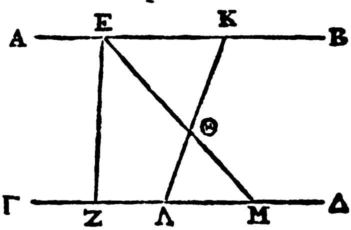


primo, quia ratio data non est minor ratione ΕΘ ad ΘΜ. Neque sane modo tertio, quia ratio data non est major ea. Si denique major fuerit ratione ΕΘ ad ΘΜ, patet problema solvi posse duobus modis, *secundo scil. ac tertio, non autem primo*, quia ratio data non est minor ea.

LOCUS SECUNDUS.

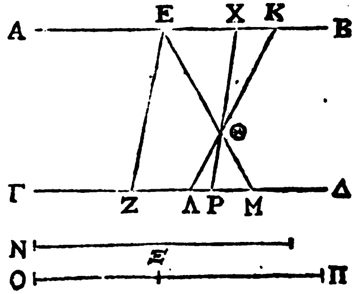
Esto jam punctum datum intra angulos ΒΕΖ, ΕΖΔ, ut est punctum Θ: rectæ autem ductæ per punctum Θ abscindant rectas punctis Ε, Ζ adjacentes, quæ sint inter se in ratione data. Hoc autem fiet secundum tres casus; aut enim eas abscindet à rectis ΕΒ, ΖΔ, aut à rectis ΕΑ, ΖΔ, vel denique à rectis ΕΒ, ΖΓ.

Cas. I. Agatur ideo recta, secundum casum primum, ut recta ΚΛ, abscindens à rectis ΕΒ, ΖΔ rationem ΕΚ ad ΖΛ rationi datæ æqualem; & connexa ΕΘ producatur in Μ: recta itaque ΕΜ positione datur. Sed recta ΓΔ positione data est: quare datur & punctum Μ, adeoque ratio ΕΘ ad ΘΜ data est. Est autem ΕΘ ad ΘΜ ut ΕΚ ad ΜΛ. Verum ratio ΕΚ ad ΛΖ datur, adeoque ex æquo ratio ΖΛ ad ΜΛ datur: & componendo ratio ΖΜ ad ΜΛ etiam datur.



Recta autem ΖΜ magnitudine datur; quare recta ΜΛ tam magnitudine quam positione datur. Cumque punctum Μ datur, etiam punctum Λ datur: ac dato puncto Θ, recta quoque ΚΘΛ positione datur. Quoniam autem alterutra è rectis ΖΛ, ΛΜ potest esse major altera, rationes hoc in casu non habent limites.

Componetur autem problema hoc modo. Manente figura jam descripta, jungatur ΕΘ ac producatur in Μ. Sit ratio data ut Ν ad ΞΟ: fiatque Ν ad ΠΞ ut ΕΘ ad ΘΜ; & ut ΠΞ ad ΟΞ ita ΜΛ ad ΖΛ: & ducatur ΛΘ producaturque. Dico rectam

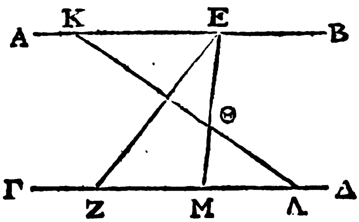


ΛΘΚ

ΛΘΚ problema solvere. Quoniam enim ΕΘ est ad ΘΜ, hoc est ΕΚ ad ΛΜ, ut Ν ad ΠΞ; & ΛΜ ad ΛΖ ut ΠΞ ad ΞΟ, per constructionem; erit ex æquo, ΕΚ ad ΛΖ ut Ν ad ΞΟ. Quare recta ΚΛ solvit problema. Aio insuper eam solam hoc præstare. Nam si fieri potest, ducatur alia ut recta ΧΘΡ. Quoniam autem recta ΕΚ major est recta ΕΧ, & recta ΖΛ minor quam ipsa ΡΖ, erit ratio ΕΚ ad ΖΛ major ratione ΕΧ ad ΡΖ: adeoque abscindet recta ΛΚ rationem majorem quam recta ΧΡ.

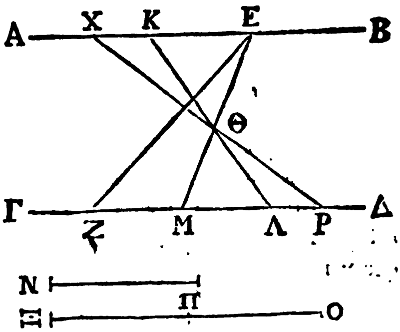
Unde & rectæ puncto Ζ propiores, abscindent rationes majores quam quæ ab eodem puncto sunt remotiores.

Cas. II. Dein ducatur, modo secundo, recta ΚΛ auferens à rectis ΕΛ ΖΔ rationem ΕΚ ad ΖΛ æqualem rationi datæ: & jungatur recta ΕΘ, producaturque ad Μ: datur igitur positione recta ΕΜ. Sed positione data est recta ΓΔ, adeoque punctum Μ datum est: quare & ratio ΕΘ ad ΘΜ datur. Verum ut ΕΘ ad ΘΜ ita ΕΚ ad ΜΛ: atque etiam data est ratio ΕΚ ad ΖΛ: quare ratio ΖΛ ad ΜΛ datur; ac dividendo, ratio ΖΜ ad ΜΛ etiam datur. At ΖΜ magnitudine datâ, datur quoque recta ΜΛ magnitudine & positione: datoque puncto Μ, datur etiam punctum Λ: ac cum punctum Θ datur, recta quoque ΚΘΛ positione datur. Quoniam vero ΖΛ major est quam ΛΜ, erit ratio ΕΚ ad ΛΜ, hoc est ΕΘ ad ΘΜ, major ratione ΕΚ ad ΖΛ; quare ratio ad componendum proposita minor esse debet ratione ΕΘ ad ΘΜ.



Componetur autem problema hoc modo. Manentibus descriptis, sit ratio data æqualis rationi Ν ad ΞΟ, quæ sit minor ratione ΕΘ ad ΘΜ: fiatque ut ΕΘ ad ΘΜ ita Ν ad ΠΟ, & ut ΞΟ ad ΠΟ ita ΖΛ ad ΜΛ: & connectatur ΛΘ producaturque. Dico rectam ΛΘΚ solvere problema. Quoniam enim ΕΘ est ad ΘΜ, hoc est ΕΚ ad ΜΛ, ut Ν ad ΠΟ; atque etiam ΜΛ ad ΛΖ ut ΠΟ ad ΞΟ; erit ex æquo ΕΚ ad ΛΖ ut Ν ad ΞΟ: quare recta ΚΛ solvit problema. Dico autem eam solam hoc præstare. Nam si fieri possit, ducatur alia quævis ut recta ΧΡ. Quoniam igitur ΛΖ major est recta

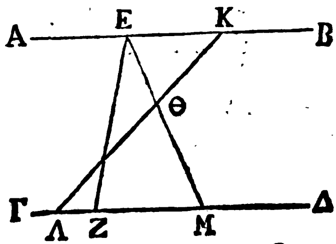
ΛΜ,



Λ M, erit ratio P Λ ad Λ Z minor ratione ejusdem ad rectam Λ M: atque componendo, ratio Z P ad Z Λ minor erit ratione P M ad M Λ. Verum P M est ad M Λ ut X E ad E K. Quare ratio Z P ad Z Λ minor est ratione X E ad E K: ac permutando, ratio Z P ad X E minor est ratione Z Λ ad E K. Sola igitur recta K Λ solvit problema.

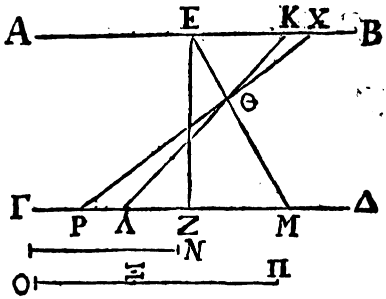
Manifestum autem est rectas propiores puncto Z, rationes majores auferre quam rectæ ab illo remotiores.

Cas. III. Jam ducta sit recta K Λ, modo tertio, auferens a rectis E B, Z Γ rationem E K ad Z Λ rationi datæ æqualem. Jungatur E Θ, producaturq; ad M *in recta* Γ Δ. Ac recta E M positione datur, adeoque punctum M datur: datisque punctis E, Θ, datur ratio ipsarum E Θ, Θ M. Verum E Θ est ad Θ M ut E K ad Λ M, adeoque ratio E K ad Λ M datur. Sed ratio E K ad Z Λ data est: quare ratio M Λ ad Λ Z datur; ac dividendo, data erit ratio M Z ad Λ Z. Cum autem recta M Z datur, data est etiam recta Z Λ magnitudine & positione: ac ob punctum Z datum habetur punctum Λ, adeoque recta K Θ Λ positione datur. Quoniam vero recta Λ Z minor est recta Λ M, erit ratio E K ad Z Λ major ratione E K ad Λ M. Verum E K est ad Λ M ut E Θ ad Θ M; quare ratio E K ad Z Λ major est ratione E Θ ad Θ M. Sed ratio E K ad Z Λ rationi datæ æqualis est: oportet itaque rationem ad componendum datam majorem esse ratione E Θ ad Θ M.



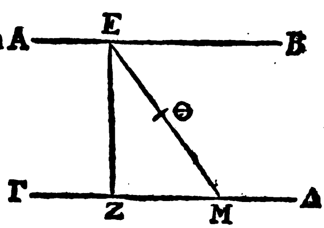
Componetur autem problema hoc modo. Manente figura jam descripta, sit ratio data, nempe ratio N ad Ξ O, major ratione E Θ ad Θ M: fiatque ut E Θ ad Θ M ita N ad Π O; necnon ut Π Ξ ad Ξ O, ita M Z ad Z Λ: & jungatur Λ Θ producaturque. Dico rectam Λ Θ K solvere problema. Quoniam enim M Z est ad Z Λ ut Π Ξ ad Ξ O, erit componendo

ΜΛ ad ΖΛ ut ΠΟ ad ΞΟ. Verum ΕΘ est ad ΘΜ, hoc est ΕΚ ad ΛΜ, ut Ν ad ΠΟ: Quare ex æquo ΕΚ erit ad ΖΛ ut Ν ad ΞΟ. Recta itaque ΚΛ solvit Problema. Dico etiam eam solam hoc præstare. Nam si fieri potest, ducatur alia recta ut ΧΡ. Quoniam vero recta ΜΛ major est recta ΖΛ, erit ratio ΡΛ ad ΛΜ minor ratione ΡΛ ad ΛΖ; ac componendo ratio ΡΜ ad ΜΛ minor erit ratione ΡΖ ad ΖΛ. At ratio ΡΜ ad ΜΛ est ut ΧΕ ad ΕΚ; quare ratio ΧΕ ad ΕΚ minor est ratione ΡΖ ad ΖΛ; ac alternando ratio ΧΕ ad ΡΖ minor erit ratione ΕΚ ad ΖΛ. Sola itaque ΛΚ solvit problema.



Manifestum autem est rectas puncto Ζ propiores, majores rationes abscindere quam quæ ab eodem remotiores sunt.

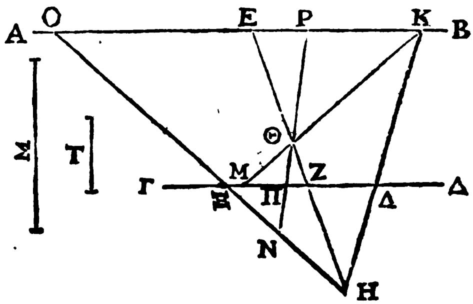
Invenimus adeo Resolutionem atque etiam Compositionem Problematis, secundum ejus tres Casus. Iisdem vero manentibus, si jungatur ΕΘ producaturque in Μ; erit quidem ratio data vel æqualis rationi ΕΘ ad ΘΜ, vel major illa, vel minor. Si vero ratio data æqualis fuerit rationi ΕΘ ad ΘΜ, propositio construetur secundum formam unicam eamque primam: non enim ad formam secundam, quia ratio data non est minor ratione ΕΘ ad ΘΜ; neque ad formam tertiam, quia ratio data non est major ratione ΕΘ ad ΘΜ. Dein si ratio data sit minor ratione ΕΘ ad ΘΜ, construetur problema duabus formis, nempe prima & secunda: non autem forma tertia, quia ratio non est major ratione ΕΘ ad ΘΜ. Si denique ratio data sit major ratione ΕΘ ad ΘΜ, problema construetur secundum duas formas, primam ac tertiam; non potest autem construi forma secunda, quia ratio data non est minor ratione ΕΘ ad ΘΜ.



SCHOLION.

Paulo generalius, ac sane non minus concinne, problemata hæc in rectis parallelis efficiuntur hunc in modum.

Sint duæ rectæ parallelæ ΑΒ, ΓΔ, *positione datæ; ac sumatur in* ΑΒ *punctum* Ε, *in* ΓΔ *punctum* Ζ: *sitque ratio ad construendum proposita sicut* Σ *ad* Τ. *Fiat* ΕΚ *æqualis ipsi* Σ, *ac* ΖΛ, ΖΜ, *ab utraque parte puncti* Ζ, *æquales termino alteri rationis* Τ. *Junge* ΚΛ, ΚΜ, *quæ occurrant rectæ datæ* ΕΖ *productæ in datis punctis* Η, Θ. *Dico rectas omnes per puncta illa* Η, Θ *transeuntes, rectisque* ΑΒ, ΓΔ *occurrentes, auferre rationes æquales rationi* Σ *ad* Τ. *Etenim* ΕΘ *est ad* ΘΖ *ut* ΕΚ *ad* ΖΜ, *hoc est ut* Σ *ad* Τ; *ac* ΡΕ *est ad* ΖΠ *ut* ΕΘ *ad* ΘΖ; *igitur* ΡΕ *est ad* ΖΠ *sicut* Σ *ad* Τ. *Similiter* ΗΕ *est ad* ΗΖ *ut* ΕΚ *ad* ΖΛ, *sive ut* Σ *ad* Τ. *Sed* ΟΕ *est ad* ΖΞ *sicut* ΗΕ *ad* ΗΖ: *ergo* ΟΕ *est ad* ΖΞ *in ratione* Σ *ad* Τ. *Quocirca dato puncto quovis* Ν, *vel intra vel extra parallelas datas, rectæ duæ* ΗΝ, ΝΘ *productæ satisfacient problemati. Quod si altera è rectis* ΗΝ, ΝΘ *parallela fuerit ipsis* ΑΒ, ΓΔ, *adeoque iisdem non occurrens; altera tantum solutionem præstabit: hoc etenim in casu, ratio* ΝΡ *ad* ΝΠ *eadem est cum ratione datâ* Σ *ad* Τ *sive* ΕΗ *ad* ΗΖ. *Hinc etiam consequuntur omnia quæ de rationum limitibus demonstravit* Apollonius, *quem Constructionis hujus compendium latuisse vix credibile est; sed potius methodum hanc suam prætulisse arbitror, utpote sequentibus magis analogam. Patet quoque rectam* ΗΕ *harmonice dividi in punctis* Ζ, Θ; *quia* ΗΕ *est ad* ΖΗ *ut* ΘΕ *ad* ΖΘ.

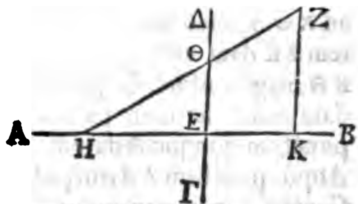


LOCUS TERTIUS.

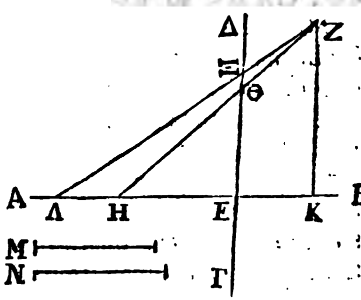
Jam rectæ positione datæ ΑΒ, ΓΔ, secent se mutuo in puncto Β; ac in utrâque sumatur commune punctum Ε.

Punctum autem datum cadet vel intra angulum Δ E B, vel intra angulum eidem deinceps. Efficitur autem in quovis angulo quod in angulo Δ E B effectum est. Detur itaque punctum Z intra angulum Δ E B; ac ducendæ sint rectæ per punctum Z, quæ auferant à rectis per punctum E, segmenta quæ sint inter se in ratione data. Hoc autem fiet juxta tres modos: vel enim abscissa erit ratio à rectis A E, E Δ, vel à rectis Γ E, E B, vel denique à B E, E Δ.

Cas. I. Ducatur autem primo recta Z H, juxta modum primùm, auferens à rectis A E, E Δ, rationem Θ E ad E H rationi datæ æqualem. Et per punctum Z agatur recta parallela rectæ E Δ usque ad K; erit ergo Z K positione data. Sed & recta A B positione datur, punctum itaque K datum est. Quoniam vero ratio E Θ ad E H datur, erit etiam ratio Z K ad K H data. Cumque Z K datur, etiam Z H data erit magnitudine & positione: ac ob datum punctum K, punctum H quoque datum erit. Punctum autem Z datur, quare recta H Z positione data est. Et manifestum est rationem datam minorem esse debere ratione Z K ad K E.



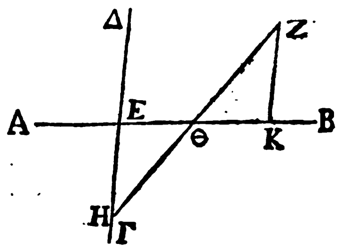
Componetur autem problema hoc modo. Manente figura jam descripta, ducatur recta K Z rectæ Δ E parallela; sitque ratio data minor ratione Z K ad K E, nempe ratio M ad N. Fiat ut M ad N ita Z K ad K H, ac connectatur recta H Z. Dico rectam H Z solvere problema. Quoniam enim Z K est ad K H ut Θ E ad E H, atque etiam ut M ad N; erit adeo Θ E ad E H ut M ad N. Recta itaque H Z solvet problema. Dico præterea eam solam hoc præstare. Nam si fieri potest, ducatur alia recta, ut Z Λ. Quoniam recta H K minor est recta K Λ, erit ratio Z K ad K H major ratione Z K ad K Λ. Verum Z K est ad K H ut Θ E ad E H; & Z K est ad K Λ ut Ξ E ad E Λ: quare ratio Θ E ad E H major est ra-



tione ZE ad EA. Quapropter recta ZA non abſcindit rationem rationi datæ æqualem. Conſimili argumento liquet nullam aliam rectam præter ſolam ZH ſolvere problema.

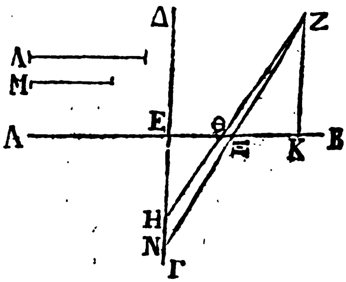
Manifeſtum autem eſt rectas puncto E propiores, majores ſemper rationes abſcindere, quam rectæ remotiores ab illo.

Caſ. II. Dein ducta ſit recta modo ſecundo, ut ZH, auferens à rectis ΓE, EB, rationem rationi datæ æqualem. Per punctum Z acta ſit recta ZK rectæ ΓΔ parallela: eritque ZK poſitione data; ac ob rectam AB poſitione datam, punctum K datum erit. At ratio HE ad EΘ data eſt, adeoque ratio ZK ad KΘ etiam datur. Recta autem ZK data eſt; quare etiam KΘ magnitudine & poſitione data erit: ac dato puncto K, punctum quoque Θ datum eſt.



Atqui punctum Z datur, adeoque recta ZΘH datur poſitione. Conſtat autem oportere rationem datam majorem eſſe ratione ZK ad KE.

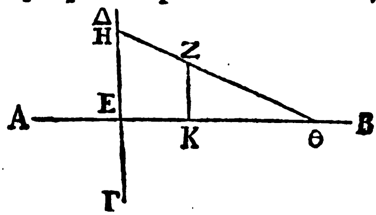
Componetur autem Problema hoc modo. Manente figura jam deſcripta; ſit ratio data major ratione ZK ad KE, nempe ratio Λ ad M. Fiat ut Λ ad M ita ZK ad KΘ, ac juncta ZΘ producatur ad H. Dico rectam ZH ſolvere Problema, eamque ſolam. Quoniam enim ZK eſt ad KΘ ut HE ad EΘ, erit HE ad EΘ ſicut Λ ad M. Recta itaque ZH ſolvit Problema. Dico & hanc ſolam id præſtare. Nam ſi fieri poteſt, ducatur alia ut recta ZN. Quoniam autem recta KΞ minor eſt quam KΘ, erit ratio ZK ad KΞ major ratione ZK ad KΘ. Eſt autem ZK ad KΞ ut NE ad EΞ, & ZK ad KΘ ut EH ad EΘ: quare ratio NE ad EΞ major eſt ratione HE ad EΘ, adeoque rationi datæ æqualis non eſt. Recta igitur ZN non ſolvit problema. Pari argumento liquet nullam aliam rectam præter ZH ſolvere problema.



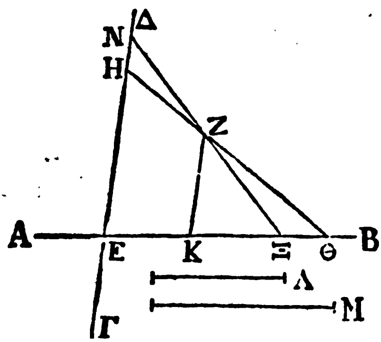
Manifeſtum autem eſt rectas puncto E propiores, ſemper

per rationes minores abſcindere quam remotiores ab illo.

Caſ. III. Jam ducta ſit recta, ut HΘ, juxta modum tertium, auferens à rectis BE, EΔ, rationem rationi datæ æqualem. Age rectam ZK rectæ ΓΔ parallelam; erit igitur recta ZK poſitione data. Sed recta quoque EB poſitione data eſt; adeoque punctum K datur. Ratio autem HE ad EΘ data eſt; quare ratio ZK ad KΘ datur: ac ob rectam ZK magnitudine datam, recta etiam KΘ datur magnitudine & poſitione. Dato autem puncto K, punctum quoque Θ datum erit: ac puncto Z dato, recta ΘZH poſitione datur. Ratio autem non eſt determinata, quia KE poteſt eſſe vel æqualis ipſi KΘ, vel illa major vel minor.



Componetur autem problema hoc modo. Manente figura jam deſcripta, rationi datæ æqualis ſit ratio Λ ad M: fiatque ut Λ ad M ita ZK ad KΘ; & jungatur ΘZ producaturque in H. Dico rectam ΘH ſolam ſolvere problema. Quoniam enim ZK eſt ad KΘ* ut Λ ad M, erit etiam HE ad EΘ ut Λ ad M; adeoque recta HΘ ſolvit problema. Dico & hanc ſolam id præſtare. Etenim ſi fieri poteſt, ducatur altera ut NΞ. Quoniam autem recta NE major eſt recta HE, recta vero EΞ minor eſt ipſa EΘ; ratio NE ad EΞ major erit ratione HE ad EΘ, adeoque illi æqualis non eſt. Unde manifeſtum eſt nullam aliam rectam problema ſolvere præter ipſam HΘ. Patet etiam rectas propiores puncto E, ſecundum rectam ΓΔ, auferre rationes minores quam quæ ſecantur à remotioribus ab eo.

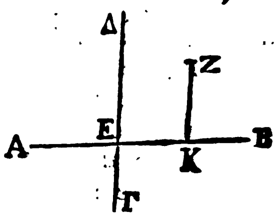


Invenimus itaque reſolutionem problematis juxta omnes modos; ejuſdemque compoſitionem oſtendimus per omnes caſus ejus. Manentibus autem deſcriptis, ac ducta recta pa-

* *Hactenus pertigit Traductio D. Bernardi.*

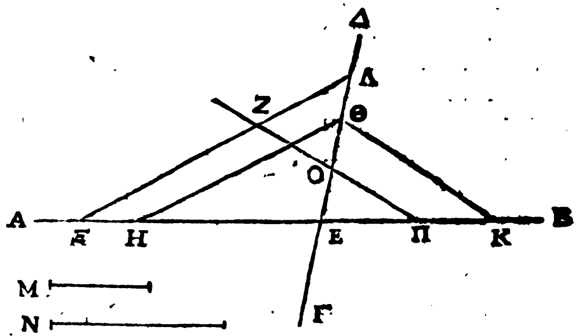
rallela

rallela ZK; Ratio data vel minor erit ratione ZK ad KE, vel major illa, vel æqualis illi. Quod si fuerit minor ratione ZK ad KE, componetur problema duobus modis, nempe primo ac tertio; non autem modo secundo, quia ratio data non est major quam ratio ZK ad KE. Si fuerit major quam ratio ZK ad KE, componetur problema duobus modis, nempe secundo & tertio: non autem juxta modum primum, quia ratio non est minor quam ratio ZK ad KE. At si ratio data æqualis fuerit rationi ZK ad KE, componetur unico tantum modo, eoque tertio: non enim fieri potest secundum modum primum, quia ratio non est minor ratione ZK ad KE; neque modo secundo, quia non est major ea.



SCHOLION.

Generaliter autem construuntur problemata hujus Loci hunc in modum. Sint rectæ datæ AB, ΓΔ *sese intersecantes in puncto* E: *Ratio autem proposita sit ratio* M *ad* N. *Fiat* EΘ *æqualis termino rationis* M, *ac* EH, EK, *ab utraque parte puncti* E, *æquales ipsi* N *termino alteri rationis: ac ducantur*



rectæ ΘH, ΘK. *Dico rectas omnes ipsis* ΘH, ΘK *parallelas auferre rationes rationi datæ* M *ad* N *æquales. Quapropter dato quovis puncto* Z, *ipsi* ΘH *parallela ducatur* ΛZΞ; *atque ipsi* ΘK *parallela* ZOΠ. *Dico* EΛ *esse ad* EΞ *ut* EΘ *ad* EH (*ob parallelas*) *hoc est ut* M *ad* N (*per constructionem.*) *Pariter* EO *est ad* EΠ *ut* EΘ *ad* EK, *sive ut* M *ad* N. *Rectæ*

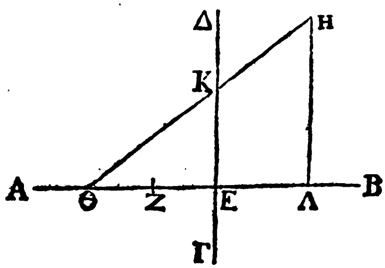
igitur

igitur ΛΞ, ΖΠ *satisfaciunt problemati, eæque solæ. Quod si altera è parallelis transeat per punctum* Ε; *altera tantum unico modo rem præstat.*

LOCUS QUARTUS.

Intersecent jam se mutuo rectæ ΑΒ, ΓΔ, in puncto Ε: ac sumatur in recta ΑΒ punctum Ζ; in recta vero ΓΔ, punctum Ε. Eritque punctum datum vel intra angulum ΔΕΒ, vel intra angulum ΑΕΔ, vel intra angulos iisdem deinceps. Cadat autem imprimis intra angulum ΔΕΒ, ut est punctum Η; ac educendæ sint rectæ è puncto Η, quæ auferant à rectis, quæ punctis Ε, Ζ adjacent, segmenta in ratione data. Hoc autem fieri potest secundum quatuor diversos casus: aut enim erunt segmenta è rectis ΕΔ, ΖΑ; vel ex ΕΔ, ΖΕ; vel ex ΕΓ, ΖΒ; vel denique ex ΕΔ, ΖΒ.

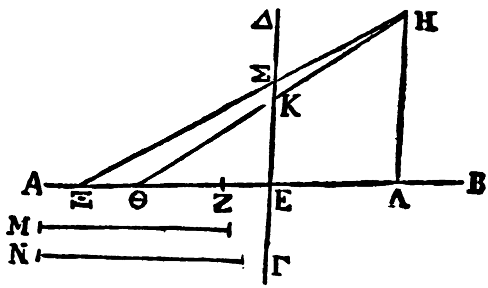
Cas. I. Ducatur jam secundum casum primum, recta ΗΘ auferens à rectis ΕΔ, ΖΑ, rationem ΕΚ ad ΖΘ, æqualem rationi datæ. Agatur recta ΗΛ ipsi ΔΕ parallela, adeoque punctum Λ datur: ac fiat ut ΕΚ ad ΖΘ ita ΛΗ ad ΖΑ. Dato autem puncto Ζ, punctum quoque Α datur: ac ob datum punctum Λ, etiam recta ΑΛ datur. Jam ΛΗ est ad ΖΑ sicut ΕΚ ad ΖΘ; adeoque permutando ΛΗ erit ad ΕΚ ut ΑΖ ad ΖΘ. Sed ΛΗ est ad ΕΚ ut ΛΘ ad ΘΕ; quapropter ΛΘ est ad ΘΕ ut ΑΖ ad ΖΘ, ac per conversionem rationis, erit ΘΛ ad ΛΕ ut ΖΑ ad ΑΘ; adeoque id quod fit sub ΛΕ in ΖΑ æquale erit contento sub ΑΘ in ΘΛ; quare rectangulum ΘΑ in ΘΛ datur. Applicandum est itaque ad rectam datam, nempe ad ipsam ΑΛ, rectangulum æquale rectangulo dato deficiens quadrato, ac habebitur utraque ΑΘ, ΘΛ data: adeoque punctum Θ datur. Dato autem puncto Η, ipsa ΗΘ datur positione.



Manifestum autem est quod applicatio hæc semper fieri potest; quia in compositione applicandum est ad rectam ΑΛ rectangulum æquale rectangulo ΛΕ in ΖΑ deficiens quadrato.

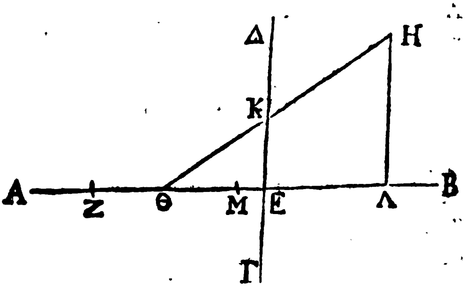
drato. Rectangulum enim Α Ζ in Ζ Λ majus est rectangulo Α Ε in Ζ Λ.

Componetur autem Problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, rectâque parallelâ Η Λ; sit ratio data sicut M ad N; ac fiat Λ Η ad Ζ Λ sicut M ad N: & applicetur rectæ Α Λ, rectangulum æquale rectangulo Α Ζ in Ε Λ deficiens quadrato. Sit rectangulum illud Α Θ in Θ Λ; ac jungatur Θ Η. Dico quod recta Θ Η, eaque sola, solvit problema; sive quod Κ Ε est ad Ζ Θ sicut M ad N. Rectangulum enim Α Θ in Θ Λ æquale est rectangulo Α Ζ in Ε Λ; erit itaque Θ Λ ad Λ Ε ut Α Ζ ad Θ Α; ac per conversionem rationis erit Θ Λ ad Θ Ε ut Α Ζ ad Ζ Θ. Sed Λ Θ est ad Θ Ε ut Λ Η est ad Ε Κ; quare Λ Η est ad Ε Κ sicut Α Ζ ad Ζ Θ; ac permutando Λ Η erit ad Ζ Α ut Ε Κ ad Ζ Θ. At Λ Η est ad Ζ Α sicut M ad N; quare Ε Κ est ad Ζ Θ sicut M ad N; quapropter recta Θ Η solvit problema. Dico etiam & hanc solam hoc præstare. Nam si fieri potest, ducatur alia, ut recta Η Ξ. Quoniam autem rectangulum Α Ζ in Ζ Λ majus est rectangulo Α Θ in Θ Λ, erit rectangulum Α Θ in Θ Λ majus rectangulo Α Ξ in Ξ Λ; rectangulum vero Α Θ in Θ Λ æquale est rectangulo Α Ε in Ζ Λ; *igitur rectangulum* Α Ε *in* Ζ Λ *majus est rectangulo* Α Ξ in Ξ Λ: quare ratio Ξ Λ ad Λ Ε minor erit ratione Ζ Α ad Α Ξ; adeoque per conversionem rationis ratio Λ Ξ ad Ε Ξ major est ratione Α Ζ ad Ζ Ξ. Sed ratio Λ Ξ ad Ξ Ε est ut Λ Η ad Ε Σ; quare ratio Λ Η ad Ε Σ major est ratione Α Ζ ad Ζ Ξ; ac permutando ratio Λ Η ad Ζ Α major erit ratione Ε Σ ad Ζ Ξ. Atqui ratio Λ Η ad Ζ Α est ut M ad N; adeoque ratio M ad N major est ratione Ε Σ ad Ζ Ξ, quapropter recta Η Ξ non solvit problema.

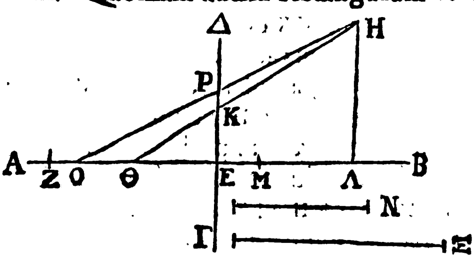


Manifestum autem est rectas puncto Ε propiores, auferre rationes majores quam quæ secantur à rectis remotioribus ab eodem.

Cas. II. Ducatur jam recta juxta casum secundum, ut Θ Η, auferens à rectis EΔ, ZE segmenta ZΘ, EK in ratione rationi datæ æquali. Ipsi ΔE parallela ducatur recta HΛ per punctum datum H; & fiat ut EK ad ZΘ, ita HΛ ad ZM. Datur autem recta HΛ, adeoque recta ZM datur & magnitudine & positione: ac ob datum punctum Z, etiam punctum M datur. Quoniam vero ΛH est ad ZM ut EK ad ZΘ; erit permutando ΛH ad EK sicut ZM ad ZΘ. Sed ΛH est ad EK sicut ΛΘ ad ΘE; adeoque ZM ad ZΘ est ut ΛΘ ad ΘE: ac per conversionem rationis erit MZ ad ΘM ut ΘΛ ad ΛE: quare rectangulum ZM in EΛ æquale est rectangulo ΛΘ in ΘM. Sed rectangulum ZM in EΛ datur, adeoque rectangulum ΛΘ in ΘM datum est, ad rectam datam, nempe MΛ, applicandum excedens quadrato. Punctum igitur Θ datur; ac dato puncto H, recta HΘ positione datur.



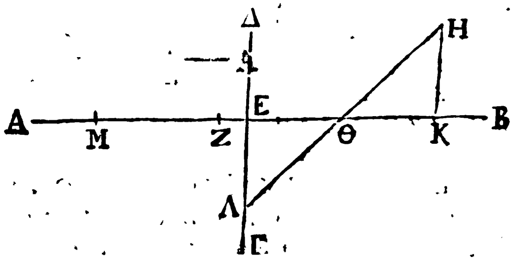
Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, sit ratio data ut N ad Ξ; ac fiat HΛ ad ZM ut N ad Ξ: dein applicetur ad rectam MΛ rectangulum æquale rectangulo ZM in EΛ excedens quadrato, nempe rectangulum ΛΘ in ΘM. Quoniam autem rectangulum ΛE in ZM excedens quadrato applicandum est ad rectam MΛ; ac rectangulum ΛZ in ZM majus est rectangulo ΛE in ZM, cui æquale est rectangulum ΛΘ in ΘM; facta applicatione punctum Θ cadet inter puncta E, Z. Actâque rectâ ΘH, dico quod ipsa ΘH solvit problema, eaque sola. Nam si fieri potest ducatur alia, puta HPO: Cum autem recta PE major est quam KE, ac recta ZO minor est quam ZΘ; ratio ipsius PE ad ZO major erit ratione EK ad ZΘ: adeoque sola recta HΘ solvit problema.



 Mani-

Manifestum autem est rectas propiores puncto E abscindere rationes minores, quam quæ secantur à remotioribus ab eo.

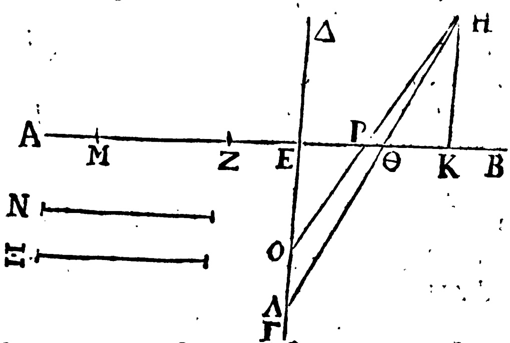
Cas. III. Ducatur jam recta secundum casum tertium, ut ΛH auferens à rectis EΓ, ZB rationem ΛE ad ΘZ æqualem rationi datæ. Agatur per punctum H recta HK ipsi ΓΔ parallela; ac patet quod recta HK datur magnitudine, quodque punctum K datur. Fiat jam KH ad ZM ut ΛE ad ΘZ. Data autem est ratio ΛE ad ΘZ; quare & ratio KH ad ZM datur, ac recta ZM datur magnitudine & positione: ac ob datum punctum Z punctum M datur; cumque punctum K datur, datur etiam recta KM. Quoniam autem KH est ad ZM ut ΛE ad ZΘ, permutando erit KH ad ΛE sicut ZM ad ZΘ. Sed KH est ad ΛE ut KΘ ad ΘE; quare KΘ est ad ΘE ut MZ ad ZΘ: adeoque componendo erit KE ad EΘ ut MΘ ad ΘZ. Per conversionem autem rationis erit EK ad KΘ ut ΘM ad MZ. Rectangulum itaque EK in MZ æquale est rectangulo MΘ in ΘK. Datur autem rectangulum KE in MZ, ob data latera ejus; quare datum est etiam rectangulum MΘ in ΘK, applicandum ad rectam datam MK deficiens quadrato: ac habebitur punctum Θ, quod quidem cadet inter puncta E & K; quia rectangulum ME in EK majus est rectangulo MZ in EK, sive MΘ in ΘK. Dato autem puncto H, etiam recta HΘΛ datur positione.



Construetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, ductâque rectâ parallelâ; sit ratio proposita sicut N ad Ξ. Fiat KH ad ZM sicut N ad Ξ & applicetur ad rectam KM rectangulum æquale rectangulo EK in ZM deficiens quadrato. Sit rectangulum illud MΘ in ΘK; ac jungatur recta HΘ, quæ producatur ad Λ. Dico quod recta HΛ solvit problema, auferens rationem ΛE ad ZΘ sicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum KE in ZM æquale est rectangulo MΘ in ΘK, erit EK ad KΘ sicut ΘM ad MZ; ac per conversionem rationis erit KE ad EΘ ut MΘ ad ΘZ: quare dividendo erit KΘ ad EΘ,

 sive

sive KH ad ΛE, sicut MZ ad ZΘ: ac permutando KH ad MZ erit ut ΛE ad ZΘ. Sed KH est ad MZ sicut N ad Ξ (per constructionem) quare ΛE erit ad ZΘ sicut N ad Ξ; adeoque recta HΛ satisfacit problemati. Dico etiam quod ea sola hoc præstat. Nam si fieri potest, ducatur alia ut OH; ac si secet recta HO rationem propositam, sive æqualem rationi N à Ξ, erit ΛE ad ZΘ sicut OE ad ZP. At ΛE est ad ZΘ sicut KH ad ZM, adeoque KH erit ad ZM ut OE ad ZP: ac permutando erit KH ad OE ut ZM ad PZ.

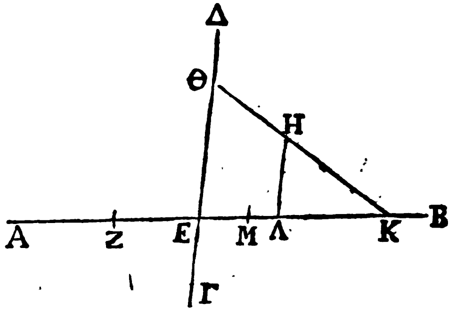


Est autem KH ad OE sicut KP ad PE; quare KP erit ad PE ut MZ ad ZP. Componendo itaque ac convertendo rationem, EK erit ad KP sicut MP ad MZ: unde rectangulum EK in MZ æquale erit rectangulo KP in MP. Sed rectangulum MΘ in ΘK æquale est rectangulo EK in MZ, adeoque rectangulum MΘ in ΘK æquale erit rectangulo MP in PK; quod fieri nequit: adeoque sola recta HΛ solvit problema.

Posito *autem quod rectangulum* MΘ *in* ΘK *sive rectangulum* EK *in* MZ minus fuerit rectangulo MP, in PK; patet quod ratio EK ad PK minor erit ratione MP ad MZ: ac per conversionem rationis erit ratio KE ad EP major ratione MP ad PZ; dividendo autem erit ratio KP ad PE major ratione MZ ad ZP. Sed KP est ad PE sicut KH ad OE; quare ratio KH ad OE major est ratione MZ ad ZP: & permutando ratio KH ad MZ major erit ratione OE ad ZP. Quoniam autem HK est ad MZ ut ΛE ad ZΘ, igitur ratio ΛE ad ZΘ major erit ratione OE ad ZP; adeoque recta ΛH majorem aufert rationem quam quæ abscinditur à recta OH: unde manifestum est rectas propiores puncto E auferre rationes minores quam quæ secantur à remotioribus ab eo.

Cas. IV. Ducatur jam recta secundum modum quartum, ut KΘ, auferens à rectis EΔ, ZB, rationem æqualem rationi datæ, nempe rationem EΘ ad KZ. Ducatur recta ΓΛΔ parallela,

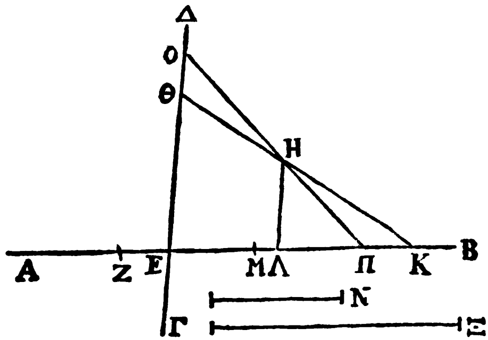
lela, ut HΛ; ac recta HΛ tam magnitudine quam positione data est; adeoque punctum Λ datur. Cum autem ratio EΘ ad KZ datur, ei fiat ratio HΛ ad ZM æqualis: ratione itaque ΛH ad ZM data, atque ipsa ΛH data, recta MZ etiam data est magnitudine & positione, ac ob cognitum punctum Z, punctum M etiam datur: dato autem puncto Λ, recta MΛ habetur. Verum cum EΘ est ad KZ ut ΛH ad ZM; permutando erit EΘ ad ΛH, sive EK ad KΛ, ut KZ ad ZM: ac dividendo erit EΛ ad ΛK sicut KM ad ZM. Rectangulum itaque EΛ in ZM æquale erit rectangulo MK in KΛ. Sed rectangulum EΛ in MZ datum est, adeoque & rectangulum MK in KΛ datur, applicandum ad rectam datam MΛ excedens quadrato, ut habeatur punctum K. Datis autem punctis K & H, recta etiam KHΘ positione datur.



Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, ductaque recta parallela, sit ratio data sicut N ad Ξ. Fiat HΛ ad ZM sicut N ad Ξ, & applicetur ad rectam MΛ rectangulum æquale rectangulo ΛE in MZ excedens quadrato, nempe rectangulum MK in KΛ. Jungatur KH ac producatur ad Θ. Dico quod recta ΘK solvit problema, sive quod aufert rationem EΘ ad ZK æqualem rationi N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum ΛE in ZM æquale est rectangulo MK in KΛ, erit EΛ ad ΛK sicut KM ad MZ; & componendo erit EK ad KΛ ut KZ ad MZ. Sed EK est ad KΛ ut EΘ ad ΛH; adeoque EΘ est ad ΛH sicut KZ ad MZ: ac permutando erit EΘ ad KZ sicut ΛH ad MZ. Atqui ΛH est ad MZ sicut N ad Ξ, adeoque EΘ est ad KZ ut N ad Ξ; quare recta KΘ solvit problema. Dico etiam quod & sola hoc præstat. Nam si fieri potest, ducatur alia, ut recta OΠ; ac si secet ipsa OΠ rationem æqualem rationi N ad Ξ, erit EO ad ZΠ sicut EΘ ad ZK. Est autem EΘ ad ZK ut ΛH ad ZM, adeoque erit EO ad ZΠ sicut ΛH ad

ZM;

ZM; & permutando erit EO ad ΛH ut ZΠ ad ZM. Sed EO est ad ΛH ut EΠ ad ΠΛ, adeoque EΠ est ad ΠΛ sicut ΠZ ad ZM: quare dividendo erit EΛ ad ΠΛ ut ΠM ad ZM, ac rectangulum EΛ in ZM æquale erit rectangulo ΠΛ in ΠM. Cum autem rectangulum EΛ



in ZM æquale est rectangulo MK in KΛ, rectangulum MK in KΛ æquale erit rectangulo MΠ in ΠΛ; quod fieri nequit: adeoque sola recta KΘ solvit problema.

Quænam autem ex illis auferat rationem majorem hunc ad modum cognoscitur. Quoniam rectangulum MK in KΛ, sive ΛE in MZ, majus est rectangulo MΠ in ΠΛ; erit ratio EΛ ad ΛΠ major ratione ΠM ad MZ; ac componendo ratio EΠ ad ΠΛ major quam ratio ΠZ ad ZM. Sed ratio EΠ ad ΠΛ est ut EO ad ΛH; quare ratio EO ad ΛH major erit ratione ΠZ ad ZM: ac permutando erit ratio EO ad ΠZ major quam ΛH ad ZM. Ratio autem ΛH ad ZM est ut EΘ ad KZ, adeoque ratio EO ad ΠZ major erit ratione EΘ ad KZ: quare recta KΘ aufert rationem minorem quam quæ secatur à recta OΠ.

Hinc manifestum est rectas puncto B propiores abscindere rationes minores, quam quæ secantur à rectis remotioribus ab eo.

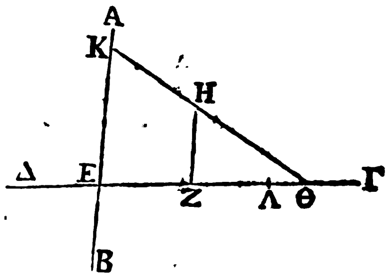
Possibile autem est problema hoc quomodocunque propositum, & componi potest juxta omnes casus prædictos, sed uno tantum modo: nam in omnibus non habentur limites.

LOCUS QUINTUS.

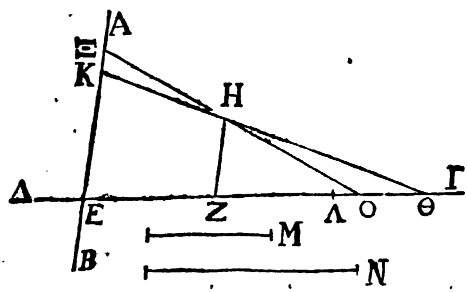
Sit punctum datum H intra angulum ΓEA; ac ductâ per punctum H rectâ ipsi AB parallelâ, sumi potest punctum Z *in recta* ΓE, vel ultra, vel citra, vel super ipsam rectam parallelam. Cadat autem imprimis super ipsam parallelam; ac duci

duci possunt rectæ è puncto H tribus modis diversis: vel enim ducta auferet rationem à rectis Γ Z, E Λ; vel à rectis E Z, E B; vel denique à rectis E Λ, Z Δ.

Cas. I. Primo autem ducatur, juxta modum primum, secans à rectis Γ Z, E A rationem E K ad Z Θ æqualem rationi datæ. Fiat Z H ad Z Λ sicut E K ad Z Θ. Cumque ratio H Z ad Z Λ datur, atque ipsa Z H datur, etiam recta Z Λ datur: ac dato puncto Z punctum Λ datur; adeoque recta Z Λ datur magnitudine & positione. Quoniam vero E K est ad Z Θ sicut H Z ad Z Λ, erit permutando E K ad Z H ut Z Θ ad Z Λ. Sed E K est ad Z H ut E Θ ad Θ Z, adeoque E Θ est ad Θ Z ut Θ Z ad Z Λ; quare dividendo erit E Z ad Θ Z sicut Θ Λ ad Z Λ: rectangulum itaque E Z in Z Λ æquale est rectangulo Θ Z in Θ Λ. At rectangulum E Z in Z Λ datur; ergo rectangulum Z Θ in Θ Λ etiam datur, applicandum ad rectam datam Λ Z excedens quadrato: unde punctum Θ innotescet. Dato autem puncto H, recta quoque Θ K datur positione.



Componetur autem hoc problema. Manentibus prius descriptis, ductaque recta parallela; sit ratio data sicut M ad N. Fiat H Z ad Z Λ sicut M ad N; & applicetur ad rectam Z Λ rectangulum æquale rectangulo E Z in Z Λ excedens quadrato, ut rectangulum Z Θ in Θ Λ. Jungatur H Θ ac producatur ad K. Dico rectam Θ K solvere problema, sive quod E K est ad Z Θ in ratione M ad N. Quoniam enim rectangulum E Z in Z Λ æquale est rectangulo Z Θ in Θ Λ, erit E Z ad Z Θ sicut Θ Λ ad Λ Z; & componendo erit E Θ ad Θ Z *sicut* Θ Z *ad* Λ Z. *Sed* E Θ *est ad* Θ Z ut E K ad Z H, adeoque E K est ad Z H sicut

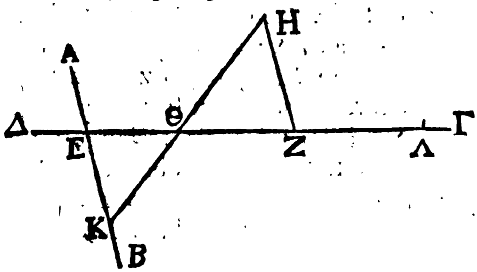


Θ Z

ΘZ ad ZΛ: quare permutando erit EK ad ΘZ sicut ZH ad ZΛ. Est autem HZ ad ZΛ (per constructionem) sicut M ad N; quare EK est ad ZΘ ut M ad N, ac recta ΘK solvit problema. Dico & hanc solam id præstare. Nam si possibile sit, ducatur alia ut ΞO: quæ si auferat rationem æqualem rationi M ad N, erit EK ad ZΘ sicut EΞ ad ZO. Cumque EK est ad ZΘ ut HZ ad ZΛ, erit ZH ad ZΛ ut EΞ ad ZO: ac permutando erit EΞ ad ZH ut ZO ad ZΛ. At EΞ est ad ZH sicut EO ad ZO, adeoque EO est ad ZO ut OZ ad ZΛ: unde dividendo erit EZ *ad* ZO *sicut* OΛ *ad* ZΛ; *adeoque rectangulum* EZ in ZΛ æquale erit rectangulo ZO in OΛ. Sed rectangulum EZ in ZΛ æquale est rectangulo ZΘ in ΘΛ; quare rectangulum ZΘ in ΘΛ æquale erit rectangulo ZO in OΛ, quod fieri non potest: adeoque sola recta ΘK solvit problema. Quoniam autem recta EΞ major est, quam recta EK, ΘZ vero major est quam recta ZO; erit ratio EΞ ad ZO major ratione EK ad ZΘ; adeoque recta ΘK aufert rationem minorem, quam quæ abscinditur ab ipsa OΞ.

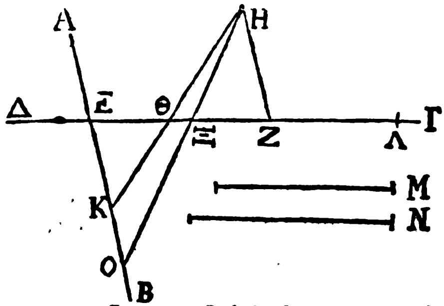
Manifestum itaque est rectas propiores puncto E auferre rationes minores, quam quæ secantur à remotioribus ab eo.

Cas. II. Ducatur jam, juxta modum secundum, recta HK, auferens à rectis EZ, EB rationem KE ad ΘZ, æqualem rationi datæ. Rationi datæ KE ad ZΘ æqualis sit ratio HZ ad ZΛ; data autem ratione HZ ad ZΛ, atque ipsâ HZ, data est etiam recta ZΛ; cumque punctum Z datur, punctum Λ quoque datum est, ac recta ZΛ datur magnitudine & positione. Quoniam autem KE est ad ZΘ ut HZ ad ZΛ, erit permutando KE ad ZH, sive EΘ ad ΘZ, ut ZΘ ad ZΛ; ac componendo erit EZ ad ΘZ, ut ΘΛ ad ΛZ: adeoque rectangulum EZ in ΛZ æquale rectangulo ΛΘ in ΘZ. Applicando igitur hoc ad rectam datam ZΛ excedens quadrato, habebitur punctum Θ, quod semper cadet inter puncta E, Z; dato autem puncto H, etiam recta HΘK positione datur.



Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus descriptis,

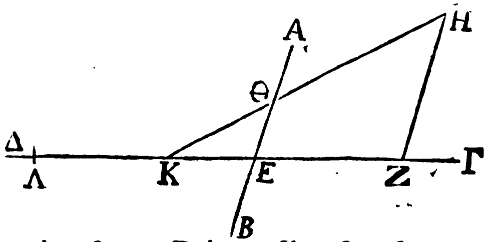
descriptis, rectaque parallela; sit ratio data sicut M ad N, cui æqualis sit ratio HZ ad ZΛ; & applicetur ad ΛZ rectangulum æquale rectangulo EZ in ΛZ excedens quadrato. Sitque rectangulum illud ΛΘ in ΘZ; ac jungatur recta ΘH, quæ producatur ad K. Dico rectam HK solvere problema, sive quod KE est ad ZΘ sicut M ad N. Quoniam enim rectangulum EZ in ZΛ æquale est rectangulo ΛΘ in ΘZ, erit resolvendo in proportionem, EZ ad ZΘ ut ΘΛ ad ΛZ; ac dividendo erit EΘ ad ΘZ ut ΘZ ad ZΛ. Sed KE est ad ZH ut EΘ ad ΘZ, adeoque KE est ad ZH ut ΘZ ad ZΛ, ac permutando KE ad ΘZ ut ZH ad ZΛ. Est autem ZH ad ZΛ sicut M ad N, quare KE est ad ZΘ sicut M ad N: quapropter recta HK satisfacit problemati.



Dico etiam quod ea sola hoc præstat: nam si aliter possibile sit, ducatur alia recta ut HO; ac si secet recta HO rationem æqualem rationi M ad N, erit KE ad ZΘ sicut EO ad ZΞ. Cumque EK est ad ZΘ, sicut HZ ad ZΛ, etiam erit OE ad ZΞ sicut HZ ad ZΛ; ac permutando erit OE ad ZH ut ZΞ ad ZΛ. Sed OE est ad ZH ut EΞ ad ZΞ, adeoque EΞ erit ad ΞZ ut ΞZ ad ZΛ; ac componendo EZ erit ad ΞZ ut ΞΛ ad ZΛ: quare rectangulum EZ in ZΛ æquale erit rectangulo ΞZ in ΞΛ. Hoc autem fieri nequit, quia fecimus rectangulum ΛΘ in ΘZ æquale rectangulo EZ in ZΛ; quapropter sola recta HK solvit problema. Quoniam autem EO major est quam EK, recta vero ZΞ minor quam ZΘ; manifestum est rectam HK abscindere rationem minorem quam recta OH.

Cas. III. Ducatur jam secundum modum tertium recta KH, auferens à rectis EA, ZΔ rationem EΘ ad ZK æqualem rationi datæ. Quoniam ratio EΘ ad ZK data est, eidem æqualis sit ratio HZ ad ZΛ: datâ autem rectâ ZH etiam recta ZΛ datur: cumque punctum Z datur, punctum quoque Λ datum erit, ac recta ZΛ datur tam magnitudine quam positione. Jam vero EΘ est ad ZK sicut HZ ad ZΛ, ac permutando EΘ erit

erit ad HZ sicut KZ ad ZΛ. Sed EΘ est ad ZH ut EK ad KZ, adeoque EK est ad KZ ut KZ ad ZΛ; quare invertendo ac convertendo rationem, erit KZ ad ZE sicut ZΛ ad ΛK: quocirca rectangulum ΛZ in ZE æquale est rectangulo KZ in ΛK. At vero rectangulum ΛZ in ZE datur, ob data ejusdem latera; adeoque rectangulum ZK in ΛK etiam datur. Dein applicando ad rectam datam ZΛ rectangulum prædictum deficiens quadrato, habebitur punctum K: dato autem puncto H, recta HK etiam positione datur.

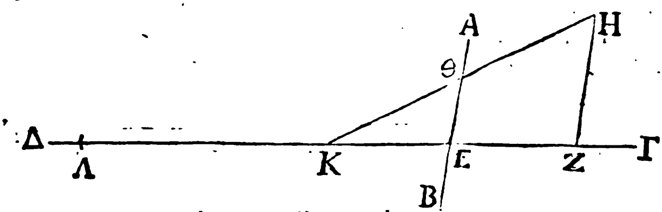


Quoniam autem requiritur ad compositionem, ut fiat ratio HZ ad ZΛ æqualis rationi datæ, atque ut applicetur ad rectam ZΛ rectangulum æquale rectangulo ΛZ in ZE deficiens quadrato, nempe rectangulum ZK in KΛ; *cadet punctum* K *in recta* EΛ, eritq; recta quæsita HK, quæ ducta solvet problema. At non semper possibile est talem rectam ducere, quoties scilicet rectangulum ΛZ in ZE majus fuerit quadrato ex dimidio ipsius ΛZ: quapropter applicatio fieri nequit: adeoque constructio problematis non semper possibilis est, neque in omni casu. Fit autem modo singulari, si recta quæsita occurrat rectæ ZΛ in ipsius medio ad punctum K, ac sit rectangulum ΛZ in ZE æquale rectangulo ZK in KΛ, ut sic satisfaciat problemati.

