S2

Aristippus Philosophus Socraticus, naufragio cum ejectus ad Rhodiensium litus, animadvertisset Geometrica schemata descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur, Bene speremus, Hominum enim vestigia video.
Vitruv. Architect. lib. 6. Praef.

delin. M Burghers sculpt. Univ. Oxon.

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI OCTO,

ET

SERENI ANTISSENSIS
DE SECTIONE
CYLINDRI & CONI
LIBRI DUO.

OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCCX.

GVIDI.

Imprimatur.

GUIL. LANCASTER,

Vice-Can. Oxon.

Feb. 9. 1709.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ

ΚΩΝΙΚΩΝ

ΒΙΒΛΙΑ Δ'. ΤΑ ΠΡΟΤΕΡΑ

ΜΕΤΑ

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ

ΛΗΜΜΑΤΩΝ

ΚΑΙ

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ

ΥΠΟΜΝΗΜΑΤΩΝ

APOLLONII PERGÆI

CONICORUM

LIBRI IV. PRIORES

CUM

PAPPI ALEXANDRINI

LEMMATIS

ET

EUTOCII ASCALONITÆ

COMMENTARIIS.

Ex Codd. MSS. Græcis edidit Edmundus Halleius apud *Oxonienses* Geometriæ Professor *Savilianus*.

Viro Præstantissimo,

JURISQUE CONSULTISSIMO,

D. JOANNI HOLT

EQUITI AURATO,

Capitali in *BANCO REGIO*

TOTIUS ANGLIÆ

JUSTITIARIO,

FIDO LEGUM CUSTODI,

Rectique & Æqui per Iniquissima Tempora

VINDICI & ASSERTORI

CONSTANTISSIMO,

APOLLONII CONICORUM

LIBROS QUATUOR,

Nunc primum Græce & Latine

EDITOS

In Perenne Grati Animi Testimonium

D. D. C.

EDM. HALLEIUS.

PRÆFATIO

AD REVERENDUM VIRUM

D. *GUIL. LANCASTER*

S. T. P.

ACADEMIÆ *OXONIENSIS*

Quarto VICE-CANCELLARIUM,

Reliquosque PRELI SHELDONIANI

CURATORES.

EUCLIDE, *qui Mathematicorum agmen ducit, non ita pridem à viro celeberrimo D.* Dav. Gregorio, *collega meo desideratissimo, in reipublicæ literariæ usum edito; idque eâ curâ eâque elegantiâ, ut eruditorum omnium plausum meruerit: Eidem mihique suaserunt amici artium optimarum amantissimi, ut unum aut alterum è veteribus Geometris ei comites adjungeremus. Hoc ut facere vellemus, Tu, Vir egregie,* Dne Vice-Cancellarie, *assentiente Curatorum cœtu, auctoritate tuâ nosmet permovisti: Tu inquam, cui nihil antiquius est quam ut summo splendore gaudeat Academia nostra, bonæque literæ suam habeant & tueantur dignitatem. Cogitantibus igitur nobis quemnam Veterum potissimum eligeremus, in quo expoliendo opera nostra enitesceret,* Archimedes, *dum ætatem ejus & præstantiam respicimus, opem primus efflagitare visus est. Sed cum ille Elementa Conica ubique fere, ut prius cognita, assumpserit, quæ tamen non nisi ab* Apollonio *demonstrata habemus; atque* Archimedes Græce *pariter ac* Latine *aliquoties prodierit, dum* Pergæus *non nisi magna sui parte truncatus, idque versione minus fideli parumque eleganti, circumferretur: his causis adducti ad* Apollonium *emendandum & edendum nosmet summa cum alacritate accinximus; ea quidem lege ut* Gregorius *quatuor priores Conicorum libros cum* Eutocii *Commentariis* Græce Latineque *prelo pararet, atque ipse tres posteriores ex* Arabico *in* Latinum *sermonem verterem, Octavumque (quem temporis injuria desideramus), restituere conarer. Illi opus hoc aggredienti ad manus erat* Apollonii *Codex MS.* Græcus *è Bibliotheca* Savilii *Mathematica,* præstantissimi istius Viri calamo hinc illinc non leviter emendatus; & paulo post accessit alter benigne nobiscum à Reverendo Dno Baynard S.T.P. communicatus: sed eadem fere utrisque communia erant vitia, utpote ex eodem Codice, ut videtur, descriptis. Ad Eutocium quidem publicandum non aliud repertum est exemplar Græcum, præter Baroccianum in Bibliotheca Bodlejana adservatum. His igitur auxiliis instructus, dum Græcis accurandis, Latinæque Versioni Commandini corrigendæ (quæ non exigui negotii res erat) strenue atque omni cura & cogitatione incumbit, ictu mortis improviso, magno sane meliorum literarum damno, nobis ereptus est, opere jam sub prelo fervente, sed ad paginam duntaxat XLIVtam provecto. Quo factum est ut absolvendi quod supererat labor in me devolveretur, novumque onus suscipere necesse habuerim.

Rei autem difficultate & magnitudine nihil deterritus, in Gregorii pariter ac mea quam nactus eram sparta ornanda processi, usus Apographo Bodlejano Codicis Arabici, ex Versione satis antiqua à Thebit ben Corah facta, sed (annis abhinc circiter CCCCL.) à Nasir-Eddîn recensita, (viris inter Mathematicos Orientis celeberrimis.) In consilium tamen nonnunquam adhibui etiam MS. Codicem Arabicum alium Bodlejanum, qui continet Epitomen ejusdem Versionis ab Abdolmelec Schirazita Persa ante quingentos annos confectam: qui quidem codex à Christiano Ravio ex Oriente advectus est, & ab eodem, magis quam facile existimari potest, barbare traductus. Quandoque etiam mihi adjumento fuit altera Conicorum Apollonii Epitome ab Abalphath Isphahanensi adornata, quam haud ita commode traduxit Abraham Echellensis: commentariis tamen uberrimis illustravit eximius ille Mathematicus & Philosophus Alphonsus Borellus. Interpretatione autem mea, qua potui fide, ad umbilicum perducta, ad nos demum perlatum est exemplar illud Golianum antiquissimum, quod ab hæredibus Golii redemerat Vir maximus idemque optimus Narcissus Marsh Archiepiscopus Armachanus; quod, pro summo suo erga scientias Mathematicas amore, nobis ad operis emolumentum deesse noluit: codicem quantivis pretii per mare hyemale mediosque hostes ex Hibernia transmittens. Ex hoc optimæ notæ codice (qui septem Apollonii libros complexus est) non solum Versionem meam recensui, & à mendis nonnullis liberavi; sed & lacunas aliquot, quæ passim fere, etiam in Græcis, occurrebant, supplevi; sensumque auctoris, quoad ejus fieri potuit, primæva perspicuitate donavi. His peractis, ad librum Octavum restituendum aggressus sum; quem etiam ante ætatem Thebit deperditum fuisse comperimus: deprehendentes autem indicio Pappi, quod argumentum ejus argumento Septimi conjunctissimum fuerat, quodque problemata διωρισμένα Octavi è theorematis διοριστικοῖς Septimi limites suos habuerant, tam problemata ipsa quam eorundem ordinem assecutus mihi videor. Analyses vero nostras, ut & Compositiones ipsorum problematum, quas loco Apollonianarum

rum substituimus, si non cum illis ubique fere consentiant, ab iisdem tamen non multum esse diversas persuasum habeo. Sed hac de re aliorum esto judicium. Porro singulis Apollonii *libris* Pappi Lemmata *præfixa dedimus, è duobus Codd. MSS.* Savilianis *desumpta, quæ quidem vice Commentarii esse possunt in loca difficiliora: quem in finem eadem ipsa aliquoties ab* Eutocio *usurpantur. Ob argumenti autem affinitatem,* Sereni *libros duos de Sectione Cylindri & Coni publico donare haud gravatus sum, jam primum* Græce *impressos: quos è Codicibus tribus Bibliothecæ Regiæ* Parisiensis *sui in usum describi curaverat vir doctissimus* Henricus Aldrichius S.T.P. *Ædis* Christi Decanus; *mihique, ut simul cum* Apollonio *lucem aspicerent, perhumaniter impertiit. In his omnibus evulgandis industriam haud levem & diligentiam adhibui; mecum (quod fateri non piget) summopere adnitente D.* Joanne Hudsono *Bibliohecæ* Bodlejanæ *Præfecto, manumque auxiliarem (prout in* Euclide *fecerat) non invito porrigente: cui, cum nostro tum communi omnium eruditorum nomine, gratias quas possumus maximas referimus. Hactenus de operibus nostro opere & studio qualicunque emendatis: de Autoribus ipsis pauca supersunt dicenda.*

Apollonius Pergæ *natus est (quæ celebris olim* Pamphyliæ *urbs) tempore* Ptolemæi Euergetæ *regis* Ægypti *(cujus regnum iniit anno* CCXLVII. *ante* Christum) *ut nobis autor est* Heraclius *sive* Heraclides *(nam utroque modo scribitur apud* Eutocium) *qui vitam* Archimedis *descripsit. Apud* Euclidis *discipulos* Alexandriæ *diu operam dedit studiis Mathematicis: & sub* Philopatore *(qui imperii sui anno* XVII, *ante* Christum CCV. *diem obiit supremum) maxima erat in celebritate, teste* Ptolemæo Hephæstione *apud* Photium *Cod.* CXC. *adeo ut hinc liceat conjicere, quod annis circiter* XL. *minor fuerit* Archimede, *quodque non longo intervallo præcesserit* Geminum Rhodium, *certe* Hipparcho *majorem. Testatur autem* Geminus *hunc nostrum* Apollonium, *propter eximium hoc Conicorum opus, inter sui ævi Mathematicos* Magni Geometræ *nomen adeptum esse. Quanti illum æstimarunt Veteres non solum ex* Vitruvio *constat,* Cap. I. Lib. I. *ubi etiam* Archimedi, *saltem ordine, præfertur; sed ex eo quod, ut inter* Græcos *magni nominis commentatores habuerit quamplurimos,* Pappum, Hypatiam, Serenum *&* Eutocium, *ita & inter Orientales etiam nonnullos ingenii doctrinæque laude præcellentes; quales apud* Arabes *fuere* Thebit ben Corah *&* Beni Moses; *apud* Persas *vero* Abalphath *&* Abdolmelec, *à quibus in Epitomen redactus est; ac denique magnum illud Matheseos* Persicæ *lumen* Nasir-eddin, *qui Conica hæc omnia recensuit, notisque illustravit, circa annum* Christi MCCL. *Unde mirum fortaße videbitur tanti nominis autorem, & fere per bis mille annos inter principes Geometras habitum, in hoc erudito seculo nondum* Græce *comparuisse. Præter Conica autem multa alia scripsit* Apollonius *noster, autore* Pappo *in Præfatione ad librum* VII. Collect. Math.

quam

quam non ita pridem nos primi Græce *edidimus: duos ſcilicet* περὶ λόγου ἀποτομῆς *&* περὶ χωρίου ἀποτομῆς *libros, quos, noſtro opere non infeliciter (uti ſperamus) reſtitutos, in lucem emiſimus; dein* περὶ διωρισμένης τομῆς *libros duos, ac totidem* περὶ ἐπαφῶν *duos quoque* νεύσεων, *ac pariter duos* τόπων ἐπιπέδων. *Lemmata his omnibus demonſtrandis aſſumpta conſervavit* Pappi *liber* VII. *unde etiam diſcimus hæc omnia fuiſſe* τόπου ἀναλυομένου, *ſive ad Analyſin Veterum uſurpata. Quin & aliud* Apollonii *opus laudatur ab* Eutocio, *in Commentario in* Archimedis *Dimenſionem Circuli,* ὠκυτόβοον *dictum; quo tractatum fuit, uti videtur, de expediendo calculo Arithmetico, ante inventas cyphras* Indicas *valde intricato: ejuſque ſpecimen habetur in fragmento lib. II.* Pappi, *ut exiſtimat ſubtiliſſimus* Walliſius, *qui anno* MDCLXXXVIII. *fragmentum iſtud edidit. Verum pro* ὠκυτόβοον *rectius (mea ſententia) ſcriberetur* ὠκυτόκιον: *utpote cujus ope numerorum magnorum multiplices* &c. *cito & facillime producerentur.*

De Eutocio (*nam* Pappum *præterimus, ſpei pleni unum aut alterum quandoque exoriturum, qui illum ejuſque opera illuſtrabit*) *nobis hoc tantum conſtat; quod* Aſcalone Palæſtinæ *urbe oriundus ſub* Juſtiniano *floruerit, circa annum* Chriſti DXL. *Nam quæ commentatus eſt in* Apollonium *inſcripſit* Anthemio Tralliano; *quæ vero in* Archimedem *præceptori ſuo* Iſidoro Mileſio *Mechanico: illi vero, Architecti clariſſimi,* Juſtiniano *imperante celeberrimum Sanctæ* Sophiæ *templum exſtruxerunt, ſtatim ab Anno* Chriſti DXXXII. *teſte* Procopio.

Quod vero ad Serenum *attinet, de eo nihil comperimus, niſi quod* Antiſſa *Inſulæ* Lesbi *urbe ortus fuerit; &, præter Librum unum de Sectione Cylindri & alterum de Sectione Coni, Commentaria ſcripſerit in* Apollonium; *quodque ante* Marinum (Procli *diſcipulum*) *vixerit, uti conſtat ex* Marini *Præfatione in* Euclidis *Data.*

Abſoluta hac laboris mei & operum jam Vobis oblatorum hiſtoriola, reliquum eſt ut Vobis, Preli Curatoribus, gratias agam immortales, pro eo quo Matheſin, &, ſi id adjici patiemini, me quoque proſecuti eſtis ſtudio; Deum O. M. obteſtans atque precans, ut cuſtodiat, ſervet, & protegat hunc rei literariæ ſtatum, hanc florentiſſimam Academiam.

Erratis levioribus quæſumus ignoſcat Lector, graviora ſic corrigat.

Pag. 8. verſ. 1. Eutocii lege γεωμέτρης. & in verſione v. 2. *Pamphyliæ*: p. 10. v. 37. l. ἀγωγὴν στοιχειώδη ὤν. p. 10. v. 38. l. *diſpoſita in textu exhibere.* p. 18. v. 51. l. ὅτι καὶ. p. 21. v. 35. l. [illegible] p. 22. v. 22. l. δὴ διὰ τῶν Z. p. 33. v. 17. l. ἴσος ἄρα ὁ H τῷ A. p. 43. v. 11. l. διαμέτρου. v. 41. l. πάντως σαφὲς ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, ὅτι ἡ μέση. v. 45. l. περατοῦται. p. 52. v. 16. l. ὀρθία. p. 56. v. penult. l. εὐθεῖα ἡ ΓΔ ἀπὸ [illegible]. p. 92. v. 48. l. λόγον ἔχει ὃν. p. 93. v. antepenult. l. *diametrum, coni ſectionem,* p. 94. v. 4. l. *applicatæ poſſint.* p. 99. v. 34. l. ὅτι ἤτις παράλληλος. p. 107. v. 3. l. ἡ ΔΕ. p. 144. in Schem. l. duc rectam ΓΧ. v. 42. l. πρὸς KH. p. 154. v. 22. l. ὑπὸ ΓΑΒ. p. 174. v. penult. l. τὸ ὑπὸ ΓΑ. p. 176. v. 19. l. ὑπὸ MΛZ. p. 182. v. 23. l. πρὸς τὴν AB. p. 204. in Schem. 3. duc rectam BΔ.

ΠΑΠ-

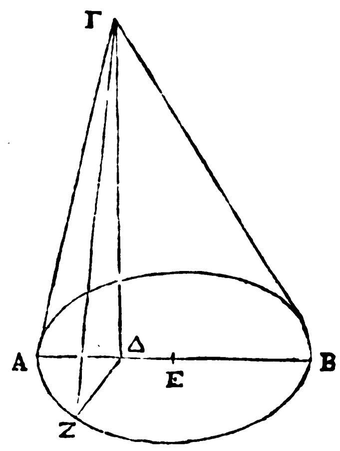
ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΛΗΜΜΑΤΑ
ΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA
IN PRIMUM LIBRUM CONICORUM
APOLLONII PERGÆI.

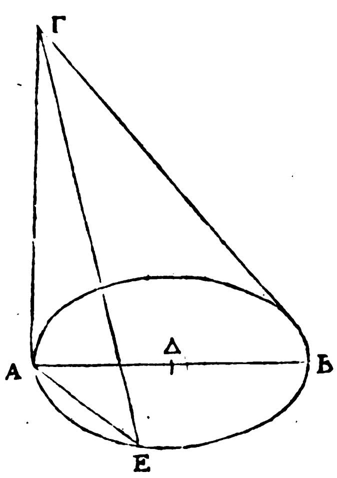
ΛΗΜΜΑ α'.

Ἔστω κῶνος οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. εἰ μὲν οὖν ἰσοσκελής ἐστιν ὁ κῶνος, φανερὸν ὅτι πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν ΑΒ κύκλον προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· εἰ δὲ σκαληνός, δέον ἔστω εὑρεῖν τίς μεγίστη, καὶ τίς ἐλαχίστη.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος, καὶ πιπτέτω πρότερον ἐντὸς τοῦ ΑΒ κύκλου, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΓΒ. λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΓΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν ΑΒ προσπιπτουσῶν. προσβεβλήσθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῆς ΔΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ εἰσὶν αἱ πρὸς τῷ Δ γωνίαι ὀρθαί· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΓΖ· κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΓΑ μείζων ἐστίν. ὥστε μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΓΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΓΑ.



Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἡ ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἀγομένη πιπτέτω ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΑΒ, καὶ ἔστω ΓΑ, καὶ πάλιν ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ. λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ. ὅτι μὲν οὖν μείζων ἡ ΓΒ τῆς ΓΑ φανερόν. διήχθω δέ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΓΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ΑΕ, καὶ αὐταῖς πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῆς ΓΕ· ὁμοίως καὶ πασῶν. καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ μείζων δειχθήσεται ἡ ΕΓ τῆς ΓΑ· ὥστε μεγίστη μὲν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΓΑ τῶν ἀπὸ τοῦ Γ σημείου πρὸς τὸν ΑΒ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.



Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, πιπτέτω ἡ κάθετος ἐκτὸς τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε ἐπι-

LEMMA I.

Sit conus cujus basis circulus A B, & vertex punctum Γ. si quidem isosceles est conus, manifesto constat rectas omnes, quæ ab ipso Γ ad circuli A B circumferentiam ducuntur, inter se æquales esse: si vero scalenus est; oporteat invenire quæ maxima sit, & quæ minima.

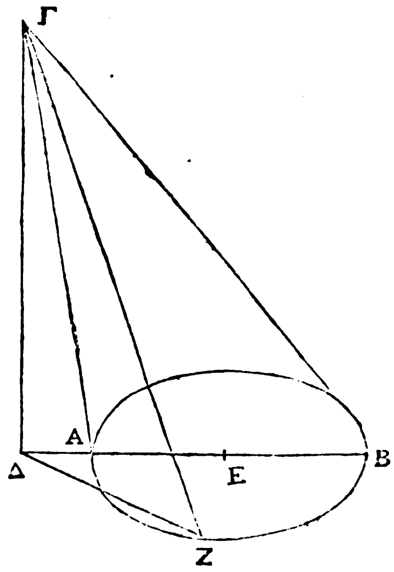
Ducatur [per 11. 11.] à puncto Γ ad planum circuli A B recta perpendicularis, quæ primum cadat intra circulum, sitque Γ Δ, & sumatur centrum circuli, quod sit E; & juncta Δ E producatur in utramque partem ad puncta A, B; deinde A Γ, Γ B jungantur. dico ipsam B Γ maximam esse, & A Γ minimam linearum omnium quæ à puncto Γ ad circulum A B pertingunt. ducatur enim alia quævis Γ Z, & Z Δ jungatur. major igitur est [per 7.3.] B Δ quam Δ Z, communis autem Γ Δ, & anguli qui ad Δ recti; ergo major est B Γ quàm Γ Z: eodem modo & Γ Z major ostendetur quàm Γ A. ex quibus apparet Γ B omnium maximam, A Γ vero minimam esse.

Rursus perpendicularis à puncto Γ ducta cadat in ipsius A B circuli circumferentiam, quæ sit Γ A, & ad circuli centrum Δ juncta A Δ producatur in B, & B Γ jungatur. dico B Γ maximam esse, & A Γ minimam. rectam igitur Γ B majorem esse quam Γ A perspicuum est. ducatur autem alia quævis recta Γ E; & jungatur A E. itaque quoniam A B diameter est, necessario major erit quam A E, & A Γ normalis est ipsis A B, A E; ergo Γ B quam Γ E major erit: & similiter major quàm ceteræ omnes. eodem modo & E Γ major ostendetur quam Γ A: quare B Γ maxima est, A Γ vero minima rectarum omnium, quæ ab ipso Γ ad circulum A B pertingunt.

Iisdem positis, cadat perpendicularis Γ Δ extra circulum, & ad circuli centrum E ducta Δ E produca-

tur

tur, junganturque ΑΓ, ΒΓ. dico ΒΓ maximam, & ΑΓ minimam esse omnium quæ à puncto Γ ad ΑΒ circulum perducuntur. constat namque ΒΓ majorem esse ipsa ΓΑ: sed & major erit omnibus quæ ab ipso Γ in circumferentiam circuli ΑΒ cadunt. ducatur enim alia quævis recta ΓΖ, & ΔΖ jungatur. cum igitur ΒΔ per centrum transeat, major est [per 8. 3.] quam ΔΖ. est autem ΔΓ perpendicularis ad rectas ΔΒ, ΔΖ, quoniam & ad ipsum planum; ergo major erit ΒΓ quam ΓΖ: & similiter major quam aliæ omnes. perspicuum est igitur ipsam ΓΒ maximam esse. at vero ΑΓ minimam *hoc modo ostendemus*. quoniam enim minor est [per 8. 3.] ΑΔ quam ΔΖ, atque est ad ipsas perpendicularis ΔΓ; minor erit ΑΓ quam ΓΖ: & ita minor quam aliæ. recta igitur ΑΓ minima est, & ΒΓ maxima omnium, quæ à puncto Γ ad ΑΒ circuli circumferentiam perducuntur.



ζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΓ. λέγω ὅτι δὴ μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. ὅτι μὲν οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΓΑ φανερόν· λέγω δὴ ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὴν τοῦ ΑΒ κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν. προσπιπτέτω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ. ἐπεὶ οὖν διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΔ, μείζων ἐστὶν ἡ ΔΒ τῆς ΔΖ. καὶ ἔστιν αὐταῖς ὀρθὴ ἡ ΔΓ, ἐπεὶ καὶ τῷ ἐπιπέδῳ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΓΖ· ὁμοίως καὶ πασῶν. μεγίστη μὲν ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ. ὅτι δὲ καὶ ἡ ΑΓ ἐλαχίστη. ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΖ, ἔστι καὶ αὐταῖς ὀρθὴ ἡ ΔΓ, ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΖ· ὁμοίως καὶ πασῶν. ἐλαχίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, μεγίστη δὲ ἡ ΒΓ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὴν τοῦ ΑΒ κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.

In Definitiones Conicorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli &c.] Convenienter *Apollonius* addidit, *in utramque partem producatur*; cum uniuscujusque coni generationem tradat. si enim isosceles sit conus frustra produceretur, quia recta linea quæ convertitur circumferentiam circuli perpetuo contingit; quippe cum ab ea punctum manens semper æquali distet intervallo. sed quoniam potest & scalenus esse conus, in quo, ut jam demonstratum est, & maximum, & minimum latus invenitur, necessario illud apposuit; ut quæ minima est linea usqueadeo augeri intelligatur quoad fiat maximæ æqualis, & propterea circuli circumferentiam semper contingat.

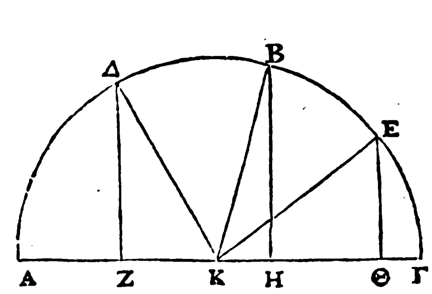
Εἰς τοὺς κωνικοὺς ὅρους.

ΕΑΝ ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν] Εἰκότως ὁ Ἀπολλώνιος προστίθησι, "ἐφ' ἑκάτερα προσεκβληθῇ", ἐπειδήπερ τοῦ τυχόντος κώνου γένεσιν δηλοῖ. εἰ μὲν γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, περιττὸν ἦν προσεκβάλλειν, διὰ τὴν φερομένην εὐθεῖαν αἰεί ποτε ψαύειν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἐπειδήπερ πάντοτε τὸ σημεῖον ἴσον ἀφέξειν ἔμελλεν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐπεὶ δὲ δύναται καὶ σκαληνὸς εἶναι ὁ κῶνος, ἔστι δὲ, ὡς προγέγραπται, ἐν κώνῳ σκαληνῷ μεγίστη τις καὶ ἐλαχίστη πλευρὰ, ἀναγκαίως προστίθησι τὸ "προσεκβληθῇ"· ἵνα αἰεὶ προσεκβληθεῖσα ἡ ἐλαχίστη αὔξηται ἕως ἴση γένηται τῇ μεγίστῃ, καὶ ψαύσῃ κατ' ἐκεῖνον τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

LEMMA II.

Sit linea ΑΒΓ, & positione data ΑΓ; omnes autem, quæ ab ipsa linea ad ΑΓ perpendiculares ducuntur, ita se habeant, ut quadratum uniuscujusque ipsarum æquale sit rectangulo sub basis segmentis, quæ ab ipsa secantur, contento: dico ΑΒΓ circuli circumferentiam esse, diametrum autem ipsius rectam ΑΓ.

DUCANTUR enim à punctis Δ, Β, Ε perpendiculares ΔΖ, ΒΗ, ΕΘ. ergo quadratum ex ΔΖ æquale est rectangulo sub ΑΖΓ, & quadratum ex ΒΗ rectangulo sub ΑΗΓ, ipsum vero ex ΕΘ quadratum rectangulo sub ΑΘΓ æquale. seceturΑΓ bifariam in Κ, & ΚΔ, ΚΒ, ΚΕ jungantur. itaque quoniam ΑΖΓ rectangulum unà cum quadrato ex ΖΚ est æquale [per 5. 2.] quadrato ex ΑΚ, & ipsi ΑΖΓ æquale est [ex hyp.] quadratum ex ΔΖ: erit quadratum ex ΔΖ unà cum quadrato ab ipsa ΖΚ, hoc est [per 47. 1.] quadratum ex ΔΚ, æquale quadrato ex ΑΚ. quare ΑΚ ipsi ΚΔ est æqualis. similiter ostendemus & unamquamque rectarum ΒΚ, ΕΚ, ipsi ΑΚ vel ΚΓ æqualem esse: ergo ΑΒΓ circumferentia est circuli cujus centrum Κ, hoc est circa diametrum ΑΓ descripti.



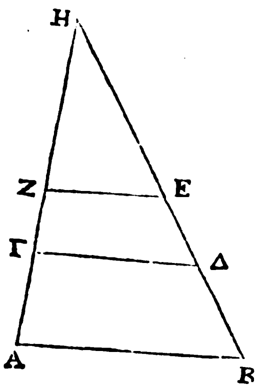
ΛΗΜΜΑ β'.

Ἔστω γραμμὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ θέσει ἡ ΑΓ, πᾶσαι δὲ αἱ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετοι ἀγόμεναι οὕτως ἀγέσθωσαν, ὥστε τὸ ἀπὸ ἑκάστης αὐτῶν τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων ἀφ' ἑκάστης αὐτῶν τμηθέντων· λέγω ὅτι κύκλου περιφέρειά ἐστιν ἡ ΑΒΓ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἐστιν ἡ ΑΓ.

ΗΧΘΩΣΑΝ γὰρ ἀπὸ σημείων τῶν Δ, Β, Ε κάθετοι αἱ ΔΖ, ΒΗ, ΕΘ. τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ ΔΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖΓ, τὸ δὲ ἀπὸ ΒΗ τῷ ὑπὸ ΑΗΓ, τὸ δὲ ἀπὸ ΕΘ τῷ ὑπὸ ΑΘΓ. τετμήσθω δὲ δίχα ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΔ, ΚΒ, ΚΕ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΖΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΚ, ἀλλὰ τῷ ὑπὸ ΑΖΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΔΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΔΚ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΚ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΚΔ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΚ, ΕΚ ἴση ἐστὶ τῇ ΑΚ ἢ τῇ ΚΓ· κύκλου ἄρα περιφέρειά ἐστιν ἡ ΑΒΓ τοῦ περὶ κέντρον τὸ Κ, τουτέστι τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ.

ΛΗΜΜΑ γ'.

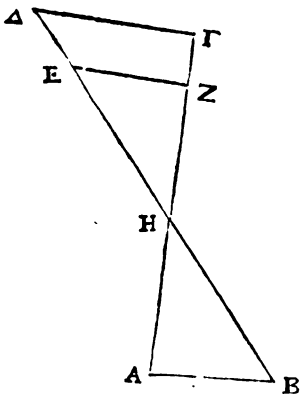
Τρεῖς παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, καὶ διήχθωσαν εἰς αὐτὰς δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΗΖΓ, ΒΗΕΔ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ τετράγωνον.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΕ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΖ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΖ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ τετράγωνον οὕτω τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ τετράγωνον.

LEMMA III.

Sint tres rectæ parallelæ AB, ΓΔ, EZ, & in ipsas ducantur duæ rectæ AHZΓ, BHEΔ: dico ut rectangulum quod fit sub AB & EZ ad quadratum ex ΓΔ ita esse rectangulum sub AHZ ad quadratum ex HΓ.



Quoniam enim ut recta AB ad ZE, hoc est [per 1. 6.] ut rectangulum sub AB & ZE ad quadratum ex ZE, ita [per 4. 6.] AH ad ipsam HZ, hoc est [per 1. 6.] rectangulum sub AHZ ad quadratum ex HZ: erit [per 11. 5.] ut rectangulum sub AB & ZE ad quadratum ex ZE ita rectangulum sub AHZ ad quadratum ex HZ. sed [per 4. & 22. 6.] ut quadratum ex ZE ad quadratum ex ΓΔ sic quadratum ex ZH ad quadratum ex HΓ. ex æquali igitur [per 22. 5.] ut rectangulum sub AB & ZE ad quadratum ex ΓΔ sic rectangulum sub AHZ ad quadratum ex HΓ.

ΛΗΜΜΑ δ'.

Ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον· ὅτι γίνονται τὸ μὲν ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΕΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΔΓ τῷ ὑπὸ ΒΔΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΒΓ τῷ ὑπὸ ΕΒΔ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· συνθέντι, καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἡγουμένων, καὶ ἀναστρέψαντι, ἔστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΕ τετραγώνῳ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΕΔ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΔΕ. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΓ, ἀμφότερα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ τετραγώνου· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΒΔ. γίνεται ἄρα τὰ τρία.

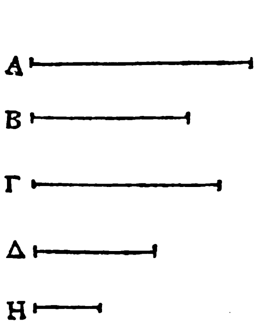
LEMMA IV.

Sit ut AB ad BΓ ita AΔ ad ΔΓ, & secetur AΓ bifariam in puncto E: dico rectangulum sub BEΔ quadrato ex EΓ æquale esse; itemque rectangulum sub AΔΓ æquale rectangulo sub BΔE; & rectangulum sub ABΓ rectangulo sub EBΔ.

Quoniam enim ut AB ad BΓ ita est AΔ ad ΔΓ; erit [per 15, 18, & 19. 5.] componendo, sumptisque antecedentium dimidiis, & per conversionem rationis, ut BE ad EΓ ita ΓE ad EΔ: rectangulum igitur sub BEΔ [per 17. 6.] æquale est quadrato ex ΓE. commune auferatur quadratum ex EΔ: ergo quod relinquitur [per 3. & 5. 2.] rectangulum sub AΔΓ rectangulo sub BΔE est æquale. rursus quoniam rectangulum sub BEΔ æquale est quadrato ex EΓ, utraque auferantur à quadrato ex BE: reliquum igitur rectangulum sub ABΓ [per 6. 2.] reliquo sub EBΔ [per 2. 2.] æquale erit. quæ tria erant demonstranda.

ΛΗΜΜΑ ε'.

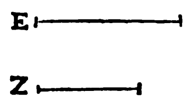
Τὸ Α πρὸς τὸ Β τὸν συνημμένον λόγον ἐχέτω ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β, καὶ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε.



Τῷ γὰρ τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τοῦ Δ πρὸς τὸ Η. ἐπεὶ οὖν ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τοῦ τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ, τουτέστι τοῦ Δ πρὸς τὸ Η· ἀλλὰ ὁ συνημμένος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Δ πρὸς τὸ Η, ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Η ἐστίν· ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Η. ἐπεὶ δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Η, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Η πρὸς τὸ Δ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ Γ πρὸς τὸ Η ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ὁ δὲ τοῦ Η πρὸς τὸ Δ

LEMMA V.

Habeat A ad B rationem compositam ex ratione Γ ad Δ, & ex ratione E ad Z: dico Γ ad Δ rationem compositam habere ex ratione A ad B, & ratione Z ad E.



Fiat enim ratio Δ ad H eadem quæ est E ad Z. & quoniam ratio A ad B composita est ex ratione Γ ad Δ, & ratione E ad Z, hoc est Δ ad H; ratio autem composita ex ratione Γ ad Δ, & ratione Δ ad H est [per 5. def. 6.] eadem cum ratione Γ ad H: erit ut A ad B ita Γ ad H. rursus quoniam Γ ad Δ rationem habet compositam ex ratione Γ ad H, & ratione H ad Δ; & ratio Γ ad H demonstrata est eadem quæ A ad B; & invertendo ratio H ad Δ eadem

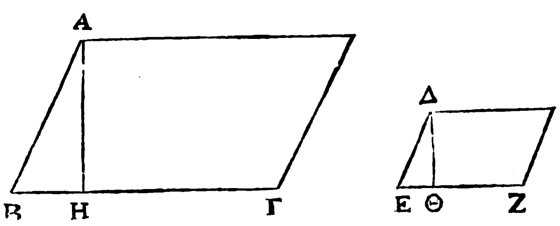
eadem est quæ Z ad E: habebit igitur Γ ad Δ rationem compositam ex ratione A ad B, & ratione Z ad E.

ἐκ τοῦ ἀνάπαλιν ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ Z πρὸς τὸ E· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ A πρὸς τὸ B, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Z πρὸς τὸ E.

LEMMA VI.

Sint duo parallelogramma AΓ, ΔZ æquiangula, quorum angulus B sit æqualis angulo E: dico ut rectangulum sub ABΓ ad rectangulum sub ΔEZ ita esse parallelogrammum AΓ ad ΔZ parallelogrammum.

SI enim anguli B, E recti sint, illud perspicue constat: sin minus, demittantur perpendiculares AH, ΔΘ. & quoniam angulus B æqualis est angulo E, & angulus ad H rectus æqualis recto ad Θ: erit triangulum ABH triangulo ΔEΘ æquiangulum. quare [per 4. 6.] ut BA ad AH ita EΔ ad ΔΘ. sed [per 1. 6.] ut BA ad AH ita rectangulum sub ABΓ ad rectangulum quod sub AH, BΓ continetur: & ut EΔ ad ΔΘ ita rectangulum sub ΔEZ ad rectangulum contentum sub ΔΘ, EZ. quare permutando, ut rectangulum sub ABΓ ad rectangulum sub ΔEZ ita rectangulum sub AH, BΓ, hoc est [per 36. 1.] parallelogrammum AΓ, ad rectangulum sub ΔΘ, EZ, hoc est ad parallelogrammum ΔZ.



ΛΗΜΜΑ ϛʹ.

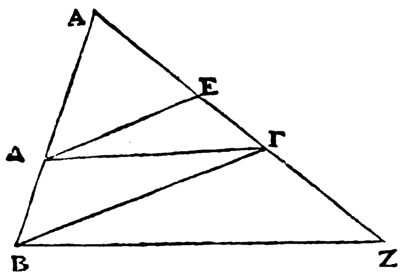
Εστω δύο παραλληλόγραμμα τὰ AΓ, ΔZ ἰσογώνια, ἴσην ἔχοντα τὴν B γωνίαν τῇ E γωνίᾳ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ABΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔEZ οὕτω τὸ AΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΔZ παραλληλόγραμμον.

ΕΙ μὲν οὖν ὀρθαί εἰσιν αἱ B, E γωνίαι, φανερόν· εἰ δὲ μή, ἤχθωσαν κάθετοι αἱ AH, ΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν B γωνία τῇ E, ἡ δὲ H ὀρθὴ τῇ Θ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABH τρίγωνον τῷ ΔEΘ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν AH οὕτως ἡ EΔ πρὸς τὴν ΔΘ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ BA πρὸς τὴν AH οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ABΓ πρὸς τὸ ὑπὸ AH, BΓ· ὡς δὲ ἡ EΔ πρὸς τὴν ΔΘ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΔEZ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘ, EZ. ἔστιν ἄρα ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ABΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔEZ οὕτω τὸ ὑπὸ AH, BΓ, τουτ' ἔστι τὸ AΓ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘ, EZ, τουτ' ἔστι πρὸς τὸ ΔZ παραλληλόγραμμον.

LEMMA VII.

Sit triangulum ABΓ, sitque BΓ parallela ΔE, & quadrato ex ΓA æquale fit rectangulum sub ZAE: dico quod, si jungantur ΔΓ, BZ, recta BZ ipsi ΔΓ parallela est.

HOC vero manifeste patet. quoniam enim [ex hyp. & per 17. 6.] ut ZA ad AΓ ita est ΓA ad AE; & [per 2. 6.] ut ΓA ad AE (ob parallelas) ita BA ad AΔ: erit ut ZA ad AΓ ita BA ad AΔ. ergo BZ, ΔΓ sunt parallelæ.



ΛΗΜΜΑ ζʹ.

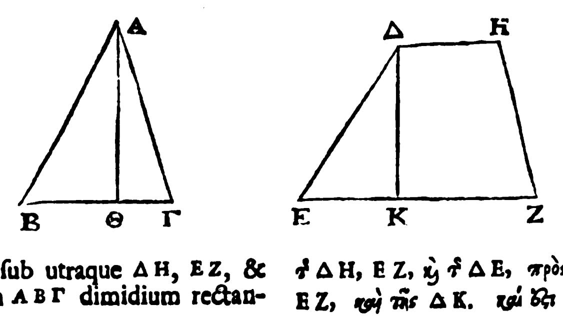
Εστω τρίγωνον τὸ ABΓ, ἔστω δὲ παράλληλος ἡ BΓ τῇ ΔE, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓA ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ZAE· ὅτι, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΓ, BZ, γίνεται παράλληλος ἡ BZ τῇ ΔΓ.

ΤΟΥΤΟ δὲ ἐστι φανερόν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ZA πρὸς τὴν AΓ οὕτως ἡ ΓA πρὸς τὴν AE, οὕτως ἐστίν, ἐν παραλλήλῳ, ἡ BA πρὸς AΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ZA πρὸς AΓ οὕτως ἡ BA πρὸς AΔ. παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ BZ, ΔΓ.

LEMMA VIII.

Sit triangulum ABΓ, trapezium vero ΔEZH, ita ut ABΓ angulus angulo ΔEZ sit æqualis, & ΔH parallela EZ: dico ut rectangulum sub ABΓ ad rectangulum quod continetur sub utraque ipsarum ΔH, EZ, & ΔE, sic esse triangulum ABΓ ad trapezium ΔEZH.

DUCANTUR enim perpendiculares AΘ, ΔK. & quoniam angulus ABΓ æqualis est angulo ΔEZ, & qui est ad Θ rectus æqualis recto ad K; erit [per 4. 6.] ut BA ad AΘ ita EΔ ad ΔK. sed [per 1. 6.] ut BA ad AΘ ita rectangulum sub ABΓ ad id quod continetur sub AΘ, BΓ; & ut EΔ ad ΔK ita rectangulum quod continetur sub utraque ΔH, EZ, & ΔE, ad contentum sub utraque ΔH, EZ, & ΔK. est autem triangulum ABΓ dimidium rectan-



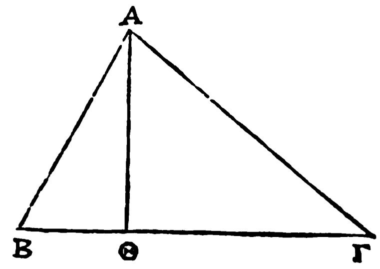
ΛΗΜΜΑ ηʹ.

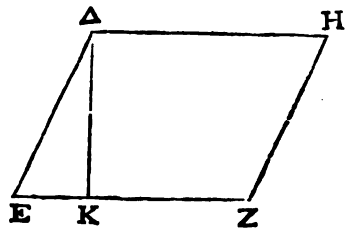
Εστω τρίγωνον μὲν τὸ ABΓ, τραπέζιον δὲ τὸ ΔEZH, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ABΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔEZ γωνίᾳ, ἡ δὲ ΔH τῇ EZ παράλληλος· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ABΓ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔH, EZ, καὶ τῆς ΔE, οὕτω τὸ ABΓ πρὸς τὸ ΔEZH.

ΗΧΘΩΣΑΝ κάθετοι αἱ AΘ, ΔK. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ABΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὀρθὴ Θ τῇ K ὀρθῇ ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς AΘ οὕτως ἡ EΔ πρὸς ΔK. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ BA πρὸς AΘ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ABΓ πρὸς τὸ ὑπὸ AΘ, BΓ· ὡς δὲ ἡ EΔ πρὸς τὴν ΔK οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔH, EZ, καὶ τῆς ΔE, πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔH, EZ, καὶ τῆς ΔK. καί ἐστι τοῦ μὲν ὑπὸ AΘ, BΓ ἥμισυ τὸ ABΓ

ΑΒΓ τρίγωνον· τὸ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΕΖ, καὶ τῆς ΔΚ ἥμισυ τὸ ΔΕΖΗ τραπέζιον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΕΖ, καὶ τῆς ΔΕ, οὕτω τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖΗ τραπέζιον.

Καὶ ἐὰν ᾖ δὲ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ· γίνεται ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖΗ παραλληλόγραμμον οὕτω τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ





ΔΕΖ, κατὰ τὰ αὐτά. καὶ φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, ἐὰν ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ καὶ ἴσον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ἴσον γίνεται τῷ δὶς ὑπὸ ΔΕΖ· ἐπὶ δὲ τοῦ τραπεζίου, ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΕΖ, καὶ τῆς ΔΕ.

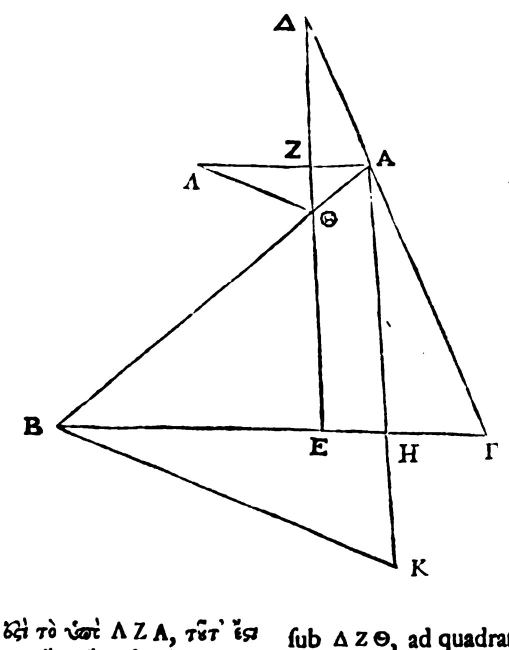
guli contenti sub ΑΘ, ΒΓ: & trapezium ΔΕΖΗ dimidium ejus quod sub utraque ΔΗ, ΕΖ, & ΔΚ continetur. ergo ut rectangulum sub ΑΒΓ ad rectangulum contentum sub utraque ΔΗ, ΕΖ, & ΔΕ, ita est triangulum ΑΒΓ ad ΔΕΖ trapezium.

Quod si ΑΒΓ triangulum sit, & ΔΖ parallelogrammum: eadem ratione fiet, ut ΑΒΓ triangulum ad ΔΕΖΗ parallelogrammum ita rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ ad duplum rectanguli sub ΔΕΖ. ex quibus constat rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ (siquidem ΔΖ parallelogrammum sit ipsique ΑΒΓ triangulo æquale) æquale esse duplo rectanguli sub ΔΕΖ: si vero trapezium, æquale ei, quod sub utraq; ΔΗ, ΕΖ, & ipsa ΔΕ continetur.

ΛΗΜΜΑ θʹ.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΓΑ διήχθω τις τυχοῦσα ἡ ΔΘΕ, καὶ αὐτῇ μὲν παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, τῇ δὲ ΒΓ ἡ ΑΖ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ τετράγωνον.

ΚΕΙΣΘΩ τῷ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΗΚ, τῷ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΚΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΑΛ ἐν κύκλῳ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΖΘΛ· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΚΒ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΖΘΛ γωνίᾳ. ἀλλὰ καὶ ἡ πρὸς τὸ Η γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τὸ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΚ οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΒ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἐστὶν ἐν παραλλήλῳ ἡ ΖΘ πρὸς ΖΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ· ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΒΗ πρὸς ΗΚ οὕτως ἄλλη τις ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ἡγουμένην τὴν ΖΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΚ οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΖΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΚ, τοῦτ' ἔστι πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, ὡς δὲ ἡ ΛΖ πρὸς ΖΑ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΛΖΑ, τοῦτ' ἔστι τὸ ὑπὸ ΔΖΘ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ.



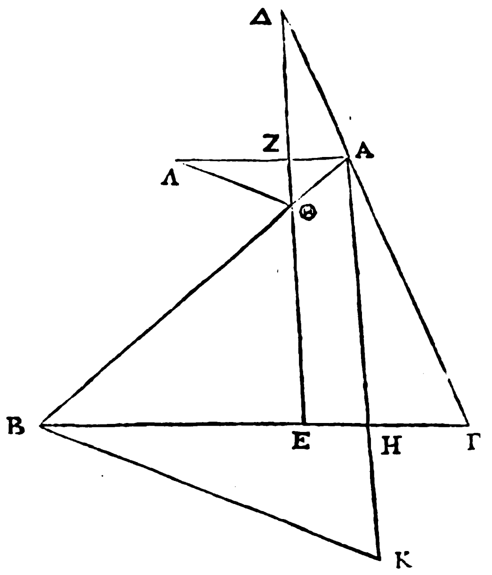
LEMMA IX.

Sit triangulum ΑΒΓ, &, producta ΓΑ ad Δ, ducatur quælibet recta ΔΘΕ, cui quidem parallela ducatur ΑΗ; ipsi vero ΒΓ parallela ΑΖ: dico ut quadratum ex ΑΗ ad rectangulum sub ΒΗΓ ita esse rectangulum sub ΔΖΘ ad quadratum ex ΖΑ.

PONATUR rectangulo sub ΒΗΓ æquale rectangulum sub ΑΗΚ, & rectangulo sub ΔΖΘ æquale rectangulum sub ΑΖΛ, & jungantur ΒΚ, ΘΛ. quoniam igitur [per 21. 3.] angulus ad Γ æqualis est angulo ΒΚΗ *; & angulus ΔΑΛ in circulo æqualis angulo ΖΘΛ: erit & angulus ΗΚΒ angulo ΖΘΛ æqualis. sed [per 29. 1.] & angulus ad Η est æqualis angulo ad Ζ: ergo [per 4. 6.] ut ΒΗ ad ΗΚ ita ΛΖ ad ΖΘ. quoniam autem ut ΑΗ ad ΗΒ ita ΘΕ ad ΕΒ; & ob parallelas ut ΘΕ ad ΕΒ ita ΘΖ ad ΖΑ: ut igitur ΑΗ ad ΗΒ ita ΘΖ ad ΖΑ. quoniam igitur est quidem ut ΑΗ ad ΗΒ ita ΘΖ ad ΖΑ, ut vero ΒΗ ad ΗΚ ita alia quædam ΛΖ ad antecedentem ΖΘ: quare ex æquali in perturbata proportione [per 23. 5.] ut ΑΗ ad ΗΚ ita ΛΖ ad ΖΑ. ut vero ΑΗ ad ΗΚ ita [per 1. 6.] quadratum ex ΑΗ ad rectangulum sub ΑΗΚ, hoc est [per conft.] ad rectangulum sub ΒΗΓ; & ut ΛΖ ad ΖΑ ita rectangulum sub ΛΖΑ, hoc est sub ΔΖΘ, ad quadratum ex ΖΑ: ergo ut quadratum ex ΑΗ ad rectangulum sub ΒΗΓ ita rectangulum sub ΔΖΘ ad quadratum ex ΖΑ.

* Nam [per 35. 3.] circulus circa triangulum ΒΑΓ descriptus transit per Κ. Similiter circulus circa ΔΑΘ descriptus transit per Λ.

Sed per compositionem rationum sic. Quoniam enim [per 4.6.] ratio ΑΗ ad ΗΒ est eadem quæ ΘΕ ad ΕΒ; hoc est ΘΖ ad ΖΑ: ratio autem ΑΗ ad ΗΓ eadem quæ ΔΕ ad ΕΓ; hoc est ΔΖ ad ΖΑ: erit ratio composita ex ratione ΑΗ ad ΗΒ, & ex



ratione ΑΗ ad ΗΓ, quæ quidem [per 23. 6.] est ratio quadrati ex ΑΗ ad rectangulum sub ΒΗΓ, eadem cum illa quæ componitur ex ratione ΘΖ ad ΖΑ, & ratione ΔΖ ad ΖΑ. hæc autem est ratio rectanguli sub ΔΖΘ ad quadratum ex ΖΑ.

Διὰ δὲ τοῦ συνημμένου. Ἐπεὶ ὁ μὲν τῆς ΑΗ πρὸς ΗΒ λόγος ἐστὶν ὁ τῆς ΘΕ πρὸς ΕΒ, τουτέστιν ὁ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ· ὁ δὲ τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΗΓ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΔΕ πρὸς ΕΓ, τουτέστι τῷ τῆς ΔΖ πρὸς ΖΑ· ὁ ἄρα συνημμένος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ, καὶ τοῦ τῆς ΔΖ πρὸς ΖΑ, ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ὑπὸ ΔΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ τετράγωνον.

ΑΠΟΛ-

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ
ΚΩΝΙΚΩΝ
ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ,
ΜΕΤΑ ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑΤΩΝ.

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBER PRIMUS,
CUM COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITÆ.

Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν.

Εἰ τῷ τε σώματι εὖ ἐπανάγεις, καὶ τὰ ἄλλα κατὰ γνώμην ἐστί σοι, καλῶς ἂν ἔχοι· μετρίως δὲ ἔχομεν καὶ αὐτοί. καθ' ὃν δὲ καιρὸν ἤμην μετά σου ἐν Περγάμῳ, ἐθεώρουν σε σπεύδοντα μετασχεῖν τῶν πεπραγμένων ἡμῖν κωνικῶν. πέπομφα οὖν σοι τὸ πρῶτον βιβλίον διορθωσάμενος· τὰ δὲ λοιπά, ὅταν εὐαρεστήσωμεν, ἐξαποστελοῦμεν. οὐκ ἀμνημονεῖν γὰρ οἴομαί σε παρ' ἐμοῦ ἀκηκοότα, διότι τὴν περὶ ταῦτα ἔφοδον ἐποιησάμην, ἀξιωθεὶς ὑπὸ Ναυκράτους τοῦ γεωμέτρου, καθ' ὃν δὲ καιρὸν ἐσχόλαζε παρ' ἡμῖν παραγενηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν· καὶ διότι πραγματεύσαντες αὐτὰ ἐν ὀκτὼ βιβλίοις, ἐξ αὐτῆς μεταδεδώκαμεν αὐτά, εἰς τὸ σπουδαιότερον, διὰ τὸ πρὸς ἔκπλῳ αὐτὸν εἶναι, οὐ διακαθάραντες, ἀλλὰ πάντα τὰ ὑποπίπτοντα ἡμῖν θέντες, ὡς ἔσχατον ἐπελευσόμενοι. ὅθεν καιρὸν νῦν λαβόντες, αἰεὶ τὸ τυγχάνον διορθώσεως ἐκδίδομεν. καὶ ἐπεὶ

Apollonius Eudemo S. P.

Si & corpore vales, & aliæ res tuæ ex animi tui ſententia ſe habent, bene eſt; nos quidem ſatis belle habemus. Quo tempore tecum Pergami fui, animadverti te cupidum intelligendi Conica, quæ à nobis conſcripta ſunt. Itaque miſi ad te primum librum emendatum; reliquos deinceps miſſurus, cum animo ero tranquilliori. non enim arbitror te oblitum, quod à me accepiſti, quid ſcilicet cauſæ fuerit, cur ego hæc ſcribere aggreſſus ſim, rogatus à Naucrate Geometra, quo tempore Alexandriam veniens apud nos fuit: & cur nos cum de illis, octo libris, egiſſemus, ſtatim illos cum eo communicavimus, non eâ quâ par erat diligentiâ (quòd quamprimum erat navigaturus) eos emendantes, ſed quæcunque ſeſe nobis obtulerunt conſcribentes; utpote qui ea denuo eſſemus percurſuri. quamobrem nunc tempus nacti, ut quæque emendamus, ita edimus. Et quoniam

niam accidit nonnullos alios ex iis, qui nobiscum fuerant, habuisse primum & secundum librum antequam emendaretur; noli mirari si in quædam incidas, quæ aliter se habeant. Ex octo autem libris quatuor primi hujus disciplinæ continent elementa; quorum primus complectitur generationes trium coni sectionum, & earum quæ oppositæ dicuntur, itemque principalia ipsarum accidentia, à nobis & uberius & universalius, quam ab aliis, qui de ea re scripserunt, elaborata. Secundus liber tractat ea, quæ attinent ad diametros, & ad axes sectionum, & ad rectas asymptotos; tum de aliis differit, quæ & generalem & necessariam utilitatem ad determinationes afferunt: quas autem vocem diametros, & quos axes, ex hoc libro cognosces. Tertius liber continet multa & admirabilia theoremata, quæ utilia erunt & ad solidorum locorum compositiones, & ad determinationes, quorum complura & pulchra & nova sunt. Hæc nos perpendentes animadvertimus non positam esse ab *Euclide* rationem componendi loci ad tres & quatuor lineas; verum ipsius tantummodo particulam quandam, atque hanc non satis feliciter: neque enim fieri poterat, ut ea compositio recte perficeretur absque iis quæ à nobis inventa sunt. Quartus liber tradit quot modis conorum sectiones inter sese, & circuli circumferentiæ occurrere possint, & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab iis, qui ante nos fuerunt, memoriæ proditum est; item coni sectio, & circuli circumferentia, & oppositæ sectiones ad quot puncta oppositis sectionibus occurrant. Reliqui autem quatuor libri ad abundantiorem scientiam pertinent. Etenim quintus de minimis & maximis magna ex parte agit; Sextus de æqualibus, & similibus coni sectionibus: Septimus continet theoremata quæ determinandi vim habent; Octavus problemata conica determinata. At vero omnibus his editis, licet unicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi sui sententia judicare. Vale.

συμβέβηκε καὶ ἄλλους τινὰς τῶν συμμεμιχότων ἡμῖν μετειληφέναι τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον βιβλίον πρὶν ἢ διορθωθῆναι, μὴ θαυμάσῃς, ἐὰν περιπίπτῃς αὐτοῖς ἑτέρως ἔχουσιν. ἀπὸ δὲ τῶν ὀκτὼ βιβλίων τὰ πρῶτα τέσσαρα πέπτωκε πρὸς εἰσαγωγὴν στοιχειώδη. περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων, καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπιπλέον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξειργασμένα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα. τὸ δὲ δεύτερον τὰ περὶ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν συμβαίνοντα, καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρείαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς· τίνας δὲ διαμέτρους, ἢ τίνας ἄξονας καλῶ, εἰδήσεις ἐκ τούτου τοῦ βιβλίου. τὸ δὲ τρίτον πολλὰ καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα πρός τε τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλεῖστα καλὰ καὶ ξένα. ἃ καὶ κατανοήσαντες συνείδομεν μὴ συντιθέμενον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριον τὸ τυχὸν αὐτοῦ, καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ δυνατὸν ἄνευ τῶν προσευρημένων ἡμῖν τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. τὸ δὲ τέταρτον ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλουσι, καὶ ἄλλα ἐκ περισσοῦ, ὧν οὐδέτερον ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν γέγραπται· κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια, καὶ ἔτι ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλουσι. τὰ δὲ λοιπά ἐστι περιουσιαστικώτερα· ἔστι γὰρ τὸ μὲν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων ἐπιπλέον· τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων τομῶν κώνου· τὸ δὲ περὶ διοριστικῶν θεωρημάτων· τὸ δὲ προβλημάτων κωνικῶν διωρισμένων. οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ πάντων ἐκδοθέντων ἔξεστι τοῖς περιτυγχάνουσι κρίνειν αὐτά, ὡς ἂν αὐτῶν ἕκαστος αἱρῆται. εὐτύχει.

EUTOCII COMMENTARII.

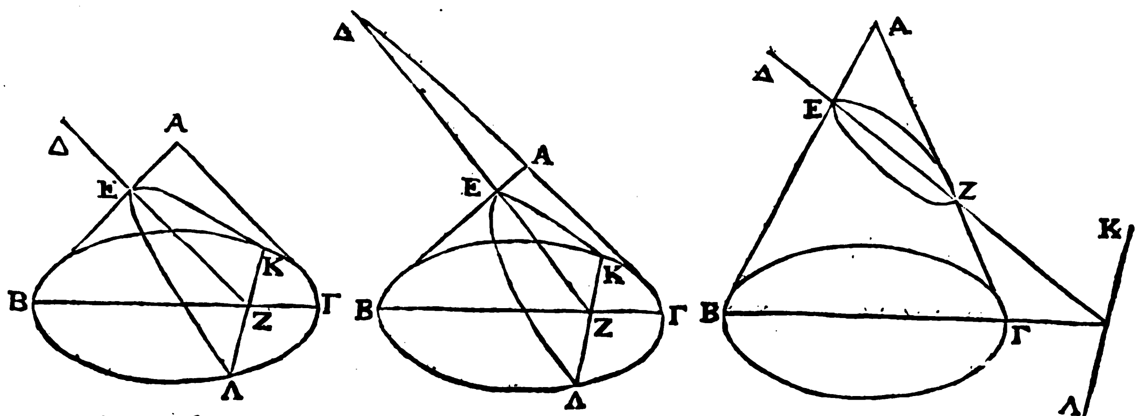
APOLLONIUS geometra, *Anthemi* sodalis charissime, natus est *Pergæ*, quæ *Pamphiliæ* civitas est, tempore *Ptolemæi Euergetæ*, ut tradit *Heraclius* in *Archimedis* vita, qui etiam scribit *Archimedem* quidem primum conica theoremata fuisse aggressum; *Apollonium* vero, cum ea invenisset ab

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ὁ γεωμέτρης, ὦ φίλε ἑταῖρε Ἀνθέμιε, γέγονε μὲν ἐκ Πέργης τῆς ἐν Παμφυλίᾳ, ἐν χρόνοις τοῦ Εὐεργέτου Πτολεμαίου, ὡς ἱστορεῖ Ἡράκλειος εἰς τὸν βίον Ἀρχιμήδους γράφων, ὃς καί φησι τὰ κωνικὰ θεωρήματα ἐπινοῆσαι μὲν πρῶτον τὸν Ἀρχιμήδην· τὸν δὲ Ἀπολλώνιον αὐτὰ εὑρόντα φέροντα ὑπὸ Ἀρχιμήδους μὴ ἐκδοθέντα, ἰδιοποιήσασθαι, οὐκ ἀληθεύων κατά γε τὴν ἐμήν. ὅ τε γὰρ Ἀρχιμήδης ἐν πολλοῖς φαίνεται ὡς παλαιοτέρας στοιχειώσεως τῶν κωνικῶν μεμνημένος, καὶ ὁ Ἀπολλώνιος οὐχ ὡς ἰδίας ἐπινοίας γράφει· οὐ γὰρ ἂν ἔφη, ἐπὶ πλέον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξειργάσθαι ταῦτα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα. ἀλλ᾽ ὅπερ φησὶν ὁ Γεμῖνος ἀληθές ἐστιν, ὅτι οἱ παλαιοί, κῶνον ὁριζόμενοι τὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου περιφορὰν μενούσης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν, εἰκότως καὶ τοὺς κώνους πάντας ὀρθοὺς ὑπελάμβανον γίνεσθαι, καὶ μίαν τομὴν ἐν ἑκάστῳ, ἐν μὲν τῷ ὀρθογωνίῳ τὴν νῦν καλουμένην Παραβολήν, ἐν δὲ τῷ ἀμβλυγωνίῳ τὴν Ὑπερβολήν, ἐν δὲ τῷ ὀξυγωνίῳ τὴν Ἔλλειψιν· καὶ ἔστι παρ᾽ αὐτοῖς εὑρεῖν οὕτως ὀνομαζομένας τὰς τομάς. ὥσπερ οὖν τῶν ἀρχαίων ἐπὶ ἑνὸς ἑκάστου εἴδους τριγώνου θεωρησάντων τὰς δύο ὀρθάς, πρότερον ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ, καὶ πάλιν ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ, καὶ ὕστερον ἐν τῷ σκαληνῷ· οἱ μεταγενέστεροι καθολικὸν θεώρημα ἀπέδειξαν τοιοῦτον· "παντὸς τριγώνου αἱ ἐντὸς τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν"· οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ κώνου τομῶν, τὴν μὲν γὰρ λεγομένην ὀρθογωνίου κώνου τομὴν ἐν ὀρθογωνίῳ μόνον κώνῳ ἐθεώρουν, τεμνομένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου. τὴν δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομὴν ἐν ἀμβλυγωνίῳ γινομένην κώνῳ ἀπεδείκνυσαν· τὴν δὲ τοῦ ὀξυγωνίου ἐν ὀξυγωνίῳ, ὁμοίως ἐπὶ πάντων τῶν κώνων ἄγοντες τὰ ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου· δηλοῖ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ἀρχαῖα ὀνόματα τῶν γραμμῶν. ὕστερον δὲ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος καθόλου τι ἐθεώρησεν, ὅτι ἐν παντὶ κώνῳ, καὶ ὀρθῷ καὶ σκαληνῷ, πᾶσαι αἱ τομαί εἰσι, κατὰ διάφορον τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸν κῶνον προσβολήν. ὃν καὶ θαυμάσαντες οἱ κατ᾽ αὐτὸν γενόμενοι, διὰ τὸ θαυμάσιον τῶν ὑπ᾽ αὐτοῦ δεδειγμένων κωνικῶν θεωρημάτων, μέγαν Γεωμέτρην ἐκάλουν. ταῦτα μὲν οὖν ὁ Γεμῖνος ἐν τῷ ἕκτῳ φησὶ τῆς τῶν μαθημάτων θεωρίας.

Ὃ δὲ λέγει σαφὲς ποιήσομεν ἐπὶ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν. ἔστω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος κώνου τρίγωνον τὸ Α Β Γ, καὶ ἤχθω τῇ Α Β ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἡ Δ Ε Ζ, καὶ τὸ διὰ τῆς Δ Ζ ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν Α Β τεμνέτω τὸν κῶνον· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ Α Ε Δ, Α Ε Ζ γωνιῶν, καὶ ὀρθογωνίου μένοντος τοῦ κώνου, καὶ ὀρθῆς δηλονότι τῆς ὑπὸ Β Α Γ γωνίας, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς, δύο ὀρθαὶ ἔσονται αἱ ὑπὸ Β Α Γ, Α Ε Ζ γωνίαι. ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ Δ Ε Ζ τῇ Α Γ, καὶ γίνεται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομὴ ἡ καλουμένη Παραβολή, οὕτω κληθεῖσα ἀπὸ τοῦ παράλληλον εἶναι τὴν Δ Ε Ζ, ἥτις ἐστὶ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, τῇ Α Γ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου. ἐὰν δὲ ἀμβλυγώνιος ᾖ ὁ κῶνος, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, ἀμβλείας δηλονότι οὔσης τῆς ὑπὸ Β Α Γ, ὀρθῆς δὲ τῆς ὑπὸ Α Ε Ζ· δύο ὀρθῶν μείζους ἔσονται αἱ ὑπὸ Β Α Γ, Α Ε Ζ γωνίαι· ὥστε οὐ συμπεσεῖται ἡ Δ Ε Ζ τῇ Α Γ πλευρᾷ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς Ζ, Γ μέρη, ἀλλὰ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς Α, Ε, προσεκβαλλομένης δηλονότι τῆς Γ Α ἐπὶ τὸ Δ. ποιήσει οὖν τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομὴν τὴν καλουμένην Ὑπερβολήν, οὕτω κληθεῖσαν ἀπὸ τοῦ ὑπερβάλλειν τὰς εἰρημένας, τουτέστι τὰς ὑπὸ Β Α Γ, Α Ε Ζ δύο ὀρθάς, ἢ διὰ τὸ ὑπερβάλλειν τὴν Δ Ε Ζ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, καὶ συμπίπτειν

Archimede nondum edita; sicut propria sua edidisse, neque id vere, ut mea fert opinio. Nam & *Archimedes* multis in locis velut antiquioris conicorum institutionis mentionem facere videtur; & *Apollonius* ea scribit, non ut à seipso inventa: non enim dixisset, uberius & universalius hæc à se, quam ab aliis tractata fuisse. Sed quod scribit *Geminus* verum est, quod antiqui conum definientes, rectanguli trianguli circumvolutionem, manente uno eorum quæ circa rectum angulum sunt latere; & conos omnes rectos, & unam in singulis sectionem fieri arbitrati sunt; in rectangulo quidem cono vocatam *Parabolam*; in obtusangulo *Hyperbolam*; in acutangulo autem *Ellipsim*: atque ita nominatas apud ipsos sectiones passim invenias. Quemadmodum igitur antiquis illis in unaquaque triangulorum specie contemplantibus duos rectos, primum in æquilatero, deinde in æquicruri, postea in scaleno; ætate posteriores universale theorema demonstrarunt ejusmodi; *Omnis trianguli interiores tres anguli duobus rectis sunt æquales*: ita & in coni sectionibus, rectanguli quidem coni sectionem dictam in rectangulo tantum cono contemplati sunt; secto scilicet plano ad unum coni latus recto. obtusanguli autem coni sectionem in cono obtusangulo factam demonstrarunt; & acutanguli sectionem in cono acutangulo: similiter in omnibus conis ducentes plana ad unum coni latus recta; quod & antiqua linearum nomina indicant. Verum postea *Apollonius Pergæus* universe inspexit in omni cono, tam recto, quam scaleno, omnes sectiones inesse juxta plani ad conum diversam inclinationem. Quem illius temporis homines, admirati propter mirificam conicorum theorematum demonstrationem, *Magnum Geometram* appellarunt. Hæc quidem *Geminus* scripta reliquit in sexto Mathematicarum præceptionum libro.

Quod autem dicit manifestum faciemus in subjectis figuris. Sit enim per axem coni triangulum ΑΒΓ, & à quovis puncto Ε ducatur ipsi ΑΒ ad angulos rectos ΔΕΖ, & per ΔΖ ductum planum rectum ad ipsam ΑΒ conum secet: rectus igitur est uterque angulus ΑΕΔ, ΑΕΖ; rectanguloque existente cono & angulo ΒΑΓ recto, ut in prima figura apparet, erunt anguli ΒΑΓ, ΑΕΖ duo recti anguli: quare [per 28. 1.] parallela erit ΔΕΖ ipsi ΑΓ; & fiet in superficie coni sectio *Parabola*, sic dicta, quod recta ΔΕΖ, quæ communis sectio est plani secantis & trianguli per axem, parallela sit ipsi ΑΓ lateri trianguli. Sed si obtusangulus sit conus, ut in secunda figura, obtuso videlicet existente angulo ΒΑΓ, & angulo ΑΕΖ recto: anguli ΒΑΓ, ΑΕΖ duobus rectis majores erunt, & non conveniet ΔΕΖ cum ipso ΑΓ latere ad partes Ζ, Γ, sed ad partes Α, Ε, producta nimirum ΓΑ in Δ. faciet igitur secans planum in superficie coni sectionem, *Hyperbolam* dictam, vel ab eo quod anguli ΒΑΓ, ΑΕΖ excedant duos rectos, vel quod ΔΕΖ excedat verticem coni, & cum ipsa ΑΓ



extra conveniat. Quod si acutangulus sit conus, hoc est acuto existente angulo ΒΑΓ, erunt anguli ΒΑΓ, ΑΕΖ minores duobus rectis; & lineæ ΕΖ, ΑΓ productæ convenient tandem in aliqua parte: augere namque conum & in longius producere possumus. erit igitur in superficie sectio, quæ appellatur *Ellipsis*, sic dicta vel quod dicti anguli à duobus rectis deficiant, vel quod ellipsis diminutus quidam circulus sit. Ad hunc quidem modum antiqui, ponentes secans planum per ΔΕΖ ad rectos angulos ipsi ΑΒ lateri trianguli per axem coni, consideraverunt etiam differentes conos, & propriam in unoquoque sectionem. At *Apollonius*, ponens conum & rectum & scalenum, diverso ipsius plani occursu diversas efficit sectiones. Sit enim, ut in iisdem figuris, secans planum ΚΕΛ; communis autem sectio ipsius plani & basis coni, recta ΚΛ; communis rursus sectio ejusdem & trianguli ΑΒΓ sit ipsa ΕΖ, quæ & diameter appellatur sectionis: itaque in omnibus sectionibus ponit rectam ΚΛ ad rectos angulos esse ipsi ΒΓ basi trianguli ΑΒΓ. Verum si ΕΖ parallela sit ΑΓ, parabolam fieri ΚΕΛ sectionem in coni superficie: si vero ΕΖ conveniat cum latere ΑΓ extra verticem coni ut in Δ, fieri ipsam ΚΕΛ sectionem hyperbolam. quod si conveniat intra, fieri sectionem ellipsim, quam & *Scutiformem* vocant. Generaliter igitur parabolæ diameter parallela est uni lateri trianguli; hyperbolæ autem diameter cum latere trianguli convenit quidem ad partes verticis coni; ellipsis vero diameter convenit cum latere trianguli ad partes basis. Scire præterea illud oportet, parabolam & hyperbolam ex eorum numero esse quæ in infinitum augentur; at ellipsim non item: omnis enim in seipsam redit, sicuti circulus.

Cum autem plures editiones sint, ut etiam ipse [*Apollonius*] in epistola scribit; optimum fore judicavi, ex diversis quæ occurrerunt, clarius dicta & meliori argumentandi ordine disposita in textu exhibere; seorsum vero in commentariis, ut par est, diversos demonstrationis modos explicare. itaque in epistola dicit primos quatuor libros hujusce disciplinæ elementa continere. quorum primus quidem complectitur generationes trium coni sectionum, & earum quæ oppositæ dicuntur, itemque principalia ipsarum accidentia: hæc autem sunt quæcunque ipsis in prima generatione contingunt; habent enim & alia quædam consequentia. Secundus autem liber tractat ea quæ attinent ad diametros, & ad axes sectionum, & ad rectas asymptotos: tum & alia quæ & generalem & necessariam utilitatem afferunt ad determinationes. Determinatio autem duplex est, ut manifeste patet; altera quidem post expositionem eorum quæ ad quæsitum pertinent: altera vero propositionem universalem esse prohibens, quæ declarat quando, & qua ratione, & quot modis id quod propositum est fieri possit; ut in vigesimo secundo theoremate primi libri elementorum *Euclidis*: *Ex tribus rectis, quæ æquales sint tribus datis, triangulum constituere: oportet autem duas ejusmodi rectas reliqua esse majores, quomodocunque sumantur,* quippe cum demonstratum sit, omnis trianguli duo latera, quomodocunque sumpta, reliquo majora esse. Tertius vero conicorum liber continet multa & admirabilia theoremata, ad solidorum locorum compositionem utilia. *Planos Locos* antiqui geometræ appellare consueverunt, quando non ab uno duntaxat puncto sed à pluribus [*rectæ scilicet aut peripheriæ circuli*] problema efficitur: ut siquis proponat, Data recta terminata, invenire punctum à quo perpendicularis ducta ad datam rectam fit inter ipsius rectæ partes media proportionalis. *Locum* ejusmodi vocant geometræ; quoniam non unum duntaxat est punctum quod problema efficit, sed locus totus quem occupat circumferentia circuli circa datam rectam tanquam diametrum descripti. si enim super data re-

τῆ Γ Α ἐκτός. ἐὰν δὲ ὀξυγώνιος ᾖ ὁ κῶνος, ὀξείας δηλονότι οὔσης τῆς ὑπὸ Β Α Γ, αἱ Β Α Γ, Α Β Ζ ἔσονται δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές τι, καὶ αἱ Ε Ζ, Α Γ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ὁπουδήποτε· προσαυξῆσαι γὰρ δυνάμεθα τὸν κῶνον. ἔσται οὖν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομή, ἥτις καλεῖται Ἔλλειψις, οὕτω κληθεῖσα ἢ διὰ τὸ ἐλλείπειν δύο ὀρθαῖς τὰς προειρημένας γωνίας, ἢ διὰ τὸ τὴν ἔλλειψιν κύκλον εἶναι ἐλλειπῆ. οὕτω μὲν οὖν οἱ παλαιοί, ὑποθέμενοι τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ διὰ τῆς Δ Ε Ζ πρὸς ὀρθὰς τῇ Α Β πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου τριγώνου, καὶ ἔτι διαφόρους τοὺς κώνους ἐθεώρησαν, καὶ ἐπὶ ἑκάστου ἰδίαν τομήν. ὁ δὲ Ἀπολλώνιος, ὑποθέμενος κῶνον καὶ ὀρθὸν καὶ σκαληνόν, τῇ διαφόρῳ τοῦ ἐπιπέδου κλίσει διαφόρους ἐποίησεν τὰς τομάς. ἔστω γὰρ πάλιν, ὡς ἐπὶ τῶν αὐτῶν καταγραφῶν, τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ Κ Ε Λ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἡ Κ Λ, κοινὴ δὲ πάλιν αὐτοῦ τοῦ Κ Ε Λ ἐπιπέδου καὶ τοῦ Α Β Γ τριγώνου ἡ Ε Ζ, ἥτις καὶ διάμετρος καλεῖται τῆς τομῆς· ἐπὶ πάντων οὖν τῶν τομῶν ὑποτίθεται τὴν Κ Λ πρὸς ὀρθὰς τῇ Β Γ βάσει τοῦ Α Β Γ τριγώνου. λοιπὸν δέ, εἰ μὲν ἡ Ε Ζ παράλληλος εἴη τῇ Α Γ, παραβολὴν γίνεσθαι τὴν Κ Ε Λ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομήν· εἰ δὲ συμπίπτει τῇ Α Γ πλευρᾷ ἡ Ε Ζ, ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, ὡς κατὰ τὸ Δ, γίνεσθαι τὴν Κ Ε Λ τομὴν ὑπερβολήν· εἰ δὲ ἐντὸς συμπίπτει τῇ Α Γ ἡ Ε Ζ, γίνεσθαι τὴν τομὴν ἔλλειψιν, ἣν καὶ θυρεὸν καλοῦσι. καθόλου οὖν τῆς μὲν παραβολῆς ἡ διάμετρος παράλληλός ἐστι τῇ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου· τῆς δὲ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος συμπίπτει τῇ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου, ἐπὶ τὰ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ κώνου μέρη· τῆς δὲ ἐλλείψεως ἡ διάμετρος συμπίπτει τῇ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου, ἐπὶ τὰ πρὸς τῇ βάσει μέρη. κἀκεῖνο δὲ χρὴ εἰδέναι, ὅτι ἡ μὲν παραβολὴ καὶ ἡ ὑπερβολὴ τῶν εἰς ἄπειρόν εἰσιν αὐξανομένων, ἡ δὲ ἔλλειψις οὐκέτι· πᾶσα γὰρ εἰς αὐτὴν συννεύει, ὁμοίως τῷ κύκλῳ.

Πλειόνων δὲ οὐσῶν ἐκδόσεων, ὡς καὶ αὐτός φησιν ἐν τῇ ἐπιστολῇ, ἄμεινον ἡγησάμην συναγαγεῖν αὐτάς, ἐκ τῶν ἐμπιπτόντων τὰ σαφέστερα παρατιθέμενος ἐν τῷ ῥητῷ, διὰ τὴν τῶν εἰσαγομένων εὐμάρειαν· ἔξωθεν δὲ ἐν τοῖς συντεταγμένοις σχολίοις ἐπισημαίνεσθαι τοὺς διαφόρους, ὡς εἰκός, τρόπους τῶν ἀποδείξεων. φησὶ τοίνυν ἐν τῇ ἐπιστολῇ τὰ πρῶτα τέσσαρα βιβλία περιέχειν ἀγωγὴν στοιχειώδη, ὧν τὸ μὲν πρῶτον περιέχει τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τοῦ κώνου τομῶν, καὶ τῶν καλουμένων ἀντικειμένων, καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα· ταῦτα δέ ἐστιν ὅσα συμβαίνει τι παρὰ τὴν πρώτην αὐτῶν γένεσιν· ἔχουσι γὰρ καὶ ἕτερά τινα παρακολουθήματα. τὸ δὲ δεύτερον τὰ παρὰ τὰς διαμέτρους, καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν, καὶ τὰς ἀσυμπτώτους· καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρείαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς. ὁ διορισμὸς ὅτι διπλοῦς ἐστι, παντί που δῆλον· ὁ μὲν μετὰ τὴν ἔκθεσιν ἐφιστάντων τί ἐστι τὸ ζητούμενον· ὁ δὲ τὴν πρότασιν οὐ συγχωρῶν καθολικὴν εἶναι, λέγων δὲ πότε καὶ πῶς καὶ ποσαχῶς δυνατὸν συστῆναι τὸ προτεθέν, οἷός ἐστιν ὁ ἐν τῷ εἰκοστῷ δευτέρῳ θεωρήματι τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως· "ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας", ἐπεὶ δέδεικται ὅτι παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. τὸ δὲ τρίτον τῶν κωνικῶν περιέχει, φησί, πολλὰ καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα πρὸς τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων. Ἐπιπέδους τόπους ἔθος τοῖς παλαιοῖς γεωμέτραις λέγειν, ὅτε τῶν προβλημάτων οὐκ ἀφ' ἑνὸς σημείου μόνον, ἀλλ' ἀπὸ πλειόνων γίνεται τὸ ποίημα· οἷον εἰ ἐπιτάξει, τῆς εὐθείας δοθείσης πεπερασμένης εὑρεῖν τι σημεῖον ἀφ' οὗ ἀχθεῖσα κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μέση ἀνάλογον γίνεται τῶν τμημάτων. Τόπον καλοῦσι τὸ τοιοῦτον, οὐ μόνον γὰρ ἓν σημεῖόν ἐστι τὸ ποιοῦν τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ τόπος ὅλος ὃν ἔχει ἡ περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν κύκλου. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας

θείας ἡμικύκλιον γραφῇ, ὅπερ ἂν ἐπὶ τῆς περιφερείας λάβῃς σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετον ἀγάγῃς ἐπὶ τὴν διάμετρον, ποιήσει τὸ προβληθέν. ὁμοίως δὲ δοθείσης εὐθείας, ἐάν τις ἐπιτάξῃ εὑρεῖν ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον, ἀφ' οὗ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις· καὶ ἀπὸ τούτου οὐ μόνον ἓν σημεῖον τὸ ποιοῦν τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ τόπος ὃν ἐπέχει ἡ ἀπὸ τῆς διχοτομίας πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη. ἐὰν γὰρ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν δίχα τεμὼν, καὶ ἀπὸ τῆς διχοτομίας πρὸς ὀρθὰς ἀγάγῃς, οἷον ἐπ' αὐτῆς λάβῃς σημεῖον ποιήσει τὸ ἐπιταχθέν. ὅμοιον καὶ γράφει αὐτὸς Απολλώνιος ἐν τῷ ἀναλυομένῳ τόπῳ ὑποκειμένῳ.

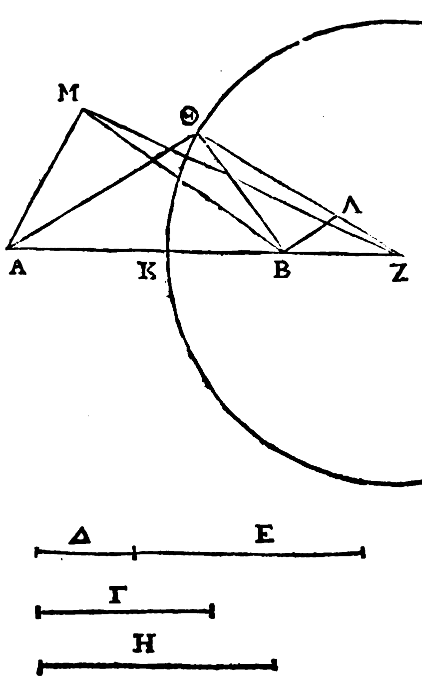
cta semicirculus describatur, quodcunque in circumferentia sumpseris punctum, & ab ipso perpendicularem ad diametrum duxeris, quod propositum est efficiet. Similiter autem data recta, si quis proponat invenire extra ipsam punctum à quo rectæ ad ejus extrema ductæ inter se æquales sint; etiam in hoc non unicum duntaxat est punctum problema efficiens, sed locus quem occupat recta à puncto medio rectæ datæ ad rectos angulos ducta. nam si data recta bifariam secetur, & ab eo puncto recta ad rectos ducatur angulos, quodcunque in ipsa sumpseris punctum faciet illud quod proponebatur. Huic simile scribit *Apollonius* in *Loco Resoluto* subnexo.

Δύο δοθέντων σημείων ἐν ἐπιπέδῳ, καὶ λόγου δοθέντος ἀνίσων εὐθειῶν· δυνατόν ἐστιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γράψαι κύκλον, ὥστε τὰς ἀπὸ τῶν δοθέντων σημείων ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου κλωμένας εὐθείας λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.

Datis duobus punctis in plano, & data ratione inæqualium rectarum: potest in plano circulus describi, ita ut rectæ à datis punctis ad circumferentiam circuli inclinatæ habeant rationem eandem datæ rationi.

ΕΣΤΩ τὰ μὲν δοθέντα σημεῖα τὰ Α, Β, λόγος δὲ ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ, μείζονος οὔσης τῆς Γ· δεῖ δὴ ποιῆσαι τὸ ἐπιταχθέν.

Επεζεύχθω ἡ Α Β, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ Β μέρη, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν Γ ἡ Γ πρὸς ἄλλην τινὰ, μείζονα δηλονότι τῆς Δ, καὶ ἔστω εἰ τύχοι πρὸς τὴν Ε Δ. καὶ πάλιν γεγονέτω ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Α Β ἡ Δ πρὸς τὴν Β Ζ, καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Η· φανερὸν δὴ καὶ ὅτι ἥτε Γ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς Ε Δ καὶ τῆς Δ, καὶ ἡ Η τῶν Α Ζ, Ζ Β. καὶ μὲν κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῇ Η κύκλος γεγράφθω ὁ Κ Θ· φανερὸν δὴ ὅτι τέμνει ἡ Κ Θ περιφέρεια τὴν Α Β εὐθεῖαν· ἡ γὰρ Η εὐθεῖα μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν Α Ζ, Ζ Β. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Θ Α, Θ Β, Θ Ζ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Θ Ζ τῇ Η, καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ὡς ἡ Α Ζ πρὸς τὴν Ζ Θ ἡ Θ Ζ πρὸς τὴν Ζ Β. καὶ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ Θ Ζ Β ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α Ζ Θ τῷ Θ Ζ Β τριγώνῳ, καὶ ἴση ἡ ὑπὸ Ζ Θ Β γωνία τῇ ὑπὸ Θ Α Β. ἤχθω δὲ διὰ τοῦ Β τῇ Α Θ παράλληλος ἡ Β Λ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Θ ἡ Θ Ζ πρὸς Ζ Β, καὶ ὡς ἄρα πρώτη ἡ Α Ζ πρὸς τρίτην τὴν Ζ Β οὕτω τὸ ἀπὸ Α Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Θ Ζ. ἀλλ' ὡς ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Β οὕτως ἡ Α Θ πρὸς Β Λ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Α Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Θ οὕτως ἡ Α Θ πρὸς Β Λ. πάλιν ἐπεὶ ἴση



Sint data puncta A, B; ratio autem data, quam habet Γ ad Δ, sitque Γ major: & oporteat facere illud quod propositum est.

Jungatur A B, & ad partes B producatur, & fiat ut Δ ad Γ ita Γ ad aliam majorem quam Δ; sitq; *e. g.* ad E, Δ simul. rursus fiat ut E ad AB ita Δ ad BZ, & Γ ad H: patet igitur Γ mediam proportionalem esse inter EΔ & Δ; itemque H mediam proportionalem inter AZ, ZB *. quare si centro Z & intervallo H circulus KΘ describatur, circumferentia KΘ rectam AB secabit; nam recta H est media proportionalis inter AZ, ZB. Sumatur in circumferentia quodvis punctum Θ, & jungantur ΘA, ΘB, ΘZ; erit igitur ΘZ ipsi H æqualis, & propterea ut AZ ad ZΘ ita ΘZ ad ZB. sunt autem circa eundem angulum ΘZB latera proportionalia: ergo [per 6. 6.] triangulum AZΘ simile est triangulo ΘZB, & angulus ZΘB angulo ΘAB æqualis. ducatur per B ipsi AΘ parallela BΛ. & quoniam ut AZ ad ZΘ ita est ΘZ ad ZB; erit [per cor. 20. 6.] prima AZ ad tertiam ZB ut quadratum ex AZ ad quadratum ex ΘZ. sed [per 4. 6.] ut AZ ad ZB ita AΘ ad BΛ: ergo ut quadratum ex AZ ad quadratum ex ZΘ ita AΘ ad BΛ. rursus quoniam angulus

* Quoniam [per constr.] E est ad AB ut Δ ad BZ; erit [per 12. 5.] EΔ ad AZ ut Δ ad BZ. Sed Δ est ad BZ [per constr.] ut Γ ad H: & ideo EΔ est ad AZ ut Γ ad H; unde [per 4.&16.5.] Γ est ad EΔ ut H ad AZ. Rursus [per constr.] Γ est ad EΔ ut Δ ad Γ & ut BZ ad H: ergo BZ est ad H ut H ad AZ.

BΘZ

Β Θ Ζ æqualis est angulo Θ Α Β; & angulus Α Θ Β [per 29.1.] angulo Θ Β Λ æqualis, alterni enim sunt: & reliquus reliquo æqualis erit, & triangulum Α Θ Β simile triangulo Θ Β Λ. quare [per 4. 6.] latera quæ circum æquales angulos proportionalia sunt; videlicet ut Α Θ ad Θ Β ita Θ Β ad Β Λ, & ut quadratum ex Α Θ ad quadratum ex Θ Β ita Α Θ ad Β Λ. erat autem ut Α Θ ad Β Λ ita quadratum ex Α Ζ ad quadratum ex Ζ Θ: ut igitur quadratum ex Α Ζ ad quadratum ex Ζ Θ ita [per 11. 5.] quadratum ex Α Θ ad quadratum ex Θ Β, & idcirco ut Α Ζ ad Ζ Θ ita Α Θ ad Θ Β. Sed [ex supra ostensis] ut Α Ζ ad Ζ Θ ita Ε Δ ad Γ, & Γ ad Δ: ergo ut Γ ad Δ ita Α Θ ad Θ Β. Similiter ostendetur omnes alias rectas, quæ à punctis Α, Β ad circumferentiam circuli inclinantur, eandem rationem habere quam habet Γ ad Δ.

Dico porro si à punctis Α, Β ducantur rectæ ad punctum quod non sit in circumferentia circuli, ipsarum non eandem esse rationem quæ est Γ ad Δ. nam si esse potest, factum sit jam illud ad punctum Μ, quod extra circumferentiam sumatur (eo enim intra sumpto, idem absurdum sequetur) & junctis Μ Α, Μ Β, Μ Ζ, ut est Γ ad Δ ita supponatur esse Α Μ ad Μ Β. ergo [per cor.20.6.] ut Ε Δ ad Δ ita quadratum ex Ε Δ ad quadratum ex Γ, & quadratum ex Α Μ ad quadratum ex Μ Β *. ut autem Ε Δ ad Δ ita posita est Α Ζ ad Ζ Β: quare ut Α Ζ ad Ζ Β ita quadratum ex Α Μ ad quadratum ex Μ Β. &, ex iis quæ sunt superius dicta, si à puncto Β ducatur recta ipsi Α Μ parallela; ut Α Ζ ad Ζ Β ita demonstrabitur quadratum ex Α Ζ ad quadratum ex Ζ Μ. Sed modo demonstratum est ut Α Ζ ad Ζ Β ita quadratum ex Α Ζ ad quadratum ex Ζ Θ: ergo Ζ Θ ipsi Ζ Μ est æqualis. quod est impossibile.

Loci igitur plani ejusmodi sunt. *Solidi* vero *Loci* appellantur ex eo quod lineæ, per quas ipsorum problemata construuntur, à solidorum sectione generationem habent, quales sunt coni sectiones, & complures aliæ. Sunt & alii *Loci ad Superficiem* dicti, quibus ex eorum proprietate nomen impositum est. Invehitur deinde *Apollonius* in *Euclidem*, non, ut *Pappus* & alii nonnulli arbitrantur, quod duas medias proportionales non invenerit: siquidem *Euclides* recte invenit unam mediam proportionalem, & non infeliciter, ut ipse inquit; duas vero proportionales medias neque omnino in elementis investigare aggressus est, & *Apollonius* de duabus mediis proportionalibus in tertio libro nihil inquirere videtur: sed, ut verisimile est, *Euclidem* in alio libro de *Locis* conscripto, qui ad nos non pervenerit, reprehendit. Quæ vero deinceps subjungit de quarto libro perspicua sunt. Quintus, inquit, liber de minimis & maximis magna ex parte agit. Quemadmodum enim in elementis [ad 7. & 8. 3.] didicimus, si ab aliquo puncto in circulum rectæ ducantur, earum quidem quæ ad concavam ipsius circumferentiam pertingunt, maximam esse quæ per centrum transit; earum vero quæ ad convexam, minimam esse quæ inter dictum punctum & diametrum interjicitur: ita & de coni sectionibus in quinto libro inquirit. Sexti, septimi, & octavi libri propositum manifeste ab ipso *Apollonio* explicatur. Et hæc de epistola dicta sunto.

ἐστὶν ἡ ὑπὸ Β Θ Ζ τῇ ὑπὸ Θ Α Β, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ Α Θ Β τῇ ὑπὸ Θ Β Λ ἴση, ἐναλλὰξ γάρ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἴση ἐστὶν, καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α Θ Β τῷ Θ Β Λ. καὶ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ὡς ἄρα ἡ Α Θ πρὸς Θ Β ἡ Θ Β πρὸς Β Λ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ Α Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Θ Β ἡ Α Θ πρὸς Β Λ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ Θ Α πρὸς Β Λ τὸ ἀπὸ Α Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Θ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Α Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Θ οὕτω τὸ ἀπὸ Α Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Θ Β, καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Θ ἡ Α Θ πρὸς Θ Β. ἀλλ' ὡς ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Θ ἡ Ε Δ πρὸς Γ, καὶ ἡ Γ πρὸς Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς Δ ἡ Α Θ πρὸς Θ Β. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῶν Α, Β σημείων ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου κλώμεναι τὸν αὐτὸν ἔχουσαι λόγον ταῖς Γ, Δ.

Λέγω δὴ ὅτι πρὸς ἄλλῳ σημείῳ μὴ ὄντι ἐπὶ τῆς περιφερείας οὐ γίνεται λόγος τῶν ἀπὸ Α, Β σημείων ἐπ' αὐτὸ ἐπιζευγνυμένων εὐθειῶν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς Γ πρὸς Δ. εἰ γὰρ δυνατὸν, γεγονέτω πρὸς τῷ Μ ἐκτὸς τῆς περιφερείας, (καὶ γὰρ εἰ ἐντὸς ληφθείη τὸ αὐτὸ ἄτοπον συμβήσεται καθ' ἑτέραν τῶν ὑποθέσεων) καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Μ Α, Μ Β, Μ Ζ, καὶ ὑποκείσθω ὡς ἡ Γ πρὸς Δ οὕτως ἡ Α Μ πρὸς Μ Β. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε Δ πρὸς Δ οὕτως τὸ ἀπὸ Ε Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ, καὶ τὸ ἀπὸ Α Μ πρὸς τὸ ἀπὸ Μ Β *. ἀλλ' ὡς ἡ Ε Δ πρὸς Δ οὕτως ὑπόκειται ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Β οὕτω τὸ ἀπὸ Α Μ πρὸς τὸ ἀπὸ Μ Β. καὶ διὰ τὰ προδειχθέντα, ἐὰν ἀπὸ τοῦ Β τῇ Α Μ παράλληλον ἀγάγωμεν, δειχθήσεται ὡς ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Β οὕτω τὸ ἀπὸ Α Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Β οὕτω τὸ ἀπὸ Α Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Θ· ἴση ἄρα ἡ Ζ Θ τῇ Ζ Μ. ὅπερ ἀδύνατον.

Τόποι οὖν ἐπίπεδοι λέγονται τὰ τοιοῦτα. Οἱ λεγόμενοι στερεοὶ τόποι τὴν προσωνυμίαν ἐσχήκασιν, ἀπὸ τοῦ τὰς γραμμὰς δι' ὧν γράφονται τὰ κατ' αὐτοὺς προβλήματα ἐκ τῆς τομῆς τῶν στερεῶν τὴν γένεσιν ἔχειν, οἷαί εἰσιν αἱ τοῦ κώνου τομαὶ καὶ ἕτεραι πλείους. εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλοι τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν λεγόμενοι, οἳ τὴν ἐπωνυμίαν ἔχουσιν ἀπὸ τῆς περὶ αὐτοὺς ἰδιότητος. Μέμφεται δὲ ἑξῆς τῷ Εὐκλείδῃ, οὐχ ὡς οἴεται Πάππος καὶ ἕτεροί τινες, διὰ τὸ μὴ εὑρηκέναι δύο μέσας ἀνάλογον· ὅ τε γὰρ Εὐκλείδης ὑγιῶς εὗρε τὴν μίαν μέσην ἀνάλογον, ἀλλ' οὐχ, ὡς αὐτός φησιν, οὐκ εὐτυχῶς, περὶ δὲ τῶν δύο μέσων οὐδ' ὅλως ἐπιχειρεῖται ζητῆσαι ἐν τῇ στοιχειώσει· ὅ τε αὐτὸς Ἀπολλώνιος οὐδὲν περὶ τῶν δύο μέσων ἀνάλογον φαίνεται ζητῆσαι ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ· ἀλλ' ὡς ἔοικεν ἐν ἑτέρῳ βιβλίῳ περὶ τόπων γεγραμμένῳ τῷ Εὐκλείδῃ ἐπισκώπτει, ὅπερ εἰς ἡμᾶς οὐ φέρεται. τὰ δὲ ἐφεξῆς περὶ τοῦ τετάρτου βιβλίου λεγόμενα σαφῆ ἐστι. τὸ δὲ πέμπτον φησὶ περιέχει τὰ περὶ τῶν ἐλαχίστων καὶ μεγίστων. ὥσπερ γὰρ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἐμάθομεν ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅτι ἐστί τι σημεῖον ἀφ' οὗ τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν μεγίστη ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· οὕτως καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ κώνου τομῶν ζητεῖ ἐν τῷ πέμπτῳ βιβλίῳ. τοῦ ἕκτου καὶ ἑβδόμου καὶ ὀγδόου βιβλίου σαφῶς ἡ πρόθεσις ὑπ' αὐτοῦ εἴρηται. καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῆς ἐπιστολῆς.

* Ex hypothesi enim est Α Μ ad Μ Β ut Γ ad Δ; & ideo quadratum ex Α Μ ad quadratum ex Μ Β est ut quadratum ex Γ ad quadratum ex Δ, hoc est (ut supra ostensum) ut Ε Δ ad Δ.

OPOL

ΟΡΟΙ ΠΡΩΤΟΙ.

α'. ΕΑΝ [a] ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν, ὃς οὐκ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ σημείῳ, εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα προσεκβληθῇ, καὶ μένοντος τοῦ σημείου ἡ εὐθεῖα περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι· τὴν γραφεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας ἐπιφάνειαν, ἣ σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κειμένων, ὧν ἑκατέρα εἰς ἄπειρον αὔξεται, τῆς γραφούσης εὐθείας εἰς ἄπειρον προσεκβαλλομένης, καλῶ κωνικὴν ἐπιφάνειαν.

β'. Κορυφὴν δὲ αὐτῆς, τὸ μεμενηκὸς σημεῖον.

γ'. Ἄξονα δὲ, τὴν διὰ τοῦ σημείου καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν.

δ'. Κῶνον δὲ, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ κύκλου καὶ τῆς μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας κωνικῆς ἐπιφανείας.

ε'. Κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου, τὸ σημεῖον ὃ καὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ κορυφή.

ϛ'. Ἄξονα δὲ, τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν.

ζ'. Βάσιν δὲ, τὸν κύκλον.

η'. Ὀρθοὺς μὲν καλῶ, τοὺς πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας.

θ'. Σκαληνοὺς δὲ, τοὺς μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας.

ι'. [b] Πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥτις ἐστὶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, διάμετρον μὲν καλῶ εὐθεῖαν, ἥτις ἠγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείας, εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους, δίχα διαιρεῖ.

ια'. Κορυφὴν δὲ τῆς καμπύλης γραμμῆς, τὸ πέρας τῆς εὐθείας τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ.

ιβ'. Τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

ιγ'. [c] Ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ κειμένων, διάμετρον καλῶ πλαγίαν μὲν, ἥτις εὐθεῖα, τέμνουσα τὰς δύο γραμμὰς, πάσας τὰς ἀγομένας ἐν ἑκατέρᾳ τῶν γραμμῶν παρά τινα εὐθεῖαν δίχα τέμνει.

ιδ'. Κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν, τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῆς διαμέτρου.

ιε'. Ὀρθίαν δὲ διάμετρον, εὐθεῖαν, ἥτις κει-

DEFINITIONES PRIMÆ.

1. SI [a] ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non est in eodem plano in quo punctum, juncta recta linea in utramque partem producatur, & manente puncto convertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat à quo cœpit moveri; superficiem à recta descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter sese aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, (nimirum rectâ quæ eam describit in infinitum productâ) voco conicam superficiem.

2. Verticem vero ejus, manens punctum.

3. Axem autem, rectam lineam quæ per punctum & centrum circuli ducitur.

4. Conum vero voco, figuram contentam circulo & conica superficie, quæ inter verticem & circuli circumferentiam interjicitur.

5. Verticem autem coni, punctum quod & superficiei conicæ vertex est.

6. Axem vero, rectam lineam quæ à vertice ad circuli centrum ducitur.

7. Basim autem, circulum ipsum.

8. Rectos quidem conos voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

9. Scalenos vero, qui axes non ad rectos angulos ipsis basibus habent.

10. [b] Omnis curvæ lineæ, in uno plano existentis, diametrum voco rectam lineam; quæ quidem ducta à linea curva omnes rectas in ipsa ductas, cuidam rectæ parallelas, bifariam dividit.

11. Verticem autem curvæ lineæ, terminum rectæ qui est in ipsa linea.

12. Ordinatim vero ad diametrum applicari unamquamque rectarum parallelarum.

13. [c] Similiter & duarum curvarum linearum, in uno plano existentium, diametrum quidem transversam voco, rectam lineam; quæ, utramque lineam secans, rectas omnes in ipsis ductas, rectæ cuidam parallelas, bifariam dividit.

14. Vertices autem linearum, diametri terminos qui sunt in ipsis lineis.

15. Rectam vero diametrum, il-

lam, quæ inter duas lineas posita rectas omnes ductas, rectæ cuidam parallelas & inter ipsas curvas interjectas, bifariam secat.

16. Ordinatim autem ad diametrum applicari unamquamque rectarum parallelarum.

17. Conjugatas diametros voco curvæ lineæ & duarum curvarum, rectas lineas; quarum utraque diameter est, & rectas alteri parallelas bifariam dividit.

18. Axem vero curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectam lineam; quæ, cum sit diameter curvæ lineæ vel duarum curvarum, rectas parallelas ad rectos angulos secat.

19. Axes conjugatos voco curvæ lineæ & duarum curvarum, rectas lineas; quæ, cum sint diametri conjugatæ, sibi invicem parallelas ad rectos angulos secant.

μένη μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν πάσας τὰς ἀγομένας εὐθείας, εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους καὶ ἀπολαμβανομένας μεταξὺ τῶν γραμμῶν, δίχα τέμνει.

ιϛʹ. Τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

ιζʹ. Συζυγεῖς καλῶ διαμέτρους καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, εὐθείας· ὧν ἑκατέρα, διάμετρος οὖσα, τὰς τῇ ἑτέρᾳ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ.

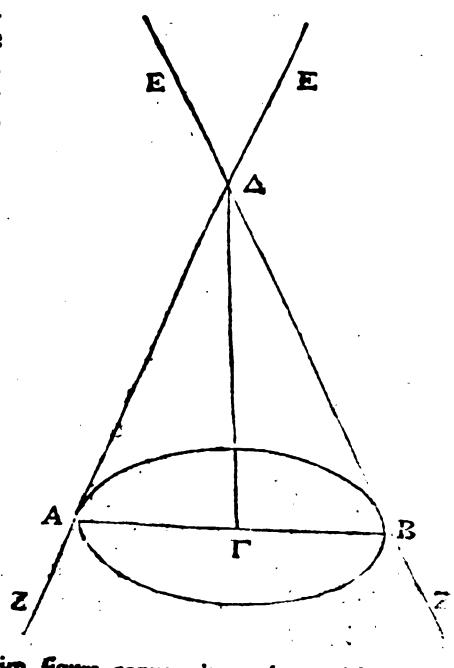
ιηʹ. Ἄξονα δὲ καλῶ καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, εὐθεῖαν· ἥτις διάμετρος οὖσα τῆς γραμμῆς, ἢ τῶν γραμμῶν, πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὰς παραλλήλους.

ιθʹ. Συζυγεῖς καλῶ ἄξονας καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, εὐθείας· αἵτινες, διάμετροι οὖσαι συζυγεῖς, πρὸς ὀρθὰς τέμνουσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους.

EUTOCIUS.

Exorsus à definitionibus [*Apollonius*] tradit generationem conicæ superficiei, non autem definitionem quæ quid res sit declarat: quanquam licebit utique iis, qui volent, & ex generatione ipsa definitionem colligere. At vero nos iis, quæ ab *Apollonio* dicuntur, ex figuris lucem afferemus.

a Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, *&c.*] Sit circulus ΑΒ, cujus centrum Γ, & punctum aliquod sublime Δ, junctaque ΔΒ in infinitum ex utraque parte producatur ad Ε, Ζ. Si igitur manente Δ, ΔΒ feratur in circuli ΑΒ circumferentia, donec punctum Β rursus in eum locum restituatur, à quo cœpit moveri; describet superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus ad Δ punctum inter se connexis: eam voco conicam superficiem. dicit quod & augetur in infinitum, cum recta ΕΒ ipsam describens in infinitum producitur. verticem superficiei dicit punctum Δ; axem rectam ΔΓ; conum vero appellat figuram contentam circulo ΑΒ & ea superficie quam ΔΒ sola describit; coni verticem punctum Δ; axem ΔΓ; basim vero ΑΒ circulum. Et si ΔΓ ad circulum ΑΒ fuerit perpendicularis, rectum vocat conum; sin minus, scalenum. Describitur autem conus scalenus, quando à centro circuli recta erigitur, quæ non est perpendicularis ad circuli planum; ab erectæ vero puncto, quod est in sublimi, ad circumferentiam recta ducitur, & manente puncto, circa ipsam convertitur: comprehensa etenim figura conus erit scalenus. constat igitur rectam circumductam in conversione quandoque majorem, quandoque minorem, & quandoque æqualem fieri, ad aliud atque aliud circuli punctum. quod tamen nos hoc modo demonstrabimus.



Ἀρχόμενος δὲ τῶν ὅρων, γένεσιν ὑπογράφει κωνικῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' οὐ τὸ τί ἐστι διορισμοῦ παραδέδωκεν· ἔξεστι δὲ τοῖς βουλομένοις ἐκ τῆς γενέσεως αὐτῆς τὸν ὅρον λαμβάνειν. τὸ δὲ λεγόμενον ὑπ' αὐτοῦ διὰ καταγραφῆς σαφὲς ποιήσομεν.

a Ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν, καὶ τὰ ἑξῆς.] Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒ, οὗ κέντρον τὸ Γ, καὶ σημεῖόν τι μετέωρον τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΒ ἐκβεβλήσθω εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα μέρη, ὡς ἐπὶ τὰ Ε, Ζ. ἐὰν δή, μένοντος τοῦ Δ, ἡ ΔΒ φέρηται ἕως ἂν τὸ Β, ἐνεχθὲν κατὰ τῆς τοῦ ΑΒ κύκλου περιφερείας, ἐπὶ τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, γεννήσει ἐπιφάνειάν τινα, ἥτις σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν ἁπτομένων ἀλλήλων κατὰ τὸ Δ· ἣν καὶ καλῶ κωνικὴν ἐπιφάνειαν. φησὶ δὲ ὅτι καὶ εἰς ἄπειρον αὔξεται, διὰ τὸ καὶ τὴν γράφουσαν αὐτὴν εὐθεῖαν, οἷον τὴν ΕΒ, εἰς ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι. κορυφὴν δὲ τῆς ἐπιφανείας λέγει τὸ Δ· ἄξονα δὲ τὴν ΔΓ· κῶνον δὲ λέγει τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ ΑΒ κύκλου καὶ τῆς ἐπιφανείας, ἣν μόνη γράφει ἡ ΔΒ εὐθεῖα· κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου τὸ Δ· ἄξονα δὲ τὴν ΔΓ· βάσιν δὲ τὸν ΑΒ κύκλον. καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ΑΒ κύκλῳ, ὀρθὸν καλεῖ τὸν κῶνον· ἐὰν δὲ μὴ πρὸς ὀρθάς, σκαληνόν. γεννήσεται δὲ κῶνος σκαληνός, ὅταν λαβόντες κύκλον ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ ἀναστήσωμεν εὐθεῖαν, μὴ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ μετεώρου σημείου τῆς ἀνασταθείσης εὐθείας ἐπὶ τὸν κύκλον ἐπιζεύξωμεν εὐθεῖαν, καὶ περιάγωμεν τὴν ἐπιζευχθεῖσαν εὐθεῖαν περὶ τὸν κύκλον, τοῦ πρὸς τῷ μετεώρῳ σημείου τῆς ἀνασταθείσης μένοντος· τὸ γὰρ περιληφθὲν σχῆμα κῶνος ἔσται σκαληνός. δῆλον δὴ ὅτι ἡ περιαγομένη εὐθεῖα ἐν τῇ περιαγωγῇ μείζων καὶ ἐλάττων γίνεται, κατὰ δέ τινας θέσεις καὶ ἴση, πρὸς ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τοῦ κύκλου. ἀποδείκνυται δὲ τοῦτο οὕτως.

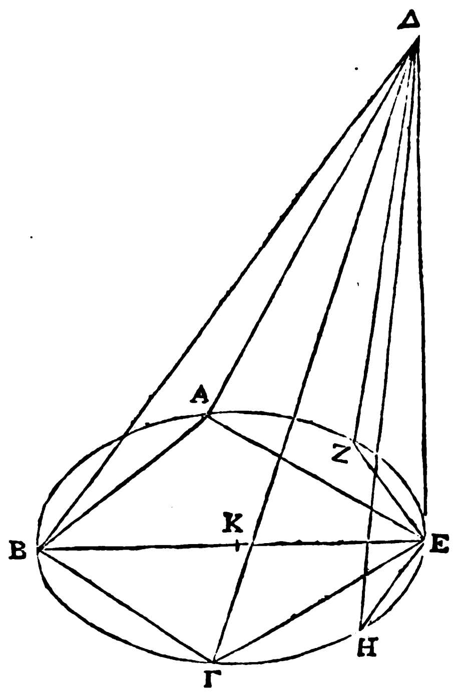
Ἐὰν

Ἐὰν κώνου σκαληνοῦ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι· πασῶν τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθεισῶν εὐθειῶν μία μέν ἐστι ἐλαχίστη, μία δὲ μεγίστη, δύο δὲ μόναι ἴσαι παρ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης καὶ τῆς μεγίστης, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων.

Si à vertice coni ſcaleni ad baſis circumferentiam rectæ ducantur: omnium rectarum à vertice ad baſim ductarum una quidem minima, & una maxima erit; duæ vero tantum, ex utraque parte minimæ & maximæ, inter ſe æquales; at quæ propinquior eſt minimæ ſemper minor erit remotiore.

Ἔστω κῶνος σκαληνὸς, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ σκαληνοῦ κώνου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη, ἤτοι ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ΑΒΓ κύκλου πεσεῖται, ἢ ἐκτὸς, ἢ ἐντός· ἐμπιπτέτω πρότερον ἐπὶ τῆς περιφερείας, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζεύχθω ἡ ΕΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ εἰλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι παρ' ἑκάτερα τοῦ Ε, αἱ ΖΕ, ΕΗ, καὶ παρ' ἑκάτερα τοῦ Β αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΕΗ, ΔΖ, ΔΗ, ΕΑ, ΕΓ, ΑΒ, ΒΓ, ΔΑ, ΔΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΖ εὐθεῖα τῇ ΕΗ εὐθείᾳ, ἴσας γὰρ περιφερείας ὑποτείνουσι, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση, καὶ διάμετρος ἡ ΒΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΖΕ τῇ ΕΗΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ· κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ καὶ πᾶσαι δειχθήσονται, ἴσον ἀπέχουσαι τῆς ΔΕ ἢ τῆς ΔΒ, ἴσαι. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΕΖ ὀρθή ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΔΕΖ, μείζων ἐστὶν ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ. καὶ πάλιν μείζων ἐστὶν ἡ ΕΑ εὐθεῖα τῆς ΕΖ, ἐπεὶ καὶ περιφέρεια ἡ ΕΖΑ τῆς ΕΖ περιφερείας, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ· ἡ ΔΖ ἄρα τῆς ΔΑ ἐλάσσων ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΔΑ τῆς ΔΒ ἐλάσσων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΕ τῆς ΔΖ ἐλάσσων ἐδείχθη, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΑ, ἡ δὲ ΔΑ τῆς ΔΒ· ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΕ, μεγίστη δὲ ἡ ΔΒ, ἀεὶ δὲ ἔγγιον τῆς ΔΕ τῆς ἀπώτερον ἔλασσόν ἐστιν.

Ἀλλὰ δὴ ἡ κάθετος πιπτέτω ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς ἡ ΔΕ· καὶ εἰλήφθω πάλιν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΕΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΘ. καὶ εἰλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι παρ' ἑκάτερα τοῦ Θ, αἱ ΘΖ, ΘΗ, καὶ παρ' ἑκάτερα τοῦ Β, αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΗΚ, ΔΖ, ΔΗ, ΑΒ, ΒΓ, ΚΑ, ΚΓ, ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΘΖ περιφέρεια τῇ ΘΗ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΚΖ τῇ ὑπὸ ΘΚΗ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΚ εὐθεῖα τῇ ΚΗ ἐστὶν ἴση, ἐκ κέντρου γάρ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ· βάσις ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΕ εὐθεῖα τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ περιφέρεια τῇ ΒΓ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ τῇ ὑπὸ ΓΚΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ ΑΚΕ λοιπῇ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῇ ὑπὸ ΓΚΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ εὐθεῖα τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση, ἐκ κέντρου γάρ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, δύο δυσὶν ἴσαι,

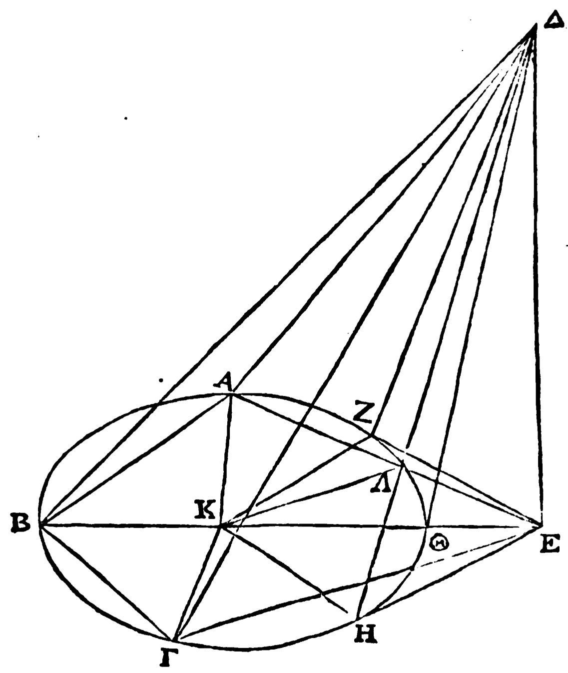


Sit conus ſcalenus, cujus baſis ΑΒΓ circulus, vertex autem punctum Δ. & quoniam recta, quæ à vertice coni ſcaleni ad ſubjectum planum perpendicularis ducitur, vel in circumferentiam circuli ΑΒΓ cadet, vel extra, vel intra: cadat primum in ipſam circumferentiam, ut in prima figura ipſa ΔΕ; ſumptoque circuli centro Κ, ab ipſo Ε ad Κ ducatur ΕΚ, & producatur ad Β: jungatur autem ΒΔ, & ex utraque parte puncti Ε ſumantur circumferentiæ duæ æquales ΖΕ, ΕΗ; itemque ex utraque parte Β ſumantur aliæ duæ æquales ΑΒ, ΒΓ; & jungantur ΖΕ, ΕΗ, ΔΖ, ΔΗ, ΕΑ, ΕΓ, ΑΒ, ΒΓ, ΔΑ, ΔΓ. quoniam igitur recta ΕΖ [per 29. 3.] æqualis eſt ipſi ΕΗ, æquales enim circumferentias ſubtendunt; communis autem & ad rectos angulos ΔΕ: erit [per 4. 1.] baſis ΔΖ baſi ΔΗ æqualis. rurſus quoniam circumferentia ΑΒ æqualis eſt ipſi ΒΓ circumferentiæ, & eſt ΒΕ diameter circuli; reliqua ΑΖΕ reliquæ ΕΗΓ æqualis erit: quare & recta ΑΕ ipſi ΕΓ. ſed ΔΕ communis eſt utrique, & ad rectos angulos: baſis igitur ΔΑ æqualis eſt baſi ΔΓ. Similiter etiam demonſtrabuntur inter ſe æquales quæcunque ab ipſa ΔΕ vel ΔΒ æqualiter diſtant. rurſus quoniam trianguli ΔΕΖ angulus ΔΕΖ rectus eſt, recta ΔΖ [per 18. 1.] major erit quam ΔΕ. & rurſus recta ΕΑ major eſt quam ΕΖ, quoniam circumferentia ΕΖΑ major eſt quam ipſa ΕΖ circumferentia; communis vero & ad rectos angulos ΔΕ: baſis ΔΖ minor erit quam ΔΑ. eadem quoque ratione & ΔΑ minor quam ΔΒ. quoniam igitur oſtenſa eſt ΔΕ minor quam ΔΖ, itemque ΔΖ minor quam ΔΑ, & ΔΑ minor quam ΔΒ: ipſa quidem ΔΕ minima eſt, ΔΒ vero maxima, & ipſi ΔΕ propinquior remotiori ſemper eſt minor.

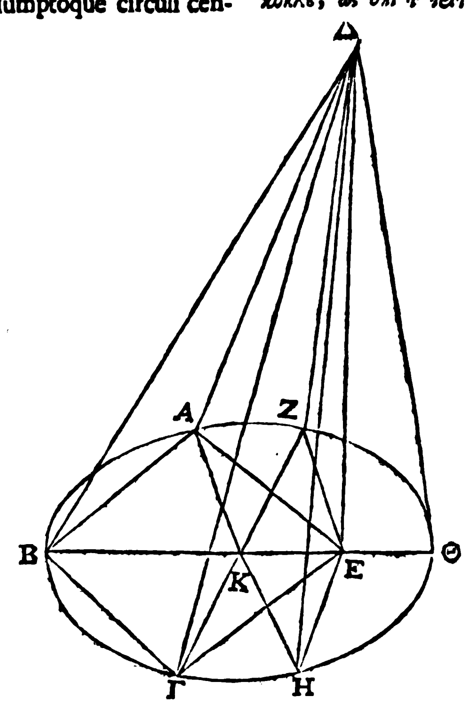
Sed cadat perpendicularis extra circulum ΑΒΓ, ut in ſecunda figura ΔΕ; & rurſus ſumatur circuli centrum Κ, junctaque ΕΚ producatur ad Β, & jungantur ΔΒ, ΔΘ. Sumantur præterea duæ circumferentiæ æquales ex utraque parte puncti Θ, quæ ſint ΘΖ, ΘΗ, & ex utraque parte ipſius Β aliæ duæ ſumantur ΑΒ, ΒΓ, & jungantur ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΗΚ, ΔΖ, ΔΗ, ΑΒ, ΒΓ, ΚΑ, ΚΓ, ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ. itaque quoniam æqualis eſt circumferentia ΘΖ ipſi ΘΗ, & angulus ΘΚΖ angulo ΘΚΗ [per 27. 3.] æqualis erit. Quoniam igitur recta ΖΚ rectæ ΚΗ eſt æqualis, (ex centro enim ſunt,) & ΚΕ communis: ergo baſis ΖΕ æqualis baſi ΗΕ. quoniam igitur recta ΖΕ eſt æqualis ΗΕ, communis vero & ad rectos angulos ΕΔ: baſis ΔΖ baſi ΔΗ eſt æqualis. rurſus quoniam circumferentia ΒΑ æqualis eſt ΒΓ, & angulus ΑΚΒ ipſi ΓΚΒ; & reliquus ex duobus rectis ΑΚΕ reliquo ΓΚΕ æqualis erit. quoniam igitur ΑΚ, ΓΚ inter ſe æquales ſunt, (ex centro enim ſunt,) communis vero ΚΕ, duæ

duabus

duabus æquales, & angulus ΑΚΕ æqualis ΓΚΕ; ergo & ΑΕ basis æqualis ΓΕ. quoniam igitur ΑΕ æqualis est ΓΕ, communis vero & ad rectos angulos ΕΔ, & basis ΔΑ erit basi ΔΓ æqualis. similiter & aliæ omnes ad invicem æquales demonstrabuntur, quæ ab ipsa ΔΒ vel ΔΘ æqualiter distant. & quoniam [per 8.3.] ΕΘ minor est quam ΕΖ, communis vero & ad rectos angulos ΕΔ: erit basis ΔΘ basi ΔΖ minor. rursus quoniam recta quæ à puncto Ε ducta contingit circulum major est omnibus quæ ab eodem puncto in convexam circumferentiam cadunt; & rectangulum sub ΑΕ, ΕΛ æquale est quadrato ipsius ΕΖ, quando ΕΖ circulum contingit, ut ostensum est in tertio libro elementorum [propos. 36.]: erit [per 16.6.] ut ΑΕ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΕΛ. est autem ΕΖ major quam ΕΛ, semper enim propinquior minimæ minor est remotiori: quare & ΑΕ major quam ΕΖ. quoniam igitur ΕΖ minor est quam ΕΑ, communis vero & ad rectos est ΕΔ: basis igitur ΔΖ minor est basi ΔΑ. rursus, quia est ΑΚ æqualis ΚΒ, & ΚΕ communis; erunt duæ ΑΚ, ΚΕ duabus ΕΚ, ΚΒ, hoc est toti ΕΚΒ, æquales. sed duæ ΑΚ, ΚΕ majores sunt quam ΑΕ; ergo & ΒΕ major quam ΑΕ. Rursus quoniam ΑΕ minor est quam ΒΕ, communis autem & ad rectos angulos ΕΔ; basis ΔΑ minor est basi ΔΒ. itaque cum ΔΘ minor sit quam ΔΖ, & ΔΖ minor quam ΔΑ, & ΔΑ quam ΔΒ: minima quidem erit ΔΘ, ΔΒ vero maxima, & ipsi ΔΘ propinquior, *&c.*



Postremo cadat perpendicularis ΔΕ intra circulum ΑΒΓΗΖ, ut in tertia figura, sumptoque circuli centro Κ, & juncta ΕΚ producatur in utramque partem ad puncta Β, Θ, & jungantur ΔΘ, ΔΒ. sumantur autem ex utraque parte puncti Θ circumferentiæ æquales ΘΖ, ΘΗ, & ex utraque parte puncti Β æquales ΑΒ, ΒΓ, & jungantur ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΚΗ, ΔΖ, ΔΗ, ΚΑ, ΚΓ, ΕΑ, ΕΓ, ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, ΑΒ, ΒΓ. Quoniam igitur ΘΖ circumferentia æqualis est circumferentiæ ΘΗ; angulus igitur ΘΚΖ [per 27.3.] angulo ΘΚΗ est æqualis. & quoniam ΚΖ æqualis ipsi ΚΗ, & ΚΕ communis, & angulus ΖΚΕ æqualis angulo ΗΚΕ; ergo & ΖΕ basis basi ΗΕ æqualis erit. Quoniam igitur ΖΕ æqualis ΗΕ, & ΔΕ communis, & angulus ΖΕΔ æqualis ΗΕΔ; basis igitur ΔΖ basi ΔΗ æqualis est. rursus quia circumferentia ΑΒ æqualis est circumferentiæ ΒΓ; angulus ΑΚΒ angulo ΓΚΒ æqualis erit: ergo & reliquus ex duobus rectis ΑΚΕ reliquo ΓΚΕ. quoniam igitur ΑΚ æqualis ΚΓ, commu-



καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΚΕ τῇ ὑπὸ ΓΚΕ· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΑΕ εὐθεῖα τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ καὶ πρὸς ὀρθάς, βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ ἴση. ὁμοίως δὲ καὶ πᾶσαι δειχθήσονται, αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τῆς ΔΒ ἢ τῆς ΔΘ, ἴσαι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΘ τῆς ΕΖ ἐστὶν ἐλάσσων, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΘ βάσεως τῆς ΔΖ ἐστὶν ἐλάσσων. πάλιν ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου πασῶν τῶν πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν μείζων ἐστίν, ἐδείχθη δὲ ἐν τῷ τρίτῳ τῆς στοιχειώσεως, τὸ ὑπὸ ΑΕ, ΕΛ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ὅταν ἡ ΕΖ ἐφάπτηται· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ ἡ ΕΖ πρὸς ΕΛ. μείζων δέ ἐστιν ἡ ΕΖ τῆς ΕΛ, ἀεὶ γὰρ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερον ἐστὶν ἐλάσσων· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΖ τῆς ΕΑ ἐστὶν ἐλάσσων, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΔΑ ἐστὶν ἐλάσσων. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ· δύο ἄρα αἱ ΑΚ, ΚΕ ταῖς ΕΚ, ΚΒ, τουτέστιν ὅλῃ τῇ ΕΚΒ, εἰσὶν ἴσαι. ἀλλ' αἱ ΑΚ, ΚΕ τῆς ΑΕ μείζονές εἰσιν· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῆς ΑΕ μείζων ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΒΕ ἐλάσσων ἐστίν, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῆς ΔΒ ἐστὶν ἐλάσσων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΘ τῆς ΔΖ ἐστὶν ἐλάσσων, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΑ, ἡ δὲ ΔΑ τῆς ΔΒ· ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΘ, μεγίστη δὲ ἡ ΔΒ, καὶ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΘ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Ἀλλὰ δὴ ἡ κάθετος ΔΕ πιπτέτω ἐντὸς τοῦ ΑΒΓΗΖ κύκλου, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΕΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Β, Θ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΔΘ, ΔΒ. καὶ εἰλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι παρ' ἑκάτερα τοῦ Θ, αἱ ΘΖ, ΘΗ, καὶ παρ' ἑκάτερα τοῦ Β αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΚΗ, ΔΖ, ΔΗ, ΚΑ, ΚΓ, ΕΑ, ΕΓ, ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, ΑΒ, ΒΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΘΖ περιφέρεια τῇ ΘΗ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΚΗ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΖ τῇ ΚΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΚΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΚΕ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΕ τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΕΔ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΚΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ ΑΚΕ λοιπῇ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῇ ὑπὸ ΓΚΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ τῇ ΚΓ ἐστὶν ἴση, κοινὴ

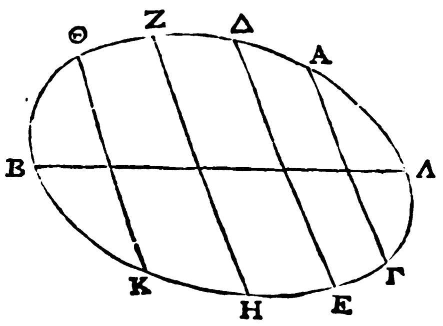
δὲ

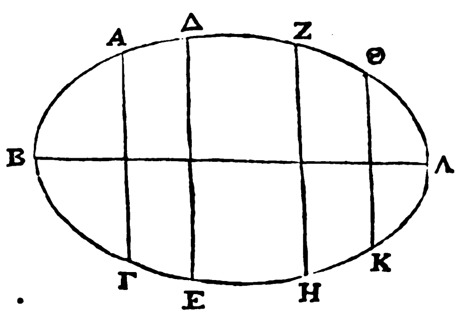
δὲ ἡ ΕΚ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΚΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΚΕ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ τῇ ὑπὸ ΓΕΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὲ καὶ πᾶσαι δειχθήσονται αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἢ τῆς ΔΒ ἢ τῆς ΔΘ ἴσαι. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς διαμέτρου εἴληπται σημεῖον τὸ Ε, μὴ ὂν κέντρον τοῦ κύκλου· μεγίστη μὲν ἡ ΒΕ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΕΘ, ἀεὶ δ' ἡ ἔγγιον τῇ ΕΘ τῆς ἀπώτερον ἐστὶν ἐλάσσων· ὥστε ἡ ΕΘ τῆς ΕΖ ἐστὶν ἐλάσσων. καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΕ τῆς ΖΕ ἐλάσσων ἐστὶ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐταῖς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΘ βάσεως τῆς ΔΖ ἐλάσσων ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἡ μὲν ΕΖ ἐγγίον ἐστὶ τῇ ΕΘ, ἡ δὲ ΕΑ πορρωτέρω, ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΕΖ τῆς ΕΑ. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἡ ΕΖ τῆς ΕΑ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθάς ἐστιν αὐταῖς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΔΑ ἐλάσσων ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ ΑΚ τῇ ΒΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ· δύο αἱ ΑΚ, ΚΕ δυσὶ ταῖς ΒΚ, ΚΕ, τουτέστιν ὅλῃ τῇ ΒΚΕ, εἰσὶν ἴσαι. ἀλλ' αἱ ΑΚ, ΚΕ τῆς ΑΕ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ΕΒ ἄρα τῆς ΕΑ μείζων ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΕΑ τῆς ΕΒ ἐλάσσων ἐστὶ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐταῖς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ βάσεως τῆς ΔΒ ἐστὶν ἐλάσσων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΘ τῆς ΔΖ ἐλάσσων, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΑ, ἡ δὲ ΔΑ τῆς ΔΒ· ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΘ, καὶ τὰ ἑξῆς.

nis vero ΕΚ, & angulus ΑΚΕ angulo ΓΚΕ æqualis: baſis igitur ΑΕ baſi ΓΕ eſt æqualis. quoniam igitur ΑΕ eſt æqualis ΓΕ, & ΕΔ communis, & angulus ΑΕΔ æqualis ΓΕΔ; erit & baſis ΔΑ baſi ΔΓ æqualis. eodem modo & omnes quæ æqualiter diſtant ab ipſa ΔΒ vel ΔΘ inter ſe æquales demonſtrabuntur. & quoniam in circuli ΑΒΓ diametro ſumitur punctum Ε, quod non eſt centrum circuli: erit ΒΕ maxima, ΕΘ vero minima, & ſemper ipſi ΕΘ propinquior minor remotiore fuerit; adeoque ΕΘ minor quam ΕΖ. & quoniam ΘΕ minor eſt quam ΖΕ, & ΕΔ communis & ipſis ad rectos angulos; baſis igitur ΔΘ minor baſi ΔΖ. rurſus cum ΕΖ propinquior ſit ipſi ΕΘ, ΕΑ vero remotior; erit ΕΖ minor quam ΕΑ. quoniam igitur ΕΖ minor eſt quam ΕΑ, communis vero & illis ad rectos angulos ΕΔ; baſis ΔΖ baſi ΔΑ minor erit. rurſus quoniam ΑΚ æqualis ΒΚ, ΚΕ vero communis; duæ ΑΚ, ΚΕ duabus ΒΚ, ΚΕ, hoc eſt toti ΒΚΕ, æquales ſunt. ſed ΑΚ, ΚΕ majores ſunt quam ΑΕ: quare ΕΒ major eſt quam ΕΑ. rurſus quoniam ΕΑ minor eſt quam ΕΒ, communis vero & ipſis ad angulos rectos ΕΔ; baſis igitur ΔΑ minor eſt baſi ΔΒ. quoniam igitur minor eſt ΔΘ quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΔΑ, & ΔΑ quam ΔΒ: minima erit ΔΘ, &c.

[b] **Πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥτις ἐστὶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, διάμετρον καλῶ, καὶ τὰ ἑξῆς.**] Τὸ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ εἶπε, διὰ τὴν ἕλικα τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς σφαίρας· αὗται γὰρ οὐκ εἰσὶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ὃ δὲ λέγει τοιοῦτόν ἐστι· ἔστω καμπύλη γραμμὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῇ εὐθεῖαί τινες παράλληλοι αἱ

[b] *Omnis curvæ lineæ, in uno plano exiſtentis, diametrum voco, &c.*] In uno plano dixit, propter helicen cylindri & ſphæræ; hæ enim non ſunt in uno plano. quod autem dicit ejuſmodi eſt: ſit curva linea ΑΒΓ, & in ea parallelæ quædam rectæ ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ; à puncto autem Β ducatur ΒΛ



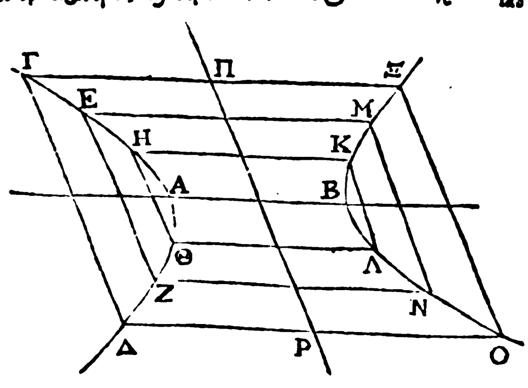


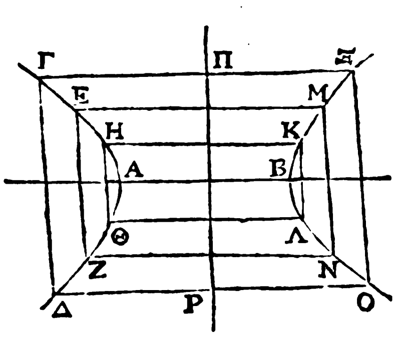
ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ, καὶ διήχθω ἀπὸ τοῦ Β εὐθεῖα ἡ ΒΛ δίχα αὐτὰς τέμνουσα· φησὶν οὖν ὅτι τῆς ΑΒΓ γραμμῆς διάμετρον μὲν καλῶ τὴν ΒΛ· κορυφὴν δὲ τὸ Β· τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν ΒΛ κατῆχθαι ἑκάστην τῶν ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ. εἰ δὲ ἡ ΒΛ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὰς παραλλήλους, ἄξων καλεῖται.

recta, quæ ipſas parallelas bifariam ſecet: lineæ igitur ΑΒΓ diametrum, inquit, voco rectam ΒΛ; & verticem punctum Β; ordinatim vero ad ipſam ΒΛ applicari dicitur unaquæque rectarum ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ. ſi vero ΒΛ ipſas parallelas bifariam & ad rectos angulos ſecet, axis appellatur.

[c] **Ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.**] Ἐὰν νομίσωμεν τὰς Α, Β γραμμὰς, καὶ ἐν αὐταῖς τὰς ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ παραλλήλους, καὶ τὴν ΑΒ διηγμένην ἐφ' ἑκάτερα, καὶ τέμνουσαν τὰς παραλλήλους δίχα·

[c] *Similiter & duarum curvarum linearum, &c.*] Si enim intellexerimus lineas Α, Β, & in ipſis parallelas ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ, & rectam ΑΒ ex utraque parte productam, quæ bifariam parallelas dividat: ipſam quidem ΑΒ voco diametrum tranſ-





καὶ τὴν μὲν ΑΒ καλῶ πλαγίαν διάμετρον· κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν τὰ Α, Β σημεῖα· τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν ΑΒ τὰς ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ. εἰ δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὰς τέμνει, ἄξων καλεῖται. ἐὰν δὲ διαχθεῖσά τις εὐθεῖα, ὡς ἡ ΠΡ, τὰς

verſam; vertices linearum puncta Α, Β; ordinatim vero ad ΑΒ applicari dicuntur ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ. at ſi ipſas bifariam & ad rectos angulos dividat, tranſverſus axis appellatur. ſi vero recta ducatur, ut ΠΡ, rectas

ΓΞ, ΕΜ, ΗΚ, ΘΛ, ΖΝ, ΔΟ ipsi ΑΒ parallelas bifariam secans, recta diameter dicitur. ordinatim ad diametrum ΠΡ applicetur unaquæque rectarum ΓΞ, ΕΜ, ΗΚ, ΘΛ, ΖΝ, ΔΟ. si bifariam & ad rectos angulos ipsam secet, rectus axis dicitur. at si rectæ ΑΒ, ΠΡ sibi invicem parallelas bifariam secuerint, conjugatæ diametri dicuntur. quod si bifariam & ad rectos angulos, conjugati axes vocantur.

ΓΞ, ΕΜ, ΗΚ, ΘΛ, ΖΝ, ΔΟ παραλλήλους τῇ ΑΒ δίχα τέμνει, ὀρθία μὲν διάμετρος καλεῖται. τεταγμένως δὲ κατῆχθαι ἐπὶ τὴν ΠΡ διάμετρον ἑκάστη τῶν ΓΞ, ΕΜ, ΗΚ, ΘΛ, ΖΝ, ΔΟ. εἰ δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει, ἄξων ὀρθός. ἐὰν δὲ αἱ ΑΒ, ΠΡ δίχα τέμνωσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους, λέγονται συζυγεῖς διάμετροι. ἐὰν δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς, συζυγεῖς ἄξονες ὀνομάζονται.

PROP. I. *Theor.*

Rectæ lineæ, quæ à vertice superficiei conicæ, ad puncta quæ in superficie sunt, ducuntur, in ipsa superficie erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α′.

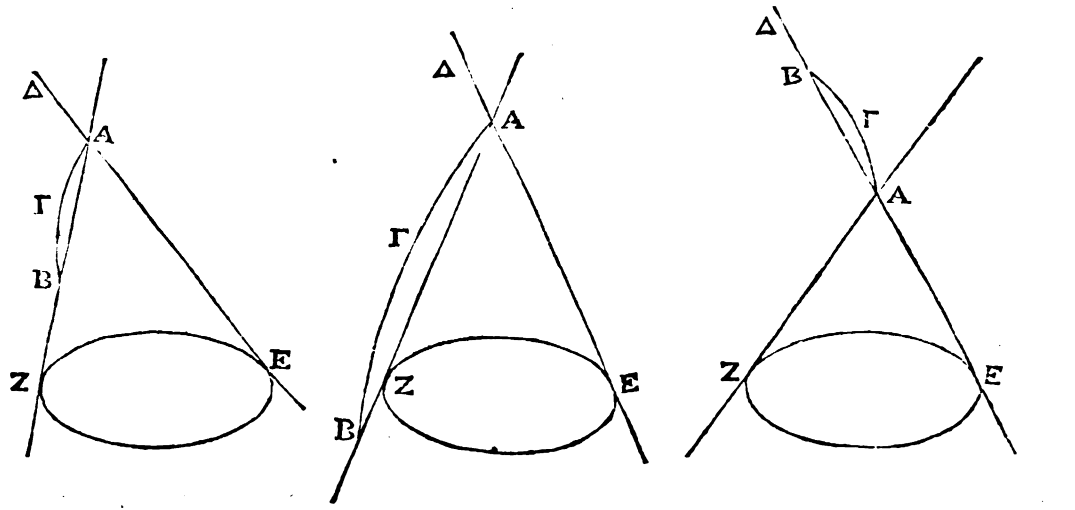
Αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ ἐν ἐπιφανείᾳ σημεῖα, ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εἰσίν.

SIT superficies conica, cujus vertex Α, & sumpto in superficie conica aliquo puncto Β, jungatur recta ΑΓΒ; recta ΑΓΒ in superficie erit.

Si enim fieri potest, non sit in superficie, & recta, quæ superficiem describit, sit ΔΕ; circulus autem, in quo ipsa ΔΕ fertur, sit ΕΖ. itaque, si manente Α, feratur ΔΕ in circuli ΕΖ circumferentia; per Β punctum transibit, atque erunt duarum rectarum iidem termini: quod est absurdum. non igitur à puncto Α ad Β ducta recta extra superficiem est: ergo in ipsa superficie erit. quod erat demonstrandum.

ΕΣΤΩ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἧς κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τὸ Β, καὶ ἐπιζεύχθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΓΒ· εὐθεῖα ἡ ΑΓΒ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστίν.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, μὴ ἔστω, καὶ ἔστω ἡ γράφουσα τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεῖα ἡ ΔΕ· ὁ δὲ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ ΔΕ, ὁ ΕΖ. ἐὰν δὲ μένοντος τοῦ Α σημείου, ἡ ΔΕ εὐθεῖα φέρηται κατὰ τῆς τοῦ ΕΖ κύκλου περιφερείας, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β σημείου, καὶ ἔσονται δύο εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα οὐκ ἔστιν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ· ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστί.



Corollarium.

Et constat, si à vertice ad aliquod punctum eorum, quæ intra superficiem sunt, recta ducatur, illam intra superficiem conicam; & si ad aliquod eorum quæ sunt extra, extra superficiem cadere.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ὅτι ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπί τι σημεῖον τῶν ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας· καὶ ἐὰν ἐπί τι τῶν ἐκτὸς ἐπιζευχθῇ, ἐκτὸς ἔσται τῆς ἐπιφανείας.

EUTOCIUS.

De figuris diversis vel casibus theorematum illud scire oportet, casum esse, quando ea quæ in propositione dantur positione data sunt: ipsorum enim differens transmutatio, eadem conclusione manente, casum facit. similiter etiam & à constructione transposita fit casus. cum igitur theoremata plures casus habeant, una eademque demonstratio omnibus congruit & iisdem elementis, præterquam in paucis quibusdam, ut deinceps explicabimus. statim nam-

Περὶ τῶν διαφόρων καταγραφῶν, ἤτοι πτώσεων τῶν θεωρημάτων τοσοῦτον ἰστέον, ὅτι πτῶσις μέν ἐστιν, ὅτι τὰ ἐν τῇ προτάσει δεδομένα τῇ θέσει ἢ δοθέντα· ἡ γὰρ διάφορος αὐτῶν μετάληψις, τοῦ αὐτοῦ συμπεράσματος ὄντος, ποιεῖ τὴν πτῶσιν. ὁμοίως δὲ καὶ ἀπὸ τῆς κατασκευῆς μετατιθεμένης γίνεται πτῶσις. πολλὰς δὲ πτώσεις ἐχόντων τῶν θεωρημάτων, πάσαις ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἁρμόζει καὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν στοιχείων, πλὴν βραχέων, ὡς ἑξῆς εἰσόμεθα. εὐ-

θὺς

θὺς γὰρ τὸ πρῶτον θεώρημα τρεῖς πτώσεις ἔχει, διὰ τὸ λαμβανόμενον σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τουτέστι τὸ Β, ποτὲ μὲν εἰς τὴν κατωτέραν ἐπιφάνειαν εἶναι, καὶ τοῦτο διχῶς, ἢ ἀνωτέρω τοῦ κύκλου, ἢ κατωτέρω· ποτὲ δὲ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς ἐπικειμένης. τοῦτο δὲ τὸ θεώρημα προὔθετο ζητῆσαι, ὅτι οὐκ ἐπὶ πάντα δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας λαμβανόμενα ἐπιζευγνυμένη ἡ εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶν, ἀλλὰ εὐθεῖα μόνον ἡ ἐπὶ τὴν κορυφὴν νεύει· διὰ τὸ καὶ ὑπὸ εὐθείας τὸ πέρας ἐχούσης μένον πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς ἐπιφανείας γεγενῆσθαι τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν. ὅτι δὲ τοῦτο ἀληθὲς, τὸ δεύτερον θεώρημα δηλοῖ.

que primum theorema tres habet caſus, propterea quod punctum B in ſuperficie ſumptum interdum quidem in ſuperficie inferiori ſumitur, & hoc duobus modis, vel ſupra circulum, vel infra; interdum vero in ea quæ eſt ad verticem. Hoc igitur theorema oſtendere proponit, non quælibet duo puncta conjungentem rectam in ſuperficie eſſe, ſed tantum rectam quæ ad verticem ipſum vergit: cujus cauſa eſt, quod conica ſuperficies efficitur à recta quæ manentem terminum ad verticem habet. illud vero plane ita eſſe, in ſecundo theoremate demonſtratur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β′.

Ἐὰν ἐφ' ὁποτέρας οὖν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν δύο σημεῖα ληφθῇ, ἡ δὲ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα μὴ νεύῃ ἐπὶ τὴν κορυφὴν, ἐντὸς πεσεῖται τῆς ἐπιφανείας· ἡ δὲ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἐκτός.

Ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἧς κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, ὁ δὲ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ὁ Β Γ, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ὁποτερασοῦν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν δύο σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Δ Ε μὴ νευέτω ἐπὶ τὸ Α σημεῖον· λέγω ὅτι ἡ Δ Ε ἐντὸς ἔσται τῆς ἐπιφανείας, καὶ ἡ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἐκτός.

Ἐπιζεύχθωσαν αἱ Α Ε, Α Δ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. πιπτέτωσαν κατὰ τὰ Β, Γ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ Β Γ· ἔσται ἄρα ἡ Β Γ ἐντὸς τοῦ κύκλου, ὥστε καὶ ἐντὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. εἰλήφθω δὴ ἐπὶ τῆς Δ Ε τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Α Ζ ἐκβεβλήσθω· πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν Β Γ εὐθεῖαν· τὸ γὰρ Β Γ Α τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. πιπτέτω κατὰ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν τὸ Η ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας· καὶ ἡ Α Η ἄρα ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ὥστε καὶ τὸ Ζ ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ πάντα τὰ ἐπὶ τῆς Δ Ε σημεῖα ἐντός ἐστι τῆς ἐπιφανείας.

Ἐκβεβλήσθω δὴ ἡ Δ Ε ἐπὶ τὸ Θ· λέγω δὴ ὅτι ἐκτὸς πεσεῖται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

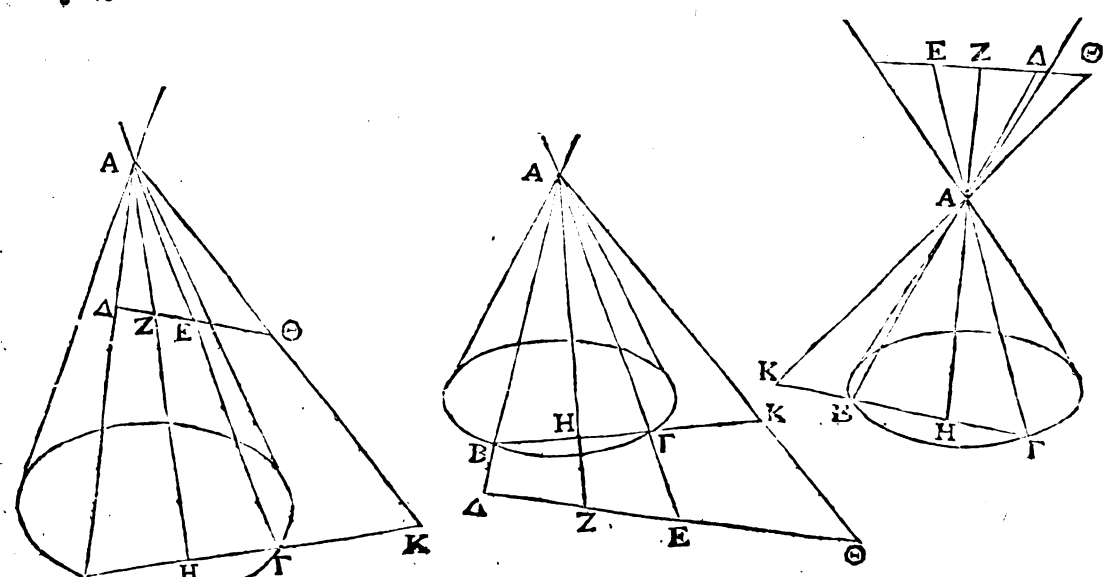
Prop. II. *Theor.*

Si in alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad verticem, duo puncta ſumantur, & quæ puncta conjungit recta ad verticem non vergat; intra ſuperficiem cadet; quæ vero eſt in directum ipſi, cadet extra.

Sit conica ſuperficies, cujus vertex quidem punctum A, circulus autem, in quo fertur recta ſuperficiem deſcribens, ſit B Γ; & in alterutra ſuperficierum quæ ſunt ad verticem, ſumptis duobus punctis Δ, E, recta Δ E ducatur, quæ ad punctum A non vergat: dico ipſam Δ E intra ſuperficiem cadere, & quæ eſt in directum ipſi, cadere extra.

Jungantur A E, A Δ, & producantur. cadent utique [per 1. 1. hujus] in circuli circumferentiam. cadant in puncta B, Γ; & jungatur B Γ: erit igitur [per 2. 3.] B Γ intra circulum; quare & intra conicam ſuperficiem. ſumatur in ipſa Δ E quodvis punctum Z; junctaque A Z producatur: cadet hæc in rectam B Γ; nam [per 2. 11.] triangulum B Γ A eſt in uno plano. cadat in H. quoniam igitur punctum H eſt intra conicam ſuperficiem; & ipſa A H [per cor. 1. 1. huj.] intra conicam ſuperficiem erit; adeoque & punctum Z. ſimiliter demonſtrabuntur & omnia puncta rectæ Δ E eſſe intra conicam ſuperficiem.

Producatur Δ E ad Θ; dico E Θ extra conicam ſuperficiem cadere.



Si enim fieri poteſt, aliquod ipſius E Θ punctum, nempe Θ, non ſit extra, & juncta A Θ producatur; cadet hæc vel in ipſam circuli circumferentiam, vel intra; quod fieri non poteſt: cadit enim in B Γ protractam, ut in K. quare E Θ extra conicam ſuperficiem erit.

Recta igitur Δ E cadet intra conicam ſuperficiem, & quæ eſt in directum ipſi, extra cadet. quod erat demonſtrandum.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔσω τι αὐτῆς E Θ μὴ ἐκτὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ A Θ ἐκβεβλήσθω· πεσεῖται δὴ ἤτοι ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ἢ ἐντός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· πίπτει γὰρ ἐπὶ τὴν B Γ ἐκβαλλομένην, ὡς κατὰ τὸ K. ἡ E Θ ἄρα ἐκτός ἐστι τῆς ἐπιφανείας.

Ἡ ἄρα Δ E ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἡ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἐκτός. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

EUTOCIUS.

Secundum theorema tres habet caſus, propterea quod ſumpta puncta Δ, E ſunt vel in ſuperficie ad verticem, vel in inferiori; & id dupliciter, vel intra circulum, vel extra. ſciendum autem eſt in quibuſdam exemplaribus totum hoc theorema per argumentationem, quæ deducit ad abſurdum, demonſtrari.

Τὸ δεύτερον θεώρημα τρεῖς ἔχει πτώσεις, διὰ τὸ τὰ λαμβανόμενα σημεῖα τὰ Δ, E ἢ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν εἶναι ἐπιφανείας, ἢ ἐπὶ τῆς κάτω καὶ τοῦτο διχῶς, ἢ ἐσωτέρω τοῦ κύκλου, ἢ ἐξωτέρω. δεῖ δὲ ἐφιστάνειν ὅτι τοῦτο τὸ θεώρημα εὑρίσκεται, ἔν τισιν ἀντιγράφοις, ὅλον διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς δεδειγμένον.