Determinatur autem ratio hæc, capiendo rationem datæ HZ ad quæsitam ZΛ talem, ut si dividatur recta ZΛ bifariam in K, rectangulum ΛZ in ZE æquale sit rectangulo ZK in KΛ. Hoc autem efficitur, si inveniatur in recta EZ punctum quoddam ut Λ, ita ut divisâ ZΛ bifariam in K, rectangulum ΛZ in ZE æquale sit rectangulo KZ in KΛ. Puta factum. Cumque rectangulum ΛZ in ZE æquale est rectangulo KZ in KΛ, erit ZΛ ad ΛK sicut KZ ad ZE. Recta autem ZΛ duplum est ipsius ΛK, adeoque KZ etiam duplum erit ipsius ZE, ac recta ZE æqualis erit ipsi EK. At recta ZE datur, adeoque & EK datur magnitudine & positione. Datis autem punctis E, K & Z, datur quoque recta ZK cui æqualis est KΛ; adeoque recta KΛ

D datur

datur magnitudine & positione: ac dato puncto K, punctum Λ etiam datur: punctum igitur quæsitum, in quo habetur terminus rationum, est punctum Λ. Dico præterea, quod si jungatur recta H K, erit Θ E ad Z K sicut H Z ad Z Λ; etenim

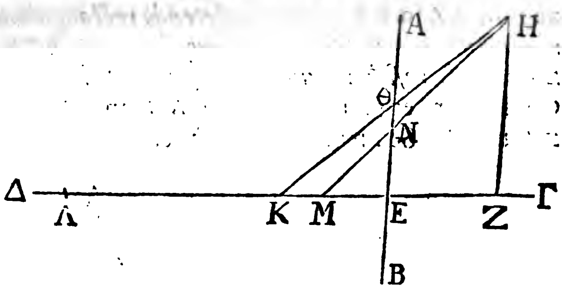


recta K E *dimidium est ipsius* Z K, *uti* Z K *dimidium ipsius* Λ Z: adeoque erit Λ Z ad Z K ut Z K ad K E, hoc est, ut H Z ad E Θ; ac permutando erit H Z ad Z Λ ut Θ E ad Z K. Componetur autem ratio ista extrema, si fiat recta E K ipsi Z E æqualis, ac jungatur H K.

Imprimis autem inquirendum est, an hæc recta H K auferat rationem majorem vel minorem quavis alia, per punctum H ducenda, rectisque E A, Z Δ occurrente: quod quidem hunc in modum determinatur.

Manentibus jam descriptis, rectâque parallelâ; fiat recta E K æqualis ipsi E Z. Junctâ rectâ H K, examinandum est an recta H K auferat rationem E Θ ad Z K, majorem quam alia quævis recta per punctum H ducta, rectisque E A, Z Δ occurrens. Fiat recta K Λ æqualis ipsi K Z, ac rectangulum Λ Z in Z E æquale erit rectangulo Z K in K Λ; & ratio E Θ ad Z K erit ut H Z ad Z Λ sive ut H Z ad quater Z E. Agatur recta alia ut H M; ac comparanda venit ratio E Θ ad Z K cum ratione N E ad Z M. Cumque E Θ est ad Z K ut Z H ad Z Λ, conferenda est ratio H Z ad Z Λ cum ratione N E ad Z M; ac permutando, conferenda est ratio H Z ad N E cum ratione Λ Z ad Z M. At Z H est ad E N ut Z M ad M E; quare comparanda est ratio Z M ad M E cum ratione Λ Z ad M Z. Ac convertendo rationem, conferenda est ratio M Z ad Z E cum ratione Λ Z ad Λ M: unde conferendum est rectangulum Λ Z in Z E cum rectangulo M Z in M Λ. Quoniam autem rectangulum Z K in K Λ æquale est rectangulo Λ Z in Z E, conferatur rectangulum Z K in K Λ cum rectangulo Z M in M Λ. Manifestum autem est quod rectangulum Z K in K Λ majus est rectangulo

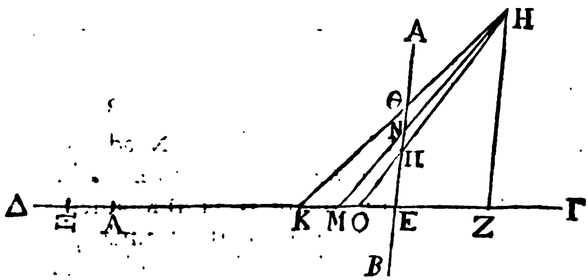
angulo ZM in MΛ, quia K est in medio ipsius ZΛ: rectangulum itaque ZM in MΛ minus est rectangulo KZ in KΛ. Cumque rectangulum ΛZ in ZE æquale est rectangulo KZ in KΛ, igitur rectangulum ZM in MΛ minus erit rectangulo ΛZ in ZE; adeoque ratio ZM ad ZE minor erit ratione ZΛ ad ΛM: ac convertendo rationem, ZM ad ME major erit ratione ZΛ ad ZM.



Sed ZM est ad ME ut ZH ad EN; quare ratio ZH ad EN major est ratione ΛZ ad ZM: & permutando erit ratio ZH ad ΛZ major ratione EN ad ZM. Est autem ZH ad ZΛ ut EΘ ad ZK, ergo ratio EΘ ad ZK major est ratione EN ad ZM; quare recta HK aufert rationem majorem quam quæ secatur à recta HM: unde patet rationem EΘ ad ZK majorem esse rationibus quibuscunque, quæ abscindi possint à rectis quibusvis per punctum H ductis, rectisque EA, ZΔ occurrentibus.

Dico etiam quod rectæ propiores ipsi HK auferunt semper rationes majores, quam quæ secantur à remotioribus ab ea. Quoniam enim ratio NE ad ZM minor est ratione EΘ ad ZK, ac EΘ est ad ZK ut ZH ad ZΛ: erit ratio NE ad ZM minor ratione ZH ad ZΛ. Fiat itaque ut NE ad ZM ita ZH ad rectam aliam, majorem quam ZΛ, puta ad ZΞ: adeoque erit NE ad ZM ut ZH ad ZΞ. Sed & juxta resolutionem præmissam, constat rectangulum ZΞ in ZE æquale esse rectangulo ZM in MΞ, ob rationem NE ad ZM æqualem rationi HZ ad ZΞ. Ducatur jam recta alia ut OH, ac comparanda sit ratio NE ad ZM cum ratione ΠE ad ZO. Est autem NE ad ZM ut HZ ad ZΞ; quare permutando, comparanda est ratio ZH ad EΠ cum ratione ΞZ ad ZO. Sed ratio ZH ad EΠ est ut ZO ad OE, *adeoque comparanda est ratio* ZO *ad* OE cum ratione ΞZ ad ZO; ac per conversionem rationis, comparanda est ratio ZO ad ZE cum ratione ΞZ ad ΞO: & conferendum rectangulum ΞZ in ZE cum rectangulo ZO in ΞO.

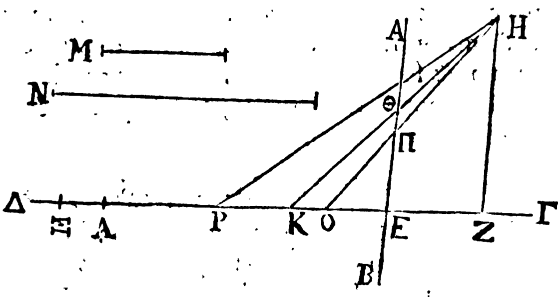
Sed rectangulum ΞZ in ZE æquale est rectangulo ZM in MΞ; quapropter conferendum est rectangulum ZM in MΞ cum rectangulo ZO in OΞ. Conferatur etiam rectangulum ZK in KΞ cum rectangulo ZM in MΞ. Est autem rectangulum ΞZ in ZE æquale rectangulo ZM in MΞ; comparandum est itaque rectangulum ZK in KΞ cum rectangulo ΞZ in ZE. Demonstratum autem est rectangulum ZK in KΛ æquari rectangulo ΛZ in EZ; *quare auferendo rectangulum* ZK *in* KΛ *è rectangulo* ZK *in* KΞ, *ac rectangulum* ΛZ *in* ZE *è rectangulo* ΞZ *in* ZE, *residua erunt rectangula* ZK *in* ΛΞ *&* EZ *in* ΞΛ. Conferatur ergo rectangulum ΛΞ in ZK cum rectangulo ΞΛ in EZ. Sed manifestum est rectangulum ΞΛ in ZK ma-



jus esse rectangulo ΞΛ in EZ; *quibus additis ad æqualia* rectangula ZK *in* KΛ & ΛZ in EZ, fiet rectangulum ZK in KΞ majus rectangulo ΞZ in ZE. Sed ZM in MΞ æquale est rectangulo ΞZ in ZE, adeoque ZK in KΞ majus est rectangulo ZM in MΞ: dato itaque quovis puncto O, rectangulum ZM in MΞ majus erit rectangulo ZO in OΞ. At rectangulum ΞZ in ZE æquale est rectangulo ZM in MΞ; *adeoque rectangulum* ΞZ *in* ZE *majus erit rectangulo* ZO *in* OΞ: unde ratio OZ ad ZE minor erit ratione ΞZ ad ΞO. Ac convertendo rationem, ratio OZ *ad* OE major erit ratione ΞZ ad ZO. Ratio autem OZ ad OE est ut ZH ad EΠ; quare ratio HZ ad EΠ major erit ratione ΞZ ad ZO: ac permutando, ratio HZ ad ΞZ *major erit ratione* EΠ *ad* ZO. *Sed* HZ *est ad* ΞZ ut NE ad ZM; quare ratio NE ad ZM major erit ratione ΠE ad ZO: quocirca recta HM aufert rationem majorem quam quæ secatur à recta HO. Hinc manifestum est rectas propiores ipsi HK abscindere rationes majores, quam quæ secantur à remotioribus ab ea. Patet etiam ex jam descriptis rationem maximam

mam E Θ ad Z K æqualem esse rationi Z H ad quater Z E, quia Z Λ est quater Z E.

Componetur autem problema hunc in modum. Iisdem manentibus quæ supra, ac ductâ rectâ parallelâ; fiat recta E K æqualis ipsi Z E, ac jungatur H K. Hæc recta H K auferet rationem majorem, quam quævis alia recta per punctum H ducta, ipsisque E A, Z Δ occurrens. Ratio autem proposita vel erit æqualis rationi E Θ ad Z K, hoc est, rationi H Z ad quater Z E, (juxta jam demonstrata) vel major erit ratione E Θ ad Z K, vel minor erit ea. Si autem ratio data æqualis fuerit rationi E Θ ad Z K, recta H K solvit problema, eaque sola: quia rectæ huic propiores semper auferunt rationes majores, quam quæ sunt remotiores ab ea. At si major fuerit ratio quam E Θ ad Z K, impossibile erit problema; quia ratio proposita



major est maximâ. Quod si ratio M ad N minor fuerit quam ratio E Θ ad Z K; fiat recta Z K æqualis ipsi K Λ: eritque rectangulum Λ Z in Z E æquale rectangulo Z K in K Λ, ac ratio E Θ ad Z K æqualis rationi H Z ad Z Λ. Quoniam autem ratio M ad N minor est quam ratio H Z ad Z Λ, faciamus ut M ad N ita H Z ad rectam aliam ipsâ Z Λ longiorem, puta ad Z Ξ. Est vero recta K Z major quam ipsa Z E; quare rectangulum Ξ Λ in K Z majus erit rectangulo Ξ Λ in E Z. Rectangulum autem Λ Z in Z E æquale est rectangulo Z K in K Λ; adeoque si applicetur ad rectangulum Z K in K Λ rectangulum Z K in Ξ Λ, ac ad rectangulum Λ Z in E Z rectangulum Ξ Λ in E Z, erit totum rectangulum Z K in K Ξ majus rectangulo toto Ξ Z in Z E: quare possibile erit applicare ad rectam Z Ξ rectangulum æquale rectangulo Ξ Z ad Z E, duobus modis, ab utraque scilicet parte puncti K; & habebuntur puncta in rectis quæsitis, nempe O & P. Junctisque rectis H O, H P, dico

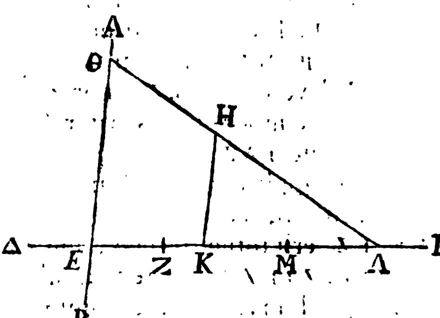
dico utramque ex illis problema solvere. Etenim rectangulum ΞZ in ZE æquale est rectangulo ZO in OΞ; quare OZ erit ad ZΞ ut ΞZ ad OΞ: ac convertendo rationem, OZ erit ad OE ut ΞZ ad OZ. Sed OZ est ad OE sicut HZ ad EΠ; quare HZ est ad EΠ ut ΞZ ad ZO: ac permutando, HZ erit ad ZΞ ut EΠ ad ZO. Est vero HZ ad ZΞ, ut M ad N; adeoque M est ad N ut EΠ ad ZO: quapropter recta HO solvit problema. Ac pari argumento demonstratur rectam HP idem præstare; utraque itaque HO, HP satisfacit quæsito.

Invenimus itaque Resolutionem problematis secundum omnes casus ejus, ac Compositionem ostendimus juxta omnes modos. Ductâ autem rectâ parallelâ, erit ratio data vel æqualis rationi ZH ad quater ZE, vel erit major eâ, vel minor. Quod si æqualis fuerit, componetur problema juxta casum primum & secundum, ac modo singulari juxta casum tertium. Si major fuerit, componi potest dupliciter; modo nempe primo, & secundo. At si minor fuerit ratio, tum quatuor modis fieri potest Constructio; nempe primo, & secundo, ac dupliciter juxta tertium.

LOCUS SEXTUS.

Cadat jam recta HK, per punctum H ducta ipsique AE parallela, ultra punctum Z; sive ut sit punctum Z inter illam & punctum E. Ac recta duci potest per punctum H, juxta quatuor casus; vel enim auferet rationem à rectis ΓZ, EA; vel à ΓZ, EB; vel à rectis ZE, EB; vel denique à ZΔ, EA.

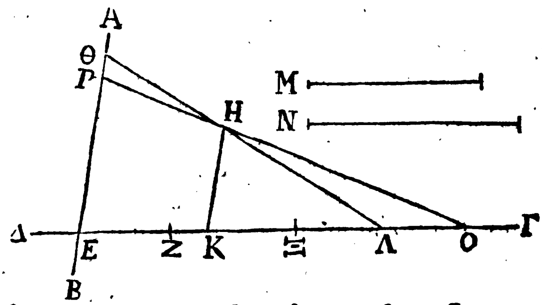
Cas. I. Imprimis autem ducatur juxta casum primum recta ΘΛ, auferens à rectis ΓZ, EA rationem EΘ ad ZΛ æqualem rationi datæ. Fiat autem ratio KH ad ZM æqualis rationi EΘ ad ΛZ; ac datâ rectâ HK, recta etiam ZM datur magnitudine & positione; cumque punctum Z datur, datum est quoque punctum M.



Quoniam autem EΘ est ad ZΛ sicut HK ad ZM; erit permutando, EΘ ad HK

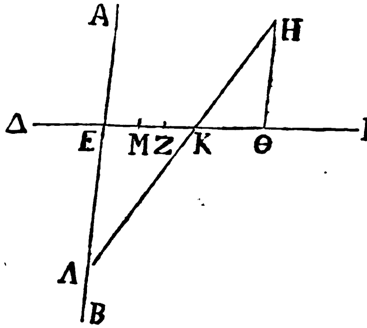
HK sicut ΛZ ad ZM. Sed ratio EΘ ad HK est ut ΛE ad ΛK, quare EΛ erit ad ΛK ut ΛZ ad ZM: ac dividendo, EK erit ad KΛ *ut* ΛM *ad* ZM, *adeoque rectangulum* EK *in* ZM æquale erit rectangulo KΛ in ΛM. Rectangulum autem MZ in EK datur, dato utroque ejus latere; itaque rectangulum KΛ in ΛM datur, applicandum ad rectam datam KM excedens quadrato; unde punctum Λ datur, ac recta ΛΘ positione data est.

Sic autem componetur problema hoc. Iisdem positis quæ supra, ductâque rectâ parallelâ; sit ratio data sicut M ad N, ac fiat HK ad ZΞ sicut M ad N; dein applicetur ad rectam KΞ rectangulum æquale rectangulo ΞZ in KE excedens quadrato, nempe rectangulum ΛK in ΛΞ; & jungatur recta ΛH quæ producatur ad Θ. Dico quod recta ΛΘ solvit problema, sive quod ratio EΘ ad ZΛ est ut M ad N. Quoniam enim rectangulum EK in ZΞ æquale est rectangulo KΛ in ΛΞ; erit EK ad KΛ sicut ΛΞ ad ΞZ: adeoque componendo, erit EΛ ad ΛK, sive EΘ ad HK, sicut ΛZ ad ZΞ: ac permutando, erit EΘ ad ΛZ sicut HK ad ZΞ. At HK est ad ZΞ sicut M ad N, adeoque recta ΛΘ solvit problema.



Dico etiam quod sola hoc præstat. Nam si possibile sit ducatur alia ut OP. At si recta OP anferat rationem æqualem rationi M ad N, erit ratio EP ad ZO æqualis rationi ΘE ad ZΛ. Quod fieri nequit, cum evidenter minor sit ratio illa. Ac patet rectas propiores puncto E, ut recta OP, auferre rationes minores quam quæ abscinduntur à remotioribus ab eo.

Cas. II. Manentibus quæ prius, ductâque rectâ parallelâ; ducatur jam juxta modum secundum recta HΛ, auferens ab ipsis ΓZ, EB rationem ΛE ad ZK æqualem rationi datæ. Fiat ΘH ad ZM sicut ΛE ad ZK. Cumque recta ΘH datur, recta ZM etiam datur & magnitudine & positione: ac dato puncto Z, punctum M datur; adeoque cum punctum Θ detur, recta quoque ΘM data est magnitudine & positione. Jam ΛE est ad ad ZK ut ΘH ad ZM; quare permutando, ΛE erit ad ΘH ut est KZ ad ZM. Sed ΛE est ad ΘH sicut EK ad KΘ; *quare* EK *est ad* KΘ *sicut* KZ *ad* ZM; ac componendo, EΘ ad ΘK sicut KM ad MZ: *rectangulum itaque* EΘ *in* MZ *æquale est rectangulo* ΘK *in* KM. Datum autem est rectangulum EΘ in MZ, dato nempe utroque ejus latere; adeoque rectangulum MK in KΘ datur: quare applicando illud ad rectam MΘ deficiens quadrato, punctum K datur. Dato autem puncto H, recta quoque HKΛ positione data erit.



Quoniam autem in Compositione oportet fieri rationem ΘH ad ZM æqualem rationi datæ, & applicari ad rectam ΘM rectangulum æquale rectangulo ΘE in ZM deficiens quadrato; cadet punctum K in recta ΘZ. At non semper possibile est rectam quæsitam ducere. Etenim si rectangulum ΘE in ZM majus fuerit quadrato dimidii ipsius ΘM, tum fieri non potest applicatio; adeoque non semper neque in omni casu construi potest problema.

Fit autem modo singulari, si ducatur recta transiens per punctum K, quod in medio sit ipsius ΘM, ea lege ut rectangulum ΘK in KM æquale sit rectangulo ΘE in ZM; quæ proinde satisfaciet problemati. Obtinebitur autem extrema illa ratio, si ponamus rationem ΘH ad ZM æqualem illi, ac sectâ ipsâ ΘM bifariam in K rectangulum ΘK in KM æquale fuerit rectangulo EΘ in ZM. Inquirendum igitur est punctum M in recta ZΔ, tale, ut, si bisecetur ΘM in puncto K, habeatur rectangulum ΘE in ZM æquale rectangulo ΘK in KM. Erit igitur EΘ ad ΘK sicut KM ad MZ; ac per conversionem rationis, ΘE ad EK erit ut MK ad KZ. Sed KM æqualis est ipsi KΘ, adeoque erit ΘE ad EK sicut ΘK ad KZ; permutando autem erit EΘ ad ΘK sicut EK ad KZ. Per conversionem vero rationis EΘ erit ad EK sicut EK ad EZ: quare recta EK media proportionalis est inter EΘ & EZ. Utraque autem ΘE, EZ datur, adeoque ipsa EK datur

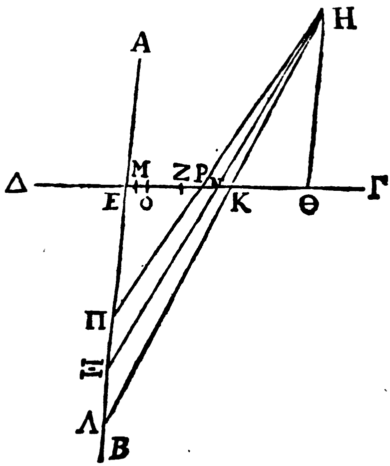
magnitu-

magnitudine & positione; ac ob datum punctum E punctum K etiam datur. Cumque punctum Θ datur, ipsa ΘK data est; cui æqualis est recta KM: quapropter dato puncto K etiam punctum M datur.

Componetur autem propositio hæc in hunc modum. Capiatur media proportionalis inter ipsas EΘ, EZ; sitque ea recta EK. Manifestum autem est rectam ΘK majorem esse quam KZ. Quoniam enim EΘ est ad EK sicut EK ad EZ; differentia antecedentium ad differentiam consequentium, sive ΘK ad KZ, erit in eadem ratione. Sed EΘ major est quam EK, adeoque ΘK major est quam KZ. Fiat autem ipsi ΘK æqualis recta KM; eritque punctum M punctum quæsitum: hoc est, rectangulum ΘE in ZM æquale erit rectangulo MK in KΘ. Etenim quia EΘ est ad EK ut KE ad EZ; erit per conversionem rationis ac permutando, ΘE ad EK ut ΘK ad KZ. Sed ΘK *æqualis est ipsi* MK, *quare* ΘE *erit* ad EK ut MK ad KZ; ac per conversionem rationis, EΘ erit ad KΘ sicut MK ad MZ: quapropter rectangulum ΘE in MZ æquale erit rectangulo MK in KΘ. Junctâ itaque KH, ac in directum productâ, dico quod recta HΛ satisfacit proposito: sive quod ΛE est ad ZK ut ΘH ad ZM. Namque rectangulum ΘE in ZM æquale est rectangulo MK in KΘ, unde EΘ est *ad* ΘK sicut KM ad MZ; ac dividendo EK erit ad KΘ sicut KZ ad ZM. Sed EK est ad KΘ ut ΛE est ad ΘH; quare ΛE *est ad* ΘH ut KZ ad ZM, & permutando ΛE est ad KZ ut ΘH ad ZM. Quocirca rite construitur, si capiatur EK media proportionalis inter ipsas ΘE, EZ; ac juncta recta HK producatur ad Λ.

Jam inquirendum est, an recta HΛ auferat rationem ΛE ad ZK, majorem vel minorem præ omnibus rectis quæ duci possunt per punctum H, quæque rectis EB, ZΓ occurrunt. Determinatur autem problema hunc in modum. Manentibus descriptis, una cum rectâ parallelâ; capiatur media proportionalis inter rectas EΘ, EZ, puta EK: junctaque recta KH producatur in directum. Oportet invenire an recta HΛ secet rationem ΛE ad ZK, majorem vel minorem præ illis quas auferunt rectæ quævis aliæ, per punctum H ductæ, rectasque EB, ZΓ intersecantes. Ponatur recta KM ipsi KΘ æqualis, ac rectangulum ΘE in MZ æquale erit rectangulo MK in KΘ: ratio autem ΛE ad ZK æqualis erit rationi ΘH ad ZM.

Ducatur jam recta alia ut HN, ac conferenda venit ratio ΞE ad ZN cum ratione ΛE ad ZK; cumque ΛE est ad ZK ut ΘH ad ZM, conferenda erit ratio ΞE ad ZN cum ratione ΘH ad ZM, ac permutando comparanda erit ratio ΞE ad ΘH *cum ratione* NZ *ad* ZM. *Sed ratio* ΞE *ad* ΘH *æqualis* est rationi EN ad NΘ. Quare conferatur ratio EN ad NΘ cum ratione NZ ad ZM; ac componendo conferatur ratio EΘ ad ΘN cum ratione NM ad MZ: adeoque comparandum venit rectangulum ΘE in MZ cum rectangulo MN in NΘ. Manifestum autem est rectangulum MK in KΘ majus esse rectangulo MN in NΘ, quia punctum K secat rectam ΘM bifariam in medio. Sed rectangulum EΘ in MZ æquale est rectangulo MK in KΘ; ergo rectangulum EΘ in MZ majus est rectangulo MN in NΘ: unde ratio EΘ ad ΘN major erit ratione NM ad MZ. Dividendo autem erit ratio EN ad NΘ major ratione NZ ad ZM. Sed EN est ad NΘ ut EΞ ad ΘH; igitur ratio EΞ ad ΘH major erit ratione NZ ad ZM: ac permutando, erit ratio ΞE ad NZ major ratione ΘH ad MZ. Cum autem ΘH est ad MZ ut ΛE ad ZK,



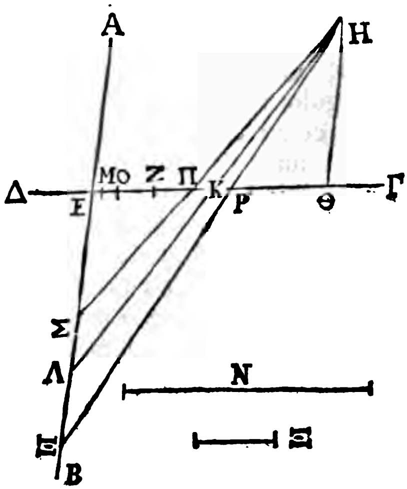
ratio ΞE ad NZ major erit ratione ΛE ad ZK. Recta itaque HΛ aufert rationem minorem, quam quæ aufertur à recta HΞ. Hinc constat hanc rectam HΛ abscindere rationem minorem rationibus, quæ auferri possint à rectis quibuscunque per punctum H ductis, ipsisque ZΓ, EB occurrentibus.

Quoniam autem recta HΛ abscindit rationem minorem, quam quas rectæ quævis, per punctum H ductæ, auferunt à rectis ZΓ, EB: Dico quoque quod rectæ propiores ipsi HΛ auferunt rationes minores, quam quæ auferuntur à remotioribus ab eâ. Quoniam enim ratio ΞE ad ZN major est ratione ΛE ad ZK, hoc est quam ΘH ad ZM; ponamus ΘH esse ad rectam aliquam ZO sicut ΞE ad ZN; quæ proinde minor

minor erit quam ZM. Ac ex demonstratis constat rectangulum EΘ in ZO æquale esse rectangulo ON in NΘ. Cum autem ratio ΞE ad ZN æqualis est rationi ΘH ad ZO, ducatur recta alia, ut HP; ac comparanda sit ratio ΠE ad ZP cum ratione ΞE ad ZN. Quoniam vero ΞE est ad ZN ut ΘH ad ZO, conferatur ratio ΠE ad ZP cum ratione ΘH ad ZO: ac permutando, conferatur ratio ΠE ad ΘH cum ratione PZ ad ZO. Sed ratio ΠE ad ΘH est ut EP ad PΘ; adeoque componendo, comparanda est ratio ΘE ad PΘ cum ratione PO ad ZO; ac rectangulum ΘE in ZO comparandum cum rectangulo ΘP in PO. Est autem rectangulum ΘE in ZO æquale rectangulo ON in NΘ; quare conferendum est rectangulum ON in NΘ cum rectangulo OP in PΘ. Conferendum est etiam rectangulum OK in KΘ cum rectangulo ON in NΘ. Quoniam vero rectangulum ΘE in OZ æquale est rectangulo ON in NΘ, conferendum est rectangulum OK in KΘ cum rectangulo EΘ in OZ. Rectangulum autem MK in KΘ æquale est rectangulo ΘE in MZ. Si itaque auferatur è rectangulo EΘ in MZ rectangulum EΘ in OZ, & è rectangulo MK in KΘ rectangulum OK in KΘ; residuum MO in EΘ majus erit residuo MO in KΘ. Quoniam autem rectangulum ΘE in MZ æquale est rectangulo MK in KΘ, ac rectangulum MO in EΘ majus est rectangulo MO in KΘ; manifestum est rectangulum OZ in EΘ majus esse rectangulo OK in KΘ. Sed rectangulum ON in NΘ æquale est rectangulo OZ in ΘE; quare rectangulum ON in NΘ minus est rectangulo OK in KΘ: unde etiam consequetur rectangulum ON in NΘ majus esse rectangulo OP in PΘ. Rectangulum vero OZ in ΘE æquale est rectangulo ON in NΘ; igitur rectangulum OZ in ΘE majus est rectangulo OP ad PΘ; quare ratio EΘ ad ΘP major erit ratione PO ad OZ: ac dividendo, ratio EP ad PΘ, hoc est ΠE ad HΘ, major erit ratione PZ ad ZO. Permutando autem, ratio ΠE ad PZ major erit ratione HΘ ad ZO. Sed est HΘ ad ZO ut EΞ ad ZN; quapropter ratio ΠE ad PZ major est ratione ΞE ad ZN. Recta itaque HΞ aufert rationem minorem quam quæ aufertur à recta HΠ. Recta autem HΞ propior est ipsi HΛ quam est recta HΠ, unde manifestum est rectas propiores rectæ HΛ abscindere rationes minores quam remotiores ab eâ.

Construe-

Conſtruetur itaque problema hunc in modum. Manentibus quæ prius, una cum recta parallela; capiatur EK media proportionalis inter ΘE & EZ; junctaque HK producatur ad Λ; ac recta HΛ auferet rationem ΛE ad ZK. Ratio autem data vel erit ipſa ratio ΛE ad ZK, vel minor illâ vel major. Ac ſi fuerit ratio ut ΛE ad ZK, recta HΛ ſatisfacit problemati: & patet quod ea ſola hoc præſtat. Quod ſi minor fuerit quam ratio ΛE ad ZK, tunc impoſſibile eſt problema. Sin autem ratio data, nempe N ad Ξ, major fuerit ratione ΛE ad ZK; fiat ipſi ΘK æqualis recta KM: & rectangulum EΘ in ZM æquale erit rectangulo MK in KΘ, ac ratio ΛE ad ZK æqualis erit rationi ΘH ad ZM. Eſt autem ratio N ad Ξ major ratione ΛE ad ZK, hoc eſt ratione ΘH ad MZ. Fiat itaque ut N ad Ξ ita ΘH ad rectam aliam ipſa ZM minorem, puta ad ZO. Quoniam vero EΘ in MZ æquale eſt MK in KΘ, ac MO in EΘ majus eſt quam MO in KΘ; manifeſtum eſt rectangulum OZ in EΘ minus eſſe quam OK in KΘ; adeoque poſſibile erit applicare rectangulum illud ad rectam OΘ.



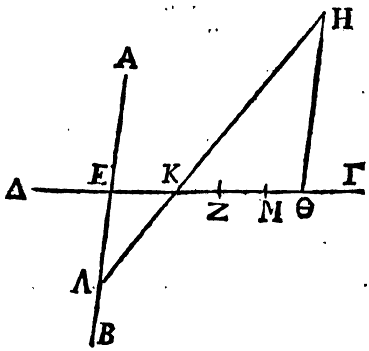
Quapropter ſi rectangulum æquale rectangulo EΘ in OZ deficiens quadrato applicetur ad rectam ΘO, ad utramque partem puncti K, habebuntur puncta Π & P. Ductiſque rectis HΠ, HP, producantur ad Σ, Ξ. Dico utramque rectam HΣ, HΞ ſatisfacere problemati, ſive quod ratio N ad Ξ eſt ut ΣE ad ZΠ, vel ut ΞE ad ZP. Quoniam enim rectangulum ΘE in ZO æquale eſt rectangulo OΠ in ΠΘ, erit EΘ ad ΘΠ ſicut ΠO ad OZ; & dividendo, ratio EΠ ad ΠΘ erit ut ΠZ ad ZO. Sed EΠ eſt ad ΠΘ ut ΣE ad ΘH; adeoque ΣE eſt ad ΘH ut ΠZ ad ZO; ac permutando erit ΣE ad ΠZ ſicut ΘH ad ZO. Eſt autem ΘH ad ZO ut N ad Ξ; ergo EΣ eſt ad ΠZ ſicut N ad Ξ: utraque igitur è rectis HΣ, HΞ

ſolvit

solvit problema. Ac manifestum est quod rectæ ab utraque parte propiores ipsi Η Λ, auferunt rationes minores quam remotiores ab eadem.

Limes autem rationis habetur hoc modo. Ratio Λ Ε ad Ζ Κ est ut Θ Η ad Ζ Μ. Est autem Ζ Μ excessus ipsarum Θ Ε, Ε Ζ simul sumptarum supra ipsas Θ Ε, Ε Μ. At Θ Ε, Ε Μ simul sumptæ æquantur *duplo* ipsius Κ Ε; quia Θ Κ æqualis est ipsi Κ Μ. Duplum autem ipsius Κ Ε idem potest quod quater Θ Ε in Ε Ζ; quia Ε Κ media est proportionalis inter Θ Ε & Ε Ζ. Igitur recta Ζ Μ excessus erit, quo ipsæ Θ Ε, Ε Ζ simul sumptæ excedunt illam, quæ potest id quod quater sub rectis Θ Ε, Ε Ζ continetur. Ratio itaque Λ Ε ad Ζ Κ (quæ minor est ratione quâvis, rectis per punctum Η ductis, ab ipsis Ε Β, Ζ Γ auferendâ) *eadem est cum ratione* Θ Η *ad excessum, quo ipsæ* Θ Ε, Ε Ζ *simul sumptæ superant* illam quæ potest quater id quod sub Θ Ε, Ε Ζ continetur.

Cas. III. Manentibus jam descriptis, ac ductâ rectâ parallelâ: ducatur juxta modum tertium recta Η Λ, auferens ab ipsis Ε Ζ, Ε Β rectas Λ Ε, Κ Ζ in ratione datâ. Fiat Θ Η ad Ζ Μ sicut Λ Ε ad Κ Ζ; ac datâ rectâ Η Θ, recta Ζ Μ dabitur magnitudine & positione. Cum autem punctum Ζ datur, datum est punctum Μ; ac ob datum punctum Θ, recta Θ Μ datur *magnitudine &* positione.

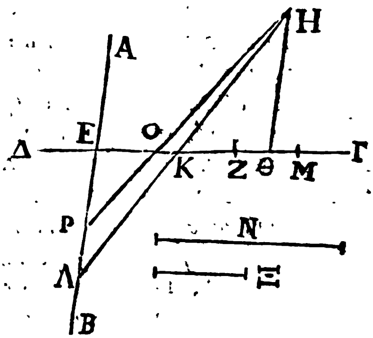


Quoniam autem Λ Ε est ad Κ Ζ ut Θ Η ad Ζ Μ, erit permutando, Λ Ε *ad* Θ Η *sicut* Κ Ζ *ad* Ζ Μ. *Sed* Λ Ε *est ad* Θ Η *ut* Κ Ε *ad* Κ Θ; *adeoque* Κ Ε est ad Κ Θ sicut Κ Ζ ad Ζ Μ; ac componendo, erit Θ Ε ad Κ Θ ut Κ Μ ad Μ Ζ. Est igitur rectangulum Ε Θ in Ζ Μ æquale rectangulo Θ Κ in Κ Μ. Datur autem rectangulum Ε Θ in Ζ Μ, datâ nempe utrâque è rectis Ε Θ, Ζ Μ; adeoque rectangulum Θ Κ in Κ Μ datur. Applicando itaque ad rectam datam Θ Μ rectangulum illud datum excedens quadrato, habebitur punctum Κ. Ob datum autem punctum Η dabitur etiam positione recta Η Κ Λ.

Construetur autem problema hunc in modum. Manentibus

quæ

quæ prius, ac ductâ rectâ parallelâ; sit ratio data sicut N ad Ξ: sitq; in eadem ratione Θ H ad Z M: dein applicetur ad rectam Θ M rectangulum æquale rectangulo Θ E in Z M excedens quadrato. Fieri autem nequit ut rectangulum Θ E in Z M sit minus rectangulo Θ Z in Z M, quia recta E Θ major est ipsa Θ Z: nec majus quam Θ E in E M, quia recta E M major est ipsâ Z M. Unde patet punctum K cadere inter puncta E, Z. Sit autem rectangulum illud Θ K in K M. Jungatur H K ac producatur ad Λ. Dico rectam H K Λ satisfacere problemati, sive quod Λ E est ad K Z sicut N ad Ξ. Quoniam enim E Θ in Z M æquale est rectangulo Θ K in K M, erit E Θ ad Θ K sicut K M ad M Z: ac dividendo, erit E K ad K Θ, hoc est E Λ ad H Θ, sicut K Z ad Z M. Permutando autem, E Λ erit ad K Z ut Θ H ad Z M. Sed Θ H est ad Z M sicut N ad Ξ. Quare E Λ erit ad K Z sicut N ad Ξ; adeoque recta H Λ solvet problema. Dico etiam quod ea sola hoc præstat. Nam si fieri potest, ducatur alia, ut H P; quæ auferat rationem N ad Ξ. Erit itaque P E ad O Z sicut Λ E ad K Z. Hoc autem impossibile est, cum antecedens minor sit antecedente, & consequens major consequente. Unde manifestum est rectam H P auferre rationem minorem quam quæ ablata est ab ipsâ H Λ.



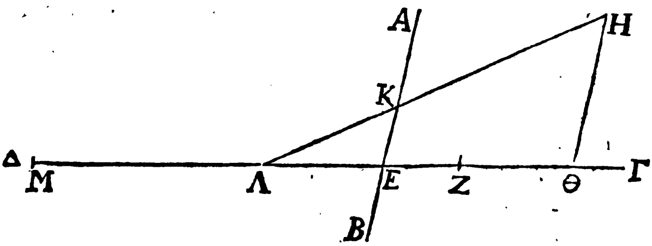
Cas. IV. Manentibus quæ prius, una cum rectâ parallelâ; ducatur jam, secundum modum quartum, recta H Λ, abscindens à rectis E Λ, Z Δ rationem E K ad Λ Z, æqualem rationi datæ. Fiat in eadem ratione Θ H ad Z M; atque ob datam Θ H, ipsa Z M dabitur magnitudine & positione: ac ob datum punctum Z, punctum M quoque datur. Quoniam autem Θ H est ad Z M ut E K ad Z Λ; erit permutando, Θ H ad E K, hoc est Θ Λ ad Λ E, sicut M Z ad Z Λ. Per conversionem autem rationis, erit Θ Λ ad Θ E sicut M Z ad M Λ; quare rectangulum Z M in Θ E æquale erit rectangulo Θ Λ in Λ M. Sed datur rectangulum Z M in Θ E, datâ nempe utrâque Z M, Θ E; quare rectangulum Θ Λ in Λ M datum est. Applicando itaque

ad

ad rectam datam Θ M rectangulum illud deficiens quadrato, punctum Λ dabitur. Cum autem punctum H datur, etiam recta H Λ dabitur magnitudine & positione.

Quoniam autem in compositione, oportet Θ H esse ad Z M in ratione proposita; & applicari ad rectam Θ M rectangulum æquale rectangulo Θ E in Z M deficiens quadrato, nempe rectangulum Θ Λ in Λ M; ac jungi rectam H Λ: punctum illud Λ haberi non potest in omni casu. Adeoque constructio problematis non semper possibilis est, nec in omni casu. Modo autem singulari fit, si recta M Θ bifariam secetur in puncto Λ. Erit autem propositio hujusmodi.

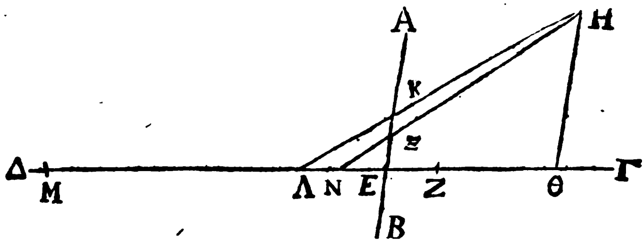
Ut extrema hæc ratio habeatur, ponamus eam ut Θ H ad Z M; & bisectâ ipsâ Θ M in Λ, oportet rectangulum Θ Λ in Λ M reperiri æquale rectangulo Z M in Θ E. Puta factum,



sitque ea ut Θ H ad Z M; ac bisecetur Θ M in puncto Λ, ita ut rectangulum Θ Λ in Λ M æquale sit rectangulo Z M in Θ E. Quoniam rectangulum Θ Λ in Λ M æquale est rectangulo Z M in Θ E, erit Λ Θ ad Θ E sicut Z M ad M Λ; dividendo autem, Z Λ erit ad M Λ sicut Λ E ad E Θ. Sed M Λ æqualis est ipsi Λ Θ, adeoque erit Z Λ ad Λ Θ sicut Λ E ad E Θ; permutando vero ac dividendo, habebitur Z E ad Λ E sicut Λ E ad Θ E. Quapropter Λ E media est proportionalis inter Θ E & E Z. Datâ autem utrâque Θ E, E Z, datur etiam E Λ magnitudine & positione: cumque punctum E datur, dabitur quoque punctum Λ. Dato autem puncto Θ, recta Θ Λ etiam datur, cui æqualis est recta Λ M; adeoque recta Λ M datur magnitudine & positione. Datum autem est punctum Λ; quare punctum M, hoc est punctum quæsitum, innotescit.

Componetur autem propositio hunc in modum. Manentibus descriptis, ductâque recta parallela; capiatur E Λ media proportionalis inter ipsas Θ E, E Z, ac ponatur M Λ ipsi Θ Λ æqualis.

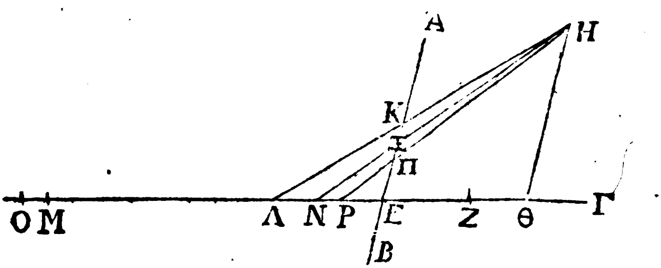
æqualis. Dico quod punctum M est punctum quæsitum; quodque rectangulum ΘΛ in ΛM æquale est rectangulo ZM in ΘE. Quoniam enim EΛ media proportionalis est inter ipsas EZ & ΘE, erit ZE ad EΛ sicut EΛ ad ΘE. Summa autem antecedentium est ad summam consequentium in eadem ratione, adeoque ΛZ ad ΘΛ erit ut ΛE ad EΘ. At recta ΘΛ æqualis est ipsi ΛM; quare ZΛ est ad ΛM sicut ΛE ad



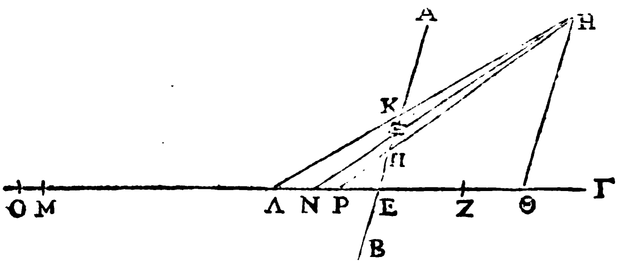
EΘ; & componendo, ZM erit ad MΛ sicut ΛΘ ad ΘE. Rectangulum igitur ΘΛ in ΛM æquale erit rectangulo ZM in ΘE; quapropter punctum M erit punctum quæsitum. Junctâ vero HΛ, dico quod EK est ad ZΛ ut ΘH ad ZM. Etenim ZM est ad MΛ sicut ΛΘ ad ΘE; ac convertendo rationem, MZ erit ad ZΛ ut ΘΛ ad ΛE, hoc est ut ΘH ad EK. Alternando autem, ΘH erit ad ZM ut EK ad ZΛ. Captâ itaque ad constructionem rectâ EΛ mediâ proportionali inter ΘE, EZ, jungatur HΛ. Ac manifestum est rectam HΛ auferre rationem EK ad ZΛ, vel minorem, vel majorem quâvis aliâ ratione, quæ à recta quacunque per punctum H ductâ, ipsisque EA, ZΔ occurrente, abscindi potest.

Hoc autem determinatur hunc in modum. Manentibus quæ prius, ac ductâ rectâ parallelâ, capiatur media proportionalis inter ΘE, EZ ut EΛ; junctâque HΛ, inquiratur primo an recta HΛ auferat rationem EK ad ZΛ, majorem vel minorem quâvis aliâ rectâ per punctum H ducendâ, rectisque ZΔ, EA occurrente. Sit ΛM æqualis ipsi ΘΛ; ac rectangulum ΘΛ in ΛM æquale rectangulo ZM in ΘE; adeoque erit ratio EK ad ZΛ sicut ΘH ad ZM. Ducatur jam alia recta ut HN; ac comparanda est ratio EK ad ZΛ, cum ratione EΞ ad ZN. Est autem EK ad ZΛ ut ΘH ad ZM, adeoque conferenda est ratio ΘH ad ZM cum ratione EΞ ad ZN. Alternando autem, conferatur ratio ΘH ad ΞE cum ratione ZM ad ZN. Sed ΘH est ad ΞE sicut ΘN ad NE. Conferatur ergo ratio ΘN ad NE cum ratione MZ ad ZN. Per conversionem autem rationis, conferatur ratio ΘN ad ΘE cum ratione MZ ad MN; unde comparandum venit rectangulum ZM in ΘE cum rectangulo ΘN in NM. Sed rectangulum ZM in ΘE æquale est rectangulo ΘΛ in ΛM, adeoque conferendum erit rectangulum ΘΛ in ΛM cum rectangulo ΘN in MN. Manifestum autem est quod ΘΛ in ΛM majus est rectangulo ΘN in NM; quia punctum Λ dividit rectam ΘM in medio: quare rectangulum ΘN in NM minus erit rectangulo ΘE in ZM, adeoque ratio ΘN ad ΘE minor erit ratione ZM ad MN. Convertendo autem rationem, erit ratio ΘN ad NE, sive ΘH ad EΞ, major ratione MZ ad ZN: ac permutando, ratio ΘH ad ZM, hoc est EK ad ZΛ, major erit ratione EΞ ad ZN. Recta igitur HΛ aufert rationem majorem quam HN: unde patet rectam HΛ abscindere rationem majorem quavis alià rectà, per punctum H transeunte, ipsisque ZΔ, EA occurrente.

Dico præterea quod rectæ propiores ipsi HΛ auferunt rationes majores, quam quæ secantur à remotioribus ab ea. Quoniam enim ratio ΞE ad ZN minor est ratione EK ad ZΛ, sive ΘH ad ZM; fiat ut EΞ ad ZN, ita ΘH ad rectam aliam, quæ major erit quam ZM, puta ad ZO. Ac juxta jam demonstrata rectangulum ΘE in ZO æquale erit rectangulo ΘN in NO. Ducatur jam recta alia ut HP, ac comparanda venit ratio EΞ ad ZN cum ratione EΠ *ad* ZP. *Sed* EΞ *est ad* ZN *ut* ΘH *ad* ZO; quare conferenda est ratio ΘH ad ZO



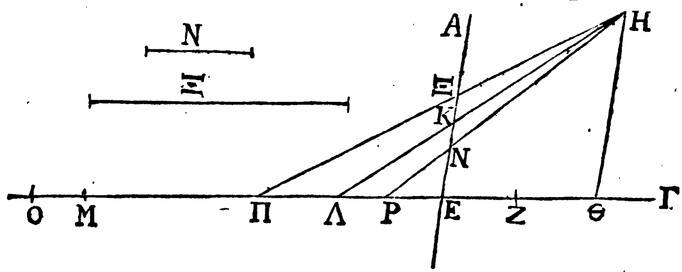
cum ratione EΠ ad ZP; atque alternando, conferenda ratio ΘH ad EΠ, sive ΘP ad PE, cum ratione OZ ad ZP. Convertendo autem rationem, conferenda est ratio ΘP ad ΘE cum ratione OZ ad OP; adeoque rectangulum ZO in ΘE cum rectangulo ΘP in PO. Sed rectangulum ΘE in ZO æquale est rectangulo ΘN in NO; quare comparandum est rectangulum ΘN in NO cum rectangulo ΘP in PO. Conferatur etiam rectangulum ΘΛ in ΛO cum rectangulo ΘN in NO. Cum autem ΘN in NO æquale est rectangulo ZO in ΘE, conferendum est rectangulum ΘΛ in ΛO cum rectangulo ZO in ΘE. Sed ex præmissis liquet rectangulum ΘΛ in ΛM æquari rectangulo ΘE in ZM. Sublato itaque rectangulo ΘΛ in ΛM è rectangulo ΘΛ in ΛO, & rectangulo ΘE in ZM è rectangulo ΘE in ZO, comparandum est residuum cum residuo, sive rectangulum ΘΛ in MO cum rectangulo ΘE in MO. Manifestum autem est rectangulum ΘΛ in MO majus esse rectangulo ΘE in MO, quia ΘΛ major est



quam ΘE. Quoniam vero rectangulum ΘE in MO minus est rectangulo ΘΛ in MO, ac rectangulum ΘE in ZM æquale *est rectangulo* ΘΛ *in* ΛM; *rectangulum totum* ΘE in ZO minus erit toto rectangulo ΘΛ in ΛO. Rectangulum autem ΘE in ZO æquale est rectangulo ΘN in NO; adeoque rectangulum ΘN in NO minus est rectangulo ΘΛ in ΛO. Unde constat rectangulum ΘP in PO minus esse quam ΘN in NO. Cum autem rectangulum ΘN in NO æquale est rectangulo ΘE in ZO, rectangulum ΘP in PO etiam minus erit rectangulo ΘE in ZO; ac ratio PΘ ad ΘE minor erit ratione OZ ad PO. Per conversionem vero rationis, ΘP erit ad PE, sive ΘH ad EΠ, in majore ratione quam OZ ad ZP: ac alternando, ΘH erit ad OZ in majore ratione quam EΠ ad ZP. Est autem ΘH ad OZ sicut EΞ ad ZN: quare ratio EΞ ad ZN major est ratione EΠ ad ZP. Igitur recta HN, quæ propius distat *ab ipsa* HΛ, aufert rationem majorem quam quæ secatur à recta remotiore HP. Ac manifestum est rectas illi propiores semper abscindere rationes majores, quam quæ sunt remotiores ab eâdem.

Compo-

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus prius descriptis ac rectâ parallelâ; capiatur ΕΛ media proportionalis inter ΕΘ, ΕΖ: ac jungatur recta ΗΛ auferens rationem ΕΚ ad ΖΛ. Ac si recta ΗΛ satisfacit proposito problemati, patet quod ea sola hoc præstat: quod si major fuerit ratione ΕΚ ad ΖΛ, impossibile erit problema; quia recta ΗΛ aufert rationem ΕΚ ad ΖΛ, majorem quam quælibet alia recta per punctum Η ducta, ipsisque ΖΔ, ΕΑ occurrens. At si proponatur ratio aliqua Ν ad Ξ, minor quam ratio ΕΚ ad ΖΛ; fiat ΛΜ æqualis ipsi ΛΘ: eritque rectangulum ΖΜ in ΘΕ æquale rectangulo ΘΛ in ΛΜ, ac ΕΚ ad ΖΛ erit ut ΘΗ ad ΖΜ. Jam fiat ut Ν ad Ξ ita ΘΗ ad rectam aliam ipsâ ΖΜ majorem, nempe ad ΖΟ. Cumque rectangulum ΟΜ in ΛΘ majus est rectangulo ΟΜ in ΕΘ, & rectangulum ΜΛ in ΛΘ æquale est rectangulo ΘΕ in ΖΜ; totum rectangulum ΛΘ

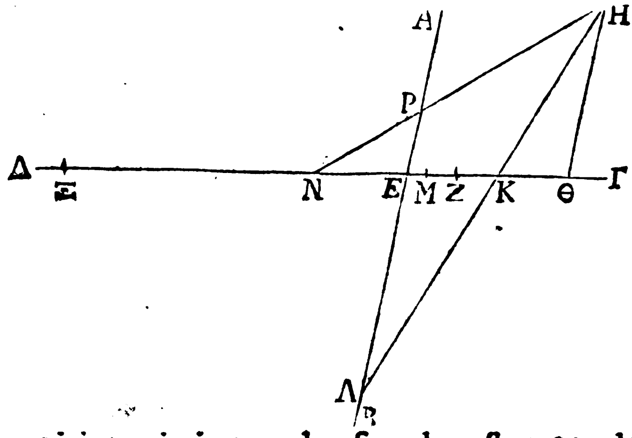


in ΛΟ majus erit toto rectangulo ΘΕ in ΖΟ; adeoque rectangulum ΘΕ in ΖΟ applicari potest ad rectam ΘΟ deficiens quadrato: idque duobus modis, ab utrâque scilicet parte puncti Λ. Si itaque per puncta designata Π & Ρ agantur rectæ ΗΠ, ΗΡ; dico quod recta utraque ΗΠ, ΗΡ satisfacit problemati, sive quod ΕΝ est ad ΖΡ sicut Ν ad Ξ: quodque ΕΞ est ad ΖΠ etiam ut Ν ad Ξ. Quoniam enim rectangulum ΘΡ in ΡΟ æquale est rectangulo ΘΕ in ΖΟ, erit ratio ΡΘ ad ΘΕ ut ΖΟ ad ΟΡ; ac per conversionem rationis, ΡΘ ad ΡΕ, hoc est ΘΗ ad ΕΝ, sicut ΖΟ ad ΖΡ. Permutando autem ΘΗ erit ad ΖΟ *ut* ΕΝ *ad* ΖΡ. *Sed* ΘΗ *est ad* ΖΟ ut Ν ad Ξ; quare ΕΝ est ad ΖΡ ut Ν ad Ξ. Ac pari argumento probabitur rationem ΕΞ ad ΖΠ esse ut Ν ad Ξ; quapropter utraque è rectis ΗΠ, ΗΡ solvit problema. Patet etiam rectas ab utraque parte propiores ipsi ΗΛ, auferre rationes majores quam quæ secantur à remotioribus ab eadem.

 Inno-

Innotescit autem extrema ratio hunc in modum. Quoniam ΕΚ est ad ΖΛ sicut ΘΗ ad ΖΜ; ac recta ΖΜ æqualis est ipsis ΖΛ, ΛΜ simul sumptis, hoc est, ipsis ΘΛ, ΛΖ (ob ΘΛ ipsi ΜΛ æqualem.) Ipsæ vero ΘΛ, ΛΖ simul sumptæ æquales sunt ipsis ΘΕ, ΕΖ, cum duplo ipsius ΕΛ simul sumptis. Duplum autem rectæ ΕΛ potest quater rectangulum ΘΕ in ΕΖ. Est igitur ΕΚ ad ΛΖ sicut ΘΗ ad rectam compositam ex utrâque ΘΕ, ΕΖ, & rectâ quæ potest quater rectangulum ΘΕ in ΕΖ.

Invenimus itaque quo pacto construi possit problema secundum omnes casus ejus; ac manifestum est quod in nullo casu fieri potest ut construatur juxta omnes modos. Ductâ enim rectâ parallelâ, & inventâ mediâ proportionali inter ΘΕ, ΕΖ; fiant ΕΚ, ΕΝ, eidem mediæ æquales: ac jungantur ΗΝ, ΗΛ. Ponatur etiam ΚΜ ipsi ΘΚ æqualis, ac ΝΞ ipsi ΘΝ. Jam ratio minima juxta modum secundum erit ratio ΛΕ ad ΖΚ, sive ΘΗ ad ΖΜ: maxima autem ratio juxta modum quartum, erit ut ΕΡ ad ΖΝ, sive ut ΘΗ ad ΖΞ. Quoniam

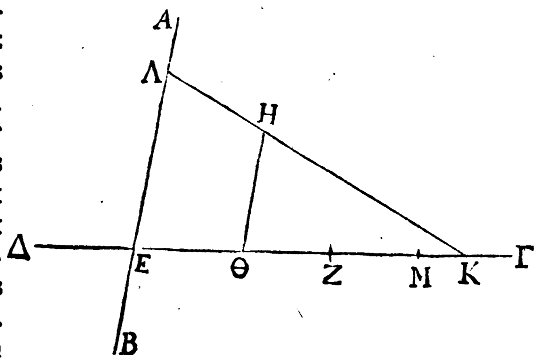


vero minima ratio juxta modum secundum est ut ΘΗ ad ΖΜ, maxima autem juxta modum quartum ut ΘΗ ad ΖΞ; evidens est rationem ΘΗ ad ΖΜ majorem esse ratione ΘΗ ad ΖΞ. Adeoque ratio data vel erit ut ΘΗ ad ΖΜ; vel minor quam ΘΗ ad ΖΜ, ac major quam ΘΗ ad ΖΞ; vel major quam ΘΗ ad ΖΜ; vel erit ut ΘΗ ad ΖΞ; vel minor quam ΘΗ ad ΖΞ. Quod si fuerit ut ΘΗ ad ΖΜ, tribus modis construi potest, nempe juxta casum primum & tertium, quibus abscindi possunt

ſunt rationes quævis; ac modo ſingulari juxta caſum ſecundum: non autem juxta caſum quartum, quia ratio ΘH ad ZM major eſt ratione ΘH ad ZΞ. Si fuerit ratio minor quam ΘH ad ZM, ac major quam ΘH ad ZΞ; erit problema juxta duos ſolum modos, primum nempe & tertium; neque juxta ſecundum nec quartum caſum efficietur; quia ratio propoſita minor eſt minimâ, ac major maximâ. Quod ſi major fuerit quam ΘH ad ZM, erit problema quatuor modis ſolvendum; nempe primo ac tertio, ac dupliciter juxta modum ſecundum; non autem ad modum quartum, quia ratio major eſt maximâ, ſive quam ratio ΘH ad ZΞ; eſt enim ΘH ad ZM major ratione ΘH ad ZΞ. At vero ſi maxima fuerit, ſive ut ΘH ad ZΞ, tribus modis conſtruetur; primo ſcilicet & tertio; ac modo ſingulari juxta caſum quartum: non autem juxta modum ſecundum, quia *minor* eſt minima; ratio enim ΘH ad ZΞ minor eſt ratione ΘH ad ZM. Quod ſi minor fuerit ratio quam ΘH ad ZΞ, quatuor diverſis modis componetur; primo & tertio, ac dupliciter modo quarto: non autem modo ſecundo, quia ratio data minor eſt minimâ. Oſtendimus itaque an compoſitio fieri poſſit, necne, per omnes varietates rationis proponendæ.

LOCUS SEPTIMUS.

Maneat jam, eodem modo quo prius, punctum datum H: interſecet autem recta parallela citra punctum Z, hoc eſt, cadat inter puncta E & Z; ut eſt recta HΘ. Rectæ autem per punctum H ductæ habebunt quatuor caſus diverſos: vel enim auferetur ratio è rectis ZΓ, EA; vel ex ZE, EA; vel ex ZE, EB, vel denique ex ipſis ZΔ, EA. *Caſ.* I. Ducatur autem

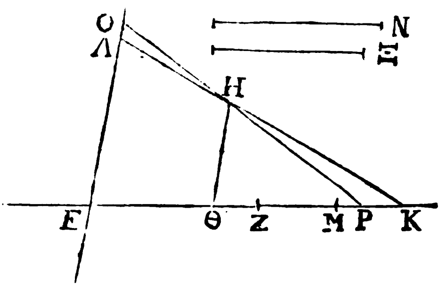


imprimis, juxta modum primum, recta KHΛ auferens à rectis ZΓ, EA, rationem EΛ ad ZK, æqualem rationi datæ. Fiat ut

EA

E Λ ad Z K ita Θ H ad Z M; dato autem Θ H, datur quoque Z M magnitudine & positione: ac dato puncto Z punctum M etiam datum est. Cum vero E Λ est ad Z K ut Θ H ad Z M, erit alternando, E Λ ad Θ H, hoc est E K ad K Θ, ut K Z ad Z M; ac dividendo, erit E Θ ad Θ K ut K M ad M Z: adeoque rectangulum E Θ in M Z æquale erit rectangulo Θ K in K M. Sed rectangulum E Θ in Z M datur, datâ utrâque rectâ; adeoque rectangulum Θ K in K M etiam datur. Applicando itaque ad rectam datam Θ M rectangulum illud excedens quadrato, habebitur punctum K: ac dato puncto Z, recta etiam K H Λ positione datur.

Construetur autem problema hunc in modum. Manentibus quæ prius, ac ductâ rectâ parallelâ; sit ratio data sicut N ad Ξ; *ac fiat ut* N *ad* Ξ ita Θ H ad Z M: atque applicetur ad rectam Θ M rectangulum æquale rectangulo Θ E in Z M excedens quadrato. Sit illud rectangulum Θ K in K M, ac jungatur recta K H producaturque. Dico quod recta K Λ satisfacit problemati, sive quod E Λ est ad Z K sicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum E Θ in Z M æquale est rectangulo Θ K in K M, erit E Θ ad Θ K ut K M ad M Z; ac componendo, erit E K ad K Θ, hoc est E Λ ad Θ H,

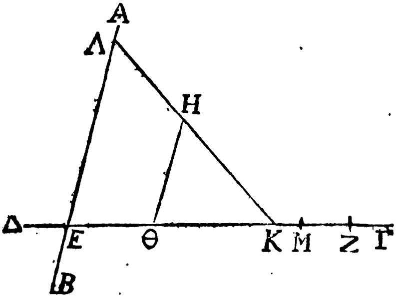


sicut K Z ad Z M: quare permutando, erit E Λ ad K Z sicut Θ H ad Z M, hoc est ut N ad Ξ (*per constructionem*) adeoque recta K Λ solvit problema. Dico etiam quod sola hoc præstat. Nam si fieri potest ut aliter solvatur, ducatur recta alia ut O H P; ut sit O E ad Z P in ratione E Λ ad Z K. Hoc autem fieri nequit, quia antecedens major est antecedente, & consequens minor consequente; adeoque recta hæc aufert rationem majorem quam quæ abscinditur à recta K Λ.

Cas. II. Manentibus jam descriptis ac rectâ parallelâ; ducatur juxta modum secundum, recta K Λ auferens à rectis Z E, E Λ rationem E Λ ad K Z æqualem rationi datæ. Fiat Θ H ad Z M ut E Λ ad Z K. Quoniam vero E Λ est ad Z K ut Θ H ad Z M, alternando erit E Λ ad Θ H, sive E K ad K Θ, ut K Z

ad

ad ZM. Recta autem EK major est quam KΘ, igitur KZ major est quam ZM. Data autem est recta ZM magnitudine & positione; quare dato puncto Z, datur quoque punctum M. Quoniam vero EK est ad KΘ ut KZ ad ZM, erit *dividendo*, EΘ ad ΘK sicut KM ad MZ; ac rectangulum EΘ in ZM æquale erit rectangulo KΘ in KM. Datâ autem utrâque EΘ, ZM, datur etiam

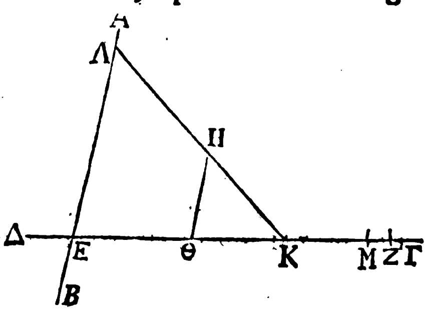


rectangulum ΘK in KM, applicandum ad rectam cognitam ΘM deficiens quadrato: unde punctum K innotescet. Cognito autem puncto H, recta quoque KHΛ positione datur.

Quoniam vero ad constructionem requiritur, ut fiat ratio ΘH ad ZM æqualis rationi datæ; & ut applicetur ad rectam ΘM rectangulum æquale rectangulo ΘE in ZM deficiens quadrato, nempe rectangulum ΘK in KM; ita ut habeatur punctum K in recta ΘM: hoc autem fieri nequit generaliter. Igitur non semper, neque in omni casu possibile est componere problema.

Fit autem modo singulari, si reperiatur punctum K in medio ipsius ΘM. Punctum vero K, in quo est extrema ratio, investigabitur ad hunc modum.

Ponamus extremam illam rationem esse ut ΘH ad ZM: ac divisâ rectâ MΘ bifariam in medio, oportet fieri rectangulum ΘK in KM æquale rectangulo EΘ in ZM. Restat igitur solum ut inveniatur punctum M in recta ΘZ, tale, ut bisectâ rectâ ΘM in puncto K, rectangulum ΘE in MZ æquale sit rectangulo ΘK in KM. Quoniam vero rectangulum

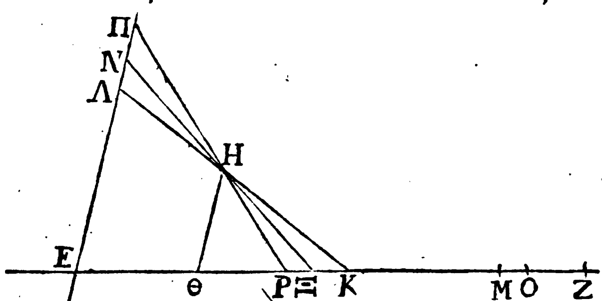


ΘE in MZ æquale est rectangulo ΘK in KM, erit ZM ad MK sicut KΘ ad ΘE: ac componendo, erit ZK ad KM *sive* KΘ, ut KE ad ΘE. Summa autem antecedentium est ad summam

 con-

consequentium in eadem ratione, adeoque Z E est ad K E ut K E ad Θ E. Est igitur recta K E media proportionalis inter rectas datas Z E & Θ E; quare & ipsa K E datur magnitudine & positione; ac dato puncto E, punctum K quoque datur. Ob datum autem punctum Θ, datur etiam recta K Θ; cui æqualis est recta K M; datur itaque recta K M magnitudine & positione: ac dato puncto K, dabitur quoque punctum M, hoc est, punctum quæsitum.

Componetur autem Lemma hunc in modum. Maneant quæ prius, una cum rectâ parallelâ, & capiatur E K media proportionalis inter rectas Z E, E Θ; sitque recta K M ipsi Θ K æqualis. Cadet vero *punctum* M citra punctum Z, quia recta Z K major est quam K Θ. Etenim cum Z E est ad E K ut E K ad E Θ, erit differentia antecedentium ad differentiam consequentium in eadem ratione; hoc est Z E ad E K ut Z K ad K Θ. Sed antecedens major est consequente; itaque recta K Z major est quam Θ K. Junctâ autem & productâ rectâ H K; dico quod rectangulum Z M in Θ E æquale est rectangulo Θ K in K M; quodque ratio E Λ ad K Z æqualis est rationi Θ H ad Z M. Quoniam enim recta K E media proportionalis est inter Z E & Θ E; erit Z E ad E K sicut K E ad E Θ; & aufe-



rendo consequentes, erit residuum Z K ad residuum K Θ, hoc est ad K M, in eadem ratione, sive ut E K ad E Θ: ac dividendo, erit Z M ad M K ut K Θ ad Θ E: rectangulum igitur E Θ in Z M æquale est rectangulo M K in K Θ. Quinetiam quia K E est ad E Θ ut Z K ad K M; per conversionem rationis, erit E K ad K Θ, hoc est E Λ ad Θ H, ut K Z ad Z M, ac permutando, E Λ erit ad K Z ut Θ H ad Z M: adeoque efficitur constructio, si inveniatur E K media proportionalis inter ipsas E Θ, E Z, ac jungatur recta K H Λ. Jam inquirendum est an recta

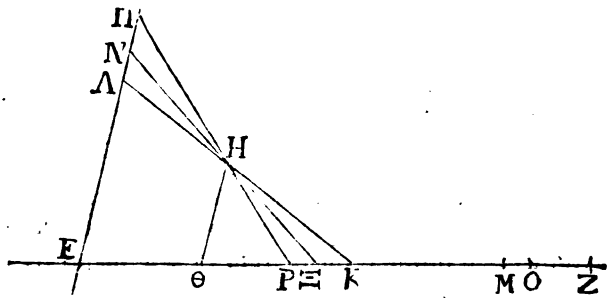
K H Λ

KHΛ auferat rationem majorem an minorem quâlibet aliâ rectâ, per punctum H ductâ, ipsisque EA, ZE occurrente.

Hoc autem determinatur hunc in modum. Manentibus quæ prius, ac ductâ rectâ parallelâ; sit EK media proportionalis inter ZE & EΘ, ac junctâ KHΛ, oportet inquirere an recta KΛ auferat rationem EΛ ad KZ, majorem vel minorem præ omnibus rectis per punctum H ducendis, ita ut occurrant ipsis EA, ZE. Fiat recta MK ipsi KΘ æqualis, & erit rectangulum ΘE in ZM æquale rectangulo ΘK in KM; ac ratio ΛE ad KZ æqualis rationi ΘH in ZM. Ducatur jam recta alia ut NΞ; & oportet conferre rationem NE ad ZΞ cum ratione ΛE ad ZK, hoc est, cum ratione ΘH ad ZM. Alternando autem, comparanda est ratio NE ad ΘH, sive EΞ ad ΞΘ, cum ratione ΞZ ad ZM; ac dividendo, comparanda est ratio EΘ ad ΘΞ cum ratione ΞM ad ZM: unde conferre licet rectangulum EΘ in ZM cum rectangulo ΘΞ in ΞM. Sed rectangulum ΘE in ZM æquale est rectangulo ΘK in KM; conferendum est igitur rectangulum ΘK in KM cum rectangulo ΘΞ in ΞM. Constat autem rectangulum ΘK in KM majus esse rectangulo ΘΞ in ΞM; quia ΘK æqualis est ipsi KM, ac proinde quadratum ex ΘK majus est rectangulo ΘΞ in ΞM. At rectangulum ΘK in KM æquale est rectangulo ΘE in ZM; quare rectangulum ΘE in ZM majus est rectangulo ΘΞ in ΞM; atque adeo ratio ΘE ad ΞΘ major est ratione ΞM ad ZM. Componendo autem ratio EΞ ad ΞΘ, sive EN ad ΘH, major erit ratione ΞZ ad ZM; ac permutando ratio EN ad ZΞ major erit ratione ΘH ad ZM, hoc est ratione EΛ ad ZK Quapropter recta KΛ aufert rationem minorem, quam quæ abscinditur à recta NΞ. Et manifestum est quod ex omnibus rectis per punctum H ductis, ipsasque ΘZ, EA intersecantibus, recta KΛ minorem aufert rationem.

Quoniam autem ratio EΛ ad ZK, sive ΘH ad ZM, minor est ratione EN ad ZΞ; faciamus ut EN ad ZΞ ita ΘH ad rectam aliam, quæ proinde minor erit quam ZM, puta ad ZO: ac manifestum est ex præmissis, quod rectangulum ΘE in ZO æquale erit rectangulo ΘΞ in ΞO. Ducatur jam recta alia ut ΠP, ac comparanda est ratio EN ad ZΞ, sive ΘH ad ZO, cum ratione EΠ ad PZ. Permutando autem conferatur ratio EΠ ad ΘH, sive EP ad PΘ, cum ratione PZ ad ZO; ac dividendo,

videndo, conferenda venit ratio ΘE ad PΘ cum ratione PO ad ZO; adeoque rectangulum ΘE in ZO cum rectangulo ΘP in PO conferendum. Est autem rectangulum ΘE in ZO æquale rectangulo ΘΞ in ΞO; quare comparandum est rectangulum ΘΞ in ΞO cum rectangulo ΘP in PO. Præterea conferatur rectangulum ΘK in KO cum rectangulo ΘΞ in ΞO. Quoniam vero rectangulum ΘΞ in ΞO æquale est rectangulo EΘ in ZO, conferatur rectangulum ΘK in KO cum rectangulo EΘ in ZO. Probatur autem rectangulum ΘK in KO majus esse rectangulo EΘ in ZO; quia EΘ in ZM majus est rectangulo EΘ in ZO. Est vero rectangulum EΘ in ZM æquale rectangulo ΘK in KM, *quo majus est rectangulum*

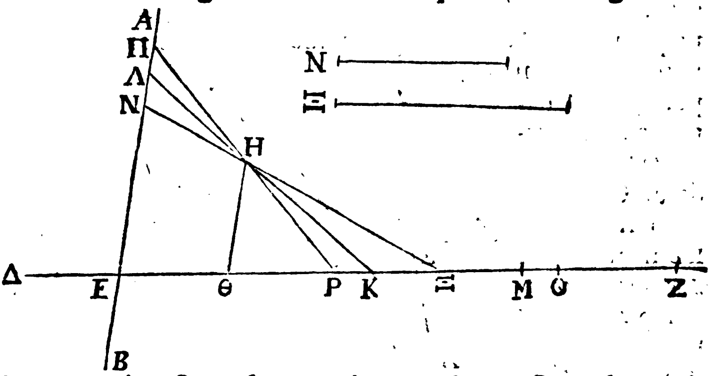


ΘK in KO: quare rectangulum ΘK in KO majus est rectangulo EΘ in ZM, ac multo majus quam EΘ ad ZO. Rectangulum autem EΘ in ZO æquale est rectangulo ΘΞ in ΞO; quocirca rectangulum ΘK in KO majus erit quam ΘΞ in ΞO: unde etiam manifestum est rectangulum ΘΞ in ΞO majus esse rectangulo ΘP in PO, adeoque rectangulum EΘ in ZO majus erit quam ΘP in PO. Quapropter ratio EΘ ad ΘP major erit ratione PO ad ZO; ac componendo ratio EP ad PΘ, sive EΠ ad ΘH, major erit ratione PZ ad ZO. Alternando vero ratio EΠ ad PZ major erit ratione ΘH ad ZO, sive EN ad ZΞ. Aufert itaque recta NΞ rationem minorem quam quæ abscinditur à recta ΠP. Rectæ igitur ipsi KΛ propiores abscindunt semper rationes minores, quam rectæ quæ sunt remotiores ab eadem.

Componetur autem problema hunc in modum. Maneant quæ supra; ac ductâ rectâ parallelâ, fiat EK media proportionalis inter EZ, EΘ; & jungatur recta HKΛ. Hæc recta KΛ auferet rationem EΛ ad KZ minorem qualibet aliâ, quæ à

rectis

rectis Z Θ, E A resecari possit, rectâ per punctum H ducendâ. Ratio autem proposita vel eadem erit cum ratione E Λ ad K Z; vel minor erit eâ; vel major. Si fuerit eadem, tum recta K Λ satisfacit problemati. Ac patet quod ea sola; quia rectæ omnes per punctum H ductæ auferunt rationes majores quam quæ secatur ab ipsa K Λ. Quod si minor fuerit eâ, problema impossibile erit; quia auferenda est ratio minor minimâ. Sin major fuerit ratio ratione E Λ ad K Z, ut est ratio N ad Ξ; fiat K M ipsi Θ K æqualis, & rectangulum E Θ in M Z æquale erit rectangulo Θ K in K M: & ratio E Λ ad K Z æqualis erit rationi Θ H ad Z M. Cum autem ratio N ad Ξ major est ratione E Λ ad K Z, sive Θ H ad Z M; faciamus ut N ad Ξ ita Θ H ad rectam aliam minorem ipsâ Z M, puta ad Z O. Quoniam vero rectangulum E Θ in Z M æquale est rectangulo Θ K



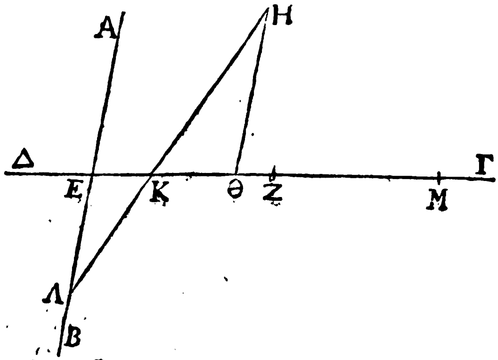
in K M, erit rectangulum E Θ in Z O minus rectangulo Θ K in K O; quare fieri potest ut ad rectam Θ O applicetur rectangulum, æquale rectangulo E Θ in Z O deficiens quadrato, duobus quidem modis; ab utraque scilicet parte puncti K: quo facto habebuntur puncta requisita, nempe puncta Ξ, P. Junctis igitur rectis Ξ H, P H, ac productis; dico quod utraque è rectis Π P, N Ξ satisfacit problemati; sive quod E Π est ad Z P, ac E N ad Z Ξ, sicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum E Θ in Z O æquale est rectangulo Θ P in P O, erit E Θ ad Θ P sicut P O ad Z O. Componendo autem ac deinde permutando, erit E Π ad P Z sicut Θ H ad Z O, hoc est ut N ad Ξ; adeoque recta Π P solvit problema. Pari etiam modo probabitur rectam Ξ N idem præstare; adeoque utraque ex illis solutionem præbet. Ac manifestum est rectas utrinque propiores ipsi K Λ abscin-

 dere

dere rationes minores, quam quæ auferuntur à remotioribus ab eadem.

Extrema autem ratio determinatur hunc in modum. Quoniam ratio Ε Λ ad Κ Ζ est ut Θ Η ad Ζ Μ; ac Ζ Μ est excessus utrarumq; Ε Ζ, Ε Θ supra utrasque Μ Ε, Ε Θ simul sumptas: ipsæ autem Μ Ε, Ε Θ simul sumptæ valent duplum ipsius Κ Ε, quia recta Μ Κ æqualis est ipsi Κ Θ; duplum vero ipsius Κ Ε potest quater rectangulum Ζ Ε in Θ Ε, quia media proportionalis est inter ipsas. Erit igitur ratio illa minima æqualis rationi ipsius Θ Η ad excessum, quo ipsæ Ζ Ε, Θ Ε simul sumptæ superant rectam, quæ potest quater rectangulum Ζ Ε in Θ Ε.

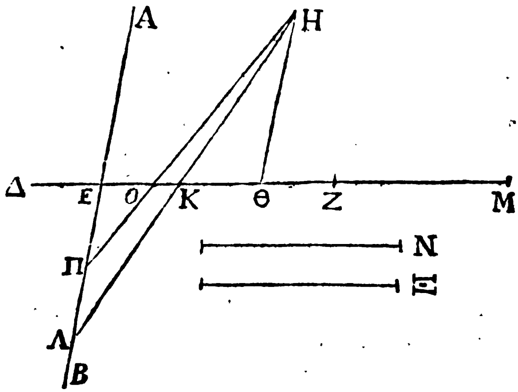
Cas. III. Manentibus quæ supra, ductâque rectâ parallelâ; ducatur jam recta Κ Λ, juxta modum tertium, auferens à rectis Ε Β, Ζ Ε rationem Λ Ε ad Ζ Κ, æqualem rationi datæ: ac fiat Θ Η ad Ζ Μ sicut Λ Ε ad Ζ Κ. Data autem est recta Θ Η, datur itaque recta Ζ Μ tum magnitudine tum positione; ac dato puncto Ζ, etiam punctum Μ datur; adeoque recta Θ Μ quoque datur. Quoniam vero Λ Ε est ad Κ Ζ sicut Θ Η ad Ζ Μ, erit permutando Λ Ε ad Θ Η, hoc est Ε Κ ad Κ Θ, ut Κ Ζ ad Ζ Μ; quare com-



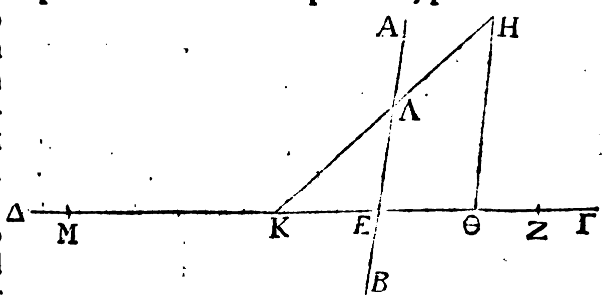
ponendo, erit Ε Θ ad Θ Κ sicut Κ Μ ad Μ Ζ; unde rectangulum Θ Ε in Μ Ζ æquale erit rectangulo Μ Κ in Κ Θ. Datur autem rectangulum Ε Θ in Μ Ζ, datâ scilicet utrâque rectâ; adeoque rectangulum Μ Κ in Κ Θ datur. Applicando igitur illud ad rectam datam Μ Θ excedens quadrato, punctum Κ datur; ac dato puncto Η, etiam recta Κ Λ positione datur.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus descriptis, ductâque rectâ parallelâ, sit ratio data sicut Ν ad Ξ; ac fiat Θ Η ad Ζ Μ sicut Ν ad Ξ: dein applicetur ad rectam Θ Μ rectangulum æquale rectangulo Θ Ε in Μ Ζ excedens quadrato, nempe rectangulum Μ Κ in Κ Θ. Jungatur Η Κ, quæ producatur *ad* Λ. Dico quod recta Η Λ solvit problema,

blema, sive quod Λ E est ad K Z sicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum E Θ in M Z æquale est rectangulo M K in K Θ, erit E Θ ad Θ K sicut K M ad M Z; ac dividendo, E K ad K Θ, hoc est Λ E ad H Θ, sicut K Z ad Z M. Alternando autem Λ E erit ad K Z sicut Θ H ad Z M, sive ut N ad Ξ. Quapropter recta H Λ solvit problema. Dico quoque quod ea sola hoc præstat. Nam si fieri potest, ducatur alia, ut H Π; ac si recta H Π aufert eandem rationem N ad Ξ, erit Λ E ad K Z sicut Π E ad O Z. Hoc autem impossibile est, quia antecedens *minor est antecedente* & consequens major consequente. Unde manifestum est rectam H Π abscindere rationem minorem, quam quæ aufertur à recta H Λ.



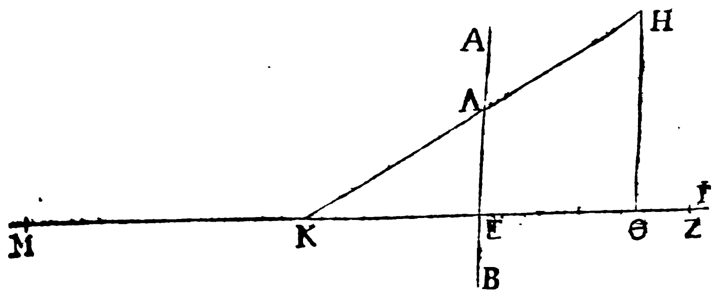
Cas. IV. Manentibus descriptis, ductâque rectâ parallelâ; ducatur jam modo quarto, recta H K auferens à rectis E A, Z Δ rationem E Λ ad K Z æqualem rationi datæ. Fiat Θ H ad Z M sicut E Λ ad K Z; ac datâ rectâ Θ H, dabitur quoque Z M magnitudine & positione. Dato autem puncto Z, punctum M datur; & ob punctum Θ datum recta etiam Θ M data est. Quoniam vero Θ H est ad Z M sicut E Λ ad K Z; erit permutando Θ H ad E Λ, hoc est Θ K ad K E, sicut M Z ad Z K; ac per conversionem rationis, erit Θ K ad Θ E ut Z M ad M K; adeoque rectangulum Θ E in Z M æquale



æquale erit rectangulo ΘK in KM. Sed rectangulum ΘE in ZM datur, rectangulum igitur ΘK in KM datum est. Dein applicando ad rectam datam ΘM rectangulum illud deficiens quadrato, punctum K innotescet. Dato autem puncto H, recta quoque HKΛ positione datur.

Quoniam autem ad constructionem oportet quod ΘH sit ad ZM in ratione propositâ; quodque rectangulum æquale rectangulo ΘE in ZM applicetur ad rectam ΘM deficiens quadrato, nempe ΘK in KM: applicatio ista non semper fieri potest, ob causas modo dictas, nisi fuerit ratio intra certos limites: adeoque non semper effici potest problematis constructio.

Fit autem modo singulari, si reperiatur punctum K in medio ipsius ΘM, eritque Analysis hujusmodi. Ad determinandam extremam rationem, ponamus rationem ΘH ad ZM æqualem illi; ac secemus rectam ΘM bifariam in medio ad punctum K, ita ut rectangulum ZM in ΘE æquale sit rectangulo ΘK in KM. Inveniendum est igitur tale punctum M,



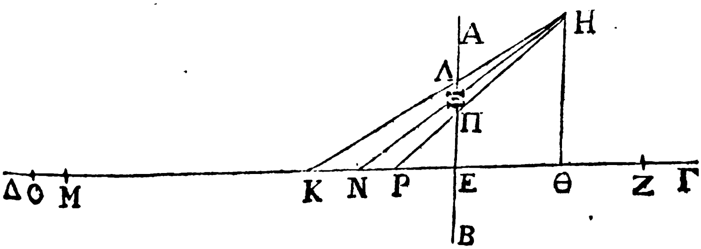
in recta ΔZ, ut, sectâ rectâ ΘM bifariam in puncto K, rectangulum ZM in ΘE æquale fuerit rectangulo ΘK in KM. Sit itaque ZM in ΘE æquale rectangulo ΘK in KM; ac ZM erit ad MK sicut KΘ ad ΘE; dividendo autem ZK erit ad KM ut KE ad ΘE. Cum autem recta ΘK æqualis est ipsi KM, erit ZK ad KΘ sicut KE ad EΘ. Differentia vero antecedentium est ad differentiam consequentium in eadem ratione; adeoque ZE erit ad EK sicut EK ad EΘ: quare recta EK media proportionalis est inter ipsas ZE, EΘ. Ambæ vero rectæ ZE, EΘ dantur, recta igitur EK datur magnitudine & positione. Dato autem puncto Θ, recta quoque ΘK datur, cui æqualis est recta KM; adeoque KM datur magnitudine

udine & positione. Sed datur punctum K, punctum M ergo latum est. Est autem punctum M punctum quæsitum.

Componetur autem propositio hunc in modum. Manentibus descriptis ac ductâ rectâ parallelâ; capiatur E K media proportionalis inter ipsas Z E, E Θ; ac fiat recta K M ipsi K Θ æqualis: & jungatur ipsa K H. Dico quod rectangulum Z M in E Θ æquale erit rectangulo Θ K in K M, quodque ratio E A ad Z K erit ut Θ H ad Z M. Quoniam enim Z E est ad E K ut E K ad E Θ, ac summa antecedentium est ad summam consequentium in eadem ratione; erit Z K ad K Θ ut E K ad E Θ. Sed K Θ æqualis est rectæ K M; ergo Z K erit ad K M ut K E ad E Θ. Componendo autem Z M erit ad M K ut K Θ ad Θ E. Quare rectangulum Z M in Θ E æquale erit rectangulo M K in K Θ. Quinetiam cum Z M sit ad M K sicut K Θ *ad* Θ E, *per conversionem rationis, erit* Z M *ad* Z K *ut* K Θ ad K E, sive ut Θ H ad E A; quare permutando, Θ H erit ad Z M ut E A ad Z K. Quapropter rite construitur, si inveniatur media proportionalis inter Z E & E Θ, puta recta E K, ac jungatur ipsa H A K.

Jam inquirendum est an recta H K auferat rationem E A ad Z K, minorem vel majorem quâvis aliâ rectâ per punctum H ducendâ, quæ ipsis Z Δ, E A occurrat.

Hoc autem determinatur in hunc modum. Manentibus quæ prius, ductâque rectâ parallelâ; sit E K media propor-



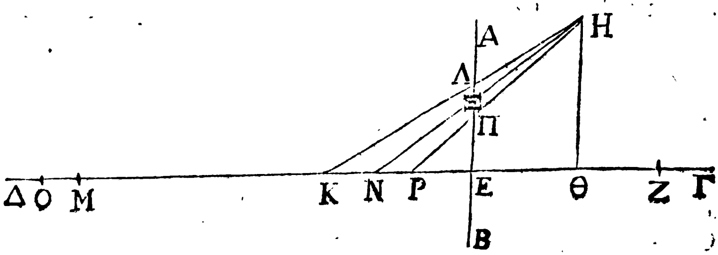
tionalis inter Z E & E Θ, ac jungatur H K. Oportet inquirere an recta H K auferat rationem E A ad Z K, majorem vel minorem quavis aliâ rectâ, quæ per H ducta secet ipsas Z Δ, E A. Fiat recta K M æqualis ipsi K Θ, ac rectangulum Z M in E Θ æquale erit rectangulo Θ K in K M; & ratio E Λ ad Z K æqualis rationi Θ H ad Z M. Ducatur jam recta alia ut H N; & comparanda venit ratio E A ad Z K, sive Θ H *ad* Z M, *cum ratione*

tione E Ξ *ad* Z N; *& alternando, conferenda est ratio* Θ H *ad* Ξ E, sive Θ N ad N E, cum ratione M Z ad Z N. Convertendo autem rationem, conferatur ratio Z M ad M N cum ratione Θ N ad Θ E; unde rectangulum Z M in Θ E comparandum est cum rectangulo M N in Θ N. Sed rectangulum Θ K in K M æquale est rectangulo Z M in Θ E; comparandum est itaque rectangulum Θ K in K M cum rectangulo Θ N in N M. Manifestum est autem rectangulum Θ K in K M majus esse rectangulo Θ N in N M; cumque Θ K in K M æquale est ipsi Z M in Θ E, rectangulum Z M in Θ E majus erit rectangulo Θ N in N M: ratio igitur Θ N ad Θ E minor erit ratione Z M ad M N. Per conversionem vero rationis, ratio Θ N ad N E, sive Θ H ad E Ξ, major erit ratione M Z ad Z N; alternando autem ratio Θ H ad Z M major erit ratione E Ξ ad Z N: quare recta H K abscindit rationem majorem quam recta H N. Unde constat, quod præ omnibus rectis quæ duci possint per punctum H, ita ut rectas Z Δ, E A intersecent, recta H K aufert rationem E Λ ad Z K maximam.

Dico præterea quod rectæ propiores ipsi H K abscindunt rationes majores, quam rectæ quæ remotiores sunt ab eadem. Quoniam enim ratio E Λ ad Z K, sive Θ H ad Z M, major est ratione E Ξ ad Z N; faciamus ut E Ξ ad Z N ita Θ H ad rectam aliam, nempe ad Z O, quæ proinde major erit quam Z M. Constat autem ex præmissis rectangulum Z O in Θ E æquari rectangulo Θ N in N O. Ducatur jam alia recta ut H P; & oportet comparare rationem E Ξ ad Z N, sive Θ H ad Z O, cum ratione E Π ad Z P. Alternando comparanda est ratio Θ H ad E Π, sive Θ P ad P E, cum ratione O Z ad Z P. Per conversionem autem rationis, conferatur ratio Θ P ad Θ E cum ratione O Z ad O P, ac proinde rectangulum Z O in Θ E cum rectangulo Θ P in P O. Sed rectangulum Z O in Θ E æquale est rectangulo Θ N in N O, adeoque comparandum est rectangulum Θ N in N O cum rectangulo Θ P in P O. Conferatur etiam rectangulum Θ K in K O cum rectangulo Θ N in N O. Est vero rectangulum Θ N in N O æquale rectangulo Θ E in Z O; *quare conferendum est rectangulum* Θ K *in* K O *cum rectangulo* Θ E *in* Z O. Constat autem rectangulum Θ K in K O majus esse rectangulo Θ E in Z O; quia rectangulum O M in K Θ majus est rectangulo O M in E Θ. Rectangulum autem M K in K Θ æquale est rectangulo M Z in

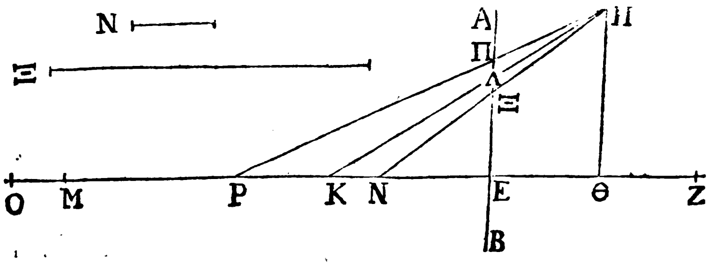
E Θ,

Ε Θ, ideo totum rectangulum Κ Θ in Κ Ο majus erit toto Ζ Ο in Θ Ε, ſive rectangulo Θ Ν in Ν Ο. Unde etiam probatur rectangulum Θ Ν in Ν Ο majus eſſe rectangulo Θ Ρ in Ρ Ο; adeoque rectangulum Θ Ε in Ζ Ο majus erit rectangulo Θ Ρ in Ρ Ο: quare ratio Θ Ρ ad Θ Ε minor erit ratione Ζ Ο ad Ρ Ο. Con-



vertendo autem rationem, ratio Θ Ρ ad Ρ Ε, ſive Θ Η ad Ε Π, major erit ratione Ζ Ο ad Ζ Ρ. Alternando vero ratio Θ Η ad Ζ Ο, ſive Ε Ξ ad Ζ Ν, major erit ratione Ε Π ad Ζ Ρ. Quapropter recta Η Ν aufert rationem majorem quam Η Ρ. Adeoque rectæ propiores ipſi Κ Η abſcindunt majores rationes, quam quæ longius diſtant ab eâdem.

Componetur autem problema modo ſequente. Manentibus quæ prius, ductâque rectâ parallelâ, capiatur media proportionalis inter rectas Ε Ζ, Ε Θ, quæ ſit Ε Κ; & jungatur Η Κ. Hæc recta Η Κ abſcindet rationem Ε Λ ad Ζ Κ, majorem quam quælibet alia recta per punctum Η ducenda, ita ut rectis Ζ Δ, Ε Α occurrat. Ratio autem ad conſtruendum propoſita, vel erit ratio Ε Λ ad Ζ Κ, vel major erit ea, vel minor: ac ſi æqualis fuerit rationi Ε Λ ad Ζ Κ, tum recta Η Λ Κ ſatisfacit problemati. Quod ſi major fuerit ratio quam Ε Λ ad Ζ Κ, problema impoſſibile eſt; quia ratio propoſita major eſt maximâ. Sin ratio data Ν ad Ξ minor fuerit quam Ε Λ ad Ζ Κ; fiat recta Κ Μ æqualis ipſi Θ Κ; ac rectangulum Ζ Μ in Θ Ε æquale erit rectangulo Θ Κ in Κ Μ, & Ε Λ erit ad Ζ Κ ut Θ Η ad Ζ Μ. Faciamus jam ut Ν ad Ξ ita Θ Η ad rectam aliam majorem ipsâ Ζ Μ, ut ad Ζ Ο: cumque rectangulum Θ Κ in Ο Μ majus eſt rectangulo Θ Ε in Ο Μ, ac rectangulum Θ Κ in Κ Μ æquale eſt rectangulo Θ Ε in Ζ Μ; totum rectangulum Θ Κ in Κ Ο majus erit rectangulo Θ Ε in Ζ Ο. Adeoque poſſibile eſt applicari rectangulum Θ Ε in Ζ Ο deficiens quadrato ad rectam Θ Ο, duobus quidem modis; ad utramque scilicet partem puncti K. Quo facto habebuntur puncta quæsita N, P: junctisque HN, HP, dico utramque ductam HN, HP satisfacere problemati; sive quod EΞ est ad ZN ut N ad Ξ; vel quod EΠ est ad ZP in eadem ratione N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum ΘN in NO æquale est rectangulo ZO in ΘE, erit ZO ad ON sicut NΘ ad ΘE; ac per conver-



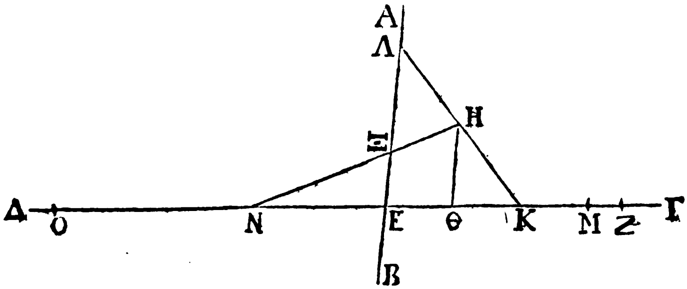
sionem rationis ZO erit ad ZN ut ΘN ad NE, sive ΘH ad EΞ: permutando autem erit ΘH ad ZO sicut EΞ ad ZN. Sed ΘH est ad ZO sicut N ad Ξ; quare EΞ est ad ZN sicut N ad Ξ. Ac simili argumento probabitur EΠ esse ad ZP in eadem ratione N ad Ξ. Ambæ igitur HN, HP satisfaciunt problemati. Manifestum autem est rectas utrinque propiores ipsi HK abscindere rationes majores, quam rectæ quæ longius removentur ab eadem.

Ratio autem maxima hunc in modum determinatur. Cum ratio illa maxima ea sit quæ EΛ ad ZK, sive ΘH ad ZM; recta autem ZM constat ex utrisque ZK, KΘ simul sumptis, (quia MK æqualis est ipsi KΘ:) sed & utræque ZK, KΘ æquales sunt utrisque ZE, EΘ ac duplo ipsius EK simul sumptis: duplum vero rectæ EK potest quater rectangulum ZE, ΘE: erit igitur ratio ΘH ad ZM, vel sicut ΘH ad rectam compositam ex utrisque ZE, ΘE & ex eâ quæ potest quater rectangulum ΘE ad ZE simul sumptis; vel minor erit eâ.

Exhibuimus itaque compositionem problematis juxta omnes casus qui proponi possint; ostendimusque an fieri possit constructio, necne: capiatur enim media proportionalis inter rectas ZE, EΘ; ac ponatur ea ab utraque parte puncti E, ut EK, EN. Ductisque rectis HK, HN; fiat ipsi ΘK recta KM æqualis: ac ipsi ΘN æqualis fit recta NO. Erit igitur ratio EΛ ad ZK ratio minima, juxta casum secundum, sive ut ΘH ad ZM: ratio autem EΞ ad NZ, *sive* ΘH

ad

ad ZO maxima erit juxta modum quartum. Ac manifestum est quod, juxta modum secundum, ratio ΘH ad ZM major est ratione ejusdem ad ZO. Jam ratio data vel erit ipsa ratio ΘH ad ZM; vel minor erit ratione ΘH ad ZM, ac major quam ratio ΘH ad ZO; *vel major erit ratione* ΘH *ad* ZM; vel erit ipsa ratio ΘH ad ZO; vel minor erit eâdem. At si fuerit ratio ut ΘH ad ZM, efficietur problema tribus modis; nempe primo ac tertio, ac modo singulari juxta casum secundum; non autem omnino juxta modum quartum, quia ratio ΘH ad ZM major est ratione ΘH ad ZO. *Si vero minor fuerit ratione* ΘH *ad* ZM, *major autem quam* ΘH *ad* ZO; *tum componetur dupliciter, modo nempe primo & tertio; non*



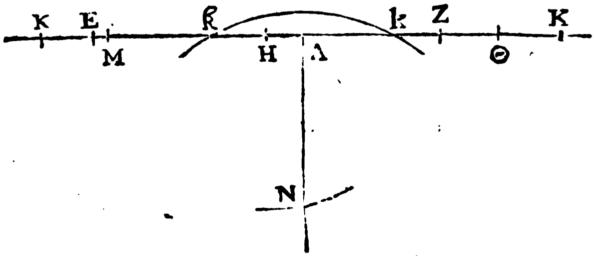
autem modo secundo, quia ratio minor est minimâ; neque modo quarto, quia major est maximâ. Si major fuerit ratio quam ΘH ad ZM, tum fieri potest quadrupliciter, nempe modo primo & tertio, & dupliciter juxta secundum; non autem modo quarto, quia ratio data, cum major sit ratione ΘH ad ZM, multo major est ratione ΘH ad ZO. *Si vero æqualis fuerit rationi* ΘH *ad* ZO, *fiet tribus modis, nempe primo & tertio, & modo singulari juxta casum quartum; non autem fieri potest juxta casum secundum, quia ratio* ΘH *ad* ZO *minor est quam minima, sive quam* ΘH *ad* ZM. Denique si minor fuerit ratione ΘH ad ZO, erit problema juxta quatuor modos solvendum, primum nempe ac tertium; & dupliciter ad modum quartum: non autem omnino juxta modum secundum, quia ratio proposita minor est minima. Adeoque composuimus problema juxta omnem varietatem ejus.

SCHOLION GENERALE.

Quæret fortaſſe, nec immerito, Lector Geometricus qua lege diſponi debeat recta Z M, *quæ in omni caſu ſumenda eſt ad* Θ H *in ratione propoſitâ: Hoc enim neutiquam oſtenditur ab* Apollonio. *Quoniam vero in unoquoque caſu* E K *eſt ad* K Θ *ſicut* K Z *ad* Z M, (*Notis utor Loci ſeptimi*) *puncta tria* K, Z, M *eodem ordine ſemper collocanda ſunt inter ſe, quo tria illa* E, K, Θ: *adeoque in caſibus ubi punctum* K *ſupponitur inter puncta* E *&* Θ, *punctum* Z *intermedium eſſe debet inter* K *&* M; *ac proinde recta* Z M *ad contrarias partes à puncto* K *ponenda eſt. Si vero* E *vel* Θ *intermedium fuerit, intermedium quoque erit punctum* K *vel* M, *reſpective; quocirca recta* Z M *collocanda erit ad eaſdem partes vel verſus punctum* K. *Quod ſi, juxta præſcriptum hujus Regulæ, ponatur recta* Z M *ad eaſdem partes à puncto* Z, *ad quas jacet punctum* H *à recta* A B, *applicandum erit rectangulum* Θ E *in* Z M *ad rectam* Θ M *excedens quadrato. Si vero ad contrarias partes ponenda ſit* Z M, *applicandum eſt ad ipſam* Θ M *rectangulum* Θ E *in* Z M *deficiens quadrato. Utriuſque autem Applicationis effectionem docet* Euclides *in* 28va *&* 29na Prop. Elem. VI. *quarum ope conſtruxere Veteres problemata omnia plana ad has duas Formulas redacta; nempe ut cognitâ dati rectanguli ſummâ vel differentiâ laterum, invenirentur latera ſigillatim. Ac ſane pro reſoluto habebatur apud eos omne problema, poſtquam ad harum alteram perductum erat: ut vel ex hoc libro & ex* Pappo *videre eſt. Unde ſubeſt mirari hæc duo problemata generaliſſime ab* Euclide *conſtructa, à* Tacquetto, Chaleſio *eorumque Aſſeclis, ut inutilia nulliuſque momenti rejici, nec Commentario digna cenſeri. Etenim ſi, loco parallelogrammi dati, applicetur rectangulum ad rectam datam, quod deficiat vel excedat quadrato, loco figuræ parallelogrammæ ſpecie datæ; (cum Rectangula & Quadrata etiam parallelogramma ſint) res nimis manifeſta eſt quam ut ulteriore indigeat explicatione. Coincidit autem cum vulgatâ Æquationum Quadraticarum (uti nunc loquimur) effectione: quæ quidem commodiſſime fit ad hunc modum. Proponatur applicandum ad rectam* Θ M *rectangulum æquale rectangulo* Θ E *in* Z M *imprimis excedens quadrato. Biſectâ rectâ* Θ M *in medio ad* Λ,

eidem

eidem ΘM *normalis sit* ΛN; *factisque* ΛE, ΛZ *ipsis* ΘE, ZM *æqualibus, bisecetur* EZ *in* H: *& arcus circuli centro* H *radio* HZ *descripti occurret normali* ΛN *in puncto* N, *ita ut* ΛN *sit media proportionalis inter* ΘE *&* ZM. *Dein fiant* ΛK, Λκ, *ab utraque parte puncti* Λ, *ipsi* ΘN *æquales; ac puncta* K, κ *erunt puncta quæsita. Si vero applicandum fuerit rectangu-*



lum illud deficiens quadrato; Centro N *ac radio* ΛΘ *describatur arcus circularis qui ipsi* ΘM *occurret in punctis quæsitis* k, k. *Quod si* ΛΘ *minor fuerit media illa proportionali* ΛN, *ita ut circulus ille non intersecet, nec tangat rectam* ΘM, *impossibilis erit constructio. Sed primis Elementis imbutum Lectorem supponimus; nec hujus est loci ea docere.*

Cæterum, ut in Scholiis præcedentibus, Problema modo magis generali tractavimus; relicto scilicet puncto, unde ducantur rectæ rationem auferentes, indeterminato: ita etiam in his quatuor Locis sive Capitulis, invenimus rectas omnes, datam rationem abscindentes, contingere Curvas binas Parabolicas (quas conjugatas appellare licet.) Simulque nobilem, ac, quantum scio, novam Parabolæ proprietatem, describendæ Curvæ aptissimam, patefecimus. Demonstrat enim Apollonius *rationes maximas & minimas esse ut* ΘH, *sive recta parallela, ad* $EZ + E\Theta \pm \sqrt{4\,EZ \text{ in } E\Theta}$: *adeoque data ratione quavis, ut* m *ad* n, *maximas ac minimas rectas parallelas, quales* ΘH, *reperiri, capiendo eas ad* $EZ + E\Theta \pm \sqrt{4\,EZ \text{ in } E\Theta}$ *ut* n *ad* m. *Stante autem* EZ, *ac fluente* EΘ; *patet* $\frac{m}{n} \times EZ + E\Theta$ *rectam lineam Curvæ diametrum designare cum* EΘ *incipientem. Quadratum autem partis alterius sive*

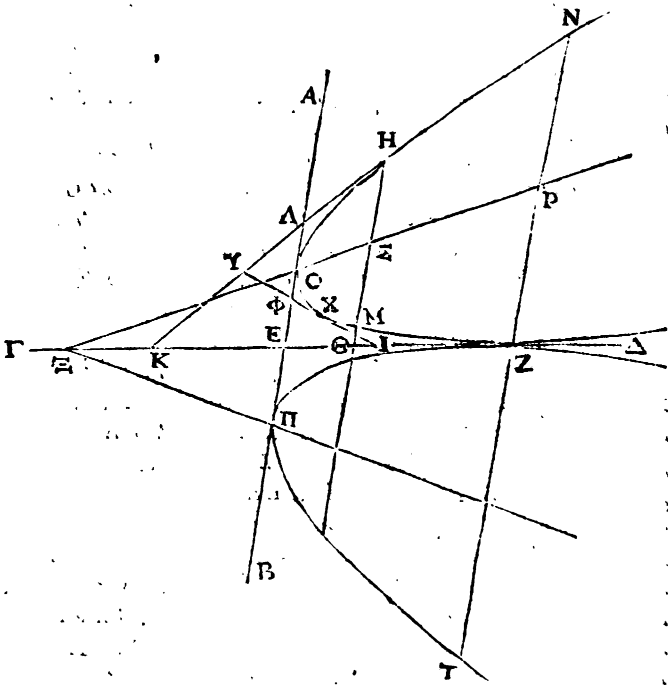
$\frac{m^2}{n^2}$

$\frac{m^2}{n^2} \times 4\,EZ \times E\Theta$ *augeri in ratione ipsius* $E\Theta$, *ut Abscissæ; adeoque* $\frac{m}{n}\sqrt{4\,EZ}$ *in* $E\Theta$ *est ordinatim applicata Curvæ, quam contingunt puncta omnia* H; *quæ proinde Parabola est: utpote cujus notissima est proprietas, ut quadrata Applicatarum sint in ratione Abscissarum.*

Quocirca Parabolas binas, quas contingunt rectæ omnes à datis rectis datam auferentes rationem, hunc in modum designare licet. Sint rectæ duæ positione datæ AB, ΓΔ *sese intersecantes in puncto* E; *ac in* ΓΔ *sumatur punctum* Z: *oportet invenire Curvas illas quas contingunt rectæ omnes quovis modo abscindentes rationem* EΛ *ad* ZK *sive* m *ad* n. *Capiatur in recta* EΔ *quodvis punctum* Θ; *ac per* Θ *&* Z *ducantur ipsi* AB *parallelæ* ΘH, ZN. *Ponatur* EΞ *ipsi* EZ *æqualis, ac fiat* EO = EΠ *ad* EZ = EΞ *ut* m *ad* n; *ac datis punctis* O *&* Π (*in quibus continget recta* AB *utramque curvam*) *junctisque & productis* ΞO, ΞΠ, *erunt ipsæ utriusque Parabolæ diametri. Occurrat autem diameter* ΞO *parallelis* ΘH, ZN *in punctis* Σ *&* P; *ac* ΞE *erit ad* EO, *hoc est* n *ad* m, *ut* ΞΘ, *sive* EZ + EΘ, *ad* ΘΣ; *quæ proinde æquabitur ipsi* $\frac{m}{n} \times EZ + E\Theta$; *ac* ZP *æqualis erit ipsi* $\frac{m}{n} \times 2\,EZ$: *adeoque ejus quadratum* $\frac{m^2}{n^2} \times 4\,EZ \times EZ$. *Ob Parabolam autem erit, ut* OP *ad* OΣ, *hoc est* EZ *ad* EΘ, *ita quadratum ex* ZP *vel* PN, *ad quadratum ex* ΣM *vel* ΣH; *quod proinde habebitur* $\frac{m^2}{n^2} \times 4\,EZ$ *in* $E\Theta$: *ejusque latus* $\frac{m}{n}\sqrt{4\,EZ \times E\Theta}$ *erit ipsi* ΣM *vel* ΣH. *Quapropter differentia ipsarum* ΘΣ, ΣM, *sive* ΘM, *erit ad* $EZ + E\Theta - \sqrt{4\,EZ \times E\Theta}$ *ut* m *ad* n; *earundemque summa, sive* ΘH, *erit ad* $EZ + E\Theta + \sqrt{4\,EZ \times E\Theta}$ *etiam ut* m *ad* n. *Est igitur ratio* m *ad* n, *sive* EΛ *ad* ZK, *extrema illa quæ auferri potest à rectis per puncta* H, M *ducendis: quemadmodum ex determinationibus* Apollonii *manifestum est. Parabolæ autem describendæ Latus rectum habebitur capiendo illud ad* PZ *ut* PZ *ad* PO; *unde Curvam ipsam per puncta ducere pronum est. Altera autem Parabola easdem*

easdem omnino habet ordinatim applicatas cum priore, ad eandem distantiam rectæ parallelæ ΗΘ, *à communi Tangente* ΑΒ.

Descriptis autem Curvis; dico omnes rectas easdem contingentes abscindere rationem æqualem rationi ΞΟ *ad* ΖΞ, *juxta omnes modos quibus fieri potest; ubicunque fuerit punctum datum* Η, *è quo educendæ sunt rectæ. Nam si pro-*



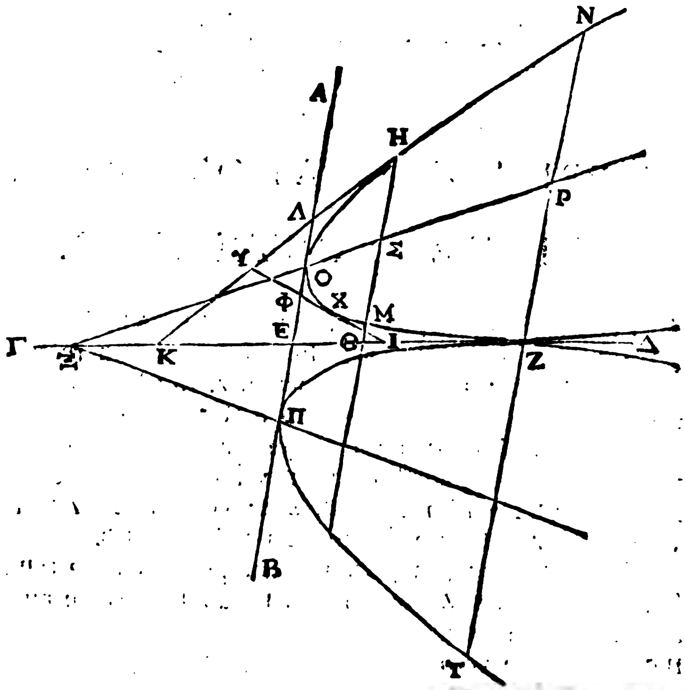
ponatur illud supra Vertices Parabolarum, sive à recta ΑΒ *versus* Γ; *semper duci possunt quatuor Tangentes ad modum quatuor casuum Loci quarti. Si fuerit punctum* Η *in recta* ΖΝ, *habebuntur casus tres Loci quinti; ac patet quod in casu tertio impossibile sit Tangentem ducere, nisi* ΖΗ *excesserit ipsam* ΖΝ, *vel major fuerit quam quater* ΞΟ. *Si fuerit punctum* Η *infra rectam* ΝΖΤ, *versus* Δ; *Tangentes designabunt omnes rectas juxta quatuor Casus Loci sexti ducendas. Quod si fuerit* Η *intra datas parallelas* ΑΒ, ΝΤ; *habebimus omnes Casus Loci septimi; eâ ubique lege, ut si punctum reperiatur intra ambitum alterutrius Curvæ, duobus tantum modis possibile*

sibile sit Tangentes ducere; nempe quæ tangant alteram. Si tangat punctum H ipsas Curvas, tribus tantum modis fiet. Si vero extra Curvarum ambitus inveniatur punctum, tum quatuor modis duci possunt Tangentes: duobus nempe juxta Casus primos & tertios Locorum sexti & septimi; ac duobus, juxta casus secundos eorundem Locorum, quoties collocatur punctum in spatiis inter utramque Parabolam intermediis: vel etiam duobus, juxta Casus quartos eorundem, si in spatiis externis & infinitis ΑΟΝ, ΒΠΤ punctum H inveniatur: quæ omnia coincidunt cum iis quæ in casubus determinatis tradit Apollonius.

Caveat tamen Lector ne credat has Parabolas, quasi ad compositionem requisitas, describi oportere. Haud enim Geometræ Curvas Conicas ad effectionem Planorum Problematum (quale est hoc) adhibere convenit. At vero ad plenam solutionem, Locum, ut vocant, seu puncta omnia rem propositam præstantia exhiberi petunt hodierni Artifices; in quorum gratiam præcedentia subjunximus.

Occasione autem hujus Loci designandi, incidi in Propositionem perpulchram, quæque nova mihi visa est. viz. Si tres rectæ contingant Parabolam, ut ΗΚ, ΚΖ, ΕΛ; ac datum sit in altera punctum contactûs ut Ζ; dantur etiam in reliquis puncta contactûs. Nam ΖΚ est ad ΕΛ ut ΕΖ ad ΕΟ; ac ΕΖ est ad ΚΛ ut ΚΕ ad ΛΗ: quia Tangentes Parabolæ auferunt semper segmenta in datâ ratione. Datis etiam quatuor Tangentibus absque puncto, dantur etiam in omnibus puncta contactuum. Ducatur enim Tangens quarta, ut ΙΧΦΥ, occurrens ipsi ΑΒ in Φ, ac Curvam contingens in Χ. Dico quod ΛΥ erit ad ΕΙ ut ΛΚ ad ΕΖ, ac in eâdem erit ratione ΚΕ ad ΛΗ; data ergo sunt puncta Ζ & Η. Pariter ΚΥ : ΚΛ :: ΕΦ : ΕΟ & ΚΛ : ΚΥ :: ΙΦ : ΙΧ. Vel etiam ΕΚ : ΚΙ :: ΦΥ : ΥΧ, ac ΚΙ : ΕΚ :: ΛΦ ad ΛΟ. Quæ omnia manifesta sunt, ex eo, quod rectas quatuor Parabolam contingentes, ita sese intersecare necesse sit, ut quælibet Tangens similiter divisa sit, (sive in partes proportionales) ad puncta intersectionum & contactuum.

Datis autem quatuor Tangentibus, Curva ipsas contingens statim, absque omni præparatione, describi potest. Divisâ enim utrâque rectâ ΕΙ, ΥΛ in partes quotlibet numero æquales, continuanda est similium partium dispunctio utrinque *in infinitum; partium scilicet ipsius* EI *versus* K *&* Z*: partium vero ipsius* ΛΥ *versus* H *&* K. *Deinde jungendo omnia ordine puncta ad contrarias partes sumpta, nempe puncta in* KΥ *cum punctis in* IZ*; illa vero in* ΛH *cum correspondentibus in* EK*; habebimus Curvæ Tangentes quotlibet. Ad has*



vero manifestum est, si parum distent Tangentium intersectiones inter se, tutius duci posse Curvam quæsitam, quam per puncta methodo operosiori invenienda, ut expertus fateberis. Eodemque omnino modo describenda est Parabola, datis tribus Tangentibus & puncto contactûs in aliquâ earum. Sed ad Apollonium *redeamus.*

APOLLONII PERGÆI

De Sectione rationis,

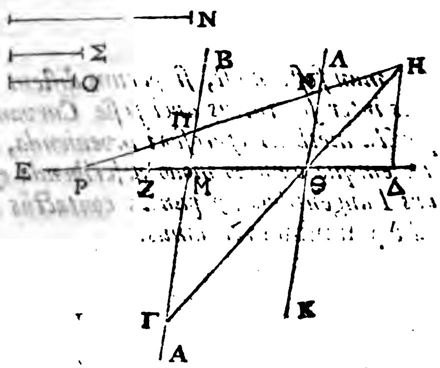
SIVE

ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ ΑΠΟΤΟΜΗΣ,

LIBER POSTERIOR.