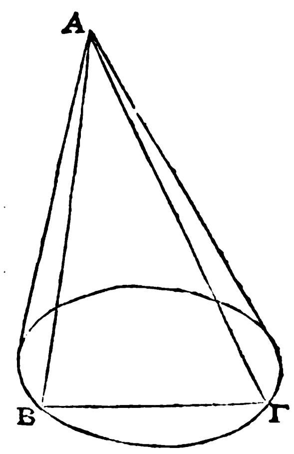
PROP. III. *Theor.*

Si conus plano per verticem ſecetur, ſectio triangulum erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ τρίγωνόν ἐστιν.

SIT conus, cujus vertex A, baſis autem circulus B Γ, & per A ſecetur plano aliquo quod ſectiones faciat in ſuperficie lineas quidem A B, A Γ, & in baſi rectam B Γ: dico A B Γ triangulum eſſe.



Quoniam enim à puncto A ad B ducta linea communis ſectio eſt plani ſecantis, & ſuperficiei conicæ; erit [per 1. 1. huj.] A B recta linea. eadem ratione & ipſa A Γ. eſt autem [per 3. 11.] & B Γ recta: quare A B Γ eſt triangulum.

Si igitur conus plano ſecetur per verticem, ſectio triangulum erit. quod erat demonſtrandum.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ B Γ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ A σημείου, καὶ ποιείτω τομὰς ἐπὶ μὲν τῆς ἐπιφανείας τὰς A B, A Γ γραμμάς, ἐν δὲ τῇ βάσει τὴν B Γ εὐθεῖαν· λέγω ὅτι τὸ A B Γ τρίγωνόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη κοινὴ τομή ἐστι τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ A B. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ A Γ. ἔστι δὲ καὶ ἡ B Γ εὐθεῖα· τρίγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ A B Γ.

Ἐὰν ἄρα κῶνος ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ τρίγωνόν ἐστι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

EUTOCIUS.

Tertium theorema caſum non habet. oportet autem ſcire lineam A B rectam eſſe, cum ſit communis ſectio plani ſecantis, & ſuperficiei conicæ, quæ à recta manentem terminum ad verticem habente deſcribitur. neque enim omnis ſuperficies ſecta plano facit ſectionem rectam lineam; neque ipſe conus, niſi planum ſecans per verticem tranſeat.

Τὸ τρίτον θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει. δεῖ δὲ ἐν αὐτῷ ἐπιστῆσαι ὅτι ἡ A B εὐθεῖά ἐστι, διὰ τὸ κοινὴν τομὴν εἶναι τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ἥτις ὑπὸ εὐθείας ἐγράφη τὸ πέρας ἐχούσης μένον πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς ἐπιφανείας. οὐ γὰρ πᾶσα ἐπιφάνεια, ὑπὸ ἐπιπέδου τεμνομένη, τὴν τομὴν ποιεῖ εὐθεῖαν· οὐδὲ αὐτὸς ὁ κῶνος, εἰ μὴ διὰ τῆς κορυφῆς ἔλθῃ τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

PROP. IV. *Theor.*

Si alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad verticem, plano ſecetur æquidiſtante circulo, per quem fertur recta ſuperficiem deſcribens: planum, quod ſuperficie concluditur, circulus erit centrum in axe habens; figura vero contenta circulo, & ea parte ſuperficiei conicæ quæ inter ſecans planum & verticem interjicitur, conus erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν ὁποτερασοῦν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ παραλλήλῳ τῷ κύκλῳ, καθ' οὗ φέρεται ἡ γράφουσα ἐπιφάνειαν εὐθεῖα· τὸ ἀπολαμβανόμενον ἐπίπεδον μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας κύκλος ἐστί, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος· τὸ δὲ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ κύκλου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου κωνικῆς ἐπιφανείας πρὸς τῇ κορυφῇ, κῶνος ἔσται.

SIT conica ſuperficies, cujus vertex A, circulus autem, in quo fertur recta ſuperficiem

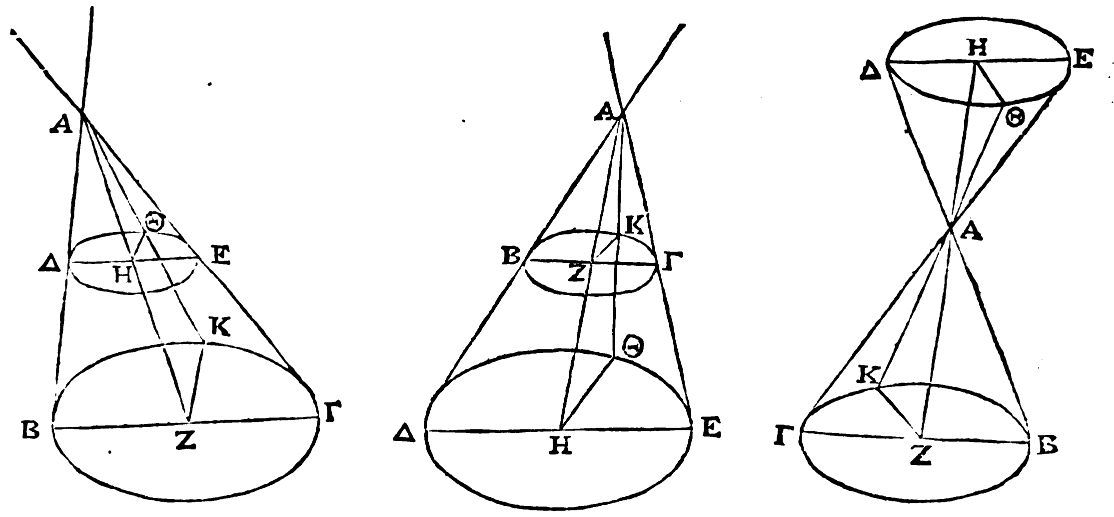
ΕΣΤΩ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἧς κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, ὁ δὲ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν

φάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ἡ ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ παραλλήλῳ τῷ ΒΓ κύκλῳ, καὶ ποιείτω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὴν τὴν ΔΕ γραμμήν· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ γραμμὴ κύκλος ἐστὶν, ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἔχων τὸ κέντρον.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· ἄξων ἄρα ἐστὶ, καὶ συμβάλλει τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ Η, καὶ ἐκβαλλέσθω τι διὰ τῆς ΑΖ ἐπίπεδον· ἔσται δὴ ἡ τομὴ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ. καὶ ἐπεὶ τὰ Δ, Η, Ε σημεῖα ἐν τῷ τέμνοντί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ ἐπιπέδῳ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗΕ. εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔΕ γραμμῆς, τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΘ ἐκβεβλήσθω· συμβαλεῖ δὴ τῇ ΒΓ περιφερείᾳ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΘ, ΖΚ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα, τὰ ΔΕ, ΒΓ, ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνεται τοῦ ΑΒΓ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΖΚ παράλληλος· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἥτε ΖΒ πρὸς ΗΔ, καὶ ἡ ΖΓ πρὸς ΗΕ, καὶ ἡ ΖΚ πρὸς ΗΘ. καί εἰσιν αἱ τρεῖς ΒΖ, ΚΖ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΗ, ΗΘ, ΗΕ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Η σημείου πρὸς τὴν ΔΕ γραμμὴν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ γραμμὴ, κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

describens, sit ΒΓ, & secetur plano quovis ipsi circulo ΒΓ æquidistante, atque sectionem faciat in superficie lineam ΔΕ: dico lineam ΔΕ esse circulum qui centrum in axe habet.

Sumatur enim centrum circuli ΒΓ, quod sit Ζ, & ΑΖ jungatur: axis igitur [per 3. def. huj.] est ΑΖ, & occurrit plano secanti. occurrat in Η, & per rectam ΑΖ planum aliquod ducatur: erit igitur [per 3. 1. huj.] sectio triangulum ΑΒΓ. & quoniam puncta Δ, Η, Ε sunt & in plano secante, & in ipso ΑΒΓ plano: ΔΗΕ erit [per 3. 11.] linea recta. sumatur autem in ipsa ΔΕ linea punctum aliquod Θ, & juncta ΑΘ producatur: occurret igitur circumferentiæ ΑΒΓ. occurrat in Κ, junganturque ΗΘ, ΖΚ. & quoniam duo plana æquidistantia ΔΕ, ΒΓ plano ΑΒΓ secantur; communes ipsorum sectiones [per 16. 11.] parallelæ erunt: parallela est igitur ΔΕ ipsi ΒΓ. & eadem ratione ΗΘ est parallela ipsi ΖΚ: quare [per 4. 6.] ut ΑΖ ad ΑΗ, ita ΖΒ ad ΗΔ, ΖΓ ad ΗΕ, & ΖΚ ad ΗΘ. suntque tres rectæ ΒΖ, ΚΖ, ΖΓ æquales inter sese: ergo [per 14. 5.] & ipsæ tres ΔΗ, ΗΘ, ΗΕ inter sese æquales erunt. similiter quoque ostendentur æquales quæcunque à puncto Η ad lineam ΔΕ ducuntur. linea igitur ΔΕ est circulus, centrum in axe habens.



Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ὅτι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ ΔΕ κύκλου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτοῦ πρὸς τῷ Α σημείῳ κωνικῆς ἐπιφανείας, κῶνός ἐστι. καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου διάμετρός ἐστι τοῦ κύκλου.

Corollarium.

Constat [per 4. def. huj.] figuram contentam circulo ΔΕ, & ea parte superficiei conicæ quæ inter dictum circulum & punctum Α interjicitur, conum esse. simulque demonstratum est, communem sectionem plani secantis & trianguli per axem, diametrum esse ipsius circuli.

EUTOCIUS.

Πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος τρεῖς εἰσιν, ὥσπερ αὐτοῦ πρώτου καὶ δευτέρου.

Casus hujus theorematis tres sunt, quemadmodum & primi & secundi.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ

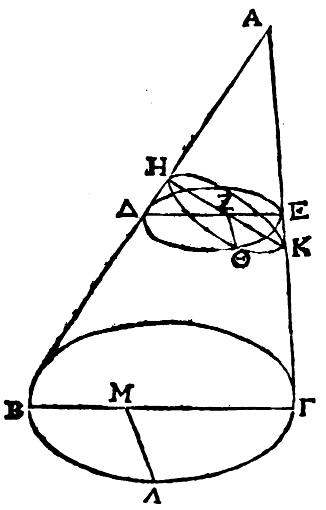
Prop. V. *Theor.*

Si conus scalenus plano per axem secetur ad rectos angulos ipsi basi, seceturque

turque altero plano ad triangulum per axem recto, quod ex verticis parte triangulum abscindat simile ei quod per axem; subcontrarie vero positum: sectio circulus erit. vocetur autem hujusmodi sectio SUBCONTRARIA.

SIT conus scalenus, cujus vertex A punctum, basis circulus ΒΓ, & [a] secetur plano per axem ad circulum ΒΓ recto, atque faciat sectionem triangulum ΑΒΓ; [b] secetur autem & altero plano ad rectos angulos ipsi ΑΒΓ, quod ex parte A triangulum abscindat ΑΗΚ triangulo ΑΒΓ simile, subcontrarie vero positum; ut videlicet angulus ΑΚΗ æqualis sit ΑΒΓ angulo, & faciat sectionem in superficie lineam ΗΚΘ: dico ipsam ΗΘΚ circulum esse.

Sumantur enim in lineis ΗΘΚ, ΒΓ puncta quæpiam Θ, Λ, à quibus ad planum trianguli ΑΒΓ, perpendiculares ducantur· cadent hæ [per 38.11.] in communes planorum sectiones. cadant ut ΘΖ, ΛΜ. parallela est igitur [per 6.11.] ΘΖ ipsi ΛΜ. ducatur autem per Ζ ipsi ΒΓ parallela ΔΖΕ. est vero & ΖΘ ipsi ΛΜ parallela: ergo [per 15. 11.] planum quod per ΖΘ, ΔΕ transit, æquidistans est basi ipsius coni: & idcirco [per 4.1. huj.] sectio ΔΘΕ circulus erit, cujus diameter ΔΕ: æquale est igitur rectangulum sub ΔΖ, ΖΕ quadrato ex ΖΘ. & quoniam parallela est ΕΔ ipsi ΒΓ: angulus ΑΔΕ [per 29.1.] æqualis est angulo ΑΒΓ. & ponitur angulus ΑΚΗ angulo ΑΒΓ æqualis: ergo & ΑΚΗ ipsi ΑΔΕ æqualis erit. sunt autem [per 15. 1.] & qui ad Ζ anguli æquales; sunt enim ad verticem: igitur [per 4. 6.] ΔΖΗ triangulum simile est triangulo ΚΖΕ. igitur ut ΕΖ ad ΖΚ ita ΗΖ ad ΖΔ: [c] rectangulum igitur ΕΖΔ æquale est [per 16. 6.] rectangulo ΚΖΗ. sed rectangulum ΕΖΔ (hoc est sub ΔΖ, ΖΕ) demonstratum est æquale quadrato ex ΖΘ: ergo & rectangulum sub ΚΖ, ΖΗ eidem æquale erit. Similiter demonstrabuntur & omnes, quæ à linea ΗΘΚ ad ipsam ΗΚ perpendiculares ducuntur, posse æquale ei quod sub segmentis ipsius ΗΚ continetur. [d] sectio igitur circulus est, cujus diameter [per 2. lem.] est ΗΚ.



ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι δὲ πρὸς τῇ κορυφῇ τρίγωνον ὅμοιον μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον· ἡ τομὴ κύκλος ἐστί. καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ΥΠΕΝΑΝΤΙΑ.

ΕΣΤΩ κῶνος σκαληνὸς, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ [a] τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, [b] τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὄντι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι δὲ τρίγωνον πρὸς τῷ Α σημείῳ τὸ ΑΗΚ ὅμοιον μὲν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον, τουτέστιν, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΚΗ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΗΚΘ γραμμήν· λέγω ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ ΗΘΚ γραμμή.

Εἰλήφθω γάρ τινα σημεῖα ἐπὶ τῶν ΗΘΚ, ΒΓ γραμμῶν, τὰ Θ, Λ, καὶ ἀπὸ τῶν Θ, Λ σημείων ἐπὶ τὸ διὰ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων. πεπτέτωσαν ὡς αἱ ΘΖ, ΛΜ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΖ τῇ ΛΜ. ἤχθω δὴ δι' αὐτοῦ Ζ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΔΖΕ. ἔστι δὴ καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΛΜ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΖΘ, ΔΕ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῇ βάσει τοῦ κώνου· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομὴ, οὗ διάμετρος ἡ ΔΕ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΔ τῇ ΒΓ· ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἡ δὲ ὑπὸ ΑΚΗ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΔΕ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ σημείῳ ἴσαι, κατὰ κορυφὴν γάρ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖΗ τρίγωνον τῷ ΚΖΕ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΚ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ· [c] τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΚΖΗ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖΔ (τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ) ἴσον ἐδείχθη τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΚΖ, ΖΗ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῆς ΗΘΚ γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΗΚ ἠγμέναι κάθετοι ἴσον δυνάμεναι τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ΗΚ. [d] κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομὴ, οὗ διάμετρος ἡ ΗΚ.

EUTOCIUS.

Quintum theorema casum non habet. Exordiens autem *Apollonius* expositionem, [a] Secetur, *inquit*, conus per axem plano ad basim recto. Sed quoniam in cono scaleno, juxta unicam solummodo positionem triangulum per axem ad basim rectum est, hoc ita faciemus. Sumentes namque basis centrum, ab eo erigemus rectam ad rectos angulos ipsi pla-

Τὸ πέμπτον θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει. ἀρχόμενος δὲ τῆς ἐκθέσεως, φησὶ, [a] Τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ πρὸς τὴν βάσιν. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ σκαληνῷ κώνῳ, κατὰ μίαν μόνον θέσιν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, τοῦτο ποιήσομεν οὕτως. λαβόντες τὸ κέντρον τῆς βάσεως, ἀναστήσομεν ἀπ' αὐτοῦ τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως

πρὸς

πρὸς ὀρθάς, καὶ δι' αὐτῆς καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβάλλοντες ἐπίπεδον ἕξομεν τὸ ζητούμενον. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ καὶ δεκάτῳ τῶν Εὐκλείδου στοιχειώσεως, ὅτι ἂν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. τὸν δὲ κῶνον σκαληνὸν ὑπέθετο, ἐπειδὴ ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ τὸ παράλληλον τῇ βάσει ἐπίπεδον τῷ ὑπεναντίως κειμένῳ τὸ αὐτό ἐστιν.

Ἔτι φησί, [b] Τετμήσθω καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι δὲ πρὸς τῇ κορυφῇ τρίγωνον ὅμοιον μὲν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον. τοῦτο δὲ γίνεται οὕτως. ἔστω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΗ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η, τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΗΚ· τὸ ΑΗΚ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΓ ὅμοιον μέν ἐστιν, ὑπεναντίως δὲ κείμενον. εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ΗΚ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῷ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΖΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΗΚ, ΘΖ ἐπίπεδον· τοῦτο δὴ ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, διὰ τὴν ΖΘ, καὶ ποιεῖ τὸ προκείμενον.

Ἐν τῷ συμπεράσματί φησιν, ὅτι διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΔΖΗ, ΕΖΚ τριγώνων, [c] ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΖΔ τῷ ὑπὸ ΚΖΗ. δυνατὸν δέ ἐστι τοῦτο δεῖξαι καὶ δίχα τῆς τῶν τριγώνων ὁμοιότητος· λέγοντα, ὅτι ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΑΚΗ, ΑΔΕ γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τὸ Β· ἐν τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τοῦ περιλαμβάνοντος κύκλου τὰ Δ, Ε, Η, Κ σημεῖα. καὶ ἐπειδὴ ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΗΚ τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ζ· τὸ ὑπὸ ΔΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΗΖΚ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ πᾶσαι ἀπὸ τῆς ΗΘΚ γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΚΗ κάθετοι ἀγόμεναι ἴσον δύνανται τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων.

[d] Κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομή, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΗΚ.] καὶ δυνατὸν μέν ἐστιν ἐπιλογίσασθαι τοῦτο διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς. εἰ γὰρ ὁ περὶ τὴν ΚΗ γραφόμενος κύκλος οὐκ ἥξει διὰ τοῦ Θ σημείου, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν ΚΖ, ΖΗ ἴσον, ἤτοι τῷ ἀπὸ μείζονος τῆς ΖΘ, ἢ τῷ ἀπὸ ἐλάσσονος, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. δείξομεν δὲ αὐτὸ καὶ ἐπ' εὐθείας. ἔστω τις γραμμὴ ἡ ΗΘΚ, καὶ ὑποτεινέτω αὐτὴν ἡ ΚΗ, εἰλήφθω δὲ καὶ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Θ, Ο, καὶ ἀπὸ αὐτῶν ἐπὶ τὴν ΗΚ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΘΖ, ΟΠ, καὶ ἔστω τὸ μὲν ἀπὸ ΖΘ ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΖΚ, τὸ δὲ ἀπὸ ΟΠ τῷ ὑπὸ ΗΠΚ ἴσον· λέγω ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ ΗΘΟΚ γραμμή. τετμήσθω γὰρ ἡ ΗΚ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΘ, ΝΟ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΗΚ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ν, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ· τὸ ὑπὸ ΗΖΚ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΝΚ. τὸ δὲ ὑπὸ ΗΖΚ ἴσον ὑπόκειται τῷ ἀπὸ ΖΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΘΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ. ἴσα δέ ἐστι τὰ ἀπὸ ΘΖ, ΖΝ τῷ ἀπὸ ΝΘ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ πρὸς τὸ Ζ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΝΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ ΝΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘΚ γραμμή, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΗΚ.

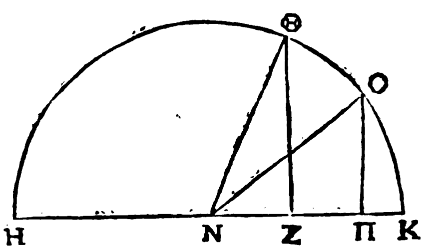
Δυνατὸν δέ ἐστιν, τὰς ΔΕ, ΗΚ διαμέτρους ποτὲ μὲν ἴσας, ποτὲ δὲ ἀνίσους εἶναι, οὐδέποτε μέντοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΝΚ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΝΑ τῆς ΑΚ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΑΚ τῆς ΑΗ, διὰ τὴν ὑπεναντίαν τομήν· ὥστε τῇ ΑΚ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἴση λαμβανομένη μεταξὺ πίπτει τῶν σημείων Η, Ν. πιπτέτω ὡς ἡ ΑΞ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Ξ τῇ ΒΓ παράλληλος ἀγομένη τέμνει τὴν ΗΚ. τεμνέτω ὡς ἡ ΞΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν

no basis, perque ipsam & axem planum ducentes id quod propositum fuerat assequemur. ostensum etenim est in undecimo libro [prop.18.] elementorum *Euclidis*, si recta plano alicui ad rectos angulos fuerit, & omnia quæ per ipsum ducuntur plana eidem ad rectos angulos esse. conum vero scalenum supposuit, quoniam in æquicruri planum basi æquidistans idem est quod subcontrarie positum.

Præterea [b] Secetur, *inquit*, & altero plano ad rectos angulos ipsi triangulo per axem, quod abscindat ex verticis parte triangulum simile ipsi ΑΒΓ, subcontrarie vero positum. illud ita fiet. Sit triangulum per axem ΑΒΓ, sumaturque in ΑΒ quodvis punctum Η, & ad rectam ΑΗ, & punctum in ea Η, [per 23. 1.] constituatur angulus ΑΗΚ ipsi ΑΓΒ æqualis: ergo triangulum ΑΗΚ triangulo ΑΒΓ simile erit, at subcontrarie positum. sumatur autem in recta ΗΚ quodlibet punctum Ζ, & à Ζ erigatur ΖΘ ad rectos angulos plano trianguli ΑΒΓ, & per ΗΚ, ΖΘ planum ducatur: erit illud [per 18. 11.] ad triangulum ΑΒΓ rectum, quia per rectam ΖΘ transit, & faciet id quod erat faciendum.

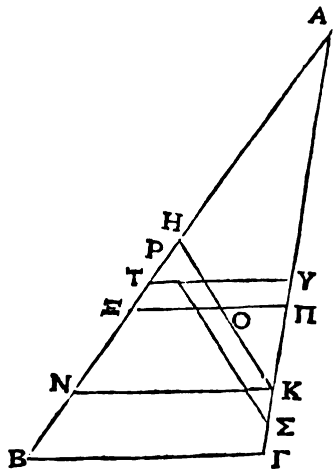
In conclusione *dicit*, propter similitudinem triangulorum ΔΖΗ, ΕΖΚ, [c] æquale esse rectangulum ΕΖΔ rectangulo ΚΖΗ. quod quidem & absque triangulorum similitudine demonstrari potest hoc pacto; quoniam enim uterque angulorum ΑΚΗ, ΑΔΕ æqualis est angulo qui ad Β: erunt hi [per 21. 3.] in eadem portione circuli per puncta Δ, Ε, Η, Κ transeuntis. & quoniam in circulo duæ rectæ ΔΕ, ΗΚ sese secant in Ζ: rectangulum ΔΖΕ [per 35. 3.] æquale est rectangulo ΗΖΚ. Similiter demonstrabuntur & omnes rectæ à linea ΗΘΚ ductæ perpendiculares ad ΚΗ rectam, posse æquale ei quod sub ejus segmentis continetur.

[d] Sectio igitur est circulus, cujus diameter ΗΚ.] possumus autem hoc demonstrare per deductionem ad absurdum. Si enim circulus, qui circa ΗΚ describitur, non transit per Θ punctum; erit rectangulum sub ΚΖ, ΖΗ æquale quadrato, vel rectæ majoris ipsa ΖΘ, vel minoris, contra hypothesin. Sed & illud idem directa demonstratione ostendemus. sit linea quædam ΗΘΚ, cui subtendatur recta ΗΚ, sumantur autem in linea duo quævis puncta Θ, Ο, à quibus ad ipsam ΗΚ perpendiculares ducantur ΘΖ, ΟΠ; sitque quadratum ex ΖΘ æquale rectangulo ΗΖΚ, & quadratum ex ΟΠ æquale ipsi ΗΠΚ rectangulo: dico lineam ΗΘΟΚ circulum esse. secetur enim ΗΚ bifariam in puncto Ν, & jungantur ΝΘ, ΝΟ. Quoniam igitur recta linea ΗΚ secatur in partes æquales in Ν, & in partes inæquales in Ζ: rectangulum ΗΖΚ una cum quadrato ex ΝΖ æquale erit [per 5. 2.] quadrato ex ΝΚ. sed rectangulum ΗΖΚ positum est æquale quadrato ex ΖΘ: quadratum igitur ex ΘΖ una cum quadrato ex ΝΖ æquale est quadrato ex ΝΚ. æqualia autem sunt [per 47. 1.] ex ΘΖ, ΖΝ quadrata ipsi quadrato ex ΝΘ; angulus enim ad Ζ est rectus: ergo quadratum ex ΝΘ quadrato ex ΝΚ æquale erit. similiter ostendemus quadratum ex ΝΟ æquale esse quadrato ex ΝΚ: linea igitur ΗΘΚ circulus est, & ejus diameter ΗΚ.



Fieri autem potest ut diametri ΔΕ, ΗΚ quandoque æquales sint, quandoque inæquales; nunquam tamen sese bifariam secabunt. ducatur enim per Κ ipsi ΒΓ parallela ΝΚ. quoniam igitur major est ΒΑ quam ΑΓ: & ipsa ΝΑ quam ΑΚ major erit. eadem ratione & ΑΚ major est quam ΑΗ, propter subcontrariam sectionem: quare si à recta ΑΝ abscissa fuerit æqualis ipsi ΑΚ, inter puncta Η, Ν cadet. cadat ut ΑΞ: ergo per Ξ ducta parallela ipsi ΒΓ secabit ΗΚ. secet ut ΞΟΠ. itaque quoniam

quoniam æqualis est ΑΞ ipsi ΑΚ, ut vero ΞΑ ad ΑΠ ita ΚΑ ad ΑΗ; ob similitudinem triangulorum ΗΚΑ, ΞΑΠ: erit ΑΗ ipsi ΑΠ æqualis, & reliqua ΗΞ ipsi ΠΚ. & quoniam anguli ad puncta Ξ, Κ inter se æquales sunt, uterque enim ipsorum æqualis est angulo ad Β; sunt autem & qui ad Ο æquales, quia ad verticem: erit triangulum ΞΗΟ simile triangulo ΠΟΚ. & æqualis est ΗΞ ipsi ΠΚ: quare & ΞΟ ipsi ΟΚ, & ΗΟ ipsi ΟΠ, & tota ΗΚ toti ΞΠ est æqualis. ex quibus constat, si inter Η, Ξ sumatur punctum, ut Ρ, & per Ρ ducatur ΡΣ parallela ΗΚ; ipsam ΡΣ majorem esse quam ΗΚ, & propterea majorem quam ΞΠ. si vero inter puncta Ρ, Ξ sumatur punctum, ut Τ, & per ipsum ducatur ΤΥ parallela ΞΠ: minor erit ΤΥ quam ΞΠ; & ob id minor quam ΗΚ. & quoniam angulus ΞΠΚ major est [per 16. 1.] angulo ΑΞΠ; æqualis autem ΟΠΚ ipsi ΟΗΞ: erit ΟΗΞ angulus major angulo ΗΞΟ: ergo [per 19. 1.] ΞΟ major ipsa ΟΗ, & idcirco ΞΟ major ΟΠ. quod si quandoque contingat, ut altera ipsarum bifariam secetur, tunc altera in partes inæquales secabitur.



ἡ ΑΞ τῇ ΑΚ, ὡς δὲ ἡ ΞΑ πρὸς ΑΠ ἡ ΚΑ πρὸς ΑΗ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΗΚΑ, ΞΑΠ τριγώνων· ἡ ΑΗ ἄρα τῇ ΑΠ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ λοιπὴ ΗΞ τῇ ΠΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς ταῖς Ξ, Κ γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ Β, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Ο ἴσαι, κατὰ κορυφὴν γάρ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΞΗΟ τρίγωνον τῷ ΠΟΚ τριγώνῳ. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΞ τῇ ΠΚ· ὥστε καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΟΚ, καὶ ἡ ΗΟ τῇ ΟΠ, καὶ ὅλη ἡ ΗΚ τῇ ὅλῃ ΞΠ. καὶ φανερὸν ὅτι ἐὰν μεταξὺ τῶν Η, Ξ ληφθῇ τι σημεῖον, ὡς τὸ Ρ, καὶ διὰ τοῦ Ρ τῇ ΗΚ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΡΣ, μείζων ἔσται τῆς ΗΚ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ τῆς ΞΠ. ἐὰν δὲ μεταξὺ τῶν Ρ, Ξ ληφθῇ τι σημεῖον ὡς τὸ Τ, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ ΞΠ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΤΥ· ἐλάττων ἔσται τῆς ΞΠ, καὶ τῆς ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΞΠΚ γωνία μείζων ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΑΞΠ, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΟΠΚ τῇ ὑπὸ ΟΗΞ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΟΗΞ τῆς ὑπὸ ΗΞΟ· ἡ ΞΟ ἄρα τῆς ΟΗ μείζων, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΞΟ τῆς ΟΠ. ἐὰν δέ ποτε ἡ ἑτέρα αὐτῶν δίχα διαιρεθῇ, ἡ λοιπὴ εἰς ἄνισα τμηθήσεται.

Prop. VI. *Theor.*

Si conus plano per axem secetur; sumatur autem aliquod punctum in superficie coni, quod non sit in latere trianguli per axem, & ab ipso ducatur recta parallela cuidam rectæ, quæ perpendicularis est à circumferentia circuli ad trianguli basim: triangulo per axem occurret, & ulterius producta, usque ad alteram superficiei partem, bifariam ab ipso triangulo secabitur.

SIT conus, cujus vertex Α punctum, basis autem circulus ΒΓ, seceturque conus plano per axem, atque communem sectionem faciat triangulum ΑΒΓ, & ab aliquo puncto eorum quæ sunt in ΒΓ circumferentia, ut ab Μ, ducatur ΜΝ perpendicularis ad ipsam ΒΓ; sumatur vero in superficie coni punctum Δ, quod non sit in latere trianguli per axem, & per Δ ipsi ΜΝ parallela ducatur ΔΕ: dico ΔΕ productam occurrere plano trianguli ΑΒΓ; & ulterius productam ad alteram partem coni, quousque ejus superficiei occurrat, à trianguli ΑΒΓ plano bifariam secari.

Jungatur ΑΔ, & producatur; occurret [per 1. 1. huj.] circumferentiæ circuli ΒΓ. occurrat in Κ, & à puncto Κ ad ΒΓ perpendicularis ducatur ΚΘΛ: parallela est igitur [per 28. 1.] ΚΘ ipsi ΜΝ; quare [per 9. 11.] & ipsi ΔΕ. ducatur ab Α puncto ad Θ recta ΑΘ. itaque quoniam in triangulo ΑΘΚ, ipsi ΘΚ parallela est ΔΕ: conveniet ΔΕ producta cum ΑΘ. est autem ΑΘ in plano trianguli ΑΒΓ: ergo ΔΕ trianguli ΑΒΓ plano occurret; ipsique ΑΘ rectæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος εὐθεία τινί, ἥ ἐστι κάθετος ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου· συμβαλεῖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου.

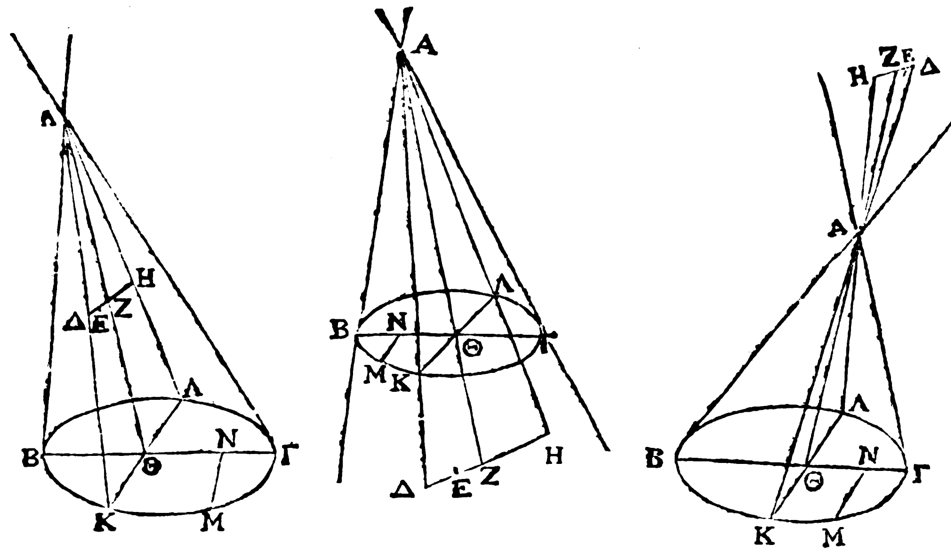
ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω κοινὴν τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς ΒΓ περιφερείας, τοῦ Μ, κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ΜΝ, εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου σημεῖόν τι τὸ Δ, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ δι' ἄξονος τριγώνου, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΜΝ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ προσεκβαλλομένη ἐπὶ τὸ ἕτερον μέρος τοῦ κώνου, ἄχρις ἂν συμπέσῃ τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται ἄρα τῇ περιφερείᾳ τοῦ ΒΓ κύκλου. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΜΝ, καὶ τῇ ΔΕ ἄρα. ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Θ ἡ ΑΘ. ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΘΚ, τῇ ΘΚ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΘ. ἡ δὲ ΑΘ ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΔΕ τῷ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπιπέδῳ, καὶ τῇ ΑΘ εὐθείᾳ.

συμπιπτέτω

συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΖ ἐπ' εὐθείας ἄχρις ἂν συμπέσῃ τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Η· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ. ἐπεὶ γὰρ τὰ Α, Η, Λ σημεῖα ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐστὶν ἐπιφανείᾳ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΑΘ, ΑΚ, ΔΗ, ΚΛ ἐκβαλλομένῳ, ὅπερ διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τρίγωνόν ἐστι· τὰ Α, Η, Λ ἄρα σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐστι τομῆς τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας καὶ τοῦ τριγώνου· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α,Η,Λ. ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΛΔΚ τῇ ΚΘΛ βάσει παράλληλος ἦκται ἡ ΔΗ, καὶ διῆκταί τις ἀπὸ τοῦ Λ, ἡ ΛΖΘ· ἔστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΛ ἡ ΔΖ πρὸς ΖΗ. ἴση δὲ ἡ ΚΘ τῇ ΘΛ, ἐπείπερ ἐν κύκλῳ τῷ ΒΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν διάμετρον ἡ ΚΛ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ.

occurrat in Z, & producatur ΔZ in directum, quousque superficiei coni occurrat; occurrat in H: dico ΔZ ipsi ZH æqualem esse. quoniam enim puncta A, H, Λ sunt & in superficie coni, & in plano per AΘ, AK, ΔH, KΛ ducto, quod quidem [per 3. hujus] triangulum est, cum conum per verticem secet: erunt A, H, Λ in communi sectione superficiei coni & ipsius trianguli: ergo recta est quæ per A, H, Λ puncta transit. at cum in triangulo Λ Δ K, ipsi KΘΛ basi parallela ducta sit ΔH, & à puncto Λ ducatur ΛZΘ: erit *ut KΘ ad ΘΛ ita ΔZ ad ZH. æqualis autem est [per 3. 3.] KΘ ipsi ΘΛ, quia in circulo BΓ perpendicularis ad diametrum ducitur KΛ: ergo & ΔZ ipsi ZH æqualis erit.



EUTOCIUS.

Προσέχειν χρή, ὅτι οὐ μάτην πρόσκειται ἐν τῇ προτάσει, τὸ δεῖν ἀγομένην εὐθεῖαν ἀπὸ τοῦ τῆς ἐπιφανείας σημείου παράλληλον μιᾷ τινι τῶν ἐν τῇ βάσει εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς οὔσῃ πάντως τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἄγεσθαι. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐ δυνατόν ἐστιν αὐτὴν δίχα τέμνειν ὑπὸ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ὅπερ ἐστὶ φανερὸν ἐκ τῆς ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς. εἰ γὰρ ἡ ΜΝ, ᾗ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖΗ, μὴ πρὸς ὀρθὰς εἴη τῇ ΒΓ, δῆλον ὅτι οὐδὲ δίχα τέμνεται ἡ ΚΛ. καὶ διὰ τῶν αὐτῶν λόγων συνάγεται ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΛ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΗ· καὶ ἡ ΔΗ ἄρα εἰς ἄνισα τμηθήσεται κατὰ τὸ Ζ. δυνατὸν δὲ κατωτέρω τοῦ κύκλου, καὶ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐπιφανείας τὰ αὐτὰ δείκνυσθαι.

Animadvertendum est, non frustra apponi in propositione, oportere rectam ductam à puncto superficiei, parallelam esse cuivis rectæ quæ à circuli circumferentia perpendicularis est ad basim trianguli per axem. nisi enim hoc ita sit, fieri non potest ut recta à triangulo bifariam secetur; quod quidem ex descripta figura manifeste apparet. nam si MN, cui parallela est ΔZH, ad ipsam BΓ non sit perpendicularis: neque KΛ bifariam secabitur. eadem enim ratione colligimus, ut KΘ ad ΘΛ ita esse ΔZ ad ZH: ergo & ΔH in partes inæquales secabitur ad punctum Z. potest autem illud idem, tum infra circulum, tum in superficie, quæ est ad verticem, similiter demonstrari.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἡ βάσις τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν, ἤτοι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ· αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς γενηθείσης τομῆς ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ, ἣν ἐποίησε τὸ τέμνον ἐπίπεδον, παράλληλοι τῇ

Prop. VII. *Theor.*

Si conus plano per axem secetur, secetur autem & altero plano secante planum basis coni secundum rectam lineam quæ sit perpendicularis, vel ad basim trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur: rectæ quæ à sectione in superficie coni à plano facta ducuntur, paral-

* Nam (per 4. 6.) KΘ est ad ΔZ ut ΛΘ ad ΛZ; & ΘΛ est ad ZH etiam ut ΛΘ ad ΛZ: quare (per 11. 5.) KΘ est ad ΔZ ut ΘΛ ad ZH; unde (per 16. 5.) KΘ est ad ΘΛ ut ΔZ ad ZH.

lelæ

lelæ ei quæ est perpendicularis ad trianguli basim, in communem sectionem plani secantis & trianguli per axem cadent; & ulterius productæ ad alteram sectionis partem ab ea bifariam secabuntur. & siquidem rectus sit conus; recta quæ est in basi perpendicularis erit ad communem sectionem plani secantis & trianguli per axem: si vero scalenus; non semper, nisi cum planum, quod per axem ducitur, ad basim coni rectum fuerit.

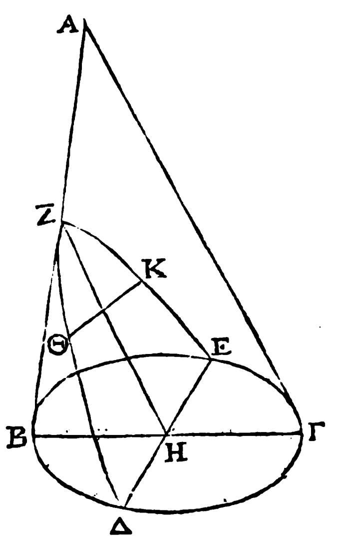
πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ τριγώνου εὐθεία, ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν πεσοῦνται τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ προσεκβαλλόμεναι ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσονται ὑπ' αὐτῆς. καὶ ἐὰν μὲν ὀρθὸς ᾖ ὁ κῶνος, ἡ ἐν τῇ βάσει εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· ἐὰν δὲ σκαληνός, οὐκ ἀεὶ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, ἀλλ' ὅταν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ κώνου.

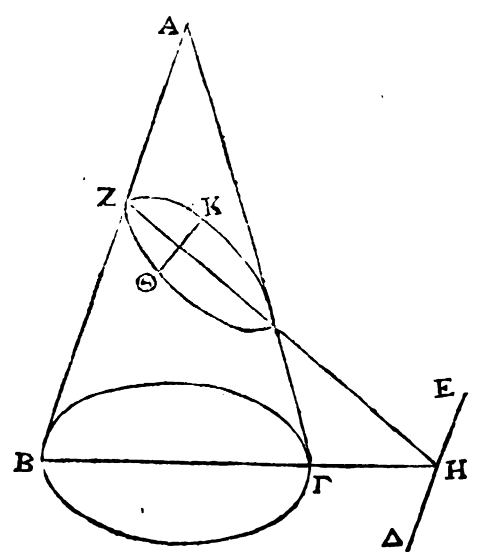
SIT conus, cujus vertex punctum Α, basis ΒΓ circulus, & secetur plano per axem, atque sectionem faciat triangulum ΑΒΓ, secetur autem & altero plano secante planum in quo est circulus ΒΓ secundum rectam ΔΕ, vel perpendicularem ad ΒΓ, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur, & faciat sectionem in superficie coni, lineam ΔΖΕ; communis autem sectio plani secantis & trianguli ΑΒΓ sit ΖΗ, & sumatur in sectione ΔΖΕ punctum quodvis Θ, à quo ΘΚ ipsi ΔΕ parallela ducatur: dico ΘΚ ipsi ΖΗ occurrere, & ulterius productam ad alteram partem sectionis ΔΖΕ, à recta ΖΗ bifariam secari.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ ΒΓ κύκλος κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔΕ, ἤτοι πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ, κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἡ ΖΗ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔΖΕ τομῆς τὸ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλληλος ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι ἡ ΘΚ συμβαλεῖ τῇ ΖΗ, καὶ ἐκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ΔΖΕ τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΖΗ εὐθείας.

Quoniam enim conus, cujus vertex Α punctum, & basis circulus ΒΓ, plano per axem secatur, atque sectionem facit ΑΒΓ triangulum; sumitur autem in superficie punctum Θ quod non est in latere trianguli ΑΒΓ, estque ΔΗ ad ΒΓ perpendicularis: ducta ergo per Θ recta ΘΚ ipsi ΔΗ parallela, triangulo ΑΒΓ [per 6. huj.]

Ἐπεὶ γὰρ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, εἴληπται δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ πλευρᾶς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, τὸ Θ, καὶ ἔστι κάθετος ἡ ΔΗ ἐπὶ τὴν ΒΓ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΗ παράλληλος ἀγομένη, τουτέστιν ἡ ΘΚ, συμβαλεῖ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ,





occurret; & ulterius producta ad alteram partem superficiei, à triangulo bifariam secabitur. quoniam igitur, quæ per Θ ducitur parallela ipsi ΔΕ, occurrit triangulo ΑΒΓ; atque est in plano sectionis ΔΖΕ: in communem sectionem plani secantis & trianguli ΑΒΓ cadet. sed ΖΗ est communis sectio plano-

καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν ἡ διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλληλος ἀγομένη συμβάλλει τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, καὶ ἔστιν ἐν τῷ διὰ τῆς ΔΖΕ τομῆς ἐπιπέδῳ· ἐπὶ τὴν κοινὴν ἄρα τομὴν πεσεῖται τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. κοινὴ δὲ τομή ἐστι τῶν ἐπι-

πέδων

πέδων ἡ ΖΗ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλληλος ἀγομένη πεσεῖται ἐπὶ τὴν ΖΗ, καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ΔΖΕ τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΖΗ εὐθείας.

Ἤτοι δὴ ὁ κῶνος ὀρθός ἐστιν, ἢ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, ἢ οὐδέτερον.

Ἔστω πρότερον ὁ κῶνος ὀρθός· εἴη ἂν οὖν καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὀρθὸν πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον. καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδον τὸ ΑΒΓ πρὸς ἐπίπεδον τὸ ΒΓ ὀρθόν ἐστι, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΒΓ ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ὀρθή ἐστιν· ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΖΗ ἔσται πρὸς ὀρθάς.

Μὴ ἔστω δὴ ὁ κῶνος ὀρθός. εἰ μὲν οὖν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, ὁμοίως δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ ἐστι πρὸς ὀρθάς.

Μὴ ἔστω δὴ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθὸν πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον· λέγω ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ ἔσται πρὸς ὀρθάς. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω. ἔστι δὴ καὶ τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθάς· ἡ ἄρα ΔΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΒΓ, ΖΗ ἔσται πρὸς ὀρθάς· καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΖΗ ἐπιπέδῳ ἄρα πρὸς ὀρθὰς ἔσται. τὸ δὲ διὰ τῶν ΒΓ, ΗΖ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ΑΒΓ· καὶ ἡ ΔΕ ἄρα τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· καὶ πάντα ἄρα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἓν δέ τι τῶν διὰ τῆς ΔΕ ἐπιπέδων ἐστὶν ὁ ΒΓ κύκλος· ὁ ΒΓ ἄρα κύκλος πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὀρθὸν ἔσται πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ ἐστι πρὸς ὀρθάς.

rum: ergo per Θ ducta ipsi ΔΕ parallela cadit in ΖΗ; & ulterius producta ad alteram sectionis ΔΖΕ partem, ab ipsa ΖΗ bifariam secabitur.

Itaque vel conus est rectus, vel triangulum ΑΒΓ, quod per axem transit, rectum est ad ΒΓ circulum, vel neutrum horum contingit.

Sit primum conus rectus: tunc & ΑΒΓ triangulum [per 18. 11.] ad circulum ΒΓ rectum erit. & quoniam planum ΑΒΓ rectum est ad planum ΒΓ, & ad communem ipsorum sectionem, videlicet ad rectam ΒΓ, in ipso ΒΓ plano perpendicularis ducta est ΔΕ: erit [per conv. 38. 11.] ΔΕ & ad triangulum ΑΒΓ perpendicularis; & [per 3. def. 11.] ad omnes rectas, quæ in triangulo ΑΒΓ existentes ipsam contingunt: quare & ad ipsam ΖΗ.

Sed non sit conus rectus. si igitur triangulum per axem rectum est ad circulum ΒΓ; similiter ostendemus ΔΕ ad ΖΗ perpendicularem esse.

Quod si triangulum per axem ΑΒΓ non sit rectum ad circulum ΒΓ: dico non esse ΔΕ ad ΖΗ perpendicularem. sit enim, si fieri potest. est autem & perpendicularis ad ΒΓ: ergo ΔΕ ad utramque rectam ΒΓ, ΖΗ perpendicularis erit: & idcirco [per 4. 11.] ad planum, quod per ipsas ΒΓ, ΖΗ ducitur. sed planum per ΒΓ, ΖΗ est ΑΒΓ triangulum: recta igitur ΔΕ ad triangulum ΑΒΓ est perpendicularis. quare [per 18. 11.] & omnia, quæ per ipsam transeunt, plana ad ΑΒΓ triangulum recta sunt. planum vero, in quo est circulus ΒΓ, est unum ex iis quæ per ΔΕ transeunt: ergo circulus ΒΓ rectus est ad triangulum ΑΒΓ; ac propterea triangulum ΑΒΓ ad ΒΓ circulum rectum erit, contra hypothesin. non est igitur ΔΕ ad ΖΗ normalis.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι τῆς ΔΖΕ τομῆς διάμετρός ἐστιν ἡ ΖΗ, ἐπείπερ τὰς ἀγομένας παραλλήλους εὐθείᾳ τινὶ τῇ ΔΕ δίχα τέμνει· καὶ ὅτι δυνατόν ἐστιν ὑπὸ τῆς διαμέτρου τῆς ΖΗ παραλλήλους τινὰς δίχα τέμνεσθαι, καὶ μὴ πρὸς ὀρθάς.

Corollarium.

Hinc vero constat [per 10. def. huj.] rectam ΖΗ diametrum esse sectionis ΔΖΕ; cum rectas omnes, quæ in ipsa ducuntur, uni cuidam parallelas bifariam secet. constat præterea fieri posse, ut rectæ parallelæ à diametro ΖΗ bifariam quidem, non autem ad rectos angulos secentur.

EUTOCIUS.

Τὸ ἕβδομον θεώρημα πτώσεις ἔχει τέσσαρας· ἢ γὰρ οὐ συμβάλλει ἡ ΖΗ τῇ ΑΓ, ἢ συμβάλλει τριχῶς, ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἢ ἐντὸς, ἢ ἐπὶ Γ σημείου.

Septimum theorema quatuor casus habet: vel enim ΖΗ non occurrit ΑΓ; vel tribus modis occurrit, aut extra circulum, aut intra, aut in ipso Γ puncto.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἡ δὲ διάμετρος τῆς γινομένης ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομῆς, ἤτοι παρὰ μίαν ᾖ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, ἢ συμπίπτῃ αὐτῇ ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, προσεκβάλληται δὲ ἥτε τοῦ κώνου

Prop. VIII. *Theor.*

Si conus plano secetur per axem, & secetur altero plano secante basim coni secundum rectam lineam quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis; diameter autem sectionis factæ in superficie, vel sit parallela uni laterum trianguli, vel cum ipso extra coni verticem conveniat, & producantur in infinitum tum superficies

perficies coni, tum planum secans: sectio quoque ipsa in infinitum augebitur; & ex diametro sectionis ad verticem cuilibet rectæ datæ æqualem abscindet recta, quæ quidem à coni sectione ei quæ est in basi parallela ducta fuerit.

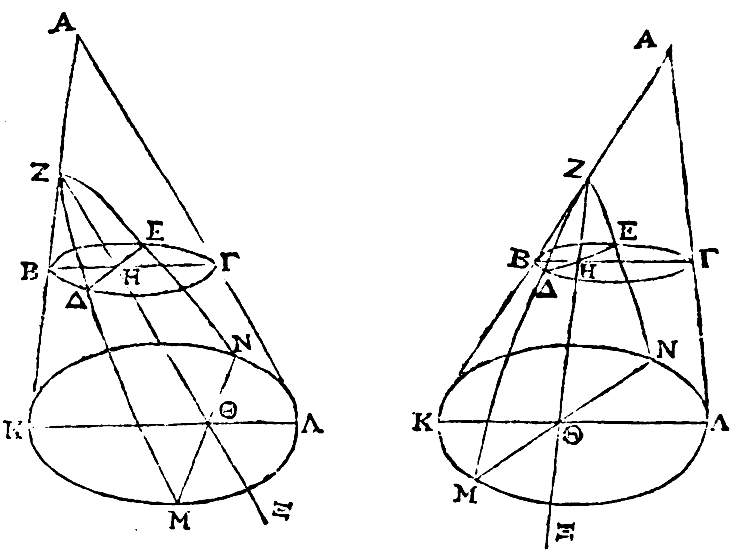
ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἰς ἄπειρον καὶ ἡ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται, καὶ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τῇ κορυφῇ πάσῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην ἀπολήψεταί τις εὐθεῖα ἀγομένη ἀπὸ τῆς τοῦ κώνου τομῆς παρὰ τὴν ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου εὐθεῖαν.

SIT conus, cujus vertex A punctum, basis circulus ΒΓ, & secetur plano per axem, atque sectionem faciat triangulum ΑΒΓ; secetur etiam & altero plano secante ΒΓ circulum secundum rectam ΔΕ perpendicularem ad ipsam ΒΓ, & faciat sectionem in superficie lineam ΔΖΕ; diameter autem sectionis ΔΖΕ sit ΖΗ, quæ vel ipsi ΑΓ parallela sit, vel producta extra punctum A cum ipsa conveniat: dico sectionem ΔΖΕ augeri in infinitum, si & coni superficies & secans planum in infinitum producantur.

Producatur enim tam superficies conica quam secans planum; patet quod simul producentur & rectæ ΑΒ, ΑΓ, ΖΗ. & quoniam ΖΗ vel parallela est ipsi ΑΓ, vel producta, extra punctum A cum ipsa convenit; lineæ ΖΗ, ΑΓ ad partes Η, Γ productæ nunquam convenient inter sese. producantur ergo, sumaturque in ΖΗ quodlibet punctum Θ, & per Θ ducatur ΚΘΛ ipsi ΒΓ parallela, ipsi vero ΔΕ parallela

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸν ΒΓ κύκλον κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔΕ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΖΕ γραμμήν, ἡ δὲ διάμετρος τῆς ΔΖΕ τομῆς ἡ ΖΗ, ἤτοι παράλληλος ἔστω τῇ ΑΓ, ἢ ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω αὐτῇ ἐκτὸς τοῦ Α σημείου· λέγω ὅτι καὶ ἐὰν ἥτε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐκβάλληται εἰς ἄπειρον, καὶ ἡ ΔΖΕ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἥτε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον· φανερὸν δὴ ὅτι καὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ, ΖΗ συνεκβληθήσονται. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ τῇ ΑΓ ἤτοι παράλληλός ἐστιν, ἢ ἐκβαλλομένη συμπίπτει αὐτῇ ἐκτὸς τοῦ Α σημείου· αἱ ΖΗ, ΑΓ ἄρα ἐκβαλλόμεναι ὡς ἐπὶ τὰ Γ, Η μέρη οὐδέποτε συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν οὖν, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΖΗ τυχὸν, τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ μὲν ΒΓ παράλληλος ἤχθω



ducatur ΜΘΝ: quare [per 15. 11.] planum, quod per ΚΛ, ΜΝ transit, parallelum est plano per ΒΓ, ΔΕ: & idcirco [per 4. huj.] ΚΛΜΝ planum circulus est. & quoniam puncta Δ, Ε, Μ, Ν sunt & in plano secante, & in superficie coni: ergo & in ipsa communi sectione erunt: sectio igitur ΔΖΕ aucta est usque ad puncta Μ, Ν. igitur si tum coni superficies, tum secans planum producantur ad ΚΛΜΝ circulum; & sectio ipsa ΔΖΕ usque ad Μ, Ν puncta augebitur. Eadem ratione demonstrabitur sectionem ΜΔΖΕΝ augeri in infinitum, si & superficies coni & planum secans in infinitum producantur. per-

ἡ ΚΘΛ, τῇ δὲ ΔΕ παράλληλος ἡ ΜΘΝ· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ· κύκλος ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΜΝ ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ τὰ Δ, Ε, Μ, Ν σημεῖα ἐν τῷ τέμνοντί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἔστι δὴ καὶ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου· ἐπὶ τῆς κοινῆς ἄρα τομῆς ἐστιν· ηὔξηται ἄρα ἡ ΔΖΕ μέχρι τῶν Μ, Ν σημείων. αὐξηθείσης ἄρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου μέχρι τοῦ ΚΛΜΝ κύκλου· ηὔξηται καὶ ἡ ΔΖΕ τομὴ μέχρι τῶν Μ, Ν σημείων. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἐὰν εἰς ἄπειρον ἐκβάλληται ἥτε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια, καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, καὶ ἡ ΜΔΖΕΝ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται. καὶ

φανερὸν

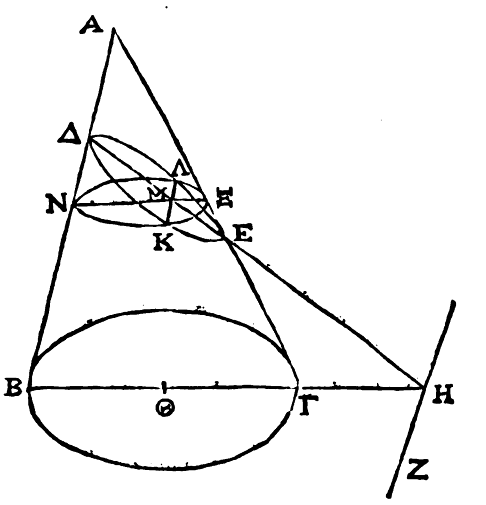
φανερὸν ὅτι πάσῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην ἀπολήψεταί τις τῇ ΜΝ παράλληλος ἀπὸ τῆς ΖΘ εὐθείας πρὸς τῷ Ζ σημείῳ. ἐὰν γὰρ τῇ δοθείσῃ ἴσην θῶμεν τὴν ΖΞ, καὶ διὰ τοῦ Ξ τῇ ΔΕ παράλληλον ἀγάγωμεν, συμπεσεῖται τῇ τομῇ, ὥσπερ καὶ ἡ διὰ τοῦ Θ ἀπεδείχθη συμπίπτουσα τῇ τομῇ κατὰ τὰ Μ, Ν σημεῖα· ὥστε ἄγεταί τις εὐθεῖα συμπίπτουσα τῇ τομῇ, παράλληλος οὖσα τῇ ΜΝ, ἀπολαμβάνουσα ἀπὸ τῆς ΖΗ εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ πρὸς τῷ Ζ σημείῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ, συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παρὰ τὴν βάσιν ἠγμένῳ, μήτε ὑπεναντίως· ἡ τομὴ οὐκ ἔσται κύκλος.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ, μήτε παραλλήλῳ ὄντι τῇ βάσει, μήτε ὑπεναντίως, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΚΕ γραμμήν· λέγω ὅτι ἡ ΔΚΕ γραμμὴ οὐκ ἔσται κύκλος.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω, καὶ συμπιπτέτω τὸ τέμνον ἐπίπεδον τῇ βάσει, καὶ ἔστω τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ ἡ ΖΗ, τὸ δὲ κέντρον τοῦ ΒΓ κύκλου ἔστω τὸ Θ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ΖΗ ἡ ΘΗ, καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῆς ΗΘ καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον, καὶ ποιείτω τομὰς ἐν τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τὰς ΒΑ, ΑΓ εὐθείας. ἐπεὶ οὖν τὰ Δ, Ε, Η σημεῖα ἔν τε τῷ διὰ τῆς ΔΚΕ ἐπιπέδῳ ἐστὶν, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ διὰ τῶν Α, Β, Γ· τὰ ἄρα Δ, Ε, Η σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ἐστίν· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΕΔ. εἰλήφθω δή τι ἐπὶ τῆς ΔΚΕ γραμμῆς σημεῖον τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΖΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΜΛ. ἔσται δὴ ἴση ἡ ΚΜ τῇ ΜΛ· ἡ ἄρα ΔΕ διάμετρός ἐστι τοῦ ΔΚΕΛ κύκλου. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Μ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΝΜΞ. ἔστι δὴ καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΖΗ παράλληλος· ὥστε τὸ διὰ τῶν Ν, Ξ, Κ, Μ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΖΗ, τουτέστι τῇ βάσει, καὶ ἔσται ἡ τομὴ κύκλος. ἔστω ΝΚΞΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ τῇ ΒΗ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΝΞ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΝΜΞ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΚΜ. ἔστι δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΜΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΜ, κύκλος γὰρ ὑπόκειται ἡ ΔΚΕΛ γραμμὴ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΝΜΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΜΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΝΜ πρὸς ΜΔ οὕτως ἡ ΕΜ πρὸς ΜΞ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜΝ τρίγωνον τῷ ΞΜΕ τριγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ γωνία ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ ΜΕΞ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση, παράλληλος γάρ ἡ ΝΞ τῇ ΒΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα



spicuum igitur est cuilibet datæ rectæ æqualem abscindere rectam ipsi MN parallelam ex ipsa ZΘ ad punctum Z. si enim datæ rectæ æqualem ponamus ZΞ, & per Ξ ipsi ΔE parallelam ducamus; conveniet ea cum sectione, quemadmodum & quæ per Θ demonstrata est cum eadem ad puncta M, N convenire: quare poterit recta quædam duci parallela ipsi MN, quæ cum sectione conveniat, & ex ipsa ZH ad punctum Z rectæ datæ æqualem abscindat.

PROP. IX. *Theor.*

Si conus plano secetur conveniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque basi æquidistet, neque subcontrarie ponatur; sectio circulus non erit.

SIT conus, cujus vertex A punctum, basis circulus BΓ, & secetur plano aliquo, neque basi æquidistante, neque subcontrarie posito, atque sectionem faciat in superficie lineam ΔKE: dico ΔKE non esse circulum.

Sit enim, si fieri potest, occurratque planum secans ipsi basi, & communis planorum sectio sit recta ZH, centrum autem circuli BΓ sit Θ, & ab ipso ad ZH perpendicularis ducatur ΘH, deinde per ΘH & axem producatur planum, atque in conica superficie sectiones faciat BA, AΓ rectas. quoniam igitur puncta Δ, E, H sunt & in plano quod per ΔKE transit, & in eo quod per A,B,Γ; puncta igitur Δ,E,H in communi planorum sectione erunt: quare [per 3. 11.] HEΔ recta est. sumatur in linea ΔKE punctum aliquod K, & per K rectæ ZH parallela ducatur KMΛ. estque [per 6.huj.] KM ipsi MΛ æqualis: quare [per conv. 3. 3.] ΔE diameter est circuli ΔKEΛ. ducatur deinde per M recta NMΞ ipsi BΓ parallela. est autem & KΛ parallela ZH: ergo [per 15. 11.] planum quod per N, Ξ, K, M ducitur, æquidistans est plano per BΓ, ZH, hoc est ipsi basi; adeoque [per 4. huj.] sectio circulus est. sit NKΞΛ. & quoniam ZH perpendicularis est ad BΓH; sequitur [per 10. 11.] & KM ad NΞ perpendicularem esse: quare [per 35. 3.] rectangulum NMΞ æquale est quadrato ex KM. sed & rectangulum ΔMB æquale est quadrato ex KM; nam linea ΔKEΛ circulus ponitur cujus diameter ΔE: rectangulum igitur NMΞ æquale est rectangulo ΔME: & idcirco [per 16.6.] ut NM ad MΔ ita EM ad MΞ: quare [per 6.6.] ΔMN triangulum simile est triangulo ΞMB; & angulus ΔNM æqualis MEΞ angulo. sed angulus ΔNM angulo ABΓ est æqualis; parallela enim est NΞ ipsi BΓ: ergo & angulus ABΓ

æqualis

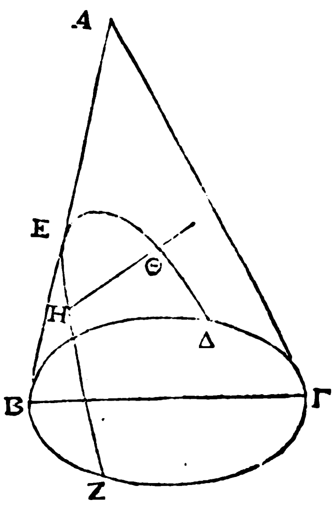
æqualis erit angulo ΜΕΞ: ſectio igitur eſt ſubcontraria [per def. in 5. huj.]; contra hypotheſin. igitur linea ΔΚΕ non eſt circulus.

ἴση ἔςαι τῇ ὑπὸ ΜΕΞ· ὑπεναντία ἄρα ἐςὶν ἡ τομὴ, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα κύκλος ἐςὶν ἡ ΔΚΕ γραμμή.

Prop. X. *Theor.*

Si in coni ſectione duo puncta ſumantur: recta linea, quæ ejuſmodi puncta conjungit, intra ſectionem cadet; & quæ in directum ipſi conſtituitur, cadet extra.

SIT conus, cujus vertex punctum Α, baſis ΒΓ circulus, ſeceturque plano per axem, & faciat ſectionem triangulum ΑΒΓ, ſecetur autem & altero plano, atque in ſuperficie coni ſectionem faciat ΔΕΖ lineam, & in ipſa ΔΕΖ duo puncta ſumantur, quæ ſint Η, Θ: dico rectam quæ Η, Θ puncta conjungit, intra ſectionem ΔΕΖ cadere; & quæ in directum ipſi conſtituitur, extra.



Quoniam enim conus, cujus vertex Α punctum, & baſis circulus ΒΓ, plano ſecatur per axem, & in ipſius ſuperficie puncta quædam ſumuntur Η, Θ, quæ non ſunt in latere trianguli per axem: recta, quæ à puncto Η ad Θ ducitur, non tendet ad Α: ergo [per 2. huj.] recta conjungens puncta Η, Θ intra conum, adeoque intra coni ſectionem ΔΖΕ cadet; & quæ in directum ipſi conſtituitur, cadet extra.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν ἐπὶ κώνου τομῆς ληφθῇ δύο σημεῖα· ἡ μὲν ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς, ἡ δὲ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἐκτός.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΕΖ γραμμὴν, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΔΕΖ δύο σημεῖα τὰ Η, Θ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ἐπὶ τὰ Η, Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς ΔΕΖ γραμμῆς, ἡ δὲ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἐκτός.

Ἐπεὶ γὰρ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, εἴληπται δή τινα σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τὰ Η, Θ, ἃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα μὴ νεύῃ ἐπὶ τὸ Α· ἡ ἄρα ἐπὶ τὰ Η, Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κώνου, καὶ ἡ ἐπ' εὐθείας, ἐκτὸς, ὥστε καὶ τῆς ΔΖΕ τομῆς.

EUTOCIUS.

Animadvertendum eſt decem hæc theoremata aptiſſime cohærentia inter ſeſe & continuata eſſe. primum autem oſtendit rectas lineas, quæ in ſuperficie coni ad verticem tendunt, in eadem permanere. ſecundum converſum oſtendit. tertium explicat coni ſectionem quæ per verticem efficitur. quartum ſectionem baſi æquidiſtantem. quintum vero ſubcontrariam. ſextum eſt tanquam lemma ad ſeptimum, in illo oſtenditur oportere communem ſectionem plani ſecantis, & circuli qui eſt baſis coni, ad ejus diametrum perpendicularem eſſe; atque, hoc ita habente, rectas omnes, quæ ipſi parallelæ ducuntur, à triangulo bifariam ſecari. ſeptimum tres alias ſectiones earumque diametrum oſtendit, & rectas quæ ad ipſam diametrum ordinatim applicantur, ei quæ in baſi parallelas eſſe. in octavo demonſtrat quod nos in principio diximus, videlicet parabolen & hyperbolen ex eorum numero eſſe quæ in infinitum augentur. in nono oſtendit ellipſim, quæ in ſeipſam vergit ut circulus, quia planum ſecans cum utroque latere trianguli convenit, circulum non eſſe; ſubcontraria etenim aut parallela ſectio circulum facit. ſed & illud ſcire oportet, diametrum ſectionis in parabola quidem unum duntaxat trianguli latus ſecare & ipſam baſim: in hyperbola, ſecare & latus & rectam, quæ reliquo lateri ad partes verticis producto in rectum conſtituitur: in ellipſi vero, & utrumque latus & baſim ſecare. poſſet fortaſſe quiſpiam arbitrari decimum theorema idem eſſe quod ſecundum. ſed res non ita ſe habet: illic enim in tota ſuperficie duo quævis puncta ſumi aſſerit; hic in ea tantum linea quæ à ſecante plano efficitur. at in tribus quæ deinceps ſequuntur theorematibus unamquamque ſectionem diligentius expendit, & principes earum proprietates declarat.

Χρὴ ἐπιςῆσαι, ὅτι τὰ δέκα ταῦτα θεωρήματα ἀλλήλων ἔχονται. ἀλλὰ τὸ πρῶτον ἔχει ὅτι αἱ εὐθεῖαι ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ νεύουσαι ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐν ταύτῃ μένουσι. τὸ δὲ δεύτερον τὸ ἀνάπαλιν. τὸ δὲ τρίτον ἔχει τὴν διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τομήν. τὸ δὲ τέταρτον τὴν παράλληλον τῇ βάσει. τὸ πέμπτον τὴν ὑπεναντίαν. τὸ ἕκτον ὡσανεὶ προλαμβάνεται τοῦ ἑβδόμου, δεικνύον ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς ὀφείλει πάντως εἶναι τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου ἡ κοινὴ τομὴ αὐτοῦ καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ ὅτι τούτου οὕτως ἔχοντος, αἱ παράλληλοι αὐτῇ διχοτομοῦνται ὑπὸ τοῦ τριγώνου. τὸ δὲ ἕβδομον τὰς ἄλλας τρεῖς τομὰς ἔδειξε, καὶ τὴν διάμετρον, καὶ τὰς ἐπ' αὐτὴν καταγομένας παραλλήλους τῇ ἐν τῇ βάσει εὐθείᾳ. ἐν δὲ τῷ ὀγδόῳ δείκνυσιν, ὅπερ ἐν τοῖς προλεγομένοις εἴπομεν, ὅτι ἡ παραβολὴ καὶ ἡ ὑπερβολὴ τῶν εἰς ἄπειρόν εἰσιν αὐξομένων. ἐν δὲ τῷ ἐννάτῳ, ὅτι ἡ ἔλλειψις, συννεύουσα εἰς ἑαυτὴν ὁμοίως τῷ κύκλῳ, διὰ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμπίπτειν ἀμφοτέραις ταῖς πλευραῖς τοῦ τριγώνου, οὐκ ἔστι κύκλος· κύκλους γὰρ ἐποίουν ἥτε ὑπεναντία τομὴ καὶ ἡ παράλληλος. καὶ δεῖ ἐπιςῆσαι ὅτι ἡ διάμετρος τῆς τομῆς, ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς, τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τέμνει καὶ τὴν βάσιν· ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς, τήν τε πλευρὰν καὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ λοιπῇ πλευρᾷ ἐκβαλλομένην πρὸς τῇ κορυφῇ· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως, καὶ ἑκατέραν τῶν πλευρῶν καὶ τὴν βάσιν. τὸ δὲ δέκατον ἁπλούστερον μὲν τις ἐπιβάλλων ἴσως ἂν οἰηθείη ταὐτὸν εἶναι τῷ δευτέρῳ. τοῦτο μέντοι οὐχ ὡς ἔχει· ἐκεῖ μὲν γὰρ ἐπὶ πάσης τῆς ἐπιφανείας ἔλεγε ἐπιλαμβάνεσθαι τὰ δύο σημεῖα, ἐνταῦθα δὲ ἐπὶ τῆς γινομένης γραμμῆς. ἐν δὲ ταῖς ἑξῆς τρισὶν ἀκριβέστερον ἑκάστην τῶν τομῶν τούτων διακρίνει, μετὰ τοῦ λέγειν καὶ τὰ ἰδιώματα αὐτῶν τὰ ἀρχικά.

ΠΡΟ-

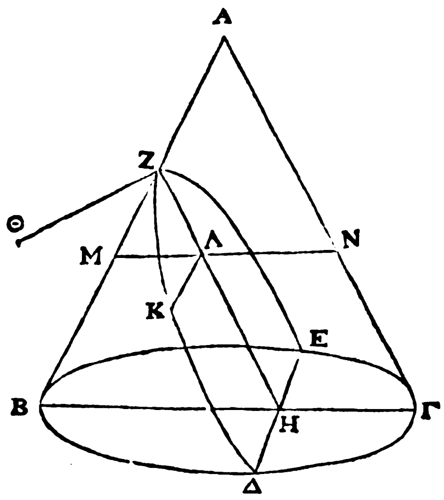
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἔτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς παράλληλος ᾖ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, καὶ ἄλλης τινὸς εὐθείας ἣ λόγον ἔχει πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τοῦ κώνου γωνίας καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν. καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ΠΑΡΑΒΟΛΗ.

PROP. XI. *Theor.*

Si conus plano per axem secetur, secetur autem & altero plano secante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem est perpendicularis, & sit diameter sectionis uni laterum trianguli per axem parallela: recta linea, quæ à sectione coni ducitur parallela communi sectioni plani secantis & basis coni, usque ad sectionis diametrum, poterit spatium æquale contento sub ea, quæ ex diametro abscissa inter ipsam & verticem sectionis interjicitur, & alia quadam, quæ ad rectam, inter coni angulum & verticem sectionis interjectam, habet eam rationem, quam quadratum basis trianguli per axem ad id quod sub reliquis duobus trianguli lateribus continetur. dicatur autem hujusmodi sectio PARABOLA.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ τὸ Α σημεῖον κορυφή, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔΕ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΖΗ παράλληλος ἔστω μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου τῇ ΑΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΖΗ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΘ, [a] καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΑ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ.



Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Λ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΜΝ. ἔστι δὴ καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΔΕ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον κύκλος ἐστὶν, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ. καὶ ἔστι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΝ ἡ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὴν ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΜΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, [b] τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ, καὶ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ· ὁ ἄρα τοῦ ΘΖ

*

SIT conus, cujus vertex punctum A, basis BΓ circulus, seceturque plano per axem, atque sectionem faciat triangulum ABΓ, & secetur altero plano secante basim coni secundum rectam lineam ΔE, quæ ad BΓ est perpendicularis, & faciat sectionem in superficie coni ΔZE lineam; diameter autem sectionis ZH parallela sit uni laterum trianguli per axem, videlicet ipsi AΓ, atque à puncto Z rectæ ZH ad rectos angulos ducatur ZΘ, [a] & fiat ut quadratum ex BΓ ad rectangulum BAΓ ita ZΘ ad ZA, sumatur præterea in sectione quodlibet punctum K, & per K ducatur KΛ ipsi ΔE parallela, usque ad sectionis diametrum: dico quadratum ex KΛ rectangulo ΘZΛ æquale esse.

Ducatur enim per Λ ipsi BΓ parallela MN. est vero KΛ parallela ipsi ΔE: ergo [per 15.11.] planum, quod transit per KΛ, MN, plano per BΓ, ΔE, hoc est ipsi basi coni, æquidistat: ideoque [per 4.huj.] planum per KΛ, MN est circulus, cujus diameter MN. est autem [per 10. 11.] KΛ ad MN perpendicularis, quia & ΔE ad BΓ: rectangulum igitur MΛN [per 35. 3.] æquale est quadrato ex KΛ. & quoniam [ex hyp.] ΘZ ad ZA est ut quadratum ex BΓ ad rectangulum BAΓ; [b] quadratum autem ex BΓ ad BAΓ rectangulum [per 23.6.] rationem habet compositam ex ratione quam BΓ habet ad ΓA, & ex ea quam BΓ habet ad BA: ratio igitur ΘZ

ad

ad Z Λ componitur ex rationibus B Γ ad Γ A, & Γ B ad B A. ut autem B Γ ad Γ A ita [per 4. 6.] M N ad N A, hoc est M Λ ad Λ Z; & ut B Γ ad B A ita M N ad M A, hoc est Λ M ad M Z, & [per 19. 5.] reliqua N Λ ad Z A: ratio igitur Θ Z ad Z A componitur ex rationibus M Λ ad Λ Z, & N Λ ad Z A. sed ratio composita ex rationibus M Λ ad Λ Z, & Λ N ad Z A est [per 23. 6.] ea quam habet M Λ N rectangulum ad rectangulum Λ Z A: ergo ut Θ Z ad Z A ita rectangulum M Λ N ad Λ Z A rectangulum. ut autem Θ Z ad Z A (sumptâ Z Λ communi altitudine) ita [per 1. 6.] Θ Z Λ rectangulum ad rectangulum Λ Z A: ut igitur rectangulum M Λ N ad ipsum Λ Z A ita rectangulum Θ Z Λ ad idem Λ Z A: & idcirco [per 9. 5.] æquale est rectangulum M Λ N rectangulo Θ Z Λ. sed [ex modo ostensis] rectangulum M Λ N æquale est quadrato ex K Λ: ergo quadratum ex K Λ rectangulo Θ Z Λ æquale est.

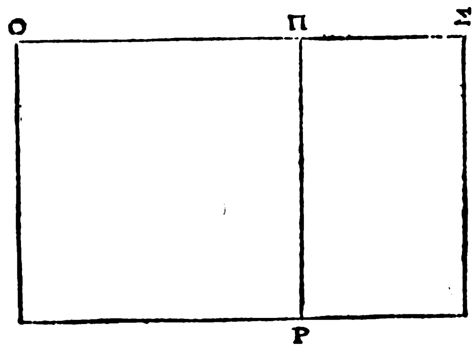
Vocetur autem hujusmodi sectio *Parabola*: & recta Θ Z, *Ea juxta quam possunt quæ ad* Z H *diametrum ordinatim applicantur*: hæc etiam *Latus Rectum* appelletur.

πρὸς Z A λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς B Γ πρὸς Γ A, καὶ τοῦ τῆς Γ B πρὸς B A. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ B Γ πρὸς Γ A οὕτως ἡ M N πρὸς N A, τουτέστιν ἡ M Λ πρὸς Λ Z, ὡς δὲ ἡ B Γ πρὸς B A οὕτως ἡ M N πρὸς M A, τουτέστιν ἡ Λ M πρὸς M Z, καὶ λοιπὴ ἡ N Λ πρὸς Z A· ὁ ἄρα τῆς Θ Z πρὸς Z A λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς M Λ πρὸς Λ Z, καὶ τοῦ τῆς N Λ πρὸς Z A. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς M Λ πρὸς Λ Z, καὶ τοῦ τῆς Λ N πρὸς Z A, ὁ τοῦ ὑπὸ M Λ N ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ Λ Z A· ὡς ἄρα ἡ Θ Z πρὸς Z A οὕτως τὸ ὑπὸ M Λ N πρὸς τὸ ὑπὸ Λ Z A. ὡς δὴ ἡ Θ Z πρὸς Z A (τῆς Z Λ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης) οὕτως τὸ ὑπὸ Θ Z Λ πρὸς τὸ ὑπὸ Λ Z A· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ M Λ N πρὸς τὸ ὑπὸ Λ Z A οὕτως τὸ ὑπὸ Θ Z Λ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸ ὑπὸ Λ Z A· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ M Λ N τῷ ὑπὸ Θ Z Λ. τὸ δὲ ὑπὸ M Λ N ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς K Λ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς K Λ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Θ Z Λ.

Καλείσθω μὲν ἡ τοιαύτη τομὴ Παραβολή· ἡ δὲ Θ Z, ἡ παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἐπὶ τὴν Z H διάμετρον· καλείσθω δὴ καὶ ἡ αὐτὴ Ορθία*.

EUTOCIUS.

a Et fiat ut quadratum ex B Γ ad rectangulum B A Γ ita Z Θ ad Z A.] Certum quidem est quod dicitur. sed, si quis hoc plenius adhuc declarare velit, fit rectangulo B A Γ æquale rectangulum O Π P; quadrato autem ex B Γ æquale id quod ad Π P adjacens latitudinem habet Π Σ, & fiat ut O Π ad Π Σ ita A Z ad Θ Z: ergo factum jam erit quod quærebamus. quoniam enim ut O Π ad Π Σ ita A Z ad Z Θ: erit & invertendo ut Σ Π ad Π O ita Θ Z ad Z A. ut autem Σ Π ad Π O ita Σ P ad ipsum P O, hoc est [per constr.] quadratum ex B Γ ad rectangulum B A Γ. hoc autem & ad sequentia theoremata utile erit.



b Quadratum autem ex B Γ ad B A Γ rectangulum rationem habet compositam &c.] Ostensum enim est in sexto libro elementorum, theoremate vigesimo tertio, æquiangula parallelogramma inter se rationem habere ex laterum rationibus compositam. sed, quoniam interpretes inductione magis quam necessaria argumentatione utuntur, visum est nobis illud ipsum investigare; quod tametsi scriptum est in commentariis nostris in quartum theorema secundi libri *Archimedis* de Sphæra & Cylindro, & in [*Theonis*] scholiis in primum librum Magnæ Constructionis *Ptolemæi*, nihilominus tamen & hoc loco non inepte repetetur; propterea quod fortasse non omnes, qui hæc legent, in illos libros inciderunt, tum etiam, quod universa fere conicorum tractatio eum argumentandi modum usurpat. *Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum* componentium *quantitates inter se multiplicatæ quantitatem* compositæ *faciunt* [per 5. def. 6.]: per quantitatem intelligendo numerum, à quo ratio ipsa denominatur. in multiplicibus quidem quantitas erit numerus integer: in reliquis vero habitudinibus necesse est quantitatem numerum esse, & partem seu partes; nisi forte quispiam velit etiam ineffabiles esse habitudines, quales sunt magnitudinum incom-

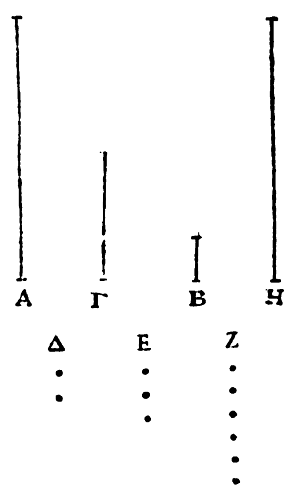
a ΚΑΙ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ B Γ πρὸς τὸ ὑπὸ B A Γ οὕτως ἡ Z Θ πρὸς Z A.] Σαφὲς μὲν ἐστι τὸ λεγόμενον. πλὴν, εἴ τις καὶ ὑπομνησθῆναι βούλεται, ἔστω τῷ ὑπὸ B A Γ ἴσον τὸ ὑπὸ O Π P, τῷ δὲ ἀπὸ B Γ ἴσον τὸ παρὰ τὴν Π P παραβληθὲν πλάτος ποιείτω τὴν Π Σ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ O Π πρὸς Π Σ ἡ A Z πρὸς Θ Z· γέγονεν ἄρα τὸ ζητούμενον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ O Π πρὸς Π Σ ἡ A Z πρὸς Z Θ· ἀνάπαλιν ὡς ἡ Σ Π πρὸς Π O ἡ Θ Z πρὸς Z A. ὡς δὲ ἡ Σ Π πρὸς Π O τὸ Σ P πρὸς P O, τοῦτ' ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς B Γ πρὸς τὸ ὑπὸ B A Γ. τοῦτο χρήσιμον καὶ τοῖς ἑξῆς θεωρήμασι.

b Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς B Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν B A Γ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ B Γ πρὸς Γ A.] Δέδεικται μὲν ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῆς στοιχειώσεως, ἐν τῷ εἰκοστῷ τρίτῳ θεωρήματι, ὅτι τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ἐπεὶ δὲ ἐπακτικώτερον μᾶλλον καὶ οὐ κατὰ τὸν ἀναγκαῖον τρόπον ὑπὸ τῶν ὑπομνηματιστῶν ἐλέγετο, ἐζητήσαμεν αὐτὸ, καὶ γέγραπται ἐν τοῖς ἐκδεδομένοις ἡμῖν εἰς τὸ τέταρτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, καὶ ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Πτολεμαίου συντάξεως, οὐκ ἄνισον δὲ καὶ ἐνταῦθα τοῦτο γραφῆναι· διὰ τὸ μὴ πάντας τοὺς ἀναγινώσκοντας κἀκείνοις ἐντυγχάνειν, καὶ ὅτι σχεδὸν τὸ ὅλον σύνταγμα τῶν κωνικῶν κέχρηται αὐτῷ. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσι τινά. πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ λόγος. ἐπὶ μὲν οὖν τῶν πολλαπλασίων δυνατόν ἐστιν ἀριθμὸν ὁλόκληρον εἶναι πηλικότητα· ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν σχέσεων, ἀνάγκη τὴν πηλικότητα ἀριθμὸν εἶναι, καὶ μόριον ἢ μόρια, εἰ μὴ ἄρα τις ἐθέλοι καὶ ἀῤῥήτους εἶναι σχέσεις, οἷαί εἰσιν αἱ κατὰ τὰ ἄλογα μεγέ-

* Scribitur etiam sæpius ὀρθῖα in MS. qualem vocem Græca lingua non agnoscit: nos igitur ὀρθίαν ubique usurpabimus.

θη.

ση. ἐπὶ πασῶν δὲ τῶν σχέσεων δῆλον ὅτι αὕτη ἡ πηλικότης πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου ποιεῖ τὸν ἡγούμενον. ἔστω τοίνυν λόγος ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, καὶ εἰλήφθω τις αὐτῶν μέσος ὡς ἔτυχεν, ὁ Γ, καὶ ἔστω τοῦ ΑΓ λόγου πηλικότης ὁ Δ, τοῦ δὲ ΓΒ ὁ Ε. καὶ ὁ Δ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι τοῦ λόγου τοῦ ΑΒ πηλικότης ἐστὶν ὁ Ζ, τουτ' ἔστιν ὅτι ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιεῖ. ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν μὲν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ ὁ Ζ πρὸς τὸν Α. πάλιν ἐπεὶ ὁ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ ὁ Γ πρὸς τὸν Η, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἦν δὲ ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ ὁ Ζ πρὸς τὸν Α· ἴσος ἄρα ὁ Η τῷ Α, ὥστε ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· τοῦ λόγου ἄρα τοῦ ΑΒ πηλικότης ἐστὶν ὁ Ζ. μὴ ταραττέτω δὲ τοὺς ἐντυγχάνοντας τὸ διὰ τῶν ἀριθμητικῶν δεδεῖχθαι τοῦτο· οἵ τε γὰρ παλαιοὶ κέχρηνται ταῖς τοιαύταις ἀποδείξεσι, μαθηματικαῖς μᾶλλον οὔσαις ἢ ἀριθμητικαῖς, διὰ τὰς ἀναλογίας, καὶ ὅτι τὸ ζητούμενον ἀριθμητικόν ἐστιν. λόγοι γάρ, καὶ πηλικότητες λόγων, καὶ πολλαπλασιασμοὶ τοῖς ἀριθμοῖς πρώτως ὑπάρχουσι, καὶ δι' αὐτῶν τοῖς μεγέθεσι, κατὰ τὸν εἰπόντα, Ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι εἶναι ἀδελφά.



mensurabilium. & patet quod in omnibus habitudinibus ipsa rationis quantitas multiplicata in consequentem terminum, producit antecedentem. Sit igitur ratio A ad B, & sumpto termino quolibet intermedio Γ, sit rationis A ad Γ quantitas Δ, rationis autem Γ ad B quantitas sit E. & Δ multiplicans E producat Z: dico Z rationis A ad B quantitatem esse; hoc est si Z multiplicet B produci ipsum A. itaque multiplicet Z ipsum B, & producat H. quoniam igitur Δ ipsum quidem E multiplicans producit Z, multiplicans autem Γ ipsum A producit: erit [per 17. 7.] ut E ad Γ ita Z ad A. rursus cum B multiplicans E faciat Γ, & multiplicans Z faciat H: erit ut E ad Z ita Γ ad H; & permutando ut E ad Γ ita Z ad H. sed ut E ad Γ ita erat Z ad A: ergo [per 9. 5.] H ipsi A est æqualis; & idcirco Z multiplicans B producit A: rationis igitur A ad B quantitas necessario erit Z. non perturbentur autem qui in hæc inciderint, quod illud ex arithmeticis demonstretur: antiqui enim hujusmodi demonstrationibus sæpe uti consueverunt; quæ tamen mathematicæ potius sunt quam arithmeticæ, propter analogias, & quia quæsitum arithmeticum est. nam rationes, rationum quantitates, & multiplicationes primo numeris, secundo loco per numeros & magnitudinibus insunt, ex illius sententia, qui ita scripsit. *Hæ enim mathematicæ disciplinæ germanæ esse videntur.*

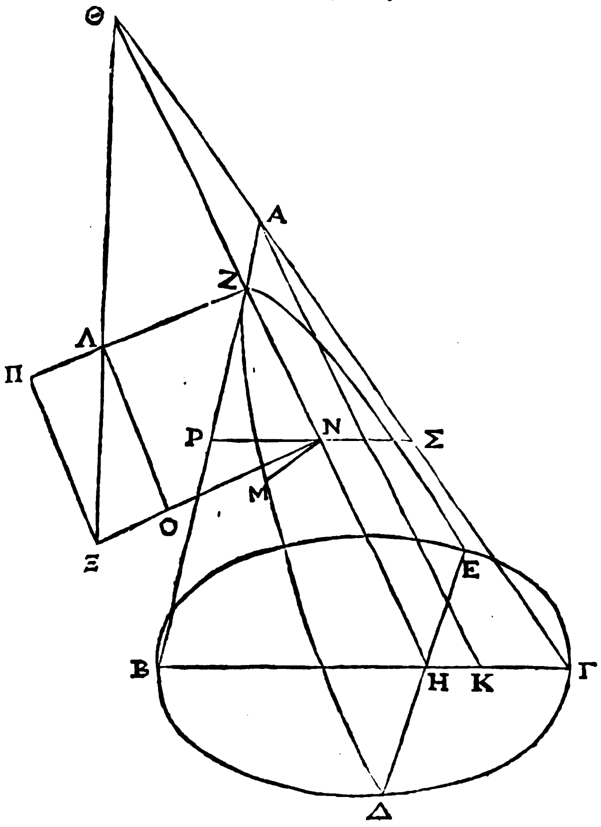
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς ἐκβαλλομένη συμπίπτῃ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς τοῦ κώνου κορυφῆς· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἕως τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεταί τι χωρίον παρακείμενον παρά τινα εὐθεῖαν, πρὸς ἣν λόγον ἔχει ἡ ἐπ' εὐθείας μὲν οὖσα τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, ὑποτείνουσα δὲ τὴν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνίαν, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἕως τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων ὧν ποιεῖ ἡ ἀχθεῖσα, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ὑποτεινούσης τὴν ἐκτὸς γωνίαν τοῦ τριγώνου, καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι. καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ὙΠΕΡΒΟΛΗ.

Prop. XII. *Theor.*

Si conus plano per axem secetur, secetur autem & altero plano secante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis, & sectionis diameter producta cum uno latere trianguli per axem extra verticem coni conveniat: recta linea, quæ à sectione ducitur parallela communi sectioni plani secantis & basis coni usque ad sectionis diametrum, poterit spatium adjacens rectæ, ad quam ea, quæ in directum constituitur diametro sectionis, subtenditurque angulo extra triangulum, eandem rationem habet quam quadratum rectæ, quæ diametro parallela à vertice sectionis usque ad basim trianguli ducitur, ad rectangulum sub basis partibus quæ ab ea fiunt contentum, latitudinem habens rectam, quæ ex diametro abscinditur inter ipsam & verticem sectionis interjectam; excedensque figura simili & similiter posita ei, quæ continetur sub recta angulo extra triangulum subtensa, & ea juxta quam possunt quæ ad diametrum applicantur. vocetur autem hujusmodi sectio HYPERBOLA.

SIT conus, cujus vertex A punctum, basis circulus BΓ, & secetur plano per axem, atque sectionem faciat triangulum ABΓ; secetur autem & altero plano secante basim coni secundum rectam ΔE ad BΓ basim trianguli ABΓ perpendicularem, faciatque sectionem in superficie coni lineam ΔZE, & sectionis diameter ZH producta cum ipso AΓ latere trianguli ABΓ extra coni verticem conveniat in puncto Θ, & per A ducatur recta AK diametro ZH parallela quæ secet BΓ, & à Z ducatur ZΛ ad rectos angulos ipsi ZH, fiatque ut quadratum ex KA ad rectangulum BKΓ ita ΘZ ad ZΛ; sumatur autem in sectione quodlibet punctum M, & per M ducatur MN parallela ΔE, per N vero ipsi ZΛ parallela ducatur NOΞ, & juncta ΘΛ, & ad Ξ producta, per puncta Λ,Ξ ipsi ZN paralleIæ ducantur ΛO, ΞΠ: dico MN posse spatium ZΞ, quod quidem adjacet ipsi ZΛ, latitudinem habens ZN, excedensque figura ΛΞ, simili similiterque positæ ei, quæ sub ΘZ, ZΛ continetur.



Ducatur enim per N recta PNΣ parallela BΓ; est autem & MN ipsi ΔE parallela: ergo [per 15. 11.] planum quod transit per MN, PΣ æquidistat plano per BΓ, ΔE, hoc est basi coni. si igitur planum per MN, PΣ producatur, sectio circulus erit [per 4. huj.] cujus diameter PNΣ; atque est ad ipsam perpendicularis MN: ergo [per 35. 3.] rectangulum PNΣ æquale est quadrato ex MN. ac quoniam [ex hyp.] ut quadratum ex AK ad rectangulum BKΓ ita est ZΘ ad ZΛ; ratio autem quadrati ex AK ad rectangulum BKΓ [per 23.6.] componitur ex ratione quam habet AK ad KΓ, & ex ea quam AK habet ad KB: ratio igitur ΘZ ad ZΛ composita erit ex ratione AK ad KΓ, & ratione AK ad KB. sed [per 4.6.] ut AK ad KΓ ita ΘH ad HΓ, hoc est ΘN ad NΣ; & ut AK ad KB ita ZH ad HB, hoc est ZN ad NP: ratio igitur ΘZ ad ZΛ componitur ex ratione ΘN ad NΣ, & ZN ad NP. at [per 23.6.] ratio composita ex ratione ΘN ad NΣ, & ZN ad NP, est ea quam ΘNZ rectangulum habet ad rectangulum ΣNP: ergo ut rectangulum ΘNZ ad ΣNP ita ΘZ ad ZΛ,

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔΕ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ γραμμήν, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΖΗ ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω μιᾷ πλευρᾷ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, τῇ ΑΓ, ἐκτὸς τῆς τοῦ κώνου κορυφῆς κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς τῇ ΖΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ, καὶ τεμνέτω τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΛ, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΛ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν τὸ Μ, καὶ διὰ τοῦ Μ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΝ, διὰ δὴ τοῦ Ν τῇ ΖΛ παράλληλος ἡ ΝΟΞ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΛ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῶν Λ, Ξ τῇ ΖΝ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΛΟ, ΞΠ· λέγω ὅτι ἡ ΜΝ δύναται τὸ ΖΞ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΖΛ, πλάτος ἔχον τὴν ΖΝ, ὑπερβάλλον εἴδει τῷ ΛΞ, ὁμοίῳ ὄντι καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖ, ΖΛ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ν τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΡΝΣ, ἔστι δὴ καὶ ἡ ΜΝ τῇ ΔΕ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΜΝ, ΡΣ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. ἐὰν ἄρα ἐκβληθῇ τὸ διὰ τῶν ΜΝ, ΡΣ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται, οὗ διάμετρος ἡ ΡΝΣ, καί ἐστιν ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΜΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΡΝΣ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΛ, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ, καὶ ΑΚ πρὸς ΚΒ· καὶ ὁ τῆς ΖΘ ἄρα πρὸς τὴν ΖΛ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ, καὶ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς ΗΓ, τουτέστιν ἡ ΘΝ πρὸς ΝΣ, ὡς δὲ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ, τουτέστιν ἡ ΖΝ πρὸς ΝΡ· ὁ ἄρα τῆς ΘΖ πρὸς ΖΛ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΘΝ πρὸς ΝΣ, καὶ τοῦ τῆς ΖΝ πρὸς ΝΡ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΘΝ πρὸς ΝΣ, καὶ τῆς ΖΝ πρὸς ΝΡ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣΝΡ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣΝΡ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΛ, τουτέστιν

τουτέστιν ἡ ΘΝ πρὸς ΝΞ. ἀλλ' ὡς ἡ ΘΝ πρὸς ΝΞ (τῆς ΖΝ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης) οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΝΞ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΞΝΖ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣΝΡ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΣΝΡ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΞΝΖ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΣΝΡ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΞΝΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΞΝΖ ἐστὶ τὸ ΞΖ παραλληλόγραμμον· ἡ ἄρα ΜΝ δύναται τὸ ΞΖ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΖΛ, πλάτος ἔχον τὸ ΖΝ, ὑπερβάλλον τῷ ΛΞ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῆς ΘΖΛ.

Καλείσθω μὲν ἡ τοιαύτη τομὴ Ὑπερβολή· ἡ δὲ ΛΖ, ἡ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΖΗ καταγόμεναι τεταγμένως· καλείσθω δὲ ἡ αὐτὴ καὶ Ὀρθία, Πλαγία δὲ ἡ ΘΖ.

hoc est ΘN ad NΞ. ut autem recta ΘN ad NΞ (sumpta ZN communi altitudine,) ita ΘNZ rectangulum ad rectangulum ZNΞ: quare ut rectangulum ΘNZ ad rectangulum ΞNZ ita rectangulum ΘNZ ad ipsum ΣNP: rectangulum igitur ZNP [per 9. 5.] æquale est rectangulo ΞNZ. sed quadratum ex MN ostensum est æquale rectangulo ΣNP: ergo quadratum ex MN rectangulo ΞNZ æquale erit. rectangulum autem ΞNZ est parallelogrammum ΞZ: recta igitur MN potest spatium ΞZ, quod rectæ ZΛ adjacet, latitudinem habens ZN, excedensque figura ΛΞ simili ei quæ sub ΘZΛ continetur.

Dicatur autem hujusmodi sectio *Hyperbola*: & recta ΛZ, *Ea juxta quam possunt quæ ad* ZH *ordinatim applicantur*: hæc etiam *Latus Rectum* appelletur, ΘZ vero *Transversum**.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παρὰ τὴν βάσιν τοῦ κώνου ἠγμένῳ, μήτε ὑπεναντίως, τὸ δὲ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἡ βάσις τοῦ κώνου, καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμπίπτῃ κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν ἤτοι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τοῦ κώνου τομῆς παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἕως τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεταί τι χωρίον παρακείμενον παρά τινα εὐθεῖαν, πρὸς ἣν λόγον ἔχει ἡ διάμετρος τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἕως τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῆς πρὸς ταῖς τοῦ τριγώνου εὐθείαις, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται. καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ΕΛΛΕΙΨΙΣ.

PROP. XIII. *Theor.*

Si conus plano per axem secetur, & secetur altero plano conveniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque basi coni æquidistet, neque subcontrarie ponatur; planum autem, in quo est basis coni, & secans planum conveniant secundum rectam lineam quæ sit perpendicularis vel ad basim trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur: recta linea, quæ à sectione coni ducitur parallela communi sectioni planorum usque ad diametrum sectionis, poterit spatium adjacens rectæ, ad quam sectionis diameter eam rationem habeat quam quadratum rectæ diametro parallelæ, à vertice coni usque ad trianguli basim ductæ, habet ad rectangulum contentum sub basis partibus quæ inter ipsam & rectas trianguli lineas interjiciuntur, latitudinem habens rectam quæ ex diametro ab ipsa abscinditur ad verticem sectionis, deficiensque figura simili & similiter posita ei, quæ sub diametro, & recta juxta quam possunt, continetur. dicatur autem hujusmodi sectio ELLIPSIS.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παραλλήλῳ τῇ βάσει τοῦ κώνου, μήτε ὑπεναντίως ἠγμένῳ,

SIT conus, cujus vertex A punctum, basis circulus BΓ, & secetur plano per axem, atque sectionem faciat triangulum ABΓ, secetur autem & altero plano conveniente cum utroque latere trianguli per axem, neque basi coni æquidistante, neque subcontrarie posito,

* Latus transversum & rectum (sive potius erectum) sic videtur dici, quod in delineanda Parabola, Hyperbola, vel Ellipsi, illud transversim sive à dextra ad sinistram est ducendum, hoc vero super latus transversum erigendum; eodem sc. sensu quo dicitur πλαγία φάλαγξ, ὀρθία φάλαγξ, quod de diametro transversa & recta similiter intelligendum. Consuetudini tamen & commodo situi consulentes schemata aliter aliquando delineamus.

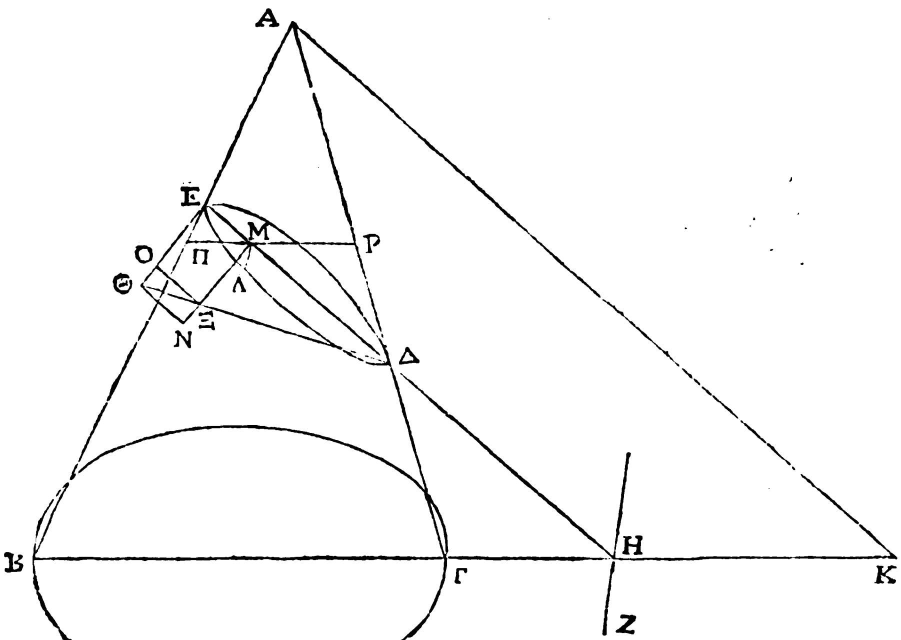
atque

atque faciat sectionem in superficie coni lineam ΔΕ; communis vero sectio plani secantis, atque ejus in quo est basis coni, sit ΖΗ perpendicularis ad ΒΓ, diameter autem sectionis ΕΔ, & ab Ε ducatur ΕΘ ad ΕΔ perpendicularis, perque Α ducatur ΑΚ ipsi ΕΔ parallela, & fiat ut quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΒΚΓ ita ΔΕ ad ΕΘ, sumaturque quodvis in sectione punctum Λ, & per Λ ipsi ΖΗ parallela ducatur ΛΜ: dico ΛΜ posse spatium, quod ipsi ΕΘ adjacet, latitudinem habens ΕΜ, deficiensque figura simili ei quæ sub ΔΕΘ continetur.

Jungatur enim ΔΘ, perque Μ ducatur ΜΞΝ parallela ipsi ΕΘ, & per Θ, Ξ puncta ipsi ΕΜ parallelæ ducantur ΘΝ, ΞΟ, & per punctum Μ ducatur ΠΜΡ parallela ΒΓ. itaque quoniam ΠΡ est parallela ΒΓ, & ΛΜ ipsi ΖΗ: erit [per 15. 11.] planum ductum per ΛΜ, ΠΡ æquidistans plano per ΖΗ, ΒΓ ducto, hoc est basi coni. si igitur planum per ΛΜ, ΠΡ du-

καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΕ γραμμήν, κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ τοῦ ἐν ᾧ ἐστιν ἡ βάσις τοῦ κώνου, ἔστω ἡ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς οὖσα τῇ ΒΓ, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἔστω ἡ ΕΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΘ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς, τὸ Λ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΖΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΜ· λέγω ὅτι ἡ ΛΜ δύναταί τι χωρίον, ὃ παράκειται ἐπὶ τῆς ΕΘ, πλάτος ἔχον τὴν ΕΜ, ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ΔΕΘ.

Επεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΘ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Μ τῇ ΕΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΞΝ, διὰ δὲ τῶν Θ, Ξ τῇ ΕΜ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΘΝ, ΞΟ, καὶ διὰ τοῦ Μ τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ΠΜΡ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΠΡ τῇ ΒΓ παράλληλός ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΜ τῇ ΖΗ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΛΜ, ΠΡ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΖΗ, ΒΓ ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῇ



catur, fiet [per 4. huj.] sectio circulus, cujus diameter ΠΡ; & est ΛΜ ad ipsam perpendicularis: ergo [per 35. 3.] rectangulum ΠΜΡ æquale est quadrato ex ΛΜ. Et quoniam est [ex hyp.] ut quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΒΚΓ ita ΔΕ ad ΕΘ, & ratio quadrati ex ΑΚ ad rectangulum ΒΚΓ [per 23. 6.] componitur ex ratione quam habet ΑΚ ad ΚΒ, & ex ea quam ΑΚ habet ad ΚΓ. ut autem ΑΚ ad ΚΒ ita [per 4. 6.] ΕΗ ad ΗΒ, hoc est ΕΜ ad ΜΠ; & ut ΑΚ ad ΚΓ ita ΔΗ ad ΗΓ, hoc est ΔΜ ad ΜΡ: erit igitur ratio ΔΕ ad ΕΘ composita ex ratione ΕΜ ad ΜΠ, & ratione ΔΜ ad ΜΡ. sed ratio composita ex rationibus ΕΜ ad ΜΠ, & ΔΜ ad ΜΡ, est ea quam ΕΜΔ rectangulum habet ad rectangulum ΠΜΡ: igitur ut rectangulum ΕΜΔ ad ipsum rectangulum ΠΜΡ ita ΔΕ ad ΕΘ, sive ΔΜ ad ΜΞ. ut autem ΔΜ ad ΜΞ (sumpta ΜΕ com-

βάσει τοῦ κώνου. ἐὰν ἄρα ἐκβληθῇ διὰ τῶν ΛΜ, ΠΡ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, καὶ ἔστι κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΛΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΠΜΡ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΒΚΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, λόγος δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΒΚΓ σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, καὶ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ, τουτέστιν ἡ ΕΜ πρὸς ΜΠ, ὡς δὲ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς ΗΓ, τουτέστιν ἡ ΔΜ πρὸς ΜΡ· ὁ ἄρα τῆς ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΕΜ πρὸς ΜΠ, καὶ τοῦ τῆς ΔΜ πρὸς ΜΡ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΠ, καὶ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΡ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΜΔ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΜΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΜΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΜΡ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, τουτέστιν ἡ ΔΜ πρὸς τὴν ΜΞ. ὡς δὲ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΞ, τῆς ΜΕ κοι-

νοῦ

νου ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΜΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΜΡ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΜΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΠΜΡ τῷ ὑπὸ ΞΜΕ. τὸ δὲ ὑπὸ ΠΜΡ ἴσον ἐδείχθη τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ· καὶ τὸ ὑπὸ ΞΜΕ ἄρα ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ· ἡ ΛΜ ἄρα δύναται τὸ ΜΟ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΘΕ, πλάτος ἔχον τὴν ΕΜ, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΟΝ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ ΔΕΘ.

Καλείσθω μὲν ἡ τοιαύτη τομὴ Ἔλλειψις· ἡ δὲ ΕΘ, ἡ παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΔΕ τεταγμένως, ἡ δὲ αὐτὴ καὶ Ὀρθία· Πλαγία δὲ ἡ ΕΔ.

mmi altitudine) ita [per 1. 6.] rectangulum ΔΜΕ ad rectangulum ΞΜΕ: ergo ut ΔΜΕ rectangulum ad rectangulum ΠΜΡ ita erit ΔΜΕ rectangulum ad ipsum ΞΜΕ: æquale igitur est [per 9. 5.] rectangulum ΠΜΡ rectangulo ΞΜΕ. sed rectangulum ΠΜΡ demonstratum est æquale quadrato ex ΛΜ; quare & ipsum rectangulum ΞΜΕ quadrato ex ΛΜ æquale erit: recta igitur ΛΜ potest spatium ΜΟ, quod quidem rectæ ΘΕ adjacet, latitudinem habens ΕΜ, deficiensque figura ΟΝ simili ei quæ sub ΔΕΘ continetur.

Vocetur autem hujusmodi sectio *Ellipsis*: & recta ΕΘ, *Ea juxta quam possunt quæ ad diametrum* ΔΕ *ordinatim applicantur*; quæ & *Latus Rectum* vocetur; ΕΔ vero *Transversum*.

EUTOCIUS.

Δεῖ σημειώσασθαι, ὅτι τοῦτο τὸ θεώρημα τρεῖς ἔχει καταγραφάς, ὡς καὶ πολλάκις εἴρηται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως. ἢ γὰρ ΔΕ ἢ ἀνωτέρω τοῦ Γ συμπίπτει τῇ ΑΓ, ἢ κατ' αὐτὸ Γ, ἢ ἐξωτέρω ἐκβαλλομένῃ τῇ ΑΓ συμπίπτει.

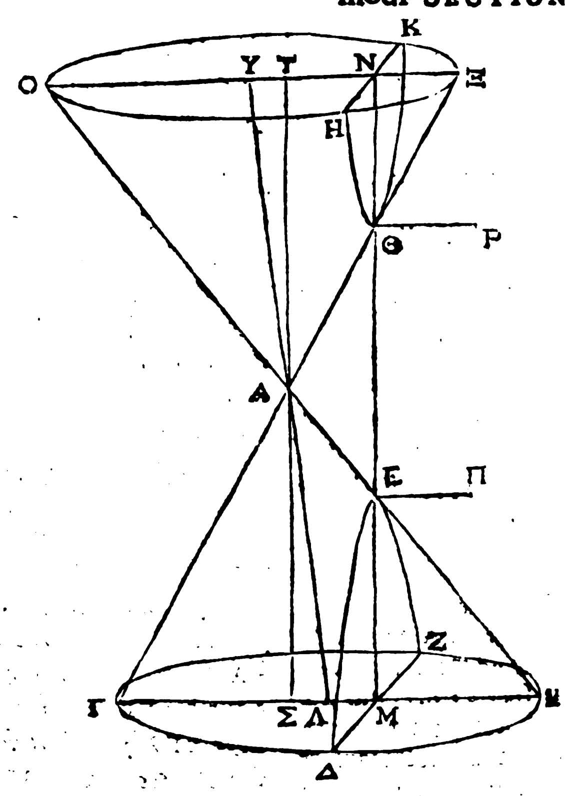
Notari oportet hoc theorema tres habere descriptiones, ut sæpius dictum est in ellipsi. vel enim ΔΕ concurrit cum latere ΑΓ supra Γ punctum, vel in ipso Γ, vel infra cum ΑΓ producta conveniet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν αἱ κατὰ κορυφὴν ἐπιφάνειαι ἐπιπέδῳ τμηθῶσι μὴ διὰ τῆς κορυφῆς· ἔσται ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἐπιφανειῶν τομὴ ἡ καλουμένη Ὑπερβολή, καὶ τῶν δύο τομῶν ἥτε διάμετρος αὐτὴ ἔσται, καὶ παρ' ἃς δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν διάμετρον καταγόμεναι παράλληλοι τῇ ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου εὐθεῖαι ἴσαι, καὶ τοῦ εἴδους ἡ πλαγία πλευρὰ κοινὴ ἡ μεταξὺ τῶν κορυφῶν τῶν τομῶν. καλείσθωσαν δὲ αἱ τοιαῦται τομαὶ ἈΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑΙ.

PROP. XIV. *Theor.*

Si superficies conicæ quæ ad verticem plano non per verticem secentur: erit in utraque superficie sectio quæ vocatur Hyperbola, & duarum sectionum eadem erit diameter; rectæ vero, juxta quas possunt applicatæ ad diametrum parallelæ ei quæ est in basi coni, inter se æquales erunt; & figuræ transversum latus utrisque commune, quod scilicet inter sectionum vertices interjicitur. vocentur autem hujusmodi SECTIONES OPPOSITÆ.



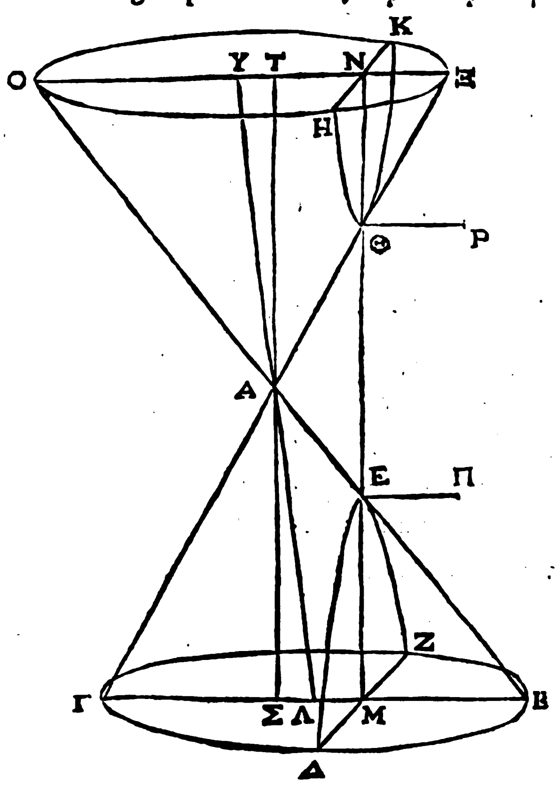
ἜΣΤΩΣΑΝ αἱ κατὰ κορυφὴν ἐπιφάνειαι, ὧν κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, καὶ τετμήσθωσαν ἐπιπέδῳ μὴ διὰ τῆς κορυφῆς, καὶ ποιείτωσαν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὰς τὰς ΔΕΖ, ΗΘΚ· λέγω ὅτι ἑκατέρα τῶν ΔΕΖ, ΗΘΚ τομῶν ἐστιν ἡ καλουμένη ὑπερβολή.

Ἔστω γὰρ ὁ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ὁ ΒΔΓΖ, καὶ ἤχθω ἐν τῇ κατὰ κορυφὴν ἐπιφανείᾳ παράλληλον αὐτῷ ἐπίπεδον τὸ ΞΗΟΚ, κοιναὶ δὲ τομαὶ τῶν ΖΕΔ, ΗΘΚ τομῶν καὶ τῶν κύκλων αἱ ΖΔ, ΗΚ· ἔσονται δὴ παράλληλοι, ἄξων δὲ ἔστω τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἡ ΛΑΥ εὐθεῖα, κέντρα δὲ τῶν κύκλων τὰ Λ, Υ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΖΔ κάθετος ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ

SINT ad verticem superficies, quarum vertex Α punctum; & secentur plano non per verticem, atque sectiones faciat in superficie lineas ΔΕΖ, ΗΘΚ; dico utramque sectionum ΔΕΖ, ΗΘΚ esse eam quæ Hyperbola appellatur.

Sit enim circulus ΒΔΓΖ, in quo fertur recta linea superficiem describens, ducaturque in superficie, quæ est ad verticem, planum ipsi æquidistans ΞΗΟΚ, & communes intersectiones sectionum ΖΕΔ, ΗΘΚ & circulorum sint ΖΔ, ΗΚ, quæ [per 16. 11.] etiam parallelæ erunt; axis autem conicæ superficiei sit recta ΛΑΥ, & circulorum centra Λ, Υ; & à Λ ad ΖΔ perpendicularis ducta producatur ad Β, Γ puncta;

puncta; perque BΓ & axem planum ducatur, quod sectiones faciat in circulis quidem rectas ΞO, BΓ parallelas; in superficie vero ipsas BAO, ΓAΞ: & erit [per 10.11.] ΞO ad HK perpendicularis; quoniam & BΓ perpendicularis est ad ZΔ, & utraque utrique est parallela. & quoniam planum per axem ductum sectionibus occurrit ad puncta M, N, quæ sunt intra lineas: plane constat ipsum etiam lineas secare. secet autem in Θ, E: ergo puncta M, E, Θ, N erunt & in plano per axem, & in eo in quo sunt lineæ ipsæ; & propterea [per 5.11.] MEΘN recta erit. constat etiam [per 3. huj.] puncta Ξ, Θ, A, Γ in eadem recta esse, itemque B, E, A, O; quoniam sunt & in superficie conica & in plano per axem. ducantur ergo à punctis Θ, E ipsi ΘE ad rectos angulos rectæ ΘP, EΠ; perque A rectæ MEΘN parallela ducatur ΣAT, & fiat ut quadratum ex AΣ ad rectangulum BΣΓ sic ΘE ad EΠ, & ut quadratum ex AT ad rectangulum OTΞ sic EΘ ad ΘP. itaque quoniam conus, cujus vertex A & basis BΓ circulus, secatur plano per axem, quod sectionem facit triangulum ABΓ; secatur autem & altero plano secante basim coni secundum ΔMZ ad BΓ perpendicularem, quod sectionem facit in superficie lineam ΔEZ, diameterque ME producta cum uno latere trianguli per axem extra coni verticem convenit, & per punctum A diametro sectionis EM parallela ducitur AΣ, ab E vero ducitur EΠ ad rectos angulos ipsi EM, atque est ut quadratum ex AΣ ad rectangulum BΣΓ ita EΘ ad EΠ: erit [per 12. huj.] ipsa ΔEZ sectio hyperbola, & recta EM ea juxta quam possunt quæ ad EM ordinatim applicantur; transversum vero figuræ latus est recta ΘE. eadem ratione & HΘK hyperbola erit, cujus diameter ΘN; recta ΘP ea juxta quam possunt ordinatim ad ΘN applicatæ; ΘE vero transversum figuræ latus.



Dico ΘP ipsi EΠ æqualem esse.

Quoniam enim parallelæ sunt BΓ, ΞO: ut AΣ ad ΣΓ ita erit [per 4.6.] AT ad TΞ; & ut AΣ ad ΣB ita AT ad TO. sed [per 23.6.] ratio AΣ ad ΣΓ, una cum ratione AΣ ad ΣB, est ea quam habet quadratum ex AΣ ad rectangulum BΣΓ, & ratio AT ad TΞ, una cum ratione AT ad TO, est quam habet quadratum ex AT ad rectangulum ΞTO: ergo ut quadratum ex

B, Γ σημεῖα, καὶ διὰ τῆς BΓ καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω· ποιήσει δὴ τομὰς ἐν μὲν τοῖς κύκλοις παραλλήλους εὐθείας τὰς ΞO, BΓ, ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τὰς BAO, ΓAΞ· ἔσται δὴ καὶ ἡ ΞO τῇ HK πρὸς ὀρθὰς, ἐπειδὴ καὶ ἡ BΓ τῇ ZΔ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς καὶ ἔστιν ἑκατέρα παράλληλος. καὶ ἐπεὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ταῖς τομαῖς συμβάλλει κατὰ M, N σημεῖα ἐντὸς τῶν γραμμῶν· δῆλον ὡς τὰς γραμμὰς τέμνει τὸ ἐπίπεδον. τεμνέτω κατὰ τὰ Θ, E· τὰ ἄρα M, E, Θ, N σημεῖα ἔντι τῷ διὰ τοῦ ἄξονός ἐστιν ἐπιπέδῳ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐν ᾧ εἰσιν αἱ γραμμαί· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ MEΘN γραμμή. καὶ φανερὸν ὅτι τά τε Ξ, Θ, A, Γ ἐπ᾽ εὐθείας ἐστὶ, καὶ τὰ B, E, A, O, ἔντι γὰρ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ, καὶ ἐν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ. ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ μὲν τῶν Θ, E τῇ ΘE πρὸς ὀρθὰς αἱ ΘP, EΠ, διὰ δὲ τοῦ A τῇ MEΘN παράλληλος ἤχθω ἡ ΣAT, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς AΣ πρὸς τὸ ὑπὸ BΣΓ οὕτως ἡ ΘE πρὸς EΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AT πρὸς τὸ ὑπὸ OTΞ οὕτως ἡ EΘ πρὸς ΘP. ἐπεὶ οὖν κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ BΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ πεποίηκε τομὴν τὸ ABΓ τρίγωνον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΔMZ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ BΓ, καὶ πεποίηκε τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔEZ, ἡ δὲ διάμετρος ἡ ME ἐκβαλλομένη συμπέπτωκε μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, καὶ διὰ τοῦ A σημείου τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς τῇ EM παράλληλος ἦκται ἡ AΣ, καὶ ἀπὸ τοῦ E τῇ EM πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ EΠ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ AΣ πρὸς τὸ ὑπὸ BΣΓ οὕτως ἡ EΘ πρὸς EΠ· ἡ μὲν ΔEZ ἄρα τομὴ ὑπερβολή ἐστιν, ἡ δὲ EΠ παρ᾽ ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν EM καταγόμεναι τεταγμένως, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘE. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ HΘK ὑπερβολή ἐστιν, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΘN, ἡ δὲ ΘP παρ᾽ ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΘN καταγόμεναι τεταγμένως, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘE.

Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘP τῇ EΠ.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ BΓ τῇ ΞO· ἔστιν ὡς ἡ AΣ πρὸς ΣΓ οὕτως ἡ AT πρὸς TΞ, καὶ ὡς ἡ AΣ πρὸς ΣB οὕτως ἡ AT πρὸς TO. ἀλλ᾽ ὁ τῆς AΣ πρὸς ΣΓ λόγος μετὰ τοῦ τῆς AΣ πρὸς ΣB, ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς AΣ πρὸς τὸ ὑπὸ BΣΓ· ὁ δὲ τῆς AT πρὸς TΞ μετὰ τοῦ τῆς AT πρὸς TO, ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς AT πρὸς τὸ ὑπὸ ΞTO· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ AΣ πρὸς τὸ ὑπὸ

ὑπὸ ΒΣΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ. καὶ ἔστιν ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΣΓ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΘΡ· καὶ ὡς ἄρα ΘΕ πρὸς ΕΠ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΡ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΠ τῇ ΘΡ.

ΑΣ ad rectangulum ΒΣΓ ita quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΞΤΟ. ut autem quadratum ex ΑΣ ad ΒΣΓ rectangulum ita [per constr.] ΘΕ ad ΕΠ; & ut quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΞΤΟ ita ΘΕ ad ΘΡ: ergo ut ΘΕ ad ΕΠ ita ΕΘ ad ΘΡ: æqualis igitur est [per 9. 5.] ΕΠ ipsi ΘΡ.

EUTOCIUS.

Δυνατὸν ἦν καὶ οὕτως δεῖξαι. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΞΟ, ἔστιν ὡς ἡ ΓΣ πρὸς ΣΑ ἡ ΞΤ πρὸς ΤΑ, καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ὡς ἡ ΑΣ πρὸς ΣΒ ἡ ΑΤ πρὸς ΤΟ· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΓΣ πρὸς ΣΒ ἡ ΞΤ πρὸς ΤΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΣΒ τὸ ἀπὸ ΞΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ. ἔστι δὲ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΓ τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΤ· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ. καὶ ἔστιν ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ ἡ ΘΕ πρὸς ΘΡ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ ἡ ΕΘ πρὸς ΘΡ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΠ τῇ ΘΡ.

Πτῶσιν μὲν οὐκ ἔχει. φανερὸς δέ ἐστιν ὁ σκοπὸς, συνεχὴς ὢν τοῖς πρὸ αὐτοῦ τρισίν· ὁμοίως γὰρ ἐκείνοις τὴν διάμετρον τῶν ἀντικειμένων ζητεῖ τὴν ἀρχικὴν, καὶ τὰς παρ᾽ ἃς δύνανται.

Poterat etiam hoc modo ostendi. quoniam enim parallelæ sunt ΒΓ, ΞΟ; erit [per 4. 6.] ut ΓΣ ad ΣΑ ita ΞΤ ad ΤΑ, & eadem ratione ut ΑΣ ad ΣΒ ita ΑΤ ad ΤΟ; ergo ex æquali [per 22. 5.] ut ΓΣ ad ΣΒ ita ΞΤ ad ΤΟ: & ideo [per 1. 6.] ut quadratum ex ΓΣ ad rectangulum ΓΣΒ ita quadratum ex ΞΤ ad rectangulum ΞΤΟ. sed, propter similitudinem triangulorum, ut quadratum ex ΑΣ ad quadratum ex ΣΓ ita quadratum ex ΑΤ ad quadratum ex ΞΤ: quare ex æquali, ut quadratum ex ΑΣ ad rectangulum ΒΣΓ ita quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΞΤΟ. atque est [per const.] ut quadratum ex ΑΣ ad rectangulum ΒΣΓ ita ΘΕ ad ΕΠ, & ut quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΞΤΟ ita ΘΕ ad ΘΡ; ergo ut ΘΕ ad ΕΠ ita ΕΘ ad ΘΡ: æqualis igitur est [per 9. 5.] ΕΠ ipsi ΘΡ.

Hoc theorema casum non habet. propositum autem manifestum est, utpote idem quod in tribus superioribus; similiter enim atque in illis, & oppositarum sectionum principalem diametrum inquirit, & lineas juxta quas possunt quæ ad ipsam ordinatim applicantur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς διαμέτρου ἀχθεῖσα εὐθεῖα τεταγμένως ἐκβληθῇ ἐφ᾽ ἑκάτερα ἕως τῆς τομῆς, καὶ ποιηθῇ ὡς ἡ ἐκβληθεῖσα πρὸς τὴν διάμετρον οὕτως ἡ διάμετρος πρός τινα εὐθεῖαν· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἐκβληθεῖσαν παράλληλος τῇ διαμέτρῳ δυνήσεται τὸ παρακείμενον παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον, πλάτος ἔχον τὴν ὑπ᾽ αὐτῆς ἀπολαμβανομένην πρὸς τῇ τομῇ, ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ἐφ᾽ ἣν ἄγονται καὶ τῆς παρ᾽ ἣν δύνανται. καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐφ᾽ ἣν κατῆκται.

PROP. XV. *Theor.*

Si in ellipsi, à puncto quod diametrum bifariam dividit, recta ordinatim ducta ex utraque parte ad sectionem producatur, & fiat ut producta ad diametrum ita diameter ad aliam: recta linea, quæ à sectione ducitur ad productam diametro parallela, poterit spatium adjacens tertiæ proportionali, latitudinem habens rectam quæ inter ipsam & sectionem interjicitur, deficiensque figura simili ei quæ continetur sub rectâ ad quam ducuntur & eâ juxta quam possunt. & si ulterius producatur ad alteram partem sectionis, bifariam secabitur ab ea ad quam applicata fuerit.

ΕΣΤΩ ἔλλειψις, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω τεταγμένως καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα ἕως τῆς τομῆς ἡ ΔΓΕ, καὶ ἀπὸ Δ σημείου τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΖ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Θ τῇ ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΛ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Λ τῇ ΘΔ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΚ, ΛΜ· λέγω ὅτι ἡ ΗΘ δύναται τὸ ΔΛ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΔΖ, πλάτος ἔχον τὴν ΔΘ, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΛΖ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἔστω γὰρ παρ᾽ ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΑΒ καταγόμεναι τεταγμένως ἡ ΑΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΝ, καὶ διὰ μὲν τοῦ

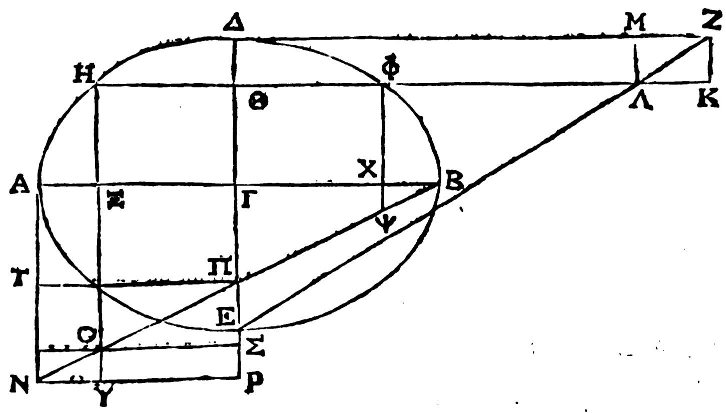
SIT ellipsis, cujus diameter ΑΒ, seceturque ΑΒ bifariam in Γ puncto, & per Γ ordinatim applicata ex utraque parte ad sectionem producatur, quæ sit ΔΓΕ; à puncto autem Δ ipsi ΔΕ ad rectos angulos ducatur ΔΖ, fiatque ut ΔΕ ad ΑΒ ita ΑΒ ad ΔΖ; & sumpto quolibet puncto Η in sectione, per Η ducatur ΗΘ ipsi ΑΒ parallela, & jungatur ΕΖ; deinde per Θ ipsi ΔΖ parallela ducatur ΘΛ, & per Ζ, Λ puncta ducantur ipsi ΘΔ parallelæ ΖΚ, ΛΜ: dico ΗΘ posse spatium ΔΛ, quod quidem adjacet rectæ ΔΖ, latitudinem habens ΔΘ, deficiensque figura ΛΖ simili ei quæ sub ΕΔΖ continetur.

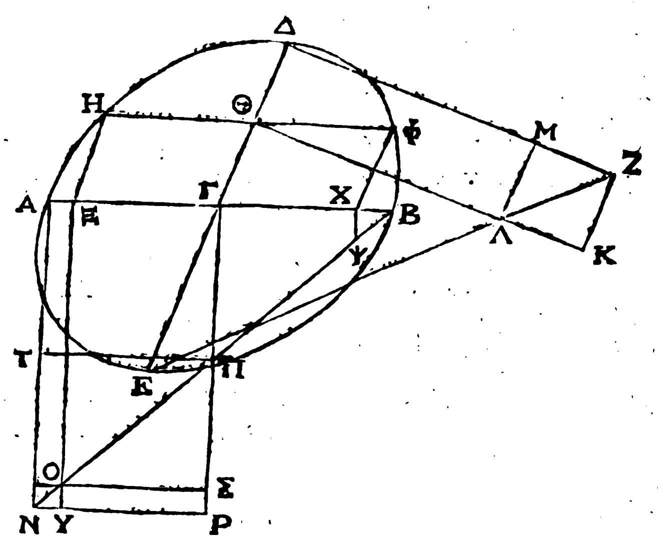
Sit enim ΑΝ ea juxta quam possunt ordinatim applicatæ ad ΑΒ, jungaturque ΒΝ; & per

Η quidem

H quidem ipsi Δ E parallela ducatur H Ξ, perque Ξ, Γ ipsi A N parallelæ Ξ O, Γ Π; per N, O, Π vero ducantur N Υ P, O Σ, T Π parallelæ ipsi A B: æquale igitur est [per 13. huj.] quadratum ex Δ Γ rectangulo A Π; & quadratum ex H Ξ rectangulo A O. & quoniam ut B A ad A N ita est B Γ ad Γ Π, & Π T ad T N; æqualis autem B Γ ipsi Γ A, hoc est ipsi T Π: & Γ Π ipsi T N æqualis erit: ergo [per 36. 1.] A Π rectangulum æquale est rectangulo T P, & rectangulum Ξ T ipsi T Υ. & quoniam [per 43. 1.] rectangulum O Υ rectangulo O P æquale est, commune autem O N; erit rectangulum T Υ ipsi N Σ æquale. sed T Υ est æquale ipsi T Ξ: ergo T Ξ æquale est ipsi N Σ. commune vero T Σ: totum igitur N Π rectangulum, hoc est Π A, æquale erit

H τῇ Δ E παράλληλος ἤχθω ἡ H Ξ, διὰ δὲ τῶν Ξ, Γ τῇ A N παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ Ξ O, Γ Π, διὰ δὲ τῶν N, O, Π τῇ A B παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ N Υ P, O Σ, T Π· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς Δ Γ τῷ A Π, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς H Ξ τῷ A O. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ B A πρὸς A N οὕτως ἡ B Γ πρὸς Γ Π, καὶ ἡ Π T πρὸς T N, ἴση δὲ ἡ B Γ τῇ Γ A, τουτέστι τῇ T Π· καὶ ἡ Γ Π τῇ T N ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν A Π τῷ T P, τὸ δὲ Ξ T τῷ T Υ. καὶ ἐπεὶ τὸ O Υ τῷ O P ἐστὶν ἴσον, κοινὸν δὲ τὸ O N· τὸ T Υ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ N Σ. ἀλλὰ τὸ T Υ τῷ T Ξ ἐστὶν ἴσον· τὸ T Ξ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ N Σ. κοινὸν δὲ τὸ T Σ· ὅλον ἄρα τὸ N Π, τουτέστι τὸ Π A, ἴσον ἐστὶ τῷ





rectangulo A O una cum Π O rectangulo: quare Π A rectangulum superat rectangulum A O ipso O Π. est autem [per 13. huj.] A Π rectangulum æquale quadrato ex Γ Δ: rectangulumque A O æquale quadrato ex Ξ H, & O Π ei quod sub O Σ Π continetur: ergo quadratum ex Γ Δ superat quadratum ex H Ξ ipso O Σ Π rectangulo. & quoniam recta Δ B secatur in partes æquales in Γ puncto, & in partes inæquales in Θ: rectangulum E Θ Δ una cum quadrato ex Γ Θ, hoc est ex Ξ H, æquale erit [per 5. 2.] quadrato ex Γ Δ: quadratum igitur ex Γ Δ superat quadratum ex Ξ H rectangulo E Θ Δ. superabat autem quadratum ex Γ Δ ipsum quadratum ex H Ξ rectangulo O Σ Π: rectangulum igitur E Θ Δ rectangulo O Σ Π est æquale. &

A O μετὰ τοῦ Π O· ὥστε Π A τοῦ A O ὑπερέχει τῷ O Π. καὶ ἔστι τὸ μὲν A Π ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς Γ Δ, τὸ δὲ A O ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς Ξ H, τὸ δὲ O Π ἴσον τῷ ὑπὸ O Σ Π· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Γ Δ τοῦ ἀπὸ τῆς H Ξ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν O Σ Π. καὶ ἐπεὶ ἡ Δ B τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Θ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν E Θ Δ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς Γ Θ, τουτέστι τοῦ Ξ H, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Γ Δ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Γ Δ τοῦ ἀπὸ τῆς Ξ H ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν E Θ Δ. ὑπερεῖχε δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ Δ τοῦ ἀπὸ τῆς H Ξ τῷ ὑπὸ τῶν O Σ Π· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν E Θ Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν O Σ Π. καὶ

ἐπεὶ

ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΖ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΔΖ οὕτω καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ. καὶ ἔστι τῷ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τὸ ΠΓΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΠΓΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΛ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΠΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΠΣΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΣ. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΕΘΔ τῷ ὑπὸ ΠΣΟ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΔΘΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΣ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ἡ ΗΘ ἄρα δύναται τὸ ΔΛ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΔΖ, πλάτος ἔχον τὴν ΔΘ, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΖΛ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν ΕΔΖ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐκβαλλομένη ἡ ΘΗ ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΔΕ.

Ἐκβεβλήσθω γάρ, καὶ συμβαλλέτω τῇ τομῇ κατὰ τὸ Φ, καὶ διὰ τοῦ Φ τῇ ΗΞ παράλληλος ἤχθω ἡ ΦΧ, διά τε τοῦ Χ τῇ ΑΤ παράλληλος ἤχθω ἡ ΧΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΞ τῇ ΦΧ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΞ τῷ ἀπὸ τῆς ΦΧ. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΞΟ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΦΧ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΧΨ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΞΟ τῷ ΑΧΨ ἴσον ἐστίν· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΟΞ πρὸς τὴν ΨΧ οὕτως ἡ ΧΑ πρὸς ΑΞ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΟΞ πρὸς τὴν ΨΧ οὕτως ἡ ΞΒ πρὸς ΒΧ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΑ πρὸς ΑΞ οὕτως ἡ ΞΒ πρὸς ΒΧ· καὶ διελόντι, ὡς ἡ ΧΞ πρὸς ΞΑ οὕτως ἡ ΧΞ πρὸς ΧΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΞ τῇ ΧΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΞΓ τῇ ΓΧ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ΗΘ τῇ ΘΦ. ἡ ἄρα ΗΘ ἐκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΔΘ.

quoniam [per constr.] est ut ΔΕ ad ΑΒ ita ΑΒ ad ΔΖ: erit [per cor. 1.20.6.] ut ΔΕ ad ΔΖ ita quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΑΒ; hoc est quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΓΒ. atque est quadrato ex ΓΔ æquale ΠΓΑ rectangulum, hoc est ΠΓΒ: ut ergo ΔΕ ad ΔΖ, hoc est ut ΕΘ ad ΘΛ, hoc est [per 1. 6.] ut ΕΘΔ rectangulum ad rectangulum ΔΘΛ, ita rectangulum ΠΓΒ ad quadratum ex ΓΒ; hoc est [ob similia triangula] rectangulum ΠΣΟ ad quadratum ex ΟΣ. sed [ex modo ostensis] rectangulum ΕΘΔ æquale est ipsi ΠΣΟ: rectangulum igitur ΔΘΛ quadrato ex ΟΣ, hoc est quadrato ex ΗΘ, est æquale: & idcirco recta ΗΘ potest spatium ΔΛ, quod adjacet rectæ ΔΖ, latitudinem habens ΔΘ, deficiensque figura ΖΛ, simili ei quæ sub ΕΔΖ continetur.

Dico insuper ΘΗ, productam ad alteram partem sectionis, ab ipsa ΔΕ bifariam secari.

Producatur enim, occurratque sectioni in puncto Φ, & per Φ ipsi ΗΞ parallela ducatur ΦΧ, & per Χ ducatur ipsi ΑΤ parallela ΧΨ. quoniam igitur ΗΞ ipsi ΦΧ est æqualis, erit quadratum ex ΗΞ æquale quadrato ex ΦΧ. quadratum autem ex ΗΞ [per 13. huj.] æquale est ΑΞΟ rectangulo; & quadratum ex ΦΧ æquale rectangulo ΑΧΨ: & igitur rectangulum ΑΞΟ æquale est rectangulo ΑΧΨ: ergo [per 16. 6.] ut ΟΞ ad ΨΧ ita ΧΑ ad ΑΞ. & est ut ΟΞ ad ΨΧ ita ΞΒ ad ΒΧ: ut ergo ΧΑ ad ΑΞ ita ΞΒ ad ΒΧ; & [per 17. 5.] dividendo, ut ΧΞ ad ΞΑ ita ΞΧ ad ΧΒ: æqualis igitur est [per 9. 5.] ΑΞ ipsi ΧΒ. est autem ΑΓ æqualis ΓΒ: quare & reliqua ΞΓ reliquæ ΓΧ: & idcirco ΗΘ ipsi ΘΦ est æqualis. recta igitur ΗΘ producta ad alteram sectionis partem ab ipsa ΔΘ bifariam secabitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ.

Ἐὰν διὰ τῆς διχοτομίας τῆς πλαγίας πλευρᾶς τῶν ἀντικειμένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην· διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων συζυγὴς τῇ προϋπαρχούσῃ διαμέτρῳ.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι διάμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ συζυγὴς τῇ ΑΒ.

Ἔστωσαν γὰρ παρ᾽ ἃς δύνανται αἱ τεταγμένως καταγόμεναι, αἱ ΑΕ, ΒΖ εὐθεῖαι, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΖ, ΒΕ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τι ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν τομῶν τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, ἀπὸ δὲ τῶν Η, Θ κατήχθωσαν τεταγμένως αἱ ΗΚ, ΘΛ, διὰ δὲ τῶν Κ, Λ ταῖς ΑΕ, ΒΖ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΚΜ, ΛΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΘΛ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΛ. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΚΜ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΘΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΛΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ

Prop. XVI. *Theor.*

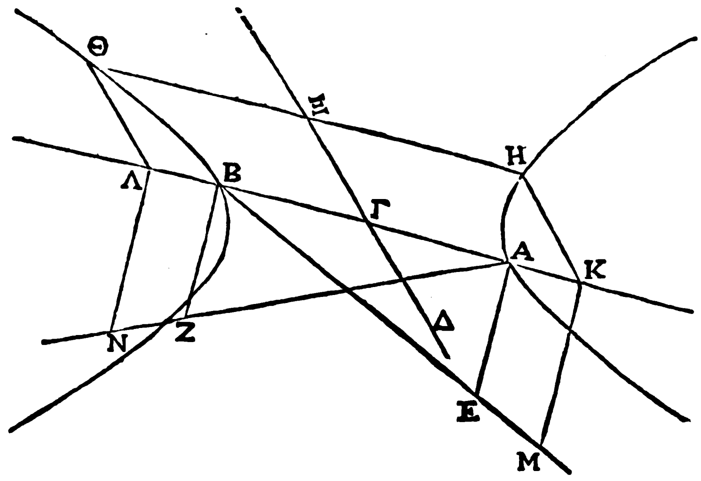
Si per punctum, quod transversum latus oppositarum sectionum bifariam dividit, recta ducatur ordinatim applicatæ parallela; erit hæc ipsarum diameter, priori diametro conjugata.

SINT oppositæ sectiones, quarum diameter ΑΒ; seceturque ΑΒ bifariam in Γ puncto, & per Γ ordinatim applicatæ parallela ducatur ΓΔ: dico ΓΔ diametrum esse conjugatam ipsi ΑΒ.

Sint enim ΑΕ, ΒΖ juxta quas possunt ordinatim applicatæ, & junctæ ΑΖ, ΒΕ producantur, sumpto autem in altera sectione quovis puncto Η, ducatur per Η ipsi ΑΒ parallela ΗΘ, & à punctis Η, Θ ordinatim applicentur ΗΚ, ΘΛ; deinde à punctis Κ, Λ ipsis ΑΕ, ΒΖ parallelæ ducantur ΚΜ, ΛΝ. quoniam igitur æqualis est [per 34.1.] ΗΚ ipsi ΘΛ: erit quadratum ex ΗΚ quadrato ex ΘΛ æquale. sed [per 12. hujus] quadratum ex ΗΚ æquale est rectangulo ΑΚΜ, & quadratum ex ΘΛ rectangulo ΒΛΝ: ergo ΑΚΜ rectangulum rectangulo

BΛN æquale erit. & quia æquales sunt AE, BZ; erit [per 7. 5.] ut AE ad AB ita BZ ad BA. ut autem AE ad AB sic MK [per 4. 6.] ad KB; & ut BZ ad BA sic NΛ ad ΛA: quare ut MK ad KB sic NΛ ad ΛA. sed ut MK ad KB (sumpta KA communi altitudine) ita [per 1. 6.] rectangulum MKA ad rectangulum BKA; & ut NΛ ad ΛA (sumpta BΛ communi altitudine) ita NΛB rectangulum ad rectangulum AΛB: ergo ut rectangulum MKA ad

BΛN. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ BZ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AE πρὸς AB οὕτως ἡ BZ πρὸς BA. ἀλλὰ ὡς ἡ AE πρὸς AB οὕτως ἡ MK πρὸς KB, καὶ ὡς ἡ BZ πρὸς BA οὕτως ἡ NΛ πρὸς ΛA· καὶ ὡς ἄρα ἡ MK πρὸς KB οὕτως ἡ NΛ πρὸς ΛA. ἀλλ' ὡς ἡ MK πρὸς τὴν KB, τῆς KA κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ MKA πρὸς τὸ ὑπὸ BKA, ὡς δὲ ἡ NΛ πρὸς ΛA, τῆς BΛ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ NΛB πρὸς τὸ ὑπὸ AΛB·



rectangulum BKA ita rectangulum NΛB ad ipsum AΛB; & [per 16. 5.] permutando ut MKA rectangulum ad rectangulum NΛB ita BKA rectangulum ad rectangulum AΛB. est autem [ut modo ostensum] rectangulum MKA æquale rectangulo NΛB: ᵃquare & BKA rectangulum æquale rectangulo AΛB; & propterea AK ipsi ΛB æqualis erit. estque AΓ æqualis ΓB: ergo & tota KΓ toti ΓΛ: & ideo HΞ ipsi ΞΘ æqualis. recta igitur HΘ ab ipsa ΞΓΔ bifariam secabitur, atque est ipsi AB parallela: ergo [per 17. def.] diameter erit & ΞΓΔ conjugata ipsi AB.

καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ MKA πρὸς τὸ ὑπὸ BKA οὕτως τὸ ὑπὸ NΛB πρὸς τὸ ὑπὸ AΛB· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ MKA πρὸς τὸ ὑπὸ NΛB οὕτως τὸ ὑπὸ BKA πρὸς τὸ ὑπὸ AΛB. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ MKA τῷ ὑπὸ NΛB· ᵃἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ BKA τῷ ὑπὸ AΛB· ἴση ἄρα ἡ AK τῇ ΛB. ἔστι δὲ καὶ ἡ AΓ τῇ ΓB ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ KΓ ὅλῃ τῇ ΓΛ ἴση ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ HΞ τῇ ΞΘ. ἡ HΘ ἄρα δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΞΓΔ, καὶ ἔστι παράλληλος τῇ AB· διάμετρος ἄρα ἐστὶ, καὶ ἡ ΞΓΔ συζυγὴς τῇ AB.

EUTOCIUS.

ᵃ Quare & BKA rectangulum æquale rectangulo AΛB; & propterea AK ipsi ΛB æqualis erit.] Quoniam enim rectangulum BKA ipsi AΛB rectangulo est æquale; erit [per 16. 6.] ut KB ad AΛ ita ΛB ad AK, permutandoque ut KB ad BΛ ita ΛA ad AK, & componendo ut KA ad ΛB ita KA ad KA: æqualis igitur est KA ipsi BΛ.

Scire autem oportet, in quintodecimo & sexto decimo theoremate *Apollonio* propositum fuisse, ut secundas, & conjugatas quas vocant, diametros inquireret ellipsis, & hyperbolæ, & oppositarum sectionum: parabola enim ejusmodi diametrum non habet. sed & illud notatu dignum est, diametros ellipsis intra recipi; hyperbolæ vero & oppositarum sectionum diametros describi extra. oportet autem rectas juxta quas possunt ordinatim applicatæ, seu recta latera, & quæ ipsis æquidistant ad rectos angulos aptare; ordinatim vero applicatas, & secundas diametros non semper. maxime tamen debent in acuto angulo applicari, ut longe aliæ & diversæ ab eis quæ recto lateri sunt parallelæ, deprehendantur.

ᵃ Ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ BKA τῷ ὑπὸ AΛB· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ AK τῇ ΛB.] Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ BKA τῷ ὑπὸ AΛB ἐστὶν ἴσον· ἀνάλογον ἔσται ὡς ἡ KB πρὸς AΛ ἡ ΛB πρὸς AK, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ KB πρὸς BΛ ἡ ΛA πρὸς AK, καὶ συνθέντι ὡς ἡ KΛ πρὸς ΛB ἡ KΛ πρὸς KA· ἴση ἄρα ἡ KA τῇ BΛ.

Δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἐν τῷ πέμπτῳ καὶ δεκάτῳ καὶ ἑκκαιδεκάτῳ θεωρήματι σκοπὸν ἔχει ζητῆσαι τὰς καλουμένας δευτέρας καὶ συζυγεῖς διαμέτρους τῆς ἐλλείψεως, καὶ τῆς ὑπερβολῆς, καὶ τῶν ἀντικειμένων· ἡ γὰρ παραβολὴ οὐκ ἔχει τοιαύτην διάμετρον. παρατηρητέον δὲ, ὅτι αἱ μὲν τῆς ἐλλείψεως διάμετροι ἐντὸς ἀπολαμβάνονται, αἱ δὲ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων ἐκτὸς καταγράφονται. δεῖ δὲ τὰς μὲν παρ' ἃς δύνανται, ἤτοι τὰς ὀρθὰς πλευρὰς, πρὸς ὀρθὰς τάττειν, καὶ δηλονότι καὶ τὰς παραλλήλους αὐταῖς· τὰς δὲ τεταγμένως καταγομένας, καὶ τὰς δευτέρας διαμέτρους, οὐ παντός. μάλιστα γὰρ ἐν ὀξείᾳ γωνίᾳ δεῖ κατάγειν αὐτὰς, ἵνα σαφεῖς ὦσιν τοῖς ἐντυγχάνουσιν ἕτεραι οὖσαι τῶν παραλλήλων τῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

I. PUNCTUM, quod hyperbolæ & ellipsis diametrum bifariam dividit, centrum sectionis dicatur.

ΟΡΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΙ.

α΄. ΤΗΣ ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως ἑκατέρας ἡ διχοτομία τῆς διαμέτρου, κέντρον τῆς τομῆς καλείσθω.

*

β΄. Η δὲ

β'. Ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν τομὴν προσπίπτουσα, ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς.

γ'. Ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἀντικειμένων ἡ διχοτομία τῆς πλαγίας πλευρᾶς, κέντρον καλείσθω.

δ'. Ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἠγμένη παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, μέσον τε λόγον ἔχουσα τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν, καὶ δίχα τεμνομένη ὑπὸ τοῦ κέντρου, δευτέρα διάμετρος καλείσθω.

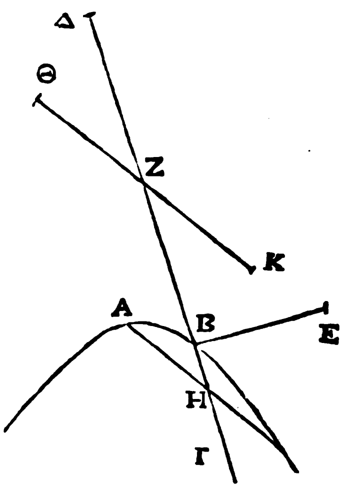
2. Et quæ à centro ad ſectionem perducitur, vocetur ex centro ſectionis.

3. Similiter & quod tranſverſum latus oppoſitarum ſectionum bifariam dividit, centrum vocetur.

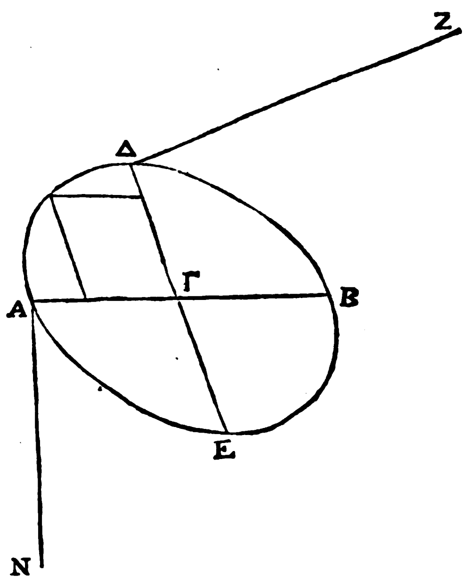
4. Quæ autem à centro ducitur parallela ordinatim applicatæ, mediamque proportionem habet inter latera figuræ, & bifariam ſecatur à centro, ſecunda diameter appelletur.

EUTOCIUS.