SINT duæ rectæ positione datæ ut AB, ΔE, sese intersecantes in puncto M; sumatur autem in recta AB punctum Γ, & in recta ΔE punctum Z. Sit vero imprimis punctum datum H intra angulum ΔMB. Ac duci possunt rectæ per punctum H, ita ut segmenta in ratione datâ resectæ sint juxta quinque modos: vel enim abscindentur à rectis ΓB, ZE; vel à rectis ΓB, ZM; vel à rectis ZΔ, ΓA; vel â rectis ZΔ, ΓM; vel denique à rectis ΔZ, ΓB.

Cas. I. Ducatur jam juxta modum primum recta HP auferens ab ipsis ΓB, ZE rationem ΓΠ ad ZP æqualem rationi datæ: jungatur recta HΓ. Quoniam vero punctum Γ datur, atque etiam punctum H, erit recta ΓH positione data; datâ autem positione rectâ EZ, datum erit punctum *occursus* Θ. Per punctum Θ agatur recta KΛ ipsi AB parallela. Cum autem recta illa per punctum datum Θ ducatur, rectæque datæ AB parallela sit, ipsa KΛ positione



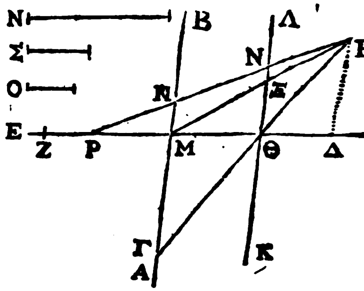
positione data est: dantur autem rectæ ΓΗ, ΘΗ, ob data puncta Γ, Θ, Η; adeoque ratio ΓΗ ad ΗΘ, hoc est ratio ΓΠ ad ΘΝ, etiam datur. Sed ratio ΓΠ ad ΖΡ data est, adeoque ratio ΘΝ ad ΖΡ habetur. Jam rectæ duæ ΚΛ, ΔΕ *positione* dantur, ac in recta ΚΛ notatur punctum Θ, in ipsâ vero ΔΕ punctum Ζ; datum autem punctum Η est intra angulum ΔΘΛ. Ducenda est igitur recta ut ΗΡ, quæ auferat ab ipsis rationem datam ΘΝ ad ΖΡ. Datur autem recta ΗΡ, datâ ratione illâ; per ea quæ demonstravimus in libro primo, Loco quarto & Casu primo. Hoc est quod voluimus ostendere in hoc Casu.

Componetur autem problema in hunc modum. Sit ratio data sicut Ν ad Ο: ac fiat ut ΓΗ ad ΗΘ ita Ν ad Σ. Dantur autem duæ rectæ in eodem plano, nempe ΚΛ, ΔΕ; & in recta ΚΛ sumitur punctum Θ, in recta vero ΔΕ punctum Ζ: ac datum est punctum Η intra angulum ΔΘΛ. Ducatur igitur recta ΗΠΡ, juxta modum descriptum in casu primo loci quarti, quæ auferat rationem ΘΝ ad ΖΡ, sicut Σ ad Ο. Dico quod hæc recta ΗΠΡ solvit problema. Quoniam enim ΗΓ est ad ΗΘ ut ΓΠ ad ΘΝ; ac Ν est ad Σ ut ΗΓ ad ΗΘ: erit ΓΠ ad ΘΝ sicut Ν ad Σ. Est autem ΘΝ ad ΖΡ sicut Σ ad Ο; adeoque ex æquo ΓΠ erit ad ΖΡ sicut Ν ad Ο: ac proinde recta ΗΡ solvit problema, eaque sola. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur jam, juxta casum secundum, recta ΗΡ auferens à rectis ΖΜ, ΓΒ rationem ΓΠ ad ΖΡ æqualem rationi datæ. Jungatur recta ΓΗ *occurrens ipsi* ΔΕ *in puncto* Θ; *ac per datum punctum* Θ *duc rectam* ΚΛ *ipsi* ΑΒ *parallelam, quæ proinde positione data est.* Datis autem punctis Γ, Θ, Η dabitur recta utraque ΓΗ, ΗΘ; adeoque ratio earundem datur. Quoniam vero ΓΠ est ad ΘΝ ut ΓΗ ad ΗΘ, ratio quoque ΓΠ ad ΘΝ data est. Sed & ratio ΓΠ ad ΖΡ datur; ratio igitur ΘΝ ad ΖΡ data est. Datis autem positione duabus rectis in eodem plano, nempe ΚΛ, ΔΕ; in recta ΚΛ sumitur punctum Θ, in recta vero ΔΕ punctum Ζ: datum autem punctum Η cadit intra angulum ΔΘΛ. Ducenda est igitur recta ΗΡ, quæ data erit per ea quæ demonstravimus in libro primo, ad Loci quarti Casum secundum.

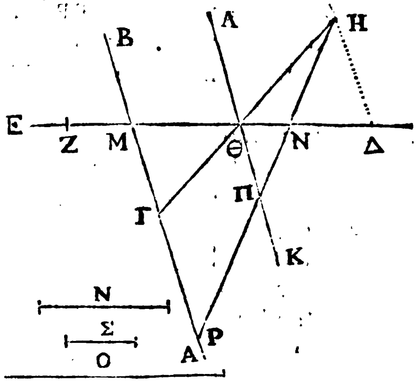
Ad compositionem autem requiritur, ut ratio data major sit ratione ΓΜ ad ΜΖ. Etenim cum recta ΓΠ major sit quam ΓΜ, ac ΖΡ minor quam ΖΜ; erit ratio ΓΠ ad ΓΜ major ratione

tione Z P ad Z M; ac permutando erit ratio Γ Π ad Z P major ratione Γ M ad M Z. Oportet igitur rationem datam majorem esse ratione Γ M ad M Z. Construetur autem problema ad hunc modum. Manentibus prius descriptis; sit ratio data sicut N ad O, quæ major sit ratione Γ M ad M Z. Jungantur H Γ, H M, ac fiat ut H Γ ad Θ H ita N ad Σ. Quoniam autem H Γ est ad Θ H ut N ad Σ, & Γ M est ad Θ Ξ ut H Γ ad Θ H, erit Γ M ad Θ Ξ sicut N ad Σ. Sed ratio N ad O major est ratione Γ M ad M Z: quare ex æquo ratio Σ ad O major erit ratione Θ Ξ ad M Z. Igitur si velimus ducere rectam per punctum H, juxta casum secundum Loci quarti, quæ auferat à rectis K Λ, Θ Z rationem æqualem rationi Σ ad O; occurret illa rectæ Z M, hoc est, cadet ultra punctum M. Nam si propior fuerit puncto Θ, abscinderetur ratio minor. Fiet autem compositio ut in Casu secundo Loci quarti. Ac rectâ H P auferente rationem Θ N ad P Z æqualem rationi Σ ad O; dico quod ipsa H P satisfaciet problemati. Quoniam enim Γ H est ad H Θ in ratione N ad Σ, *ac* Γ Π *est ad* Θ N ut Γ H est ad H Θ, *erit etiam* Γ Π *ad* Θ N sicut N ad Σ. Sed Θ N est ad P Z sicut Σ ad O: quare ex æquo Γ Π erit ad P Z in ratione N ad O. Quapropter recta H P solvit problema, eaque sola. Q. E. D.



Cas. III. Ducatur jam, juxta modum tertium, recta H P auferens à rectis Γ A, Z Δ rationem Γ P ad Z N æqualem rationi datæ; & jungatur Γ H. Datis punctis Γ & H datur etiam recta Γ H. Sed recta Δ E positione datur, ergo datum est punctum Θ. Per punctum Θ ducatur recta parallela ipsi A B, ut K Λ; igitur recta K Λ positione datur. Datis autem rectâ K Λ, punctisque Γ, H, Θ; utraque recta Γ H, H Θ datur, earundemque ratio. Sed ut Γ H est ad H Θ, ita Γ P ad Π Θ; ratio itaque Γ P ad Π Θ datur: ratio autem Γ P ad Z N datur, adeoque ratio Π Θ ad Z N data est. Jam sunt duæ rectæ lineæ in eodem plano, nempe K Λ, Δ E; ac notatur recta K Λ puncto Θ, recta vero Δ E puncto Z: punctum autem H, unde ducenda est recta secans, cadit intra angulum Δ Θ Λ. Ducenda est igitur recta

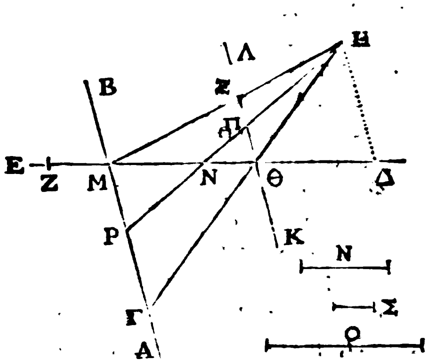
recta ΗΠ auferens rationem ΠΘ ad ΝΖ. At data erit recta ΗΠΡ, juxta ea quæ demonstrantur in Libro primo, Loco quarto ac Casu tertio. Q. E. I.



Sic autem componetur problema. Sit ratio data sicut Ν ad Ο; ac manentibus descriptis, fiat ut ΗΓ ad ΗΘ ita Ν ad Σ. Cumque ΚΛ, ΔΕ sint duæ rectæ in eodem plano positione datæ; ac in rectâ ΚΛ sumatur punctum Θ, in rectâ vero ΔΕ punctum Ζ; ac sit punctum datum Η intra angulum ΔΘΛ: ducatur igitur recta ΗΠ, juxta Casum tertium Loci quarti, quæ auferat rationem ΘΠ ad ΖΝ æqualem rationi Σ ad Ο; ac producatur eadem ad Ρ. Dico quod recta ΗΡ satisfacit problemati. Etenim ΓΗ est ad ΗΘ sicut Ν ad Σ; atque adeo ΓΡ est ad ΘΠ ut Ν ad Σ. Sed ΘΠ est ad ΖΝ sicut Σ ad Ο: quare ex æquo erit ΓΡ ad ΖΝ sicut Ν ad Ο. Recta igitur ΗΡ solvit problema, eaque sola. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur jam recta ΗΡ, juxta Casum quartum, auferens à rectis ΓΜ, ΖΔ segmenta ΓΡ, ΖΝ in ratione datâ. Junge ΓΗ, & cum puncta Γ & Η dentur, data erit recta ΗΓ; ac datâ rectâ ΔΕ, est etiam punctum Θ datum. Per punctum Θ agatur recta ΚΛ ipsi ΑΒ parallela, ac recta ΚΛ datur *positione*. Quoniam autem puncta Γ, Η, Θ data sunt, rectæ duæ ΓΗ, ΘΗ etiam dantur; unde ratio ΓΗ ad ΗΘ data est. Sed ut ΓΗ ad ΗΘ ita ΓΡ ad ΘΠ, ratio itaque ΓΡ ad ΘΠ datur. Datâ autem ratione ΓΡ ad ΖΝ, dabitur quoque ratio ΘΠ ad ΖΝ. Jam duæ rectæ ΚΛ, ΔΕ dantur positione in eodem plano, ac recta ΚΛ notatur in puncto Θ; recta vero ΔΕ in puncto Ζ: punctum autem datum est punctum Η, intra angulum ΛΘΔ. Ducenda est igitur recta ut ΗΡ, quæ auferat rationem ΘΠ ad ΖΝ. Datur autem recta ΗΡ per ea quæ demonstrantur in Libri primi Loco quarto ac Casu secundo. Necesse est autem ad Constructionem ut ratio proposita minor

nor sit ratione ΓM ad MZ. Quoniam enim recta MΓ major est quam ΓP, ac MZ minor quam ZN, erit ratio MΓ ad ΓP major ratione MZ ad ZN; quare permutando, ratio MΓ ad MZ major erit ratione ΓP ad ZN. Sed ratio ΓP ad ZN est ratio data; oportet igitur rationem, ad construendum propositam, minorem esse ratione ΓM ad MZ.

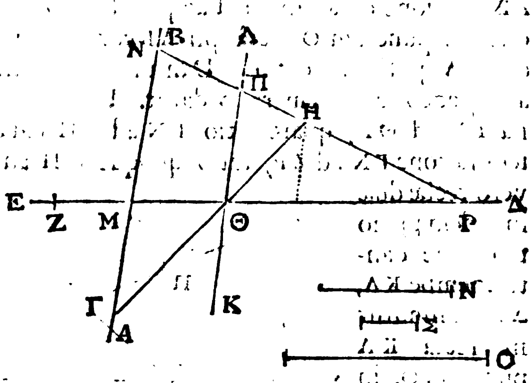


Componetur problema hunc in modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut N ad O, quæ sit minor ratione ΓM ad MZ. Jungatur HM, ac fiat ut ΓH ad HΘ ita N ad Σ. Quoniam autem ut ΓH ad HΘ ita ΓM ad ΘΞ; ac ΓH ad HΘ est ut N ad Σ: ΓM igitur erit ad ΘΞ sicut N ad Σ. Sed ratio ΓM ad MZ major est ratione N ad O: quare collatis consequentibus erit ratio ΘΞ ad MZ major ratione Σ ad O. Recta igitur ducta per punctum H, quæ auferat à rectis ΘΛ, ZΘ rationem æqualem rationi Σ ad O, occurret rectæ ΘM. Expositis enim duabus rectis KΛ, ΔE, sumitur in KΛ punctum Θ; in recta vero ΔE punctum Z. Punctum autem datum H est intra angulum ΔΘΛ: quare, si ducatur, per Casum secundum Loci quarti, recta HM, quæ auferat rationem ΘΞ ad MZ majorem ratione Σ ad O; ac deinde proponatur aliam ducere, ut recta HN, quæ auferat rationem æqualem rationi Σ ad O; cadet illa citra punctum M, *sive inter puncta* Θ & M: quia juxta præscriptum Casûs illius rectæ propiores puncto Θ auferunt rationes minores quam quæ sunt remotiores ab eodem. Productâ autem rectâ HN ad P, dico quod HP solvit problema. Etenim ut ΓH est ad HΘ, ita ΓP ad ΘΠ; *adeoque* ΓP *est ad* ΘΠ *sicut* N *ad* Σ. *Sed* ΘΠ *est* ad ZN sicut Σ ad O: igitur ex æquo ΓP erit ad ZN sicut N ad O. Quare recta HP satisfacit problemati. Q. E. D.

Cas. V. Ducatur juxta Casum quintum recta PN, auferens ab ipsis ZΔ, ΓB rationem ΓN ad ZP æqualem rationi datæ.

Junge

Junge ΓH, ac datis punctis Γ & H recta ΓH datur. Cumque recta ΔE positione datur, etiam punctum Θ datur. Ducta dein per punctum Θ recta ipsi AB parallela ut KΛ, ipsius KΛ positio data erit. Quoniam autem puncta Γ, H, Θ dantur, rectæ etiam HΓ, HΘ habentur atque ratio earundem. Ut autem ΓH ad HΘ ita ΓN ad ΘΠ; quare ratio ΓN ad ΘΠ datur. Sed & ratio ΓN ad ZP datur, adeoque ratio ΘΠ ad ZP data est. Jam rectæ duæ KΛ, ΔE dantur positione, ac sumitur in recta KΛ punctum Θ, in recta autem ΔE punctum Z; punctum vero datum H est intra angulum ΔΘΛ: ducenda est igitur recta ut ΠP, auferens à rectis illis rationem ΘΠ ad ZP. Positione autem datur recta PΠ, per demonstrata in Libri primi Loco quarto ac Casu quarto. Quod erat inveniendum.



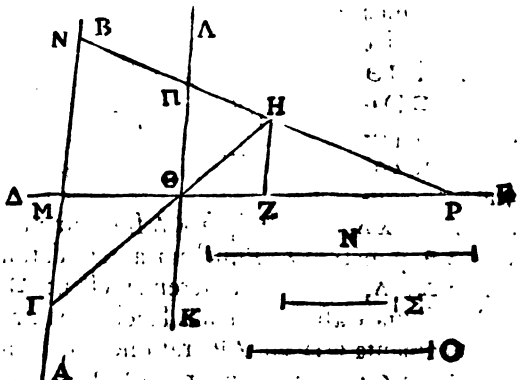
Construetur autem problema hunc in modum. Sit ratio data sicut N ad O; ac manentibus descriptis, fiat ut HΓ ad HΘ ita N ad Σ. Datis autem positione in eodem plano duabus rectis KΛ, ΔE; in ipsa KΛ sumitur punctum Θ, in recta vero ΔE punctum Z. Punctum autem datum H est intra angulum ΔΘΛ, & ratio auferenda est ut Σ ad O. Ducatur igitur, juxta Casum quartum Loci quarti, recta ΠP, quæ auferat segmenta ΘΠ ad ZP, rationem habentia æqualem rationi Σ ad O: datur itaque recta ΠP, quæ producatur ad N. Dico quod recta PΠN solvit problema. Etenim ut HΓ ad HΘ ita ΓN ad ΘΠ. Sed HΓ est ad HΘ sicut N ad Σ; quare ΓN est ad ΘΠ ut N ad Σ. Est autem ΘΠ ad ZP sicut Σ ad O: quare ex æquo erit ΓN ad PZ sicut N ad O. Q. E. D.

LOCUS

LOCUS SECUNDUS.

Sint jam duæ rectæ infinitæ positione datæ, *ut* ΑΒ, ΔΕ, *sese intersecantes in puncto* Μ, ac sumatur in recta ΑΒ punctum Γ, in recta vero ΔΕ punctum Ζ. Sitque datum punctum Η intra angulum ΕΜΒ. Cadat autem imprimis recta, per punctum Η ducta ipsi ΑΒ parallela, super ipsum punctum datum Ζ. Ac rectæ per punctum Η ductæ habebunt quatuor Casus. Vel enim segmenta abscissa erunt à rectis ΓΒ, ΖΕ; vel à rectis ΓΑ, ΖΔ; vel à rectis ΓΜ, ΜΖ; vel denique ab ipsis ΓΒ, ΖΔ.

Cas. I. Cadat autem imprimis, juxta Casum primum, recta ΝΗΡ, secans a rectis ΓΒ, ΖΕ rationem ΓΝ ad ΖΡ æqualem rationi datæ. Junge ΓΗ; ac datis punctis Γ & Η, ac rectâ ΖΕ positione datâ, ipsa ΓΗ ac punctum Θ dabuntur. Ductâque per punctum Θ rectâ ipsi ΑΒ parallelâ, ut ΚΛ, ipsa quoque ΚΛ positione datur. Dantur autem utræque ΓΗ, ΘΗ, atque adeo earundem ratio datur. Ut autem ΓΗ est ad ΗΘ ita ΓΝ ad ΘΠ, quare ratio ΓΝ ad ΘΠ data est. Datâ autem ratione ΓΝ ad ΖΡ, ratio quoque ΘΠ ad ΖΡ datur. Jam vero rectæ duæ in eodem plano positione dantur, nempe ΚΛ, ΔΕ; ac sumitur in recta ΚΛ punctum Θ, in ipsâ vero ΔΕ punctum Ζ. Datum vero punctum Η ponitur intra angulum ΕΘΛ; cadit etiam recta per punctum Η ducta ipsi ΑΒ parallela, super punctum Ζ. Ducenda est igitur recta ΗΡ, quæ auferat rationem rationi ΘΠ ad ΖΡ æqualem. Recta autem ΡΗΝ positione datur, per demonstrata in Libro primo, ad Casum primum Loci quinti. Q. E. I.

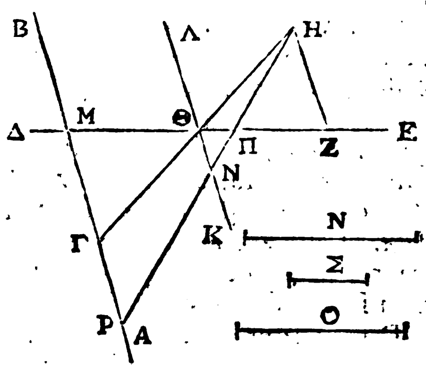


Sic autem componetur problema hoc. Manentibus descriptis ac juxta præscriptum propositionis dispositis; sit ratio data

sicut

ſicut N ad O, ac fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Σ. Dantur autem duæ rectæ in eodem plano, puta K Λ, Δ E, quarum K Λ notatur in puncto Θ, Δ E vero in puncto Z; punctum autem datum H eſt intra angulum E Θ Λ; ratio vero auferenda eſt ut Σ ad O. Ducatur itaque recta Π P, juxta Caſum primum Loci quinti, (quia recta parallela cadit ſuper punctum Z) auferens rationem Θ Π ad Z P æqualem rationi datæ Σ ad O; ac producta rectâ P H Π *ad* N, dico quod ipſa N H P ſatisfacit problemati. Quoniam enim Γ H eſt ad H Θ ut Γ N ad Θ Π; ac Γ H eſt ad H Θ etiam ut N ad Σ: idcirco Γ N eſt ad Θ Π ut N ad Σ. Sed Θ Π eſt ad P Z ſicut Σ ad O; quare ex æquo erit Γ N ad P Z ſicut N ad O: recta itaque P H N ſolvit problema. Q. E. D.

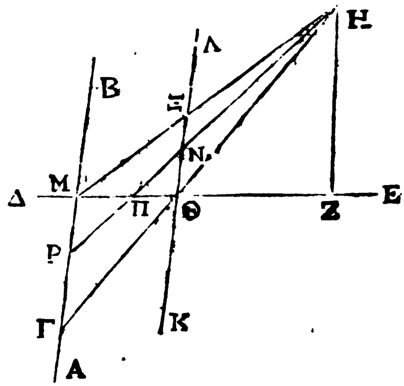
Caſ. II. Ducatur jam juxta modum ſecundum recta H P, auferens à rectis Γ A, Z Δ rationem Γ P ad Z Π æqualem rationi datæ. Junge Γ H, ac cum punctum Θ detur, ducatur per idem Θ recta parallela ipſi A B, ut K Θ Λ: recta itaque K Θ Λ poſitione datur. Datur autem ratio H Γ ad Θ H; cumque Γ P eſt ad Θ N ſicut H Γ ad Θ H, ratio quoque Γ P ad Θ N datur: ſed & ratio Γ P ad Z Π datur; quare ratio Θ N ad Z Π etiam datur. Jam rectæ duæ K Λ, Δ E dantur poſitione; ac ſumitur punctum Θ in recta K Λ, in ipſa vero Δ E punctum Z; ac datum punctum H eſt intra angulum E Θ Λ: recta autem parallela cadit ſuper punctum Z Ducenda eſt igitur recta ut H N, auferens rationem illam Θ N *ad* Z Π à rectis Θ K, Z Δ. Hæc autem recta H Π N poſitione datur, juxta demonſtrata in Libro primo, ad Caſum ſecundum Loci quinti. Q. E. I.



Hoc autem problema ſic conſtruetur. Maneant jam deſcripta quemadmodum docuimus; ac ſit ratio data ſicut N ad O. Fiatque ut H Γ ad H Θ ita N ad Σ. Sunt autem duæ rectæ datæ in eodem plano, nempe K Λ, Δ E; & habetur in rectâ K Λ punctum Θ, in ipsâ vero Δ E punctum Z; datum quoque

quoque punctum H est intra angulum EΘΛ: recta autem parallela cadit super punctum datum Z, ac ratio data ea est quæ Σ ad O. Ducatur igitur recta HΠN, juxta casum secundum Loci quinti, auferens rationem ΘN ad ZΠ æqualem rationi Σ ad O, ac producatur ea ad P. Dico quod recta HP solvit problema. Quoniam enim HΓ est ad HΘ ut ΓP ad ΘN; atque etiam HΓ est ad HΘ ut N ad Σ: erit quoque ΓP ad ΘN sicut N ad Σ. Sed ΘN est ad ZΠ in ratione Σ ad O: quare ex æquo ΓP erit ad ZΠ sicut N ad O. Recta igitur HΠP satisfacit problemati. Q. E. D.

Cas. III. Ducatur juxta Casum tertium recta HP auferens à rectis ΓM, ZM rationem ΓP ad ZΠ æqualem rationi datæ. Junctâ HΓ, per punctum Θ ducatur recta KΛ ipsi AB parallela, ac recta KΘΛ datur positione. Quoniam vero HΓ est ad HΘ sicut PΓ ad ΘN, ratio PΓ ad ΘN datur; ac *datâ* ratione PΓ ad ZΠ, ratio etiam ΘN ad ZΠ datur. Dantur autem positione duæ rectæ in eodem plano nempe KΛ, ΔE; & in recta KΛ punctum Θ, in ΔE vero punctum Z datur: datum autem punctum H est intra angulum EΘΛ; ac recta parallela cadit super punctum Z. Ducenda est igitur recta HΠ, quæ abscindat rationem ΘN ad ZΠ æqualem rationi datæ. Datur autem positione recta HΠ, quæ solvet problema, per ea quæ demonstrantur in Libro primo, ad Casum tertium Loci quinti. Q. E. I.

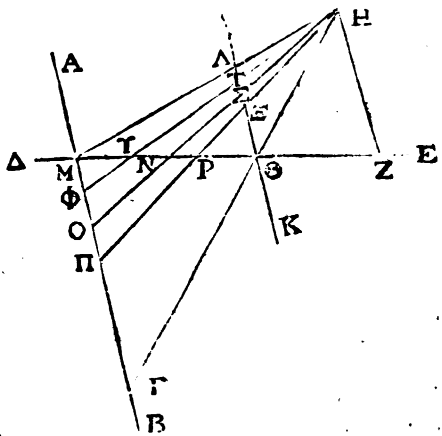


Determinatur autem hunc in modum. Manentibus jam descriptis, recta ZΘ vel minor erit quam recta ΘM, vel major eâ. Sit autem imprimis non minor eâ; ac jungatur HM. Dico quod recta HM aufert rationem ΓM ad MZ majorem quâvis aliâ ratione, quæ à quibuscunque rectis per punctum H ductis, rectisque ΓM, MΘ occurrentibus abscindi possint. Ducatur enim alia recta ut HΠP. Quoniam vero recta ZΘ non minor est quam ΘM, recta HM auferet rationem ΘN

ad

ad ZM eo majorem quo propior est rectæ abscindenti rationem maximam; adeoque majorem eâ quæ resecatur ab HΠP: juxta demonstrata in Libro primo ad Loci quinti Casum tertium. Ratio igitur ΘΞ ad ZM major est ratione ΘN ad ZΠ, ac permutando ratio ΞΘ ad ΘN major erit ratione MZ ad ZΠ. Cum autem ratio ΞΘ ad ΘN est ut ΓM ad ΓP, ratio ΓM ad ΓP major erit quam MZ ad ZΠ. Permutando itaque ratio ΓM ad MZ major erit ratione ΓP ad ΠZ: quare recta HM aufert rationem ΓM ad MZ majorem quacunque alia ratione, quam abscindere possit recta quævis per punctum H ducta rectisque ΘM, MΓ occurrens. Q. E. D.

Quod si ZΘ minor sit quam recta ΘM; fiat ΘN ipsi ZΘ æqualis: ac junctam HN produc ad O: junge etiam HM. Dico rectam HNO auferre rationem ΓO ad ZN majorem quavis aliâ ratione, à rectâ qualibet per punctum H ducendâ, totique rectæ ΓM occurrente abscisâ: quodque recta HM abscindit rationem ΓM ad MZ minorem quâlibet ratione, à rectâ per punctum H ductâ ipsique OM occurrente, ablatâ. Ducatur enim recta alia ut HΠP occurrens rectæ ΓO. Quoniam autem recta ZΘ æqualis est ipsi ΘN, positione datur recta HNO, auferens rationem ΘΣ ad ZN maximam; per Loci quinti Casum tertium Lib. I. Ratio igitur ΘΣ ad ZN major est ratione ΘΞ ad ZP, ut ibidem demonstratur. Permutando autem ratio ΘΣ ad

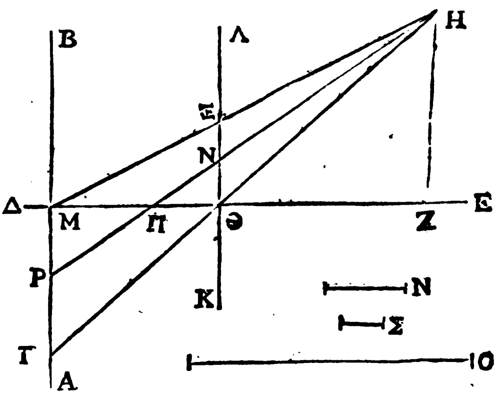


ΘΞ major erit ratione ZN ad ZP. Sed ratio ΘΣ ad ΘΞ est ut ΓO ad ΓΠ; quare ratio ΓO ad ΓΠ major est ratione ZN ad ZP: ac permutando, *ratio* ΓO *ad* ZN *major erit ratione* ΓΠ *ad* ZP. Ac pari modo probabitur quod, si ducatur recta quævis alia per punctum H, occurrens ipsi OM, recta HNO auferet rationem ΓO ad ZN maximam. Dico præterea quod recta HM aufert rationem ΓM ad MZ minorem quâvis aliâ

 ratione,

ratione, quæ resecari possit à rectâ qualibet per punctum H ductâ, ipsisque O M, M N occurrente. Educatur enim recta alia ipsam O M intersecans, ut H T Υ Φ. Quoniam vero recta H N O abscindit rationem maximam, ac recta H T Υ eidem propior est quam recta H M; ratio Θ T ad Z Υ major erit ratione Θ Λ ad Z M: ac permutando ratio Θ T ad Θ Λ major erit ratione Z Υ ad Z M. Sed Θ T est ad Θ Λ ut Γ Φ ad Γ M; quare ratio Γ Φ ad Γ M major est ratione Z Υ ad Z M, ac permutando ratio Γ Φ ad Z Υ major erit ratione Γ M ad M Z: adeoque ratio Γ M ad M Z minor est ratione Γ Φ ad Z Υ. Recta igitur H N aufert rationem Γ O ad N Z majorem quavis ratione, quæ secari possit à rectis per H ductis, ipsique Γ M occurrentibus: recta vero H M aufert rationem Γ M ad M Z, minorem qualibet aliâ rectâ ipsi O M occurrente. Q. E. D.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, recta Z Θ vel minor erit quam Θ M vel major ea. Sit autem imprimis recta Z Θ non minor quam Θ M. Junge H M, ac recta H M secabit rationem Γ M ad M Z majorem quavis aliâ ratione, à rectâ quâlibet per punctum H ductâ ipsique Γ M occurrente, abscissâ. Jam si ratio ad construendum data fuerit ratio Γ M ad M Z, recta H M *satisfacit problemati. At si major fuerit ratio quam* Γ M ad M Z non componetur problema; quia recta H M aufert rationem Γ M ad M Z maximam. Quod si minor



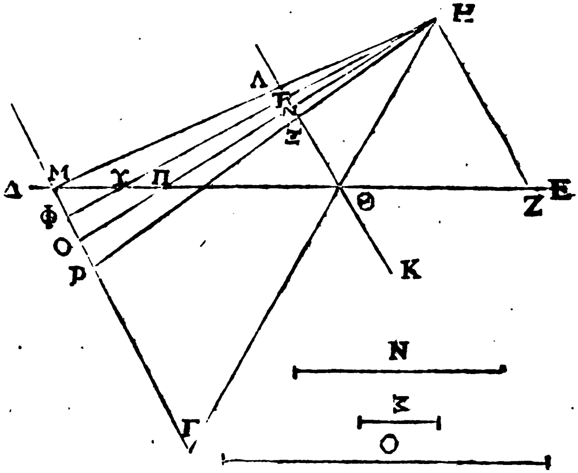
fuerit ratione Γ M ad M Z uno tantum modo construetur. Propositâ autem ratione N ad O minore quam Γ M ad M Z; fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Σ: ac ducatur per punctum Θ recta K Θ Λ ipsi A B parallela. Quoniam autem Γ H est ad H Θ sicut Γ M ad Θ Ξ, atque Γ H est ad H Θ ut N ad Σ, erit etiam Γ M ad Θ Ξ sicut N ad Σ; ac invertendo erit Θ Ξ ad Γ M sicut Ξ ad N. Sed ratio Γ M ad M Z major est ratione N ad O;

igitur

igitur ex æquo erit ratio Θ Ζ ad Μ Ζ major ratione Σ ad Ο. Jam dantur positione rectæ duæ Κ Λ, Δ Ε, quarum Κ Λ notatur in puncto Θ, Δ Ε vero in puncto Ζ: cadit autem recta parallela super punctum Ζ, ac recta Θ Ζ non est minor quam Θ Μ; recta vero Η Μ aufert rationem maximam, nempe Θ Ζ ad Μ Ζ, qua minor est ratio Σ ad Ο. Ducatur itaque recta per punctum Η, juxta Casum tertium Loci quinti, quæ auferat à rectis Θ Λ, Ζ Μ rationem rationi Σ ad Ο æqualem. Quod quidem fieri potest duobus modis; sed una tantum è rectis occurret rectæ Θ Μ, alterâ ultra punctum Μ cadente. Sit autem recta illa Η Ν Π, auferens rationem Ν Θ ad Ζ Π æqualem rationi Σ ad Ο. Dico quod recta Η Ν Π Ρ solvit problema. Nam Γ Η est ad Η Θ ut Γ Ρ ad Θ Ν, ac Γ Η est ad Η Θ ut Ν ad Σ; adeoque Γ Ρ est ad Θ Ν ut Ν ad Σ. Sed Θ Ν est ad Ζ Π sicut Σ ad Ο: quare ex æquo Γ Ρ erit ad Ζ Π sicut Ν ad Ο. Igitur recta Η Ρ satisfacit problemati. Q. E. D.

Jam sit recta Ζ Θ minor quam Θ Μ. Fiat recta Θ Π æqualis ipsi Ζ Θ, ac juncta Η Π producatur ad Ο. Jungatur etiam Η Μ; ac recta Η Π Ο auferet rationem Γ Ο ad Ζ Π, majorem quâvis ratione à qualibet rectâ per punctum Η ductâ ac rectæ Γ Μ occurrente abscissâ. Recta vero Η Μ abscindet rationem Γ Μ ad Μ Ζ minorem qualibet ratione à rectis per Η ductis ipsique Μ Ο occurrentibus auferendâ. Recta enim Η Π Ο (per Casum tertium Loci quinti) secat rationem Θ Ν ad Ζ Π majorem ratione Θ Λ ad Μ Ζ; ac alternando *erit ratio* Θ Ν *ad* Θ Λ *major ratione* Ζ Π *ad* Μ Ζ. Sed Θ Ν est ad Θ Λ sicut Γ Ο ad Γ Μ; quare permutando ratio Γ Ο ad Ζ Π major erit ratione Γ Μ ad Ζ Μ. Recta igitur Η Ο abscindit rationem Γ Ο ad Ζ Π, majorem quavis alia ratione à rectâ ipsi Γ Μ occurrente abscissâ. Recta vero Η Μ aufert rationem Γ Μ ad Μ Ζ minorem ratione quavis quæ secatur à rectis ipsi Ο Μ occurrentibus. Ducatur enim recta Η Τ Υ; cumque ea propior sit rectæ maximam rationem auferenti quam Η Μ, recta Η Τ Υ majorem auferet rationem quam Η Μ; adeoque ratio Θ Τ ad Ζ Υ major erit ratione Θ Λ ad Μ Ζ, ac permutando *ratio* Θ Τ *ad* Θ Λ *major erit ratione* Ζ Υ *ad* Μ Ζ. Sed Θ Τ est ad Θ Λ ut Γ Φ ad Γ Μ; quare alternando ratio Γ Φ ad Ζ Υ major est ratione Γ Μ ad Μ Ζ: adeoque recta Η Μ aufert rationem minimam. Igitur si proponatur ratio ad componendum, quæ sit æqualis rationi Γ Ο ad Ζ Π, sola recta Η Ο satisfacit problemati, quia ratio

ratio est maxima. Quâ si major fit ratio, non componetur, quia major est maxima. Quod si fuerit minor quam ratio Γ O ad Z Π, major vero quam Γ M ad M Z; tum problema duobus modis effici potest, nempe ab utrâque parte rectæ H N O. Si vero non fuerit major ratione Γ M ad M Z, tum uno tantum modo componetur, nempe inter O & Γ. Imprimis autem sit ratio data, sicut N ad O, minor ratione Γ O ad Z Π, major vero quam Γ M ad M Z: & fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Σ, adeoque Γ O ad N Θ erit ut N ad Σ; ac invertendo erit N Θ ad Γ O sicut Σ ad N. Sed ratio Γ O ad Π Z major est



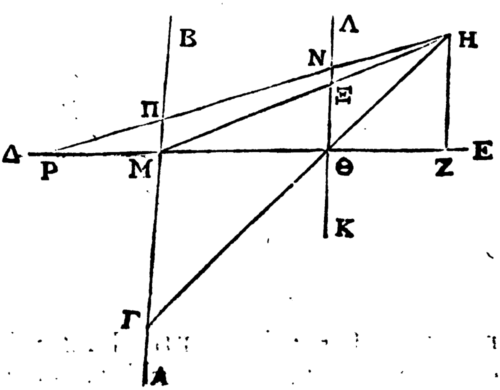
ratione N ad O: quare ex æquo ratio N Θ ad Π Z major erit ratione Σ ad O. Quinetiam cum ratio Γ H ad H Θ sit ut N ad Σ, atque etiam ut Γ M ad Θ Λ; erit Γ M ad Θ Λ sicut N ad Σ; ac invertendo Θ Λ ad Γ M ut Σ ad N. Sed ratio Γ M ad M Z minor est ratione N ad O: quare ex æquo ratio Θ Λ ad M Z minor erit ratione Σ ad O. Probavimus autem rationem Θ N ad Π Z majorem esse ratione Σ ad O; ac recta H Π maximam aufert rationem per demonstrata in Casu tertio Loci quinti. Si itaque ducantur, ad modum Casus tertii Loci quinti, rectæ per punctum H, quæ auferant ab ipsis Θ Λ, Z Δ segmenta quæ sint inter se ut Σ ad O, habebuntur duæ rectæ, ab utraque scilicet parte ipsius H O; quarum altera ut H Ξ P occurret rectæ Θ Π. Dico quoque alteram rectæ Π M occursuram. Quoniam enim rectæ propiores ipsi H O semper auferunt rationes majores quam rectæ remotiores ab eâdem; ac ratio Σ ad O major est ratione Θ Λ ad M Z: recta illa, quæ per punctum H ducta abscindit rationem Σ ad O, propior erit ipsi

O H

ΟΗ quam recta ΗΜ. Ducta igitur recta ΗΤΥ ac producta in Φ: dico hanc quoque satisfacere problemati. Nam ΗΓ est ad ΗΘ, hoc est ΓΦ ad ΘΤ, sicut Ν ad Σ; ac ΘΤ est ad ΖΥ sicut Σ ad Ο; quare ex æquo erit ΓΦ ad ΖΥ sicut Ν ad Ο. Recta igitur ΗΥΦ satisfacit problemati; ac manifestum est rectam alteram, sive ΗΞΡ, tantundem præstare.

Manentibus autem omnibus jam descriptis; sit ratio Ν ad Ο non major ratione ΓΜ ad ΜΖ: ac fiat ut ΓΗ ad ΗΘ ita Ν ad Σ. Per inquisitionem autem præmissam, constat *rationem* Σ *ad* Ο majorem non esse ratione ΘΛ ad ΜΖ; atque adeo certe minorem ratione ΘΝ ad ΠΖ. Quoniam vero ratio Σ ad Ο minor est ratione ΝΘ ad ΖΠ, sive maxima: ducantur, juxta descripta in Casu tertio Loci quinti, rectæ duæ ab utraque parte ipsius ΗΝΟ, auferentes rationem æqualem rationi Σ ad Ο; quarum altera quidem cadet inter ipsas ΗΠ, ΗΓ, altera vero occurret rectæ ΠΜΔ. Quoniam autem recta quæ propior est ipsi ΗΠ semper aufert rationem majorem remotiore: ac ratio Σ ad Ο, cum jam non sit major quam ratio ΘΛ ad ΜΖ, vel æqualis erit illi vel minor eâ. Si itaque æqualis fuerit, rem præstat recta ΗΜ. Quod si minor fuerit ratione ΘΛ ad ΜΖ, cadet recta ultra ipsam ΗΜ; adeoque patet quod non satisfacit problemati, quia non occurrit rectæ ΓΜ. Altera autem recta quæ transit inter ipsas ΗΓ, ΗΠΟ solvit problema. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur jam, juxta Casum quartum, recta ΗΡ auferens ab ipsis ΓΒ, ΖΔ rationem ΓΠ ad ΖΡ æqualem rationi datæ. Jungatur ΗΓ; ac per punctum Θ jam cognitum, ducatur recta ipsi ΑΒ parallela, ut ΚΘΛ; ac recta ΚΛ positione datur. Cum autem ratio ΗΓ ad ΗΘ, sive ΓΠ ad ΘΝ, data est, *ac ratio* ΓΠ *ad* ΖΡ *datur, ratio quoq;* Ν Θ *ad* ΖΡ *datur*. Jam dantur positione duæ rectæ ΚΛ, ΔΕ; sumitur

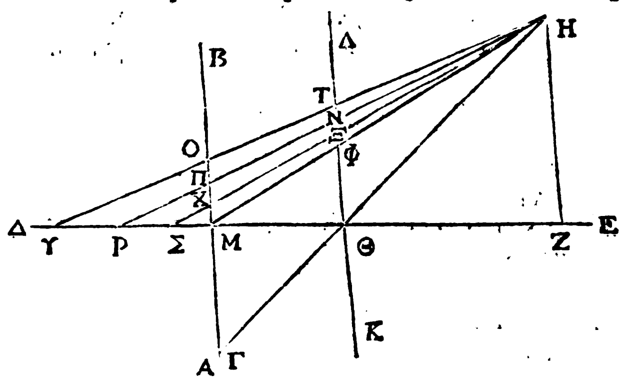


5 mitur

mitur autem in ΚΛ punctum Θ, in ipsâ vero ΔΕ punctum Ζ: punctum autem cognitum Η est intra angulum ΕΘΛ; ac recta parallela cadit super ipsum punctum Ζ. Ducenda est igitur recta ΗΝΡ quæ auferat rationem ΘΝ ad ΡΖ. Recta autem illa ΗΡ positione datur, per demonstrata in Libro primo ad Casum tertium Loci quinti.

Determinatur autem problema hunc in modum. Recta ΖΘ potest esse vel major vel minor quam ΘΜ: imprimis autem non sit major quam ΘΜ. Junge ΗΜ, ac dico quod recta ΗΜ *aufert rationem* ΓΜ ad ΜΖ majorem quavis aliâ rectâ per punctum Η ductâ, ipsique ΔΜ occurrente. Ducatur enim recta alia, ut ΗΝΡ; cumque recta ΖΘ non est longior quam ΘΜ, recta ΗΜ vel auferet rationem ΘΞ ad ΜΖ maximam, vel propior erit rectæ rationem maximam abscindenti quam ista ΗΡ. Quare ratio ΘΞ ad ΜΖ major erit ratione ΘΝ ad ΖΡ, ac permutando ratio ΘΞ ad ΘΝ major erit ratione ΜΖ ΖΡ. Quoniam vero ΘΞ est ad ΘΝ ut ΓΜ est ad ΓΠ, erit ratio ΓΜ ad ΓΠ major ratione ΜΖ ad ΖΡ; ac permutando ratio ΓΜ ad ΜΖ major erit ratione ΓΠ ad ΖΡ. Recta igitur ΗΜ aufert rationem ΓΜ ad ΜΖ, majorem quavis ratione à recta qualibet per punctum Η transeunte, rectæque ΔΜ occurrente abscissâ. Q. E. D.

Manentibus descriptis, jam sit recta ΖΘ major quam ΘΜ, ac fiat recta ΘΡ ipsi ΖΘ æqualis: ac junctâ ΗΡ, dico quod

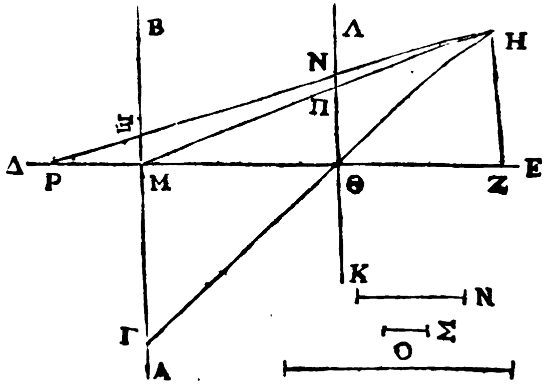


recta ΗΡ aufert rationem ΓΠ ad ΡΖ majorem quavis ratione, quam abscindit recta quælibet alia per punctum Η ducta, rectæque ΜΔ occurrens. Ducantur rectæ duæ ab utrâque

parte

parte ipsius HP, ut $H\Sigma$, HT. Quoniam vero recta $Z\Theta$ æqualis est ipsi ΘP, recta HP auferet rationem $N\Theta$ ad ZP maximam, juxta Casum tertium Loci quinti. Etenim rectæ $K\Lambda$, ΔE dantur positione; ac notatur in recta $K\Lambda$ punctum Θ, ac in ΔE punctum Z; ac parallela per H ducta cadit super punctum Z: & recta ΘP æqualis est ipsi $Z\Theta$. Ratio igitur $N\Theta$ ad ZP major est ratione ΘT ad ZT; ac permutando erit ratio ΘN ad ΘT major ratione ZP ad ZT. Sed $N\Theta$ est ad ΘT ut $\Gamma\Pi$ ad ΓO. Quare ratio $\Gamma\Pi$ ad ΓO major est ratione ZP ad ZT, *ac permutando ratio* $\Pi\Gamma$ *ad* ZP *major est ratione* ΓO *ad* ZT. Simili argumento demonstratur rectam alteram $H\Sigma$ auferre rationem minorem quam recta HP. Recta igitur HP aufert rationem $\Gamma\Pi$ ad ZP, majorem quavis rectâ per H transeunte ipsique $M\Delta$ occurrente. Dico præterea rectam HM abscindere rationem ΓM ad MZ, minorem qualibet ratione, à rectâ quavis per H transeunte, ipsique PM soli occurrente, abscissâ. Etenim recta $H\Sigma$ propior est rectæ maximam rationem auferenti, sive rectæ HP, quam est HM; erit igitur ratio $\Theta\Xi$ ad $Z\Sigma$ major ratione $\Theta\Phi$ ad ZM: ac permutando ratio $\Theta\Xi$ ad $\Theta\Phi$ major erit ratione $Z\Sigma$ ad ZM. Sed $\Theta\Xi$ est ad $\Theta\Phi$ ut ΓX ad ΓM, adeoque ratio ΓX ad ΓM major erit ratione $Z\Sigma$ ad ZM; ac permutando ΓX erit ad $Z\Sigma$ in majore ratione quam ΓM ad MZ. Recta igitur HM aufert rationem ΓM ad MZ minorem rectâ quâvis per H ductâ ac ipsi PM soli occurrente. Q. E. D.

Sic autem componetur problema hoc. Manentibus descriptis, recta $Z\Theta$ potest esse vel major rectâ ΘM, vel minor illâ. Imprimis autem sit $Z\Theta$ non major quam ΘM. Junctâ igitur HM, recta HM auferet rationem ΓM ad MZ, majorem qualibet ratione, à rectis per H ductis ipsique ΔM occurrentibus, ablatâ. Ac si fuerit ratio data æqualis rationi ΓM ad MZ, recta HM sola solvit problema, auferendo scilicet rationem illam maximam. Si major fuerit ratio proposita, tum componi non potest problema, quia ratio data major est maximâ. Si vero proponatur ratio minor, tum fieri potest unico tantum modo. Sit jam ratio proposita sicut N ad O minor ratione ΓM ad MZ. Fiat ut ΓH ad $H\Theta$ ita N ad Σ: cumque $H\Gamma$ est ad $H\Theta$ sicut ΓM ad $\Theta\Pi$, erit etiam ΓM ad $\Theta\Pi$ sicut N ad Σ, ac invertendo $\Theta\Pi$ ad ΓM erit ut Σ ad N. Sed ratio ΓM ad MZ major est ratione N ad O; quare ex æquo erit ratio Σ ad O minor ratione ΘΠ ad MZ, hoc est ratione maximâ. Igitur, juxta Casum tertium Loci quinti, ducantur, ab utraque parte ipsius HM, rectæ duæ auferentes à rectis ZΔ, ΘΠ, rationem æqualem rationi Σ ad O. Sed altera tantum è rectis illis occurret ipsi MΔ, ut recta HP, quæ auferet rationem ΘN ad ZP æqualem rationi Σ ad O.

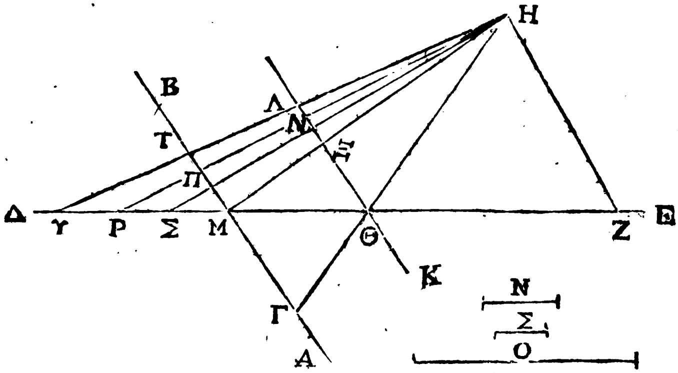


Dico quod recta HP solvit problema. Etenim HΓ est ad HΘ ut N ad Σ; & ΓΞ est ad ΘN ut HΓ ad HΘ: adeoque ΓΞ est ad ΘN sicut N ad Σ. Sed NΘ est PZ sicut Σ ad O. Quare ex æquo ΓΞ erit ad ZP sicut N ad O. Recta igitur HP solvit problema. Altera autem recta non occurret ipsi MΔ, adeoque non solvit problema; quod nullo alio modo construi potest præter dictum. Q. E. D.

Manentibus descriptis; sit recta ZΘ major quam ΘM. Fiat recta ΘP æqualis illi, ac jungantur ipsæ HM, HP. Quoniam recta ZΘ æqualis est ipsi ΘP, recta HP auferet rationem ΓΠ ad PZ, majorem quavis ratione quam abscindere possit recta quælibet per H ducta ipsique MΔ occurrens: ac recta HM auferet rationem ΓM ad MZ, minorem quâvis aliâ rectâ ipsi MP occurrente. Jam si ratio data æqualis fuerit rationi ΓΠ ad PZ, sola recta HP solvit problema. Si vero proponatur ratio major quam ΓΠ ad PZ, tum problema construi non potest; quia ratio data major est maximâ. Quod si proponatur ratio minor quam ΓΠ ad PZ, major vero quam ΓM ad MZ, construetur problema duobus modis; quia duci possunt rectæ duæ ab utroque latere ipsius HP, quæ occurrentes ipsi MΔ satisfacient proposito. Si vero ratio non fuerit major ratione ΓM ad MZ, tum problema unicam tantum sortitur solutionem. Sit jam ratio data sicut N ad O, quæ minor sit ratione ΓΠ ad PZ, major vero quam ratio ΓM ad

MZ.

MZ. Fiat ut ΓH ad HΘ ita N ad Σ. Quoniam autem, ut ΓH est ad HΘ ita ΓΠ ad ΘN, erit quoque ΓΠ ad ΘN ficut N ad Σ; ac invertendo ΘN erit ad ΓΠ ficut Σ ad N. At ratio ΓΠ ad PZ major est ratione N ad O; quare ex æquo ratio ΘN ad PZ major erit ratione Σ ad O. Quinetiam cum ratio ΓH ad HΘ fit ut ΓM ad ΘΞ; ac ΓH fit ad HΘ ut N



ad Σ; ideo ΓM ad ΘΞ erit ut N ad Σ. Sed ΓM est ad MZ in ratione minore quam N ad O; quare invertendo & ex æquo, ΘΞ ad MZ erit in ratione minore quam Σ ad O. Ratio igitur Σ ad O minor erit ratione ΘN ad PZ, ac major ratione ΘΞ ad MZ. Sed ratio ΘN ad PZ maxima est, per Casum tertium Loci quinti. Ducantur ergo rectæ duæ per punctum H, ab utraque parte ipsius HP, quæ occurrentes ipsi ΔM *auferant à rectis* ΘΛ, ZΔ rationes æquales rationi datæ, five rationi Σ ad O. Sint autem ipsæ rectæ HΥ, HΣ. Dico harum utramque problema solvere. Quoniam enim HΓ est ad HΘ ficut N ad Σ; ac ΓT est ad ΘΛ ficut HΓ ad HΘ: erit etiam ΓT ad ΘΛ ficut N ad Σ. Sed ΘΛ est ad ZΥ ficut Σ ad O; quare ex æquo ΓT erit ad ZΥ ficut N ad O, adeoque recta HΥ solvit problema. Ac pari argumento probabitur alteram etiam rectam HΣ fatisfacere problemati. Quod autem recta HΣ non cadat ultra rectam HM, fic demonstratur. Quoniam ratio Σ ad O minor est ratione ΘN ad PZ, quæ nempe æqualis est rationi maximæ; (juxta Casum tertium Loci quinti) major vero ratione ΘΞ ad MZ à rectâ HM abscissâ; rectæ autem, quæ propiores funt rationem maximam auferenti, majores abscindunt rationes quam remotiores ab

eadem:

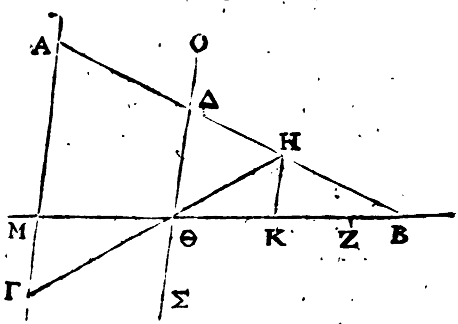
eadem: igitur recta, quæ aufert rationem Σ ad O, occurret rectæ PM. Q. E. D.

Manentibus autem descriptis, sit ratio data, nempe ratio N ad O, jam non major ratione ΓM ad MZ. Manifestum est rationem Σ ad O non esse majorem ratione ΘΞ ad MZ, adeoque minorem esse ratione ΘN ad ZP, sive maxima. Ducantur igitur, juxta Casum tertium Loci quinti, rectæ duæ, ab utraque parte rectæ HP, quæ abscindere possint rationem æqualem rationi Σ ad O; quarum altera occurret rectæ MΔ, adeoque satisfaciet problemati; ut demonstratur in præmissis: altera vero non solvet problema, quia non occurret rectæ PM, sed rectæ MΘ. Quoniam enim rectæ propiores ipsi HP auferunt rationes majores quam rectæ remotiores ab eadem; ac ratio Σ ad O minor est ratione ΘΞ ad MZ; erit recta illa altera remotior ab ipsa HP quam est recta HM, adeoque ipsi MΘ occurret. Q. E. D.

LOCUS TERTIUS.

Occurrat jam recta, per punctum H ducta ipsique AΓ parallela, rectæ alteri MB citra punctum Z; sive inter illud ac punctum M, ad modum rectæ HK: ac manifestum est rectas duci posse per punctum H, juxta quinque diversos Casus.

Cas. I. Ducatur autem imprimis recta AB, juxta Casum primum, auferens segmenta ΓA ad BZ in ratione data. Junge ΓH; ac per punctum Θ ducatur recta ipsi ΓA parallela, ut recta ΣΘO. Quoniam ratio ΓH ad HΘ datur, ratio ΓA ad ΔΘ data est. *Cumque ratio* ΓA *ad* BZ data est, dabitur quoque ratio ΔΘ ad ZB. Sunt autem rectæ duæ positione datæ, ΣO, MB; ac sumitur in

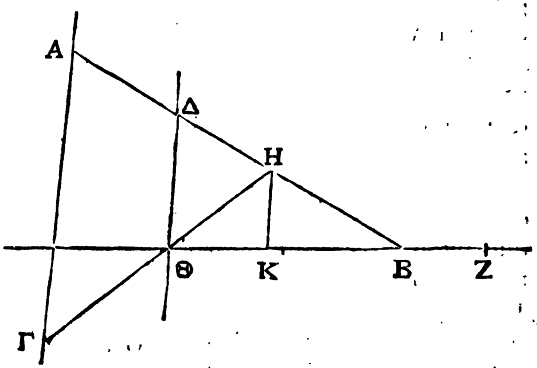


recta MB punctum Z, in recta autem ΣO punctum Θ; datum autem punctum H est intra angulum OΘB. Ducenda est igitur recta AHB, auferens rationem ΔΘ ad ZB datam. Recta autem AHB positione datur, juxta Casum primum

Loci

Loci ſeptimi, neque habet limites. Conſtruetur autem per ea quæ ibidem docentur.

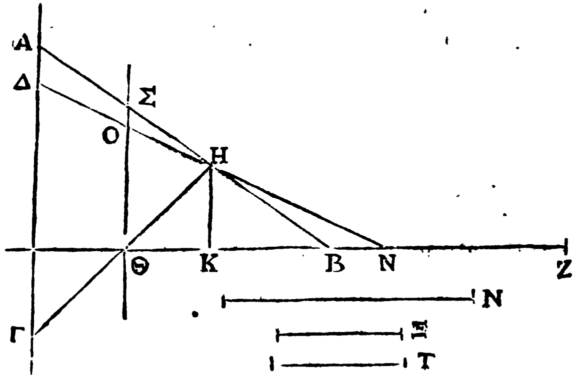
Caſ. II. Ducatur recta ΑΒ, juxta Caſum ſecundum, auferens rationem ΓΑ ad ΒΖ datam. Manentibus autem deſcriptis; cum ratio ΓΑ ad ΔΘ data eſt, atque etiam ratio ΘΔ ad ΖΒ datur, recta quoque ΑΒ dabitur poſitione; per Caſum ſecundum Loci ſeptimi.



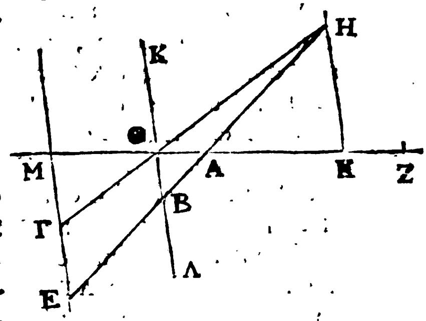
Determinatur autem hunc in modum. Capiatur ΘΒ media proportionalis inter ipſas ΖΘ, ΘΚ; junctâque ΗΒ ac productâ ad Α, dico quod recta ΑΒ aufert rationem ΓΑ ad ΒΖ, minorem quavis aliâ ratione, quæ reſecari poſſit à rectis per punctum Η ductis, ipſique ΚΖ occurrentibus. Ducatur enim alia, ut ΔΗΝ. Cumque recta ΘΒ media proportionalis eſt inter ΖΘ, ΘΚ; erit ratio ΣΘ ad ΒΖ minor ratione ΟΘ ad ΖΝ: ac permutando, erit ratio ΣΘ ad ΘΟ minor ratione ΒΖ ad ΖΝ. Sed ΣΘ eſt ad ΘΟ ut ΑΓ ad ΓΔ; adeoque ratio ΑΓ ad ΓΔ minor erit ratione ΒΖ ad ΖΝ: quare permutando, ratio ΑΓ ad ΒΖ minor erit ratione ΓΔ ad ΖΝ. Recta igitur ΑΒ aufert rationem ΑΓ ad ΒΖ minorem qualibet ratione, à rectis per Η tranſeuntibus rectæque ΚΖ occurentibus, abſciſsâ.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam deſcriptis; ſit ΘΒ media proportionalis inter rectas ΖΘ, ΘΚ; junctaque ΗΒ producatur ad Α. Dico quod recta ΑΒ auferet rationem ΓΑ ad ΒΖ, minorem quavis aliâ ratione, quam abſcindere poteſt recta quævis alia per punctum Η ducta, ipſique ΚΖ occurrens. Quod ſi ratio ad conſtruendum propoſita æqualis fuerit rationi ΓΑ ad ΖΒ; tum recta ΑΒ ſola ſolvit problema; ſi minor fuerit eâ, compoſitio fieri non poteſt. Si vero major fuerit eâ, componetur duobus

bus modis, ab utrâque parte ipsius A B. Sit autem ratio data sicut N ad T, quæ major sit ratione Γ A ad B Z. Fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Ξ: ac manifestũ est ex æquo, quod ratio Ξ ad T major erit ratione Θ Σ ad B Z. Sed ratio Θ O ad N Z major est eâ; quia Θ B media proportionalis est inter Z Θ & Θ K: unde constat rectas duas duci posse per punctum H, ab utraque parte ipsius A B, quæ secent à rectis Θ Σ, Z K, rationes æquales rationi Ξ ad T. Constat autem ex præmissis rectas hunc in modum ductas solvere problema.



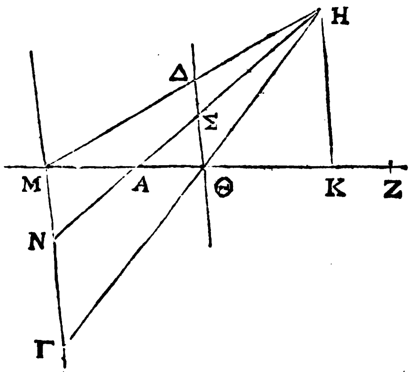
Cas. III. Ducatur jam, juxta Casum tertium, recta auferens rationem Γ E ad A Z datam. Quoniam ratio E Γ ad B Θ datur, ac ratio quoque B Θ ad A Z data est; recta E H positione datur: per Casum tertium Loci septimi, qui quidem non habet limites, adeoque manifesta est compositio.



Cas. IV. Ducatur jam, ad modum quartum, recta H N auferens rationem Γ N ad A Z datam. Quoniam ratio Γ N ad Θ Σ datur, etiam ratio Σ Θ ad A Z data est; unde recta H N positione datur. Reducitur enim ad Casum quartum Loci septimi.

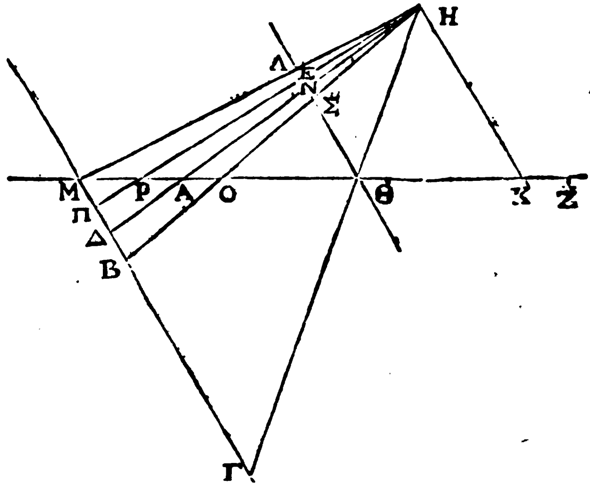
Determinatur autem problema hunc in modum. Manentibus prius descriptis, capiatur media proportionalis inter Z Θ & Θ K. Hæc vel minor erit recta Θ M, vel non minor eâ: ac primo non sit minor eâ. Junge H M, ac dico quod recta

recta HM aufert rationem ΓM ad MZ, majorem quavis ratione, à rectâ qualibet per punctum H ductâ ipsique ΓM occurrente, abscissâ. Ducatur enim alia ut HN. Quoniam media proportionalis inter ZΘ, ΘK non est minor quam ΘM; recta HM vel auferet rationem ΘΔ ad ZM maximam, vel propior erit rectæ rationem maximam auferenti: adeoque ratio ΔΘ ad ZM major erit ratione ΘΣ ad AZ; *permutando autem* ΔΘ *ad* ΘΣ *major erit ratione* ZM *ad* AZ. Sed ΔΘ est ad ΘΣ ut est MΓ ad ΓN; quare ratio MΓ ad ΓN major erit ratione MZ ad AZ: ac permutando iterum, ratio MΓ ad MZ major erit ratione ΓN ad AZ. Recta igitur HM aufert rationem ΓM ad MZ, majorem quavis ratione quam aufert recta quælibet alia per punctum H ducta ipsique ΓM occurrens. Q. E. D.



Sit jam media proportionalis inter ZΘ & ΘK minor quam ΘM, ut ΘA. Jungantur HM, HA, ac producatur HA ad Δ. Dico quod recta HΔ aufert rationem ΓΔ ad AZ, majorem quavis alia ratione, quam abscindit recta quælibet per H ducta, totique rectæ ΓM occurrens: quodque recta HM aufert rationem ΓM ad MZ, minorem quâvis aliâ rectâ ipsi ΔM occurrente. Ducantur enim rectæ duæ ut HΠ, HB. Quoniam autem ΘA media proportionalis est inter ZΘ, ΘK, auferet recta HA rationem ΘN ad AZ maximam. Est igitur ratio ΘN ad AZ major ratione ΣΘ ad ZO; & permutando ratio ΘN ad ΣΘ major erit ratione AZ ad ZO. Sed NΘ est ad ΘΣ ut ΔΓ ad ΓB, quæ proinde ratio major est ratione AZ ad ZO: permutando autem ratio ΔΓ ad AZ major erit ratione ΓB ad ZO. Ac pari modo demonstratur rationem illam majorem esse ratione ΓΠ ad PZ. Quapropter recta HΔ aufert rationem ΓΔ ad AZ, majorem omnibus rationibus à rectis per H ductis rectæque ΓM occurrentibus, abscissis. Dico præterea quod recta HM aufert

fert rationem ΓΜ ad ΜΖ, minorem ratione quacunque, à rectâ quâvis *per* Η *ductâ*, ipsamque ΔΜ intersecante, abscissâ.

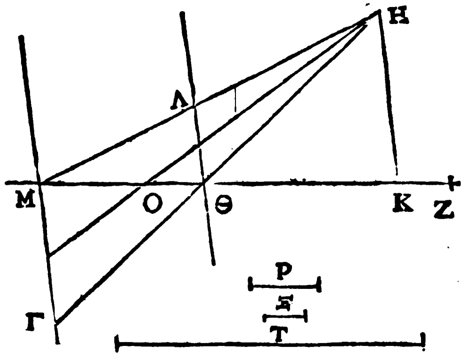


Quoniam enim recta ΗΠ propior est ipsi ΗΔ, maximam rationem auferenti, quam est recta ΗΜ; ac rectæ quæ propiores sunt illi semper abscindunt rationes majores: igitur ratio ΘΕ ad ΡΖ major erit ratione ΛΘ ad ΜΖ. Permutando autem ratio ΕΘ ad ΘΛ major erit ratione ΡΖ ad ΖΜ. Sed ΕΘ est ad ΘΛ ut ΠΓ ad ΓΜ; ratio igitur ΠΓ ad ΓΜ major erit ratione ΡΖ ad ΖΜ: ac permutando ratio ΠΓ ad ΡΖ major erit ratione ΓΜ ad ΜΖ. Quocirca recta ΗΔ aufert rationem ΓΔ ad ΑΖ, majorem quavis ratione quam abscindere potest recta aliqua alia per Η ducta, ita ut rectis ΓΜ, ΔΜ occurrat. Recta vero ΗΜ aufert rationem minorem quâvis aliâ rectam ΔΜ solam intersecante.

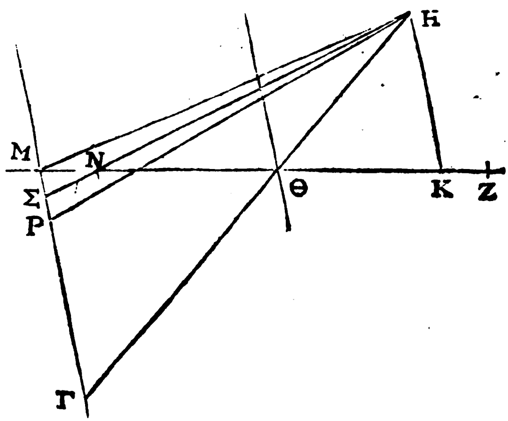
Sic autem componetur problema hoc. Maneant jam descripta; ac media proportionalis inter ΖΘ, ΘΚ vel minor erit quam ΜΘ; vel non erit minor eâ. Imprimis autem non sit minor ea. Junge ΗΜ; ac recta ΗΜ abscindet rationem ΓΜ ad ΜΖ, majorem quam recta quævis per Η ducta ipsamque ΓΜ intersecans. Igitur si ratio ad construendum data fuerit æqualis rationi ΓΜ ad ΜΖ; recta ΗΜ eaque sola solvit problema. Si vero ratio minor fuerit, construetur problema unico tantum modo. Quod si ratio data, quæ

sit

sit ut Ρ ad Τ, minor fuerit ratione ΓΜ ad ΜΖ; fiat ut ΓΗ ad ΗΘ ita Ρ ad Ξ; ac demonstrari potest ex æquo, quod ratio Ξ ad Τ minor erit ratione ΛΘ ad ΜΖ: unde patet quod possibile sit per punctum Η ducere duas rectas, quæ auferant à rectis ΓΜ, ΜΖ rationem æqualem rationi Ξ ad Τ. Hæ si ducantur, cadent ab utraque parte ipsius ΗΜ; ac manifestum est alteram ex his rectis ut ΗΟ, quæ per punctum Η transit ac producta occurrit ipsi ΓΜ, solvere problema; *alteram vero non item*: adeoque unico tantum modo efficitur. Q. E. D.

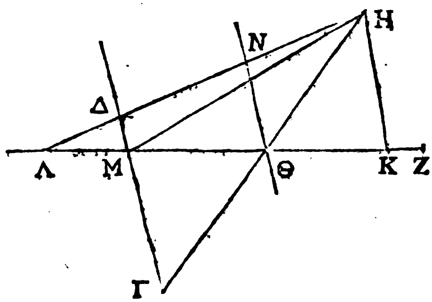


Jam sit media proportionalis inter ΖΘ & ΘΚ minor quam recta ΘΜ; sit ea ΘΝ. Junge rectas ΗΜ, ΗΝ; & producatur ΗΝ ad Σ; ac recta hæc ΗΣ auferet rationem ΓΣ ad ΝΖ, majorem quavis, quæ resecari possit à rectis per punctum Η ductis, ipsique ΓΜ occurrentibus. Recta vero ΗΜ auferet rationem ΓΜ ad ΜΖ, minorem quavis ratione à rectis per Η ductis, ipsique ΣΜ soli occurrentibus, abscissâ. Propositâ autem ratione construendâ, quæ æqualis sit rationi ΓΣ ad ΝΖ; manifestum est quod sola recta ΗΣ solvet problema. Si ratio proposita major fuerit ea, tum componi non potest. Quod si minor fuerit ratione ΓΣ ad ΝΖ, major vero quam ΓΜ ad ΜΖ; hoc in casu dupliciter solvi potest

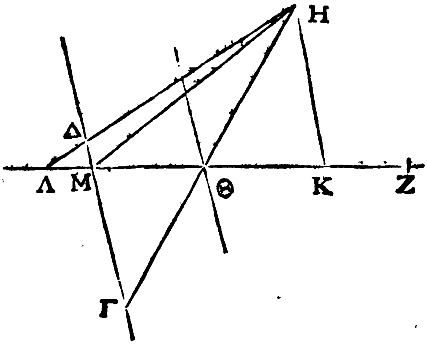


problema per præcedentia: à rectis scilicet ab utrâque parte ipsius H Σ ducendis, ipsisque Γ Σ, Σ M occurrentibus. Quod si ratio data æqualis fuerit rationi Γ M ad M Z; constat etiam ex determinatione præmissâ, quod duobus modis solvi possit, nempe rectâ H M, ac rectâ aliâ ut H P. Si vero ratio minor fuerit quam Γ M *ad* M Z; tum cadet altera è rectis ultra ipsam H M, adeoque non satisfaciet problemati. Manifesta autem sunt hæc omnia ex iis quæ jam pridem demonstravimus.

Cas. V. Ducatur jam recta H Λ, juxta Casum quintum, auferens rationem Γ Δ ad Λ Z datam. Quoniam ratio Γ Δ ad Θ N datur, ratio etiam N Θ ad Λ Z datur; unde recta *quoque* H Λ positione data est, per demonstrata in Casu quarto *Loci septimi*, qui quidem determinationem habet. Determinatur autem hunc in modum. Quoniam media proportionalis inter Z Θ, Θ K, vel major esse potest quam recta Θ M, vel minor eâ; primum non sit major eâ. Junge H M, ac manifestum est ex limitationibus præcedentibus, quod recta H M auferet rationem Γ M ad M Z majorem rationibus omnibus, à rectis per punctum H ductis rectæque Λ M occurrentibus, abscissis. Si vero media proportionalis inter Z Θ, Θ K major sit quam recta Θ M; ut est recta Θ Λ: jungantur H Λ, H M; ac patet ex limitationibus præcedentibus, quod recta H Λ auferet rationem Γ Δ ad Λ Z, majorem omni ratione, quam auferunt rectæ quævis per H ductæ, ipsique Λ M Θ occurrentes. Recta vero H M auferet rationem Γ M ad M Z, minorem quavis ratione, à rectis per H ductis, solique rectæ Λ M occurrentibus, abscisâ. Q. E. D.



Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, erit media proportionalis inter Z Θ & Θ K, vel major quam Θ M, vel non major ea. Primo autem non sit major eâ. Junge H M auferentem rationem Γ M ad M Z, M Z, majorem omni ratione, à rectis per H ductis, ipsique Λ M occurrentibus, abscissâ: ac si fuerit ratio ad componendum data ut Γ M ad M Z, sola recta H M solvit problema. Si major fuerit eâ, tum construi non potest. Quod si ratio minor fuerit eâ, ex præcedentibus constat unam solam rectam duci posse, quæ occurrens ipsi Λ M problemati satisfaciat. Q. E. D.



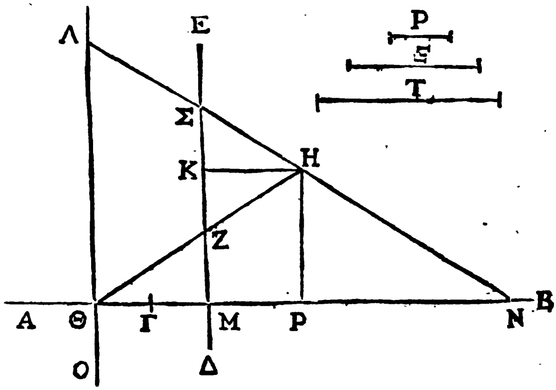
Quod si Θ Λ, media proportionalis inter Z Θ & Θ K, major fuerit quam Θ M; jungantur H M, H Λ; ac recta H Λ auferet rationem Γ Δ ad Λ Z, majorem omni ratione quam abscindunt rectæ aliæ per H ductæ, ipsique Θ M *continuatæ* occurrentes: recta vero H M auferet rationem minimam, nempe rationem Γ M ad M Z. Jam si proponatur ratio ad construendum, quæ fuerit ut Γ Δ ad Λ Z; patet quod recta H Λ sola solvet problema: ac si major fuerit ratio, non construetur. Quod si minor fuerit ratione Γ Δ ad Λ Z, major vero quam Γ M ad M Z, manifestum est ex præmissis, problema effici posse duobus modis; ductis rectis, ab utraque parte ipsius H Λ, rectæ Λ M occurrentibus. Si vero minor fuerit ratione Γ M ad M Z, ex præcedentibus limitationibus constat, unico solum modo solvi posse problema; scilicet rectâ ipsam Λ M intersecante. Denique si ratio æqualis fuerit rationi Γ M ad M Z, duplicem habebit solutionem. Recta enim H M, atque etiam alia ipsi Λ M occurrens ultra punctum Λ, rem præstant. Totum hoc patet ex prius demonstratis.

LOCUS QUARTUS.

Cadat jam recta, quæ per H ducitur ipsi A B parallela, ultra punctum Z; ita ut Z sit inter illam & punctum M: sitque ea recta H K. Recta vero per puncta H, Z ducta & producta, vel incidet super ipsum punctum Γ; vel inter illud & punctum Λ; vel inter illud & punctum M. Cadat autem imprimis

primis inter illud & punctum Α, ut recta Η Θ; & manifestum est rectas per punctum Η ductas disponi posse juxta quinque diversos Casus.

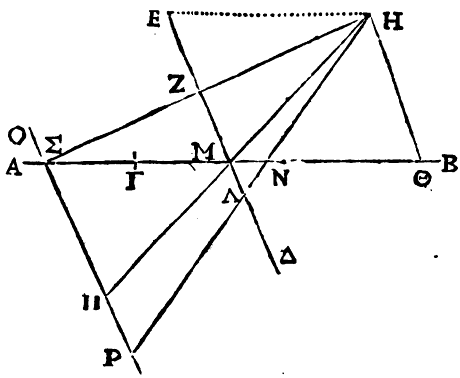
Cas. I. Ducatur autem modo primo, recta Ν Η Σ auferens rationem Γ Ν ad Ζ Σ datam. Per punctum Θ ducatur recta parallela ipsi Μ Ζ; ac producatur recta Ν Σ usque ad punctum Λ. Quoniam autem punctum Ζ datur, etiam recta Θ Ζ Η positione datur; ac rectâ Α Β positione datâ, punctum Θ etiam datur: adeoque recta Ο Θ Λ *ipsi* Δ Ε *parallela positione* data est. Ratio autem Θ Η ad Η Ζ datur; quare ratio etiam Θ Λ ad Ζ Σ datur. Quoniam vero ratio Γ Ν ad Ζ Σ datur, ratio quoque Θ Λ ad Γ Ν datur. Jam dantur rectæ duæ Α Β, Θ Λ; ac sumitur in recta Θ Λ punctum Θ, in recta autem Α Β punctum Γ; punctum autem datum Η est intra angulum Λ Θ Β; cadit etiam recta parallela ultra punctum Γ. Ducenda est igitur recta Ν Η Λ, auferens rationem Θ Λ ad Γ Ν datam. Recta autem Η Λ positione datur, per demonstrata in Casu primo Loci sexti; qui quidem Casus determinationem non habet.



Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus quæ supra, sit ratio data sicut Ρ ad Τ. Dico quod recta Ν Λ satisfacit problemati. Quoniam enim Ζ Η ad Η Θ, sive Ζ Σ ad Θ Λ, est ut Ρ ad Ξ; ac Θ Λ ad Γ Ν est ut Ξ ad Τ; ex æquo erit Ζ Σ ad Γ Ν sicut Ρ ad Τ, adeoque recta Ν Η Λ solvit problema. Q. E. D.

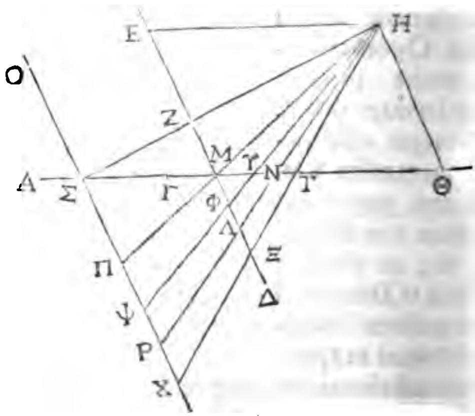
Cas. II. Ducatur jam, juxta Casum secundum, recta Η Λ auferens rationem Γ Ν ad Ζ Λ datam; ducatur per punctum Σ recta parallela ipsi Ε Δ, ut Ο Σ Ρ: ac dato utroque puncto Η & Ζ, recta Η Ζ Σ etiam positione datur. Datâ autem positione rectâ Α Β, punctum Σ datur; ductâ vero rectâ Ο Σ Ρ per datum

datum punctum Σ, datæque rectæ ΑΕ parallelâ, ipsa ΟΡ positione datur. Duc etiam rectam ipsi ΔΕ parallelam, per punctum Η, ut ΗΘ: adeoque punctum Θ datur. Denique ducatur recta ΗΛ. Quoniam autem puncta ΗΖΣ dantur, ratio ipsius ΣΗ ad ΗΖ datur; adeoque ratio ΡΣ ad ΖΛ datur. Sed data est ratio ΛΖ ad ΓΝ, *quare ratio* ΡΣ *ad* ΓΝ *datur*. Jam dantur positione rectæ duæ ΟΡ, ΑΒ; ac in recta ΟΡ sumitur punctum Σ, & in ΑΒ punctum Γ; recta autem parallela ΗΘ cadit ultra punctum datum Γ. Ducenda est igitur recta ΗΡ, juxta Casum secundum Loci sexti Lib. I. auferens rationem ΣΡ ad ΓΝ datam; quare recta ΗΡ positione datur. Determinationem autem habet. Quoniam vero media proportionalis inter ΘΣ & ΣΓ major esse potest quam recta ΣΜ, vel non major eá: primum non sit major eâ; ac ducatur recta ΗΜ. Dico quod ΗΜ auferet rationem ΓΜ ad ΜΖ, majorem quâvis ratione, quæ resecari possit à rectis per punctum Η ductis rectæque ΓΜ occurrentibus. *Producatur autem recta* ΗΜ ad punctum Π. Jam quia media proportionalis inter ΘΣ, ΣΓ non est major quam ΣΜ, potest esse vel æqualis illi, vel minor eâ. Et si fuerit æqualis ipsi ΣΜ, cum dentur positione duæ rectæ ΟΡ, ΑΒ; ac in ΟΡ sumatur punctum Σ, in ΑΒ vero punctum Γ; cadat autem recta parallela ΘΗ ultra punctum Γ; recta ΗΜ producta ad Π (per Casum secundum Loci sexti) auferet rationem ΠΣ ad ΓΜ, minorem quavis ratione quam resecat recta quævis alia sic ducta. *Si vero media proportionalis inter* ΘΣ, ΣΓ *minor fuerit quam* ΣΜ, *recta* ΗΜ propior erit rectæ rationem minimam abscindenti, quam recta quævis ΗΡ; quare ratio ΠΣ ad ΓΜ minor erit ratione ΡΣ ad ΓΝ; ac permutando ratio ΠΣ ad ΡΣ, hoc est ΖΜ ad ΛΖ, minor erit ratione ΓΜ ad ΓΝ. Atque iterum permutando, ratio ΖΜ ad ΜΓ minor erit ratione



tione Z Λ ad Γ N. Invertendo autem rationem, erit ratio Γ M ad Z M major ratione Γ N ad Z Λ. Unde patet rectam H M auferre rationem Γ M ad M Z, majorem omnibus rectis per punctum H ductis ipsique M Δ occurrentibus.

Sin autem media proportionalis inter rectas Θ Σ, Σ Γ, major fuerit quam est Σ M; sit ea recta Σ N. Junge H N, quæ producatur in directum. Junge etiam H M. Dico quod recta H N aufert rationem Γ N ad Z Λ, majorem quavis aliâ ratione à rectis per H ductis, totique rectæ M Δ occurrentibus, ablatâ. Producantur rectæ H M, H Λ ad Π & P, ac ab utraque parte ipsius H P ducantur rectæ H Ξ, H Φ ad puncta X & Ψ continuandæ. Jam rectæ duæ O P, A B positione dantur; ac in O P sumitur punctum Σ, in A B vero punctum Γ; ac recta H Θ, quæ per punctum datum H ducitur ipsi O P parallela, cadit ultra punctum Γ: recta autem Σ N media proportionalis

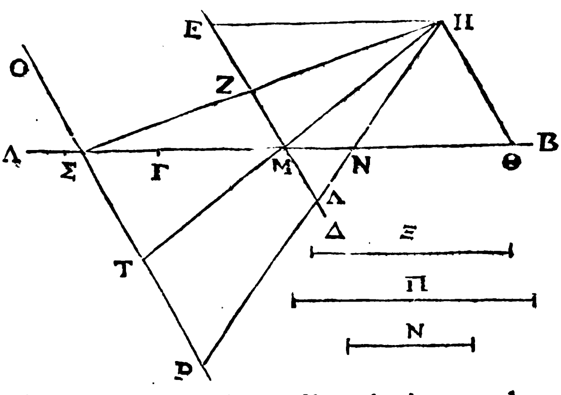


est inter Θ Σ & Σ Γ. Quocirca recta H N P ducta & producta (per Casum secundum Loci sexti) auferet rationem P Σ ad Γ N minimam. Ductâ igitur aliâ rectâ, ut H X; ratio P Σ ad Γ N minor erit ratione Σ X *ad* Γ T; ac permutando P Σ ad Σ X minor erit ratione Γ N ad Γ T. Sed P Σ est ad Σ X ut Z Λ ad Z Ξ; adeoque ratio Λ Z ad Z Ξ minor erit ratione Γ N ad Γ T; permutando autem ratio Λ Z ad Γ N minor erit ratione Z Ξ ad Γ T. Invertendo itaque, ratio Γ N ad Λ Z major erit ratione Γ T ad Z Ξ: quare recta H Λ aufert rationem majorem quam quævis recta H Ξ; nempe rationem Γ N ad Z Λ, quæ major est quavis ratione, à recta qualibet per punctum H transeunte, totique rectæ Δ M occurrente, abscisâ. Dico præterea quod recta H M aufert rationem Γ M ad M Z, minorem quacunque ratione, à rectis per H ductis, solique

rectæ

rectæ M Λ occurrentibus, abscissâ. Quoniam enim recta H P aufert rationem minimam P Σ ad Γ N (per Casum secundum Loci sexti) ac rectæ propiores ipsi H P semper abscindunt rationes minores quam remotiores ab eâdem; ratio igitur Σ Ψ ad Γ Υ minor erit ratione Π Σ ad Γ M; ac permutando ratio Σ Ψ ad Π Σ minor erit ratione Γ Υ ad Γ M. Sed Σ Ψ est ad Π Σ ut Φ Z ad Z M: quare ratio Φ Z ad Z M minor erit ratione Γ Υ ad Γ M. Dein permutando, ratio Φ Z ad Γ Υ minor erit ratione Z M ad Γ M. Invertendo itaque, ratio Γ Υ ad Φ Z major erit ratione Γ M ad Z M. Recta igitur H M aufert rationem minorem quam quæ resecatur à recta H Φ. Unde patet rectam H M auferre rationem Γ M ad M Z, minorem quavis ratione, à rectis per H ductis, ipsique M Λ occurrentibus, abscissâ. Q. E. D.

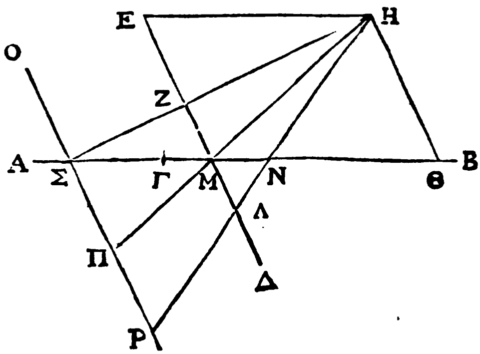
Componetur autem problema in hunc modum. Maneant jam descripta; ac primum sit media proportionalis inter Θ Σ, Σ Γ, non major quam Σ M. Jungatur H M, ac recta H M auferet rationem Γ M ad M Z, majorem omni ratione, à rectâ quavis per H ductâ totiq; rectæ M Δ occurrente, abscindendâ. Erit autem ratio



ad construendum proposita vel æqualis rationi Γ M ad M Z; vel major erit eâ; vel minor. Si æqualis fuerit ei, tum recta H M solvet problema. Si vero major fuerit ratione illâ, non componi potest, quia ratio proposita major est maximâ. Quod si ratio minor fuerit, uno tantum modo efficietur. Sit autem data ratio sicut Ξ ad N, quæ minor sit ratione Γ M ad M Z. Fiat ut Σ H ad H Z ita Π ad N; ac producatur H M ad T. Jam constat, ex determinatione Casus secundi Loci sexti, quod ratio T Σ ad Γ M vel minima est; vel propior erit rationi minimæ, quam ratio quævis alia à rectâ ipsi P T occurrente abscissâ.

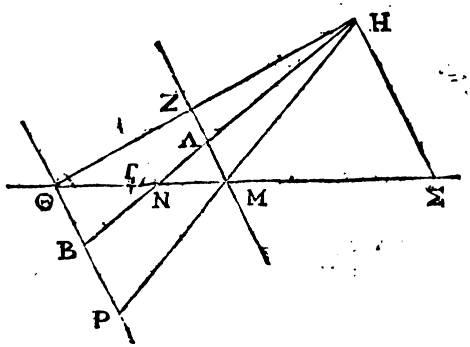
abſciſſâ. Quoniam autem ΣH eſt ad HZ ut Π ad N; ac ΣB eſt ad HZ ut ΣT ad ZM; erit etiam Π ad N ſicut ΣT ad ZM. At vero ratio N ad Ξ major eſt ratione MZ ad ΓM; quare ex æquo erit ratio Π ad Ξ major ratione ΣT ad ΓM. Cum autem ratio ΣT ad ΓM vel minima ſit; (per Caſum ſecundum Loci ſexti) vel minor ratione quavis, quam abſcindit recta quælibet ipſi TP occurrens; eâ vero major ſit ratio Π ad Ξ; duci poſſunt rectæ duæ, ab utroque latere ipſius HM, quæ auferant rationes æquales rationi Π ad Ξ. Harum vero altera non ſolvit problema, quæ ſcilicet ducta occurrit rectæ MZ; altera autem occurrens rectæ MΔ ſatisfacit problemati. Ductâ igitur rectâ HP auferente rationem PΣ ad ΓN æqualem rationi Π ad Ξ; dico rectam illam HP ſolvere problema, ſive ΓN eſſe ad ZΛ ſicut Ξ ad N. Quoniam enim ΣH eſt ad HZ ut Π ad N, ac ΣH eſt ad HZ ſicut PΣ ad ΛZ, erit etiam PΣ ad ΛZ ſicut Π ad N. Sed ΓN eſt ad PΣ ut Ξ ad Π; quare ex æquo ΓN erit ad ΛZ ſicut Ξ ad N: adeoque recta HΛP, eaque ſola, ſolvit problema. Q. E. D.

Quod ſi media proportionalis inter ΘΣ, ΣΓ major fuerit quam ΣM; ſit illa æqualis ipſi ΣN; ac junctæ HN, HM producantur ad puncta P & Π. Recta igitur HP auferet rationem ΓN ad ΛZ, majorem quavis ratione, quæ reſecari poſſit à rectis per punctum H ductis ipſiſque ΓB, ZΔ occurrentibus: ac recta HM auferet rationem ΓM ad MZ, minorem quavis ratione quam abſcindunt rectæ quævis per H ductæ ipſique MΛ occurrentes. Ratio autem data vel erit æqualis rationi NΓ ad ZΛ; vel major erit eâ; vel minor. Vel major erit ratione ΓM ad MZ; vel æqualis; vel minor eâ. Jam ſi ratio fuerit æqualis ΓN ad ZΛ, ſola recta HNΛ ſatisfacit problemati; ac ſi major fuerit eâ non componetur. Quod ſi minor fuerit eâ, ſed major ratione ΓM ad MZ, conſtruetur



struetur problema duobus modis, *ab utraque scilicet parte* ipsius H Λ. Si vero minor fuerit ratione Γ M ad M Z, uno tantum modo componetur, scilicet ultra punctum Λ.

Cas. III. Ducatur jam, juxta modum tertium, recta H Λ auferens rationem N Γ ad Λ Z datam. Datur autem ratio Λ Z ad B Θ: quare ratio B Θ ad N Γ datur. Datur igitur positione recta H Λ, per ea quæ habentur ad Casum secundum Loci sexti Lib. I.



Determinatur autem ad hunc modum. Quoniam media proportionalis inter Θ Σ & Θ Γ vel minor esse potest quam recta Θ M, vel non minor eâ: primum non sit minor eâ; ac jungatur recta H M, quæ producatur ad P. Manifestum est, ex jam demonstratis, rectam H M auferre rationem Γ M ad M Z, majorem quavis ratione, quam abscindunt rectæ quævis per H ductæ ipsique Γ M occurrentes. Q. E. D.

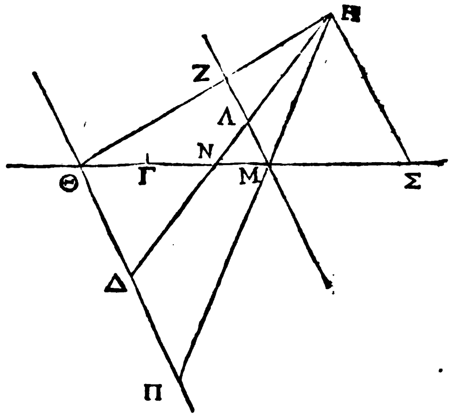
Quod si media proportionalis inter Θ Σ & Θ Γ minor fuerit quam Θ M; sit illa recta Θ N. Junguntur H M, H N, quæ producantur ad P & B; & patet, per ea quæ in præcedentibus demonstrantur de limitibus, quod recta H N aufert rationem Γ N ad Λ Z, majorem quavis ratione, à rectis quibuslibet per H ductis, ipsiq; Γ M occurrentibus, abscissâ; quodque recta H M aufert rationem Γ M ad M Z, minorem quavis ratione à rectis ipsam M N intersecantibus ablatâ.

Componetur autem problema in hunc modum. Maneant quæ supra; ac capiatur media proportionalis inter Θ Σ & Θ Γ. Hæc minor erit quam Θ M, vel non minor erit eâ. Ac primum non sit minor eâ. Juncta recta H M producatur ad P; ac recta H M P auferet rationem Γ M ad M Z, majorem ratione quavis, à rectis per H ductis, ipsique Γ M occurrentibus, abscissâ. Si igitur proponatur ratio construenda, quæ

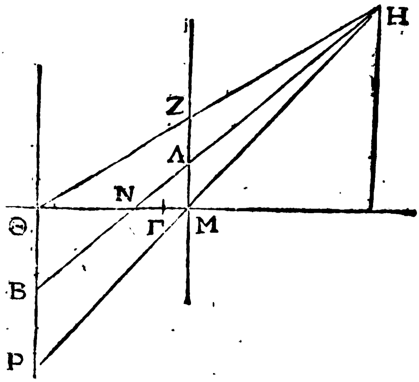
 æqualis

æqualis sit rationi ΓΜ ad ΜΖ, patet solam rectam ΗΜ satisfacere problemati. Si vero major eâ fuerit ratio proposita, non componi potest. At si minor fuerit eâ, patet ex compositionibus jam descriptis, quod uno tantum modo fieri possit, rectâ scilicet ipsi ΓΜ occurrente.

Quod si media proportionalis inter ipsas ΣΘ, ΘΓ minor fuerit quam ipsa ΘΜ, ut ΘΝ: junge rectas ΗΜ,ΗΝ,quæ producantur ad puncta Π & Δ; ac recta ΗΔ auferet rationem ΓΝ ad ΛΖ majorem quâvis ratione quam secant rectæ quævis aliæ per punctum Η ductæ, totique rectæ ΓΜ occurrentes; vel quam rectæ quæ soli rectæ ΜΝ occurrunt. Recta vero ΗΠ abscindet rationem ΓΜ ad ΜΖ minorem quavis ratione quam auferunt rectæ *quælibet soli* ΜΝ *occurrentes.* Quare si proponatur ad construendum ratio æqualis rationi ΓΝ ad ΛΖ, manifestum est rectam ΗΝ satisfacere problemati; ac si major fuerit eâ, componi non posse. Quod si ratio data minor fuerit quam ratio ΓΝ ad ΛΖ, major vero quam ΓΜ ad ΜΖ; constat, è determinationibus modo descriptis, problema duobus modis componi posse, ab utraque parte ipsius ΗΔ, rectis ipsis ΓΝ & ΝΜ occurrentibus. Si vero ratio minor fuerit quam ΓΜ ad ΜΖ, patet ex iisdem limitationibus, unam solam rectam ipsi ΓΝ occurrentem solvere problema. Si denique ratio data æqualis fuerit rationi ΓΜ ad ΜΖ, ex iisdem præmissis consequitur, componi posse duobus modis; rectamque ΗΜ solvere problema, atque etiam rectam aliam ipsi ΓΝ occurrentem. Q. E. D.

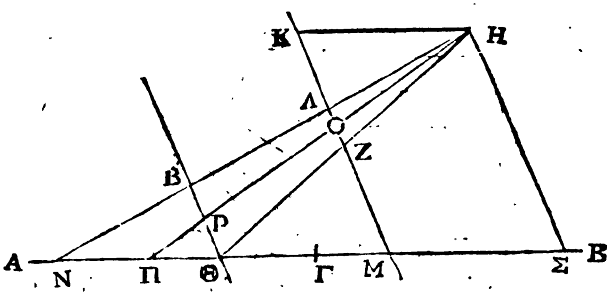


Cas. IV. Ducatur jam recta H Λ N, juxta Casum quartum, auferens rationem Γ N ad Λ Z datam. Producatur hæc ad punctum B; & ob datam rationem Λ Z ad B Θ, ratio quoque B Θ ad N Γ datur: recta igitur H Λ N positione datur, juxta demonstrata in Casu tertio Loci sexti, qui non habet limites. Constructio autem manifesta est.



Cas. V. Ducatur jam modo quinto recta H Λ N, auferens rationem Λ Z ad Γ N datam. Quoniam ratio Λ Z ad B Θ datur, data quoque est ratio Θ B ad N Γ; unde etiam recta H Λ N positione datur. Reducitur enim ad Casum quartum Loci sexti.

Determinatur autem hunc in modum. Manentibus descriptis; sit Θ N media proportionalis inter Θ Σ, Θ Γ. Juncta H N, dico quod hæc recta H Λ N aufert rationem Z Λ ad N Γ, majorem quacunque ratione, quam abscindere potest recta quævis per H ducta, totique rectæ Θ Λ occurrens. Ducatur enim recta alia ut H Π; quoniam autem recta Θ N media



proportionalis est inter Θ Σ, Θ Γ, erit ratio Θ B ad N Γ major ratione Θ P ad Γ Π; ac permutando erit ratio Θ B ad Θ P major ratione Γ N ad Γ Π. Sed Θ B est ad Θ P ut Z Λ ad Z O; quare ratio Z Λ ad Z O major est ratione Γ N ad Γ Π: ac permutando ratio Z Λ ad Γ N major erit ratione Z O ad Γ Π.

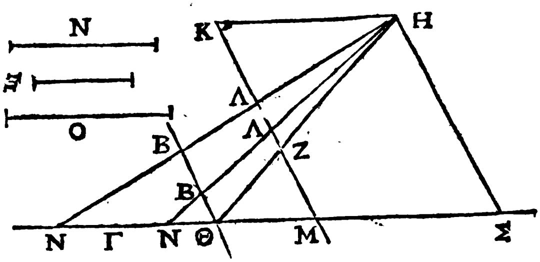
Recta igitur Η Λ Ν aufert rationem Λ Ζ ad Ν Γ, majorem quavis aliâ rectâ per Η ductâ, ipsique Θ Λ occurrente. Q. E. D.

Sic autem componetur problema. Maneant jam descripta, ac fiat recta Θ Ν media proportionalis inter Σ Θ, Θ Γ. Jungatur Η Ν, ac recta Η Ν auferet rationem Ζ Λ ad Γ Ν, majorem quâvis aliâ ratione, quam abscindet recta quævis per Η ducta totique Θ Λ occurrens. Si itaque ratio ad componendum proposita æqualis fuerit rationi Λ Ζ ad Γ Ν, sola recta Η Λ Ν solvet problema. Si vero ratio data major fuerit eâ, tum non construi potest problema. Quod si minor fuerit eâ, patet ex jam demonstratis, duas rectas duci posse quæ problema solvant, nempe occurrentes ipsis Λ Ν, Ν Θ.

LOCUS QUINTUS.

Cadat jam recta Η Θ, à puncto Η per punctum Ζ ducta, citra punctum Γ, *sive inter illud & punctum* Μ; ac manifestum est rectas duci posse per punctum Η juxta quinque Casus.

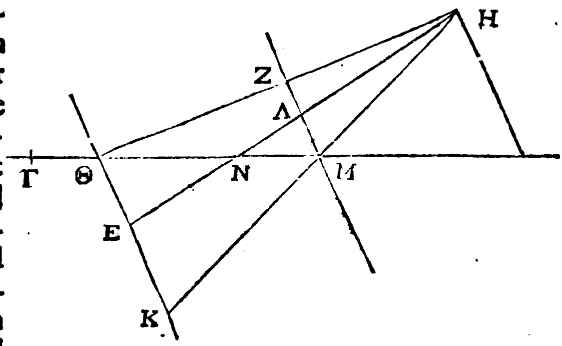
Cas. I. II. Imprimis autem ducantur rectæ Ν Η, ad modum Casus primi & secundi, auferentes rationes Ζ Λ ad Γ Ν datas. Quoniam ratio Λ Ζ ad Θ Β datur, dabitur quoque ratio Β Θ ad Ν Γ. Dantur autem positione rectæ duæ, quarum altera Θ Β notatur in puncto Θ, altera vero Μ Ν in puncto Γ; ac punctum datum Η est intra angulum Β Θ Μ. Ducendæ sunt igitur rectæ Η Ν, juxta Casus primum & secundum *Loci quarti*, auferentes rationes datas Θ Β ad Γ Ν; ac proinde datæ erunt positione rectæ Η Ν, per regulas eorundem Casuum; qui quidem non habent limites.



Componentur autem problemata hunc in modum. Manentibus quæ prius, sit ratio data sicut Ν ad Ο; ac fiat ut Ζ Η ad Η Θ ita Ν ad Ξ. Jam dantur positione rectæ duæ, nempe Θ Β, Γ Μ; ac sumitur in Θ Β punctum Θ; in alterâ vero Μ Ν punctum Γ; punctum autem datum Η est intra angulum Μ Θ Β. Rectæ igitur Η Ν, ductæ juxta Casus primum & secundum Loci quarti, auferent rationes

rationes Θ B ad Γ N æquales rationi Ξ ad O; unde patet rectam H N satisfacere problemati.

Cas. III. Ducatur, juxta Casum tertium, recta H N auferens rationem Z Λ ad Γ N datam; ac producatur ea ad punctum E. Datâ autem ratione Z Λ ad E Θ, data quoque erit ratio E Θ ad Γ N: unde recta H N E positione datur, secundum demonstrata in Casu tertio Loci quarti. Determinatur autem hunc in modum. Junge rectam H M, quæ producatur ad K: dico rectam H K auferre rationem Z M ad M Γ, majorem quâvis ratione, à recta qualibet per punctum H ductâ, ipsique Z M occurrente, abscissâ. Ducatur enim recta alia ut H E; ac manifestum est rectam, puncto Θ propiorem, semper abscindere rationem minorem, quam quæ aufertur à remotiore ab eodem: adeoque erit ratio E Θ ad Γ N minor ratione K Θ ad Γ M. Permutando autem ratio K Θ ad



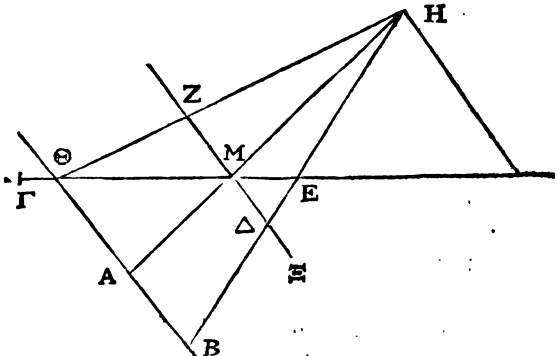
E Θ major erit ratione Γ M ad Γ N. Sed K Θ est ad E Θ ut Z M ad Z Λ; quare ratio Z M ad Z Λ major erit ratione Γ M ad Γ N; ac permutando ratio Z M ad Γ M major erit ratione Z Λ ad Γ N. Quocirca recta H K aufert rationem M Z ad Γ M majorem quavis ratione, à rectâ quacunque per punctum H ductâ, ipsique Θ M occurrente, ablatâ.

Componetur autem hunc in modum. Manentibus jam descriptis, jungatur H M, ac producatur ad K. Recta hæc H K auferet rationem Z M ad M Γ, majorem quavis ratione, quam aufert recta alia quævis per H ducta rectæque Θ M occurrens. Si itaque ratio ad componendum data æqualis fuerit rationi M Z ad Γ M; sola recta H K solvet problema. Si vero ratio data major fuerit eâ, non componetur. Quod si minor fuerit eâ, manifestum est è determinationibus præcedentibus, uno tantum modo problema effici posse, rectâ scilicet ipsi Θ M occurrente.

Cas. IV

Caſ. IV. Ducatur recta H Δ, juxta modum quartum, auferens rationem Z Δ ad Γ E datam; ac producatur ea ad punctum B. Quoniam ratio Z Δ ad B Θ datur, ratio etiam B Θ ad Γ E data erit, adeoque recta H B dabitur poſitione: reducitur enim ad eundem Caſum cum problemate præcedente.

Determinatur autem hunc in modum. Maneant jam deſcripta, ac juncta recta H M producatur ad A: dico rectam H A auferre rationem Z M ad M Γ, minorem quavis ratione, à rectâ qualibet per punctum H ductâ ipſique M Ξ occurrente, abſciſsâ. Ducatur enim recta alia ut H B. Quoniam vero rectæ propiores puncto Θ auferunt rationes minores, quam quæ abſcinduntur à remotioribus ab eo; ratio Θ A ad Γ M minor erit ratione Θ B ad Γ E; ac permutando, erit ratio Θ A ad Θ B minor ratione Γ M ad Γ E. Sed Θ A eſt ad Θ B ut

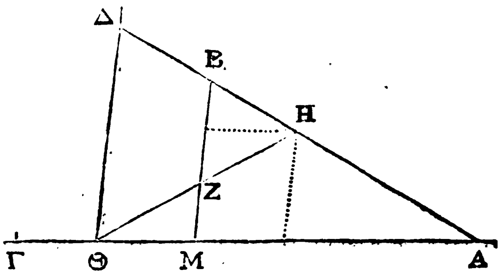


Z M ad Z Δ; adeoque ratio Z M ad Z Δ minor erit ratione Γ M ad Γ E. Permutando autem ratio Z M ad M Γ minor erit ratione Z Δ ad Γ E: quare recta H A aufert rationem M Z ad Γ M, minorem quavis ratione quam abſcindere poteſt alia quælibet recta per H ducta ipſique M Ξ occurrens.

Componetur autem problema ad hunc modum. Jungatur recta H M ac producatur ad A; ac recta H A auferet rationem Z M ad M Γ, minorem quavis aliâ à rectis per H ductis ipſique Ξ M occurrentibus abſciſsâ. Igitur ſi ratio ad conſtruendum propoſita æqualis fuerit rationi Z M ad M Γ, ſola recta H A ſatisfacit problemati. Si vero minor fuerit eâ, non componetur. Quod ſi major fuerit eâ, demonſtratum eſt in præmiſſis, unam ſolam rectam ipſi Ξ M occurrentem ſolvere problema.

Caſ. V.

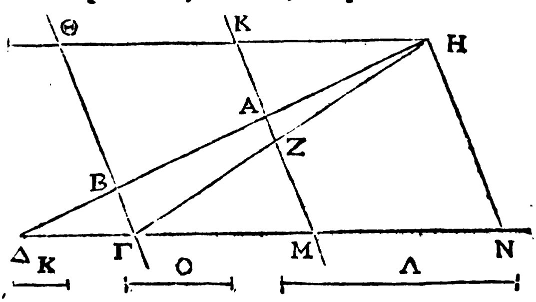
Cas. V. Ducatur, juxta modum quintum, recta A B auferens à rectis Γ A, Z B rationem Z B ad Γ A datam; ac producatur ea ad punctum Δ. Quoniam data est ratio Z B ad Θ Δ, datur etiam ratio Θ Δ ad Γ A; adeoque recta Δ A positione datur; juxta resolutionem Casus quarti Loci quarti, qui non habet limites. Compositio autem manifesta est.



LOCUS SEXTUS.

Incidat jam recta, per puncta H, Z ducta, super ipsum punctum Γ in recta altera sumptum, ut recta H Z Γ: ac manifestum est rectas per punctum H duci posse juxta quatuor modos.

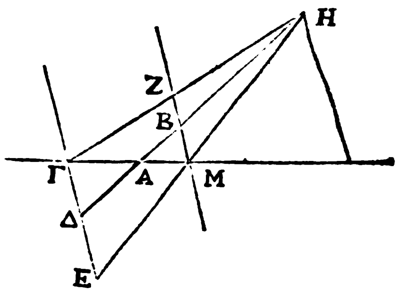
Cas. I. Ducatur autem imprimis recta H B, juxta Casum primum, auferens rationem Z A ad Γ Δ datam, ac producatur ea ad Δ. *Quoniam ratio* Z A *ad* Γ B *datur, dabitur etiam ratio* Γ B ad Γ Δ, adeoque recta B Δ positione datur, per ea quæ demonstrantur in Casu primo Loci tertii Lib. I. Oportet autem rationem datam minorem esse ratione K Z ad Γ N. Ducatur enim recta *ipsi* M Z K parallela, ut H N, ac producatur utraque H K, Γ B ad Θ. Quoniam autem ratio Θ Γ ad Γ B major est ratione Θ B ad Γ B; ac Θ Γ est ad Γ B sicut K Z ad Z A; atque etiam Θ B est ad B Γ ut Θ H ad Γ Δ; recta vero Θ H æqualis est ipsi Γ N: ratio igitur K Z ad Z A major erit ratione Γ N ad Γ Δ. Permutando autem, ratio K Z ad Γ N major erit ratione Z A ad Γ Δ. Oportet itaque rationem ad componendum datam minorem esse ratione K Z ad Γ N.



Compo-

Componetur autem problema in hunc modum. Esto ratio proposita sicut K ad Λ, quæ minor sit ratione K Z ad Γ N. Fiat ut Z H ad Γ H ita K ad O; cumque Z H est ad Γ H sicut K Z ad K M, erit etiam Z K ad K M sicut K ad O. Sed recta K M æqualis est ipsi H N: quare Z K est ad H N sicut K ad O; ac invertendo O erit ad K sicut H N ad K Z. Ratio autem K ad Λ minor est ratione K Z ad Γ N; igitur *ex æquo* ratio O ad Λ minor erit ratione H N ad N Γ. Quocirca si fiat ut O ad Λ ita H N ad N Δ, major erit illa quam recta N Γ. Junctâ autem H Δ, dico rectam H Δ solvere problema. Etenim K est ad O ut Z H ad H Γ, ac Z H est ad H Γ sicut Z A ad B Γ; adeoque Z A est ad B Γ ut K ad O. Sed N H est ad N Δ, hoc est B Γ ad Γ Δ, sicut O ad Λ: igitur ex æquo erit Z A ad Γ Δ sicut K ad Λ; adeoque recta H Δ solvit problema. Q. E. D.

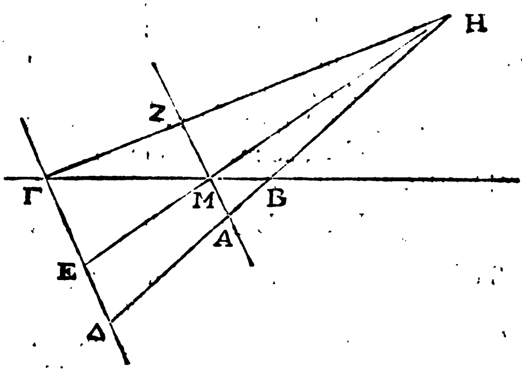
Cas. II. Ducatur jam, juxta modum secundum, recta H A auferens rationem B Z ad Γ A datam. Producatur ea ad punctum Δ. Quoniam autem ratio B Z ad Γ Δ datur, data est quoque ratio Γ Δ ad Γ A; quapropter recta H Δ positione datur: reducitur enim ad Casum secundum Loci tertii. Determinatio autem hæc est. Juncta H M producatur ad E, ac dico quod recta H M auferet rationem Z M ad M Γ *majorem* quavis ratione quam resecant rectæ per H ductæ ipsique Γ M occurrentes. Ductâ enim rectâ H Δ; cum rectæ propiores puncto Γ abscindunt semper rationes minores, quam quæ auferuntur à remotioribus ab eo: manifestum est rationem E Γ ad Γ M *majorem* esse ratione Δ Γ ad Γ A; ac permutando, rationem E Γ ad Γ Δ *majorem* esse ratione M Γ ad Γ A. Sed E Γ est ad Γ Δ sicut M Z ad Z B; adeoque ratio M Z ad Z B *major* erit ratione M Γ ad Γ A. Permutando autem ratio M Z ad Γ M *major* erit ratione Z B ad Γ A; quare recta H M aufert rationem Z M ad M Γ *majorem* quavis ratione quam auferant rectæ per H ductæ, totique rectæ Γ M occurrentes.



Componetur autem problema ad hunc modum. Maneant jam descripta, ac juncta H M producatur ad E. Recta hæc

HM auferet rationem ZM ad MΓ, * *majorem* quacunque ratione quam resecant rectæ quævis aliæ per H ductæ, totique rectæ ΓM occurrentes. Si igitur ratio proposita æqualis fuerit rationi ZM ad MΓ, sola recta HM solvit problema. Si *major* fuerit data ratio, non componi potest. Quod si *minor* fuerit eâ, patet quod, juxta Casum prædictum, duci possit recta, quæ occurrens rectæ ΓM solvat problema. Q. E. D.

Cas. III. Ducatur, juxta modum tertium, recta HA auferens rationem ZA ad ΓB datam, ac producatur ea ad punctum Δ. Quoniam ratio AZ ad ΓΔ datur, ratio ipsius BΓ ad ΓΔ etiam data est: unde recta HΔ positione datur. Reducitur enim ad eundem Casum cum problemate præcedente. Determinatur autem hunc in modum. Junge HM, quæ producatur ad E. Cum autem rectæ propiores puncto Γ auferunt semper rationes * *minores* quam quæ resecantur à remotioribus ab eo (per nuper demonstratas limitationes) constat rectam HM auferre rationem ZM ad MΓ *minorem* quavis aliâ à rectis per punctum H ductis, totique rectæ MB occurrentibus, abscissis.

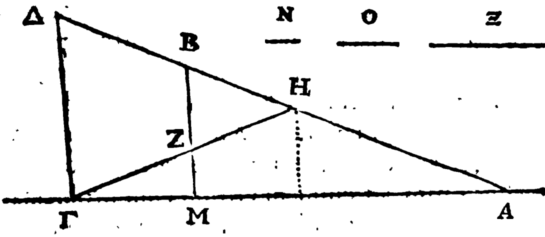


Sic autem componetur problema. Manentibus descriptis, jungatur HM que producatur ad E: recta hæc HM auferet rationem MZ ad ΓM, *minorem* quavis ratione, à qualibet aliâ per H ductâ, totique MB occurrente, abscissâ. Si igitur proponatur ratio componenda quæ æqualis sit rationi ZM ad MΓ; sola recta HM satisfacit problemati. Quod si *minor* fuerit eâ, non componetur. Si vero * *major* fuerit, manifestum est ex limitationibus præmissis rectam problema solventem occurrere ipsi MB. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur, juxta Casum quartum, recta AHB aufe-

* *In Cas. II. & III. ubique fere contrarium habet MS. Codex, manifesto mendo.*

rens rationem BZ ad ΓA datam. Producatur ea ad Δ. Data autem ratione BZ ad ΓΔ, datur quoque ratio ΓΔ ad ΓA: jam rectæ duæ ΓA, ΓΔ dantur positione; ac in utraque earum sumitur punctum Γ; punctum autem datum H est intra angulum AΓΔ. Ducenda est igitur recta AΔ, juxta Casum tertium Loci tertii, auferens rationem ΓΔ ad ΓA datam; adeoque recta AΔ datur positione, (per ea quæ in prædicto casu demonstrantur) neque habet determinationem.