Μετὰ τὸ ἑκκαιδέκατον θεώρημα, ὅρους ἐκτίθεται περὶ τῆς καλουμένης δευτέρας διαμέτρου τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, οὓς διὰ καταγραφῆς σαφεῖς ποιήσομεν. ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἔστω ἡ ΓΗΒΔ, παρ' ἣν δὲ δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΒΓ καταγόμεναι, ἡ ΒΕ· φανερὸν οὖν ὅτι ἡ μὲν ΒΓ εἰς ἄπειρον αὔξεται, διὰ τὴν τομήν, ὡς δέδεικται ἐν τῷ ὀγδόῳ θεωρήματι. ἡ δὲ ΒΔ, ἥτις ἐστὶν ἡ ὑποτείνουσα τὴν ἐκτὸς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου γωνίαν, πεπέρασται· ταύτην δὴ διχοτομοῦντες κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀγαγόντες ἀπὸ τοῦ Α τεταγμένως κατηγμένην τὴν ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΗ παράλληλον τὴν ΘΖΚ, καὶ ποιήσαντες τὴν ΘΖ τῇ ΖΚ ἴσην, καὶ τὸ ἀπὸ ΘΚ ἴσον τῷ ὑπὸ ΔΒΕ, ἕξομεν τὴν ΘΚ δευτέραν διάμετρον. τοῦτο γὰρ δυνατόν, διὰ τὸ τὴν ΘΚ ἐκτὸς οὖσαν τῆς τομῆς εἰς ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι, καὶ δυνατὸν εἶναι ἀπὸ τῆς ἀπείρου προστεθείσῃ εὐθείᾳ ἀφελεῖν ἴσην. τὸ δὲ Ζ κέντρον καλεῖ, τὴν δὲ ΖΒ καὶ τὰς ὁμοίας αὐτῇ, ἀπὸ τῆς Ζ πρὸς τὴν τομὴν φερομένας, ἐκ τοῦ κέντρου. ταῦτα μὲν ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων. καὶ φανερὸν ὅτι πεπερασμένη ἐστὶν ἑκατέρα τῶν διαμέτρων, ἡ μὲν προτέρα αὐτόθεν ἐκ τῆς γενέσεως τῆς τομῆς, ἡ δὲ δευτέρα διότι μέση ἀνάλογόν ἐστι πεπερασμένων εὐθειῶν, τῆς τε προτέρας διαμέτρου καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως.



Ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως οὔπω δῆλον τὸ λεγόμενον. ἐπειδὴ γὰρ εἰς ἑαυτὴν συννεύει καθάπερ ὁ κύκλος, καὶ ἐντὸς ἀπολαμβάνει πάσας τὰς διαμέτρους, καὶ ὡρισμένας αὐτὰς ἀπεργάζεται· ὥστε οὐ πάντως ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἡ μέση ἀνάλογον τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἀγομένη καὶ ὑπὸ τῆς διαμέτρου διχοτομουμένη ὑπὸ τῆς τομῆς περατοῦται. δυνατὸν δὲ αὐτὴν συλλογίσασθαι δι' αὐτῶν τῶν εἰρημένων ἐν τῷ δεκάτῳ πέμπτῳ θεωρήματι. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἐκεῖ δέδεικται, αἱ ἐπὶ τὴν ΔΕ καταγόμεναι, παράλληλοι τῇ ΑΒ, δύνανται τὰ παρακείμενα παρὰ τὴν τρίτην αὐταῖς ἀνάλογον γινομένην, τουτέστι τὴν ΖΔ· ἔστιν ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΑΒ πρὸς ΔΖ· ὥστε μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΑΒ τῶν ΕΔ, ΔΖ· καὶ διὰ τοῦτο καὶ αἱ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΑΒ, παράλληλοι τῇ ΔΕ, δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον παρακείμενα τῶν ΔΕ, ΑΒ, τουτέστι τὴν ΑΝ. διὰ δὴ τοῦτο μέση ἀνάλογον γίνεται ἡ ΔΕ δευτέρα διάμετρος τῶν ΒΑ, ΑΝ,



Poſt ſextum decimum theorema, definitiones tradit ejus quæ ſecunda diameter appellatur hyperbolæ & ellipſis; quibus quidem nos ex figuris lucem afferre conabimur. ſit hyperbola AB, cujus diameter ΓΗΒΔ, recta vero, juxta quam poſſunt quæ ad ipſam ΒΓ applicantur, ſit ΒΕ: patet igitur ΒΓ in infinitum augeri propter ſectionem, ut oſtenſum eſt in octavo theoremate. ſed ipſa ΒΔ, quæ ſubtenditur angulo extra triangulum per axem, terminata eſt: itaque ſi bifariam ſecta ΒΔ in Z, & à puncto A ordinatim applicatâ AH, per Z rectæ AH parallelam duxerimus ΘZK, ita ut ſit ΘZ ipſi ZK æqualis, & quadratum ex ΘK æquale rectangulo ΔΒΕ; erit ΘK ſecunda diameter. hoc enim fieri poſſe perſpicuum eſt: quippe cum ΘK extra ſectionem cadens in infinitum produci poſſit, atque à recta infinita cuilibet datæ rectæ æqualis facile abſcindatur. punctum autem Z vocat centrum, & rectam ZB & alias quæ ſimiliter à puncto Z ad ſectionem ducuntur, ex centro appellat; atque hæc in hyperbola & oppoſitis ſectionibus. conſtat ergo utramque diametrum terminatam eſſe; primam quidem per ſe ex generatione ſectionis; ſecundam vero, quod media proportionalis ſit inter rectas terminatas, videlicet inter primam diametrum, & eam juxta quam poſſunt quæ ad diametrum ordinatim applicantur.

Sed in ellipſi id quod dictum eſt nondum apparet. quoniam enim illa in ſeipſam vergat inſtar circuli, & omnes diametros intra recipiat atque terminet: non ſemper in ellipſi, media proportionalis inter figuræ latera, ducta per centrum ſectionis, & à diametro bifariam diviſa, ab ipſa ſectione terminatur. hoc autem ex iis quæ dicta ſunt in quinto decimo theoremate oſtendere poſſumus. quoniam enim, ut demonſtratum eſt, quæ ad rectam ΔE applicantur, parallelæ ipſi AB, poſſunt ſpatia tertiæ proportionali ipſis, videlicet rectæ ZΔ adjacentia: erit ut ΔE ad AB ita AB ad ΔZ: quare AB media proportionalis eſt inter EΔ, ΔZ: & idcirco, quæ applicantur ad AB, ipſi ΔE parallelæ, poterunt ſpatia adjacentia tertiæ proportionali ipſis ΔE, AB, hoc eſt rectæ AN. ergo ſecunda diameter ΔE eſt media proportionalis inter figuræ

guræ latera B A, A N. oportet autem hoc scire etiam ob commodam figurarum descriptionem. nam cum inæquales sint A B, Δ E diametri (in solo enim circulo sunt æquales) constat rectam, quæ minori earum ad rectos angulos ducitur, ut hoc in loco Δ Z, eo quod sit tertia proportionalis ipsis Δ E, A B, utravis majorem esse: eam vero, quæ ad angulos rectos ducitur majori ut A N, eo quod sit tertia proportionalis ipsis A B, Δ E, utravis esse minorem; ita ut quatuor continue proportionales sint, ut enim A N ad Δ E sic est Δ E ad A B & A B ad Δ Z.

τῶν εἰδικῶν πλευρῶν. δεῖ δὲ εἰδέναι καὶ τοῦτο, διὰ τὸ εὔχρηστον τῶν καταγραφῶν. ἐπεὶ γὰρ ἄνισοί εἰσιν αἱ A B, Δ E διάμετροι, ἐν μόνῳ γὰρ κύκλῳ εἰσὶν ἴσαι, δῆλον ὅτι ἡ μὲν πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη τῇ ἐλάσσονι αὐτῶν, ὡς ἐνταῦθα ἡ Δ Z, ἅτε τρίτη ἀνάλογον οὖσα τῶν Δ E, A B, μείζων ἐστὶν ἀμφοῖν· ἡ δὲ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη τῇ μείζονι, ὡς ἐνταῦθα ἡ A N, διὰ τὸ τρίτην ἀνάλογον εἶναι τῶν A B, Δ E, ἐλάσσων ἐστὶν ἀμφοῖν· ὥστε καὶ συνεχῶς εἶναι τὰς τέσσαρας ἀνάλογον, ὡς γὰρ ἡ A N πρὸς Δ E ἡ Δ E πρὸς A B καὶ ἡ A B πρὸς Δ Z.

PROP. XVII. *Theor.*

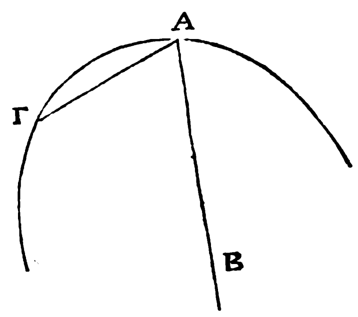
Si in coni sectione à vertice ipsius ducatur recta linea parallela ordinatim applicatæ: extra sectionem cadet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Εὰν ἐν κώνου τομῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην· ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

SIT coni sectio, cujus diameter A B: dico rectam, quæ à vertice, hoc est à puncto A, ducitur parallela ei quæ ordinatim applicatur, extra sectionem cadere.

Si enim fieri potest, cadat intra, ut A Γ. quoniam igitur in coni sectione sumptum est quoddam punctum Γ; recta, quæ ab ipso Γ intra sectionem ducitur, ordinatim applicatæ parallela, [per 7. huj.] diametro A B occurrit, atque ab ipsa bifariam secatur: quare A Γ producta bifariam secabitur à recta A B; quod est absurdum: A Γ enim producta [per 10. huj.] extra sectionem cadit. non igitur recta, quæ à puncto A ducitur ordinatim applicatæ parallela, cadet intra sectionem: ergo extra cadet; & propterea sectionem ipsam necessario continget.



ΕΣΤΩ κώνου τομή, ἧς διάμετρος ἡ A B· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς, τουτέστι τοῦ A σημείου, παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

Εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ A Γ. ἐπεὶ οὖν ἐν κώνου τομῇ εἴληπται τυχὸν σημεῖον τὸ Γ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγομένη παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμβαλεῖ τῇ A B διαμέτρῳ, καὶ δίχα τμηθήσεται ὑπ' αὐτῆς· ἡ A Γ ἄρα ἐκβαλλομένη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς A B, ὅπερ ἄτοπον· ἐκβαλλομένη γὰρ ἡ A Γ ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ A σημείου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς γραμμῆς· ἐκτὸς ἄρα πεσεῖται, διόπερ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

EUTOCIUS.

Euclides in quinto decimo theoremate tertii libri elementorum ostendit rectam, quæ ab extremitate diametri ad rectos angulos ducitur, cadere extra atque circulum ipsum contingere: *Apollonius* autem hoc loco universale quoddam demonstrat, quod tum tribus coni sectionibus, tum circulo convenit. hoc enim differt circulus à coni sectionibus, quod in circulo ordinatim applicatæ perpendiculares sunt ad diametrum; neque enim aliæ rectæ parallelæ à diametro circuli bifariam dividuntur: at in tribus sectionibus, perpendiculares non semper ducuntur, præterquam ad solos axes.

Ο μὲν Εὐκλείδης ἐν τῷ δεκάτῳ πέμπτῳ θεωρήματι τοῦ τρίτου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως ἔδειξεν, ὅτι ἡ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἀπ' ἄκρας τῆς διαμέτρου ἐκτός τε πίπτει καὶ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ἐν τούτῳ καθολικόν τι δεικνὺς δυνάμενον ἐφαρμόσαι ταῖς τρισὶ τοῦ κώνου τομαῖς καὶ τῷ κύκλῳ. τούτῳ γὰρ διαφέρει ὁ κύκλος τῶν τοῦ κώνου τομῶν, ὅτι ἐπ' ἐκείνου μὲν αἱ τεταγμέναι πρὸς ὀρθὰς ἄγονται τῇ διαμέτρῳ, οὐδὲ γὰρ ἄλλαι εὐθεῖαι παράλληλοι ἑαυταῖς ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου διχοτομοῦνται· ἐπὶ δὲ τῶν τριῶν τομῶν οὐ πάντως πρὸς ὀρθὰς ἄγονται, εἰ μὴ ἐπὶ μόνους τοὺς ἄξονας.

PROP. XVIII. *Theor.*

Si recta linea coni sectioni occurrat, productaque in utramque partem extra sectionem cadat; sumatur autem aliquod punctum intra sectionem, & per ipsum ei quæ sectioni occurrit parallela ducatur: ducta recta & producta ex utraque parte sectioni occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Εὰν κώνου τομῇ εὐθεῖα συμπίπτουσα, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐντὸς τῆς τομῆς, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ συμπιπτούσῃ· ἡ ἀχθεῖσα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

SIT coni sectio, atque ipsi occurrens recta A B Z, quæ producta in utramque partem extra sectionem cadat; sumpto autem intra se-

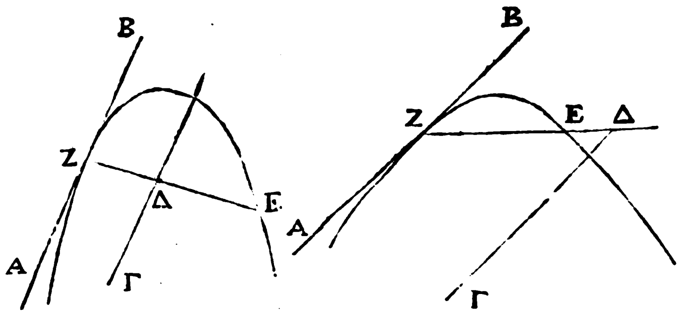
ΕΣΤΩ κώνου τομή, καὶ συμπιπτέτω αὐτῇ ἡ A B Z εὐθεῖα, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τῆς τομῆς

τομῆς τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ Α Ζ Β παράλληλος ἤχθω ἡ Γ Δ· λέγω ὅτι ἡ Γ Δ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ε Ζ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ Α Β τῇ Γ Δ, καὶ τῇ Α Β συμπίπτει τις εὐθεῖα ἡ Ε Ζ, καὶ ἡ Γ Δ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ Ε Ζ. καὶ εἰ μὲν μεταξὺ τῶν Ε, Ζ, φανερὸν ὅτι καὶ τῇ τομῇ συμπίπτει· ἐὰν δὲ ἐκτὸς τοῦ Ε σημείου, πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται. ἡ ἄρα Γ Δ ἐκβαλλομένη, ὡς ἐπὶ τὰ Δ μέρη, συμπίπτει τῇ τομῇ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἐπὶ Γ ἐκβαλλομένη συμπίπτει· ἡ Γ Δ ἄρα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ctionem puncto aliquo Γ; per Γ ipsi Α Ζ Β parallela ducatur Γ Δ: dico Γ Δ productam ex utraque parte sectioni occurrere.

Sumatur enim aliquod punctum in ipsa sectione, quod sit Ε, & jungatur Ε Ζ. & quoniam recta Α Β rectæ Γ Δ est parallela, ipsique Α Β occurrit recta Β Ζ, Γ Δ quoq; producta ipsi Ε Ζ occurret. & siquidem cadat [ut in fig. 1.] inter Ε, Ζ puncta, perspicuum est ipsam sectioni occurrere; si vero [ut in fig. 2.] extra Ε, sectioni prius occurret: ergo Γ Δ producta, ut ad partes Δ, occurrit sectioni. similiter demonstrabitur, & ut ad partes Γ eidem occurrere: recta igitur Γ Δ producta ex utraque parte sectioni occurret.



EUTOCIUS.

Ἐν τισιν ἀντιγράφοις τὸ θεώρημα τοῦτο ἐπὶ μόνης παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς ἐστι. κάλλιον δὲ καθολικώτερον ἔχειν τὴν πρότασιν, εἰ καὶ ὅτι ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐν ἐκείνοις ὡς οὐκ ἀμφίβολον παραλέλειπται· ἡ γὰρ Γ Δ, ἐντὸς οὖσα τῆς τομῆς πεπερασμένης οὔσης, καὶ αὐτὴ ἐκβαλλομένη κατ' ἀμφότερα τέμνει τὴν τομήν. δεῖ δὲ ἐπιστῆσαι, ὅτι, κἂν ἡ Α Ζ Β τέμνῃ τὴν τομήν, ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἁρμόζει.

In aliquibus exemplaribus hoc theorema in parabola & hyperbola tantummodo propositum ostendit. sed tamen præstat propositionem universaliorem esse; quamquam de ellipsi, ut minime dubium, in illis prætermissum videri potest; nam recta Γ Δ, intra sectionem terminatam existens, si producatur ex utraque parte, necessario ipsam secabit. sciendum autem est eandem congruere demonstrationem, etiam si Α Ζ Β secet ipsam sectionem.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθʹ.

Ἐν πάσῃ κώνου τομῇ, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς διαμέτρου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθῇ, συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Ἔστω κώνου τομή, ἧς διάμετρος ἡ Α Β, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς διαμέτρου τὸ Β, καὶ διὰ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ Β Γ· λέγω ὅτι ἡ Β Γ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

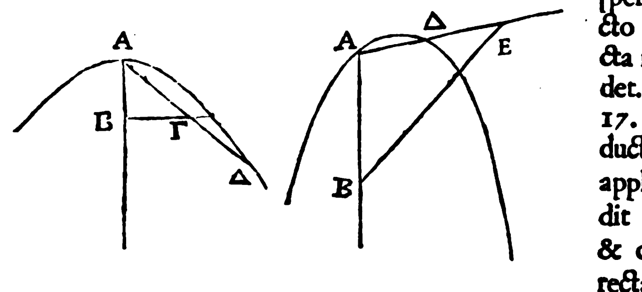
Εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Δ, ἔστι δὲ καὶ τὸ Α ἐπὶ τῆς τομῆς· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, καὶ συμπίπτει αὐτῇ ἡ Α Δ, καὶ ἔστι τῇ κατηγμένῃ παράλληλος ἡ Β Γ· καὶ ἡ Β Γ ἄρα συμπεσεῖται τῇ Α Δ. καὶ εἰ μὲν μεταξὺ τῶν Α, Δ σημείων, φανερὸν ὅτι καὶ τῇ τομῇ συμπεσεῖται. εἰ δὲ ἐκτὸς τοῦ Δ, ὡς κατὰ τὸ Ε, πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Prop. XIX. *Theor.*

In omni sectione coni, recta linea, quæ à diametro ducitur ordinatim applicatæ parallela, cum sectione conveniet.

Sit coni sectio, cujus diameter Α Β, sumaturque aliquod punctum Β in diametro; & per Β ducatur Β Γ parallela ordinatim applicatæ: dico Β Γ productam cum sectione convenire.

Sumatur enim quodlibet punctum Δ in sectione; est autem & punctum Α in sectione: ergo [per 10. huj.] à puncto Α ad Δ ducta recta intra sectionem cadet. & quoniam [per 17. huj.] quæ ab Α ducta est ordinatim applicatæ parallela, cadit extra sectionem, & cum ipsa convenit recta Α Δ, itemque Β Γ parallela est ordinatim applicatæ: sequitur quod Β Γ etiam cum Α Δ conveniet. & si quidem convenit inter puncta Α, Δ; perspicuum est eam cum sectione quoque convenire. si vero extra Δ, ut ad punctum Ε, prius conveniet cum sectione. ergo recta linea, quæ à puncto Β ducitur ordinatim applicatæ parallela, cum sectione conveniet.

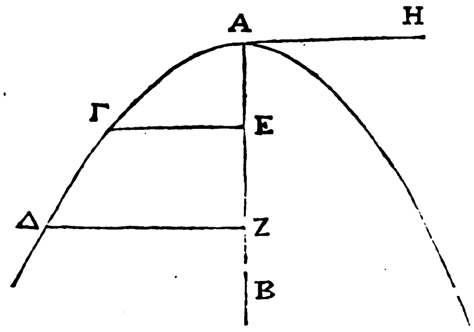


Prop. XX. *Theor.*

Si in parabola duæ rectæ à sectione ad diametrum ordinatim applicentur: ut eorum quadrata inter sese, ita erunt & rectæ, quæ ab ipsis ex diametro ad verticem abscinduntur.

SIT parabola, cujus diameter A B; & in ipsa sumantur puncta quæpiam Γ, Δ, à quibus ad A B ordinatim applicentur Γ E, Δ Z: dico Z A ad ipsam A E ita esse ut quadratum rectæ Δ Z ad quadratum rectæ Γ E.

Sit enim A H, juxta quam possunt ordinatim applicatæ; erit [per 11. huj.] quadratum ex Δ Z rectangulo Z A H æquale. at quadratum ex Γ E æquale rectangulo E A H: quare ut quadratum ex Δ Z ad quadratum ex Γ E ita rectangulum Z A H ad rectangulum E A H. ut autem rectangulum Z A H ad rectangulum E A H, ita [per 1.6.] linea Z A ad lineam A E: ergo ut quadratum ex Δ Z ad quadratum ex Γ E, ita erit Z A ad A E.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν ἐν παραβολῇ ἀπὸ τῆς τομῆς καταχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως· ἔσται ὡς τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ' αὐτῶν ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ παραβολὴ, ἧς διάμετρος ἡ A B, καὶ εἰλήφθω τινὰ σημεῖα ἐπ' αὐτῆς τὰ Γ, Δ, καὶ ἀπ' αὐτῶν Γ, Δ τεταγμένως κατήχθωσαν ἐπὶ τὴν A B αἱ Γ E, Δ Z· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ Δ Z πρὸς τὸ ἀπὸ Γ E, οὕτως ἡ Z A πρὸς A E.

Ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται αἱ τεταγμένως καταγόμεναι ἡ A H· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς Δ Z τῷ ἀπὸ Z A H. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς Γ E ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς E A H· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ Δ Z πρὸς τὸ ἀπὸ Γ E, οὕτως τὸ ὑπὸ Z A H πρὸς τὸ ὑπὸ E A H. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ Z A H πρὸς τὸ ὑπὸ E A H, οὕτως ἡ Z A πρὸς A E· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Δ Z πρὸς τὸ ἀπὸ Γ E, οὕτως ἡ Z A πρὸς A E.

EUTOCIUS.

Ab hoc theoremate incipiens *Apollonius* deinceps in omnibus accidentia, quæ ipsi parabolæ insunt & non alii cuipiam, ostendit: sicut plerumque eadem hyperbolæ, ellipsi, & circulo convenire demonstrat. Quoniam autem non inutile visum est iis qui mechanica tradunt, ob instrumentorum penuriam, sæpenumero per continuata puncta coni sectiones in plano describere: ex hoc theoremate suppeditatur modus sumendi ea puncta continuata, per quæ parabola regulæ adminiculo designabitur. si enim exponamus rectam ut A B, & in ea sumamus puncta continuata E, Z, à quibus ad rectos angulos ipsi A B rectas E Γ, Z Δ ducamus *, sumpto in E Γ quolibet puncto Γ, longius quidem ab E si latiorem parabolam facere libuerit, si vero angustiorem propius; & fiat ut A E ad A Z ita quadratum ex E Γ ad quadratum ex Z Δ: puncta Γ, Δ in sectione erunt. Pari modo sumentur & alia puncta per quæ parabola describetur.

Ἀπὸ τούτου τοῦ θεωρήματος ἀρχόμενος ἐφεξῆς ἐν πᾶσι τὰ συμπτώματα τῆς παραβολῆς αὐτῇ δείκνυσιν ὑπάρχοντα καὶ οὐκ ἄλλῃ τινί· ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ τῇ ὑπερβολῇ, καὶ τῇ ἐλλείψει, καὶ τῷ κύκλῳ τὰ αὐτὰ δείκνυσιν ὑπάρχοντα. Ἐπεὶ δὲ οὐκ ἄχρηστον φαίνεται τοῖς τὰ μηχανικὰ γράφουσι, διὰ τὴν ἀπορίαν τῶν ὀργάνων, καὶ πολλάκις διὰ συνεχῶν σημείων γράφειν τὰς τοῦ κώνου τομὰς ἐν ἐπιπέδῳ, διὰ τούτου τοῦ θεωρήματός ἐστι πορίσασθαι συνεχῆ σημεῖα, δι' ὧν γραφήσεται ἡ παραβολὴ κανόνος παραθέσει. ἐὰν γὰρ ἐκθῶ μὲν εὐθεῖαν, ὡς τὴν A B, καὶ ἐπ' αὐτῆς λάβω συνεχῆ σημεῖα, ὡς τὰ E, Z, καὶ ἐπ' αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ A B, καὶ ποιήσω ὡς τὰς E Γ, Z Δ, λαβὼν ἐπὶ τῆς E Γ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, εἰ μὲν εὐρυτέραν βουληθείην ποιῆσαι παραβολὴν, πόῤῥω τοῦ E, εἰ δὲ στενωτέραν, ἐγγύτερον, καὶ ποιήσω ὡς τὴν A E πρὸς A Z οὕτως τὸ ἀπὸ E Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Z Δ· τὰ Γ, Δ σημεῖα ἐπὶ τῆς τομῆς ἔσται. ὁμοίως δὲ καὶ ἄλλα ληψόμεθα δι' ὧν γραφήσεται ἡ παραβολή.

Prop. XXI. *Theor.*

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia rectæ lineæ ordinatim ad diametrum applicentur: erunt quadrata earum ad spatia contenta sub rectis, quæ inter ipsas & vertices transversi lateris figuræ interjiciuntur, ut figuræ rectum latus ad transversum inter sese vero, ut spatia quæ interjectis, ut diximus, rectis continentur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ, ἢ ἐλλείψει, ἢ κύκλου περιφερείᾳ εὐθεῖαι ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον· ἔσται τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς μὲν τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ εἴδους, ὡς τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν· πρὸς ἄλληλα δὲ, ὡς τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν, ὡς εἴρηται, ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν.

* Non opus est ut rectæ E Γ, Z Δ, &c. sint ad rectos angulos ipsi A B, sufficit ut sint inter se parallelæ.

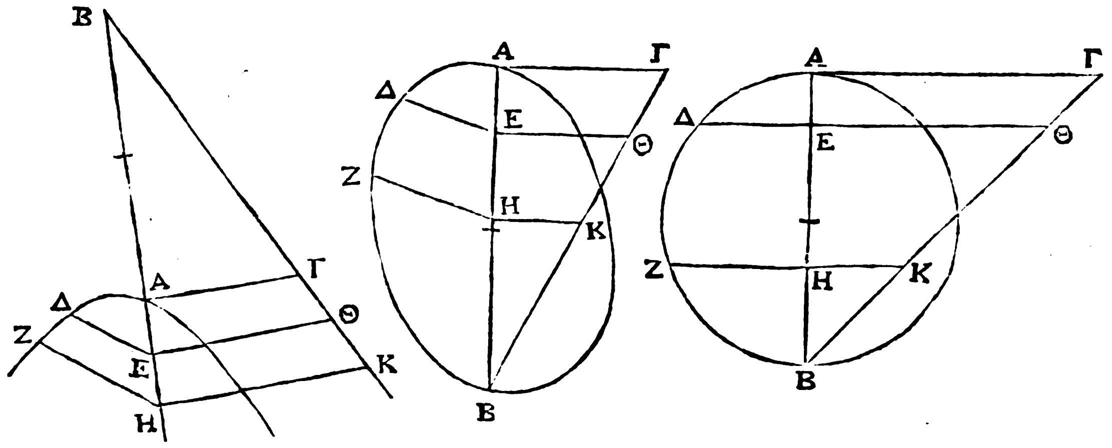
Ἔστω

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, παρ' ἣν δὲ δύνανται αἱ καταγόμεναι ἡ ΑΓ, καὶ κατήχθωσαν ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως αἱ ΔΕ, ΖΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΑΒ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΓ διορίζουσα τὸ εἶδος, καὶ διὰ τῶν Ε, Η τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΗΚ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ὑπὸ ΚΗΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΕ τῷ ὑπὸ ΘΕΑ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΚΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, ὡς δὲ ἡ ΚΗ πρὸς ΗΒ, τῆς ΑΗ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΗΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΑ· ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΗΑ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ, οὕτως ΓΑ πρὸς ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ.

SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cujus diameter AB, recta autem juxta quam possunt applicatæ AΓ, & ad diametrum applicentur ordinatim ΔE, ZH: dico ut quadratum ex ZH ad rectangulum AHB, ita esse AΓ ad AB; ut vero quadratum ex ZH ad quadratum ex ΔE, ita rectangulum AHB ad rectangulum AEB.

Jungatur enim BΓ figuram determinans, & per E, H puncta ipsi AΓ parallelæ ducantur EΘ, HK: quadratum igitur ex ZH æquale est [per 12, aut 13. huj.] rectangulo KHA, & quadratum ex ΔE rectangulo ΘEA. quoniam autem ut KH ad HB, ita est [per 4.6.] ΓA ad AB; & ut KH ad HB sumptâ AH communi altitudine, ita [per 1.6.] rectangulum KHA ad rectangulum BHA: erit [per 11.5.] ut ΓA ad AB, ita rectangulum KHA (hoc est quadratum ex ZH) ad rectangulum BHA. eadem ratione demonstrabitur etiam ut quadratum ex ΔE ad rectangulum BEA, ita ΓA ad AB: ergo [per 11.5.] ut quadratum ex ZH ad rectangulum BHA, ita quadratum ex ΔE ad BEA rectangulum; & permutando, ut quadratum ex ZH ad quadratum ex ΔE, ita rectangulum BHA ad rectangulum BEA.



EUTOCIUS.

Τὸ θεώρημα σαφῶς ἔκκειται, καὶ πτῶσιν οὐκ ἔχει. δεῖ μέντοι ἐπιστῆσαι, ὅτι ἡ παρ' ἣν δύνανται, τουτέστιν ὀρθία πλευρὰ, ἐπὶ τοῦ κύκλου ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ. εἰ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ ἐπὶ τοῦ κύκλου· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ. δεῖ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι, ὅτι αἱ καταγόμεναι ἐν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ πρὸς ὀρθάς εἰσι πάντως τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἐπ' εὐθείας γίνονται ταῖς παραλλήλοις τῇ ΑΓ.

Διὰ δὲ τούτου τοῦ θεωρήματος, τῷ αὐτῷ τρόπῳ τοῖς ἐπὶ τῆς παραβολῆς εἰρημένοις προσέχοντες, γράφομεν ὑπερβολὴν καὶ ἔλλειψιν κανόνος παραθέσει. ἐκκείσθω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ προσεκβεβλήσθω ἐπ' ἄπειρον ἐπὶ τὸ Η, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ταύτῃ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τινὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς ΑΗ τὰ Ε, Η, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Η τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΗΚ, καὶ γινέσθω τὸ μὲν ὑπὸ ΑΗΚ ἴσον τῷ ἀπὸ ΖΗ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΕΘ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΕ· διὰ γὰρ τῶν Α, Δ, Ζ ἥξει ἡ ὑπερβολή. ὁμοίως δὲ κατασκευάσομεν καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως.

Theorema manifeste exponitur, & casum non habet. oportet autem scire lineam juxta quam possunt, videlicet rectum figuræ latus, in circulo quidem diametro æquale esse. quoniam enim ut quadratum ex ΔE ad rectangulum AEB ita est ΓA ad AB; quadratum autem ex ΔE rectangulo AEB in circulo est æquale; sequitur quod & ΓA æqualis sit ipsi AB. Sed illud quoque sciendum est, lineas, quæ in circuli circumferentia ordinatim applicantur, ad diametrum perpendiculares esse, atque in iisdem rectis lineis in quibus sunt parallelæ ipsi AΓ.

Per hoc autem theorema, eo modo quo dictum est in parabola, hyperbolam & ellipsim regulæ adminiculo describemus. exponatur enim recta linea AB, & in infinitum producatur ad H; à puncto autem A ad rectos angulos ipsi AB ducatur AΓ: junctaque BΓ & producta, sumantur in linea AH puncta quædam E, H, & à punctis E, H ipsi AΓ parallelæ ducantur EΘ, HK, & fiat AHK rectangulum æquale quadrato ex ZH, & rectangulum AEΘ æquale ipsi quadrato ex ΔE; & transibit hyperbola per puncta A, Δ, Z. similiter eadem & in ellipsi construemus.

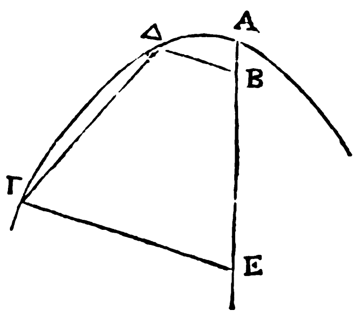
PROP.

Prop. XXII. *Theor.*

Si parabolam vel hyperbolam recta linea in duobus punctis secet, non conveniens cum diametro sectionis intra sectionem: producta cum eadem diametro extra sectionem conveniet.

SIT parabola, vel hyperbola, cujus diameter AB; & secet quæpiam recta linea sectionem in duobus punctis Γ, Δ: dico rectam ΓΔ productam convenire cum ipsa AB extra sectionem.

Applicentur enim à punctis Γ, Δ ordinatim rectæ ΓE, ΔB, & sit primum sectio parabola. quoniam igitur in parabola, ut quadratum ex ΓE ad quadratum ex ΔB, ita est [per 20. huj.] EA ad AB; major autem EA quam AB: erit quadratum ex ΓE quadrato ex ΔB majus; quare & linea ΓE major ipsa ΔB. & sunt inter sese parallelæ: ergo recta ΓΔ producta cum diametro AB extra sectionem conveniet. sed sit sectio hyperbola. itaq; quoniam [per 21. huj.] in hyberbola ut quadratum ex ΓE ad quadratum ex ΔB, ita est rectangulum ZEA ad rectangulum ZBA; quadratum ex ΓE majus erit quadrato ex ΔB. & sunt parallelæ: igitur ΓΔ producta cum diametro sectionis extra sectionem conveniet.

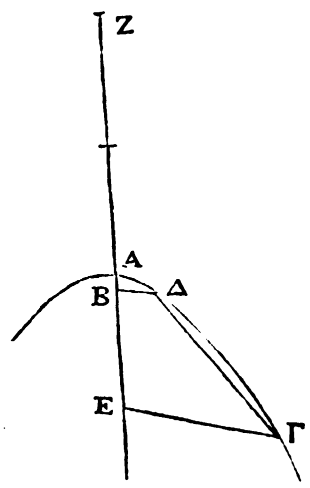


ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν παραβολὴν ἢ ὑπερβολὴν εὐθεῖα τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, μὴ συμπίπτουσα τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς ἐντὸς τῆς τομῆς· συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς ἐκτὸς τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τεμνέτω τις εὐθεῖα τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ, μὴ συμπίπτουσα τῇ διαμέτρῳ ἐντός· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἐκτὸς τῆς τομῆς τῇ ΑΒ.

Κατήχθωσαν ἀπὸ τῶν Γ, Δ τεταγμένως αἱ ΓΕ, ΔΒ, ἔστω δὲ πρῶτον ἡ τομὴ παραβολή. ἐπεὶ οὖν ἐν τῇ παραβολῇ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ, μείζων δὲ ἡ ΕΑ τῆς ΑΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ, ὥστε καὶ ἡ ΓΕ τῆς ΔΒ μείζων ἐστίν. καί εἰσι παράλληλοι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΒ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὑπερβολή. ἐπεὶ οὖν ἐν τῇ ὑπερβολῇ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΒΑ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ. καί εἰσι παράλληλοι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς ἐκτὸς τῆς τομῆς.

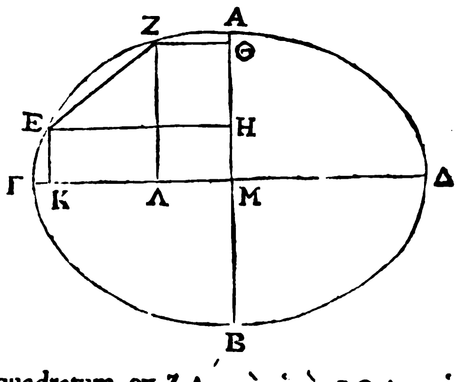


Prop. XXIII. *Theor.*

Si ellipsim recta linea secet inter duas diametros sita: producta cum utraque earum extra sectionem conveniet.

SIT ellipsis, cujus diametri AB, ΓΔ; & secet quædam recta sectionem, videlicet ipsa EZ, inter duas diametros AB, ΓΔ interjecta: dico EZ productam convenire cum utraque earum extra sectionem.

Applicentur enim à punctis E, Z ordinatim ad diametrum quidem AB rectæ HE, ZΘ; ad ΔΓ vero EK, ZΛ: est igitur [per 21. huj.] ut quadratum ex EH ad quadratum ex ZΘ, ita rectangulum BHA ad rectangulum BΘA. ut autem quadratum ex ZΛ ad quadratum ex EK, ita rectangulum ΔΛΓ ad



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν ἔλλειψιν εὐθεῖα τέμνῃ μεταξὺ κειμένη τῶν διαμέτρων· ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν διαμέτρων ἐκτὸς τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ ἔλλειψις, ἧς διάμετροι ΑΒ, ΓΔ, καὶ τεμνέτω τις εὐθεῖα τὴν τομὴν ἡ ΕΖ μεταξὺ κειμένη τῶν ΑΒ, ΓΔ διαμέτρων· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Κατήχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ τεταγμένως ἐπὶ μὲν ΑΒ αἱ ΗΕ, ΖΘ, ἐπὶ δὲ τὴν ΔΓ αἱ ΕΚ, ΖΛ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΑ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΛΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚΓ,

ΔΚΓ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ ΒΗΑ μεῖζον τοῦ ὑπὸ ΒΘΑ, ἔγγιον γὰρ τὸ Η τῶ τῆς διχοτομίας, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΛΓ τοῦ ὑπὸ ΔΚΓ μεῖζον· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΕ τοῦ ἀπὸ ΖΘ. τὸ δὲ ἀπὸ ΖΛ τοῦ ἀπὸ ΕΚ μεῖζόν ἐστι· μείζων ἄρα καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΖΘ, ἡ δὲ ΖΛ τῆς ΕΚ. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ μὲν ΗΕ τῇ ΖΘ, ἡ δὲ ΖΛ τῇ ΕΚ· ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ διαμέτρων ἐκτὸς τῆς τομῆς.

rectangulum ΔΚΓ; atque est [per 5. 2.] rectangulum ΒΗΑ majus rectangulo ΒΘΑ; etenim Η propius accedit ad punctum quo diameter ΑΒ bifariam secatur; & rectangulum ΔΛΓ majus est rectangulo ΔΚΓ: quadratum igitur ex ΗΕ majus est quadrato ex ΖΘ, & quadratum ex ΖΛ majus quadrato ex ΕΚ: idcirco linea ΗΕ major est quam ipsa ΖΘ, & ΖΛ major quam ΕΚ. parallela autem est ΗΕ ipsi ΖΘ, itemque ΖΛ ipsi ΕΚ: ergo ΕΖ producta cum utraque diametro ΑΒ, ΓΔ extra sectionem conveniet.

EUTOCIUS.

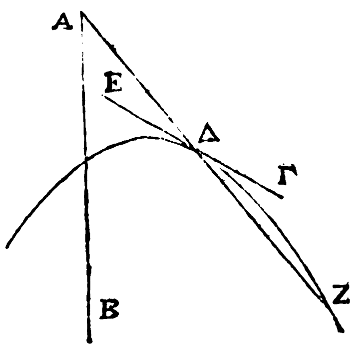
Δεῖ δὲ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἐν τῇ προτάσει δύο διαμέτρους λέγει, οὐχ ἁπλῶς τὰς τυχούσας, ἀλλὰ τὰς καλουμένας συζυγεῖς, ὧν ἑκατέρα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἦκται, καὶ μέσον λόγον ἔχει τῶν εἴδους πλευρῶν τῆς ἑτέρας διαμέτρου, καὶ διὰ τοῦτο δίχα τέμνουσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους, ὡς δέδεικται ἐν τῷ δεκάτῳ πέμπτῳ θεωρήματι. εἰ γὰρ μὴ οὕτως ληφθῇ, συμβήσεται τὴν μεταξὺ εὐθεῖαν τῶν δύο διαμέτρων τῇ ἑτέρᾳ αὐτῶν παράλληλον εἶναι, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ἐπειδὴ δὲ τὸ Η ἔγγιόν ἐστι τῷ Μ, τῷ τῆς διχοτομίας τῆς ΑΒ, ἤπερ τὸ Θ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ ΒΗΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΜ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΘΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΘΜ ἴσον τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἀπὸ ΘΜ τοῦ ἀπὸ ΗΜ μεῖζον· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΗΑ μεῖζον τοῦ ὑπὸ ΒΘΑ.

Attendendum est in propositione *Apollonium* duas diametros intelligere, non simpliciter quascunque, sed quæ conjugatæ diametri appellantur; quarum utraque ordinatim applicatæ parallela ducitur, mediamque proportionem habet inter latera figuræ alterius diametri; & idcirco rectas invicem parallelas bifariam dividunt, ut in decimo-quinto theoremate est demonstratum. nisi enim ita sit, continget, lineam inter duas diametros inter-mediam alteri ipsarum esse parallelam, quod fieri non potest. quoniam autem Η propius accedit ad Μ medium punctum rectæ ΑΒ quam ipsum Θ, rectangulum quidem ΒΗΑ una cum quadrato ex ΗΜ æquale est quadrato ex ΑΜ, rectangulum vero ΒΘΑ una cum quadrato ex ΘΜ eidem est æquale; & quadratum ex ΘΜ majus est quadrato ex ΗΜ: erit igitur rectangulum ΒΗΑ rectangulo ΒΘΑ majus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν παραβολῇ ἢ ὑπερβολῇ εὐθεῖα, καθ' ἓν σημεῖον συμπίπτουσα, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς· συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ.

ΕΣΤΩ παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ συμπιπτέτω αὐτῇ εὐθεῖα ἡ ΓΔΕ κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς· λέγω ὅτι συμπεσεῖται τῇ ΑΒ διαμέτρῳ.

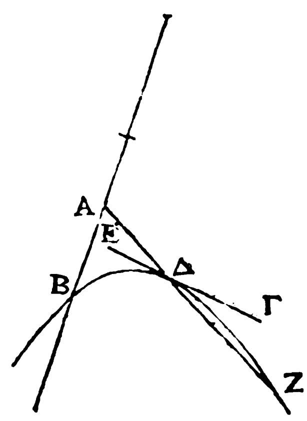


Εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ· ἡ ΔΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Α, καὶ ἔστι μεταξὺ τῆς τε τομῆς καὶ τῆς ΔΑ ἡ ΔΕ· ἡ ΓΔΕ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Prop. XXIV. *Theor.*

Si parabolæ vel hyperbolæ recta linea, in uno puncto occurrens, producta ex utraque parte extra sectionem cadat: cum diametro conveniet.

SIT parabola vel hyperbola, cujus diameter ΑΒ; occurratque ipsi recta ΓΔΕ in puncto Δ, quæ producta ex utraque parte extra sectionem cadat: dico ΓΔΕ cum diametro ΑΒ convenire.



Sumatur enim aliquod punctum Ζ in sectione; & jungatur ΔΖ: ergo [per 22. hujus] ΔΖ producta conveniet cum diametro extra sectionem. conveniat autem in Α puncto, & recta ΔΕ est inter sectionem & ΔΑ. recta igitur ΓΔΕ producta cum diametro extra sectionem conveniet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν ἐλλείψει εὐθεῖα συμπίπτουσα μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς

Prop. XXV. *Theor.*

Si ellipsi recta linea occurrens inter duas diametros *, producta ex utraque

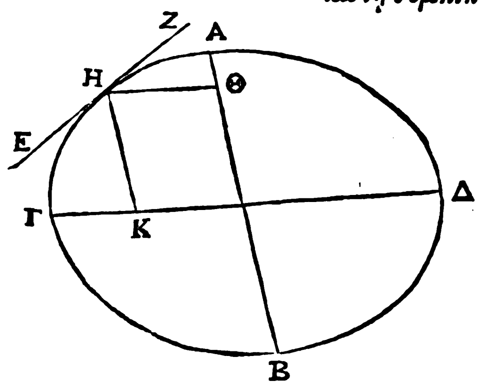
* Nempe conjugatos ut in XXIII.

parte cadat extra sectionem: cum utraque diametro conveniet.

πίπτῃ τῆς τομῆς· συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν διαμέτρων.

SIT ellipsis, cujus diametri A B, Γ Δ; & ipsi occurrat recta E Z inter duas diametros in puncto H; & producta in utramque partem extra sectionem cadat: dico E Z cum utraque diametro A B, Γ Δ convenire.

Applicentur enim à puncto H ordinatim ad diametros A B, Γ Δ rectæ H Θ, H K. itaque quoniam H K est parallela ipsi A B, convenit autem quædam E Z cum H K; cum ipsa quoque A B conveniet. eodem modo & E Z cum diametro Γ Δ convenire demonstrabitur.



ΕΣΤΩ ἔλλειψις, ἧς διάμετροι αἱ A B, Γ Δ, καὶ ταύτῃ συμπιπτέτω τις εὐθεῖα μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων ἡ E Z κατὰ τὸ H, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς· λέγω ὅτι ἡ E Z συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν A B, Γ Δ.

Κατήχθωσαν ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὰς A B, Γ Δ τεταγμένως αἱ H Θ, H K. ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ H K τῇ A B, συμπέπτωκε δέ τις τῇ H K ἡ E Z· καὶ τῇ A B ἄρα συμπεσεῖται. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ Γ Δ συμπεσεῖται E Z.

PROP. XXVI. *Theor.*

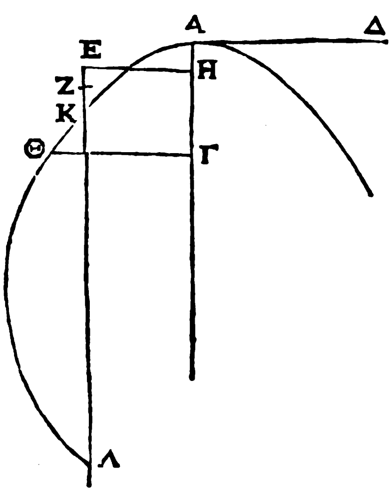
Si in parabola vel hyperbola recta linea ducatur diametro sectionis parallela: in uno tantum puncto cum sectione conveniet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛʹ.

Ἐὰν παραβολῇ ἢ ὑπερβολῇ εὐθεῖα ἀχθῇ παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς· συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

SIT primum parabola, cujus diameter A B Γ, rectum autem latus A Δ; & ipsi A B parallela ducatur E Z: dico E Z productam cum sectione convenire.

Sumatur enim in ipsa E Z aliquod punctum E, à quo ducatur E H ordinatim applicatæ parallela, & quadrato ex H E majus sit rectangulum Δ A Γ; à puncto autem Γ ordinatim applicetur Γ Θ: ergo [per 11. huj.] quadratum ex Θ Γ æquale est rectangulo Δ A Γ. atque est rectangulum Δ A Γ majus quadrato ex E H: quadratum igitur ex Θ Γ quadrato ex E H majus erit; & idcirco linea Θ Γ major linea E H. & sunt parallelæ inter se: ergo E Z producta secabit Θ Γ; propptereaque conveniet cum sectione. conveniat in K. dico in uno tantum puncto K convenire. si enim fieri potest, conveniat etiam in Λ. quoniam igitur parabolam recta linea secat in duobus punctis, si producatur [per 22. huj.] conveniet cum diametro sectionis; quod est absurdum. positum enim est ipsi esse parallelam. ergo E Z producta in uno tantum puncto cum sectione conveniet.

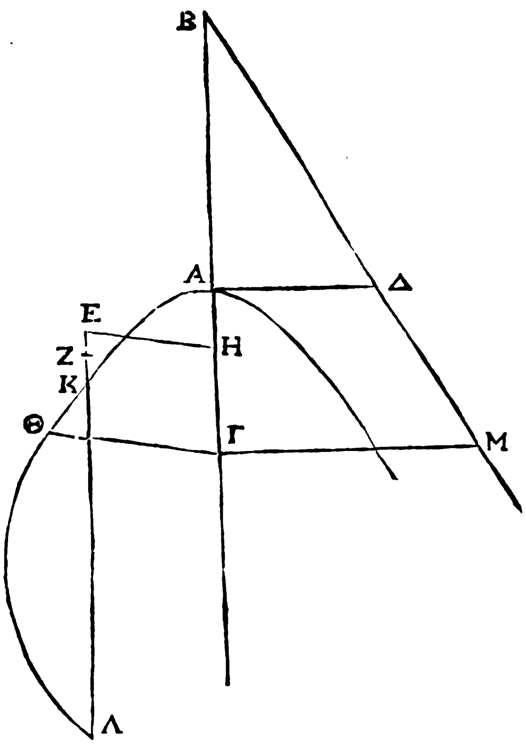


ΕΣΤΩ πρότερον παραβολή, ἧς διάμετρος A B Γ, ὀρθία δὲ ἡ A Δ, καὶ τῇ A B παράλληλος ἤχθω ἡ E Z· λέγω ὅτι ἡ E Z ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς E Z, τὸ E, καὶ ἀπὸ τοῦ E παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ E H, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς H E μεῖζον ἔστω τὸ ὑπὸ Δ A Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ Γ Θ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Θ Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ A Γ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ Δ A Γ τοῦ ἀπὸ E H· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ Θ Γ τοῦ ἀπὸ E H· μείζων ἄρα καὶ ἡ Θ Γ τῆς E H. καί εἰσι παράλληλοι· ἡ E Z ἄρα ἐκβαλλομένη τέμνει τὴν Θ Γ, ὥστε καὶ τῇ τομῇ συμπεσεῖται. συμπιπτέτω κατὰ τὸ K. λέγω δὴ ὅτι καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον τὸ K συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατὸν συμπιπτέτω καὶ κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν παραβολὴν εὐθεῖα τέμνει κατὰ δύο σημεῖα, ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς· ὅπερ ἄτοπον. ὑπόκειται γὰρ παράλληλος. ἡ E Z ἄρα ἐκβαλλομένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον συμπίπτει τῇ τομῇ.

Εϛω

Ἔστω δὴ ἡ τομὴ ὑπερβολή, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω· τῶν αὐτῶν δὴ κατασκευασθέντων, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΔ παράλληλος ἡ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΜΓΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΔΑΓ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ΜΓΑ ἴσον τὸ ἀπὸ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑΓ μεῖζον τοῦ ἀπὸ ΗΕ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ τοῦ ἀπὸ ΕΗ· ὥστε καὶ ἡ ΓΘ τῆς ΕΗ μείζων ἐστί, καὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον συμβήσεται.



Sit deinde ſectio hyperbola; tranſverſum vero figuræ latus A B, & A Δ rectum; jungaturque Δ B & producatur: iiſdem igitur, quæ ſupra, diſpoſitis, ducatur à puncto Γ ipſi A Δ parallela Γ M. & quoniam rectangulum M Γ A majus eſt rectangulo Δ A Γ; ipſique MΓA æquale eſt [per 12.huj.] quadratum ex Γ Θ; & Δ A Γ rectangulum majus eſt quadrato ex H E: erit & quadratum ex Γ Θ quadrato ex E H majus; & ideo linea Γ Θ major linea E H; hinc eadem quæ ſupra in parabola conſequentur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Ἐὰν παραβολῆς τὴν διάμετρον εὐθεῖα τέμνῃ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ταύτην τεμνέτω τις εὐθεῖα ἐντὸς τῆς τομῆς ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Ἤχθω γάρ τις ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΑΕ· ἡ ΑΕ ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς· ἤτοι δὴ ἡ ΓΔ τῇ ΑΕ παράλληλός ἐστιν, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν παράλληλός ἐστιν αὐτῇ, τεταγμένως κατῆκται· ὥστε ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

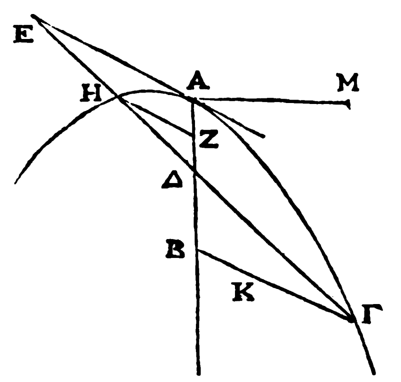
Μὴ ἔστω δὲ παράλληλος τῇ ΑΕ, ἀλλ' ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω τῇ ΑΕ κατὰ τὸ Ε. ὅτι μὲν οὖν τῇ τομῇ συμπίπτει, ἐπὶ τὰ μέρη ἐφ' ἅ ἐστι τὸ Ε, φανερόν. εἰ γὰρ τῇ ΑΕ συμβάλλει, πολὺ πρότερον τέμνει τὴν τομήν. λέγω πάλιν ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τομῇ. ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται ἡ ΜΑ, καὶ τεταγμένως κατηγμένη ἡ ΗΖ, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΔ ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ ΒΑΖ, καὶ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΓΒ συμπιπτέτω τῇ ΔΓ κατὰ τὸ Γ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΑΒ τῷ ἀπὸ ΑΔ· ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΑΔ ἡ ΔΑ πρὸς ΑΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς λοιπὴν τὴν ΔΖ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ. ἐπειδὴ δὲ ἴσον τὸ ἀπὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ

Prop. XXVII. *Theor.*

Si parabolæ diametrum ſecet recta linea: producta in utramque partem cum ſectione conveniet.

SIT parabola, cujus diameter A B; & ipſam A B ſecet quæpiam recta Γ Δ intra ſectionem: dico Γ Δ productam in utramque partem cum ſectione convenire.

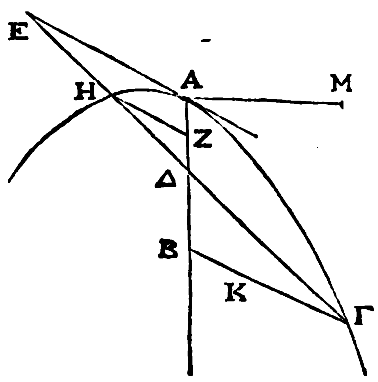
Ducatur enim à puncto A ordinatim applicatæ parallela A E; ergo [per 17. huj.] A E extra ſectionem cadet: itaque vel Γ Δ ipſi A E parallela eſt, vel non. & ſi quidem ſit parallela, ordinatim applicata eſt: quare [per 19.huj.] producta in utramque partem conveniet cum ſectione.



Sed non ſit parallela, verum producatur & conveniat cum A E in E puncto. conſtat igitur ipſam cum ſectione convenire ad partes E. ſi enim convenit cum A E, multo prius ſectioni occurrit. dico rurſus eandem & ad alteras partes productam convenire cum ſectione. ſit enim M A linea juxta quam poſſunt, & H Z ordinatim applicetur, quadratum autem ex A Δ æquale ſit rectangulo B A Z; & ordinatim applicatæ parallela B Γ conveniat cum Δ Γ in Γ puncto. quoniam igitur rectangulum Z A B æquale eſt quadrato ex A Δ; erit [per 17. 6.] ut A B ad A Δ ita Δ A ad A Z: quare [per 19. 5.] & reliqua B Δ ad reliquam Δ Z eſt ut B A ad A Δ: & propterea [per 22. 6.] ut quadratum ex B Δ ad quadratum ex Z Δ, ita quadratum ex B A ad quadratum ex A Δ. rurſus quoniam quadratum ex A Δ æquale eſt rectangulo

B A Z,

B A Z, ut B A ad A Z sic [per cor. 20. 6.] erit quadratum ex B A ad quadratum ex A Δ; hoc est quadratum ex B Δ ad quadratum ex Δ Z. ut autem quadratum ex B Δ ad quadratum ex Δ Z, sic quadratum ex B Γ ad quadratum ex Z H; & [per 1. 6.] ut B A ad A Z sic rectangulum B A M ad rectangulum Z A M: igitur ut quadratum ex B Γ ad quadratum ex Z H ita rectangulum B A M ad ipsum Z A M, & permutando [per 16. 5.] ut quadratum ex B Γ ad rectangulum B A M ita quadratum ex Z H ad rectangulum Z A M. at [per 11. huj.] quadratum ex Z H æquale est rectangulo Z A M, propter sectionem: ergo & quadratum ex B Γ rectangulo B A M æquale erit. est autem [per constr.] A M rectum figuræ latus, & B Γ ordinatim applicatæ parallela: sectio igitur transit per Γ punctum, & Γ Δ cum sectione necessario convenit in puncto Γ.



B A Z, ἔστιν ὡς ἡ B A πρὸς A Z οὕτως τὸ ἀπὸ B A πρὸς τὸ ἀπὸ A Δ, τουτέστι τὸ ἀπὸ B Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Z. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ B Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Z οὕτω τὸ ἀπὸ B Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Z H· ὡς δὲ ἡ B A πρὸς A Z οὕτως τὸ ὑπὸ B A M πρὸς τὸ ὑπὸ Z A M· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ B Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Z H οὕτως τὸ ὑπὸ B A M πρὸς τὸ ὑπὸ Z A M· καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ἀπὸ B Γ πρὸς τὸ ὑπὸ B A M οὕτως τὸ ἀπὸ Z H πρὸς τὸ ὑπὸ Z A M. τὸ δὲ ἀπὸ Z H ἴσον τῷ ὑπὸ Z A M, διὰ τὴν τομήν· καὶ τὸ ἀπὸ B Γ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ B A M. παραλλήλου δὲ ἡ A M, παρὰ τεταγμένως δὲ κατηγμένην ἡ B Γ· ἡ ἄρα τομὴ ἔρχεται διὰ τοῦ Γ, καὶ συμπίπτει τῇ τομῇ ἡ Γ Δ κατὰ τὸ Γ.

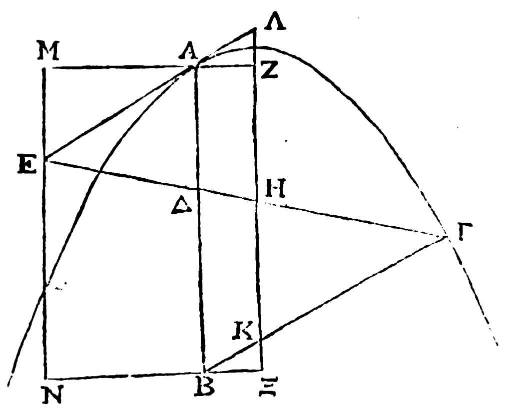
EUTOCIUS.

In aliquibus exemplaribus vigesimiseptimi theorematis talis legitur demonstratio.

SIT parabola cujus diameter A B, & hanc secet recta quædam H Δ intra sectionem: dico H Δ productam ad utrasque partes cum sectione convenire.

Ducatur enim per A punctum ordinatim applicatæ parallela A E: ergo [per 17. huj.] A E cadet extra sectionem; itaque vel H Δ ipsi A E parallela erit, vel non. & siquidem H E sit parallela, ipsa ordinatim applicata est, ideoque [per 19. huj.] si producatur ad utrasque partes, bifariam secta à diametro conveniet cum sectione. sed non sit ipsi A E parallela, sed producta conveniat cum A E in E puncto. perspicuum est ipsam, si cum A E convenit, multo prius sectioni occurrere.

Dico etiam ad alteras partes productam cum sectione convenire. sit enim M A linea juxta quam possunt, & in directum ipsi producatur A Z: ergo M A ad A B est perpendicularis. fiat ut quadratum ex A E ad triangulum A E Δ sic linea M A ad A Z; & per puncta M, Z ipsi A B parallelæ ducantur Z H K, M N. cum igitur quadrilaterum sit Λ A Δ H, & positione datur Λ A; ducatur Γ K B ipsi Λ A parallela, quæ abscindat Γ K H triangulum quadrilatero Λ A Δ H æquale, & per B ipsi Z A M parallela ducatur Ξ B N. itaque quoniam [per constr.] ut quadratum ex A E ad triangulum A E Δ ita est M A ad A Z, & ut quadratum ex A E ad A E Δ triangulum ita quadratum ex Γ B ad triangulum Δ Γ B; ete-



Ἐν τισιν ἀντιγράφοις τοῦ εἰκοστοῦ ἑβδόμου θεωρήματος φέρεται τοιαύτη ἀπόδειξις.

Ἔστω παραβολὴ ἧς διάμετρος ἡ A B, καὶ ταύτην τεμνέτω εὐθεῖά τις ἡ H Δ ἐντὸς τῆς τομῆς· λέγω ὅτι ἡ H Δ ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Ἤχθω γάρ τις διὰ τοῦ A παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ A E· ἡ A E ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς· ἤτοι δὴ ἡ H Δ τῇ A E παράλληλός ἐστιν, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν παράλληλός ἐστιν τεταγμένως κατῆκται· ὥστε ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα, ἐπεὶ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς διαμέτρου, συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ἔστω δὴ μὴ παράλληλος τῇ A E, ἀλλὰ ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω τῇ A E κατὰ τὸ E. δῆλον εἰ μὲν τῇ A E συμβάλλει, ὅτι πολὺ πρότερον τεμεῖ τὴν τομήν.

Λέγω ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τομῇ. ἔστω γὰρ παρ᾽ ἣν δύνανται ἡ M A, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ ἡ A Z· ἡ M A ἄρα τῇ A B πρὸς ὀρθάς ἐστι. πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ A E πρὸς τὸ A E Δ τρίγωνον οὕτως ἡ M A πρὸς τὴν A Z, καὶ διὰ τῶν M, Z τῇ A B παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ Z K, M N. τετραπλεύρου οὖν ὄντος τοῦ Λ A Δ H, καὶ θέσει οὔσης τῆς Λ A, ἤχθω τῇ Λ A παράλληλος ἡ Γ K B, ἀποτέμνουσα τὸ Γ K H τρίγωνον τῷ Λ A Δ H τετραπλεύρῳ ἴσον, καὶ διὰ τοῦ B τῇ Z A M παράλληλος ἤχθω ἡ Ξ B N. καὶ ἐπεί ἐστι ὡς τὸ ἀπὸ A E πρὸς τὸ A E Δ τρίγωνον οὕτως ἡ M A πρὸς A Z· καὶ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ A E πρὸς τὸ A E Δ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ Γ B πρὸς Δ Γ B τρίγωνον, παράλληλος γάρ

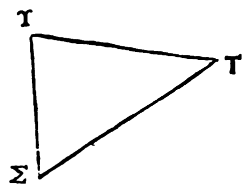
γάρ ἐστιν ἡ Α Ε τῇ Γ Β, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ Γ Ε, Α Β. ὡς δὲ ἡ Μ Α πρὸς Α Ζ οὕτως τὸ Α Μ Ν Β παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ Α Ζ Ξ Β παραλληλόγραμμον· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Γ Β πρὸς τὸ Γ Δ Β τρίγωνον οὕτως τὸ Α Μ Ν Β παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ Α Ζ Ξ Β παραλληλόγραμμον· καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Γ Β πρὸς τὸ Α Μ Ν Β παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ Γ Δ Β τρίγωνον πρὸς τὸ Α Ζ Ξ Β παραλληλόγραμμον. ἴσον δέ ἐστιν τὸ Α Ζ Ξ Β παραλληλόγραμμον τῷ Γ Δ Β τριγώνῳ· (ἐπεὶ γὰρ τὸ Γ Η Κ τρίγωνον τῷ Λ Α Η Δ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον, κοινὸν δὲ τὸ Η Δ Β Κ τετράπλευρον· τὸ Λ Α Β Κ παραλληλόγραμμον τῷ Γ Δ Β τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. τὸ δὲ Λ Α Β Κ παραλληλόγραμμον τῷ Ζ Α Β Ξ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς Α Β, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς Α Β, Λ Κ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ Δ Β τρίγωνον τῷ Ξ Ζ Α Β παραλληλογράμμῳ.) ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ Γ Β τῷ Α Μ Ν Β παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. τὸ δὲ Α Μ Ν Β παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Μ Α Β, ἡ γὰρ Μ Α πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ Α Β· τὸ ἄρα ὑπὸ Μ Α Β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Γ Β. καὶ ἔστιν ἡ Μ Α ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά, ἡ δὲ Α Β διάμετρος, καὶ ἡ Γ Β τεταγμένως κατηγμένη, παράλληλος γάρ ἐστι τῇ Α Ε· τὸ Γ ἄρα πρὸς τῇ τομῇ ἐστιν· ἡ Δ Η Γ ἄρα συμβάλλει τῇ τομῇ κατὰ τὸ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

nim A E, Γ B sunt parallelæ, & ipsas conjungunt Γ E, A B. ut autem M A ad A Z ita [per 1. 6.] A M N B parallelogrammum ad parallelogrammum A Z Ξ B: erit ut quadratum ex Γ B ad triangulum Γ Δ B ita A M N B parallelogrammum ad parallelogrammum A Z Ξ B; & permutando ut quadratum ex Γ B ad parallelogrammum A M N B ita Γ Δ B triangulum ad parallelogrammum A Z Ξ B. parallelogrammum autem A Z Ξ B triangulo Γ Δ B est æquale: (quoniam enim Γ H K triangulum æquale est [per constr.] quadrilatero Λ A H Δ, & quadrilaterum H Δ B K utrique commune; erit Λ A B K parallelogrammum æquale triangulo Γ Δ B. sed [per 35. 1.] Λ A B K parallelogrammum æquale est parallelogrammo Z A B Ξ, quia est super eadem basi A B & in eisdem parallelis A B, Λ K: ergo Γ Δ B triangulum parallelogrammo Ξ Z A B æquale erit.) quare [per 14. 5.] & quadratum ex Γ B æquale parallelogrammo A M N B: parallelogrammum autem A M N B rectangulo M A B æquale, quia M A ad A B est perpendicularis; ergo rectangulum M A B est æquale quadrato ex Γ B. atque est M A rectum figuræ latus, A B diameter & Γ B ordinatim applicata, quia ipsi A E est parallela: ex quibus sequitur punctum Γ esse in sectione: ergo Δ H Γ cum sectione convenit in Γ. quod erat demonstrandum.

Commentarius in Præcedentem Demonstrationem.

[a] Πεποιήσθω δὲ ὡς τὸ ἀπὸ Α Ε πρὸς τὸ Α Ε Δ τρίγωνον οὕτως ἡ Μ Α πρὸς Α Ζ.] Τοῦτο δέδεικται ἐν σχολίῳ τοῦ ἑνδεκάτου θεωρήματος. ἀναγράψας γὰρ τὸ ἀπὸ Α Ε, καὶ τῇ πλευρᾷ αὐτοῦ χωρίον τῷ Α Ε Δ τριγώνῳ ἴσον παραβαλὼν, ἕξω τὸ ζητούμενον.

[b] Τετραπλεύρου ὄντος τοῦ Λ Α Δ Η, καὶ θέσει οὔσης τῆς Λ Α, ἤχθω τῇ Λ Α παράλληλος ἡ Γ Κ Β, ἀποτέμνουσα τὸ Γ Κ Η τρίγωνον τῷ Λ Α Δ Η τετραπλεύρῳ ἴσον.] Τοῦτο δὴ ποιήσομεν οὕτως. ἐὰν γὰρ, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις ἐμάθομεν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Λ Α Δ Η τετραπλεύρῳ ἴσον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Α Ε Δ τριγώνῳ ὅμοιον τὸ αὐτὸ συστησόμεθα τὸ Σ Τ Υ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν Σ Υ τῇ Α Δ, καὶ ἀπολάβωμεν τῇ μὲν Υ Σ ἴσην τὴν Η Κ, τῇ δὲ Τ Υ ἴσην τὴν Η Γ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν Γ Κ, ἔσται τὸ ζητούμενον. ἐπεὶ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Υ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ Δ γωνίᾳ, τουτέστι τῇ Η· διὰ τοῦτο ἴσον καὶ ὅμοιον τὸ Γ Η Κ τῷ Σ Τ Υ. καὶ ἴση ἡ Γ γωνία τῇ Ε, καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Κ τῇ Α Ε. φανερὸν δὲ ὅτι ὅταν ἡ Α Β ἄξων ἐστὶν, ἡ Μ Α ἐφάπτεται τῆς τομῆς· ὅταν δὲ μὴ ἄξων, τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἄγεται πάντως τῇ διαμέτρῳ.



[a] Fiat ut quadratum ex A E ad triangulum A E Δ sic M A ad A Z.] Demonstratum est hoc in commentariis in undecimum theorema. si enim, describentes quadratum lineæ A E, ipsius lateri apposuerimus [per 44. 1.] spatium triangulo A E Δ æquale, factum jam erit quod quæritur.

[b] Cum igitur quadrilaterum sit Λ A Δ H, & positione data Λ A, ducatur Γ K B ipsi Λ A parallela, quæ abscindat Γ K H triangulum quadrilatero Λ A Δ H æquale.] Hoc ita faciemus. Si enim, ut in elementis [ad 25. 6.] didicimus, dato rectilineo, videlicet quadrilatero Λ A Δ H, æquale & triangulo dato A E Δ simile constituerimus triangulum Σ T Υ, ita ut latus Σ Υ lateri A Δ respondeat, & [per 3. 1.] fecerimus H K ipsi Υ Σ æqualem, & H Γ æqualem T Υ, & junxerimus Γ K; factum erit quod quæritur. quoniam enim angulus ad Υ æqualis est angulo ad Δ, hoc est ei qui ad H; erit triangulum Γ H K æquale ac simile triangulo Σ T Υ, & angulus Γ angulo E æqualis, & alterni sunt: linea igitur Γ K [per 27. 1.] est parallela ipsi A E. perspicuum autem est, quod, quando A B sit axis, linea M A tangit sectionem; quando vero non sit axis, secat, & ad diametrum omnino perpendicularis ducitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη΄.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐντὸς τῆς ἑτέρας τομῆς, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ ἐφαπτομένῃ εὐθεῖα· ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι ὧν ἡ Α Β διάμετρος, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα

Prop. XXVIII. *Theor.*

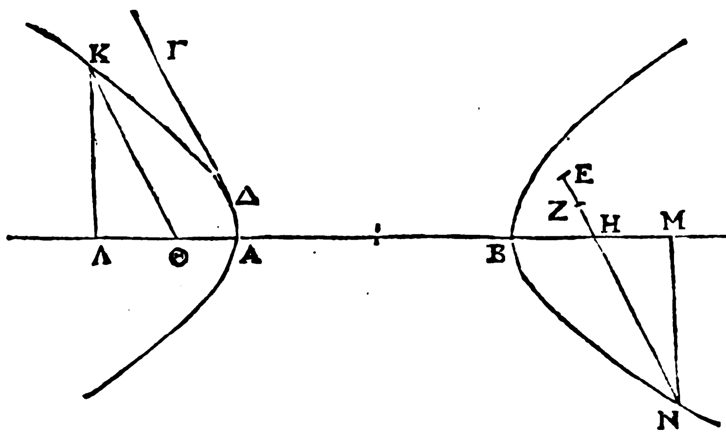
Si recta linea unam oppositarum sectionum contingat, sumatur autem punctum intra alteram sectionem, & per ipsum recta contingenti parallela ducatur: producta ad utrasque partes cum sectione conveniet.

Sint oppositæ sectiones, quarum diameter A B; & sectionem, in qua est A, contingat quævis recta ΓΔ; ſumatur autem aliquod punctum E intra alteram ſectionem; & per E ducatur EZ ipſi ΓΔ parallela: dico EZ productam ad utraſque partes cum ſectione convenire.

ἡ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τῆς ἑτέρας τομῆς τὸ Ε, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Quoniam enim oſtenſum eſt [ad 24. huj.] ΓΔ productam convenire cum diametro AB; atque eſt EZ ipſi parallela: EZ producta cum diametro conveniet. conveniat autem in H; & ipſi HB æqualis ponatur AΘ. deinde per Θ ducatur ΘK parallela ipſi EZ; & ſit KΛ ordinatim applicata: ponatur HM æqualis ΛΘ, ducaturque MN ordinatim applicatæ parallela: &

Ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΒ διαμέτρῳ, καὶ ἔστι παράλληλος αὐτῇ ἡ ΕΖ· ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Η, καὶ τῇ ΗΒ ἴση κείσθω ἡ ΑΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ τῇ ΖΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΚΛ, καὶ τῇ ΛΘ ἴση κείσθω ἡ ΗΜ, καὶ παρὰ τεταγμέ-



HN in directum producatur. itaque quoniam KΛ ipſi MN eſt parallela; & KΘ ipſi HN; & eſt ΛM una eademque recta: triangulum KΘΛ [per 9.1.& 4.6.] ſimile eſt triangulo HMN. eſt autem ΛΘ æqualis HM: quare & KΛ ipſi MN æqualis erit: ideoque quadratum ex KΛ æquale quadrato ex MN. rurſus quoniam ΛΘ æqualis eſt HM & AΘ ipſi BH, communis autem AB; erit BΛ æqualis AM; & propterea rectangulum BΛA rectangulo AMB æquale: ut igitur rectangulum BΛA ad quadratum ex KΛ, ita rectangulum AMB ad quadratum ex MN. ſed [per 21. huj.] ut rectangulum BΛA ad quadratum ex ΛK, ita tranſverſum figuræ latus ad rectum: quare ut rectangulum AMB ad quadratum ex MN ita erit latus tranſverſum ad rectum. ex quibus colligitur, punctum N in ſectione eſſe: ergo EZ producta cum ſectione conveniet in puncto N. ſimiliter oſtendemus, ſi ex altera parte producatur, cum ſectione convenire.

νως κατηγμένην ἤχθω ἡ ΜΝ, καὶ προσεκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΗΝ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΚΛ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΚΘ τῇ ΗΝ, καὶ μία εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΛΜ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΘΛ τρίγωνον τῷ ΗΜΝ τριγώνῳ. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΘ τῇ ΗΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΜΝ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΚΛ τῷ ἀπὸ ΜΝ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΘ τῇ ΗΜ, ἡ δὲ ΑΘ τῇ ΒΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ τῇ ΑΜ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΒΛΑ τῷ ὑπὸ ΑΜΒ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΛ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΝ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΝ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· τὸ Ν ἄρα πρὸς τῇ τομῇ ἐστιν· ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ κατὰ τὸ Ν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

EUTOCIUS.

Quod ſi ΓΔ hyperbolam ſecet, eadem ſequentur, quemadmodum in decimo octavo theoremate.

Ὅτι κἂν ἡ ΓΔ τέμνῃ τὴν ὑπερβολήν, τὰ αὐτὰ συμβήσεται, ὥσπερ ἐπὶ τοῦ δεκάτου ὀγδόου.

Prop. XXIX. *Theor.*

Si in oppoſitis ſectionibus recta linea per centrum ducta occurrat uni ſectioni; ulterius producta alteram quoque ſecabit ſectionem.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθʹ.

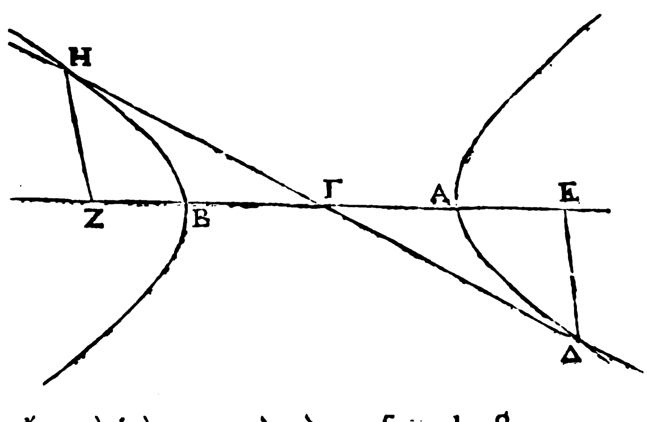
Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις εὐθεῖα προσπίπτῃ διὰ τοῦ κέντρου πρὸς ὁποτέραν τῶν τομῶν· ἐκβαλλομένη τέμνει τὴν ἑτέραν τομήν.

SINT ſectiones oppoſitæ, quarum diameter AB, centrum autem Γ; & recta ΓΔ ſectionem AΔ ſecet: dico ſectionem ΓΔ alteram quoque ſecare.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἡ ΓΔ τεμνέτω τὴν ΑΔ τομήν· λέγω ὅτι καὶ τὴν ἑτέραν τομὴν τεμεῖ.

Τεταγμένως

Τεταγμένως γὰρ κατήχθω ἡ ΕΔ, καὶ τῇ ΑΕ ἴση κείσθω ἡ ΒΖ, καὶ τεταγμένως ἤχθω ἡ ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΒΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΕΑ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΒΕΑ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΕΔ τῷ ἀπὸ ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΕΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΖΗ, καὶ εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΒΖ, καὶ παράλληλος ἡ ΕΔ τῇ ΖΗ· καὶ ἡ ΔΗ ἄρα εὐθεῖά ἐστι, καὶ ἡ ΓΔ ἄρα τεμεῖ καὶ τὴν ἑτέραν τομήν.



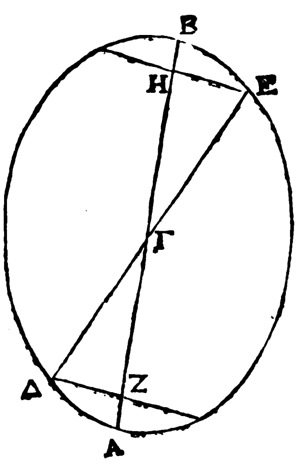
Ordinatim enim applicetur ΕΔ; ipsique ΑΕ ponatur æqualis ΒΖ; & ΖΗ ordinatim ducatur. quoniam igitur ΕΑ, ΒΖ æquales sunt, & ΑΒ utrique communis; rectangulum ΒΕΑ rectangulo ΑΖΒ est æquale. & quoniam [per 21.huj.] ut rectangulum ΒΕΑ ad quadratum ex ΔΕ ita est transversum latus ad rectum: ut autem rectangulum ΑΖΒ ad quadratum ex ΖΗ ita latus transversum ad rectum: ergo ut rectangulum ΒΕΑ ad quadratum ex ΔΕ sic rectangulum ΑΖΒ ad quadratum ex ΖΗ. sed æquale est rectangulum ΒΕΑ rectangulo ΑΖΒ: quadratum igitur ex ΔΕ [per 14. 5.] quadrato ex ΖΗ ex æquale. quod cum ΕΓ æqualis sit ipsi ΓΖ; & ΔΕ ipsi ΖΗ; sitque ΕΖ recta, & ΕΔ ipsi ΖΗ parallela; erit [per 32. 6.] & ΔΗ recta: ergo ΓΔ sectionem quoque alteram secabit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἢ ἀντικειμέναις εὐθεῖα ἀχθῇ, ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κέντρου συμπίπτουσα τῇ τομῇ· δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ κέντρον.

ΕΣΤΩ ἔλλειψις, ἢ ἀντικείμεναι, διάμετρος δὲ αὐτῶν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΓΕ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓΕ.

Ἤχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΔΖ, ΕΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ· καὶ * ὡς ἄρα (ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως συνθέντι, ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι) τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ

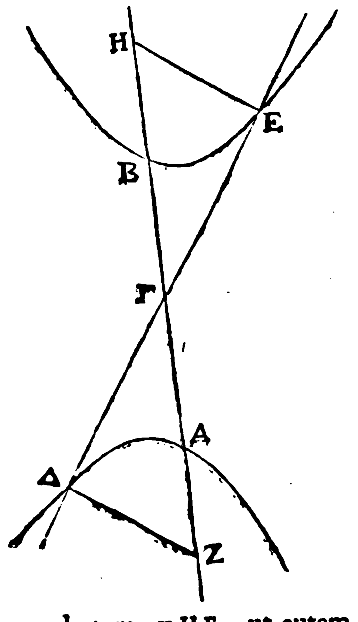


PROP. XXX. *Theor.*

Si in ellipsi, vel oppositis sectionibus, recta linea ducatur, ad utrasque centri partes sectioni occurrens: ad centrum bifariam secabitur.

SIT ellipsis, vel oppositæ sectiones, quarum diameter ΑΒ, centrum Γ; & per Γ ducatur recta ΔΓΕ: dico ΓΔ ipsi ΓΕ æqualem esse.

Ordinatim enim applicentur ΔΖ, ΕΗ. & quoniam ut rectangulum ΒΖΑ ad quadratum ex ΖΔ ita est [per 21. huj.] transversum latus ad rectum; & ut rectangulum ΑΗΒ ad quadratum ex ΗΕ, ita latus transversum ad rectum: erit [per 11. 5.] ut rectangulum ΒΖΑ ad quadratum ex ΖΔ, ita rectangulum ΑΗΒ ad quadratum ex ΗΕ; & permutando [per 16. 5.] ut rectangulum ΒΖΑ ad rectangulum ΑΗΒ ita quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΗΕ. ut autem quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΕΗ ita [per 4. & 22. 6.] quadratum ex ΖΓ ad quadratum ex ΓΗ: ergo permutando, ut rectangulum ΒΖΑ ad quadratum ex ΓΖ ita rectangulum ΑΗΒ ad quadratum ex ΓΗ. * ut igitur (in ellipsi componendo, in oppositis vero sectionibus invertendo & per conversionem rationis) quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex

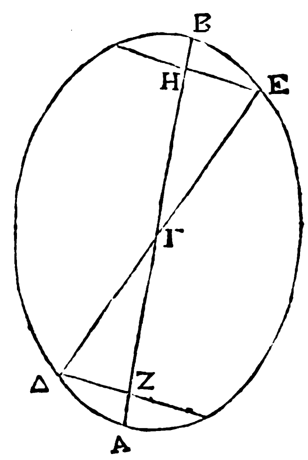


ex Γ Z, ita quadratum ex B Γ ad quadratum ex Γ H; quadratum autem ex A Γ æquale est quadrato ex Γ B: ergo & quadratum ex Z Γ quadrato ex Γ H æquale erit: idcircoque Z Γ ipsi Γ H æqualis. & cum Δ Z, H E inter se sint parallelæ, necesse est [per 4.1.] Δ Γ ipsi Γ E æqualem esse.

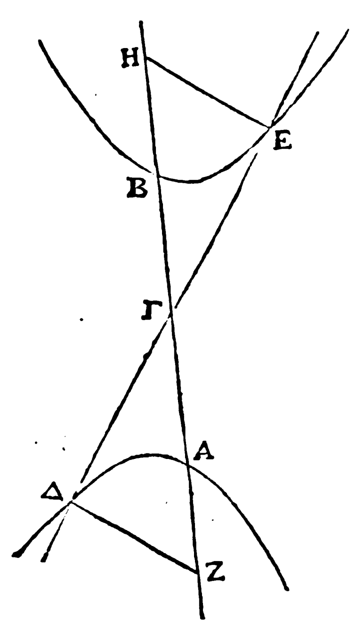
ἀπὸ Γ Z οὕτως τὸ ἀπὸ B Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ H. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ A Γ τῷ ἀπὸ Γ B· ἴσον ἄρα καὶ τῷ ἀπὸ Z Γ τὸ ἀπὸ Γ H· ἴση ἄρα ἡ Z Γ τῇ Γ H. καί εἰσι παράλληλοι αἱ Δ Z, H E· ἴση ἄρα καὶ ἡ Δ Γ τῇ Γ E.

EUTOCIUS.

a Ut igitur in ellipsi componendo, in oppositis vero invertendo & per conversionem rationis.] In ellipsi quidem ita dicemus. quoniam ut rectangulum A Z B ad quadratum ex Δ Z ita est rectangulum A H B ad quadratum ex H E. ut autem quadratum ex Δ Z ad quadratum ex Z Γ ita quadratum ex H E ad quadratum ex H Γ; erit igitur ex æquali [per 22. 5.] ut rectangulum A Z B ad quadratum ex Z Γ ita rectangulum A H B ad quadratum ex H Γ, & componendo ut rectangulum A Z B una cum quadrato ex Z Γ ad quadratum ex Z Γ, hoc est [per 5. 2] quadratum ex A Γ ad quadratum ex Z Γ (etenim recta A B secatur in partes æquales ad punctum Γ & in partes inæquales ad Z) ita rectangulum A H B una cum quadrato ex H Γ ad quadratum ex H Γ; hoc est, propter eandem causam, quadratum ex B Γ ad quadratum ex H Γ. & [per 16.5.] permutando ut quadratum ex A Γ ad quadratum ex Γ B ita quadratum ex Z Γ ad quadratum ex H Γ. At vero in sectionibus oppositis: quoniam est ut rectangulum B Z A ad quadratum ex Z Γ ita rectangulum A H B ad quadratum ex H Γ; erit invertendo ut quadratum ex Z Γ ad rectangulum B Z A ita quadratum ex H Γ ad rectangulum A H B, & per conversionem rationis, ut quadratum ex Z Γ ad quadratum ex Γ A ita quadratum ex H Γ ad quadratum ex Γ B. nam cum linea A B bifariam secetur in Γ, atque ei adjiciatur Z A, erit [per 6. 2.] rectangulum B Z A una cum quadrato ex A Γ æquale quadrato ex Γ Z: quare quadratum ex Γ Z superat rectangulum B Z A ipso quadrato ex A Γ. pulchre igitur dictum est sequi illud per conversionem rationis.



a Ὡς ἄρα ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως συνθέντι, ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι.] Ἐπὶ μὲν οὖν τῆς ἐλλείψεως ἐροῦμεν. ἐπειδή ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ A Z B πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Z οὕτως τὸ ὑπὸ A H B πρὸς τὸ ἀπὸ H E, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ Δ Z πρὸς τὸ ἀπὸ Z Γ οὕτως τὸ ἀπὸ H E πρὸς τὸ ἀπὸ H Γ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ A Z B πρὸς τὸ ἀπὸ Z Γ οὕτως τὸ ὑπὸ A H B πρὸς τὸ ἀπὸ H Γ, καὶ συνθέντι ὡς τὸ ὑπὸ A Z B μετὰ τοῦ ἀπὸ Z Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Z Γ, τουτέστι τὸ ἀπὸ A Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Z Γ· ἡ γὰρ A B τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Z· οὕτως τὸ ὑπὸ A H B μετὰ τοῦ ἀπὸ H Γ πρὸς τὸ ἀπὸ H Γ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ Γ B πρὸς τὸ ἀπὸ H Γ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ A Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ B οὕτως τὸ ἀπὸ Z Γ πρὸς τὸ ἀπὸ H Γ. ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ B Z A πρὸς τὸ ἀπὸ Z Γ οὕτως τὸ ὑπὸ A H B πρὸς τὸ ἀπὸ Γ H· ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ Z Γ πρὸς τὸ ὑπὸ B Z A οὕτως τὸ ἀπὸ H Γ πρὸς τὸ ὑπὸ A H B, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς τὸ ἀπὸ Z Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ A οὕτως τὸ ἀπὸ H Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ B. εὐθεῖα γὰρ ἡ A B τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται ἡ Z A, καὶ τὸ ὑπὸ B Z A μετὰ τοῦ ἀπὸ A Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Γ Z· ὥστε τὸ ἀπὸ Γ Z τοῦ ὑπὸ B Z A ὑπερέχει τῷ ἀπὸ A Γ. καὶ καλῶς εἴρηται τὸ ἀναστρέψαντι.



Prop. XXXI. *Theor.*

Si in transverso figuræ latere hyperbolæ sumatur aliquod punctum, non minorem abscindens ad verticem sectionis quam sit dimidia transversi lateris figuræ, & ab ipso ducta recta sectioni occurrat: si producatur cadet intra sectionem, versus ulteriora ejus.

SIT hyperbola, cujus diameter A B; & in ipsa sumatur punctum aliquod Γ, non minorem abscindens rectam Γ B, quam sit ipsius A B dimidia; & occurrat sectioni quævis recta Γ Δ: dico Γ Δ productam intra sectionem cadere.

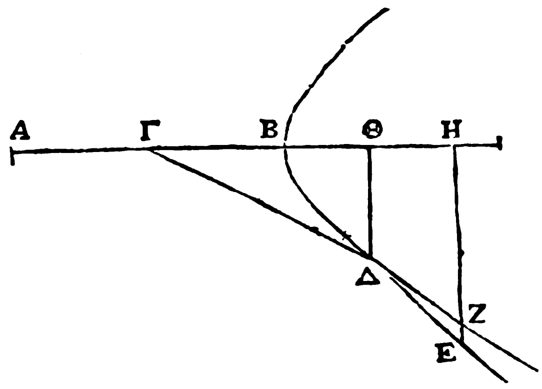
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ εἴδους ληφθῇ τι σημεῖον, μὴ ἐλάττονα ἀπολαμβάνον πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ προσπίπτῃ εὐθεῖα πρὸς τὴν τομήν· ἡ προσβληθεῖσα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς, κατὰ τὰ ἑπόμενα μέρη τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἧς διάμετρος ἡ A B, καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῆς σημεῖόν τι τὸ Γ, μὴ ἐλάττονα ἀπολαμβάνον τὴν Γ B τῆς ἡμισείας τῆς A B, καὶ προσπιπτέτω τις εὐθεῖα πρὸς τὴν τομήν· λέγω ὅτι ἡ Γ Δ ἐκβαλλομένη ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

Εἰ

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς, ὡς ἡ ΓΔΕ, καὶ ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ Ε τεταγμένως κατήχθω ἡ ΕΗ, καὶ ἡ ΔΘ. καὶ ἔστω πρότερον ἴση ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ, διὰ τὸ ΕΗ παράλληλον εἶναι τῇ ΔΘ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ, διὰ τὴν τομήν· τὸ ἄρα ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ· ἐναλλὰξ ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ. [a] διελόντι ἄρα, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΓΔΕ ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς, ἐντὸς ἄρα· καὶ διὰ τοῦτο, ἡ ἀπό τινος τῶν ἐπὶ τῆς ΑΓ σημείων πολλῷ μᾶλλον ἐντὸς πεσεῖται, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΓΔ ἐντὸς πεσεῖται.



Si enim fieri potest, cadat extra sectionem, ut ΓΔΕ; & à quovis puncto E ordinatim applicetur EH, itemque ipsa ΔΘ. sit autem primum linea ΑΓ æqualis ΓΒ. & quoniam [per 8.5.] quadratum ex EH ad quadratum ex ΔΘ majorem rationem habet quam quadratum ex ZH ad quadratum ex ΔΘ, & ut quadratum ex EH ad quadratum ex ΔΘ ita [per 4. & 22. 6.] quadratum ex HΓ ad quadratum ex ΓΘ; propterea quod EH ipsi ΔΘ sit parallela. ut vero [per 12. huj.] quadratum ex ZH ad quadratum ex ΔΘ ita rectangulum AHB ad rectangulum AΘB, propter sectionem: quadratum igitur ex HΓ ad quadratum ex ΘΓ rationem majorem habet quam rectangulum AHB ad rectangulum AΘB: & permutando, quadratum ex ΓH ad rectangulum AHB habet majorem rationem, quam quadratum ex ΓΘ ad rectangulum AΘB. [a] ergo dividendo, quadratum ex ΓB ad rectangulum AHB majorem habet rationem quam quadratum ex ΓB ad rectangulum AΘB: quod [per 8.5.] fieri non potest: igitur linea ΓΔE non cadet extra sectionem: quare intra cadet: & idcirco quæ ab aliquo puncto rectæ AΓ ad sectionem ducitur, multo magis cadet intra, quoniam & ΓΔ intra cadit.

EUTOCIUS.

[a] Διελόντι ἄρα, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ.] Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέμνεται δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ ΒΗ, τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΗ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΓΗ τοῦ ὑπὸ ΑΗΒ ὑπερέχει τῷ ἀπὸ ΓΒ. διὰ δὲ τὴν αὐτὴν αἰτίαν καὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ τοῦ ὑπὸ ΑΘΒ ὑπερέχει τῷ ἀπὸ ΓΒ. ὥστε ὀρθῶς εἴρηται τὸ διελόντι.

[a] Ergo dividendo, quadratum ex ΓB ad rectangulum AHB majorem habet rationem, quam quadratum ex ΓB ad rectangulum AΘB.] Quoniam enim recta linea AB bifariam secatur in Γ, & ipsi adjicitur linea BH, rectangulum AHB una cum quadrato ex ΓB [per 6. 2.] æquale est quadrato ex ΓH: ergo quadratum ex ΓH superat rectangulum AHB quadrato ex ΓB. & propter eandem causam quadratum ex ΓΘ superat rectangulum AΘB ipso quadrato ex ΓB. recte igitur dixit dividendo illud concludi.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν κώνου τομῆς διὰ τῆς κορυφῆς εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθῇ, ἐφάψεται τῆς τομῆς, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε κώνου τομῆς καὶ τῆς εὐθείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Ἔστω κώνου τομὴ πρότερον ἡ καλουμένη παραβολὴ, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ ΑΓ· ὅτι μὲν οὖν ἡ ΑΓ ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, δέδεικται. λέγω δὴ ὅτι καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

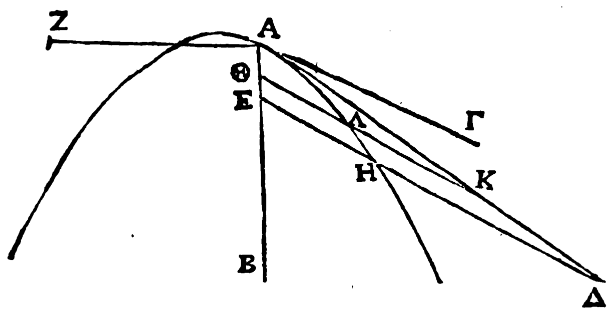
Εἰ γὰρ δυνατὸν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τυχὸν τὸ Δ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἔστω παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ

Prop. XXXII. *Theor.*

Si per verticem sectionis coni recta linea ordinatim applicatæ parallela ducatur, sectionem continget: & in locum, qui inter coni sectionem & rectam interjicitur, altera recta non cadet.

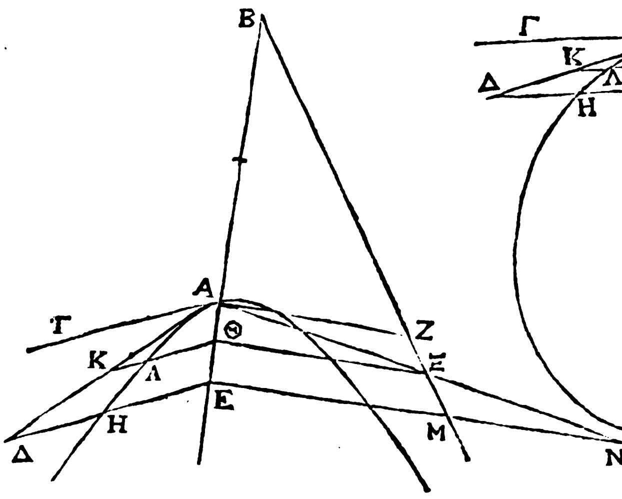
Sit coni sectio prius parabola, cujus diameter AB; & à puncto A ducatur AΓ ordinatim applicatæ parallela: cadet AΓ extra sectionem, quod [ad 17. huj.] supra demonstratum est. dico in locum, qui inter AΓ & sectionem interjicitur, alteram rectam non cadere.

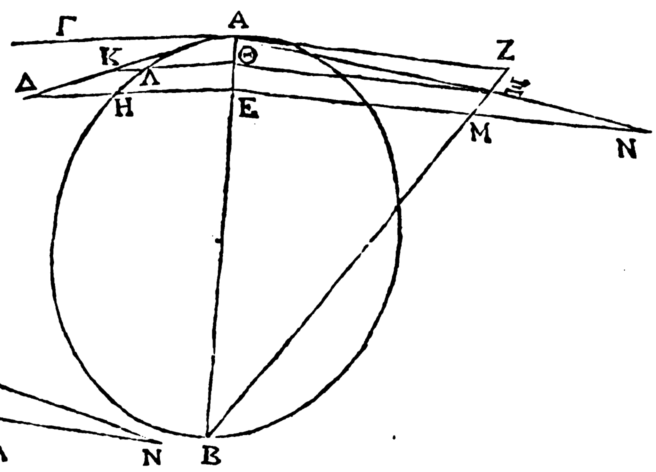
Si enim fieri potest, cadat, ut AΔ; sumaturque in ipsa quodvis punctum Δ; & ordinatim applicetur ΔE. sit autem AZ, juxta quam possunt quæ à sectione ordinatim ducuntur. & quoniam [per 8. 5.] quadratum ex ΔE ad quadratum ex EA majorem rationem habet quam quadratum ex HE ad quadratum ex EA, estque [per 11. huj.] quadratum ex HE æquale rectangulo ZAE: quadratum igitur ex ΔE ad quadratum ex EA majorem rationem habet quam rectangulum ZAE ad quadratum ex EA; hoc est [per 1. 6.] quam ZA ad AE. itaque fiat ut quadratum ex ΔE ad quadratum ex EA sic ZA ad AΘ: & per Θ ducatur ΘΛK parallela ipsi EΔ. quoniam igitur est ut quadratum ex ΔE ad quadratum ex EA sic ZA ad ipsam AΘ, hoc est [per 1.6.] rectangulum ZAΘ ad quadratum ex AΘ; & ut quadratum ex ΔE ad quadratum ex EA ita [per 4. & 22.6.] quadratum ex KΘ ad quadratum ex ΘA: rectangulo autem ZAΘ æquale est [per 11. huj.] quadratum ex ΘΛ: quare ut quadratum ex KΘ ad quadratum ex ΘΛ sic quadratum ex ΛΘ ad quadratum ex ΘA: æqualis est igitur [per 11.5.] linea KΘ ipsi ΘΛ; quod est absurdum. quocirca in locum inter rectam lineam AΓ & sectionem altera recta linea non cadet.

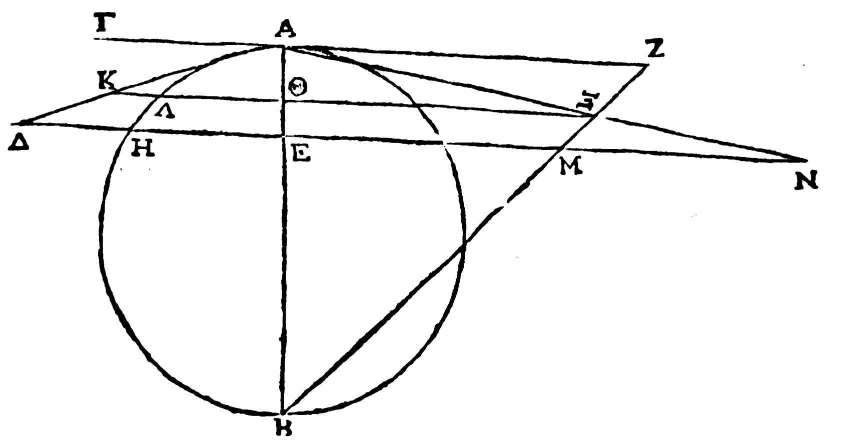


τὸ ἀπὸ HE πρὸς τὸ ἀπὸ EA, τὸ δὲ ἀπὸ HE ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ZAE· καὶ τὸ ἀπὸ ΔE ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ EA μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ZAE πρὸς τὸ ἀπὸ EA, τουτέστιν ἡ ZA πρὸς AE. πεποιήσθω οὖν ὡς τὸ ἀπὸ ΔE πρὸς τὸ ἀπὸ EA οὕτως ἡ ZA πρὸς AΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ παράλληλος ἤχθω τῇ EΔ ἡ ΘΛK. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΔE πρὸς τὸ ἀπὸ EA οὕτως ἡ ZA πρὸς AΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ZAΘ πρὸς τὸ ἀπὸ AΘ· καὶ ἔστιν ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΔE πρὸς τὸ ἀπὸ EA οὕτως τὸ ἀπὸ KΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘA, τῷ δὲ ὑπὸ ZAΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΘΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ KΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΛ οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘA· ἴση ἄρα ἡ KΘ τῇ ΘΛ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς AΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Verum sit sectio hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cujus diameter AB, & rectum figuræ latus AZ; juncta autem BZ producatur; & à puncto A ordinatim applicatis parallela ducatur AΓ, quæ extra sectionem cadet, ut [per 17.huj.]







Ἔστω δὴ ἡ τομὴ ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ AB, ὀρθία δὲ ἡ AZ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ BZ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ A παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ AΓ. ὅτι μὲν οὖν ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς δέδεικται.

δεικται· λέγω δὴ ὅτι καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τυχὸν τὸ Δ, καὶ τεταγμένως ἀπ' αὐτοῦ κατήχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΑΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΜ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΜ, πεποιήσθω τῷ ἀπὸ ΔΕ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΕΝ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΝ τεμνέτω τὴν ΖΜ κατὰ τὸ Ξ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Ξ τῇ ΖΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΞΘ, διὰ δὲ τοῦ Θ τῇ ΑΓ ἡ ΘΛΚ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΕΝ, ἔστιν ὡς ἡ ΝΕ πρὸς ΕΔ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΕ πρὸς ΕΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΝΕ πρὸς ΕΑ οὕτως ἡ ΞΘ πρὸς ΘΑ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΑ· ὡς ἄρα ἡ ΞΘ πρὸς ΘΑ οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΑ· μέση ἄρα ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΚΘ τῶν ΞΘ, ΘΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΘΞ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΛΘ τῷ ὑπὸ ΑΘΞ ἴσον, διὰ τὴν τομήν· τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΘΛ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

ostensum est: dico in locum, qui inter lineam rectam ΑΓ & sectionem interjicitur, alteram rectam lineam non cadere.

Cadat enim, si fieri potest, ut ΑΔ; & in ipsa sumatur quodvis punctum Δ, à quo ΔΕ ordinatim applicetur; & per Ε ducatur ΕΜ ipsi ΑΖ parallela. & quoniam [per 12. vel 13. huj.] quadratum ex ΗΕ æquale est rectangulo ΑΕΜ; fiat rectangulum ΑΕΝ quadrato ex ΔΕ æquale; & juncta ΑΝ secet ΖΜ in puncto Ξ, deinde per Ξ ipsi ΖΑ parallela ducatur ΞΘ, & per Θ ducatur ΘΛΚ parallela ipsi ΑΓ. itaque cum quadratum ex ΔΕ æquale sit rectangulo ΑΕΝ, erit [per 17. 6.] ut ΝΕ ad ΕΔ ita ΔΕ ad ΕΑ: & idcirco [per cor. 20. 6.] ut linea ΝΕ ad ΕΑ, ita quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ. sed [per 4. 6.] ut ΝΕ ad ΕΑ ita ΞΘ ad ΘΑ, & ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ ita quadratum ex ΚΘ ad quadratum ex ΘΑ: ut igitur ΞΘ ad ΘΑ sic quadratum ex ΚΘ ad quadratum ex ΘΑ: ergo [per cor. 20. 6.] ΚΘ media proportionalis est inter ΞΘ, ΘΑ: & propterea [per 17. 6.] quadratum ex ΚΘ æquale rectangulo ΑΘΞ. est autem [per 12. vel 13. huj.] & quadratum ex ΛΘ rectangulo ΑΘΞ æquale, propter sectionem: ergo quadratum ex ΚΘ æquale est quadrato ex ΘΛ; quod fieri non potest. in locum igitur, qui est inter ΑΓ & sectionem, altera recta non cadet.

EUTOCIUS.

Ἐν τῷ ἑπτακαιδεκάτῳ θεωρήματι ἁπλούστερον ἔδειξεν, ὅτι ἡ διὰ τῆς κορυφῆς παρὰ κατηγμένην τεταγμένως ἀγομένη, τῆς τομῆς ἐφάπτεται. ἐνταῦθα δὲ τὸ ἐν τοῖς στοιχείοις ἐπὶ τοῦ κύκλου μόνον δεδειγμένον καθολικώτερον ἐπὶ πάσης κώνου τομῆς ὑπάρχον ἐπιδείκνυσι. δεῖ μέντοι ἐπιστῆσαι, ὅπερ κἀκεῖ ἐδείχθη, ὅτι καμπύλην μὲν ἴσως γραμμὴν οὐδὲν ἄτοπόν ἐστιν ἐμπίπτειν μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τῆς τομῆς, εὐθεῖαν δὲ ἀμήχανον· τεμεῖ γὰρ αὐτὴ τὴν τομὴν καὶ οὐκ ἐφάψεται· δύο γὰρ ἐφαπτομένας εὐθείας κατὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἶναι ἀδύνατον. πολυτρόπως δεδειγμένου τούτου τοῦ θεωρήματος ἐν διαφόροις ἐκδόσεσιν, ἡμεῖς τὴν ἁπλουστέραν καὶ σαφεστέραν ἐποιήσαμεν.

In septimodecimo theoremate simplicius ostendit, rectam, quæ per verticem ducitur ordinatim applicatæ parallela, sectionem ipsam contingere. hoc autem loco, id quod in elementis de circulo tantum demonstratur, universe de omni coni sectione ostendit. oportet autem scire, quod & illic demonstratum est, nullum fortasse sequi absurdum, si ponatur linea curva inter sectionem & rectam cadere. at vero ut cadat recta linea fieri non potest: secabit etenim ipsa, non continget sectionem; quoniam duæ rectæ in eodem puncto contingentes esse non possunt. cum autem hoc theorema multifariam demonstretur in diversis editionibus, nos simpliciorem & manifestiorem demonstrationem adscripsimus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐὰν ἐν παραβολῇ ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον καταχθῇ εὐθεῖα, καὶ τῇ ἀπολαμβανομένῃ ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τεθῇ ἴση ἐπ' εὐθείας ἀπ' ἄκρας αὐτῆς· ἡ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπιζευγνυμένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Prop. XXXIII. *Theor.*

Si in parabola sumatur aliquod punctum, à quo recta linea ad diametrum ordinatim applicetur; & ei, quæ ab ipsa ex diametro abscinditur ad verticem, æqualis ponatur in directum ab ejus extremitate: recta linea, quæ à puncto sic invento ducitur ad illud quod sumptum fuerat, sectionem continget.

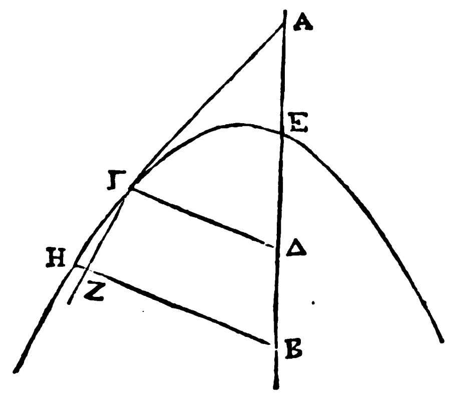
Ἔστω παραβολὴ ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ΕΔ ἴση κείσθω ἡ ΑΕ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἐκβαλλομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ ΓΖ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ἀλλ' ὡς

Sit parabola, cujus diameter ΑΒ; & recta ΓΔ ordinatim applicetur, & ipsi ΕΔ æqualis ponatur ΑΕ, & jungatur ΑΓ: dico ΑΓ productam extra sectionem cadere.

Si enim fieri potest, cadat intra, ut ΓΖ; & ΗΒ ordinatim applicetur. & quoniam [per 8. 5.] quadratum ex ΗΒ ad quadratum ex ΓΔ majorem rationem habet quam quadratum ex ΖΒ ad quadratum ex ΓΔ, & [per 4. & 22. 6.] ut quadratum

quadratum ex Z B ad quadratum ex Γ Δ ita quadratum ex B A ad quadratum ex A Δ; ut autem quadratum ex H B ad quadratum ex Γ Δ ita [per 20. huj.] linea B E ad Δ E; ergo B E ad E Δ majorem rationem habet quam quadratum ex B A ad quadratum ex A Δ. sed [per 1. 6.] ut B E ad E Δ ita rectangulum B E A quater sumptum ad rectangulum AEΔ quater: rectangulum igitur BEA quater ad rectangulum A E Δ quater majorem habet rationem quam quadratum ex B A ad quadratum ex A Δ: & [per 16.5.] permutando, rectangulum B E A quater ad quadratum ex A B majorem rationem habet quam rectangulum A E Δ quater ad quadratum ex A Δ; quod fieri minime potest: nam cum linea A E ipsi E Δ sit æqualis, rectangulum A E Δ quater sumptum [per 4. 2.] æquale est quadrato ex A Δ, rectangulum vero B E A quater sumptum quadrato ex B A est minus; neque enim punctum E ipsam A B bifariam secat. igitur A Γ non cadet intra: quare sectionem ipsam contingat necesse est.



τὸ ἀπὸ Z B πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Δ οὕτως τὸ ἀπὸ B A πρὸς τὸ ἀπὸ A Δ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ H B πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Δ οὕτως ἡ B E πρὸς Δ E· ἡ B E ἄρα πρὸς E Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ B A πρὸς τὸ ἀπὸ A Δ. ἀλλ' ὡς ἡ B E πρὸς E Δ οὕτως τὸ τετράκις ὑπὸ B E A πρὸς τὸ τετράκις ὑπὸ A E Δ· καὶ τὸ τετράκις ἄρα ὑπὸ τῶν B E A πρὸς τὸ τετράκις ὑπὸ A E Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ B A πρὸς τὸ ἀπὸ A Δ· ἐναλλὰξ ἄρα τὸ τετράκις ὑπὸ B E A πρὸς τὸ ἀπὸ A B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ τετράκις ὑπὸ A E Δ πρὸς τὸ ἀπὸ A Δ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἴσης γὰρ οὔσης τῆς A E τῇ E Δ, τὸ τετράκις ὑπὸ A E Δ τῷ ἀπὸ A Δ ἐστὶν ἴσον. τὸ δὲ τετράκις ὑπὸ B E A τοῦ ἀπὸ B A ἐστὶν ἔλασσον, τῆς γὰρ A B οὐκ ἔστι διχοτομία τὸ E σημεῖον. οὐκ ἄρα ἡ A Γ ἐντὸς πίπτει τῆς τομῆς· ἐφάπτεται ἄρα.

Prop. XXXIV. *Theor.*

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum; ab eoque recta linea ad diametrum ordinatim applicetur; & quam rationem habent lineæ interjectæ inter applicatam & terminos transversi lateris figuræ, eandem habeant inter se partes lateris transversi, ita ut quæ sunt ad verticem partes sibi ipsis respondeant: recta linea, conjungens punctum quod in transverso latere sumitur & punctum quod est in sectione, sectionem ipsam continget.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἐὰν ἐπὶ ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, καὶ ὃν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς, τοῦτον ἔχῃ τὰ τμήματα τῆς πλαγίας πλευρᾶς, ὥστε ὁμόλογα εἶναι τὰ πρὸς τῇ κορυφῇ τμήματα· ἡ τὸ ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ληφθὲν σημεῖον καὶ τὸ ἐπὶ τῆς τομῆς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, ἐφάψεται τῆς τομῆς.

SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cujus diameter A B; sumaturque aliquod punctum in sectione, quod sit Γ; & ab eo Γ Δ ordinatim applicetur; fiat autem ut B Δ ad Δ A sic B E ad E A; & jungatur E Γ: dico lineam Γ E sectionem contingere.

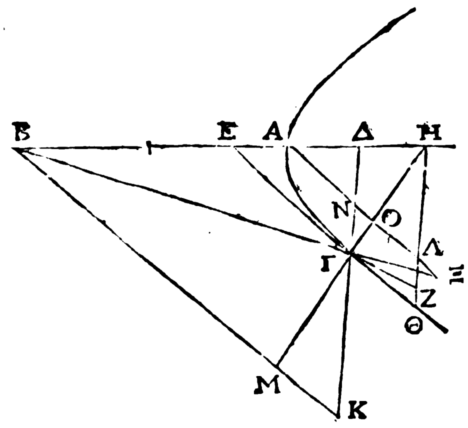
Si enim fieri potest, secet, ut E Γ Z: & sumpto in ea aliquo puncto Z ordinatim applicetur H Z Θ; per puncta vero A, B ducantur A Λ, B K ipsi E Γ parallelæ: & junctæ Δ Γ, B Γ, H Γ ad puncta K, Ξ, M producantur. itaque quoniam ut B Δ ad Δ A ita est B E ad E A; & ut B Δ ad Δ A sic [per 4. 6.] B K ad A N; ut autem B E ad A E ita [per 2. 6.] B Γ ad Γ Ξ, hoc est [per 4. 6.] B K ad Ξ N: erit ut B K ad A N ita B K ad N Ξ. æqualis est igitur [per 9. 5.] A N ipsi N Ξ: * & propterea [per 5.2.] rectangulum A N Ξ majus est rectangulo A O Ξ: quare [per 16. 6.] linea N Ξ ad Ξ O majorem habet ra-

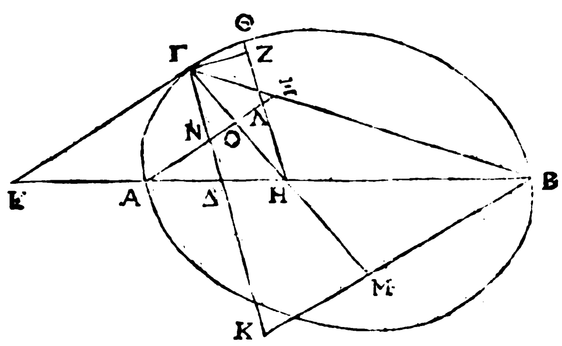
ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ A B, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τεταγμένως ἤχθω ἡ Γ Δ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ B Δ πρὸς Δ A οὕτως ἡ B E πρὸς E A, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ E Γ· λέγω ὅτι ἡ Γ E ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

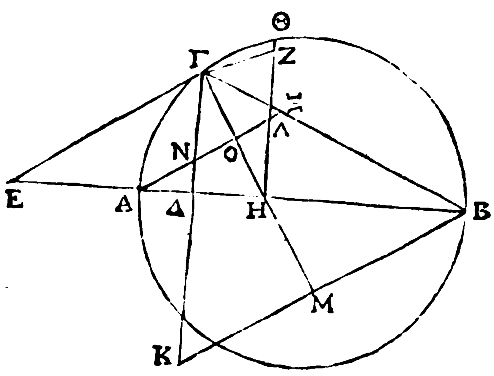
Εἰ γὰρ δυνατὸν, τεμνέτω ὡς ἡ E Γ Z, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Z, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ H Z Θ, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν A, B τῇ E Γ παράλληλοι αἱ A Λ, B K, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ Δ Γ, B Γ, H Γ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ K, Ξ, M σημεῖα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ B Δ πρὸς Δ A οὕτως ἡ B E πρὸς E A, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ B Δ πρὸς Δ A οὕτως ἡ B K πρὸς A N, ὡς δὲ ἡ B E πρὸς A E οὕτως ἡ B Γ πρὸς Γ Ξ, τουτέστιν ἡ B K πρὸς Ξ N· ὡς ἄρα ἡ B K πρὸς A N οὕτως ἡ B K πρὸς N Ξ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ A N τῇ N Ξ· [a] τὸ ἄρα ὑπὸ A N Ξ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ A O Ξ· ἡ N Ξ ἄρα πρὸς Ξ O μείζονα

ζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ. ἀλλ' ὡς ἡ ΝΞ πρὸς ΞΟ, οὕτως ἡ ΚΒ πρὸς ΒΜ· ἡ ΚΒ ἄρα πρὸς ΒΜ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΜΒ, ΑΟ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΜΒ, ΑΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. [b] ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΔ, ΕΓΔ, ΑΝΔ τριγώνων· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΜΒ, ΑΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ·

tionem quam ΟΑ ad ΑΝ. sed [per 4. 6.] ut ΝΞ ad ΞΟ ita ΚΒ ad ΒΜ: ergo ΚΒ ad ΒΜ majorem rationem habet quam ΟΑ ad ΑΝ: ideoque [per 16.6.] rectangulum quod fit sub ΚΒ, ΑΝ majus est eo quod fit sub ΒΜ, ΑΟ: sequitur igitur [per 9.5.] rectangulum sub ΚΒ, ΑΝ ad quadratum ex ΓΕ majorem rationem habere quam rectangulum sub ΜΒ, ΑΟ ad quadratum ex ΓΕ. [b] at vero [per *Pappi* lem. 5.] ut rectangulum sub ΚΒ, ΑΝ ad quadratum ex ΓΕ, sic rectangulum ΒΔΑ ad quadratum ex ΔΕ, propter similitudinem triangulorum ΒΚΔ, ΕΓΔ, ΑΝΔ; & ut rectangulum sub ΜΒ, ΑΟ ad quadratum ex ΓΕ, sic rectangulum ΒΗΑ ad quadratum ex ΗΕ: ergo ΒΔΑ rectangulum ad quadratum ex ΔΕ majorem rationem habet quam rectangulum ΒΗΑ ad quadratum ex







ἐναλλὰξ ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· καὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΗ τῆς ΖΗ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΕΓ τέμνει τὴν τομήν· ἐφάπτεται ἄρα.

ΗΕ; & permutando [per 16. 5.] rectangulum ΒΔΑ ad rectangulum ΒΗΑ majorem habet rationem quam quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΗ. sed [per 21. huj.] ut rectangulum ΒΔΑ ad ipsum ΑΗΒ ita quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΗΘ, & [per 4. & 22. 6.] ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΗ sic quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΖΗ: quadratum igitur ex ΓΔ ad quadratum ex ΘΗ majorem rationem habet quam quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΖΗ: & idcirco [per 9.5.] ΘΗ minor est ipsa ΗΖ; quod fieri non potest. igitur ΕΓ sectionem non secat: quare sectionem ipsam contingat necesse est.

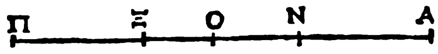
EUTOCIUS.

Δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἡ ΓΔ κατηγμένη ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τὰς ΔΒ, ΔΑ ὁρίζουσα, τὴν ΒΑ καταλιμπάνει ὀφείλουσαν τμηθῆναι εἰς τὸν τῶν ΒΔ, ΔΑ λόγον· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἀνάπαλιν, τὴν ΒΑ τέμνουσα εἰς ὡρισμένον λόγον τὸν τῶν ΒΔ, ΔΑ, ἐπιζητεῖν ἡμᾶς ποιεῖ τὸν τῶν ΒΕ, ΕΑ· οὐδὲν γὰρ δυσχερὲς

Sciendum est ΓΔ, quae ad diametrum ordinatim applicatur, in hyperbola quidem terminare lineas ΔΒ, ΔΑ, cadens extra ipsam ΒΑ, quae in ratione linearum ΒΔ, ΔΑ secari debet: in ellipsi vero & circuli circumferentia contrarium evenit, nam cum secet ipsam ΒΑ, necesse est ut inquiramus ΒΕ, ΕΑ in determinata ratione, in qua videlicet sunt ΒΔ, ΔΑ. neque enim difficile

cile est data ratione æqualem ipsi exhibere. sed & illud scire oportet, in unaquaque sectione duas descriptiones esse, nempe puncto Z vel intra Γ vel extra sumpto, ita ut omnes casus sex sint. utitur autem duobus lemmatibus quæ nos deinceps conscribemus.

[a] Et propterea rectangulum A N Ξ majus est rectangulo A O Ξ: quare linea N Ξ ad Ξ O majorem rationem habet quam O A ad A N.] Quoniam enim rectangulum A N Ξ rectangulo A O Ξ majus est, fiat rectangulo A N Ξ æquale rectangulum quod sub ipsa A O & alia quapiam, videlicet Ξ Π, continebatur, quæ quidem major erit quam Ξ O: est igitur [per 16. 6.] ut O A ad A N sic N Ξ ad Ξ Π. sed [per 8. 5.] N Ξ ad Ξ O majorem rationem habet quam ad Ξ Π: ergo A O ad A N minorem habet rationem quam N Ξ ad Ξ O.



Sed & hujus conversum etiam constat, si Ξ N ad Ξ O majorem rationem habeat quam O A ad A N, & rectangulum A N Ξ majus esse rectangulo A O Ξ. fiat enim ut O A ad A N ita N Ξ ad aliam majorem ipsa Ξ O, videlicet ad Ξ Π: quare rectangulum A N Ξ æquale est rectangulo quod sub A O, Ξ Π continetur: rectangulum igitur A N Ξ rectangulo A O Ξ majus erit.

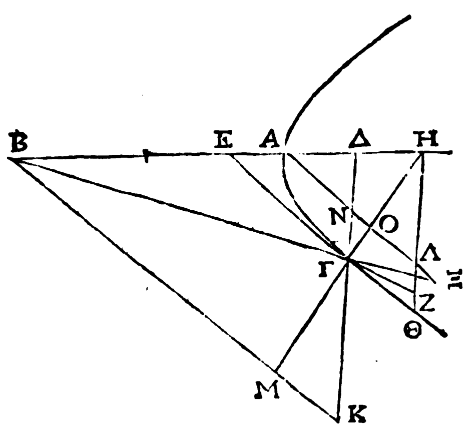
[b] At vero ut rectangulum sub K B, A N ad quadratum ex E Γ, sic rectangulum B Δ A ad quadratum ex E Δ.] Quoniam igitur ob rectas A N, E Γ, K B parallelas, ut A N ad E Γ ita est [per 4. 6.] A Δ ad Δ E; ut autem E Γ ad K B ita E Δ ad Δ B: quare ex æquali ut A N ad K B ita A Δ ad Δ B, & propterea [per 1. 6.] ut quadratum ex A N ad rectangulum sub A N, K B, ita quadratum ex A Δ ad rectangulum A Δ B. sed ut quadratum ex E Γ ad quadratum ex A N ita quadratum ex E Δ ad quadratum ex Δ A: ergo ex æquali, ut quadratum ex E Γ ad rectangulum sub A N, K B, ita quadratum ex E Δ ad rectangulum A Δ B; & invertendo, ut rectangulum sub K B, A N ad quadratum ex E Γ, ita rectangulum B Δ A ad quadratum ex E Δ.

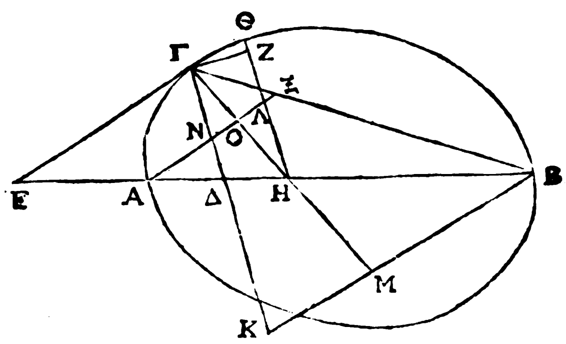
λόγε δοθέντος ἴσον αὐτῷ ποιέσασθαι. δεῖ μέντοι εἰδέναι, ὅτι καθ' ἑκάστην τομὴν καταγραφαί εἰσι δύο, τῦ Ζ σημείε ἢ ἐσωτέρω τῦ Γ λαμβανομένε, ἢ ἐξωτέρω, ὥστε εἶναι τὰς πάσας πτώσεις ἕξ. χρῆται δὲ καὶ δυσὶ λήμμασιν ἅπερ ἑξῆς γράψομεν.

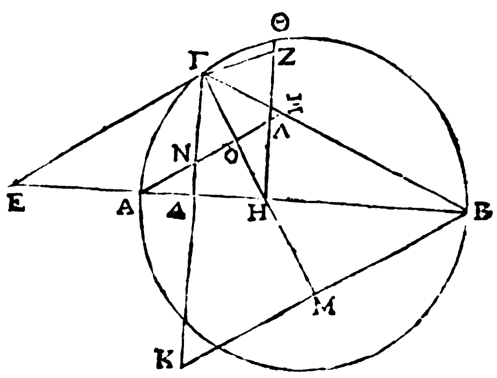
[a] Μεῖζον ἄρα τὸ ὑπὸ Α Ν Ξ τῦ ὑπὸ Α Ο Ξ· ἡ Ν Ξ ἄρα πρὸς Ξ Ο μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ο Α πρὸς Α Ν.] Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ Α Ν, Ν Ξ μεῖζόν ἐστι τῦ ὑπὸ Α Ο, Ο Ξ, γινέσθω τῷ ὑπὸ Α Ν, Ν Ξ ἴσον τὸ ὑπὸ τῆς Α Ο καὶ ἄλλης τινὸς τῆς Ξ Π, ἥτις μείζων ἔσται τῆς Ξ Ο· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ο Α πρὸς Α Ν οὕτως ἡ Ν Ξ πρὸς Ξ Π. ἡ δὲ Ν Ξ πρὸς Ξ Ο μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν Ξ Π· καὶ ἡ Α Ο ἄρα πρὸς Α Ν ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ν Ξ πρὸς Ξ Ο.

Φανερὸν δὴ καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ὅτι, κἂν ἡ Ξ Ν πρὸς Ξ Ο μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ Ο Α πρὸς Α Ν, τὸ ὑπὸ Ξ Ν, Ν Α μεῖζόν ἐστι τῦ ὑπὸ Α Ο Ξ. γινέσθω γὰρ ὡς ἡ Ο Α πρὸς Α Ν οὕτως ἡ Ν Ξ πρὸς μείζονα δηλονότι τῆς Ξ Ο, ὡς τὴν Ξ Π· τῷ ἄρα ὑπὸ Ν Ξ, Ν Α ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ Α Ο, Ξ Π· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ Ξ Ν, Ν Α τῦ ὑπὸ Α Ο, Ο Ξ.

[b] Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ Κ Β, Α Ν πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Γ οὕτως τὸ ὑπὸ Β Δ Α πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Δ.] Ἐπεὶ οὖν, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς Α Ν, Ε Γ, Κ Β, ἐστὶν ὡς ἡ Α Ν πρὸς Ε Γ οὕτως ἡ Α Δ πρὸς Δ Ε, ὡς δὲ ἡ Ε Γ πρὸς Κ Β οὕτως ἡ Ε Δ πρὸς Δ Β· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ Α Ν πρὸς Κ Β οὕτως ἡ Α Δ πρὸς Δ Β· καὶ ὡς







ἄρα τὸ ἀπὸ Α Ν πρὸς τὸ ὑπὸ Α Ν, Κ Β, οὕτως τὸ ἀπὸ Α Δ πρὸς τὸ ὑπὸ Α Δ Β. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ Ε Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Α Ν οὕτως τὸ ἀπὸ Ε Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Α· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ Ε Γ πρὸς τὸ ὑπὸ Α Ν, Κ Β, οὕτως τὸ ἀπὸ Ε Δ πρὸς τὸ ὑπὸ Α Δ Β· καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ὑπὸ Κ Β, Α Ν πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Γ, οὕτως τὸ ὑπὸ Β Δ Α πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Δ.

PROP. XXXV. *Theor.*

Si parabolam recta linea contingat, conveniens cum diametro extra sectio-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐφάπτηται, συμπίπτουσα τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς· ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εὐθεῖα ἀχθεῖσα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον ἴσην ἀπολήψεται ἀπὸ τῆς διαμέτρου, πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, τῇ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τομῆς οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

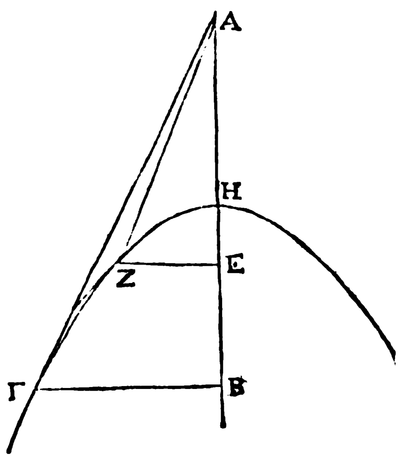
nem: quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abſcindet ex diametro ad verticem ſectionis rectam æqualem ei quæ inter ipſam & contingentem interjicitur; & in locum qui eſt inter contingentem & ſectionem alia recta non cadet.

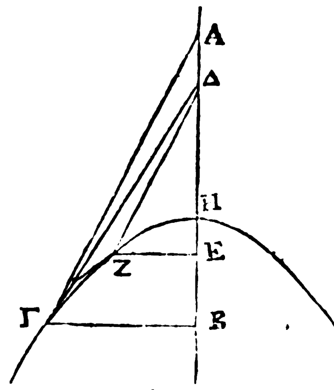
ΕΣΤΩ παραβολὴ ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΗ ἴση ἐστὶ τῇ ΗΒ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἄνισος αὐτῇ, καὶ τῇ ΑΗ ἴση κείσθω ἡ ΗΕ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· ἡ ΑΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΓ εὐθείᾳ· ὅπερ ἀδύνατον, δυεῖν γὰρ ἔσται εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἴση ἄρα.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, παρεμπιπτέτω ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ΗΔ ἴση κείσθω ἡ ΗΕ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΕΖ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς τομῆς· ἐκβαλλομένη ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται αὐτῆς· ὥστε συμπεσεῖται τῇ ΔΓ, καὶ δυεῖν εὐθειῶν ἔσται τὰ αὐτὰ πέρατα, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε τομῆς καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα.





SIT parabola, cujus diameter AB; ordinatimque applicetur BΓ; & ſit AΓ ſectionem contingens: dico AH ipſi HB æqualem eſſe.

Si enim fieri poteſt, ſit inæqualis; & ipſi AH æqualis ponatur HE; recta autem EZ ordinatim applicetur; & jungatur AZ: ergo [per 33. huj.] AZ producta conveniet cum AΓ; quod fieri non poteſt: duarum enim rectarum iidem termini eſſent. non ergo inæqualis eſt AH ipſi HB: quare neceſſario erit æqualis.

RURSUS dico in locum, qui eſt inter AΓ & ſectionem, aliam rectam lineam non cadere.

Si enim fieri poſſit, cadat ΓΔ; ipſique HΔ æqualis ponatur HE; & EZ ordinatim applicetur: ergo [per 33. huj.] à puncto Δ ad Z ducta recta continget ſectionem; quare producta extra ipſam cadet: & propterea conveniet cum ΔΓ, eruntque duarum rectarum iidem termini; quod eſt abſurdum. non igitur in locum, qui eſt inter ſectionem & AΓ, alia recta cadet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛʹ.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, συμπίπτουσα τῇ πλαγίᾳ τοῦ εἴδους πλευρᾷ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον· ἔσται ὡς ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ πέρατι τῆς πλαγίας πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ ἑτέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς, οὕτως ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ πέρατι τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ ἑτέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς, ὥστε τὰς ὁμολόγους συνεχεῖς εἶναι· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τοῦ κώνου τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

PROP. XXXVI. *Theor.*

Si hyperbolam, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea conveniens cum tranſverſo figuræ latere, & à tactu recta ad diametrum ordinatim applicetur: erit ut recta, quæ interjicitur inter contingentem & terminum tranſverſi lateris ad interjectam inter eandem & alterum lateris terminum, ita quæ eſt inter ordinatim applicatam & terminum lateris ad eam quæ eſt inter eandem & alterum terminum, adeo ut continuatæ inter ſe ſint quæ ſibi ipſis reſpondent; & in locum, qui inter contingentem & ſectionem coni interjicitur, altera recta non cadet.

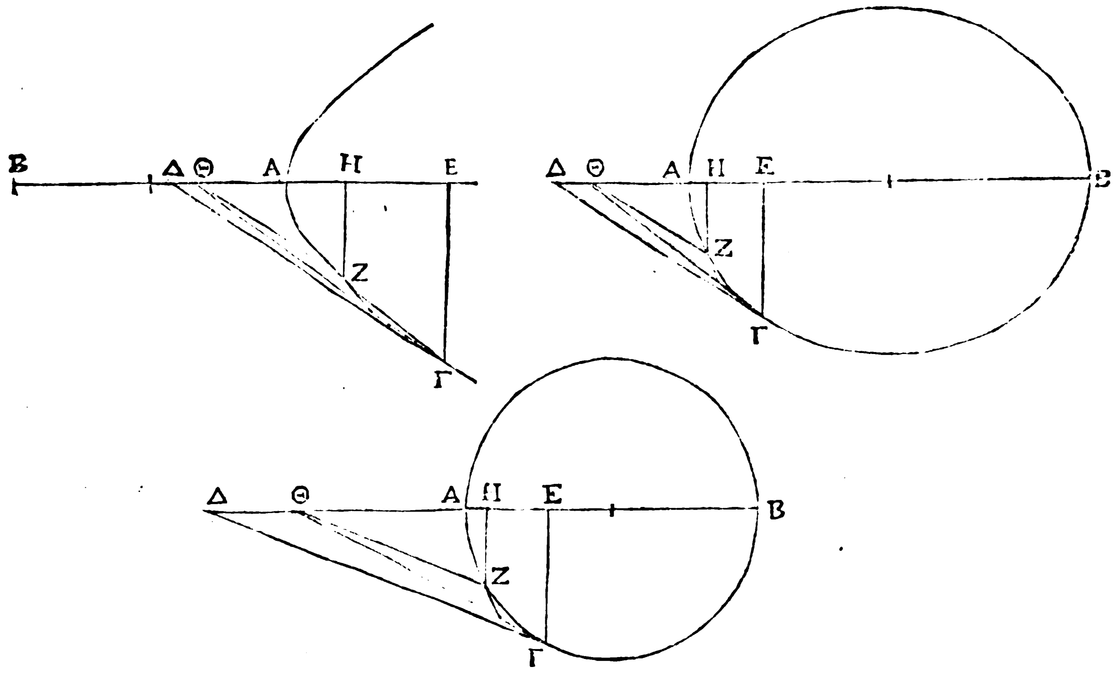
SIT

SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cujus diameter A B; recta vero contingens sit Γ Δ, & Γ E ordinatim applicetur: dico ut B E ad E A sic esse B Δ ad Δ A.

Si enim non est ita; sit ut B Δ ad Δ A sic B H ad H A, & ordinatim applicetur H Z: ergo [per 34. huj.] quæ à puncto Δ ad Z ducitur recta sectionem continget, & producta conveniet cum ipsa Γ Δ: quare duarum rectarum iidem termini erunt; quod est absurdum.

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ Α Β, ἐφαπτομένη δὲ ἔστω ἡ Γ Δ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ Γ Ε· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Β Ε πρὸς Ε Α οὕτως ἡ Β Δ πρὸς Δ Α.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἔστω ὡς ἡ Β Δ πρὸς Δ Α οὕτως ἡ Β Η πρὸς Η Α, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ Η Ζ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ [ἐπὶ τὸ Ζ] ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς τομῆς· ἐκβαλλομένη ἄρα συμπεσεῖται τῇ Γ Δ· δυεῖν ἄρα εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατά ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον.



DICO etiam in locum, qui inter sectionem & Γ Δ interjicitur, nullam rectam cadere.

Si enim fieri potest, cadat Γ Θ; & ut B Θ ad Θ A ita fiat B H ad H A, & H Z ordinatim applicetur: juncta ergo Θ Z, si producatur, [per 34. huj.] conveniet cum ipsa Θ Γ, atque erunt duarum rectarum iidem termini; quod fieri non potest. non ergo inter sectionem & Γ Δ altera recta cadet.

ΛΕΓΩ ὅτι μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς Γ Δ εὐθείας οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ Γ Θ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ Β Θ πρὸς Θ Α οὕτως ἡ Β Η πρὸς Η Α, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ Η Ζ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ Θ Γ· δυεῖν ἄρα εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατά ἐστιν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τομῆς καὶ τῆς Γ Δ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα.

PROP. XXXVII. *Theor.*

Si recta linea hyperbolam, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam contingens cum diametro conveniat, & à tactu ad diametrum recta ordinatim applicetur: quæ interjicitur inter applicatam & centrum sectionis, una cum interjecta inter contingentem & sectionis centrum, continebit rectangulum æquale quadrato rectæ quæ est ex centro sectionis: sed una cum ea, quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, continebit spatium, quod ad quadratum ordinatim applicatæ eandem rationem habet quam transversum figuræ latus ad rectum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως· ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, μετὰ μὲν τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, ἴσον περιέξει τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς· μετὰ δὲ τῆς μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιέχει χωρίον, λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης τετράγωνον ὃν ἡ πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν.

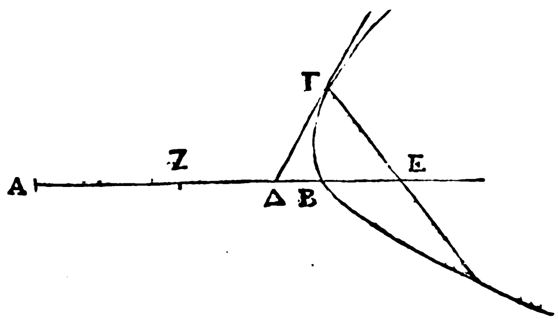
ΕΣΤΩ

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΓΕ, κέντρον δὲ ἔστω τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΔΖΕ τῷ ἀπὸ ΖΒ, καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν.

Ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτεται ἡ ΓΔ τῆς τομῆς, καὶ τεταγμένως κατῆκται ἡ ΓΕ, ἔσται ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ· συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ ΑΔ, ΔΒ πρὸς ΔΒ οὕτως συναμφότερος ἡ ΑΕ, ΕΒ πρὸς ΕΒ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση. ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἐροῦμεν. ἀλλὰ συναμφοτέρου μὲν τῆς ΑΕ, ΕΒ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ΖΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡ ΖΒ· ὡς ἄρα ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ· ἀναστρέψαντι ἄρα, ἐστὶν ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΖΒ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΖΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΖΔ τῷ ἀπὸ ΖΒ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ΖΒ πρὸς ΒΔ, τουτέστιν ἡ ΑΖ πρὸς ΔΒ· ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΕ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΒ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΕΔ. ἔστι δὲ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν.

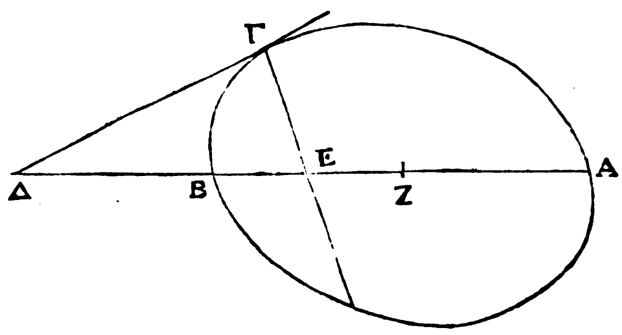
Ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς κύκλου περιφερείας. ἀλλὰ συναμφοτέρου μὲν τῆς ΑΔ, ΔΒ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ΔΖ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ΖΒ· ὡς ἄρα ἡ ΖΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΒΕ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖΕ τῷ ἀπὸ ΒΖ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΕΖ καὶ τῷ ἀπὸ ΖΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ λοιπῷ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον ἔσται· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. ἀλλὰ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν.

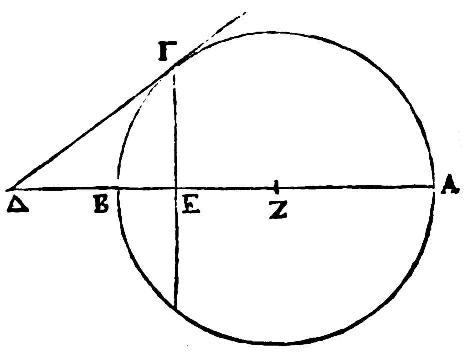
SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cujus diameter ΑΒ; ducaturque contingens ΓΔ, & ΓΕ ordinatim applicetur; centrum autem sit Ζ: dico rectangulum ΔΖΕ quadrato ex ΖΒ æquale esse; & ut rectangulum ΔΕΖ ad quadratum ex ΕΓ ita transversum latus ad rectum.



Quoniam enim ΓΔ contingit sectionem, & ordinatim applicata est ΓΕ; erit [per 36.huj.] ut ΑΔ ad ΔΒ ita ΑΕ ad ΕΒ: ergo [per 18. 5.] componendo, ut utraque ΑΔ, ΔΒ ad ΔΒ ita utraque ΑΕ, ΕΒ ad ΕΒ; & antecedentium dimidia. In hyperbola quidem in hunc modum argumentabimur. sed utriusque ΑΕ, ΕΒ dimidia est ΖΕ, ipsius autem ΑΒ dimidia ΖΒ: ut igitur ΖΕ ad ΕΒ ita ΖΒ ad ΒΔ; & [per cor. 19. 5.] per conversionem rationis ut ΕΖ ad ΖΒ ita ΖΒ ad ΖΔ: quare [per 17. 6.] rectangulum ΕΖΔ quadrato ex ΖΒ est æquale. Et quoniam ut ΖΕ ad ΕΒ ita ΖΒ ad ΒΔ, hoc est ΑΖ ad ΔΒ; erit [per 16. 5.] permutando ut ΑΖ ad ΖΕ ita ΔΒ ad ΒΕ; & [per 18. 5.] componendo ut ΑΕ ad ΕΖ ita ΔΕ ad ΕΒ: ergo [per 17. 6.] rectangulum ΑΕΒ æquale est rectangulo ΖΕΔ. sed [per 21.huj.] ut rectangulum ΑΕΒ ad quadratum ΓΕ ita transversum latus ad rectum: ut igitur rectangulum ΖΕΔ ad quadratum ΓΕ ita transversum latus ad rectum.

In ellipsi vero, & circuli circumferentia hoc modo. sed utriusque ΑΔ, ΔΒ dimidia est ΔΖ; & ipsius ΑΒ dimidia ΖΒ: ergo ut ΖΔ ad ΔΒ ita ΖΒ ad ΒΕ; & [per cor.19.5.] per conversionem rationis, ut ΔΖ ad ΖΒ ita ΒΖ ad ΖΕ: rectangulum igitur ΔΖΕ [per 17. 6.] æquale est quadrato ex ΒΖ. At vero [per 3. 2.] rectangulum ΔΖΕ rectangulo ΔΕΖ una cum quadrato ex ΖΕ est æquale; & [per 5.2.] quadratum ex ΒΖ æquale est rectangulo ΑΕΒ una cum quadrato ex ΖΕ. commune auferatur quadratum ex ΖΕ: reliquum igitur rectangulum ΔΕΖ reliquo ΑΕΒ æquale erit: ut igitur rectangulum ΔΕΖ ad quadratum ex ΓΕ, ita [per 7. 5.] rectangulum ΑΕΒ ad quadratum ex ΓΕ. sed [per 21. huj.] ut rectangulum ΑΕΒ ad quadratum ex ΓΕ ita transversum latus ad rectum: ergo ut rectangulum ΔΕΖ ad quadratum ex ΕΓ ita transversum latus ad rectum.





EUTOCIUS.

Ex his theorematibus patet, quomodo per datum punctum in diametro vel vertice sectionis contingentem rectam ducere possimus.

Διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων φανερὸν, ὅπως ἔστι δυνατὸν διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἐπὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν.

PROP. XXXVIII. *Theor.*

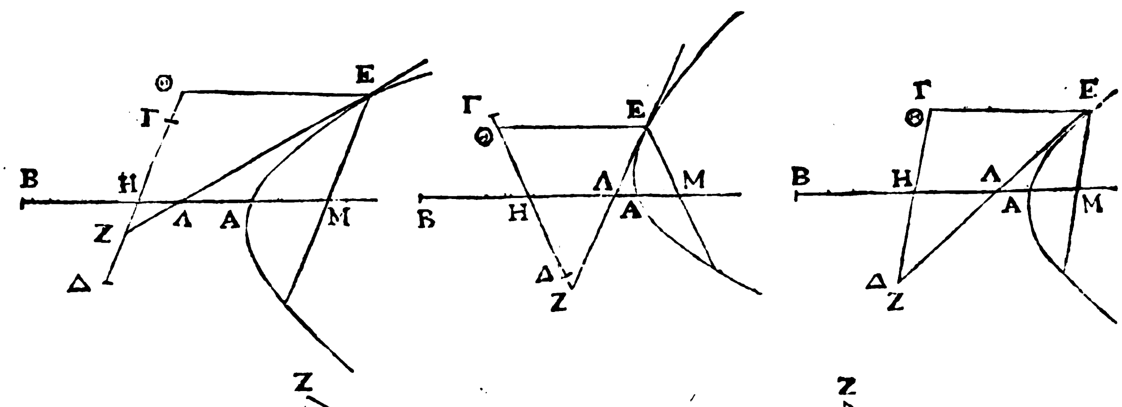
Si hyperbolam, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum secunda diametro conveniat; & à tactu ad diametrum applicetur recta alteri diametro parallela: quæ interjicitur inter applicatam & sectionis centrum, una cum interjecta inter contingentem & centrum sectionis, continebit rectangulum æquale quadrato quod fit ex dimidia secundæ diametri; sed una cum ea, quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, spatium continebit, quod ad quadratum applicatæ eam rationem habeat, quam figuræ rectum latus ad transversum.

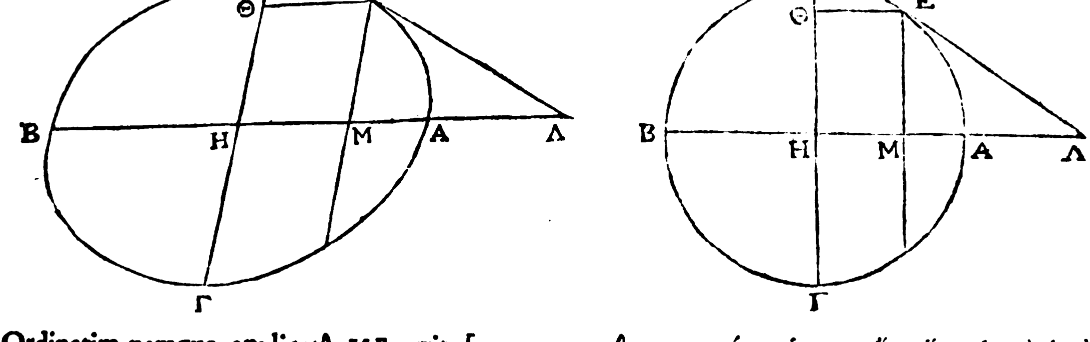
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εὐθεῖα καταχθῇ ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ· ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, μετὰ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, ἴσον περιέξει τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου τετραγώνῳ· μετὰ δὲ τῆς μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιέξει χωρίον λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης, ὃν ἔχει ἡ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν.

SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cujus diameter ΑΗΒ, secunda diameter ΓΗΔ; recta vero sectionem contingens sit ΕΛΖ, quæ conveniat cum ΓΔ in Ζ; & ΘΕ ipsi ΑΒ sit parallela: dico rectangulum ΖΗΘ quadrato ex ΓΗ æquale esse; & ut rectangulum ΗΘΖ ad quadratum ex ΘΕ ita rectum figuræ latus ad latus transversum.

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἧς διάμετρος ἡ ΑΗΒ, δευτέρα δὲ διάμετρος ἡ ΓΗΔ, ἐφαπτομένη δὲ ἔστω τῆς τομῆς ἡ ΕΛΖ συμπίπτουσα τῇ ΓΔ κατὰ τὸ Ζ, παράλληλος δὲ ἔστω τῇ ΑΒ ἡ ΘΕ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ ΗΓ ἐστὶν ἴσον, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΗΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ οὕτως ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν.





Ordinatim namque applicatâ ΜΕ, erit [per 37.huj.] ut rectangulum ΗΜΛ ad quadratum ex ΜΕ ita transversum latus ad rectum. sed [per def. 2$^{\text{dæ}}$ diam.] ut transversum latus ΒΑ ad ΓΔ ita ΓΔ ad latus rectum: ergo [per cor. 20. 6.]

Ἤχθω τεταγμένως ἡ ΜΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΗΜΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ' ἔστιν ὡς ἡ πλαγία ΒΑ πρὸς ΓΔ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα ἡ πλαγία ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ἀπὸ Α Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Δ, καὶ τὰ τέταρτα, τουτέστι τὸ ἀπὸ Η Α πρὸς τὸ ἀπὸ Η Γ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Η Μ Λ πρὸς τὸ ἀπὸ Μ Ε οὕτως τὸ ἀπὸ Η Α πρὸς τὸ ἀπὸ Η Γ. τὸ δὲ ὑπὸ Η Μ Λ πρὸς τὸ ἀπὸ Μ Ε τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Η Μ πρὸς Μ Ε, τουτέστι πρὸς Η Θ, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ Λ Μ πρὸς Μ Ε· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ τοῦ ἀπὸ Γ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Η Α λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Ε Μ πρὸς Η Μ, τουτέστιν Θ Η πρὸς Μ Η, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει Ε Μ πρὸς Μ Λ, τουτέστιν ἡ Ζ Η πρὸς Η Λ· τὸ ἄρα ἀπὸ Η Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Η Α τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Θ Η πρὸς Η Μ, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ Ζ Η πρὸς Η Λ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ Ζ Η Θ πρὸς τὸ ὑπὸ Μ Η Λ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Ζ Η Θ πρὸς τὸ ὑπὸ Μ Η Λ οὕτως τὸ ἀπὸ Γ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Η Α· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ Ζ Η Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Η οὕτως τὸ ὑπὸ Μ Η Λ πρὸς τὸ ἀπὸ Η Α. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ Μ Η Λ τῷ ἀπὸ Η Α· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ Ζ Η Θ τῷ ἀπὸ Η Γ. Πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτως τὸ ἀπὸ Ε Μ πρὸς τὸ ὑπὸ Η Μ Λ, καὶ τὸ ἀπὸ Ε Μ πρὸς τὸ ὑπὸ Η Μ Λ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Ε Μ πρὸς Η Μ, τουτέστιν ἡ Θ Η πρὸς Θ Ε, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Ε Μ πρὸς Μ Λ, τουτέστιν ἡ Ζ Η πρὸς Η Λ, τουτέστιν ἡ Ζ Θ πρὸς Θ Ε, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ Ζ Θ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Θ Ε· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Ζ Θ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Θ Ε οὕτως ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν.

ut tranſverſum latus ad rectum ita quadratum ex A B ad quadratum ex Γ Δ: & [per 15.5.] ita horum quadratorum quartæ partes, videlicet quadratum ex H A ad quadratum ex H Γ: ut igitur rectangulum H M Λ ad quadratum ex M E ita quadratum ex A H ad quadratum ex H Γ. ſed [per 23. 6.] rectangulum H M Λ ad quadratum ex M E compoſitam rationem habet ex ratione H M ad M E, hoc eſt [per 33.1.] ad H Θ, & ex ratione Λ M ad M E: quare invertendo ratio quadrati ex Γ H ad quadratum ex H A componitur ex ratione E M ad M H, hoc eſt Θ H ad H M, & ex ratione E M ad M Λ, hoc eſt [per 4. 6.] Z H ad H Λ: ergo quadratum ex H Γ ad quadratum ex H A compoſitam habet rationem ex ratione Θ H ad H M, & ex ratione Z H ad H Λ, quæ quidem eadem eſt [per 23. 6.] ac rectanguli Z H Θ ad rectangulum M H Λ: ut igitur rectangulum Z H Θ ad M H Λ rectangulum ita quadratum ex Γ H ad quadratum ex H A; & permutando ut rectangulum Z H Θ ad quadratum ex Γ H ita rectangulum M H Λ ad quadratum ex H A. rectangulum autem M H Λ [per 37. huj.] æquale eſt quadrato ex H A: ergo & rectangulum Z H Θ quadrato ex H Γ æquale erit. Rurſus [per 21.huj.] ut rectum latus ad tranſverſum ita quadratum ex E M ad rectangulum H M Λ. quadratum vero ex E M ad rectangulum H M Λ [per 23. 6.] compoſitam rationem habet ex ratione E M ad H M, hoc eſt H Θ ad Θ E; & ex ratione E M ad M Λ, hoc eſt [per 4. 6.] Z H ad H Λ, ſive Z Θ ad Θ E: quare ratio hæc eadem eſt [per 23. 6.] quam habet rectangulum Z Θ H ad quadratum ex Θ E: ergo ut rectangulum Z Θ H ad quadratum ex Θ E ita rectum latus ad tranſverſum.

* Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῆς κατηγμένης, πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ ἑτέρου πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου, οὕτως ἡ μεταξὺ τοῦ ἑτέρου πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ αὐτοῦ πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης.

Iiſdem poſitis oſtendendum eſt, ut recta, quæ inter tangentem & terminum ſecundæ diametri ad partes applicatæ interjicitur, ad eam, quæ inter tangentem & alterum terminum ſecundæ diametri; ita eſſe rectam, quæ eſt inter alterum terminum & applicatam, ad eam quæ inter eundem terminum & applicatam.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ Ζ Η Θ τῷ ἀπὸ Η Γ, τουτέστι τῷ ὑπὸ Γ Η Δ, ἴση γὰρ ἡ Γ Η τῇ Η Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζ Η πρὸς Η Δ οὕτως ἡ Γ Η πρὸς Η Θ, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ Ζ Η πρὸς Ζ Δ οὕτως ἡ Η Γ πρὸς Γ Θ, καὶ τὰ διπλᾶ τῶν ἡγουμένων. ἔστι δὲ διπλασία τῆς Η Ζ [ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως τῆς ὑπερβολῆς ἡ τῶν Γ Ζ, Ζ Δ ὑπεροχή, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας] συναμφότερος ἡ Γ Ζ, Ζ Δ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν Γ Η τῇ Η Δ, τῆς δὲ Η Γ διπλασία ἡ Γ Δ· ὡς ἄρα [ἡ τῶν Γ Ζ, Ζ Δ ὑπεροχὴ ἢ] συναμφότερος ἡ Γ Ζ, Ζ Δ πρὸς Ζ Δ οὕτως ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ, καὶ [συνθέντι ἐπὶ τῆς πρώτης πτώσεως, ἢ ἐπὶ τῆς δευτέρας] διελόντι ὡς ἡ Γ Ζ πρὸς Ζ Δ οὕτως ἡ Δ Θ πρὸς Θ Γ.

Quoniam enim [ex ſup.prop.] æquale eſt rectangulum Z H Θ quadrato ex H Γ, hoc eſt rectangulo Γ H Δ; nam linea Γ H æqualis eſt ipſi H Δ: erit [per 16.6.] ut Z H ad H Δ ita Γ H ad H Θ; & [per cor. 19. 6.] per converſionem rationis, ut Z H ad Z Δ ita H Γ ad Γ Θ, & antecedentium dupla. eſt autem dupla ipſius H Z differentia inter Γ Z, Z Δ, in primo caſu hyperbolæ, at in ſecundo utraque Γ Z, Z Δ ſimul ſumpta, ob æquales Γ H, H Δ; ac Γ Δ dupla eſt ipſius H Γ: ut igitur differentia vel ſumma ipſarum Γ Z, Z Δ ad Z Δ ita Γ Δ ad Γ Θ, ac componendo in primo caſu vel dividendo in ſecundo fiet Γ Z ad Z Δ ſicut Δ Θ ad Θ Γ.

* Hæc demonſtratio hyperbolæ tantum competit, ſed levi mutatione ad ellipſin & circulum transferri poteſt, & in quibuſdam codicibus theorema hoc ſic reperitur enunciatum, convenientius nempe ellipſi & circulo, Ὡς ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῆς κατηγμένης, πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ αὐτοῦ πέρατος, οὕτως ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ ἑτέρου πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ ἑτέρου πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης. Ut intercepta inter contingentem & terminum ſecundæ diametri ad partes applicatæ, ad interceptam inter applicatam & dictum terminum, ita intercepta inter contingentem & alterum terminum ſecundæ diametri ad inteceptum inter hunc alterum terminum & applicatam; hoc eſt ut Γ Z ad Z Δ ita Γ Θ ad Θ Δ: id quod ex trigeſima ſexta hujus manifeſtum eſt.

Corollarium.

Ex jam dictis manifestum est E Z contingere sectionem, sive rectangulum Z H Θ æquale sit quadrato ex H Γ, sive Z Θ H rectangulum ad quadratum ex Θ E eam, quam diximus, rationem habeat. converso enim modo illud facile ostendetur.

Πόρισμα.

Φανερὸν δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων ὅτι ἡ E Z ἐφάπτεται τῆς τομῆς, ἐάν τε ἴσον ᾖ τὸ ὑπὸ Z H Θ τῷ ἀπὸ τῆς H Γ, ἐάν τε λόγον ἔχῃ τὸ ὑπὸ Z Θ H πρὸς τὸ ἀπὸ Θ E τὸν εἰρημένον. δειχθήσεται γὰρ ἀντιστρόφως.

EUTOCIUS.

In aliquibus exemplaribus hoc theorema in sola hyperbola demonstratum invenimus: sed hoc loco universaliter demonstratur, quoniam eadem contingunt & in diversis sectionibus. *Apollonio* autem visum est non solum hyperbolam sed etiam ellipsim secundam diametrum habere, ut sæpe ex ipso in superioribus didicimus. Et in ellipsi quidem casum non habet, in hyperbola vero tres habet casus. punctum enim Z, in quo recta sectionem contingens cum secunda diametro convenit, vel est infra Δ, vel in ipso Δ, vel supra; & propterea punctum Θ similiter tres locos obtinet. attendendum autem est, cum Z cadit infra Δ, & Θ infra Γ cadere; cum vero Z cadit in Δ, Θ cadit in Γ; & cum Z supra Δ, & Θ supra Γ cadit.

Ἐν τισιν ἀντιγράφοις τὸ θεώρημα τοῦτο ἐπὶ μόνης τῆς ὑπερβολῆς εὑρίσκεται δεδειγμένον. καθολικῶς δὲ ἐνταῦθα δέδεικται· τὰ γὰρ αὐτὰ συμβαίνει καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τομῶν. καὶ τῷ Ἀπολλωνίῳ δὲ δοκεῖ μὴ οὐ μόνον τὴν ὑπερβολὴν, ἀλλὰ καὶ τὴν ἔλλειψιν ἔχειν δευτέραν διάμετρον, ὡς πολλάκις αὐτοῦ ἠκούσαμεν ἐν τοῖς προλαβοῦσι. καὶ ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως πτῶσιν οὐκ ἔχει, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς τρεῖς. τὸ γὰρ Z σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἐφαπτομένη τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, ἢ κατωτέρω τοῦ Δ ἐστὶ, ἢ ἐπὶ τοῦ Δ, ἢ ἀνωτέρω τοῦ Δ· καὶ διὰ τοῦτο τὸ Θ ὁμοίως αὐτῷ τρεῖς ἕξει τόπους. καὶ προσεκτέον, ὅτι εἴτε κατωτέρω πίσῃ τὸ Z τοῦ Δ, καὶ τὸ Θ τοῦ Γ ἔσται κατωτέρω· εἴτε τὸ Z ἐπὶ τὸ Δ, καὶ τὸ Θ ἐπὶ τὸ Γ· εἴτε ἀνωτέρω τὸ Z τοῦ Δ, καὶ τὸ Θ τοῦ Γ ἔσται ἀνωτέρω.

PROP. XXXIX. *Theor.*

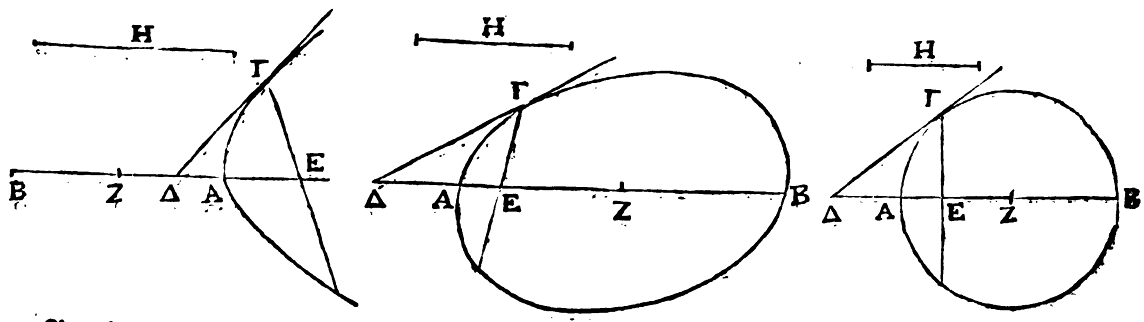
Si hyperbolam, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta contingens cum diametro conveniat; & à tactu ad diametrum recta ordinatim applicetur: sumptâ quâvis rectâ ex duabus, quarum altera interjicitur inter applicatam & centrum sectionis, altera inter applicatam & contingentem, habebit ad eam applicata rationem compositam ex ratione quam habet altera dictarum rectarum ad applicatam, & ex ratione quam rectum figuræ latus habet ad transversum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως· ἥτις ἂν ληφθῇ τῶν δύο εὐθειῶν, ὧν ἐστιν ἡ μὲν μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἡ δὲ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς τομῆς, ἕξει πρὸς αὐτὴν ἡ κατηγμένη τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν δύο εὐθειῶν πρὸς κατηγμένην, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ εἴδους ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν.

SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia cujus diameter A B, centrum autem Z; ducaturque Γ Δ sectionem contingens, & Γ E ordinatim applicetur: dico Γ E ad alteram rectarum Z E, E Δ rationem habere compositam ex ratione, quam habet rectum figuræ latus ad transversum, & ex ea quam altera dictarum rectarum Z E, E Δ habet ad ipsam E Γ.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἧς διάμετρος ἡ A B, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Z, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω τῆς τομῆς ἡ Γ Δ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ Γ E· λέγω ὅτι ἡ Γ E πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν Z E, E Δ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν Z E, E Δ πρὸς τὴν E Γ.



Sit enim rectangulum Z E Δ æquale rectangulo sub E Γ & recta H: & quoniam [per 37. huj.] ut rectangulum Z E Δ ad quadratum ex Γ E ita transversum latus ad rectum; atque rectangulum Z E Δ rectangulo sub E Γ & H æquale est: erit ut

Ἔστω γὰρ ἴσον τὸ ὑπὸ Z E Δ τῷ ὑπὸ E Γ καὶ τινὸς H· καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ Z E Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ E οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ Z E Δ τῷ ὑπὸ Γ E, H· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ

ὑπὸ ΓΕ, Η πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, τουτέστιν ἡ Η πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΕΔ τῷ ὑπὸ ΓΕ, Η, ἔστιν ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΕΓ οὕτως ἡ Η πρὸς ΕΔ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓΕ πρὸς Η καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Η πρὸς ΕΔ· ἀλλ᾽ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς Η οὕτως ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, ὡς δὲ ἡ Η πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ· ἡ ΓΕ ἄρα πρὸς ΕΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ.

rectangulum sub Γ E & H ad quadratum ex Γ E, hoc est [per 1. 6.] ut H ad Γ E, ita transversum latus ad rectum. rursus quoniam rectangulum Z E Δ æquale est rectangulo sub Γ E & H; ut E Z ad E Γ ita [per 16. 6.] erit H ad E Δ. habet autem Γ E ad E Δ rationem compositam ex ratione quam Γ E habet ad H & ex ea quam H habet ad E Δ; utque Γ E est ad H (ut mox ostensum) ita rectum latus ad transversum; & ut H ad Δ E ita Z E ad E Γ: ergo Γ E ad E Δ rationem habebit compositam ex ratione quam habet rectum latus ad transversum, & ex ea quam Z E habet ad E Γ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ΄.

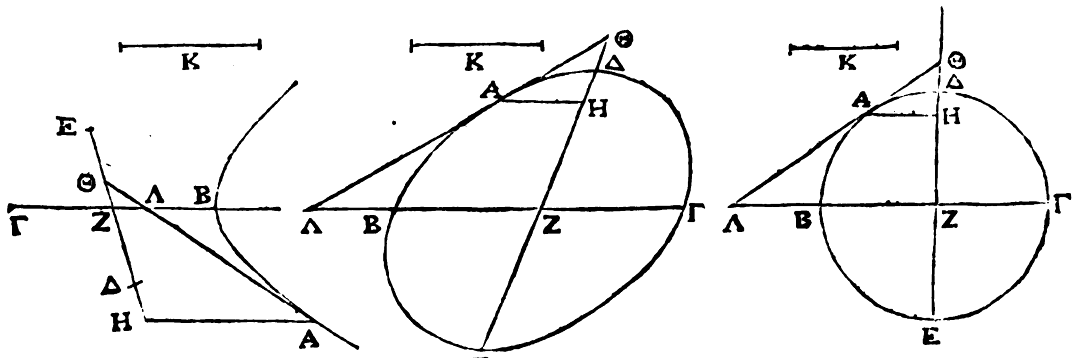
Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ· ἥτις ἂν ληφθῇ τῶν δύο εὐθειῶν, ὧν ἐστιν ἡ μὲν μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἡ δὲ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης, ἕξει πρὸς αὐτὴν ἡ κατηγμένη τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν δύο εὐθειῶν πρὸς τὴν κατηγμένην.

Prop. XL. *Theor.*

Si hyperbolam, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum secunda diametro conveniat; & à tactu ad eandem diametrum recta applicetur diametro alteri parallela: sumptâ quâlibet rectâ ex duabus, quarum una inter applicatam & sectionis centrum interjicitur, altera inter applicatam & contingentem, habebit ad ipsam applicata rationem compositam ex ratione quam habet transversum figuræ latus ad rectum & ex ea quam altera dictarum rectarum habet ad applicatam.

Ἔστω ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖΓ, δευτέρα δὲ ἡ ΔΖΕ, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΘΛΑ, καὶ τῇ ΓΒ παράλληλος ἡ ΑΗ· λέγω ὅτι ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν ΘΗ, ΖΗ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν ΖΗ, ΘΗ πρὸς τὴν ΗΑ.

Sit hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia A B, cujus diameter B Z Γ, & secunda diameter Δ Z E; ducaturque recta sectionem contingens Θ Λ A, & ipsi Γ B parallela ducatur A H: dico A H ad alteram rectarum Θ H, H Z rationem habere compositam ex ratione quam habet transversum figuræ latus ad rectum, & ex ea quam altera dictarum rectarum Z H, Θ H habet ad ipsam H A.



Ἔστω τὸ ὑπὸ ΘΗΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΑ, Κ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, τῷ δὲ ὑπὸ ΘΗΖ ἴσον τὸ ὑπὸ ΗΑ, Κ· καὶ τὸ ὑπὸ ΗΑ, Κ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, τουτέστιν ἡ Κ πρὸς ΑΗ, ἐστὶν ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΗ πρὸς Κ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς ΗΖ· ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΗΑ πρὸς Κ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς δὲ ἡ Κ πρὸς ΗΖ οὕτως

Sit enim rectangulum Θ H Z rectangulo quod fit sub H A & K æquale. itaque quoniam [per 38.huj.] ut rectum latus ad transversum ita rectangulum Θ H Z ad quadratum ex H A; rectangulo autem Θ H Z æquale est [ex hyp.] id quod fit sub H A & K: erit rectangulum sub H A & K ad quadratum ex H A, hoc est [per 1. 6.] K ad A H, ut latus rectum ad transversum: & quoniam A H ad H Z compositam habet rationem ex ratione quam habet A H ad K & ex ea quam K habet ad H Z; estque ut H A ad K ita transversum latus ad rectum; & [per 16. 6.] ut K ad H Z ita

Θ H ad H A, propterea quod rectangulum Θ H Z æquale est rectangulo sub A H & K: constat ergo A H ad H Z compositam habere rationem ex ratione diametri transversæ ad latus rectum & ex ea quam Θ H habet ad H A.

Prop. XLI. *Theor.*

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia recta linea ordinatim applicetur ad diametrum; & ab applicata, & ab ea quæ ex centro, parallelogramma æquiangula describantur; habeat autem applicata ad reliquum parallelogrammi latus rationem compositam ex ratione quam habet ea quæ ex centro ad reliquum latus, & ex ratione quam rectum figuræ latus habet ad transversum: parallelogrammum factum à recta, quæ inter centrum & applicatam interjicitur, simile parallelogrammo quod fit ab ea quæ ex centro, in hyperbola quidem excedit parallelogrammum ab applicata parallelogrammo quod fit ab ea quæ ex centro; in ellipsi vero & circuli circumferentia, una cum parallelogrammo quod fit ab applicata æquale est parallelogrammo facto ab ea quæ ex centro.

SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cujus diameter A B, centrum E; & ordinatim applicetur Γ Δ; à lineis autem E A, Γ Δ æquiangula parallelogramma describantur, quæ sint A Z, Δ H; & habeat Γ Δ ad Γ H rationem compositam ex ratione quam habet A E ad E Z & ex ea quam rectum figuræ latus habet ad transversum: dico in hyperbola parallelogrammum quod fit ex E Δ, simile ipsi A Z, parallelogrammis A Z, H Δ æquale esse: in ellipsi vero & circuli circumferentia, parallelogrammum quod fit ex Δ E, simile A Z, una cum parallelogrammo H Δ ipsi A Z esse æquale.

Fiat enim ut rectum figuræ latus ad transversum ita Δ Γ ad Γ Θ. & quoniam [ex hyp.] ut Δ Γ ad Γ Θ ita rectum latus ad transversum; ut autem Δ Γ ad Γ Θ ita [per 1. 6.] quadratum ex Δ Γ ad rectangulum Δ Γ Θ; & [per 21. huj.] ut rectum latus ad transversum ita quadratum ex Δ Γ ad rectangulum B Δ A: erit [per 9. 5.] rectangulum B Δ A rectangulo Δ Γ Θ æquale. rursus quoniam Δ Γ ad Γ H rationem habet compositam ex ratione quam habet A E ad E Z & ex ea quam rectum latus ad transversum, hoc est quam Δ Γ habet ad Γ Θ. sed & Δ Γ ad Γ H compositam rationem habet ex ratione Δ Γ ad Γ Θ & ex ratione Θ Γ ad Γ H: erit igitur ratio composita ex ratione A E ad E Z & ex ratione Δ Γ ad Γ Θ eadem quæ componitur ex ratione Δ Γ ad Γ Θ & ex ratione Θ Γ ad Γ H. communis auferatur, ratio scilicet Δ Γ ad Γ Θ: reliqua igitur ratio A E ad E Z ea-

οὕτως ἡ Θ H πρὸς H A, διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ Θ H Z τῷ ὑπὸ A H, K· ἡ A H ἄρα πρὸς H Z τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ H Θ πρὸς H A.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ *μα'*.

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ, ἢ ἐλλείψει, ἢ κύκλου περιφερείᾳ εὐθεῖα καταχθῇ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ἀπὸ τῆς τεταγμένης καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἀναγραφῇ εἴδη παραλληλόγραμμα ἰσογώνια, ἔχῃ δὲ ἡ κατηγμένη πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν τοῦ εἴδους πλευρὰν τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς λοιπὴν τοῦ εἴδους πλευρὰν, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ εἴδους τῆς τομῆς ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν· τὸ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς κατηγμένης εἶδος, τὸ ὅμοιον τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἴδους τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἴδους, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει.

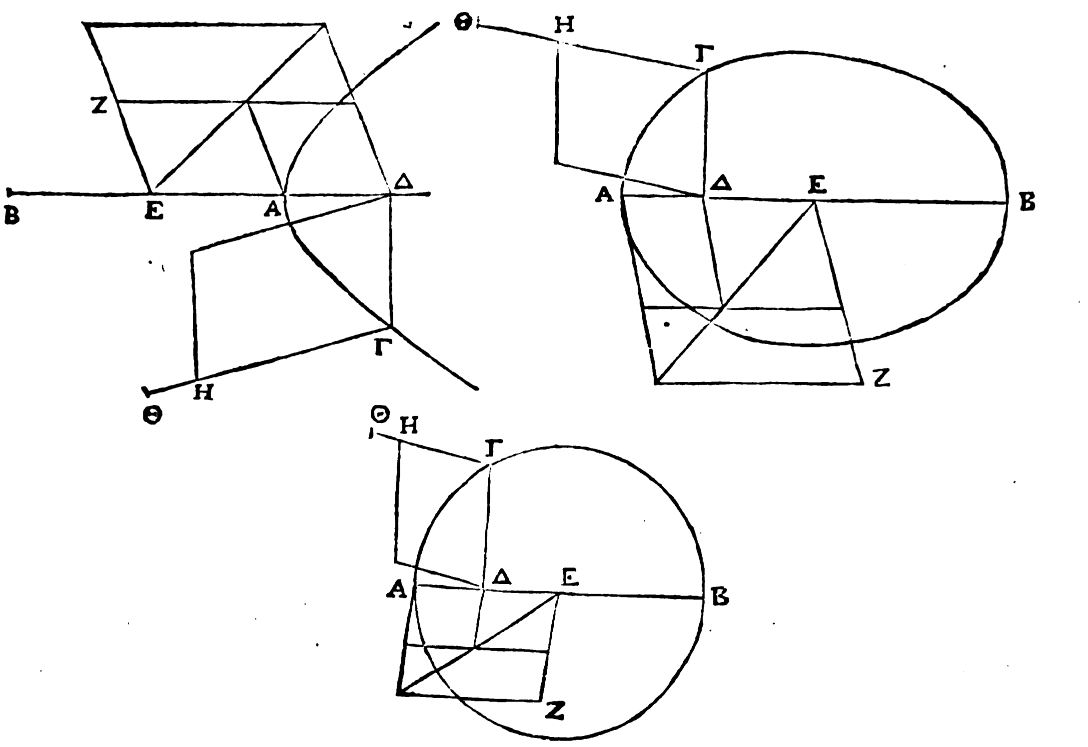
ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ A B, κέντρον δὲ τὸ E, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ Γ Δ, καὶ ἀπὸ τῶν E A, Γ Δ ἰσογώνια εἴδη ἀναγεγράφθω τὰ A Z, Δ H, καὶ ἡ Γ Δ πρὸς τὴν Γ H τὸν συγκείμενον ἐχέτω λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ A E πρὸς E Z καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν· λέγω ὅτι, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, τὸ ἀπὸ τῆς E Δ εἶδος, τὸ ὅμοιον τῷ A Z, ἴσον ἐστὶ τοῖς A Z, H Δ· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, τὸ ἀπὸ τῆς E Δ, ὅμοιον τῷ A Z, μετὰ τοῦ H Δ ἴσον ἐστὶ τῷ A Z.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτως ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ οὕτως ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, ἀλλ' ὡς ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ Γ Θ, ὡς δὲ ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτως τὸ ἀπὸ Δ Γ πρὸς τὸ ὑπὸ B Δ A· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ B Δ A τῷ ὑπὸ Δ Γ Θ. καὶ ἐπεὶ ἡ Δ Γ πρὸς Γ H τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ A E πρὸς E Z καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τουτέστιν ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ· ἔτι δὲ ἡ Δ Γ πρὸς Γ H τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Θ Γ πρὸς Γ H· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ A E πρὸς E Z καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ λόγῳ, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Θ Γ πρὸς Γ H. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς Γ Δ πρὸς Γ Θ· λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς A E

πρὸς

πρὸς ΕΖ λόγος λοιπῷ τῷ τῆς ΘΓ πρὸς ΓΗ λόγῳ ἐστὶν ὁ αὐτός. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΓΔ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΒΔΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΗΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ οὕτως τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΑ, ἰσογώνια γάρ ἐστι καὶ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τῆς ΗΓ πρὸς ΑΕ καὶ τῆς ΓΔ πρὸς ΕΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς

dem est quæ reliqua ΘΓ ad ΓΗ. ut autem ΘΓ ad ΓΗ ita [per 1. 6.] rectangulum ΘΓΔ ad rectangulum ΗΓΔ; & ut ΑΕ ad ΕΖ ita quadratum ex ΑΕ ad rectangulum ΑΕΖ: ergo [per 11. 5.] ut rectangulum ΘΓΔ ad rectangulum ΗΓΔ ita quadratum ex ΑΕ ad rectangulum ΑΕΖ. sed ostensum est rectangulum ΘΓΔ æquale esse rectangulo ΒΔΑ: ut igitur rectangulum ΒΔΑ ad rectangulum ΗΓΔ ita quadratum ex ΑΕ ad rectangulum ΑΕΖ; permutandoque [per 16. 5.] ut rectangulum ΒΔΑ ad quadratum ex ΑΕ ita rectangulum ΗΓΔ ad ipsum ΑΕΖ. sed ut rectangulum ΗΓΔ ad ΑΕΖ rectangulum ita parallelogrammum ΔΗ ad parallelogrammum ΖΑ; parallelogramma enim [ex hyp.] æquiangula sunt, & [per 22. 6.] rationem habent compositam ex ratione laterum ΗΓ ad ΑΕ & ΓΔ ad ΕΖ: quare ut rectangulum ΒΔΑ ad quadra-



τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ΗΔ πρὸς ΑΖ. λεκτέον τοίνυν ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς· ὡς τὸ ὑπὸ ΒΔΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτως τὰ ΗΔ, ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΔ εἶδος τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον τῷ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ· ὡς ἄρα τὰ ΗΔ, ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΔ εἶδος ὅμοιον τῷ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ· τὸ ἀπὸ ΕΔ ἄρα εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ΑΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΗΔ, ΑΖ.

Ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐροῦμεν· ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς ὅλον τὸ ΑΖ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΔΗ, καὶ λοιπόν ἐστι πρὸς λοιπὸν ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ἀπὸ δὲ τοῦ ἀπὸ ΕΑ ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπὸ ΒΔΑ, λοιπόν ἐστι τὸ ἀπὸ

tum ex ΑΕ ita parallelogrammum ΗΔ ad ipsum ΑΖ. itaque dicendum in hyperbola: ut rectangulum ΒΔΑ una cum quadrato ex ΑΒ ad quadratum ex ΑΕ, hoc est [per 6. 2.] quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ, sic parallelogramma ΗΔ, ΑΖ ad parallelogrammum ΑΖ. sed [per 20. 6.] ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΒΑ sic parallelogrammum quod fit ex ΕΔ, simile & similiter descriptum ipsi ΑΖ, ad parallelogrammum ΑΖ: ut igitur parallelogramma ΔΗ, ΑΖ ad parallelogrammum ΑΖ, sic parallelogrammum à ΕΔ descriptum & simile ipsi ΑΖ ad ΑΖ: ergo parallelogrammum à ΔΕ factum & simile ipsi ΑΖ æquale est parallelogrammis ΗΔ, ΑΖ.

In ellipsi vero & circuli circumferentia dicemus. quoniam ut totum, quadratum scilicet ex ΑΕ, ad totum parallelogrammum ΑΖ, sic ablatum rectangulum ΑΔΒ ad ablatum parallelogrammum ΔΗ: erit [per 19. 5.] reliquum ad reliquum sicut totum ad totum. quod si à quadrato ex ΕΑ auferatur rectangulum ΒΔΑ, relinquetur

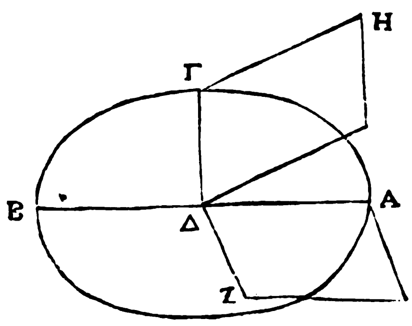
[per

[per 5. 2.] quadratum ex Δ E: ut igitur quadratum ex Δ E ad excessum quo parallelogrammum A Z excedit parallelogrammum Δ H, sic quadratum ex A E ad parallelogrammum A Z. sed [per 23.6.] ut quadratum ex A E ad parallelogrammum A Z sic quadratum ex Δ E ad parallelogrammum quod fit à Δ E simile ipsi A Z: ergo ut quadratum ex Δ E ad excessum quo parallelogrammum A Z excedit ipsum Δ H, sic quadratum ex Δ E ad parallelogrammum Δ E simile ipsi A Z: parallelogrammum igitur ex Δ E simile A Z æquale est excessui quo parallelogrammum A Z excedit Δ H: quare [per 9. 5.] sequitur parallelogrammum à Δ E, simile ipsi A Z, una cum parallelogrammo Δ H ipsi A Z æquale esse.

Δ E· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Δ E πρὸς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει τὸ A Z τοῦ Δ H, οὕτως τὸ ἀπὸ A E πρὸς τὸ A Z. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ A E πρὸς τὸ A Z οὕτως τὸ ἀπὸ Δ E πρὸς τὸ ἀπὸ Δ E εἶδος ὅμοιον τῷ A Z· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Δ E πρὸς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει τὸ A Z τοῦ Δ H, οὕτως τὸ ἀπὸ Δ E πρὸς τὸ ἀπὸ Δ E εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ A Z· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ E εἶδος ὅμοιον τῷ A Z τῇ ὑπεροχῇ ᾗ ὑπερέχει τὸ A Z τοῦ Δ H· τὸ ἄρα ἀπὸ Δ E εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ A Z μετὰ τοῦ Δ H ἴσον ἐστὶ τῷ A Z.

EUTOCIUS.

Theorema hoc in hyperbola casum non habet; in ellipsi vero, si applicata in centrum cadat & reliqua eodem modo disponantur, parallelogrammum quod fit ab applicata parallelogrammo quod fit ab ea quæ ex centro æquale erit. sit enim ellipsis cujus diameter A B, centrum Δ, ordinatimque applicetur Γ Δ, & ab ipsis Γ Δ, Δ A parallelogramma æquiangula describantur Δ H, A Z; habeat autem Δ Γ ad Γ H rationem compositam ex ratione quam habet A Δ ad Δ Z & ex ea quam rectum figuræ latus habet ad transversum: dico parallelogrammum A Z æquale esse parallelogrammo Δ H. quoniam enim in superioribus ostensum est, ut quadratum ex A Δ ad parallelogrammum A Z ita esse rectangulum A Δ B ad parallelogrammum Δ H: erit permutando, ut quadratum ex A Δ ad rectangulum A Δ B ita parallelogrammum A Z ad parallelogrammum Δ H. sed quadratum ex A Δ æquale est rectangulo A Δ B: ergo parallelogrammum A Z parallelogrammo Δ H æquale erit.



Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς πτῶσιν οὐκ ἔχει. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως, ἐὰν ἡ καταγομένη ἐπὶ τὸ κέντρον πίπτῃ, τὰ δὲ λοιπὰ γένηται τὰ αὐτὰ, τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἶδος ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει. ἔστω γὰρ ἔλλειψις, ἧς διάμετρος ἡ A B, κέντρον δὲ τὸ Δ, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ Γ Δ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπό τε τῆς Γ Δ καὶ τῆς A Δ εἴδη ἰσογώνια, τὰ Δ H, A Z, ἐχέτω δὲ ἡ Δ Γ πρὸς Γ H τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ A Δ πρὸς Δ Z καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν· λέγω ὅτι τὸ A Z ἴσον ἐστὶ τῷ Δ H. ἐπεὶ γὰρ ἐν τῷ ῥητῷ δέδεικται, ὡς τὸ ἀπὸ A Δ πρὸς τὸ A Z οὕτως τὸ ὑπὸ A Δ B πρὸς τὸ Δ H· φημὶ ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ A Δ πρὸς τὸ ὑπὸ A Δ B οὕτως τὸ A Z πρὸς τὸ Δ H. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ A Δ τῷ ὑπὸ A Δ B· ἴσον ἄρα καὶ τὸ A Z τῷ Δ H.

Prop. XLII. *Theor.*

Si recta parabolam contingens cum diametro conveniat, & à tactu ad diametrum recta ordinatim applicetur; sumpto autem quovis puncto in sectione, applicentur ad diametrum duæ rectæ, altera quidem contingenti parallela, altera vero parallela ei quæ à tactu ordinatim applicata est: triangulum quod ab ipsis constituitur æquale erit parallelogrammo contento ab ordinatim à tactu applicata, & ea quæ interjicitur inter parallelam & verticem sectionis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

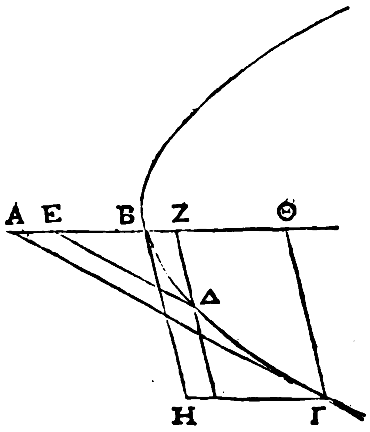
Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ληφθέντος δέ τινος ἐπὶ τῆς τομῆς σημείου καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν διάμετρον δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένην· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ παραλληλογράμμῳ ὑπό τε τῆς ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένης, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς παραλλήλου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς.

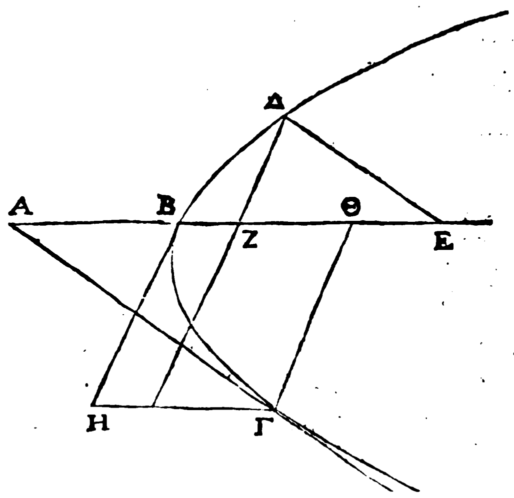
SIT parabola, cujus diameter A B, ducaturque linea A Γ sectionem contingens, & Γ Θ ordinatim applicetur; à quovis autem puncto Δ applicetur Δ Z, & per Δ quidem ducatur Δ E ipsi A Γ parallela, per Γ vero Γ H parallela ipsi B Z; denique per B ducatur B H ipsi Θ Γ parallela: dico triangulum Δ E Z æquale esse parallelogrammo Z H.

ΕΣΤΩ παραβολὴ, ἧς διάμετρος ἡ A B, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ A Γ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ Γ Θ, καὶ ἀπό τινος σημείου τυχόντος κατήχθω ἡ Δ Z, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ A Γ παράλληλος ἤχθω ἡ Δ E, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ B Z ἡ Γ H, καὶ διὰ τοῦ B τῇ Θ Γ ἡ B H· λέγω ὅτι τὸ Δ E Z τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ H Z παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ τῆς τομῆς ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, καὶ τεταγμένως κατῆκται ἡ ΓΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΘ· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῆς ΘΒ· τὸ ΑΘΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ, διὰ τὴν τομήν, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ οὕτως τὸ ΑΓΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΔΖ





τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ οὕτως τὸ ΗΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΓΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον οὕτως τὸ ΘΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΓΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘ παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΑΓΘ τρίγωνον τῷ ΗΘ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ.

Quoniam enim ΑΓ sectionem contingit, & ordinatim applicata est ΓΘ, erit [per 35. huj.] ΑΒ æqualis ipsi ΒΘ, & ΑΘ dupla ipsius ΘΒ; triangulum igitur ΑΘΓ [per 41. 1.] parallelogrammo ΒΓ est æquale. & quoniam [per 20. huj.] ut quadratum ex ΓΘ ad quadratum ex ΔΖ ita linea ΘΒ ad ipsam ΒΖ, propter sectionem; ut autem quadratum ex ΓΘ ad quadratum ex ΔΖ ita [per 4. & 20. 6.] triangulum ΑΓΘ ad triangulum ΕΔΖ; & [per 1. 6.] ut ΘΒ ad ΒΖ ita parallelogrammum ΗΘ ad parallelogrammum ΗΖ: erit [per 11. 5.] ut triangulum ΑΓΘ ad triangulum ΕΔΖ ita ΘΗ parallelogrammum ad parallelogrammum ΗΖ; & permutando, ut ΑΓΘ triangulum ad parallelogrammum ΗΘ ita triangulum ΕΔΖ ad parallelogrammum ΗΖ. sed triangulum ΑΓΘ æquale est parallelogrammo ΗΘ: ergo triangulum ΕΔΖ parallelogrammo ΗΖ æquale erit.

EUTOCIUS.

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει πτώσεις ἕνδεκα, μίαν μὲν ἐὰν ἐσωτέρω λαμβάνηται τὸ Δ τοῦ Γ· δῆλον γὰρ ὅτι καὶ παράλληλοι ἐσωτέρω πεσοῦνται τῶν ΑΓ, ΓΘ. ἑτέρας δὲ πέντε οὕτως, ἐὰν τὸ Δ ἐξωτέρω ληφθῇ τοῦ Γ, ἡ μὲν ΔΖ παράλληλος δηλονότι ἐξωτέρω πεσεῖται τῆς ΘΓ, ἡ δὲ ΔΕ ἢ μεταξὺ τῶν Α, Β, ἢ ἐπὶ τὸ Β, ἢ μεταξὺ τῶν Β, Θ, ἢ ἐπὶ τὸ Θ, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Θ· τοῦ γὰρ Α ἐξωτέρω πεσεῖν αὐτὴν ἀδύνατον, ἐπειδὴ τὸ Δ ἐξωτέρω ἐστὶ τοῦ Γ, καὶ δῆλον ὅτι καὶ ἡ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀγομένη τῇ ΑΓ ἐσωτέρω τοῦ Α πεσεῖται. ἐὰν δὲ τὸ Δ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη παραληφθῇ τῆς τομῆς, ἢ ἀμφότεραι αἱ παράλληλοι μεταξὺ τῶν Β, Θ παρεμπεσοῦνται, ἢ ἡ μὲν ΔΖ ἐσωτέρω τοῦ ΘΓ, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τὸ Θ· ἢ τῆς ΔΖ ὡσαύτως μενούσης, τὸ Ε ἐξωτέρω τοῦ Θ ἐλεύσεται. τοῦ δὲ Ε πάλιν ἐξωτέρω πίπτοντος, τὸ Ζ ἢ ἐπὶ τὸ Θ πεσεῖται, ὡς εἶναι τὴν ΓΘΔ μίαν εὐθεῖαν, (εἰ καὶ μὴ σώζεται κυρίως τότε τὸ τῆς παραλλήλου ἰδίωμα) ἢ ἐξωτέρω τοῦ Θ. δεῖ δέ, ἐπὶ τῆς ἀποδείξεως τῶν τελευταίων πέντε πτώσεων, τὴν ΔΖ ἐκβάλλειν ἕως τῆς τομῆς καὶ τῆς ΗΓ παραλλήλου, καὶ οὕτως ποιεῖσθαι τὴν ἀπόδειξιν. δυνατὸν δὲ καὶ ἄλλην μίαν καταγραφὴν ἐπινοεῖν ἐκ τούτων, ὅταν διὰ λαμβανομένου ἑτέρου σημείου αἱ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖαι ποιῶσι τὸ λεγόμενον. ἀλλὰ τοῦτο θεώρημά ἐστιν, οὐ πτῶσις.

Hoc theorema undecim habet casus, unum quidem si Δ intra Γ sumatur; constat enim rectas parallelas cadere intra ipsas ΑΓ, ΓΘ. alios autem quinque casus habet si Δ sumatur extra Γ: nam recta parallela ΔΖ cadet extra ΘΓ, & ΔΕ vel inter Α & Β cadet, vel in ipso Β, vel inter Β & Θ, vel in Θ, vel extra Θ; ut enim extra Α cadat fieri non potest, quoniam cum Δ sit extra Γ, & quæ per ipsum rectæ ΑΓ parallela ducitur, intra Α cadet. quod si Δ sumatur ex altera parte sectionis; vel utræque parallelæ inter Β & Θ cadent, vel ΔΖ quidem cadet intra ΘΓ, punctum vero Ε in Θ; vel, ΔΖ hunc situm retinente, punctum Ε cadet extra Θ. puncto vero Ε cadente extra Θ, punctum Ζ vel in Θ cadet, ita ut ΓΘΔ sit recta linea (quanquam tunc non exacte parallelarum proprietas servetur) vel extra Θ cadet. oportet autem in demonstratione quinque casuum postremorum rectam ΔΖ usque ad sectionem & ad ipsam parallelam ΗΓ producere, atque sic demonstrationem absolvere. sed ex his aliam quandam descriptionem mente concipere possumus; cum nempe per sumptum aliud punctum, quæ in principio supponebantur rectæ efficiant rem propositam. sed hoc theorema est, non casus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ,

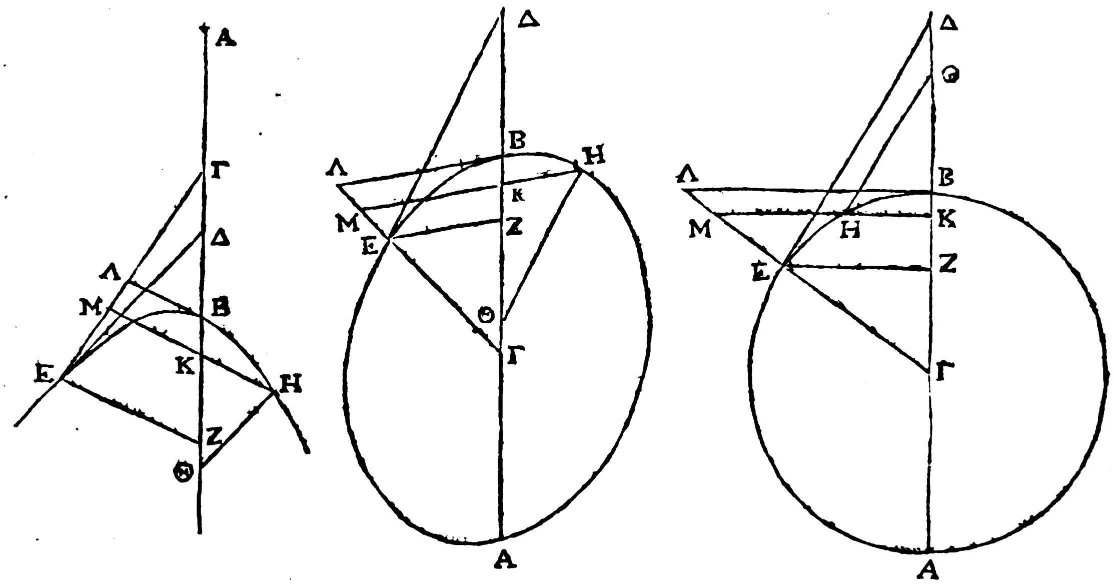
Prop. XLIII. *Theor.*

Si hyperbolam, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens conveniat cum diametro; & à tactu ad diametrum recta ordinatim applicetur; huic vero parallela ducatur per verticem sectionis, quæ cum recta per tactum & centrum ducta conveniat; & sumpto aliquo puncto in sectione, ab eo ad diametrum duæ rectæ ducantur, una quidem contingenti parallela, altera vero parallela ei quæ à tactu applicata est: triangulum ab ipsis factum in hyperbola minus erit quam triangulum, quod abscindit linea per centrum & tactum ducta, triangulo facto ab ea quæ ex centro similique abscisso; in ellipsi vero & circuli circumferentia, una cum triangulo abscisso ad centrum æquale erit triangulo quod ab ea quæ ex centro describitur, similique abscisso.

καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, ληφθέντος δέ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς, ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐπὶ τῆς ἁφῆς κατηγμένην· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, τριγώνου, ὃ ἀποτέμνει ἡ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἁφῆς, ἔλασσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τριγώνῳ τῷ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, μετὰ τοῦ ἀποτεμνομένου πρὸς τῷ κέντρῳ τριγώνου ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ.

SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cujus diameter A B, centrumque Γ; ducaturque recta Δ E sectionem contingens; & juncta Γ E, ordinatim applicetur E Z; sumatur autem aliquod punctum in sectione, quod sit H; & ducatur recta H Θ contingenti parallela, & H K M ordinatim applicetur; per B vero ordinatim applicetur recta B Λ: dico triangulum K M Γ differre à triangulo Γ Λ B triangulo H K Θ.

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἡ ἔλλειψις, ἡ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ A B, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ Δ E, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ B, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ E Z, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ H, καὶ τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἤχθω ἡ H Θ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ H K M, διὰ δὲ τοῦ B τεταγμένως ἀνήχθω ἡ B Λ· λέγω ὅτι τὸ K M Γ τρίγωνον τοῦ Γ Λ B τριγώνου διαφέρει τῷ H K Θ τριγώνῳ.



Quoniam enim linea E Δ sectionem contingit, ordinatim vero applicata est E Z; [per 39. huj.] habebit E Z ad Z Δ rationem compositam ex ratione Γ Z ad Z E, & ex ratione recti lateris ad transversum. sed [per 4. 6.] ut E Z ad Z Δ ita H K ad K Θ; & ut Γ Z ad Z E ita Γ B ad B Λ: ergo H K ad K Θ rationem habebit compositam ex ratione Γ B ad B Λ, & ex ratione recti lateris ad transversum: quare, ex iis quæ in quadragesimo primo theoremate ostendimus, triangulum Γ K M à triangulo B Γ Λ differt triangulo H Θ K; etenim in parallelogrammis triangulorum istorum duplis hæc demonstrata sunt.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς τομῆς ἐφάπτεται μὲν ἡ E Δ, κατηγμένη δέ ἐστιν ἡ E Z· ἡ E Z πρὸς Z Δ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ τῆς Γ Z πρὸς Z E καὶ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ E Z πρὸς Z Δ οὕτως ἡ H K πρὸς K Θ, ὡς δὲ ἡ Γ Z πρὸς Z E οὕτως ἡ Γ B πρὸς B Λ· ἕξει ἄρα ἡ H K πρὸς K Θ τὸν συγκείμενον λόγον, ἐκ τοῦ τῆς Γ B πρὸς B Λ καὶ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τεσσαρακοστῷ πρώτῳ θεωρήματι, τὸ Γ K M τρίγωνον τοῦ B Γ Λ τριγώνου διαφέρει τῷ H Θ K· καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν παραλληλογράμμων τὰ αὐτὰ δέδεικται.

EU-

EUTOCIUS.

Εν τισι φέρεται ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου τοιαύτη.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΓΔ τῷ ἀπὸ ΓΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΒ οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς ΓΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτως τὸ ΕΓΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΖΓ πρὸς ΓΔ οὕτως τὸ ΕΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΓΔ τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ΕΓΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓΖ πρὸς τὸ ΕΓΔ τρίγωνον· ἴσον ἄρα τὸ ΕΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΓΛ· ἔστιν ἄρα, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἀναστρέψαντι, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἀνάπαλιν καὶ διελόντι καὶ ἔτι ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ΕΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον οὕτως τὸ ΕΓΖ πρὸς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον· ἴσον ἄρα τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΕΛΒΖ τετραπλεύρῳ. ª καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτως τὸ ΕΓΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΓΒ τρίγωνον, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς διελόντι, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι καὶ ἀνάπαλιν, ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ οὕτως τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΒΛΓ τρίγωνον· ὁμοίως καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ οὕτως τὸ ΛΓΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΜΛΒΚ τετράπλευρον· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ οὕτως τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΜΒΚΛ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ οὕτως τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ΗΘΚ οὕτως τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΜΛΒΚ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΛΒΖ οὕτως τὸ ΗΘΚ πρὸς τὸ ΜΛΒΚ. ἴσον δὲ τὸ ΕΔΖ τῷ ΕΛΒΖ ἐδείχθη· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΘΚ τῷ ΜΛΒΚ τετραπλεύρῳ· τὸ ἄρα ΚΜΓ τρίγωνον τοῦ ΗΘΚ διαφέρει τῷ ΓΛΒ τριγώνῳ.

Ἐπιστῆσαι δεῖ ἐν ταύτῃ τῇ δείξει, (ὀλίγην γὰρ ἀσάφειαν ἔχει ἐν ταῖς ἀναλογίαις τῆς ἐλλείψεως) ἵνα τὰ διὰ τὴν συντομίαν τοῦ ῥητοῦ ὑμῖν λεγόμενα διηρημένως ποιήσωμεν. οἷον φησι ª [Ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτως τὸ ΕΓΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΓΒ· ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι καὶ ἀνάπαλιν.] ἔστι γὰρ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ οὕτως τὸ ΛΒΓ πρὸς τὸ ΕΖΓ· ἀναστρέψαντι δὲ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ (τοῦτ' ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ, διὰ τὸ διχοτομίαν εἶναι τὸ Γ τῆς ΑΒ) οὕτως τὸ ΛΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΖΛ τετράπλευρον, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ οὕτως τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΒΛΓ τρίγωνον. Ἔχει δὲ πτώσεις, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, ἕνδεκα, ὅσας εἶχε καὶ τὸ πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς παραβολῆς, καὶ ἄλλην μίαν ὅταν τὸ ἐπὶ τοῦ Η λαμβανόμενον σημεῖον τὸ αὐτὸ ᾖ τῷ Ε. τότε γὰρ συμβαίνει τὸ ΕΔΖ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΛΒΓ ἴσον εἶναι τῷ ΓΕΖ· δέδεικται μὲν γὰρ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον ἴσον τῷ ΛΒΖΕ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΛΒΖΕ τοῦ ΓΕΖ τριγώνου διαφέρει τῷ ΛΒΓ. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως, ἢ τὸ αὐτό ἐστι τὸ Η τῷ Ε, ἢ ἐσωτέρω λαμβάνεται τοῦ Ε· καὶ δῆλον ὅτι ἀμφότεραι αἱ παράλληλοι μεταξὺ πίπτουσι τῶν Δ, Ζ, ὡς

In aliquibus codicibus hujus theorematis talis legitur demonstratio.

Quoniam enim [per 37. huj.] rectangulum ΖΓΔ æquale est quadrato ex ΓΒ; erit [per 17. 6.] ut ΖΓ ad ΓΒ ita ΓΒ ad ΓΔ: quare [per 20. 6.] ut figura quæ fit ex ΓΖ ad figuram ex ΓΒ ita linea ΖΓ ad ΓΔ. sed ut figura ex ΖΓ ad figuram ex ΓΒ ita ΕΓΖ triangulum ad triangulum ΒΓΛ, & ut linea ΖΓ ad ipsam ΓΔ ita [per 1. 6.] ΕΖΓ triangulum ad triangulum ΕΓΔ: ut igitur ΕΓΖ triangulum ad triangulum ΒΓΛ ita triangulum ΒΓΖ ad ipsum ΕΓΔ: propter eaque [per 9. 5.] triangulum ΕΓΔ triangulo ΒΓΛ est æquale: ergo in hyperbola, per conversionem rationis; & in ellipsi, invertendo dividendoque & rursus invertendo, ut ΕΖΓ triangulum ad quadrilaterum ΕΛΒΖ ita triangulum ΕΓΖ ad triangulum ΕΔΖ: quare triangulum ΕΔΖ æquale est quadrilatero ΕΛΒΖ. ª & quoniam ut quadratum ex ΓΖ ad quadratum ex ΓΒ ita triangulum ΕΓΖ ad triangulum ΛΓΒ; in hyperbola quidem dividendo, in ellipsi autem invertendo, & per conversionem rationis & rursus invertendo, erit ut rectangulum ΑΖΒ ad quadratum ex ΒΓ ita quadrilaterum ΕΛΒΖ ad triangulum ΒΛΓ; & similiter ut quadratum ex ΓΒ ad rectangulum ΑΚΒ ita triangulum ΛΓΒ ad quadrilaterum ΜΛΒΚ: ergo ex æquali, ut rectangulum ΑΖΒ ad rectangulum ΑΚΒ ita ΕΛΒΖ quadrilaterum ad quadrilaterum ΜΒΚΛ. ut autem rectangulum ΑΖΒ ad rectangulum ΑΚΒ ita [per 21. huj.] quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex ΗΚ: & ut quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex ΗΚ ita triangulum ΕΔΖ ad triangulum ΗΘΚ: quare ut triangulum ΕΔΖ ad triangulum ΗΘΚ ita quadrilaterum ΕΛΒΖ ad quadrilaterum ΜΛΒΚ; & permutando ut triangulum ΕΔΖ ad quadrilaterum ΕΛΒΖ ita triangulum ΗΘΚ ad quadrilaterum ΜΛΒΚ. sed triangulum ΕΔΖ ostensum est [supra] æquale quadrilatero ΕΛΒΖ; ergo & triangulum ΗΘΚ quadrilatero ΜΛΒΚ est æquale: triangulum igitur ΚΜΓ à triangulo ΓΛΒ differt triangulo ΗΘΚ.

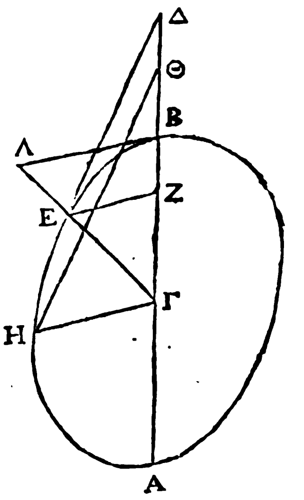
Sed cum hæc demonstratio obscuritatem quandam habeat in proportionibus ellipseos, enitendum est ut ea quæ breviter dicta sunt latius explicentur. ª [Quoniam, *inquit*, ut quadratum ex ΖΓ ad quadratum ex ΓΒ ita triangulum ΕΓΖ ad triangulum ΛΓΒ, erit invertendo & per conversionem rationis rursusque invertendo.] est enim invertendo ut quadratum ΒΓ ad quadratum ex ΓΖ ita ΛΒΓ triangulum ad ΕΖΓ: & per conversionem rationis, ut quadratum ex ΒΓ ad rectangulum ΑΖΒ (hoc est, ad excessum quo quadratum ex ΓΒ excedit quadratum ex ΓΖ, quia punctum Γ lineam ΑΒ bifariam secat) ita triangulum ΛΒΓ ad quadrilaterum ΕΒΖΛ: & invertendo, ut rectangulum ΑΖΒ ad quadratum ex ΒΓ ita quadrilaterum ΕΛΒΖ ad ΒΛΓ triangulum. Habet autem in hyperbola casus undecim, quot habebat præcedens theorema in parabola, & præterea alium quendam; cum scilicet punctum quod in Η sumitur idem sit quod Ε. tunc enim contingit triangulum ΕΔΖ una cum triangulo ΛΒΓ æquale esse triangulo ΓΕΖ; etenim ostensum est triangulum ΕΔΖ quadrilatero ΛΒΖΕ æquale esse, quadrilaterum autem ΛΒΖΕ à triangulo ΓΕΖ ipso ΛΒΓ triangulo differt. sed in ellipsi vel punctum Η idem est quod Ε vel intra Ε sumitur: & tunc utrasque parallelas inter Δ & Ζ cadere perspicuum

ſpicuum eſt. quod ſi Η ſumatur infra Ε, & ab eo ducta ipſi ΕΖ parallela cadat inter Ζ & Γ, punctum Θ quinque caſus efficit: vel enim cadit inter Δ & Β, vel in Β, vel inter Β & Ζ, vel in Ζ, vel inter Ζ & Γ.

Si vero quæ per Η ducitur applicatæ parallela in centrum Γ cadat, punctum Θ alios quinque efficit caſus. attendendum tamen eſt triangulum hic factum à lineis quæ ipſis ΕΔ, ΕΖ ſunt parallelæ triangulo ΛΒΓ æquale eſſe. quoniam enim ut quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex ΗΓ ita triangulum ΕΔΖ ad triangulum ΗΘΓ, ſimilia enim triangula ſunt; & ut quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex ΗΓ ita rectangulum ΒΖΑ ad rectangulum ΒΓΑ, hoc eſt ad quadratum ex ΒΓ: erit ut triangulum ΕΔΖ ad ipſum ΗΘΓ ita rectangulum ΒΖΑ ad quadratum ex ΒΓ. ut autem rectangulum ΒΖΑ ad quadratum ex ΒΓ ita oſtenſum eſt eſſe quadrilaterum ΛΒΖΕ ad triangulum ΛΒΓ: ut igitur triangulum ΕΔΖ ad ΗΘΓ ita quadrilaterum ΛΒΖΕ ad triangulum ΛΒΓ, & permutando ut triangulum ΕΔΖ ad quadrilaterum ΛΒΖΕ ita triangulum ΗΘΓ ad triangulum ΛΒΓ. ſed æquale eſt triangulum ΕΔΖ quadrilatero ΛΒΖΕ: triangulum igitur ΗΘΓ triangulo ΛΒΓ eſt æquale. poſſumus autem hæc etiam aliter probare, ſi dicamus in parallelogrammis triangulorum duplis eadem demonſtrata eſſe; videlicet in quadrageſimo primo theoremate.

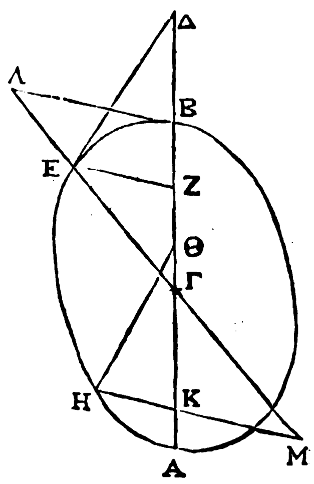
ἔχει ἐν τῷ ῥητῷ. εἰ δὲ ἐξωτέρω ληφθείη τὸ Η τοῦ Ε, καὶ ἡ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ΕΖ παράλληλος μεταξὺ πίσῃ τῶν Ζ, Γ, τὸ Θ σημεῖον ποιεῖ πτώσεις πέντε· ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Δ, Β πίπτει, ἢ ἐπὶ τὸ Β, ἢ μεταξὺ τῶν Β, Ζ, ἢ ἐπὶ τὸ Ζ, ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ.

Ἐὰν δὲ ἡ διὰ τοῦ Η τῇ κατηγμένῃ παράλληλος ἐπὶ τὸ Γ κέντρον πίπτῃ, τὸ Θ πάλιν σημεῖον ποιήσει ἄλλας πέντε πτώσεις ὡσαύτως. καὶ δεῖ ἐπὶ τούτῳ σημειώσασθαι ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ταῖς ΕΔ, ΕΖ γινόμενον τρίγωνον ἴσον γίνεται τῷ ΛΒΓ τριγώνῳ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ οὕτως τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΓ, ὅμοιον γάρ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΑ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΓ· ὡς ἄρα τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ οὕτως ἐδείχθη ἔχον τὸ ΛΒΖΕ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΛΒΓ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΓ οὕτως τὸ ΛΒΖΕ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΛΒΓ τρίγωνον, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ΛΒΖΕ τετράπλευρον οὕτως τὸ ΗΘΓ πρὸς τὸ ΛΒΓ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ ΕΔΖ τῷ ΛΒΖΕ· ἴσον ἄρα ΗΘΓ τρίγωνον τῷ ΛΒΓ. καὶ ἄλλως δὲ ταύτας δυνατὸν δεῖξαι, λέγοντας ὅτι ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν παραλληλογράμμων ταῦτα δέδεικται, ὄντος λόγου τοῦ μα'. θεωρήματος.



Quod ſi ducta per Η parallela ipſi ΕΖ cadat inter Γ & Α, producatur quidem quouſque linea ΓΕ cum ipſa conveniat; & punctum Θ ſeptem caſus efficiet. vel enim inter Β & Δ cadit, vel in Β, vel inter Β & Ζ, vel in Ζ, vel inter Ζ & Γ, vel in Γ, vel inter Γ & Α: & in his caſibus contingit differentiam triangulorum ΛΒΓ, ΗΘΚ conſtitui à rectis ΛΓ, ΓΒ infra Γ productis. ſi vero Η ſumatur in altera parte ſectionis, & ea quæ per Η ducitur ipſi ΕΖ parallela inter Β & Ζ cadat, producetur, ob demonſtrationem, quouſque ſecet ipſam ΛΓ; & punctum Θ faciet ſeptem caſus: vel inter Β & Ζ cadens, vel in Ζ, vel inter Ζ & Γ, vel in Γ, vel inter Γ & Α, vel in Α, vel infra Α. ſi vero ΗΚ cadat inter Ζ & Γ, punctum Θ quinque caſus efficiet. vel enim erit inter Ζ & Γ, vel in Γ, vel inter Γ & Α, vel in Α, vel infra Α. ſed ſi ΗΚ in centrum Γ cadat, punctum Θ caſus efficiet tres: vel inter Γ & Α cadens vel in Α vel extra Α. atque in his caſibus rurſus contingit triangulum ΗΘΚ æquale eſſe triangulo ΛΒΓ. ſi vero ΗΚ cadat inter Γ & Α, punctum Θ vel cadet inter Γ & Α, vel in Α, vel extra Α. itaque in ellipſi caſus omnes erunt quadraginta duo, & totidem in circuli circumferentia; ita ut hujus theorematis caſus omnes ſint nonaginta ſex.

Ἐὰν δὲ ἡ διὰ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος ἀγομένη μεταξὺ πίσῃ τῶν Γ, Α, ἐκβληθήσεται μὲν ἕως ὅτι ἡ ΓΕ αὐτῇ συμπίσῃ· τὸ δὲ Θ σημεῖον ποιήσει πτώσεις ἑπτά. ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Β, Δ, ἢ ἐπὶ τὸ Β πίπτει, ἢ μεταξὺ τῶν Β, Ζ, ἢ ἐπὶ τὸ Ζ, ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ, ἢ ἐπὶ τὸ Γ, ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α. καὶ ἐπὶ τούτων τῶν πτώσεων συμβαίνει τὴν διαφορὰν τῶν ΛΒΓ, ΗΘΚ τριγώνων κατωτέρω συνίστασθαι τῶν ΛΓ, ΓΒ εὐθείαις ὑπὸ τοῦ Γ ἐκβαλλομέναις. ἐὰν δὲ τὸ Η ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ληφθῇ τῆς τομῆς, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος μεταξὺ πίπτει τῶν Β, Ζ, ἐκβληθήσεται μὲν, διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ἕως οὗ τέμῃ τὴν ΛΓ· τὸ δὲ Θ σημεῖον ποιήσει ζ'. πτώσεις· ἢ μεταξὺ ὂν τῶν Β, Ζ, ἢ ἐπὶ τὸ Ζ πίπτον, ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ, ἢ ἐπὶ τὸ Γ, ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α, ἢ ἐπὶ τὸ Α, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ μεταξὺ πίπτῃ τῶν Ζ, Γ, τὸ Θ ποιήσει πτώσεις πέντε· ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ πεσεῖται, ἢ ἐπὶ τὸ Γ, ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α, ἢ ἐπὶ τὸ Α, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ ἐπὶ τὸ Γ κέντρον πίπτῃ, τὸ Θ σημεῖον ποιήσει πτώσεις τρεῖς· ἢ μεταξὺ πίπτον τῶν Α, Γ, ἢ ἐπὶ τὸ Α, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. καὶ ἐπὶ τούτων τῶν πτώσεων συμβήσεται πάλιν τὸ ΗΘΚ τρίγωνον ἴσον γίνεσθαι τῷ ΛΒΓ τριγώνῳ. ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ μεταξὺ πίπτῃ τῶν Γ, Α, τὸ Θ σημεῖον ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α πεσεῖται, ἢ ἐπὶ τὸ Α, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. συμβαίνει οὖν ἐπί τινος ἐλλείψεως τὰς πάσας πτώσεις εἶναι μβ', καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαύτας· ὥστε εἶναι τὰς πάσας πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος ϟϛ'.



Prop. XLIV. *Theor.*

Si unam oppoſitarum ſectionum recta linea contingens cum diametro conveniat, à tactu vero ad diametrum recta ordinatim applicetur; atque huic parallela ducatur per verticem alterius ſectionis, ita ut conveniat cum recta

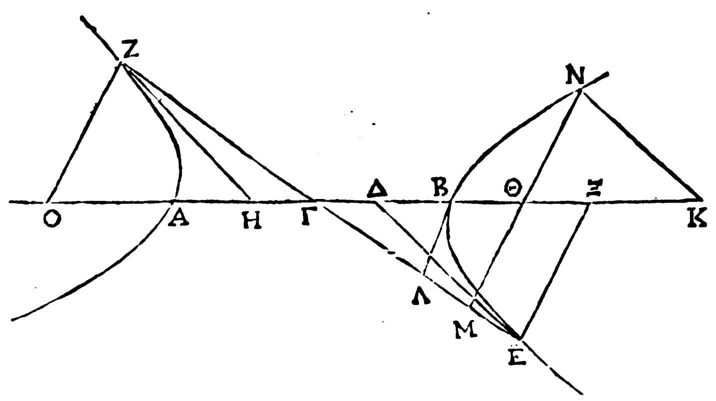
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατανχθῇ τις εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς τῆς ἑτέρας τομῆς παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα τῇ διὰ τ̃ ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένη εὐθεῖα, ληφθέντος δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς οὗ ἔτυχε σημείου, καταχθῶσι εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν κατηγμένην ἀπὸ τῆς ἀφῆς τεταγμένως· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον τριγώνου, ὃ ἀποτέμνει ἡ κατηγμένη πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, ἔλασσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ.

per tactum & centrum ducta; sumpto autem in sectione quovis puncto, applicentur ad diametrum duæ rectæ, quarum altera contingenti sit parallela, altera parallela ei quæ à tactu ordinatim applicata est: triangulum ab ipsis factum minus est quam triangulum quod abscindit applicata ad centrum sectionis, triangulo simili abscisso ab ea quæ ex centro.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΖ, ΒΕ, διάμετρος δὲ αὐτῶν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς ΖΑ τομῆς τοῦ Ζ ἐφαπτομένη ἤχθω τῆς τομῆς ἡ ΖΗ, τεταγμένως δὲ ἡ ΖΟ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΖ ἐκβεβλήσθω, ὡς ἡ ΓΕ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΖΟ παράλληλος ἡ ΒΛ, καὶ εἰλήφθω σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς ΒΕ τομῆς τὸ Ν, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν τεταγμένως κατήχθω ἡ ΝΘ, τῇ δὲ ΖΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΚ· λέγω ὅτι τὸ ΘΚΝ τρίγωνον τοῦ ΓΜΘ τριγώνου ἔλασσόν ἐστι τῷ ΓΒΛ τριγώνῳ.

SINT oppositæ sectiones ΑΖ, ΒΕ, quarum diameter ΑΒ, centrum Γ; & ab aliquo puncto eorum quæ sunt in sectione ΖΑ, videlicet à puncto Ζ, ducatur recta ΖΗ sectionem contingens; ordinatimque applicetur ΖΟ; & juncta ΖΓ producatur, ut ad Ε; per Β vero ducatur ΒΛ ipsi ΖΟ parallela; & sumatur aliquod punctum in sectione ΒΕ, quod sit Ν; à quo ΝΘ ordinatim applicetur, atque ipsi ΖΗ parallela ducatur ΝΚ: dico triangulum ΘΚΝ minus esse quam triangulum ΓΜΘ, triangulo ΓΒΛ.



Διὰ γὰρ τοῦ Ε τῆς ΒΕ τομῆς ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΕΔ, τεταγμένως δὲ ἡ ΕΞ. ᵃ ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΖΑ, ΒΕ, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΓΕ, καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΕΔ· τῇ ΖΗ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ. ἡ δὲ ΝΚ παράλληλός ἐστι τῇ ΖΗ· καὶ τῇ ΕΔ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΝΚ, ἡ δὲ ΜΘ τῇ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΒΕ, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ τῆς τομῆς ἡ ΔΕ, τεταγμένως δὲ κατηγμένη ἡ ΕΞ, καὶ τῇ ΕΞ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΛ, καὶ εἴληπται ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, ἀφ' οὗ τεταγμένως μὲν κατῆκται ἡ ΝΘ, παράλληλος δὲ ἦκται τῇ ΔΕ ἡ ΚΝ· τὸ ἄρα ΝΘΚ τρίγωνον τοῦ ΘΜΓ τριγώνου ἔλασσόν ἐστι τῷ ΓΒΛ τριγώνῳ. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ τρίτῳ θεωρήματι δέδεικται.

Ducatur enim per Ε recta ΕΔ contingens sectionem ΕΒ; & ΕΞ ordinatim applicetur. ᵃ itaq; quoniam oppositæ sectiones sunt ΖΑ, ΒΕ, quarum diameter ΑΒ; & recta ΖΓΕ per centrum ducitur; & ΖΗ, ΕΔ sectiones contingunt: erit ΔΕ ipsi ΖΗ parallela. est autem [ex hyp.] ΝΚ parallela ipsi ΖΗ: ergo & ΝΚ ipsi ΕΔ; & ΜΘ ipsi ΒΛ parallela est. quoniam igitur hyperbola est ΒΕ, cujus diameter ΑΒ, centrum Γ; & recta ΔΕ sectionem contingit, ordinatimque applicata est ΕΞ; & ipsi ΕΞ parallela est ΒΛ; sumitur autem in sectione punctum Ν, & ab eo ordinatim applicatur ΝΘ, & ipsi ΔΕ parallela ducitur ΚΝ: erit triangulum ΝΘΚ minus quam triangulum ΘΜΓ ipso ΓΒΛ triangulo. hoc enim in quadragesimo tertio theoremate ostensum est.

EUTOCIUS.

ᵃ Ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΖΑ,ΒΕ, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΓΕ, καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΔΕ· παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ.] Ἐπεὶ γὰρ ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΖ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΖΗ, καὶ κατηγμένη ἡ ΖΟ· ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΟΓΗ τῷ ἀπὸ ΓΑ, διὰ τὸ λζ'. θεώρημα. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΞΓΔ τῷ ἀπὸ ΓΒ ἐστὶν ἴσον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΟΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΞΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ ΟΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΟΓΗ τῷ ὑπὸ ΞΓΔ. καί ἐστιν ἡ ΟΓ τῇ ΓΞ ἴσον· καὶ ἡ ΗΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΓ ἴση τῇ ΓΕ, διὰ τὸ λ'·

ᵃ Itaque quoniam oppositæ sectiones sunt ΖΑ, ΒΕ, quarum diameter ΑΒ, & recta ΖΓΕ per centrum ducitur, & ΖΗ, ΔΕ sectiones contingunt; erit ΔΕ ipsi ΖΗ parallela.] Quoniam enim hyperbola est ΑΖ, rectaque ΖΗ sectionem contingit, & applicata est ΖΟ; erit rectangulum ΟΓΗ æquale quadrato ex ΓΑ, ex trigesimo septimo theoremate. & similiter rectangulum ΞΓΔ quadrato ex ΓΒ æquale est: igitur ut rectangulum ΟΓΗ ad quadratum ex ΑΓ ita rectangulum ΞΓΔ ad quadratum ex ΒΓ; & permutando, ut rectangulum ΟΓΗ ad rectangulum ΞΓΔ ita quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ; quare rectangulum ΟΓΗ æquale est rectangulo ΞΓΔ. estque linea ΟΓ æqualis ipsi ΓΞ, ergo & ΗΓ ipsi ΓΔ. sed ΖΓ ipsi ΓΕ est æqualis, ex trigesimo theoremate: lineæ igitur Z Γ, Γ H æquales sunt ipsis E Γ, Γ Δ, angulosque æquales continent ad Γ; sunt enim ad verticem: quare & Z H ipsi E Δ est æqualis, & angulus Γ H Z angulo Γ Δ E. & alterni sunt: ergo Z H ipsi E Δ parallela est. Casus hujus theorematis duodecim sunt, quemadmodum in hyperbola diximus in quadragesimo tertio theoremate, atque eadem est demonstratio.

Prop. XLV. *Theor.*

Si hyperbolam, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum secunda diametro conveniat; & à tactu ad eandem diametrum recta applicetur diametro alteri parallela, & per tactum & centrum ducta recta producatur; sumpto autem in sectione quovis puncto, ad secundam diametrum ducantur duæ rectæ, quarum una contingenti, altera applicatæ sit parallela: triangulum quod ab ipsis constituitur, in hyperbola quidem, majus est quam triangulum abscissum ab applicata ad centrum, triangulo cujus basis est recta contingens & vertex centrum sectionis; in ellipsi vero & circuli circumferentia, unà cum triangulo abscisso, æquale est triangulo cujus basis recta contingens & vertex sectionis centrum.

SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia A B Γ, cujus diameter A Θ, secunda diameter Δ Θ Λ, & centrum Θ; recta vero Γ M Λ sectionem contingat in Γ, ducaturque Γ Δ ipsi A Θ parallela, & juncta Γ Θ producatur; sumpto deinde in sectione quovis puncto B, ducantur ad secundam diametrum rectæ B E, B Z, quæ ipsis Λ Γ, Γ Δ sint parallelæ: dico triangulum B E Z, in hyperbola quidem, majus esse quam triangulum H Θ Z triangulo Λ Γ Θ; in ellipsi vero & circulo, triangulum B E Z unà cum Z H Θ æquale esse triangulo Γ Λ Θ.

Ducantur enim Γ K, B N parallelæ ipsi Δ Θ. & quoniam recta Γ Λ M sectionem contingit; atque applicata est Γ K; habebit [per 39. huj.] Γ K ad K Θ rationem compositam ex ratione quam habet M K ac K Γ & ex ea quam rectum figuræ latus habet ad transversum. ut autem M K ad K Γ ita [per 4. 6.] Γ Δ ad Δ Λ: ergo Γ K ad K Θ rationem compositam habet ex ratione Γ Δ ad Δ Λ & ex ratione recti lateris ad transversum. atque est triangulum Γ Δ Λ figura quæ fit ex K Θ; & triangulum Γ Θ K, hoc est Γ Δ Θ, figura quæ fit ex Γ K, hoc est ex Δ Θ: quare triangulum Γ Δ Λ, in hyperbola quidem, majus est quam triangulum Γ K Θ, triangulo facto ex A Θ, simili ipsi Γ Δ Λ; in ellipsi vero & circulo triangulum Γ K Θ una cum ipso Γ Δ Λ eidem triangulo est æquale. hoc enim in parallelogrammis triangulorum duplis, in quadragesimo primo theoremate, demonstratum est. itaque quoniam triangulum Γ Δ Λ à triangulo Γ K Θ, vel Γ Δ Θ,

αἱ ἄρα Z Γ, Γ H ἴσαι εἰσὶ ταῖς E Γ, Γ Δ. καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι τὰς πρὸς τὸ Γ, κατὰ κορυφὴν γάρ· ὥστε καὶ ἡ Z H τῇ E Δ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ Γ H Z γωνία τῇ ὑπὸ Γ Δ E. καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Z H τῇ E Δ. αἱ πτώσεις αὐτοῦ ιβʹ. εἰσί, καθάπερ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἐν τῷ μγʹ. ἐλέχθη, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτή.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μεʹ.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ τις εὐθεῖα ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ληφθέντος δὲ τοῦ ἔτυχεν ἐπὶ τῆς τομῆς σημείου, ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν κατηγμένην· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, τριγώνου, ὃ ἀποτέμνει ἡ κατηγμένη πρὸς τῷ κέντρῳ, μεῖζόν ἐστι τῷ τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ ἐφαπτομένη, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς τομῆς· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, μετὰ τοῦ ἀποτεμνομένου ἴσον ἔσται τῷ τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ ἐφαπτομένη, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς τομῆς.

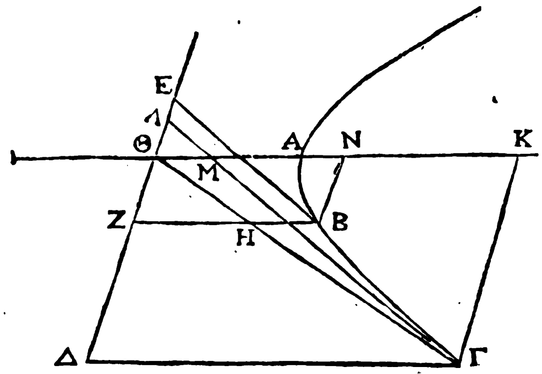
ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ A B Γ, ἧς διάμετρος μὲν ἡ A Θ, δευτέρα δὲ Δ Θ Λ, κέντρον δὲ τὸ Θ, καὶ ἡ μὲν Γ M Λ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Γ, ἡ δὲ Γ Δ ἤχθω παρὰ τὴν A Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Θ Γ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ B, καὶ ἀπὸ τοῦ B ἤχθωσαν αἱ B E, B Z, παρὰ τὰς Λ Γ, Γ Δ, ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον· λέγω ὅτι, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, τὸ B E Z τρίγωνον τοῦ H Θ Z μεῖζόν ἐστι τῷ Λ Γ Θ· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, τὸ B Z E τρίγωνον μετὰ τοῦ Z H Θ ἴσον ἐστὶ τῷ Γ Λ Θ.

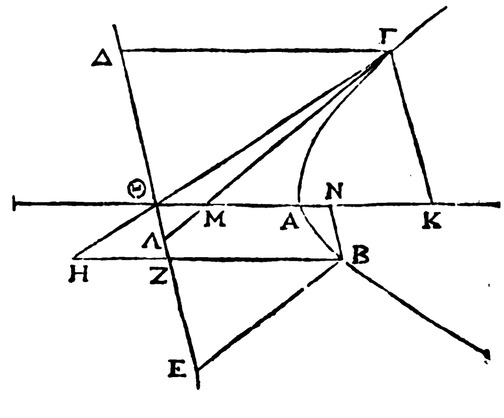
Ἤχθωσαν γὰρ αἱ Γ K, B N παρὰ τὴν Δ Θ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ Γ Λ M, κατῆκται δὲ ἡ Γ K· ἡ Γ K πρὸς K Θ τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ M K πρὸς K Γ καὶ τοῦ ὃν ἔχει τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν. ὡς δὲ ἡ M K πρὸς K Γ οὕτως ἡ Γ Δ πρὸς Δ Λ· ἡ Γ K ἄρα πρὸς K Θ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον, ἐκ τοῦ τῆς Γ Δ πρὸς Δ Λ καὶ τοῦ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ ἔστι τὸ Γ Δ Λ τρίγωνον τὸ ἀπὸ τῆς K Θ εἶδος, τὸ δὲ Γ K Θ, τουτέστι τὸ Γ Δ Θ, τὸ ἀπὸ τῆς Γ K εἶδος, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Δ Θ· τὸ Γ Δ Λ ἄρα τρίγωνον τοῦ Γ K Θ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς A Θ τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ Γ Δ Λ· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, τὸ Γ K Θ μετὰ τοῦ Γ Δ Λ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ. καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν τοῦτο ἐδείχθη ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ πρώτῳ θεωρήματι. ἐπεὶ οὖν τὸ Γ Δ Λ τρίγωνον τοῦ Γ K Θ, ἤτοι τοῦ Γ Δ Θ,

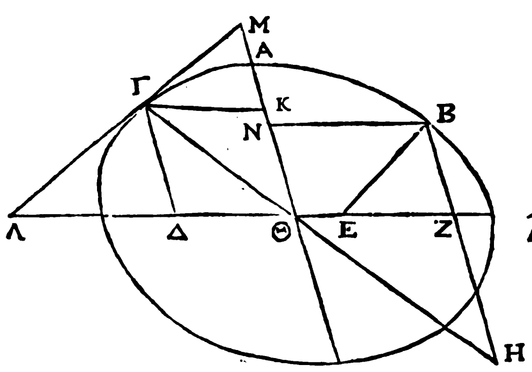
διαφέρει

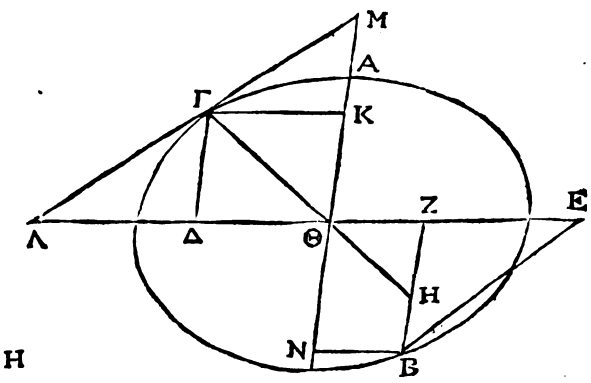
διαφέρει τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ, διαφέρει δὲ καὶ τῷ ΓΘΛ τριγώνῳ· ἴσον ἄρα τὸ ΓΘΛ τρίγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ τριγώνῳ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΒΖΕ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΓΔΛ, τὸ δὲ ΗΖΘ τῷ ΓΔΘ· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΖΕ

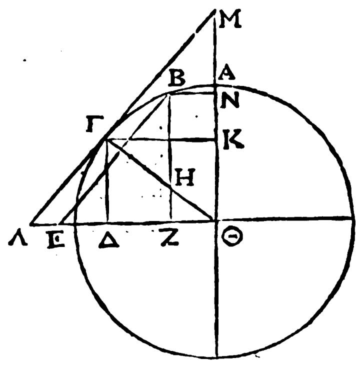
differt triangulo quod fit ex ΑΘ ipsi ΓΔΛ simili; differt autem & triangulo ΓΘΛ: erit ΓΘΛ triangulum æquale ei quod fit ex ΑΘ simili ipsi ΓΔΛ. rursus quoniam [per 4. 6.] triangulum ΒΖΕ simile est triangulo ΓΔΛ, & triangulum ΗΖΘ triangulo ΓΔΘ; ipsorum latera inter se eandem rationem habent. atque est triangulum

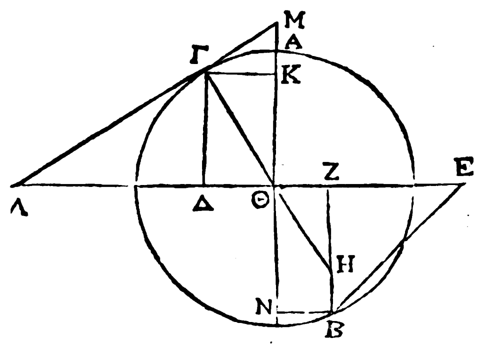












τὸ ἀπὸ τῆς ΝΘ μεταξὺ τῆς καταγομένης καὶ τοῦ κέντρου, τὸ δὲ ΗΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΝ καταγομένης, τουτέστι τῆς ΖΘ· καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα πρότερον τὸ ΒΖΕ τοῦ ΗΘΖ διαφέρει τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ, ὥστε καὶ τῷ ΓΛΘ.

ΒΖΕ, quod fit ex ΝΘ inter applicatam & centrum interjecta; triangulum vero ΗΖΘ, quod fit ex applicatâ ΒΝ, hoc est ex ΖΘ: igitur ex iis, quæ prius [ad 41. huj.] ostensa sunt, triangulum ΒΖΕ à triangulo ΗΘΖ differt triangulo, quod fit ex ΑΘ, simili ipsi ΓΔΛ; quare & triangulo ΓΛΘ.

EUTOCIUS.

Ἐπιστῆσαι χρὴ ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο πλείους ἔχει πτώσεις. ἐπὶ μὲν γὰρ τῆς ὑπερβολῆς ἔχει εἴκοσι. τὸ γὰρ ἀντὶ τοῦ Β λαμβανόμενον σημεῖον ἢ ταυτόν ἐστιν τῷ Γ, ἢ ταυτὸν τῷ Α· καὶ τότε συμβαίνει τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τρίγωνον ὅμοιον τῷ ΔΛΓ ταυτὸν εἶναι τῷ ἀποτεμνομένῳ τριγώνῳ ὑπὸ τῶν παραλλήλων τῶν ΔΛ, ΛΓ. ἐὰν δὲ μεταξὺ ληφθῇ τὸ Β σημεῖον τῶν Α, Γ, καὶ τὰ Δ, Λ ἀνωτέρω ὦσι τῶν περάτων τῆς δευτέρας διαμέτρου, γίνονται πτώσεις τρεῖς· τὰ γὰρ Ζ, Ε ἢ ἀνωτέρω τῶν περάτων φέρονται, ἢ ἐπ' αὐτά, ἢ κατωτέρω. ἐὰν δὲ τὰ Δ, Λ ἐπὶ τὰ πέρατα ὦσι τῆς δευτέρας διαμέτρου, τὰ Ζ, Ε κατωτέρω ἐνεχθήσονται. ὁμοίως

Attendendum est hoc theorema plures habere casus: in hyperbola enim viginti habet. nam punctum quod pro Β sumitur, vel idem est quod Γ, vel idem quod Α; & tunc contingit, triangulum factum ex ΑΘ simile ipsi ΔΓΛ idem esse quod à lineis parallelis ipsi ΔΛ, ΛΓ abscinditur. si vero Β sumatur inter Α, Γ, & puncta Δ, Λ sint supra terminos secundæ diametri, fient tres casus: nam puncta Ζ, Ε vel supra terminos ferentur, vel in ipsos, vel infra. si vero Δ, Λ sint in terminis secundæ diametri, Ζ, Ε infra terminos erunt. Similiter si Β sumatur

matur extra Γ; & ΘΓ ad H producatur, tres alios casus fieri contingit; nempe ipso Δ vel supra terminos secundæ diametri existente, vel in ipsis, vel infra, & similiter Z faciet tres casus. sin autem B sumatur ex altera parte sectionis, producetur ΓΘ ad H, propter demonstrationem: & BZ, BE tres casus efficient, quoniam Z, E vel ad terminos secundæ diametri ferentur, vel supra, vel infra. Ellipsis vero & circuli circumferentiæ varios casus nunc non explicabimus, tot enim sunt quot in præcedenti theoremate sumuntur. erunt igitur hujus theorematis casus omnes centum. sed possunt hæc eadem etiam in oppositis sectionibus demonstrari.

δὲ καὶ ἐὰν ἐξωτέρω ληφθῇ τοῦ Γ τὸ B, καὶ ἡ ΘΓ ἐπὶ τὸ H ἐκβληθήσεται, συμβαίνει δὲ οὕτως γίνεσθαι ἄλλας πτώσεις τρεῖς· τοῦ γὰρ Δ σημείου ἢ ἀνωτέρω φερομένου τοῦ πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἢ ἐπ' αὐτό, ἢ κατωτέρω· καὶ τὸ Z ὁμοίως φερόμενον ποιήσει τὰς τρεῖς πτώσεις. ἐὰν δὲ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς τομῆς ληφθῇ τὸ B σημεῖον, ἡ μὲν ΓΘ ἐκβληθήσεται ἐπὶ τὸ H, διὰ τὴν ἀπόδειξιν· αἱ δὲ BZ, BE ποιοῦσι πτώσεις τρεῖς, ἐπειδὴ τὰ Z, E ἐπὶ τὸ πέρας φέρεται τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἢ ἀνωτέρω, ἢ κατωτέρω. τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας οὐ τὰ ποικίλα ἐροῦμεν· ἔστι γὰρ ὅσα ἐν τῷ προλαβόντι θεωρήματι ληφθῇ. ὥστε εἶναι τὰς πτώσεις τοῦ θεωρήματος τούτου ρ'. δύναται δὲ τὰ τῆς προτάσεως δείκνυσθαι καὶ ἐπὶ ἀντικειμένων.

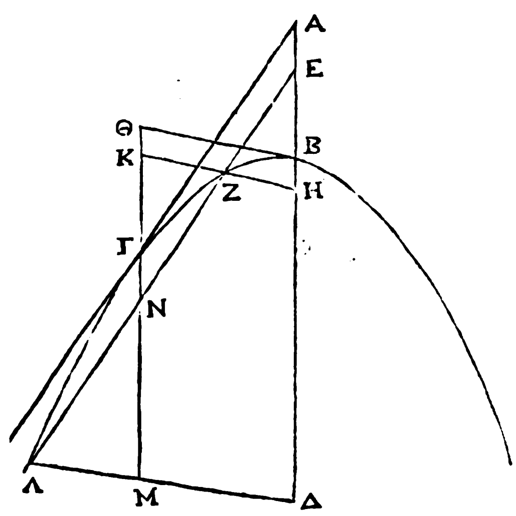
PROP. XLVI. *Theor.*

Si parabolam recta linea contingens cum diamatro conveniat: quæ per tactum ducitur diametro parallela ad easdem partes sectionis, rectas in sectione ductas contingenti parallelas bifariam secabit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ· ἡ διὰ τῆς ἁφῆς παράλληλος ἀγομένη τῇ διαμέτρῳ ἐπὶ ταὐτὰ τῆς τομῆς, τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην δίχα τέμνει.

SIT parabola, cujus diametar ABΔ, & recta AΓ sectionem contingat; per Γ vero ducatur ΘΓΜ parallela AΔ; &, sumpto in sectione quovis puncto Λ, ducatur ΛNZE ipsi AΓ parallela: dico ΛN ipsi NZ æqualem esse.



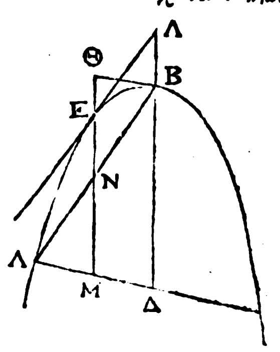
Ducantur enim ordinatim BΘ, KZH, ΛMΔ. & quoniam ex iis, quæ in quadragesimo secundo theoremate demonstravimus, triangulum EΛΔ æquale est parallelogrammo BM, & triangulum EZH parallelogrammo BK: parallelogrammum igitur reliquum HM æquatur quadrilatero ΛZHΔ. commune auferatur MΔHZN quinquelaterum: reliquum igitur triangulum KZN reliquo ΛMN erit æquale. sed KZ [ex hyp.] parallela est ipsi ΛM: ergo [per 4. 6. & 14. 5.] ZN ipsi ΛN æqualis erit.

ΕΣΤΩ παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ABΔ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ AΓ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ AΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΓΜ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Λ, καὶ ἤχθω τῇ AΓ παράλληλος ἡ ΛNZE· λέγω ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΛN τῇ ZN.

Ἤχθωσαν τεταγμένως αἱ BΘ, ZHK, ΛMΔ. ἐπεὶ οὖν, διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μβ'. θεωρήματι, ἴσον ἐστὶ τὸ EΛΔ τρίγωνον τῷ BM παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ EZH τῷ BK· λοιπὸν ἄρα τὸ HM παραλληλόγραμμον λοιπῷ τῷ ΛZHΔ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ MΔHZN πεντάπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ KZN τρίγωνον τῷ ΛMN ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ KZ τῇ ΛM, ἴση ἄρα ἡ ZN τῇ ΛN.

EUTOCIUS.

Hoc theorema plures casus habet. demonstrabimus autem habita ratione casuum quadragesimi secundi theorematis; ut exempli causa, si Z cadat in B, ita dicemus. Quoniam triangulum BΔΛ [per 42. huj.] æquale est parallelogrammo ΘBΔM, commune auferatur NMΔB; erit reliquum ΛMN triangulo ΘNB æquale.



In reliquis autem sic. Quoniam triangulum ΛEΔ parallelogrammo ΘBΔM est æquale, & triangulum HZE parallelogrammo ΘBHK: erit reliquum ZΛΔH æquale reliquo KHΔM. commune auferatur NMΔHZ. ac reliquum ΛNM triangulo KZN æquale est.

Τοῦτο τὸ θεώρημα πτώσεις ἔχει πλείους. δείξομεν δὲ προσέχοντες ταῖς πτώσεσι τοῦ μβ'. ὑποδείγματος δὲ χάριν, ἐὰν τὸ Z ἐπὶ τὸ B πίπτοιτο, οὕτως ἐροῦμεν. ἐπεὶ τὸ BΛΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘBΔM, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ NMΔB· λοιπὸν ἄρα τὸ ΛMN τῷ ΘNB ἐστὶν ἴσον.

Ἐπὶ δὲ τοῖς λοιποῖς ἐροῦμεν. ἐπειδὴ τὸ ΛEΔ τῷ ΘBΔM ἐστὶν ἴσον, καὶ τὸ HZE τῷ ΘBHK· λοιπὸν ἄρα τὸ ZΛΔH λοιπῷ τῷ KHΔM ἐστὶν ἴσον. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ NMΔHZ· καὶ τὸ λοιπὸν τὸ ΛNM τῷ λοιπῷ KZN ἴσον ἐστί.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

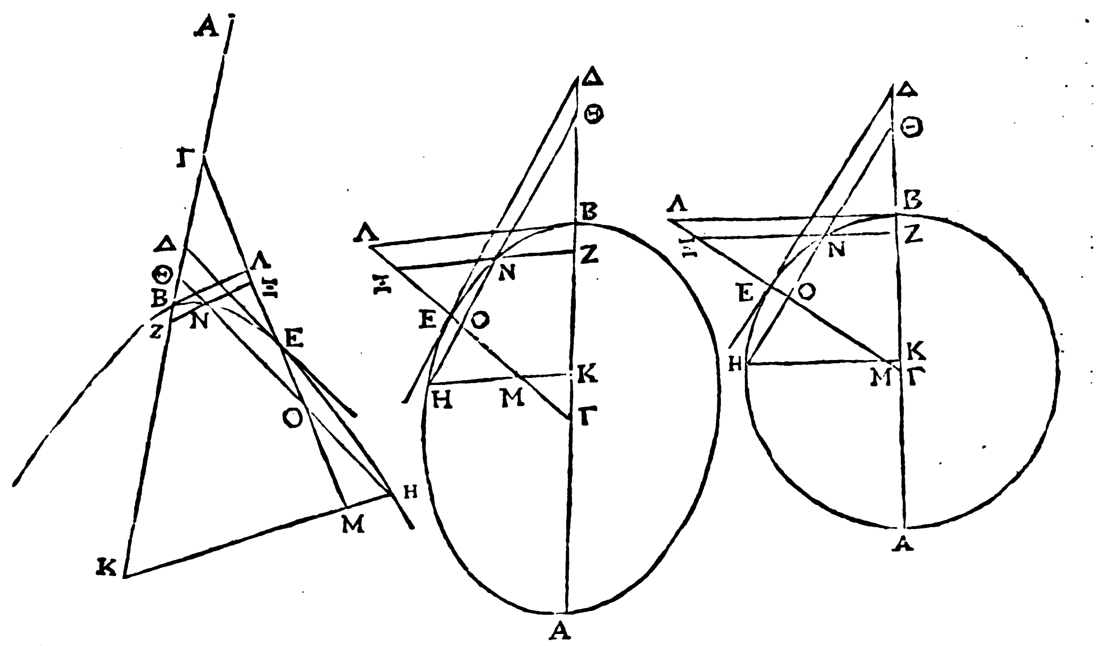
Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἀχθῇ ἐπὶ ταὐτὰ τῆς τομῆς· δίχα τεμεῖται ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην.

Ἔστω ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ν, καὶ διὰ τὸ Ν τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΝΟΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ.

Prop. XLVII. *Theor.*

Si hyperbolam, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conveniat; & per tactum & centrum ducatur recta ad easdem partes ad quas sectio: rectas quæ in sectione ducuntur contingenti parallelas bifariam secabit.

Sit hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cujus diameter A B, centrum Γ; ducaturque Δ E sectionem contingens, & juncta Γ E producatur; sumpto autem in sectione quovis puncto N, ducatur per N linea Θ N O H ipsi Δ E parallela: dico N O ipsi O H æqualem esse.

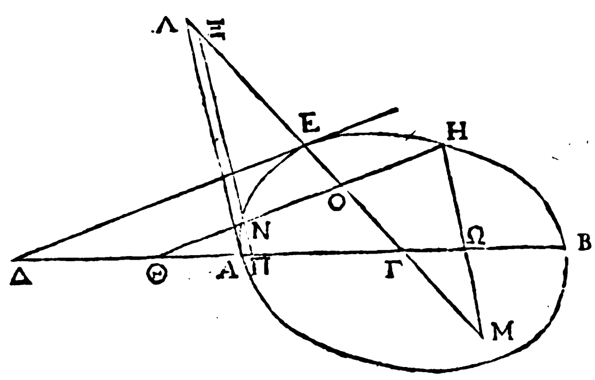


Κατήχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΞΝΖ, ΒΛ, ΗΜΚ· διὰ τὰ δεδειγμένα ἄρα ἐν τῷ μγʹ. θεωρήματι, ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΘΝΖ τρίγωνον τῷ ΛΒΖΞ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΗΘΚ τρίγωνον τῷ ΛΒΚΜ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΝΗΚΖ τετράπλευρον λοιπῷ τῷ ΜΚΖΞ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΟΝΖΚΜ πεντάπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΟΜΗ τρίγωνον λοιπῷ τῷ ΝΞΟ ἐστὶν ἴσον. καί ἐστι παράλληλος ἡ ΜΗ τῇ ΝΞ· ἴση ἄρα ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ.

Applicentur enim ordinatim Ξ N Z, B Λ, H M K: ergo, ex demonstratis in quadragesimo tertio theoremate, triangulum Θ N Z æquale erit quadrilatero A B Z Ξ, & H Θ K triangulum quadrilatero A B K M: reliquum igitur N H K Z quadrilaterum reliquo M K Z Ξ est æquale. commune auferatur O N Z K M quinquelaterum: atque erit reliquum triangulum O M H æquale reliquo O Ξ N. atque est M H parallela ipsi N Ξ: ergo [per 4.6. & 14. 5.] N O ipsi O H est æqualis.

EUTOCIUS.

Τοῦτο τὸ θεώρημα ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς πτώσεις ἔχει ὅσας τὸ πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς παραβολῆς εἶχε· τὰς δὲ ἀποδείξεις αὐτῶν ποιησόμεθα, προσέχοντες τῇ πτώσει τοῦ μγʹ. θεωρήματος· καὶ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως τὰς ἀποδείξεις ἐκ τῆς πτώσεων τοῦ μγʹ. οἷον ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς, τοῦ Η σημείου ἐκτὸς εἰλημμένου. ἐπειδὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΑΓ τρίγωνον τοῖς ΘΗΩ, ΩΓΜ,



Hoc theorema in hyperbola tot habet casus quot habebat præcedens in parabola: demonstrationes autem eorum faciemus, attendentes ad casus quadragesimi tertii theorematis: pariterque in ellipsi, ut in subjecta figura, cum punctum H extra sumitur. quoniam triangulum Λ A Γ æquale est triangulis Θ H Ω, Ω Γ M, hoc est triangulis ΟΘΓ, ΟΗΜ; atque est idem triangulum ΛΑΓ æquale triangulo ΞΠΓ & quadrilatero ΛΑΠΞ, sive triangulo ΝΘΠ, ex iis quæ demonstrata sunt in quadragesimo tertio theoremate: erunt igitur triangula ΞΠΓ, ΝΘΠ æqualia triangulis ΟΘΓ, ΟΜΗ. commune auferatur triangulum ΘΟΓ: reliquum igitur triangulum ΞΟΝ æquale est reliquo ΗΟΜ. & est ΝΞ parallela ipsi ΜΗ; ergo ΝΟ ipsi ΟΗ est æqualis.

τοῦτ' ἔστι τοῖς ΟΘΓ, ΟΗΜ τριγώνοις, τὸ δὲ ΛΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ΞΠΓ τριγώνῳ καὶ τῷ ΛΑΠΞ τετραπλεύρῳ, τουτέστι τῷ ΝΘΠ τριγώνῳ, διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μγ'. θεωρήματι· καὶ τὰ ΞΠΓ, ΝΘΠ ἄρα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ΟΘΓ, ΟΜΗ τριγώνοις. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΘΟΓ τρίγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΞΟΝ τῷ ΗΟΜ ἴσον ἐστί. καὶ παράλληλος ἡ ΝΞ τῇ ΜΗ· ἴση ἄρα ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ.

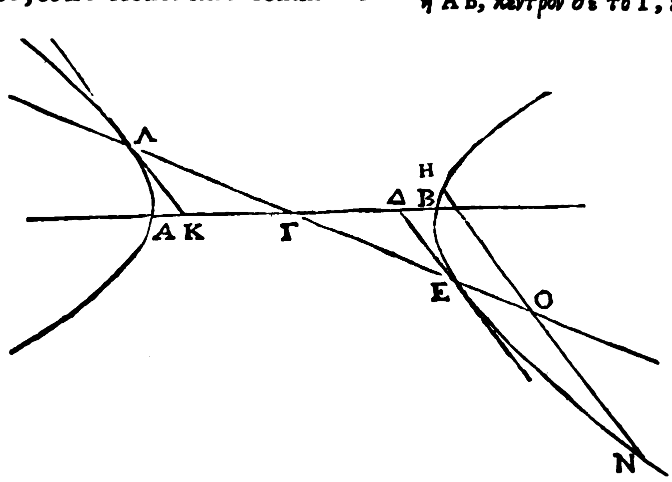
PROP. XLVIII. *Theor.*

Si unam oppositarum sectionum recta linea contingens cum diametro conveniat, & per tactum & centrum producta recta secet alteram sectionem: quæ in altera sectione ducta fuerit contingenti parallela à recta producta bifariam secabitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθεῖσα τέμνῃ τὴν ἑτέραν τομήν· ἥτις ἂν ἀχθῇ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐκβληθείσης.

SINT oppositæ sectiones, quarum diameter ΑΒ, centrumque Γ, & ΚΛ sectionem Α contingat, junctaque ΛΓ producatur; sumpto autem in Β sectione puncto Ν, per Ν ducatur ΝΗ, parallela ipsi ΑΚ: dico ΝΟ ipsi ΟΗ æqualem esse.



Ducatur enim per Ε sectionem contingens ΕΔ, & erit [ex 30. huj.] ΕΔ ipsi ΑΚ parallela; quare & ipsi ΝΗ. quoniam igitur hyperbola est ΒΕΝ, cujus centrum Γ, & ΔΕ sectionem contingit, & juncta est ΓΕ; sumitur autem in sectione punctum Ν, per quod ipsi ΔΕ parallela ducta est ΝΗ: ex iis quæ in hyperbola [per propositionem præced.] ostendimus, erit ΝΟ ipsi ΟΗ æqualis.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΛΚ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΗ· λέγω ὅτι ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ ἐστὶν ἴση.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ε ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΕΔ· ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΛΚ παράλληλός ἐστιν, ὥστε καὶ τῇ ΝΗ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΒΕΝ, ἧς κέντρον τὸ Γ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ ἐπέζευκται ἡ ΓΕ, καὶ εἴληπται ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἦκται ἡ ΝΗ· διὰ τὸ προδεδειγμένον ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς, ἴση ἐστὶν ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ.

EUTOCIUS.

Hujus etiam theorematis casus ita se habent, ut in quadragesimo septimo theoremate dictum est de hyperbolæ descriptione.

Καὶ τούτου αἱ πτώσεις ὡσαύτως ἔχουσι τοῖς προειρημένοις ἐπὶ τοῦ μζ'. κατὰ τὴν τῆς ὑπερβολῆς καταγραφήν.

PROP. XLIX. *Theor.*

Si parabolam recta linea contingens cum diametro conveniat, & per tactum ducatur recta diametro parallela; à vertice vero ducatur parallela ordinatim applicatæ; & fiat ut portio contingentis inter applicatam & tactum interjecta ad portionem parallelæ itidem inter tactum & applicatam interjectæ, ita quædam recta ad duplam contingentis: quæ à sectione ducta fuerit parallela contingenti, ad

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

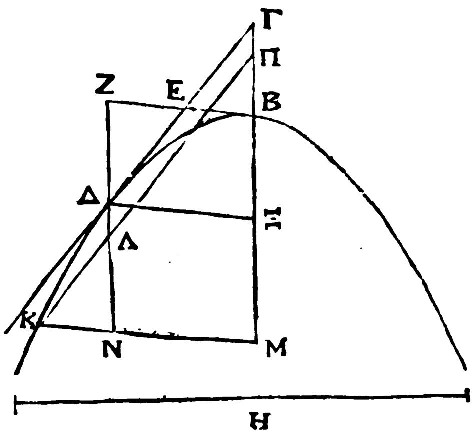
Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ μὲν τῆς ἁφῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ διαμέτρῳ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀχθῇ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ ποιηθῇ ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ τμῆμα τῆς παραλλήλου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, μένη, ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένην εὐθεῖαν παράλληλον τῇ διαμέτρῳ, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ πεπορισμένης εὐθείας καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ.

ΕΣΤΩ παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΜΒΓ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΔΝ, τεταγμένως δὲ ἀνήχθω ἡ ΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ οὕτως εὐθεῖά τις ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Κ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΚΛΠ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς Η καὶ τῆς ΔΛ, τουτέστιν ὅτι, διαμέτρου οὔσης τῆς ΔΛ, ὀρθία ἐστὶν ἡ Η.

Κατήχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΔΞ, ΚΝΜ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΔ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, τεταγμένως δὲ κατῆκται ἡ ΔΞ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΞ. ἡ δὲ ΒΞ τῇ ΖΔ ἴση ἐστίν· καὶ ἡ ΓΒ ἄρα τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ τὸ ΕΓΒ τρίγωνον τῷ ΕΖΔ τριγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΕΒΜΝ σχῆμα· τὸ ἄρα ΔΓΜΝ τετράπλευρον τῷ ΖΜ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον, τουτέστι τῷ ΚΠΜ τριγώνῳ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΛΠΜΝ τετράπλευρον· [a] λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΛΝ τρίγωνον τῷ ΓΛ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΔΛΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΛΝ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τοῦ ὑπὸ ΛΔΓ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΛΝ, ὡς δὲ ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔΓ οὕτω τὸ ὑπὸ Η, ΔΛ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΛΝ οὕτως τὸ ὑπὸ Η, ΔΛ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ, καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τῷ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΚΛ τῷ ὑπὸ Η, ΔΛ.

rectam quæ per tactum ducitur diametro parallelam, poterit rectangulum contentum sub inventa linea & ea quæ inter ipsam & tactum interjicitur.

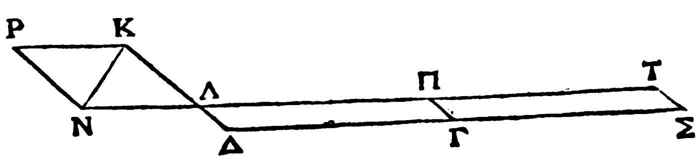
SIT parabola cujus diameter ΜΒΓ; & ΓΔ sectionem contingat; per Δ vero ipsi ΒΓ parallela ducatur ΖΔΝ; & ΖΒ ordinatim applicetur; fiatque ut ΕΔ ad ΔΖ ita quædam recta Η ad duplam ipsius ΓΔ; &, sumpto in sectione puncto Κ, ducatur per Κ ipsi ΓΔ parallela ΚΛΠ: dico quadratum ex ΚΛ æquale esse rectangulo sub Η & ΔΛ; hoc est, diametro existente ΔΛ, lineam Η esse rectum latus.



Applicentur enim ordinatim ΔΞ, ΚΝΜ. & quoniam ΓΔ sectionem contingit, ordinatim vero applicata est ΔΞ; erit [per 4.6.] ΓΒ æqualis ΒΞ. sed [per 35. huj.] ΒΞ est æqualis ΖΔ: ergo ΓΒ ipsi ΖΔ æqualis erit; & propterea [per 33. 1.] triangulum ΕΓΒ æquale triangulo ΕΖΔ. commune addatur, figura scilicet ΔΕΒΜΝ: quadrilaterum igitur ΔΓΜΝ æquale est parallelogrammo ΖΜ, hoc est [per 42.huj.] triangulo ΚΠΜ. commune auferatur quadrilaterum ΛΠΜΝ: [a] ergo reliquum triangulum ΚΛΝ parallelogrammo ΛΓ est æquale. angulus autem ΔΛΠ [per 15.1.] æqualis est angulo ΚΛΝ: quare [per *Pappi* lem.8.] rectangulum ΚΛΝ duplum est rectanguli ΛΔΓ: quoniam igitur [ex hyp.] ut ΕΔ ad ΔΖ ita est linea Η ad duplam ipsius ΓΔ, & [per 4. 6.] ut ΕΔ ad ΔΖ ita ΚΛ ad ΛΝ; erit ut Η ad duplam ΓΔ ita ΚΛ ad ΛΝ. sed [per 1. 6.] ut ΚΛ ad ΛΝ ita quadratum ex ΚΛ ad rectangulum ΚΛΝ; & ut Η ad duplam ΓΔ ita rectangulum sub Η & ΔΛ ad duplum rectanguli ΓΔΛ: quare ut quadratum ex ΚΛ ad rectangulum ΚΛΝ ita rectangulum sub Η & ΔΛ ad duplum ipsius ΓΔΛ rectanguli; & [per 16. 5.] permutando. est autem [ex modo ostensis] ΚΛΝ rectangulum æquale duplo rectanguli ΓΔΛ: ergo [per 14. 5.] quadratum ex ΚΛ rectangulo sub Η & ΔΛ æquale erit.

EUTOCIUS.

[a] Λοιπὸν ἄρα ΚΛΝ τρίγωνον τῷ ΔΛΠΓ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΛΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΛΝ γωνίᾳ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τοῦ ὑπὸ ΛΔΓ.] ἐκκείσθω γὰρ χωρὶς τὸ ΚΛΝ τρίγωνον, καὶ τὸ ΔΛΠΤ παραλληλόγραμμον. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛΝ τρίγωνον τῷ ΔΠ παραλληλογράμμῳ, ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΛΚ παράλληλος ἡ ΝΡ, διὰ δὲ τοῦ Κ τῇ ΛΝ ἡ ΚΡ· παραλλη-

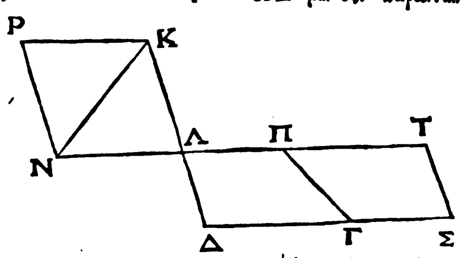


[a] Ergo reliquum triangulum ΚΛΝ parallelogrammo ΔΛΠΓ est æquale. angulus autem ΔΛΠ æqualis est angulo ΚΛΝ: quare rectangulum ΚΛΝ duplum est rectanguli ΛΔΓ.] Triangulum enim ΚΛΝ seorsim describatur, itemque parallelogrammum ΔΛΠΓ. & quoniam triangulum ΚΛΝ æquale est parallelogrammo ΔΠ, ducatur per Ν ipsi ΛΚ parallela ΝΡ, & per Κ ducatur ΚΡ parallela ipsi ΛΝ: parallelogrammum igitur

tur est ΛΡ, & duplum trianguli ΚΛΝ; quare & parallelogrammi ΔΠ duplum. producantur ΔΓ, ΛΠ ad puncta Σ, Τ, ponaturque ipsi ΔΓ æqualis ΓΣ, & ΠΤ æqualis ipsi ΛΠ, & jungatur ΣΤ: ergo ΔΤ parallelogrammum est duplum ipsius ΔΠ, & idcirco ΛΡ parallelogrammum æquale parallelogrammo ΛΣ. est autem & æquiangulum, quoniam anguli ad Λ secundum verticem sunt æquales. sed [per 14.6.] æqualium & æquiangulorum parallelogrammorum latera quæ circa æquales angulos sunt reciproce proportionalia. ergo ut ΚΛ ad ΛΤ, hoc est ad ΔΣ, ita ΔΛ ad ΛΝ; propterea que [per 16.6.] rectangulum ΚΛΝ æquale est rectangulo ΛΔΣ. & cum ΔΣ dupla sit ipsius ΔΓ, rectangulum ΚΛΝ rectanguli ΛΔΓ duplum erit.

λόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ Λ Ρ, καὶ διπλάσιον τοῦ Κ Λ Ν τριγώνου· ὥστε καὶ τοῦ Δ Π παραλληλογράμμου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ Δ Γ, Λ Π ἐπὶ τὰ Σ, Τ, καὶ κείσθω τῇ Δ Γ ἴση ἡ Γ Σ, τῇ δὲ Λ Π ἡ Π Τ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Σ Τ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ Δ Τ διπλάσιον τοῦ Δ Π· ὥστε ἴσον τὸ Λ Ρ τῷ Λ Σ. ἔστι δὲ τοῦτο καὶ ἰσογώνιον, διὰ τὸ τὰς πρὸς τῷ Λ γωνίας κατὰ κορυφὴν οὔσας ἴσας εἶναι. τῶν δὲ ἴσων ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραί· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Κ Λ πρὸς τὴν Λ Τ, τουτέστι πρὸς τὴν Δ Σ, οὕτως ἡ Δ Λ πρὸς Λ Ν, καὶ τὸ ὑπὸ Κ Λ Ν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Λ Δ Σ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ Δ Σ τῆς Δ Γ, τὸ ὑπὸ Κ Λ Ν διπλάσιόν ἐστι τοῦ Λ Δ Γ.

At si recta quidem ΔΓ ipsi ΛΠ sit parallela, ΓΠ vero non sit parallela ipsi ΛΔ; erit ΔΓΠΛ trapezium: & tunc dico rectangulum ΚΛΝ æquale esse ei quod sub ΔΛ & utraque ipsarum ΓΔ, ΛΠ continetur. si enim parallelogrammum ΛΡ compleatur sicuti prius, producanturque ΔΓ, ΛΠ, ita ut ipsi ΛΠ æqualis ponatur ΓΣ, & ipsi ΔΓ æqualis ΠΤ, & jungatur ΣΤ; fiet ΔΤ parallelogrammum duplum ipsius ΔΠ, & eadem erit demonstratio. hoc autem utile est ad ea quæ sequuntur.



Ἐὰν δὲ ἡ μὲν Δ Γ τῇ Λ Π ἐστὶ παράλληλος, ἡ δὲ Γ Π τῇ Λ Δ μὴ ἐστὶ παράλληλος, τραπέζιον μὲν δηλονότι ἐστὶ τὸ Δ Γ Π Λ· καὶ οὕτως δή φημι, ὅτι τὸ ὑπὸ Κ Λ Ν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Δ Λ καὶ συναμφοτέρου τῆς Γ Δ, Λ Π. ἐὰν γὰρ τὸ μὲν Λ Ρ ἀναπληρωθῇ, ὡς προείρηται, ἐκβληθῶσι δὲ καὶ Δ Γ, Λ Π, καὶ τεθῇ τῇ μὲν Λ Π ἴση ἡ Γ Σ, τῇ δὲ Δ Γ ἡ Π Τ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ Σ Τ· παραλληλόγραμμον ἔσται τὸ Δ Τ διπλάσιον τοῦ Δ Π, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτή. ἁρμόσει χρησίμως δὲ τοῦτο εἰς τὰ ἑξῆς.

Prop. L. *Theor.*

Si hyperbolam, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conveniat; & per tactum & centrum recta producatur; à vertice autem ordinatim applicata conveniat cum ea quæ ducitur per tactum & centrum; fiatque ut portio contingentis inter tactum & applicatam interjecta ad portionem ductæ per tactum & centrum, quæ itidem inter tactum & applicatam interjicitur, ita quædam recta ad duplam contingentis: quæ à sectione ducitur contingenti parallela ad rectam per tactum & centrum ductam, poterit spatium rectangulum quod adjacet inventæ rectæ, latitudinem habens interjectam inter ipsam & tactum; in hyperbola quidem excedens figurâ simili contentæ sub duplâ ejus quæ est inter centrum & tactum & inventâ lineâ; in ellipsi vero & circulo, eâdem deficiens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀναχθεῖσα εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμπίπτῃ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, καὶ ποιηθῇ ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἠγμένης διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένην, δυνήσεται τὸ χωρίον ὀρθογώνιον παρακείμενον παρὰ τὴν πορισθεῖσαν, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς διπλασίας τῆς μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς πορισθείσης εὐθείας, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, ἐλλεῖπον.

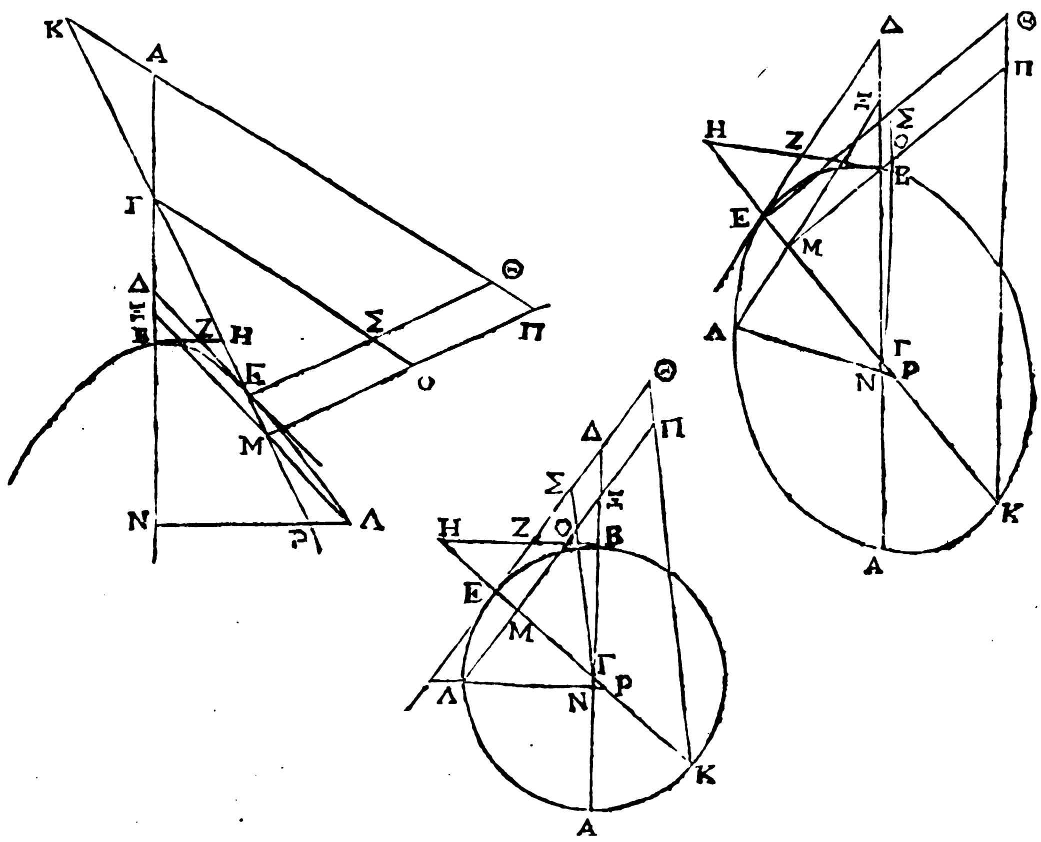
SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cujus diameter ΑΒ, centrum Γ; & ΔΕ sectionem contingat; juncta vero ΓΕ producatur ad utrasque partes; ponaturque ΓΚ ipsi ΕΓ æqualis; & per Β ordinatim applicetur ΒΖΗ; deinde per Ε ad rectos angulos ipsi ΕΓ ducatur ΕΘ; fiatque ut ΖΕ ad ΕΗ ita ΕΘ ad duplam ipsius ΕΔ, & juncta ΘΚ

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ Α Β, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ Δ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Γ Ε ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκατέρας, καὶ κείσθω τῇ Ε Γ ἴση ἡ Γ Κ, καὶ διὰ τοῦ Β τεταγμένως ἀνήχθω ἡ Β Ζ Η, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ Ε Γ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ Ε Θ, καὶ γινέσθω ὡς ἡ Ζ Ε πρὸς Ε Η οὕτως ἡ Ε Θ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Ε Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἐπιζευχθεῖσαι ἡ ΘΚ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Λ, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ ΕΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΜΞ, τῇ ΒΗ ἡ ΛΝΡ, τῇ δὲ ΕΘ ἡ ΜΠ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ ΛΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΜΠ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ ΚΠ παράλληλος ἡ ΓΣΟ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΚΓ, ὡς δὲ ἡ ΕΓ πρὸς ΚΓ οὕτως ἡ ΕΣ πρὸς ΣΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΣ τῇ ΣΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΕΔ, καί ἐστι τῆς ΕΘ ἡμίσεια ἡ ΕΣ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. ὡς δὲ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ· ὡς ἄρα

producatur; sumpto denique in sectione puncto Λ, per ipsum ducatur ΛΜΞ ipsi quidem ΕΔ parallela; ΛΝΡ vero parallela ipsi ΒΗ; ipsique ΕΘ parallela ΜΠ: dico quadratum ex ΛΜ rectangulo ΕΜΠ æquale esse.

Ducatur enim per Γ recta ΓΣΟ parallela ipsi ΚΠ. itaque quoniam ΕΓ æqualis est ipsi ΚΓ, & [per 2. 6.] ut ΕΓ ad ΓΚ ita ΕΣ ad ΣΘ; erit ΕΣ ipsi ΣΘ æqualis. & quoniam [ex hyp.] ut ΖΕ ad ΕΗ ita ΘΕ ad duplam ΕΔ, atque est ipsius ΒΘ dimidia ΕΣ: erit ut ΖΕ ad ΕΗ ita ΣΕ ad ΕΔ. ut autem ΖΕ ad ΕΗ ita [per 4. 6.] ΛΜ ad ΜΡ: ergo ut ΛΜ ad ΜΡ ita



ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ οὕτως ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΡΝΓ τρίγωνον τοῦ ΗΒΓ τριγώνου, τουτέστι τοῦ ΓΔΕ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μεῖζον ἐδείχθη, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου ἔλασσον τῷ ΛΝΞ· κοινῶν ἀφαιρεθέντων, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τοῦ τε ΕΓΔ τριγώνου καὶ τοῦ ΝΡΜΞ τετραπλεύρου, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τοῦ ΜΞΓ τριγώνου· τὸ ΛΜΡ τρίγωνον τῷ ΜΕΔΞ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ΜΞ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΜΡ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΜΞ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΛΜΡ τῷ ὑπὸ τῆς ΕΜ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΕΔ, ΜΞ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ οὕτως ἥ τε ΜΞ πρὸς ΔΕ καὶ ἡ ΜΟ πρὸς ΕΣ· ὡς ἄρα ἡ ΜΟ πρὸς ΕΣ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΔΕ· καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΕΣ πρὸς ΕΣ οὕτω συναμφότερος ἡ ΜΞΕΔ πρὸς ΕΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΣΕ πρὸς συναμφότερον τὴν ΞΜ, ΕΔ οὕτως ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. ἀλλ' ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΕΣ πρὸς συναμφότερον τὴν ΜΞ, ΔΕ οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ καὶ τῆς ΕΜ πρὸς τὸ ὑπὸ

ΣΕ ad ΕΔ. sed cum demonstratum sit [in 43. 1. huj.] triangulum ΡΝΓ in hyperbola quidem majus esse quam triangulum ΗΒΓ, hoc est quam triangulum ΓΔΕ; in ellipsi vero & circulo minus, ipso ΛΝΞ triangulo: communibus ablatis, in hyperbola scilicet triangulo ΕΓΔ & ΝΡΜΞ quadrilatero, in ellipsi autem & circulo, triangulo ΜΞΓ; erit ΛΜΡ triangulum quadrilatero ΜΕΔΞ æquale. atque est [ex hyp.] ΜΞ parallela ipsi ΔΕ, & [per 15. 1.] angulus ΛΜΡ æqualis angulo ΕΜΞ; ergo [ex lem. *Pappi* 8.] rectangulum ΛΜΡ æquale est rectangulo sub ΕΜ & utraque ipsarum ΕΔ, ΜΞ contento. & quoniam [per 4. 6.] ut ΜΓ ad ΓΕ ita & ΜΞ ad ΔΕ & ΜΟ ad ΕΣ: ut igitur ΜΟ ad ΕΣ ita ΜΞ ad ΔΕ; & componendo [per 18. 5.] ut utraque ΜΟ, ΣΕ ad ΕΣ ita utraque ΜΞ, ΔΕ ad ΕΔ: quare permutando, ut utraque ΜΟ, ΣΕ ad utramque ΞΜ, ΕΔ ita ΣΕ ad ΕΔ. sed ut utraque ΜΟ, ΣΕ ad utramque ΜΞ, ΔΕ ita [per 1. 6.] rectangulum sub utraque ΜΟ, ΣΕ & ipsa ΕΜ ad contentum sub utraque

ΜΞ, ΕΔ & ΕΜ. ut autem ΣΕ ad ΕΔ ita [ut supra ostensum] ΖΕ ad ΕΗ, hoc est [per 4. 6.] ΛΜ ad ΜΡ; atque adeo [per 1. 6.] quadratum ex ΛΜ ad rectangulum ΛΜΡ: quare ut rectangulum contentum sub utraque ΜΟ, ΕΣ & ΜΕ ad contentum sub utraque ΜΞ, ΔΕ & ΕΜ, ita quadratum ex ΛΜ ad rectangulum ΛΜΡ; & permutando, ut rectangulum contentum sub utraque ΜΟ, ΕΣ & ΕΜ ad quadratum ex ΜΛ, ita contentum sub utraque ΜΞ, ΔΕ & ΕΜ ad ΛΜΡ rectangulum. est autem [ut supra ostensum] rectangulum ΛΜΡ æquale rectangulo sub ΜΕ & utraque ΜΞ, ΔΕ: ergo quadratum ex ΛΜ æquale est rectangulo sub ΕΜ & utraque ΜΟ, ΣΕ. est autem ΣΕ ipsi ΣΘ æqualis, & [per 33. 1.] ΣΘ ipsi ΟΠ: quadratum igitur ex ΛΜ rectangulo ΕΜΠ æquale erit.

συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ καὶ τῆς ΕΜ. ὡς δὲ ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, τουτέστιν ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΜΡ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ καὶ τῆς ΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΔΕ καὶ τῆς ΕΜ οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΜΡ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ καὶ τῆς ΜΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΜ, οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ καὶ τῆς ΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΜΡ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΛΜΡ τῷ ὑπὸ τῆς ΜΕ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΛΜ τῷ ὑπὸ ΕΜ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΣΕ τῇ ΣΘ ἴση, ἡ δὲ ΣΘ τῇ ΟΠ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΜ τῷ ὑπὸ ΕΜΠ.

EUTOCIUS.

Casus hujus theorematis ita se habent ut in quadragesimo tertio, sicut & casus subsequentis theorematis quinquagesimi primi.

Πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος ὡσαύτως ἔχουσι τῷ τοῦ μγ'. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ να'.

Prop. LI. *Theor.*

Si quamlibet oppositarum sectionum recta linea contingens cum diametro conveniat, & per tactum & centrum recta producatur usque ad alteram sectionem; à vertice vero ducatur recta parallela ordinatim applicatæ, convenienſque cum recta per tactum & centrum ducta; & fiat ut portio contingentis inter applicatam & tactum ad portionem ductæ per tactum & centrum quæ inter tactum & applicatam interjicitur, ita quædam recta ad duplam contingentis: quæ in altera sectione ducitur parallela contingenti ad rectam per tactum & centrum ductam, poterit rectangulum quod adjacet inventæ lineæ, latitudinem habens interceptam inter ipsam & tactum, excedens vero figura simili ei quæ sub linea inter oppositas sectiones interjectâ & inventâ rectâ continetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

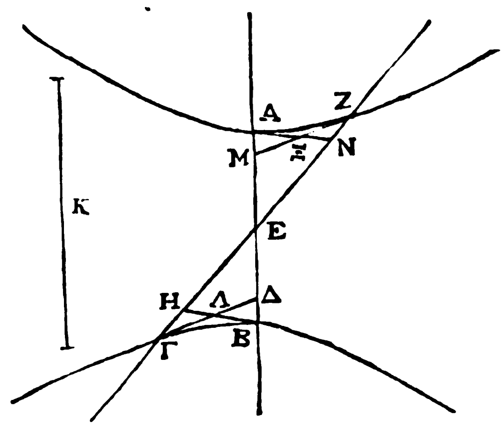
Ἐὰν ὁποτερασοῦν τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἐκβληθῇ τις εὐθεῖα ἕως τῆς ἑτέρας τομῆς, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς εὐθεῖα ἀναχθῇ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ συμπίπτῃ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, καὶ γενηθῇ ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἠγμένης διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης· ἥτις ἂν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν τομῶν ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένην εὐθεῖαν παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, δυνήσεται τὸ παρακείμενον ὀρθογώνιον παρὰ τὴν πορισθεῖσαν, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων καὶ τῆς πορισθείσης εὐθείας.

Sint oppositæ sectiones, quarum diameter ΑΒ, centrum Ε; & ducatur ΓΔ sectionem Β contingens, junctaque ΓΕ producatur; ordinatim vero applicetur ΒΛΗ, & fiat ut ΛΓ ad ΓΗ ita quædam recta Κ ad duplam ΓΔ: itaque perspicuum est [ex præced.] in sectione ΒΓ lineas parallelas ipsi ΓΔ, quæ ducuntur ad rectam ΕΓ productam, posse spatia adjacentia rectæ Κ, latitudinemque habentia lineam quæ est inter ipsas & tactum, & excedentia figura simili contentæ sub linea ΓΖ & Κ; dupla est enim ΖΓ ipsius ΓΕ. dico igitur idem evenire in sectione ΖΑ.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἤχθω τῆς Β τομῆς ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἤχθω τεταγμένως ἡ ΒΛΗ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΛΓ πρὸς ΓΗ οὕτως εὐθεῖά τις ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ· ὅτι μὲν οὖν αἱ ἐν τῇ ΒΓ τομῇ παράλληλοι τῇ ΓΔ ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ ΕΓ δύνανται τὰ παρὰ τὴν Κ παρακείμενα χωρία, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῇ ἁφῇ, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΓΖ, Κ, φανερόν· διπλασία γάρ ἐστιν ἡ ΖΓ τῆς ΓΕ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐν τῇ ΖΑ τομῇ τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

Ἤχθω

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Z ἐφαπτομένη τῆς A Z τομῆς ἡ M Z, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ A Ξ N. καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ B Γ, A Z, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ Γ Δ, M Z· ἴση ἄρα καὶ παράλληλός ἐστιν ἡ Γ Δ τῇ M Z. ἴση δὲ καὶ ἡ Γ E τῇ E Z· καὶ ἡ E Δ ἄρα τῇ E M ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Λ Γ πρὸς Γ H οὕτως ἡ K πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Γ Δ, τουτέστι τῆς M Z· καὶ ὡς ἄρα ἡ Ξ Z πρὸς Z N οὕτως ἡ K πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς M Z. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ A Z, ἧς διάμετρος ἡ A B, ἐφαπτομένη δὲ ἡ M Z, καὶ τεταγμένως ἦκται ἡ A N, καί ἐστιν ὡς ἡ Ξ Z πρὸς Z N οὕτως ἡ K πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Z M· ὅσαι ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς παράλληλοι τῇ Z M ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ E Z, δυνήσονται τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς K εὐθείας καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ Z σημείῳ, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ Γ Z, K.



Ducatur per Z linea M Z quæ sectionem A Z contingat; ordinatimque applicetur A Ξ N. & quoniam oppositæ sectiones sunt B Γ, A Z, atque ipsas contingunt Γ Δ, M Z; erit [ex 30. huj.] Γ Δ ipsi M Z æqualis & parallela. est autem Γ E æqualis ipsi E Z: ergo & E Δ ipsi E M. sed quoniam ut Λ Γ ad Γ H ita [ex hyp.] linea K ad duplam ipsius Γ Δ, sive M Z; erit ut Ξ Z ad Z N ita K ad duplam M Z. cum autem A Z hyperbola est, cujus diameter A B, & M Z ipsam contingit; ordinatim vero applicata est A N; & ut Ξ Z ad Z N ita K ad duplam Z M: ergo [per 50. huj.] quæcunque à sectione ducuntur parallelæ ipsi M Z ad E Z in directum productam, poterunt rectangulum contentum sub linea K & interjecta inter ipsas & punctum Z, excedensque figura simili ei quæ sub Γ Z & K continetur.

Πόρισμα.

Δεδειγμένων δὲ τούτων συμφανὲς ὅτι ἐν μὲν τῇ παραβολῇ ἑκάστη τῶν παρὰ τὴν ἐκ τῆς γεννήσεως διάμετρον ἀγομένων εὐθειῶν διάμετρός ἐστιν· ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ, καὶ τῇ ἐλλείψει, καὶ ταῖς ἀντικειμέναις ἑκάστη τῶν διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένων εὐθειῶν· καὶ διότι ἐν μὲν τῇ παραβολῇ, αἱ καταγόμεναι ἐφ' ἑκάστην τῶν διαμέτρων παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα ὀρθογώνια δυνήσονται· ἐν τῇ ὑπερβολῇ καὶ ταῖς ἀντικειμέναις τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα χωρία καὶ ὑπερβάλλοντα τῷ αὐτῷ εἴδει· ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα καὶ ἐλλείποντα τῷ αὐτῷ εἴδει· καὶ διότι πάντα ὅσα προδέδεικται περὶ τὰς τομὰς συμβαίνοντα, συμπαραλαμβανομένων τῶν ἀρχικῶν διαμέτρων, καὶ τῶν ἄλλων διαμέτρων παραλαμβανομένων τὰ αὐτὰ συμβήσεται.

Corollarium.

Itaque his demonstratis perspicuum est [per 46. huj.] in parabola unamquamque rectarum, quæ diametro ex generatione ducuntur parallelæ, diametrum esse; in hyperbola vero, ellipsi, & oppositis sectionibus, [per 47. & 48. huj.] unamquamque earum quæ per centrum ducuntur: ideoq; in parabola quidem [per 49. huj.] applicatas ad unamquamque diametrum parallelas contingentibus posse rectangula ipsi adjacentia; in hyperbola & oppositis sectionibus [per 50. & 51. huj.] posse rectangula adjacentia ipsi quæ excedunt eâdem figurâ; in ellipsi autem [per 50. huj.] quæ eâdem deficiunt: igitur quæcunque circa sectiones adhibitis principalibus diametris demonstrata sunt, & aliis diametris assumptis eadem quoque contingent.

EUTOCIUS.

Τὴν ἐκ τῆς γεννήσεως διάμετρον λέγει τὴν γινομένην ἐν τῷ κώνῳ κοινὴν τομὴν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· ταύτην δὲ καὶ ἀρχικὴν διάμετρον λέγει. καί φησιν ὅτι πάντα τὰ δεδειγμένα συμπτώματα τῶν τομῶν ἐν τοῖς προειρημένοις θεωρήμασιν, ὑποτιθεμένων τῶν ἀρχικῶν διαμέτρων, συμβαίνειν δύνανται καὶ τῶν ἄλλων πασῶν διαμέτρων ὑποτιθεμένων.

Diametrum ex generatione vocat communem sectionem plani secantis & trianguli per axem quæ in ipso cono efficitur; quam & principalem diametrum appellat. dicit autem omnia accidentia sectionum, quæ in superioribus theorematibus demonstrata sunt competere principalibus diametris, & aliis quibuscunque diametris assumptis etiam contingere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβʹ.

Εὐθείας δοθείσης ἐν ἐπιπέδῳ καθ' ἓν σημεῖον πεπερασμένης, εὑρεῖν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κώνου τομὴν τὴν καλουμένην παραβολήν, ἧς διάμετρος ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, κορυφὴ δὲ τὸ πέρας τῆς εὐθείας· ἥτις δὲ ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς καταχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον ἐν δοθείσῃ γωνίᾳ, δυνήσεται τὸ πε-

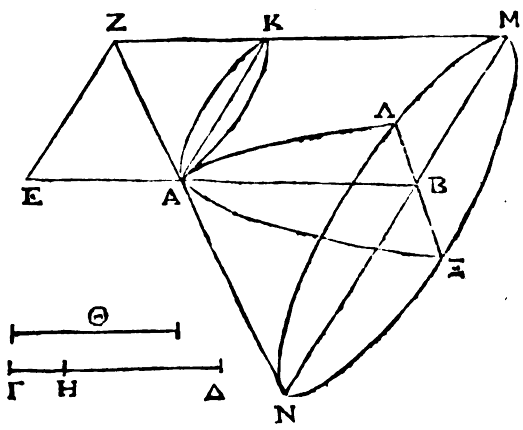
Prop. LII. *Probl.*

Rectâ datâ in plano ad unum punctum terminatâ, invenire in plano coni sectionem quæ parabola appellatur, cujus diameter erit data recta & vertex rectæ terminus; quæ vero à sectione ad diametrum in dato angulo applicatur, poterit rectangulum

gulum contentum sub rectâ quæ est inter ipsam & verticem sectionis & alterâ quadam data rectâ.

SIT recta data positione A B ad A punctum terminata, altera autem magnitudine data sit Γ Δ; & datus angulus primum sit rectus: oporteat autem in subjecto plano invenire parabolam, ita ut ejus diameter sit A B; & vertex A, rectum autem figuræ latus Γ Δ, ordinatim ductis in recto angulo applicatis, hoc est, ut A B sit axis.

Producatur A B ad E, sumaturque ipsius Γ Δ quarta pars Γ H; & sit E A major quam Γ H, inter ipsas autem Γ Δ, E A media proportionalis sit Θ: est igitur [per cor. 20. 6.] ut Γ Δ ad E A ita quadratum ex Θ ad quadratum ex E A. sed Γ Δ est minor quam quadrupla ipsius E A: ergo & quadratum ex Θ quadrati ex E A minus est quam quadruplum; & propterea Θ minor quam dupla ipsius E A. cum igitur duæ rectæ E A majores sint quam Θ; fieri potest [per 22. I.] ut ex Θ & duabus E A triangulum constituatur. igitur [per 22. I.] super E A constituatur triangulum E A Z [per prop. 12. II.] rectum ad subjectum planum, ita ut E A æqualis sit A Z & Θ æqualis Z E; ducaturque [per 31. I.] A K parallela ipsi E Z, & Z K ipsi E A. deinde intelligatur conus, cujus vertex Z punctum, basis autem circulus circa diametrum K A, rectus ad planum quod per A Z K transit: erit igitur conus ille rectus, quoniam A Z æqualis est Z K. itaque secetur conus plano quod circulo K A æquidistet; faciatque [per 4. huj.] sectionem circulum M N Ξ, rectum videlicet ad planum transiens per M Z N: & sit circuli M N Ξ & trianguli M Z N communis sectio M N: quare M N circuli diameter est. communis autem sectio plani subjecti & circuli sit Ξ Λ. quoniam igitur circulus M N Ξ rectus est ad triangulum M N Ξ, rectumque est subjectum planum ad triangulum M Z N; communis ipsorum sectio Ξ Λ [per 19. II.] ad triangulum M Z N, hoc est ad K Z A, perpendicularis erit: quare & ad omnes rectas lineas quæ in triangulo ipsam contingunt, adeoque ad utramque ipsarum M N, A B. rursus quoniam conus basim habens circulum M N Ξ, verticem vero punctum Z, secatur plano ad triangulum M Z N recto, quod sectionem facit circulum M N Ξ; & secatur altero plano subjecto secante basim coni secundum rectam Ξ Λ perpendicularem ipsi M N, quæ communis est sectio circuli M N Ξ & trianguli M Z N: communis autem sectio subjecti plani & trianguli M Z N, videlicet A B, parallela est lateri coni Z K M: erit [per 11. huj.] coni sectio in subjecto plano facta parabola, cujus diameter A B, & rectæ à sectione



περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπό τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς καὶ ἑτέρας τινὸς δοθείσης εὐθείας.

ΕΣΤΩ θέσει δοθεῖσα ἡ A B πεπερασμένη κατὰ τὸ A, ἑτέρα δὲ ἡ Γ Δ τῷ μεγέθει, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω πρότερον ὀρθή· δεῖ δὴ εὑρεῖν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ παραβολήν, ἧς διάμετρος μὲν ἡ A B, κορυφὴ δὲ τὸ A, ὀρθία δὲ ἡ Γ Δ, αἱ δὲ καταγόμεναι τεταγμένως ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθῶσιν, τουτέστιν ἵνα ἄξων ᾖ ἡ A B.

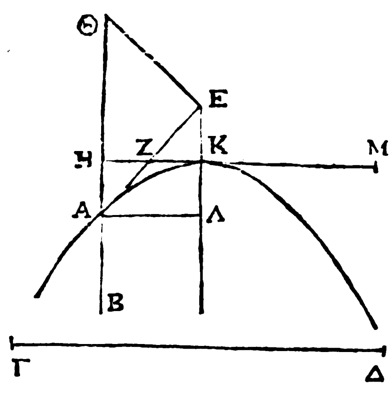
Ἐκβεβλήσθω ἡ A B ἐπὶ τὸ E, καὶ εἰλήφθω τῆς Γ Δ τέταρτον μέρος ἡ Γ H, τῆς δὲ Γ H μείζων ἔστω ἡ E A, καὶ τῶν Γ Δ, E A μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Γ Δ πρὸς E A οὕτως τὸ ἀπὸ Θ πρὸς τὸ ἀπὸ E A. ἡ δὲ Γ Δ τῆς E A ἐλάττων ἐστὶν ἢ τετραπλασία, καὶ τὸ ἀπὸ Θ τοῦ ἀπὸ E A ἔλαττόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον· ἡ Θ ἄρα τῆς E A ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ E A τῆς Θ μείζονές εἰσι· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῆς Θ καὶ δύο τῶν E A τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τοίνυν ἐπὶ τῆς E A τρίγωνον τὸ E A Z ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν E A τῇ A Z, τὴν δὲ Θ τῇ Z E· καὶ ἤχθω τῇ μὲν Z E παράλληλος ἡ A K, τῇ δὲ E A ἡ Z K. νοείσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ τὸ Z σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν K A κύκλος, ὀρθὸς ὢν πρὸς τὸ διὰ τῶν A Z K ἐπίπεδον· ἔσται δὴ ὀρθὸς ὁ κῶνος, ἴση γὰρ ἡ A Z τῇ Z K. τετμήσθω δὲ ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ K A κύκλῳ, καὶ ποιείτω τομὴν τὸν M N Ξ κύκλον, ὀρθὸν δηλονότι πρὸς τὸ διὰ τῶν M Z N ἐπίπεδον, καὶ ἔστω τοῦ M N Ξ κύκλου καὶ τοῦ M Z N τριγώνου κοινὴ τομὴ ἡ M N· διάμετρος ἄρα ἐστὶ τοῦ κύκλου. ἔστω δὲ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ Ξ Λ. ἐπεὶ οὖν ὁ M N Ξ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ M Z N τρίγωνον, ὀρθὸν δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον πρὸς τὸ M Z N τρίγωνον· ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ Ξ Λ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ M Z N τρίγωνον, τουτέστι τὸ K Z A· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τριγώνῳ, ὀρθή ἐστιν· ὥστε καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν M N, A B. πάλιν ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ M N Ξ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Z σημεῖον, τέτμηται ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ M Z N τρίγωνον, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸν M N Ξ κύκλον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν Ξ Λ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ M N, ἥ κοινή ἐστι τομὴ τοῦ τε M N Ξ κύκλου καὶ τοῦ M Z N τριγώνου· ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ M Z N τριγώνου ἡ A B παράλληλός ἐστι τῇ Z K M πλευρᾷ τοῦ κώνου· ἡ ἄρα γινομένη ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ τομὴ τοῦ κώνου παραβολή ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ A B, αἱ δὲ καταγόμεναι

γόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως, ἐν ὀρθῇ καταχθήσονται γωνίᾳ, παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ ΞΛ πρὸς ὀρθὰς οὔσῃ τῇ ΑΒ. καὶ ἐπεὶ αἱ τρεῖς ἀνάλογόν εἰσιν, αἱ ΓΔ, Θ, ΕΑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΑΖ καὶ τῇ ΖΚ, ἡ δὲ Θ τῇ ΕΖ καὶ τῇ ΑΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΑΚ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΑΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΑΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΖΚ· ὀρθία ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς τομῆς, τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ ἑνδεκάτῳ θεωρήματι.

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, μὴ ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθή, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΕ, καὶ τῆς ΓΔ ἔστω ἡμίσεια ΑΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΑΕ κάθετος ἤχθω ἡ ΘΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΘ παράλληλος ἡ ΕΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΕΛ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΛ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΛ δίχα κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ ΕΛ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΚΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Ζ, Η, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΛ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ ΛΚΜ, καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΛΚ, ΚΜ, τῆς μὲν ΚΛ θέσει πεπερασμένης κατὰ τὸ Κ, τῆς δὲ ΚΜ μεγέθει, καὶ γωνίας ὀρθῆς, γεγράφθω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ Κ, ὀρθία δὲ ἡ ΚΜ, ὡς προδέδεικται· ἥξει δὲ διὰ τοῦ Α, διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ ΑΛ τῷ ὑπὸ ΛΚΜ, καὶ ἐφάψεται τῆς τομῆς ἡ ΕΑ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΕΚ τῇ ΚΛ, καὶ ἔστιν ἡ ΘΑ τῇ ΕΚΛ παράλληλος· ἡ ΘΑΒ ἄρα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς, καὶ αἱ ἐπ᾽ αὐτὴν ἀπὸ τῆς τομῆς καταγόμεναι παράλληλοι τῇ ΑΕ δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς ΑΒ, καταχθήσονται δὲ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΑΕ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΖ, κοινὴ δὲ ἡ πρὸς τὸ Α· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘΕ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΕΑ οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ· ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς ΑΘ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΕ οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ. ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΘΑ διπλῆ· ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΕ, διὰ δὴ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ ἐννάτῳ θεωρήματι ὀρθία ἐστὶν ἡ ΓΔ.

ad ipsam AB ordinatim ductæ, in recto angulo applicabuntur; parallelæ enim sunt rectæ ΞΛ quæ est ad AB perpendicularis. & quoniam tres rectæ ΓΔ, Θ, EA proportionales sunt; æqualis autem [per 33. 1.] EA ipsi AZ & ipsi ZK, atque Θ æqualis EZ & AK: erit ut ΓΔ ad AK ita AK ad AZ: quare [per cor. 20. 6.] ut ΓΔ ad AZ ita quadratum ex AK ad quadratum ex AZ, hoc est ad id quod sub AZK continetur: ergo rectum sectionis latus est ΓΔ; illud enim in undecimo theoremate demonstratum fuit.

IISDEM positis, non sit datus angulus rectus; ponaturque illi æqualis ΘAE angulus; & [per 2. & 10. 1.] sit AΘ dimidia ipsius ΓΔ; à Θ vero [per 12. 1.] ducatur ΘE ad AE perpendicularis, perque E [per 31. 1.] ipsi BΘ parallela ducatur EΛ, & ab A ad EΛ perpendicularis AΛ: deinde [per 10. 1.] secta EΛ bifariam in K, ab ipso K ducatur KM [per 11. 1.] ad rectos angulos ipsi EΛ; & ad puncta Z, H producatur; & [ope 11. 6.] quadrato ex AΛ æquale sit rectangulum ΛKM, atque duabus rectis lineis ΛK, KM datis, ΛK quidem positione & ad K terminata, KM vero magnitudine; &, dato angulo recto, describatur parabola, ut superius dictum est, cujus diameter KΛ, vertex K, & rectum latus KM: transibit autem ea per A [per 11. huj.] propterea quod quadratum ex AΛ rectangulo ΛKM est æquale; & [per 33. huj.] linea EA sectionem continget, quoniam KΛ æqualis est EK, & ΘA est parallela ipsi EKΛ: ergo [per 46. huj.] ΘAB diameter erit sectionis; & à sectione ad eam applicatæ ipsi AE parallelæ bifariam dividentur à linea AB; & [per 29. 1.] in angulo ΘAE applicabuntur. quoniam igitur angulus AEΘ æqualis est angulo AHZ, & communis qui ad A; triangulum AΘE simile est [per 4. 6.] AHZ triangulo: ut ergo ΘA ad EA ita ZA ad AH; & ideo ut dupla AΘ ad duplam AE ita ZA ad AH. sed cum ΓΔ sit dupla ipsius ΘA, erit ut ZA ad AH ita ΓΔ ad duplam ipsius AE: quare, per ea quæ in theoremate quadragesimo nono ostensa sunt, erit ΓΔ rectum sectionis latus.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, τῆς ἑτέρας ἐκβαλλομένης ἐπὶ ταὐτὰ τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ· εὑρεῖν ἐπὶ τῆς προσεκβληθείσης κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολὴν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ταῖς εὐθείαις, ὅπως ἡ μὲν προσεκβληθεῖσα διάμετρος εἴη τῆς τομῆς, κορυφὴ δὲ τὸ πρὸς τῇ γωνίᾳ σημεῖον, ἥτις δὲ ἂν καταχθῇ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον, γωνίαν ποιοῦσα ἴσην τῇ δοθείσῃ, δυνήσεται παρακείμενον

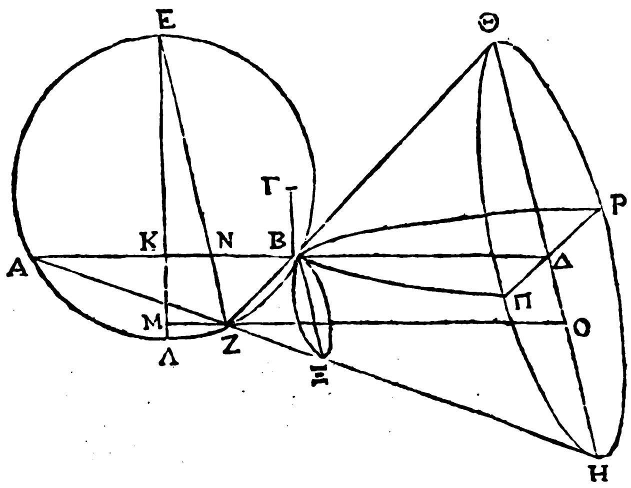
Prop. LIII. *Probl.*

Datis duabus rectis terminatis quæ ad rectos inter se angulos constituantur, & altera producta ad easdem partes ad quas angulus rectus: invenire in recta producta coni sectionem quæ hyperbola dicitur, in eodem plano in quo sunt datæ rectæ, ita ut producta diameter sectionis sit, & vertex punctum quod ad angulum consistit; quæ vero à sectione ad diametrum applicatur, angulum faciens æqualem dato, possit

ctangulum quod adjaceat alteri rectæ, latitudinem habens rectam interjectam inter applicatam & verticem sectionis, excedens vero figura simili & similiter posita ei quæ datis à principio rectis continetur.