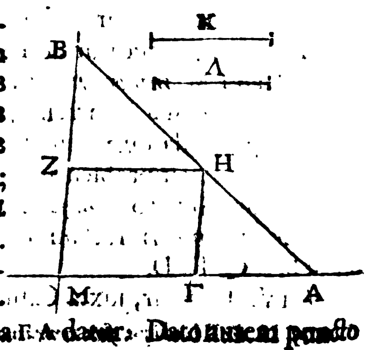


Componetur autem problema hunc in modum. Maneant descripta, ac sit ratio data sicut N ad Ξ. Fiat ut HZ ad ΓH ita N ad O. Jam dantur positione rectæ duæ ΓA, ΓΔ invicem occurrentes in puncto Γ; punctum autem datum H est intra angulum AΓΔ. Ducatur itaque recta AΔ (per Casum tertium Loci tertii) quæ auferat rationem ΓΔ ad ΓA æqualem rationi O ad Ξ; ac manifestum est rectam AΔ satisfacere problemati.

LOCUS SEPTIMUS.

Sit jam punctum datum H intra angulum AMB; ac ducantur per H rectæ duæ parallelæ rectis datis AM, MB, ut ΓH, HZ; quæ occurrant ipsis datis in punctis Γ & Z. Ac manifestum est quod rectæ duci possint per punctum H juxta tres Casus.

Cas. I. Ducatur autem imprimis recta AB, ad modum primum, auferens rationem ZB ad AΓ datam. Quoniam ZB est ad AΓ ut rectangulum ZB in AΓ ad quadratum ex AΓ; data est ratio rectanguli BZ in AΓ ad quadratum ex AΓ. Sed rectangulum BZ in AΓ datur, quia æqualis est rectangulo ZH in HΓ; adeoque recta ΓA datur. Dato autem puncto

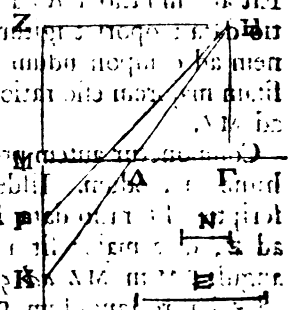


Γ,

Γ, punctum A etiam datur: ac ob datum punctum H recta A B positione datur. Q. E. I.

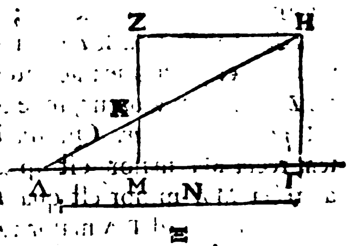
Componetur autem problema ad hunc modum. Maneant descripta, ac sit ratio proposita sicut K ad Λ. Fiat ut K ad Λ ita rectangulum H Z in H Γ ad quadratum ex Γ A; ac juncta recta H A producatur ad B: dico rectam A B satisfacere problemati. Quoniam enim rectangulum Γ H in H Z est ad quadratum ex Γ A ut K est ad Λ, ac rectangulum Z B in Γ A æquale est rectangulo Γ H in H Z; erit rectangulum Z B in Γ A ad quadratum ex Γ A ut K ad Λ: adeoque erit Z B ad Γ A sicut K ad Λ. Recta igitur A B solvit problema. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur, juxta Casum secundum, recta H K auferens rationem Γ Λ ad K Z datam. Quoniam ratio Γ Λ ad K Z datur, data erit ratio rectanguli Γ Λ in K Z ad quadratum ex K Z. Sed rectangulum Γ Λ in K Z æquale est rectangulo Γ M in M Z, adeoque ratio rectanguli Γ M in M Z ad quadratum ex K Z datur. Rectangulum autem Γ M in M Z datur, ob cognitam utramque rectam; quadratum igitur ex K Z datum est, adeoque & ipsa K Z datur magnitudine & positione: ac dato puncto Z punctum K datur, unde & ipsa K H *positione datur*. Quoniam autem recta M Γ major est ipsâ Γ Λ, ac recta M Z minor est quam K Z; erit ratio M Γ ad Γ Λ major ratione M Z ad Z K; ac permutando, ratio M Γ ad M Z major erit ratione Γ Λ ad Z K. Sed ratio Γ Λ ad Z K est ratio data: oportet igitur rationem construendam minorem esse ratione Γ M ad M Z.



Componetur autem problema in hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut N ad Ξ, minor ratione Γ M ad M Z. Quoniam autem ratio Γ M ad M Z major est ratione N ad Ξ, ratio rectanguli Γ M in M Z ad quadratum ex M Z major erit ratione N ad Ξ. Ponatur igitur ut N ad Ξ ita rectangulum Γ M in M Z ad rectangulum aliud; quod proinde majus erit quadrato ex M Z, nempe æquale quadrato ex K Z. Dico quod recta K H solvit problema; sive quod Γ Λ est ad K Z ut N ad Ξ. Etenim ut N est ad Ξ ita rectangulum Γ M in M Z ad quadratum ex K Z. Sed rectangulum Γ M in M Z æquale est rectangulo ΓΛ in KZ; adeoque erit ut N ad Ξ ita rectangulum ΓΛ in KZ ad quadratum ex KZ, hoc est, ita ΓΛ ad KZ. Recta igitur KH solvit problema; ac dico quod ea sola. Nam si ducatur recta alia, ut HP; manifestum est illam satisfacere problemati, hanc vero non item.

Cas. III. Manentibus quæ prius, ducatur recta HKΛ, juxta modum tertium, auferens rationem ΓΛ ad KZ datam. Quoniam ratio ΓΛ ad KZ data est, dabitur quoque ratio rectanguli ΓΛ in KZ ad quadratum ex KZ. Sed rectangulum ΓΛ in KZ æquale est rectangulo ΓM in MZ: quare ratio ΓM in MZ ad quadratum ex KZ datur. Rectangulum autem ΓM in MZ datum est, ob datam utramque ΓM, MZ; adeoque quadratum ex KZ datur, atque ipsa KZ tam magnitudine quam positione; ac dato puncto Z, punctum K datur. Recta igitur KHΛ positione datur. Cum autem recta ΓΛ major est quam ΓM, ac KZ minor quam ZM; ratio ΓΛ ad ΓM major erit ratione KZ ad ZM; & permutando ratio ΓΛ ad KZ major erit ratione ΓM ad ZM. Est autem ratio ΓΛ ad KZ ratio data; oportet igitur rationem ad componendum propositam majorem esse ratione ΓM ad MZ.



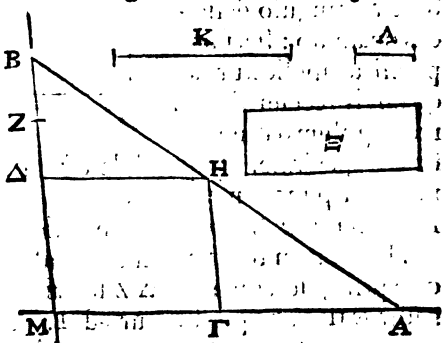
Componetur autem problema hunc in modum. Iisdem descriptis, sit ratio data sicut N ad Ξ; quæ major sit ratione ΓM ad MZ, sive ratione rectanguli ΓM in MZ *ad quadratum ex* MZ. Fiat igitur ut N ad Ξ ita rectangulum ΓM in MZ ad rectangulum aliud; quod minus erit quadrato ex MZ. Sit autem illud æquale quadrato ex KZ; ac juncta HK producatur ad Λ. Dico rectam HΛ solvere problema, sive quod ΓΛ est ad KZ sicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum ΓM in MZ est ad quadratum ex KZ ut N ad Ξ; ac rectangulum ΓM in MZ æquale est rectangulo ΓΛ in KZ: erit rectangulum ΓΛ in KZ ad quadratum ex KZ, hoc est ΓΛ ad KZ, sicut N ad Ξ. Recta igitur HΛ solvit problema, eaque sola. Nam si ducatur recta alia, illa quidem satisfacit problemati, altera vero non item.

LOCUS

LOCUS OCTAVUS.

Cadat jam recta per punctum H ducta, rectæque ZM parallela, super ipsum punctum Γ; quæ vero alteri rectæ MA parallela ducitur, cadat citra punctum Z, ut HΔ. Ac manifestum est rectas duci posse per punctum H secundum quatuor formas.

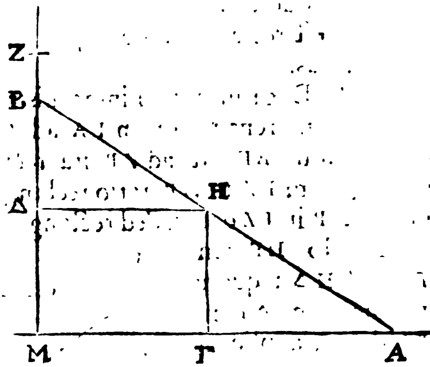
Cas. I. Ducatur autem imprimis recta AHB, juxta modum primum, auferens rationem ΓA ad ZB æqualem rationi datæ. Quoniam ut AΓ est ad ZB ita rectangulum AΓ in ΔB ad rectangulum BZ in ΔB, ratio rectanguli AΓ in ΔB ad rectangulum ΔB in BZ datur. Sed rectangulum AΓ in ΔB æquale est rectangulo HΓ in ΓM *vel* HΔ: quare rectangulum ΔB in BZ datur, applicandum ad rectam datam ΔZ excedens quadrato; adeoque recta BZ datur, ipsumque punctum B datum. Dato autem puncto H, recta AHB positione data est.



Componetur autem hunc in modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut K ad Λ. Fiat ut K ad Λ ita rectangulum HΓ in HΔ ad rectangulum Ξ; & applicetur ad rectam ΔZ rectangulum æquale rectangulo Ξ excedens quadrato. Sit illud rectangulum ΔB in BZ. Jungatur HB ac producatur ad A: dico rectam AB solvere problema. Quoniam enim K est ad Λ ut rectangulum ΓH in HΔ ad rectangulum Ξ; ac rectangulum Ξ æquale est rectangulo ΔB in BZ, uti rectangulum ΓH in HΔ æquale est rectangulo ΔB in AΓ: erit itaque rectangulum ΔB in AΓ ad rectangulum ΔB in BZ, hoc est, AΓ ad BZ, sicut K ad Λ. Recta igitur AB solvit problema. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur jam recta AB, juxta modum secundum, auferens rationem AΓ ad BZ datam. Ob datam rationem AΓ ad BZ, data quoque est ratio rectanguli AΓ in BΔ ad rectangulum BZ in BΔ. Rectangulum autem AΓ in BΔ datur,

tur, quia æquale est rectangulo ΓΗ in ΗΔ: adeoque rectangulum ΒΖ in ΒΔ datum est. Applicando itaque ad rectam ΔΖ, rectangulum illud deficiens quadrato, habebitur recta ΔΒ. Datis autem punctis Η, Β, recta ΑΒ positione datur. Quoniam autem requiritur ut fiat, in ratione ad componendum propositâ, rectangulum ΓΗ in ΗΔ ad rectangulum aliud; & ut applicetur ad rectam ΔΖ rectangulum æquale huic rectangulo deficiens quadrato: fieri non potest ut applicetur ad quamvis rectam datam rectangulum datum deficiens quadrato. Impossibile est igitur producere rectam lineam ad punctum Α, quæ auferat à quibuslibet duabus rectis segmenta quæ sint inter se in ratione data.

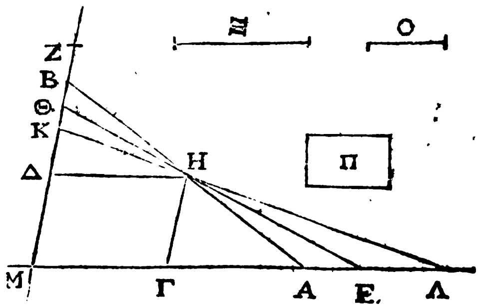


Hoc autem determinatur in hunc modum. Manentibus quæ prius, secetur recta ΔΖ bifariam in puncto Θ; ac jungatur ΘΗ quæ producatur ad Ε. Dico rectam ΘΕ auferre rationem ΓΕ ad ΘΖ, minorem quâvis ratione à qualibet alia rectâ per Η ductâ, totique ΔΖ occurrente, abscissâ. Ducatur enim alia ut ΑΒ. Quoniam recta ΔΘ æqualis est ipsi ΘΖ, erit rectangulum ΘΔ in ΘΖ majus rectangulo ΖΒ in ΒΔ. Rectangulum autem ΕΓ in ΔΘ æquale est rectangulo ΑΓ in ΒΔ, quia utrumque æquale est rectangulo ΓΗ in ΗΔ. Ratio igitur rectanguli ΕΓ in ΔΘ ad rectangulum ΘΔ in ΘΖ minor est ratione rectanguli ΑΓ in ΒΔ ad rectangulum ΖΒ in ΒΔ. Sed rectangulum ΕΓ in ΔΘ est ad rectangulum ΔΘ in ΘΖ ut ΕΓ ad ΖΘ; ac rectangulum ΑΓ in ΒΔ est ad rectangulum ΔΒ in ΒΖ ut ΑΓ ad ΒΖ: ratio igitur ΕΓ ad ΖΘ minor est ratione ΑΓ ad ΒΖ. Quocirca recta ΕΘ aufert rationem ΕΓ ad ΘΖ, minorem quavis ratione quam abscindit recta quæcunque alia per Η ducta, totique rectæ ΖΔ occurrens.

Componetur autem problema in hunc modum. Manentibus descriptis, dividatur recta ΔΖ bifariam in puncto Θ, ac jungatur

jungatur

jungatur HΘ ad punctum E producenda. Hæc recta ΘE auferet rationem ΓE ad ΘZ minorem qualibet ratione quam abscindere potest alia quævis recta per H ducta totique ΔZ occurrens. Jam si ratio ad componendum data æqualis fuerit rationi ΓE ad ΘZ, sola recta EΘ solvit problema. Si ratio minor fuerit eâ, componi non potest. Quod si ratio proposita major fuerit ratione EΓ ad ΘZ, ut Ξ ad O; fiat ut Ξ ad O ita rectangulum ΓH in HΔ (æquale rectangulo EΓ in ΔΘ) ad rectangulum Π. Quoniam vero ratio Ξ ad O major est ratione EΓ ad ΘZ,

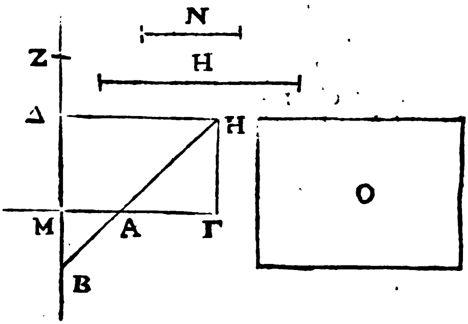


erit ratio rectanguli EΓ in ΔΘ ad rectangulum Π major ratione EΓ ad ΘZ. Sed EΓ est ad ΘZ ut rectangulum EΓ in ΔΘ ad rectangulum ΘZ in ΔΘ; adeoque ratio rectanguli EΓ in ΔΘ ad rectangulum Π major est ratione rectanguli EΓ in ΔΘ ad rectangulum ΔΘ in ΘZ: unde rectangulum Π minus erit rectangulo ΔΘ in ΘZ. Possibile est igitur applicare ad rectam ΔZ rectangulum æquale rectangulo Π deficiens quadrato. Fiet autem applicatio ista duobus modis, ita ut puncta applicationum fuerint B & K. Jungantur BH, KH quæ producantur ad A & Λ. Dico utramque rectam AB, KΛ solvere problema. Quoniam enim rectangulum ΓH in HΔ est ad rectangulum Π ut Ξ ad O; ac rectangulum ΓH in HΔ æquale est rectangulo ΓΛ in ΔK; uti rectangulum Π æquale est rectangulo ΔK in KZ; erit rectangulum ΓΛ in ΔK ad ΔK in KZ, hoc est ΓΛ ad ΔK, ut Ξ ad O. Recta igitur ΛK satisfacit problemati. Ac pari argumento demonstratur rectam AB idem præstare. Constat itaque duobus modis componi posse problema. Q. E. D.

Cas. III. Ducatur recta HB, juxta Casum tertium, auferens rationem ΓA ad BZ datam. Quoniam ratio rectanguli ΓA in BΔ ad rectangulum BZ in BΔ data est, atque etiam rectangulum BΔ in ΓA datur; *datum quoque erit rectangulum* BZ *in* BΔ, applicandum ad rectam ΔZ excedens quadrato,

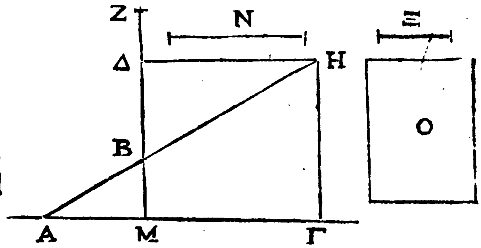
drato, ut habeatur recta ΒΔ, punctumque Β datum. Ad compositionem autem requiritur rationem propositam minorem esse ratione ΓΜ ad ΜΖ Nam recta ΜΓ major est quam ΓΑ, ac ΜΖ minor est quam ΒΖ, adeoque ratio ΓΜ ad ΓΑ major erit ratione ΜΖ ad ΒΖ; ac permutando ratio ΓΜ ad ΜΖ major erit ratione ΓΑ ad ΒΖ. Sed ratio ΓΑ ad ΒΖ est ratio data: quare oportet ad constructionem quod ratio data minor sit ratione ΓΜ ad ΜΖ.

Componetur autem problema ad hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data, quæ minor sit ratione ΓΜ ad ΜΖ, sicut Ν ad Ξ: ac fiat ut Ν ad Ξ ita rectangulum ΓΗ in ΗΔ (æquale rectangulo ΓΜ in ΜΔ) ad rectangulum Ο. Est autem ratio Ν ad Ξ minor ratione ΓΜ ad ΜΖ; quare ratio rectanguli ΓΜ in ΜΔ ad rectangulum Ο minor erit ratione ΓΜ ad ΜΖ. Sed ΓΜ est ad ΜΖ ut rectangulum ΓΜ in ΜΔ ad rectangulum ΖΜ



in ΜΔ: quare rectangulum Ο majus erit rectangulo ΖΜ in ΜΔ. Si igitur applicetur ad rectam ΖΔ rectangulum ipsi Ο æquale excedens quadrato, punctum Β cadet ab alterâ parte puncti Μ; adeoque si fiat rectangulum ΖΒ in ΒΔ rectangulo Ο æquale, ac jungatur recta ΗΒ: dico rectam ΗΒ solvere problema. Quoniam enim Ν est ad Ξ ut rectangulum ΓΗ in ΗΔ ad rectangulum Ο; ac rectangulum Ο æquale est rectangulo ΖΒ in ΒΔ: erit Ν ad Ξ ut rectangulum ΓΗ in ΗΔ ad rectangulum ΖΒ in ΒΔ. Sed rectangulum ΓΗ in ΗΔ æquale est rectangulo ΑΓ in ΒΔ; adeoque Ν est ad Ξ ut rectangulum ΑΓ in ΒΔ ad rectangulum ΖΒ in ΒΔ. Rectangulum autem ΑΓ in ΒΔ est ad rectangulum ΖΒ in ΒΔ ut ΑΓ ad ΖΒ. Ergo ΑΓ est ad ΖΒ ut Ν ad Ξ, ac recta ΗΒ solvit problema. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur, juxta Casum quartum, recta ΗΑ auferens rationem ΓΑ ad ΖΒ datam. Quoniam ratio rectanguli ΓΑ in ΒΔ ad rectangulum ΖΒ in ΒΔ datur; ac rectangulum ΓΑ in ΒΔ æquale est rectangulo ΓΗ in ΗΔ: igitur rectangulum ΖΒ in ΒΔ datur, applicandum ad rectam datam ΔΖ excedens quadrato; unde recta ΒΔ datur. Ob datum autem punctum Η, recta ΗΒ positione datur. Oportet vero rationem ad construendum propositam majorem esse ratione ΓΜ ad ΜΖ, Nam recta ΓΑ major est quam ΓΜ, ac ΒΖ minor est quam recta ΜΖ; adeoque ratio ΓΑ ad ΓΜ major erit ratione ΒΖ ad ΜΖ. Permutando autem ratio ΓΑ ad ΒΖ major erit ratione ΓΜ ad ΜΖ.



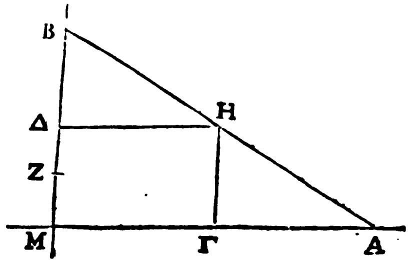
Sed ratio ΑΓ ad ΒΖ est ratio data, quæ proinde major esse debet ratione ΓΜ ad ΜΖ.

Sic autem componetur problema hoc. Maneant quæ prius, ac sit ratio data sicut Ν ad Ξ, quæ major sit ratione ΓΜ ad ΜΖ. Fiat ut Ν ad Ξ ita rectangulum ΓΗ in ΗΔ (æquale rectangulo ΓΜ in ΜΔ) ad rectangulum Ο. Jam ratio Ν *ad* Ξ major est ratione ΓΜ ad ΜΖ, ac ratio Ν ad Ξ est ut rectangulum ΓΜ in ΔΜ ad rectangulum Ο; ratio autem ΓΜ ad ΜΖ est ut rectangulum ΓΜ in ΜΔ ad rectangulum ΜΔ in ΜΖ. Ratio igitur rectanguli ΓΜ in ΜΔ ad rectangulum Ο major est ratione rectanguli ΓΜ in ΜΔ ad rectangulum ΖΜ in ΜΔ; adeoque rectangulum Ο minus erit rectangulo ΖΜ in ΜΔ. Si itaque applicetur ad rectam ΖΔ rectangulum æquale rectangulo Ο excedens quadrato, punctum applicationis Β cadet citra punctum Μ. Sit rectangulum Ο æquale rectangulo ΖΒ in ΒΔ, ac juncta ΗΒ producatur ad Α. Dico rectam ΗΑ solvere problema. Quoniam enim rectangulum ΓΗ in ΗΔ, hoc est rectangulum ΓΑ in ΒΔ, est ad rectangulum ΖΒ in ΒΔ ut Ν est ad Ξ; ac rectangulum ΓΑ in ΒΔ est ad ΖΒ in ΒΔ ut ΓΑ ad ΖΒ: erit igitur ΓΑ ad ΒΖ sicut Ν ad Ξ. Q. E. D.

LOCUS NONUS.

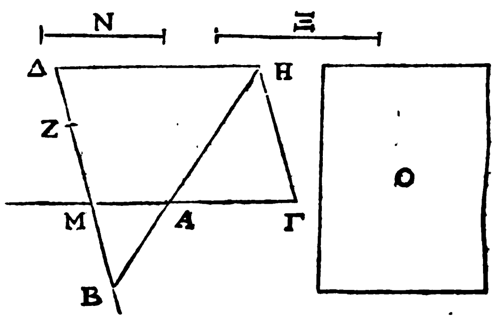
Cadat jam altera è duabus parallelis extra punctum Z, ad modum rectæ HΔ, ac manifestum est quod habebuntur quatuor Casus, hoc est, quod duci possunt rectæ per punctum H secundum quatuor modos.

Cas. I. Ducatur autem recta BA, juxta Casum primum, auferens rationem AΓ ad BZ datam. Quoniam rectangulum AΓ in BΔ datur, rectangulum quoque ZB in BΔ datur, applicandum ad rectam datam ZΔ excedens quadrato; recta igitur BΔ ac punctum B dantur: unde recta AHB positione datur. Constructio autem problematis manifesta est ex præmissis.



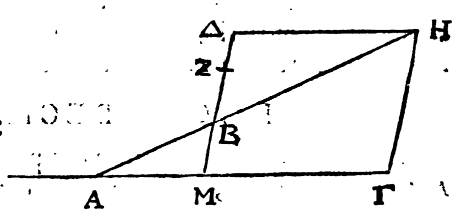
Cas. II. Ducatur jam juxta Casum secundum, recta HB auferens rationem ΓA ad BZ datam. Quoniam ratio rectanguli AΓ in BΔ ad rectangulum BΔ in BZ data est, ac rectangulum ipsum AΓ in BΔ datum; ideo rectangulum BΔ in BZ datur, applicandum ad rectam datam ΔZ excedens quadrato; unde punctum B datur. Dato autem puncto H, recta AHB positione datur. Oportet autem rationem ad componendum datam minorem esse ratione ΓM ad MZ. Quoniam enim ΓM major est ipsâ ΓA, & MZ minor ipsâ ZB, *erit ratio* ΓM *ad* ΓA *major ratione* MZ *ad* ZB, ac permutando ratio ΓA ad ZB minor erit ratione ΓM ad MZ.

Componetur autem ad hunc modum problema. Manentibus quæ prius, esto ratio data sicut N ad Ξ, quæ sit minor ratione ΓM ad MZ. Fiat ut N ad Ξ ita rectangulum HΓ in HΔ, sive rectangulum MΓ in MΔ, ad rectangulum



gulum O. Quoniam autem ratio N ad Ξ minor est ratione ΓM ad MZ; ac ΓM est ad MZ ut rectangulum ΓM in MΔ ad rectangulum MΔ in MZ, igitur ratio rectanguli ΓM in MΔ ad rectangulum O minor erit ratione rectanguli ΓM in MΔ ad rectangulum ΔM in MZ, *adeoque rectangulum* O *majus erit rectangulo* ΔM *in* MZ. Applicetur itaque ad rectam ΔZ rectangulum æquale rectangulo O excedens quadrato, sitque illud rectangulum ΔB in BZ; *& punctum* B *cadet ultra punctum* M. Ac manifestum est rectam HB satisfacere problemati.

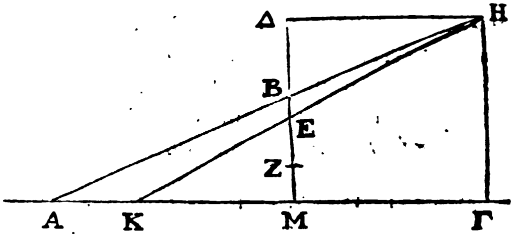
Cas. III. Ducatur, juxta Casum tertium, recta HA auferens rationem ΓA *ad* BZ *datam. Quoniam ratio rectanguli* BZ *in* BΔ *ad rectangulum* ΓA in BΔ datur, ac rectangulum ΓA in BΔ datum est, ipsum quoque rectangulum BZ in BΔ datur, applicandum ad rectam ΔZ excedens quadrato; unde punctum B datur, ac ob datum punctum H recta HA positione datur. Oportet autem rationem ad componendum datam majorem esse ratione ΓM ad MZ. Quoniam enim ratio AΓ ad ΓM major est ratione BZ ad ZM, permutando erit ratio AΓ ad BZ major ratione ΓM ad MZ. Est vero ratio AΓ ad BZ ratio data; quare manifestum est oportere



rationem datam majorem esse ratione ΓM ad MZ. Constat autem ex præmissis quo pacto fieri possit constructio.

Cas. IV. Ducatur jam recta HA, juxta Casum quartum, auferens rationem ΓA ad BZ datam. Quoniam ratio rectanguli ΓA in BΔ ad rectangulum ZB in BΔ datur, ac rectangulum ΓA in BΔ datum est; igitur rectangulum ZB in BΔ datur. Applicando itaque rectangulum illud ad rectam ZΔ deficiens quadrato, dabitur punctum B. Dato autem puncto H, ipsa ABH positione datur. Determinatur autem hunc in modum. Maneant descripta, & dividatur recta ZΔ bifariam in puncto B; ac juncta HB producatur ad A: dico rectam HA auferre rationem ΓA ad BZ, minorem quavis ratione quam resecant rectæ quælibet aliæ per H ductæ, totique rectæ ΔZ occurrentes. Ducatur enim recta alia ut

HBK. Quoniam vero recta ZB æqualis est ipsi BΔ, erit rectangulum ZB in BΔ majus rectangulo ZE in EΔ. Sed rectangulum ΓA in BΔ æquale est rectangulo ΓK in EΔ, (quia utrumque æquale est rectangulo ΓH in HΔ) Igitur ratio rectanguli ΓA in BΔ ad rectangulum ZB in BΔ minor est ratione rectanguli ΓK in EΔ ad rectangulum ZE in EΔ.

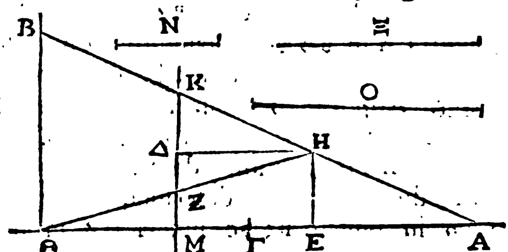


Sed rectangulum ΓA in BΔ est ad rectangulum ZB in BΔ, ut ΓA *ad* ZB; *ac rectangulum* ΓK *in* EΔ *ad rectangulum* ZE *in* EΔ est ut ΓK ad ZE. Ratio igitur ΓA ad ZB minor est ratione ΓK ad ZE: adeoque recta ΓA aufert rationem AΓ ad ZB, minorem quavis aliâ à rectâ qualibet per H ductâ, totique rectæ ΔZ occurrente, abscisâ; adeoque habentur limites. Constat autem ex jam traditis, compositionem fieri posse duobus modis, utrinque à recta HA; scilicet rectis BZ, BΔ occurrentibus.

LOCUS DECIMUS.

Cadant jam rectæ duæ, quæ per punctum H ducantur ipsis AM, MK parallelæ, ultra puncta data Z & Γ, ad modum rectarum HΔ, HE. Ac manifestum est rectas duci posse per punctum H, juxta quinque diversos Casus.

Cas. I. Ducatur autem imprimis, juxta modum primum, recta AK auferens rationem KZ ad AΓ datam. Jungatur HZ quæ producatur ad Θ; ac per punctum Θ ducatur recta BΘ ipsi KM parallela. Continuetur etiam recta AHK ad punctum B, in recta ΘB positione datâ.

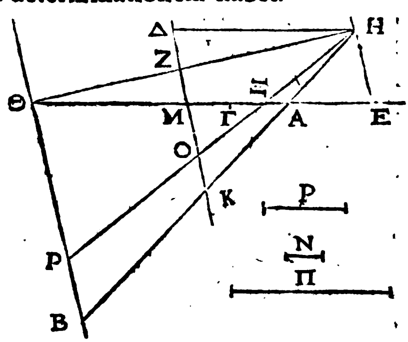


Quoniam vero ratio ZK ad AΓ datur, atque etiam ratio ZK ad ΘB data est, ratio quoque ΘB ad AΓ datur.

Jam dantur positione rectæ duæ A Θ, Θ B; ac sumitur in A Θ punctum Γ, in ipsâ vero B Θ punctum Θ; punctum autem datum H est intra angulum A Θ B; ac recta parallela H E cadit ultra punctum Γ. Ducenda est igitur recta, juxta Casum primum *Loci sexti*, auferens rationem Θ B ad Γ A datam; quare recta A B positione datur per regulas Casus prædicti: qui quidem non habet Diorismum.

Componetur autem problema in hunc modum. Sit ratio data sicut N ad O. Fiat ut Z H ad H Θ ita N ad Ξ; ac ducatur recta A B, ad modum Casus primi Loci sexti, auferens rationem Θ B ad A Γ æqualem rationi Ξ ad O: ac manifestum est rectam A B solvere problema. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur jam recta H K, juxta Casum secundum, auferens rationem K Z ad A Γ datam. Producatur recta Z H ad Θ, ac per punctum Θ ipsi K M parallela ducatur recta, quæ occurrat ipsi H K in puncto B. Quoniam ratio K Z ad A Γ datur, atque etiam ratio K Z ad B Θ; datur quoque ratio B Θ ad A Γ: atque adeo ipsa recta H B positione datur, per Casum secundum Loci sexti, qui determinationem habet.



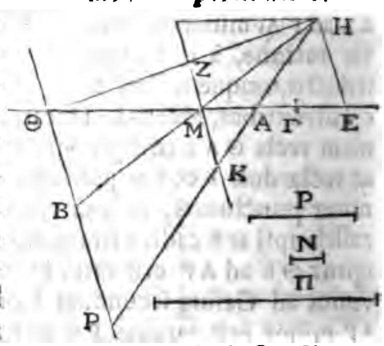
Limitatur autem ad hunc modum. Manentibus descriptis, capiatur recta Θ A media proportionalis inter ipsas Θ E, Θ Γ; ac juncta recta H A producatur ad B. Dico rectam H B auferre rationem K Z ad Γ A, minorem quavis ratione, à rectis per H ductis, totique rectæ Γ A occurrentibus, abscissâ. Ducatur enim alia, ut H P. Jam quoniam recta Θ A media proportionalis est inter ipsas Θ E, Θ Γ; ac rectæ duæ B Θ, E Θ positione dantur; ac in rectâ B Θ sumitur punctum Θ, in ipsâ vero E Θ punctum Γ; ac recta parallela ipsi Θ B cadit ultra punctum Γ, nempe recta H E: ratio igitur Θ B ad A Γ erit ratio minima, per ea quæ demonstravimus ad Casum secundum Loci sexti. Hinc ratio Θ B ad A Γ minor erit ratione P Θ ad Γ Ξ; ac permutando ratio B Θ ad Θ P minor erit ratione A Γ ad Γ Ξ. Sed B Θ est ad Θ P ut K Z ad Z O; quare ratio K Z ad Z O minor erit ratione A Γ ad

Γ Ξ;

Γ Ξ; ac permutando ratio ΚΖ *ad* ΑΓ *minor erit ratione* ΖΟ *ad* ΓΞ. Recta igitur ΗΒ aufert rationem ΚΖ ad ΓΑ minorem quavis ratione, à rectâ qualibet per Η ductâ, abscissâ.

Componetur autem problema ad hunc modum. Manentibus descriptis, sit recta ΘΑ media proportionalis inter ΕΘ, ΘΓ, ac juncta ΗΑ producatur ad Β. Recta ΗΚΒ auferet rationem ΚΖ ad ΓΑ, minorem qualibet ratione, à rectis per Η ductis, totique rectæ ΓΑ occurrentibus, abscindendâ. Jam si ratio ad componendum proposita æqualis fuerit rationi ΚΖ ad ΓΑ, sola recta ΗΚΒ satisfacit problemati. Ac si minor fuerit eâ, non construetur. Si vero ratio major fuerit eâ, constat ex præmissis problema componi posse duobus *modis*, ab utraque parte rectæ ΗΚ; abscissis ex utrâque ΕΑ, ΑΓ segmentis. Esto autem ratio data sicut Ρ ad Ν, quæ major sit ratione ΚΖ ad ΓΑ; & fiat ut ΖΗ ad ΗΘ ita Ρ ad Π; unde Ρ erit ad Π ut ΚΖ ad ΘΒ. Sed ratio Ρ ad Ν major est ratione ΚΖ ad ΓΑ, adeoque ex æquo ratio Π ad Ν major erit ratione ΘΒ ad ΓΑ. Ratio autem ΘΒ ad ΓΑ ratio minima est, per Casum secundum Loci sexti; quare duci possunt rectæ duæ ab utraque parte ipsius ΗΒ, ut recta ΗΡ quæ auferat rationem ΡΘ ad ΓΞ æqualem rationi Π ad Ν: ac manifestum est rectam illam solvere problema. Eodemque modo demonstrabitur rectam alteram tantundem præstare. Q. E. D.

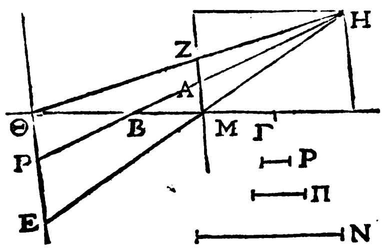
Cas. III. Ducatur jam, ad modum tertium, recta ΗΑΚ, auferens rationem ΚΖ ad ΓΑ datam; ac producatur ea ad punctum Ρ. Quoniam ratio ΚΖ ad ΡΘ datur, etiam ratio ΡΘ ad ΓΑ data est; ac proinde recta ΗΡ positione datur: resolvitur enim per Casum tertium Loci sexti. Determinatur autem ad hunc modum. Manentibus descriptis, jungatur ΗΜ quæ producatur ad Β; ac manifestum est oportere rationem ΖΜ ad ΜΓ minorem esse ratione ad construendum propositâ, sive ratione ΚΖ ad ΓΑ. Jam datâ quavis ratione



majore quam ratio ΖΜ ad ΜΓ, componetur hujusmodi. Manentibus descriptis, sit ratio data, sive ratio Ρ ad Ν, major ratione

tione ZM ad MΓ; ac fiat ut ZM ad ΘB ita P & Π: & ex æquo constabit rationem ΘB ad MΓ minorem esse ratione Π ad N. Ductâ igitur rectâ per punctum H, quæ auferat ab ipsis PΘ, ΘΓ segmenta, quæ sint inter se in ratione Π ad N; manifestum est illam rectæ ΓM occurrere: quandoquidem rectæ puncto Θ propiores abscindunt semper rationes minores quam quæ auferuntur à remotioribus ab eodem. Si igitur recta HP auferat rationem PΘ ad ΓA æqualem rationi Π ad N, clarum est rectam illam solvere problema. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur jam, juxta Casum quartum, recta HP abscindens rationem AZ ad BΓ datam. Quoniam ratio AZ *ad* PΘ *datur, ratio quoque* PΘ *ad* BΓ data est; adeoque recta HP positione datur: resolvitur enim eodem omnino modo cum præcedente. Sic autem determinatur. Maneant descripta ac jungatur HM quæ producatur ad E; ac manifestum est componi posse problema, si ratio data minor fuerit ratione ZM ad MΓ.

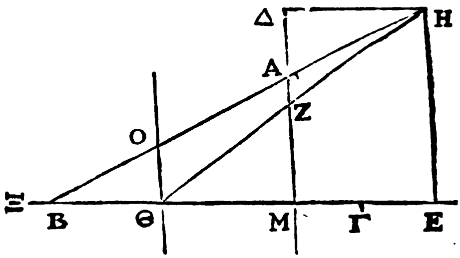


Componetur autem ad hunc modum. Sit ratio data sicut P ad N, quæ minor sit ratione MZ ad MΓ; ac fiat ut ZH ad HΘ, *hoc est* ZM *ad* ΘE, *ita* P ad Π; & ex æquo demonstrabitur rationem ΘE ad ΓM majorem esse ratione Π ad N. Igitur si jubeatur rectam ducere per punctum H, quæ resecet è rectis ΓΘ, ΘE segmenta habentia inter se rationem Π ad N; clarum est rectam illam ipsi MΘ occursuram: quia jam demonstratum est rectas puncto Θ propiores auferre rationes *minores* rationibus, quæ auferuntur à remotioribus ab eodem. Ductâ igitur rectâ HP, quæ auferat rationem PΘ ad ΓB æqualem rationi Π ad N, patet ipsam HAP solvere problema.

Cas. V. Ducatur jam, juxta Casum quintum, recta AB auferens rationem ZA ad ΓB datam. Quoniam ratio ZA ad ΘO data est, atque etiam ratio ΘO ad ΓB; recta quoque HB positione datur. Resolvitur enim per Casum quartum Loci sexti; qui quidem casus limites habet. Determinatur autem hunc in modum. Manentibus descriptis, capiatur media proportionalis inter rectas EΘ, ΘΓ, ut recta ΘB. Junctâ autem

rectâ

rectâ HB, auferet illa rationem ΘO ad BΓ, majorem quavis ratione quam resecant rectæ quælibet aliæ per H ductæ, totique MΞ occurrentes: unde patet rectam illam HB abscindere etiam rationem ZA ad BΓ, majorem quavis aliâ, à rectâ qualibet ipsi ZΔ occurrente, ablatâ.



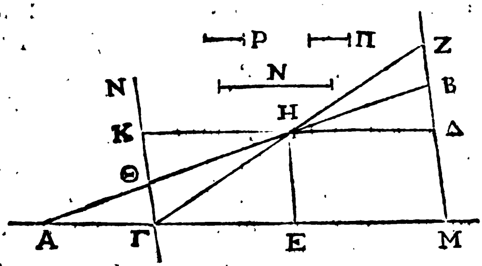
Componetur autem problema in hunc modum. Maneant jam descripta, ac fiat recta ΘB media proportionalis inter ipsas EΘ, ΘΓ; ac jungatur HB. Hæc recta HB auferet rationem ZA ad BΓ, majorem quacunque ratione, quam abscindere potest alia quævis per H ducta, totique rectæ ZΔ occurrens. Manifestum autem est, ex jam demonstratis, duobus modis componi posse problema, rectis scilicet ab utrâque parte ipsius HB ducendis, ipsisque AZ, AΔ occursuris. Q. E. D.

LOCUS UNDECIMUS.

Incidant jam rectæ duæ per punctum H ductæ, ipsisque ZM, MΓ parallelæ, citra puncta data Z & Γ, ad modum ipsarum HE, ΔH; junctisque punctis Z & H producatur recta HZ in directum. Cadet autem illa vel super ipsum punctum Γ, vel ultra, vel citra illud. Imprimis autem cadat super illud; ac patet rectas duci posse per punctum H, secundum quatuor diversos modos.

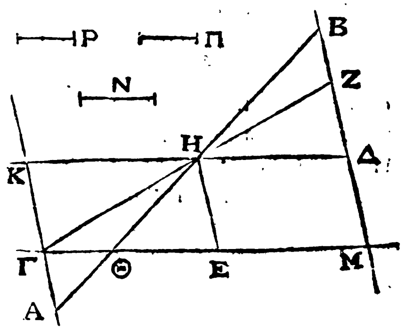
Cas. I. Ducatur recta AB, juxta Casum primum, auferens rationem BZ ad ΓA *datam*: & agatur per H recta HE ipsi MZ parallela. Jam quoniam ratio BZ ad ΓA datur, atque etiam ratio BZ ad ΓΘ data est, quæ nempe æqualis est rationi ZH ad HΓ; ipsa quoque ratio ΓΘ ad ΓA datur. Habentur autem rectæ duæ positione datæ, viz. AM, ΓN; ac in utrâque earum sumitur commune punctum Γ; & punctum datum H est intra angulum MΓN. Ducenda est igitur recta BHA auferens datam rationem ΘΓ ad ΓA. Recta autem AB positione datur per Casum primum Loci tertii, qui determinationem habet. Oportet enim rationem componendam minorem esse ratione ΔZ ad BΓ. Producatur recta ΔH ad K.

Quoniam vero ratio ΗΕ ad ΕΓ major est ratione ejusdem ΗΕ ad ΕΑ; ac ΗΕ ad ΕΑ est ut ΘΓ ad ΓΑ: igitur ratio ΗΕ ad ΕΓ major erit ratione ΘΓ ad ΓΑ. Sed ΗΕ æqualis est ipsi ΓΚ; quare ratio ΓΚ ad ΕΓ major erit ratione ΘΓ ad ΓΑ, ac permutando ratio ΓΚ ad ΘΓ major erit ratione ΕΓ ad ΓΑ. Sed ΓΚ est ad ΓΘ ut ΔΖ ad ΒΖ. Quocirca ratio ΔΖ ad ΒΖ major erit ratione ΕΓ ad ΓΑ; ac permutando ratio ΔΖ ad ΕΓ major erit ratione ΒΖ ad ΓΑ. Ratio igitur ΒΖ ad ΓΑ, nempe ratio data, minor esse debet ratione ΔΖ ad ΕΓ.



Componetur autem problema ad hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut Ρ ad Ν minor ratione ΔΖ ad ΕΓ: *ac fiat ut* ΓΗ *ad* ΗΖ *ita* Π *ad* Ρ. Quoniam vero ΓΗ est ad ΗΖ ut ΓΚ ad ΔΖ, ac, ob ΕΗ ipsi ΓΚ æqualem, ΓΚ est ad ΔΖ ut ΕΗ ad ΔΖ; erit igitur Π ad Ρ sicut ΕΗ ad ΔΖ. Sed ratio Ρ ad Ν minor est ratione ΔΖ ad ΕΓ; quare ex æquo ratio Π ad Ν minor erit ratione ΗΕ ad ΕΓ. Si itaque fiat ut Π ad Ν ita ΗΕ ad rectam aliam, quæ proinde major erit ipsa ΕΓ, ut ΕΑ; ac jungatur ΗΑ, quæ producatur ad Β; manifestum est rectam ΑΗΒ solvere problema. Q.E.D.

Cas. II. Ducatur jam recta ΘΒ, juxta modum secundum, auferens rationem ΖΒ ad ΓΘ datam; ac producatur ea ad Α. Quoniam ratio ΖΒ ad ΑΓ datur, data quoque est ratio ΑΓ ad ΓΘ; ac proinde recta ΑΒ positione datur; quia reducitur ad Casum secundum Loci tertii, qui limitem habet. Oportet enim rationem construendam majorem esse ratione ΔΖ ad ΕΓ. Producatur recta ΔΗ ad Κ. Cumque ratio ΗΕ ad ΕΘ, sive ΑΓ ad ΓΘ, major est ratione ΗΕ ad ΕΓ, hoc est ratione ΚΓ ad ΓΕ, erit permutando ratio ΑΓ ad ΓΚ major

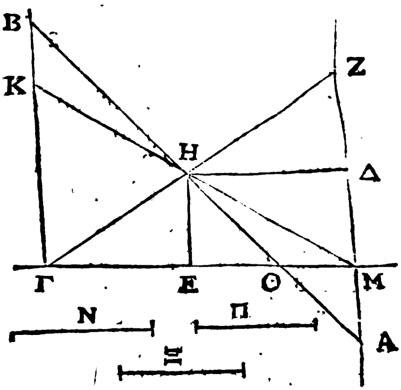


 ratione

ratione ΓΘ ad ΓΕ. Sed ΑΓ est ad ΓΚ sicut ΒΖ ad ΖΔ; quare ratio ΒΖ ad ΖΔ major erit ratione ΓΘ *ad* ΓΕ, *ac permutando erit ratio* ΒΖ *ad* ΓΘ major ratione ΖΔ ad ΓΕ. Est autem ratio ΒΖ ad ΓΘ ratio data; quare ratio illa data major esse debet ratione ΖΔ ad ΕΓ.

Componetur autem problema in hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut Ρ ad Ν, major ratione ΖΔ ad ΕΓ; ac fiat ut ΗΓ ad ΗΖ, *sive* ΓΚ *ad* ΖΔ, ita Π ad Ρ. Cum autem ratio Ρ ad Ν major est ratione ΖΔ ad ΕΓ, ex æquo erit ratio Π ad Ν major ratione ΓΚ ad ΓΕ, hoc est ratione ΕΗ ad ΕΓ. Dantur jam positione rectæ duæ, nempe ΕΓ, ΓΑ; ac sumitur in concursu utriusque punctum Γ; ac ratio data major est ratione ΕΗ ad ΕΓ. Recta igitur ducta, ita ut auferat rationem æqualem rationi Π ad Ν, *occurret ipsi* ΓΕ. Hoc autem si præstet recta ΑΒ per Η ducta, manifestum est ipsam ΑΘΒ satisfacere problemati.

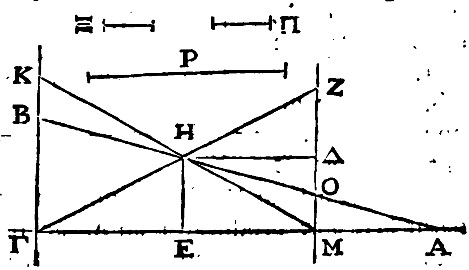
Cas. III. Ducatur recta ΑΗ, juxta Casum tertium, auferens rationem ΑΖ ad ΓΟ datam. Producatur ea ad punctum Β; ac data ratione ΑΖ ad ΓΒ, ratio quoque ΓΒ ad ΟΓ datur; adeoque recta ΑΒ positione datur, per demonstrata in Casu tertio Loci tertii. Determinatio autem manifesta est: nam manentibus descriptis, ratio componenda major esse debet ratione ΖΜ ad ΜΓ; quia ratio ΑΖ ad ΟΓ evidenter major est ratione ΖΜ ad ΜΓ.



Sic autem componetur problema. Iisdem positis, jungatur ΗΜ, quæ producatur ad Κ; ac sit ratio data sicut Ν ad Π major ratione ΖΜ ad ΜΓ. Fiat ut ΖΗ ad ΗΓ ita Ν ad Ξ. Cumque ΖΗ est ad ΗΓ sicut ΜΖ ad ΓΚ; ac ratio Ν ad Π major est ratione ΖΜ ad ΜΓ: patet ex æquo rationem Ξ ad Π majorem esse ratione ΓΚ ad ΓΜ. Ducatur itaque recta ΑΒ, quæ auferat rationem ΓΒ ad ΟΓ æqualem rationi Ξ ad Π, & recta illa occurret ipsi ΕΜ; quia rectæ propiores puncto Γ abscindunt semper rationes majores quam quæ auferuntur

runtur à remotioribus ab eodem. Constat igitur rectam B H O A solvere problema.

Cas. IV. Ducatur jam recta A H B, juxta Casum quartum, auferens rationem O Z ad Γ A datam. Quoniam ratio O Z ad Γ B data est, ratio quoque Γ B ad A Γ datur, adeoque recta A B positione datur. Oportet autem rationem ad componendum datam minorem esse ratione Z M ad M Γ, per jam demonstrata.



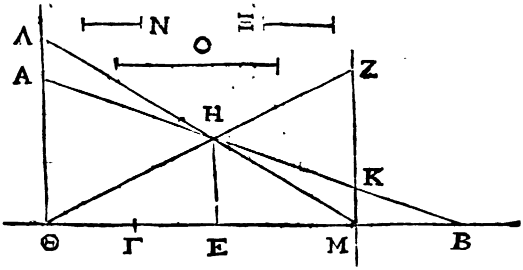
Sic autem componetur problema. Maneant descripta, ac sit ratio data sicut Ξ ad P, minor ratione Z M ad M Γ. Jungatur H M ac producatur ad K: dein fiat ut Z H ad H Γ ita Ξ ad Π. Est autem Z H ad H Γ ut M Z ad K Γ; ac ratio M Z ad M Γ major est ratione Ξ ad P; quare ex æquo constat rationem K Γ ad Γ M majorem esse ratione Π ad P. Ducatur igitur recta A H B, auferens rationem Γ B ad A Γ æqualem rationi Π ad P: ac patet rectam illam A B ipsi M A occurrere; quia rectæ propiores puncto Γ abscindunt semper rationes majores quam quæ sunt remotiores ab eodem. Manifestum autem est rectam A O B solvere problema.

LOCUS DUODECIMUS.

Occurrat jam recta, per puncta Z & H ducta, ipsi M Γ, ultra punctum Γ, ad modum rectæ Z H Θ: ac manifestum est rectas duci posse per punctum H juxta quinque Casus.

Cas. I. Ducatur recta H B, ad formam Casus primi, auferens rationem K Z ad B Γ datam. Per punctum Θ ducatur recta Θ A ipsi M Z parallela. Jam quia ratio Z K ad Θ A, (quæ nempe æqualis est rationi Z H ad H Θ) data est; ratio quoque ipsius Θ A ad B Γ datur. Dantur autem positione rectæ duæ Θ B, Θ A; ac in recta Θ A sumitur punctum Θ, in recta vero Θ B sumitur punctum Γ; & punctum datum H est intra angulum A Θ M; recta autem parallela per H ducta, nempe H E, cadit citra punctum Γ. Ducenda est igitur recta

A B auferens rationem A Θ ad B Γ datam; quæ quidem recta A B dabitur positione, juxta ostensa in Casu primo Loci sexti. Constat autem rationem componendam minorem esse debere ratione Z M ad M Γ; quia recta K Z minor est quam Z M, & Γ B major quam Γ M.

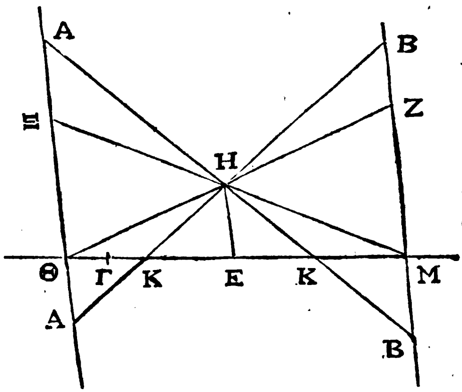


Sic autem componetur. Maneant descripta, & sit ratio data sicut N ad O minor ratione Z M ad M Γ. Jungatur M H quæ producatur ad Λ, ac fiat ut Z H ad H Θ, hoc est Z M ad Λ Θ, ita N ad Ξ; quare N est ad Ξ sicut Z M ad Θ Λ. Sed ratio N ad O minor est ratione Z M ad M Γ; adeoque ex æquo erit ratio Ξ ad O minor ratione Λ Θ ad M Γ. Invertendo autem ratio O ad Ξ major erit ratione M Γ ad Θ Λ. Itaque si faciamus ut O ad Ξ ita M Γ ad rectam aliam, minor erit illa quam Θ Λ. Esto autem illa recta Θ A, ac juncta H A producatur ad B. Manifestum autem est quod, si velimus ducere per punctum H rectam resecantem è rectis Θ Λ, B Γ, (per Casum primum Loci sexti Lib. I.) segmenta quæ sint inter se in ratione Ξ ad O; recta illa occursura sit ipsi B M: quia rectæ propiores puncto Γ semper auferunt rationes majores quam rectæ remotiores ab eodem. Ductâ igitur rectâ A B auferente rationem A Θ ad Γ B æqualem rationi Ξ ad O, clarum est hanc rectam solvere problema.

Cas. II. Ducatur jam recta H B, juxta Casum secundum, auferens rationem Z B ad Γ K datam. Quoniam ratio Z B ad A Θ datur, data quoque est ratio A Θ ad Γ K, unde recta A B positione datur, per eundem Casum cum præcedente. Oportet autem rationem componendam majorem esse ratione Z M ad M Γ. Componetur problema, si manentibus descriptis, jungatur H M quæ producatur ad Ξ, ac fiat omnino ut in præcedente Casu.

Cas. III. Ducatur recta H B, juxta Casum tertium, auferens rationem Z B ad K Γ datam, ac producatur ea ad punctum A. Quoniam ratio Z B ad A Θ datur, atque etiam ratio

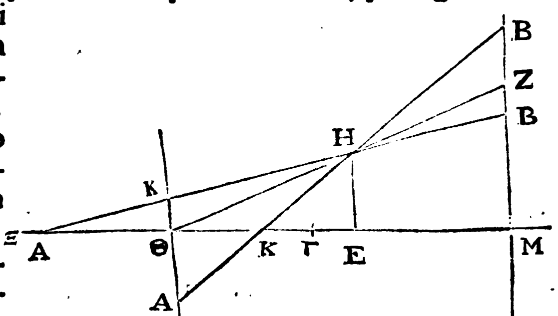
ZB ad KΓ datur, ratio quoque AΘ ad KΓ data erit: unde ipsa recta AB positione datur, per resolutionem Casus secundi Loci sexti, qui quidem Diorismum habet. Determinatur autem hunc in modum. Maneant descripta, & capiatur ΘK media proportionalis inter ipsas ΘE, ΘΓ; ac juncta HK producatur ad A. Hæc recta HA auferet rationem ΘA ad ΓK minorem quavis ratione, à rectâ qualibet aliâ per H ductâ, totique rectæ



EΓ occurrente, abscissâ. Patet etiam rectam BK abscindere rationem ZB ad KΓ, minorem quavis aliâ à rectis ipsi EΓ occurrentibus auferendâ. Juxta præscriptum autem horum limitum componendum est problema: quod quidem fiet duobus modis, ab utrâque scilicet parte rectæ BK, resectis segmentis ex utrisque EK, KΓ.

Cas. IV. Ducatur jam recta AB, ad modum quartum, abscindens rationem ZB ad KΓ datam. Ducatur recta per punctum Θ ipsi MZ parallela, ac ratio ZB ad ΘA data erit: ob datam autem rationem ZB ad KΓ, *data quoque est ratio* ΘA *ad* KΓ, adeoque recta AB positione datur, per regulas Casus tertii Loci sexti, qui non habet determinationem.

Compositio vero manifesta est ex jam descriptis.



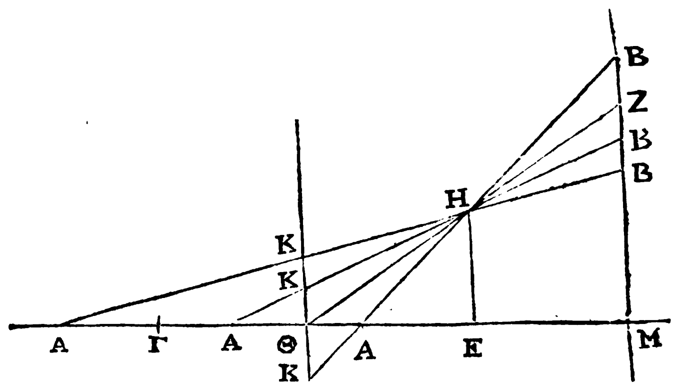
Cas. V. Ducatur, secundum modum quintum, recta AB auferens rationem BZ ad AΓ datam. Quoniam vero ratio BZ ad ΘK datur, ratio quoque ΘK ad AΓ data

data est; atque ipsa recta A B positione datur; juxta præcepta Casus quarti Loci sexti, qui quidem limites habet. Determinatur autem hujusmodi. Manentibus descriptis, capiatur Θ A media proportionalis inter Θ E, Θ Γ ac jungatur H A. Hæc recta H A auferet rationem Θ K ad Γ A, majorem quavis ratione, à qualibet rectâ per H ductâ, totique Γ A occurrente, ablatâ. Unde etiam recta A B auferet rationem B Z ad A Γ, majorem omni ratione, à rectâ quavis per H ductâ, totique rectæ Γ Ξ occurrente, resecandâ. Iisdem autem manentibus, Compositio problematis evidens est; quodque fieri possit duobus modis, ab utraque scilicet parte ipsius A B, rectis utrique A Θ, A Ξ occurrentibus.

LOCUS DECIMUS TERTIUS.

Cadat jam recta, per puncta H, Z ducta & producta, citra punctum Γ, ut Θ Z. Manifestum autem est rectas duci posse per punctum H, quæ occurrant rectis datis juxta quinque diversos modos sive Casus.

Cas. I. II. III. Ducantur autem rectæ A B, ad modum Casuum primi, & secundi, & tertii, quæ auferant rationes Z B ad Γ A datas. Agatur per punctum Θ, ipsi M Z parallela, recta Θ K. Jam quoniam rationes B Z ad Γ A dantur, atque etiam ratio B Z ad Θ K data est, dabuntur quoque rationes Θ K ad

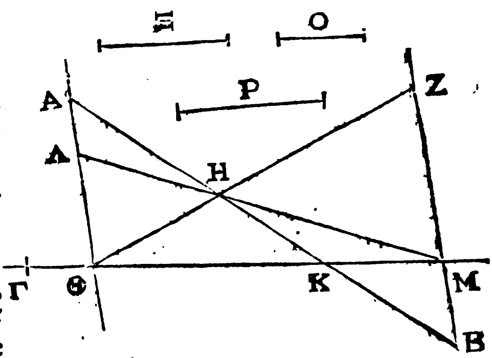


Γ A. Dantur autem positione rectæ duæ Θ K, A M; ac in recta Θ K sumitur punctum Θ, in ipsa vero A M punctum Γ. Punctum autem datum H est intra angulum K Θ M. Ducendæ sunt igitur rectæ quæ auferant rationes K Θ ad Γ A datas.

Dantur

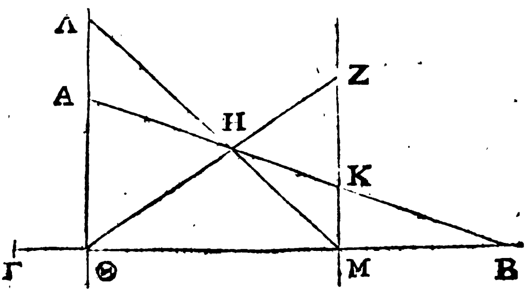
Dantur autem positione rectæ A B respectivè, nempe in primo Casu per Casum primum Loci quarti; in casu secundo, per secundum ejusdem; ac in tertio per tertium. Neque habent limites. Compositio autem manifesta est ex jam descriptis.

Cas. IV. Ducatur recta H B, juxta Casum quartum, auferens rationem Z B ad Γ K datam. Producatur ipsa H B ad Λ. Cumque Z B est ad Θ Λ in ratione datâ, ratio quoque Θ Λ ad K Γ data erit, adeoque recta Λ B positione datur, per Loci quarti Casum quartum. Constat autem rationem componendam majorem esse debere ratione Z M ad M Γ.



Componetur autem problema in hunc modum. Manentibus descriptis, proponatur ratio Ξ ad P major ratione Z M ad M Γ. Jungatur H M quæ producatur ad Λ, ac fiat ut Z H ad H Θ ita Ξ ad O: & ex æquo patebit rationem Λ Θ ad Γ M minorem esse ratione O ad P Ductâ igitur rectâ A B per punctum H, quæ auferat rationem A Θ ad Γ K æqualem rationi O ad P, occurret illa necessario rectæ Θ M; quia rectæ propiores puncto Θ, *in ipsâ* Θ M *sumptæ*, semper auferunt rationes majores quam à rectis remotioribus abscissæ. Constat itaque ex prius ostensis rectam A B solvere problema.

Cas. V. Ducatur jam recta A B, ad modum quintum, auferens rationem Z K ad Γ B datam. Datâ ratione Z K ad A Θ, dabitur quoque ratio A Θ ad B Γ, adeoque recta A B positione datur, eodem modo quo resolvimus Casum quartum. Oportet autem rationem componendam

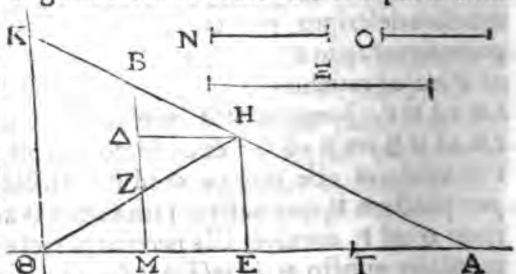


nendam minorem esse ratione ZM ad MΓ, ut patet per demonstrata in superiori Casu. Compositio autem manifesta est ex præmissis.

LOCUS DECIMUS QUARTUS.

Incidant jam rectæ duæ, ipsis ΓM, MZ parallelæ, ita ut earum altera HE fuerit citra punctum Γ; altera vero HΔ ultra punctum Z: ac manifestum est rectas per punctum H ductas disponi posse juxta quinque modos.

Cas. I. Ducatur recta AB, secundum Casum primum, auferens rationem ZB ad AΓ datam. Juncta HZ producatur ad Θ, & per punctum Θ ducatur recta ΘK ipsi MB parallela, rectæque AB in puncto K occurrens. Quoniam ratio ZB ad ΘK datur, ratio etiam ΘK ad ΓA data est. Dantur autem positione rectæ duæ AΘ, ΘK; in quarum alterâ ΘK sumitur punctum Θ, in altera vero AΘ punctum Γ; ac datum punctum H est intra angulum AΘK: recta vero HE per H ducta ipsi AΘ parallela cadit citra punctum Γ. Ducenda est igitur recta AK abscindens rationem ΘK ad AΓ datam. Hæc recta AK positione datur per Casum primum Loci *septimi Lib.* I. qui non habet limites.

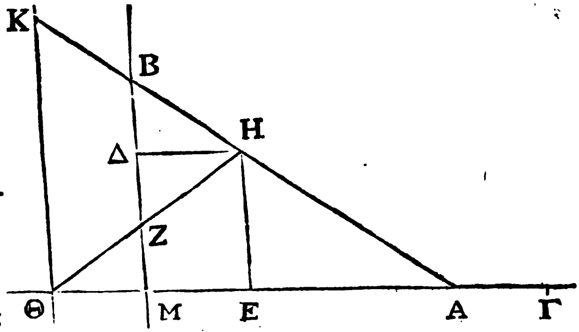


Componetur autem hujusmodi problema. Maneant descripta, ac sit ratio proposita sicut N ad O. Fiat ut ZH ad HΘ ita N ad Ξ; ac ducatur recta AHK, juxta Casum primum Loci *septimi*, quæ auferat rationem KΘ ad ΓA æqualem rationi Ξ ad O; ac manifestum est rectam ABK solvere problema.

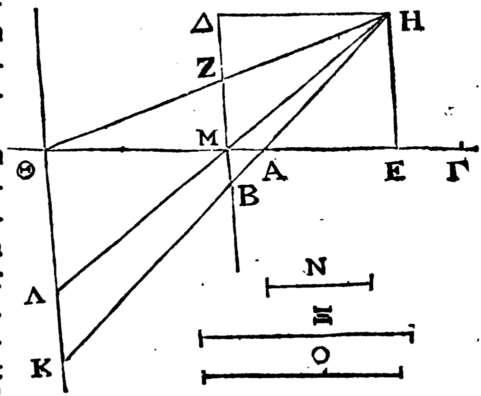
Cas. II. Ducatur jam recta AB, juxta Casum secundum, auferens rationem ZB ad AΓ datam. Producatur ipsa AB ad K: cumque ratio ZB ad ΘK data est, ratio etiam ΘK ad ΓA datur, adeoque recta AHK positione datur, per Casum secundum Loci *septimi*. Limitem autem habet, & ad hunc modum determinatur. Capiatur recta ΘA media proportionalis inter ipsas ΘΓ, ΘE; ac jungatur HA quæ producatur

ad

ad K. Dico rectam AK auferre rationem ΘK ad AΓ, minorem quavis ratione, à rectâ quacunque per H ductâ, totique EΓ occurrente, abscissâ. Hinc patet quo pacto componi possit problema, & quod fiat constructio duobus modis, ab utrâque parte ipsius AK, rectis scilicet ipsis ΓA, AE occurrentibus.



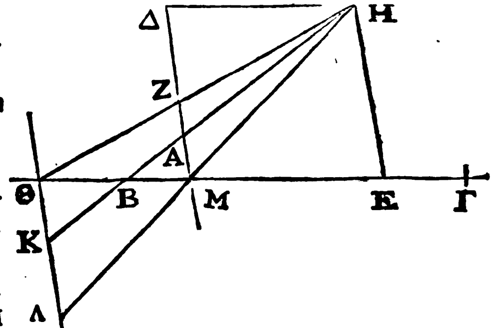
Cas. III. Ducatur recta HB, juxta Casum tertium, auferens rationem ZB ad ΓA datam: ac producatur ea ad punctum K. Quoniam ratio ZB ad KΘ datur, ratio etiam KΘ ad ΓA datur, adeoque recta HK positione datur, per Casum tertium Loci *septimi*. Constat autem rationem componendam majorem esse debere ratione ZM ad MΓ.



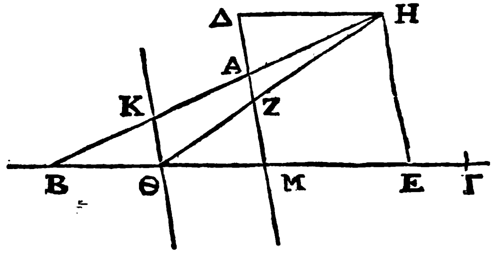
Componetur autem problema hujusmodi. Maneant descripta, & sit ratio data sicut N ad O major ratione ZM ad MΓ. Juncta HM producatur ad Λ, ac fiat ut ZH ad HΘ ita N ad Ξ; & patet ex æquo quod ratio ΛΘ ad ΓM minor erit ratione Ξ ad O: quare ductâ rectâ HK auferente rationem KΘ ad ΓA æqualem rationi Ξ ad O, occurret illa rectæ EM necessario. Etenim rectæ propiores puncto Θ auferunt semper rationes *minores* quam quæ abscinduntur à rectis remotioribus ab eodem; adeoque recta HK solvit problema.

Cas. IV. Ducatur jam recta HB, ad modum quartum, auferens rationem AZ ad BΓ datam, & producatur ea ad punctum K.

ctum K. Quoniam ratio A Z ad K Θ datur, data etiam est ratio K Θ ad B Γ; recta igitur H K positione datur, per solutionem Casus præcedentis. Oportet autem rationem componendam minorem esse ratione Z M ad M Γ. Componetur autem problema hujusmodi: maneant quæ prius, & sit ratio data sicut N ad O minor ratione Z M ad M Γ. Junge H M quæ producatur ad Λ, ac fiat omnino ut in Casu proxime præcedente.



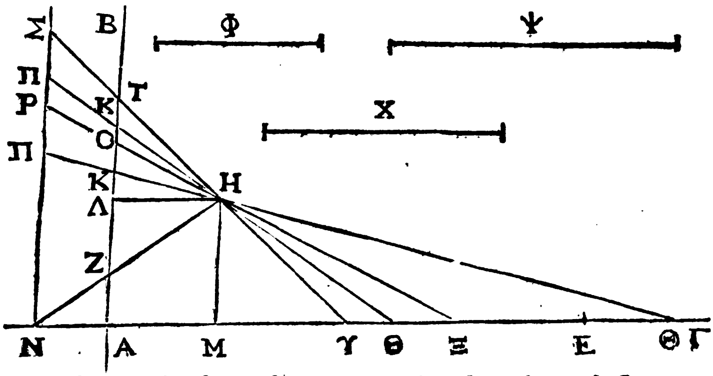
Cas. V. Ducatur denique recta H B, juxta Casum quintum, auferens rationem A Z ad B Γ datam. Quoniam ratio Z A ad B Γ datur, atque etiam ratio Z A ad Θ K data est, igitur ratio quoque Θ K ad B Γ datur: unde recta H B positione datur, per Casum quartum Loci *septimi*, qui quidem determinatus est. Limitatur autem in hunc modum. Manentibus descriptis, capiatur recta Θ B media proportionalis inter ipsas Θ Γ, Θ E, ac jungatur H B. Hæc recta H B auferet rationem Θ K ad B Γ majorem quavis ratione à rectis per H ductis, totique rectæ B Θ occurrentibus, abscissâ; adeoque ex præmissis constat rectam eandem Z B auferre rationem Z A ad B Γ majorem quam recta quævis alia per H ducta, ipsique Z Δ occurrens. Quod si componendum sit problema, manifestum est fieri posse duobus modis, ab utraque parte rectæ H B; sumptis nempe segmentis ab utrisque Z A, A Δ. Hæc autem omnia facile consequuntur ex nuper demonstratis.



ANAΛY-

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ.

Occurrant rectis duabus *positione datis* AB, AΓ rectæ duæ parallelæ HM, HΛ extra puncta data E & Z: ac patet rectas per H ductas disponi posse juxta quinque Casus. Auferant autem rectæ ΘK, juxta formas primam & secundam, rationes KZ ad EΘ æquales rationibus datis. Junctis punctis H, Z, producatur recta HZ ad N; ac per punctum N ducatur recta NΣ ipsi AB parallela. Producantur etiam rectæ ΘK ad Π. Quoniam autem utraque NH, ZH datur magnitudine, earundem etiam ratio data est. Sed NH est ad ZH ut NΠ ad KZ, adeoque ratio NΠ ad KZ datur: cumque ratio KZ ad EΘ data est, ipsa quoque ratio NΠ ad EΘ datur. Jam dantur positione rectæ duæ ΓN, NΣ; ac sumitur in recta ΓN punctum E, in recta vero NΣ punctum N; datum autem punctum H est intra angulum ΓNΣ; ac recta per H ducta ipsi AB parallela non transit per punctum E: ducenda est igitur recta ΘHKΠ auferens rationem NΠ ad ΘE æqualem rationi datæ. Ac manifesta est solutio. Casus autem primus absque limitibus est; secundus vero non item. Determinatur autem Casus



secundus, capiendo mediam proportionalem inter ipsas NM, NE, ut recta NΘ; ac jungendo rectam HΘ, quæ producatur ad Π. Ratio enim NΠ ad EΘ, in rectis NΣ, EM, erit ratio minima. Dico quoque rationem KZ ad EΘ, in rectis AB, EM, esse rationem minimam. Educatur enim è puncto H recta alia ΞHP. Jam quoniam ratio NΠ ad EΘ minor est ratione NP ad EΞ, permutando erit ratio NΠ ad NP minor ratione EΘ ad EΞ. Sed NΠ est ad NP ut ZK ad ZO; quare ratio KZ ad

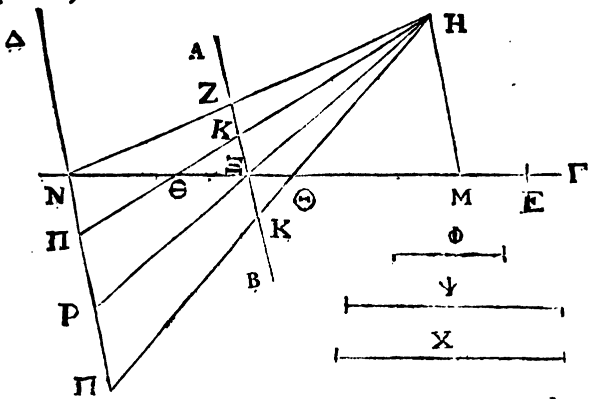
ZO minor erit ratione EΘ ad EΞ; unde permutando ratio KZ ad EΘ minor erit ratione ZO ad EΞ. Ratio igitur KZ ad EΘ minima est in rectis AB, EM.

Componetur autem hunc in modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut Φ ad X. Hæc ratio vel æqualis erit rationi KZ ad EΘ, vel minor erit eâ, vel major. Si vero ratio Φ ad X æqualis fuerit rationi KZ ad EΘ sola recta HΠ solvet problema. Si minor fuerit eâ, problema impossibile est. Quod si major fuerit eâ, tum construi potest duobus modis. Ponatur jam rationem Φ ad X majorem esse ratione KZ ad EΘ. Fiat ut ZH ad HN ita Φ ad Ψ, *ac ratio* Ψ *ad* X major erit ratione NΠ ad EΘ; adeoque possibile erit ducere *per* punctum H rectam abscindentem rationem Ψ ad X, idque duobus modis, ab utraque parte ipsius HΠ. Ducantur igitur rectæ tales ΞHP, THΣ: dico utramque rectam satisfacere problemati. Quoniam enim HZ est ad HN sicut ZT ad NΣ, atque etiam ut Φ ad Ψ; erit quoque ZT ad NΣ sicut Φ ad Ψ. Sed NΣ est ad ET sicut Ψ ad X, adeoque ex æquo erit ZT ad ET sicut Φ ad X. Recta igitur THΣT satisfacit problemati. *Ac pari argumento recta altera* ΞHOP *tantundem præstat.*

Auferat jam recta HΘK, juxta Casus tertium & quartum, rationes KZ ad EΘ æquales rationibus datis. Juncta HZ producatur ad N, & per punctum N ducatur recta NΠ, *ipsi* AB parallela: prolongetur etiam HKΘ ad Π. Quoniam vero utraque recta NH, HZ datur magnitudine, ratio earundem datur: cum HN est ad HZ ut ΠN ad KZ, ratio etiam ΠN ad KZ datur. Ob datam autem rationem KZ ad EΘ, ratio quoque NΠ ad EΘ datur. Dantur igitur positione duæ rectæ in eodem plano, nempe ΓN, ΛΠ; ac in recta ΓN sumitur punctum E, in ipsa vero ΔNΠ punctum N; punctum autem datum H, est intra angulum ΓNΔ; ac recta quæ per H ducitur ipsi NΠ parallela cadit citra punctum E. Ducenda est itaque recta HΘΠ per punctum H, auferens rationem NΠ ad EΘ æqualem rationi datæ. Manifestum est autem quod, in Casu tertio, ratio KZ ad ZΞ major est ratione ΘE ad EΞ; quodque, in Casu quarto, ratio ista minor est eâ. Permutando autem, ratio KZ ad ΘE, in Casu tertio, major erit ratione ZΞ ad EΞ; ut in Casu quarto, minor erit eâ. Sed ratio KZ ad EΘ æqualis est rationi datæ; adeoque oportet ra-

tionem

tionem datam majorem esse, in tertio Casu; minorem vero in quarto, ratione Z Ξ ad Ξ E.

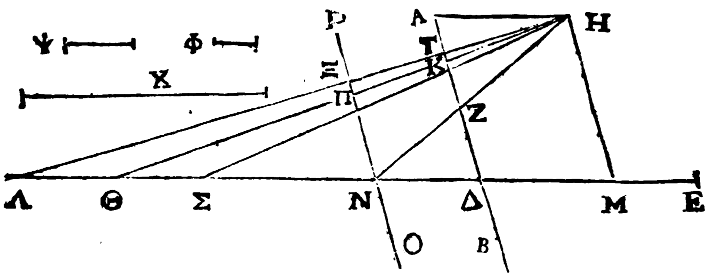


Componetur autem problema hujusmodi. Maneant descripta, ac jungatur H Ξ, quæ producatur ad P. Esto ratio data sicut Φ ad X, in tertio Casu major; in quarto minor ratione Z Ξ ad Ξ E. Fiat ut H Z ad H N ita Φ ad Ψ: ac ratio Ψ ad X in Casu tertio, major erit ratione P N ad Ξ E; at in Casu quarto minor erit eâ. Quocirca recta H Ξ P auferet rationem in Casu tertio, minimam; ut in quarto, maximam. Si itaque jubeatur ducere per punctum H rectam auferentem rationem Ψ ad X; vel erit recta sic ducta, juxta modum tertium, occurrens ipsi E Ξ; vel juxta modum quartum, cadens ab altera parte puncti Ξ. Ductâ autem rectâ H Π auferente rationem N Π ad E Θ æqualem rationi Ψ ad X, ratio K Z ad E Θ æqualis erit rationi Φ ad X: adeoque recta illa H Π satisfacit problemati.

Auferat autem recta H K Θ, juxta modum quintum, rationem K Z ad E Θ æqualem rationi datæ. Jungatur H Z ac producatur ea ad N. Per N agatur recta O P ipsi A B parallela. Jam quoniam utraque recta H N, H Z magnitudine datur, ratio etiam N H ad H Z datur. Sed N H est ad H Z ut N Π ad K Z. Ob datam itaque rationem K Z ad E Θ, ratio Π N ad E Θ data erit. Jam sunt in eodem plano rectæ duæ positione datæ, nempe E N, O P; ac sumitur in recta E N punctum E, ac in ipsâ O P punctum N; punctum autem datum H est intra angulum E N P; recta vero per H ducta ipsi A B parallela cadit citra punctum E. Ducenda est igitur recta Θ H Π per

punctum

punctum H, quæ auferat rationem ΠN ad ΞΘ æqualem rationi datæ, per ea quæ demonstrantur in præmissis. Determinatur autem faciendo NΘ mediam proportionalem inter ipsas MN, NE, ac jungendo rectam HΘ auferentem à rectis OP, EN segmenta ΠN, ΞΘ habentia inter se rationem maximam. Dico eandem rectam auferre à rectis AB, EN rationem KZ ad EΘ maximam. Jungatur enim recta alia HΛ, ac ratio ΠN ad ΞΘ major erit ratione ΞN ad EΛ. Permutando autem ratio ΠN ad ΞN major erit ratione ΞΘ ad EΛ. Sed ΠN est ad ΞN sicut KZ ad ZT; adeoque ratio KZ ad ZT major est ratione EΘ ad EΛ: unde permutando, ratio KZ ad ΘE major erit ratione ZT ad EΛ. Quapropter etiam in rectis AB, EN ratio KZ ad EΘ maxima est.



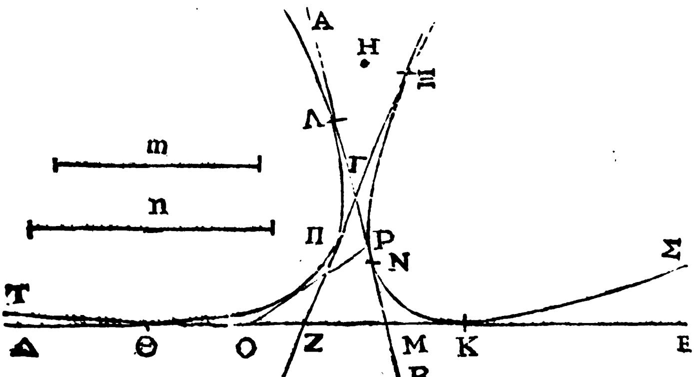
Componetur autem problema ad hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut Φ ad X, quæ vel æqualis erit rationi KZ ad EΘ, vel major erit eâ, vel minor. Si æqualis fuerit ei, sola recta HΘ solvet problema. Si vero major fuerit eâ, problema impossibile est. Quod si minor fuerit, componetur duobus modis. Sit enim ratio Φ ad X *minor ratione* KZ *ad* EΘ; *ac fiat ut* HZ *ad* HN *ita* Φ *ad* Ψ; *ac manifestum est* rationem Ψ ad X minorem esse ratione ΠN ad ΞΘ. Ratio autem ΠN ad ΘE est ratio maxima, adeoque possibile erit ducere per punctum H rectam auferentem rationem Ψ ad X, idque duobus modis, ab utrâque parte ipsius HΘ. Ductis autem rectis HΛ, HΣ, *quæ auferant rationes æquales rationi* Ψ *ad* X, *dico ipsas solvere problema. Etenim* ZH *est ad* HN, *hoc est* ZT *ad* ΞN, *ut* Φ *ad* Ψ; *ac* ΞN *est ad* EΛ *sicut* Ψ *ad* X; *adeoque ex æquo erit* ZT *ad* EΛ ut Φ ad X. Recta itaque HΛ solvit problema; & pari modo probabitur rectam HΣ idem præstare.

SCHOLION.

SCHOLION.

Ex numero Locorum *&* Casuum, *utrique libro à* Pappo *assignato, satis superque liquet genuinum hoc esse* Apollonii *opus: quod licet, ex Versione, utpote Arabicâ mendosâ, traductum, plurime à nativâ elegantiâ discedere existimetur; Literatis omnibus, præsertim Geometris, non ingratum esse confido. Ne tanta* Casuum *multitudine Lectoris animus turbaretur, non abs re fore arbitror, rem totam ob oculos ponere; descriptoque* Loco *quem tangunt rectæ omnes datam rationem à datis rectis abscindentes, puncti* H *situm in singulis expendere.*

Sint rectæ duæ AB, ΔE *positione datæ, sese intersecantes in puncto* M; *ac in* AB *sumatur punctum* Γ, *in* ΔE *vero punctum* Z: *describere oportet Curvas illas quas tangant rectæ omnes, auferentes à rectis datis segmenta punctis* Γ, Z *adjacentia, quæ sint in ratione datâ; puta ut* m *ad* n. *Fiat ut* m *ad* n *ita* ΓM *ad rectam aliam, utrinque à puncto* Z *in rectâ* ΔE *collocandam, ut* ZΘ, ZK. *Et in eadem ratione* m *ad* n *capiatur ad* ZM *recta, æqualis ipsi* ΓΛ *vel* ΓN, *utrinque à puncto* Γ *in recta* AB *ponenda. Quoniam vero* MΓ *est ad* ΘZ *sive*



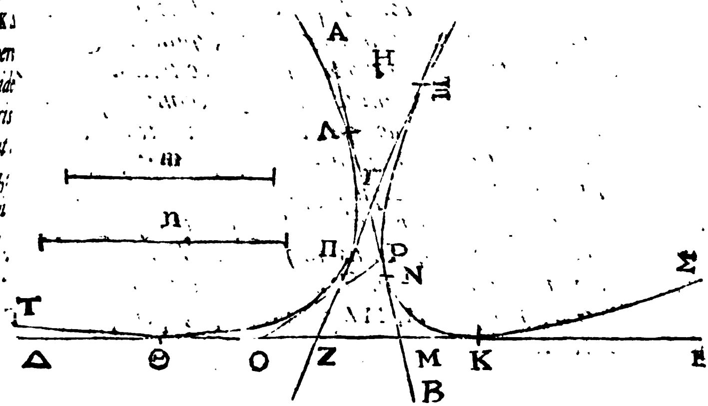
ZK *ut* m *ad* n, *atque etiam* ΓΛ *vel* ΓN *est ad* ZM *in eadem ratione; erit componendo* MΛ *ad* ΘM, *ac dividendo* MN *ad* MK *in eadem ratione, sive ut* m *ad* n. *Quinetiam si auferatur ab ipsâ* ΓM *recta aliqua ut* ΓP, *ac simul addatur ipsi* ZM *recta* ZO, *quæ fuerit ad* ΓP *sicut* n *ad* m; *dividendo* MP *erit ad* ΘO *in eadem ratione ac* m *ad* n; *ac vicissim, si augeatur recta* ΓM *ac minuatur ipsa* ZM; *componendo erunt* *etiam ſegmenta in eadem ratione. Ac facili negotio idem rectis* ΓΜ, ΖΚ *demonſtrabitur. Hinc ſi loco Parabolarum conjugatarum, quas in Scholio ad finem Lib. I. adhibuimus, deſcribantur Parabolæ duæ, quarum altera contingat rectas* ΔΕ *in punctis* Λ, Θ; *altera vero in punctis* Κ *ac* Ν: *patet, per ibidem demonſtrata, rectas omnes Parabolam* ΛΠΘΤ *contingentes abſcindere è rectis* ΜΛ, ΘΕ; *uti & è rectis* ΜΒ, ΘΔ, *rationes æquales rationi* m *ad* n. *Tangentes vero omnes alterius Parabolæ* ΣΚΝΞ *auferent à rectis* ΜΛ, ΚΔ; *ac ab ipſis* ΜΒ, ΚΕ, *eaſdem rationes* m *ad* n. *Quoniam vero* ΓΜ *eſt ad* ΖΘ *ac* ΖΚ *ſicut* m *ad* n; *componendo aut dividendo, pro genio Caſûs, ſegmenta omnia à Tangentibus prioris Parabolæ è rectis* ΓΛ, ΖΕ; *vel ex ipſis* ΓΒ, ΖΔ *abſciſſa: aut à Tangentibus poſterioris, ex ipſis* ΓΛ, ΖΔ, *vel* ΓΒ, ΖΕ *ablata, erunt in eadem ratione. Patet etiam rectam* ΖΓΞ, *puncta data* Γ, Ζ *connectentem, contingere utramque Parabolam, puta in punctis* Π *&* Ξ; *quia recta hæc aufert rationem* ΜΓ *ad* ΖΘ *vel* ΖΚ *æqualem rationi* m *ad* n.

Dantur igitur tres Tangentes utrique Parabolæ communes, ac in earum altera puncta contactûs utriuſque Curvæ, ut Θ *&* Κ: *unde levi opere* Locus *ſive Curvæ ipſæ deſcribi poſſunt, per ea quæ ad finem Scholii prædicti præcepimus. Datis autem Curvis illis, manifeſtum eſt, ſi reperiatur punctum datum* Η *in ipſis punctis contactuum* Π *&* Ξ, *unico tantum modo componi poſſe problema: ſi fuerit punctum* Η *intra ambitum alterutrius Parabolæ, vel ſi tangat ipſam rectam* ΖΓΞ *productam, non niſi duas Tangentes duci poſſe: adeoque duobus tantum modis componi problema. Si vero punctum* Η *tangat ipſas Parabolas, tribus modis efficietur Conſtructio. Quod ſi ponatur punctum datum* Η *extra Curvas, nec in rectâ* ΖΓ, *ubicunque fuerit, quatuor Tangentes duci poſſunt, ad utramque Parabolam binæ, unde etiam juxta quatuor modos componendum eſt problema.*

Obſervandum tamen eſt quod, ſi ratio m *ad* n *minor fuerit ratione* ΓΜ *ad* ΖΜ, *punctum* Κ *cadet ad eaſdem partes cum puncto* Ζ; *ac Parabola altera* ΞΝΚΣ *non in angulo* ΛΜΔ, *ſed in angulo* ΕΜΒ, *deſcribenda erit. At ſi ratio auferenda æqualis fuerit rationi* ΓΜ *ad* ΖΜ, *coincidente puncto* Κ *cum puncto* Μ, *recta* ΗΜ *ſatisfaciet problemati; atque etiam recta alia, ipſi* ΓΖ *parallela, per punctum* Η *ducta.*

Hinc

Hinc manuducimur ad aliam & à constructione Apollonii *diversissimam problematis effectionem, nec minus facilem. Nam loco puncti* Z *in rectâ* ΔE *sumantur puncta* Θ *&* K, *æqualiter à* Z *utrinque distantia; ac loco puncti* Γ *in recta* AB *sumatur punctum concursûs* M: *ubicunq; fuerit punctum datum* H, *manifestum est resolvi posse problema, per Casus quosdam quatuor Locorum ultimorum Libri primi. Nec ulteriori explicatione*



opus est, utpote in re satis evidente; cum scilicet segmenta omnia in rectis positione datis, punctis Θ, M *adjacentia, sint in eâdem ratione cum segmentis ab eâdem rectâ abscissis, ac punctis* Γ, Z *adjacentibus; hoc est, in ratione* ΓM *ad* ZΘ *vel* ZK. *Exempli gratiâ, ductâ rectâ quâvis* PO *auferente à positione datis* AB, ΔE *segmenta* MP *&* ΘO, *punctis* M *&* Θ *adjacentia, quæ sint in ratione datâ sive ut* ΓM *ad* ZΘ. *Dico eandem rectam* PO *abscindere etiam segmenta* ΓP *ad* ZO, *punctis* Γ, Z *adjacentia, eandem rationem inter se habentia quam habet* ΓM *ad* ZΘ. *Etenim si* ΓM *sit ad* ZΘ *sicut* m *ad* n, *ac fiat etiam* MP *ad* ΘO *in eadem ratione datâ (per Casus* II^{dos} *Loci quarti vel septimi Lib.* I.) *erit etiam dividendo,* ΓM—MP, *sive* ΓP, *ad* ZΘ—ΘO, *hoc est ad* ZO, *ut* m *ad* n: *recta igitur* PO *satisfacit problemati.*

Per totum autem Librum secundum fere, duplici Compositione effici potest propositum, etiam juxta methodum Apollonii, *tametsi hoc reticeat; indifferenter enim duci potest recta parallela per punctum* H *ad hanc vel illam è rectis duabus positione datis: adeo ut pro diversitate situs punctorum*

ctorum Γ & Z, ad alia Loca aliosque Casus idem problema plerumque referri possit: quod quidem innuisse sufficiat. Quinetiam Casus Loci secundi Lib. II. ad modum Loci octavi & noni, paulo simplicius (ut videtur) & resolvuntur & determinantur.

Porro Capitula hujus Libri τόπους sive Loca inscripsit Apollonius, sensu omnino Geometrico, ad indigitandum Locum sive situm puncti H in singulis diversum, respectu trianguli ZΓM, in plano infinito circumjecto. Loca autem hæc sunt genere diversissima: nam Locus primus, quartus, quintus & decimus occupant spatia summo modo infinita, ac totum planum complentia, si adjeceris Locum tertium & decimum quartum inter parallelas intercepta, ac quoad unam tantum dimensionem infinita. Locus Decimus-tertius occupat solum triangulum ZΓM; eidemque æquale spatium duodecimus. Secundus, sextus, & nonus punctum H in rectis infinitis collocant; ut octavus & undecimus in finitis. Denique Locus septimus non nisi unicum punctum est, in concursu scilicet duarum rectarum ipsis ΓM, MZ parallelarum, per puncta Γ & Z ductarum.

APOL-

APOLLONII PERGÆI

De Sectione Spatii,

SIVE

ΠΕΡΙ ΧΩΡΙΟΥ ΑΠΟΤΟΜΗΣ,

LIBER PRIOR RESTITUTUS.

QUÆNAM fuerit Analysis Veterum, è specimine librorum præcedentium abunde constat. Lectoribus autem nonnullis nimius fortasse videatur auctor noster, dum in tot Casus diversos problema de Sectione Rationis distribui voluit; singulorum Resolutionem ac Compositionem fuse docens. Veniam tamen indulgebit, qui animadverterit hos libros à *Pappo* immediate post *Euclidis Data* describi, quasi Analyseos studiosis apprime necessarios, ac in exemplum plani problematis per omnes casus plenissime soluti designatos: nec tam Mathematicorum peritis scriptos, quam in gratiam eorum qui velint ἀναλαμβάνειν ἐν γραμμαῖς δύναμιν εὑρετικήν, ut ait *Pappus*. Agnitâ autem hujus Analyseos præstantia, *Apollonii* opus de Sectione Spatii sive rectanguli, jam olim deperditum, restaurare aggressus sum; nec irrito conamine. Manifestum enim est ex descriptione *Pappi*, hos libros eodem omnino subdivisionis ordine, quoad *Loca* & *Casus*, distributos fuisse. Exactâ autem resolutione comperi problemata duo περὶ λόγου ἀποτομῆς, & περὶ χωρίου ἀποτομῆς, conjunctissima ac quasi germana esse; levique facta mutatione per omnia quasi coincidere. Quocirca solutionem ejus subjungere visum est, inventam ac demonstratam ad exemplum præcedentium; nec multum, ut opinor, ab ipsius *Apollonii* opere (si unquam lucem viderit) discrepaturam: nisi quod in gratiam Lectorum, quibus brevitas magis cordi est, in compendium, quantum fieri licuit, redacta sit. Hoc autem magna ex parte fit, observatis in omni Casu, ad puncta correspondentia designanda, iisdem notis Alphabeticis.

PROPOSITIO GENERALIS.

Sint duæ rectæ infinitæ in eodem plano positione datæ, ut Α Β, Δ Ε; vel parallelæ inter se, vel occurrentes invicem in puncto Μ. Sumatur autem in rectâ Α Β punctum Γ, in ipsâ vero Δ Ε punctum Ζ. Ducenda est recta, per punctum quodvis datum Η, non contingens positione datas, quæ auferat ab ipsis segmenta Γ Κ, Ζ Λ, rectangulum *dato* (quod semper Ξ appellare licet) æquale continentia.

Sint autem imprimis rectæ duæ positione datæ invicem parallelæ; ac punctum datum Η cadet necessario vel intra vel extra parallelas datas.

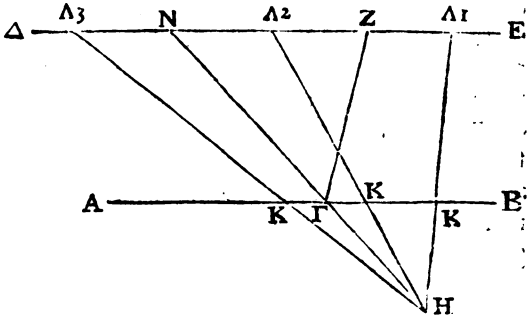
LOCUS PRIMUS.

Cadat primo punctum Η extra parallelas datas: ac manifestum est problema effici posse juxta tres modos, segmentis scilicet ab ipsis Γ Β, Ζ Ε, vel ab ipsis Γ Β, Ζ Δ, vel denique ab ipsis Α Γ, Ζ Δ auferendis.

In unoquoque horum Casuum eadem plane est Analysis, eademque Compositio. Ponatur itaque in quolibet casu rectam Η Κ Λ abscindere segmenta Γ Κ, Ζ Λ rectangulum æquale rectangulo dato Ξ comprehendentia. Junctis punctis datis Η, Γ, recta Η Γ data erit positione, quæ producatur ad occursum cum positione datâ Δ Ε; adeoque punctum occursus Ν datur, ipsaque recta Ν Ζ: ob data autem tria puncta Η, Γ, Ν ratio ipsius Η Γ ad Η Ν data erit. Verum ratio Γ Κ ad Ν Λ eadem est ac ratio Η Γ ad Η Ν; quare ratio Γ Κ ad Ν Λ etiam data est: unde & ratio rectanguli Γ Κ in Ζ Λ ad rectangulum Ν Λ *in* Ζ Λ datur. Sed rectangulum Γ Κ in Ζ Λ datum est; quare rectangulum Ζ Λ in Ν Λ quoque datur, applicandum ad rectam datam Ν Ζ, excedens quadrato in casu primo ac tertio, vel deficiens quadrato in secundo; unde (per 58^{um} & 59^{um} *Datorum Euclidis*) dantur puncta applicationis Λ; iisque datis, rectæ etiam Η Κ Λ dantur positione.

Ac

Ac manifestum est casus primum & tertium nullis limitibus obnoxios esse, sed rectas remotiores à punctis datis Γ, Z semper auferre Spatia majora, quam quæ iisdem propiores sunt. Patet quoque rectam Z Λ, in primo Casu, semper æquari ipsi N Λ in tertio. Secundus autem casus determinatur, quia rectangulum N Λ in Λ Z, quod sit ad rectangulum Ξ ut H N ad H Γ, applicandum est ad rectam N Z deficiens quadrato. Applicatio autem ista fieri nequit quoties rectangulum illud majus fuerit quadrato



dimidii ipsius N Z. Fiet autem modo singulari, si punctum Λ reperiatur in medio ipsius N Z; adeoque rectangulum maximum, juxta hunc casum auferendum, erit ad quadratum dimidii ipsius N Z, sicut Γ K ad N Λ sive ut H Γ ad H N. Hoc si majus fuerit spatium datum, problema propositum impossible est. Quod si minus fuerit eo, patet applicationem fieri posse dupliciter, adeoque duobus modis componi problema, rectis nempe æqualiter à punctis N, Z utrinque distantibus.

Compositio autem manifesta est. Nam si producatur recta H Γ ad N, ac fiat ut H Γ ad H N ita rectangulum datum Ξ ad aliud O; dein utrinque applicetur ad rectam datam N Z rectangulum illud O excedens quadrato; atque, si fieri potest, etiam deficiens quadrato: habebuntur omnia puncta quæsita Λ in punctis applicationum, ductæque omnes rectæ H K Λ satisfacient problemati. Quoniam enim rectangulum N Λ in Λ Z æquale est rectangulo O, ac rectangulum O est ad rectangulum Ξ ut N Λ ad Γ K; erit rectangulum Γ K in Λ Z æquale rectangulo Ξ. Rectæ igitur omnes H K Λ solvunt problema. Q.E.D.

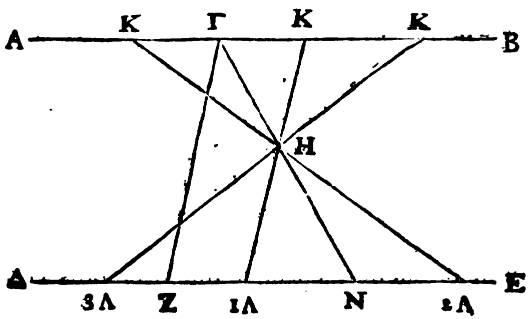
Problema igitur hoc semper effici potest dupliciter juxta Casus primum & tertium; atque etiam dupliciter, juxta secundum, modo rectangulum O minus fuerit quadrato ex dimidio ipsius N Z. Quod si eidem æquale fuerit, fiet modo singulari: si vero majus fuerit eo impossibilis erit Constructio.

LOCUS

LOCUS SECUNDUS.

Sit jam punctum datum Η intra parallelas datas: patet tribus modis duci posse rectas, quæ segmenta auferant ΓΚ & ΖΛ datum rectangulum Ξ continentia: vel enim ex ipsis ΓΒ, ΖΕ; vel ex ipsis ΓΑ, ΖΕ; vel tertio ex ipsis ΓΒ, ΖΔ resecta erunt.

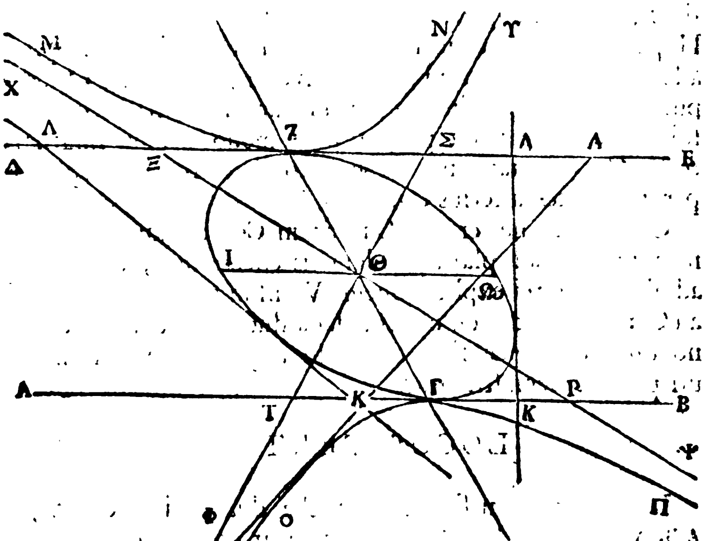
In omni autem Casu, mutatis mutandis, eadem est resolutio cum præcedente. Junctâ enim & productâ rectâ ΓΗ ad Ν, recta ΗΝ dabitur magnitudine & positione; ac ob data puncta Γ, Η, Ν, ratio ipsius ΓΗ ad ΗΝ, hoc est, ΓΚ ad ΛΝ, (ob similia triangula) data erit. Sed ut ΓΚ est ad ΛΝ *ita* rectangulum ΓΚ in ΛΖ ad rectangulum ΛΝ in ΛΖ. Datum autem est rectangulum ΓΚ in ΛΖ; quare datur quoque rectangulum ΝΛ in ΛΖ, applicandum ad rectam datam ΝΖ deficiens quadrato, in primo Casu; excedens vero quadrato in secundo ac tertio: qui quidem Casus proinde semper possibiles sunt, ac rectæ propiores punctis Γ, Ζ, auferunt semper Spatia minora quam remotiores ab iisdem.



Primus autem Casus Dioristicus est, neque applicari potest rectangulum deficiens quadrato ad rectam ΝΖ, quod majus fuerit quadrato dimidii ipsius ΝΖ. Rectangulum igitur maximum, quod abscindi potest juxta Casum primum, erit ad quadratum dimidii ipsius ΝΖ, ut ΓΗ ad ΗΝ. Hoc si majus fuerit rectangulum propositum Ξ, non componetur problema, ut impossibile. Si æquale fuerit ei, singulari tantum modo fiet. Si vero minus fuerit eo, dupliciter construi potest problema, factâ ad utramque partem applicatione.

Compositio autem manifesta est, eademque omnino cum illâ quam in præcedente Loco ostendimus. Fiat enim ut ΓΗ ad ΗΝ ita rectangulum datum Ξ ad aliud Ο, quod applicetur ad rectam ΝΖ, deficiens quadrato in primo Casu, excedens vero in in secundo ac tertio. Duobus itaque semper fieri potest modis; atque insuper duobus, quoties rectangulum O minus fuerit quadrato ex dimidio ipsius N Z; vel modo singulari, si eidem æquale fuerit, hoc est omnino tribus.

Cæterum ut in Sectione Rationis Scholia addidimus pro exhibendis Locis Geometricis, quæ tangant rectæ omnes rem propositam præstantes; ita in Sectione Spatii Lectori curioso non injucundum erit nec inutile eadem commonstrari, locaque designari quæ tangant rectæ omnes rectangulum datum auferentes. Hoc autem fit ope Propositionis 42[dæ] Lib. III. *Conicorum Apollonii* nostri, quâ demonstratur, *Si rectæ tres contingant Ellipsin vel Hyperbolam, quarum duæ parallelæ sint & dentur positione; quadratum semidiametri Sectionis his duabus parallelæ æquale esse rectangulo segmentorum inter puncta contactuum & Tangentem tertiam interjectorum.* Idemque demonstrationibus propriis Illustrissimus *Newtonus* in *Principiis*, & Cl. *Hireus* in *Conicis* stabiliverunt. Hoc autem posito, si describatur Ellipsis Γ I Z Ω cujus diameter sit recta Γ Z, jungens puncta



Γ, Z in rectis positione datis sumpta; in ejusque medio centrum Θ; eidem autem Conjugata diameter sit recta I Θ Ω ipsi A B, Δ E parallela, quæ possit quadruplum rectanguli dati

seg-

segmentorum auferendorum: dico omnes Tangentes hujus Ellipseos abscindere segmenta ΓΚ, ΖΛ rectangulum æquale dato comprehendentia; si nempe ab eodem latere rectæ ΖΓ sumenda sint, ut in Casu I & III Loci primi, & in primo secundi. Quod si in contrarias partes segmenta auferenda sint, ut in II^do^ primi, & II^do^ & III^o^ secundi; describantur Hyperbolæ oppositæ ΜΖΝ, ΟΓΠ, easdem cum Ellipsi diametros habentes: ac rectæ omnes Curvas illas Hyperbolicas contingentes abscindent etiam segmenta rectangulum æquale rectangulo dato continentia. Quæ omnia ex ipsâ *Apollonii* propositione prædictâ satis patent. Jam fiant ΖΞ, ΖΣ & ΓΡ, ΓΤ æquales semidiametro conjugatæ ΘΙ; ac rectæ ΣΘΤ, ΞΘΡ in infinitum productæ, ut ΥΘΦ, ΧΘΨ, erunt oppositarum Hyperbolarum Asymptoti. Datis autem Asymptotis & punctis Γ, Ζ paratissima est Curvarum descriptio.

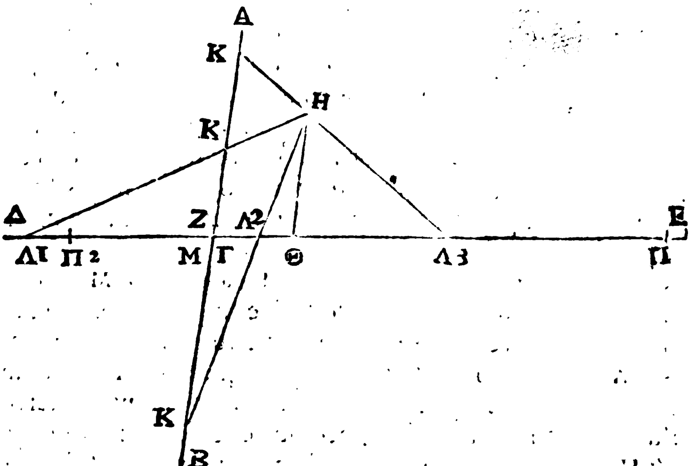
Hinc manifestum est problema quaternas habere solutiones, si fuerit punctum datum Η extra ambitum Ellipseos vel oppositarum Hyperbolarum. Si vero punctum Η reperiatur intra earundem Curvarum partes concavas, non nisi binæ duci possunt Tangentes ad Ellipsin, si fuerit intra ambitum Hyperbolarum; vel ad Hyperbolas, si fuerit intra Ellipsin: adeoque duobus tantum modis solvetur problema. Quod si punctum Η tangat alteram harum Curvarum, trium omnino solutionum capax est propositum: modo nempe singulari, rectâ Curvam tangente in puncto dato Η; ac dupliciter per Tangentes alterius Curvæ.

Cave tamen ne credas Curvarum Conicarum descriptionem præcipi ad plani problematis effectionem, sed tantum ad uberiorem rei explicationem. Vicissim autem Tangentibus ad Curvas Conicas de punctis datis ducendis, etiamsi Curvæ nondum descriptæ sint, converso argumento via sternitur; uti posthac demostrabitur.

LOCUS TERTIUS.

Intersecent jam se mutuo rectæ duæ positione datæ, ut ΑΒ, ΔΕ, in puncto Μ, ac concipiatur utrumque punctum Γ & Ζ coalescere in commune punctum occursus Μ: Oportet ducere, per punctum datum Η, rectam quæ auferat segmenta ΜΚ, ΜΛ rectangulum æquale rectangulo dato comprehendentia. Hoc autem fieri potest juxta tres Casus; vel enim abscissum erit rectangulum ex ipsis ΛΜ, ΜΔ; vel ex ipsis ΒΜ, ΜΕ; vel tertio ab ipsis ΛΜ, ΜΕ.

Age rectam ΗΘ per punctum Η ipsi ΑΒ parallelam; ac punctum Θ atque ipsæ ΗΘ, ΘΜ dabuntur tam magnitudine quam positione. Applicetur ad rectam ΘΗ rectangulum datum; & latitudo inde orta data erit: sitque ea recta ΜΠ utrinque ponenda. Quoniam vero rectangulum ΗΘ in ΜΠ æquale est rectangulo ΜΚ in ΜΛ, erit ΗΘ ad ΜΚ, hoc est ΘΛ ad ΛΜ, ut ΛΜ ad ΜΠ: quare, dividendo in primo & tertio Casu, & componendo in secundo, ΘΜ erit ad ΜΛ sicut ΛΠ ad ΠΜ; adeoque rectangulum ΘΜ in ΜΠ æquale erit rectangulo ΜΛ in ΛΠ. Sed rectangulum ΘΜ in ΜΠ datum est, ob utramque rectam datam; datum est igitur rect-



angulum ΜΛ in ΛΠ, applicandum ad rectam datam ΜΠ, excedens quadrato in primo & secundo Casu; deficiens vero quadrato in tertio, qui proinde Diorismum habet. Rectangulum autem minimum aufertur, quoties rectangulum ΘΜ in ΜΠ æquale est quadrato dimidii ipsius ΜΠ, sive cum ΜΠ æquale est quater ipsi ΜΘ. Cumq; ΜΠ in ΗΘ semper æquale sit rectangulo dato, rectangulum illud minimum æquale erit quater rectangulo ΗΘ in ΘΜ.

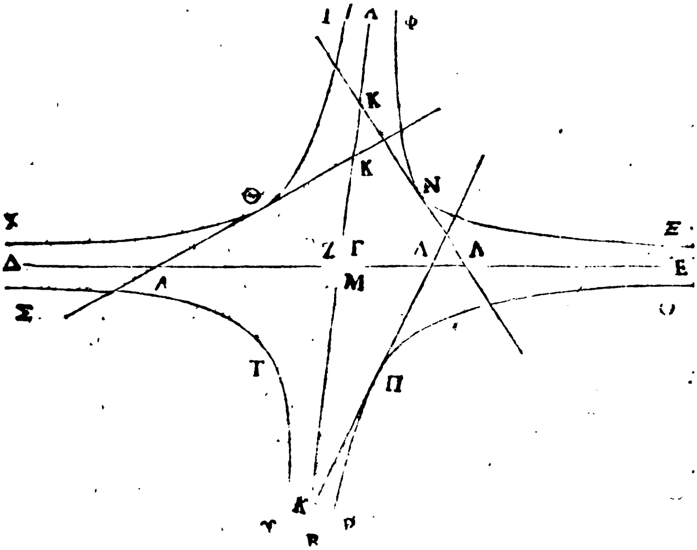
Componetur autem problema, si manente recta parallelâ ΗΘ, eidem applicetur rectangulum auferendum Ξ; ac fiat ΜΠ, ponenda ab utrâque parte puncti M, æqualis latitudini quæ resultat. Deinde ipsi MΠ applicetur rectangulum datum MΠ in ΘM excedens quadrato, in Casu primo & secundo; deficiens vero in tertio: & sint puncta applicationis Λ2, Λ3. Ducantur rectæ HKΛ. Dico illas satisfacere problemati. Quoniam enim rectangulum MΛ in ΛΠ æquale est rectangulo ΘM in MΠ, erit ΘM ad MΛ ut ΠΛ ad MΠ; ac componendo in primo & secundo Casu, vel dividendo in tertio, erit ΘΛ ad ΛM sicut ΛM ad MΠ. Sed ΘΛ est ad ΛM ut HΘ ad KM, quare HΘ est ad KM sicut ΛM ad MΠ. Est igitur rectangulum HΘ in MΠ æquale rectangulo KM in MΛ. Sed rectangulum ΘH in MΠ æquale est rectangulo dato Ξ, *adeoque &* rectangulum KM in MΛ; rectæ igitur HKΛ solvunt problema. Q. E. D.

In Casu autem tertio demonstratum est applicationem fieri non posse, si rectangulum datum minus fuerit quater rectangulo HΘ in ΘM. Tunc enim non nisi duæ rectæ duci possunt, juxta modos primum & secundum, punctis Λ æqualiter à punctis M & Π utrinque distantibus. Si æquale fuerit rectangulum datum Ξ quatuor rectangulis HΘ in ΘM, construetur modo singulari juxta tertium. Si vero majus fuerit eo, tum fiet dupliciter juxta modum tertium, ita ut omnino quatuor habeat solutiones.

Observandum autem est rectam MΠ à puncto M in contrarias partes puncti Θ collocari debere, in primo & secundo Casu; in tertio vero in easdem, sive versus Θ: quia in omnibus ΘΛ est ad ΛM ut ΛM ad MΠ, atque adeo si punctum Θ ex hypothesi sit intermedium inter Λ & M, ut in tertio Casu, etiam punctum Λ intermedium esse debet inter puncta M & Π. Recta itaque MΠ ad easdem partes puncti Λ, hoc est puncti Θ, ponenda est; & rectangulum applicandum deficiens quadrato. Quod si punctum Θ externum fuerit, externum erit & Λ; adeoque in contrarias partes puncti Θ ponenda recta MΠ, cui semper applicandum est rectangulum excedens quadrato, ut punctum Λ externum esse possit.

Tangent autem rectæ omnes datum rectangulum abscindentes binas oppositas Hyperbolas conjugatas, quorum commune centrum est punctum M, in occursu rectarum positione datarum: ipsæ vero rectæ ΑΒ, ΑΕ earundem communes Asymptoti sunt. Jam si fiant MK, MΛ æquales lateribus

ribus datis rectanguli auferendi, ac jungantur rectæ quævis K Λ, quæ bisecentur in punctis Θ, N, Π &c. erunt puncta illa Θ, N, Π puncta contactuum ipsarum K Λ cum Curvis Hyperbolicis describendis. Datis autem Asymptotis & puncto quovis, facili negotio ipsæ Curvæ describi possunt; ut jam dictum est. Sunt autem omnia rectangula segmento-



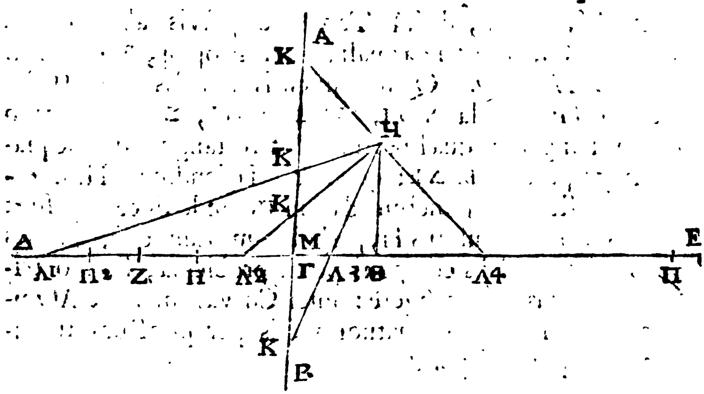
rum ex Asymptotis, ductâ Tangente quâvis abscissorum, ut M K in M Λ, inter se æqualia: per Prop. 43^{am} Lib. III. *Conicorum Apollonii*. Quare inventis punctis Θ, N, Π describantur Hyperbola X Θ I, Φ N Ξ, O Π P, Σ T Υ: harum omnium Tangentes quælibet auferent rectangula data æqualia ab Asymptotis A B, Δ E; quod erat faciendum. Hinc etiam manifestum est punctum datum H, unde ducendæ sunt rectæ H Λ K, intra ambitus Hyperbolarum situm esse, quoties duobus tantum modis componi possit problema; si vero tribus fiat, Curvas ipsas tangere: inter Curvas autem & Asymptotos reperiri, quoties quatuor rectis per punctum H ducendis idem præstari possit.

LOCUS QUARTUS.

Occurrant invicem rectæ A B, Δ E in puncto M, ac in rectâ A B sumatur punctum M vel Γ; in ipsâ vero Δ E punctum Z.

Cadat autem punctum datum H ab altera parte ipsius AB: ac educendæ sint rectæ è puncto H quæ auferant segmenta datum rectangulum continentia. Patet autem hoc fieri posse juxta quatuor modos, recisis segmentis vel ex ipsis ΛM, ZΔ, vel ex ΛM, ZM, vel ex BM, ZE, vel denique ex ipsis ΛM, ZE.