SINT datæ rectæ terminatæ A B, B Γ ad rectos inter se angulos, & producatur A B ad Δ: oportet igitur in plano, quod per A B Γ transit, invenire hyperbolam; ita ut ejus diameter sit A B Δ, vertex B punctum, & rectum figuræ latus B Γ; quæ vero à sectione ad B Δ in dato angulo applicentur, possint rectangula adjacentia ipsi B Γ, quæ latitudines habeant lineas interjectas inter ipsas & punctum B, excedantque figura simili & similiter posita ei quæ sub rectis A B, B Γ continetur.

Sit datus angulus primum rectus, [a] & super A B planum erigatur [ope 12. 11.] rectum ad subjectum planum, in quo circa A B circulus describatur A E B Z; ita ut pars diametri circuli, quæ in portione A E B comprehenditur ad partem comprehensam in portione A Z B non majorem rationem habeat quam A B ad B Γ; & [per 30.3.] secetur A E B circumferentia bifariam in E; ducaturque [per 10. 1.] à puncto E ad A B perpendicularis E K, quæ ad Λ producatur: ergo E Λ diameter est circuli. quod si ut A B ad B Γ ita fuerit E K ad K Λ, usi essemus puncto Λ: sin minus, fiat [per 12.6.] ut A B ad B Γ ita E K ad minorem ipsâ K Λ, quæ sit K M; & per M [per 31. 1.] ducatur M Z parallela ipsi A B; junctisque A Z, E Z, Z B, per B ducatur B Ξ ipsi Z E parallela. itaque quoniam angulus A Z E æqualis est [per 27. 3.] angulo B Z E; angulus autem A Z E [per 29. 1.] angulo A Ξ B, & E Z B ipsi Ξ B Z: erit & Ξ B Z ipsi Z Ξ B æqualis; quare [per 6. 1.] & Z B æqualis ipsi Z Ξ. intelligatur conus cujus vertex Z, & basis circulus circa diametrum B Ξ, rectus ad Z B Ξ triangulum: erit itaque is conus rectus, quia Z B æqualis est Z Ξ. producantur Z B, Z Ξ, M Z; & secetur conus plano, quod circulo B Ξ æquidistet; erit igitur [per 4. huj.] ea sectio circulus, qui sit H Π Θ P, cujus circuli diameter est H Θ. communis autem sectio circuli H Θ & subjecti plani sit Π Δ P: erit igitur Π Δ P ad utramque ipsarum H Θ, Δ B perpendicularis: (uterque enim circulorum Ξ B, Θ H rectus est ad triangulum Z H Θ; sed & subjectum planum ad Z H Θ rectum est: ergo [per 19. 11.] communis ipsorum sectio Π Δ P erit & ad Z H Θ perpendicularis, ac proinde ad omnes rectas,



ὀρθογώνιον παρὰ τὴν ἑτέραν εὐθεῖαν, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῇ κορυφῇ, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν.

ΕΣΤΩΣΑΝ αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πεπερασμέναι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ A B, B Γ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ A B ἐπὶ τὸ Δ· δεῖ δὴ εὑρεῖν ἐν τῷ διὰ τῶν A B Γ ἐπιπέδῳ ὑπερβολὴν, ἧς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ A B Δ, κορυφὴ δὲ τὸ B, ὀρθία δὲ ἡ B Γ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν B Δ ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν B Γ παρακείμενα, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ B, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν A B, B Γ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία πρότερον ὀρθὴ, [a] καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς A B ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἐν αὐτῷ περὶ τὴν A B κύκλος γεγράφθω ὁ A E B Z, ὥστε τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, τὸ ἐν τῷ A E B τμήματι, πρὸς τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου, τὸ ἐν τῷ A Z B, μὴ μείζονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ A B πρὸς B Γ· καὶ τετμήσθω ἡ A E B δίχα κατὰ τὸ E, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὴν A B κάθετος ἡ E K, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ E Λ. εἰ μὲν οὖν ἐστιν ὡς ἡ A B πρὸς B Γ οὕτως ἡ E K πρὸς K Λ, τῷ Λ ἂν ἐχρησάμεθα· εἰ δὲ μὴ, γενέσθω ὡς ἡ A B πρὸς B Γ οὕτως ἡ E K πρὸς ἐλάσσονα τῆς K Λ τὴν K M, καὶ διὰ τοῦ M τῇ A B παράλληλος ἤχθω ἡ M Z, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ A Z, E Z, Z B, καὶ διὰ τοῦ B τῇ Z E παράλληλος ἡ B Ξ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ A Z E γωνία τῇ ὑπὸ E Z B, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ A Z E τῇ ὑπὸ A Ξ B ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ E Z B τῇ Ξ B Z ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ Ξ B Z ἄρα τῇ ὑπὸ Z Ξ B ἐστὶν ἴση· καὶ ἄρα ἡ Z B τῇ Z Ξ. νοείσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Z σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν B Ξ διάμετρον κύκλος, ὀρθὸς ὢν πρὸς τὸ B Z Ξ τρίγωνον· ἔσται δὴ ὁ κῶνος ὀρθὸς, ἴση γὰρ ἡ Z B τῇ Z Ξ. ἐκβεβλήσθωσαν δὲ αἱ Z B, Z Ξ, M Z, καὶ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ B Ξ κύκλῳ· ἔσται δὴ ἡ τομὴ κύκλος, ἔστω ὁ H Π Θ P· ὥστε διάμετρός ἐστι τοῦ κύκλου ἡ H Θ· κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ H Θ κύκλου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου ἔστω ἡ Π Δ P· ἔσται δὴ ἡ Π Δ P πρὸς ἑκατέραν τῶν H Θ, A B Δ ὀρθή· (ἑκάτερος γὰρ τῶν Ξ B, Θ H κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ Z H Θ τρίγωνον, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ Z H Θ· καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ Π Δ P ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ Z H Θ, καὶ πρὸς πάσας ἄρα

ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας· τέτμηται ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ ΖΗΘ τρίγωνον, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸν ΗΠΘΡ κύκλον.) καὶ ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ, τέτμηται καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν ΠΔΡ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΗΔΘ, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ τε ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΗΖΘ, τουτέστιν ἡ ΔΒ, ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Β συμπίπτει τῇ ΗΖ κατὰ τὸ Α· ὑπερβολὴ ἄρα ἐστὶ, διὰ τὰ προδεδειγμένα, ἡ τομὴ ἡ ΠΒΡ, ἧς κορυφὴ μὲν ἔσται τὸ Β σημεῖον, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΒΔ τεταγμένως ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται), παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ ΠΔΡ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς ΚΜ, ὡς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΜ οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΕΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΕΝΖ τῷ ὑπὸ ΑΝΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΓΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΑΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ τῆς ΑΝ πρὸς ΝΖ καὶ τῆς ΒΝ πρὸς ΝΖ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΝ πρὸς ΝΖ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ καὶ ἡ ΖΟ πρὸς ΟΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΝ πρὸς ΝΖ οὕτως ἡ ΖΟ πρὸς ΟΘ· ἡ ἄρα ΑΒ πρὸς ΒΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΟ πρὸς ΟΗ καὶ ἡ ΖΟ πρὸς ΟΘ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΟΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΟΘ. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ΖΟ τῇ ΑΔ· πλαγία ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΒΓ· ταῦτα γὰρ ἐν τῷ δωδεκάτῳ θεωρήματι δέδεικται.

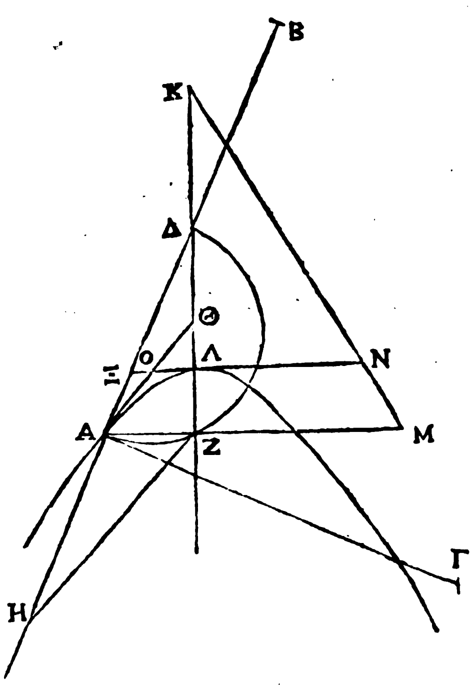
ΜΗ ἔστω δὴ ἡ δεδομένη γωνία ὀρθή, καὶ ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ἡ ΑΒ, ΑΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἴση τῇ ὑπὸ τῶν ΒΑΘ· δεῖ δὴ γράψαι ὑπερβολὴν, ἧς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΓ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐν τῇ ὑπὸ ΘΑΒ γωνίᾳ τεταγμένως καταχθήσονται.

Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ, [b] καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΔ, καὶ ἤχθω εἰς τὸ ἡμικύκλιον παράλληλος τῇ ΑΘ ἡ ΖΗ, ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΑΓ πρὸς ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘΔ καὶ ἐκβεβλήσθω. καὶ τῶν ΖΔ, ΔΘ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΔΛ, καὶ κείσθω τῇ ΛΔ ἴση ἡ ΔΚ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ ΛΖΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΜ, καὶ διὰ τοῦ Λ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω τῇ ΚΖ ἡ ΛΝ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Ο, Ξ· καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν

quæ ipsam contingunt atque in eodem plano consistunt, rectos facit angulos; secatur igitur plano triangulo ΖΗΘ recto, sectionemque facit circulum ΗΠΘΡ.) quoniam vero conus, cujus basis est circulus ΗΘ & vertex Ζ, secatur plano subjecto secante basim coni secundum rectam lineam ΠΔΡ perpendicularem ad ΗΔΘ: & communis sectio subjecti plani & trianguli ΗΖΘ, videlicet ΔΒ, producta ad partes Β convenit cum ΗΖ in puncto Α: erit ex iis, quæ [ad 12. huj.] demonstrata sunt, sectio ΠΒΡ hyperbola, cujus vertex Β, & ordinatim ductæ ad diametrum ΒΔ in recto angulo applicabuntur; parallelæ etenim sunt ipsi ΠΔΡ.

Quoniam autem ut ΑΒ ad ΒΓ ita [per constr.] est ΕΚ ad ΚΜ; & [per 2. 6.] ut ΕΚ ad ΚΜ ita ΕΝ ad ΝΖ, hoc est [per 1. 6.] rectangulum ΕΝΖ ad quadratum ex ΝΖ: erit ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΕΝΖ rectangulum ad quadratum ex ΝΖ. sed [per 35. 3.] ΕΝΖ rectangulum æquale est rectangulo ΑΝΒ: ergo ut ΑΒ ad ΓΒ ita rectangulum ΑΝΒ ad quadratum ex ΝΖ. rectangulum autem ΑΝΒ ad quadratum ex ΝΖ rationem habet compositam ex ratione ΑΝ ad ΝΖ & ex ratione ΒΝ ad ΝΖ; sed [per 4. 6.] ut ΑΝ ad ΝΖ, ita ΑΔ ad ΔΗ ut & ΖΟ ad ΟΗ; & ut ΒΝ ad ΝΖ ita ΖΟ ad ΟΘ: quare ΑΒ ad ΒΓ rationem compositam habet ex ratione ΖΟ ad ΟΗ & ex ratione ΖΟ ad ΟΘ; hoc est [per 23. 6.] ex ratione quadrati ex ΖΟ ad rectangulum ΗΟΘ: est igitur ut ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΖΟ ad ΗΟΘ rectangulum. atque [per constr.] est ΖΟ parallela ipsi ΑΔ: sequitur ergo ΑΒ esse transversum figuræ latus & ΒΓ rectum; etenim hæc in duodecimo theoremate ostensa sunt.

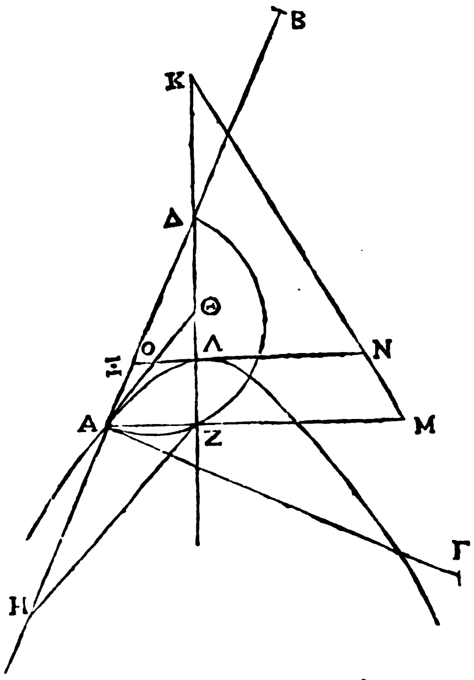
NON sit autem datus angulus rectus, sintque rectæ datæ ΑΒ, ΑΓ; & datus angulus æqualis sit angulo ΒΑΘ: oportet igitur describere hyperbolam, ita ut ejus diameter sit ΑΒ, & rectum latus ΑΓ, ductæ vero ordinatim ad diametrum in angulo ΘΑΒ applicentur.



Secetur [per 10. 1.] ΑΒ bifariam in Δ: & [b] super ΑΔ describatur semicirculus ΑΖΔ, & ducatur quædam recta ΖΗ ad semicirculum parallela ipsi ΑΘ; ita ut fiat ratio quadrati ex ΖΗ ad rectangulum ΔΗΑ eadem quam habet recta ΑΓ ad rectam ΑΒ; & juncta ΖΘΔ producatur; inter ipsas autem ΖΔ, ΔΘ media proportionalis sit [per 13. 6.] recta ΔΛ, ponaturque ipsi ΛΔ æqualis ΔΚ; & [ope 11. 6.] quadrato ex ΑΖ æquale fiat rectangulum ΛΖΜ, & jungatur ΚΜ; deinde per Λ ad rectos angulos ipsi ΚΖ ducatur ΛΝ ad quæ Ο, Ξ producatur: datis autem duabus

rectis

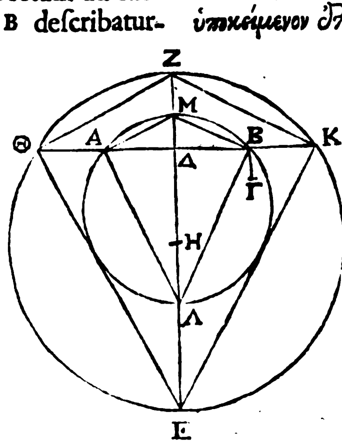
rectis terminatis Κ Λ, Λ Ν, ad rectos inter se angulos, describatur [ex superius ostensis] hyperbola, cujus transversum quidem latus sit Κ Λ, rectum vero Λ Ν; & à sectione ad diametrum ductæ in recto angulo applicentur, & possint rectangula adjacentia lineæ Λ Ν, quæ latitudines habeant interjectas inter ipsas & punctum Λ, excedantque figura simili ipsi Κ Λ Ν: transibit igitur sectio per Α, cum [ex hyp.] quadratum ex Α Ζ æquale sit rectangulo Λ Ζ Μ; & linea Α Θ [per 37. huj.] sectionem continget, rectangulum enim Ζ Δ Θ quadrato ex Δ Λ est æquale: ac propterea Α Β diameter est sectionis. quoniam vero [ex constr.] ut Γ Α ad duplam Α Δ, hoc est ad Α Β, ita quadratum ex Ζ Η ad rectangulum Δ Η Α; & Γ Α ad duplam Α Δ compositam rationem habet ex ratione Γ Α ad duplam Α Θ & ex ratione duplæ Α Θ ad duplam Δ Α, hoc est ex ratione Α Θ ad Δ Α sive [per 4. 6.] Ζ Η ad Η Δ: habebit Γ Α ad Α Β rationem compositam ex ratione Γ Α ad duplam Α Θ & ex ratione Ζ Η ad Η Δ. habet autem & quadratum ex Ζ Η ad rectangulum Δ Η Α rationem compositam ex ratione Ζ Η ad Η Δ & ex ratione Ζ Η ad Η Α: ratio igitur composita ex ratione Γ Α ad duplam Α Θ & ex ratione Ζ Η ad Η Δ, eadem est ac ratio composita ex ratione Ζ Η ad Η Δ & ex ratione Ζ Η ad Η Α. communis auferatur ratio Ζ Η ad Η Δ: ergo ut Γ Α ad duplam Α Θ ita Ζ Η ad Η Α, & [per 4. 6.] ut Ζ Η ad Η Α ita Ο Α ad Α Ξ: ut igitur Γ Α ad duplam Α Θ ita Ο Α ad Α Ξ. quod cum ita sit, erit Α Γ ea juxta quam possunt quæ à sectione ducuntur: hoc enim in quinquagesimo theoremate demonstratum est.



πεπερασμένων, πρὸς ὀρθάς τε ἀλλήλαις, τῶν Κ Λ, Λ Ν, γεγράφθω ὑπερβολή, ἧς πλαγία πλευρὰ ἔσω ἡ Κ Λ, ὀρθία δὲ ἡ Λ Ν, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀπὸ τῆς τομῆς ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται, καὶ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν Λ Ν παρακείμενα ὀρθογώνια, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τὸ Λ, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ Κ Λ Ν· ἥξει δὴ ἡ τομὴ διὰ τοῦ Α, ἴσον γάρ ἐστιν τὸ ἀπὸ Α Ζ τῷ ὑπὸ Λ Ζ Μ, καὶ ἐφάψεται αὐτῆς ἡ Α Θ, τὸ γὰρ ὑπὸ Ζ Δ Θ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Δ Λ· ὥστε ἡ Α Β διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ Α πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Δ, τουτέστι τὴν Α Β, οὕτως τὸ ἀπὸ Ζ Η πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Η Α· ἀλλ' ἡ μὲν Γ Α πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Δ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Γ Α πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Θ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ διπλασία τῆς Α Θ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Δ Α, τουτέστιν ἡ Α Θ πρὸς Δ Α, τουτέστιν ἡ Ζ Η πρὸς Η Δ· ἡ Γ Α ἄρα πρὸς Α Β τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ τῆς Γ Α πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Θ καὶ τοῦ τῆς Ζ Η πρὸς Η Δ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ Ζ Η πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Η Α τὸν συγκείμενον λόγον, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Ζ Η πρὸς Η Δ καὶ ἡ Ζ Η πρὸς Η Α· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ τῆς Γ Α πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Θ καὶ τοῦ τῆς Ζ Η πρὸς Η Δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ, ἔκ τε τοῦ τῆς Ζ Η πρὸς Η Α καὶ τοῦ τῆς Ζ Η πρὸς Η Δ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς Ζ Η πρὸς Η Δ λόγος· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Γ Α πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Θ οὕτως ἡ Ζ Η πρὸς Η Α. ὡς δὲ ἡ Ζ Η πρὸς Η Α οὕτως ἡ Ο Α πρὸς Α Ξ· ὡς ἄρα ἡ Γ Α πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Θ οὕτως ἡ Ο Α πρὸς Α Ξ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, παρ' ἣν δύνανται ἔσται ἡ Α Γ· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ ν'. θεωρήματι.

EUTOCIUS.

ᵃ Et super Α Β planum erigatur, rectum ad subjectum planum, in quo circa Α Β describatur circulus Α Ε Β Ζ, ita ut pars diametri circuli, quæ in portione Α Ε Β comprehenditur, ad partem comprehensam in portione Α Ζ Β non majorem rationem habeat quam Α Β ad Β Γ.] Sint duæ rectæ lineæ Α Β, Β Γ, & oporteat circa Α Β circulum describere, cujus diameter à linea Α Β ita dividatur, ut pars ipsius, quæ est ad Γ, ad reliquam partem non majorem rationem habeat, quam Α Β ad Β Γ. ponatur jam eandem habere; fecerturque Α Β bifariam in Δ, & per Δ ad rectos angulos ipsi Α Β ducatur Ε Δ Ζ, & fiat ut Α Β ad Β Γ ita Ε Δ ad Δ Ζ; atque Ε Ζ bifariam secetur: constat ergo, si



ᵃ Καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς Α Β ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἐν αὐτῷ περὶ τὴν Α Β γεγράφθω κύκλος ὁ Α Ε Β Ζ, ὥστε τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου κύκλου, τὸ ἐν τῷ Α Ε Β τμήματι, πρὸς τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου κύκλου, τὸ ἐν τῷ Α Ζ Β τμήματι, μὴ μείζονα λόγον ἔχειν ὃν ἔχει ἡ Α Β πρὸς Β Γ.] Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α Β, Β Γ, καὶ δέον ἔστω περὶ τὴν Α Β κύκλον γράψαι, ὥστε τὴν διάμετρον αὐτοῦ τέμνεσθαι ὑπὸ τῆς Α Β οὕτως ὥστε τὸ πρὸς τὸ Γ μέρος αὐτῆς πρὸς τὸ λοιπὸν μὴ μείζονα λόγον ἔχειν τοῦ τῆς Α Β πρὸς Β Γ. ὑποκείσθω μὲν νῦν τὸν αὐτὸν ἔχειν, καὶ τετμήσθω ἡ Α Β δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ Δ πρὸς ὀρθὰς τῇ Α Β ἤχθω ἡ Ε Δ Ζ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Α Β πρὸς Β Γ οὕτως ἡ Ε Δ πρὸς Δ Ζ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ Ε Ζ· δῆ-

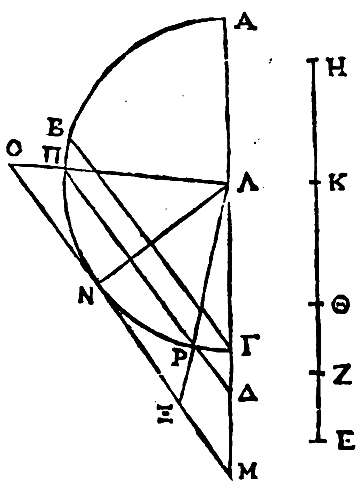
λον

λον δῆλον ὅτι, εἰ μὲν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ ἴση ἐστὶ, καὶ ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ, ἡ διχοτομία ἔσται τῆς ΕΖ τὸ Δ· εἰ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ μείζων καὶ ἡ ΕΔ τῆς ΔΖ, ἡ διχοτομία κατωτέρω ἐστὶ τοῦ Δ· εἰ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ ἐλάσσων, ἀνωτέρω. ἔστω νῦν πρότερον κατωτέρω ὡς τὸ Η, καὶ κέντρῳ τῷ Η, διαστήματι τῷ ΗΖ κύκλος γεγράφθω. δεῖ δὴ διὰ τῶν Α, Β σημείων ἥξειν, ἢ ἐξωτέρω, ἢ ἐσωτέρω. καὶ εἰ μὲν διὰ τῶν Α, Β σημείων ἔρχεται, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. ὑπερπιπτέτω δὲ τὰ Α, Β, καὶ ἐκβληθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα ἡ ΑΒ συμπιπτέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὰ Θ, Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΖ. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β τῇ μὲν ΖΚ παράλληλος ἡ ΜΒ, τῇ δὲ ΚΕ ἡ ΒΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΑ, ΑΛ· ἔσονται δὴ καὶ αὗται παράλληλοι τῶν ΖΘ, ΘΕ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΔ τῇ ΔΒ, τὴν δὲ ΔΘ τῇ ΔΚ, καὶ πρὸς ὀρθὰς εἶναι τὴν ΕΔΖ τῇ ΘΚ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Κ γωνία καὶ παράλληλοι αἱ ΜΒ, ΒΛ τῶν ΖΚ, ΚΕ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Β, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α· ὥστε ὁ περὶ τὴν ΜΛ κύκλος γραφόμενος ἥξει διὰ τῶν Α, Β, γεγράφθω, ὡς ὁ ΜΑΛΒ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστι ΜΒ τῇ ΖΚ, ἔστιν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΜ οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΔΒ, ὁμοίως δὲ καὶ ὡς ἡ ΚΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΛ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ οὕτως ἡ ΛΔ πρὸς ΔΜ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΛΔ πρὸς ΔΜ. ὁμοίως δὴ καὶ εἰ ὁ γραφόμενος ὑπὸ τῆς ΖΕ κύκλος τέμνει τὴν ΑΒ, τὸ αὐτὸ δειχθήσεται.

[b] Καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΔ, καὶ ἤχθω εἰς τὸ ἡμικύκλιον παράλληλος τῇ ΑΘ ἡ ΖΗ, ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ.] Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ΑΓ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ΕΖ πρὸς ΖΗ, καὶ δέον ἔστω ποιῆσαι τὰ προκείμενα. κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ τετμήσθω ἡ ΘΗ δίχα κατὰ τὸ Κ, καὶ ἤχθω ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τυχοῦσα εὐθεῖα ἡ ΓΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· καὶ ἀπὸ τοῦ Λ κέντρου ἤχθω ἐπ' αὐτὴν κάθετος, καὶ ἐκβληθεῖσα συμβαλλέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΜ· ἐφάψεται ἄρα τοῦ κύκλου. καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΘΚ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΝΞ, καὶ κείσθω τῇ ΝΞ ἴση ἡ ΝΟ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΛΟ τέμνουσαι τὸ ἡμικύκλιον κατὰ τὰ Ρ, Π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΡΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΝΞ τῇ ΝΟ, κοινή τε καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΝΛ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΛΟ τῇ ΛΞ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΠ ἴση τῇ ΛΡ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΠΟ τῇ ΡΞ ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΡΔ τῇ ΜΟ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΘΚ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΝΞ, ὡς δὲ ἡ ΘΚ πρὸς ΘΗ οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς ΞΟ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΘΖ πρὸς ΘΗ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΞΟ. καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΟΞ πρὸς ΞΜ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΗΖ πρὸς ΖΘ, τουτέστι πρὸς ΖΕ, οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς ΜΞ, τουτέστιν ἡ ΠΔ πρὸς ΔΡ. ὡς δὲ ἡ ΠΔ πρὸς ΔΡ οὕτως τὸ ὑπὸ ΠΔΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΡ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΠΔΡ τῷ ὑπὸ ΑΔΓ· ὡς ἄρα ἡ ΗΖ πρὸς ΖΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΡ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΖΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΓ.

quidem AB sit æqualis BΓ, & EΔ ipsi ΔZ æqualem esse, & ideo punctum Δ rectam EZ bifariam secare: si vero AB sit major BΓ & EΔ ipsâ ΔZ, punctum quod bifariam secat EZ infra Δ cadet: & si minor sit, cadet supra. jam cadat infra ut in H; & centro quidem H, intervallo autem HZ circulus describatur. necessarium autem est eum vel per puncta A, B transire, vel extra, vel intra. & si transeat per A, B, factum jam erit quod oportebat. verum cadat extra A, B, & producatur AB in utramque partem, ut conveniat cum circumferentia circuli in punctis Θ, K; junctisque ZΘ, ΘE, EK, KZ, ducatur per B linea MB parallela ZK, & BΛ parallela ipsi KE, & jungantur MA, AΛ: quæ ipsis ZΘ, ΘE parallelæ erunt, propterea quod æquales inter se sint AΔ, ΔB, itemque ΔΘ, ΔK, & EΔZ sit ad rectos angulos ipsi ΘK. quoniam igitur [per 31. 3.] angulus K rectus est, & MB, BΛ parallelæ ipsis ZK, KE; erit & qui ad B rectus, & eadem ratione qui ad A: quare circulus circa MΛ descriptus per puncta A, B transibit. describatur ille, sitque MAΛB. & quoniam MB parallela est ipsi ZK; erit [per 4. 6.] ut ZΔ ad ΔM ita KΔ ad ΔB, & similiter ut KΔ ad ΔB ita EΔ ad ΔΛ, & permutando ut EΔ ad ΔZ ita ΛΔ ad ΔM: ergo ut AB ad BΓ ita ΛΔ ad ΔM. quod si circulus circa ZE descriptus secet AB, idem nihilominus demonstrabitur.

[b] Et super AΔ describatur semicirculus AZΔ, & ducatur quædam recta ZH ad semicirculum parallela ipsi AΘ; faciens rationem quadrati ex ZH ad rectangulum ΔHA eandem quam habet ΓA ad AB.] Sit semicirculus ABΓ circa diametrum AΓ, data autem ratio sit EZ ad ZH, & oporteat facere ea quæ proposita sunt. ponatur ipsi EZ æqualis ZΘ, & ΘH in puncto K bifariam dividatur, ducaturque in semicirculo quæpiam recta ΓB in angulo AΓB, & à centro Λ ad ipsam perpendicularis ducatur, quæ producta occurrat circuli circumferentiæ in N, & per N ipsi ΓB parallela sit NM: ergo [per 16.3.] NM circulum continget. itaque fiat [per 10. 6.] ut ZΘ ad ΘK ita MΞ ad NΞ, & ipsi NΞ æqualis ponatur NO; jungantur autem ΛΞ, ΛO quæ semicirculum in punctis P, Π secent, & ducatur ΠPΔ. quoniam igitur NΞ æqualis est NO, communisque & ad rectos angulos NΛ; erit [per 4.1.] ΛO ipsi ΛΞ æqualis. sed ΛΠ est æqualis ΛP; ergo & reliqua ΠO reliquæ PΞ; & propterea [per 2.6.] ΠPΔ ipsi MO est parallela. est autem ut ZΘ ad ΘK ita MΞ ad ΞN, & ut ΘK ad ΘH ita NΞ ad ΞO; ex æquali igitur ut ΘZ ad ΘH ita MΞ ad ΞO, invertendoque ut HΘ ad ΘZ ita OΞ ad ΞM; & componendo erit ut HZ ad ZΘ, hoc est ad ZE, ita OM ad MΞ, hoc est ΠΔ ad ΔP. ut autem ΠΔ ad ΔP ita [per 1. 6.] rectangulum ΠΔP ad quadratum ex ΔP. sed [per 36. 3.] rectangulum ΠΔP æquale est rectangulo AΔΓ: ergo ut HZ ad ZE ita AΔΓ rectangulum ad quadratum ex ΔP, & invertendo ut ZE ad ZH ita quadratum ex ΔP ad rectangulum AΔΓ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις· εὑρεῖν περὶ διάμετρον τὴν ἑτέραν αὐτῶν κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ἔλλειψιν, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ταῖς εὐθείαις, ἧς κορυφὴ

Prop. LIV. *Probl.*

Datis duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter se angulos: invenire, circa alteram ipsarum tanquam diametrum coni, sectionem quæ ellipsis appellatur, in eodem plano in

 quo

quo sunt datæ rectæ; ita ut vertex sit punctum ad rectum angulum, & rectæ à sectione ad diametrum sub angulo dato possint applicatæ rectangula adjacentia alteri datæ, quæ latitudinem habeant rectam inter ipsas & verticem sectionis interjectam, deficiantque figurâ simili & similiter positâ ei quæ sub datis rectis continetur.

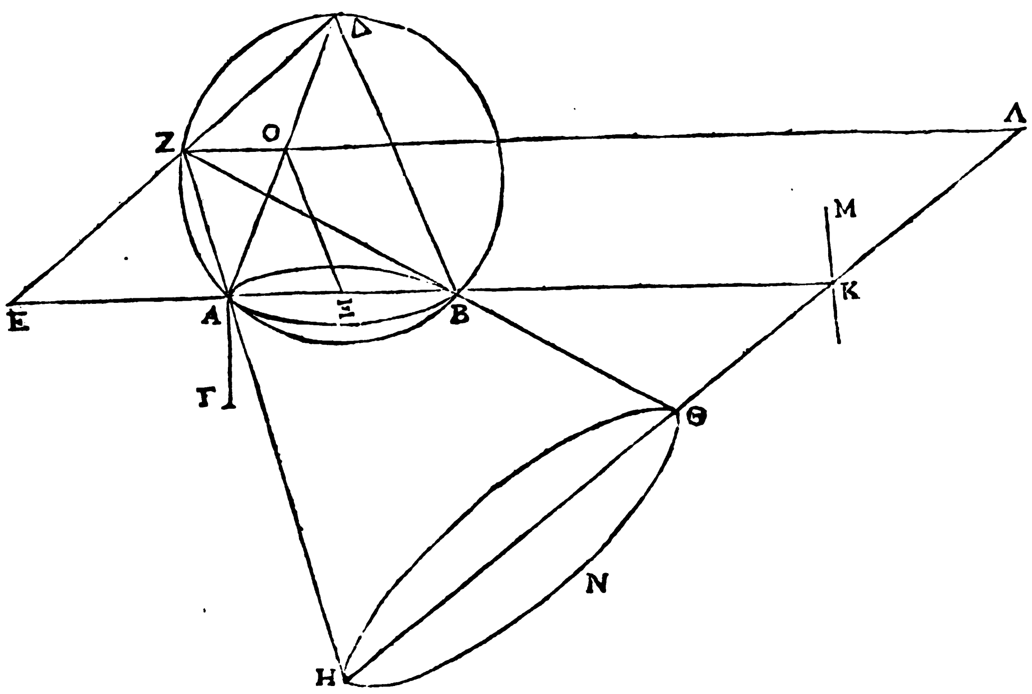
SINT datæ rectæ A B, A Γ ad rectos angulos constitutæ, quarum major A B: oportet vero in subjecto plano describere ellipsim, ita ut ejus diameter sit A B, vertex A, & rectum latus A Γ; ductæ vero à sectione ad A B in dato angulo applicentur, & possint spatia adjacentia ipsi A Γ, quæ latitudines habeant lineas interjectas inter ipsas & punctum A, deficiantque figurâ simili & similiter positâ ei quæ sub B A, A Γ continetur.

Sit datus angulus primum rectus; & [ope 12.11.] juxta A B planum attollatur rectum ad subjectum planum, atque in ipso super A B circuli portio A Δ B descripta [per 30. 3.] bifariam dividatur in Δ, & jungantur Δ A, Δ B: ponatur autem ipsi A Γ æqualis A Ξ, & [per 31.1.] per Ξ ducatur Ξ O parallela ipsi B Δ; &

ἔσαι τὸ πρὸς τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ σημεῖον, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ἐν γωνίᾳ δοθείσῃ δυνήσονται τὰ παρακείμενα ὀρθογώνια παρὰ τὴν ἑτέραν εὐθεῖαν, πλάτος ἔχοντα τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, ἐλλείποντα εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν περιεχομένῳ.

ΕΣΤΩΣΑΝ αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ A B, A Γ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν μείζων ἡ A B· δεῖ δὴ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ γράψαι ἔλλειψιν, ἧς διάμετρος μὲν ἔσαι ἡ A B, κορυφὴ δὲ τὸ A, ὀρθία δὲ ἡ A Γ, αἱ δὲ καταγόμεναι καταχθήσονται ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν A B ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, καὶ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν A Γ παρακείμενα, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ A, ἐλλείποντα εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν B A, A Γ.

Ἔσω δὲ ἡ δοθεῖσα γωνία πρότερον ὀρθή, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς A B ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ ἐν αὐτῷ ἐπὶ τῆς A B τμῆμα κύκλου γεγράφθω τὸ A Δ B, οὗ διχοτομία ἔσω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Δ A, Δ B, καὶ κείσθω τῇ A Γ ἴση ἡ A Ξ, καὶ διὰ τοῦ Ξ τῇ Δ B παράλληλος ἤχθω ἡ Ξ O, διὰ δὲ τοῦ O τῇ A B

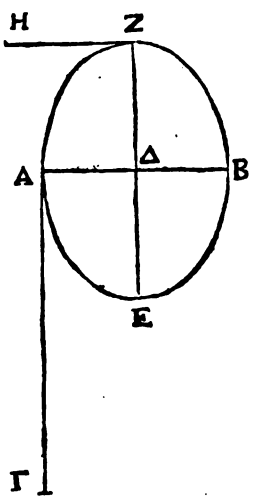


per O ipsi A B parallela O Z; junctaque Δ Z conveniat cum A B producta in puncto E: erit igitur [per 7. 5.] ut B A ad A Γ ita B A ad A Ξ, hoc est Δ A ad A O, hoc est [per 2. 6.] Δ E ad E Z; deinde jungantur A Z, Z B & producantur, sumaturque in Z A quodvis punctum H, & [per 31. 1.] per H ipsi Δ E parallela ducatur H Λ, quæ cum A B producta conveniat in K; denique producatur Z O, & conveniat cum H K in Λ. quoniam igitur circumferentia A Δ æqualis est ipsi Δ B; & [per 27. 3.] angulus A B Δ angulo Δ Z B æqualis erit. & quo-

παράλληλος ἡ O Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Δ Z, καὶ συμπιπτέτω τῇ A B ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ E· ἔσαι δὴ ὡς ἡ B A πρὸς A Γ οὕτως ἡ B A πρὸς A Ξ, τουτέσιν ἡ Δ A πρὸς A O, τουτέσιν ἡ Δ E πρὸς E Z· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ A Z, Z B καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς Z A τυχὸν σημεῖον τὸ H, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ Δ E παράλληλος ἤχθω ἡ H Λ, καὶ συμπιπτέτω τῇ A B ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ K· ἐκβεβλήσθω δὲ ἡ Z O καὶ συμπιπτέτω τῇ H K κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐσὶν ἡ A Δ περιφέρεια τῇ Δ B, ἴση ἐσὶν ἡ ὑπὸ A B Δ γωνία τῇ ὑπὸ Δ Z B.

ΔΖΒ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΑ γωνία δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΖΑΔ, ΖΔΑ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΖΑΔ τῇ ὑπὸ ΖΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΔΑ τῇ ὑπὸ ΖΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΒΑ ἐστὶν ἴση, τουτέστιν τῇ ὑπὸ ΒΖΔ. ἔστι δὲ καὶ παράλληλος ἡ ΔΕ τῇ ΛΗ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΖΑ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἐστὶν ἴση. ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΒ τῇ ὑπὸ ΖΘΗ· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΖΗΘ τῇ ὑπὸ ΖΘΗ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΘ ἐστὶν ἴση. γεγράφθω δὴ περὶ τὴν ΘΗ κύκλος ὁ ΗΘΝ ὀρθὸς πρὸς τὸ ΘΗΖ τρίγωνον, καὶ νοείσθω κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘΝ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον· ἔσται δὴ ὁ κῶνος ὀρθὸς διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΗΖ τῇ ΖΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΗΘΝ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ ΘΗΖ ἐπίπεδον, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ διὰ τοῦ ΗΘΖ ἐπίπεδον· καὶ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἄρα πρὸς τὸ διὰ τοῦ ΗΘΖ ἐπίπεδον ὀρθὴ ἔσται. ἔστω δὲ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ ΚΜ· ἡ ΚΜ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΚΗ. καὶ ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘΝ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸ ΗΘΖ τρίγωνον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΑΚ, ΚΜ, ὅ ἐστι τὸ ὑποκείμενον, κατ' εὐθεῖαν τὴν ΚΜ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΗΚ, καὶ τὸ ἐπίπεδον συμπίπτει ταῖς ΖΗ, ΖΘ πλευραῖς τοῦ κώνου· ἡ ἄρα γινομένη τομὴ ἔλλειψίς ἐστιν, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, αἱ δὲ καταγόμεναι καταχθήσονται ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ, παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ ΚΜ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΒΕΑ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ· τὸ δὲ ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΕ πρὸς ΕΖ καὶ τοῦ τῆς ΑΕ πρὸς ΕΖ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΘ, τουτέστιν ἡ ΖΛ πρὸς ΛΘ, ὡς δὲ ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΗ, τουτέστιν ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ· ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς ΑΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΛ πρὸς ΛΗ καὶ τοῦ τῆς ΖΛ πρὸς ΛΘ· ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΛΘ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά ἐστιν ἡ ΑΓ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ δεκάτῳ τρίτῳ θεωρήματι.

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω ἡ ΑΒ ἐλάσσων τῆς ΑΓ· καὶ δέον ἔστω ἐπὶ διάμετρον τὴν ΑΒ γράψαι ἔλλειψιν, ὥστε ὀρθίαν εἶναι τὴν ΑΓ.



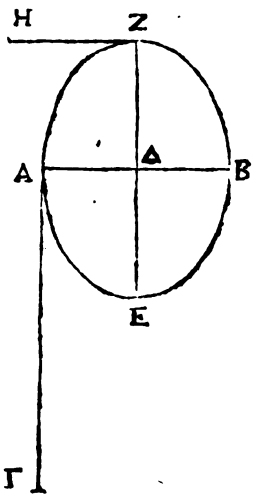
Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΔΖ, καὶ τῷ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ ΖΕ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΖΔ τῇ ΔΕ, καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΗ· καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τῆς ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΓΑΒ τῷ ἀπὸ ΕΖ· ἔστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, καὶ τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ. ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ· ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ

niam angulus EZA æqualis est [per 32. 1.] duobus angulis ZAΔ, ZΔA; atque est [per 27. 3.] ZAΔ angulus æqualis angulo ZBΔ, ut etiam ZΔA ipsi ZBA: erit angulus EZA æqualis angulo ΔBA, hoc est [per 27. 3.] BZΔ. verum ΔE parallela est ipsi ΛH: igitur angulus EZA æqualis est [per 29. 1.] angulo ZHΘ. at ΔZB ipsi ZΘH: quare sequitur ZHΘ angulum angulo ZΘH esse æqualem, & [per 6. 1.] lineam ZH lineæ ZΘ. itaque circa HΘ describatur circulus HΘN, rectus ad triangulum ΘHZ; & intelligatur conus, cujus basis circulus HΘN & vertex punctum Z: erit igitur is conus rectus, ob HZ æqualem ipsi ZΘ. & quoniam circulus HΘN rectus est ad ΘHZ planum; est autem & planum subjectum rectum ad planum quod per HΘZ transit: ideo [per 19. 11.] communis ipsorum sectio ad planum per HΘZ perpendicularis erit. communis autem sectio sit linea KM: ergo KM perpendicularis est ad utramque ipsarum AK, KH. rursus quoniam conus, cujus basis est circulus HΘN & vertex Z, secatur plano per axem, quod facit sectionem triangulum HΘZ; secatur autem & altero plano per AK, KM transeunte, quod est subjectum planum, secundum rectam lineam KM perpendicularem ad HK, & planum illud occurrit ipsis ZH, ZΘ lateribus coni: erit [per 13. huj.] sectio genita ellipsis, cujus diameter AB, ductæ vero à sectione ad AB in recto angulo applicabuntur; sunt enim [per 13. huj.] ipsi KM parallelæ. quoniam vero ut ΔE ad EZ ita [per 1. 6.] rectangulum ΔEZ, hoc est [per 36. 3.] BEA, ad quadratum ex EZ; rectangulum autem BEA [per 23. 6.] ad quadratum ex EZ compositam rationem habet ex ratione BE ad EZ & ex ratione AE ad EZ; utque BE ad EZ ita [per 4. 6.] BK ad KΘ, hoc est ZΛ ad ΛΘ, & ut AE ad EZ ita AK ad KH, hoc est ZΛ ad ΛH: habebit igitur BA ad AΓ rationem compositam ex ratione ZΛ ad ΛH & ex ratione ZΛ ad ΛΘ. quæ quidem ratio eadem est [per 23. 6.] quam habet quadratum ex ZΛ ad HΛΘ rectangulum: ergo ut BA ad AΓ ita quadratum ex ZΛ ad rectangulum HΛΘ. quod cum ita sit, AΓ erit rectum figuræ latus, ut ostensum est in 13. theoremate.

IISDEM positis, sit linea AB minor ipsa AΓ: & oporteat circa diametrum AB ellipsim describere, ita ut AΓ sit rectum figuræ latus.

Secetur AB bifariam in Δ; à quo ad rectos angulos ipsi AB ducatur EΔZ: & rectangulo BAΓ æquale sit [ope 13. 6.] quadratum ex ZE, & ZΔ æqualis sit ipsi ΔE; ipsi vero AB parallela ducatur ZH, & fiat [per 12. 6.] ut AΓ ad AB ita EZ ad ZH: major est igitur EZ quam ZH. & quoniam rectangulum ΓAB æquale est quadrato ex EZ; ut ΓA ad AB ita est [per cor. 20. 6.] quadratum ex ZE ad quadratum ex AB, & quadratum ex ΔZ ad quadratum ex AΔ. ut autem ΓA ad AB ita EZ ad ZH: ergo ut EZ ad ZH ita

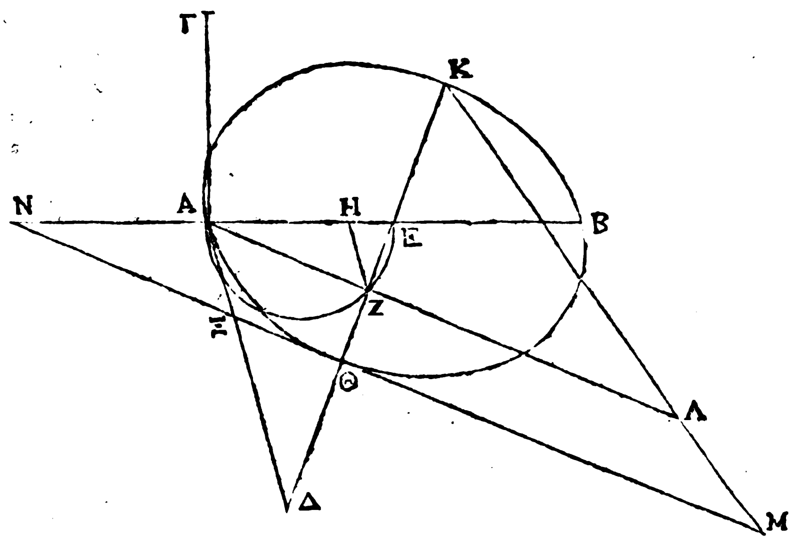
ita quadratum ex ZΔ ad quadratum ex ΔA. sed quadratum ex ZΔ æquale est rectangulo ZΔE: quare ut EZ ad ZH ita rectangulum EΔZ ad quadratum ex AΔ. duabus igitur rectis terminatis EZ, ZH aptatisque ad rectos inter se angulos, quarum [per præc. cas.] major est EZ, describatur ellipsis, ita ut EZ diameter sit & ZH rectum figuræ latus: transibit itaque sectio per A, quoniam ut rectangulum ZΔE ad quadratum ex ΔA ita est EZ ad ZH. atque est AΔ æqualis ΔB: transibit igitur etiam per B, ac propterea ellipsis circa AB descripta erit. & quoniam ut ΓA ad AB ita quadratum ex ZΔ ad quadratum ex ΔA, atque est quadratum ex ΔA rectangulo AΔB æquale: erit ut ΓA ad AB ita quadratum ex ΔZ ad rectangulum AΔB: quare AΓ est rectum figuræ latus.



οὕτως τὸ ἀπὸ ZΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔA. τὸ δὲ ἀπὸ ZΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ZΔE· ὡς ἄρα ἡ EZ πρὸς ZH οὕτως τὸ ὑπὸ EΔZ πρὸς τὸ ἀπὸ AΔ. δύο οὖν εὐθειῶν πεπερασμένων τῶν EZ, ZH πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κειμένων, καὶ μείζονος οὔσης τῆς EZ, γεγράφθω ἔλλειψις ἧς διάμετρος μὲν ἡ EZ, ὀρθία δὲ ἡ ZH· ἥξει δὴ ἡ τομὴ διὰ τοῦ A, διὰ τὸ εἶναι ὡς τὸ ὑπὸ ZΔE πρὸς τὸ ἀπὸ ΔA οὕτως ἡ EZ πρὸς ZH. καὶ ἔστιν ἴση ἡ AΔ τῇ ΔB· ἐλεύσεται ἄρα καὶ διὰ τοῦ B, γέγραπται οὖν ἔλλειψις περὶ τὴν AB. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓA πρὸς AB οὕτως τὸ ἀπὸ ZΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔA, τὸ δὲ ἀπὸ ΔA ἴσον τῷ ὑπὸ AΔB· ὡς ἄρα ἡ ΓA πρὸς AB οὕτως τὸ ἀπὸ ΔZ πρὸς τὸ ὑπὸ AΔB· ὥστε ὀρθία ἐστὶν ἡ AΓ.

Sed non sit datus angulus rectus, sitque ipsi æqualis BAΔ, & secta AB bifariam in E circa AE semicirculus AEZ describatur; in quo ipsi AΔ parallela ducatur ZH, ita ut faciat rationem quadrati ex ZH ad rectangulum AHE eandem quam habet ΓA ad ipsam AB; & junctæ AZ, EZ producantur, & sumatur [per 13. 6.] inter ipsas ΔE, EZ media proportionalis

ΑΛΛΑ δὲ μὴ ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθή, καὶ ἔστω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ BAΔ, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E, [a] καὶ ἐπὶ τῆς AE γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ AEZ, καὶ ἐν αὐτῷ τῇ AΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ZH ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ὑπὸ AHE λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓA πρὸς τὴν AB, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, EZ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰ-



EΘ, cui æqualis ponatur EK; fiat autem [ope 12. 6.] quadrato ex AZ æquale rectangulum ΘZΛ, jungaturque KΛ; & per Θ ipsi ΘZ ad rectos angulos ducatur MΘΞ parallela ipsi AZΛ, rectus est enim [per 31. 3.] angulus qui ad Z; atque datis duabus rectis terminatis & ad rectos inter se angulos KΘ, ΘM, describatur ellipsis [per cas. præc.] cujus diameter transversa KΘ, & rectum figuræ latus ΘM; ductæ vero à sectione ad ΘK in recto angulo applicentur: transibit igitur sectio per A, quia quadratum ex ZA rectangulo ΘZΛ est æquale. & quoniam ΘE æqualis est EK, & AE ipsi EB; etiam per B transibit sectio, cujus centrum erit E & diameter AEB, & [per prop. 37. vel 38. huj.] ΔA sectionem continget, propterea quod rect-

λήφθω τῶν ΔE, EZ μέση ἀνάλογον ἡ EΘ, καὶ τῇ EΘ ἴση κείσθω ἡ EK, καὶ πεποιήσθω τῷ ἀπὸ AZ ἴσον τὸ ὑπὸ ΘZΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ KΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ τῇ ΘZ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΘMΞ, παράλληλος γινομένη τῇ AZΛ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Z· καὶ δύο δοθεισῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῶν KΘ, ΘM, γεγράφθω ἔλλειψις, ἧς διάμετρος πλαγία ἡ KΘ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘM, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΘK ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται· ἥξει δὴ ἡ τομὴ διὰ τοῦ A, διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ ZA τῷ ὑπὸ ΘZΛ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΘE τῇ EK, ἡ δὲ AE τῇ EB, ἥξει καὶ διὰ τοῦ B ἡ τομή· καὶ ἔσται κέντρον μὲν τὸ E, διάμετρος δὲ ἡ AEB, καὶ ἐφάψεται τῆς τομῆς ἡ ΔA, διὰ τὸ

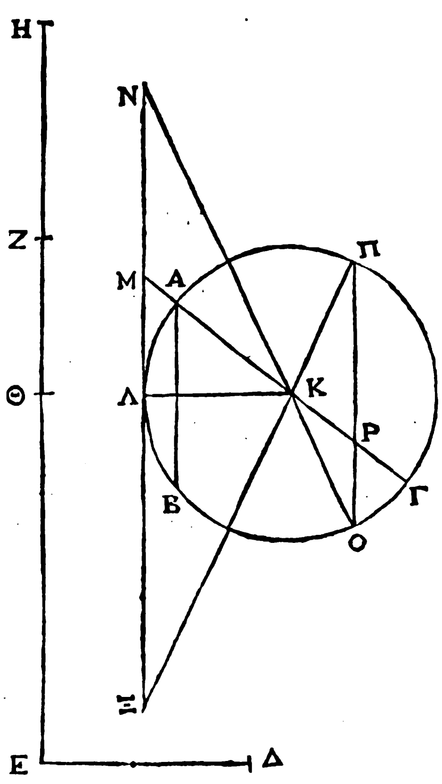
ἴσον

ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ ΔΕΖ τῷ ἀπὸ ΕΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ, ἀλλ' ἡ μὲν ΓΑ πρὸς ΑΒ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔΑ καὶ τῆς διπλασίας τῆς ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, τουτέστι τῆς ΔΑ πρὸς ΑΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τῆς ΖΗ πρὸς ΗΕ καὶ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΑ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ καὶ τῆς ΔΑ πρὸς ΑΕ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τῆς ΖΗ πρὸς ΗΕ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ· κοινοῦ ἄρα ἀφαιρεθέντος τούτου τοῦ λόγου, ἔσται ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ, τουτέστιν ἡ ΞΑ πρὸς ΑΝ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά ἐστιν ἡ ΑΓ.

angulum ΔΕΖ æquale eſt quadrato ex ΕΘ. & quoniam [per conſtr.] ut ΓΑ ad ΑΒ ita quadratum ex ΖΗ ad rectangulum ΑΗΕ; ſed ΓΑ ad ΑΒ rationem habet compoſitam ex ratione ΓΑ ad duplam ΔΑ & ex ratione duplæ ΑΔ ad ΑΒ, hoc eſt [per 15. 5.] ex ratione ΔΑ ad ΑΒ; quadratum vero ex ΖΗ ad rectangulum ΑΗΕ [per 24. 6.] compoſitam rationem habet ex ratione ΖΗ ad ΗΕ & ex ratione ΖΗ ad ΗΑ: ergo ratio compoſita ex ratione ΓΑ ad duplam ΑΔ & ex ratione ΔΑ ad ΑΕ eadem eſt quæ componitur ex ratione ΖΗ ad ΗΕ & ratione ΖΗ ad ΗΑ. ſed ut ΔΑ ad ΑΕ ita [per 4. 6.] ΖΗ ad ΗΕ: ergo, ſublata communi hac ratione, erit ut ΓΑ ad duplam ΑΔ ita ΖΗ ad ΗΑ; hoc eſt ΞΑ ad ΑΝ. quando autem hoc ita ſit, linea ΑΓ [per 50. huj.] eſt rectum figuræ latus.

EUTOCIUS.

ᵃ Καὶ ἐπὶ τῆς ΑΕ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΕΖ, καὶ τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἐν αὐτῷ ἡ ΖΗ, λόγον ποιοῦσα τοῦ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ.] Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, καὶ κείσθωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΖ ἐπὶ τὸ Η, καὶ τῇ ΔΕ ἴση κείσθω ἡ ΖΗ, καὶ τετμήσθω ὅλη ἡ ΕΗ δίχα κατὰ τὸ Θ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἤχθω, καὶ συμβαλλέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Λ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΜ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΚΑ συμβαλλέτω τῇ ΛΜ κατὰ τὸ Μ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς ΜΝ, καὶ τῇ ΛΝ ἴση ἔστω ἡ ΛΞ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΝΚ, ΚΞ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ ἀναπληρωθεὶς ὁ κύκλος τεμνέτω αὐτὰς κατὰ τὰ Ο, Π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΡΠ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΖΗ οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς ΜΝ· συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΖ οὕτως ἡ ΛΝ πρὸς ΝΜ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΝΛ. ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΝΞ· καὶ διελόντι ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΖΕ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΝΛ τῇ ΛΞ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΛΚ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΝ τῇ ΚΞ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΟ τῇ ΚΠ ἴση· παράλληλος ἄρα ἡ ΝΞ τῇ ΟΠ· ὅμοιον ἄρα τὸ ΚΜΝ τρίγωνον τῷ ΚΡΟ τριγώνῳ, καὶ τὸ ΚΜΞ τῷ ΠΡΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΜ πρὸς ΚΡ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΡΟ. ἀλλὰ καὶ ὡς αὐτὴ ἡ ΚΜ πρὸς ΚΡ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΠΡ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΜ πρὸς ΡΟ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΠΡ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ οὕτως ἡ ΟΡ πρὸς ΡΠ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΕ, τουτέστιν ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΟΡ πρὸς ΡΠ οὕτως τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΡΠ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΡΠ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΟΡΠ τῷ ὑπὸ ΑΡΓ· ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΡΓ.

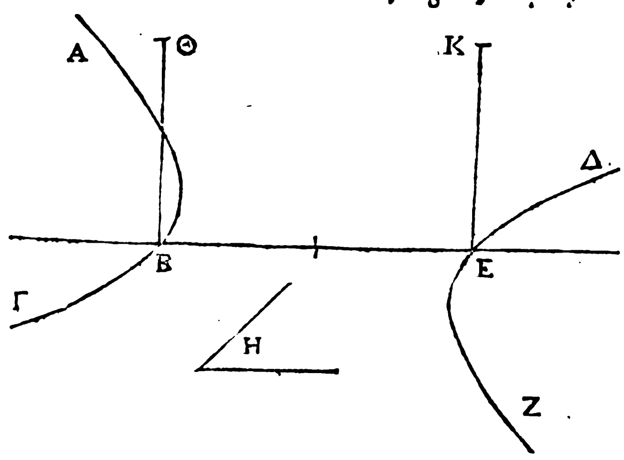


ᵃ Et circa ΑΕ ſemicirculus ΑΕΖ deſcribatur, in quo ipſi ΑΔ parallela ducatur ΖΗ, ita ut faciat rationem quadrati ex ΖΗ ad rectangulum ΑΗΕ eandem quam habet ΓΑ ad ipſam ΑΒ.] Sit ſemicirculus ΑΒΓ in quo recta quæpiam ΑΒ, ponanturque duæ rectæ inæquales ΔΕ, ΕΖ, & producatur ΕΖ ad Η, & ſit ΖΗ æqualis ipſi ΔΕ, & tota ΕΗ in Θ bifariam dividatur; ſumpto autem circuli centro Κ, ab eo ducatur perpendicularis ad ΑΒ, quæ circumferentiæ circuli occurrat in Λ, perque Λ ipſi ΑΒ parallela ducatur ΛΜ, & ΚΑ producta conveniat cum ΛΜ in puncto Μ, & fiat ut ΘΖ ad ΖΗ ita ΛΜ ad ΜΝ, atque ipſi ΛΝ æqualis ſit ΛΞ, & junctæ ΝΚ, ΚΞ producantur, adeo ut à completo circulo ſecentur in punctis Ο, Π, & jungatur ΟΡΠ. quoniam igitur ut ΖΘ ad ΖΗ ita eſt ΛΜ ad ΜΝ; componendo erit ut ΘΗ ad ΗΖ ita ΛΝ ad ΝΜ, & invertendo ut ΖΗ ad ΗΘ ita ΝΜ ad ΝΛ. ut autem ΖΗ ad ΗΕ ita ΜΝ ad ΝΞ, & dividendo ut ΖΗ ad ΖΕ ita ΝΜ ad ΜΞ. & quoniam ΝΛ æqualis eſt ΛΞ, communiſque & ad rectos angulos ΛΚ; erit & ΚΝ æqualis ΚΞ. & eſt ΚΟ ipſi ΚΠ æqualis: parallela igitur eſt [per 2. 6.] ΝΞ ipſi ΟΠ, atque ob id triangulum ΚΜΝ ſimile triangulo ΚΡΟ, & triangulum ΚΜΞ ipſi ΠΡΚ; erit ut ΚΜ ad ΚΡ ita ΜΝ ad ΡΟ. ſed ut eadem ΚΜ ad ΚΡ ita ΜΞ ad ΠΡ: quare ut ΝΜ ad ΡΟ ita ΜΞ ad ΠΡ, & permutando ut ΝΜ ad ΜΞ ita ΟΡ ad ΡΠ. ſed ut ΝΜ ad ΜΞ ita ΖΗ ad ΖΕ, hoc eſt ΔΕ ad ΕΖ; ut autem ΟΡ ad ΡΠ ita [per 1. 6.] quadratum ex ΟΡ ad rectangulum ΟΡΠ. ut igitur ΔΕ ad ΕΖ ita quadratum ex ΟΡ ad rectangulum ΟΡΠ. ſed [per 35. 3.] eſt rectangulum ΟΡΠ rectangulo ΑΡΓ æquale: ut igitur ΔΕ ad ΕΖ ita quadratum ex ΟΡ ad rectangulum ΑΡΓ.

Prop. LV. *Probl.*

Datis duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter se angulos: invenire oppositas sectiones, quarum diameter sit una datarum rectarum, & vertices ejusdem lineæ termini; ita ut applicatæ ab utraque sectione in dato angulo possint spatia adjacentia alteri rectæ, excedentia vero figurâ simili ei quæ sub datis rectis continetur.

Sint datæ rectæ terminatæ ad rectos inter se angulos B E, B Θ, & datus angulus sit H: oportet utique circa unam rectarum B E, B Θ sectiones oppositas describere, ita ut ordinatim applicatæ in angulo H applicentur.



Datis igitur duabus rectis B E, B Θ, describatur hyperbola A B Γ, cujus diameter transversa sit B E, & rectum figuræ latus Θ B; ductæ vero ad illam quæ in directum ipsi B E constituitur, applicentur in angulo H. sit ea B Γ; quod quomodo fieri oporteat, jam [ad 53. huj.] dictum est; ducatur per E recta E K ad rectos angulos ipsi B E, quæ sit æqualis B Θ; & describatur similiter alia hyperbola Δ E Z, ita ut ejus diameter sit B E, rectum figuræ latus E K, & ductæ à sectione ordinatim applicentur in angulo qui angulo H æqualis sit: constat igitur B, E sectiones esse oppositas, quarum diameter una eademque est, atque latera recta inter se æqualia.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις πεπερασμένων· εὑρεῖν ἀντικειμένας, ὧν διάμετρός ἐστι μία τῶν εὐθειῶν, κορυφαὶ δὲ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐν ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν ἑτέραν παρακείμενα, καὶ ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν περιεχομένῳ.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις πεπερασμέναι, αἱ B E, B Θ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἡ H· δεῖ γράψαι ἀντικειμένας περὶ μίαν τῶν B E, B Θ, ὥστε τὰς καταγομένας κατάγεσθαι ἐν γωνίᾳ τῇ H.

Καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν B E, B Θ, γεγράφθω ὑπερβολὴ A B Γ, ἧς διάμετρος ἔσται πλαγία ἡ B E, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ Θ B, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ B E καταχθήσονται ἐν γωνίᾳ τῇ H. καὶ ἔστω ἡ A B Γ, τοῦτο γὰρ ὡς δεῖ γίνεσθαι προγέγραπται· ἤχθω δὴ διὰ τοῦ E τῇ B E πρὸς ὀρθὰς ἡ E K, ἴση οὖσα τῇ B Θ, καὶ γεγράφθω ὁμοίως ἄλλη ὑπερβολὴ ἡ Δ E Z, ἧς διάμετρος μὲν ἡ B E, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ E K, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς τεταγμένως καταχθήσονται ἐν τῇ γωνίᾳ τῇ H· φανερὸν δὴ ὅτι αἱ B, E εἰσὶν ἀντικείμεναι, διάμετρος δὲ αὐτῶν μία ἔσται, καὶ ὀρθίαι ἴσαι.

Prop. LVI. *Probl.*

Datis duabus rectis lineis sese bifariam secantibus: circa utramque ipsarum sectiones oppositas describere; ita ut rectæ datæ sint conjugatæ earum diametri, & ut quarumlibet oppositarum sectionum diameter possit figuram aliarum oppositarum.

Sint datæ duæ rectæ lineæ se invicem secantes A Γ, Δ E: oportet jam circa utramque ipsarum quasi diametrum oppositas sectiones describere, ita ut A Γ, Δ E conjugatæ sint inter se, nempe ut Δ E quidem possit figuram earum quæ circa A Γ sunt, A Γ vero figuram earum possit quæ circa Δ E.

Sit [ope 11.6.] quadrato ex Δ E æquale rectangulum A Γ Λ, sitque A Γ ipsi Γ Λ ad rectos angulos; & duabus datis rectis ad rectos inter se angulos constitutis A Γ, Γ Λ, describan-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛ'.

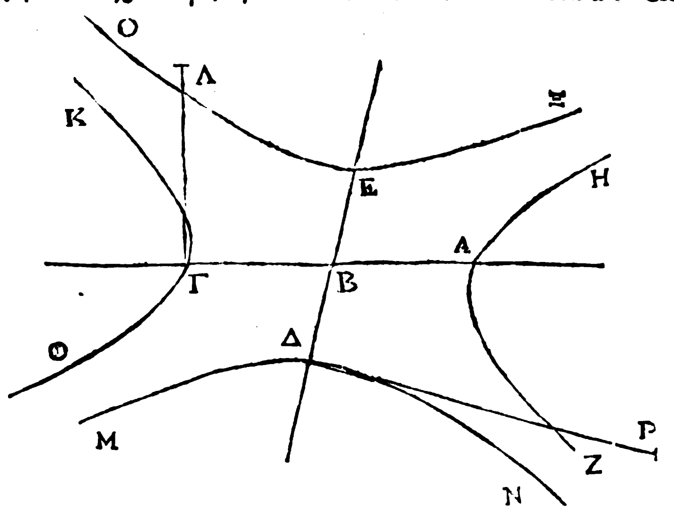
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δίχα τεμνουσῶν ἀλλήλας γράψαι περὶ ἑκατέραν αὐτῶν ἀντικειμένας τομάς, ὥστε εἶναι αὐτῶν συζυγεῖς διαμέτρους τὰς εὐθείας, καὶ τὴν τῶν δύο ἀντικειμένων διάμετρον τὸ τῶν ἑτέρων ἀντικειμένων δύνασθαι εἶδος.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, δίχα τέμνουσαι ἀλλήλας, αἱ A Γ, Δ E· δεῖ δὴ περὶ ἑκατέραν αὐτῶν διάμετρον γράψαι ἀντικειμένας, ἵνα ὦσιν αἱ A Γ, Δ E συζυγεῖς ἐν αὐταῖς, καὶ ἡ μὲν Δ E τὸ τῶν περὶ τὴν A Γ εἶδος δύνηται, ἡ δὲ A Γ τὸ τῶν περὶ τὴν Δ E.

Ἔστω τῷ ἀπὸ Δ E ἴσον τὸ ὑπὸ A Γ Λ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἔστω ἡ Λ Γ τῇ Γ A, καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῶν A Γ, Γ Λ, γεγράφθωσαν

φθωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΖΑΗ, ΘΓΚ, ὧν διάμετρος μὲν ἔστω πλαγία ἡ ΓΑ, ὀρθία δὲ ἡ ΓΛ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῶν τομῶν ἐπὶ τὴν ΓΑ καταχθήσονται ἐν τῇ γωνίᾳ τῇ δοθείσῃ τῇ ὑπὸ τῶν ΔΒΓ· ἔσται δὴ ἡ ΔΕ δευτέρα διάμετρος τῶν ἀντικειμένων, μέσον τε γὰρ λόγον ἔχει τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν, καὶ παρὰ τεταγμένως κατηγμένη οὖσα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Β. ἔστω δὴ πάλιν τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΔΡ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἔστω ἡ ΔΡ τῇ ΔΕ, καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κειμένων τῶν ΕΔ, ΔΡ, γεγράφθωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΜΔΝ, ΟΕΞ, ὧν διάμετρος μὲν πλαγία ἡ ΔΕ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΔΡ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῶν τομῶν καταχθήσονται ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ· ἔσται δὴ καὶ τῶν ΜΔΝ, ΞΕΟ δευτέρα διάμετρος ἡ ΑΓ, ὥστε ἡ μὲν ΑΓ τὰς τῇ ΔΕ παραλλήλους μεταξὺ τῶν ΖΑΗ, ΘΓΚ τομῶν δίχα τέμνει, ἡ δὲ ΔΕ τὰς τῇ ΑΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. καλείσθωσαν δὲ αἱ τοιαῦται τομαὶ Συζυγεῖς.

tur [per præced.] oppositæ sectiones ΖΑΗ, ΘΓΚ, quarum diameter transversa sit ΓΑ, & rectum latus ΓΛ, ductæ autem à sectionibus ad ΓΑ in dato angulo ΔΒΓ applicentur: erit [ex def. 2^dæ^ diam.] ipsa ΔΕ secunda diameter oppositarum sectionum, quia est media proportionalis inter latera figuræ, & ordinatim applicatæ parallela est, & ad Β bifariam secatur. Sit rursus [ope 11.6.] quadrato ex ΑΓ æquale rectangulum ΕΔ,ΔΡ; & sit ΔΡ ad rectos angulos ipsi ΔΕ: itaque datis duabus rectis ad rectos inter se angulos, ΕΔ,ΔΡ, sectiones oppositæ ΜΔΝ, ΟΕΞ [per 55. huj.] describantur, quarum transversa diameter ΔΕ & ΔΡ rectum figuræ latus; ductæ vero à sectionibus applicentur ad ΔΕ in dato angulo: recta igitur ΑΓ secunda diameter erit sectionum ΜΔΝ, ΞΕΟ; ergo ΑΓ parallelas ipsi ΔΕ, inter sectiones ΖΑΗ, ΘΓΚ ductas, bifariam secat; ΔΕ vero parallelas ipsi ΑΓ: quod erat faciendum. Vocentur autem hujusmodi sectiones CONJUGATÆ.



EUTOCIUS.

Εἴρηται μὲν, ἐν τοῖς μετὰ τὸ ι΄. θεώρημα σχολίοις, ὁ σκοπὸς τῶν ιγ΄. πρώτων θεωρημάτων· καὶ ἐν τοῖς εἰς τὸ ἑκκαιδέκατον, ὁ τῶν ἑξῆς τριῶν. δεῖ δὲ εἰδέναι ὅτι ἐν μὲν τῷ ιζ΄. φησὶν, ὅτι ἡ διὰ τῆς κορυφῆς παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη ἐκτὸς πίπτει· ἐν δὲ τῷ ιη΄. φησὶν, ὅτι ἡ παράλληλος τῇ ὁπωσοῦν ἁπτομένῃ ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγομένη τεμεῖ τὴν τομήν· ἐν τῷ ιθ΄. ὅτι ἡ ἀπό τινος σημείου διὰ τῆς διαμέτρου παρὰ τεταγμένως κατηγμένη συμπίπτει τῇ τομῇ· ἐν τῷ κ΄. καὶ κα΄. τὰς παρὰ τεταγμένως καταγομένας ζητεῖ τῶν τομῶν, ὅπως ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, καὶ τὰ τῆς διαμέτρου ὑπ' αὐτῶν γινόμενα τμήματα· ἐν τῷ κβ΄. καὶ κγ΄. λέγει περὶ τῆς εὐθείας τῆς κατὰ δύο σημεῖα τῇ τομῇ συμπιπτούσης· ἐν τῷ κδ΄. καὶ κε΄. περὶ τῆς εὐθείας καθ' ἕν τι τομῇ συμπιπτούσης, τουτέστιν ἐφαπτομένης· ἐν τῷ κϛ΄. περὶ τῆς ἀγομένης παραλλήλου τῇ διαμέτρῳ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς ὑπερβολῆς· ἐν τῷ κζ΄. περὶ τῆς τεμνούσης τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, ὅτι κατ' ἀμφότερα μέρη συμπίπτει τῇ τομῇ· ἐν τῷ κη΄. περὶ τῆς ἀγομένης παραλλήλου τῇ ἐφαπτομένῃ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων· ἐν τῷ κθ΄. περὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῶν ἀντικειμένων ἐκβαλλομένης· ἐν τῷ λ΄. φησὶν, ὅτι διχοτομεῖται ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἐκβαλλομένη τῆς ἐλλείψεως καὶ τῶν ἀντικειμένων· ἐν τῷ λα΄. φησὶν, ὅτι ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἡ ἐφαπτομένη τὴν διάμετρον τέμνει μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ κέντρου· ἐν τῷ λβ΄. καὶ γ΄. καὶ δ΄. καὶ ε΄. καὶ ϛ΄· περὶ τῶν ἐφαπτομένων ποιεῖται τὸν λόγον· ἐν τῷ λζ΄. περὶ τῶν ἐφαπτομένων, καὶ τῶν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένων τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς· ἐν τῷ λη΄. περὶ τῶν ἐφαπτομένων τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, ὅπως ἔχουσι πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον· ἐν τῷ λθ΄. καὶ μ΄. περὶ τῶν αὐτῶν ποιεῖται τὸν λόγον. τοὺς συγκειμένους ἐκ τούτων λόγους ἐπιζητῶν· ἐν τῷ μα΄. περὶ τῶν ἀναγραφομένων παραλληλογράμμων ἀπὸ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλ-

Scripsimus, in commentariis post decimum theorema, quodnam fuerit propositum *Apollonio* in primis tredecim theorematibus; & in commentariis in sextum decimum de tribus sequentibus dictum est. Scire vero oportet quod in septimo decimo afferit rectam, quæ per verticem ducitur ordinatim applicatæ parallela, extra sectionem cadere: in decimo octavo rectam, quæ utcunque contingenti parallela intra sectionem ducitur, ipsam secare: in decimo nono rectam, quæ ducitur ab aliquo puncto diametri ordinatim applicatæ parallela, cum sectione convenire: in vigesimo & vigesimo primo rectas in sectionibus ordinatim applicatas inquirit, quomodo inter sese habeant, itemque diametri portiones quæ ab ipsis fiunt: in vigesimo secundo & vigesimo tertio tractat de recta quæ in duobus punctis sectioni occurrit: in vigesimo quarto & vigesimo quinto de ea quæ ipsi occurrit in uno puncto tantum, hoc est de recta quæ sectionem contingit: in vigesimo sexto de ea quæ diametro parabolæ & hyperbolæ parallela ducitur: in vigesimo septimo de recta secante parabolæ diametrum, nempe quod ex utraque parte sectioni occurrat: in vigesimo octavo de ea quæ parallela ducitur contingenti unam oppositarum sectionum: in vigesimo nono de ea quæ per centrum oppositarum transiens producitur: in trigesimo dicit, quod recta quæ transit per centrum ellipseos & oppositarum sectionum bifariam dividitur: in trigesimo primo quod ea recta, quæ hyperbolam contingit, diametrum secat inter centrum & verticem sectionis: in 32. 33. 34. 35. 36. de proprietatibus rectarum contingentium agitur: in trigesimo septimo de contingentibus & de iis quæ à tactu applicantur in hyperbola & ellipsi: in trigesimo octavo de contingentibus hyperbolam & ellipsim, quo modo se habeant ad secundam diametrum: in trigesimo nono & quadragesimo de iisdem agit, rationes ex hisce compositas inquirens: in quadragesimo primo de parallelogrammis descriptis ab applicata & ab ea quæ ex centro hyperbolæ &

& ellipſeos: in quadrageſimo ſecundo aſſerit triangulum in parabola ex contingente & applicata factum æquale eſſe parallelogrammo, quod cum eo æqualem altitudinem habet & in dimidia baſi conſtituitur: in quadrageſimo tertio inquirit, in hyperbola & ellipſi, quomodo ſe habeant inter ſe triangula quæ à contingentibus & applicatis fiunt: in quadrageſimo quarto idem inquirit in oppoſitis ſectionibus: in quadrageſimo quinto idem in ſecunda diametro hyperbolæ & ellipſeos: in quadrageſimo ſexto de aliis parabolæ diametris quæ ſunt poſt diametrum principalem: in quadrageſimo ſeptimo de aliis diametris hyperbolæ & ellipſeos: in quadrageſimo octavo de aliis diametris oppoſitarum ſectionum: in quadrageſimo nono de rectis juxta quas poſſunt applicatæ ad alias parabolæ diametros: in quinquageſimo de iiſdem in hyperbola & ellipſi: in quinquageſimo primo de iiſdem in oppoſitis ſectionibus. itaque his præmiſſis ſubjungit, ad inſtar epilogi cujuſdam, in quinquageſimo ſecundo problema, quo oſtendit quomodo parabola in plano deſcribatur: in quinquageſimo tertio, quomodo deſcribatur hyperbola: in quinquageſimo quarto, quomodo ellipſis: in quinquageſimo quinto, quomodo oppoſitæ ſectiones: in quinquageſimo ſexto de conjugatis ſectionibus agit.

λείψεως· ἐν τῷ μβ΄. ἐπὶ τῆς παραβολῆς λέγει ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς κατηγμένης καταλαμβανόμενον τρίγωνον τῷ ἰσοϋψεῖ αὐτῷ παραλληλογράμμῳ ἡμίσειαν ἔχοντι βάσιν· ἐν τῷ μγ΄. ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως ζητεῖ πῶς ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὰ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν κατηγμένων ἀπολαμβανόμενα τρίγωνα· ἐν τῷ μδ΄. τὸ αὐτὸ ἐν ταῖς ἀντικειμέναις· ἐν τῷ με΄ τὸ αὐτὸ ἐπὶ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως· ἐν τῷ μς΄. περὶ τῶν μετὰ τὴν ἀρχικὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς ἑτέρων· ἐν τῷ μζ΄. περὶ τῶν ἑτέρων διαμέτρων τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως· ἐν τῷ μη΄. περὶ τῶν ἑτέρων διαμέτρων τῶν ἀντικειμένων· ἐν τῷ μθ΄. περὶ τῶν παρ᾽ ἃς δύνανται αἱ κατηγμέναι ἐπὶ τὰς ἑτέρας διαμέτρους τῆς παραβολῆς· ἐν τῷ ν΄. περὶ τοῦ αὐτοῦ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως· ἐν τῷ να΄. περὶ τοῦ αὐτοῦ τῶν ἀντικειμένων. ταῦτα εἰπὼν καὶ προσθεὶς τοῖς εἰρημένοις ἐπίλογόν τινα, ἐν τῷ νβ΄. δεικνύει πρόβλημα, ὡς δυνατὸν ἐν ἐπιπέδῳ γράψαι τὴν παραβολήν· ἐν τῷ νγ΄. λέγει πῶς δεῖ γράψαι τὴν ὑπερβολήν· ἐν τῷ νδ΄. πῶς δεῖ γράψαι τὴν ἔλλειψιν· ἐν τῷ νε΄. λέγει πῶς δεῖ γράψαι ἀντικειμένας· ἐν τῷ νς΄. περὶ τῶν συζυγιῶν ἀντικειμένων.

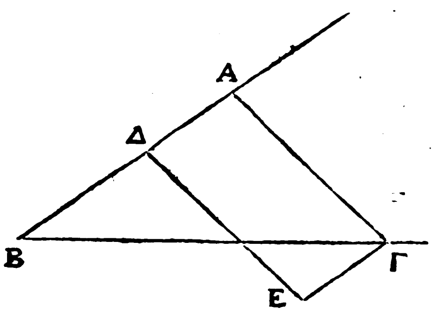
ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΛΗΜΜΑΤΑ
ΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA
IN SECUNDUM LIBRUM CONICORUM
APOLLONII PERGÆI.

ΛΗΜΜΑ α'.

Δύο δοθεισῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ εὐθείας τῆς ΔΕ· εἰς τὰς ΑΒ, ΒΓ ἐναρμόσαι εὐθεῖαν ἴσην τῇ ΔΕ καὶ παράλληλον αὐτῇ.

ΤΟΥΤΟ δὲ φανερόν. ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ Ε τῇ ΑΒ παράλληλον ἀγάγωμεν τὴν ΕΓ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΔΕ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΓΑ· ἔσται, διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ΑΓΕΔ, ἡ ΑΓ ἴση τῇ ΔΕ καὶ παράλληλος, καὶ ἐνήρμοσται εἰς τὰς δοθείσας εὐθείας τὰς ΑΒ, ΒΓ.



LEMMA I.

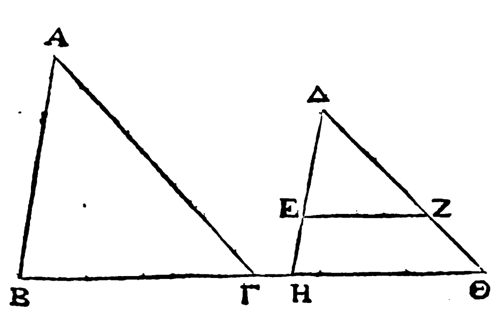
Datis duabus rectis lineis ΑΒ, ΒΓ, & data recta ΔΕ; inter ipsas ΑΒ, ΒΓ coaptare rectam ipsi ΔΕ æqualem & parallelam.

HOC autem manifestum est. nam si per Ε ducatur ΕΓ parallela ΑΒ, & per Γ ipsi ΔΕ parallela ΓΑ; erit, propter ΑΓΕΔ parallelogrammum, [per 34. 1.] ΑΓ ipsi ΔΕ æqualis & parallela, & inter datas rectas ΑΒ, ΒΓ coaptata est.

ΛΗΜΜΑ β'.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, καὶ παράλληλος ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ· ὅτι καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἐστὶ παράλληλος.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ καὶ συμπιπτέτω ταῖς ΔΕ, ΔΖ κατὰ τὰ Η, Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, καί εἰσιν ἴσαι αἱ Β, Ε γωνίαι, διὰ τὸ εἶναι δύο παρὰ δύο· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, τουτέστι τῇ Θ, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΕΖ, ΗΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΘ.



LEMMA II.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ; sitque ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, & ΑΒ quidem sit parallela ΔΕ, ΒΓ vero ipsi ΕΖ: dico & ΑΓ ipsi ΔΖ parallelam esse.

PRoducatur ΒΓ; & conveniat cum ΔΕ, ΔΖ in punctis Η, Θ. itaque quoniam est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, & anguli ad Β, Ε æquales, quia duæ rectæ sunt duabus parallelæ; erit [per 6.6.] angulus Γ æqualis angulo Ζ, hoc est angulo Θ, propter parallelas ΕΖ, ΗΘ: ergo ΑΓ ipsi ΔΘ est parallela.

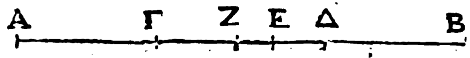
ΛΗΜΜΑ γ'.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ μεταξὺ τῶν Γ, Δ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ.

LEMMA III.

Sit recta ΑΒ, sintque æquales ΑΓ, ΔΒ, & inter Γ & Δ sumatur quodvis punctum Ε: dico rectangulum ΑΔΒ una cum rectangulo ΓΕΔ æquale esse rectangulo ΑΕΒ.

Secetur enim recta ΓΔ bifariam in puncto Z, quomodocunque se habuerit punctum E. & quoniam [per 5.2.] rectangulum ΑΔΒ una cum quadrato ex ZΔ æquale est quadrato ex ZB; sed quadrato quidem ex ZΔ rectangulum ΓΕΔ una cum quadrato ex ZE est æquale, quadrato vero ex ZB æquale rectangulum AEB una cum quadrato ex ZE: erit igitur rectangulum ΑΔΒ una cum rectangulo ΓΕΔ & quadrato ex ZE æquale rectangulo AEB & quadrato ex ZE. commune auferatur quadratum ex ZE: reliquum igitur ΑΔΒ rectangulum una cum rectangulo ΓΕΔ æquale est rectangulo AEB.



Τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα, ὅπως ἂν ἔχῃ τὸ πρὸς τὸ Ε σημεῖον, κατὰ τὸ Ζ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΒ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΓΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΕ, τῷ δὲ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ καὶ τοῦ ἀπὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΑΕΒ καὶ τῷ ἀπὸ ΖΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ.

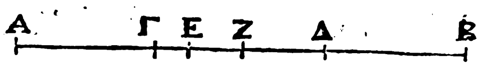
LEMMA IV.

Sit recta AB, & æquales sint ΑΓ, ΔΒ, & inter Γ, Δ sumatur quodvis punctum E: dico rectangulum AEB æquale esse rectangulo ΓΕΔ una cum rectangulo ΔΑΓ.

ΛΗΜΜΑ δ'.

Εστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ μεταξὺ τῶν Γ Δ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΓΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΑΓ.

Secetur enim recta ΓΔ bifariam in puncto Z, quomodocunque se habuerit punctum E: quare tota AZ ipsi ZB est æqualis: rectangulum igitur AEB una cum quadrato ex EZ æquale est [per 5.2.] quadrato ex AZ: rectangulum autem AEB cum quadrato ex EZ æquale est rectangulo ΔΑΓ una cum quadrato ex ΓZ. sed & quadratum ex ΓZ est æquale rectangulo ΓΕΔ una cum quadrato ex EZ. auferatur commune quadratum ex EZ; erit igitur reliquum rectangulum AEB æquale rectangulo ΓΕΔ una cum rectangulo ΔΑΓ.



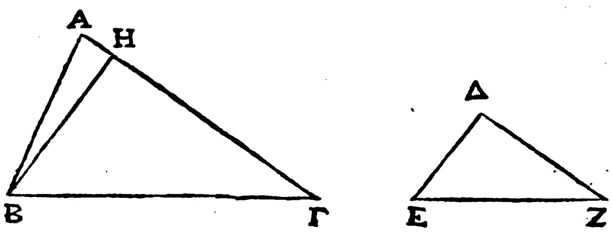
Τετμήσθω γὰρ ἡ ΓΔ δίχα, ὅπως ἂν ἔχῃ τὸ πρὸς τὸ Ε σημεῖον, κατὰ τὸ Ζ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ ἴση ἐστίν· τὸ μὲν ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΖ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΑΓ καὶ τῷ ἀπὸ ΓΖ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΓΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΓΕΔ καὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΕΖ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΔΕΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΑΓ.

LEMMA V.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ; & sit angulus quidem Γ æqualis angulo Z, angulus vero B angulo E major: dico ΒΓ ad ΓΑ minorem rationem habere quam EZ ad ZΔ.

ΛΗΜΜΑ ε'.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν Γ τῇ Ζ, μείζων δὲ ἡ Β τῆς Ε· ὅτι ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ.



Constituatur enim angulus ΓΒΗ æqualis angulo E, & est angulus Γ angulo Z æqualis: ergo [per 4.6.] ut ΒΓ ad ΓΗ ita EZ ad ZΔ. sed [per 8.5.] ΒΓ ad ΓΑ minorem habet rationem quam ΒΓ ad ΓΗ: igitur ΒΓ ad ΓΑ minorem rationem habet quam EZ ad ZΔ.

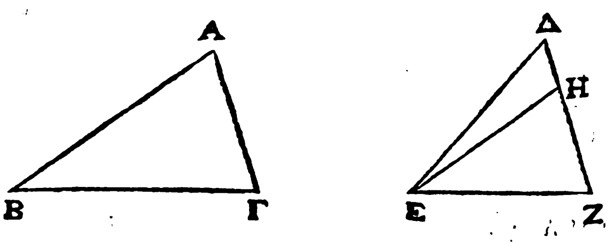
Συνεστάτω τῇ Ε γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΒΗ, ἔστι δὲ καὶ ἡ Γ τῇ Ζ ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ. ἀλλὰ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς ΓΗ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς ΓΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ.

LEMMA VI.

Habeat rursus ΒΓ ad ΓΑ majorem rationem quam EZ ad ZΔ, & sit angulus Γ æqualis angulo Z: dico angulum B angulo E minorem esse.

ΛΗΜΜΑ ς'.

Εχέτω δὴ πάλιν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ μείζονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ, ἴση δὲ ἔστω ἡ Γ γωνία τῇ Ζ· ὅτι πάλιν γίνεται ἐλάσσων ἡ Β γωνία τῆς Ε γωνίας.



Quoniam enim ΒΓ ad ΓΑ majorem rationem habet quam EZ ad ZΔ; si igitur fiat ut ΒΓ ad ΓΑ ita EZ ad aliam quandam; erit ea [per 10.5.] minor quam ZΔ. sit ea recta ZH, & EH jungatur. cumque circa æquales angulos latera proportionalia sint, erit angulus ad B [per 6.6.] æqualis angulo ZEH, qui angulo ZEΔ minor est.

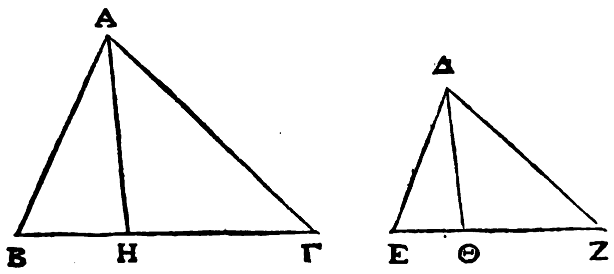
Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ· ἐὰν ἄρα ποιῶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τινα ἄλλην· ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΖΔ. ἔστω πρὸς τὴν ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ, ἐλάσσονι οὔσῃ τῆς ΖΕΔ. ὅ. ἔ. δ.

*

ΛΗΜΜΑ ζ΄.

Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ οὕτως, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ· ὅτι γίνεται ὅμοιον καὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ τριγώνῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ λόγος συνῆπται ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ τοῦ τῆς ΗΓ πρὸς ΓΑ· ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ συνῆπται ἐκ τε τοῦ τῆς ΕΖ πρὸς ΖΔ καὶ τοῦ τῆς ΖΘ πρὸς ΖΔ, ὧν ὁ τῆς ΒΓ πρὸς ΓΑ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΕΖ πρὸς ΖΔ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων· λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΗΓ πρὸς ΓΑ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΔ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ τριγώνῳ. ὅ. ἔ. δ.



LEMMA VII.

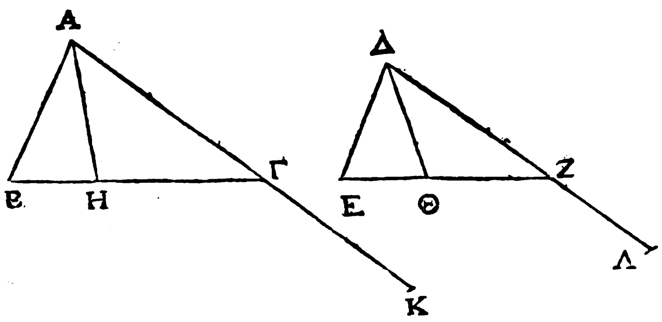
Sint triangula similia ΑΒΓ, ΔΕΖ; & ita ducantur ΑΗ, ΔΘ, ut sit rectangulum ΒΓΗ ad quadratum ex ΓΑ sicut rectangulum ΕΖΘ ad quadratum ex ΖΔ: dico & triangulum ΑΗΓ triangulo ΔΘΖ simile esse.

QUoniam enim [ex hyp.] est ut rectangulum ΒΓΗ ad quadratum ex ΓΑ ita rectangulum ΕΖΘ ad quadratum ex ΖΔ; sed [per 23. 6.] ratio quidem rectanguli ΒΓΗ ad quadratum ex ΓΑ composita est ex ratione quam habet ΒΓ ad ΓΑ & ratione ΗΓ ad ΓΑ; ratio autem rectanguli ΕΖΘ ad quadratum ex ΖΔ componitur ex ratione ΕΖ ad ΖΔ & ratione ΘΖ ad ΖΔ; quarum quidem ratio ΒΓ ad ΓΑ eadem est quæ ΕΖ ad ΖΔ, ob similitudinem triangulorum: erit igitur reliqua ratio ΗΓ ad ΓΑ eadem quæ ipsius ΘΖ ad ΖΔ. & [ex hyp.] sunt circa æquales angulos: ergo [per 6. 6.] triangulum ΑΗΓ triangulo ΔΘΖ simile erit.

ΛΗΜΜΑ η΄.

Διὰ μὲν οὖν τοῦ συνημμένου λόγου, ὡς προγέγραπται. ἔστω δὲ νῦν ἀποδεῖξαι μὴ προσχρησάμενον τῷ συνημμένῳ λόγῳ.

Κείσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΒΓΗ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΓΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΚ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ. τῷ δὲ ὑπὸ ΕΖΘ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΔΖΛ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ. ὑπόκειται δὲ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΓΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΓ πρὸς ΓΑ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΔΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΛΖ πρὸς ΖΔ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ οὕτως ἐδείχθη ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓΗ τρίγωνον τῷ ΔΖΘ τριγώνῳ. ὁμοίως καὶ τὸ ΑΗΒ τῷ ΔΘΕ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΕΖ. ὅ. ἔ. δ.



LEMMA VIII.

Hoc igitur per rationem compositam, eo quem diximus modo, demonstratur. sed jam liceat idem aliter demonstrare absque composita ratione.

POnatur enim rectangulo ΒΓΗ æquale rectangulum ΑΓΚ: ergo [per 16. 6.] ut ΒΓ ad ΓΚ ita ΑΓ ad ΓΗ. ipsi vero rectangulo ΕΖΘ æquale ponatur rectangulum ΔΖΛ: erit igitur ut ΕΖ ad ΖΛ ita ΔΖ ad ΖΘ. sed positum est ut rectangulum ΒΓΗ, hoc est regulum ΑΓΚ, ad quadratum ex ΑΓ, hoc est [per 1. 6.] ut ΚΓ ad ΓΑ ita rectangulum ΕΖΘ, hoc est ipsum ΔΖΛ ad quadratum ex ΔΖ, videlicet ut ΛΖ ad ΖΔ. ut autem ΒΓ ad ΓΑ ita ΕΖ ad ΖΔ, ob similitudinem triangulorum: ergo [per 22. 5.] ut ΒΓ ad ΓΚ ita ΕΖ ad ΖΛ. sed ut ΒΓ ad ΓΚ ita ostensa est ΑΓ ad ΓΗ; itemque ut ΕΖ ad ΖΛ ita ΔΖ ad ΖΘ: ut igitur ΑΓ ad ΓΗ ita erit ΔΖ ad ΖΘ. & sunt circa æquales angulos: triangulum igitur ΑΓΗ [per 6. 6.] simile est triangulo ΔΖΘ. & eadem ratione triangulum ΑΗΒ simile est triangulo ΔΘΕ, sicut triangulum ΑΒΓ ipsi ΔΕΖ simile est.

ΛΗΜΜΑ θ΄.

Ἔστω ὅμοιον τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΗΒ τῷ ΔΕΘ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ.

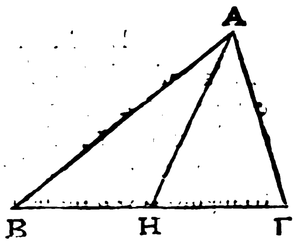
Ἐπεὶ γάρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα, ἴση ἐστὶν ὅλη μὲν ἡ Α ὅλῃ τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΕΔΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΘΔΖ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ Γ

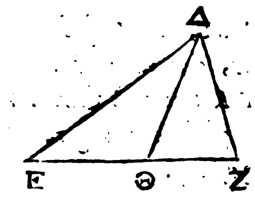
LEMMA IX.

Sit triangulum quidem ΑΒΓ simile triangulo ΔΕΖ, uti & triangulum ΑΗΒ triangulo ΔΕΘ simile: dico ut rectangulum ΒΓΗ ad quadratum ex ΓΑ ita esse rectangulum ΕΖΘ ad quadratum ex ΖΔ.

QUoniam enim, propter similitudinem triangulorum, totus angulus Α toti Δ est æqualis; angulus autem ΒΑΗ æqualis est angulo ΕΔΘ: erit igitur reliquus ΗΑΓ reliquo ΘΔΖ æqualis. sed & angulus

gulus Γ est æqualis angulo Z: est igitur [per 4. 6.] ut HΓ ad ΓA ita ΘZ ad ZΔ. ut autem BΓ ad ΓA ita EZ ad ZΔ: ergo & composita ratio compositæ rationi eadem erit: ut igitur rectangulum BΓH est ad quadratum ex ΓA ita rectangulum EZΘ ad quadratum ex ZΔ.

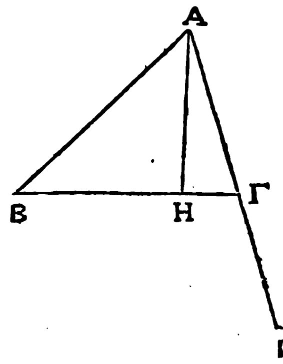


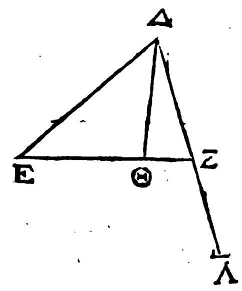


τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΔ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ· καὶ ὁ συνημμένος ἄρα τῷ συνημμένῳ ἐστὶν ὁ αὐτός· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ.

Aliter absque ratione composita.

Ponatur rectangulo BΓH æquale rectangulum AΓK, & rectangulo EZΘ æquale rectangulum ΔZΛ; erit rursus ut BΓ ad ΓK ita AΓ ad ΓH. ut autem EZ ad ZΛ ita ΔZ ad ZΘ: &, eadem ratione qua supra, demonstrabimus ut AΓ ad ΓH ita esse ΔZ ad ZΘ: ergo ut BΓ ad ΓK ita EZ ad ZΛ. sed & ut BΓ ad ΓA ita EZ ad ZΔ, ob triangulorum similitudinem: ex æquali igitur [per 22.5.] ut KΓ ad ΓA, hoc est [per 1.6.] ut rectangulum KΓA sive rectangulum BΓH ad quadratum ex ΓA ita ΛZ ad ZΔ, hoc est rectangulum ΛZΔ sive rectangulum EZΘ, ad quadratum ex ZΔ.





Ἄλλως μὴ διὰ τοῦ συνημμένου.

Κείσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΒΓΗ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΓΚ, τῷ δὲ ὑπὸ ΕΖΘ ἴσον τὸ ὑπὸ ΔΖΛ· ἔσται πάλιν ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ. ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ· καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ τῷ ἐπάνω δείξομεν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ, διὰ τὴν ὁμοιότητα· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ΚΓ πρὸς ΓΑ, τοῦτ' ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΚΓΑ, ὅ ἐστι τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς ΖΔ, τοῦτ' ἔστι τὸ ὑπὸ ΛΖΔ, ὅ ἐστι τὸ ὑπὸ ΕΖΘ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ.

LEMMA X.

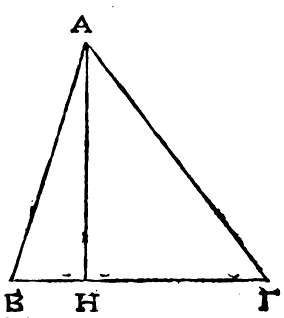
Similiter demonstrabimus, si fuerit ut rectangulum BΓH ad quadratum ex AΓ ita rectangulum EZΘ ad quadratum ex ZΔ, & triangulum ABΓ simile triangulo ΔEZ: etiam triangulum ABH triangulo ΔEΘ simile esse.

ΛΗΜΜΑ ι΄.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ἐὰν ᾖ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, καὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ ὅμοιον εἶναι.

LEMMA XI.

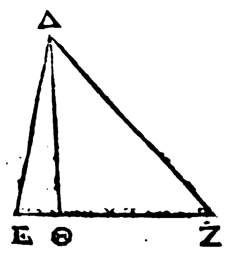
Sint duo triangula similia ABΓ, ΔEZ, & ducantur perpendiculares AH, ΔΘ: dico ut rectangulum BHΓ ad quadratum ex AH ita esse rectangulum BΘZ ad quadratum ex ΔΘ.



Hoc autem ex iis, quæ supra [ad lem. 8.] dicta sunt, perspicue constat.

ΛΗΜΜΑ ια΄.

Ἔστω δύο ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ.

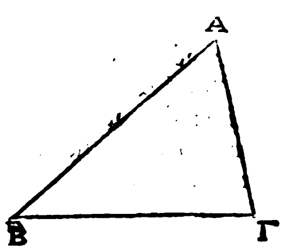


Τοῦτο δὲ φανερόν, ἐπεὶ ὅμοιον γίνεται τοῖς πρὸ αὐτοῦ.

LEMMA XII.

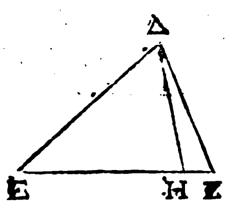
Sit æqualis quidem angulus B angulo E, angulus vero A angulo Δ minor: dico ΓB ad BA minorem rationem habere quam ZE ad EΔ.

Quoniam enim angulus A minor est angulo Δ, constituatur ipsi A æqualis EΔH: est igitur [per 4. 6.] ut ΓB ad BA ita HE ad EΔ. sed [per 8.5.] HE ad EΔ minorem habet rationem quam ZE ad EΔ: ergo & ΓB ad BA minorem rationem habet quam ZE ad EΔ. similiter & omnia alia ejusmodi ostendentur.



ΛΗΜΜΑ ιβ΄.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν Β γωνία τῇ Ε, ἐλάσσων δὲ ἡ Α τῆς Δ· ὅτι ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ.

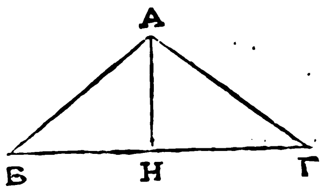


Ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσων ἡ Α γωνία τῆς Δ, συνεστάτω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς ΕΔ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΗΕ πρὸς ΕΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ· καὶ ἡ ΓΒ ἄρα πρὸς ΒΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ. καὶ πάντα τὰ τοιαῦτα τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ δείξομεν.

ΛΗΜΜΑ ιγ'.

Ἔστω ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ· καὶ ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΗΓ ἔστω ἴση, ἡ δὲ ΓΗ πρὸς ΗΑ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς ΘΔ. ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΖΘ τῆς ΘΕ.

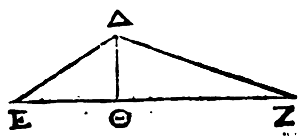
Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΓΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΗΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ οὕτως ὑπόκειται τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ· καὶ τὸ ὑπὸ ΕΘΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΖΘ τοῦ ὑπὸ ΕΘΖ. ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ΖΘ τῆς ΘΕ. ὅ. ἔ. δ.



LEMMA XIII.

Sit ut rectangulum ΒΗΓ ad quadratum ex ΑΗ ita rectangulum ΕΘΖ ad quadratum ex ΔΘ, & sit ΒΗ quidem æqualis ΗΓ; ΓΗ verò ad ΗΑ minorem rationem habeat quam ΖΘ ad ΘΔ: dico ΖΘ majorem esse quam ΘΕ.

Quoniam enim quadratum ex ΓΗ ad quadratum ex ΗΑ minorem rationem habet quam quadratum ex ΖΘ ad quadratum ex ΘΔ; quadratum autem ex ΓΗ æquale est rectangulo ΒΗΓ; habebit ΒΗΓ rectangulum ad quadratum ex ΑΗ minorem rationem quam quadratum ex ΖΘ ad quadratum ex ΘΔ. sed ut ΒΗΓ rectangulum ad quadratum ex ΑΗ ita positum est rectangulum ΕΘΖ ad quadratum ex ΘΔ: ergo rectangulum ΕΘΖ ad quadratum ex ΘΔ minorem rationem habet quam quadratum ex ΖΘ ad quadratum ex ΘΔ: majus igitur est [per 8. 5.] quadratum ex ΖΘ rectangulo ΕΘΖ; quare & ΖΘ major erit quam ΘΕ.



ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ
ΚΩΝΙΚΩΝ
ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ,
ΜΕΤΑ ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑΤΩΝ.

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBER SECUNDUS,
CUM COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITÆ.

Apollonius Eudemo S. P.

SI vales bene eſt, ego quidem ſatis commode habeo. *Apollonio* filio meo dedi, ut ad te perferret, ſecundum librum Conicorum à nobis conſcriptorum: quem tu diligenter percurre, & communica cum illis, qui eo tibi digni videbuntur. *Philonidæ* etiam Geometræ, quo cum tibi *Epheſi* amicitiam conciliavi, ſi quando in iſthæc *Pergami* loca venerit, legendum trade: tu cura ut valeas. Vale.

Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν.

Εἰ ὑγιαίνεις ἔχοι ἂν καλῶς, καὶ αὐτὸς δὲ μετρίως ἔχω. Ἀπολλώνιον τὸν υἱόν μου πέπομφα πρός σε κομίζοντα τὸ δεύτερον βιβλίον τῶν συντεταγμένων ἡμῖν κωνικῶν. Δίελθε οὖν αὐτὸ ἐπιμελῶς, καὶ τοῖς ἀξίοις τῶν τοιούτων κοινωνεῖν μεταδίδου, καὶ Φιλωνίδης δὲ ὁ γεωμέτρης, ὃν καὶ συνέστησά σοι ἐν Ἐφέσῳ, ἐάν ποτε ἐπιβάλλῃ εἰς τοὺς κατὰ Πέργαμον τόπους, μετάδος αὐτῷ· καὶ σεαυτοῦ ἐπιμελοῦ ἵνα ὑγιαίνῃς. εὐτύχει.

Prop. I. *Theor.*

Si hyperbolam recta linea ad verticem contingat, & ab ipſo, ex utraque parte diametri, ponatur recta æqualis ei quæ poteſt quartam figuræ partem: rectæ quæ à ſectionis centro ad ſumptos terminos contingentis ducuntur cum ſectione non convenient.

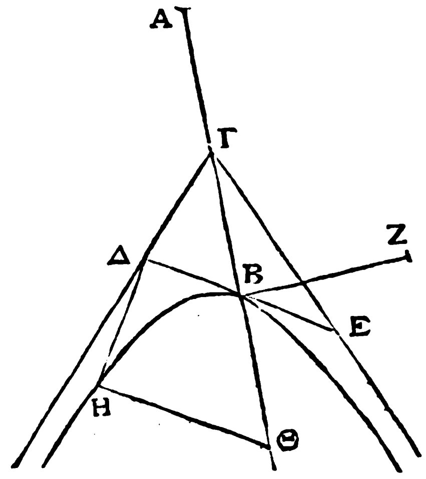
ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς κατὰ κορυφὴν εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἐφ' ἑκάτερα τῆς διαμέτρου ἀποληφθῇ ἴση τῇ δυναμένῃ τὸ τέταρτον τοῦ εἴδους· αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ληφθέντα πέρατα τῆς ἐφαπτομένης ἀγόμεναι εὐθεῖαι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ.

ΕΣΤΩ

Ἔστω ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, ὀρθία δὲ ἡ ΒΖ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς κατὰ τὸ Β ἡ ΔΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒΖ εἴδους ἴσον ἔστω τὸ ἀφ᾽ ἑκατέρας ΒΔ, ΒΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΓΔ, ΓΕ ἐκβεβλήσθωσαν· λέγω ὅτι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω ἡ ΓΔ τῇ τομῇ κατὰ τὸ Η, καὶ ἀπὸ τοῦ Η τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΔΒ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ΑΒ πρὸς ΒΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΖ, ἀλλὰ τοῦ μὲν ἀπὸ ΑΒ τέταρτον μέρος ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΓΒ, τοῦ δὲ ὑπὸ ΑΒΖ τέταρτον τὸ ἀπὸ ΒΔ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΘΒ τῷ ἀπὸ ΓΘ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ΓΔ συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἡ ΓΕ· ΑΣΥΜΠΤΩΤΟΙ ἄρα εἰσὶ τῇ τομῇ αἱ ΓΔ, ΓΕ.



SIT hyperbola, cujus diameter AB, centrum Γ, & rectum figuræ latus BZ, recta vero ΔB sectionem contingat in B; & quartæ parti figuræ, quæ continetur sub ABZ, æquale sit quadratum utriusque ipsarum ΔB, BE, & junctæ ΓΔ, ΓE producantur: dico eas cum sectione non convenire.

Si enim fieri potest, conveniat ΓΔ cum sectione in H, & ab H ordinatim applicetur ΘH: ergo [per 17. 1. huj.] HΘ parallela est ipsi ΔB. quoniam igitur ut AB ad BZ ita [per 1.6.] est quadratum ex AB ad rectangulum ABZ; quadratum autem ΓB quarta pars est quadrati ex AB, & quadratum ex BΔ itidem quarta pars rectanguli ABZ: erit [per 15.5.] itaque AB ad BZ ut quadratum ex ΓB ad quadratum ex BΔ, hoc est [per 4. 6.] quadratum ex ΓΘ ad quadratum ex ΘH. est vero [per 21. 1. huj.] ut AB ad BZ ita rectangulum AΘB ad quadratum ex ΘH: igitur ut quadratum ex ΓΘ ad quadratum ex ΘH ita rectangulum AΘB ad quadratum ex ΘH: rectangulum igitur AΘB [per 9. 5.] quadrato ex ΓΘ æquale est; quod [per 6.2.] est absurdum: ergo ΓΔ cum sectione non conveniet. similiter demonstrabitur neque ipsam ΓE convenire cum sectione: sunt igitur ΓΔ, ΓE ASYMPTOTI, hoc est, *cum sectione non convenientes.*

EUTOCIUS.

Ἀρχόμενος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν κωνικῶν, ὦ φίλτατέ μοι Ἀνθέμιε, τοσοῦτον οἶμαι δεῖν προειπεῖν, ὅτι τοσαῦτα μόνα εἰς αὐτὸ γράφω, ὅσα ἂν ᾖ δυνατὸν διὰ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ νοηθῆναι. Τὸ πρῶτον θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει, εἰ γὰρ μή, τοῦτο ἐν τῇ καταγραφῇ διαφορὰν οὐ ποιεῖ· αἱ γὰρ ΔΓ, ΓΕ ἀσύμπτωτοι εἰσιν ἐν τῇ τομῇ, καὶ αὐταὶ διαμένουσι κατὰ πᾶσαν διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην.

Explicaturus secundum librum Conicorum, amicissime *Anthemi*, illud præmittere oportere existimo, me ea tantummodo in ipsum conscribere, quæ ex primo libro intelligi possunt. Primum theorema casum non habet; nam diversitas schematum nullam hic facit diversitatem: rectæ enim ΔΓ, ΓE sectionis asymptoti cum sint, eædem manent in omni diametro & contingente.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β΄.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, δεικτέον, ὅτι ἑτέρα ἀσύμπτωτος οὐκ ἔστι τέμνουσα τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ τῶν ΔΓΕ.

Prop. II. *Theor.*

Iisdem manentibus, demonstrandum est non esse aliam asymptoton, quæ angulum ΔΓE dividat.

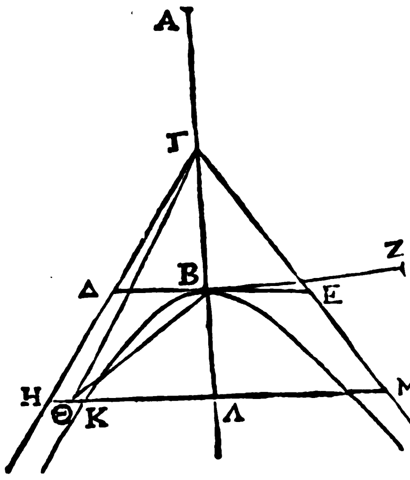
Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ ΓΘ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΘ, καὶ συμπιπτέτω τῇ ΓΘ κατὰ τὸ Θ, καὶ τῇ ΒΘ ἴση κείσθω ἡ ΔΗ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Κ, Λ, Μ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΒΘ, ΔΗ ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ αἱ ΔΒ, ΗΘ ἴσαι καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται αὐτῇ τις ἡ ΒΛ· τὸ ὑπὸ ΑΛΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΛ. ὁμοίως δὴ ἐπειδὴ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΜ τῇ ΔΕ, καὶ ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΗΛ τῇ ΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΔΒ, μείζων ἄρα ἡ ΗΚ τῆς ΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ΚΜ τῆς ΒΕ μείζων, ἐπεὶ καὶ τῆς

SI enim fieri potest, sit ΓΘ; & per B ipsi ΓΔ parallela ducatur BΘ, quæ cum ΓΘ in Θ puncto conveniat; ipsi vero BΘ ponatur æqualis ΔH; & juncta HΘ ad K, Λ, M producatur.

Quoniam igitur BΘ, ΔH æquales sunt & parallelæ; & ipsæ ΔB, HΘ [per 33.1.] æquales & parallelæ erunt. & quoniam AB bifariam secatur in Γ, & ipsi adjungitur quædam BΛ: ergo [per 6.2.] rectangulum AΛB una cum quadrato ex ΓB æquale est quadrato ex ΓΛ. similiter quoniam HM ipsi ΔE est parallela, atque est ΔB æqualis BE; & HΛ ipsi ΛM æqualis erit. & quoniam HΘ æqualis est ΔB; erit HK ipsâ ΔB major. est vero & KM major ipsâ BE, quia & ipsâ

ipsâ Λ M: rectangulum igitur M K H majus est rectangulo Δ B B, hoc est quadrato ex Δ B. quoniam igitur ut A B ad B Z ita est [ex demonstr. ad præc.] quadratum ex Γ B ad quadratum ex B Δ; atque ut A B ad B Z ita [per 21. 1. huj.] A Λ B rectangulum ad quadratum ex Λ K: erit igitur ut quadratum ex Γ B ad quadratum ex B Δ ita A Λ B rectangulum ad quadratum ex Λ K. ut vero quadratum ex Γ B ad quadratum ex B Δ ita [per 4. & 22. 6.] quadratum ex Γ Λ ad quadratum ex Λ H: ergo ut quadratum ex Γ Λ ad quadratum ex Λ H ita A Λ B rectangulum ad quadratum ex Λ K. quoniam itaque est ut totum quadratum ex Γ Λ ad totum quadratum ex Λ H ita ablatum rectangulum A Λ B ad ablatum quadratum ex Λ K; erit reliquum, nempe [per 6. 2.] quadratum ex Γ B, ad reliquum [per eandem] rectangulum M K H ut quadratum ex Γ Λ ad quadratum ex Λ H, hoc est ut quadratum ex Γ B ad quadratum ex B Δ; ergo rectangulum M K H æquale est quadrato ex B Δ. sed & ostensum est eo majus esse: quod absurdum. igitur Γ Θ non est asymptotos.



Λ M· τὸ ἄρα ὑπὸ M K H μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ Δ B E, τουτέστι τοῦ ἀπὸ Δ B. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ A B πρὸς B Z οὕτως τὸ ἀπὸ Γ B πρὸς τὸ ἀπὸ B Δ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ A B πρὸς B Z οὕτως τὸ ὑπὸ A Λ B πρὸς τὸ ἀπὸ Λ K· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Γ B πρὸς τὸ ἀπὸ B Δ οὕτως τὸ ὑπὸ A Λ B πρὸς τὸ ἀπὸ Λ K. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ Γ B πρὸς τὸ ἀπὸ B Δ οὕτω τὸ ἀπὸ Γ Λ πρὸς τὸ ἀπὸ Λ H· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Γ Λ πρὸς τὸ ἀπὸ Λ H οὕτως τὸ ὑπὸ A Λ B πρὸς τὸ ἀπὸ Λ K. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ Λ Γ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ Λ H οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ A Λ B πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ Λ K· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ Γ B πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ M K H ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ Γ Λ πρὸς τὸ ἀπὸ Λ H, τουτέστι τὸ ἀπὸ Γ B πρὸς τὸ ἀπὸ Δ B· ἴσον ἄρα τῷ ἀπὸ Δ B τὸ ὑπὸ M K H· ἀλλὰ καὶ μεῖζον αὐτοῦ δέδεικται, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ Γ Θ ἀσύμπτωτός ἐστι τῇ τομῇ.

EUTOCIUS.

Hoc theorema casum non habet, siquidem B Θ sectionem omnino in duobus punctis secat. quoniam enim parallela est ipsi Γ Δ, cum ipsa Γ Θ conveniet; ideoque prius cum sectione conveniet.

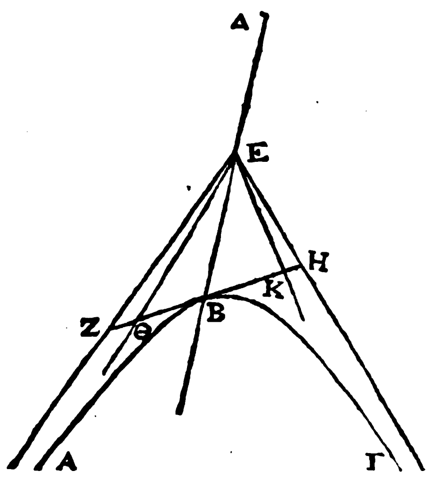
Τοῦτο τὸ θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει, ἡ μέντοι B Θ πάντως τεμεῖ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστι τῇ Γ Δ, συμπεσεῖται τῇ Θ Γ· ὥστε πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται.

PROP. III. *Theor.*

Si hyperbolam contingat recta linea: cum utraque asymptotôn conveniet, & ad tactum bifariam secabitur; quadratum vero utriusque ejus portionis æquale erit quartæ parti figuræ ad diametrum per tactum ductam constitutæ.

SIT hyperbola A B Γ, cujus centrum E, & asymptoti sint Z B, E H, quædam vero recta Θ K sectionem contingat in puncto B: dico Θ K productam cum Z E, E H convenire.

Si enim fieri potest, non conveniat, & juncta B E producatur, sitque ipsi B E æqualis E Δ: diameter igitur [per 47. 1. huj.] est B Δ. ponatur vero quartæ parti figuræ, quæ est ad B Δ, æquale quadratum utriusque ipsarum Θ B, B K, & jungantur Θ E, E K: ergo [per 1. 2. huj.] Θ E, E K asymptoti sunt, quod [per 2. 2. huj.] fieri nequit: positum est enim asymptotos esse Z E, E H: igitur Θ K producta cum ipsis Z E, E H conveniet, puta in punctis Z, H.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ γʹ.

Ἐὰν ὑπερβολῆς εὐθεῖα ἐφάπτηται· συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἁφήν, καὶ τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν τμημάτων αὐτῆς τετράγωνον ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ γινομένου εἴδους πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ A B Γ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ E, καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ Z E, E H, καὶ ἐφαπτέσθω τις αὐτῆς κατὰ τὸ B ἡ Θ K· λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη ἡ Θ K συμπεσεῖται ταῖς Z E, E H.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, μὴ συμπιπτέτω, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ E B ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω τῇ B E ἴση ἡ E Δ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ B Δ. κείσθω δὲ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ B Δ εἴδους ἴσον τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν Θ B, B K, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ E Θ, E K· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶν, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκεινται γὰρ Z E, E H ἀσύμπτωτοι· ἡ ἄρα K Θ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς E Z, E H ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ Z, H.

Λέγω

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΒΖ, ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους. μὴ γὰρ, ἀλλ', εἰ δυνατὸν, ἔστω τῷ τετάρτῳ εἴδους ἴσον τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΒΘ, ΒΚ· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΘΕ, ΕΚ, ὅπερ ἄτοπον· τὸ ἄρα ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΖΒ, ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους.

Dico quadratum utriusvis ipsarum ΒΖ, ΒΗ æquale esse quartæ parti figuræ quæ fit ad ΒΔ. non enim, sed si fieri potest, sit quartæ parti istius figuræ æquale quadratum utriusvis ipsarum ΘΒ, ΒΚ: asymptoti igitur sunt [per 1. 2. huj.] ΘΕ, ΕΚ; quod est absurdum: ergo quadratum utriusvis ΖΒ, ΒΗ æquale est quartæ parti figuræ ad ipsam ΒΔ constitutæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν γωνίαν περιεχουσῶν, καὶ σημείου ἐντὸς τῆς γωνίας, γράψαι διὰ τοῦ σημείου κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολὴν, ὥστε ἀσυμπτώτους εἶναι τὰς δοθείσας εὐθείας.*

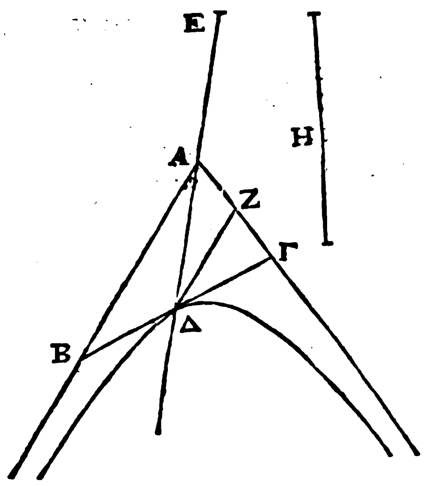
Prop. IV. *Probl.*

Datis duabus rectis lineis angulum continentibus, & puncto intra angulum dato: describere per punctum coni sectionem quæ hyperbola appellatur, ita ut datæ rectæ ipsius asymptoti sint.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τὸ Α, καὶ δεδόσθω σημεῖόν τι τὸ Δ, καὶ δέον ἔστω διὰ τοῦ Δ εἰς ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒ, ΑΓ γράψαι ὑπερβολήν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ ΔΑ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ κείσθω τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΖΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον γεγονέτω τὸ ὑπὸ ΔΕ, Η· καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΑΔ, γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ Δ ὑπερβολὴ, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν Η, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΔΕ, Η.

Ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΒΑ, καὶ ἴση ἡ ΓΖ τῇ ΖΑ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΔ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΔΕ, Η· ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ ΓΔ, ΔΒ τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΔΕ, Η εἴδους. αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς γραφείσης ὑπερβολῆς.



Sint duæ rectæ ΑΒ, ΑΓ angulum quemvis ad Α continentes, sitque datum punctum Δ, & oporteat per Δ intra asymptotos ΑΒ, ΑΓ hyperbolam describere.

Jungatur ΑΔ, & ad Ε producatur, & fiat ΔΑ æqualis ΑΕ, & per Δ ipsi ΑΒ parallela ducatur ΔΖ, ponaturque ΑΖ æqualis ΖΓ, & juncta ΓΔ producatur ad Β, & quadrato ex ΓΒ æquale fiat [ope 12. 6.] rectangulum sub ΔΕ & Η, & producta ΑΔ, circa ipsam per Δ hyperbola describatur [per 53. 1. huj.] ita ut applicatæ ad diametrum possint rectangula adjacentia rectæ Η, excedentiaque figurâ sub ipsis ΔΕ, Η contentâ simili.

Quoniam igitur parallela est ΔΖ ipsi ΒΑ, & ΓΖ æqualis ΖΑ; erit [per 2. 6.] ΓΔ ipsi ΔΒ æqualis: ergo [per 2. 2.] quadratum ex ΓΒ quadruplum est quadrati ex ΓΔ. atque est [per constr.] quadratum ex ΓΒ æquale rectangulo sub ΔΕ, Η: utrumque igitur quadratorum ex ΓΔ, ΔΒ quarta pars est figuræ quæ sub ΔΒ, Η continetur: quare [per 1. 2. huj.] ΑΒ, ΑΓ descriptæ hyperbolæ asymptoti sunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Ἐὰν παραβολῆς ἢ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος εὐθεῖάν τινα τέμνῃ δίχα· ἡ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐφαπτομένη τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

Prop. V. *Theor.*

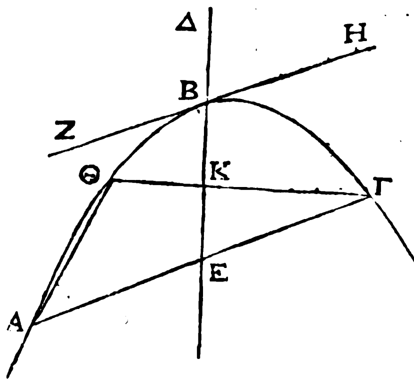
Si parabolæ vel hyperbolæ diameter rectam quandam bifariam secet; quæ ad terminum diametri contingit sectionem parallela est rectæ bifariam sectæ.

Ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἧς διάμετρος ἡ ΔΒΕ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΖΒΗ· ἤχθω δέ τις εὐθεῖα ἐν τῇ τομῇ ἡ ΑΕΓ, ἴσην ποιοῦσα τὴν ΑΕ τῇ ΕΓ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΗ.

Sit parabola vel hyperbola ΑΒΓ, cujus diameter ΔΒΕ, & ΖΒΗ sectionem contingat; ducatur autem quædam ΑΕΓ in sectione, faciens ΑΕ æqualem ipsi ΕΓ: dico ΑΓ parallelam esse ipsi ΖΗ.

* Vide Lemma II. *Pappi* in Librum quintum.

Nisi enim ita sit, ducatur per Γ ipsi ZH parallela ΓΘ, & jungatur ΘA. quoniam igitur ABΓ est parabola vel hyperbola, cujus diameter quidem ΔE, contingens autem ZH, atque ipsi ZH parallela est ΓΘ: erit [per 46. vel 47. 1. huj.] ΓK æqualis KΘ. sed & ΓE [ex hyp.] ipsi EA est æqualis: ergo [per 2. 6.] AΘ parallela est ipsi KE; quod fieri non potest: producta enim cum ipsâ BΔ [per 22. 1. huj.] convenit.



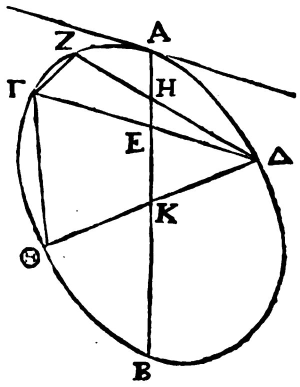
Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ZH παράλληλος ἡ ΓΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘA. ἐπεὶ οὖν παραβολὴ ἢ ὑπερβολή ἐστιν ἡ ABΓ, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΔE, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ZH, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἡ ΓΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓK τῇ KΘ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓE τῇ EA· ἡ ἄρα AΘ τῇ KE παράλληλός ἐστιν, ὅπερ ἀδύνατον· συμπίπτει γὰρ ἐκβαλλομένη τῇ BΔ.

Prop. VI. *Theor.*

Si ellipseos vel circuli circumferentiæ diameter rectam quandam non per centrum transeuntem bifariam secet: quæ ad terminum diametri sectionem contingit parallela erit rectæ bifariam sectæ.

SIT ellipsis vel circuli circumferentia; cujus diameter AB, & AB ipsam ΓΔ non transeuntem per centrum bifariam secet in E: dico rectam, quæ sectionem contingit ad A, ipsi ΔΓ parallelam esse.

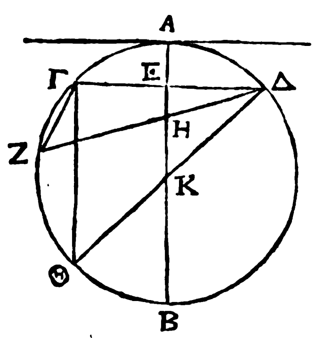
Nam, si fieri potest, sit recta ΔZ sectionem contingenti in puncto A parallela: æqualis igitur est [per 47. 1. huj.] ΔH ipsi ZH. est autem [ex hyp.] & ΔE æqualis EΓ: ergo [per 2. 6.] ΓZ ipsi HE est parallela, quod est absurdum. etenim sive H fuerit centrum sectionis AB; linea ΓZ [per 23. 1. huj.] cum diametro AB occurret: sive non sit, ponatur centrum K, junctaque ΔK producatur ad Θ, & jungatur ΓΘ. quoniam igitur ΔK æqualis est KΘ, & ΔE ipsi EΓ; erit [per 2. 6.] ΓΘ parallela ipsi AB. sed & ΓZ [ex hyp.] eidem est parallela, quod est absurdum: ergo quæ ad A sectionem contingit ipsi ΓΔ est parallela.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ἡ διάμετρος εὐθεῖάν τινα δίχα τέμνῃ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν· ἡ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

ΕΣΤΩ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ ἡ AB τὴν ΓΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ E· λέγω ὅτι ἡ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΔΓ.



Εἰ γὰρ μή, ἔστω τῇ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἡ ΔZ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔH τῇ ZH. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔE τῇ EΓ ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓZ τῇ HE, ὅπερ ἄτοπον· εἴτε γὰρ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς AB τομῆς, ἡ ΓZ συμπεσεῖται τῇ AB· εἴτε μή ἐστιν, ὑποκείσθω τὸ K, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔK ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔK τῇ KΘ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔE τῇ EΓ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΘ τῇ AB. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓZ τῇ αὐτῇ AB παράλληλος, ὅπερ ἄτοπον· ἡ ἄρα κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ.

Prop. VII. *Theor.*

Si coni sectionem vel circuli circumferentiam recta linea contingat, & huic parallela ducatur in sectione, & bifariam dividatur: quæ tactum & punctum bisectionis recta connectit sectionis diameter erit.

SIT coni sectio vel circuli circumferentia ABΓ, quam contingat ZH, & ipsi ZH paral-

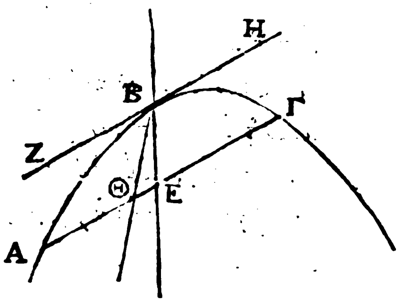
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζʹ.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ τομῇ, καὶ δίχα τμηθῇ· ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

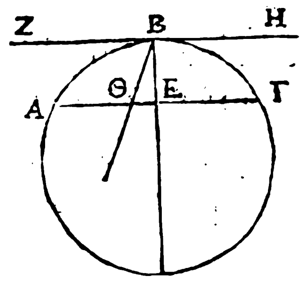
ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ABΓ, ἐφαπτομένη δὲ αὐτῆς ἡ ZH, καὶ τῇ ZH παράλληλος

λληλος ἡ ΑΓ, καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ· λέγω ὅτι ἡ ΒΕ διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

Μὴ γάρ, ἀλλά, εἰ δυνατόν, ἔστω διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΒΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ, ὅπερ ἄτοπον· ἡ γὰρ ΑΕ τῇ ΕΓ ἴση ἐστίν· οὐκ ἄρα ἡ ΒΘ διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΕ.



lela ducatur ΑΓ, bifariamque in Ε dividatur, & jungatur ΒΕ: dico ΒΕ esse sectionis diametrum.



Non enim; sed, si fieri potest, sit diameter ΒΘ: ergo ΑΘ ipsi ΘΓ est æqualis, quod est absurdum; est enim ΑΕ æqualis ipsi ΕΓ: non est igitur ΒΘ diameter sectionis. similiter demonstrabimus nullam aliam præter ipsam ΒΕ diametrum esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν ὑπερβολῇ εὐθεῖα συμπίπτῃ κατὰ δύο σημεῖα· ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις, καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ' αὐτῆς ὑπὸ τῆς τομῆς πρὸς ταῖς ἀσυμπτώτοις ἴσαι ἔσονται.

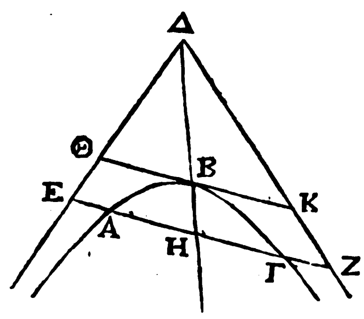
ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΕΔ, ΔΖ, καὶ τῇ ΑΒΓ συμπιπτέτω κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Γ ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ τῆς τομῆς· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΑΓ. ἔστω οὖν ἐφαπτομένη ἡ ΘΒΚ· συμπεσεῖται δὴ ταῖς ΕΔ, ΔΖ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΚΘ, καὶ ἡ ΚΘ συμπίπτει ταῖς ΔΚ, ΔΘ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα συμπεσεῖται ταῖς ΔΕ, ΔΖ. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Ε, Ζ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΘΒ τῇ ΒΚ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ· ὥστε καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΕ.

Prop. VIII. *Theor.*

Si hyperbolæ recta linea occurrat in duobus punctis: producta ab utraque parte asymptotis conveniet; & ex ipsa abscissæ portiones inter sectionem & asymptotos interjectæ æquales erunt.

SIT hyperbola ΑΒΓ, cujus asymptoti ΕΔ, ΔΖ, & ipsi ΑΒΓ occurrat recta quædam ΑΓ in punctis Α, Γ: dico ΑΓ productam ex utraque parte cum asymptotis convenire.



Secetur enim ΑΓ bifariam in Η, & jungatur ΔΗ: hæc igitur [per cor. 51. 1. huj.] diameter est sectionis: quare [per 5. 2. huj.] recta ad Β contingens ipsi ΑΓ est parallela. sit autem contingens ΘΒΚ, quæ [per 3. 2. huj.] conveniet cum ipsis ΕΔ, ΔΖ. quoniam igitur ΑΓ est parallela ipsi ΚΘ, & ΚΘ convenit cum ΔΚ, ΔΘ; etiam ΑΓ cum ΔΕ, ΔΖ conveniet. conveniat autem in punctis Ε, Ζ; ac ob ΘΒ ipsi ΒΚ æqualem, erit [ex 4. 6. & 15. 5.] ΖΗ ipsi ΗΕ, & propterea ΓΖ ipsi ΑΕ æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

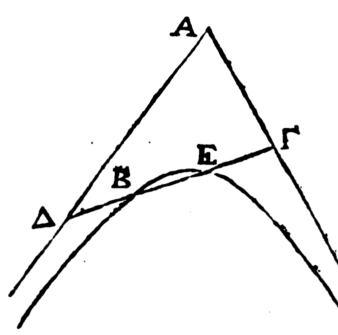
Ἐὰν εὐθεῖα συμπίπτουσα ταῖς ἀσυμπτώτοις δίχα τέμνηται ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς· καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἅπτεται τῆς τομῆς.

ΕΥΘΕΙΑ γὰρ ἡ ΓΔ συμπίπτουσα ταῖς ΓΑ, ΑΔ ἀσυμπτώτοις δίχα τεμνέσθω ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι κατ' ἄλλο σημεῖον οὐχ ἅπτεται τῆς τομῆς.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἁπτέσθω κατὰ τὸ Β· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΒΔ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ ἴση· οὐκ ἄρα καθ' ἕτερον σημεῖον ἅπτεται ἡ ΓΔ τῆς τομῆς.

Prop. IX. *Theor.*

Si recta linea asymptotis occurrens ab hyperbola bifariam secetur; in uno tantum puncto cum sectione conveniet.



RECTA enim ΓΔ occurrens asymptotis ΓΑ, ΑΔ secetur ab hyperbola bifariam in puncto Ε: dico rectam ΓΔ in alio puncto sectioni non occurrere.

Si enim fieri potest, occurrat in Β: ergo [per 8. 2. huj.] ΓΒ æqualis est ipsi ΒΔ, quod est absurdum; posuimus enim ΓΒ ipsi ΒΔ æqualem esse: igitur ΓΔ in alio puncto sectioni non occurrit.

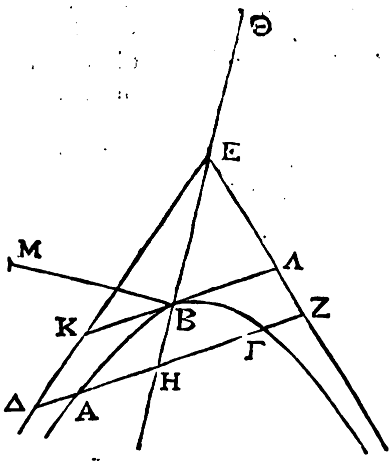
Prop. X. *Theor.*

Si recta quævis linea sectionem secans cum utraque asymptotôn conveniat; rectangulum contentum sub rectis lineis, quæ inter asymptotos & sectionem interjiciuntur, æquale est quartæ parti figuræ factæ ad diametrum illam quæ rectæ ductæ parallelas bifariam dividit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι′.

Ἐὰν εὐθεῖά τις τέμνουσα τὴν τομὴν συμπίπτῃ ἑκατέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς, ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ γινομένου εἴδους πρὸς τῇ διχοτομούσῃ διαμέτρῳ τὰς ἀγομένας παρὰ τὴν ἠγμένην εὐθεῖαν.

SIT hyperbola ABΓ, cujus asymptoti ΔE, EZ, & ducatur quævis recta ΔZ sectionem & asymptotos secans, dividatur autem AΓ bifariam in H, junctaque HE, ponatur ipsi BE æqualis EΘ, & à puncto B ducatur BM ad angulos rectos ipsi ΘEB, deinde fiat ut rectangulum ΘHB ad quadratum ex AH ita ΘB ad BM; diameter igitur est BΘ, [per 7. 2. huj.] & [per 21.1.huj.] BM rectum figuræ, latus: dico rectangulum ΔAZ æquale esse quartæ parti figuræ quæ sub ΘB, BM continetur, & similiter eidem esse æquale rectangulum ΔΓZ.



Ducatur enim KBΛ per B sectionem contingens, quæ [per 5. 2.huj.] parallela erit ipsi ΔZ. jam quoniam demonstratum est [ad 1.2.huj.] ut ΘB ad BM ita esse quadratum ex EB ad quadratum ex BK, hoc est [per 4.& 22. 6.] quadratum ex EH ad quadratum ex HΔ; atque etiam ut ΘB ad BM ita [ex const. & 1. 6.] rectangulum ΘHB ad quadratum ex AH: erit igitur ut totum quadratum ex EH ad totum quadratum ex HΔ, ita ablatum rectangulum ΘHB ad ablatum quadratum ex AH: adeoque [per 5. 2.] reliquum quadratum ex EB ad reliquum rectangulum ΔAZ est ut quadratum ex EH ad quadratum ex HΔ, hoc est ut quadratum ex EB ad quadratum ex BK. æquale igitur est [per 9. 5.] rectangulum ZAΔ quadrato ex BK. similiter demonstrabitur & rectangulum ΔΓZ quadrato ex BΛ æquale. quadratum autem ex KB [per 3.2. huj.] æquale est quadrato ex BΛ: ergo & ZAΔ rectangulum rectangulo ZΓΔ æquale erit.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αὐτῆς αἱ ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἤχθω τις ἡ ΔΖ τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΘ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΘΕΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΜ, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΘΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ΒΜ, διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΘ, ὀρθία δὲ ἡ ΒΜ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΔΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΒΜ, ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΖ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΚΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΜ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ· ὡς δὲ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ· ἔστιν οὖν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΗΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΘΗΒ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΑΗ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΔΑΖ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΑΔ τῷ ἀπὸ ΒΚ. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ τὸ ὑπὸ ΔΓΖ τῷ ἀπὸ ΒΛ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΚΒ τῷ ἀπὸ ΒΛ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΖΑΔ τῷ ὑπὸ ΖΓΔ.

Prop. XI. *Theor.*

Si utramque rectarum continentium angulum qui deinceps est angulo hyperbolam continenti secet recta linea: in uno tantum puncto cum sectione conveniet; & rectangulum contentum sub interjectis inter rectas angulum continentes & sectionem, æquale erit quartæ parti quadrati ex diametro quæ rectæ secanti parallela est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια′.

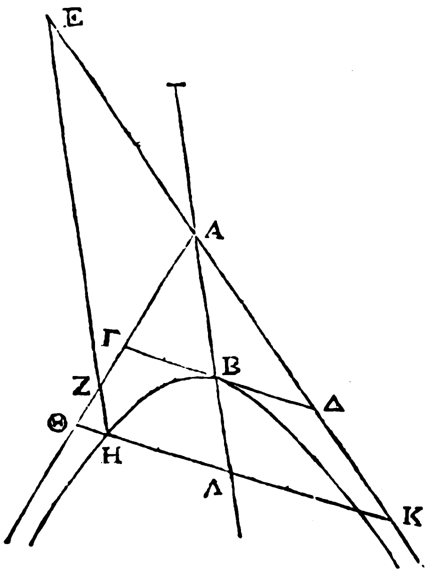
Ἐὰν ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν τέμνῃ τις εὐθεῖα· συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν καὶ τῆς τομῆς, ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἠγμένης διαμέτρου παρὰ τὴν τέμνουσαν εὐθεῖαν.

SIT hyperbola cujus asymptoti ΓA, AΔ; & producta ΔA ad E, per aliquod punctum E

Ἔστω ὑπερβολὴ ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΑ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ διά τινος σημείου

σημείου τοῦ Ε διήχθω ἡ ΕΖ τέμνουσα τὰς ΕΑ, ΑΓ· ὅτι μὲν οὖν συμπίπτει τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον, φανερόν. ἡ γὰρ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΖ παράλληλος ἀγομένη, ὡς ἡ ΑΒ, τεμεῖ τὴν ὑπὸ ΓΑΔ γωνίαν, καὶ συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ διάμετρος αὐτῆς ἔσται· ἡ ΕΖ ἄρα συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Η· λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Η τεταγμένως ἡ ΘΗΛΚ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΗΘ. ἔστω ἡ ΓΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΓΒΔ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον, ἐκ τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΑ καὶ τοῦ τῆς ΔΒ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς ΗΕ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΘΗ πρὸς ΗΖ καὶ τοῦ τῆς ΚΗ πρὸς ΗΕ. ἀλλὰ καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΗΖ λόγος σύγκειται ἐκ τῶν αὐτῶν· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΗΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΚΗΘ τῷ ἀπὸ ΓΒ ἐδείχθη· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΗΖ τῷ ἀπὸ ΑΒ.



ducatur EZ, ipsas EA, AΓ secans: perspicuum est EZ in uno tantum puncto cum sectione convenire. nam quæ per A ipsi EZ parallela ducitur, ut AB, secat angulum ΓAΔ; propterea eaque [per 2. 2. huj.] conveniet cum sectione, & [per corol. 51. 1. huj.] ipsius diameter erit; quare EZ conveniet cum sectione in uno solo puncto. conveniat autem ad H: dico rectangulum EHZ quadrato ex AB æquale esse.

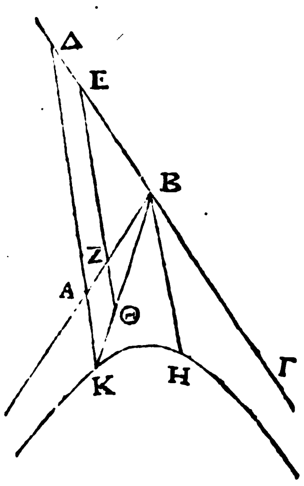
Ducatur enim per H ordinatim ΘHΛK: ergo [per 5. 2. huj.] quæ in puncto B sectionem contingit parallela est ipsi HΘ. sit ea ΓΔ. itaque quoniam ΓB est æqualis ipsi BΔ; quadratum ex ΓB, hoc est rectangulum ΓBΔ, ad quadratum ex BA habet [per 23. 6.] rationem compositam ex ratione ΓB ad BA & ex ratione ΔB ad BA. sed [per 4. 6.] ut ΓB ad BA ita ΘH ad HZ, & ut ΔB ad BA ita KH ad HE: ergo ratio quadrati ex ΓB ad quadratum ex BA composita est ex ratione ΘH ad HZ & ratione KH ad HE. ratio autem rectanguli KHΘ ad rectangulum EHZ [per 23. 6.] ex eisdem rationibus componitur: quare ut rectangulum KHΘ ad rectangulum EHZ ita quadratum ex ΓB ad quadratum ex BA; & permutando ut rectangulum KHΘ ad quadratum ex ΓB ita rectangulum EHZ ad quadratum ex AB. sed [per 10. 2. huj.] rectangulum KHΘ æquatur quadrato ex ΓB: ergo & EHZ rectangulum quadrato ex AB æquale erit.

EUTOCIUS.

Ἐν τισιν ἀντιγράφοις τὸ θεώρημα τοῦτο ἄλλως δείκνυται.

* Ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΓΒΔ, καὶ ἤχθω τις ἡ ΕΖ, ὡς ἔτυχεν, τέμνουσα τὰς ΒΔ, ΒΑ· λέγω ὅτι συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν μὴ συμπιπτέτω, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ τῆς τομῆς. καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ἀπὸ ΒΗ ἴσον παραλληλόγραμμον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ποιείτω τὸ ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΘΒ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται ἄρα τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΒΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΚΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΗ, ὥστε καὶ τῷ ὑπὸ ΕΘΖ· ὅπερ ἄτοπον. ἡ ἄρα ΕΖ συμπεσεῖται τῇ τομῇ, ἐπεί περ συμπίπτει αὐτῇ ἡ ΑΔ. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον· παράλληλος γάρ ἐστι τῇ ΒΗ διαμέτρῳ.



In aliquibus exemplaribus hoc theorema aliter demonstratur.

Sit hyperbola, cujus asymptoti AB, BΓ, producaturque ΓBΔ in directum, & ducatur EZ, utcunque, secans BΔ, BA: dico EZ cum sectione convenire.

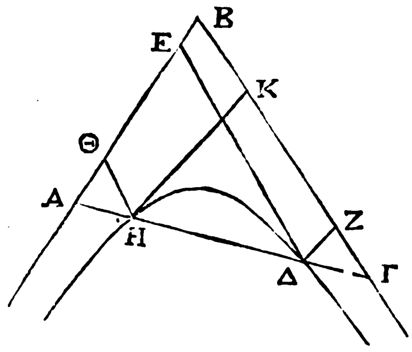
Si enim fieri potest, non conveniat, & per B ipsi EZ parallela ducatur BH: ergo BH est diameter sectionis. applicetur [per 29. 6.] ad EZ parallelogrammum quadrato ex BH æquale excedens figurâ quadratâ; quod sit EΘZ: & juncta ΘB producatur. occurret igitur [per 2. 2. huj.] cum sectione. occurrat in K, & per K ducatur KAΔ parallela ipsi BH: ergo [per 11. 2. huj.] rectangulum ΔKA quadrato ex BH est æquale; ideoque æquale rectangulo EΘZ, quod est absurdum. quare cum AΔ convenit cum sectione, manifestum est & EZ eidem convenire, idque in uno tantum puncto; diametro enim BH est parallela.

* Hæc demonstratio vix satis integra videtur, ac tuto omitti poterat: nam, ex 26ta libri primi, res satis manifesta est.

Prop. XII. *Theor.*

Si ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in sectione, ad asymptotos duæ rectæ lineæ in quibuslibet angulis ducantur, & ab alio quovis puncto in sectione sumpto ducantur aliæ rectæ his ipsis parallelæ: rectangulum sub parallelis contentum æquale erit contento sub rectis ipsis quibus ductæ fuerant parallelæ.

SIT hyperbola, cujus asymptoti A B, B Γ, & sumatur in sectione aliquod punctum Δ, atque ab eo ad A B, B Γ ducantur Δ E, Δ Z; sumatur autem & alterum punctum H in sectione, per quod ducantur H Θ, H K ipsis Δ E, Δ Z parallelæ: dico rectangulum E Δ Z rectangulo Θ H K æquale esse.



Jungatur enim Δ H, & ad A, Γ producatur. itaque quoniam [per 10. 2. huj.] rectangulum A Δ Γ æquatur rectangulo A H Γ; erit [per 16. 6.] ut A H ad A Δ ita Δ Γ ad Γ H. sed [per 4. 6.] ut A H ad A Δ ita H Θ ad E Δ, & ut Δ Γ ad Γ H ita Δ Z ad H K; quare [per 11. 5.] ut Θ H ad Δ E ita Δ Z ad H K: rectangulum igitur E Δ Z [per 16. 6.] rectangulo Θ H K est æquale.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ΄.

Ἐὰν ἐπὶ τὰς ἀσυμπτώτους ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐν τυχούσαις γωνίαις, καὶ ταύταις παράλληλοι ἀχθῶσιν ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς· τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔσται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν πρὸς ἃς αἱ παράλληλοι ἤχθησαν.

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ A B, B Γ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Δ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐπὶ τὰς A B, B Γ κατήχθωσαν αἱ Δ E, Δ Z· εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἕτερον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ H, καὶ διὰ τοῦ H ταῖς E Δ, Δ Z παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ H Θ, H K· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ E Δ Z τῷ ὑπὸ Θ H K.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ Δ H, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ A, Γ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ A Δ Γ τῷ ὑπὸ A H Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A H πρὸς A Δ οὕτως ἡ Δ Γ πρὸς Γ H. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ A H πρὸς A Δ οὕτως ἡ H Θ πρὸς E Δ, ὡς δὲ ἡ Δ Γ πρὸς Γ H οὕτως ἡ Δ Z πρὸς H K· ὡς ἄρα ἡ Θ H πρὸς Δ E οὕτως ἡ Δ Z πρὸς τὴν H K· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ E Δ Z τῷ ὑπὸ Θ H K.

EUTOCIUS.

In aliquibus codicibus invenitur hoc Theorema demonstratum, ope duarum rectarum contingenti parallelarum, quarum altera per Δ, altera vero per H ducitur, demonstratione juxta rationes Syntheticas ostensâ. elegimus autem hunc quem damus probandi modum, utpote eadem simplicius monstrantem. Casus autem habet sex, ductis enim sex rectis, vel punctum Θ erit inter E, B; vel in puncto B, vel extra B; qui tres sunt casus: pariterque tres sunt alii, juxta situm puncti Z.

Εὑρέθη ἔν τισιν ἀντιγράφοις τοῦτο τὸ θεώρημα δεικνύμενον διὰ δύο παραλλήλων ἀγομένων τῇ ἐφαπτομένῃ, μιᾶς μὲν διὰ τοῦ Δ, ἑτέρας δὲ διὰ τοῦ H· καὶ ἡ ἀπόδειξις διὰ συνθετικὸν λόγον. ἐπελεξάμεθα δὲ ταύτην τὴν κατασκευὴν ὡς τὰ αὐτὰ δεικνῦσαν ἁπλουστέρως. ἔχει δὲ καὶ πτώσεις ἕξ· τῶν γὰρ ἓξ εὐθειῶν ἀχθεισῶν, τὸ Θ σημεῖον ἢ μεταξὺ ἔσται τῶν E, B, ἢ ἐπὶ τοῦ B, ἢ ἔξω τοῦ B, ὥστε γίνονται τρεῖς· καὶ ὁμοίως ἐπὶ τοῦ Z ἄλλαι τρεῖς.

Prop. XIII. *Theor.*

Si in loco ab asymptotis & sectione terminato quævis recta linea ducatur alteri asymptotôn parallela: in uno puncto tantum cum sectione conveniet.

SIT hyperbola, cujus asymptoti Γ A, A B, sumaturque aliquod punctum E, & per E ipsi A B parallela ducatur E Z: dico E Z cum sectione convenire.

Si enim fieri potest, non conveniat, & sumatur punctum quodvis in sectione, per quod ipsis Γ A, A B parallelæ ducantur H Θ, H Γ; & rectangulo Γ H Θ æquale sit rectangulum A E Z; junctaque A Z producatur: hæc igitur cum sectione [per 2. 2. huj.] conveniet. conveniat autem in

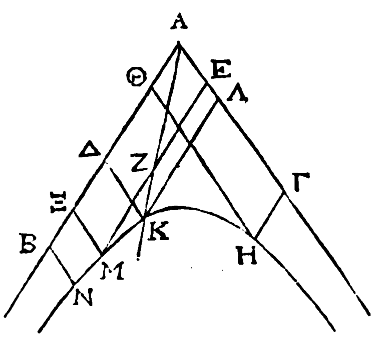
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ΄.

Ἐὰν ἐν τῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς παράλληλος ἀχθῇ τις εὐθεῖα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων· συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον.

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ Γ A, A B, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ E, καὶ δι᾽ αὐτοῦ τῇ A B παράλληλος ἤχθω ἡ E Z· λέγω ὅτι συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ συμπιπτέτω. καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ H, καὶ διὰ τοῦ H παρὰ τὰς Γ A, A B ἤχθωσαν αἱ H Θ, H Γ· καὶ τῷ ὑπὸ Γ H Θ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ A E Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ A Z καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ K, καὶ

Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ παρὰ τὰς ΑΒ, ΑΓ ἤχθωσαν αἱ ΚΛ, ΚΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΗΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΚΔ. ὑπόκειται δὲ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΖ ἴσον· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΚΛ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΛΚ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΖ, ὅπερ ἀδύνατον· μείζων γάρ ἐστι καὶ ἡ ΚΛ τῆς ΕΖ, καὶ ἡ ΛΑ τῆς ΑΕ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΕΖ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Μ· λέγω δὴ κατ' ἄλλο οὐ συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατὸν, συμπιπτέτω καὶ κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τῶν Μ, Ν τῇ ΓΑ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΜΞ, ΝΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΜΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΝΒ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα καθ' ἕτερον σημεῖον συμπεσεῖται τῇ τομῇ.



puncto K, & per K ducantur KΛ, KΔ ipsis AB, AΓ parallelæ: ergo [per 12. 2. huj.] rectangulum ΓΗΘ æquale est rectangulo ΛΚΔ. ponitur autem & rectangulo AEZ æquale: rectangulum igitur ΔΚΛ, hoc est AΛK, rectangulo AEZ æquale erit, quod fieri non potest; si quidem KΛ major est quam EZ; & ΛA major quam AE: quare EZ conveniet cum sectione. conveniat in M: dico eam in alio puncto non convenire. nam si fieri potest, conveniat etiam in N; & per M, N ipsi ΓA parallelæ ducantur MΞ, NB: ergo [per 12. 2. huj.] rectangulum EMΞ rectangulo ENB est æquale, quod est absurdum. igitur in alio puncto cum sectione non conveniet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Αἱ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ τομὴ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόν τε προσάγουσιν ἑαυταῖς, καὶ παντὸς τοῦ δοθέντος διαστήματος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα.

Ε ΣΤΩ ὑπερβολὴ, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΑΓ, δοθὲν δὲ διάστημα τὸ Κ· λέγω ὅτι αἱ ΑΒ, ΑΓ καὶ ἡ τομὴ ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόν τε προσάγουσιν ἑαυταῖς καὶ εἰς ἔλασσον ἀφίξονται διάστημα τοῦ Κ.

Ηχθωσαν γὰρ τῇ ἐφαπτομένῃ τῇ ΟΠ παράλληλοι αἱ ΕΘΖ, ΓΗΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΓΗΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΘΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΗ πρὸς ΖΘ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΓΗ. μείζων δὲ ἡ ΔΗ τῆς ΖΘ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΓΗ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἐλάττονές εἰσιν. εἰλήφθω δὴ τοῦ Κ διαστήματος ἔλαττον τὸ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΑΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΝ· συμπεσεῖται ἄρα τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΝΒ· ἡ ἄρα ΜΝ ἴση ἔσται τῇ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦτο ἐλάττων τῆς Κ.

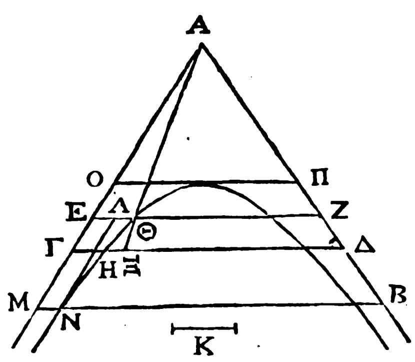
Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι πασῶν τῶν ἀσυμπτώτων τῇ τομῇ ἔγγιόν εἰσιν αἱ ΑΒ, ΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ περιεχομένη γωνία ἐλάσσων ἐστὶ δηλαδὴ γωνίας τῆς ὑπὸ ἑτέρων ἀσυμπτώτων τῇ τομῇ περιεχομένης.

PROP. XIV. *Theor.*

Asymptoti & sectio in infinitum productæ ad seipsas propius accedunt; & ad intervallum perveniunt minus quolibet dato intervallo.

SIT hyperbola, cujus asymptoti AB, AΓ, & datum intervallum sit K: dico asymptotos AB, AΓ & sectionem productas ad sese propius accedere, & pervenire ad intervallum minus intervallo K.



Ducatur enim tangenti OΠ parallelæ EΘZ, ΓΗΔ; jungaturque AΘ, & ad Ξ producatur: quoniam ergo [per 10. 2. huj.] rectangulum ΓΗΔ rectangulo ZΘE est æquale; erit [per 16. 6.] ut ΔH ad ZΘ ita ΘE ad ΓH. sed ΔH major est ipsâ ZΘ: ergo & EΘ ipsa ΓH est major. similiter demonstrabimus eas, quæ deinceps sequuntur, minores esse. itaque sumatur [per 3. 1.] intervallum EΛ minus intervallo K, & per Λ ipsi AΓ parallela ducatur ΛN. ergo [per 13. 2. huj.] ΛN cum sectione conveniet. conveniat in N, perque N ducatur MNB parallela ipsi EZ: quare [per 34. 1.] MN erit æqualis EΛ; & propterea intervallo K minor erit.

Corollarium.

Ex hoc manifestum est rectas AB, AΓ ad sectionem accedere propius quam aliæ quævis asymptoti: & [ex 2. 2. huj.] angulum BAΓ minorem esse quolibet angulo, qui aliis rectis sectioni non occurrentibus continetur.

EUTOCIUS.

Ἐν τισιν ἀντιγράφοις εὑρέθη ἄλλως δεικνύμενον· ὅτι,

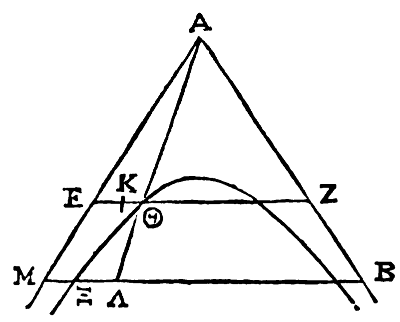
Παντὸς τοῦ δοθέντος διαστήματος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα αἱ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ τομή.

In aliquibus exemplaribus illud aliter demonstratum invenitur: scilicet,

Asymptotos & sectionem pervenire ad intervallum minus quolibet intervallo dato.

Iisdem

Iisdem enim manentibus, sumatur intervallum ΕΚ dato intervallo minus, fiatque ut ΚΕ ad ΕΘ ita ΘΑ ad ΑΛ, & per Λ ipsi ΕΖ parallela ducatur ΜΞΛΒ. quoniam igitur [per 8.5.] ΞΒ ad ΘΖ majorem rationem habet quam ΛΒ ad ΘΖ; ut autem ΞΒ ad ΘΖ ita [per 16.6.] ΘΕ ad ΜΞ, propterea quod rectangulum ΖΘΕ rectangulo ΒΞΜ [per 10.2.huj.] est æquale: habebit ΘΕ ad ΜΞ majorem rationem quam ΛΒ ad ΘΖ. sed ut ΛΒ quidem ad ΘΖ ita [per 4.6.] ΛΑ ad ΑΘ; ut autem ΛΑ ad ΑΘ ita ΘΕ ad ΕΚ: quare ΘΕ ad ΜΞ majorem rationem habet quam ΘΕ ad ΕΚ: minor igitur [per 8.5.] est ΜΞ quam ΚΕ.



Τῶν γὰρ αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω τοῦ δοθέντος διαστήματος ἔλαττον τὸ ΕΚ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΘ οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΖ παράλληλος ἔστω ἡ ΜΞΛΒ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΞΒ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΛΒ πρὸς ΘΖ, ὡς δὲ ἡ ΞΒ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΜΞ, διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ ΖΘΕ τῷ ὑπὸ ΒΞΜ· καὶ ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΜΞ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΘΖ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΛΒ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΛΑ πρὸς ΑΘ, ὡς δὲ ἡ ΛΑ πρὸς ΑΘ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ· καὶ ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΜΞ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ΜΞ τῆς ΚΕ.

Inveniuntur in aliquibus codicibus etiam hæc theoremata, quæ à nobis tanquam supervacanea sublata sunt. quoniam enim demonstratum est asymptotos propius accedere ad sectionem, & ad intervallum pervenire quolibet dato intervallo minus; supervacuum fuit hæc inquirere: neque demonstrationes aliquas habent, sed tantum figurarum differentias. verum ut iis qui in hæc inciderint sententiam nostram approbemus, exponantur hoc loco ea quæ nos ut supervacanea sustulimus

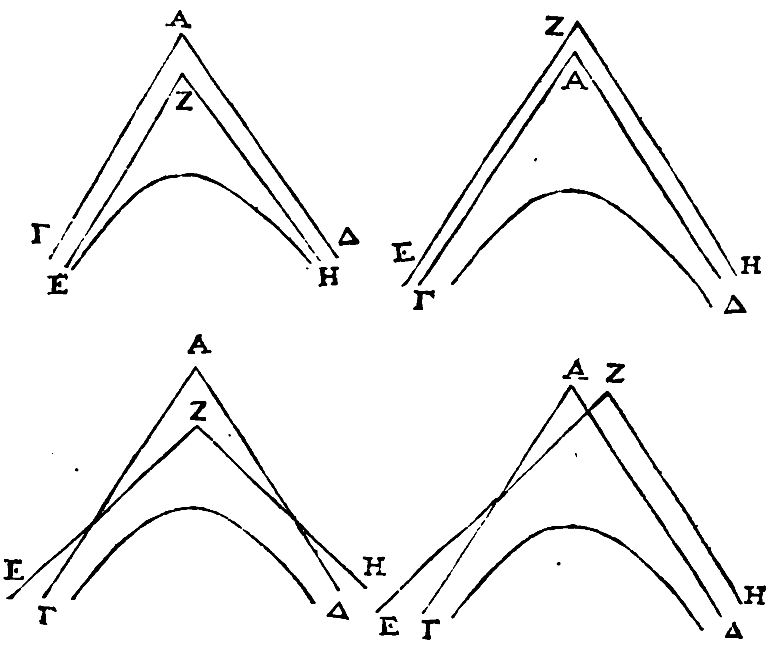
Εὑρέθησαν δὲ ἔν τισι καὶ ταῦτα τὰ θεωρήματα ἐγγεγραμμένα, ἅπερ ὡς περιττὰ ἀφῃρέθη ὑφ' ἡμῶν. δεδειγμένου γὰρ τούτου, ὅτι αἱ ἀσύμπτωτοι ἔγγιον προσάγουσι τῇ τομῇ, καὶ παντὸς τοῦ δοθέντος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται, περιττὸν ἦν ταῦτα ζητεῖν ἀμέλει· οὐδὲ ἀποδείξεις ἔχουσί τινας ἀλλὰ διαφορὰς καταγραφῶν. ἵνα δὲ τοῖς ἐντυγχάνουσι τὴν ἡμετέραν γνώμην δήλην ποιήσωμεν, ἐκκείσθω ἐνταῦθα τὰ ὡς περιττὰ ἀφῃρημένα.

Asymptoti, de quibus dictum est, propius accedunt ad sectionem quam aliæ, si quæ sint, asymptoti.

Εἴ τινές εἰσιν ἀσύμπτωτοι τῇ τομῇ ἕτεραι τῶν προειρημένων, ἔγγιόν εἰσιν αἱ προειρημέναι τῇ τομῇ.

Sit hyperbola, cujus asymptoti ΓΑ, ΑΔ: dico ΓΑ, ΑΔ ad sectionem propius accedere quam aliæ asymptoti, si quæ sint. namque, ut in prima figura, ipsas ΕΖ, ΖΗ asymptotos esse non posse manifeste constat, ob ΕΖ parallelam ipsi ΓΑ, & ΖΗ ipsi ΑΔ; demonstratum siquidem est [per 13.2.huj.] rectas, quæ in loco ab asymptotis & sectione terminato ducuntur alteri asymptoto parallelæ, cum sectione convenire. si vero, ut in secunda figura apparet, ΕΖ, ΖΗ sint asymptoti,

Ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΔ· λέγω ὅτι εἴ τινές εἰσιν ἄλλαι ἀσύμπτωτοι τῇ τομῇ, ἐκείνων ἔγγιόν εἰσιν αἱ ΓΑ, ΑΔ. ὅτι μὲν οὖν, ὡς ἐπὶ τῆς



πρώτης καταγραφῆς, οὐ δύνανται αἱ ΕΖ, ΖΗ ἀσύμπτωτοι εἶναι, φανερόν· ὥστε εἶναι παράλληλον τὴν μὲν ΕΖ τῇ ΓΑ, τὴν δὲ ΖΗ τῇ ΑΔ· δέδεικται γὰρ ὅτι συμπεσοῦνται τῇ τομῇ· ἐν γὰρ τῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς εἰσιν. εἰ δέ, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας πτώσεως, εἰσὶν ἀσύμπτωτοι αἱ ΕΖ, ΖΗ παράλληλοι

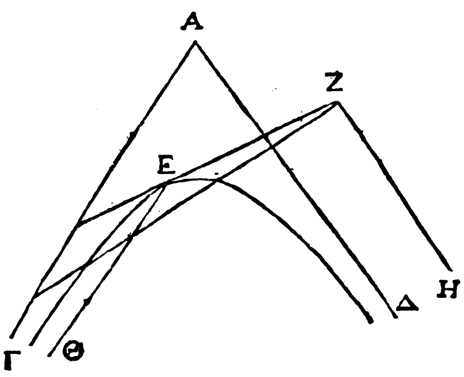
παράλληλοι οὖσαι τῶν ΓΑ, ΑΔ, ἔγγιον μᾶλλόν εἰσιν αἱ ΓΑ, ΑΔ τῇ τομῇ ἤπερ αἱ ΕΖ, ΖΗ. εἰ δὲ ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης πτώσεως, καὶ οὕτως αἱ μὲν ΓΑ, ΑΔ, ἐὰν ἐκβληθῶσιν εἰς ἄπειρον, ἔγγιόν εἰσι τῇ τομῇ, καὶ εἰς ἔλαττον διάστημα παντὸς τοῦ δοθέντος ἀφικνοῦνται· αἱ δὲ ΕΖ, ΖΗ, κατὰ μὲν τὸ Ζ καὶ τὰ ἐγγὺς αὐτῶν, ἐντὸς οὖσαι τῆς γωνίας σύνεγγύς εἰσι τῇ τομῇ, ἐκβληθεῖσαι δὲ ἀφίστανται τῆς τομῆς μᾶλλον· παντὸς ἄρα τοῦ δοθέντος ὃ νυνὶ ἀφεστήκασιν οὐκ ἔστιν ἔλασσον. Ἔστωσαν δὴ πάλιν, ὡς ἐπὶ τῆς τετάρτης καταγραφῆς, ἀσύμπτωτοι αἱ ΕΖ, ΖΗ· φανερὸν δὴ καὶ οὕτως ὅτι ἡ μὲν ΓΑ ἔγγιόν ἐστι τῇ τομῇ ἤπερ ἡ ΕΖ, ἐάν τε ἡ ΕΖ τῇ ΓΑ παράλληλος ᾖ, ἐάν τε συμπίπτῃ τῇ ΓΑ. καὶ ἐὰν μὲν ἡ σύμπτωσις κατώτερον ᾖ τῆς διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένης τῆς τομῆς, τέμνει τὴν τομήν· ἐὰν δὲ ἡ σύμπτωσις ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ ᾖ τῆς τε ἐφαπτομένης καὶ τῆς γωνίας, κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐπάνω, ἡ ΖΕ τῆς τομῆς οὐκ ἀφέξει ἔλασσον διάστημα παντὸς τοῦ δοθέντος· ὥστε ἡ ΓΑ ἔγγιόν ἐστι τῇ τομῇ ἤπερ ἡ ΕΖ· ἡ δὲ ΔΑ ἔγγιον τῇ τομῇ ἤπερ ἡ ΖΗ, διὰ τὰ αὐτὰ τῇ ἐπὶ τῆς β΄. καταγραφῆς.

ipsis ΓΑ, ΑΔ parallelæ; tamen ΓΑ, ΑΔ ad sectionem propius accedunt quam ΕΖ, ΖΗ. quod si, ut in tertia figura, ΓΑ, ΑΔ in infinitum productæ ad sectionem propius accedunt & ad intervallum perveniunt minus quolibet dato intervallo; rectæ ΕΖ, ΖΗ, quanquam in puncto Ζ & intra angulum propinquiores sint sectioni, tamen productæ ab ipsa magis recedunt; intervallum itaque quo nunc distant non est quolibet dato intervallo minus. Rursus sint asymptoti ΕΖ, ΖΗ, ut in quarta figura: constat etiam hoc modo ΓΑ propinquiorem esse sectioni quam ΕΖ, sive ΕΖ parallela sit ΓΑ, sive cum ipsa conveniat. & si quidem concursus sit infra eam quæ per Ζ sectionem contingit, secabit ΕΖ sectionem ipsam: si vero concursus sit in loco intermedio inter contingentem & angulum, ut supra demonstratum est, non perveniet ad intervallum minus intervallo dato: quare ΓΑ propinquior est sectioni quam ΕΖ, & ΔΑ propinquior quam ΖΗ, per ea quæ diximus in secunda figura.

Ὅτι δὲ ἡ κατωτέρω τῆς διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένης συμπίπτουσα τῇ ΓΑ συμπίπτει καὶ τῇ τομῇ, οὕτως δείκνυται.

At vero rectam, quæ convenit cum ΑΓ infra eam quæ per Ζ ducta sectionem contingit, cum sectione ipsa convenire sic demonstrabitur.

Ἐφαπτέσθω ἡ ΕΖ τῆς τομῆς κατὰ τὸ Ε, ἡ δὲ σύμπτωσις αὐτῆς τῇ ΓΑ ἔστω ἀνώτερον τῆς ΖΗ· λέγω ὅτι ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ἤχθω γὰρ διὰ τῆς Ε ἁφῆς παράλληλος τῇ ΓΑ ἀσυμπτώτῳ ἡ ΕΘ· ἡ ΕΘ ἄρα κατὰ μόνον τὸ Ε συμπίπτει τῇ τομῇ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΑ τῇ ΕΘ παράλληλός ἐστι, καὶ τῇ ΑΓ συμπίπτει ἡ ΖΗ· καὶ τῇ ΕΘ ἄρα συμπεσεῖται, ὥστε καὶ τῇ τομῇ.



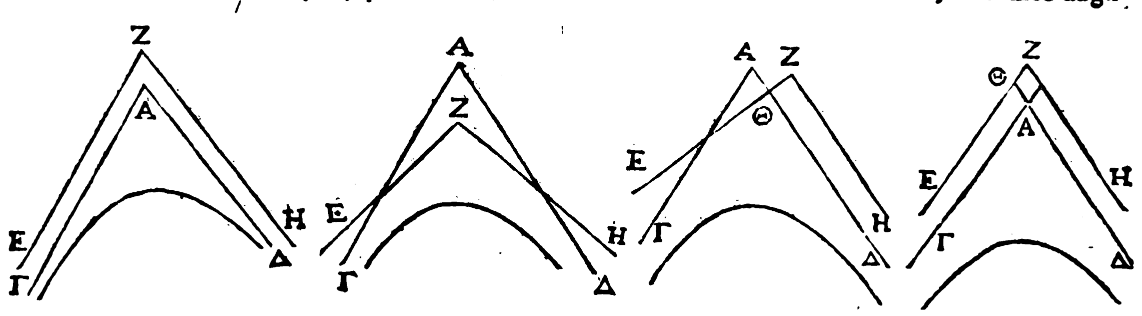
Contingat ΕΖ sectionem in Ε, concurrat vero cum ΓΑ supra ipsam ΖΗ: dico ΖΗ productam convenire cum sectione. ducatur enim per tactum Ε ipsi ΓΑ asymptoto parallela ΕΘ: ergo [per 13. 2. huj.] ΕΘ sectioni in unico puncto Ε occurrit. itaque quoniam ΓΑ ipsi ΕΘ est parallela, & ΖΗ convenit cum ΑΓ; etiam cum ΕΘ conveniat necesse est; quare & cum ipsa sectione.

Εἴ τις ἐστὶν εὐθύγραμμος γωνία περιέχουσα τὴν ὑπερβολὴν ἑτέρα [τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων, ὅτι οὐκ ἔστιν ἐλάσσων αὐτῆς.]

Si sit alius angulus rectilineus qui hyperbolam contineat, diversus ab angulo sub asymptotis contento, non minor erit eo.

Ἔστω ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΔ, ἕτεραι δέ τινες μὴ συμπίπτουσαι τῇ τομῇ ἔστωσαν αἱ ΕΖ,

Sit hyperbola, cujus asymptoti ΓΑ, ΑΔ; aliæ vero non occurrentes ei sint ΕΖ, ΖΗ: dico angu-



ΖΗ· λέγω ὅτι οὐκ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία τῆς πρὸς τῷ Α. ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ΕΖ, ΖΗ τῶν ΓΑ, ΑΔ παράλληλοι· οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ πρὸς

lum ad Ζ non minorem esse angulo ad Α. sint enim primum ΕΖ, ΖΗ ipsis ΓΑ, ΑΔ parallelæ: ergo angulus ad Ζ non est minor eo qui

qui ad A. si vero non sint parallelæ, ut in secunda figura, majorem esse angulum ad Z angulo ΓΑΔ manifestum. In tertia figura, angulus ΖΘΑ [per 16. 1.] eo qui ad A major est; & qui ad Z æqualis est angulo ΖΘΑ. denique in quarta figura, angulus qui ad verticem, major est angulo qui itidem ad verticem constituitur: quapropter angulus ad Z angulo ad A non minor erit.

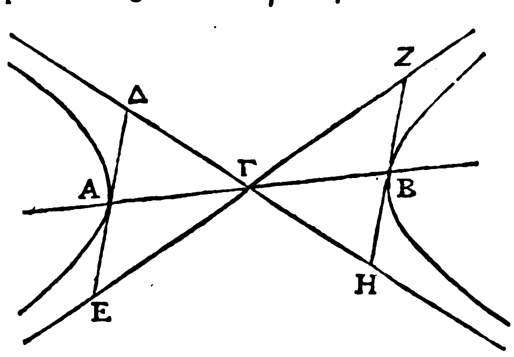
τῷ Ζ τῆς πρὸς τῷ Α. μὴ ἔστωσαν δὴ παράλληλοι, καθὼς ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς· φανερὸν οὖν ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία τῆς ὑπὸ ΓΑΔ. ἐπὶ δὲ τῆς τρίτης, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΘΑ τῆς πρὸς τῷ Α, καὶ ἔστιν ἴση ἡ πρὸς τῷ Ζ τῇ πρὸς τῷ Θ. ἐπὶ δὲ τῆς τετάρτης ἡ κατὰ κορυφὴν τῆς κατὰ κορυφὴν ἐστι μείζων· οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ τῆς πρὸς τῷ Α γωνίας.

Prop. XV. *Theor.*

Oppositarum sectionum asymptoti communes sunt.

Sint oppositæ sectiones, quarum diameter AB & centrum Γ: dico sectionum A, B asymptotos communes esse.

Ducantur per puncta A, B rectæ ΔΑΕ, ΖΒΗ, quæ sectiones contingant: parallelæ igitur sunt ΔΑΕ, ΖΒΗ. abscindantur ΔΑ, ΑΕ; ΖΒ, ΒΗ, ita ut cujusque earum quadratum æquale sit quartæ parti figuræ quæ ad diametrum AB constituitur: ergo [per 14. 1. huj.] ΔΑ, ΑΕ; ΖΒ, ΒΗ inter se sunt æquales. jungantur ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ. perspicuum igitur est [per 14. 1.] ΔΓ, ΓΗ in eadem esse recta; itemque ΕΓ, ΓΖ; propterea quod parallelæ sunt ΔΑΕ, ΖΒΗ. quoniam igitur [ex hyp.] hyperbola est cujus diameter AB, contingens autem ΔΕ; & utraque ipsarum ΔΑ, ΑΕ potest quartam partem figuræ quæ ad AB constituitur; erunt [per 1. 2. huj.] ΔΓ, ΓΕ asymptoti: & eadem ratione ipsius B sectionis asymptoti erunt ΖΓ, ΓΗ. oppositarum igitur sectionum asymptoti communes sunt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Τῶν ἀντικειμένων τομῶν κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαί, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β τομῶν κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

Ἤχθωσαν διὰ τῶν Α, Β σημείων ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΔΑΕ, ΖΒΗ· παράλληλοι ἄρα εἰσίν. ἀπειλήφθω δὴ ἑκάστη τῶν ΔΑ, ΑΕ· ΖΒ, ΒΗ ἴσον δυναμένη τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους· ἴσαι ἄρα αἱ ΔΑ, ΑΕ, ΖΒ, ΒΗ. ἐπεζεύχθωσαν δὲ αἱ ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΗ, καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΕΖ, διὰ τὰς παραλλήλους. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΔΕ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΑ, ΑΕ δύναται τὸ τέταρτον τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΔΓ, ΓΕ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῇ Β ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΖΓ, ΓΗ. τῶν ἀντικειμένων ἄρα κοιναί εἰσιν ἀσύμπτωτοι.

Prop. XVI. *Theor.*

Si in oppositis sectionibus quævis recta linea ducatur secans utramque rectarum continentium angulum qui deinceps est angulo sectiones continenti: cum utraque oppositarum in uno tantum puncto conveniet; & rectæ, quæ ex ipsa abscissæ inter asymptotos & sectiones interjiciuntur, æquales erunt.

Sint oppositæ sectiones A, B, quarum quidem centrum Γ, asymptoti vero ΔΓΗ, ΕΓΖ; & ducatur quævis recta ΘΚ, quæ utramque ΔΓ, ΓΖ secet: dico ΘΚ productam cum utraque sectione in uno tantum puncto convenire.

Quoniam enim sectionis A asymptoti sunt ΔΓ, ΓΕ; & ducta est quædam ΘΚ secans utramque continentium angulum ΔΓΖ, qui deinceps est angulo sectionem continenti: producta

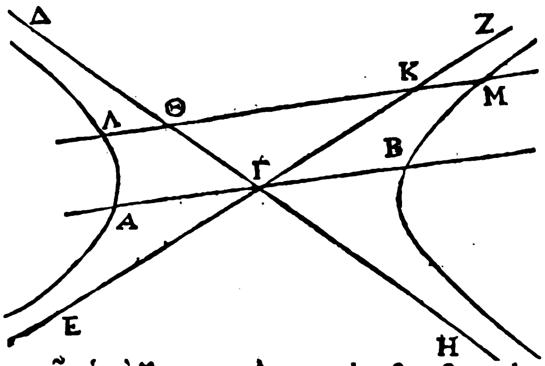
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ἀχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῶν περιεχουσῶν τὰς τομάς· συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν μόνον σημεῖον, καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν τομῶν πρὸς ταῖς ἀσυμπτώτοις ἴσαι ἔσονται.

Ἔστωσαν γὰρ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον μὲν τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι αἱ ΔΓΗ, ΕΓΖ, καὶ ἤχθω τις εὐθεῖα τέμνουσα ἑκατέραν τῶν ΔΓ, ΓΖ ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν καθ' ἓν σημεῖον μόνον.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς Α τομῆς ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΔΓ, ΓΕ, καὶ διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ ΘΚ τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς ὑπὸ ΔΓΖ· ἡ

ΚΘ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ τῇ Α, ὁμοίως δὴ καὶ τῇ Β. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Λ, Μ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ΛΜ παράλληλος ἡ ΑΓΒ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΚΛΘ τῷ ἀπὸ ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΚ τῷ ἀπὸ ΓΒ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΚΛΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΜΚ, καὶ ἡ ΛΘ ἄρα τῇ ΚΜ ἴση.



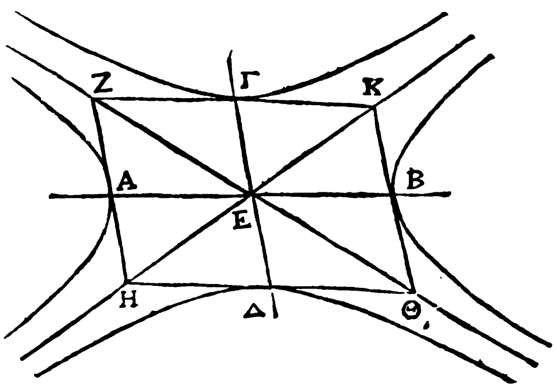
ΚΘ [per 11.2. huj.] cum ſectione A conveniet, & ſimiliter cum ſectione B. conveniat in punctis Λ, M, & per Γ ipſi ΛM parallela ducatur AΓB: æquale igitur eſt [per 11. 2. hujus] rectangulum KΛΘ quadrato ex AΓ; & rectangulum ΘMK quadrato ex ΓB: quare & KΛΘ rectangulum æquale eſt rectangulo ΘMK; & idcirco ΛΘ ipſi KM eſt æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

ΕΣΤΩΣΑΝ συζυγεῖς ἀντικείμεναι, ὧν αἱ διάμετροι συζυγεῖς αἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε· λέγω ὅτι κοιναὶ αὐτῶν εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

Ἤχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων αἱ ΖΑΗ, ΗΔΘ, ΘΒΚ, ΚΓΖ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ. ἐπεζεύχθωσαν οὖν αἱ ΖΕΘ, ΚΕΗ· εὐθεῖαι ἄρα εἰσὶ καὶ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ δίχα τέμνονται πᾶσαι κατὰ τὸ Ε σημεῖον. καὶ ἐπεὶ * τὸ πρὸς τῇ ΑΒ εἶδος ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ, ἴση δέ ἐστιν ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ· ἕκαστον ἄρα τῶν ἀπὸ ΖΑ, ΑΗ, ΚΒ, ΒΘ τέταρτόν ἐστι τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶ τῶν Α, Β τομῶν αἱ ΖΕΘ, ΚΕΗ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τῶν Γ, Δ τομῶν αἱ αὐταί εἰσιν ἀσύμπτωτοι. τῶν ἄρα κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων κοιναί εἰσιν ἀσύμπτωτοι.



Prop. XVII. Theor.

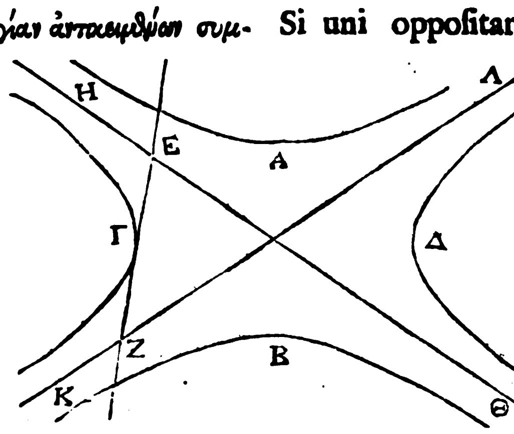
Oppoſitarum ſectionum, quæ conjugatæ appellantur, aſymptoti communes ſunt.

Sint oppoſitæ ſectiones quæ conjugatæ appellantur, quarum diametri conjugatæ AB, ΓΔ, & centrum E: dico earum aſymptotos communes eſſe.

Ducantur enim rectæ ſectiones in punctis A, B, Γ, Δ contingentes, quæ ſint ZAH, HΔΘ, ΘBK, KΓZ: ergo [ex def. prop. 56. 1. huj.] parallelogrammum eſt ZHΘK. jungantur itaque ZEΘ, KEH, & [per 33. 1.] erunt ZEΘ, KEH lineæ rectæ & diametri ipſius parallelogrammi, quæ ad punctum E biſariam ſecabuntur. & quoniam * figura, quæ ad diametrum AB conſtituitur, æqualis eſt quadrato ex ΓΔ, & eſt ΓE æqualis EΔ: unumquodque quadratorum ex ZA, AH; KB, BΘ erit [per 4.2.] quarta pars figuræ quæ conſtituitur ad AB: ergo [per 1. 2. huj.] ZEΘ, KEH ſectionum A, B aſymptoti ſunt. ſimiliter demonſtrabimus ſectionum Γ, Δ eaſdem eſſe aſymptotos. oppoſitarum igitur ſectionum, quas conjugatas dicimus, aſymptoti communes ſunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν μιᾷ τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων συμπίπτουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἐφεξῆς τομῶν καθ' ἓν μόνον σημεῖον.



ΕΣΤΩΣΑΝ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῇ Γ τις εὐθεῖα συμπιπτέτω ἡ ΕΖ, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς· λέγω

Prop. XVIII. Theor.

Si uni oppoſitarum ſectionum conjugatarum conveniat recta linea, quæ producta ad utraſque partes extra ſectionem cadat: cum utraque ſectionum, quæ deinceps ſunt, in uno tantum puncto conveniet.

Sint oppoſitæ ſectiones, quæ conjugatæ dicuntur A, B, Γ, Δ; & ipſi Γ occurrat recta quævis EZ, quæ producta ad utraſque partes extra ſectionem cadat: dico

* Ex def. ſect. conjugat. ad prop. ult. lib. I.

ΚΖ

E Z cum utraque sectione A, B convenire in uno tantum puncto.

Sint enim H Θ, K Λ sectionum asymptoti: ergo E Z [per 3. 2. huj.] secabit utramque H Θ, K Λ. patet igitur [per 16. 2. huj.] quod cum sectionibus A, B in uno tantum puncto conveniet.

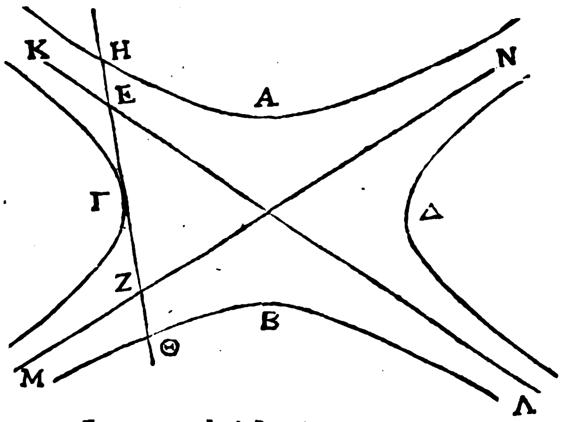
ὅτι συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν A, B τομῶν καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ἔστωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ H Θ, K Λ· ὥστε ἡ E Z συμπίπτει ἑκατέρᾳ τῶν H Θ, K Λ. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ ταῖς A, B τομαῖς συμπεσεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Prop. XIX. *Theor.*

Si in oppositis sectionibus, quæ conjugatæ appellantur, ducatur recta linea, quamvis ipsarum contingens: cum sectionibus, quæ deinceps sunt, conveniet; & ad tactum bifariam secabitur.

Sint oppositæ sectiones, quæ conjugatæ dicuntur, A, B, Γ, Δ; & sectionem Γ contingat recta quævis Γ E Z: dico E Z productam convenire cum sectionibus A, B; & ad punctum Γ bifariam secari.



Nam quod ipsa quidem conveniet cum sectionibus A, B [ex præc.] patet. conveniat in punctis H, Θ: dico Γ H ipsi Γ Θ esse æqualem. ducantur enim sectionum asymptoti K Λ, M N: æquales igitur sunt [per 17. 2. huj.] E H, Z Θ, itemque [per 3. 2. huj.] Γ E, Γ Z: ergo tota Γ H toti Γ Θ æqualis erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα ἐπιψαύουσα ἧς ἔτυχε τῶν τομῶν· συμπεσεῖται ταῖς ἐφεξῆς τομαῖς, καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἁφήν.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ A, B, Γ, Δ, καὶ τῆς Γ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ Γ E Z· λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς A, B τομαῖς, καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Γ.

Ὅτι μὲν οὖν συμπεσεῖται ταῖς A, B τομαῖς, φανερόν. συμπιπτέτω κατὰ τὰ H, Θ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ Γ H τῇ Γ Θ. ἤχθωσαν γὰρ αἱ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ K Λ, M N· ἴση ἄρα ἡ E H τῇ Z Θ, καὶ ἡ Γ E τῇ Γ Z ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ Γ H ὅλῃ τῇ Γ Θ ἐστὶν ἴση.

Prop. XX. *Theor.*

Si unam oppositarum sectionum, quæ conjugatæ appellantur, recta linea contingat, & per ipsarum centrum ducantur duæ rectæ, una quidem per tactum, altera vero contingenti parallela, quousque occurrat uni earum sectionum quæ deinceps sunt: quæ in occursu earum sectionem contingit, parallela erit rectæ per priorem tactum & centrum ductæ; quæ vero per tactus & centrum ducuntur oppositarum sectionum conjugatæ diametri erunt.

Sint oppositæ sectiones, quæ conjugatæ appellantur, quarum diametri conjugatæ sint A B, Γ Δ, ac centrum X; & sectionem A contingat recta E Z, quæ producta conveniat cum Γ Δ in T, & juncta recta E X ad Ξ producatur; & per X ducatur ipsi E Z parallela recta X H quæ producatur ad O, & in H contingat sectionem recta Θ H: dico quod contingens Θ H diametro X E parallela est, quodque rectæ H O, E Ξ conjugatæ diametri sunt.

Applicentur enim ordinatim E K, H Λ, Γ P Π; illæ vero juxta quas possunt applicatæ, sint A M, Γ N. quoniam igitur ut B A ad A M ita est

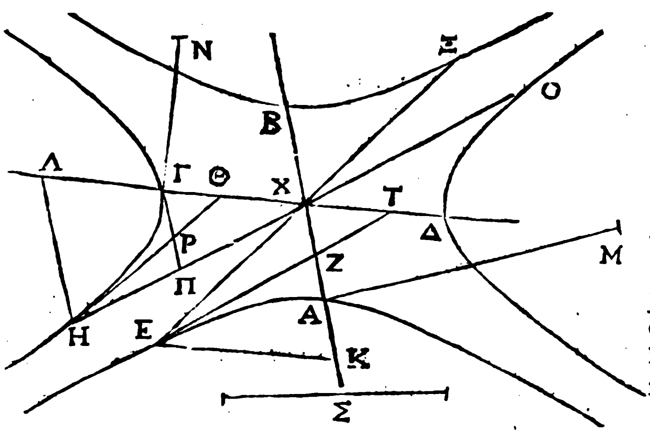
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν διὰ τῆς ἁφῆς, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἕως οὗ συμπέσῃ μιᾷ τῶν ἐφεξῆς τομῶν· ἡ κατὰ τὴν σύμπτωσιν ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ· αἱ δὲ διὰ τῶν ἁφῶν καὶ τοῦ κέντρου συζυγεῖς ἔσονται διάμετροι τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι συζυγεῖς αἱ A B, Γ Δ, κέντρον δὲ τὸ X, καὶ τῆς A τομῆς ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ E Z, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ Γ Δ κατὰ T, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ E X καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ διὰ τοῦ X τῇ E Z παράλληλος ἤχθω ἡ X H καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ O, καὶ διὰ τοῦ H ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ Θ H· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ Θ H τῇ E X, αἱ δὲ H O, E Ξ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.

Ἤχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ E K, H Λ, Γ P Π· παρ' ἃς δὲ δύνανται αἱ καταγόμεναι ἔστωσαν αἱ A M, Γ N. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ B A πρὸς A M οὕτως ἡ

*ΝΓ πρὸς ΓΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΕ, ὡς δὲ ἡ ΝΓ πρὸς ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΕ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ καὶ τοῦ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΗΛ πρὸς ΛΧ καὶ ἡ ΗΛ πρὸς ΛΘ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἐκ τοῦ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ καὶ τοῦ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ λόγῳ ἐκ τοῦ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΧ καὶ τοῦ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΘ, ὧν ὁ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΧ λόγῳ, ἑκάστη γὰρ τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΕ ἑκάστῃ τῶν ΧΛ, ΛΗ, ΗΧ παράλληλός ἐστι· λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΘ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Κ, Λ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΚΧ τρίγωνον τῷ ΗΘΛ, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΧΚ τῇ ὑπὸ ΛΗΘ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΚΧΗ τῇ ὑπὸ ΛΗΧ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΧΗ τῇ ὑπὸ ΘΗΧ ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ τῇ ΗΘ.



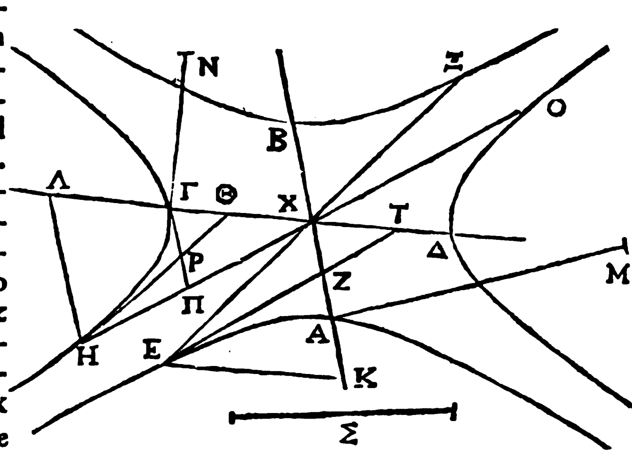
Πεποιήσθω δὴ ὡς ἡ ΠΗ πρὸς τὴν ΗΡ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς Σ· ἡ Σ ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς παρ' ἣν δύνανται ἐπὶ τὴν ΗΟ διάμετρον καταγόμεναι ἐν ταῖς Γ, Δ τομαῖς. καὶ ἐπεὶ τῶν Α, Β τομῶν δευτέρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ, καὶ συμπίπτει αὐτῇ ἡ ΕΤ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΤΧ καὶ τῆς ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ· (ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΚΧ παράλληλον ἀγάγωμέν τινα, τὸ ὑπὸ τῆς ΤΧ καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς παραλλήλου πρὸς τὸ Χ, ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ ΓΧ) διὰ δὴ τοῦτό ἐστιν ὡς ἡ ΤΧ πρὸς ΕΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΤΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΧΓ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΤΧ πρὸς ΕΚ οὕτως ἡ ΤΖ πρὸς ΖΕ, τουτέστι τὸ ΤΧΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖΧ τρίγωνον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΤΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΧΓ οὕτω τὸ ΤΧΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΧΓΠ, τουτέστι πρὸς τὸ ΗΘΧ· ὡς ἄρα τὸ ΤΧΖ πρὸς τὸ ΕΖΧ οὕτως τὸ ΤΧΖ πρὸς τὸ ΗΘΧ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΘΧ τρίγωνον τῷ ΕΧΖ. ἔχει δὲ καὶ τὴν ὑπὸ ΘΗΧ γωνίαν τῇ ΧΕΖ γωνίᾳ ἴσην, παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ μὲν ΕΧ τῇ ΗΘ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΗΧ· ἀντιπεπόνθασιν ἄρα αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΕΧ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΧ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΗΧ τῷ ὑπὸ ΧΕΖ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ

*ΝΓ ad ΓΔ; & [per 37. 1. huj.] ut ΒΑ ad ΑΜ ita rectangulum ΧΚΖ ad quadratum ex ΚΕ, ut vero ΝΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ΗΛ ad rectangulum ΧΛΘ: erit [per 11.5.] ut rectangulum ΧΚΖ ad quadratum ex ΕΚ ita quadratum ex ΗΛ ad rectangulum ΧΛΘ. sed [per 23.6.] rectangulum ΧΚΖ ad quadratum ex ΚΕ rationem compositam habet ex ratione ΧΚ ad ΚΕ & ex ratione ΖΚ ad ΚΕ, quadratum vero ex ΗΛ ad rectangulum ΧΛΘ rationem habet compositam ex ratione ΗΛ ad ΛΧ & ratione ΗΛ ad ΛΘ: ratio igitur composita ex ratione ΧΚ ad ΚΕ & ratione ΖΚ ad ΚΕ eadem est cum illa quæ componitur ex ratione ΗΛ ad ΛΧ & ratione ΗΛ ad ΛΘ; quarum quidem ratio ΖΚ ad ΚΕ eadem est [per 4.6.] quæ ΗΛ ad ΛΧ: ipsæ enim ΕΚ, ΚΖ, ΖΕ parallelæ sunt ipsis ΧΛ, ΛΗ, ΗΧ respective: reliqua igitur ratio ΧΚ ad ΚΕ eadem erit cum reliqua ΗΛ ad ΛΘ; & latera sunt proportionalia circa æquales angulos qui ad Κ, Λ; triangulum igitur ΕΚΧ [per 6.6.] simile erit triangulo ΗΘΛ, & æquales habebit angulos sub quibus homologa latera subtenduntur: ergo æqualis est angulus ΕΧΚ angulo ΛΗΘ. est autem [per 29.1.] & totus ΚΧΗ æqualis toti ΛΗΧ: quare reliquus ΕΧΗ reliquo ΘΗΧ est æqualis; ac propterea [per 28. 1.] ΕΧ ipsi ΗΘ parallela est.

Fiat ut ΠΗ ad ΗΡ ita ΘΗ ad lineam Σ: erit igitur [per 51. 1. huj.] Σ dimidia ejus juxta quam possunt quæ ad diametrum ΗΟ applicantur in sectionibus Γ, Δ. & quoniam sectionum Α, Β secunda diameter est ΓΔ, & cum ea convenit ipsa ΕΤ: rectangulum igitur sub ΤΧ & ΚΕ æquale erit [per 38. 1. huj.] quadrato ex ΓΧ: (si enim à puncto Ε ipsi ΚΧ parallelam duxerimus: rectangulum, quod fit sub ΤΧ & recta quæ inter Χ & parallelam interjicitur, quadrato ex ΓΧ æquale erit) quare [per 17. & 20. 6.] ut ΤΧ ad ΕΚ ita quadratum ex ΤΧ ad quadratum ex ΧΓ. ut autem ΤΧ ad ΕΚ ita [per 4. 6.] ΤΖ ad ΖΕ, hoc est [per 1. 6.] triangulum ΤΧΖ ad triangulum ΕΖΧ; & ut quadratum ΤΧ ad quadratum ΧΓ ita [per 19. & 20. 6.] triangulum ΤΧΖ ad triangulum ΧΓΠ, hoc est [per 43. 1. huj.] ad triangulum ΗΘΧ: ut igitur triangulum ΤΧΖ ad triangulum ΕΖΧ ita ΤΧΖ triangulum ad triangulum ΗΘΧ; & ideo [per 9. 5.] triangulum ΗΘΧ æquale est triangulo ΕΧΖ. habet autem & angulum ΘΗΧ angulo ΧΕΖ [per 29. 1.] æqualem, quia ΕΧ parallela est ipsi ΗΘ, & ΕΖ ipsi ΗΧ; ergo [per 15. 6.] latera circa æquales angulos sunt reciproce proportionalia; est igitur ut ΗΘ ad ΕΧ ita ΕΖ ad ΗΧ: rectangulum igitur ΘΗΧ [per 16. 6.] æquale est rectangulo ΧΕΖ. & quoniam est ut Σ ad ΘΗ ita

* Nam ΝΓ : ΒΑ :: ΒΑ : ΓΔ. & ΒΑ : ΓΔ :: ΓΔ : ΑΜ.

ΡΗ ad ΗΠ, & ut ΡΗ ad ΗΠ ita [per 4.6.] ΧΕ ad ΕΖ; parallelæ enim sunt: quare ut Σ ad ΘΗ ita ΧΕ ad ΕΖ. ut autem Σ ad ΘΗ, sumptâ ΧΗ communi altitudine, ita est [per 1. 6.] rectangulum sub Σ & ΧΗ ad rectangulum ΘΗΧ: & ut ΧΕ ad ΕΖ ita quadratum ex ΧΕ ad rectangulum ΧΕΖ: est igitur ut rectangulum sub Σ & ΧΗ ad rectangulum ΘΗΧ ita ΧΕ quadratum ad rectangulum ΧΕΖ: & permutando ut rectangulum sub Σ & ΗΧ ad quadratum ex ΕΧ ita rectangulum ΘΗΧ ad rectangulum ΧΕΖ. sed [ut modo ostensum] æquale est rectangulum ΘΗΧ rectangulo ΧΕΖ: ergo rectangulum ex Σ & ΗΧ æquale est quadrato ex ΕΧ. & rectangulum ex Σ ad ΗΧ quarta pars est figuræ quæ ad ΗΟ constituitur; nam & ΗΧ [per 30. 1. huj.] est dimidia ipsius ΗΟ, & [ex modo ostensis] Σ dimidia ejus juxta quam possunt; quadratum vero ex ΕΧ quarta pars est quadrati ex ΕΞ, nam [per 30. 1. huj.] ΕΧ æqualis est ΧΞ: ergo quadratum ex ΕΞ æquale est figuræ ad ΗΟ constitutæ. similiter demonstrabimus & quadratum ex ΗΟ figuræ factæ ad ΕΞ esse æquale: ΕΞ, ΗΟ igitur sectionum oppositarum Α, Β, Γ, Δ diametri conjugatæ sunt.



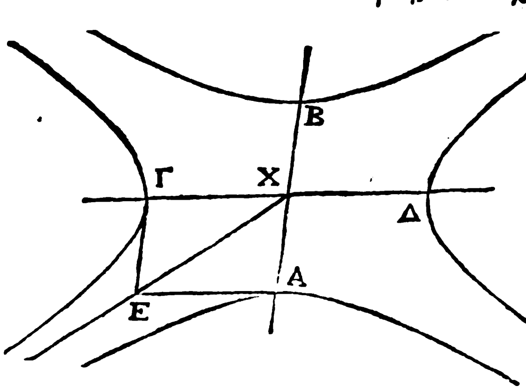
ΡΗ πρὸς ΗΠ καὶ ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ, παράλληλοι γάρ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Σ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Σ πρὸς ΘΗ, τῆς ΧΗ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ Σ, ΧΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗΧ· ὡς δὲ ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Σ, ΧΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗΧ οὕτως τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΖ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ Σ, ΗΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΧ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΗΧ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΖ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΘΗΧ τῷ ὑπὸ ΧΕΖ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ Σ, ΗΧ τῷ ἀπὸ ΕΧ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ Σ, ΗΧ τέταρτον τοῦ παρὰ τὴν ΗΟ εἴδους, ἥτε γὰρ ΗΧ τῆς ΗΟ ἐστὶν ἡμίσεια, καὶ ἡ Σ τῆς παρ' ἣν δύνανται ἡμίσεια· τὸ δὲ ἀπὸ ΕΧ τέταρτον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΞ, ἴση γὰρ ἡ ΕΧ τῇ ΧΞ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΞ ἴσον ἐστὶν τῷ πρὸς τῇ ΗΟ εἴδει. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ΗΟ δύναται τὸ παρὰ τὴν ΕΞ εἶδος· αἱ ἄρα ΕΞ, ΗΟ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι τῶν Α, Β, Γ, Δ ἀντικειμένων.

Prop. XXI. *Theor.*

Iisdem positis, ostendendum est punctum in quo contingentes rectæ conveniunt, ad unam asymptotôn esse.

Sint oppositæ sectiones conjugatæ Α, Β, Γ, Δ, & earum diametri ΑΒ, ΓΔ: ducanturque contingentes ΑΕ, ΕΓ: dico punctum Ε ad asymptoton esse.

Est enim [ex def. sect. conjug.] quadratum ex ΓΧ æquale quartæ parti figuræ quæ ad ΑΒ constituitur; quadrato autem ex ΓΧ æquale est [per 33. 1.] quadratum ex ΑΕ: ergo quadratum ex ΑΕ quartæ parti dictæ figuræ erit æquale. jungatur ΕΧ: asymptotos igitur [per 1.2.huj.] est ΕΧ: punctum igitur Ε ad ipsam asymptoton est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, δεικτέον ὅτι ἡ σύμπτωσις τῶν ἐφαπτομένων πρὸς μίαν τῶν ἀσυμπτώτων ἐστίν.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ τομαί, ὧν αἱ διάμετροι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΓ· λέγω ὅτι τὸ Ε σημεῖον πρὸς τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους, τῷ δὲ ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ· καὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους. ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ· ἀσύμπτωτος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ· τὸ ἄρα Ε σημεῖον πρὸς τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐστίν.

Prop. XXII. *Theor.*

Si in oppositis sectionibus, quæ conjugatæ appellantur, ex centro ad quamvis sectionum ducatur recta linea;

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

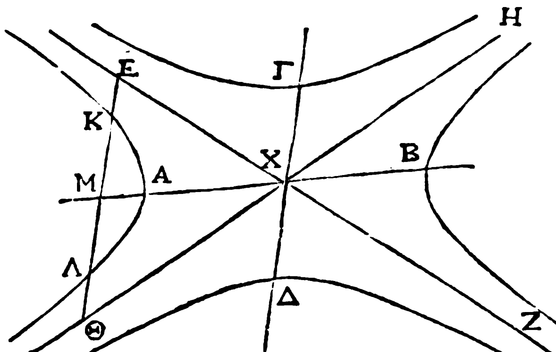
Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἐκ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἀχθῇ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν,

καὶ

καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα μιᾷ τῶν ἐφεξῆς τομῶν καὶ ταῖς ἀσυμπτώτοις· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων, γινομένων μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῶν ἀσυμπτώτων, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τετραγώνῳ.

& huic parallela altera ducatur, quæ cum una ex ſectionibus quæ deinceps ſunt & cum aſymptotis conveniat: rectangulum contentum ſub ductæ ſegmentis, inter ſectionem & aſymptotos interjectis, quadrato rectæ ex centro ductæ æquale erit.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, ἀσύμπτωτοι δὲ τῶν τομῶν ἔστωσαν αἱ ΕΧΖ, ΗΧΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου Χ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΧΓΔ, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω τέμνουσα τήν τε ἐφεξῆς τομὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους ἡ ΘΕ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΕΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ.



Τετμήσθω δίχα ἡ ΚΛ κατὰ τὸ Μ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΧ ἐκβεβλήσθω· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῶν Α, Β τομῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΘ· ἡ ἄρα ΕΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως ἐστὶ κατηγμένη, καὶ κέντρον τὸ Χ· αἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι· τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους. τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ· καὶ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ.

Sint oppoſitæ ſectiones, quæ conjugatæ appellantur, A, B, Γ, Δ, quarum aſymptoti EXZ, HXΘ, & ex centro X ducatur quævis recta XΓΔ, eique parallela EKΛΘ, quæ & ſectionem quæ deinceps eſt & aſymptotos ſecet: dico rectangulum EKΘ quadrato ex ΓX æquale eſſe.

Secetur KΛ bifariam in M & juncta MX producatur: diameter itaq; eſt [per cor. 51.1. huj.] AB ipſarum A, B ſectionum. & quoniam [per 5. 2. huj.] recta, quæ in puncto A ſectionem contingit, parallela eſt ipſi EΘ: erit EΘ ad diametrum AB ordinatim applicata. centrum autem eſt X: ergo [per 20. 2. huj.] AB, ΓΔ conjugatæ ſunt diametri: eſt igitur quadratum ex ΓX æquale quartæ parti figuræ quæ ad AB conſtituitur. ſed [per 10. 2. huj.] quartæ parti figuræ ad AB æquale eſt rectangulum ΘKE: rectangulum igitur ΘKE quadrato ex ΓX æquale erit.

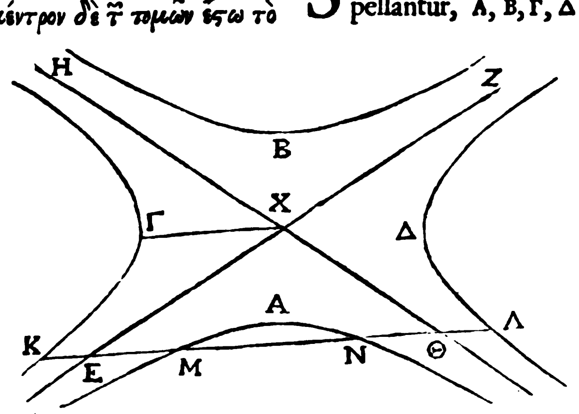
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγʹ.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἐκ τοῦ κέντρου εὐθεῖά τις ἀχθῇ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα ταῖς ἐφεξῆς τρισὶ τομαῖς· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων, τῶν γινομένων μεταξὺ τῶν τριῶν τομῶν, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τετραγώνου.

Prop. XXIII. *Theor.*

Si in oppoſitis ſectionibus, quæ conjugatæ appellantur, ex centro ducatur quævis recta linea ad quamvis ſectionum; & huic parallela ducatur, quæ cum tribus, quæ deinceps ſunt, ſectionibus conveniat: rectangulum contentum ſub ſegmentis ductæ inter tres ſectiones interjectis, duplum erit quadrati ejus quæ ex centro.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, κέντρον δὲ τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἀπὸ Χ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν προσπιπτέτω εὐθεῖα ἡ ΓΧ, καὶ τῇ ΓΧ παράλληλος ἤχθω τέμνουσα τὰς ἐφεξῆς τρεῖς τομὰς ἡ ΚΛ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΜΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΧ.



Ἤχθωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΕΖ, ΗΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ ἑκατέρῳ τῶν ὑπὸ ΘΜΕ, ΘΚΕ. * τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΕ, μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΚΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ, διὰ τὸ

Sint oppoſitæ ſectiones, quæ conjugatæ appellantur, A, B, Γ, Δ, quarum centrum ſit X, & à puncto X ad quamvis ſectionem ducatur recta quævis ΓX, atque huic parallela ſit KΛ, quæ cum tribus deinceps ſectionibus conveniat: dico rectangulum KMΛ quadrati ex ΓX duplum eſſe.

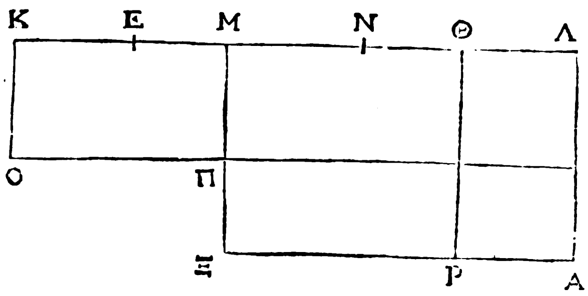
Ducantur aſymptoti ſectionum EZ, HΘ: ergo [per 11. & 22. 2. huj.] quadratum ex ΓX æquale eſt utrilibet rectangulorum ΘME, ΘKE. * rectangulum autem ΘME una cum rectangulo ΘKE æquale eſt rectangulo ΛMK; propter

pter extremas [per 8. & 16.2.] æquales: rectangulum igitur Λ M K quadrati ex Γ X duplum erit.

τὰς ἄκρας ἴσας εἶναι· ϗ τὸ ὑπὸ Λ Μ Κ ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ Γ Χ.

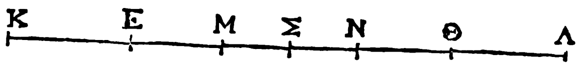
EUTOCIUS.

* Rectangulum autem Θ M Ξ una cum rectangulo Θ K Ξ æquale est rectangulo Λ M K, propter extremas æquales.] Sit recta Λ K, & sit Λ Θ æqualis Ξ K, & Θ N ipsi Ξ M; & ducantur à punctis M, K perpendiculares M Ξ, K O, ita ut M Ξ sit æqualis M K, & K O æqualis K Ξ, & compleantur parallelogramma Ξ Θ, Θ Λ. quoniam igitur M Ξ æqualis est M K, hoc est Π O; estque Λ Θ æqualis Ξ K, hoc est K O: erit Θ Λ parallelogrammum ipsi M O æquale. commune apponatur Ξ Θ: totum igitur Λ Ξ æquale est ipsis Ξ Θ & M O; hoc est Θ O & Π P. & quidem Λ Ξ est rectangulum Λ M K, & Θ O est rectangulum Θ K Ξ, & Π P rectangulum Θ M Ξ.



Sed licet & aliter idem demonstrare. *

Secetur M N bifariam in Σ: constat igitur & Λ K in Σ bifariam secari, & rectangulum Θ K Ξ



æquale esse rectangulo Λ Ξ K, quia Θ K est æqualis Λ Ξ. & quoniam Λ K secatur in partes quidem æquales in Σ, & in partes inæquales in Ξ; erit quidem [per 5.2.] rectangulum Λ Ξ K una cum quadrato ex Σ Ξ æquale quadrato ex K Σ. quadratum autem ex Σ Ξ rectangulo Θ M Ξ una cum quadrato ex Σ M est æquale: ergo quadratum ex Σ K æquale est rectangulo Λ Ξ K, hoc est Θ K Ξ, & rectangulo Θ M Ξ una cum quadrato ex Σ M. eadem ratione erit quadratum ex Σ K æquale rectangulo Λ M K & quadrato ex Σ M: adeoque rectangulum Θ K Ξ una cum rectangulo Θ M Ξ & quadrato ex Σ M æquale est rectangulo Λ M K & quadrato ex Σ M. commune auferatur quadratum ex Σ M: reliquum igitur rectangulum Θ K Ξ una cum rectangulo Θ M Ξ est æquale rectangulo Λ M K.

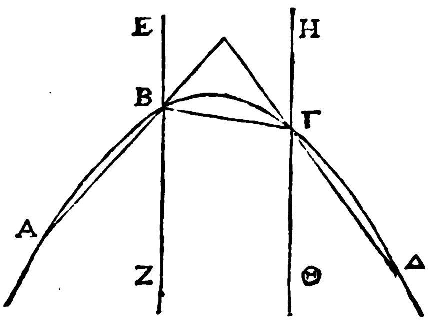
* Τὸ δὲ ὑπὸ Θ Μ Ξ μετὰ τοῦ ὑπὸ Θ Κ Ξ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Λ Μ Κ, διὰ τὸ τὰς ἄκρας ἴσας εἶναι.] Ἔστω εὐθεῖα ἡ Λ Κ, καὶ ἔστω ἡ Λ Θ ἴση τῇ Ξ Κ, ἡ δὲ Θ Ν ἴση τῇ Ξ Μ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Μ, Κ πρὸς ὀρθὰς αἱ Μ Ξ, Κ Ο, καὶ κείσθω τῇ Μ Κ ἴση ἡ Μ Ξ, τῇ δὲ Κ Ξ ἡ Κ Ο, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ Ξ Θ, Θ Λ παραλληλόγραμμα. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ Μ Κ τῇ Μ Ξ, τουτέστι τῇ Π Ο· ἔστι δὲ καὶ ἡ Λ Θ τῇ Ξ Κ, τουτέστι τῇ Κ Ο· ἴσον ἄρα τὸ Θ Λ τῷ Μ Ο. κοινὸν ἐκκείσθω τὸ Ξ Θ· ὅλον ἄρα τὸ Λ Ξ ἴσον ἐστὶ τοῖς Ξ Θ, Μ Ο, τουτέστι τοῖς Θ Ο, Π Ρ. καὶ ἔστι τὸ μὲν Λ Ξ τὸ ὑπὸ τῶν Λ Μ Κ, τὸ δὲ Θ Ο τὸ ὑπὸ Θ Κ Ξ, καὶ τὸ Π Ρ τὸ ὑπὸ Θ Μ Ξ ἐστί. Ἔστι δὲ καὶ ἄλλως δεῖξαι τὸ αὐτό. *

Τετμήσθω ἡ Μ Ν δίχα κατὰ τὸ Σ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ Λ Κ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Σ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ Θ Κ Ξ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Λ Ξ Κ, ἴση γὰρ ἡ Θ Κ τῇ Λ Ξ. καὶ ἐπεὶ ἡ Λ Κ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Σ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ξ, τὸ ὑπὸ Λ Ξ Κ μετὰ τοῦ ἀπὸ Σ Ξ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Κ Σ. τὸ δὲ ἀπὸ Σ Ξ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Θ Μ Ξ καὶ τῷ ἀπὸ Σ Μ· ὥστε τὸ ἀπὸ Σ Κ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ Λ Ξ Κ, τουτέστι τῷ ὑπὸ Θ Κ Ξ, καὶ τῷ ὑπὸ Θ Μ Ξ καὶ τῷ ἀπὸ Σ Μ. διὰ ταῦτα δὴ τὸ ἀπὸ Σ Κ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Λ Μ Κ καὶ τῷ ἀπὸ Σ Μ· ὥστε τὸ ὑπὸ Θ Κ Ξ μετὰ τοῦ ὑπὸ Θ Μ Ξ καὶ τοῦ ἀπὸ Σ Μ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Λ Μ Κ καὶ τῷ ἀπὸ Σ Μ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ Σ Μ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ Θ Κ Ξ μετὰ τοῦ ὑπὸ Θ Μ Ξ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Λ Μ Κ.

PROP. XXIV. *Theor.*

Si parabolæ duæ rectæ lineæ occurrant, utraque in duobus punctis, & nullius ipsarum occursus occursibus alterius contineatur: convenient inter sese extra sectionem.

SIT parabola Α Β Γ Δ, cui duæ rectæ Α Β, Γ Δ occurrant, ita ut nullius ipsarum occursus alterius occursibus contineatur: dico eas productas inter se convenire.



Ducantur per Β, Γ diametri sectionis Ε Β Ζ, Η Γ Θ: parallelæ igitur sunt [per cor. 46. 1. huj.] & [per 26. 1. huj.] utraque sectionem in uno tantum puncto secat. jungatur Β Γ: anguli igitur Ε Β Γ, Η Γ Β [per 29.1.] duobus rectis sunt æquales. verum Β Α, Δ Γ productæ angulos duobus rectis minores efficiunt: ergo inter sese extra sectionem convenient.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν παραβολῇ δύο εὐθεῖαι συμπίπτωσιν, ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας συμπτώσεων περιέχηται· συμπεσοῦνται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι ἐκτὸς τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ παραβολὴ ἡ Α Β Γ Δ, καὶ τῇ τομῇ δύο εὐθεῖαι συμπιπτέτωσαν αἱ Α Β, Γ Δ, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας συμπτώσεων περιεχέσθω· λέγω ὅτι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις.

Ἤχθωσαν διὰ τῶν Β, Γ διάμετροι τῆς τομῆς αἱ Ε Β Ζ, Η Γ Θ· παράλληλοι ἄρα εἰσί, καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἑκατέρα τὴν τομὴν τέμνει. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ Β Γ· αἱ ἄρα ὑπὸ Ε Β Γ, Η Γ Β γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ δὲ Β Α, Δ Γ ἐκβαλλόμεναι ἐλάττονας ποιοῦσι δύο ὀρθῶν· συμπεσοῦνται ἄρα ἀλλήλαις ἐκτὸς τῆς τομῆς.

* Est Lemma *Pappi* quartum.

EUTOCIUS.

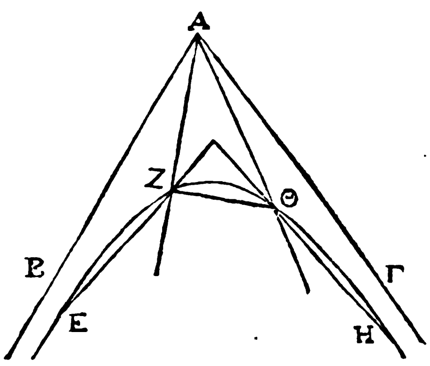
Δεῖ σημειώσασθαι ὅτι συμπτώσεις καλεῖ τὰ σημεῖα καθ' ἃ συμβάλλουσι τῇ τομῇ αἱ Α Β, Γ Δ εὐθεῖαι. καὶ δεῖ, φησὶ, παρατηρεῖν ὅτι ἐκτὸς εἶεν ἀλλήλων τὰ σημεῖα, ἀλλὰ μὴ ὡς τὰ Α Γ, Β Δ. δεῖ δὲ εἰδέναι ὅτι καὶ ἐπ' ἐφαπτομένων τὰ αὐτὰ συμβαίνει.

Animadvertendum est illum *occursus* appellare puncta in quibus Α Β, Γ Δ sectioni occurrunt. &, *inquit*, observari oportere ut puncta extra sese ponantur, non ad modum ipsarum Α Γ, Β Δ. & sciendum est eadem etiam evenire in contingentibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν ὑπερβολῇ δύο εὐθεῖαι συμπίπτωσιν, ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῆς ἑτέρας συμπτώσεως περιέχηται· συμπεσοῦνται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι, ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

Ἔστω ὑπερβολὴ, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ Α Β, Α Γ, καὶ τεμνέτωσαν δύο εὐθεῖαι τὴν τομὴν αἱ Ε Ζ, Η Θ, καὶ μηδετέρας αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας περιεχέσθω· λέγω ὅτι αἱ Ε Ζ, Η Θ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς ὑπὸ Γ Α Β γωνίας.



Ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ Α Ζ, Α Θ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ζ Θ. καὶ ἐπεὶ αἱ Ε Ζ, Η Θ ἐκβαλλόμεναι τέμνουσι τὰς Α Ζ Θ, Α Θ Ζ γωνίας, εἰσὶ δὲ αἱ εἰρημέναι γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες· αἱ Ε Ζ, Η Θ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς ὑπὸ Β Α Γ γωνίας. ὁμοίως δὴ δείξομεν κἂν ἐφαπτόμεναι ὦσι τῆς τομῆς αἱ Ε Ζ, Η Θ.

Prop. XXV. *Theor.*

Si hyperbolæ occurrant duæ rectæ lineæ, utraque in duobus punctis; nullius autem ipsarum occursus alterius occursibus contineatur: convenient inter sese, extra sectionem quidem, sed tamen intra angulum qui hyperbolam continet.

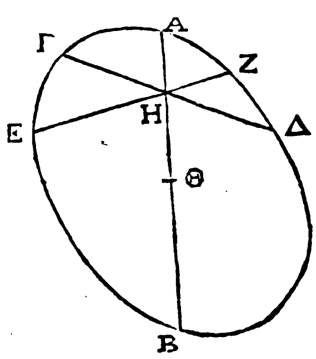
Sit hyperbola, cujus asymptoti Α Β, Α Γ, & duæ rectæ ut Ε Ζ, Η Θ sectioni occurrant, ita ut nullius ipsarum occursus occursibus alterius contineatur: dico Ε Ζ, Η Θ productas extra sectionem quidem, sed tamen intra angulum Γ Α Β inter se convenire.

Junctæ enim Α Ζ, Α Θ producantur, & jungatur Ζ Θ. Et quoniam Ε Ζ, Η Θ productæ secant angulos Α Ζ Θ, Α Θ Ζ, & [per 17. 1.] sunt dicti anguli duobus rectis minores; rectæ Ε Ζ, Η Θ convenient inter se extra sectionem quidem, sed tamen intra angulum Β Α Γ. similiter demonstrabimus, si Ε Ζ, Η Θ fuerint contingentes.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐν ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ, δύο εὐθεῖαι, αἱ Γ Δ, Ε Ζ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Η Θ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Α, Β.

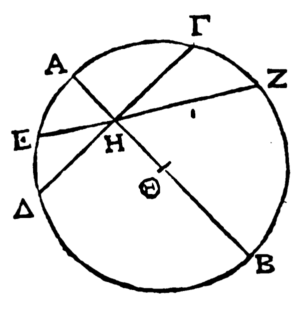


Ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ Α Β, τὴν Ε Ζ δίχα τέμνουσα· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ Ε Ζ. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τῇ Γ Δ. ὥστε καὶ ἡ Ε Ζ παράλληλός ἐστι τῇ Γ Δ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ Γ Δ, Ε Ζ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Prop. XXVI. *Theor.*

Si in ellipsi vel circuli circumferentia duæ rectæ lineæ non transeuntes per centrum se invicem secent; bifariam sese non secabunt.

Si enim fieri potest, in ellipsi vel circuli circumferentia, duæ rectæ Γ Δ, Ε Ζ non transeuntes per centrum sese bifariam secent in Η; sitque Θ centrum sectionis, & juncta Η Θ ad Α, Β puncta producatur.

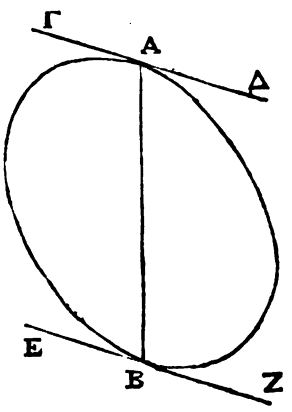


Quoniam igitur Α Β diameter est, ipsam Ε Ζ bifariam secans; quæ ad Α sectionem contingit [per 6. 2.huj.] parallela erit ipsi Ε Ζ. similiter demonstrabimus eandem etiam ipsi Γ Δ esse parallelam: ergo [per 30. 1.] Ε Ζ est parallela ipsi Γ Δ, quod est absurdum. non igitur Ε Ζ, Γ Δ sese bifariam secant.

Prop. XXVII. *Theor.*

Si ellipsim vel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingant: si quidem ea quæ tactus conjungit per centrum sectionis transeat, contingentes rectæ sibi ipsis erunt parallelæ; sin minus, convenient inter sese ad easdem centri partes.

SIT ellipsis, vel circuli circumferentia AB, quam contingant duæ rectæ ΓΑΔ, ΕΒΖ, jungaturque AB, & primo transeat per centrum: dico ΓΔ ipsi ΕΖ parallelam esse.



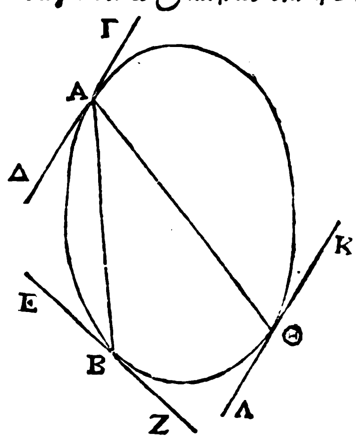
Quoniam enim AB est diameter sectionis, & ΓΔ ipsam in A contingit; erit [per 17.1.huj.] ΓΔ parallela rectis quæ ad diametrum AB ordinatim applicantur. simili ratione ΕΖ erit eisdem parallela: ergo [per 30.1.] ΓΔ parallela est ipsi ΕΖ.

Sed AB per centrum non transeat, ut fit in secunda figura, & ducatur ΑΘ diameter, & per Θ contingens ΚΘΛ: parallela est igitur [per cas. 1.] ΚΛ ipsi ΓΔ: ergo ΕΖ producta ad easdem partes centri, in quibus est AB, cum ΓΔ conveniet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύωσιν· ἐὰν μὲν ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ᾖ, παράλληλοι ἔσονται αἱ ἐφαπτόμεναι· ἐὰν δὲ μή, συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κέντρου.

ΕΣΤΩ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτῆς αἱ ΓΑΔ, ΕΒΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ.



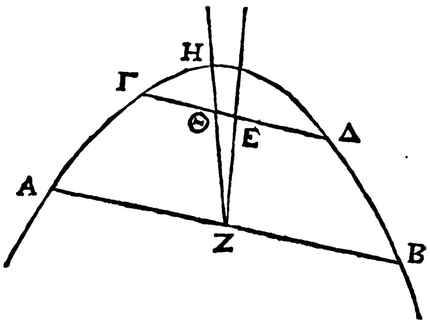
Ἐπεὶ γὰρ διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς τομῆς, καὶ ἐφάπτεται αὐτῆς κατὰ τὸ Α ἡ ΓΔ· ἡ ΓΔ ἄρα παράλληλός ἐστι ταῖς ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως κατηγμέναις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ παράλληλός ἐστι ταῖς αὐταῖς· καὶ ἡ ΓΔ ἄρα τῇ ΕΖ παράλληλός ἐστι.

Μὴ ἐρχέσθω δὲ ἡ ΑΒ διὰ τοῦ κέντρου, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἤχθω διάμετρος ἡ ΑΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη ἡ ΚΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΕΖ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΓΔ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῷ κέντρῳ, ἐν οἷς ἐστιν ἡ ΑΒ.

Prop. XXVIII. *Theor.*

Si in coni sectione vel circuli circumferentia, duas rectas parallelas recta linea bifariam secet: erit illa diameter sectionis.

IN sectione enim coni duæ rectæ parallelæ AB, ΓΔ in punctis Ε, Ζ bifariam secentur, & juncta ΕΖ producatur: dico illam esse sectionis diametrum.



Si enim non est, sit ΗΘΖ diameter, si fieri possit: ergo [per 5. vel 6. 2.huj.] quæ in Η contingit sectionem parallela est ipsi AB: quare [per 30. 1.] & ipsi ΓΔ. est autem ΗΘ diameter: ergo [per defin. 10.] ΓΘ, ΘΔ æquales sunt, quod est absurdum; posuimus enim ΓΕ æqualem ΕΔ. non igitur ΗΘ diameter est sectionis. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam esse diametrum præter ipsam ΕΖ: ergo ΕΖ sectionis diameter erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖά τις δίχα τέμνῃ· διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

ΕΝ γὰρ κώνου τομῇ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Ε, Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΖ ἐκβεβλήσθω· λέγω ὅτι διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

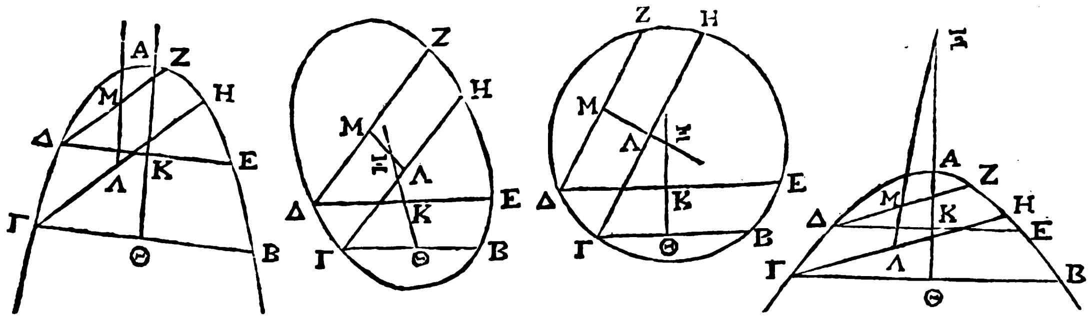
Εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΗΘΖ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΑΒ· ὥστε ἡ αὐτὴ παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ. καὶ ἔστι διάμετρος ἡ ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΓΘ τῇ ΘΔ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ ἴση. οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΗΘ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΖ· ἡ ΕΖ ἄρα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

EU-

EUTOCIUS.

Ἄξιον ἐπισκέψασθαι τὴν δοθεῖσαν ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλην γραμμὴν, πότερον κύκλου ἐστὶ περιφέρεια, ἢ τις ἑτέρα τῶν τριῶν τῶν κώνου τομῶν, ἢ παρὰ ταύτας. ἔστω δὴ ἡ Α Β Γ, καὶ προκείσθω τὸ εἶδος αὐτῆς ἐπισκέψασθαι τὸν εἰρημένον τρόπον. Εἰλήφθω τινὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὰ Γ, Δ, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Γ, Δ σημείων παράλληλοι ἀλλήλαις εὐθεῖαί τινες αἱ Γ Β, Δ Ε, ἐντὸς ἀπολαμβανόμεναι τῆς γραμμῆς· καὶ πάλιν ἀπὸ τῶν Γ, Δ ἕτεραι παράλληλοι αἱ Γ Η, Δ Ζ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα αἱ μὲν Γ Β, Δ Ε κατὰ τὰ Θ, Κ, αἱ δὲ Γ Η, Δ Ζ κατὰ τὰ Λ, Μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Θ Κ, Λ Μ. εἰ μὲν οὖν πᾶσαι αἱ τῇ Β Γ παράλληλοι ὑπὸ τῆς Θ Κ διχοτομοῦνται, πᾶσαι δὲ αἱ τῇ Γ Η ὑπὸ τῆς

Non inutile erit, datâ in plano curvâ lineâ, investigare utrum circuli circumferentia sit, vel una è coni sectionibus, necne. sit ea A B Γ, & oporteat speciem ejus investigare. Sumantur in proposita linea puncta quævis Γ, Δ, per quæ ducantur intra lineam rectæ parallelæ Γ B, Δ E: & rursus ab iisdem punctis aliæ parallelæ ducantur Γ H, Δ Z, bifariamque secentur Γ B, Δ E quidem in Θ, K punctis, Γ H, Δ Z vero in Λ, M; & jungantur Θ K, Λ M. si igitur omnes rectæ quæ ipsi Γ B parallelæ sunt, à Θ K bifariam dividantur; & quæ parallelæ sunt ipsi Γ H à recta M Λ; erit A B Γ una è coni sectionibus, cujus diametri Θ K, M Λ; sin minus, non erit. Rursus quænam sit ex quatuor se-



Μ Λ, μία ἐστὶ τῶν τῶν κώνου τομῶν ἡ Α Β Γ, διαμέτρους ἔχουσα τὰς Θ Κ, Μ Λ· εἰ γὰρ μὴ, οὔ. Πάλιν ἥτις τῶν τεσσάρων ἐστὶν εὑρίσκομεν ἐκβάλλοντες εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη τὰς Θ Κ, Λ Μ. ἤτοι γὰρ παράλληλοί εἰσιν, καὶ ἔστι παραβολή· ἢ ἐπὶ τὰ Θ, Λ μέρη συμπίπτουσι, καὶ ἔστιν ἔλλειψις ἢ κύκλος· ἢ ἐπὶ τὰ ἕτερα, καὶ ἔστιν ὑπερβολή. τὴν δὲ ἔλλειψιν τοῦ κύκλου διακρινοῦμεν ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῆς συμπτώσεως τῶν ΚΘ, ΜΛ, ὅπερ κέντρον γίνεται. εἰ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὴν γραμμὴν προσπίπτουσαι, δηλονότι κύκλου ἐστὶ περιφέρεια ἡ Α Β Γ· εἰ δὲ μὴ, ἔλλειψις.

Ἔστι δὲ αὐτὰς διακρῖναι καὶ ἄλλως, ἀπὸ τῶν τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον καταγομένων, οἷον τῶν Γ Θ, Δ Κ. εἰ μὲν γὰρ εἴη ὡς τὸ ἀπὸ Γ Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Κ οὕτως ἡ Θ Α πρὸς Α Κ, παραβολή ἐστιν· εἰ δὲ τὸ ἀπὸ Θ Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Κ μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ Θ Α πρὸς Α Κ, ὑπερβολή· εἰ δὲ ἐλάσσονα, ἔλλειψις.

Καὶ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων δυνατόν ἐστιν αὐτὰς διακρῖναι ἀναμνησθέντας τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων αὐταῖς ὑπάρχειν.

ctionibus comperiemus, rectas Θ K, Λ M in infinitum producentes ex utraque parte. vel enim parallelæ sunt, & est [per 46. 1. huj.] parabola; vel ad partes quidem Θ, Λ inter se conveniunt, & [per 47. 1. huj.] est ellipsis, aut circulus; vel ad alteras partes, & est hyperbola. ellipsim vero à circulo distinguemus ex puncto Ξ, quo concurrunt rectæ K Θ, M Λ, quod est centrum. si enim rectæ ab eo ad curvam ductæ sint æquales, constat A B Γ circuli circumferentiam esse; sin minus, ellipsim.

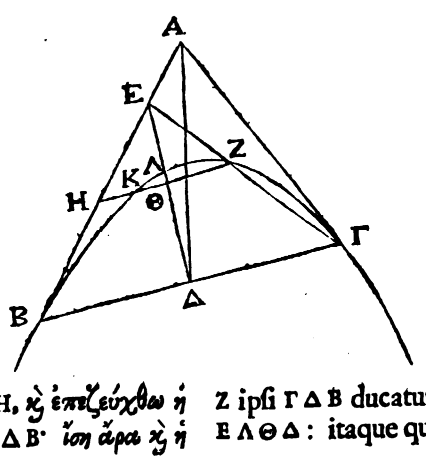
Possumus & aliter ipsas cognoscere ex iis quæ ad diametrum ordinatim applicantur, videlicet Γ Θ, Δ K. nam si fuerit ut quadratum ex Γ Θ ad quadratum ex Δ K ita Θ A ad A K, parabola erit; at si quadratum ex Γ Θ ad quadratum ex Δ K majorem quidem habuerit rationem quam Θ A ad A K, hyperbola; si vero minorem, ellipsis.

Et etiam ex rectis contingentibus easdem discernere licebit, si ea, quæ superius dicta sunt, ipsis competere meminerimus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ΄.

Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν· ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

Ἔστω κώνου τομὴ, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι ἤχθωσαν αἱ Α Β, Α Γ, συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Α, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Β Γ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Α Δ· λέγω ὅτι διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.



Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω διάμετρος ἡ Δ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ε Γ· τεμεῖ δὴ τὴν τομήν. τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Ζ τῇ Γ Δ Β παράλληλος ἤχθω ἡ Ζ Κ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ε Λ Θ Δ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ Γ Δ τῇ Δ Β· ἴση ἄρα καὶ ἡ

Prop. XXIX. *Theor.*

Si duæ rectæ coni sectionem vel circuli circumferentiam contingentes occurrant inter se; recta connectens punctum concursûs earundem & illud in quo ea quæ conjungit tactus bifariam dividitur sectionis diameter erit.

Sit coni sectio, vel circuli circumferentia, quam contingant A B, A Γ, in puncto A convenientes, & ducta B Γ secetur bifariam in Δ, & jungatur A Δ: dico A Δ esse diametrum sectionis.

Si enim fieri potest, sit Δ E diameter, & jungatur Γ E, quæ [per 35. & 36. 1. huj.] sectionem ipsam secabit. secet autem in Z, & per Z ipsi Γ Δ B ducatur parallela Z K H, & jungatur E Λ Θ Δ: itaque quoniam Γ Δ æqualis est ipsi Δ B, erit

erit [per 4. 6.] ZΘ quoque ipsi ΘH æqualis. & quoniam recta, quæ in A contingit sectionem, parallela est ipsi BΓ, & est ZH eidem parallela: ergo ZH parallela est rectæ sectionem in A tangenti: & idcirco [per 46 & 47. 1] ZΘ est æqualis ipsi ΘK, quod fieri minime potest: non igitur diameter est ΔE. similiter demonstrabimus nullam aliam esse diametrum præter AΔ.

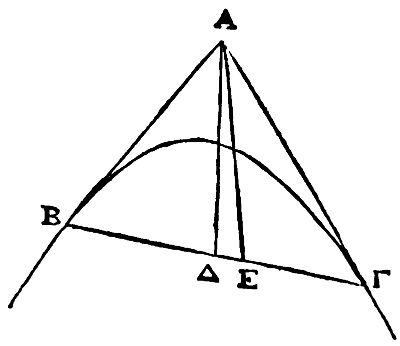
ΖΘ τῇ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΒΓ, καὶ ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΒΓ παράλληλος· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ τῇ ΘΚ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις, πλὴν τῆς ΑΔ.

Prop. XXX. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ coni sectionem vel circuli circumferentiam contingentes concurrant: diameter, quæ à puncto concursus ducitur, rectam tactus conjungentem bifariam secabit.

SIT coni sectio, vel circuli circumferentia BΓ, & ducantur duæ rectæ BA, AΓ ipsam contingentes, quæ conveniant in A, & jungatur BΓ, & per A ducatur sectionis diameter AΔ: dico BΔ ipsi ΔΓ æqualem esse.

Non enim, sed, si fieri potest, sit BE æqualis EΓ, & jungatur AE: ergo [per præc.] AE diameter est sectionis. est autem & AΔ, quod est absurdum. sive enim sectio sit ellipsis, punctum A, in quo conveniunt diametri, centrum erit sectionis extra ipsam, quod fieri non potest: sive sit parabola, diametri ipsius [contra corol. 51. 1. huj.] inter se convenient: si vero hyperbola sit, lineæ BA, AΓ sectioni occurrunt, & unius occursus alterius occursu non continetur, quare convenient inter sese [per 25. 2. huj.] intra angulum hyperbolam continentem. sed & in ipso angulo, (punctum enim A supponitur centrum, cum ΔA, AB diametri sint) quod est absurdum: non igitur BE ipsi EΓ æqualis erit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν· ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἀγομένη διάμετρος δίχα τεμεῖ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν.

ΕΣΤΩ κώνου τομή, ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῆς δύο ἐφαπτόμεναι αἱ ΒΑ, ΑΓ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Α διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ.

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω ἴση ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· ἡ ΑΕ ἄρα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΔ, ὅπερ ἄτοπον. εἰ γὰρ ἔλλειψίς ἐστιν ἡ τομή, τὸ Α, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ διάμετροι, κέντρον ἔσται τῆς τομῆς ἐκτός, ὅπερ ἀδύνατον· εἰ παραβολή ἐστιν ἡ τομή, συμπίπτουσιν ἀλλήλαις αἱ διάμετροι· εἰ ὑπερβολή ἐστι, καὶ συμπίπτουσι τῇ τομῇ αἱ ΒΑ, ΑΓ, μὴ περιέχουσαι τὰς ἑαυτῶν συμπτώσεις· ἐντὸς ἄρα ἔσται τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν γωνίας. ἀλλὰ καὶ ἐπ' αὐτῆς, (κέντρον γὰρ ὑπόκειται τὸ Α, διαμέτρων οὐσῶν τῶν ΔΑ, ΑΕ) ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ ἐστὶν ἴση.

Prop. XXXI. *Theor.*

Si utramque oppositarum sectionum duæ rectæ lineæ contingant: si quidem recta tactus conjungens per centrum transeat, contingentes rectæ parallelæ erunt; sin minus, convenient inter se ad partes centri.

SINT oppositæ sectiones A, B, & ipsas contingant ΓAΔ, EBZ in A, B; recta vero, quæ ex A ad B ducitur, primum transeat per centrum sectionum: dico ΓΔ ipsi EZ parallelam esse.

Quoniam enim oppositæ sectiones sunt, quarum diameter AB, & unam earum contingit ΓΔ in puncto A: igitur quæ per B ipsi ΓΔ parallela ducitur, [per 48. & 50. 1. huj.] sectionem continget. contingit autem EZ: ergo ΓΔ ipsi EZ est parallela.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

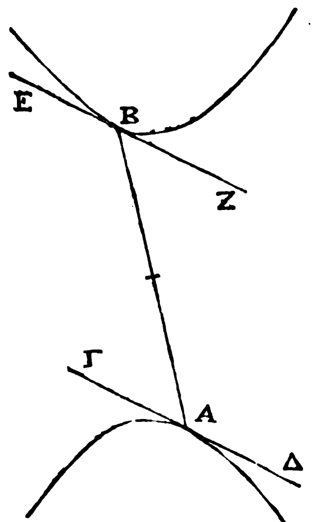
Ἐὰν ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται· ἐὰν μὲν ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου πίπτῃ, παράλληλοι ἔσονται αἱ ἐφαπτόμεναι· ἐὰν δὲ μή, συμπεσοῦνται ἐπὶ ταὐτὰ τῷ κέντρῳ.

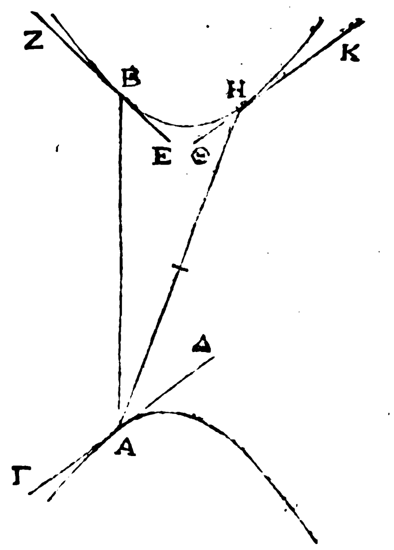
ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν ἔστωσαν αἱ ΓΑΔ, ΕΒΖ κατὰ τὰ Α, Β, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη πιπτέτω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ἀντικείμεναί εἰσι τομαί, ὧν διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ, καὶ μιᾶς αὐτῶν ἐφάπτεται ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Α· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς. ἐφάπτεται δὲ καὶ ἡ ΕΖ· παράλληλος ἐστιν ἄρα ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ.

Μὴ

Μὴ ἔστω δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν, καὶ ἤχθω διάμετρος τῶν τομῶν ἡ ΑΗ, καὶ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΘΚ· ἡ ΘΚ ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ὑπερβολῆς εὐθεῖαι ἐφάπτονται αἱ ΕΖ, ΘΚ· συμπεσοῦνται ἄρα. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ΘΚ τῇ ΓΔ· καὶ αἱ ΓΔ, ΕΖ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. καὶ φανερὸν, ὅτι ἐπὶ ταυτὰ τῷ κέντρῳ.





Sed non transeat per centrum sectionum quæ ex A ad B ducitur, ducaturque sectionum diameter A H, & Θ K sectionem in H contingens: ergo Θ K parallela est ipsi Γ Δ. & quoniam hyperbolam duæ rectæ contingunt E Z, Θ K; [per 25. 2.huj.] convenient inter sese. est autem Θ K ipsi Γ Δ parallela: quare & Γ Δ, E Z productæ inter se convenient. & patet concursum fieri ad easdem partes rectæ E Z ad quas est centrum.

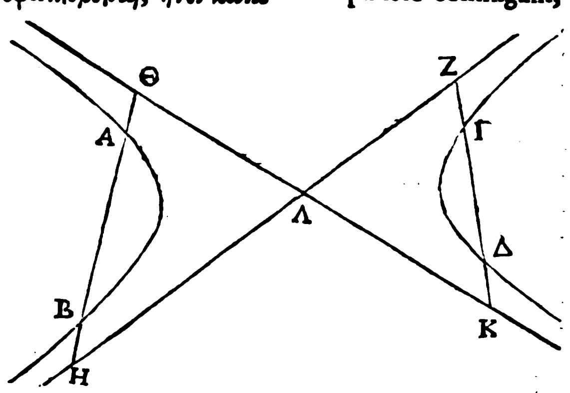
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖαι συμπίπτωσι καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι, ἢ κατὰ δύο τέμνουσαι, ἐκβληθεῖσαι δὲ αἱ εὐθεῖαι συμπίπτωσιν· ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

Prop. XXXII. *Theor.*

Si utrique oppositarum sectionum rectæ lineæ occurrant, ipsas vel in uno puncto contingentes, vel in duobus secantes, quæ productæ inter se conveniant: punctum, in quo conveniunt, erit in angulo qui deinceps est angulo sectionem continenti.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ, καὶ τῶν ἀντικειμένων ἤτοι καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι, ἤτοι κατὰ δύο τέμνουσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ. καὶ ἐκβαλλόμεναι συμπιπτέτωσαν· λέγω ὅτι ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.



Ἔστωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΘΚ· ἡ ΑΒ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Θ, Η· ὁμοίως καὶ ἡ ΓΔ συμπεσεῖται κατὰ τὰ Ζ, Κ. καὶ ἐπεὶ ὑπόκειται συμπίπτουσαι αἱ ΖΚ, ΘΗ, φανερὸν ὅτι ἤτοι ἐν τῷ ὑπὸ τῶν ΘΛΖ γωνίαν τόπῳ, ἢ ἐν τῷ ὑπὸ τῶν ΚΛΗ συμπεσοῦνται. ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἐφάπτωνται.

Sint oppositæ sectiones, quas vel in uno puncto contingant, vel in duobus secent rectæ A B, Γ Δ; & productæ inter se conveniant: dico punctum, in quo conveniunt, esse in angulo qui deinceps est angulo sectionem continenti.

Sint sectionum asymptoti Z H, Θ K: ergo [per 3. vel 8. 2. huj.] A B producta asymptotis occurret. occurrat in Θ, H punctis. similiter Γ Δ occurret asymptotis in Z, K. & quoniam supponimus Z K, Θ H inter se convenire, patet eas occursuras vel in angulo Θ Λ Z, vel in K Λ H. similiter idem demonstrari potest, si A B, Γ Δ sectiones contingant.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐὰν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα συμπίπτουσα, ἐκβληθεῖσα δὲ ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς το-

Prop. XXXIII. *Theor.*

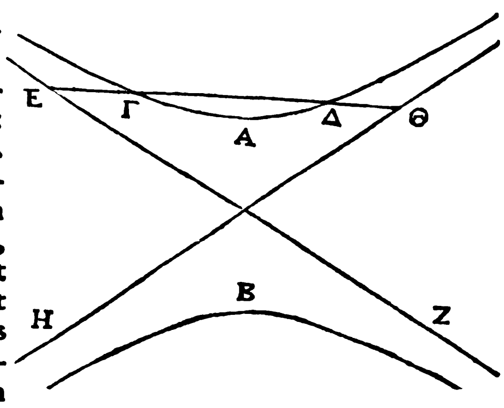
Si uni oppositarum sectionum recta linea occurrens ex utraque parte producta

extra

extra sectionem cadat: cum altera sectione non conveniet, sed transibit per tres locos; quorum unus quidem est sub angulo sectionem continente, duo vero reliqui sub iis angulis qui eidem sunt deinceps.

μῆς· οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τομῇ, ἀλλὰ πεσεῖται διὰ τῶν τριῶν τόπων, ὧν ἐστιν εἷς μὲν ὁ ὑπὸ τὴν περιέχουσαν γωνίαν τὴν τομήν, δύο δὲ οἱ ὑπὸ τὰς γωνίας τὰς ἐφεξῆς τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

Sint oppositæ sectiones A, B: & sectionem A secet quævis recta ΓΔ, quæ producta ex utraque parte extra sectionem cadat: dico ΓΔ cum B sectione non convenire.



Ducantur enim asymptoti sectionum EZ, HΘ: ergo [per 8. 2. huj.] ΓΔ producta asymptotis occurret. non occurret autem in aliis punctis quam in E, Θ: ergo non conveniet cum sectione B. & patet eam per tres locos dictos transire. si enim cum utraque oppositarum sectionum conveniret, nulli ipsarum in duobus punctis occurreret: quod si in duobus punctis occurreret; oppositæ sectioni prorsus non occurreret, uti modo est ostensum.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ τὴν A τεμνέτω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ οὐ συμπίπτει τῇ B τομῇ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ EZ, HΘ· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις. οὐ συμπίπτει δὲ κατ' ἄλλα ἢ τὰ E, Θ· ὥστε οὐ συμπεσεῖται οὐδὲ τῇ B τομῇ. καὶ φανερὸν ὅτι διὰ τῶν τριῶν τόπων πεσεῖται. ἐὰν γὰρ ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ τις εὐθεῖα, οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα. εἰ γὰρ συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα, διὰ τὸ προδεδειγμένον, τῇ ἑτέρᾳ τομῇ οὐ συμπεσεῖται.

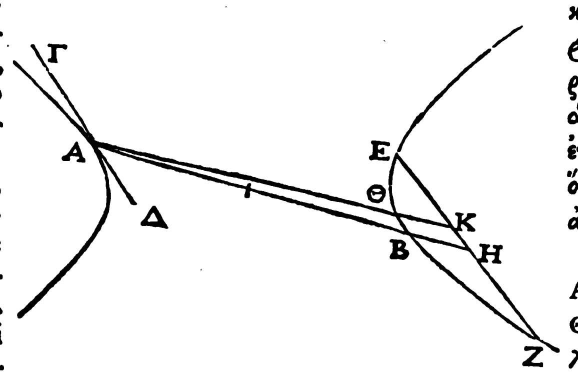
Prop. XXXIV. *Theor.*

Si unam oppositarum sectionum recta quævis contingat, & huic parallela ducatur in altera sectione: quæ à tactu ad medium rectæ parallelæ ducitur, oppositarum sectionum diameter erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖά τις ἐπιψαύῃ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ· ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ μέσην τὴν παράλληλον ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων.

Sint oppositæ sectiones A, B, & earum unam A contingat in A puncto recta ΓΔ, ipsique ΓΔ parallela ducatur EZ in altera sectione, & secetur EZ in H bifariam, & jungatur AH: dico AH oppositarum sectionum diametrum esse.



Si enim fieri potest, sit AΘK diameter: ergo [per 31. 2. huj.] quæ in Θ sectionem contingit, parallela est ipsi ΓΔ. sed [ex hyp.] ΓΔ ipsi EZ est parallela: EK igitur ipsi KZ [per 47. 1. huj.] est æqualis, quod fieri non potest; est enim EH æqualis HZ. igitur AΘ non est diameter oppositarum sectionum: ergo ipsa AB ea est.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ μιᾶς αὐτῶν τῆς A ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ κατὰ τὸ A, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ EZ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ H, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AH· λέγω ὅτι ἡ AH διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ AΘK· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ. ἀλλὰ ἡ ΓΔ παράλληλός ἐστι τῇ EZ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ EK τῇ KZ, ὅπερ ἀδύνατον· ἡ γὰρ EH τῇ HZ ἐστιν ἴση. οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ AΘ τῶν ἀντικειμένων· ἡ AB ἄρα.

Prop. XXXV. *Theor.*

Si diameter in una oppositarum sectionum rectam lineam bifariam secet: quæ in termino diametri contingit alteram sectionem, rectæ bifariam sectæ erit parallela.

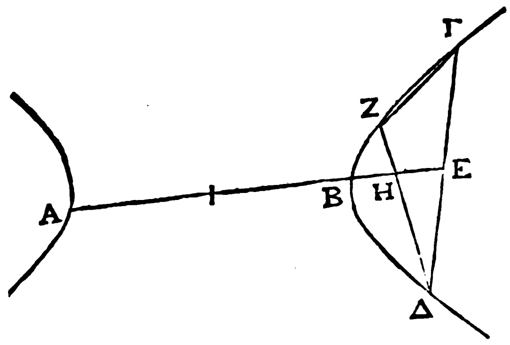
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν ἡ διάμετρος ἐν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖάν τινα δίχα τέμνῃ, ἡ ἐπιψαύουσα τῆς ἑτέρας τομῆς κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

ΕΣΤΩ

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, ἡ δὲ διάμετρος αὐτῶν ἡ ΑΒ τεμνέτω ἐν τῇ Β τομῇ δίχα τὴν ΓΔ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Ε· λέγω ὅτι ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη τῆς τομῆς παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς παράλληλος ἡ ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΗΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΕΗ, ὅπερ ἀδύνατον· ἐκβαλλομένη γὰρ αὐτῇ συμπίπτει. οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς, οὐδὲ ἄλλη τις διὰ τοῦ Δ πλὴν τῆς ΓΔ.



Sint oppositæ sectiones A, B, quarum diameter A B, in B sectione, rectam Γ Δ bifariam secet in E: dico rectam, quæ in puncto A sectionem contingit, ipsi Γ Δ parallelam esse.

Si enim fieri potest, sit recta sectionem in A contingenti parallela Δ Z: ergo [per 48. 1.huj.] Δ H ipsi H Z est æqualis. sed Δ E æqualis est ipsi E Γ: parallela igitur [per 2.6.] est Γ Z ipsi E H, quod absurdum: producta enim Γ Z [per 22. 1. huj.] cum ipsa E H conveniet. quare neque Δ Z rectæ ad A contingenti est parallela, neque alia quæpiam per Δ ducta præter ipsam Γ Δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

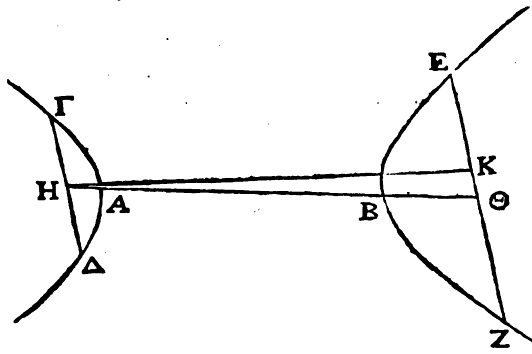
Ἐὰν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖαι ἀχθῶσι παράλληλοι οὖσαι, ἡ τὰς διχοτομίας αὐτῶν ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων.

Prop. XXXVI. *Theor.*

Si in utraque oppositarum sectionum rectæ lineæ inter se parallelæ ducantur: ipsarum medium conjungens recta oppositarum sectionum diameter erit.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἐν ἑκατέρᾳ αὐτῶν ἤχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΔ, ΕΖ, καὶ ἔστωσαν παράλληλοι, καὶ τετμήσθω ἑκατέρα αὐτῶν δίχα κατὰ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ· λέγω ὅτι ἡ ΗΘ διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ ΗΚ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ, ὥστε καὶ τῇ ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΚ τῇ ΚΖ, ὅπερ ἀδύνατον, ἐπεὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΖ ἐστὶν ἴση. οὐκ ἄρα ἡ ΗΚ διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων· ἡ ΗΘ ἄρα.



Sint oppositæ sectiones A, B, & in earum utraque ducantur rectæ Γ Δ, E Z inter se parallelæ, & in punctis H, Θ bifariam secentur, & jungatur H Θ: dico H Θ diametrum esse oppositarum sectionum.

Si enim non est, sit H K: ergo [per 5.2.huj.] quæ in A sectionem contingit ipsi Γ Δ est parallela; & idcirco ipsi E Z: æquales igitur [per 48. 1. huj.] sunt E K, K Z, quod fieri non potest, quoniam & E Θ, Θ Z sunt æquales. ergo H K non est diameter oppositarum sectionum: quare H Θ ea est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Ἐὰν ἀντικειμένας εὐθεῖα τέμνῃ μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ἡ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπιζευγνυμένη διάμετρος ἐστι τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία· πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη παράλληλος τῇ δίχα τεμνομένῃ.

Prop. XXXVII. *Theor.*

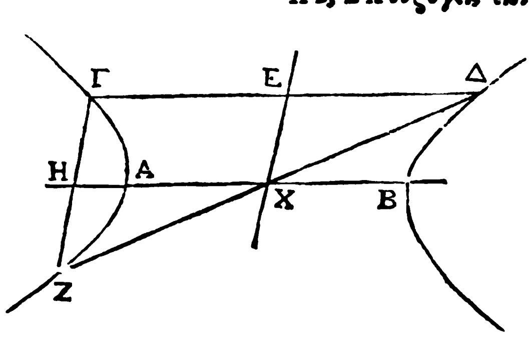
Si oppositas sectiones recta linea secet, non transiens per centrum: quæ à medio ipsius ad centrum ducitur oppositarum sectionum diameter erit ea quæ recta appellatur; transversa vero diameter ipsi conjugata est ea quæ à centro ducitur parallela rectæ bifariam sectæ.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τὰς Α, Β τεμνέτω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσα, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΧΕ, καὶ διὰ τοῦ

Sint oppositæ sectiones A, B, & ipsas secet recta Γ Δ non transiens per centrum, quæ bifariam in E dividatur, sitque sectionum centrum X, & jungatur X E, & per X ipsi Γ Δ parallela

lela ducatur AB: dico AB, EX diametros esse conjugatas oppositarum sectionum.

Jungatur enim ΔX, & ad Z producatur, & jungatur ΓZ: æqualis igitur est [per 30. 1. huj.] ΔX ipsi XZ. est autem [ex constr.] & ΔE æqualis EΓ: ergo [per 2. 6.] EX est parallela ΓZ. producatur BA ad H. & quoniam ΔX, XZ sunt [per 30. 1. huj.] æquales; & EX, ZH [per 4. 6.] æquales erunt; & propterea ipsæ ΓH, ZH: ergo [per 5. 2. huj.] quæ ad A sectionem contingit parallela est ipsi ΓZ, quare [per 30.1.] & ipsi EX. rectæ igitur AB, EX [per 16. 1. huj.] oppositarum sectionum conjugatæ sunt diametri.



X τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ AB· λέγω ὅτι αἱ AB, EX συζυγεῖς εἰσι διάμετροι τῶν τομῶν.

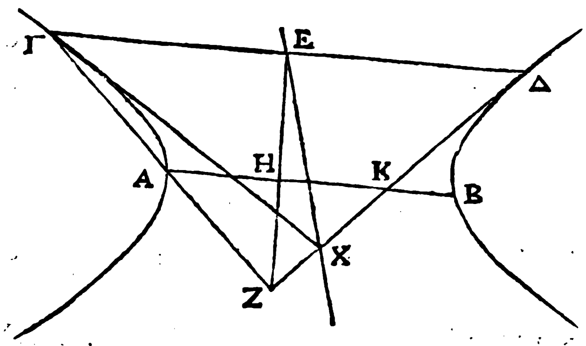
Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔX, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓZ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔX τῇ XZ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔE τῇ EΓ ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ EX τῇ ZΓ. ἐκβεβλήσθω ἡ BA ἐπὶ τὸ H. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔX τῇ XZ· ἴση ἄρα καὶ ἡ EX τῇ ZH, ὥστε καὶ ἡ ΓH ἴση τῇ ZH· ἡ ἄρα κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓZ, ὥστε καὶ τῇ EX. αἱ AB, EX ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.

Prop. XXXVIII. *Theor.*

Si duæ rectæ oppositas sectiones contingentes concurrant: quæ à puncto concursus ad medium rectæ tactus conjungentis ducitur, oppositarum sectionum diameter erit quæ recta vocatur; transversa vero ipsi conjugata, quæ per centrum ducitur rectæ tactus conjungenti parallela.

SINT oppositæ sectiones A, B; rectæ sectiones contingentes ΓX, XΔ; & ducatur ΓΔ quæ bifariam dividatur in E, & jungatur EX: dico EX diametrum rectam esse; transversam vero ipsique conjugatam, quæ per centrum ducitur ipsi ΓΔ parallela.

Sit enim, si fieri potest, diameter EZ, & sumatur quodvis punctum Z: ergo ΔX ipsi EZ occurret. occurrat in Z puncto, & jungatur ΓZ: conveniet igitur ΓZ cum sectione. conveniat autem in A, & per A ducatur AB, rectæ ΓΔ parallela. itaque quoniam EZ diameter est & secat ΓΔ bifariam; etiam [per def. 15.] ipsi parallelas rectas bifariam secabit: quare AH ipsi HB est æqualis. & quoniam ΓE est æqualis EΔ; & est in triangulo ΓZΔ: ergo AH [per 4. 6. & 9. 5.] æqualis est HK, unde & HK ipsi HB æqualis est, quod fieri non potest. igitur EZ non est diameter.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη′.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν· ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπιζευγνυμένη ἐπὶ μέσην τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία· πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένη παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, ἐφαπτόμεναι δὲ τῶν τομῶν αἱ ΓX, XΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EX· λέγω ὅτι ἡ EX διάμετρός ἐστιν ἡ λεγομένη ὀρθία· πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη.

Ἔστω γὰρ, εἰ δυνατὸν, διάμετρος ἡ EZ, καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Z· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΔX τῇ EZ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓZ· συμβαλεῖ ἄρα ἡ ΓZ τῇ τομῇ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ A, καὶ διὰ τοῦ A τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ AB. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ EZ καὶ τὴν ΓΔ δίχα τέμνει, καὶ τὰς παραλλήλους αὐτῇ δίχα τεμεῖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ AH τῇ HB. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓE τῇ EΔ, καί ἐστιν ἐν τριγώνῳ τῷ ΓZΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ AH τῇ HK, ὥστε καὶ ἡ HK τῇ HB ἐστὶν ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ EZ διάμετρος ἔσται.

Prop. XXXIX. *Theor.*

Si duæ rectæ oppositas sectiones contingentes concurrant: quæ per punctum concursus & centrum ducitur, rectam tactus conjungentem bifariam secabit.

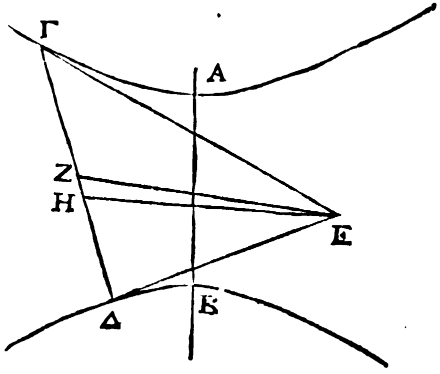
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ′.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται συμπίπτουσαι· ἡ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς συμπτώσεως τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν δίχα τέμνει.

ΕΣΤΩ-

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τῶν Α, Β δύο εὐθεῖαι ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ διάμετρος ἤχθω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΖΔ.

Εἰ γὰρ μή, τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΕ· ἡ ΗΕ ἄρα διάμετρός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΖ· κέντρον ἄρα ἐστὶ τὸ Ε· ἡ ἄρα σύμπτωσις τῶν ἐφαπτομένων ἐπὶ τοῦ κέντρου ἐστὶ τῶν τομῶν, ὅπερ ἄτοπόν ἐστιν. ἡ ΓΖ ἄρα τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση.



SINT oppositæ sectiones A, B, & ipsas A, B duæ rectæ ΓE, EΔ contingant, & jungatur ΓΔ, & ducatur diameter EZ: dico ΓZ ipsi ZΔ esse æqualem.

Si enim non ita sit, secetur ΓΔ bifariam in H; & jungatur HE: ergo [per præc.] HE diameter est. sed & EZ est diameter; punctum igitur E centrum erit: idcircoque rectæ, quæ contingunt sectiones, in centro ipsarum convenient, quod [per 31. 1. huj.] est absurdum. ergo ΓZ ipsi ZΔ æqualis est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῆς συμπτώσεως εὐθεῖα ἀχθῇ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν συμπίπτουσα ταῖς τομαῖς· αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἀγόμεναι ἐπὶ μέσην τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἐφάπτονται τῶν τομῶν.

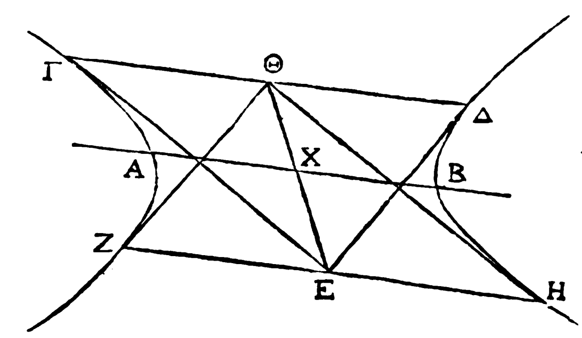
Prop. XL. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contingentes concurrant, & per punctum concursus recta ducatur, tactus conjungenti parallela sectionibusque occurrens: quæ ab occursibus ejus ad medium tactus conjungentis ducuntur, sectiones ipsas contingunt.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τῶν Α, Β δύο εὐθεῖαι ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΕΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΘ, ΘΗ· λέγω ὅτι αἱ ΖΘ, ΘΗ ἐφάπτονται τῶν τομῶν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη. εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Χ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΧΒ· αἱ ΘΕ, ΑΒ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι, καὶ τεταγμένως ἦκται ἡ ΓΘ ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον, ἐφάπτεται δὲ τῆς τομῆς ἡ ΓΕ συμπίπτουσα τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΧΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου. καὶ ἐπεὶ τεταγμένως μὲν ἦκται ἡ ΖΕ, ἐπέζευκται δὲ ἡ ΖΘ· διὰ τοῦτο ἐφάπτεται ἡ ΖΘ τῆς Α τομῆς. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΗΘ ἐφάπτεται τῆς Β τομῆς· αἱ ΖΘ, ΘΗ ἄρα ἐφάπτονται τῶν Α, Β τομῶν.

SINT oppositæ sectiones A, B, & ducantur duæ rectæ ΓE, EΔ contingentes A & B, jungaturque ΓΔ, & per E ducatur ZEH ipsi ΓΔ parallela, & secetur ΓΔ bifariam in Θ, & jungantur ZΘ, ΘH: dico ZΘ, ΘH sectiones contingere.



Ducatur enim EΘ: ergo [per 38. 2. huj.] EΘ recta diameter est, transversa vero ipsi conjugata ea est quæ per centrum ducitur parallela ipsi ΓΔ. sumatur centrum X, & ducatur AXB ipsi ΓΔ parallela: ergo ΘE, AB conjugatæ diametri sunt, atque ordinatim applicata est ΓΘ ad secundam diametrum; & ΓE sectionem contingit secundæ diametro occurrens: rectangulum igitur EXΘ [per 38. 1. huj.] æquale est quadrato dimidiæ secundæ diametri. & quoniam ZE ordinatim applicatur & jungitur ZΘ; propterea [per 38. 1. huj.] ZΘ contingit sectionem A. similiter & HΘ contingit sectionem B: igitur ZΘ, ΘH sectiones, A, B contingunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐὰν ἐν ταῖς ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

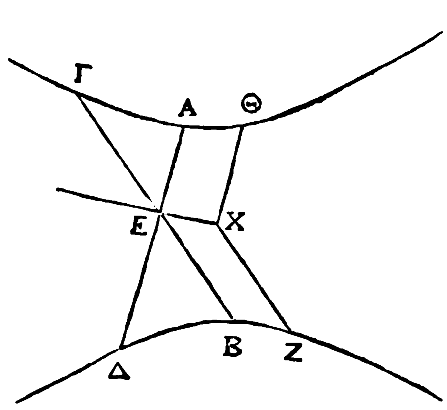
Prop. XLI. *Theor.*

Si in oppositis sectionibus duæ rectæ lineæ se invicem secent, non transeuntes per centrum: sese bifariam non secabunt.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἐν ταῖς Α, Β δύο εὐθεῖαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ

SINT oppositæ sectiones A, B, in quibus duæ rectæ ΓB, AΔ, per centrum non transeuntes, se invicem secent in E: dico eas bifariam sese non secare.

Si enim fieri potest, secent sese bifariam, sitque X sectionum centrum, & jungatur EX: ergo [per 37. 2. huj.] EX diameter est. ducatur per X ipsi BΓ parallela XZ: erit [per 37.2.huj.] XZ diameter ipsi EX conjugata. quæ igitur in Z sectionem contingit [ex def.] est parallela ipsi EX. eadem ratione, si ducatur XΘ parallela AΔ, quæ in Θ contingit sectionem ipsi EX est parallela: ergo quæ contingit sectionem in Z parallela est rectæ in Θ contingenti, quod fieri non potest: conveniunt enim inter sese, ut modo demonstratum est [per 31.2. huj.] igitur ΓB, AΔ, per centrum non transeuntes, sese bifariam non secant.



ΓΒ, ΑΔ κατὰ τὸ Ε, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, τεμνέτωσαν, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ. ἤχθω διὰ τοῦ Χ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΧΖ· ἡ ΧΖ ἄρα διάμετρος ἐστὶ καὶ συζυγὴς τῇ ΕΧ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Ζ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΧ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ, παραλλήλου ἀχθείσης τῆς ΧΘ τῇ ΑΔ, ἡ κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΧ· ὥστε ἡ κατὰ τὸ Ζ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένῃ, ὅπερ ἄτοπον· ἐδείχθη γὰρ καὶ συμπίπτουσα. οὐκ ἄρα αἱ ΓΒ, ΑΔ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, τέμνουσι ἀλλήλας δίχα.

Prop. XLII. *Theor.*

Si in oppositis sectionibus conjugatis, duæ rectæ lineæ se invicem secent, non transeuntes per centrum: bifariam sese non secabunt.

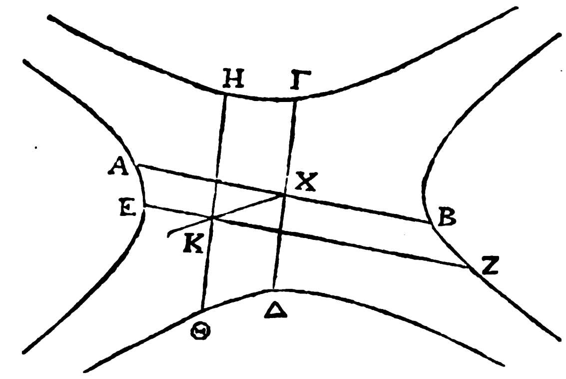
Sint oppositæ sectiones conjugatæ A, B, Γ, Δ, & in sectionibus A, B, Γ, Δ duæ rectæ EZ, HΘ, non transeuntes per centrum, se invicem secent in K: dico EZ, HΘ sese bifariam non secare.

Si enim fieri potest, secent se bifariam, & sit X sectionum centrum, & ducatur quidem AB parallela ipsi EZ, & ΓΔ ipsi HΘ parallela; & jungatur KX: ergo [per 37. 2. huj.] KX, AB conjugatæ diametri sunt. & similiter XK, ΓΔ sunt conjugatæ diametri; quare [per 30. 1.] recta contingens sectionem in A est parallela rectæ in Γ contingenti *, quod fieri non potest: conveniunt enim, quoniam [per 19. 2. huj.] contingens in Γ sectiones A, B secat, & contingens in A secat ipsas Γ,Δ. ac patet [per 21.2.huj.] earum concursum esse in loco qui est sub angulo AXΓ: igitur EZ, HΘ, per centrum non transeuntes, sese bifariam non secant.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ΄.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἐν ταῖς Α, Β, Γ, Δ τομαῖς δύο εὐθεῖαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ ΕΖ, ΗΘ κατὰ τὸ Κ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.



Εἰ γὰρ δυνατὸν, τεμνέτωσαν, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ τῇ μὲν ΕΖ ἤχθω παράλληλος ἡ ΑΒ, τῇ δὲ ΘΗ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΧ· αἱ ΚΧ, ΑΒ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. ὁμοίως καὶ αἱ ΧΚ, ΓΔ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι· ὥστε ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη τῇ κατὰ τὸ Γ ἐφαπτομένῃ παράλληλός ἐστιν, ὅπερ ἀδύνατον· συμπίπτει γὰρ, ἐπειδὴ ἡ μὲν κατὰ τὸ Γ ἐφαπτομένη τέμνει τὰς Α, Β τομὰς, ἡ δὲ κατὰ τὸ Α τὰς Δ, Γ. καὶ φανερὸν ὅτι ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἐν τῷ ὑπὸ τῆς ΑΧΓ γωνίαν τόπῳ ἐστίν· οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Prop. XLIII. *Theor.*

Si unam oppositarum sectionum conjugatarum recta in duobus punctis secet; & à centro duæ rectæ ducantur, una quidem ad medium rectæ secantis, altera vero ipsi parallela: erunt oppositarum sectionum conjugatæ diametri.

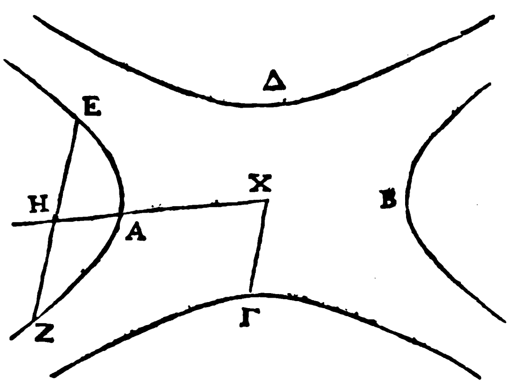
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ΄.

Ἐὰν μίαν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖα τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, διὰ δὲ τοῦ κέντρου ἡ μὲν ἐπὶ μέσην τὴν τέμνουσαν ἀχθῇ, ἡ δὲ παρὰ τὴν τεμνομένην· συζυγεῖς ἔσονται διάμετροι τῶν ἀντικειμένων.

* Cum ex definitione diametri conjugatæ [def. prim. 17.] utraque sit parallela ipsi XK.

ΕΣΤΩ-

Ἐστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τεμνέτω τὴν Α εὐθεῖά τις κατὰ δύο σημεῖα τὰ Ε, Ζ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΖΕ τῷ Η, καὶ τὸ κέντρον ἔστω τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΧΗ, παράλληλος δὲ ἤχθω τῇ ΕΖ ἡ ΓΧ· λέγω ὅτι αἱ ΑΧ, ΧΓ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.



Ἐπεὶ γὰρ διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΧ, καὶ τὴν ΕΖ δίχα τέμνει· ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΖ, ὥστε καὶ τῇ ΓΧ. ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσι τομαί, καὶ μιᾶς αὐτῶν τῆς Α ἦκται ἐφαπτομένη κατὰ τὸ Α, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τοῦ Χ ἡ μὲν ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζεύγνυται ἡ ΧΑ, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην ἦκται ἡ ΓΧ· αἱ ΧΑ, ΓΧ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι· τοῦτο γὰρ προδέδεικται.

Sint oppositæ sectiones conjugatæ Α, Β, Γ, Δ; & sectionem Α quædam recta secet in duobus punctis Ε, Ζ, & ΖΕ bifariam dividatur in Η; sit autem Χ centrum, jungaturque ΧΗ, & ΓΧ ipsi ΕΖ parallela ducatur: dico ΑΧ, ΧΓ conjugatas diametros esse.

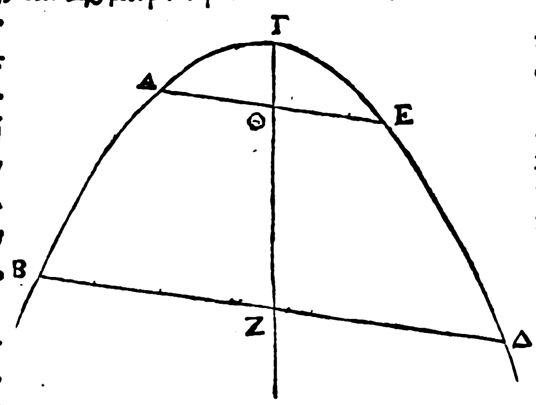
Quoniam enim ΑΧ diameter est & ΕΖ bifariam secat: quæ in Α contingit sectionem parallela est [per 5. 2. huj.] ipsi ΕΖ; quare & ipsi ΓΧ. quoniam igitur oppositæ sectiones sunt, & unam ipsarum Α quædam recta in Α contingit; à centro vero Χ ducuntur duæ rectæ, una quidem ΧΑ ad tactum, altera vero ΓΧ contingenti parallela: erunt ΧΑ, ΓΧ conjugatæ diametri: hoc enim superius [per 20. 2. huj.] demonstratum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς τὴν διάμετρον εὑρεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομή, ἐφ' ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε· δεῖ δὴ αὐτῆς τὴν διάμετρον εὑρεῖν.

Γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΘΖ· ἀχθεισῶν δὴ τεταγμένως τῶν ΔΖ, ΕΘ καὶ ἐκβληθεισῶν, ἔσται ἴση ἡ μὲν ΔΖ τῇ ΖΒ, ἡ δὲ ΕΘ τῇ ΘΑ. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὰς ΒΔ, ΕΑ θέσει οὔσας παραλλήλους, ἔσται δοθέντα τὰ Θ, Ζ σημεῖα, ὥστε θέσει ἔσται ἡ ΖΘΓ.



Συντεθήσεται δὴ οὕτως. Ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομή, ἐφ' ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ ΒΔ, ΑΕ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ζ, Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΘ διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς. τῷ δὲ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἀπείρους εὑρήσομεν διαμέτρους.

Prop. XLIV. *Probl.*

Datæ coni sectionis diametrum invenire.

Sit data coni sectio in qua puncta Α, Β, Γ, Δ, Ε; oportet ipsius diametrum invenire.

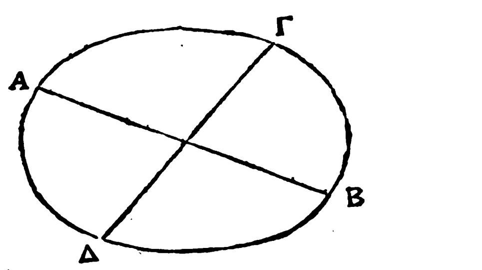
Factum sit, & diameter sit ΓΘΖ: ductis ideo ordinatim applicatis ΔΖ, ΕΘ & productis; erit ΔΖ æqualis ΖΒ, & ΕΘ ipsi ΘΑ. si igitur ordinemus ΒΔ, ΕΑ, ut sint positione parallelæ: data erunt puncta Θ, Ζ; quare & ΖΘΓ positione data erit.

Componetur itaque in hunc modum. Sit data coni sectio in qua Α, Β, Γ, Δ, Ε puncta, ducanturque ΒΔ, ΑΕ inter se parallelæ, & in punctis Ζ, Θ bifariam dividantur: juncta igitur ΖΘ diameter erit sectionis. eâdem ratione & infinitas diametros inveniemus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Τοῦτο δὴ φανερόν. Ἐὰν γὰρ διαχθῶσι δύο διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΑΒ, ΓΔ, τὸ σημεῖον,

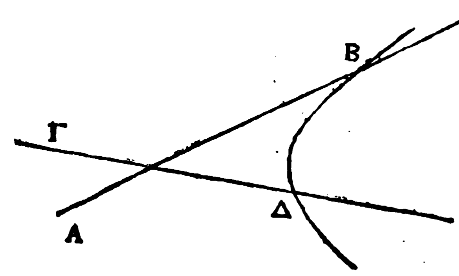


καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας, ἔσται τῆς τομῆς τὸ κέντρον, ὡς ὑπόκειται.

Prop. XLV. *Probl.*

Datæ ellipseos vel hyperbolæ centrum invenire.

Hoc itaque manifeste constat. Si enim duæ sectionis diametri ΑΒ, ΓΔ ducantur; pun-



ctum in quo conveniunt [ex 25. dat.] erit datum, centrumque sectionis, ut jam [in def. centri] positum est.

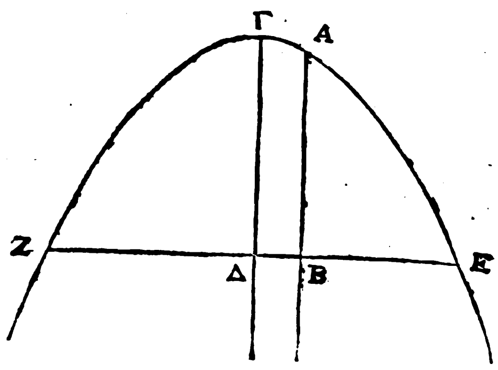
Prop. XLVI. Probl.

Datæ coni sectionis axem invenire.

SIT coni sectio data primum PARABOLA, in qua puncta Z, Γ, E: itaque oportet ipsius axem invenire.

Ducatur enim diameter AB. & si quidem AB sit axis, factum erit quod proponebatur. sin minus, ponatur factum, & sit axis ΓΔ: ergo [per cor. 51. 1.huj.] axis ΓΔ ipsi AB est parallelus, & quæ ad ipsam ducuntur perpendiculares bifariam dividit. si igitur ordinemus EZ perpendicularem ad AB, erit ea [per 26. dat.] positione data, & idcirco EΔ æqualis ΔZ: quare [per 2.dat.] punctum Δ datum erit: dato igitur Δ puncto, & ductâ ΔΓ ipsi AB positione datæ parallelâ, erit [per 29.dat.] & ipsa ΔΓ positione data.

Componetur autem in hunc modum. Sit data sectio Parabola, in qua puncta Z, A, E, ducaturque [per 44.2.huj.] diameter AB, & [per 11. 1.] BE ad ipsam perpendicularis, quæ ad Z producatur. si ergo EB sit æqualis BZ, constat AB axem esse. sin minus, [per 10. 1.] dividatur EZ in Δ bifariam, & [per 31. 1.] ipsi AB parallela ducatur ΓΔ. patet ΓΔ esse sectionis axem; est enim diametro parallela, adeoque [per cor. 51.1.huj.] diameter est, & rectam EZ bifariam & ad rectos angulos secat: datæ igitur parabolæ axis inventus est ΓΔ.



Et patet unicum esse parabolæ axem. nam si alius axis sit, ut AB, erit hic ipsi ΓΔ parallelus; & secabit EZ, idque bifariam: ergo BE est æqualis BZ, quod fieri non potest.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛʹ.

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

ΕΣΤΩ ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολὴ, ἐφ᾽ ἧς τὰ Z, Γ, E· δεῖ δὴ αὐτῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

Ἤχθω γὰρ αὐτῆς διάμετρος ἡ AB. εἰ μὲν οὖν ἡ AB ἄξων ἐστὶ, γεγονὸς ἂν ἔστι τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δὲ οὔ, γεγονέτω, καὶ ἔστω ἄξων ὁ ΓΔ· ὁ ΓΔ ἄρα ἄξων παράλληλός ἐστι τῇ AB, καὶ τὰς ἀγομένας ἐπ᾽ αὐτὴν καθέτους δίχα τέμνει. ἐὰν οὖν τάξω τὴν EZ κάθετον ἐπὶ τὴν AB, ἔσται θέσει· καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ EΔ τῇ ΔZ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Δ. δεδομένου ἄρα τοῦ Δ, παρὰ θέσει τὴν AB ἦκται ἡ ΓΔ, θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. Ἔστω ἡ δοθεῖσα παραβολὴ, ἐφ᾽ ἧς τὰ Z, A, E, καὶ ἤχθω αὐτῆς διάμετρος ἡ AB, καὶ ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ BE, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Z. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ EB τῇ BZ, φανερὸν ὅτι ἡ AB ἄξων ἐστίν. εἰ δὲ οὔ, τετμήσθω ἡ EZ δίχα τῷ Δ, καὶ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΔ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΓΔ ἄξων ἐστὶ τῆς τομῆς, παράλληλος γὰρ οὖσα τῇ διαμέτρῳ, τουτέστι διάμετρος οὖσα, τὴν EZ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει· τῆς ἄρα δοθείσης παραβολῆς ὁ ἄξων εὕρηται ὁ ΓΔ.

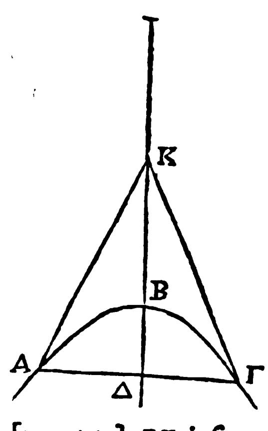
Καὶ φανερὸν, ὅτι εἷς ἄξων ἐστὶ τῆς παραβολῆς. εἰ γὰρ ἄλλος ἔσται, ὡς ὁ AB, ἔσται τῇ ΓΔ παράλληλος, καὶ τὴν EZ τέμνει, ὥστε καὶ δίχα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ BE τῇ BZ, ὅπερ ἄτοπον.

Prop. XLVII. Probl.

Datæ hyperbolæ vel ellipseos axem invenire.

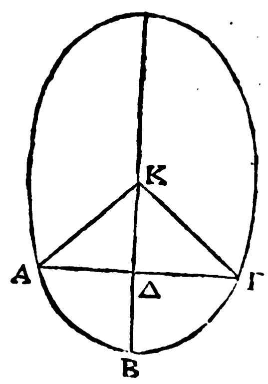
SIT HYPERBOLA, vel ELLIPSIS ABΓ: oportet igitur ipsius axem invenire.

Pone jam inventum, & sit KΔ, centrum vero sectionis sit K: ergo KΔ rectas ad ipsam ordinatim applicatas bifariam & ad rectos angulos secat. ducatur perpendicularis ΓΔA, & jungantur KA, KΓ. quoniam igitur ΓΔ æqualis est ΔA; ergo & [per 4.1.] ΓK ipsi KA est æqualis. ergo, si punctum Γ datum sit, erit ΓK data: adeoque circulus centro K & intervallo ΓK descriptus etiam per ipsum A transibit, & [per 6. def. dat.] erit positione datus.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζʹ.

Τῆς δοθείσης ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως τὸν ἄξονα εὑρεῖν.



ΕΣΤΩ ΥΠΕΡΒΟΛΗ ἢ ΕΛΛΕΙΨΙΣ ἡ ABΓ· δεῖ δὴ αὐτῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

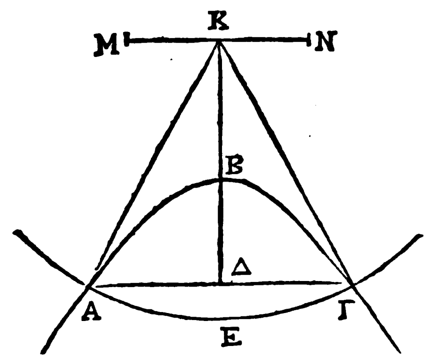
Εὑρήσθω, καὶ ἔστω ὁ KΔ, κέντρον δὲ τῆς τομῆς τὸ K· ἡ ἄρα KΔ τὰς ἐπ᾽ αὐτὴν τεταγμένως καταγομένας δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. ἤχθω κάθετος ἡ ΓΔA, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KA, KΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔA· ἴση ἄρα ἡ ΓK τῇ KA. ἐὰν οὖν τάξωμεν δοθὲν τὸ Γ, ἔσται δοθεῖσα ἡ ΓK· ὥστε ὁ κέντρῳ τῷ K, διαστήματι δὲ τῷ KΓ, κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τοῦ A, καὶ ἔσται θέσει δεδομένος.

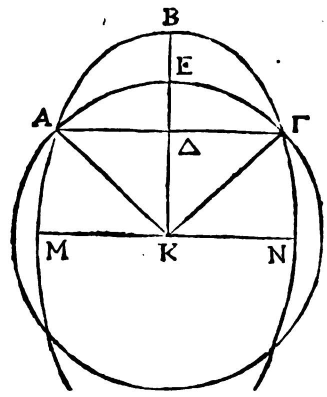
δεδομένος. ἔστι δὲ καὶ ἡ Α Β Γ τομὴ δοθεῖσα θέσει· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ δοθέν· θέσει ἄρα ἡ Γ Α. καὶ ἔστιν ἴση ἡ Γ Δ τῇ Δ Α· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Δ. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα τῇ θέσει ἡ Δ Κ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. Ἔστω ἡ δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἡ Α Β Γ, καὶ εἰλήφθω αὐτῆς κέντρον τὸ Κ, εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ Κ Γ, κύκλος γεγράφθω ὁ Γ Ε Α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ Α, καὶ δίχα τεμνέσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Κ Γ, Κ Α, καὶ διήχθω ἡ Κ Δ ἐπὶ τὸ Β. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ Α Δ

est autem [ex hyp.] & sectio A B Γ positione data: ergo [per 25. dat.] & punctum A. sed & Γ est datum: [assumptum sc.] data igitur [per 26. dat.] positione est Γ A. & est Γ Δ ipsi Δ A æqualis: ergo [per 7. dat.] punctum Δ datur. sed & ipsum K: igitur Δ K [per 26. dat.] positione data erit.

Componetur autem hoc modo. Sit data Hyperbola vel Ellipsis, A B Γ, & sumpto [per 45. 2. huj.] K ipsius centro, in sectione capiatur quodlibet punctum Γ, & ex centro K, intervalloque K Γ circulus describatur Γ E A, & jungatur Γ A & [per 10. 1.] bifariam secetur in Δ, & junguntur K Γ, K A & K Δ quæ ad B producatur. itaque quoniam A Δ est æqualis Δ Γ, & Δ K com-





τῇ Δ Γ, κοινὴ δὲ ἡ Δ Κ· δύο ἄρα αἱ Γ Δ, Δ Κ δυσὶ ταῖς Α Δ, Δ Κ ἴσαι εἰσί· καὶ βάσις ἄρα ἡ Κ Α τῇ Κ Γ ἴση· ἡ ἄρα Κ Β Δ τὴν Α Δ Γ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει· ἄξων ἄρα ἐστὶν ἡ Κ Δ. ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ Γ Α παράλληλος ἡ Μ Κ Ν· ἡ ἄρα Μ Ν ἄξων ἐστὶ τῆς τομῆς συζυγὴς τῷ Β Κ.

munis: erunt duæ lineæ Γ Δ, Δ K duabus A Δ, Δ K æquales: est igitur [per 4. 1.] basis K A æqualis basi K Γ: quare recta K B Δ ipsam A Δ Γ bifariam & ad rectos angulos secat: & idcirco [per def 18.] K Δ est axis. ducatur per K ipsi Γ A parallela M K N: ergo M N est axis sectionis ipsi B K conjugatus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη΄.

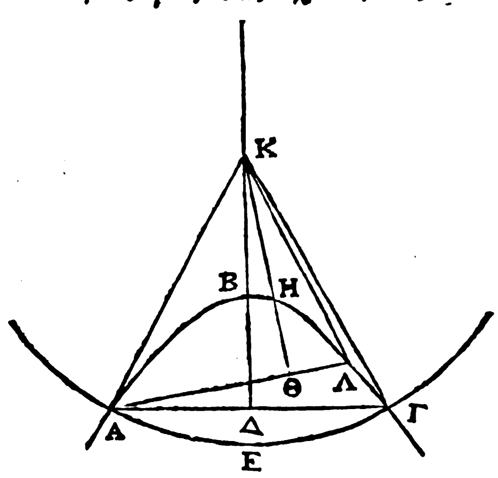
Δεδειγμένων δὲ τούτων, ἑξῆς ἔστω δεῖξαι ὅτι ἄλλοι ἄξονες τῶν αὐτῶν τομῶν οὐκ εἰσίν.

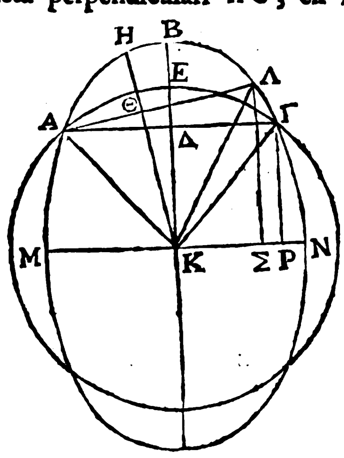
Prop. XLVIII. *Theor.*

His autem demonstratis, reliquum est ut ostendamus non esse alios axes ipsarum sectionum.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω καὶ ἕτερος ἄξων ὁ Κ Η· κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοῖς ἔμπροσθεν, ἀχθείσης καθέ-

Si enim fieri potest, sit axis alius K H: ergo ducta perpendiculari A Θ, ex iis quæ su-



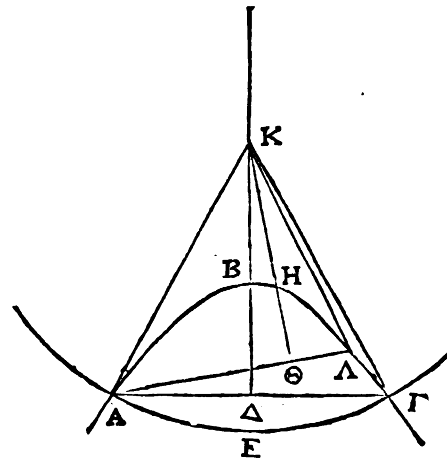


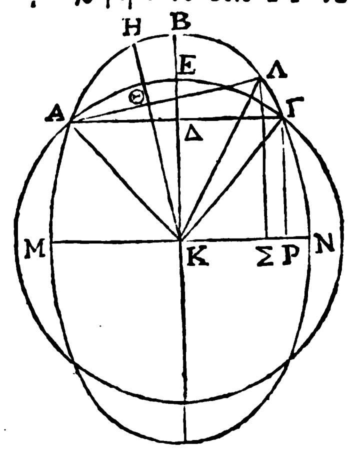
του τῆς Α Θ, ἴση ἔσται ἡ Α Θ τῇ Θ Λ· ὥστε καὶ ἡ Α Κ τῇ Κ Λ ἴση. ἀλλὰ καὶ τῇ Κ Γ· ἴση ἄρα ἡ Κ Λ τῇ Κ Γ, ὅπερ ἄτοπον. ὅτι μὲν οὖν καὶ ὁ Α Ε Γ κύκλος κατ᾽ ἄλλο σημεῖον μεταξὺ τῶν Α, Γ οὐ συμβάλλει τῇ τομῇ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς φανερόν. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως κάθετοι ἤχθωσαν αἱ Γ Ρ, Λ Σ·

pra diximus, erit A Θ æqualis Θ Λ: quare [per 4. 1.] & A K ipsi K Λ, ut & ipsi K Γ æquatur: sunt igitur K Λ, K Γ inter se æquales, quod est absurdum. circulum autem A E Γ non occurrere sectioni in alio puncto inter A, Γ, in hyperbola quidem perspicuum est. in ellipsi vero ducantur perpendiculares Γ P, Λ Σ: & quoniam

ΚΓ est æqualis ΚΛ, ex centro enim sunt: erit & quadratum ex ΚΓ quadrato ex ΚΛ æquale. quadrato autem ex ΚΓ æqualia sunt [per 47. 1.] quadrata ex ΓΡ, ΡΚ; & quadrato ex ΚΛ æqualia quadrata ex ΛΣ, ΣΚ: ergo quadrata ex ΓΡ, ΡΚ quadratis ex ΛΣ, ΣΚ æqualia erunt: quo igitur differt quadratum ex ΓΡ à quadrato ex ΛΣ, eo quadratum ex ΣΚ differt à quadrato ex ΚΡ. Rursus quoniam [per 5. 2.] rectangulum ΜΡΝ una cum quadrato ex ΡΚ æquale est quadrato ex ΚΜ; rectangulum autem ΜΣΝ una cum quadrato ex ΣΚ eidem quadrato ex ΚΜ est æquale: erit rectangulum ΜΡΝ una cum quadrato ex ΡΚ æquale rectangulo ΜΣΝ una cum quadrato ex ΣΚ: ergo quo differt quadratum ex ΣΚ à quadrato ex ΚΡ, eo rectangulum ΜΡΝ differt à

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΚΛ, (ἐκ κέντρου γάρ·) ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΚΓ τῷ ἀπὸ ΚΛ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ ΚΓ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΓΡ, ΡΚ, τῷ δὲ ἀπὸ ΚΛ ἴσα τὰ ἀπὸ ΛΣ, ΣΚ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΓΡ, ΡΚ τοῖς ἀπὸ ΛΣ, ΣΚ ἐστὶν ἴσα· ᾧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΛΣ, τούτῳ διαφέρει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ΜΡΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΜ, καὶ τὸ ὑπὸ ΜΣΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΣΚ ἴσον τῷ ἀπὸ ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΡΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΣΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΣΚ· ᾧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ ΜΡΝ τοῦ ὑπὸ ΜΣΝ. ἐδείχθη δὲ ὅτι ᾧ διαφέρει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ, τούτῳ διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΛΣ·





rectangulo ΜΣΝ. sed demonstratum est, quo quadratum ex ΣΚ differt à quadrato ex ΚΡ, eo differre quadratum ex ΓΡ à quadrato ex ΛΣ: ᵃ quo igitur differt quadratum ex ΓΡ à quadrato ex ΣΛ, eo rectangulum ΜΡΝ à rectangulo ΜΣΝ differt. itaque cum ordinatim applicatæ sint ΓΡ, ΛΣ; erit [per 21. 1. huj.] ut quadratum ex ΓΡ ad rectangulum ΜΡΝ ita quadratum ex ΛΣ ad rectangulum ΜΣΝ. demonstratum autem est in utrisque eundem esse excessum: ergo quadratum ex ΓΡ rectangulo ΜΡΝ est æquale, & quadratum ex ΛΣ æquale rectangulo ΜΣΝ. igitur linea ΛΓΜ est circulus *, quod est absurdum; posuimus enim ellipsim esse.

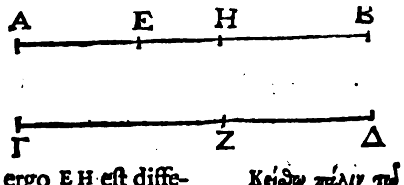
ᵃ ᾧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΣΛ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ ΜΡΝ τοῦ ὑπὸ ΜΣΝ. καὶ ἐπεὶ κατηγμέναι εἰσὶν αἱ ΓΡ, ΛΣ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΡΝ οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣΝ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐν ἀμφοτέροις ἡ αὐτὴ ὑπεροχή· ἴσον ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ ΓΡ τῷ ὑπὸ ΜΡΝ, τὸ δὲ ἀπὸ ΛΣ τῷ ὑπὸ ΜΣΝ· * κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΓΜ γραμμή, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἔλλειψις.

EUTOCIUS.