Horum omnium eadem plane est resolutio. Per punctum H ipsi AB parallela ducatur recta HΘ, rectæ ΔE occurrens in puncto Θ; unde punctum Θ datum erit, atque adeo ipsæ rectæ ΘH, ΘM dabuntur magnitudine & positione. Applicetur ad rectam ΘH rectangulum datum Ξ; ac data erit latitudo inde orta, ut recta ZΠ. Erit igitur rectangulum ΘH in ZΠ æquale rectangulo dato Ξ, hoc est, rectangulo *MK in* ZΛ; adeoque ΘH erit ad MK sicut ΛZ ad ZΠ. Sed ΘH est ad MK sicut ΛΘ ad ΛM: quare ΘΛ est ad ΛM sicut ΛZ ad ZΠ. Componendo autem in Casu tertio, vel dividendo in cæteris, erit ΘM ad MΛ sicut ΛΠ ad ΠZ; rectangulum itaque ΘM in ΠZ æquale erit rectangulo MΛ in ΛΠ. Datum autem est rectangulum ΘM in ΠZ, ob datam utramque rectam; datur itaque rectangulum MΛ in ΛΠ, applicandum ad rectam datam MΠ excedens quadrato in primo ac tertio Casu, vel deficiens quadrato in secundo & quarto, ut habeantur puncta omnia Λ. Quoniam vero in omni Casu ΘΛ est ad ΛM sicut ΛZ ad ZΠ; ubicunque ex hypothesi punctum Λ intermedium esse debet inter Θ & M, punctum Z



quoque intermedium erit inter Λ & Π; ac proinde recta ZΠ ad contrarias partes à puncto Λ situm habebit. Si vero Λ externum fuerit, externum erit & Z; unde ad easdem partes

sive

sive versus punctum Λ semper collocanda est recta data ZΠ. Quod si juxta hanc regulam ponatur recta ZΠ, ad easdem partes ad quas jacet punctum H, respectu rectæ AB; applicandum erit rectangulum ΘM in ZΠ ad rectam MΠ deficiens quadrato; at si in contrarias partes ponenda sit recta ZΠ, rectangulum illud applicandum erit ad MΠ2 excedens quadrato. Atque hæc omnia obtinent in Locis sexto & septimo sequentibus.

Hinc manifestum est, in Casu primo ac tertio, applicandum esse rectangulum ΘM in ZΠ ad rectam MΠ2 excedens quadrato; ut habeantur puncta Λ1, Λ3: adeoque problemata illa semper possibilia esse, rectasque puncto Z propiores semper spatia minora auferre remotioribus. Constat etiam MΛ in tertio semper æquari ipsi Π2Λ in primo. Punctum autem Λ in tertio semper cadet inter puncta Θ & M, quia rectangulum ΠΛ in ΛM, hoc est ΘM in ΠZ, necessario minus est rectangulo ΘM in ΘΠ2.

Casus autem secundus & quartus requirunt, ut applicetur rectangulum ΘM in ZΠ ad rectam MΠ deficiens quadrato; ac proinde Casus hi Dioristici sunt. Non enim applicari potest ad rectam ΠM rectangulum quod majus fuerit quadrato ex dimidio ipsius ΠM; quo in Casu problema impossibile erit. Fiet autem modo singulari, si reperiatur punctum Λ in medio ipsius ΠM; sive si fuerit rectangulum ΘM in ΠZ æquale quadrato dimidii ipsius ΠM, hoc est, quadrato ipsius ΛM. Erit igitur ΘM ad MΛ sicut MΛ sive ΛΠ ad ΠZ; adeoque ΘM erit ad ΘΛ sicut MΛ ad ΛZ. Permutando autem ΘM erit ad MΛ sicut ΘΛ ad ΛZ. Quocirca ΘM erit ad ΘΛ sicut ΘΛ ad ΘZ; unde recta ΘΛ media proportionalis erit inter datas ΘM, ΘZ, adeoque data est.

Capiatur itaque media proportionalis inter ΘM, ΘZ, quæ sit ΘΛ: ac ponatur utrinque in recta ΔE, ut ΘΛ2, ΘΛ4. Ac jungatur utraque HKΛ. Manifestum est rectam HKΛ2, in secundo Casu, abscindere spatium maximum MK in ΛZ; alteram vero KHΛ4 in quarto, auferre spatium minimum. Etenim in secundo, accedente rectâ HΛ ad puncta Z vel M, minui potest recta MK vel ZΛ in nihilum; earumque alterâ evanescente evanescit etiam earundem rectangulum MK in ZΛ: quocirca in hoc casu recta HΛ2, bisecans ipsam MΠ, aufert rectangulum maximum. In quarto autem Casu, accedente

rectâ

rectâ Κ Λ ad parallelismum vel rectæ Α Β, vel ipsius Δ Ε, augetur rectangulum in infinitum; adeoque recta Κ Λ 4, per medium ipsius Μ Π ducta, aufert rectangulum minimum. Facile esset hæc ad modum Diorismῶn *Apollonii* demonstrare; sed, brevitati consulens, in exercitium studiosi Analystæ relinquenda potius censeo.

Componetur autem problema hoc modo. Manentibus descriptis, ductâque rectâ parallelâ Θ Η, capiatur media proportionalis inter Θ Μ, Θ Ζ, ut Θ Λ; & utrinque ponatur recta Θ Λ, ad Λ 2 & Λ 4. Ducantur rectæ Η Λ 2, Κ Η Λ 4; & hæ auferent extrema rectangula Μ Κ in Λ Ζ; maximum *quidem* recta Η Λ 2, minimum vero Κ Λ 4. Si igitur rectangulum datum Ξ majus fuerit maximo vel minus minimo, non componi potest problema juxta hos Casus. Si vero minus fuerit maximo, fiet dupliciter juxta secundum; si majus minimo dupliciter juxta quartum. Si æquale fuerit maximo, sola recta Η Λ 2 satisfacit problemati, quod impossibile erit modo quarto. Si æquale fuerit minimo, sola recta Κ Λ 4 solvit problema juxta secundum impossibile. Modo autem primo & tertio rectangula quævis absque limitibus abscindi possunt. Fiat igitur ut rectangulum Ζ Π in Θ Η æquale sit rectangulo dato Ξ, & utrinque ponatur recta Ζ Π super rectam Δ Ε. Dein ipsi Μ Π 2, utrisque Ζ Π, Μ Ζ simul sumptis æquali, utrinque applicetur rectangulum Θ Μ in Ζ Π excedens quadrato: sint illa rectangula Μ Λ 1 in Π 2 Λ 1 & Μ Λ 3 in Π 2 Λ 3. Si vero rectangulum Ξ nec majus fuerit maximo, nec minus minimo, applicari potest rectangulum Θ Μ in Π Ζ deficiens quadrato ad rectam Μ Π, differentiam ipsarum Ζ Π, Ζ Μ: Factâ autem utrinque applicatione, habebuntur puncta Λ 2 vel Λ 4, quæ in altero tantum horum Casuum, vel bina erunt vel unum tantum, juxta limitationes præcedentes. Minimum enim in quarto, multo majus est maximo in secundo. Inventis autem punctis Λ, ducantur & producantur rectæ Η Λ: dico omnes illas abscindere rectangula Μ Κ in Ζ Λ rectangulo dato Ξ æqualia.

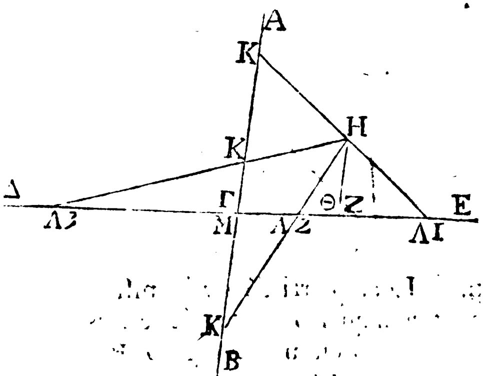
In omni autem Casu eadem est demonstratio. Quoniam enim rectangulum Θ Μ in Π Ζ æquale est rectangulo Μ Λ in Λ Π; erit Θ Μ ad Μ Λ sicut Λ Π ad Π Ζ; adeoque Θ Λ ad Λ Μ, hoc est Θ Η ad Κ Μ, erit ut Λ Ζ ad Ζ Π; quocirca rectangulum Θ Η in Ζ Π, hoc est rectangulum Ξ, per Constructionem, æquale est

est rectangulo KM in ΛZ. Rectæ igitur omnes KHΛ ad hunc modum inventæ solvunt problema. Q. E. D.

Rectangulum autem maximum & minimum eodem argumento determinantur, quo limites rationum habentur in *Sectione Rationis*, ad Locum sextum & septimum Libri primi. Maximum enim in Casu secundo æquale est rectangulo ΘH in excessum quo ipsæ ΘM, ΘZ simul sumptæ superant illam quæ potest quater rectangulum ΘM in ΘZ. Minimum vero in quarto æquale est rectangulo ΘH in rectam compositam ex utrâque ΘM, ΘZ, & illâ quæ potest quater rectangulum ΘM in ΘZ; simul sumptis.

LOCUS QUINTUS.

Occurrat jam recta parallela HΘ rectæ ΔE, in puncto Z coincidente cum puncto Θ. Ducendæ sunt rectæ quæ auferant rectangulum MK in ZΛ æquale rectangulo dato Ξ. Hoc autem fieri potest tribus modis, vel enim abscissa erunt segmenta ex ipsis ΛM, ZE, vel è BM, MZ, vel tertio ex ipsis ΛM, ZΔ. Una autem est Analysis omnium, eadem & facillima Compositio. Quoniam enim ZH est ad ZΛ ut MK ad ΛM, ob similia triangula, rectangulum ZH in ΛM æquale erit rectangulo ZΛ in MK. Datum autem est rectangulum ZΛ in MK, adeoque datur rectangulum ZH in ΛM. Datur vero recta ZH, adeoque & ΛM data est; ac dato puncto M punctum Λ quoq; datur: quare & rectæ HKΛ positione dantur.



Componetur autem problema si applicetur rectangulum datum Ξ ad rectam parallelam HZ vel HΘ; & latitudo, orta ex applicatione, ΛM, à puncto M utrinque ponatur ad Λ; dein ducantur rectæ duæ HΛ. Dico utramque problemati satisfacere. Ob similia enim triangula ZΛ est ad HZ sicut ΛM ad MK, adeoque rectangulum HZ in ΛM æquale est rectangulo ZΛ

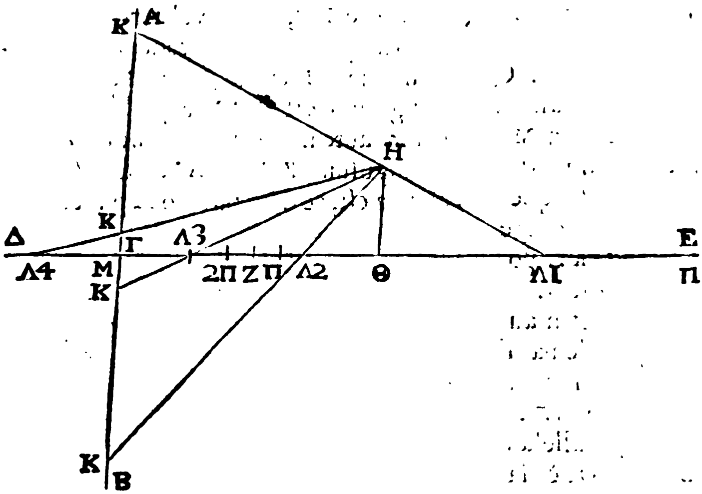
Z Λ in M K. Sed H Z in Λ M factum est ipsi Z æquale: erit igitur rectangulum Z Λ in M K rectangulo Z æquale. Q. E. D.

Abscindi autem nequit modo primo rectangulum quod minus sit rectangulo H Z in Z M; nec modo secundo quod majus fuerit eo. At si æquale fuerit rectangulo H Z in Z M, neutro modo fieri potest, coincidente recta K Λ cum parallelâ H Z, nec unquam ipsi A B occurrente. Problema autem possibile est in quovis rectangulo juxta Casum tertium.

LOCUS SEXTUS.

Cadat jam punctum Z, in recta Δ E sumptum, intra parallelas datas A B, H Θ. Ac manifestum est rectas duci posse quæ auferant rectangulum datum, sive M K in Z Λ, juxta quatuor modos: vel enim abscissa erunt segmenta ex ipsis Z E, A M; vel ex Z Θ, B M; vel ex Z M, M B; vel quarto ex ipsis Z Δ, A M.

Horum omnium Resolutio in nihilo fere differre invenie-



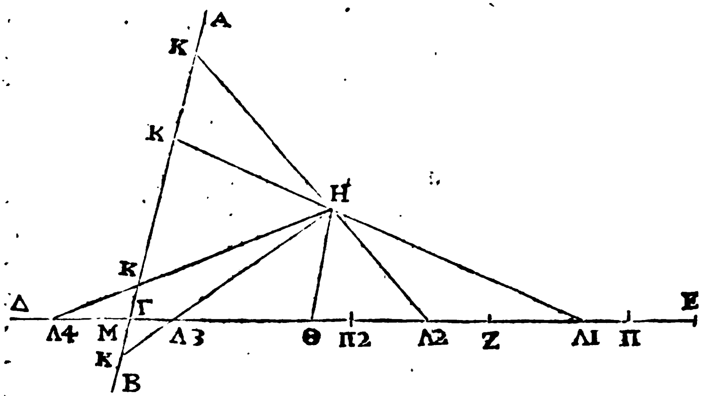
tur à Loci quarti Analysi; nisi quod hîc Casus primus coincidit cum quarto quarti, & tertius hujus cum secundo quarti &c. Facto enim rectangulo H Θ in Z Π æquali rectangulo dato M K in Z Λ, erit in omni Casu Θ H ad M K, hoc est Θ Λ ad Λ M sicut Λ Z ad Z Π; adeoque dividendo in primo & quarto Casu, vel componendo in secundo ac tertio Θ M erit ad M Λ ut Λ Π ad Π Z: rectangulum igitur Θ M in Π Z æquale erit rectangulo ΜΛ in ΛΠ. Dato autem rectangulo ΘΜ in ΠΖ, datur quoque rectangulum ΜΛ in ΛΠ, ad rectam datam ΜΠ applicandum, ut habeantur puncta Λ. In Compositione itaque, applicato rectangulo auferendo Ξ ad rectam ΘΗ, sit latitudo inde orta recta ΖΠ; quæ ponatur utrinque à puncto Ζ versus Θ & Μ: & ad ΜΠ2 quæ differentia sit ipsarum ΖΜ, ΖΠ, applicetur rectangulum ΘΜ in ΖΠ excedens quadrato, in secundo & quarto Casu. In secundo autem cadet punctum Λ2 inter Θ & Ζ, quia rectangulum ΜΛ in ΛΠ2, sive ΘΜ in ΠΖ, minus est rectangulo ΘΜ in ΠΘ, ob ΠΖ minorem quam ΠΘ. Idemque majus est rectangulo ΜΖ in Π2Ζ, quia ΘΜ major est quam ΠΖ; adeoque punctum Λ2 nec ultra Θ, nec citra Ζ cadere potest. In primo autem & tertio Casu, applicetur dictum rectangulum deficiens quadrato ad rectam ΜΠ, quæ sit summa ipsarum ΜΖ, ΖΠ. Ac patet punctum Λ1 cadere ultra punctum Θ, quia rectangulum ΘΜ in ΠΖ majus est rectangulo ΘΜ in ΘΠ. In tertio verò cadet punctum Λ3 inter puncta Ζ & Μ, quia ΖΠ in ΘΜ majus est rectangulo ΖΠ in ΜΖ. Pari autem argumento ac in Loco quarto constat, Casum secundum ac quartum hujus semper possibiles esse, & segmenta rectangulum quodvis continentia auferri posse: primum autem & tertium determinationes habere; ac rectangulum extremum in primo minimum esse, in tertio maximum. Denique in his etiam rectangulum minimum in primo æquari rectangulo ipsius ΘΗ in rectam compositam ex utrâque ΘΜ, ΘΖ & illâ quæ potest quater rectangulum ΘΜ in ΘΖ simul sumptis. In tertio autem rectangulum maximum æquale esse rectangulo ΘΗ in excessum, quo utraque ΘΜ, ΘΖ superant illam quæ potest quater rectangulum ΘΜ in ΘΖ. Hæc omnia consequuntur ex eo quod puncta Λ1 & Λ3, per quæ rectæ ΗΛ auferentes extrema rectangula ducuntur, bisecant rectas ΜΠ: unde fit ut ΘΛ1, ipsi ΘΛ3 æqualis, media proportionalis sit inter ipsas ΘΖ, ΘΜ. Quocirca si rectangulum Ξ majus fuerit maximo ac minus minimo, non nisi modo secundo & quarto componi potest problema. Sin minus fuerit maximo vel majus minimo, quadrupliciter efficietur. At si æquale fuerit maximo, fiet modo singulari, juxta tertium: quemadmodum juxta primum, si æquale fuerit minimo. Impossibile autem est idem rectangulum juxta utrumque modum primum &

tertium auferri, quia minimum in primo multo majus est maximo in tertio. Quoniam vero in omni Casu fecimus rectangulum ΘM in ΠZ æquale rectangulo MΛ in ΛΠ; erit ΘM ad MΛ ut ΛΠ ad ΠZ, ac dividendo vel componendo ΘΛ erit ad ΛM ut ΛZ ad ZΠ. Sed ΘΛ est ad ΛM sicut ΘH ad KM; quare ΘH est ad KM ut ΛZ ad ZΠ: atque adeo rectangulum ΘH in ZΠ, hoc est rectangulum datum Z, æquale est rectangulo KM in ΛZ. Rectæ igitur omnes HKΛ ad hunc modum inventæ solvunt problema.

LOCUS SEPTIMUS.

Cadat jam punctum Z, in rectâ ΔE sumptum, *ultra punctum* Θ; ac ducendæ sint rectæ HKΛ per datum punctum H, quæ auferant rectangulum ZΛ in KM æquale dato. Patet hoc fieri posse quatuor modis; ablatis segmentis, vel ex ipsis ΛM, ZE; vel ex ΛM, ZΘ; vel ex BM, ZM; vel denique ex ipsis ΛM, ZΔ.

Quoniam rectangulum MK in ZΛ datum est, eidem æquale fiat rectangulum ΘH in ZΠ; unde ob datam ΘH, ipsa quoque ZΠ data erit: Est itaque ΘH ad KM, hoc est ΘΛ ad ΛM, ut ΛZ ad ZΠ. Dividendo autem in Cas. I, II, & IV, vel componendo in tertio; ΘM erit ad MΛ ut ΛΠ ad ΠZ; atque adeo rectangulum ΘM in ΠZ æquale erit rectan-



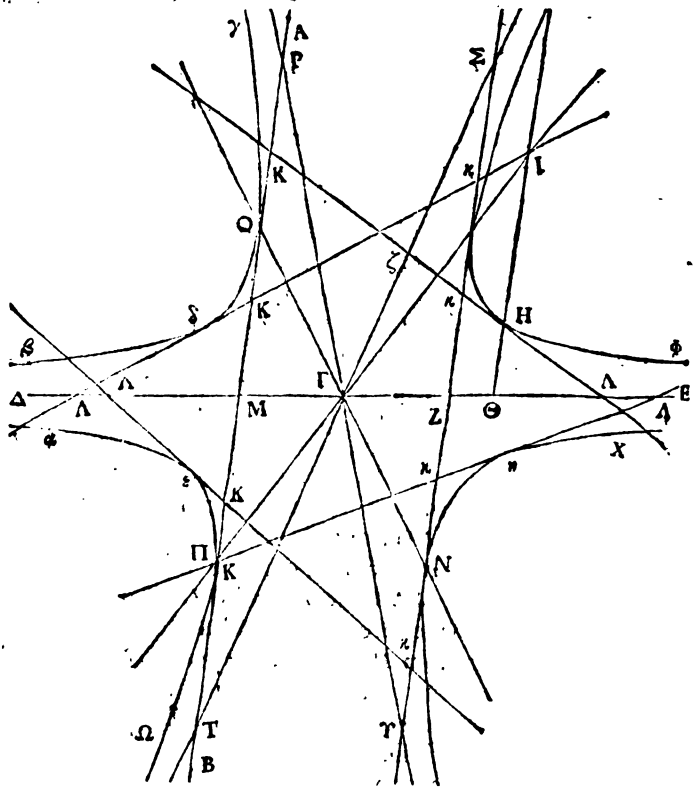
gulo MΛ in ΛΠ, applicandum ad rectam datam MΠ. Dantur itaque per 58^{um} & 59^{um} *Dat. Euclid.* puncta applicationum Λ; adeoque rectæ ipsæ HKΛ positione datæ sunt.

Mani-

Manifestum autem est applicandum esse rectangulum illud deficiens quadrato in Casu primo & tertio, excedens vero quadrato in secundo & quarto. Hi autem omnes Casus possibiles sunt, neque limitibus obnoxii, ob easdem causas propter quas Locus quartus in *Sectione Rationis* diorismum non habet. Est enim rectangulum $M\Lambda_1$ in $\Pi\Lambda_1$, hoc est ΘM in $Z\Pi$, minus rectangulo quovis MZ in $Z\Pi$; quia MZ majus est quam ΘM: adeoque cadet punctum Λ_1 inter Z & Π. Similiter, quia ΘM in $Z\Pi$ minus est rectangulo $M\Theta$ in $\Theta\Pi$, cadet semper punctum Λ_3 inter puncta M, Θ, quæcunque fuerit magnitudo dati rectanguli. Cadet etiam Λ_2 semper inter puncta Z & Θ, quia rectangulum ΘM in ΠZ minus est rectangulo MZ in $Z\Pi_2$; uti majus est rectangulo $M\Theta$ in $\Theta\Pi_2$.

Componetur itaque problema eodem modo quo præcedentia; applicato enim rectangulo dato Ξ ad rectam parallelam ΘH, sit Latitudo inde resultans $Z\Pi$; quæ utrinque ponatur à puncto Z, versus E & M, ad Π & Π_2: dein applicetur utrinque rectangulum ΘM in $Z\Pi$ ad rectam $M\Pi$ deficiens quadrato, & erunt puncta applicationum Λ_1, Λ_3. Applicetur etiam ad $M\Pi_2$ idem rectangulum ΘM in $Z\Pi$ excedens quadrato; & habebuntur puncta applicationum Λ_2, Λ_4. Ducantur quatuor rectæ $H\Lambda$, si opus est ad K producendæ; dico omnes has problema solvere, hoc est, auferre rectangula $Z\Lambda$ in MK æqualia rectangulo Ξ. Demonstratio autem eadem est omnino cum præcedentibus. Nam cum, per constructionem, rectangulum $M\Lambda$ in $\Lambda\Pi$ æquale sit rectangulo ΘM in $Z\Pi$, erit ΘM ad $M\Lambda$ sicut $\Lambda\Pi$ ad ΠZ: componendo autem vel dividendo $\Theta\Lambda$ erit ad $M\Lambda$ sicut ΛZ ad ΠZ. Sed $\Theta\Lambda$ est ad $M\Lambda$ sicut $H\Theta$ ad KM; quare $H\Theta$ est ad KM ut ΛZ ad $Z\Pi$; atque adeo rectangulum $H\Theta$ in $Z\Pi$ æquale erit rectangulo KM in ΛZ. Est autem rectangulum $H\Theta$ in $Z\Pi$ æquale rectangulo Ξ. Quocirca rectangulum KM in ΛZ æquale est rectangulo dato Ξ. Q. E. D.

Ut autem in Loco tertio, rectæ omnes datum spatium abscindentes, binas oppositas & conjugatas Hyperbolas contingunt; sic etiam in his quatuor ultimis Locis, rectæ omnes, rectangulum datum MK in $Z\Lambda$ auferentes, tangunt binas Hyperbolas oppositas, quodammodo etiam conjugatas, nec multo majori opere describendas: est enim recta ΔMZE communis Asymptotos. Ipsi AB parallela per punctum Z ducatur recta Σ Z Υ; dein ad rectam datam Z M applicetur rectangulum datum M K in Z Λ, sitque latitudo Z Ξ, Z N; M Π, M O, utrinque à punctis Z & M ponenda. Jungantur ipsæ Ξ Π, N O, sese intersecantes in puncto Γ; quod (ob parallelas & æquales Z Ξ, M Π; Z N, M O) reperietur in medio ipsius Z M; eritque punctum Γ utrarumque oppositarum Hyperbolarum commune centrum: rectæ vero Ξ Γ Π, N Γ O earundem erunt diametri transversæ. Utrisque autem conjugata semidiameter



eadem erit; nempe recta Z Ξ vel M O. His si æquales fiant Ξ Σ, O P, & ab altera parte N Υ, Π T; erunt rectæ Σ Γ T, P Γ Υ, Hyperbolarum Asymptoti; puncta quoque N, Ξ, O, Π tangent ipsas Hyperbolas describendas. Dantur itaque & Asymptoti, & in unaquâque Hyperbolâ punctum unum; unde facili negotio puncta quotlibet invenire licet, locumque quæsitum

situm exhibere. Descriptis autem oppositis Hyperbolis ΗΞΦ, ΩΠα; ac ΧΝΨ, βΟγ: dico rectas omnes easdem aliquo modo contingentes abscindere rectangula ΜΚ in ΖΛ æqualia spatio dato, sive rectangulo ΜΖ in ΖΞ. Quoniam enim rectæ ΣΥ, ΑΒ parallelæ sunt, continguntque Hyperbolas oppositas in punctis Ξ, Π; ac ducitur Tangens alia ut ΚκΗΛ, contingens Hyperbolam ΗΞΦ in puncto Η, occurrensque ipsi ΖΞ in κ: erit per 42dam III. *Conic. Apollonii*, rectangulum κΞ in ΠΚ æquale quadrato ex ΖΞ, hoc est rectangulo ΖΞ in ΠΜ. Hinc κΞ erit ad ΞΖ ut ΜΠ ad ΠΚ; adeoque dividendo κΖ erit ad ΖΞ ut ΜΚ ad ΚΠ. Permutando autem κΖ erit ad ΜΚ, hoc est ΖΛ ad ΛΜ, sicut ΖΞ vel ΜΠ ad ΠΚ; quare per conversionem rationis ΖΛ erit ad ΖΜ ut ΜΠ ad ΜΚ. Erit igitur rectangulum ΖΜ in ΜΠ sive ΖΞ æquale rectangulo ΖΛ in ΜΚ. Sed fecimus rectangulum ΖΜ in ΜΠ æquale spatio dato; quapropter rectæ omnes ΚκΗΛ abscindunt spatia ΜΚ in ΖΛ æqualia dato. His autem æqualia sunt rectangula omniq Ζκ in ΜΛ, quia ΖΛ est ad κΖ ut ΜΛ ad ΚΜ. Et argumento omnino simili idem demonstrabitur in Tangente quâvis κΚδΛ, ΛεΚκ, ΚκηΛ, quomodocunque ductâ. Locum itaque exhibuimus quæsitum. Puncta autem contactûs habebuntur dividendo bifariam partes Tangentium inter Asymptotos interceptas, ut ζΛ in puncto Η: vel capiendo ΛΘ ad ΛΖ ut ΜΛ ad ΛΖ + ΜΛ; unde consequens est ΛΘ mediam esse proportionalem inter ΘΖ, ΘΜ.

Manifestum autem est puncti Η situm esse in spatio infinito ΑΔΒ, si fuerit problema juxta Casus Loci quarti; sive si fuerit punctum Μ intermedium inter Ζ & Θ. In spatio autem infinito ΣΕΥ collocari, si fuerit Ζ inter Θ & Μ; ut in Loco sexto. Intra vero parallelas datas ΑΒ, ΣΥ reperiri, in omni casu Loci septimi. In ipsâ vero rectâ ΣΖΥ positum esse punctum Η, si fuerit juxta Locum quintum. Præterea si punctum Η tangat aliquam ex his Curvis, patet tribus rectis solvi posse problema. Si fuerit Η intra Curvarum ambitus, duabus tantum. Quod si exterius fuerit, vel inter Asymptotos & Hyperbolas, vel intra angulos ΡΓΣ, ΤΓϒ, duci possunt quatuor omnino rectæ per idem punctum datum, rectangulum datum abscindentes.

APOL-

APOLLONII PERGÆI

De Sectione Spatii, SIVE

ΠΕΡΙ ΧΩΡΙΟΥ ΑΠΟΤΟΜΗΣ,

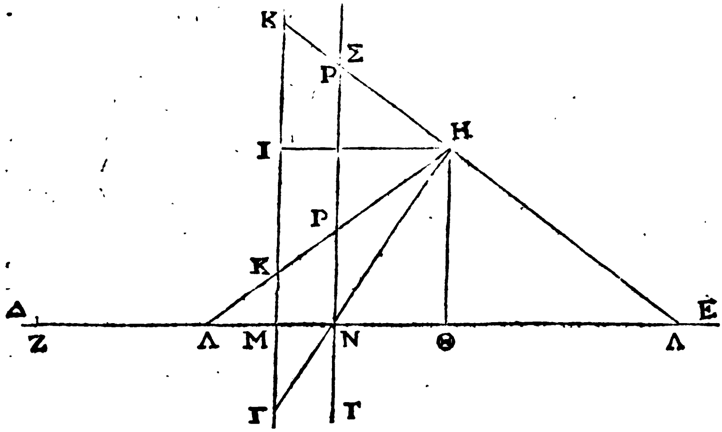
LIBER SECUNDUS RESTITUTUS.

APOLLONII quidem liber secundus de Sectione spatii, teste *Pappo*, in sexaginta Casus divisus est (non septem, ut perperam habent MSS *Saviliani* & *Commandini* traductio; errore orto ex eo quod in Græcis Codicibus scribatur ζ pro ξ). Cum enim *Sectio Rationis* in Lib. II. sexaginta tres habeat Casus; ac Locus septimus in *Sectione Spatii* omissus sit ὡς φανερὸς, tribus constans Casibus: manifestum est sexaginta Casus habuisse librum hunc secundum. Qui vero perlegerit hos sexaginta tres Casus in *Sectione Rationis*, illos omnes ad tres formulas facile reduci deprehendet: idemque etiam in *Sectione Spatii* fieri posse. Vel enim puncta data Z vel Γ reperientur in rectis parallelis HΘ, HI, coincidentia cum punctis Θ vel I; vel erunt in eâdem rectâ data tria puncta H, Γ, Z: vel his conditionibus liber erit situs utriusque puncti Γ & Z in rectis positione datis AB, ΔE.

CAPUT I.

Imprimis autem capiatur ad libitum in recta AB punctum Γ, in ipsâ vero ΔE punctum Z; ita ut nec Z reperiatur in concursu parallelæ HΘ cum rectâ ΔE, nec Γ in concursu ipsius AB cum parallelâ HI: neque sint tria puncta H, Γ, Z in eâdem rectâ. His positis una eademque erit in unoquoque Casu & Analysis & Synthesis. Jungatur enim recta HΓ, ac, si opus sit, producatur ea ad occursum cum rectâ ΔE in N. Datum est igitur punctum N, ac ratio ipsius HΓ ad HN quoque datur. Per N ipsi AB parallela ducatur recta ΣNT, quæ proinde

proinde positione data est. Ob similia vero triangula, ΓK est ad NP sicut ΓH ad HN; adeoque ratio ΓK ad NP datur; hoc est ratio rectanguli ΓK in ZΛ ad rectangulum NP in ZΛ. Sed rectangulum ΓK in ZΛ datur; quare rectangulum NP in ZΛ etiam datur. Jam dantur positione rectæ duæ ΔE, ΣT;



& in ΔE sumitur punctum Z, in ipsâ vero ΣT punctum N, & oportet ducere per punctum H rectam HPΛ, quæ auferat rectangulum ZΛ in NP datum. Dantur autem positione rectæ omnes HPΛ, per Casus Loci IV^ti, si fuerit punctum N intermedium inter Z & Θ: vel per Casus Loci VI^ti, si fuerit Z inter Θ & N: vel denique per Casus omnes Loci septimi si fuerit Θ inter puncta N & Z.

Componentur autem omnia hujusmodi problemata si producatur recta HΓ ad N, ac ductâ rectâ ΣNT ipsi AB parallela, fiat ut HΓ ad HN ita rectangulum auferendum Ƶ ad aliud O. Dantur autem rectæ duæ ΔE, NΣ sese intersecantes in puncto N; ac in ΔE sumitur punctum Z, in ipsâ vero ΣNT punctum N. Ducantur igitur per punctum datum H rectæ HPΛ (per casus requisitos è Locis prædictis Lib. I.) quæ auferant segmenta NP, ZΛ rectangula æqualia rectangulo O continentia. Dico easdem rectas abscindere etiam segmenta ΓK & ZΛ quæ comprehendant rectangula æqualia dato Ƶ. Quoniam enim ΓK est ad NP sicut HΓ ad HN, erunt etiam rectangula ΓK in ZΛ ad rectangula NP in ZΛ, in eadem ratione. Sed Ƶ est ad O etiam in ratione HΓ ad HN: quare invertendo &

2 permu-

permutando, rectangulum O erit ad NP in ZΛ, ut rectangulum Ξ ad ΓK in ZΛ. Sed fecimus NP in ZΛ æquale rectangulo O; quare etiam rectangula ΓK in ZΛ æqualia sunt rectangulo Ξ. Q. E. D.

Determinantur autem duo Casus, in utroque Loco, ubi Θ non est intermedium inter puncta N & Z: Ac juxta Diorismos Loci quarti & sexti, manifestum est quod, si capiatur ΘΛ media proportionalis inter ΘN, ΘZ; ac ponatur ea ad utramque partem puncti Θ; dein ducantur rectæ HPKΛ, KΣHΛ; utraque recta HΛ auferet rectangulum extremum: nempe rectangulum PN in ZΛ majus, ac ΣN in ZΛ *minus*, quovis alio rectangulo, juxta Casus illos à rectis ZΘ, NΣ, vel ZE, NΣ auferendo. Rectangulum autem maximum æquale erit contento sub HΘ & excessum quo utræque ZΘ, ΘN simul sumptæ superant illam quæ potest quater rectangulum ZΘ in ΘN. Minimum vero æquale erit contento sub HΘ & utrasque ZΘ, ΘN, una cum illâ quæ potest quater rectangulum ZΘ in ΘN simul sumptas; per limitationes Loci IV^ti^ & VI^ti^ Libri primi. Quoniam vero rectangulum NP in ZΛ est ad rectangulum ΓK in ZΛ ut NP ad ΓK, hoc est, ut HΘ ad ΓI, erit rectangulum maximum ΓK in ZΛ æquale rectangulo ΓI in $\Theta Z + \Theta N - \sqrt{4 Z\Theta N}$. Pariter erit rectangulum minimum æquale rectangulo ΓI in $\Theta Z + \Theta N + \sqrt{4 Z\Theta N}$.

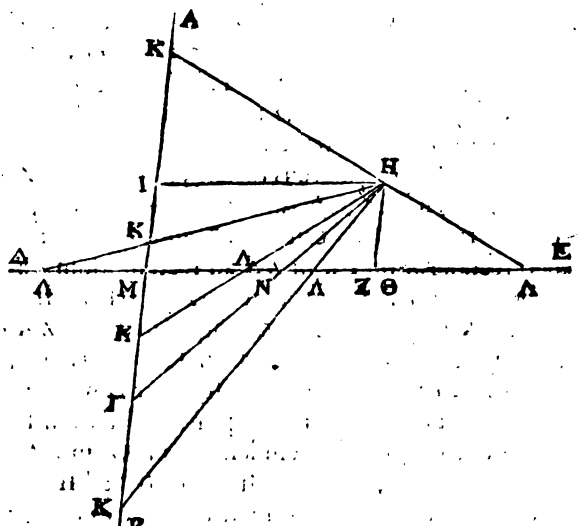
Hinc evidenter consequitur quod, si ductâ rectâ HNΓ, punctum N intermedium fuerit inter Θ & Z; vel punctum Z inter Θ & N; non nisi duobus modis componi possit problema, quoties rectangulum datum Ξ majus fuerit maximo vel minus minimo. Si vero æquale fuerit maximo vel minimo, fieri potest juxta tres formas. Quod si minus fuerit rectangulo $\Gamma I \times \Theta Z + \Theta N - \sqrt{4 Z\Theta N}$; vel majus quam $\Gamma I \times \Theta Z + \Theta N + \sqrt{4 Z\Theta N}$; tum quatuor diversis rectis abscindi possunt segmenta ΓK, ZΛ spatium datum comprehendentia; uti etiam in omni Casu ubi punctum Θ intermedium reperitur inter puncta Z & N. Hi enim reducuntur ad Casus Loci septimi Lib. I. nec opus est ut in his deducendis diutius immoremur. Hæc autem particulatim demonstrata erant in octo Locis (nempe I, III, IV, V, IX, XI, XII, & XIII.) Libri secundi *Apollonii*, in Casus XL subdivisis, ad exemplum Lib. II. de *Sectione Rationis*. Sed Resolutio & Compositio ut & demonstratio in omnibus fere eadem est.

CAPUT

CAPUT II.

Coincidat jam punctum Z cum puncto Θ, ac capiatur ad libitum punctum Γ in recta AB. Si vero puncta H & Γ fuerint ad diversas partes rectæ ΔE, habebimus Casus Loci secundi. Si ad easdem; ac Γ fuerit ultra I versus A, proponuntur Casus Loci septimi. Quod si reperiatur Γ inter puncta M & I, Locus erit octavus *Apollonio*, cui correspondet nonus in *Sectione Rationis*. Singuli autem Loci quaternos habent Casus, quos tamen omnes eadem omnino methodo & resolvere & construere licet.

Ducatur enim recta HKΛ auferens rectangulum ΓK in ZΛ æquale dato. Jungatur HNΓ, occurrens ipsi ΔE in puncto N. Ob similia triangula, erit ZΛ ad ZH ut HI ad IK; atque etiam ZN ad ZH ut HI ad IΓ: erit igitur rectangulum ZΛ in IK æquale rectangulo ZN in IΓ (utrumque enim æquale est rectangulo dato ZH in HI.) Quocirca ΛZ erit ad ZN ut ΓI ad IK; adeoque in omni Casu ZΛ erit ad ΛN ut IΓ ad ΓK. Rectangulum igitur ZΛ in ΓK æquale erit rectangulo ΛN in IΓ. Sed rectangulum ZΛ in ΓK datum est, ergo &



rectangulum ΛN in IΓ. Data autem recta IΓ, ipsa quoque NΛ datur. Cumque punctum N datur, punctum Λ etiam datur; atque adeo recta HKΛ positione datur.

Componentur itaque omnia hujus generis problemata, si ducta recta HNΓ applicetur rectangulum datum Ξ ad rectam ΓI; & à puncto N ponantur utrinque rectæ NΛ æquales latitudini inventæ. Jungantur ambæ HΛK. Dico utramque satisfacere problemati. Quoniam enim rectangulum IK in ZΛ æquale est rectangulo IΓ in ZN; erit KI ad IΓ ut NZ ad ZΛ; adeoque dividendo vel componendo KΓ erit ad IΓ ut NΛ ad ΛZ. Quapropter rectangulum KΓ in ZΛ æquale erit rectangulo IΓ in NΛ. Hoc autem fecimus rectangulo Ξ æquale; erit igitur rectangulum KΓ in ZΛ æquale rectangulo Ξ. Q. E. D. Etiamsi vero quatuor Casus habeant singuli hi Loci apud *Apollonium*, non nisi duabus rectis rectangulum quodvis datum abscindere licet, utrinque ab ipsa HΓ æqualiter distantibus. Manifestum est autem rectas puncto N propiores abscindere semper minora spatia remotioribus.

CAPUT III.

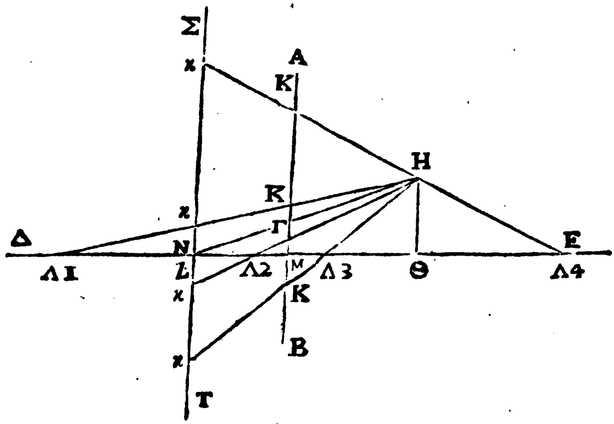
Coincidat autem punctum N cum puncto Z; ita ut tria illa H, Z, Γ sint in eâdem rectâ. Jam si intermedium fuerit Z vel Γ, proponuntur Casus Loco sexto in *Sectione Rationis* analogi. Si vero intermedium ponatur H, Locus erit undecimus ejusdem; qui, ob omissum in Lib. II. de *Sectione Spatii* septimum, ab *Apollonio* decimus numerabatur. Uterque autem Locus quatuor Casus habet.

Ducatur recta HKΛ, auferens rectangulum ΓK in ZΛ dato æquale, ac ipsi AB per punctum Z vel N agatur parallela ΣZT. Junctâ rectâ HΓZ, erit ut HΓ ad HZ ita ΓK ad Zκ, atque adeo rectangulum ΓK in ZΛ ad rectangulum Zκ in ZΛ, erit in eadem ratione. Datur autem ratio HΓ ad HZ, ut & rectangulum ΓK in ZΛ: quare rectangulum Zκ in ZΛ datur. Ventum est igitur ad Casus Loci tertii Lib. I. Dantur enim rectæ duæ ΣT, ΔE; ac in utrâque sumitur commune punctum Z; oportet autem ducere per punctum datum H rectas HKΛ, spatia dato æqualia abscindentes, ut Zκ in ZΛ.

Componetur autem problema, si fiat ut HΓ ad HZ ita rectangulum datum Ξ ad rectangulum aliud O; ac ducantur rectæ HκΛ auferentes à rectis ΣT, ΔE rectangula Zκ in ZΛ æqualia rectangulo O. Hoc autem semper fieri potest duobus modis ad formam Casuum primi & secundi Loci III. Casus

autem

autem tertius ejusdem limitem habet; nec eo modo abscindi potest rectangulum ΓΚ in ΖΛ, quod minus fuerit rectangulo

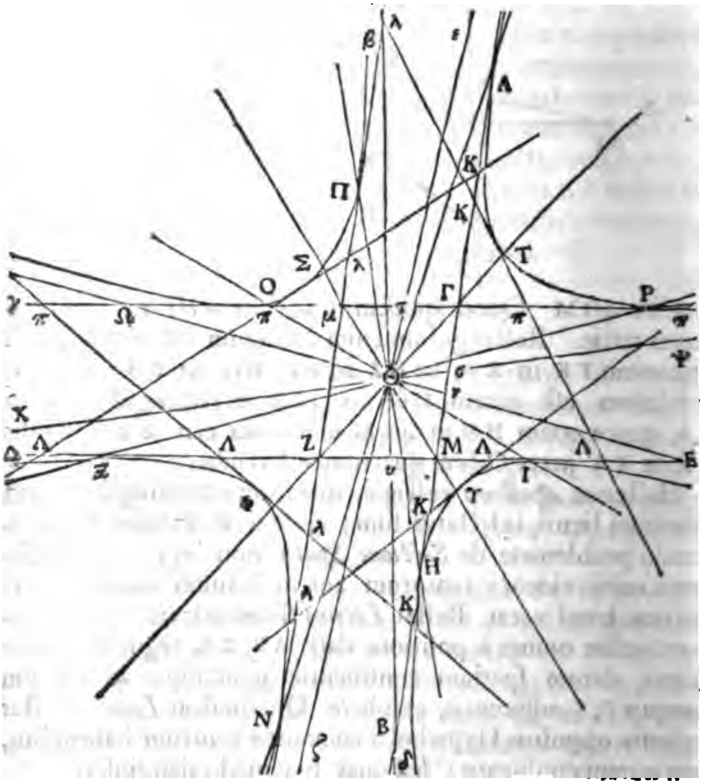


ΗΘ in 4ΘΜ. Quod quidem manifestum est ex prædicto Loco tertio. Rectangulum enim minimum κΖ in ΖΛ est ad minimum ΓΚ in ΖΛ, ut ΗΖ ad ΗΓ, sive ut ΖΘ ad ΘΜ: minimum est autem ΗΘ in 4ΖΘ è rectangulis Ζκ in ΖΛ, quare etiam ΗΘ in 4ΘΜ minimum erit è rectangulis ΓΚ in ΖΛ juxta Casum quartum auferendis.

Hactenus *Apollonii* vestigia, quantum ex analogiâ horum librorum licuit, insectatus sum; ejusque methodum in resolvendo problemate de *Sectione Spatii* non levi indicio assecutus mihi videor: tantorum autem Casuum minutias percurrere haud vacat. Restat *Locum Geometricum*, quem tangunt rectæ omnes à positione datis ΑΒ, ΔΕ, segmenta auferentes, datum spatium continentia punctisque ad libitum sumptis Γ, Ζ adjacentia, exhibere. Qui quidem *Locus* constat ex binis oppositis Hyperbolis commune centrum habentibus, non autem conjugatis; sed quas hoc modo descripseris.

Per punctum Γ ipsi ΔΕ; ac per Ζ ipsi ΑΒ parallelæ duæ ducantur ut ΡΓμΩ ac ΠμΖΝ; sese intersecantes in μ. Fiant ΖΜ in ΖΠ & ΓΜ in ΓΡ æqualia rectangulo auferendo Ξ: atque ipsæ ΖΠ, ΓΡ dantur. Ponantur ΖΝ, ΓΑ, ΓΗ æquales ipsi ΖΠ, uti & ΓΟ, ΖΞ, ΖΙ ipsi ΓΡ æquales: ac manifestum est quatuor rectas parallelas contingere *Locum* quæsitum in punctis Α, Η, Π, Ν; Ρ, Ο, Ι, Ξ. Jungantur puncta opposita ΟΙ, ΠΗ, ΑΝ, ΞΡ, & habebimus quatuor diametros occurrentes

tes inter se in communi Hyperbolarum centro Θ, in medio junctæ rectæ ZΓ, quæ proinde erit quoque diameter. Conjugata autem semidiameter ad transversam diametrum HΠ, erit recta H ν, quæ media est proportionalis inter HΓ & HM æqualem ipsi Π μ: recta vero I ν, media proportionalis inter IZ & IM ipsi O μ æqualem, erit conjugata semidiameter Hy-



perbolæ ejusdem ad diametrum OI, per dictam 42^am III. *Conicorum*. Jam si fiant HB ipsi H ν, ac IE ipsi I ν æquales, ac producantur utræque E ν Θ Ω, B ν Θ β, erunt hæ oppositarum Hyperbolarum HΥI, OΣΠ Asymptoti duæ. Datis autem Asymptotis & punctis O, Π; H, I, Curvæ ipsæ per 4^am II^di. *Conicorum* levi negotio describuntur. Similiter, si capiatur Λ σ media proportionalis inter ΛΤ, ΛΜ; ac fiat in MΛ producta Λ ε ipsi Λ σ æqualis, ac producatur recta ε Θ ζ: erit hæc

hæc una Asymptotorum Oppositarum Curvarum Α Τ Ρ, Ξ Φ Ν, occurrens ipsi Γ μ in puncto π. Fiat etiam Ρ Ψ ipsi Ρ τ æqualis, atque erit recta Ψ φ Θ Χ altera earundem Asymptotorum. Dantur quoque puncta Α, Ρ, Ν, Ξ; unde & ipsæ Hyperbolæ dantur positione, per eandem 4^{am} II^{di}.

Descriptis autem utrisque Hyperbolis; dico rectas omnes easdem contingentes abscindere è rectis Α Β, Δ Ε, segmenta Γ Κ & Ζ Λ rectangula æqualia rectangulis Ζ Μ in Ζ Π vel Γ Μ in Γ Ρ continentia; hoc est rectangulo Ξ æqualia. Occurrant enim Tangentes rectæ parallelæ Π Ζ Ν in punctis λ, ipsi vero Ο Γ Ρ in punctis π. Capiatur autem, Exempli gratiâ, recta Κ λ π Λ contingens Curvam Π Σ Ο. Ob parallelas Tangentes Α Η, Π Ν, erit, per 42^{am} III^{i} *Conic.* rectangulum Η Κ in Π λ æquale rectangulo Η Γ in Π μ; unde Κ Η ad Η Γ ut μ Π ad Π λ; ac dividendo Κ Γ erit ad Η Γ ut μ λ ad λ Π. Permutando autem Κ Γ erit ad μ λ, hoc est Γ π ad π μ, ut Η Γ sive Ζ Π ad Π λ; unde per Conversionem rationis, Γ π erit ad Γ μ sive Ζ Μ, ut Ζ Π ad Ζ λ; atque adeo rectangulum Γ π in Ζ λ æquale erit rectangulo Ζ Μ in Ζ Π, hoc est rectangulo Ξ, per Constructionem. Huic autem æquale est rectangulum Κ Γ in Ζ Λ; quia Κ Γ est ad Γ π ut Ζ λ ad Ζ Λ. Ergo constat propositio; nec pluribus opus est, cum eodem omnino argumento, mutatis mutandis, idem de quâvis aliâ Tangente demonstrari possit.

Hinc aperitur alia, & à præcedentibus diversa, methodus componendi problemata hæc in rectis non parallelis, referendo ea ad duo priora Loca Lib. I. Quoniam enim rectangulum Ζ Π in Μ Η æquale est cuivis rectangulo Π λ in Η Κ, à rectâ quâvis Κ Λ contingente Hyperbolas Ο Σ Π, Η Τ Ι, diametroque Π Η occurrente, abscisso; eademque recta Κ Λ abscindit etiam rectangulum Ζ Λ in Γ Κ æquale rectangulo dato Ζ Π in Ζ Μ: Si in recta Π Ζ Ν loco Ζ capiatur punctum Π, & in Α Β punctum Η loco puncti Γ; ac fiat ut Ζ Μ ad Μ Η ita rectangulum auferendum Ξ ad aliud Ο: deinde per punctum quodvis datum ducantur (juxta Casum II. Loci primi, vel Casum II. & III^{um} Loci secundi Lib. I.) rectæ duæ Κ Λ auferentes rectangula Π λ in Η Κ æqualia rectangulo Ο, hoc est rectangulo Ζ Π in Μ Η: manifestum est easdem rectas Κ Λ abscindere semper rectangula Γ Κ in Ζ Λ æqualia rectangulo Ξ, sive Ζ Π in Μ Ζ. Similiter si capiantur puncta Α & Ν

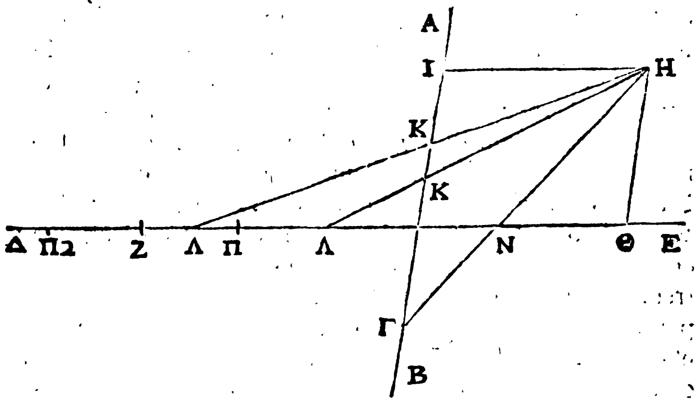
loco

loco ipsorum Γ & Z; ac ducantur rectæ duæ ΚΛ auferentes, per eosdem Casus, rectangula ΑΚ in ΝΛ æqualia rectangulo ΜΑ in ΖΝ: eædem rectæ abscindent etiam rectangula ΓΚ in ΖΛ æqualia rectangulo dato ΑΓ sive ΖΝ in ΖΜ, hoc est, rectangulo Ξ. Constat autem bis duas semper duci posse rectas, juxta Cas. II. & III. Loci secundi, quia limites non habent hi Casus: adeoque semper quatuor dari responsa, si fuerit punctum datum intra parallelas ΑΒ, ΝΠ. Determinatur autem Loci primi Casus secundus; unde certis tantum conditionibus possibile erit problema, si punctum unde ducendæ sunt rectæ, fuerit extra parallelas illas. Limites autem habentur ex iis quæ in Loco illo tradita sunt. Hæc *omnia* etiam demonstrari possunt in rectis duabus parallelis ΔΕ, ΡΩ, eodem modo easdem oppositas Hyperbolas contingentibus: quia rectæ omnes ΚΛ, auferentes rectangula ΞΛ in Ρπ æqualia rectangulo ΞΜ in ΓΡ; atque etiam auferentes rectangula ΙΛ in Οπ æqualia rectangulo ΙΜ in ΓΟ, abscindunt quoque rectangula ΓΚ in ΖΛ æqualia rectangulo ΓΜ in ΡΓ vel ΖΞ, hoc est, rectangulo dato Ξ, per Constructionem. Q. E. D.

Hæc autem levia sunt Prop. 42dæ IIIi *Conicorum* Corollaria nec pluribus prosequenda. Quoniam vero *Pappo* visum est has duas, *Rationis* nempe & *Spatii*, Sectiones, totidem generalibus Propositionibus, in Præfatione ad VIImum. descriptas dare; experiri placuit an earundem etiam solutiones pari compendio tradi non possint. Cumque quæ hactenus dicta sunt, harum Artium Studiosos tantum respicere videantur; Mathematicorum peritos jam alloquor; utriusque problematis generalem effectionem omnium simplicissimam ac maxime concinnam expositurus; unde etiam admiranda analogia & affinitas inter has duas satis superque elucebit.

Duabus rectis ΑΒ, ΔΕ positione datis, cæterisque ut in præcedentibus; ducantur utrique datæ parallelæ ΗΘ, ΗΙ: ac jungatur recta ΓΗ, ad occursum cum recta ΔΕ si opus fuerit producenda. Eidem autem occurrat in puncto Ν. Deinde applicetur rectangulum auferendum ad rectam ΓΙ, ita ut rectangulum ΓΙ in ΖΠ æquale fuerit rectangulo dato Ξ: ac ad utramque partem ponatur recta ΖΠ, ad Π & Π2. Applicetur jam rectangulum ΖΠ in ΘΝ excedens quadrato, utrinque ad rectam ΝΠ2; ac si fieri possit, etiam ad ΝΠ deficiens

deficiens quadrato; & habebuntur omnia puncta Λ: per quæ ducantur rectæ HKΛ. Dico rectas omnes HKΛ solvere problema. Quoniam enim rectangulum NΛ in ΛΠ æquale est rectangulo ΘN in ZΠ, erit ΛΠ ad ΠZ sicut ΘN ad NΛ; atque adeo ΠΛ erit ad ΛZ ut ΘN ad ΘΛ. Sed ΘN est ad ΘΛ sicut IK ad IΓ (ob æqualia rectangula ΘN in IΓ & ΘΛ in IK). Erit igitur ΠΛ ad ΛZ sicut KI ad IΓ. Quocirca ΠZ erit ad ZΛ ut KΓ ad IΓ: unde rectangulum ΠZ in IΓ, quod æquale fecimus rectangulo Ξ, erit quoque rectangulo ΓK in ZΛ æquale. Adeoque rectæ HKΛ solvunt problema.



Quod si auferenda fuerit ratio ΓK ad ZΛ, quæ fuerit ut N ad O; Iisdem manentibus, fiat ut N ad O ita IΓ ad ZΠ, ac ponatur ZΠ utrinque ad Π & Π2. Dein applicetur rectangulum ΘN in ZΠ excedens quadrato, utrinque ad rectam ΘΠ; atque etiam, si fieri possit, applicetur idem deficiens quadrato ad rectam ΘΠ2: ac puncta applicationum designabunt possibilia quæque puncta Λ, per quæ ductæ rectæ HKΛ solvant problema. Quoniam enim rectangulum ΘΛ in ΛΠ æquale est rectangulo ΘN in ΠZ, erit ΘΛ ad ΘN sicut ZΠ ad ΠΛ. Sed ΘΛ est ad ΘN sicut IΓ ad IK (ob rationem modo dictam) igitur ΓI est ad IK ut ZΠ ad ΠΛ: adeoque ΓI erit ad ΓK sicut ZΠ ad ΛZ. Permutando autem ΓI erit ad ZΠ sicut ΓK ad ZΛ. Sed fecimus ΓI ad ZΠ sicut N ad O. Quapropter ΓK est ad ZΛ sicut N ad O. Q. E. D.

Insuper adnotare licet, quemadmodum in *Sectione Spatii*, in Casibus ubi Θ non fuerit intermedium inter Z & N, rectangulum maximum æquale est eo quod fit sub ΙΓ in ΘΝ + ΘΖ − √4ΝΘΖ; minimum vero æquale rectangulo ΓΙ in ΘΝ + ΘΖ + √4ΝΘΖ. Sic in Sectione Rationis, cum punctum Ν non fuerit inter Θ & Ζ, ratio minima eadem est ac ratio ipsius ΓΙ ad ΘΝ + ΝΖ − √4ΘΝΖ: maxima vero ratio erit ut eadem ΓΙ ad ΘΝ + ΝΖ + √4ΘΝΖ.

Reducitur autem problema de ducendâ Tangente ad Curvam Parabolicam, (cujus duæ quælibet Tangentes aliquo modo dentur, una cum puncto contactûs in utrâque; vel si dentur tres Tangentes cum puncto contactûs in earum aliquâ; vel etiam quatuor Tangentes absque puncto) ad illud de *Sectione Rationis*, per ea quæ in Scholiis ad finem *libri* utriusque tradita sunt; quia rectæ omnes datam Parabolam contingentes, auferunt à datis Tangentibus segmenta datam inter se rationem habentia, ad modum eo loci demonstratum. Per priora autem duo Loca *Sectionis Spatii* Lib. I. datis magnitudine & positione diametris quibusvis conjugatis vel Ellipseos vel Hyperbolæ, duobus modis designantur Tangentes à dato quovis puncto ad contactum Conisectionis ducendæ, etiamsi Curva non descripta fuerit. Nam si per extremitates unius diametri ducantur rectæ duæ alteri diametro parallelæ, & rectâ de puncto dato ducendâ abscindantur segmenta rectangulum æquale quadrato alterius semidiametri continentia, extremitatibusque prioris diametri in parallelis datis adjacentia; per conversam propositionis 42^dæ Lib. III. *Conic.* constat rectam illam contingere Ellipsin vel Hyperbolam, cujus sunt diametri datæ. Compositio autem fiet per Cas. I^um & III^um. Loci primi, vel primum secundi in Ellipsi; & per II^dum. primi, vel II^um. & III^um. secundi Loci in Hyperbola: ut perpensis iis quæ pag. 143, 144. tradidimus manifestum erit. Atque hic est usus harum Sectionum non contemnendus quidem: sed & ad altiora, nempe ad solidorum Problematum Compositiones, eas adhibuisse Veteres, apud summum Geometram non levis est suspicio.

F I N I S.