ᵃ Quo igitur differt quadratum ex ΓΡ à quadrato ex ΣΛ, eo rectangulum ΜΡΝ differt à rectangulo ΜΣΝ.] Sint duæ magnitudines æquales ΑΒ, ΓΔ, & dividantur in partes inæquales in punctis Ε, Ζ. dico quo differt ΑΕ à ΖΓ, eo ΕΒ differre à ΖΔ.

Ponatur ipsi ΓΖ æqualis ΑΗ; ergo ΕΗ est differentia magnitudinum ΑΗ, ΑΕ; hoc est ΖΓ, ΑΕ. est enim ΑΗ æqualis ΓΖ. sed & ΑΒ ipsi ΓΔ: reliqua igitur ΗΒ reliquæ ΖΔ est æqualis. quare ΕΗ est differentia ipsarum ΕΒ, ΒΗ, hoc est ipsarum ΕΒ, ΖΔ.

Sed sint quatuor magnitudines ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, & differat ΑΕ à ΓΖ eo quo ΕΒ differt à ΖΔ. dico utraque simul ΑΕ, ΕΒ utrisque simul ΓΖ, ΖΔ æqualia esse.



Ponatur rursus ΑΗ æqualis ΓΖ: ergo ΕΗ est differentia magnitudinum ΑΕ, ΓΖ. eodem autem differre

ᵃ Ω ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΣΛ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ ΜΡΝ τοῦ ὑπὸ ΜΣΝ.] Ἔστωσαν δύο μεγέθη ἴσα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ διῃρήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὰ Ε, Ζ. λέγω ὅτι ᾧ διαφέρει τὸ ΑΕ τοῦ ΖΓ, τούτῳ διαφέρει τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ.

Κείσθω τῷ ΓΖ ἴσον τὸ ΑΗ· τὸ ΕΗ ἄρα ὑπεροχή ἐστι τῶν ΑΗ, ΑΕ, τουτέστι τῶν ΖΓ, ΑΕ, τὸ γὰρ ΑΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΖ· ἀλλὰ καὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ τῷ ΖΔ ἐστὶν ἴσον· ὥστε τὸ ΕΗ ὑπεροχή ἐστι τῶν ΕΒ, ΒΗ, ἤτοι τῶν ΕΒ, ΖΔ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ διαφερέτω ᾧ διαφέρει τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. λέγω ὅτι συναμφότερα τὰ ΑΕ, ΕΒ συναμφοτέροις τοῖς ΓΖ, ΖΔ ἐστὶν ἴσα.

Κείσθω πάλιν τῷ ΓΖ ἴσον τὸ ΑΗ· τὸ ΕΗ ἄρα ὑπεροχή ἐστι τῶν ΑΕ, ΓΖ. τῷ δὲ αὐτῷ διαφέρειν ὑπόκειται ἀλλή-

* Per Lemma II. Pappi ad librum primum.

λοις τὰ Α Ε, Γ Ζ καὶ τὰ Ε Β, Ζ Δ· ἴσον ἄρα τὸ Η Β τῷ Ζ Δ. ἀλλὰ καὶ τὸ Α Η τῷ Γ Ζ· τὸ Α Β ἄρα τῷ Γ Δ ἐστὶν ἴσον. Φανερὸν δὲ ὅτι, ἐὰν τὸ πρῶτον δευτέρου ὑπερέχῃ τινὶ καὶ τὸ τρίτον τετάρτου ὑπερέχῃ τῷ αὐτῷ, τὸ πρῶτον καὶ τὸ τέταρτον ἴσα ἐστὶ τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ τρίτῳ, κατὰ τὴν καλουμένην ἀριθμητικὴν μεσότητα. ἐὰν γὰρ, τούτων ὑποκειμένων, ὑπάρχῃ ὡς τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον οὕτως τὸ δεύτερον πρὸς τὸ τέταρτον, ἴσον ἔσται τὸ μὲν πρῶτον τῷ τρίτῳ, τὸ δὲ δεύτερον τῷ τετάρτῳ. δυνατὸν δὲ ἐστὶ ἄλλως τοῦτο δειχθῆναι, διὰ τὸ δεδεῖχθαι ἐν τῷ εἰκοστῷ πέμπτῳ θεωρήματι τοῦ πέμπτου βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως, ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον καὶ τὸ τέταρτον δύο τῶν λοιπῶν μείζονα ἔσται.

ſupponuntur A E, Γ Z, & E B, Z Δ: æquales igitur ſunt H B, Z Δ. ſed eſt A H ipſi Γ Z æqualis: ergo A B ipſi Γ Δ æqualis erit. Perſpicuum autem eſt, ſi prima excedat ſecundam magnitudine aliqua, & eadem magnitudine tertia quartam excedat: primam & quartam ſecundæ & tertiæ æquales eſſe, juxta arithmeticam proportionem. Etenim ſi, his poſitis, ſit ut prima ad tertiam ita ſecunda ad quartam: prima quidem tertiæ æqualis erit: ſecunda vero quartæ. poteſt etiam hoc aliter demonſtrari, ex eo quod in vigeſimo quinto theoremate quinti libri elementorum *Euclidis* demonſtratum eſt, nempe, ſi quatuor magnitudines proportionales fuerint, primam & quartam reliquis duabus majores eſſe.

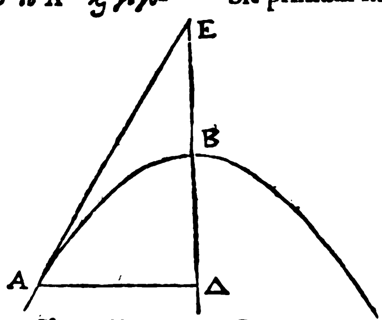
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ΄.

Κώνου τομῆς δοθείσης, καὶ σημείου μὴ ἐντὸς τῆς τομῆς· ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ σημείου εὐθεῖαν καθ' ἓν ἐπιψαύουσαν τῆς τομῆς·

ΕΣΤΩ ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον Παραβολὴ, ἧς ἄξων ἡ Β Δ· δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐντὸς τῆς τομῆς, ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ὡς πρόκειται.

Τὸ δὴ δοθὲν σημεῖον, ἤτοι ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἐστὶν, ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ἢ ἐν τῷ λοιπῷ ἐκτὸς τόπῳ.

Ἔστω οὖν ἐπὶ τῆς γραμμῆς, καὶ ἔστω τὸ Α· καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ Α Ε, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ Α Δ· ἔσται δὴ θέσει, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ Β Ε τῇ Β Δ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ Β Δ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Β Ε. καὶ ἔστι τὸ Β δοθέν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ Α Ε.



Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ Α Δ, καὶ κείσθω τῇ Β Δ ἴση ἡ Β Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Α Ε· φανερὸν δὴ ὅτι ἐφάπτεται τῆς τομῆς ἡ Α Ε.

ΕΣΤΩ πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ Ε· καὶ γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ Α Ε, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ Α Δ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Β Ε τῇ Β Δ. καὶ δοθεῖσα ἡ Β Ε· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Β Δ. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Β· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Δ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ Δ Α· θέσει ἄρα ἡ Δ Α· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Ε· θέσει ἄρα ἡ Α Ε.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. κείσθω τῇ Β Ε ἴση ἡ Β Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ Ε Δ ὀρθὴ ἡ Δ Α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Α Ε· φανερὸν δὴ ὅτι ἐφάπτεται ἡ Α Ε. φανερὸν δὲ καὶ, ἐὰν δοθὲν σημεῖον τὸ αὐτὸ ᾖ τῷ Β, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ὀρθὴ ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ δὴ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ· καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ Γ Α, καὶ διὰ τοῦ Γ τῷ ἄξονι, τουτέστι τῇ Β Δ, παράλληλος ἤχθω ἡ Γ Ζ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν Γ Ζ τεταγμένως ἤχθω ἡ Α Ζ· ἔσται δὴ ἴση ἡ Γ Η τῇ Ζ Η· καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Η· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ. καὶ ἀνῆκται

PROP. XLIX. *Probl.*

Data coni ſectione, & puncto non intra ſectionem dato; ab eo rectam ducere quæ ſectionem contingat.

SIT data coni ſectio primum Parabola, cujus axis B Δ: oportet vero à puncto non intra ſectionem dato rectam ducere, ut ante propoſitum eſt.

Itaque datum punctum vel eſt in linea parabolica, vel in axe, vel in loco quod extra relinquitur.

Sit primum in ipſa linea curva, ſitque A. puta factum, & ſit A E, ducaturque perpendicularis A Δ, quæ [per 30.dat.] poſitione data erit, & erit [per 35.1.huj.] B E æqualis B Δ. at B Δ eſt data: data igitur eſt B E. eſtque punctum B datum: ergo & punctum E. ſed datum quoque eſt A punctum: recta igitur A E [per 26. dat.] poſitione data erit.

Componetur autem in hunc modum. Ducatur ex puncto A perpendicularis A Δ, ponaturque B E ipſi B Δ æqualis, & jungatur A E: patet itaque [per 35. 1. huj.] A E ſectionem contingere.

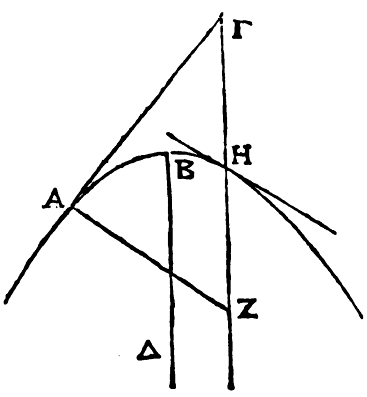
SIT rurſus punctum E in axe datum. factum ſit, & ducatur recta A E ſectionem contingens, & perpendicularis ducatur A Δ: ergo [per 35. 1. huj.] B E eſt æqualis B Δ. & data eſt B E: igitur & B Δ. at datum eſt B punctum; ergo Δ datum erit. ſed Δ A eſt normalis, adeoque [per 30.dat.] poſitione datur; igitur & punctum A datum eſt. ſed & E datum: igitur A E [per 26.dat.] datur poſitione.

Componetur itaque in hunc modum. Ponatur ipſi B E æqualis B Δ, & à puncto Δ ducatur Δ A ipſi E Δ normalis, jungaturque A B: manifeſtum igitur eſt [per 35. 1. huj.] rectam A E contingere ſectionem. conſtat etiam, ſi datum punctum ſit idem quod B, normalem ab eo ductam ſectionem ipſam contingere.

SIT datum punctum Γ: & factum jam ſit, ſitque Γ A contingens, & per Γ ducatur Γ Z parallela axi, hoc eſt ipſi B Δ: ergo [per 28.dat.] Γ Z poſitione data eſt. à puncto A ad Γ Z ordinatim applicetur A Z: eritque [per 35. 1.huj.] Γ H æqualis Z H. & H [per 25.dat.] eſt datum: datum igitur erit & Z. ordinatim autem applicatur

Z A,

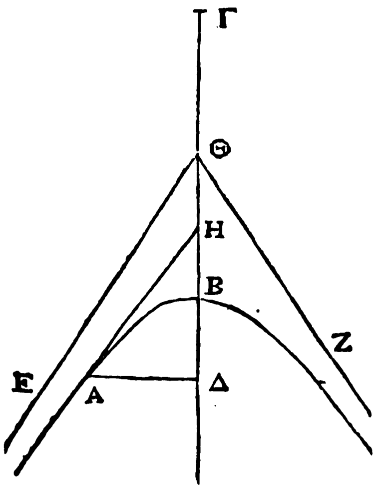
Z A, sive parallela est rectæ in H sectionem contingenti: data igitur est [per 28.dat.] Z A positione, & idcirco [per 25.dat.] punctum A datum. sed & [ex hyp.] punctum Γ: ergo [per 26.dat.] Γ A positione data erit.



Componetur autem hoc modo. Ducatur [per 31. 1.] per Γ ipsi B Δ parallela Γ Z: ponaturque Z H æqualis Γ H, & rectæ in H contingenti sectionem [per modo dicta ductæ] parallela ducatur Z A, & jungatur A Γ: perspicuum igitur est illam problema conficere.

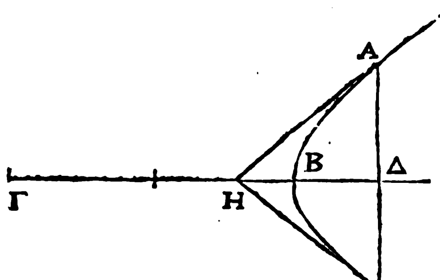
Sit rursus Hyperbola, cujus axis Γ B Δ, centrum Θ, & asymptoti Θ E, Θ Z: punctum autem datum, vel in sectione erit, vel in axe, vel intra angulum E Θ Z, vel in loco qui deinceps est, vel in una asymptotôn continentium sectionem, vel in loco intermedio inter rectas continentes angulum ad verticem anguli Z Θ E.

Sit primum in sectione, ut A: & factum sit, & A H sectionem contingat, ducaturque perpendicularis A Δ, & B Γ sit transversum figuræ latus: erit itaque [per 36. 1.huj.] ut Γ Δ ad Δ B ita Γ H ad H B. sed [per 1. dat.] ratio Γ Δ ad Δ B est data, quia utraque data est: ratio igitur Γ H ad H B erit data. & est data B Γ: quare punctum H datum est. sed & ipsum A: ergo [per 26. dat.] A H data erit positione.



Componetur autem sic. Ducatur à puncto A perpendicularis A Δ, & fiat Γ H ad H B sicut Γ Δ ad Δ B, & jungatur A H: patet igitur rectam A H contingere sectionem.

Rursus sit datum punctum H in axe: & factum jam sit, ducaturque contingens A H, & A Δ perpendicularis. pari ratione erit [per 36.1. huj.] ut Γ H ad H B ita Γ Δ ad Δ B. & data est Γ B: ergo [per 7. dat.] punctum Δ datum. & est Δ A perpendicularis: quare positione data erit. & est sectio data positione: datum igitur [per 25. dat.] est A punctum. sed & ipsum H: ergo A H positione datur.



Componetur autem hoc modo. Ponantur alia eadem, & fiat ratio Γ Δ ad Δ B eadem quæ est Γ H ad H B; & ducta Δ A perpendiculari, jungatur A H: constat igitur [per 34. 1. huj.] ipsam A H problema conficere; & à puncto H rectam aliam duci posse, quæ sectionem ad alteras partes contingat.

Iisdem positis, sit datum punctum K in loco, qui intra angulum sub rectis E Θ Z conti-

ἡ Z A τεταγμένως, τουτέστι παράλληλος τῇ κατὰ τὸ H ἐφαπτομένῃ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Z A· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ A. ἀλλὰ καὶ τὸ Γ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Γ A.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἤχθω διὰ τοῦ Γ παράλληλος τῇ B Δ ἡ Γ Z, καὶ κείσθω τῇ Γ H ἡ Z H ἴση, καὶ τῇ κατὰ τὸ H ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἤχθω ἡ Z A, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ A Γ· φανερὸν δὴ ὅτι ποιήσει τὸ πρόβλημα.

ΕΣΤΩ πάλιν Ὑπερβολή, ἧς ἄξων ἡ Γ B Δ, κέντρον δὲ τὸ Θ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ Θ E, Θ Z· τὸ δὲ διδόμενον σημεῖον ἤτοι ἐπὶ τῆς τομῆς δοθήσεται, ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ἢ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν E Θ Z γωνίας, ἢ ἐν τῷ ἐφεξῆς τόπῳ, ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομήν, ἢ ἐν τῷ μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ὑπὸ Z Θ E γωνίας.

Ἔστω πρότερον ἐπὶ τῆς τομῆς, ὡς τὸ A· καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ A H, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ A Δ, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἔστω ἡ B Γ· ἔσται δὴ ὡς ἡ Γ Δ πρὸς Δ B οὕτως ἡ Γ H πρὸς H B. λόγος δὲ τῆς Γ Δ πρὸς Δ B δοθείς, δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα· λόγος ἄρα καὶ τῆς Γ H πρὸς H B δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ B Γ· δοθὲν ἄρα τὸ H. ἀλλὰ καὶ τὸ A· θέσει ἄρα ἡ A H.

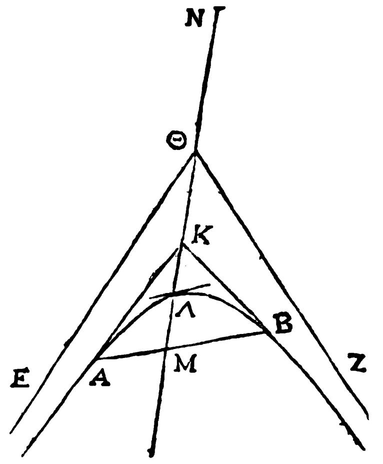
Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἤχθω ἀπὸ τοῦ A κάθετος ἡ A Δ, καὶ τῷ τῆς Γ Δ πρὸς Δ B λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς Γ H πρὸς H B, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ A H· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ A H ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ΠΑΛΙΝ δὴ ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ H· καὶ γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἡ A H ἐφαπτομένη, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ A Δ· κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται ὡς ἡ Γ H πρὸς H B οὕτως ἡ Γ Δ πρὸς Δ B. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ Γ B· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ Δ A· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Δ A. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ A. ἀλλὰ καὶ τὸ H· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ A H.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. Ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, καὶ τῷ τῆς Γ H πρὸς H B λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς Γ Δ πρὸς Δ B, καὶ ὀρθὴ ἤχθω ἡ Δ A, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ A H· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ A H ποιεῖ τὸ πρόβλημα, καὶ ὅτι ἀπὸ τοῦ H ἀχθήσεται ἑτέρα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη.

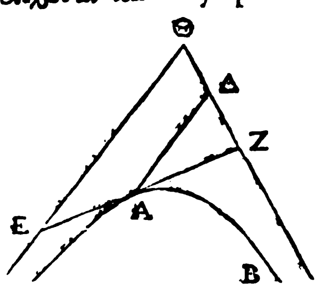
ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον, ἐν τῷ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν E Θ Z γωνίας τόπῳ, τὸ K, καὶ

Κ, καὶ δέον ἔστω ἀπὸ τοῦ Κ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ Κ Α, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Κ Θ ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω τῇ Λ Θ ἴση ἡ Θ Ν· πάντα ἄρα δοθέντα· ἔσται δὴ καὶ ἡ Λ Ν δοθεῖσα. ἤχθω δὲ τεταγμένως ἡ Α Μ ἐπὶ τὴν Μ Ν· ἔσται δὴ καὶ ὡς ἡ Ν Κ πρὸς Κ Λ οὕτως ἡ Μ Ν πρὸς Μ Λ. λόγος δὲ τῆς Ν Κ πρὸς Κ Λ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς Ν Μ πρὸς Μ Λ δοθείς. καί ἐστι δοθὲν τὸ Λ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Μ. καὶ παρατεταγμένως ἀνῆκται ἡ Μ Α τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ παράλληλος· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Μ Α. θέσει δὲ καὶ ἡ Α Λ Β τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἡ Α Κ.



Συντεθήσεται δὲ οὕτως. Υποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ, καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Κ Θ ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω ἴση τῇ Θ Λ ἡ Θ Ν, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ Ν Κ πρὸς Κ Λ οὕτως ἡ Ν Μ πρὸς Μ Λ, καὶ τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἤχθω ἡ Μ Α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Κ Α· ἡ Κ Α ἄρα ἐφάπτεται τῆς τομῆς. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ ἑτέρα ἀχθήσεται ἀπὸ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη.

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον, ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν, τὸ Ζ· καὶ δέον ἔστω ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ Ζ Α Ε, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ Ε Θ παράλληλος ἤχθω ἡ Α Δ· ἔσται δὴ ἴση ἡ Δ Θ τῇ Δ Ζ, ἐπεὶ καὶ ἡ Ζ Α τῇ Α Ε ἐστὶν ἴση. καὶ δοθεῖσα ἡ Ζ Θ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. καὶ διὰ δεδομένου τοῦ Δ παρὰ θέσει τὴν Ε Θ παράλληλος ἦκται ἡ Δ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Δ Α. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Ζ· θέσει ἄρα ἡ Ζ Α Ε.



Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστω ἡ τομὴ ἡ Α Β, καὶ αἱ Ε Θ, Θ Ζ ἀσύμπτωτοι, καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον, ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν, τὸ Ζ· καὶ τετμήσθω ἡ Ζ Θ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ Θ Ε παράλληλος ἤχθω ἡ Δ Α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ζ Α. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Ζ Δ τῇ Δ Θ, ἴση ἄρα καὶ ἡ Ζ Α τῇ Α Ε. ὥστε διὰ τὰ προδεδειγμένα ἡ Ζ Α ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐν τῷ ὑπὸ τὴν γωνίαν τὴν ἑξῆς τόπῳ τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν, καὶ ἔστω τὸ Κ· δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ Κ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ Κ Α, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Κ Θ ἐκβεβλήσθω· ἔσται δὴ θέσει. ἐὰν δὴ ἐπὶ τῆς τομῆς ληφθῇ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ Κ Θ παράλληλος ἀχθῇ ἡ Γ Δ, ἔσται θέσει. καὶ ἐὰν τμηθῇ ἡ

netur, & oporteat ab eo puncto rectam ducere, quæ sectionem contingat. Ponatur factum, & sit K A contingens, jungatur autem K Θ, & producatur ita ut ipsi Λ Θ sit æqualis Θ N: omnia igitur data erunt: quare & ipsa Λ N. ordinatim autem applicetur A M ad M N: & erit [per 36.1. huj.] ut N K ad K Λ ita N M ad M Λ. ratio autem N K ad K Λ est data: data igitur erit & ratio N M ad M Λ. estque punctum Λ datum: ergo [per 27. dat.] & punctum M datur. & ordinatim applicatur M A parallela ei quæ in Λ sectionem contingit: quare [per 28.dat.] & M A datur positione. at positione datur sectio A Λ B: ergo [per 25. dat.] & punctum A. sed & K datur; data igitur [per 26.dat.] erit A K.

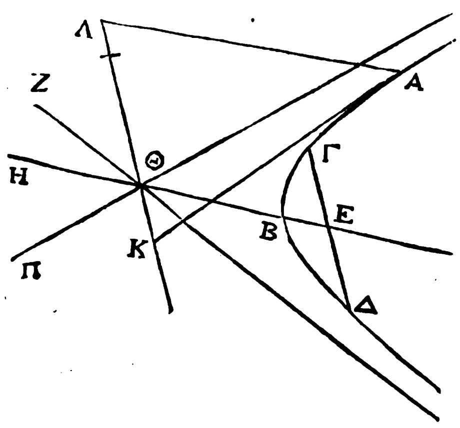
Componetur autem hoc modo. Ponantur alia eadem, & sit datum punctum K, junctaque K Θ producatur, & sit Θ N æqualis Θ Λ, & fiat ut N K ad K Λ ita N M ad M Λ, & rectæ in Λ sectionem contingenti, [per cas. 1. in hyperb. inventæ] parallela ducatur M A; & jungatur K A: ergo [per 34.1. huj.] K A contingit sectionem. & manifestum est ab eodem puncto K ad partes oppositas alteram duci posse quæ sectionem contingat.

Iisdem positis, sit punctum datum Z in una asymptoton continentium sectionem, oporteatque à puncto Z ducere rectam quæ sectionem contingat. Ponatur factum esse; & sit contingens Z A E, & per A ducatur A Δ ipsi E Θ parallela: erit igitur [per 2.6.] Δ Θ æqualis Δ Z, quoniam [per 3. 2. huj.] & Z A ipsi A E est æqualis. & [per 26.dat.] data est Z Θ: ergo [per 7. dat.] & punctum Δ datum. data quoque est [per 28.dat.] positione Δ A, quæ nempe per Δ ducta ipsi Θ E positione datæ parallela est; & sectio data est positione: ergo & punctum A datur. sed & Z [ex hyp.] datum: recta igitur Z A E positione data erit.

Componetur autem hoc pacto. Sit sectio A B, cujus asymptoti E Θ, Θ Z, & datum punctum Z sit in una asymptoton sectionem continentium. & secetur [per 10.1.] Z Θ bifariam in Δ, ducaturque [per 30. 1.] per Δ recta Δ A ipsi Θ E parallela, & jungatur Z A. & quoniam Z Δ est æqualis Δ Θ, & Z A [per 2.6. & 9.5.] ipsi A E æqualis erit. quare ex iis, quæ [ad 9.2. huj.] demonstrata sunt, Z A sectionem contingit.

Iisdem positis, sit datum punctum K in loco qui deinceps est angulo sectionem continenti, & oporteat ab ipso K rectam ducere, quæ contingat sectionem. factum sit, & sit K A, junctaque K Θ producatur. erit igitur [per 26. dat.] positione data. si ideo in sectione sumatur punctum Γ, & per Γ ducatur Γ Δ ipsi K Θ parallela; erit [per 28. dat.] Γ Δ positione data. ac si Γ Δ bifariam

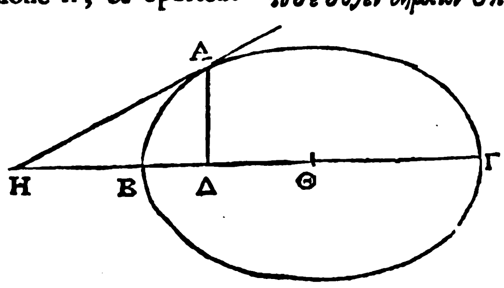
fariam secetur in E, junctaque Θ E producatur; & positione data erit, diameter scilicet ipsi K Θ conjugata. ponatur Θ H æqualis B Θ, & per A ducatur A Λ parallela B H. quoniam igitur K Λ, B H conjugatæ diametri sunt, & A K sectionem contingit, ipsique B H parallela ducta est A Λ: erit [per 38. 1. huj.] K Θ Λ æquale quartæ parti figuræ quæ ad B H constituitur; quare & ipsum datum erit. est autem [per 26. dat.] K Θ data: ergo [per 57. dat] & Θ Λ. sed & positione, & est datum punctum Θ: ergo & Λ. & per Λ ducta est Λ A parallela ipsi B H positione datæ: igitur [per 28. dat.] ipsa positione dabitur. sed & sectio etiam datur positione: quare [per 25. dat.] & A punctum. sed & punctum K datur: ergo [per 26. dat.] A K positione data erit.



Componetur autem sic. Ponantur alia eadem, sitque datum punctum K in loco supra descripto: & juncta K Θ producatur, & sumpto in sectione puncto Γ ducatur Γ Δ ipsi K Θ parallela, & Γ Δ bifariam in E secetur, junctaque E Θ producatur, & ipsi B Θ ponatur æqualis Θ H: ergo H B transversa diameter est ipsi K Θ Λ conjugata. ponatur vero quartæ parti figuræ quæ est ad B H æquale rectangulum K Θ Λ, perque Λ ipsi B H parallela ducatur Λ A, & jungatur K A. patet igitur K A sectionem contingere, per conversam trigesimi octavi theorematis primi libri.

At si datum punctum sit in loco inter Z Θ Π interjecto, problema erit impossibile. recta enim contingens secabit H Θ, & utrique ipsarum Z Θ, Θ Π occurret; quod est absurdum, ex iis quæ in trigesimo primo theoremate primi libri, & in tertio hujus demonstrata sunt.

Iisdem positis, sit sectio data Ellipsis, datum vero punctum in sectione A; & oporteat ab ipso A ducere rectam quæ sectionem contingat. Ponatur factum; sitque ea recta A H, & ab A ad B Γ axem ordinatim applicetur A Δ: erit igitur [per 47. 2. huj.] punctum Δ datum, & [per 36. 1. huj.] ut Γ Δ ad Δ B ita erit Γ H ad H B. sed [per 1. dat.] ratio Γ Δ ad Δ B data est: ergo & ratio Γ H ad H B data erit; & idcirco [per 2. dat.] punctum H. sed & A datur: quare & A H erit positione data.



Componetur autem hoc pacto. ducatur perpendicularis A Δ, & ipsius Γ H ad H B ratio eadem sit [per 10. 6.] quæ ratio Γ Δ ad Δ B, jungaturque A H: constat igitur [per 34. 1. huj.] A H sectionem contingere, sicut in hyperbola.

Sit rursus datum punctum K, à quo oporteat rectam contingentem ducere. factum sit, & sit ea recta K A, ductaque K Λ Θ per Θ centrum

Γ Δ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Θ Ε ἐκβεβλήσθω· καὶ ἔσται θέσει, διάμετρος οὖσα συζυγὴς τῇ Κ Θ. κείσθω δὴ τῇ Β Θ ἴση ἡ Θ Η, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ Β Η παράλληλος ἤχθω ἡ Α Λ· ἔσται δὴ, διὰ τὸ εἶναι τὰς Κ Λ, Β Η συζυγεῖς διαμέτρους, καὶ ἐφαπτομένην τὴν Α Κ, καὶ τὴν Α Λ ἀχθεῖσαν παρὰ τὴν Β Η, τὸ ὑπὸ τῶν Κ Θ Λ ἴσον τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ Β Η εἴδους· δοθὲν ἄρα τὸ ὑπὸ Κ Θ Λ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ Κ Θ, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Θ Λ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Θ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Λ. καὶ διὰ τοῦ Λ παρὰ θέσει τὴν Β Η ἦκται ἡ Λ Α, θέσει ἄρα ἡ Λ Α. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ· θέσει ἄρα ἡ Α Κ·

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ ἐν τῷ προειρημένῳ τόπῳ· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Κ Θ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Γ, καὶ παρὰ τὴν Κ Θ παράλληλος ἤχθω ἡ Γ Δ, καὶ τετμήσθω ἡ Γ Δ δίχα τῷ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Ε Θ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ Β Θ ἴση κείσθω ἡ Θ Η· ἡ ἄρα Η Β πλαγία διάμετρός ἐστι συζυγὴς τῇ Κ Θ Λ. κείσθω δὲ τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν Β Η εἴδους ἴσον τὸ ὑπὸ Κ Θ Λ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ Β Η παράλληλος ἤχθω ἡ Λ Α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Κ Α· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ Κ Α ἐφάπτεται τῆς τομῆς, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ λη΄. τοῦ πρώτου βιβλίου.

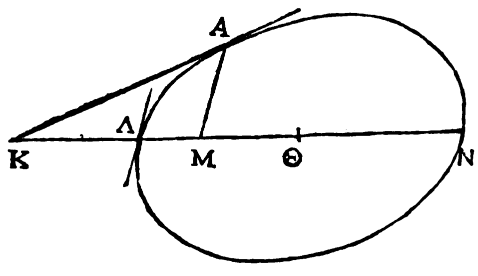
ΕΑΝ δὲ ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν Ζ Θ Π δοθῇ, ἀδύνατον ἔσται τὸ πρόβλημα. ἡ γὰρ ἐφαπτομένη τεμεῖ τὴν Η Θ· ὥστε συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν Ζ Θ, Θ Π, ὅπερ ἀδύνατον, διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ λα΄. τοῦ πρώτου, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τούτου βιβλίου.

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω ἡ τομὴ ἔλλειψις, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Α· καὶ δέον ἔστω ἀπὸ τοῦ Α ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ Α Η, καὶ τεταγμένως ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸν Β Γ ἄξονα ἤχθω ἡ Α Δ· ἔσται δὴ δοθὲν τὸ Δ, καὶ ἔσται ὡς ἡ Γ Δ πρὸς Δ Β οὕτως ἡ Γ Η πρὸς Η Β. καὶ ἔστι λόγος τῆς Γ Δ πρὸς Δ Β δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς Γ Η πρὸς Η Β δοθείς· δοθὲν ἄρα τὸ Η. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Α Η.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. κάθετος ἤχθω ἡ Α Δ, καὶ τῷ τῆς Γ Δ πρὸς Δ Β λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς Γ Η πρὸς Η Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Α Η. φανερὸν δὴ ὅτι ἡ Α Η ἐφάπτεται, ὥσπερ καὶ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς.

ΕΣΤΩ δὲ πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ, καὶ δέον ἔστω ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ Κ Α, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Κ Λ Θ ἐπὶ τὸ Θ κέντρον ἐκβεβλήσθω

ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ν· ἔσται δὴ θέσει. καὶ ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΜ τεταγμένως, ἔσται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΜΛ. λόγος δὲ τῆς ΚΝ πρὸς ΚΛ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΜΝ πρὸς ΛΜ δοθείς· δοθὲν ἄρα τὸ Μ. καὶ ἀνῆκται ἡ ΜΑ, παράλληλος γάρ ἐστι τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ· θέσει ἄρα ἡ ΜΑ, δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ· θέσει ἄρα ἡ ΚΑ. ἡ δὲ σύνθεσις ἡ αὐτὴ τῇ πρὸ αὐτοῦ.

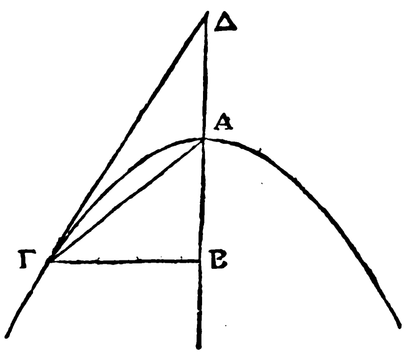


producatur in N: erit igitur ea positione data. & si AM ordinatim applicetur, erit [per 36. 1. huj.] ut NK ad KΛ ita NM ad MΛ. ratio autem KN ad KΛ [per 1. dat.] est data: ergo & data est ratio MN ad ΛM; quare [per 7. dat.] & punctum M datur. & ordinatim applicatur MA, parallela nempe rectæ in Λ contingenti: ergo MA positione datur, & idcirco punctum A. sed & ipsum K est datum: igitur KA positione datur. Compositio autem eadem est quæ supra.

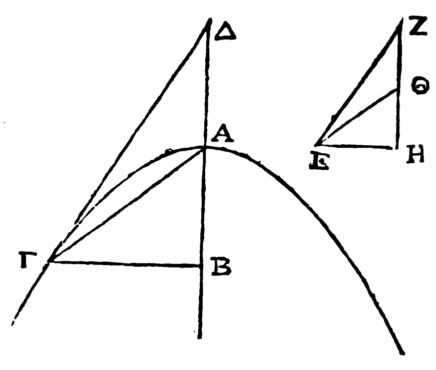
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι γωνίαν ποιήσει, ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ, ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ πρότερον Παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς, ἥτις πρὸς τῷ ΑΒ ἄξονι γωνίαν ποιήσει, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ τομῇ, ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία. ἤχθω κάθετος ἡ ΒΓ· ἔστι δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Β δοθεῖσα· λόγος ἄρα τῆς ΔΒ πρὸς ΒΓ δοθείς. τῆς δὲ ΒΔ πρὸς ΒΑ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ πρὸς τὸ Β γωνία· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. καὶ ἔστι πρὸς θέσει τῇ ΒΑ καὶ δοθέντι τῷ Α· θέσει ἄρα ἡ ΓΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Γ. καὶ ἐφάπτεται ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.



Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον Παραβολή, ἧς ἄξων ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ· καὶ εἰλήφθω σημεῖον ἐπὶ τῆς ΕΖ τὸ Ε, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΗ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΖΗ τῷ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΕ, καὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΗΘΕ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΒΓ, καὶ τῇ ΒΑ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ· ἐφαπτομένη ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς τομῆς. λέγω δὴ ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΒ τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖΗ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ΘΗ πρὸς ΗΕ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Η, Β γωνίαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ Δ γωνίᾳ.



Prop. L. *Probl.*

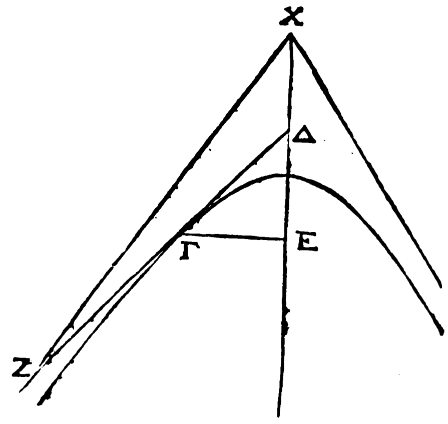
Datâ coni sectione, contingentem ducere, quæ cum axe, versus partes sectionis, angulum faciat dato angulo acuto æqualem.

SIT coni sectio primum Parabola, cujus axis AB: oporteat itaque rectam ducere quæ sectionem contingat, quæque cum AB faciat angulum ad partes sectionis dato angulo acuto æqualem. Ponatur factum esse, & sit ΓΔ: datus igitur est BΔΓ angulus. ducatur perpendicularis BΓ: est igitur angulus ad B datus; quare [per 40. dat.] data est ratio ΔB ad BΓ. sed [per 35. 1. huj.] ratio ΔB ad BA est data: ratio igitur AB ad BΓ [per 8. dat.] data erit. & datus est angulus qui ad B: ergo & BAΓ angulus est datus. & est ad rectam BA positione datam & ad datum punctum A: igitur ΓA positione dabitur. at sectio data est positione: ergo punctum Γ datum. & ΓΔ sectionem contingit: quare & positione data erit.

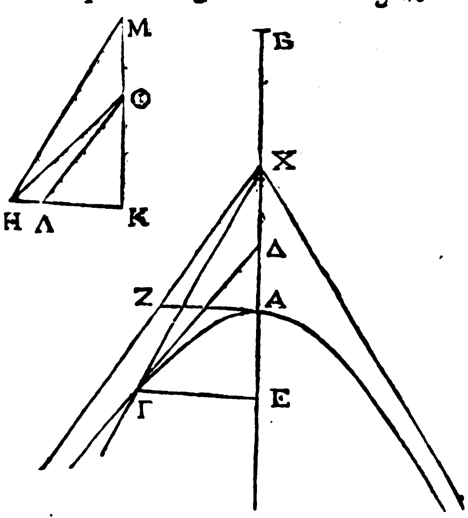
Componetur autem problema hoc modo. Sit data coni sectio primum Parabola, cujus axis AB, datus autem angulus acutus EZH, sumptoque in EZ puncto E, ducatur perpendicularis EH, & ZH in Θ bifariam secetur, & jungatur ΘE, & angulo HΘE æqualis constituatur angulus BAΓ; & ducta perpendiculari BΓ ipsi BA ponatur æqualis AΔ, jungaturque ΓΔ: ergo [per 35. 1. huj.] ΓΔ sectionem contingit. dico itaque angulum ΓΔB angulo EZH æqualem esse. quoniam enim [per constr.] est ut ZH ad HΘ ita ΔB ad BA, & est ut ΘH ad HE ita AB ad BΓ: erit ex æquali [per 22. 5.] ut ZH ad HE ita ΔB ad BΓ. sed [per constr.] anguli qui ad H, B recti sunt: angulus igitur Z [per 6. 6.] angulo Δ est æqualis.

Sit

SIT sectio Hyperbola, ponaturque factum, & recta ΓΔ sectionem contingat: sumptoque X sectionis centro jungatur ΓX, & ΓE perpendicularis ducatur: ergo data est ratio rectanguli XEΔ ad quadratum ex EΓ; eadem enim est [per 37.1.huj.] quæ transversi lateris ad rectum. ratio autem quadrati ex ΓE ad quadratum ex EΔ est data, quia datus est uterque angulorum ΓΔE, ΔEΓ: quare & rectanguli XEΔ ad quadratum ex EΔ ratio data est, ideoque ratio XE ad EΔ data. sed [per 40.dat.] datur ratio ΓE ad EΔ; quare [per 8. dat.] & ratio XE ad EΓ data est. & angulus qui ad E est datus: ergo [per 2. dat.] & qui ad X. & ad rectam XE positione datam, & ad datum in ea punctum X, ducta est XΓ in dato angulo: ergo & ΓX positione dabitur. data est autem & ipsa sectio positione: quare & Γ punctum. & [per 49. 2.huj.] ducta est ΓΔ contingens: igitur ΓΔ est positione data. ducatur ZX sectionis asymptotos: ergo [per 3. 2. huj.] ΓΔ producta asymptoto occurret. occurrat in Z: erit igitur ZΔE angulus angulo ZXΔ major. & propterea, in compositione problematis, oportebit datum angulum acutum majorem esse quam est dimidius ejus qui ab asymptotis continetur.



Componetur itaque problema hoc modo. Sit data hyperbola, cujus axis quidem AB, asymptotos autem XZ, & datus angulus acutus sit KΘH, qui sit major angulo AXZ: fiatque [per 23.1.] angulo AXZ æqualis angulus KΘΛ, & à puncto A ad rectos angulos ipsi AB ducatur AZ, in HΘ vero sumatur aliquod punctum H, à quo ad ΘK perpendicularis ducatur HK. quoniam igitur angulus ZXA angulo ΛΘK est æqualis, & anguli ad A, K recti sunt; erit [per 4, 6.] ut XA ad AZ ita ΘK ad KΛ. sed [per 8.5.] ΘK ad KΛ majorem rationem habet quam ΘK ad KH: ergo quadratum ex XA ad quadratum ex AZ majorem habet rationem quam quadratum ex ΘK ad quadratum ex KH. ut autem quadratum ex XA ad quadratum ex AZ ita [per 1. 2.huj.] transversum figuræ latus ad rectum: quare transversum figuræ latus ad rectum majorem rationem habet quam quadratum ex ΘK ad quadratum ex KH. itaque si fiat ut quadratum ex XA ad quadratum ex AZ ita aliud quoddam ad quadratum ex KH: erit illud quadrato ex ΘK majus. sit rectangulum MKΘ, & jungatur HM. igitur quoniam quadratum ex MK majus est rectangulo MKΘ; habebit quadratum ex MK ad quadratum ex KH majorem rationem quam rectangulum



ΕΣΤΩ ἡ τομὴ ὑπερβολή, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς τομῆς τὸ X, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓX, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΓE· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν XEΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EΓ δοθείς, ὁ αὐτὸς γάρ ἐστι τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν. τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς ΓE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EΔ λόγος ἐστὶ δοθείς, δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔE, ΔEΓ γωνιῶν· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ XEΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EΔ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς XE πρὸς EΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΓE πρὸς τὴν EΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς XE πρὸς ΓE λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ δοθεῖσα ἡ πρὸς τὸ E· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ X. πρὸς δὲ θέσει εὐθεία τῇ XE καὶ δοθέντι τῷ X διῆκταί τις ἡ ΓX ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ· θέσει ἄρα ἡ ΓX. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Γ. καὶ διῆκται ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἡ ΓΔ. ἤχθω ἀσύμπτωτος τῆς τομῆς ἡ ZX· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ἀσυμπτώτῳ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Z· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ZΔE γωνία τῆς ὑπὸ ZXΔ. δεήσει ἄρα, εἰς τὴν σύνθεσιν, τὴν δεδομένην ὀξεῖαν γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων.

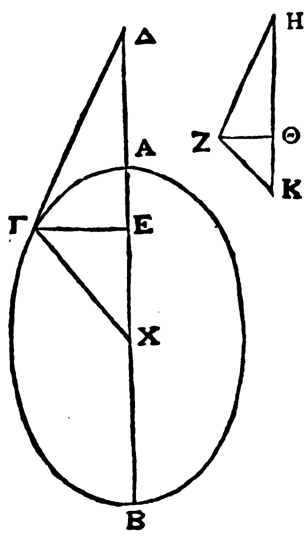
Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἧς ἄξων AB, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ XZ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα, μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ τῶν AXZ, ἡ ὑπὸ KΘH· καὶ ἔστω τῇ ὑπὸ τῶν AXZ ἴση ἡ ὑπὸ KΘΛ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ AZ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς HΘ τὸ H, καὶ ἤχθω ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΘK κάθετος ἡ HK. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ZXA τῇ ὑπὸ ΛΘK, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς A, K γωνίαι ὀρθαί· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ XA πρὸς AZ οὕτως ἡ ΘK πρὸς KΛ. ἡ δὲ ΘK πρὸς KΛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘK πρὸ KH· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ XA πρὸς τὸ ἀπὸ AZ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΘK πρὸς τὸ ἀπὸ KH. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ XA πρὸς τὸ ἀπὸ AZ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· ἡ πλαγία ἄρα πρὸς τὴν ὀρθίαν μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΘK πρὸς τὸ ἀπὸ KH. ἐὰν δὴ ποιήσωμεν ὡς τὸ ἀπὸ XA πρὸς τὸ ἀπὸ AZ οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ἀπὸ KH, μεῖζον ἔσται τοῦ ἀπὸ ΘK. ἔστω τὸ ὑπὸ MKΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HM. ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ MK τοῦ ὑπὸ MKΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ MK πρὸς τὸ ἀπὸ KH μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ MKΘ πρὸς τὸ ἀπὸ KH, ΚΗ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς ἄλλό τι· ἔσται πρὸς ἔλαττον τοῦ ἀπὸ ΑΖ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ὅμοια ποιήσει τρίγωνα· καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΧΑ τῆς ὑπὸ ΗΜΚ. κείσθω δὴ τῇ ὑπὸ ΗΜΚ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΧΓ· ἡ ἄρα ΧΓ τεμεῖ τὴν τομήν. τεμνέτω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ κάθετος ἡ ΓΕ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΧΕ τρίγωνον τῷ ΗΜΚ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ οὕτω τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τό τε ὑπὸ ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, καὶ τὸ ὑπὸ ΜΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΚΘ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΚΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΕ πρὸς ΕΔ οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΚΘ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΧ οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς ΚΜ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Κ γωνίαι· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΘΚ.

ΕΣΤΩ ἡ τομὴ Ἔλλειψις, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ· δεῖ δὲ ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν τῆς τομῆς, ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι, ἐπὶ ταυτὰ τῇ τομῇ, ἴσην γωνίαν περιέξει τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ. Γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΑ γωνία. ἤχθω κάθετος ἡ ΓΕ· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ δοθείς. ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΧ· τοῦ δὴ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς, ὁ γὰρ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΔΕ ἄρα πρὸς ΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΔΕ πρὸς ΕΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς ΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστιν ὀρθὴ πρὸς τῷ Ε· δοθεῖσα ἄρα ἡ πρὸς τῷ Χ γωνία. καὶ ἔστι πρὸς θέσει δοθείσῃ καὶ δοθέντι σημείῳ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Γ σημεῖον. καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἡ ΓΔ.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ τῶν ΖΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΖΗ τὸ Ζ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΖ. ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΗΚΖ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΑΧΓ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΓΕ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ποιεῖ τὸ πρόβλημα,

ΜΚΘ ad quadratum ex ΚΗ, hoc est majorem quam quadratum ex ΧΑ ad quadratum ex ΑΖ. ac si fiat ut quadratum ex ΜΚ ad quadratum ex ΚΗ, ita quadratum ex ΧΑ ad aliud quoddam: erit id minus quadrato ex ΑΖ; & recta quæ à Χ ad sumptum punctum ducitur, triangula similia efficiet: ac propterea angulus ΖΧΑ angulo ΗΜΚ erit major. ponatur itaque angulo ΗΜΚ æqualis angulus ΑΧΓ: ergo [per 2.2.huj.] ΧΓ sectionem secabit. secet in Γ, & [per 49.2.huj.] à Γ ducatur ΓΔ sectionem contingens, & ΓΕ ad axem ΑΒ perpendicularis: triangulum igitur ΓΧΕ [per 4. 6.] simile est triangulo ΗΜΚ: quare [per 22. 6.] ut quadratum ex ΧΕ ad quadratum ex ΕΓ ita quadratum ex ΜΚ ad quadratum ex ΚΗ. est autem ut transversum figuræ latus ad rectum ita [per 37. 1.huj.] rectangulum ΧΕΔ ad quadratum ex ΕΓ, & ita [per constr.] rectangulum ΜΚΘ ad quadratum ex ΚΗ, & invertendo ut quadratum ex ΓΕ ad rectangulum ΧΕΔ ita quadratum ex ΗΚ ad rectangulum ΜΚΘ: ex æquali igitur [per 22.5.] ut quadratum ex ΧΕ ad rectangulum ΧΕΔ ita quadratum ex ΜΚ ad rectangulum ΜΚΘ: est igitur [per 1.6.] ut ΧΕ ad ΕΔ ita ΜΚ ad ΚΘ. sed ut ΓΕ ad ΕΧ ita erat [per constr.] ΗΚ ad ΚΜ: quare ex æquali ut ΓΕ ad ΕΔ ita ΗΚ ad ΚΘ. & sunt anguli ad Ε, Κ recti: angulus igitur ad Δ [per 6.6.] angulo ΗΘΚ est æqualis.

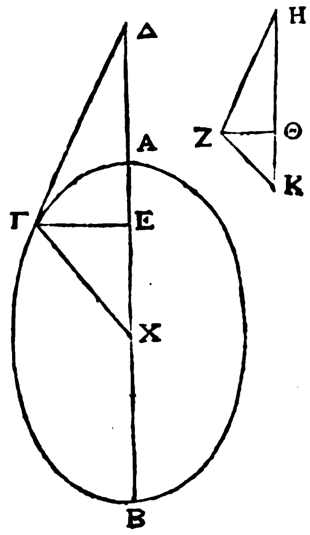
Sit sectio Ellipsis cujus axis ΑΒ: & oporteat rectam ducere, quæ sectionem contingat, & cum axe ad partes sectionis faciat angulum dato angulo acuto æqualem. Factum sit, & sit ΓΔ: ergo angulus ΓΔΑ est datus. ducatur perpendicularis ΓΕ: ratio igitur quadrati ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΓ [per 4. & 22. 6.] data est. sit sectionis centrum Χ, & jungatur ΓΧ: erit igitur [per 37. 1.huj.] ratio quadrati ex ΓΕ ad rectangulum ΔΕΧ data; eadem enim est quæ ratio recti lateris ad transversum: ergo dabitur [per 8. dat.] ratio quadrati ex ΔΕ ad rectangulum ΔΕΧ, & idcirco [per 1. 6.] ratio ΔΕ ad ΕΧ. ratio autem ΔΕ ad ΕΓ est data: data igitur est & ratio ΓΕ ad ΕΧ. & angulus qui est ad Ε rectus est: ergo [per 41.dat.] datur angulus ad Χ. & est ad rectam positione datam, & ad datum punctum: quare [per 29. & 25. dat.] datum erit punctum Γ, & à dato puncto Γ ducitur ΓΔ sectionem contingens: ergo est positione data recta ΓΔ.



Componetur autem problema hoc modo. Sit datus angulus acutus ΖΗΘ, sumaturque in ΖΗ punctum Ζ, & [per 12. 1.] ΖΘ perpendicularis ducatur, & fiat ut rectum latus ad transversum ita quadratum ex ΖΘ ad rectangulum ΗΘΚ, & jungatur ΚΖ. sit sectionis centrum Χ, & [per 23.1.] angulo ΗΚΖ æqualis constituatur angulus ΑΧΓ, & demittatur perpendicularis ΓΕ, & [per 49.2.huj.] ducatur ΓΔ sectionem contingens: dico rectam ΓΔ conficere proble-

 ma,

ma, hoc est angulum ΓΔΕ angulo ΖΗΘ æqualem esse. quoniam enim [per 4. 6.] ut ΧΕ ad ΕΓ ita ΚΘ ad ΖΘ: erit [per 22.6.] ut quadratum ex ΧΕ ad quadratum ex ΕΓ ita quadratum ex ΚΘ ad ipsum quadratum ex ΖΘ. est autem ut quadratum ex ΓΕ ad rectangulum ΔΕΧ ita quadratum ex ΖΘ ad rectangulum ΚΘΗ; utraque enim ratio eadem est [per 37. 1. huj. & constr.] quæ recti lateris ad transversum: igitur ex æquali ut quadratum ex ΧΕ ad rectangulum ΧΕΔ ita quadratum ex ΚΘ ad rectangulum ΗΘΚ: ergo [per 1. 6.] ut ΧΕ ad ΕΔ ita est ΚΘ ad ΘΗ. estque [per 4. 6.] ut ΧΕ ad ΕΓ ita ΚΘ ad ΖΘ: ex æquali igitur ut ΔΕ ad ΕΓ ita ΗΘ ad ΖΘ. & circa rectos angulos latera sunt proportionalia: ergo [per 6. 6.] angulus ΓΔΕ angulo ΖΗΘ est æqualis: recta igitur ΓΔ problema conficit.



τουτέστιν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΖΗΘ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΧΕ πρὸς ΕΓ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΧΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘΗ, ἑκάτερος λόγος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΗ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΧΕ πρὸς ΕΓ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΖΘ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ περὶ ὀρθὰς γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογον· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΔΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση· ἡ ΓΔ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

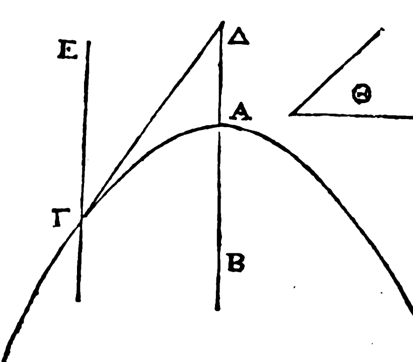
Prop. LI. *Probl.*

Rectam datam coni sectionem contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto æqualem.

SIT data coni sectio primum Parabola, cujus axis AB, & datus angulus sit Θ: oportet vero ducere rectam, quæ parabolam contingat, & cum diametro per tactum ductâ contineat angulum æqualem dato angulo Θ. factum sit, & contingens sit ΓΔ, faciens cum diametro ΕΓ per tactum ducta angulum ΕΓΔ angulo Θ æqualem, & ΓΔ axi in puncto Δ occurrat. quoniam igitur [per 46. 1. huj.] ΑΔ est parallela ΕΓ, angulus ΑΔΓ angulo ΕΓΔ est æqualis. & datus est angulus ΕΓΔ; est enim [ex hyp.] æqualis angulo Θ: ergo & ΑΔΓ angulus datus erit.

Componetur itaque hoc modo. Sit parabola cujus axis AB, & datus angulus Θ. ducatur [per præced.] ΓΔ sectionem contingens, quæ cum axe faciat angulum ΑΔΓ æqualem angulo Θ; & per Γ ducatur ΕΓ ipsi AB parallela. quoniam igitur angulus Θ angulo ΑΔΓ est æqualis; angulus autem ΑΔΓ est æqualis ipsi ΕΓΔ: ideo angulus Θ angulo ΕΓΔ æqualis erit.

Sit sectio Hyperbola, cujus axis AB, centrum E, & asymptotos ET; datus autem angulus sit Ω, & ΓΔ sectionem contingat, jungaturque ΓΕ conficiens problema, & ΓΗ perpendicularis ducatur: itaque [datâ sectione] ratio transversi lateris ad rectum data est; igitur & [per 37. 1. huj.] data ratio rectanguli ΕΗΔ ad qua-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

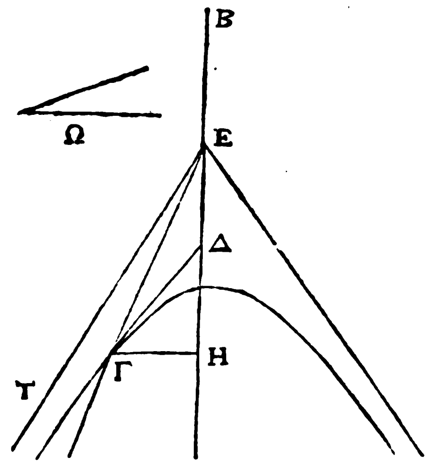
Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην, ἥτις πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ ἴσην περιέξει γωνίαν τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ.

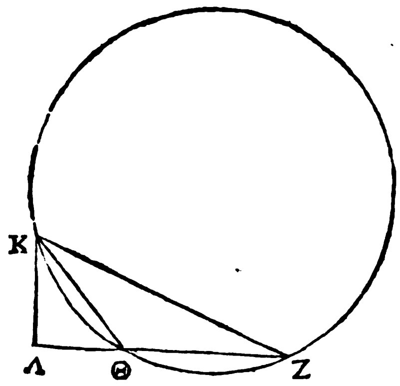
ΕΣΤΩ ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον Παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ· δεῖ δὴ ἀγαγεῖν τῆς παραβολῆς ἐφαπτομένην, ἥτις μετὰ τῆς ἀπὸ τῆς ἁφῆς διαμέτρου ἴσην περιέξει γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Θ. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, ποιοῦσα πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ τῇ ΕΓ τὴν ὑπὸ ΕΓΔ γωνίαν ἴσην τῇ Θ· καὶ συμπιπτέτω ἡ ΓΔ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΕΓ· ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστί. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΕΓΔ, ἴση γάρ ἐστι τῇ Θ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. Ἔστω παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ. ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ, ποιοῦσα πρὸς τῷ ἄξονι τὴν ὑπὸ τῶν ΑΔΓ γωνίαν ἴσην τῇ Θ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΓ. ἐπεὶ οὖν ἡ Θ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΔΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΓΔ· καὶ ἡ Θ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΓΔ.

ΕΣΤΩ ἡ τομὴ Ὑπερβολή, ἧς ἄξων ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΕΤ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ Ω, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ ποιοῦσα τὸ πρόβλημα, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΓΗ· δοθεὶς ἄρα λόγος ἐστὶ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ

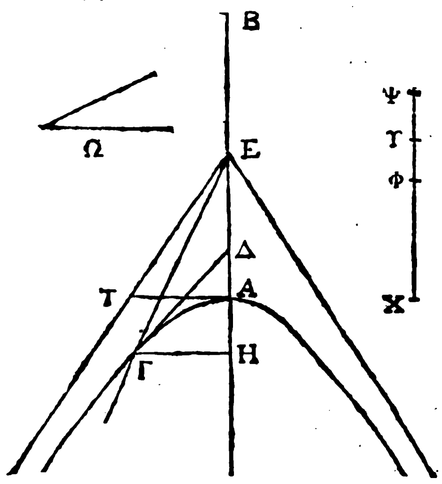
ἀπὸ ΓΗ. ἐκκείσθω δέ τις εὐθεῖα δεδομένη ἡ ΖΘ, καὶ ἐπ' αὐτῆς γεγράφθω κύκλου τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Ω· ἔστιν ἄρα μεῖζον ἡμικυκλίου. καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Κ ἤχθω κάθετος ἡ ΚΛ, ποιοῦσα τὸν τοῦ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΚ, ΚΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ

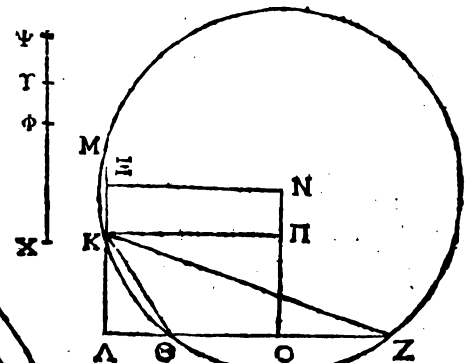




ὑπὸ ΖΚΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΔ· ἀλλὰ καὶ ἔστιν ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τό τε ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ, καὶ τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· *ὅμοιον ἄρα τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΓΕΗ τριγώνῳ, καὶ τὸ ΖΘΚ τῷ ΕΔΓ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΖΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΕΔ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΕΤ· ἡ δὲ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία ἡ Ω, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΨΧ πρὸς ΧΦ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΨΦ κατὰ τὸ Υ. ἐκκείσθω δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΖΘ, καὶ ἐπ' αὐτῆς γεγράφθω τμῆμα κύκλου μεῖ-





ζον ἡμικυκλίου δεχόμενον γωνίαν τῇ Ω ἴσην, καὶ ἔστω τὸ ΖΚΘ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ν, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὴν ΖΘ κάθετος ἤχθω ἡ ΝΟ, καὶ τετμήσθω ἡ ΝΟ εἰς τὴν τῆς ΥΦ πρὸς ΦΧ λόγον κατὰ τὸ Π, καὶ διὰ τοῦ Π τῇ ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΠΚ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΛ ἐπὶ τὴν ΖΘ ἐκβληθεῖσαν, καὶ ἐπεζεύχθω-

dratum ex ΓΗ. exponatur recta quævis data ΖΘ, & [per 33.3.] ſuper ipſam circuli portio deſcribatur capiens angulum æqualem angulo Ω; erit igitur ſemicirculo major. & ab aliquo puncto eorum quæ ſunt in circumferentia, nempe Κ, ducatur perpendicularis ΚΛ, faciens rationem rectanguli ΖΛΘ ad quadratum ex ΛΚ, eandem quæ eſt tranſverſi lateris ad rectum, & junganitur ΖΚ, ΚΘ. quoniam igitur angulus ΖΚΘ eſt æqualis angulo ΕΓΔ; eſt etiam ut tranſverſum latus ad rectum ita [per 37.1. huj.] & rectangulum ΒΗΔ ad quadratum ex ΓΗ, & [ex hyp.] ita rectangulum ΖΛΘ ad quadratum ex ΛΚ: *erit triangulum ΚΖΛ triangulo ΓΕΗ ſimile; & triangulum ΖΘΚ ſimile triangulo ΕΔΓ: quare angulus ΚΖΘ angulo ΓΕΔ eſt æqualis.

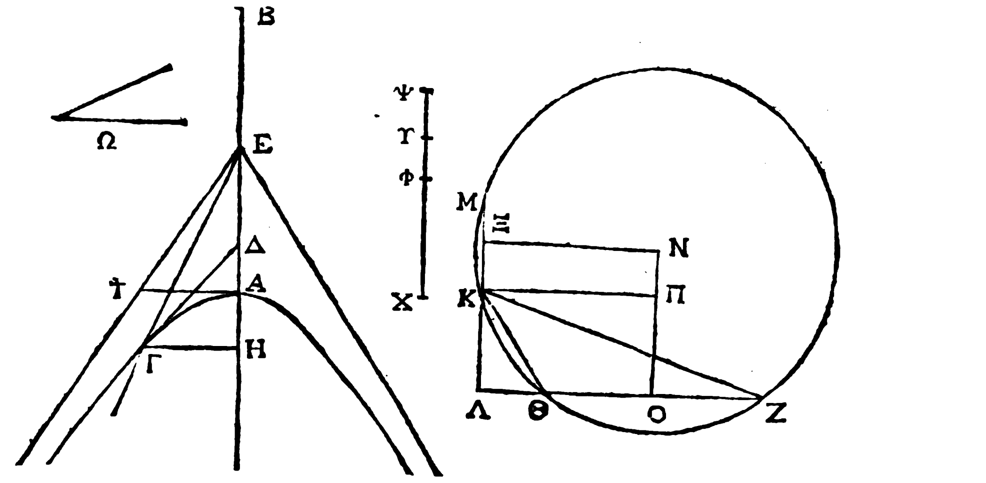
Componetur autem hoc modo. Sit data hyperbola ΑΓ, cujus axis ΑΒ, centrum vero Ε, & aſymptotos ΕΤ: datus autem angulus acutus ſit Ω, & data ratio tranſverſi lateris ad rectum ſit eadem quæ ΨΧ ad ΧΦ, & [per 10.1.] ΨΦ in Υ bifariam ſecetur. exponatur data recta ΖΘ, & ſuper ipſam circuli portio major ſemicirculo [per 33.3.] deſcribatur, capiens angulum æqualem angulo Ω, ſitque ΖΚΘ; ſumatur autem [per 1.3.] circuli centrum Ν, à quo ad rectam ΖΘ perpendicularis demittatur ΝΟ, & [per 10.6.] ΝΟ ſecetur in Π, ita ut ΝΠ ad ΠΟ eandem habeat rationem quam ΥΦ ad ΦΧ, & [per 30.1.] per Π ipſi ΖΘ parallela ducatur ΠΚ, & à puncto Κ ad ΖΘ productam perpendicularis ΚΛ demittatur, & jungantur ΖΚ, ΚΘ,

* Per converſam Lemmatis 9. *Pappi*: & adhuc plenius per Lem. 3. in librum VI. quod ſane huc pertinere videtur.

producaturque

producaturque ΛK ad M, & à N ad ipsam ducatur NΞ perpendicularis: parallela est igitur [per 28. 1.] NΞ ipsi ZΘ, propterea que ut NΠ ad ΠO, hoc est ΥΦ ad ΦX, ita ΞK ad KΛ, & antecedentium dupla, ut ΨΦ ad ΦX ita [per 3. 3.] MK ad KΛ; componendoque [per 18.5.] ut ΨX ad XΦ ita MΛ ad ΛK. sed ut MΛ ad ΛK ita [per 1.6.] rectangulum MΛK ad quadratum ex ΛK: ut igitur ΨX ad XΦ ita rectangulum MΛK ad quadratum ex ΛK; hoc est [per 36.3.] rectangulum ZΛΘ ad quadratum ex ΛK. ut autem ΨX ad XΦ ita [per constr.] transversum latus ad rectum: ergo ut rectangulum ZΛΘ ad quadratum ex ΛK ita transversum latus ad rectum. ducatur à puncto A recta AT normalis ipsi AB. & quoniam [per 1. 2. huj.] ut quadratum ex EA ad quadratum ex AT ita est transversum latus ad rectum; & ut transversum latus ad rectum ita rectangulum ZΛΘ ad quadratum ex ΛK; quadratum autem ex ZΛ ad quadratum ex ΛK majorem rationem habet quam rectangulum ZΛΘ ad quadratum ex ΛK: habebit igitur quadratum ex ZΛ ad quadratum ex ΛK majorem rationem quam quadratum ex EA ad quadratum ex AT. & sunt anguli ad A, Λ recti: angulus igitur Z [per 6.lem.2.] angulo AET minor erit. itaque [per 23.1.] constituatur angulus AEΓ æqualis angulo ΛZK: ergo [per 2. 2.huj.] EΓ sectioni occurret. occurrat in puncto Γ, & à Γ ducatur [per 49.2.huj.] ΓΔ contingens sectionem, & ΓH perpendicularis: erit itaq; [per 37.1.huj.] ut transversum latus ad rectum ita rectangulum EHΔ ad quadratum ex HΓ: ut igitur rectangulum ZΛΘ ad quadratum ex ΛK ita rectangulum EHΔ ad quadratum ex HΓ: ideoq; [per 7.lem.2. & 3.lem. 6.] triangulum KZΛ triangulo ΓEH est simile, & triangulum KΘΛ simile triangulo ΓΔH, & KZΘ ipsi ΓEΔ: quare angulus EΓΔ angulo ZKΘ, hoc est [per constr.] ipsi Ω, est æqualis. si vero transversi lateris ad rectum ratio sit æqualis ad æquale; recta KΛ circulum ZKΘ continget, & recta conjungens centrum & punctum K parallela erit ipsi ZΘ, & hæc ipsa problema conficiet.

σιν αἱ ZK, KΘ, καὶ ἐκϐεϐλήσθω ἡ ΛK ἐπὶ τὸ M, καὶ ἀπὸ τοῦ N ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ NΞ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ZΘ· καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ὡς ἡ NΠ πρὸς ΠO, τουτέστιν ἡ ΥΦ πρὸς ΦX, οὕτως ἡ ΞK πρὸς KΛ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ ΨΦ πρὸς ΦX οὕτως ἡ MK πρὸς KΛ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΨX πρὸς XΦ οὕτως ἡ MΛ πρὸς ΛK. ἀλλ' ὡς ἡ MΛ πρὸς ΛK οὕτως τὸ ὑπὸ MΛK πρὸς τὸ ἀπὸ ΛK· ὡς ἄρα ἡ XΨ πρὸς XΦ οὕτως τὸ ὑπὸ MΛK πρὸς τὸ ἀπὸ ΛK, τουτέστι τὸ ὑπὸ ZΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛK. ἀλλ' ὡς ἡ ΨX πρὸς XΦ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ZΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛK οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἤχθω



δὴ ἀπὸ τοῦ A τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ AT. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ EA πρὸς τὸ ἀπὸ AT οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ ZΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛK· τὸ δὲ ἀπὸ ZΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛK μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ZΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛK· καὶ τὸ ἀπὸ ZΛ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΛK μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ EA πρὸς τὸ ἀπὸ AT. καί εἰσιν αἱ πρὸς A, Λ γωνίαι ὀρθαί· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ Z γωνία τῆς AET. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ ΛZK γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ AEΓ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ EΓ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Γ, ἤχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ κάθετος ἡ ΓH· ἔσται δὴ ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ EHΔ πρὸς τὸ ἀπὸ HΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ZΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛK οὕτως τὸ ὑπὸ EHΔ πρὸς τὸ ἀπὸ HΓ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ KZΛ τρίγωνον τῷ ΓEH τριγώνῳ, καὶ τὸ KΘΛ τῷ ΓΔH, καὶ τὸ KZΘ τῷ ΓEΔ· ὥστε ἡ ὑπὸ EΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ZKΘ, τουτέστι τῇ Ω. ἐὰν δὲ ὁ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν λόγος ἴσου ᾖ πρὸς ἴσον, ἡ KΛ ἐφάψεται τοῦ ZKΘ κύκλου, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ K ἐπιζευγνυμένη παράλληλος ἔσται τῇ ZΘ, καὶ αὐτὴ ποιήσει τὸ πρόβλημα.

PROP. LII. *Theor.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϐ'.

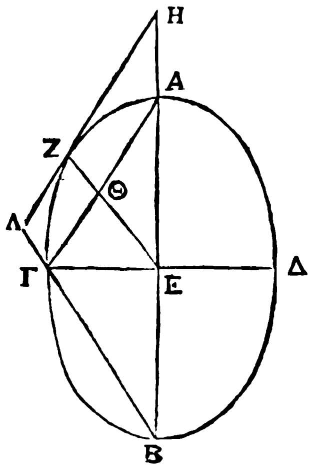
Si ellipsim recta linea contingat: angulus, quem facit cum diametro per

Ἐὰν ἐλλείψεως εὐθεῖα ἐπιψαύῃ· ἣν ποιεῖ γωνίαν πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ,

οὐκ

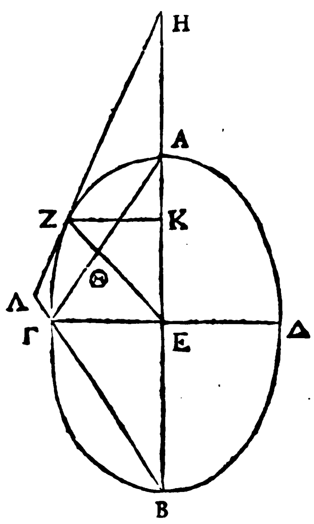
οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐφεξῆς τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν πρὸς μέσην τῆς τομῆς κλωμένων εὐθειῶν.

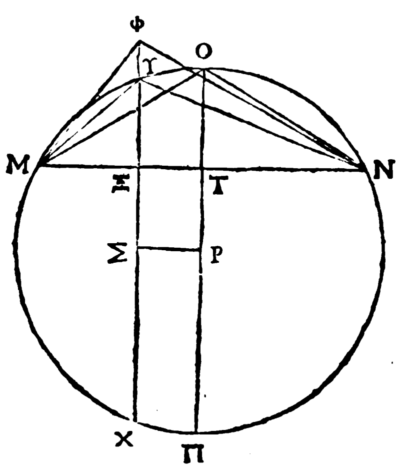
ΕΣΤΩ ἔλλειψις, ἧς ἄξονες μὲν οἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, μείζων δὲ ἔστω τῶν ἀξόνων ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΗΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΓΒ, ΖΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Λ· λέγω ὅτι οὐκ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΖΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΛΓΑ.



Η γὰρ ΖΕ τῇ ΑΒ ἤτοι παράλληλός ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον παράλληλος, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ. καὶ ἔστι διάμετρος ἡ ΖΕ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Ζ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΑΓ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΛΒ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΘΓΛ, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΖΘ τῇ ὑπὸ ΛΓΘ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ τῆς ΕΓ, ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· ὀξεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΓΘ, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΛΖΕ· καὶ διὰ τοῦτο ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΖΕ.

Μὴ ἔστω δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΛΒ παράλληλος, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΖΚ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΒΕ τῇ ὑπὸ ΖΕΑ. ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τὸ Ε ὀρθῇ τῇ πρὸς τῷ Κ ἐστὶν ἴση· οὐκ ἄρα ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΚ· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ οὕτω τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτω τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ οὕτω τὸ ἀπὸ ΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΚΕ. ἐκκείσθω κύκλου τμῆμα τὸ ΜΥΝ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΑΓΒ. ἀμβλεῖα δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· ἔλασσον ἄρα ἡμικυκλίου τμῆμά ἐστι ΜΥΝ. πεποιήσθω δὴ ὡς ἡ ΗΚ πρὸς ΚΕ οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς ΞΜ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΥΞΧ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΥ, ΥΝ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΜΝ κατὰ τὸ Τ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΟΤΠ· διάμετρος ἄρα ἐστίν. ἔστω κέντρον τὸ Ρ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἤχθω ἡ ΡΣ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΟ, ΟΝ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΜΟΝ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, καὶ δίχα τέτμηται ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΜΝ κατὰ





tactum ducta, non est minor angulo deinceps ei qui sub rectis ad mediam sectionem inclinatis continetur.

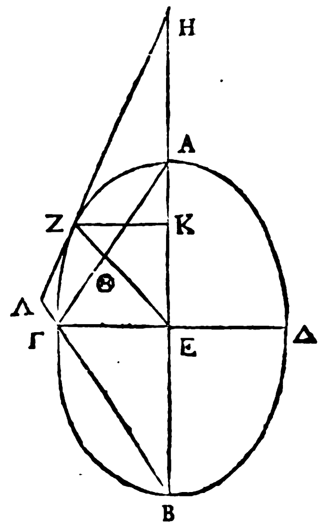
SIT ellipsis, cujus axes AB, ΓΔ, centrum vero E, & sit axium major AB, recta vero HZΛ sectionem contingat, & junctis AΓ, ΓB, ZE producatur BΓ ad Λ: dico angulum ΛZE non esse minorem angulo ΛΓA.

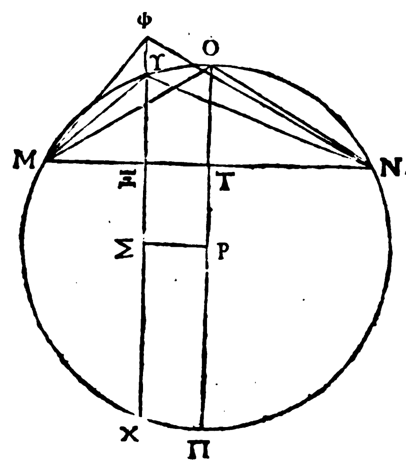
Nam recta ZE, vel est parallela, vel non est parallela ipsi ΛB. sit primum parallela, & est AB æqualis EB: ergo [per 2.6.] & AΘ ipsi ΘΓ est æqualis. sed ZE diameter est: recta igitur, quæ in Z sectionem contingit, ipsi AΓ [per 6. 2. huj.] est parallela. est autem & ZB parallela ipsi ΛB: parallelogrammum igitur est ZΘΓΛ; & idcirco [per 34. 1.] angulus ΛZΘ æqualis est angulo ΛΓΘ. & quoniam utraque ipsarum AE, EB est major ipsâ EΓ, angulus AΓB est obtusus: ideoque anguli ΛΓΘ, ΛZE sunt acuti; & propterea angulus HZE obtusus erit.

Sed non sit EZ parallela ipsi ΛB, & ducatur ZK perpendicularis: igitur angulus ΛBE non est æqualis ipsi ZEA. rectus autem angulus ad E recto ad K est æqualis: ergo triangulum ΓBE non est simile triangulo ZEK; adeoque quadratum ex BE ad quadratum ex EΓ non est sicut quadratum ex EK ad quadratum ex KZ. sed ut quadratum ex EB ad quadratum ex EΓ, hoc est ut rectangulum AEB ad quadratum ex EΓ, sive latus transversum ad rectum, ita [per 37. 1. huj.] rectangulum HKE ad quadratum ex KZ: non est igitur rectangulum HKE ad quadratum ex KZ sicut quadratum ex EK ad quadratum ex KZ; ac proinde HK non est ipsi KE æqualis. exponatur circuli portio MΥN, capiens angulum æqualem angulo AΓB. angulus autem AΓB est obtusus: ergo [per 31.3.] circuli portio MΥN est semicirculo minor. fiat vero ut HK ad KE ita NΞ ad ΞM, & per Ξ ad rectos angulos ipsi MN ducatur ΥΞX, & jungantur MΥ, ΥN; secetur autem MN bifariam in T, & ad rectos angulos ducatur OTΠ: erit igitur [per 3. 3.] hæc diameter. sit P circuli centrum, à quo perpendicularis ducatur PΣ & jungantur MO, ON. itaque quoniam angulus MON est æqualis angulo AΓB, & utraque ipsarum AB, MN in punctis E, T bifariam

riam secatur, suntque anguli ad Ε, Τ recti: triangula igitur ΟΤΝ, ΓΕΒ [per 4.6.] inter se similia erunt: ergo [per 22.6.] ut quadratum ex ΝΤ ad quadratum ex ΤΟ ita quadratum ex ΒΕ ad quadratum ex ΕΓ. & quoniam ΤΡ est æqualis ipsi ΣΞ, & ΡΟ major quam ΣΥ: habebit ΟΡ ad ΡΥ majorem rationem quam ΥΣ ad ΣΞ; & per conversionem rationis ΡΟ ad ΟΥ minorem rationem habebit quam ΣΥ ad ΥΞ; & antecedentium dupla, itaque ΠΟ ad ΟΥ minorem rationem habebit quam ΧΥ ad ΥΞ; dividendoque ΠΥ ad ΥΟ minorem rationem habebit quam ΧΞ ad ΞΥ. sed [per 8. & corol. 20.6.] ut ΠΤ ad ΤΟ ita quadratum ex ΤΝ ad quadratum ex ΤΟ, & quadratum ex ΒΕ ad quadratum ex ΕΓ, & transversum latus ad rectum, & rectan-

τὰ Ε, Τ, καὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Ε, Τ γωνίαι· ὅμοια ἄρα τὰ ΟΤΝ, ΓΕΒ τρίγωνα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΝΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΟ οὕτω τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΤΡ τῇ ΣΞ, μείζων δὲ ἡ ΡΟ τῆς ΣΥ· ἡ ΟΡ ἄρα πρὸς ΡΥ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΥΣ πρὸς ΣΞ, καὶ ἀναστρέψαντι ἡ ΡΟ πρὸς ΟΥ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΣΥ πρὸς ΥΞ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ἡ ἄρα ΠΟ πρὸς ΟΥ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΧΥ πρὸς ΥΞ· καὶ διελόντι ἡ ΠΥ πρὸς ΥΟ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΧΞ πρὸς ΞΥ. ἀλλὰ ὡς μὲν ἡ ΠΤ πρὸς ΤΟ οὕτω τὸ ἀπὸ ΤΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΟ, καὶ τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, καὶ ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ τὸ ὑπὸ ΗΚΕ





gulum ΗΚΕ ad quadratum ex ΚΖ: ergo rectangulum ΗΚΕ ad quadratum ex ΚΖ minorem habet rationem quam ΧΞ ad ΞΥ, hoc est [per 1.6.] quam rectangulum ΧΞΥ ad quadratum ex ΞΥ, hoc est [per 35.3.] rectangulum ΝΞΜ ad quadratum ex ΞΥ. si igitur fiat ut rectangulum ΗΚΕ ad quadratum ex ΚΖ ita rectangulum ΝΞΜ ad aliud quoddam; erit quidem ad majus quadrato ex ΞΥ. sit ad quadratum ex ΞΦ: itaque quoniam est ut ΗΚ ad ΚΕ ita [per constr.] ΝΞ ad ΞΜ, & sunt ΚΖ, ΞΦ ad rectos angulos, & rectangulum ΗΚΕ ad quadratum ex ΚΖ est ut rectangulum ΝΞΜ ad quadratum ex ΞΦ: erit propterea angulus ΗΖΕ æqualis angulo ΝΦΜ: ergo major est angulus ΝΥΜ, hoc est ΑΓΒ, angulo ΗΖΕ. qui vero deinceps est, videlicet ΛΖΘ, major est angulo ΛΓΘ: igitur angulus ΛΖΘ non est angulo ΛΓΘ minor.

πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΧΞ πρὸς ΞΥ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΧΞΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΥ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΝΞΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΥ. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΞΜ πρὸς ἄλλό τι· ἔσται πρὸς μεῖζον τοῦ ἀπὸ ΞΥ. ἔστω πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΦ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΗΚ πρὸς ΚΕ οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς ΞΜ, καὶ πρὸς ὀρθάς εἰσιν αἱ ΚΖ, ΞΦ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΞΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΦ· διὰ ταῦτα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΦΜ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΝΥΜ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, τῆς ὑπὸ ΗΖΕ γωνίας. ἡ δὲ ἐφεξῆς ἡ ὑπὸ ΛΖΘ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΛΓΘ· οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΖΘ τῆς ὑπὸ ΛΓΘ γωνίας.

Prop. LIII. *Probl.*

Rectam ellipsim datam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto æqualem: oportet autem acutum angulum datum non esse minorem angulo deinceps ei qui rectis ad mediam sectionem inclinatis continetur.

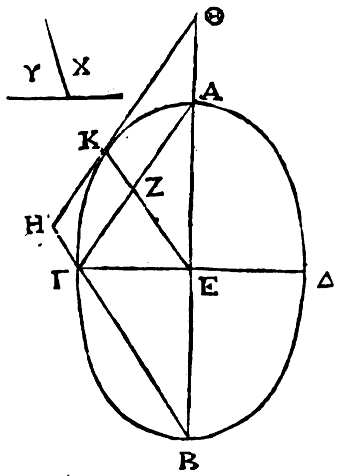
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, ἥτις πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ γωνίαν ποιήσει ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ. δεῖ δὲ τὴν διδομένην ὀξεῖαν γωνίαν μὴ ἐλάσσονα εἶναι τῆς ἐφεξῆς τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν πρὸς μέσην τὴν τομὴν κλωμένων εὐθειῶν.

ΕΣΤΩ

ΕΣΤΩ ἡ δοθεῖσα ἔλλειψις, ἧς μείζων μὲν ἄξων ὁ ΑΒ, ἐλάσσων δὲ ὁ ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΓΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἡ Υ οὐκ ἐλάσσων τῆς ὑπὸ ΑΓΗ· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς Χ. ἡ Υ ἄρα τῆς ὑπὸ ΑΓΗ ἢ μείζων ἐστὶν, ἢ ἴση.

Ἔστω πρότερον ἴση, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΚ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς ΖΓ· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΓ. καὶ ἔστι διάμετρος ἡ ΚΕ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, τουτέστιν ἡ ΘΚΗ, παράλληλός ἐστι τῇ ΓΑ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΗΒ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΓΗ, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΚΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΓΖ γωνίᾳ. ἡ δὲ ὑπὸ ΗΓΖ τῇ δοθείσῃ, τουτέστι τῇ Υ, ἴση ἐστί· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΚΕ ἄρα ἐστὶν ἴση τῇ Υ γωνίᾳ.

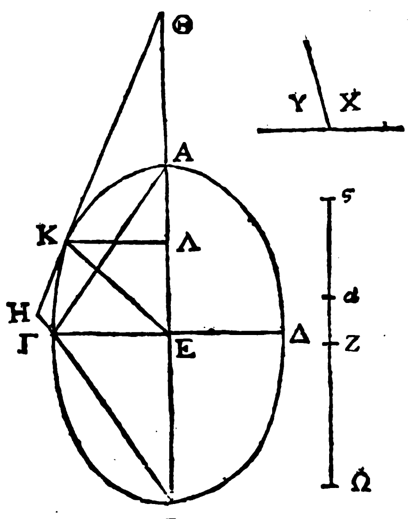


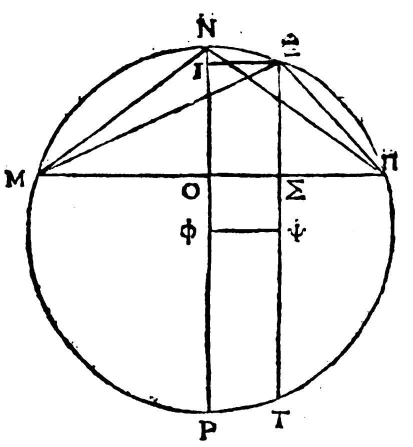
Ἔστω δὲ μείζων ἡ Υ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΗ· ἀντίπαλιν δὴ ἡ Χ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ ἐλάσσων ἐστί. ἐκκείσθω κύκλος, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπ' αὐτοῦ τμῆμα, καὶ ἔστω τὸ ΜΝΠ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Χ, καὶ τετμήσθω ἡ ΜΠ δίχα κατὰ τὸ Ο, καὶ ἀπὸ τοῦ Ο τῇ ΜΠ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΝΟΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΝ, ΝΠ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΜΝΠ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΒ ἐλάσσων ἐστίν. ἀλλὰ τῆς μὲν ὑπὸ ΜΝΠ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΜΝΟ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΝΟ τῆς ὑπὸ ΑΓΕ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Ο· ἡ ἄρα ΑΕ πρὸς ΕΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΜΟ πρὸς ΟΝ, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΜΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΝ. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ, τὸ δὲ ἀπὸ ΜΟ ἴσον τῷ ὑπὸ ΜΟΠ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΝΟΡ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν,

SIT data ellipsis, cujus major axis AB, minor ΓΔ, & centrum E, & jungantur AΓ, ΓB; datus autem angulus sit Υ, non minor angulo AΓH; ita ut angulus AΓB non sit minor angulo X. angulus igitur Υ vel major est angulo AΓH, vel ipsi æqualis.

Sit primum æqualis, & [per 30. 1.] per E ducatur EK ipsi BΓ parallela, & [per 49. 2.huj.] per K contingens sectionem KΘ. quoniam igitur AE est æqualis EB, & ut AE ad EB ita [per 2. 6.] AZ ad ZΓ: erit AZ ipsi ZΓ æqualis. & est KE diameter: ergo [per 5.2.huj.] quæ in K sectionem contingit, hoc est ΘKH, parallela erit ipsi ΓA. sed & EK parallela est HB: parallelogrammum igitur est KZΓH; & ob id [per 34. 1.] angulus HKE angulo HΓZ æqualis. angulus autem HΓZ est æqualis angulo dato Υ: ergo & HKE angulo Υ æqualis erit.

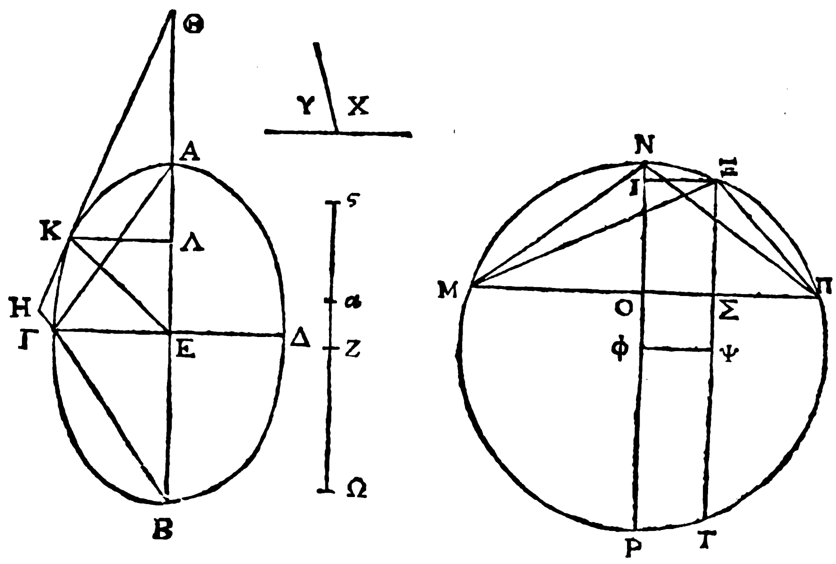
Sit vero angulus Υ major angulo AΓH: erit è contra angulus X minor angulo AΓB. exponatur circulus, & [per 34.3.] ab eo auferatur portio MNΠ, capiens angulum æqualem angulo X, & [per 10.1.] bifariam secetur MΠ in O, & per O [per 11. 1.] ducatur NOP ad rectos angulos ipsi MΠ, & jungantur MN, NΠ: angulus igitur MNΠ minor est angulo AΓB. anguli autem MNΠ [per 4.1.] dimidius est angulus MNO, & anguli AΓB dimidius est AΓE: ergo MNO angulus angulo AΓE est minor. & anguli ad E & O recti sunt: quare AE ad EΓ majorem rationem habet quam MO ad ON; & ideo quadratum ex AE ad quadratum ex EΓ majorem habet rationem quam quadratum ex MO ad quadratum ex ON. sed quadratum ex AE æquale est rectangulo AEB; & quadratum ex MO æquale rectangulo MOΠ, hoc est [per 35.3.] ipsi NOP: ergo rectangulum AEB ad quadratum ex EΓ, hoc est [per 21. 1.huj.] transversum latus ad rectum,





rectum, majorem rationem habet quam rectangulum P O N ad quadratum ex O N; hoc est [per 1. 6.] quam P O ad O N. fiat autem [per 12. 6.] ut transversum latus ad rectum ita Ω α ad α ς, & Ω ς bifariam secetur in Z. quoniam igitur transversum latus ad rectum majorem rationem habet quam P O ad O N: habebit & Ω α ad α ς majorem rationem quam P O ad O N; & componendo Ω ς ad ς α majorem habebit rationem quam P N ad N O. sit Φ circuli centrum: ergo Z ς ad ς α majorem habet rationem quam Φ N ad N O; dividendoque α Z ad α ς majorem rationem habet quam Φ O ad O N. fiat ut Z α ad α ς ita Φ O ad minorem ipsa O N, puta ad O I; & ducantur [per 30. 1.] I Ξ, Φ Ψ ipsi M Π parallelæ, sicut & Ξ Ψ T ipsi N P: erit igitur ut Z α

μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ P O N πρὸς τὸ ἀπὸ O N, τουτέστιν ἡ P O πρὸς O N. γενέσθω δὲ ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως ἡ Ω α πρὸς α ς, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ Ω ς κατὰ τὸ Z. ἐπεὶ οὖν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ P O πρὸς O N· καὶ ἡ Ω α πρὸς α ς μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ P O πρὸς O N, καὶ συνθέντι ἡ Ω ς πρὸς τὴν ς α μείζονα λόγον ἔχει ἡ P N πρὸς N O. ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Φ· ὥστε καὶ ἡ Z ς πρὸς ς α μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ Φ N πρὸς N O, καὶ διελόντι ἡ α Z πρὸς α ς μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Φ O πρὸς O N. γενέσθω δὲ ὡς ἡ Z α πρὸς α ς οὕτως ἡ Φ O πρὸς ἐλάττονα τῆς O N, οἷον τὴν I O, καὶ ἤχθωσαν αἱ I Ξ, Φ Ψ τῇ M Π, καὶ ἡ Ξ Ψ T



ad α ς ita Φ O ad O I, & Ψ Σ ad Σ Ξ; componendoque ut Z ς ad ς α ita Ψ Ξ ad Ξ Σ; & antecedentium dupla, ut Ω ς ad ς α ita T Ξ ad Ξ Σ; & dividendo, ut Ω α ad α ς, hoc est [per constr.] ut transversum latus ad rectum, ita T Σ ad Σ Ξ. jungantur itaque M Ξ, Ξ Π, & ad rectam A E, & ad punctum in ea E constituatur [per 23. 1.] angulus A E K æqualis angulo M Π Ξ, & per K ducatur [per 49. 2. huj.] K Θ sectionem contingens, & K Λ ordinatim applicetur. quoniam igitur angulus M Π Ξ æqualis est angulo A E K, & rectus angulus ad Σ est æqualis recto ad Λ; erit [per 32. 1.] triangulum Ξ Σ Π æquiangulum triangulo K Λ E; & ut transversum latus ad rectum ita est T Σ ad Σ Ξ, hoc est [per 1. 6.] rectangulum T Σ Ξ ad quadratum ex Ξ Σ, hoc est [per 35. 3.] rectangulum M Σ Π ad quadratum ex Ξ Σ: simile igitur est [per lem. 7. 2. huj.] triangulum Θ Λ K triangulo M Σ Ξ, & triangulum Θ K E simile ipsi M Ξ Π: & propterea angulus M Ξ Π est æqualis angulo Θ K E. est autem [per 21. 3.] angulus M Ξ Π æqualis angulo M N Π, hoc est [per constr.] angulo X: quare & Θ K E angulus angulo X est æqualis: angulus igitur deinceps H K E [per 13. 1.] ei qui deinceps est angulo Υ æqualis erit; ergo ducta est H Θ sectionem contingens, quæ cum diametro K E per tactum ducta facit H K E angulum dato angulo Υ æqualem: quod erat faciendum.

τῇ N P παράλληλοι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Z α πρὸς τὴν α ς οὕτως ἡ Φ O πρὸς O I, καὶ ἡ Ψ Σ πρὸς Σ Ξ· καὶ συνθέντι ὡς Z ς πρὸς ς α οὕτως ἡ Ψ Ξ πρὸς Ξ Σ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ Ω ς πρὸς ς α οὕτως ἡ T Ξ πρὸς Ξ Σ· καὶ διελόντι ὡς ἡ Ω α πρὸς α ς, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως ἡ T Σ πρὸς Σ Ξ. ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ M Ξ, Ξ Π, καὶ συνεστάτω, πρὸς τῇ A E εὐθείᾳ καὶ τῷ E σημείῳ, τῇ ὑπὸ M Π Ξ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ A E K, καὶ διὰ τοῦ K ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ K Θ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ K Λ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ M Π Ξ γωνία τῇ ὑπὸ A E K, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τὸ Σ ὀρθῇ τῇ πρὸς τὸ Λ ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ Ξ Σ Π τῷ K Λ E τριγώνῳ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως ἡ T Σ πρὸς Σ Ξ, τουτέστι τὸ ὑπὸ T Σ Ξ πρὸς τὸ ἀπὸ Ξ Σ, τουτέστι τὸ ὑπὸ M Σ Π πρὸς τὸ ἀπὸ Ξ Σ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Θ Λ K τρίγωνον τῷ M Σ Ξ τριγώνῳ, καὶ τὸ Θ K E τῷ M Ξ Π· καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ M Ξ Π γωνία τῇ ὑπὸ Θ K E. ἡ δὲ ὑπὸ M Ξ Π τῇ ὑπὸ M N Π ἐστὶν ἴση, τουτέστι τῇ X· καὶ ἡ ὑπὸ Θ K E ἄρα τῇ X ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ H K E τῇ ἐφεξῆς τῇ Υ ἐστὶν ἴση· δῆκται ἄρα τῆς τομῆς ἐφαπτομένη ἡ H Θ πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ τῇ K E, γωνίαν ποιοῦσα τὴν ὑπὸ H K E ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Υ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

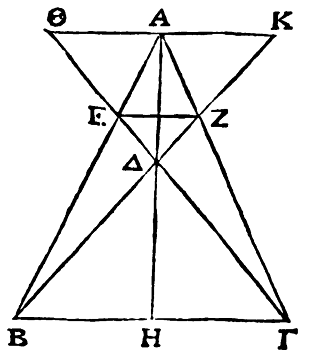
ΠΑΠ-

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΛΗΜΜΑΤΑ
ΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟ ΤΡΙΤΟΝ
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA
IN TERTIUM LIBRUM CONICORUM
APOLLONII PERGÆI.

ΛΗΜΜΑ α'.

Καταγεγράφθω ἡ ΑΒΓΔΕΖΗ, ἔστω δὲ ἴση ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ. ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.



Ηχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΒΖ, ΓΕ ἐπὶ τὰ Κ, Θ σημεῖα. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΑ τῇ ΑΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΘΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΚΑ, τουτέστιν ἡ ΓΖ πρὸς ΖΑ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.

LEMMA I.

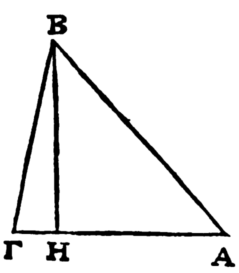
Sit descripta figura ΑΒΓΔΕΖΗ; & sit ΒΗ æqualis ipsi ΗΓ. dico ΕΖ ipsi ΒΓ parallelam esse.

Ducatur enim per Α recta ΘΚ parallela ipsi ΒΓ, & ΒΖ, ΓΕ ad puncta Κ, Θ producantur. itaque quoniam ΒΗ est æqualis ipsi ΗΓ; erit [propter æquiangula triangula ΒΑΗ, ΚΔΑ, item ΗΑΓ, ΑΔΘ] & ΘΑ ipsi ΑΚ æqualis: ergo [propter æquiangula triangula ΒΕΓ, ΑΕΘ, item ΒΖΓ, ΚΖΑ] ut ΒΓ ad ΘΑ, hoc est ut ΒΕ ad ΕΑ, ita ΒΓ ad ΚΑ, hoc est ΓΖ ad ΖΑ: quare ΕΖ ipsi ΒΓ est parallela.

ΛΗΜΜΑ β'.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς Α, Δ γωνίας, ἴσον δὲ ἔστω τὸ ὑπὸ ΒΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΔΖ. ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον.

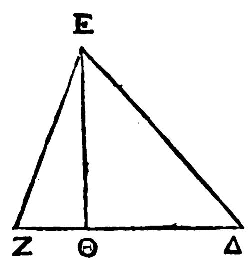
Ηχθωσαν κάθετοι αἱ ΒΗ, ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ. ἴσον δὲ ἐστι τὸ ὑπὸ ΒΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ. ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ ἥμισύ ἐστι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ τὰ διπλᾶ αὐτῶν παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστίν.



LEMMA II.

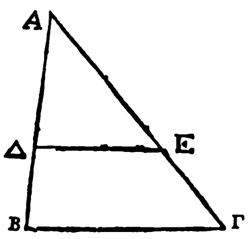
Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ angulos Α, Δ æquales habentia; & sit rectangulum ΒΑΓ æquale rectangulo ΕΔΖ. dico triangulum triangulo æquale esse.

Ductis enim perpendicularibus ΒΗ, ΕΘ; erit [per 4. 6.] ut ΗΒ ad ΒΑ ita ΕΘ ad ΕΔ: ergo [per 1. 6.] ut rectangulum sub ΒΗ & ΑΓ ad rectangulum ΒΑΓ ita rectangulum sub ΕΘ & ΔΖ ad rectangulum ΕΔΖ. est autem [ex hyp.] rectangulum ΒΑΓ rectangulo ΕΔΖ æquale: ergo [per 14. 5.] & rectangulum sub ΒΗ & ΑΓ æquale rectangulo sub ΕΘ & ΔΖ. sed [per 41. 1.] rectanguli sub ΒΗ & ΑΓ dimidium est ΑΒΓ triangulum; & rectanguli sub ΕΘ & ΔΖ dimidium triangulum ΔΕΖ: triangulum igitur ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ æquale erit. Perspicuum autem est & parallelogramma ipsorum dupla inter se æqualia esse.



LEMMA III.

Sit triangulum ΑΒΓ, & sit ΔΕ ipsi ΒΓ parallela. dico ut quadratum ex ΒΑ ad quadratum ex ΑΔ ita esse triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΑΔΕ.



QUoniam enim triangulum ΑΒΓ simile est triangulo ΑΔΕ, habebit [per 19. 6.] ΑΒΓ triangulum ad ipsum ΑΔΕ duplicatam rationem ejus quam habet ΒΑ ad ΑΔ. sed quadratum ex ΒΑ ad quadratum ex ΑΔ duplicatam rationem habet ejus quam habet ΒΑ ad ΑΔ: ergo ut quadratum ex ΒΑ ad quadratum ex ΑΔ, ita erit ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΔΕ.

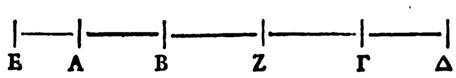
ΛΗΜΜΑ γʹ.

Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ παράλληλος ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον.

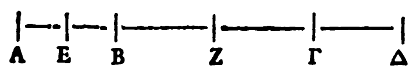
Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ· τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ. ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον.

LEMMA IV.

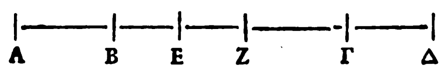
Sint lineæ ΑΒ, ΓΔ inter se æquales, & sumatur quodvis punctum Ε. dico rectangulum ΓΕΒ superare rectangulum ΓΑΒ rectangulo ΔΕΑ.



SEcetur enim ΒΓ bifariam in Ζ: ergo punctum Ζ lineam quoque ΑΔ bifariam secat. & quoniam [per 6. 2.] rectangulum ΓΕΒ una cum quadrato ex ΒΖ æquale est quadrato ex ΕΖ: rectangulum autem ΔΕΑ una cum quadrato ex ΑΖ æquale est quadrato ex ΕΖ, atque est quadratum ex ΑΖ æquale rectangulo ΓΑΒ una cum quadrato ex ΒΖ; commune auferatur quadratum ex ΒΖ: reliquum igitur rectangulum ΓΕΒ æquale est rectangulo ΓΑΒ una cum rectangulo ΔΕΑ: quare ΓΕΒ rectangulum superat rectangulum ΓΑΒ ipso ΔΕΑ rectangulo. Q. E. D.



Si vero punctum Ε sit inter Α & Β; rectangulum ΓΕΒ minus est quam rectangulum ΓΑΒ, eodem ipso spatio, videlicet rectangulo ΔΕΑ: quod simili ratione demonstrabitur.



Quod si punctum Ε sit inter Β & Γ; eadem ratione rectangulum ΓΕΒ minus erit quam rectangulum ΑΕΔ rectangulo ΑΒΔ.

ΛΗΜΜΑ δʹ.

Ἴσαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε. ὅτι τὸ ὑπὸ ΓΕΒ ὑπερέχει τοῦ ὑπὸ ΓΑΒ τῷ ὑπὸ ΔΕΑ.

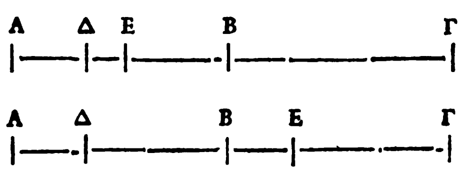
Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα τῷ Ζ· τὸ Ζ ἄρα διχοτομία ἐστὶ καὶ τῆς ΑΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΓΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ, ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ ΔΕΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ, καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΓΑΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΖ, κοινὸν ἐκκεκρούσθω τὸ ἀπὸ ΒΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΓΑΒ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΕΑ· ὥστε καὶ τὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΓΑΒ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ΔΕΑ. ὅπερ ἔ. δ.

Ἐὰν δὲ τὸ Ε σημεῖον ᾖ μεταξὺ τῶν Α, Β σημείων· τὸ ὑπὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΓΑΒ ἔλασσον ἔσται τῷ αὐτῷ χωρίῳ τῷ ὑπὸ ΔΕΑ· ὅπερ ἐστὶ κατὰ τὰ αὐτὰ ἡ ἀπόδειξις.

Ἐὰν δὲ τὸ Ε σημεῖον ᾖ μεταξὺ τῶν Β, Γ, τὸ ὑπὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΑΒΔ ἔλασσον ἔσται τῷ ὑπὸ ΑΒΔ, τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ.

LEMMA V.

Sit recta ΑΒ æqualis ipsi ΒΓ, & duo puncta Δ, Ε sumantur. dico quadratum ex ΑΒ quater sumptum æquale esse rectangulo ΑΔΓ bis, una cum rectangulo ΑΕΓ bis & quadratis ex ΒΔ, ΒΕ bis sumptis.



HOC autem perspicuum est, quadratum enim ex ΑΒ bis sumptum, propter bisectiones, æquale est [per 5. 2.] rectangulo ΑΔΓ bis & quadrato ex ΔΒ bis: itemque quadratum ex ΑΒ bis est æquale rectangulo ΑΕΓ bis & bis quadrato ex ΕΒ.

ΛΗΜΜΑ εʹ.

Ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, καὶ δύο σημεῖα τὰ Δ, Ε. ὅτι τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ ΑΕΓ καὶ τοῦ δὶς ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΒΕ τετραγώνων.

Τοῦτο δὲ φανερόν. τὸ μὲν γὰρ δὶς ἀπὸ ΑΒ, διὰ τὰς διχοτομίας, ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ ΑΔΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΒΔ· τὸ δὲ δὶς ἀπὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ ΑΕΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΕΒ τετραγώνῳ.

LEMMA VI.

Sit recta ΑΒ æqualis ipsi ΓΔ, & sumatur punctum Ε. dico quadrata ex ΑΕ, ΕΔ æqualia esse quadratis ex ΒΕ, ΕΓ & rectangulo sub ΑΓΔ bis sumpto.

SEcetur ΒΓ bifariam in Ζ. & quoniam quadratum ex ΔΖ bis sumptum æquale est [per 5. 2.] rect.

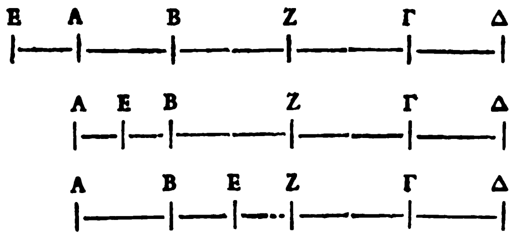
*

ΛΗΜΜΑ ϛʹ.

Ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ σημεῖον τὸ Ε. ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΕ, ΕΓ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓΔ.

Τετμήσθω δίχα ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Ζ. ἐπεὶ οὖν τὸ δὶς ἀπὸ τῆς ΔΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ ΑΓΔ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ

ἀπὸ Γ Z, κοινοῦ προστεθέντος τοῦ δὶς ἀπὸ E Z, ἴσον ἐστὶ τό τε δὶς ὑπὸ Α Γ Δ καὶ τὰ δὶς ἀπὸ τῶν Γ Z, Z E τοῖς δὶς ἀπὸ τῶν Δ Z, Z E τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν δὶς ἀπὸ Δ Z, Z E ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Α E, E Δ τετράγωνα, τοῖς δὲ δὶς ἀπὸ τῶν Γ Z, Z E ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν B E, E Γ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Α E, E Δ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν B E, E Γ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ Δ.

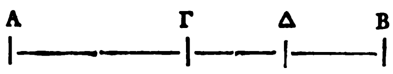


angulo Α Γ Δ bis & bis quadrato ex Γ Z, addito communi quadrato ex B Z bis, erit rectangulum Α Γ Δ bis una cum quadratis ex Γ Z, Z E bis æquale quadratis ex Δ Z, Z B bis sumptis. sed [per 9. vel 10.2.] quadratis ex Δ Z, Z E bis sumptis æqualia sunt quadrata ex AE, EΔ; quadratis autem ex Γ Z, Z E bis sumptis æqualia sunt ex BE, EΓ quadrata: quadrata igitur ex Α E, E Δ æqualia sunt quadratis ex B E, E Γ & rectangulo Α Γ Δ bis sumpto.

ΛΗΜΜΑ ζ'.

Εστω τὸ ὑπὸ Β Α Γ μετὰ τοῦ ἀπὸ Γ Δ ἴσον τῷ ἀπὸ Δ Α. ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ Γ Δ τῇ Δ Β.

Κοινὸν γὰρ ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ Γ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ Β Α Γ ἴσον ἐστὶ τῇ τῶν ἀπὸ Α Δ, Δ Γ ὑπεροχῇ, τουτέστι τοῖς ὑπὸ τῶν Δ Α Γ, Α Γ Δ. τὸ δὲ ὑπὸ Β Α Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Δ Α Γ καὶ τῷ ὑπὸ Β Δ, Α Γ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ Δ Α Γ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ Α Γ, Δ Β ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Α Γ Δ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Δ τῇ Δ Β.



LEMMA VII.

Sit rectangulum B Α Γ una cum quadrato ex Γ Δ æquale quadrato ex Δ Α. dico Δ Γ ipsi Δ B æqualem esse.

Commune enim auferatur quadratum ex Γ Δ: & rectangulum B Α Γ æquale erit excessui quadrati ex Α Δ supra quadratum ex Δ Γ, hoc est [per 2. 2.] utrique rectangulo sub Δ Α Γ & Α Γ Δ. at rectangulum B Α Γ æquale est rectangulis sub Δ Α Γ & sub B Δ, Α Γ. commune auferatur Δ Α Γ: erit igitur reliquum, quod continetur sub Α Γ, Δ B, æquale rectangulo Α Γ Δ: æqualis igitur est Γ Δ ipsi Δ B.

ΛΗΜΜΑ η'.

Εστω τὸ ὑπὸ Α Γ Β μετὰ τοῦ ἀπὸ Γ Δ ἴσον τῷ ἀπὸ Δ Β τετραγώνῳ. ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ Α Δ τῇ Δ Β.

Κείσθω τῇ Γ Δ ἴση ἡ Δ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ Γ Β Ε μετὰ τοῦ ἀπὸ Δ Ε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ Γ Δ, ἴσον τῷ ἀπὸ Δ Β, τουτέστι τῷ ὑπὸ Α Γ Β μετὰ τοῦ ἀπὸ Γ Δ· ὥστε τὸ ὑπὸ Γ Β Ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Α Γ Β· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Α Γ τῇ Ε Β. ἀλλὰ καὶ Γ Δ τῇ Δ Ε ἴση ἐστίν· ὅλη ἄρα ἡ Α Δ ὅλῃ τῇ Δ Β ἴση.

LEMMA VIII.

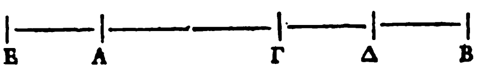
Sit rectangulum Α Γ B una cum quadrato ex Γ Δ æquale quadrato ex Δ B. dico rectam Α Δ æqualem esse ipsi Δ B.

Ponatur ipsi Γ Δ æqualis Δ E: ergo [per 5.2.] rectangulum Γ B E una cum quadrato ex Δ E, hoc est quadrato ex ΓΔ, æquale est quadrato ex Δ B; hoc est [ex hyp.] rectangulo ΑΓB una cum quadrato ex ΓΔ: quare rectangulum Γ B E est æquale rectangulo Α Γ B: est igitur [per 1.6.] linea Α Γ æqualis ipsi E B. sed & Γ Δ æqualis est Δ E: tota igitur Α Δ toti Δ B est æqualis.

ΛΗΜΜΑ θ'.

Εστω πάλιν τὸ ὑπὸ Β Α Γ μετὰ τοῦ ἀπὸ Δ Β ἴσον τῷ ἀπὸ Α Δ. ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ Γ Δ τῇ Δ Β.

Κείσθω τῇ Δ Β ἴση ἡ Α Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ Β Α Γ μετὰ τοῦ ἀπὸ Δ Β, τουτέστι τοῦ ἀπὸ Ε Α, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Α Δ τετραγώνῳ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ Δ Α Γ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ Β Δ, Α Γ, τουτέστι τὸ ὑπὸ Ε Α Γ, μετὰ τοῦ ἀπὸ Ε Α, ὅ ἐστι τὸ ὑπὸ Γ Ε Α, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Α Δ Γ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Ε Α, τουτέστιν ἡ Β Δ, τῇ Δ Γ. ὅ. ἔ. δ.



LEMMA IX.

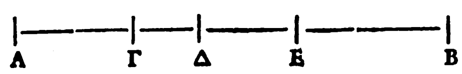
Sit rursus rectangulum B Α Γ una cum quadrato ex Δ B æquale quadrato ex Α Δ. dico lineam Γ Δ æqualem esse ipsi Δ B.

Ponatur enim ipsi ΔB æqualis Α E. & quoniam rectangulum B Α Γ una cum quadrato ex Δ B, hoc est cum quadrato ex E Α, æquale est quadrato ex ΑΔ; commune auferatur rectangulum Δ Α Γ: ergo reliquum, quod sub B Δ & Α Γ continetur, videlicet rectangulum E Α Γ, una cum quadrato ex E Α, quod [per 3.2.] est rectangulum Γ E Α, æquale erit [per 2.2.] ipsi Α Δ Γ rectangulo: quare recta E Α, hoc est B Δ, ipsi Δ Γ æqualis est.

ΛΗΜΜΑ ι'.

Εὐθεῖα ἡ Α Β, ἐφ᾽ ἧς τρία σημεῖα τὰ Γ, Δ, Ε, οὕτως ὥστε ἴσην μὲν εἶναι τὴν Β Ε τῇ Ε Γ, τὸ δὲ ὑπὸ Α Ε Δ τῷ ἀπὸ Ε Γ ἴσον. ὅτι γίνεται ὡς ἡ Β Α πρὸς Α Γ οὕτως ἡ Β Δ πρὸς Δ Γ.

Επεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ Α Ε Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Ε Γ, ἀνάλογον καὶ ἀναστρέψαντι καὶ δὶς τὰ ἡγούμενα, καὶ διελόντι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Β Α πρὸς τὴν Α Γ οὕτως ἡ Β Δ πρὸς τὴν Δ Γ.



LEMMA X.

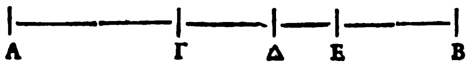
Sit recta linea Α B, in qua sumantur tria puncta Γ, Δ, E, ita ut B E sit æqualis E Γ, & rectangulum Α E Δ æquale quadrato ex Γ E. dico ut B Α ad Α Γ ita esse B Δ ad Δ Γ.

Quoniam enim rectangulum ΑEΔ æquale est quadrato ex EΓ; erit [per 17.6.] ut Α E ad E Γ ita Γ E ad E Δ: unde per conversionem rationis, antecedentibusque bis sumptis, & dividendo proportionales erunt, nempe B Α ad Α Γ sicut B Δ ad Δ Γ.

LEMMA XI.

Sit rursus rectangulum ΒΓΔ æquale quadrato ex ΓΕ, & ΑΓ ipsi ΓΕ æqualis. dico rectangulum ΑΒΕ æquale esse rectangulo ΓΒΔ.

Quoniam enim [ex hyp.] rectangulum ΒΓΔ quadrato ex ΓΕ est æquale; ut ΒΓ ad ΓΕ, hoc est [ex hyp.] ad ΓΑ, ita erit [per 17.6.] ΓΕ, hoc est ΓΑ, ad ΓΔ, & * tota ad totam, & per conversionem rationis; & spatium spatio æquale: ergo rectangulum ΑΒΕ æquale est ΓΒΔ rectangulo.



Sed illud etiam constat, rectangulum nempe ΑΔΕ ipsi ΒΔΓ æquale esse: nam si à quadrato ex ΓΕ & à rectangulo ΒΓΔ æqualibus auferatur commune quadratum ex ΓΔ, quæ relinquentur æqualia erunt.

ΛΕΜΜΑ ιαʹ.

Εστω πάλιν τὸ ὑπὸ ΒΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΕ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ. ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΒΔ.

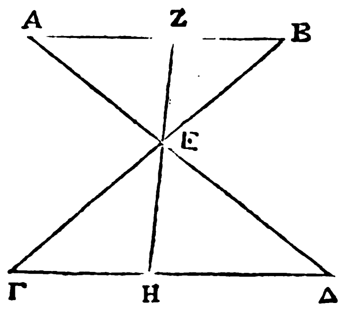
Επει γὰρ τὸ ὑπὸ ΒΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΕ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΕ, τουτέστι πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ, τουτέστιν ἡ ΑΓ, πρὸς τὴν ΓΔ, καὶ ὅλη πρὸς ὅλην, καὶ ἀναστρέψαντι, καὶ χωρίον χωρίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΒΔ.

Φανερὸν δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΔΓ· ἐὰν γὰρ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ ΓΔ κοινὸν ἀπὸ τῆς τοῦ ἀπὸ ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΔ ἰσότητος, γίνεται τὰ λοιπὰ ἴσα.

LEMMA XII.

In duas æquidistantes ΑΒ, ΓΔ per idem punctum Ε tres lineæ ducantur ΑΕΔ, ΒΕΓ, ΖΕΗ. dico ut rectangulum ΑΕΒ ad rectangulum ΑΖΒ ita esse rectangulum ΓΕΔ ad ΓΗΔ rectangulum.

Hoc per compositam rationem manifestum est. ut enim ΑΕ ad ΕΔ ita [per 4.6.] est ΑΖ ad ΗΔ; & ut ΒΕ ad ΕΓ ita ΖΒ ad ΗΓ; & rationes rectangulorum componuntur ex his rationibus †: proportionalia igitur sunt.



Sed licet & aliter demonstrare absque composita ratione hoc pacto. quoniam enim [per 4.6.] ut ΑΕ ad ΕΒ ita est ΔΕ ad ΕΓ; erit [per 1.6.] rectangulum ΑΕΒ ad quadratum ex ΕΒ ut rectangulum ΔΕΓ ad quadratum ex ΕΓ. ut autem quadratum ΕΒ ad quadratum ex ΒΖ ita [per 1. & 22.6.] quadratum ex ΕΓ ad quadratum ex ΓΗ: quare ex æquo [per 22.5.] ut rectangulum ΑΕΒ ad quadratum ex ΒΖ ita rectangulum ΔΕΓ ad quadratum ex ΓΗ. sed ut quadratum ex ΒΖ ad rectangulum ΒΖΑ ita quadratum ex ΓΗ ad rectangulum ΓΗΔ: ex æquo igitur, ut rectangulum ΑΕΒ ad rectangulum ΑΖΒ ita rectangulum ΓΕΔ ad rectangulum ΓΗΔ. Q. E. D.

ΛΗΜΜΑ ιβʹ.

Εἰς δύο παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΓΔ, διά τε τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Ε, τρεῖς διήχθωσαν αἱ ΑΕΔ, ΒΕΓ, ΖΕΗ. ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ οὕτω τὸ ὑπὸ ΓΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΔ.

Διὰ τοῦ συνημμένου φανερόν. ὡς μὲν γὰρ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΗΔ, ὡς δὲ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΗΓ, καὶ σύγκειται ἐκ τούτων τὰ χωρία· ἀνάλογον ἄρα ἐστί.

Εστι δὲ καὶ οὕτως ἀποδεῖξαι μὴ προσχρησάμενον τῷ συνημμένῳ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ οὕτω τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ οὕτω τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΔ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ οὕτω τὸ ὑπὸ ΓΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΔ. ὅ. ἔ. δ.

* Hoc est, adhibendo 19am quinti, quæ sic incipit, & postea conversionem rationis, & demum [per 16.6.] æquando rectangulum sub extremis cum rectangulo sub mediis. † Nempe ratio rectanguli ΑΕΒ ad ΓΕΔ componitur ex ratione ΑΕ ad ΕΔ, & ratione ΒΕ ad ΕΓ: & ratio ΑΖΒ ad ΓΗΔ componitur ex ratione ΑΖ ad ΗΔ, & ratione ΖΒ ad ΗΓ. Cumque componentes rationes æquales sint, constat propositum.

ΑΠΟΛ-

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ

ΚΩΝΙΚΩΝ

ΤΟ ΤΡΙΤΟΝ,

ΜΕΤΑ ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑΤΩΝ.

APOLLONII PERGÆI

CONICORUM

LIBER TERTIUS,

CUM COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITÆ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις· ἴσα ἔσται τὰ γινόμενα κατὰ κορυφὴν τρίγωνα.

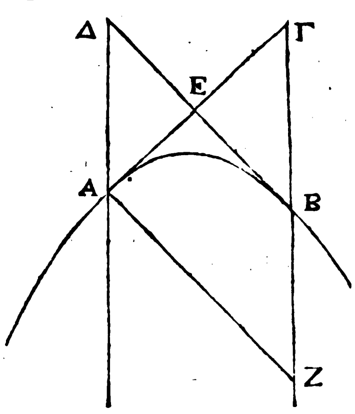
ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ τῆς ΑΒ ἐφαπτέσθωσαν ἥ τε ΑΓ καὶ ἡ ΒΔ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Ε, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Α, Β διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΓΒ, ΔΑ, συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις κατὰ τὰ Γ, Δ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔΕ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΔ ἡ ΑΖ, τεταγμένως ἄρα κατῆκται. Ἔσται δή, ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς, ἴσον τὸ ΑΔΒΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΓΖ τριγώνῳ· καὶ, κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΑΕΒΖ, λοιπὸν τὸ ΑΔΕ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ.

Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν, συμπιπτέτωσαν αἱ διάμετροι κατὰ τὸ Η κέντρον. ἐπεὶ οὖν κατῆκται ἡ ΑΖ, καὶ

Prop. I. *Theor.*

Si coni sectionem vel circuli circumferentiam rectæ lineæ contingentes inter se conveniant; per tactus vero ducantur diametri, quæ contingentibus occurrant: triangula ad verticem facta sibi ipsis æqualia erunt.



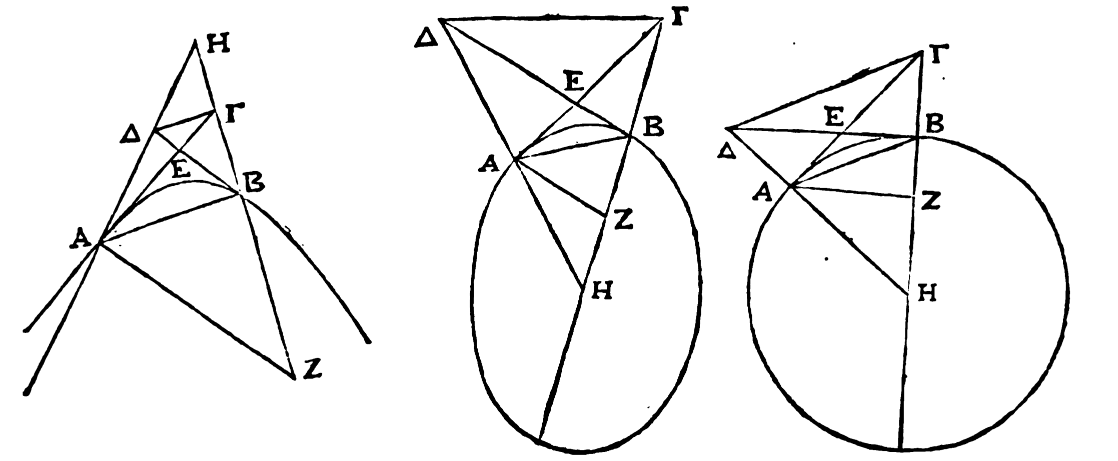
SIT coni sectio vel circuli circumferentia A B, quam contingant rectæ A Γ, B Δ convenientes in puncto E, & per tactus A, B diametri sectionis Γ B, Δ A ducantur, quæ contingentibus occurrant in punctis Γ, Δ: dico triangulum A Δ E triangulo E B Γ æquale esse.

Ducatur enim à puncto A recta A Z ipsi B Δ parallela, quæ propterea ordinatim applicata erit. Erit igitur, in parabola, parallelogrammum A Δ B Z æquale [per 42.1.huj.] triangulo A Γ Z: quare, ablato communi A E B Z, triangulum A Δ E, quod relinquitur, æquale est triangulo Γ B E.

In aliis vero, conveniant diametri in centro H. & quoniam ordinatim applicata est A Z, &

Α Γ sectionem contingit; rectangulum Ζ Η Γ [per 37. 1. huj.] æquale est quadrato ex Β Η: ut igitur Ζ Η ad Η Β ita est [per 16. 6.] Β Η ad Η Γ: quare [per 20. 6.] ut Ζ Η ad Η Γ ita quadratum ex Ζ Η ad quadratum ex Η Β. sed [per 3. lem. huj.] ut quadratum ex Ζ Η ad quadratum ex Η Β ita triangulum Α Η Ζ ad triangulum Δ Η Β, & ut Ζ Η ad Η Γ ita [per 1. 6.] triangulum Α Η Ζ ad triangulum

ἐφάπτεται ἡ Α Γ, τὸ ὑπὸ Ζ Η Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Β Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζ Η πρὸς Η Β οὕτως ἡ Β Η πρὸς Η Γ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Ζ Η πρὸς Η Γ οὕτως τὸ ἀπὸ Ζ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Η Β. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ Ζ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Η Β οὕτως τὸ Α Η Ζ τρίγωνον πρὸς τὸ Δ Η Β, ὡς δὲ ἡ Ζ Η πρὸς Η Γ οὕτως τὸ Α Η Ζ πρὸς τὸ Α Η Γ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α Η Ζ πρὸς τὸ Α Η Γ



Α Η Γ: ergo [per 11. 5.] ut triangulum Α Η Ζ ad triangulum Α Η Γ ita triangulum Α Η Ζ ad triangulum Δ Η Β: & propterea [per 9. 5.] triangulum Α Η Γ triangulo Δ Η Β est æquale. commune auferatur Α Η Β Ε, [in hyperbola Η Δ Ε Γ:] reliquum igitur triangulum Α Ε Δ reliquo Γ Ε Β æquale erit.

οὕτως τὸ Α Η Ζ πρὸς τὸ Δ Η Β· ἴσον ἄρα τὸ Α Η Γ τῷ Δ Η Β. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ Α Η Β Ε· λοιπὸν ἄρα τὸ Α Ε Δ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ Γ Ε Β.

EUTOCIUS.

Tertius conicorum liber, amicissime *Anthemi*, dignus ab antiquis existimatus est in quem multum studii ac diligentiæ conferretur, quod variæ ipsius editiones ostendunt. sed neque epistolam præfixam habet quemadmodum alii libri, neque commentarios in ipsum docti alicujus viri ex iis qui ante nos fuerunt, quanquam in eo multa sint contemplatione dignissima, ut ipse *Apollonius* in proœmio totius libri asserit. omnia autem à nobis manifeste explicata sunt ac demonstrata ex præcedentibus libris & commentariis in eosdem.

Το τρίτον τῶν κωνικῶν, ὦ φίλτατέ μοι Ἀνθέμιε, πολλῆς μὲν φροντίδος ὑπὸ τῶν παλαιῶν ἠξίωται, ὡς αἱ πολύτροποι αὐτοῦ ἐκδόσεις δηλοῦσιν. οὔτε δὲ ἐπιστολὴν ἔχει προγεγραμμένην, καθάπερ τὰ ἄλλα, οὐδὲ σχόλια εἰς αὐτὸ ἀξιόλογα τῶν πρὸ ἡμῶν εὑρίσκεται, καί τοι τῶν ἐν αὐτῷ ἀξίων ὄντων θεωρίας, ὡς καὶ αὐτὸς Ἀπολλώνιος ἐν τῷ προοιμίῳ τοῦ παντὸς βιβλίου φησίν. πάντα δὲ ὑφ' ἡμῶν σαφῶς ἔκκειταί σοι δεικνύμενα ἐκ τῶν προλαβόντων βιβλίων καὶ τῶν εἰς αὐτὰ σχολίων.

Invenitur etiam alia demonstratio, in parabola quidem, hujusmodi.

Ἔστι δὲ καὶ ἄλλη ἀπόδειξις, ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς.

Quoniam Α Γ sectionem contingit, & ordinatim applicata est Α Ζ: erit [per 35. 1. huj.] & Γ Β æqualis ipsi Β Ζ, & [per 34. 1.] Β Ζ ipsi Α Δ: ergo Α Δ, Γ Β inter se æquales sunt. sed & [per 34. 1.] parallelæ: triangulum igitur Α Δ Ε æquale est & simile triangulo Ε Β Γ.

Ἐπεὶ δὴ ἐφάπτεται ἡ Α Γ, καὶ κατῆκται ἡ Α Ζ, ἴση ἐστὶν ἡ Γ Β τῇ Β Ζ. ἀλλὰ ἡ Β Ζ τῇ Α Δ ἴση· καὶ ἡ Α Δ ἄρα τῇ Γ Β ἴση. ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ παράλληλος· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ Α Δ Ε τρίγωνον τῷ Ε Β Γ τριγώνῳ.

In reliquis vero, junctis Α Β, Γ Δ, dicendum.

Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν, ἐπιζευχθεισῶν τῶν Α Β, Γ Δ, λεκτέον.

Quoniam [per 37. 1. huj. & 16. 6.] ut Ζ Η ad Η Β ita est Β Η ad Η Γ, ut vero Ζ Η ad Η Β ita Α Η ad Η Δ, est enim Α Ζ ipsi Δ Β parallela; ergo [per 11. 5.] ut Β Η ad Η Γ ita Α Η ad Η Δ, & propterea [per 2. 6.] Α Β parallela est ipsi Γ Δ: triangulum igitur Α Δ Γ æquale est [per 37. 1.] triangulo Β Γ Δ. & communi Γ Δ Ε ablato, relinquitur triangulum Α Δ Ε triangulo Γ Β Ε æquale.

Ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Ζ Η πρὸς Η Β οὕτως ἡ Β Η πρὸς Η Γ, ὡς δὲ ἡ Ζ Η πρὸς Η Β οὕτως ἡ Α Η πρὸς Η Δ, παράλληλος γὰρ ἡ Α Ζ τῇ Δ Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Β Η πρὸς Η Γ οὕτως ἡ Α Η πρὸς Η Δ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Α Β τῇ Γ Δ· ἴσον ἄρα τὸ Α Δ Γ τρίγωνον τῷ Β Γ Δ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ Γ Δ Ε, λοιπὸν τὸ Α Δ Ε ἴσον ἐστὶ τῷ Γ Β Ε.

Ad casus quod attinet, dicendum, in parabola quidem & hyperbola non dari casus; in ellipsi vero esse duos. vel enim contingentes rectæ in punctis tactuum diametris occurrentes productis etiam conveniunt, sicuti in textûs figura: vel ad alteras partes ad quas est Β, quemadmodum in hyperbola.

Περὶ δὲ τῶν πτώσεων λεκτέον, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς οὐκ ἔχει, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἔχει δύο. αἱ γὰρ ἐφαπτόμεναι κατὰ τὰς ἁφὰς συμβάλλουσαι ταῖς διαμέτροις καὶ ἐκβαλλομέναις αὐταῖς συμπίπτουσιν, ὡς ἐν τῷ ῥητῷ κεῖται· ἢ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη καθ' ἃ ἔστι τὸ Β, ὥσπερ ἔχει καὶ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς.

*

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β΄.

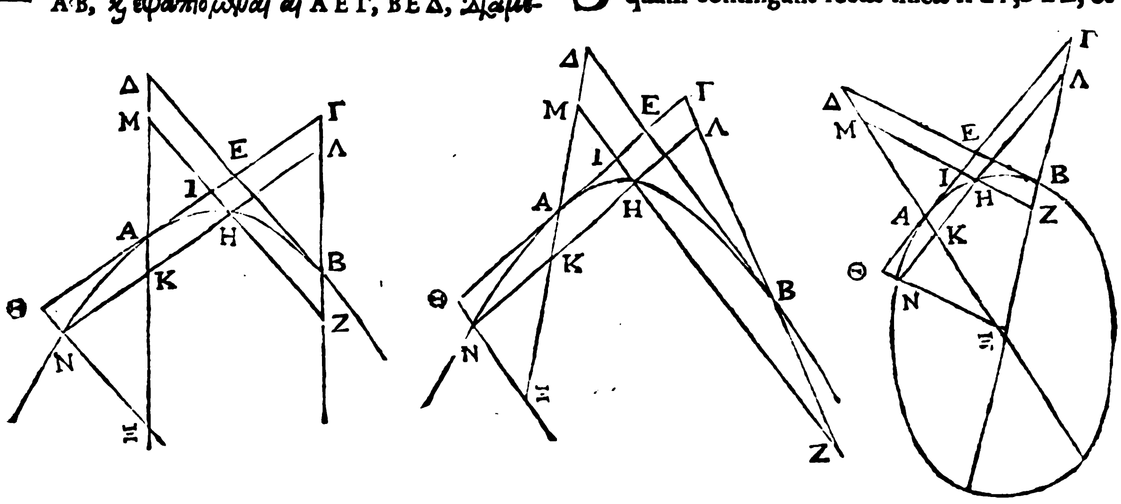
Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ἢ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων· τὸ γινόμενον τετράπλευρον πρὸς τῇ μιᾷ τῶν ἐφαπτομένων καὶ μιᾷ τῶν διαμέτρων ἴσον ἔσται τῷ γινομένῳ τριγώνῳ πρός τε τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ ἑτέρᾳ τῶν διαμέτρων.

Prop. II. Theor.

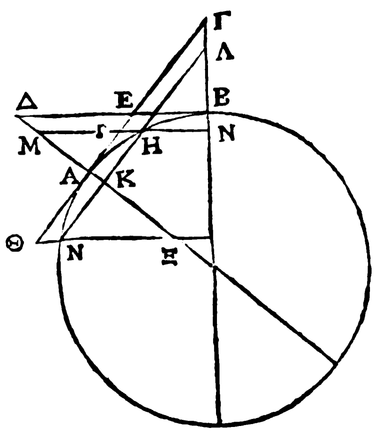
Iisdem positis, si in coni sectione vel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum, & per ipsum parallelæ contingentibus usque ad diametros ducantur: quadrilaterum, factum ad unam contingentium & ad unam diametrorum, æquale erit triangulo ad eandem contingentem & alteram diametrum constituto.

Ἔστω γὰρ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΕΓ, ΒΕΔ, διάμετροι δὲ αἱ ΑΔ, ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ ἤχθωσαν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΗΚΛ, ΗΜΖ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΙΜ τρίγωνον τῷ ΓΛΗΙ τετραπλεύρῳ.

Sit ΑΒ coni sectio vel circuli circumferentia, quam contingant rectæ lineæ ΑΕΓ, ΒΕΔ, & diametri sint ΑΔ, ΒΓ; sumpto autem in sectione puncto Η, ducantur ΗΚΛ, ΗΜΖ contingentibus parallelæ: dico triangulum ΑΙΜ æquale esse quadrilatero ΓΛΗΙ.



Ἐπεὶ γὰρ προδέδεικται ἴσον τὸ ΗΚΜ τρίγωνον τῷ ΑΛ τετραπλεύρῳ, κοινὸν προσκείσθω ἢ ἀφῃρήσθω τὸ ΙΚ τετράπλευρον, καὶ γίνεται τὸ ΑΙΜ τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΗ τετραπλεύρῳ.



Quoniam enim ostensum est [ad 42. & 43. 1. huj.] ΗΚΜ triangulum æquale quadrilatero ΑΛ; commune apponatur vel auferatur quadrilaterum ΙΚ, & fiet triangulum ΑΙΜ quadrilatero ΓΗ æquale.

EUTOCIUS.

Τὰς πτώσεις τούτου θεωρήματος εὑρήσεις διὰ τοῦ μβ΄. καὶ μγ΄. θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου, καὶ τῶν εἰς αὐτὰ γεγραμμένων σχολίων. δεῖ μέντοι ἐπιστῆσαι, ὅτι ἐὰν τὸ Η σημεῖον μεταξὺ τῶν Α, Β ληφθῇ, ὥστε παραλλήλους εἶναι τὰς ΔΕΒ, ΜΗΖ· ΑΕΓ, ΛΗΚ, ἐκβληθῇ δὲ ἡ ΛΚ μέχρι τῆς τομῆς ὡς κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΒΔ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΝΞ· ἔσται διὰ τὰ εἰρημένα ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, κατὰ τὸ μθ΄. καὶ ν΄. θεώρημα καὶ τὸ τούτων σχόλιον, τὸ ΚΝΞ τρίγωνον τῷ ΚΓ τετραπλεύρῳ ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΚΝΞ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΚΜΗ, διότι παράλληλός ἐστιν ἡ ΜΗ τῇ ΝΞ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἴσον, διότι ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ ΑΓ, παράλληλος δὲ αὐτῇ ἡ ΗΝ, καὶ διάμετρος ἡ ΜΞ, καὶ ἴση ἄρα ἡ ΝΚ τῇ ΚΗ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΝΞ τρίγωνον τῷ ΚΓ τετραπλεύρῳ· κοινοῦ προστιθεμένου τοῦ ΑΝ, γίνεται τὸ ΑΘΞ τρίγωνον τῷ ΝΓ τετραπλεύρῳ ἴσον.

Casus hujus theorematis invenientur per quadragesimum secundum & quadragesimum tertium theorema primi libri, & commentarios in ea conscriptos. oportet autem scire, si punctum Η inter Α, Β sumatur, ita ut æquidistantes sint ΔΕΒ, ΜΗΖ, itemque ΑΕΓ, ΛΗΚ, & producatur ΛΚ usque ad sectionem in Ν, & per Ν ducatur ΝΞ ipsi ΒΔ æquidistans: ex iis quæ tradita sunt in theoremate quadragesimo nono & quinquagesimo primi libri, & in ipsa commentariis, erit triangulum ΚΝΞ æquale quadrilatero ΚΓ. sed triangulum ΚΝΞ simile est triangulo ΚΜΗ, cum ΜΗ æquidistans sit ΝΞ. est autem & eidem æquale, quoniam ΑΓ est recta contingens, cui æquidistat ΗΝ, & ΜΞ est diameter, & ΝΚ æqualis ΚΗ. quoniam igitur triangulum ΚΝΞ æquale est quadrilatero ΚΓ; adjiciatur commune quadrilaterum ΑΝ, ac fiet triangulum ΑΘΞ æquale quadrilatero ΝΓ.

Prop.

PROP. III. *Theor.*

Iisdem positis, si in coni sectione vel circuli circumferentia duo puncta sumantur; & per ipsa ducantur parallelæ contingentibus usque ad diametros: quadrilatera, quæ ab ipsis fiunt, diametrisque insistunt, inter se æqualia erunt.

SIT enim coni sectio, vel circuli circumferentia, lineæque contingentes & diametri, sicuti jam dictum est; &, sumptis in sectione duobus punctis Z, H, ducantur per Z quidem lineæ contingentibus parallelæ ZΘKΛ, NZIM, per H vero ducantur NHΞO, HΘΠΡ: dico quadrilaterum ΛH quadrilatero MΘ, & quadrilaterum ΛN ipsi PN æquale esse.

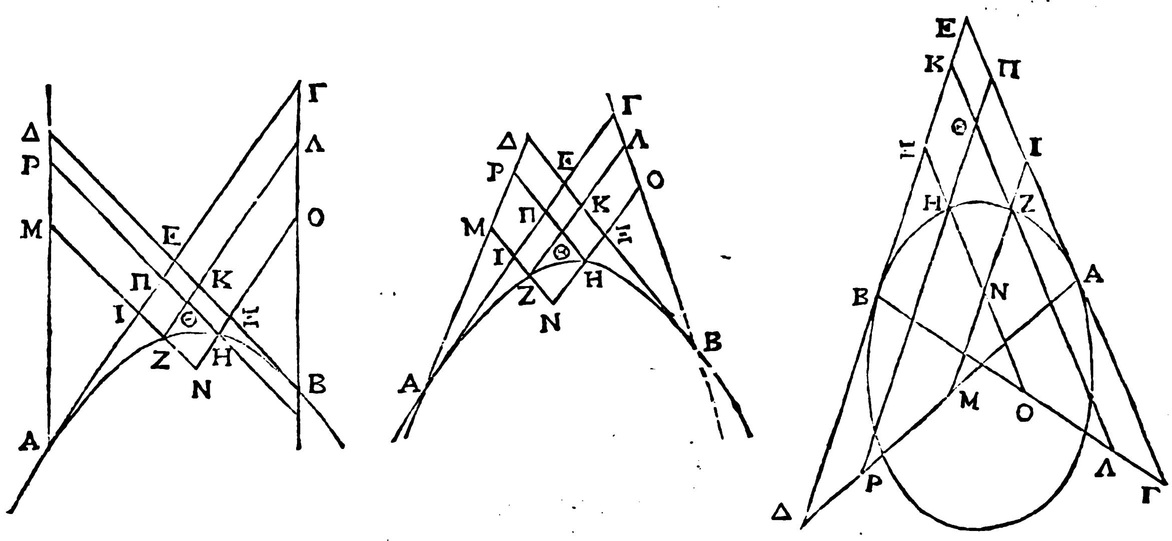
Quoniam enim antea [ad 2. 3. huj.] demonstratum est triangulum PΠA æquale quadrilatero ΓH, & triangulum AMI quadrilatero ΓZ; est autem APΠ triangulum majus quam triangulum AMI quadrilatero ΠM: erit & quadrilaterum ΓH majus quam ΓZ eodem MΠ quadrilatero: & propterea quadrilaterum ΓH æquale est quadrilateris ΓZ, MΠ, hoc est ipsis ΓΘ, PZ. commune auferatur ΓΘ: reliquum igitur quadrilaterum ΛH æquale est reliquo ΘM: quare & totum ΛN toti PN æquale erit.

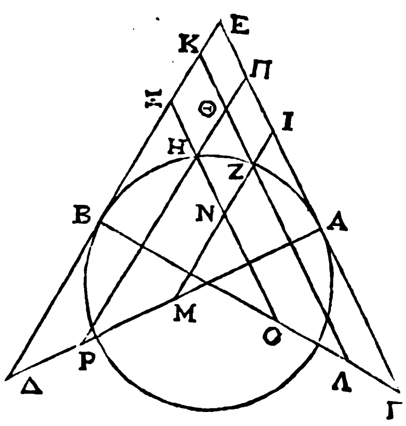
ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ΄.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ἢ τῆς περιφερείας δύο σημεῖα ληφθῇ, καὶ δι᾽ αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσιν ἕως τῶν διαμέτρων ταῖς ἐφαπτομέναις· τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν τετράπλευρα, βεβηκότα δὲ ἐπὶ τῶν διαμέτρων, ἴσα ἔσται ἀλλήλοις.

ΕΣΤΩ γὰρ ἡ τομὴ, ἢ κύκλου περιφέρεια, καὶ ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ διάμετροι, ὡς προείρηται, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Z, H, καὶ διὰ μὲν τοῦ Z ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι ἤχθωσαν ἥ τε ZΘKΛ καὶ ἡ NZIM, διὰ δὲ τοῦ H ἥ τε NHΞO καὶ HΘΠΡ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΛH τετράπλευρον τῷ MΘ, τὸ δὲ ΛN τῷ PN.

Ἐπεὶ γὰρ προδέδεικται ἴσον τὸ PΠA τρίγωνον τῷ ΓH τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ AMI τῷ ΓZ, τὸ δὲ APΠ τοῦ AMI μεῖζόν ἐστι τῷ ΠM τετραπλεύρῳ· καὶ τὸ ΓH ἄρα τοῦ ΓZ μεῖζόν ἐστι τῷ MΠ τετραπλεύρῳ· ὥστε τὸ ΓH ἴσον ἐστὶ τῷ ΓZ καὶ τῷ MΠ, τουτέστι τῷ ΓΘ καὶ τῷ PZ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΛH ἴσον ἐστὶ τῷ ΘM· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΛN τῷ PN ἴσον ἐστίν.





EUTOCIUS.

Hoc theorema plures casus habet, quos ut in antecedente inveniemus. sed animadvertendum est duo puncta quæ sumuntur, vel esse inter duas diametros, vel extra & ad easdem partes. nam si alterum quidem extra sumatur, alterum vero inter diametros, non constituentur quadrilatera de quibus in propositione dictum est. sed neque ad utrasque diametrorum partes constituentur.

Τὸ θεώρημα τοῦτο πλείους ἔχει πτώσεις, ἃς εὑρήσομεν ὁμοίως τῷ πρὸ αὐτοῦ. δεῖ μέντοι ἐπισκῆψαι ὅτι τὰ λαμβανόμενα δύο σημεῖα ἢ μεταξύ ἐστι τῶν δύο διαμέτρων, ἢ τὰ δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. εἰ γὰρ τὸ μὲν ἕτερον ἐκτὸς λάβοιμεν, τὸ δὲ ἕτερον μεταξὺ τῶν διαμέτρων, οὐ συνίσταται τὰ ἐν τῇ προτάσει λεγόμενα τετράπλευρα. ἀλλ᾽ οὐδὲ ἐφ᾽ ἑκάτερα τῶν διαμέτρων.

ΠΡΟ-

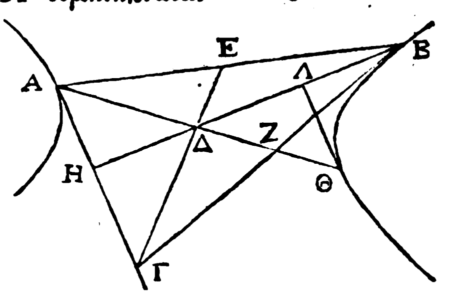
ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ΄.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις· ἴσα ἔσται τὰ πρὸς ταῖς ἐφαπτομέναις τρίγωνα.

Prop. IV. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contingentes inter se conveniant, & per tactus ducantur diametri contingentibus occurrentes: triangula, quæ ad contingentes constituuntur, æqualia erunt.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΓ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, κέντρον δὲ ἔστω τῶν τομῶν τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ ἡ ΓΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΔ ἐπὶ τὸ Ε, ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΔΑ, ΒΔ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ζ, Η· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔΗ τρίγωνον τῷ ΒΔΖ, τὸ δὲ ΑΓΖ τῷ ΒΓΗ.



Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΑΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ, ἴσον ἂν εἴη τὸ ΑΗΔ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ. ἀλλὰ τὸ ΔΘΛ τῷ ΒΔΖ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΑΗΔ ἄρα τῷ ΒΔΖ ἐστὶν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΓΖ τῷ ΒΓΗ ἴσον.

Sint oppositæ sectiones A, B, quas contingant rectæ lineæ ΑΓ, ΒΓ in puncto Γ convenientes; sitque sectionum centrum Δ; & junctis AB, ΓΔ, producatur ΓΔ usque ad B; jungantur etiam ΔΑ, ΒΔ, & ad Z, H producantur: dico triangulum ΑΔΗ æquale esse triangulo ΒΔΖ; & ΑΓΖ triangulum triangulo ΒΓΗ.

Ducatur enim per Θ contingens sectionem ΘΛ, quæ [per demonstrata ab *Eutocio* ad 44.1.huj.] ipsi AH parallela erit. & quoniam [per 30.1. huj.] ΑΔ æqualis est ΔΘ; erit [per 26.1.] ΑΗΔ triangulum æquale triangulo ΘΛΔ. sed [per 1.3.huj.] & triangulum ΔΘΛ æquale est triangulo ΒΔΖ: igitur triangulum ΑΗΔ triangulo ΒΔΖ æquale: unde triangulum ΑΓΖ ipsi ΒΓΗ est æquale.

EUTOCIUS.

Ἐν τῇ προτάσει τούτου τοῦ θεωρήματος καὶ τῶν ἑξῆς δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι τὰς ἀντικειμένας λέγει ἀδιορίστως· καί τινα μὲν τῶν ἀντιγράφων τὰς δύο ἐφαπτομένας ἐπὶ τῆς μιᾶς τομῆς ἔχειν, τινὰ δὲ οὐκέτι τὰς δύο ἐφαπτομένας ἐπὶ τῆς μιᾶς, ἀλλ' ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν μίας συμπιπτούσας ἀλλήλαις (ὡς εἴρηται ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ) ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῶν ἀσυμπτώτων. καὶ οὕτως δὲ κἀκείνῳ συμβαίνει τὰ τῆς προτάσεως. ἔξεστι δὲ τοῖς βουλομένοις καταγράφουσιν ἐπισκέπτεσθαι. καὶ δῆλον ὅτι, εἰ μὲν τῆς μιᾶς τῶν τομῶν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτονται, ἡ διὰ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν καὶ τοῦ κέντρου ἡ πλαγία διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων· εἰ δὲ ἑκατέρας μία ἐστὶν ἐφαπτομένη, ἡ διὰ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν καὶ τοῦ κέντρου ἡ ὀρθία διάμετρός ἐστιν.

In propositione hujus theorematis & eorum quæ sequuntur, scire oportet *Apollonium* indeterminate dicere *oppositas sectiones*: & nonnulli quidem codices habent duas contingentes in una sectione: nonnulli vero non duas contingentes in una, sed singulas in utraque sectione contingentes, quæ inter se conveniunt (uti dictum est in secundo libro) in angulo qui deinceps est angulo asymptotôn; & ita eveniunt ea quæ in propositione dicuntur. licet autem iis, qui volunt, hoc descriptis figuris considerare. ac manifestum est, si unam sectionum duæ rectæ lineæ contingant; quæ per punctum concursûs earum & centrum ducitur recta, oppositarum sectionum transversa diameter est: si vero utramque sectionem singulæ lineæ contingant; quæ per dictum punctum & centrum ducitur, est recta diameter sectionum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ ληφθῇ ἐφ' ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον, πρὸς τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως ἠγμένῃ διαμέτρῳ, τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου πρὸς τῇ συμπτώσει τῶν ἐφαπτομένων διαφέρει, τῷ ἀπολαμβανομένῳ τριγώνῳ πρός τε τῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ.

Prop. V. *Theor.*

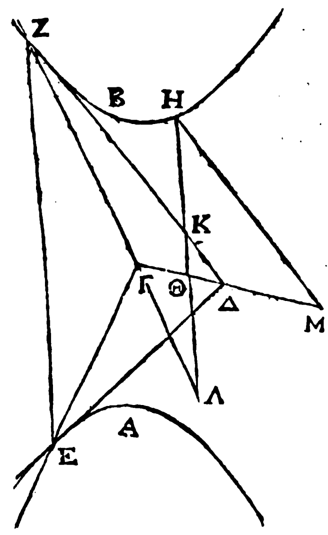
Si duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contingentes sibi ipsis occurrant; & in quavis sectionum aliquod punctum sumatur, à quo ducantur duæ lineæ, una quidem contingenti æquidistans, altera vero parallela ei quæ tactus conjungit: triangulum, quod ab ipsis constituitur ad diametrum per occursum ductam, à triangulo quod est ad occursum contingentium differt, triangulo facto ad contingentem & ad diametrum illam quæ per tactum ducitur.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΕΔ, ΔΖ συμπιπτέ-

Sint oppositæ sectiones A, B, quarum centrum Γ; & lineæ contingentes sint ΕΔ, ΔΖ,

quæ

quæ sibi ipsis occurrant in Δ; & junctis EZ, ΓΔ producatur ΓΔ, junctæque etiam ZΓ, EΓ producantur; in sectione autem sumatur aliquod punctum H, per quod ducatur HKΘΛ æquidistans EZ, & HM parallela ipsi ΔZ: dico triangulum HΘM à triangulo KΘΔ differre triangulo KΛZ.



Quoniam enim [per 38. 2. huj.] ostensa est ΓΔ diameter oppositarum sectionum, & EZ ad ipsam ordinatim applicatur; & HKΘΛ quidem ducitur parallela EZ, MH vero parallela ΔZ: triangulum MHΘ à triangulo ΓΛΘ differt [per 45. 1. huj.] triangulo ΓΔZ: quare MHΘ triangulum à triangulo KΘΔ differt triangulo KZΛ. constat igitur triangulum KZΛ quadrilatero MHKΔ æquale esse.

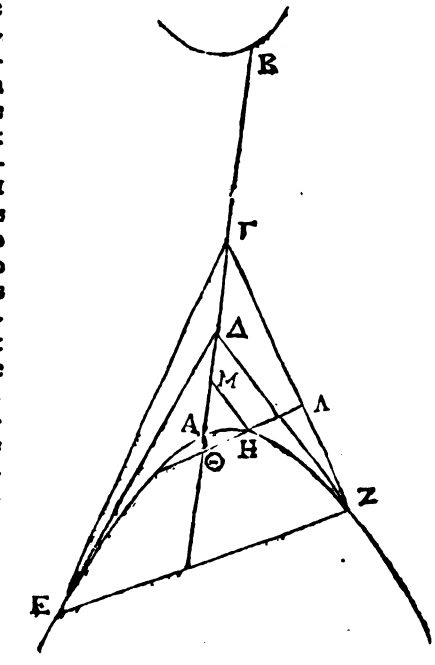
τωσαν κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EZ καὶ ἡ ΓΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΔ, καὶ αἱ ZΓ, EΓ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ H, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ μὲν τὴν EZ ἡ HKΘΛ, παρὰ δὲ τὴν ΔZ ἡ HM· λέγω ὅτι τὸ HΘM τρίγωνον τοῦ KΘΔ διαφέρει τῷ KΛZ.

Ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ ΓΔ διάμετρος τῶν ἀντικειμένων, ἡ δὲ EZ τεταγμένως ἐπ' αὐτὴν κατηγμένη, καὶ ἡ μὲν HΘ παρὰ τὴν EZ, ἡ δὲ MH παρὰ τὴν ΔZ· τὸ ἄρα MHΘ τρίγωνον διαφέρει τοῦ ΓΛΘ τριγώνου τῷ ΓΔZ· ὥστε τὸ MHΘ τοῦ KΘΔ τριγώνου διαφέρει τῷ KZΛ. φανερὸν δὴ ὅτι ἴσον γίνεται τὸ KZΛ τρίγωνον τῷ MHKΔ τετραπλεύρῳ.

EUTOCIUS.

Quintum quidem theorema satis constat: verumtamen in figura quæ diametrum habet rectam, ita dicemus. quoniam ostensum est [ad 45. 1. huj.] triangulum HΘM majus esse quam triangulum ΓΛΘ triangulo ΓΔZ; erit triangulum HΘM æquale triangulo ΓΘΛ una cum triangulo ΓΔZ: ergo & æquale triangulo KΔΘ una cum triangulo KΛZ: triangulum igitur HMΘ à triangulo KΔΘ differt triangulo KΛZ. communi ablato triangulo ΘΔK; reliquum KΛZ triangulum æquale est quadrilatero KΔMH.

In figura vero quæ transversam diametrum habet, hoc modo. quoniam prius demonstratum est [ad 44. 1.] ΓΛΘ triangulum majus esse quam triangulum MΘH triangulo ΓΔZ; erit ΓΘΛ triangulum æquale triangulo ΘHM una cum triangulo ΓΔZ. commune auferatur quadrilaterum ΓΔKΛ: reliquum igitur KΘΔ triangulum æquale est triangulo ΘHM una cum triangulo ΛZK. rursus commune auferatur MΘH: ergo triangulum ZKΛ quadrilatero ΔMHK æquale erit. Casus habet plures quos ex demonstratis in quadragesimo quarto & quadragesimo quinto theoremate primi libri addiscere oportet. Cum autem dicitur, *auferatur vel apponatur quadrilaterum vel triangulum*, ablationes & appositiones juxta proprietatem casuum fieri debent. quoniam vero sequentia plures casus continent, ob punctorum sumptiones & parallelas lineas; ne confusionem commentariis afferamus multas figuras describentes, unam in singulis theorematibus faciemus, quæ oppositas sectiones & diametros & lineas contingentes habeat; ut servetur illud quod in propositione dictum est. *Iisdem positis*, & parallelas quousque occurrant producemus, in unoquoque occursu literas ponentes, ita ut quilibet, observatis consequentiis, facile possit casus omnes demonstrare.



Ἔστι δὴ σαφὲς τὸ πέμπτον θεώρημα· λεκτέον δὲ ἐπὶ μὲν τῆς καταγραφῆς τῆς ἐχούσης τὴν ὀρθίαν διάμετρον· ἐπεὶ δέδεικται τὸ HΘM τοῦ ΓΛΘ μεῖζον τῷ ΓΔZ, ἴσον ἔσται τὸ HΘM τῷ ΓΘΛ καὶ τῷ ΓΔZ· ὥστε καὶ τῷ KΔΘ μετὰ τοῦ KΛZ· τὸ ἄρα HMΘ τοῦ KΔΘ διαφέρει τῷ KΛZ. κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΘΔK, λοιπὸν τὸ KΛZ ἴσον τῷ KΔMH.

Ἐπὶ δὲ τῆς ἐχούσης τὴν πλαγίαν διάμετρον· ἐπειδὴ προδέδεικται τὸ ΓΛΘ τοῦ MΘH μεῖζον τῷ ΓΔZ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘΛ τῷ ΘHM μετὰ τοῦ ΓΔZ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΔKΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ KΘΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘHM μετὰ τοῦ ΛKZ. ἔτι κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ MΘH· λοιπὸν ἄρα τὸ ZKΛ τῷ ΔMHK ἴσον. Πτώσεις δ' ἔχει πολλάς, ἃς δεῖ ἐφιστάνειν ἀπὸ τῶν δεδειγμένων ἐν τῷ μδʹ. καὶ μεʹ. θεωρήματι τοῦ πρώτου βιβλίου. Ἐν δὲ τῷ λέγειν "ἀφῃρήσθω ἢ προσκείσθω τετράπλευρον ἢ τρίγωνον", τὰς ἀφαιρέσεις ἢ προσθέσεις κατὰ τὴν οἰκειότητα τῶν πτώσεων χρὴ ποιεῖσθαι. ἐπειδὴ δὲ τὰ ἑξῆς πολύπτωτά ἐστι διὰ τὰ λαμβανόμενα σημεῖα καὶ τὰς παραλλήλους, ἵνα μὴ ὄχλον παρέχωμεν τοῖς ὑπομνήμασι, πολλὰς ποιοῦντες καταγραφὰς καθ' ἕκαστον τῶν θεωρημάτων, μίαν ποιοῦμεν ἔχουσαν τὰς ἀντικειμένας καὶ τὰς διαμέτρους καὶ τὰς ἐφαπτομένας, ἵνα σώζηται τὸ ἐν τῇ προτάσει λεγόμενον. "τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων" καὶ τὰς παραλλήλους πάσας ποιοῦμεν συμπίπτειν, στοιχεῖα καθ' ἑκάστην σύμπτωσιν θέντες, ἵνα φυλάττων τις τὰ ἀκόλουθα δύνηται πάσας τὰς πτώσεις ἀποδεικνύειν.

ΠΡΟ-

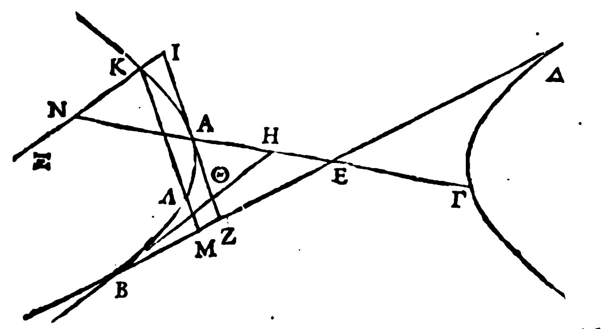
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, συμπίπτουσαι ταῖς τε ἐφαπτομέναις καὶ ταῖς διαμέτροις· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τετράπλευρον, πρὸς τῇ μιᾷ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῇ μιᾷ τῶν διαμέτρων, ἴσον ἔσται τῷ γινομένῳ τριγώνῳ, πρός τε τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ ἑτέρᾳ τῶν διαμέτρων.

Prop. VI. Theor.

Iisdem positis, si in una oppositarum sectionum aliquod punctum sumatur, & ab eo ducantur rectæ lineæ contingentibus parallelæ, quæ & contingentibus & diametris occurrant: quadrilaterum ab ipsis factum, ad unam contingentium & ad unam diametrorum, æquale erit triangulo, quod ad eandem contingentem & ad alteram diametrum constituitur.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι αἱ ΑΕΓ, ΒΕΔ, καὶ τῆς ΑΒ τομῆς ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΗ, συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Θ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Κ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΚΛΜ, ΚΝΞ· λέγω ὅτι τὸ ΚΖ τετράπλευρον τῷ ΑΙΝ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον.



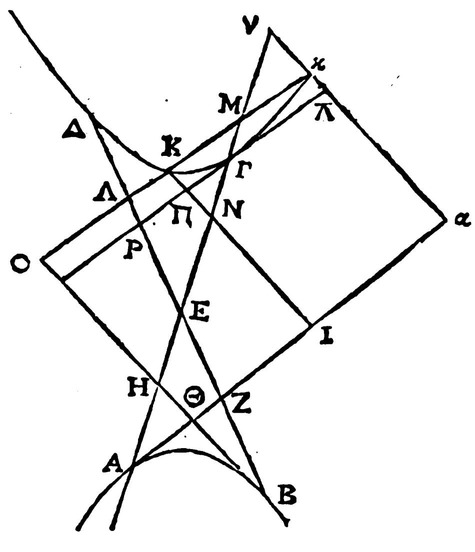
Ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ τῆς ΑΒ ἐφάπτεται ἡ ΑΖ συμπίπτουσα τῇ ΒΔ, καὶ παρὰ τὴν ΑΖ ἦκται ἡ ΚΛ· ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΙΝ τρίγωνον τῷ ΚΖ τετραπλεύρῳ.

Sint oppositæ sectiones, quarum diametri ΑΕΓ, ΒΕΔ, & sectionem ΑΒ contingant rectæ lineæ ΑΖ, ΒΗ convenientes inter se in puncto Θ; sumatur autem aliquod punctum Κ in sectione, à quo parallelæ contingentibus ducantur ΚΛΜ, ΚΝΞ: dico quadrilaterum ΚΖ æquale esse triangulo ΑΙΝ.

Quoniam enim oppositæ sectiones sunt ΑΒ, ΓΔ, & sectionem ΑΒ contingit recta linea ΑΖ ipsi ΒΔ occurrens, & ducta est ΚΛ parallela ipsi ΑΖ: triangulum ΑΙΝ [per 2. 3. huj.] quadrilatero ΚΖ æquale erit.

EUTOCIUS.

Αἱ πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος καὶ τῶν ἐφεξῆς πάντων, ὡς εἴρηται ἐν τοῖς τοῦ πέμπτου θεωρήματος σχολίοις, πολλαί εἰσι· ἐπὶ πασῶν μέντοι τὰ αὐτὰ συμβαίνει. ὑπὲρ δὲ πλείονος σαφηνείας, ὑπογεγράφθω μία ἐξ αὐτῶν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΠΡ· φανερὸν δὴ ὅτι παράλληλός ἐστι τῇ ΑΖ καὶ τῇ ΜΛ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἐν τῷ δευτέρῳ θεωρήματι, κατὰ τὴν τῆς ὑπερβολῆς καταγραφὴν, τὸ ΓΠΝ τῷ ΛΚΠΡ τετραπλεύρῳ ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΜΠ· τὸ ἄρα ΜΚΝ τρίγωνον τῷ ΜΛΡΓ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΡΕ, ὃ ἐστι ἴσον τῷ ΑΕΖ, διὰ τὰ ἐν τῷ μαʹ. τοῦ πρώτου βιβλίου· ὅλον ἄρα τὸ ΜΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΚΝ καὶ τῷ ΑΕΖ. κοινοῦ ἀφαιρεμένου τοῦ ΚΜΝ, λοιπὸν τὸ ΑΕΖ τῷ ΚΛΕΝ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΖΕΝΙ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΙΝ τρίγωνον τῷ ΚΛΖΙ ἴσον ἐστίν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΒΟΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΝΗΟ.



Casus hujus theorematis, & quidem omnium sequentium, multi sunt; ut dictum est in scholiis ad quintam propositionem: eadem tamen eveniunt in singulis. Verum, majoris evidentiæ gratiâ, describatur eorum unus, & ducatur recta ΓΠΡ sectionem contingens in Γ: patet igitur eam ipsis ΑΖ, ΜΛ parallelam esse. Quoniam autem, per secundum theorema hujus, in figura hyperbolæ, demonstratum est triangulum ΓΠΝ quadrilatero ΛΚΠΡ æquale, commune addatur quadrilaterum ΜΠ; ac triangulum ΜΚΝ quadrilatero ΜΛΡΓ æquale erit. commune adjiciatur triangulum ΓΡΕ, ipsi ΑΕΖ [per 41. primi huj.] æquale: erit igitur totum triangulum ΜΕΛ triangulis ΜΚΝ, ΑΕΖ simul æquale. utrinque auferatur commune triangulum ΚΜΝ; ac reliquum ΑΕΖ quadrilatero ΚΛΕΝ æquabitur. dein addatur commune quadrilaterum ΖΕΝΙ; totum igitur triangulum ΑΙΝ quadrilatero ΚΛΖΙ æquale est †. Pariter triangulum ΒΟΛ æquale erit quadrilatero ΚΝΗΟ.

† Ac si producatur ΛΜ ad κ, ac ducatur ν κ α ipsi ΒΗ parallela: erunt, ob ΚΜ ipsi Μκ æqualem, triangula ΚΜΝ, κΜν æqualia; ac proinde quadrilaterum ΙΝνα parallelogrammo Κα æquale. adjiciantur æqualia ΑΙΝ & ΚΛΖΙ, ac fiet triangulum Ανα quadrilatero κΛΖα æquale.

Prop.

Prop. VII. *Theor.*

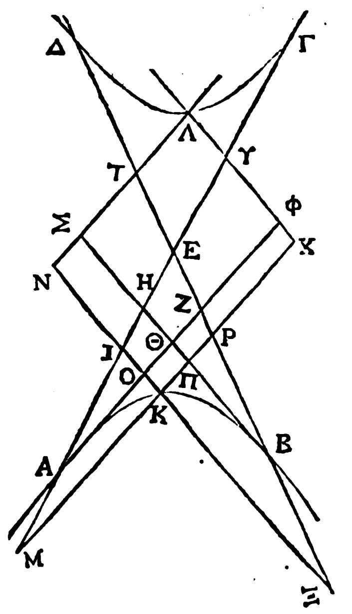
Iisdem positis, si in utraque sectione aliqua puncta sumantur; & ab ipsis ducantur lineæ contingentibus parallelæ, quæ & contingentibus & diametris occurrant: quadrilatera à lineis ductis constituta & diametris insistentia inter se æqualia erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐφ' ἑκατέρας τῆς τομῆς σημεῖά τινα ληφθῇ, καὶ ἀπ' αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, συμπίπτουσαι ταῖς τε ἐφαπτομέναις καὶ ταῖς διαμέτροις· τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν τετράπλευρα, βεβηκότα δὲ ἐπὶ τῶν διαμέτρων, ἴσα ἔσται ἀλλήλοις.

Ponantur enim eadem quæ supra; & in utraque sectione puncta K, Λ sumantur, per quæ ducantur ΜΚΠΡΧ, ΝΣΤΛ ipsi ΑΖ parallelæ; & ΝΙΟΚΞ, ΧΦΥΛ parallelæ ipsi ΒΗ: dico eadem evenire quæ in propositione dicta sunt.

Nam cum triangulum ΑΟΙ [per 2. 3. huj.] quadrilatero ΡΟ æquale sit, commune apponatur ΕΟ; & erit totum triangulum ΑΕΖ æquale quadrilatero ΚΕ. est autem [per *Eutoc.* 6. 3. huj.] & ΒΕΗ triangulum quadrilatero ΛΕ æquale: & [per 1. 3. huj.] triangulum ΑΕΖ triangulo ΒΗΕ: ergo & quadrilaterum ΛΕ æquale est quadrilatero ΙΚΡΕ. commune apponatur ΝΕ: totum igitur ΤΚ toti ΙΛ; & ΚΥ ipsi ΡΛ æquale erit.



Ὑποκείσθω γὰρ τὰ προειρημένα, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν τομῶν σημεῖα τὰ Κ, Λ, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ μὲν τὴν ΑΖ ἤχθωσαν ἡ ΜΚΠΡΧ καὶ ἡ ΝΣΤΛ, παρὰ δὲ τὴν ΒΗ ἡ ΝΙΟΚΞ καὶ ἡ ΧΦΥΛ· λέγω ὅτι ἔσται τὰ τῆς προτάσεως.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΟΙ τρίγωνον τῷ ΡΟ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΟ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΕ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΒΕΗ τρίγωνον ἴσον τῷ ΛΕ τετραπλεύρῳ, καὶ ἔστι τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΗΕ· καὶ τὸ ΛΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΙΚΡΕ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΝΕ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΙΛ, καὶ τὸ ΚΥ τῷ ΡΛ.

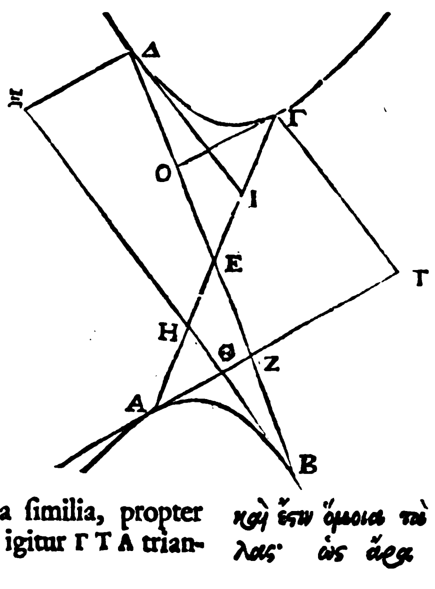
Prop. VIII. *Theor.*

Iisdem positis, pro punctis Κ, Λ sumantur Γ, Δ, in quibus diametri cum sectionibus conveniunt; & per ipsa contingentibus parallelæ ducantur: dico ΞΕ quadrilaterum quadrilatero ΕΤ; & quadrilaterum ΞΙ quadrilatero ΤΟ æquale esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, εἰλήφθω ἀντὶ τῶν Κ, Λ τὰ Γ, Δ, καθ' ἃ συμβάλλουσιν αἱ διάμετροι ταῖς τομαῖς, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν αἱ παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΞΕ τετράπλευρον τῷ ΕΤ, καὶ τὸ ΞΙ τῷ ΟΤ.

Quoniam enim triangulum ΑΗΘ ostensum est [per 1. 3. huj.] æquale triangulo ΘΒΖ: & [per 1. lem.] linea quæ à puncto Α ducitur ad Β æquidistat lineæ à puncto Η ad Ζ ductæ: erit [per 2. 6.] ut ΑΕ ad ΕΗ ita ΒΕ ad ΕΖ; & per conversionem rationis ut ΕΑ ad ΑΗ ita ΕΒ ad ΒΖ. est autem ut ΓΑ ad ΑΕ ita ΔΒ ad ΒΕ; utraque enim [per 30. 1. huj.] utriusque est dupla: ergo ex æquali [per 22. 5.] ut ΓΑ ad ΑΗ ita ΔΒ ad ΒΖ. & sunt triangula similia, propter lineas [ex hyp.] parallelas: ut igitur ΓΤΑ trian-



Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐδείχθη τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΘΒΖ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β παράλληλος τῇ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς ΒΖ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας διπλῆ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΖ. καὶ ἔστιν ὅμοια τὰ τρίγωνα, διὰ τὰς παραλλήλους· ὡς ἄρα τὸ ΓΤΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΘΗ

ΑΘΗ οὕτως τὸ ΞΒΔ πρὸς τὸ ΘΒΖ, καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ τὸ ΑΗΘ τῷ ΘΖΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΤΑΓ τῷ ΔΒΞ, ὧν τὸ ΑΗΘ ἴσον ἐδείχθη τῷ ΒΘΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΘ τετράπλευρον ἴσον τῷ ΓΘ· ὥστε καὶ τὸ ΞΕ τῷ ΕΤ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΟ τῇ ΑΖ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΟΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ· ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ΔΕΙ τῷ ΒΕΗ. ἀλλὰ τῷ ΒΕΗ τὸ ΑΕΖ ἴσον· καὶ τὸ ΓΟΕ ἴσον τῷ ΔΕΙ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΞΕ τετράπλευρον ἴσον τῷ ΕΤ· ὅλον ἄρα τὸ ΞΙ ἴσον ἐστὶ τῷ ΟΤ.

gulum ad triangulum ΑΘΗ ita triangulum ΞΒΔ ad triangulum ΘΒΖ; & permutando. triangulum autem ΑΗΘ æquale est [per 1. 3. huj.] triangulo ΘΖΒ: ergo & ΤΑΓ triangulum triangulo ΔΒΞ est æquale; quorum triangulum ΑΗΘ æquale est triangulo ΒΘΖ, ut ostensum est: reliquum igitur quadrilaterum ΔΘ est æquale quadrilatero ΓΘ: & propterea quadrilaterum ΞΕ quadrilatero ΕΤ. itaque quoniam [per dem. ab *Eut.* ad 44. 1. huj.] ΓΟ æquidistat ΑΖ, triangulum ΓΟΕ æquale est triangulo ΑΕΖ: similiter autem & triangulum ΔΕΙ triangulo ΒΕΗ. sed [per 1. 3. huj.] ΒΕΗ triangulum triangulo ΑΕΖ est æquale: ergo & triangulum ΓΟΕ triangulo ΔΕΙ. estque ΞΕ quadrilaterum æquale quadrilatero ΕΤ: totum igitur ΞΙ toti ΟΤ æquale erit.

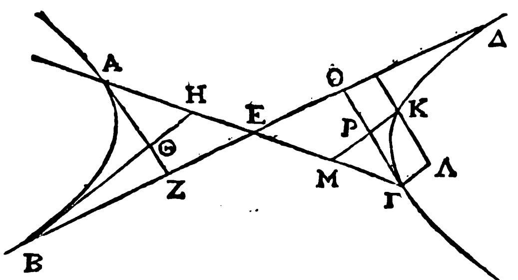
ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ΄.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν τὸ μὲν ἕτερον τῶν σημείων μεταξὺ ᾖ τῶν διαμέτρων, οἷον τὸ Κ, τὸ δὲ ἕτερον ἐπὶ τῶν Γ, Δ ταὐτόν, οἷον τὸ Γ, καὶ ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΕΟ τρίγωνον τῷ ΚΕ τετραπλεύρῳ, καὶ τὸ ΛΟ τῷ ΛΜ.

PROP. IX. *Theor.*

Iisdem positis, si alterum quidem punctum sit inter diametros, ut Κ; alterum vero sit idem quod unum punctorum Γ, Δ, ut Γ; & parallelæ ducantur: dico triangulum ΓΕΟ æquale esse quadrilatero ΚΕ; & quadrilaterum ΛΟ æquale ipsi ΛΜ.

Τοῦτο δὲ φανερόν. ἐπεὶ ἴσον ἐδείχθη τὸ ΓΕΟ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ, τὸ δὲ ΑΕΖ ἴσον τῷ ΚΕ τετραπλεύρῳ· ὥστε καὶ τὸ ΓΡΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΟ, καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΛΟ.

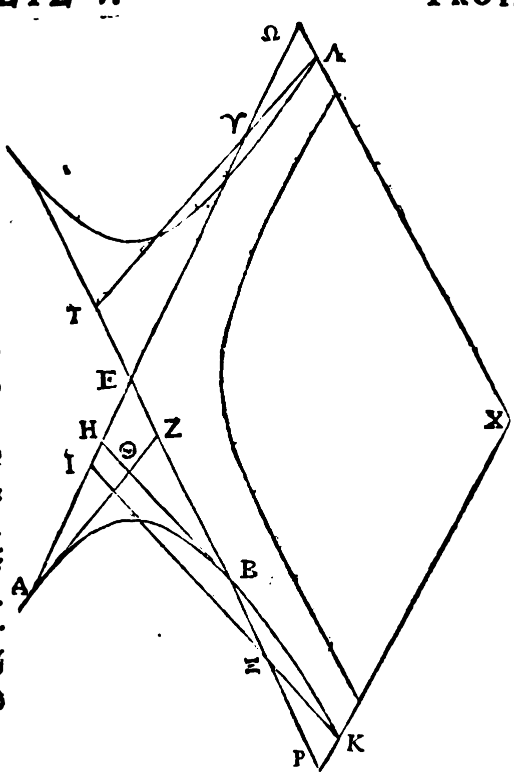


Illud vero perspicue apparet. nam demonstratum est [per 4. 3. huj.] ΓΕΟ triangulum æquale triangulo ΑΕΖ; triangulumque ΑΕΖ [per corol. 2. 3. huj.] æquale est quadrilatero ΚΕ; ergo & triangulum ΓΡΜ quadrilatero ΚΟ; & quadrilaterum ΑΜ quadrilatero ΑΟ est æquale.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι΄.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω τὰ Κ, Λ σημεῖα, μὴ καθ' ὃ συμβάλλουσι διάμετροι ταῖς τομαῖς· δεικτέον δὴ ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΤΡΧ τετράπλευρον τῷ ΩΧΚΙ τετραπλεύρῳ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτονται αἱ ΑΖ, ΒΗ, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροί εἰσιν αἱ ΑΕ, ΒΕ, καὶ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας εἰσὶν αἱ ΛΤ, ΚΙ· μεῖζόν ἐστι τὸ ΤΥΕ τοῦ ΤΩΛ τῷ ΕΖΑ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΞΕΙ τοῦ ΞΡΚ μεῖζόν ἐστι τῷ ΒΕΗ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕΖ τῷ ΒΕΗ· τῷ αὐτῷ ἄρα ὑπερέχει τό τε ΤΕΥ τοῦ ΤΩΛ, καὶ τὸ



PROP. X. *Theor.*

Iisdem positis, sumantur Κ, Λ, quæ non sint puncta in quibus diametri sectionibus occurrunt: demonstrandum est quadrilaterum ΛΤΡΧ quadrilatero ΩΧΚΙ æquale esse.

Quoniam enim rectæ lineæ ΑΖ, ΒΗ sectionem contingunt; & per tactus diametri ΑΕ, ΒΕ ducuntur; & sunt ΛΤ, ΚΙ contingentibus parallelæ: triangulum ΤΥΕ majus est [per 43. 1. huj.] quam triangulum ΤΩΛ triangulo ΒΖΑ. similiter & triangulum ΞΕΙ majus est quam triangulum ΞΡΚ triangulo ΒΕΗ. sed [per 1. 3. huj.] triangulum ΑΕΖ æquale est triangulo ΒΕΗ: quare eodem excessu & triangulum ΤΕΥ excedit triangulum ΤΩΛ, quo triangulum ΞΕΙ excedit ipsum

Tt ΞΡΚ;

ΞΡΚ: triangulum igitur ΤΥΕ una cum triangulo ΞΡΚ æquale est triangulo ΞΕΙ una cum triangulo ΥΩΛ. [vid. *Eut.* comment. in 48. 2. huj.] commune apponatur ΚΞΕΥΛΧ: ergo quadrilaterum ΛΤΡΧ quadrilatero ΩΧΚΙ est æquale.

ΞΕΙ τοῦ ΞΡΚ· τὸ ΤΥΕ ἄρα μετὰ τοῦ ΞΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΕΙ μετὰ τοῦ ΥΩΛ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΞΕΥΛΧ· τὸ ΛΤΡΧ ἄρα τετράπλευρον ἴσον ἐστὶ τῷ ΩΧΚΙ τετραπλεύρῳ.

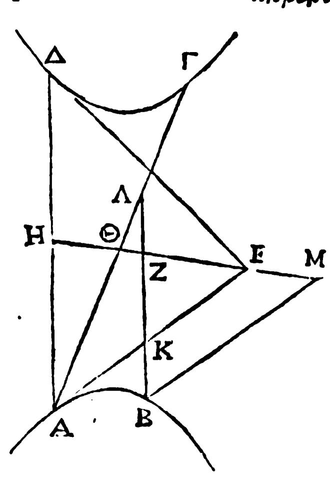
Prop. XI. *Theor.*

Iisdem positis, si in qualibet sectione punctum sumatur, & ab ipso rectæ ducantur, una quidem contingenti parallela, altera vero parallela ei quæ tactus conjungit: triangulum, quod ab ipsis fit ad diametrum per occursum contingentium ductam, à triangulo contento linea contingente & diametro per tactum differt, triangulo quod ad contingentium occursum constituitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια΄.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐφ' ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι ληφθῇ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσιν, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον, πρὸς τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἠγμένῃ διαμέτρῳ, διαφέρει τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου, πρὸς τε τῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ, τῷ ἀπολαμβανομένῳ τριγώνῳ πρὸς τῇ συμπτώσει τῶν ἐφαπτομένων.

Sint sectiones oppositæ ΑΒ, ΓΔ; & lineæ contingentes ΑΕ, ΔΕ, quæ in puncto Ε sibi ipsis occurrant; sit autem centrum Θ; junganturque ΑΔ & ΕΘΗ; & sumpto in sectione ΑΒ quovis puncto Β, ducatur ΒΖΛ quidem ipsi ΑΗ parallela, ΒΜ vero parallela ipsi ΑΕ: dico triangulum ΒΖΜ à triangulo ΑΚΛ differre triangulo ΚΕΖ.



Lineam enim ΑΔ ab ipsa ΕΘ bifariam secari [ex 38, & 39. 2. huj.] perspicuum est; & ΕΘ diametrum esse conjugatam ei, quæ per Θ ducta ipsi ΑΔ æquidistat: quare ΑΗ applicata est ad ΕΗ. quoniam igitur ΗΕ diameter est, lineaque ΑΕ sectionem contingit, & applicata est ΑΗ, à sumpto autem in sectione puncto Β ad ΕΗ applicatur ΒΖ ipsi ΑΗ parallela, & ΒΜ parallela ipsi ΑΕ: patet triangulum ΒΜΖ [per 45. 1. huj.] à triangulo ΛΘΖ differre triangulo ΘΑΕ: ergo ΒΖΜ triangulum à triangulo ΑΚΛ differt triangulo ΚΖΕ; ac simul patet quadrilaterum ΒΚΕΜ triangulo ΛΚΑ æquale esse.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΕ, ΔΕ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἥτε ΑΔ καὶ ἡ ΕΘΗ, εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Β, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθωσαν παρὰ μὲν τὴν ΑΗ ἡ ΒΖΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ ἡ ΒΜ· λέγω ὅτι τὸ ΒΖΜ τρίγωνον τοῦ ΑΚΛ διαφέρει τῷ ΚΕΖ.

Ὅτι μὲν γὰρ ἡ ΑΔ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΕΘ φανερὸν, καὶ ὅτι ἡ ΕΘ διάμετρός ἐστι συζυγὴς τῇ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΔ ἀγομένῃ· ὥστε κατηγμένη ἐστὶν ἡ ΑΗ ἐπὶ τὴν ΕΗ. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΗΕ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΑΕ, κατηγμένη δὲ ἡ ΑΗ, καὶ ληφθέντος ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ Β κατήγονται ἐπὶ τὴν ΕΗ ἡ μὲν ΒΖ παρὰ τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΒΜ παρὰ τὴν ΑΕ· δῆλον ὅτι τὸ ΒΜΖ τρίγωνον τοῦ ΛΘΖ διαφέρει τῷ ΘΑΕ· ὥστε καὶ τὸ ΒΖΜ τοῦ ΑΚΛ διαφέρει τῷ ΚΖΕ· καὶ συναποδέδεικται ὅτι τὸ ΒΚΕΜ τετράπλευρον ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΚΑ τριγώνῳ.

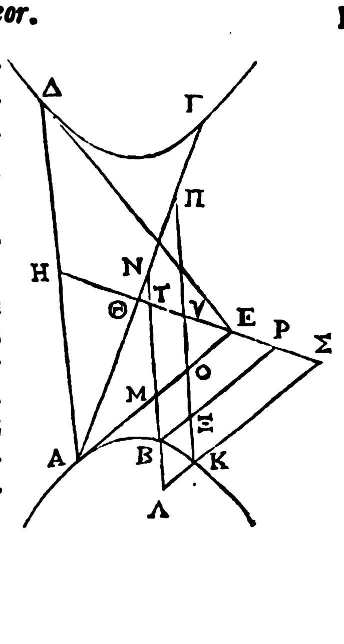
Prop. XII. *Theor.*

Iisdem positis, si in una sectione sumantur duo puncta, & ab utrisque similiter æquidistantes ducantur: quadrilatera ab ipsis constituta inter se æqualia erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ΄.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν τομῶν δύο σημεῖα ληφθῇ, καὶ ἀφ' ἑκατέρου παράλληλοι ἀχθῶσιν ὁμοίως· ἴσα ἔσται τὰ γινόμενα ὑπ' αὐτῶν τετράπλευρα.

Sint eadem quæ supra; & in sectione ΑΒ sumantur quævis puncta Β, Κ, à quibus ducantur lineæ ΑΒΜΝ, ΚΞΟΤΠ ipsi ΑΔ parallelæ, itemque ΒΞΡ, ΛΚΣ parallelæ ipsi ΑΕ: dico quadrilaterum ΒΠ æquale esse quadrilatero ΚΡ.



Ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Κ, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ ΑΔ αἱ ΛΒΜΝ, ΚΞΟΤΠ, τῇ δὲ ΑΕ αἱ ΒΞΡ, ΛΚΣ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΠ τῷ ΚΡ.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἴσον τὸ μὲν ΑΟΠ τρίγωνον τῷ ΚΟΕΣ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΑΜΝ τῷ ΒΜΕΡ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΞΡΣ, λεῖπον ἢ προσλαβὸν τὸ ΒΜΟΞ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝΠΟ, καὶ κοινοῦ προστεθέντος ἢ ἀφαιρουμένου τοῦ ΒΜΞΟ, τὸ ΒΝΠΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΞΡΣ.

Quoniam enim demonstratum est [in præced.] triangulum ΑΟΠ æquale quadrilatero ΚΟΕΣ, ac triangulum ΑΜΝ æquale quadrilatero ΒΜΕΡ: erit reliquum ΚΞΡΣ, auctum vel minutum quadrilatero ΒΜΟΞ æquale, quadrilatero ΜΝΠΟ; & communi ΒΜΞΟ apposito vel ablato, quadrilaterum ΒΝΠΞ quadrilatero ΚΞΡΣ æquale erit.

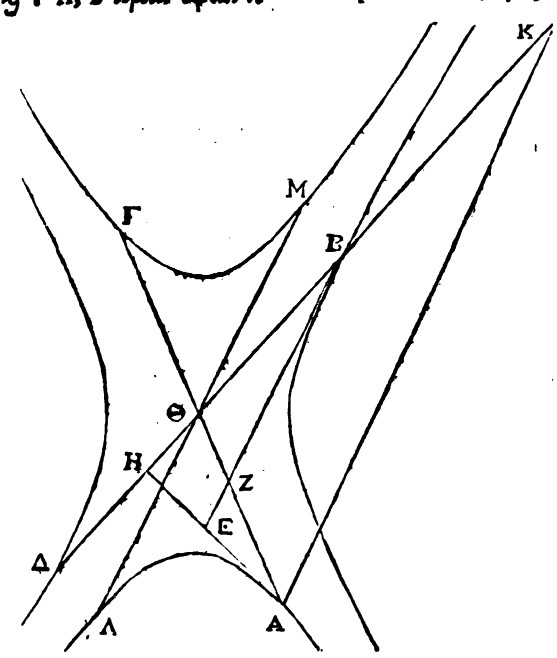
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις τῶν ἐφεξῆς τομῶν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι ἀχθῶσιν· ἴσα ἔσται τὰ τρίγωνα, ὧν κορυφὴ κοινὴ τὸ κέντρον ἐστὶ τῶν ἀντικειμένων.

Prop. XIII. *Theor.*

Si in oppositis sectionibus conjugatis, rectæ eas contingentes quæ deinceps sunt in unum punctum conveniant; & per tactus diametri ducantur: triangula, quorum communis vertex est sectionum centrum, inter se æqualia erunt.

Ἐστωσαν συζυγεῖς ἀντικείμεναι, ἐφ' ὧν τὰ Α, Β, Γ, Δ σημεῖα, καὶ τῶν Α, Β τομῶν ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΕ, ΒΕ, συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΘ, ΒΘ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Δ, Γ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΖΘ τρίγωνον τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ.



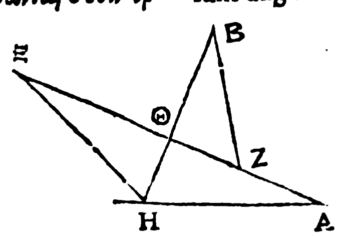
Ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Θ παρὰ τὴν ΒΕ αἱ ΑΚ, ΘΛΜ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται τῆς Β τομῆς ἡ ΒΖΕ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς διάμετρός ἐστιν ἡ ΔΘΒ, καὶ παρὰ τὴν ΒΕ ἐστὶν ἡ ΛΜ· συζυγής ἐστιν ἡ ΛΜ διάμετρος τῇ ΒΔ διαμέτρῳ, ἡ καλουμένη δευτέρα διάμετρος. διὰ δὴ τοῦτο κατῆκται ἡ ΑΚ τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΒΔ, καὶ ἐφάπτεται ἡ ΑΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΚΘΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ. ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς ΒΖ καὶ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ· καὶ [a] ὡς ἄρα ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ. καὶ εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΒΘΖ, ΗΘΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΒΘΖ τριγώνῳ.

Sint oppositæ sectiones quæ conjugatæ appellantur Α, Β, Γ, Δ, & sectiones Α, Β contingant rectæ lineæ ΑΕ, ΒΕ in puncto Β convenientes; sit autem centrum Θ, & junctæ ΑΘ, ΒΘ ad Γ, Δ producantur: dico ΒΖΘ triangulum triangulo ΑΗΘ æquale esse.

Ducantur enim per Α, Θ lineæ ΑΚ, ΘΛΜ ipsi ΒΕ parallelæ. & quoniam ΒΖΕ sectionem Β contingit, & per tactum diameter est ΔΘΒ, duciturque ΛΜ parallela ipsi ΒΕ; erit [per 20. 2. huj.] ΛΜ diameter conjugata ipsi ΔΒ, quæ secunda diameter appellatur. propterea autem ΑΚ ad ΒΔ ordinatim est applicata, contingitque ΑΗ: ergo [per 38. 1. huj.] rectangulum ΚΘΗ æquale est quadrato ΒΘ: & [per 17. 6.] ut ΚΘ ad ΘΒ ita ΒΘ ad ΘΗ. sed [per 4. 6.] ut ΚΘ ad ΘΒ ita ΚΑ ad ΒΖ & ΑΘ ad ΘΖ: ut igitur ΑΘ ad ΘΖ ita ΒΘ ad ΘΗ. & sunt anguli ΒΘΖ, ΗΘΖ duobus rectis æquales: ergo ΑΗΘ triangulum triangulo ΒΘΖ æquale erit.

EUTOCIUS.

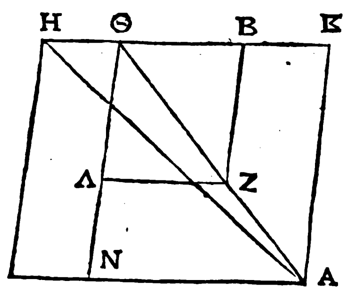
[a] Ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ, καί εἰσιν αἱ πρὸς τὸ Θ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἴσον τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΒΘΖ τριγώνῳ.] Ἐκκείσθω χωρὶς ἡ καταγραφὴ μόνων τῶν τριγώνων, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΘ εἰς τὸ Ξ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΘΞ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ, καὶ ἡ ΞΘ πρὸς ΘΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΘΞ· ὥστε καὶ τὸ ΑΗΘ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΗΘΞ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΞΘ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΘΗ, καὶ



[a] Quoniam ut ΑΘ ad ΘΖ ita ΒΘ ad ΘΗ, & sunt anguli ΒΘΖ, ΗΘΖ duobus rectis æquales: ergo ΑΗΘ triangulum triangulo ΒΘΖ æquale erit.] Describantur seorsum triangula; & producta ΑΘ ad Ξ, fiat ut ΗΘ ad ΘΒ ita ΖΘ ad ΘΞ. itaque quoniam ut ΒΘ ad ΘΗ ita est ΑΘ ad ΘΖ & ΞΘ ad ΘΖ: erit [per 9. 5.] ΑΘ ipsi ΘΞ æqualis: & propterea [per 1. 6.] triangulum ΑΗΘ æquale triangulo ΗΘΞ. sed ut ΞΘ ad ΘΖ ita ΘΒ ad ΘΗ, & circa æquales angulos,

gulos ad verticem Θ latera sunt reciproce proportionalia: triangulum igitur ΖΘΒ [per 15.6] triangulo ΗΘΞ est æquale, & idcirco triangulo ΑΗΘ.

Sed & aliter demonstrare possumus triangula æqualia esse. quoniam enim ostensum est ut ΚΘ ad ΘΒ ita ΘΒ ad ΘΗ, & ut ΚΘ ad ΘΒ ita ΑΚ ad ΒΖ; erit ut ΑΚ ad ΒΖ ita ΒΘ ad ΘΗ: quare rectangulum sub ΑΚ, ΘΗ æquale est rectangulo sub ΒΖ, ΒΘ. & quoniam anguli ΗΘΝ, ΘΒΖ [per 29.1.] sunt æquales, si parallelogramma rhomboïdea describerimus iisdem lateribus contenta, quæ angulos ad Β, Θ æquales habeant, etiam inter sese [per 14.6.] æqualia erunt: propterea quod latera sunt reciproce proportionalia. sed rhomboïdes ΖΒΘΛ in angulo Β trianguli ΘΒΖ duplum est; ejus namque diameter est ΖΘ: rhomboïdes autem quod continetur sub ΗΘ & linea æquali ΑΚ, videlicet ΘΛΝ, in angulo ΗΘΝ, duplum est trianguli ΑΗΘ; sunt enim in eadem basi ΘΗ & sub eadem recta quæ à puncto Α ducitur ipsi ΗΘ parallela: triangulum igitur ΑΗΘ triangulo ΖΒΘ æquale est.



περὶ ἴσας γωνίας τὰς κατὰ κορυφὴν πρὸς τῷ Θ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΘΒ τρίγωνον τῷ ΗΘΞ, ὥστε καὶ τῷ ΑΗΘ.

Ἔστι δὲ καὶ ἄλλως δεῖξαι ἴσα τὰ τρίγωνα. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΘΗ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς ΒΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΚ, ΘΗ ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΖ, ΒΘ ὀρθογωνίῳ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΗΘΝ, ΘΒΖ, ἐὰν ἀναγράψωμεν παραλληλόγραμμα ῥομβοειδῆ ὑπὸ τῶν αὐτῶν περιεχόμενα πλευρῶν τοῖς ὀρθογωνίοις, ἴσας ἔχοντα πρὸς ταῖς Θ, Β γωνίας· ἴσα ἔσται καὶ αὐτά, διὰ τὸ τὰς πλευρὰς ἀντιπεπονθέναι. ἔσται δὲ τὸ περιεχόμενον ῥομβοειδὲς ὑπὸ τῶν ΖΒ, ΒΘ ἐν τῇ Β γωνίᾳ διπλάσιον τοῦ ΘΒΖ τριγώνου, διάμετρος γὰρ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΖΘ· τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΗΘ καὶ τῆς ἴσης τῇ ΑΚ, ἀπὸ τῆς ΘΛΝ ἀφαιρούμενον ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΝ γωνίᾳ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΗΘ τριγώνου· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΘΗ καὶ ὑπὸ τὴν αὐτὴν παράλληλον τὴν ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΗΘ ἀγομένην· ὥστε ἴσον τὸ ΑΗΘ τῷ ΖΒΘ.

Prop. XIV. *Theor.*

Iisdem positis, si in quavis sectione punctum sumatur; & ab ipso ducantur lineæ parallelæ contingentibus usque ad diametros: triangulum, quod ad centrum constituitur, à triangulo circa eundem angulum differt, triangulo basim habente lineam contingentem & verticem sectionum centrum.

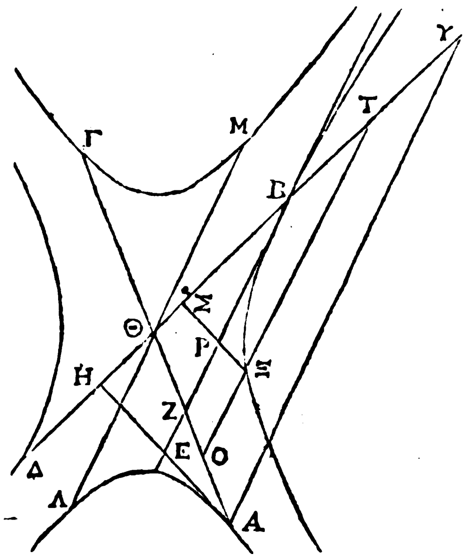
Sint alia quidem eadem; sumatur autem punctum in Β sectione, quod sit Ξ; & per ipsum ducatur ΞΡΣ parallela ipsi ΑΗ, & ΟΞΤ parallela ipsi ΒΕ: dico triangulum ΟΘΤ à triangulo ΞΣΤ differre triangulo ΘΒΖ.

Ducatur enim à puncto Α linea ΑΥ ipsi ΒΖ parallela. quoniam igitur ex iis quæ dicta sunt [in præc.] sectionis ΑΛ diameter est ΛΘΜ; conjugata autem ipsi & secunda diameter ΔΘΒ; atque à puncto Α ducitur ΑΗ sectionem contingens; & applicata est ΑΥ quæ ipsi ΒΖ parallela est: habebit [per 40. 1. huj.] ΑΥ ad ΥΗ rationem compositam ex ratione ΘΥ ad ΥΑ & ex ratione transversi lateris figuræ quæ fit ad ΒΖ ad latus rectum. sed [per 4. 6.] ut ΑΥ ad ΥΗ ita ΞΤ ad ΤΣ, & ut ΘΥ ad ΥΑ ita ΘΤ ad ΤΟ & ΘΒ ad ΒΖ; ut autem figuræ, quæ ad ΛΜ, transversum latus ad rectum, ita [ut ostensum in nota ad 20.2.] figuræ, quæ ad ΒΔ, rectum latus ad transversum: ergo ΞΤ ad ΤΣ rationem habebit compositam ex

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδʹ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐφ᾽ ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι ληφθῇ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων· τὸ γινόμενον πρὸς τῷ κέντρῳ τρίγωνον τοῦ γινομένου περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τριγώνου διοίσει τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐφαπτομένην, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον.

Ἔστω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Ξ, καὶ δι᾽ αὐτοῦ παρὰ μὲν τὴν ΑΗ ἤχθωσαν ἡ ΞΡΣ, παρὰ δὲ τὴν ΒΕ ἡ ΟΞΤ· λέγω ὅτι τὸ ΟΘΤ τρίγωνον τοῦ ΞΣΤ διαφέρει τῷ ΘΒΖ.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΖ ἡ ΑΥ. ἐπεὶ οὖν, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, τῆς ΑΛ τομῆς διάμετρος μέν ἐστιν ἡ ΛΘΜ, συζυγὴς δὲ αὐτῇ καὶ δευτέρα διάμετρος ἡ ΔΘΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐφάπτεται ἡ ΑΗ, κατῆκται δὲ παρὰ τὴν ΒΖ ἡ ΑΥ· ἕξει ἡ ΑΥ πρὸς τὴν ΥΗ τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΥ πρὸς ΥΑ καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΛΜ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΥ πρὸς ΥΗ οὕτως ἡ ΞΤ πρὸς ΤΣ, ὡς δὲ ἡ ΘΥ πρὸς ΥΑ οὕτως ἡ ΘΤ πρὸς ΤΟ καὶ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ, ὡς δὲ ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΛΜ εἴδους πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν· ἕξει ἄρα ἡ ΞΤ πρὸς ΤΣ τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΒ πρὸς

πρὸς ΒΖ, τουτέστιν ἡ ΘΤ πρὸς ΤΟ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ, διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μα΄. τοῦ α΄. βιβλίου, τὸ ΤΘΟ τρίγωνον τοῦ ΞΤΣ διαφέρει τῷ ΒΖΘ· ὥστε καὶ τῷ ΑΗΘ.

ratione ΘΒ ad ΒΖ, hoc est ΘΤ ad ΤΟ, & ex ratione recti lateris figuræ, quæ est ad ΒΔ, ad latus transversum: quare, per ea quæ demonstrata sunt in quadragesimo primo theoremate primi libri, triangulum ΤΘΟ à triangulo ΞΤΣ differt triangulo ΒΖΘ; & propterea [per 13. 3. huj.] triangulo ΑΗΘ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε΄.

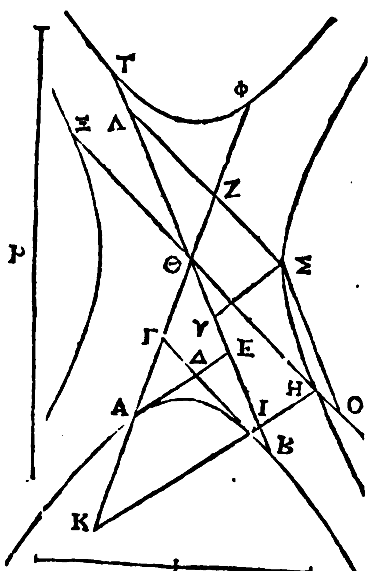
Ἐὰν μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι ἀχθῶσι, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐφ' ὁποτέρας τῶν συζυγῶν τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῇ τομῇ τρίγωνον τοῦ γινομένου τριγώνου πρὸς τῷ κέντρῳ μεῖζόν ἐστι τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐφαπτομένην κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῶν ἀντικειμένων.

PROP. XV. *Theor.*

Si rectæ lineæ unam oppositarum sectionum conjugatarum contingentes conveniant, & per tactus diametri ducantur; sumatur autem punctum in quavis sectionum conjugatarum, & ab ipso ducantur parallelæ contingentibus usque ad diametros: triangulum, quod ab ipsis ad sectionem constituitur, majus est quam triangulum quod ad centrum, triangulo basim habente lineam contingentem & verticem centrum sectionum.

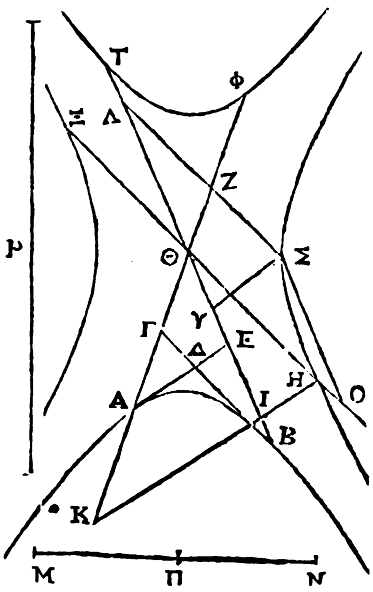
ΕΣΤΩΣΑΝ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι, αἱ ΑΒ, ΗΣ, Τ, Ξ, ὧν κέντρον τὸ Θ, καὶ τῆς ΑΒ τομῆς ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΔΕ, ΒΔΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β ἁφῶν ἤχθωσαν διάμετροι αἱ ΑΘΖΦ, ΒΘΤ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΣ τομῆς σημεῖόν τι τὸ Σ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ μὲν τὴν ΒΓ ἡ ΣΖΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ ἡ ΣΤ· λέγω ὅτι τὸ ΣΛΤ τρίγωνον τοῦ ΘΛΖ τριγώνου μεῖζόν ἐστι τῷ ΘΓΒ.

SINT oppositæ sectiones conjugatæ ΑΒ, ΗΣ, Τ, Ξ, quarum centrum Θ, & sectionem ΑΒ contingant ΑΔΕ, ΒΔΓ, & per tactus Α, Β diametri ΑΘΖΦ, ΒΘΤ ducantur; sumaturque in ΗΣ sectione punctum Σ; à quo ducatur ΣΖΛ ipsi ΒΓ parallela, & ΣΤ ipsi ΑΕ: dico ΣΛΤ triangulum majus esse quam triangulum ΘΛΖ, triangulo ΘΓΒ.

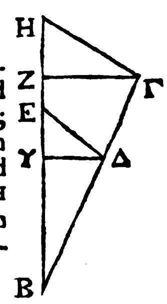


Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΒΓ ἡ ΞΘΗ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ διὰ τοῦ Η ἡ ΚΙΗ, παρὰ δὲ τὴν ΒΤ ἡ ΣΟ· φανερὸν δὴ ὅτι συζυγής ἐστι διάμετρος ἡ ΞΗ τῇ ΒΤ, καὶ ὅτι ἡ ΣΟ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΤ κατῆκται τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΘΗΟ, καὶ ὅτι παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΣΛΘΟ. Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς ἐστιν ἡ ΒΘ, καὶ ἑτέρα ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ ΑΕ, γεγονέτω ὡς ΔΒ πρὸς ΒΕ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΒΓ· ἡ ἄρα ΜΝ ἐστὶν ἡ καλουμένη ὀρθία τοῦ παρὰ τὴν ΒΤ εἴδους. δίχα τετμήσθω ἡ ΜΝ κατὰ τὸ Π· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ οὕτως ἡ ΜΠ πρὸς ΒΓ. πεποιήσθω δὴ ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΤΒ οὕτως ἡ ΤΒ πρὸς Ρ· ἔσται δὴ καὶ ἡ Ρ ἡ καλουμένη ὀρθία τοῦ παρὰ τὴν ΞΗ εἴδους. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ οὕτως ἡ ΜΠ πρὸς ΓΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ, ὡς δὲ ἡ ΜΠ πρὸς ΓΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ τῷ ἀπὸ ΘΗ,

Ducatur enim per Θ, ΞΘΗ parallela ipsi ΒΓ; & per Η ipsi ΑΕ parallela ducatur ΚΙΗ, & ΣΟ parallela ipsi ΒΤ: quare perspicuum est [per 20. 2. huj.] diametrum ΞΗ conjugatam esse ipsi ΒΤ; & ΣΟ, quia parallela ipsi ΒΤ, ad ΘΗΟ ordinatim esse applicatam; itemque parallelogrammum esse ΣΛΘΟ. Quoniam igitur ΒΓ sectionem contingit, duciturque ΒΘ per tactum, & contingens alia est ΑΕ; fiat ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΜΝ ad duplam ipsius ΒΓ: & erit [per 50. 1. huj.] ΜΝ ea quæ figuræ ad ΒΤ constitutæ rectum latus appellatur. bifariam secetur ΜΝ in Π: erit igitur ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΜΠ ad ΒΓ. deinde fiat ut ΞΗ ad ΤΒ ita ΤΒ ad lineam Ρ: erit igitur Ρ [ex natura secund. diam.] latus rectum figuræ quæ fit ad ΞΗ. itaque quoniam ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΜΠ ad ΓΒ, & [per 1. 6.] ut ΔΒ ad ΒΕ ita quadratum ΔΒ ad ΔΒΕ rectangulum; ut autem ΜΠ ad ΓΒ ita rectangulum sub ΜΠ, ΒΘ ad rectangulum ΓΒΘ: erit igitur ut quadratum ex ΔΒ ad rectangulum ΔΒΕ ita rectangulum sub ΜΠ, ΒΘ ad rectangulum ΓΒΘ. sed rectangulum sub ΜΠ, ΒΘ æquale est quadrato ex ΘΗ; propterea quod [ex natura sec. diam.] quadratum ex Ξ H est æquale rectangulo sub T B & M N, & rectangulum sub M Π, B Θ quarta pars est rectanguli sub T B & M N; quadratum vero ex H Θ est etiam quarta pars quadrati ex H Ξ: ut igitur quadratum ex Δ B ad rectangulum Δ B E ita est quadratum ex H Θ ad rectangulum Γ B Θ; & permutando, ut quadratum ex Δ B ad quadratum ex H Θ ita rectangulum Δ B E ad Γ B Θ rectangulum. sed [per 19. & 20. 6.] ut quadratum ex Δ B ad quadratum ex H Θ ita triangulum Δ B E ad triangulum H Θ I, similia enim sunt [per 4. 6.]; & ut rectangulum Δ B E ad rectangulum Γ B Θ ita Δ B E triangulum ad triangulum Γ B Θ*. ergo ut triangulum Δ B E ad triangulum H Θ I ita [per 11. 5.] triangulum Δ B E ad ipsum Γ B Θ triangulum: quare [per. 9. 5.] triangulum H Θ I triangulo Γ B Θ est æquale: & idcirco triangulum H Θ K à triangulo Θ I K differt triangulo H Θ I, hoc est triangulo Γ B Θ. Rursus quoniam Θ B ad B Γ compositam rationem habet ex ratione Θ B ad M Π & ex ratione M Π ad B Γ; & ut Θ B ad M Π ita T B ad M N, & ita latus rectum P [ut ostensum in nota ad 20. 2. huj.] ad Ξ H; ut autem M Π ad B Γ ita Δ B ad B E: habebit igitur Θ B ad B Γ rationem compositam ex ratione Δ B ad B E & ratione P ad Ξ H. & quoniam parallelæ sunt B Γ, Σ Λ, triangulum Θ Γ B simile est triangulo Θ Λ Z; & ob id ut Θ B ad B Γ ita est Θ Λ ad Λ Z: quare Θ Λ ad Λ Z compositam rationem habet ex ratione ipsius P ad Ξ H & ratione Δ B ad B E, hoc est H Θ ad Θ I. quoniam igitur H Σ est hyperbola, cujus diameter quidem Ξ H, rectum vero latus P; & ab aliquo ipsius puncto Σ applicatur Σ O, describiturque ab ea quæ ex centro, videlicet à Θ H, figura Θ I H; & ab applicata Σ O, vel Θ Λ ipsi [per 34. 1.] æquali, figura Θ Λ Z; à Θ O autem, quæ est inter centrum & applicatam, vel à Σ Λ ipsi Θ O æquali, describitur Σ Λ Υ figura similis figuræ Θ I H quæ fit ab eâ quæ ex centro; & rationes habentur compositæ, prout dictum est †: erit [per 41. 1. huj.] triangulum Σ Λ Υ majus quam Θ Λ Z triangulum triangulo Θ H I, hoc est [ut modo ostensum] triangulo Θ Γ B.



διότι τὸ μὲν ἀπὸ Ξ H ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ T B, M N, καὶ τὸ μὲν ὑπὸ M Π, B Θ τέταρτον τοῦ ὑπὸ T B, M N, τὸ δὲ ἀπὸ H Θ τέταρτον τοῦ ἀπὸ H Ξ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ Δ B πρὸς τὸ ὑπὸ Δ B E οὕτως τὸ ἀπὸ H Θ πρὸς τὸ ὑπὸ Γ B Θ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ Δ B πρὸς τὸ ἀπὸ H Θ οὕτως τὸ ὑπὸ Δ B E πρὸς τὸ ὑπὸ Γ B Θ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ Δ B πρὸς τὸ ἀπὸ H Θ οὕτως Δ B E τρίγωνον πρὸς τὸ H Θ I, ὅμοια γάρ· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ Δ B E πρὸς τὸ ὑπὸ Γ B Θ οὕτως τὸ Δ B E τρίγωνον πρὸς τὸ Γ B Θ. ὡς ἄρα τὸ Δ B E τρίγωνον πρὸς τὸ H Θ I οὕτως τὸ Δ B E πρὸς τὸ Γ B Θ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ H Θ I τῷ Γ B Θ· τὸ ἄρα H Θ K τρίγωνον τοῦ Θ I K διαφέρει τῷ Θ I H, τουτέστι τῷ Γ B Θ. Πάλιν ἐπεὶ ἡ Θ B πρὸς B Γ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Θ B πρὸς M Π καὶ ἡ M Π πρὸς B Γ, ἀλλ' ὡς ἡ Θ B πρὸς M Π οὕτως ἡ T B πρὸς M N καὶ ἡ P πρὸς Ξ H, ὡς δὲ ἡ M Π πρὸς B Γ οὕτως ἡ Δ B πρὸς B E· ἕξει ἄρα ἡ Θ B πρὸς B Γ τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ B πρὸς B E καὶ ἡ P πρὸς Ξ H. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ B Γ τῇ Σ Λ, καὶ ὅμοιον τὸ Θ Γ B τρίγωνον τῷ Θ Λ Z, καὶ ἔστιν ὡς ἡ Θ B πρὸς Γ B οὕτως ἡ Θ Λ πρὸς Λ Z· ἕξει ἄρα ἡ Θ Λ πρὸς Λ Z τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ P πρὸς Ξ H καὶ ἡ Δ B πρὸς B E, τουτέστιν ἡ H Θ πρὸς Θ I. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ H Σ, διάμετρον ἔχουσα τὴν Ξ H ὀρθίαν δὲ τὴν P, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Σ κατῆκται ἡ Σ O, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς Θ H εἶδος τὸ Θ I H· ἀπὸ δὲ τῆς κατηγμένης τῆς Σ O, ἤτοι τῆς Θ Λ ἴσης αὐτῇ, τὸ Θ Λ Z· ἀπὸ δὲ τῆς Θ O μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς κατηγμένης, ἤτοι τῆς Σ Λ ἴσης αὐτῇ, τὸ Σ Λ Υ εἶδος, ὅμοιον τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῷ Θ I H, καὶ ἔχει τοὺς συγκειμένους λόγους, ὡς εἴρηται· τὸ ἄρα Σ Λ Υ τρίγωνον τοῦ Θ Λ Z μεῖζόν ἐστι τῷ Θ Γ B.



* Quod autem rectangulum Δ B E ad rectangulum Γ B H sit ut triangulum Δ B E ad Γ B H triangulum, sic ostenditur. A punctis Δ & Γ in B H demittantur normales Δ Υ, Γ Z: eritque ut Δ Υ ad Δ B ita Γ Z ad Γ B. ut autem Δ Υ ad Δ B ita rectangulum sub Δ Υ & B E ad rectangulum Δ B E; & ut Γ Z ad Γ B ita rectangulum sub Γ Z & B H ad rectangulum Γ B H: est igitur ut rectangulum sub Δ Υ & B E ad rectangulum Δ B E ita rectangulum sub Γ Z & B H ad rectangulum Γ B H. Sed rectangulum sub Δ Υ & B E æquale est duplo triangulo Δ B E, & rectangulum sub Γ Z & B H æquale duplo triangulo Γ B H: est igitur ut triangulum Δ B E ad rectangulum Δ B E ita triangulum Γ B H ad rectangulum Γ B H, & permutando rectangulum Δ B E ad rectangulum Γ B H ut triangulum Δ B E ad Γ B H triangulum.

† Nempe triangulum Λ Θ Z est semissis parallelogrammi, cujus diameter est Θ Z, æquianguli parallelogrammis, quorum semisses sunt triangula Λ Υ Σ, Θ I H & diametri Υ Σ, I H; estque [ut modo ostensum] Θ Λ (hoc est Σ O) ad Λ Z in ratione composita ex ratione Θ H ad Θ I & ratione P ad Ξ H: ergo [per 41. 1. huj.] parallelogrammum, cujus dimidium Λ Υ Σ & Υ Σ diameter, erit æquale parallelogrammo simili, cujus dimidium est I Θ H & I H diameter, simul & parallelogrammo æquiangulo, cujus dimidium Θ Λ Z cujusque diameter est Θ Z. & consequenter triangulum Λ Υ Σ æquale est triangulis I Θ H, Θ Λ Z simul sumptis. Ac manifestum est quadrilaterum Θ Z, Σ Υ triangulo I Θ H, hoc est triangulo Θ Γ B, æqualem esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν, ἀπὸ δέ τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἐφαπτομένων, τέμνουσα τήν τε τομὴν καὶ τὴν ἑτέραν τῶν ἐφαπτομένων· ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.

Prop. XVI. *Theor.*

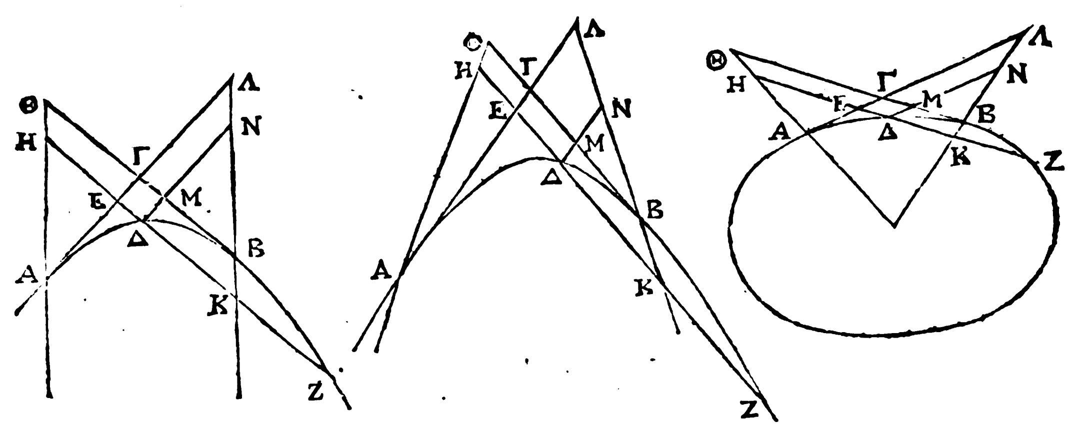
Si duæ rectæ lineæ coni sectionem vel circuli circumferentiam contingentes in unum conveniant; & ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in sectione, ducatur linea uni contingentium parallela, quæ & sectionem & alteram contingentium secet: ut quadrata contingentium inter sese, ita erit rectangulum, contentum lineis quæ interjiciuntur inter sectionem & contingentem, ad quadratum lineæ inter parallelam & tactum interjectæ.

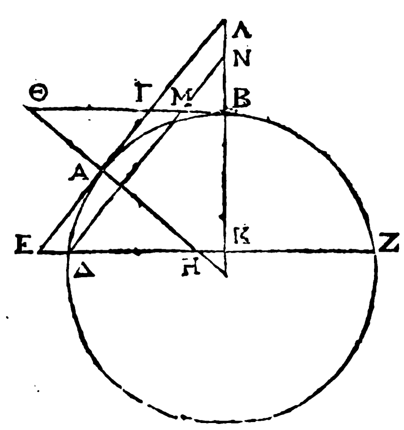
ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτῆς αἱ ΑΓ, ΓΒ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὴν ΓΒ ἡ ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ.

Ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Β διάμετροι ἡ ΑΗΘ καὶ ἡ ΒΚΛ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΛ παράλληλος ἡ ΔΜΝ· φανερὸν δὴ αὐτόθεν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΖ, καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΛΔ τετραπλεύρῳ, καὶ τὸ ΒΛΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΚ τῇ ΚΔ ἐστὶν ἴση, καὶ προσκεῖται ἡ ΔΕ· τὸ ὑπὸ ΖΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΕ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον τῷ ΔΝΚ, ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΔ οὕτως τὸ ΕΛΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΝΚ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς ὅλον τὸ ΕΛΚ τρίγωνον οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΔΚ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΔΝΚ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΛ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΕΛΚ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΕΛΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΑΓΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΛΔ τετράπλευρον οὕτως

SIT coni sectio vel circuli circumferentia ΑΒ, quam contingant rectæ lineæ ΑΓ, ΓΒ in puncto Γ convenientes; & sumpto in sectione aliquo puncto Δ, ab eo ducatur ΕΔΖ, quæ ipsi ΓΒ parallela sit: dico ut quadratum ex ΒΓ ad quadratum ex ΓΑ ita esse rectangulum ΖΕΔ ad quadratum ex ΕΑ.

Ducantur enim per Α, Β diametri ΑΗΘ, ΒΛΚ; & per Δ ducatur ΔΜΝ parallela ipsi ΑΛ: perspicuum est igitur [per 46. & 47.1.huj.] rectam ΔΚ ipsi ΚΖ æqualem esse; triangulumque ΑΕΗ [per 2. 3.huj.] æquale quadrilatero ΔΛ; & triangulum ΒΛΓ [per 1.3.huj.] triangulo ΑΓΘ. itaque quoniam ΖΚ æqualis est ΚΔ, & ipsi adjicitur ΔΕ; rectangulum ΖΕΔ una cum quadrato ex ΔΚ æquale erit [per 6.2.] quadrato ex ΚΕ. & quoniam triangulum ΕΛΚ simile est triangulo ΔΝΚ: erit [per 3.lem.3.huj.] ut quadratum ex ΕΚ ad quadratum ex ΚΔ ita triangulum ΕΛΚ ad triangulum ΔΝΚ; & permutando ut totum quadratum ex ΕΚ ad totum triangulum ΕΛΚ ita ablatum quadratum ex ΔΚ ad ablatum triangulum ΔΝΚ: ergo [per 19.5.] est reliquum rectangulum ΖΕΔ ad reliquum quadrilaterum ΔΛ ut quadratum ex ΕΚ ad triangulum ΕΛΚ. sed [per 19. & 20. 6.] ut quadratum ex ΕΚ ad ΕΛΚ triangulum ita est quadratum ex ΓΒ ad triangulum ΑΓΒ: ut igitur ΖΕΔ rectangulum ad quadrilaterum ΔΛ ita quadratum





quadratum ex Γ B ad Λ Γ B triangulum. est autem quadrilaterum Δ Λ triangulo A E H æquale; & triangulum Λ Γ B æquale triangulo A Θ Γ: quare ut rectangulum Z E Δ ad triangulum A E H ita quadratum ex Γ B ad A Θ Γ triangulum; & permutando ut rectangulum Z E Δ ad quadratum Γ B ita A E H triangulum ad triangulum A Θ Γ. sed [per 3.lem.3.huj.] ut triangulum A H E ad triangulum A Θ Γ ita quadratum ex E A ad quadratum ex A Γ: ergo ut rectangulum Z E Δ ad quadratum ex Γ B ita quadratum ex E A ad quadratum ex A Γ, & permutando.

τὸ ἀπὸ Γ B πρὸς τὸ Λ Γ B τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ μὲν Δ Λ τῷ A E H τριγώνῳ, τὸ δὲ Λ Γ B τῷ A Θ Γ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Z E Δ πρὸς τὸ A E H τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ Γ B πρὸς τὸ A Θ Γ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ Z E Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ B οὕτως τὸ A E H τρίγωνον πρὸς τὸ A Θ Γ. ὡς δὲ τὸ A H E πρὸς τὸ A Θ Γ οὕτως τὸ ἀπὸ E A πρὸς τὸ ἀπὸ A Γ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Z E Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ B οὕτως τὸ ἀπὸ E A πρὸς τὸ ἀπὸ A Γ, καὶ ἐναλλάξ.

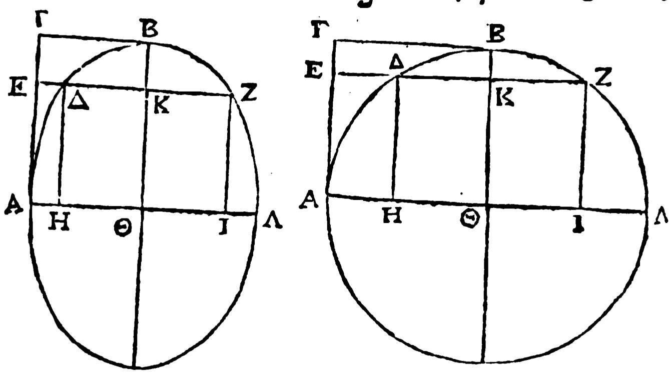
EUTOCIUS.

In aliquibus codicibus hoc theorema ut septimum decimum apponebatur. sed re vera casus est sexti decimi theorematis: eo enim tantum differt, quod lineæ contingentes A Γ, Γ B diametris parallelæ sint; cætera vero eadem esse patet. in commentariis igitur illud ponere oportebat, uti scripsimus in scholio ad decimum quartum theorema secundi libri.

Ἐν τισι τῶν ἀντιγράφων τοῦτο τὸ θεώρημα ὡς ιζʹ. παρέκειτο. ἔστι δὲ κατ' ἀλήθειαν πτῶσις τοῦ ιϛʹ. μόνον γὰρ ὅτι αἱ A Γ, Γ B ἐφαπτόμεναι παράλληλοι γίνονται ταῖς διαμέτροις, τὰ δὲ ἄλλα ἐστὶ τὰ αὐτά. ἐν σχολίοις οὖν ἔδει τοῦτο κεῖσθαι, ὥσπερ ἐγράψαμεν εἰς τὸ ιδʹ. τοῦ δευτέρου βιβλίου.

Si in ellipsi & circulo diametri quæ transeunt per tactus contingentibus parallelæ sint, eadem prorsus evenient quæ in propositione dicuntur.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου αἱ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι παράλληλοι ὦσιν ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ οὕτως ἔσται τὰ τῆς προτάσεως.



Quoniam [per 21.1.huj.] ut quadratum ex B Θ ad rectangulum Λ Θ A ita quadratum ex Δ H ad rectangulum Λ H A; atque est rectangulum quidem Λ Θ A quadrato ex A Θ æquale, rectangulum autem Λ H A æquale rectangulo I A H; (recta enim A Θ æqualis est Θ Λ & Δ K ipsi K Z, ut & æqualis H Θ ipsi Θ I & A H ipsi I Λ) erit igitur ut quadratum ex A Θ ad quadratum ex Θ B, hoc est quadratum ex B Γ ad quadratum ex Γ A, ita rectangulum I A H ad quadratum ex Δ H, hoc est rectangulum Z E Δ ad quadratum ex E A.

Ἐπεὶ ὡς τὸ ἀπὸ B Θ πρὸς τὸ ὑπὸ Λ Θ A οὕτως τὸ ἀπὸ Δ H πρὸς τὸ ὑπὸ Λ H A· καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ Λ Θ A ἴσον τῷ ἀπὸ Θ A, τὸ δὲ ὑπὸ Λ H A ἴσον τῷ ὑπὸ I A H· (ἴση γὰρ ἡ A Θ τῇ Θ Λ, καὶ ἡ Δ K τῇ K Z, καὶ ἡ H Θ τῇ Θ I, καὶ ἡ A H τῇ I Λ) ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ A Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Θ B, τουτέστιν τὸ ἀπὸ B Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ A, οὕτω τὸ ὑπὸ I A H πρὸς τὸ ἀπὸ Δ H, τουτέστι τὸ ὑπὸ Z E Δ πρὸς τὸ ἀπὸ E A.

Prop. XVII. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ coni sectionem vel circuli circumferentiam contingentes in unum conveniant; sumantur autem in sectione duo quævis puncta, & ab iis ducantur lineæ contingentibus parallelæ, quæ & sibi ipsis & sectioni occurrant: ut quadrata contingentium inter sese, ita erunt inter se rectangula contenta sub rectis similiter sumptis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζʹ.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀχθῶσιν ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας τε καὶ τὴν γραμμήν· ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

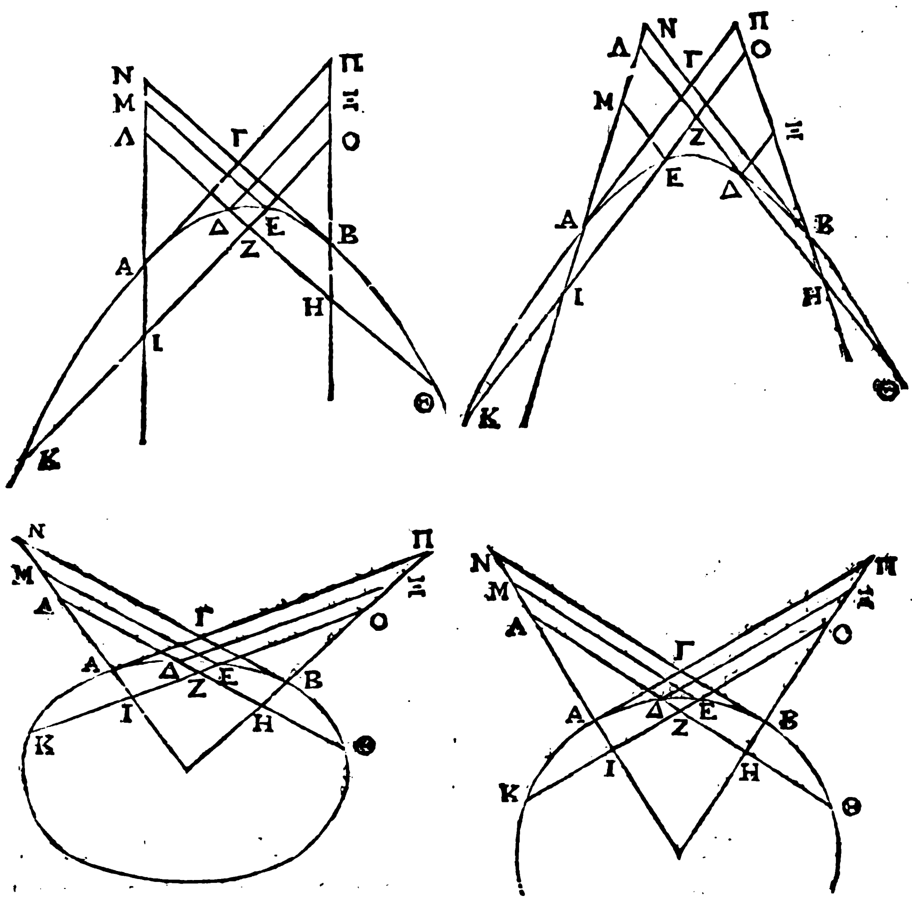
SIT coni sectio vel circuli circumferentia A B, quam contingant rectæ lineæ A Γ, Γ B, in puncto Γ convenientes; sumanturque in sectione puncta Δ, E, & ab ipsis ducantur E Z I K, Δ Z H Θ, quæ lineis A Γ, Γ B parallelæ sint: dico ut quadratum ex A Γ ad quadratum ex Γ B ita esse rectangulum K Z E ad rectangulum Θ Z Δ.

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ A B, καὶ τῆς A B ἐφαπτόμεναι αἱ A Γ, Γ B συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, E, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ τὰς A Γ, Γ B ἤχθωσαν αἱ E Z I K, Δ Z H Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ A Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ B οὕτως τὸ ὑπὸ K Z E πρὸς τὸ ὑπὸ Θ Z Δ.

Ἤχθωσαν

Ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Β διάμετροι αἱ ΑΛΜΝ, ΒΟΞΠ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἵ τε ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ παράλληλοι μέχρι τῶν διαμέτρων, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Δ, Ε παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΔΞ, ΕΜ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΚΙ τῇ ΙΕ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΗΔ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΚΕ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ι, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ· τὸ ὑπὸ ΚΖΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΙ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΙ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ τρίγωνα διὰ τὰς παραλλήλους, ἔστιν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς ὅλον τὸ ΙΜΕ τρίγωνον,

Ducantur enim per A, B diametri ΑΛΜΝ, ΒΟΞΠ, & producantur contingentes rectæ, ut & ipsis parallelæ usque ad diametros; & à punctis Δ, E parallelæ contingentibus ducantur ΔΞ, EM: constat ideoque [per 46 & 47. 1. huj.] KI æqualem esse ipsi IE, & ΘH ipsi HΔ. quoniam igitur KE secatur in partes æquales in puncto I, & in partes inæquales in Z: rectangulum KZE una cum quadrato ex ZI æquale est [per 5 vel 6. 2.] quadrato ex EI. & cum triangula similia sint, ob lineas parallelas; erit [per 3. lem. 3. huj.] ut totum quadratum ex EI ad totum triangulum IME ita ablatum quadratum ex IZ ad ablatum



οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΙΖ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΖΙΛ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΜ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς ὅλον τὸ ΙΜΕ τρίγωνον. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς ΙΜΕ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΓΑΝ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΜ τετράπλευρον οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΑΝ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΓΝ τῷ ΓΠΒ, τὸ δὲ ΖΜ τῷ ΖΞ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΞ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒΠ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ πρὸς τὸ ΞΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΓΠΒ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΞ τετράπλευρον οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΠΒ, διὰ δὲ τὸ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ΖΞ τετράπλευρον πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ οὕτως τὸ ΠΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ.

triangulum ZIΛ: quare & reliquum KZE rectangulum ad reliquum quadrilaterum ZM est [per 19. 5.] ut totum quadratum ex EI ad totum IME triangulum. sed ut quadratum ex EI ad triangulum IME ita quadratum ex ΓA ad triangulum ΓAN: ut igitur KZE rectangulum ad quadrilaterum ZM ita quadratum ex AΓ ad ΓAN triangulum. atque [per 1. 3. huj.] est æquale triangulum AΓN triangulo ΓΠB, & [per 3. 3. huj.] quadrilaterum ZM quadrilatero ZΞ: ergo ut rectangulum KZE ad ZΞ quadrilaterum ita quadratum ex AΓ ad triangulum ΓBΠ. Similiter demonstrabitur & ut rectangulum ΘZΔ ad quadrilaterum ΞZ ita esse quadratum ex ΓB ad triangulum ΓΠB. itaque quoniam ut rectangulum KZE ad quadrilaterum ZΞ ita quadratum ex AΓ ad ΓΠΞ triangulum; & invertendo ut quadrilaterum ZΞ ad rectangulum ΘZΔ ita triangulum ΠΓB ad quadratum ex ΓB: erit ex æquali, ut quadratum ex AΓ ad quadratum ex ΓB ita rectangulum KZE ad rectangulum ΘZΔ.

Xx EU-

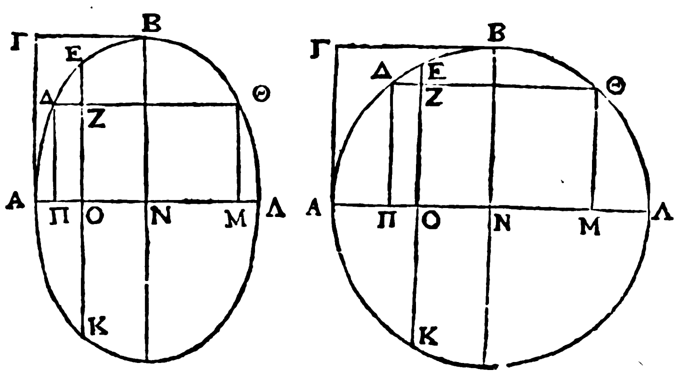
EUTOCIUS.

Hoc etiam theorema similiter ac praecedens positum est: quod nos, quasi casum auferentes, hoc loco adscripsimus.

Si in ellipsi aut circuli circumferentia diametri quæ per tactus ducuntur parallelæ sint contingentibus ΑΓ, ΓΒ; erit itidem ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΓ ita rectangulum ΚΖΕ ad rectangulum ΔΖΘ.

Ducantur enim per ΔΘ ordinatim applicatæ ΔΠ, ΘΜ. & quoniam ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ ita quadratum ex ΒΝ ad quadratum ex ΝΛ, hoc est ad rectangulum ΑΝΛ; ut autem quadratum ex ΒΝ ad rectangulum ΑΝΛ ita [per 21. 1. huj.] quadratum ex ΔΠ, hoc est quadratum ex ΖΟ, ad rectangulum ΑΠΛ; & quadratum ex ΕΟ ad rectangulum ΑΟΛ: & est reliquum ad reliquum ut totum ad totum. itaque si à quadrato ex ΕΟ auferatur quadratum ex ΔΠ, hoc est quadratum ex ΖΟ, relinquitur [per 5.2.] rectangulum ΚΖΕ; est enim ΚΟ ipsi ΟΕ æqualis. rursus si à rectangulo ΑΟΛ auferatur rectangulum ΑΠΛ, relinquitur [per *Pappi* lem. 3. in lib.2.] ΜΟΠ rectangulum, hoc est rectangulum ΘΖΔ; namque ΑΠ est æqualis ΜΛ, & ΠΝ ipsi ΝΜ: ut igitur quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ ita reliquum rectangulum ΚΖΕ ad reliquum ΔΖΘ.

Quod si punctum Ζ extra sectionem cadat, additiones & ablationes contrario facere oportebit.



Καὶ τοῦτο ὁμοίως τῷ πρὸ αὐτοῦ ἔκειτο θεώρημα· ὅπερ ἡμεῖς ὡς πτῶσιν ἀφελόντες ἐνταῦθα ἐγράψαμεν.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἢ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας αἱ διὰ τῶν ἁφῶν ἀγόμεναι διάμετροι παράλληλοι ὦσι ταῖς ἐφαπτομέναις τῶν ΒΓ, ΓΑ· καὶ οὕτως ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ οὕτω τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΖΘ.

Ἤχθωσαν διὰ τῶν Δ, Θ τεταγμένως κατηγμέναι αἱ ΔΠ, ΘΜ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτω τὸ ἀπὸ ΒΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΝΛ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΝΛ οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΟ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΠΛ, καὶ τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΟΛ· καὶ λοιπὸν πρὸς λοιπὸν ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ἐὰν ἄρα ἀπὸ μὲν τοῦ ἀπὸ ΕΟ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ ΔΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΟ, καταλείπεται τὸ ὑπὸ ΚΖΕ· ἴση γὰρ ἡ ΚΟ τῇ ΟΕ. ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ὑπὸ ΑΟΛ ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπὸ ΑΠΛ, λείπεται τὸ ὑπὸ ΜΟΠ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΘΖΔ, ἴση γὰρ ἡ ΑΠ τῇ ΜΛ καὶ ἡ ΠΝ τῇ ΝΜ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτω λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΔΖΘ.

Ὅταν δὲ τὸ Ζ ἐκτὸς τῆς τομῆς, τὰς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις ἀνάπαλιν ποιητέον.

Prop. XVIII. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contingentes in unum conveniant; sumatur autem in quavis sectione aliquod punctum, & ab eo ducatur recta uni contingentium parallela quæ & sectionem & alteram contingentium secet: ut quadrata contingentium inter sese; ita erit rectangulum, contentum rectis quæ interjiciuntur inter sectionem & contingentem, ad quadratum ejus quæ inter parallelam & tactum interjicitur.

Sint oppositæ sectiones ΑΒ, ΜΝ, & contingentes rectæ ΑΓΛ, ΒΓΘ, quæ in puncto Γ conveniant; per tactus autem ducantur diametri ΑΜ, ΒΝ, & sumatur in sectione ΜΝ quodvis punctum Δ, à quo ducatur ΖΔΕ ipsi ΒΘ parallela: dico ut quadratum ex ΒΓ ad quadratum ex ΓΑ ita esse rectangulum ΖΕΔ ad quadratum ex ΑΕ.

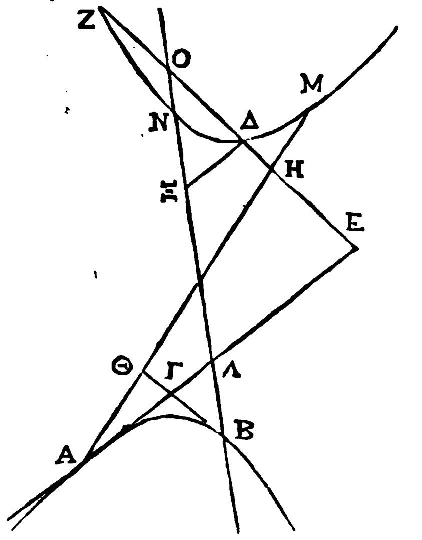
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ ληφθῇ τι σημεῖον ἐφ' ὁποτέρας οὖν τῶν τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἐφαπτομένων τέμνουσα τήν τε τομὴν καὶ τὴν ἑτέραν ἐφαπτομένην· ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.

Ἐστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΜΝ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓΛ, ΒΓΘ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι αἱ ΑΜ, ΒΝ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΜΝ τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὴν ΒΘ ἡ ΖΔΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΓΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ.

Ἤχθω

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Δ τῇ ΑΕ παράλληλος ἡ ΔΞ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΒ, καὶ διάμετρος αὐτῆς ἡ ΒΝ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΒΘ, καὶ τῇ ΒΘ παράλληλος ἡ ΔΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΟ τῇ ΟΔ. καὶ πρόσκειται ἡ ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΟ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΛ τῇ ΔΞ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΟΛ τρίγωνον τῷ ΔΞΟ· ἔστιν ἄρα ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΛ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΔΟ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΞΔΟ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΔΛ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΛ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΔΛ τετράπλευρον οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ ΔΛ τετράπλευρον τῷ ΑΕΗ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΒΛΓ τῷ ΑΓΘ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΑΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΑΓΘ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ΑΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ.



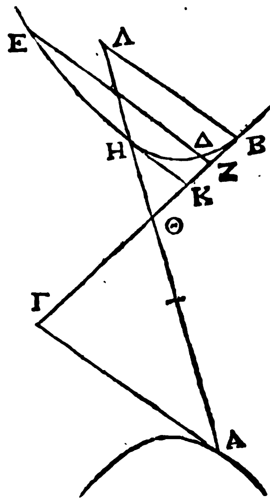
Ducatur enim per Δ ipsi AE parallela ΔΞ. & quoniam AB est hyperbola, cujus diameter BN; rectaque BΘ sectionem contingit,& ipsi BΘ parallela est ΔZ: erit [per 48.1.huj.] ZO æqualis OΔ. adjungitur autem EΔ; ergo [per 6.2.] rectangulum ZEΔ una cum quadrato ex ΔO æquale est quadrato ex OE. & cum EΛ parallela sit ΔΞ, triangulum EOΛ simile est triangulo ΔΞO: est igitur [per 3. lem. 3. huj.] ut totum quadratum ex EO ad triangulum EOΛ ita ablatum quadratum ex ΔO ad ablatum ΞΔO triangulum: quare & reliquum rectangulum ΔEZ ad quadrilaterum ΔΛ est ut quadratum ex EO ad triangulum EOΛ. sed ut quadratum ex EO ad EOΛ triangulum ita [per 19. & 20. 6.] quadratum ex BΓ ad triangulum BΓΛ: ut igitur rectangulum ZEΔ ad quadrilaterum ΔΛ ita quadratum ex BΓ ad BΓΛ triangulum. æquale autem est quadrilaterum ΔΛ [per 6.3. huj.] triangulo AEH, & triangulum BΓΛ [per 1. 3. huj.] triangulo AΓΘ: ergo ut ZEΔ rectangulum ad triangulum AEH ita quadratum ex BΓ ad AΓΘ triangulum. sed ut triangulum AEH ad quadratum ex EA ita triangulum AΓΘ ad quadratum ex AΓ: ex æquali igitur ut quadratum ex BΓ ad quadratum ex ΓA ita rectangulum ZEΔ ad quadratum ex EA.

EUTOCIUS.

Ἐν τισιν ἀντιγράφοις εὑρέθη ἑτέρα ἀπόδειξις τούτου τοῦ θεωρήματος, ἐὰν ἑκατέρας τῶν τομῶν ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι συμπίπτωσι, καὶ οὕτως ἔσται τὰ εἰρημένα.

Ἔστωσαν γὰρ ἀντικείμεναι αἱ Α,Β, καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΓΒ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΔΕΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Α διάμετρος ἡ ΑΘΗ, διὰ δὲ τῶν Β, Η παρὰ τὴν ΕΖ αἱ ΗΚ, ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ τοῦ Β ἐφάπτεται μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἡ ΒΘ, τεταγμένως δὲ ἦκται ἡ ΒΛ· ἔστιν ὡς ἡ ΛΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΛΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς ΒΚ, ὡς δὲ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΗ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΚΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς ΒΚ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΗΚ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς ΚΒ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτω τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ οὕτως ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ.



In aliquibus exemplaribus alia demonstratio hujus theorematis invenitur, cum rectæ lineæ utramque sectionem contingentes conveniant.

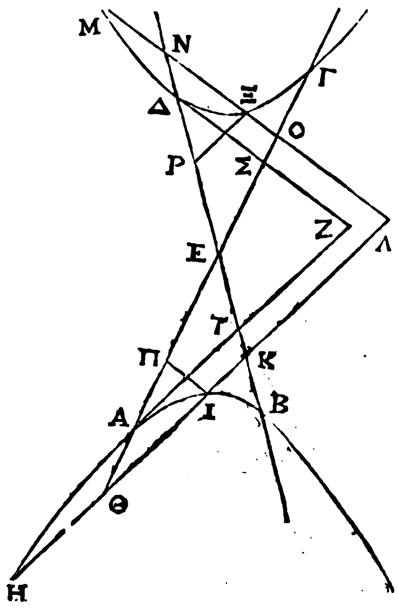
Sint enim oppositæ sectiones A,B, quas contingant rectæ AΓ, ΓB in puncto Γ concurrentes; sumaturque aliquod punctum Δ in sectione B,& ab eo ducatur ΔEZ ipsi AΓ parallela: dico ut quadratum ex AΓ ad quadratum ex ΓB ita esse rectangulum EZΔ ad quadratum ex ZB.

Ducatur enim per A diameter AΘH,& per B,H ducantur HK,BΛ parallelæ ipsi EZ. quoniam igitur BΘ in puncto B hyperbolam contingit, & ordinatim applicata est BΛ: erit [per 36. 1.] ut ΛA ad AH ita AΘ ad ΘH. sed [per 2.6.] ut ΛA quidem ad AH ita ΓB ad BK, ut vero AΘ ad ΘH ita AΓ ad KH: quare ut ΓB ad BK ita AΓ ad HK, & permutando ut AΓ ad ΓB ita HK ad KB, & [per 22. 6.] ut quadratum ex AΓ ad quadratum ex ΓB ita quadratum ex HK ad quadratum ex KB. sed demonstratum est [per 16.3.huj.] rectangulum EZΔ esse ad quadratum ex ZB ut quadratum ex HK ad quadratum ex KB: ergo ut quadratum ex AΓ ad quadratum ex ΓB ita EZΔ rectangulum ad quadratum ex ZB.

Prop. XIX. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contingentes in unum conveniant; & ducantur contingentibus parallelæ, quæ & sibi ipsis & sectioni occurrant: ut quadrata contingentium inter sese; ita erit rectangulum, contentum lineis quæ interjiciuntur inter sectionem & linearum occursum, ad rectangulum quod lineis similiter sumptis continetur.

Sint oppositæ sectiones, quarum diametri ΑΓ, ΒΔ, centrumque Ε; & contingentes ΑΖ, ΖΔ in Ζ conveniant; sumanturque quævis puncta, & ab ipsis ducantur ΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΛ rectis ΑΖ, ΖΔ parallelæ: dico ut quadratum ex ΑΖ ad quadratum ex ΖΔ ita esse rectangulum ΗΛΙ ad rectangulum ΜΛΞ.



Ducantur enim per Ξ, Ι lineæ ΙΠ, ΞΡ parallelæ ipsis ΑΖ, ΖΔ. itaque quoniam [per 19. & 20. 6.] ut quadratum ex ΑΖ ad ΑΖΣ triangulum ita quadratum ex ΘΛ ad triangulum ΘΛΟ, & quadratum ex ΘΙ ad triangulum ΘΙΠ: erit [per 6.2. & 19.5.] & reliquum rectangulum ΗΛΙ ad reliquum ΙΠΟΛ quadrilaterum, ut quadratum ex ΑΖ ad triangulum ΑΖΣ. atque [per 4.3.huj.] est triangulum ΑΖΣ triangulo ΔΖΤ æquale, & [per 7.3. huj.] ΠΟΛΙ quadrilaterum quadrilatero ΚΡΞΛ: ut igitur quadratum ex ΑΖ ad triangulum ΔΤΖ ita rectangulum ΗΛΙ ad quadrilaterum ΡΞΛΚ. ut autem triangulum ΔΤΖ ad quadratum ex ΖΔ ita quadrilaterum ΡΞΛΚ ad rectangulum ΜΛΞ, [quod eodem prorsus modo probatur quo præmissa:] ergo ex æquali ut quadratum ex ΑΖ ad quadratum ex ΖΔ ita rectangulum ΗΛΙ ad rectangulum ΜΛΞ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν τῆς ἀντικειμένης δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, ἀχθῶσι δὲ παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις ἀλλήλας τέμνουσαι καὶ τὴν τομήν· ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΖ, ΖΔ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπό τινων σημείων ἤχθωσαν παρὰ τὰς ΑΖ, ΖΔ αἱ ΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΛ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ.

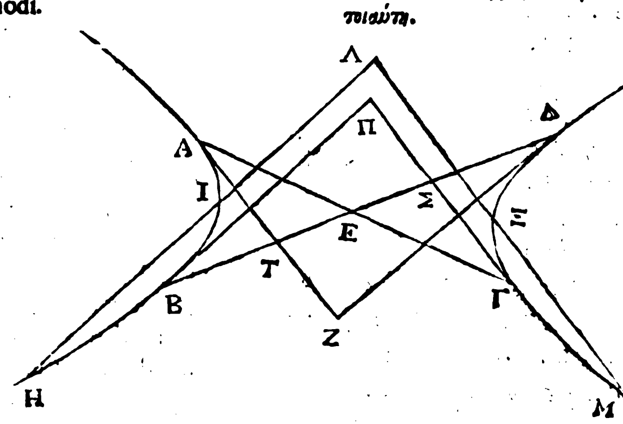
Ἤχθωσαν γὰρ παρὰ τὰς ΑΖ, ΖΔ διὰ τῶν Ξ, Ι αἱ ΙΠ, ΞΡ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΣ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ΘΛΟ, καὶ τὸ ἀπὸ ΘΙ πρὸς τὸ ΘΙΠ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς λοιπὸν τὸ ΙΠΟΛ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΣ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ ΑΣΖ τῷ ΔΖΤ, καὶ τὸ ΠΟΛΙ τῷ ΚΡΞΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΔΤΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ΡΞΛΚ. ὡς δὲ τὸ ΔΤΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ οὕτως τὸ ΡΞΛΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ· καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ.

EUTOCIUS.

In aliquibus codicibus demonstratio hujus theorematis invenitur hujusmodi.

Ἐν τισιν ἀντιγράφοις εὑρέθη ἀπόδειξις τούτου τοῦ θεωρήματος τοιαύτη.

Ducatur ΜΛ quidem ipsi ΖΑ parallela sectionem ΔΓ secans, ΗΛ vero parallela ΖΔ secans ipsam ΑΒ: demonstrandum est ut quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΑ ita esse rectangulum ΗΛΙ ad rectangulum ΜΛΞ.



Ducantur enim per tactus Α, Δ diametri ΑΓ, ΔΒ; & per Β, Γ ipsæ ΒΠ, ΓΠ contingentibus parallelæ: ergo ΒΠ, ΓΠ sectiones in pun-

Ἤχθω δὴ ἡ μὲν ΜΛ παρὰ τὴν ΖΑ τέμνουσα τὴν ΔΓ τομήν, ἡ δὲ ΗΛ παρὰ τὴν ΖΔ τέμνουσα τὴν ΑΒ· δεικτέον ὅτι ὁμοίως ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ.

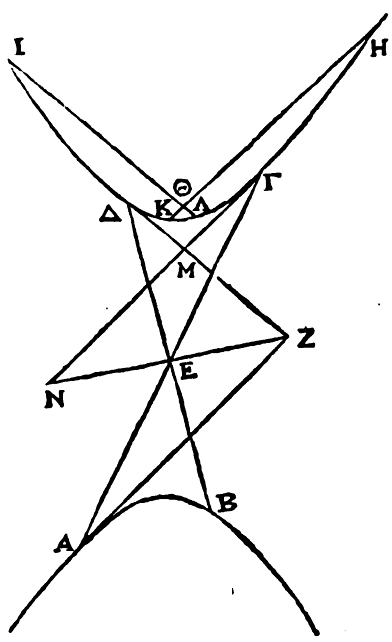
Ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Δ ἁφῶν διάμετροι αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ διὰ τῶν Β, Γ ἤχθωσαν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΒΠ, ΓΠ· ἐφάπτονται δὴ αἱ ΒΠ, ΓΠ

ΓΠ τῶν τομῶν κατὰ Β, Γ. καὶ ἐπεὶ κέντρον ἐστὶ τὸ Ε, ἴση ἐστὶ ἡ μὲν ΒΕ τῇ ΕΔ, ἡ δὲ ΑΕ τῇ ΕΓ· διὰ δὴ τοῦτο καὶ ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΤΖ τῇ ΓΣΠ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΤΕ τῇ ΕΣ, ἡ δὲ ΔΣ τῇ ΤΒ· ὥστε καὶ ἡ ΒΣ τῇ ΤΔ. καὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΠΣ τρίγωνον τῷ ΔΤΖ τριγώνῳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΠ τῇ ΔΖ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ ΓΠ τῇ ΑΖ ἴση. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΓ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ.

ctis Β, Γ contingunt*. & quoniam Ε centrum est sectionum, erit ΒΕ ipsi ΕΔ æqualis. at ΑΕ æqualis est ΕΓ: quare & cum parallelæ sint ΑΤΖ, ΓΣΠ; & ΤΕ quidem æqualis erit [per 30. 1. huj.] ΕΣ. verum ΔΣ æqualis est ΤΒ; ergo & ΒΣ ipsi ΤΔ. atque triangulum ΒΠΣ triangulo ΔΤΖ æquale: recta igitur ΒΠ æqualis est ipsi ΔΖ. similiter vero ΓΠ æqualis ipsi ΑΖ demonstrabitur. sed [per 18.3. huj.] ut quadratum ex ΒΠ ad quadratum ex ΠΓ ita rectangulum ΗΛΙ ad rectangulum ΜΛΞ: ut igitur quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΑ ita ΗΛΙ rectangulum ad rectangulum ΜΛΞ.

Ἄλλως.

Ἤχθω πάλιν ἑκατέρα τῶν ΗΘΚ, ΙΘΛ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, τέμνουσα τὴν ΔΓ τομήν. δεικτέον ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΙΘΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ. ἤχθω γὰρ διὰ τῆς Α ἁφῆς διάμετρος ἡ ΑΓ, παρὰ δὲ τὴν ΑΖ ἤχθω ἡ ΓΜ· ἐφάψεται δὴ ἡ ΓΜ τῆς ΓΔ τομῆς κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ ΔΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΙΘΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΙΘΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ.



Aliter.

Rursus ducatur utraque linearum ΗΘΚ, ΙΘΛ parallela contingenti, secansque ΔΓ sectionem. ostendendum est ut quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΑ ita esse rectangulum ΙΘΛ ad rectangulum ΗΘΚ. ducatur enim per tactum Α diameter ΑΓ, & per Γ ipsa ΓΜ parallela ΑΖ: ergo [per schol. *Eut.* in 44. 1. huj.] ΓΜ continget sectionem ΓΔ in puncto Γ, atque erit ut quadratum ex ΔΜ ad quadratum ex ΜΓ ita [per 17.3. huj.] rectangulum ΙΘΛ ad rectangulum ΗΘΚ. ut autem quadratum ex ΔΜ ad quadratum ex ΜΓ ita quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΑ †: quare ut quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΑ ita rectangulum ΙΘΛ ad rectangulum ΗΘΚ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν, ἀχθῇ δέ τις ἑτέρα εὐθεῖα παρὰ τὴν αὐτὴν τέμνουσα τάς τε τομὰς καὶ τὰς ἐφαπτομένας· ἔσται ὡς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ταῖς τομαῖς προσπιπτουσῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης εὐθειῶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.

PROP. XX. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contingentes sibi ipsis occurrant; & per occursum ducatur recta tactus conjungenti parallela, quæ secet utramque sectionem; ducatur autem alia recta parallela eidem, sectionesque & contingentes secans: erit ut rectangulum, contentum sub segmentis quæ inter occursum contingentium & sectiones interjiciuntur, ad quadratum ipsius contingentis; ita rectangulum, quod continetur sub rectis inter sectiones & contingentem interjectis, ad quadratum ejus quæ ad tactum intercipitur.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ὧν κέντρον τὸ Ε, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΖ, ΓΖ, καὶ

SINT oppositæ sectiones ΑΒ, ΓΔ, quarum centrum Ε, & ΑΖ, ΖΓ lineæ contingentes; jun-

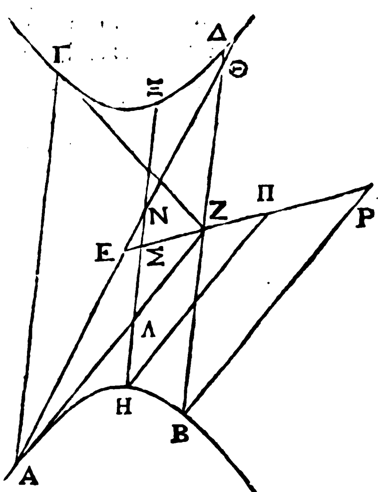
* Per conversum ejus quod demonstrat *Eutocius* in 44. 1. huj.

† Junctâ enim ΖΕ & productâ donec cum ΓΜ concurrat in Ν, erit hæc [per 37 & 39.2. huj.] parallela ΓΔ, unde triangula ΔΜΓ, ΖΜΝ sunt æquiangula: quare ΖΜ est ad ΜΝ ut ΔΜ ad ΜΓ, & permutando, componendo, invertendoque, & rursus permutando ΔΜ erit ad ΜΓ ut ΔΖ ad ΓΝ. est autem ΑΖ æqualis ΓΝ, ut modo ostensum; est igitur ut ΔΜ ad ΜΓ ita ΔΖ ad ΖΑ, & [per 22. 6.] horum quadrata sunt proportionalia.

gantur autem ΑΓ, ΕΖ, ΔΕ, quæ protrahantur; perque Ζ ducatur ΒΖΘΔ ipsi ΑΓ parallela, & sumpto in sectione quovis puncto Η ducatur ΗΛΣΝΞ parallela ipsi ΑΓ: dico ut rectangulum ΒΖΔ ad quadratum ex ΖΑ ita esse rectangulum ΗΛΞ ad quadratum ex ΑΛ.

ἐπιζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ αἱ ΕΖ, ΔΕ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, ἤχθω δὲ διὰ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΒΖΘΔ, καὶ εἰλήφθω ὃ ἔτυχε σημεῖον τὸ Η, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΗΛΣΝΞ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ.

Ducantur enim à punctis Η, Β lineæ ΗΠ, ΒΡ parallelæ ipsi ΑΖ. & quoniam [per 19. & 20. 6.] ut quadratum ex ΒΖ ad ΒΖΡ triangulum ita quadratum ex ΗΣ ad triangulum ΗΣΠ, & quadratum ex ΛΣ ad triangulum ΛΣΖ: erit & reliquum rectangulum ΗΛΞ ad quadrilaterum ΗΛΖΠ ut quadratum ex ΒΖ ad triangulum ΒΖΡ. quadratum autem ex ΒΖ æquale est rectangulo ΒΖΔ; triangulumque ΒΡΖ [per 11. 3. huj.] triangulo ΑΖΘ, & [per 5. 3. huj.] quadrilaterum ΗΛΖΠ triangulo ΑΛΝ: ergo ut rectangulum ΒΖΔ ad triangulum ΑΖΘ ita ΗΛΞ rectangulum ad triangulum ΑΛΝ. sed [per 3. lem 3. huj.] ut triangulum ΑΖΘ ad quadratum ex ΑΖ ita triangulum ΑΛΝ ad quadratum ex ΑΛ: ex æquali igitur, ut rectangulum ΒΖΔ ad quadratum ex ΖΑ ita rectangulum ΗΛΞ ad quadratum ex ΑΛ.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Η, Β παρὰ τὴν ΑΖ αἱ ΗΠ, ΒΡ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΒΖΡ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΣ πρὸς τὸ ΗΣΠ, καὶ τὸ ἀπὸ ΛΣ πρὸς τὸ ΛΣΖ· καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΗΛΞ πρὸς τὸ ΗΛΖΠ τετράπλευρον ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΒΖΡ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΒΖ τῷ ὑπὸ ΒΖΔ, τὸ δὲ ΒΡΖ τρίγωνον τῷ ΑΖΘ, τὸ δὲ ΗΛΖΠ τετράπλευρον τῷ ΑΛΝ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ΑΖΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΞ πρὸς τὸ ΑΛΝ. ὡς δὲ τὸ ΑΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ οὕτως τὸ ΑΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ.

PROP. XXI. *Theor.*

Iisdem positis, si in sectione duo puncta sumantur, & per ipsa ducantur rectæ lineæ, una quidem contingenti parallela, altera vero lineæ tactus conjungenti, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant: erit ut rectangulum, contentum lineis quæ interjiciuntur inter occursum contingentium & sectiones, ad quadratum contingentis; ita rectangulum, contentum segmentis inter sectiones & rectarum occursum interjectis, ad rectangulum sub rectis inter sectionem & occursum interjectis.

Sint eadem quæ supra; & sumptis in sectione punctis Η, Κ, per ea ducantur ΝΞΗΟΡ, ΚΤ, ΒΤ ipsi ΑΖ parallelæ, & ΗΛΜ, ΚΟΨΩ parallelæ ipsi ΑΓ: dico ut rectangulum ΒΖΔ ad quadratum ex ΖΑ ita esse ΚΟΩ rectangulum ad rectangulum ΝΟΗ.

Quoniam enim est [per 3. lem. 3. huj.] ut quadratum ex ΑΖ ad triangulum ΑΖΘ ita quadratum ex ΑΛ ad ΑΛΜ triangulum, & quadratum ex ΞΟ ad triangulum ΞΟΨ, & quadratum ex ΞΗ ad triangulum ΞΗΜ: erit ut totum quadratum ex ΞΟ ad totum triangulum ΞΟΨ ita quadratum ex ΞΗ ablatum ad ablatum triangulum ΞΗΜ: quare [per 19.5.] & reliquum rectangulum ΝΟΗ ad reliquum quadrilate-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς δύο σημεῖα ληφθῇ, καὶ δι' αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τέμνουσαι ἀλλήλας τε καὶ τὰς τομάς· ἔσται ὡς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ταῖς τομαῖς προσπιπτουσῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως.

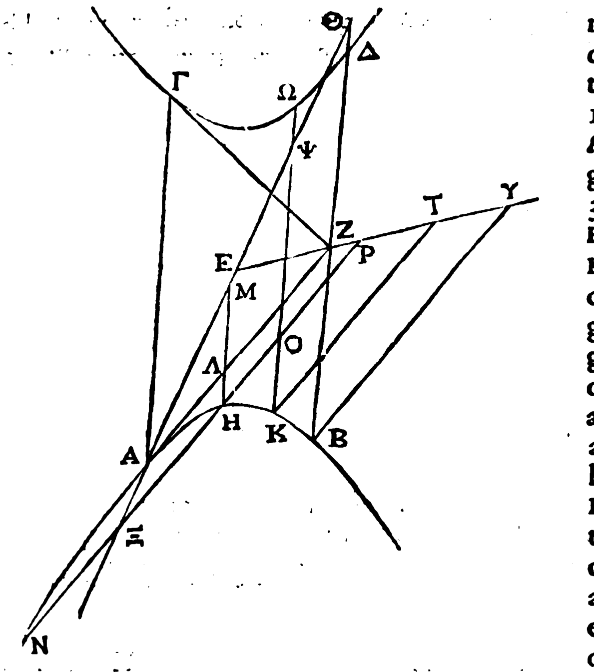
Ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, εἰλήφθω δὲ τὰ Η, Κ σημεῖα, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν παρὰ μὲν τὴν ΑΖ αἱ ΝΞΗΟΡ, ΚΤ, ΒΤ· παρὰ δὲ τὴν ΑΓ αἱ ΗΛΜ, ΚΟΨΩ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΟΩ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΟΗ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΛ πρὸς τὸ ΑΛΜ, καὶ τὸ ἀπὸ ΞΟ πρὸς τὸ ΞΟΨ, καὶ τὸ ἀπὸ ΞΗ πρὸς τὸ ΞΗΜ· ὡς ἄρα ὅλον τὸ ἀπὸ ΞΟ πρὸς ὅλον τὸ ΞΟΨ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΞΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΞΗΜ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς λοιπὸν τὸ ΗΟΨΜ τετράπλευρόν

ἐστιν

*

ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΘ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΖΘ τῷ ΒΥΖ, τὸ δὲ ΗΟΨΜ τῷ ΚΟΡΤ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΒΥΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς τὸ ΚΟΡΤ. ὡς δὲ τὸ ΒΥΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΒΖΔ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ΚΟΡΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΟΩ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΟΩ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΟΩ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΟΗ.



rum ΗΟΨΜ est ut quadratum ex ΑΖ ad ΑΖΘ triangulum. sed [per 11.3.huj.] triangulum ΑΖΘ æquale est triangulo ΒΤΖ, & [per 12.3. huj.] quadrilaterum ΗΟΨΜ quadrilatero ΚΟΡΤ: ergo ut quadratum ex ΑΖ ad triangulum ΒΤΖ ita rectangulum ΝΟΗ ad quadrilaterum ΚΟΡΤ. ut autem triangulum ΒΤΖ ad quadratum ex ΒΖ, hoc est ad rectangulum ΒΖΔ, ita demonstratum est [in præced.] quadrilaterum ΚΟΡΤ ad rectangulum ΚΟΩ: ex æquali igitur, ut quadratum ex ΑΖ ad rectangulum ΒΖΔ ita rectangulum ΝΟΗ ad rectangulum ΚΟΩ; & [per 4.5.] invertendo, ut rectangulum ΒΖΔ ad quadratum ex ΖΑ ita rectangulum ΚΟΩ ad rectangulum ΝΟΗ.

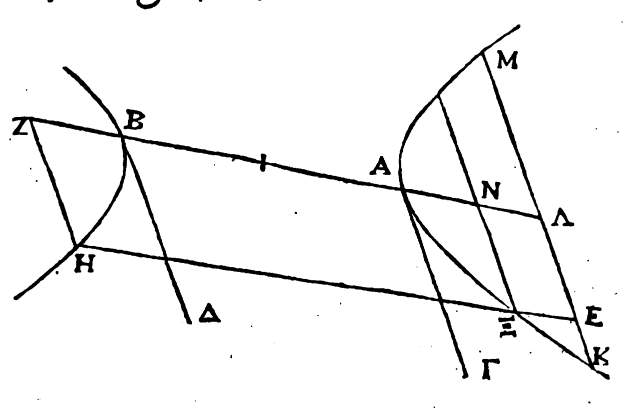
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϐ.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ἐπιψαύωσιν, ἀχθῶσι δέ τινες εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· ἔσται ὡς τοῦ πρὸς τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως.

Prop. XXII. *Theor.*

Si oppositas sectiones contingant duæ rectæ lineæ inter se parallelæ; ducantur autem aliæ rectæ, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant, una quidem contingenti parallela, altera vero parallela ei quæ tactus conjungit: erit ut transversum latus ad rectum figuræ, quæ ad lineam tactus conjungentem constituitur; ita rectangulum, contentum lineis inter sectiones & rectarum occursum interjectis, ad rectangulum sub rectis inter sectionem & occursum interjectis.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΔ παράλληλοι ἔστωσαν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, διήχθωσαν δὲ ἡ μὲν ΕΞΗ παρὰ τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ΕΚΛΜ παρὰ τὴν ΑΓ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν τοῦ εἴδους πλευρὰν οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΕΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΕΜ.

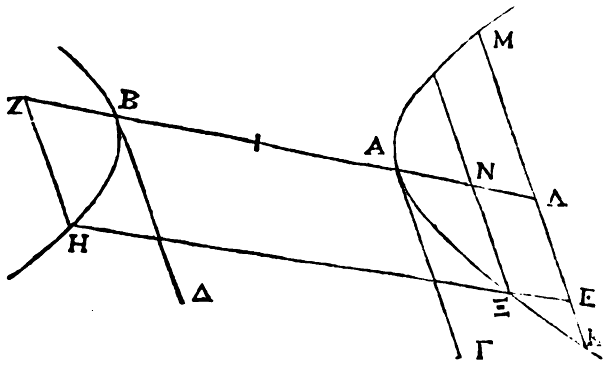


Ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Ξ παρὰ τὴν ΑΓ αἱ ΗΖ, ΞΝ. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν παράλληλοί εἰσιν, ἔσται διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΚΛ, ΞΝ, ΗΖ· ἔσται οὖν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευρὰν οὕτως τό τε ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ

Sint oppositæ sectiones Α, Β, quas contingant rectæ lineæ ΑΓ, ΒΔ inter se parallelæ; & juncta ΑΒ ducatur ΕΞΗ ipsi ΑΒ parallela, & ΚΕΛΜ parallela ipsi ΑΓ: dico ut ΑΒ ad rectum figuræ latus, ita esse ΗΕΞ rectangulum ad rectangulum ΚΕΜ.

Ducantur enim per Η, Ξ rectæ ΗΖ, ΞΝ ipsi ΑΓ parallelæ. & quoniam ΑΓ, ΒΔ parallelæ sunt inter se & sectiones contingunt, erit [per conversf. 31. 2. huj.] & ΑΒ diameter, & rectæ ΚΛ, ΞΝ, ΗΖ ad ipsam ordinatim applicabuntur: ut igitur ΑΒ ad rectum latus ita [per 21. 1. huj.] ΒΛΑ rectangulum ad quadratum

quadratum ex ΛK, & rectangulum BNA ad quadratum ex NΞ, hoc est ad quadratum ex ΛE: quare [per 19. 5.] ut totum rectangulum BΛA ad totum quadratum ex KΛ ita erit rectangulum BNA ablatum (hoc est ZAN, quia NA, BZ æquales sint) ad ablatum quadratum ex ΛE: reliquum igitur ZAN rectangulum [per 4. lem. 3. huj.] ad reliquum KEM rectangulum [per 5. 2.] erit ut diameter AB ad rectum latus. est autem rectangulum ZAN æquale ipsi HEΞ; ergo ut AB transversum figuræ latus ad rectum ita HEΞ rectangulum ad rectangulum KEM.



ΛK, καὶ τὸ ὑπὸ BNA πρὸς τὸ ἀπὸ NΞ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛE· ἔστιν ἄρα ὡς ὅλον τὸ ὑπὸ BΛA πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ KΛ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ BNA, (τουτέστι τὸ ὑπὸ ZAN, ἴση γὰρ ἡ NA τῇ BZ) πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΛE· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ZΛN πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ KEM ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ZΛN τῷ ὑπὸ HEΞ· ὡς ἄρα ἡ AB τοῦ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ HEΞ πρὸς τὸ ὑπὸ KEM.

Prop. XXIII. *Theor.*

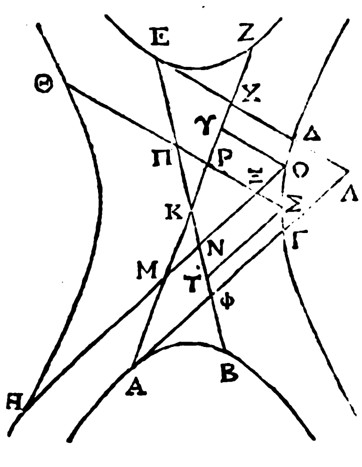
Si in oppositis sectionibus conjugatis, duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contingentes conveniant in quavis sectionum; ducantur autem aliquæ rectæ contingentibus parallelæ, quæ & sibi ipsis & alteris sectionibus oppositis occurrant: ut quadrata contingentium inter sese; ita erit rectangulum, contentum rectis quæ inter sectiones & occursum interjiciuntur, ad rectangulum quod rectis similiter sumptis continetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τῶν κατ' ἐναντίον τομῶν ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν ἐπὶ μιᾶς ἧς ἔτυχον τομῆς, ἀχθῶσι δέ τινες παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς ἑτέρας ἀντικειμένας· ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

Sint oppositæ sectiones conjugatæ AB, ΓΔ, EZ, HΘ, sitque earum centrum K; & sectiones AB, EZ contingant rectæ lineæ AΦΓΛ, EXΔΛ convenientes in Λ, & junctæ AK, EK ad B, Z producantur; à puncto autem H ducatur HMNΞO ipsi AΛ parallela, & à puncto Θ ducatur ΘΠΡΞΣ parallela ipsi EΛ: dico ut quadratum ex EΛ ad quadratum ex AΛ ita esse ΘΞΣ rectangulum ad rectangulum HΞO.

Ducatur enim per Σ recta ΣT parallela AΛ; & per O ducatur OT ipsi EΛ parallela. quoniam igitur oppositarum sectionum conjugatarum AB, ΓΔ, EZ, HΘ diameter est BE, & EΛ sectionem contingit, ipsique parallela ducta est ΘΣ: erit [per 20. 2. huj.] ΘΠ æqualis ΠΣ; & eadem ratione HM æqualis MO. & quoniam ut quadratum ex EΛ ad EΦΛ triangulum ita est [per 19. & 20. 6.] quadratum ex ΠΣ ad triangulum ΠTΣ; & quadratum ex ΠΞ ad triangulum ΠNΞ: erit etiam & reliquum rectangulum sub ΘΞΣ [per 5. 2.] ad quadrilaterum TNΞΣ ut quadratum ex EΛ ad triangulum ΦΛE.



Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ AB, ΓΔ, EZ, HΘ, κέντρον δὲ αὐτῶν τὸ K, καὶ τῶν AB, EZ τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ AΦΓΛ, EXΔΛ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AK, EK καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ B, Z, καὶ ἀπὸ τοῦ H παρὰ τὴν AΛ ἤχθω ἡ HMNΞO, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ παρὰ τὴν EΛ ἡ ΘΠΡΞΣ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ EΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛA οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ HΞO.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Σ παρὰ μὲν τὴν AΛ ἡ ΣT, παρὰ δὲ τὴν EΛ ἀπὸ τοῦ O ἡ OT. ἐπεὶ οὖν συζυγῶν ἀντικειμένων τῶν AB, ΓΔ, EZ, HΘ διάμετρός ἐστιν ἡ BE, καὶ ἐφάπτεται τῆς τομῆς ἡ EΛ, καὶ παρ' αὐτὴν ἦκται ἡ ΘΣ, ἴση ἐστὶν ἡ ΘΠ τῇ ΠΣ· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ HM τῇ MO. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ EΛ πρὸς τὸ EΦΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΠΣ πρὸς τὸ ΠTΣ, καὶ τὸ ἀπὸ ΠΞ πρὸς τὸ ΠNΞ· καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ TNΞΣ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ EΛ πρὸς τὸ ΦΛE τρίγωνον.

τριγώνου. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΦΛ τρίγωνον τῷ ΑΛΧ, τὸ δὲ ΤΝΞΣ τετράπλευρον τῷ ΞΡΤΟ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΑΛΧ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ΞΡΤΟ τετράπλευρον. ἔστι δὲ ὡς τὸ ΑΛΧ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ οὕτως τὸ ΞΡΤΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ.

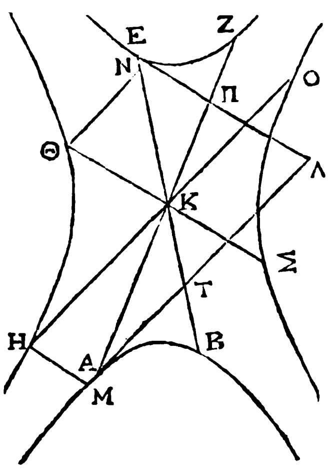
sed [per 4. 3. huj.] ΕΦΛ triangulum æquale est triangulo ΑΛΧ; & [ex 15. 3. huj.] quadrilaterum ΤΝΞΣ quadrilatero ΞΡΤΟ: ut igitur quadratum ex ΕΛ ad ΑΛΧ triangulum ita rectangulum ΘΞΣ ad quadrilaterum ΞΡΤΟ. ut autem triangulum ΑΛΧ ad quadratum ex ΑΛ ita quadrilaterum ΞΡΤΟ ad rectangulum ΗΞΟ [quod similiter probatur atque prius istud]: ergo ex æquali, ut quadratum ex ΕΛ ad quadratum ex ΑΛ ita est rectangulum ΘΞΣ ad rectangulum ΗΞΟ.

EUTOCIUS.

Τὸ θεώρημα τοῦτο πολλὰς ἔχει πτώσεις, ὥσπερ καὶ τὰ ἄλλα· ἐπειδὴ ἔν τισιν ἀντιγράφοις ἀντὶ θεωρημάτων πτώσεις εὑρίσκονται καταγεγραμμέναι, καὶ ἄλλαι τινὲς ἀποδείξεις, ἐδοκιμάσαμεν αὐτὰς περιελεῖν. ἵνα δὲ οἱ ἐντυγχάνοντες ἀπὸ τῆς διαφόρου παραθέσεως πειρῶνται τῆς ἡμετέρας ἐπινοίας, ἐξεθέμεθα ταύτας ἐν τοῖς σχολίοις.

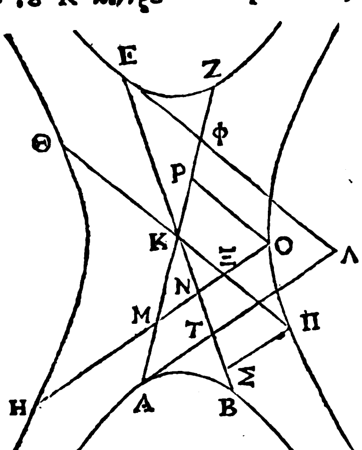
Hoc theorema plures habet casus, sicut & alia. verum quoniam in aliquibus exemplaribus loco theorematum casus inveniuntur descripti, & diversæ quædam demonstrationes, nobis visum est ipsas auferre. ut autem ii, qui in hæc inciderint, de hac differenti dispositione sententiam meam perpendere possint, eas in commentariis exposuimus.

Πιπτέτωσαν δὴ αἱ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΗΚΟ, ΘΚΣ διὰ τοῦ Κ κέντρου· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ οὕτω τὸ ὑπὸ ΘΚΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΚΟ. ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Θ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΘΝ, ΗΜ· γίνεται δὴ ἴσον τὸ μὲν ΗΚΜ τρίγωνον τῷ ΑΚΤ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΘΝΚ τρίγωνον τῷ ΕΚΠ τριγώνῳ. ἴσον δὲ τὸ ΑΤΚ τῷ ΕΚΠ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΚΜ τῷ ΚΘΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΛΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΕΤ τρίγωνον οὕτω τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ΘΚΝ τρίγωνον, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΛΕΤ τρίγωνον ἴσον τῷ ΛΑΠ, τὸ δὲ ΘΚΝ τῷ ΚΗΜ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΠΑ τρίγωνον οὕτω τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς τὸ ΗΚΜ τρίγωνον. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΛΠΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ οὕτω τὸ ΗΚΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ· καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ οὕτω τὸ ἀπὸ ΚΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΘΚΣ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΗΚΟ.



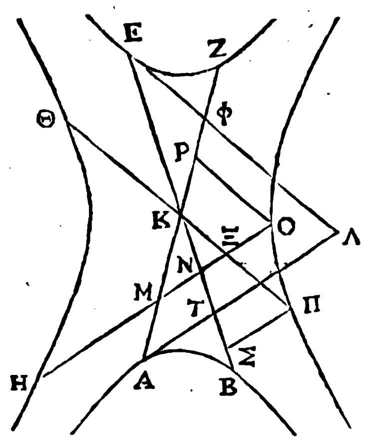
Itaque per centrum Κ transeant rectæ ΗΚΟ, ΘΚΣ contingentibus parallelæ: dico sic quoq; ut quadratum ex ΕΛ ad quadratum ex ΛΑ ita etiam esse rectangulum ΘΚΣ ad rectangulum ΗΚΟ. ducantur enim per Η, Θ rectæ ΘΝ, ΗΜ contingentibus parallelæ: erit igitur [per 15.3.huj.] triangulum ΗΚΜ triangulo ΑΚΤ æquale, triangulumq; ΘΝΚ æquale triangulo ΕΚΠ. sed [per 4.3.huj.] triangulo ΕΚΠ æquale ΑΤΚ triangulum: ergo triangulum ΗΚΜ ipsi ΚΘΝ æquale erit. & quoniam ut quadratum ex ΛΕ ad triangulum ΛΕΤ ita [per 22.6.] quadratum ex ΚΘ ad triangulum ΘΚΝ; atque est triangulum ΛΕΤ æquale triangulo ΛΑΠ, triangulum vero ΘΚΝ triangulo ΚΗΜ: ut igitur quadratum ex ΕΛ ad triangulum ΛΠΑ ita quadratum ex ΘΚ ad triangulum ΗΚΜ. est vero ut triangulum ΛΠΑ ad quadratum ex ΛΑ ita triangulum ΗΚΜ ad quadratum ex ΗΚ: ergo ex æquali ut quadratum ex ΕΛ ad quadratum ex ΛΑ ita quadratum ex ΚΘ, hoc est rectangulum ΘΚΣ, ad quadratum ex ΗΚ, hoc est ad rectangulum ΗΚΟ.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἡ μὲν ΘΚΠ, τουτέστιν ἡ παρὰ τὴν ΕΛ ἀγομένη, διὰ τοῦ Κ κέντρου ἐμπίπτῃ, ἡ δὲ ΗΟ μὴ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ οὕτω τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ. ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Ο, Π ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι αἱ ΟΡ, ΠΣ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΜΟΡ τοῦ ΜΝΚ τριγώνου μεῖζόν ἐστι τῷ ΑΚΤ, τὸ δὲ ΑΚΤ ἴσον τῷ ΚΣΠ· ἴσον ἄρα τὸ ΜΟΡ τοῖς ΜΝΚ, ΚΣΠ τριγώνοις· ὥστε λοιπὸν τὸ ΞΡ τετράπλευρον τῷ ΞΣ τετραπλεύρῳ ἴσον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΕΛΤ



Iisdem manentibus, si recta ΘΚΠ, hoc est ipsi ΕΛ parallela, transeat per Κ centrum, ΗΟ vero per centrum non transeat: dico similiter ut quadratum ex ΕΛ ad quadratum ex ΛΑ ita esse rectangulum ΘΞΠ ad rectangulum ΗΞΟ. ducantur enim per Ο, Π contingentibus parallelæ ΟΡ, ΠΣ. quoniam igitur [per 15. 3. huj.] triangulum ΜΟΡ excedit triangulum ΜΝΚ triangulo ΑΚΤ; triangulum autem ΑΚΤ æquale est triangulo ΚΣΠ: erit ΜΟΡ triangulum æquale triangulis ΜΝΚ, ΚΣΠ: quare sublato communi, videlicet triangulo ΜΞΚ, reliquum quadrilaterum ΞΡ quadrilatero ΞΣ est æquale. & quoniam [per 22. 6.] est ut quadratum

quadratum ex ΕΛ ad triangulum ΕΛΤ ita quadratum ex ΠΚ ad triangulum ΚΞΠ, & ita quadratum ex ΚΞ ad triangulum ΚΞΝ: erit [per 19.5.] ut quadratum ex ΕΛ ad ΕΛΤ triangulum ita reliquum, rectangulum scilicet ΘΞΠ, per 5.2di, ad quadrilaterum ΞΣ. est autem triangulo ΕΛΤ æquale triangulum ΑΦΛ, & quadrilaterum ΞΡ quadrilatero ΞΣ: ergo ut quadratum ex ΕΛ ad triangulum ΑΛΦ ita rectangulum ΘΞΠ ad quadrilaterum ΞΣ. ac pari argumento, ut triangulum ΑΛΦ ad quadratum ex ΛΑ ita quadrilaterum ΞΣ ad rectangulum ΗΞΟ: ex æquali igitur ut quadratum ex ΕΛ ad quadratum ex ΛΑ ita rectangulum ΘΞΠ ad rectangulum ΗΞΟ.



Licet & hoc modo idem demonstrare.

Si recta ducatur sectionem ΕΖ contingens in puncto quo eidem occurrit diameter ΑΖ; recta ducta ipsi ΑΤ parallela erit, & eandem rationem habet ad abscissam ab ipsa è recta ΕΦ puncto Ε adjacentem, quam habet ΑΛ ad ΛΕ. Eademque erunt reliqua ac in prop. XIX.

τρίγωνον οὕτως τό τε ἀπὸ ΠΚ πρὸς τὸ ΚΣΠ, καὶ τὸ ἀπὸ ΚΞ πρὸς τὸ ΚΞΝ τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΕΛΤ τρίγωνον οὕτω λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ΞΣ τετράπλευρον. καὶ ἔστι τῷ μὲν ΕΛΤ τριγώνῳ ἴσον τὸ ΑΦΛ, τὸ δὲ ΞΡ τετράπλευρον τῷ ΞΣ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΑΛΦ οὕτω τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ΞΣ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ ΑΛΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ οὕτω τὸ ΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ· καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ οὕτω τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ.

Ἔστι δὴ καὶ οὕτως δεῖξαι.

Ἐὰν γὰρ τῆς ΕΖ τομῆς ἀχθῇ ἐπιψαύουσα καθ᾽ ὃ συμβάλλει ἡ ΑΖ διάμετρος τῇ ΕΖ τομῇ, γίνεται παράλληλος ἡ ἀχθεῖσα τῇ ΑΤ, καὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν ἀποτεμνομένην ὑπ᾽ αὐτῆς πρὸς τῷ Ε ἀπὸ τῆς ΕΦ, τῷ ὃν ἔχει ἡ ΑΛ πρὸς τὸ ΛΕ. καὶ τὰ λοιπὰ ὅμοια ἔσται τῷ ιθʹ.

Prop. XXIV. *Theor.*

Si in oppositis sectionibus conjugatis à centro ad sectiones ducantur duæ rectæ, quarum una quidem appelletur transversa diameter, altera vero recta; & ducantur aliæ his diametris parallelæ, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant, ita ut occursus sit in loco inter quatuor sectiones intermedio: rectangulum contentum portionibus lineæ diametro transversæ parallelæ, una cum eo ad quod rectangulum sub portionibus lineæ rectæ diametro parallelæ rationem habet eandem quam diametri rectæ quadratum ad quadratum transversæ, æquale erit duplo quadrati quod fit è dimidia transversæ diametri.

Sint oppositæ sectiones conjugatæ Α, Β, Γ, Δ, quarum centrum Ε; perque Ε ducantur ΑΕΓ transversa diameter & ΔΕΒ recta; & ducantur ΖΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΠΡ parallelæ ipsis ΑΓ, ΔΒ, quæ in puncto Ξ conveniant, primum quidem intra angulum ΣΕΦ vel ΤΕΤ: dico rectangulum ΖΞΛ, una cum eo ad quod rectangulum ΜΞΡ rationem habet eandem quam quadratum ex ΔΒ ad quadratum ex ΑΓ, æquale esse duplo quadrati ex ΑΕ.

Ducantur enim asymptoti sectionum ΣΕΤ, ΤΕΦ; & per Α ducatur ΣΗΑΦ sectionem con-

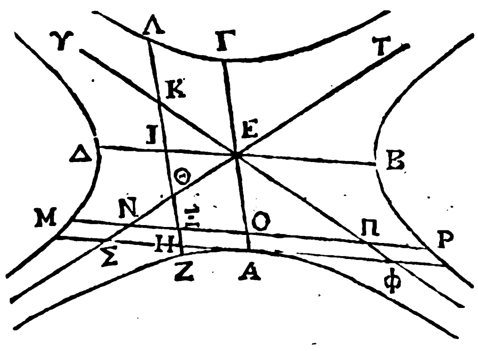
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδʹ.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἀπὸ τοῦ κέντρου διαχθῶσι πρὸς τὰς τομὰς δύο εὐθεῖαι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν πλαγία διάμετρος, ἡ δὲ ὀρθία, ἀχθῶσι δέ τινες παρὰ τὰς δύο διαμέτρους συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ ταῖς τομαῖς, ἡ δὲ σύμπτωσις ᾖ ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν τεσσάρων τομῶν· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, μετὰ τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ ὀρθίᾳ ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.

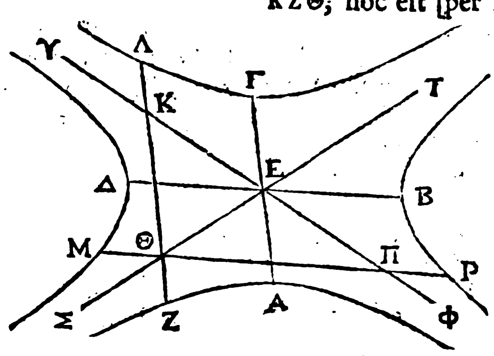
Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, ὧν κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε διήχθωσαν ἥ τε ΑΕΓ πλαγία καὶ ἡ ΔΕΒ ὀρθία, καὶ παρὰ τὰς ΑΓ, ΔΒ ἤχθωσαν αἱ ΖΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΠΡ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ξ, πρῶτον μὲν κατὰ τὸ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΣΕΦ γωνίας ἢ τῆς ὑπὸ ΤΕΤ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ, μετὰ τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ ΜΞΡ ὃν τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΣΕΤ, ΤΕΦ, καὶ διὰ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΣΗΑΦ

ΣΗΑΦ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΣΑΦ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΔΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΣΑΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. τὸ δὲ ὑπὸ ΣΑΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ τῆς ΣΑ πρὸς ΑΕ καὶ τοῦ τῆς ΦΑ πρὸς ΑΕ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΣΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς ΞΘ, ὡς δὲ ἡ ΦΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΠΞ πρὸς ΞΚ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΝΞ πρὸς ΞΘ καὶ τοῦ τῆς ΠΞ πρὸς ΞΚ. σύγκειται δὲ ἐκ τῶν αὐτῶν ὁ τοῦ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΠΜΝ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΡΝΜ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΖΘ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΛΘΖ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΡΝΜ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΖ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΠΞΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΡΝΜ τῷ ὑπὸ ΡΞΜ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΖΘ. δεικτέον οὖν ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ καὶ τοῦ ὑπὸ ΚΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΕΑ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΚΖΘ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΘΖ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΚΖΘ, τουτέστι τῷ ἀπὸ ΑΕ.



tingens. quoniam igitur [per 56. 1. & 1.2.huj.] rectangulum ΣΑΦ æquale eſt quadrato ex ΔΕ; erit ut rectangulum ΣΑΦ ad quadratum ex ΕΑ ita quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ. rectangulum autem ΣΑΦ ad quadratum ex ΑΕ [per 23. 6.] rationem habet compoſitam ex ratione ΣΑ ad ΑΕ & ex ratione ΦΑ ad ΑΕ. ſed ut ΣΑ ad ΑΕ ita ΝΞ ad ΞΘ; & ut ΦΑ ad ΑΕ ita ΠΞ ad ΞΚ: quare ratio quadrati ex ΔΕ ad quadratum ex ΑΕ componitur ex ratione ΝΞ ad ΞΘ & ratione ΠΞ ad ΞΚ. ratio autem rectanguli ΠΞΝ ad rectangulum ΚΞΘ [per 23. 6.] compoſita eſt ex iiſdem rationibus: ut igitur quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΑΕ ita rectangulum ΠΞΝ ad rectangulum ΚΞΘ; & propterea [per 12. 5.] ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΑΕ ita quadratum ex ΔΕ una cum rectangulo ΠΞΝ ad quadratum ex ΑΕ una cum rectangulo ΚΞΘ. atqui eſt [per 11.2.huj.] quadratum ex ΔΕ æquale rectangulo ΠΜΝ, hoc eſt rectangulo ΡΝΜ; & quadratum ex ΑΕ æquale rectangulo ΚΖΘ, hoc eſt ΛΘΖ: quare ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΑΕ ita rectangulum ΡΝΜ una cum rectangulo ΠΞΝ ad rectangulum ΛΘΖ una cum rectangulo ΚΞΘ. rectangulum autem ΠΞΝ una cum rectangulo ΡΝΜ æquale eſt [per 4.lem.3.huj.] rectangulo ΡΞΜ: ergo ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ ita ΡΞΜ rectangulum ad rectangulum ΚΞΘ una cum rectangulo ΚΖΘ. itaque demonſtrare oportet rectangulum ΖΞΛ una cum rectangulo ΚΞΘ & rectangulo ΚΖΘ æquale eſſe duplo quadrati ex ΕΑ. commune auferatur quadratum ex ΑΕ, hoc eſt [per 11.2.huj.] rectangulum ΚΖΘ: reliquum igitur, rectangulum nempe ΚΞΘ una cum rectangulo ΛΞΖ demonſtrandum eſt æquale quadrato ex ΑΕ. quod quidem ita ſe habet: nam [per 4. lem. 3. huj.] rectangulum ΚΞΘ una cum rectangulo ΛΞΖ æquale eſt rectangulo ΛΘΖ ſive ΚΖΘ; hoc eſt [per 11.2.huj.] quadrato ex ΑΕ.



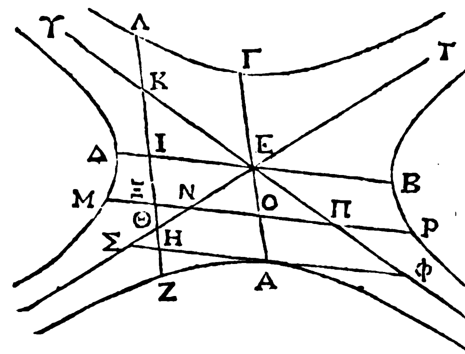
Συμπιπτέτωσαν δὴ αἱ ΖΛ, ΜΡ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων κατὰ τὸ Θ. ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΖΘΛ τῷ ἀπὸ ΑΕ, καὶ τὸ ὑπὸ ΜΘΡ τῷ ἀπὸ ΔΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΘΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΘΛ· ὥστε τὸ δὶς ὑπὸ ΖΘΛ ἴσον ζητοῦμεν τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ.

Ἔστω δὲ τὸ Ξ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΣΕΥ γωνίας, ἢ τῆς ὑπὸ ΦΕΤ· ἔσται δὴ ὁμοίως, διὰ τὴν συναφὴν τῶν λόγων, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ. τῷ δὲ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΠΜΝ, τουτέστι

Conveniant deinde ΖΛ, ΜΡ in una aſymptotôn ad punctum Θ. æquale autem eſt rectangulum ΖΘΛ quadrato ex ΑΕ; & rectangulum ΜΘΡ quadrato ex ΔΕ: quare ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ ita rectangulum ΜΘΡ ad rectangulum ΖΘΛ. & propterea quærimus duplum rectanguli ΖΘΛ æquale duplo quadrati ex ΑΕ. quod quidem ita eſt.

Sit poſtremo Ξ intra angulum ΣΕΥ vel ΦΕΤ: erit igitur ſimiliter [atque in caſ. 1.] per compoſitionem rationum, ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ ita ΠΞΝ rectangulum ad rectangulum ΚΞΘ. ſed [per 11. 2.huj.] quadrato ex ΔΕ rectangulum ΠΜΝ, hoc eſt ΡΝΜ, eſt æquale;

le; & quadrato ex A E æquale est rectangulum Λ Θ Z: ergo ut rectangulum P N M ad rectangulum Λ Θ Z ita ablatum Π Ξ N rectangulum ad ablatum rectangulum K Ξ Θ: reliquum igitur rectangulum [per 4. lem. 3. huj.] P Ξ M ad reliquum, videlicet ad excessum quo quadratum ex A E excedit rectangulum K Ξ Θ, est ut quadratum ex Δ E ad quadratum ex E A: itaque demonstrare oportet rectangulum Z Ξ Λ una cum excessu quo quadratum ex A E excedit K Ξ Θ rectangulum, æquale esse duplo quadrati ex A E. commune auferatur quadratum ex A E, hoc est [ut hactenus ostensum] rectangulum Z Θ Λ: ergo reliquum, nempe rectangulum [per 4. lem. 3. huj.] K Ξ Θ, una cum excessu quo quadratum ex A E excedit rectangulum K Ξ Θ, demonstrandum est quadrato ex A E æquale esse. quod quidem ita est: nam minus, nempe rectangulum K Ξ Θ, una cum excessu est æquale majori, videlicet quadrato ex A E.



τὸ ὑπὸ Ρ Ν Μ, τῷ δὲ ἀπὸ Α Ε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ Λ Θ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ Ρ Ν Μ πρὸς τὸ ὑπὸ Λ Θ Ζ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ Π Ξ Ν πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ Κ Ξ Θ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ Ρ Ξ Μ πρὸς λοιπὴν τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ Α Ε τοῦ ὑπὸ Κ Ξ Θ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ Δ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Α. δεικτέον ἄρα, ὅτι τὸ ὑπὸ Ζ Ξ Λ προσλαβὸν τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ Α Ε τοῦ ὑπὸ Κ Ξ Θ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ Α Ε. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ Α Ε, τουτέστι τὸ ὑπὸ Ζ Θ Λ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ Κ Ξ Θ μετὰ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ Α Ε τοῦ ὑπὸ Κ Ξ Θ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Α Ε. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ἔλασσον τὸ ὑπὸ Κ Ξ Θ προσλαβὸν τὴν ὑπεροχὴν ἴσον ἐστὶ τῷ μείζονι τῷ ἀπὸ Α Ε.

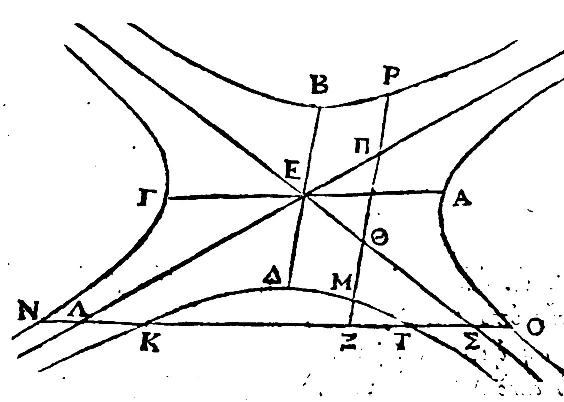
Prop. XXV. *Theor.*

Iisdem positis, sit rectarum ipsis A Γ, B Δ parallelarum occursus intra unam sectionum B, Δ, atque, ut supponitur, in puncto Ξ: dico rectangulum contentum portionibus ejus quæ transversæ diametro parallela est, videlicet O Ξ N, majus esse quam illud ad quod rectangulum sub portionibus lineæ rectæ diametro parallelæ, sive ad P Ξ M, eandem rationem habet quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transversæ, duplo quadrati è dimidia transversæ diametri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε′.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω ἡ σύμπτωσις τῶν παραλλήλων ταῖς Α Γ, Β Δ ἐντὸς μιᾶς τῶν Β, Δ τομῶν, ὡς ὑπόκειται, κατὰ τὸ Ξ· λέγω ὅτι τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ Ο Ξ Ν, τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ ὀρθίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ Ρ Ξ Μ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας, μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.

Est enim propter eandem rationem [atque in præc.] ut quadratum ex Δ E ad quadratum ex E A ita rectangulum Π Ξ Θ ad rectangulum Σ Ξ Λ. quadratum autem ex Δ E æquale est [per 11. 2. huj.] rectangulo Π M Θ; & quadratum ex A E æquale rectangulo Λ O Σ: ergo ut quadratum ex Δ E ad quadratum ex E A ita Π M Θ rectangulum ad rectangulum Λ O Σ. itaque quoniam ut totum rectangulum Π Ξ Θ ad totum Λ Ξ Σ ita ablatum rectangulum Π M Θ ad ablatum Λ O Σ, hoc est ad Σ T Λ; erit & reliquum [per 4. lem. 3. huj.] P Ξ M ad reliquum [per 4. lem. part. ult.] T Ξ K ut quadratum ex Δ E ad quadratum ex E A. ostendere



Διὰ γὰρ τὰ αὐτά ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ Δ Ε τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Α οὕτως τὸ ὑπὸ Π Ξ Θ πρὸς τὸ ὑπὸ Σ Ξ Λ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ Δ Ε τῷ ὑπὸ Π Μ Θ, τὸ δὲ ἀπὸ Α Ε τῷ ὑπὸ Λ Ο Σ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Δ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Α Ε οὕτως τὸ ὑπὸ Π Μ Θ πρὸς τὸ ὑπὸ Λ Ο Σ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ὑπὸ Π Ξ Θ πρὸς ὅλον τὸ ὑπὸ Λ Ξ Σ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ Π Μ Θ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ Λ Ο Σ, τουτέστι τὸ ὑπὸ Σ Τ Λ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ Ρ Ξ Μ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ Τ Ξ Κ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ Δ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Α. δεικτέον ἄρα ὅτι τὸ ὑπὸ

O Ξ N

Ο Ξ Ν τοῦ ὑπὸ Τ Ξ Κ μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ἀπὸ Α Ε. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ Τ Ξ Κ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον ὅτι τὸ ὑπὸ Ο Τ Ν ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ Α Ε. ἔστι δέ.

igitur oportet rectangulum Ο Ξ Ν majus esse quam rectangulum Τ Ξ Κ duplo quadrati ex Α Ε. commune auferatur Τ Ξ Κ: reliquum ergo, nempe [per 4. lem.part.ult.] rectangulum Ο Τ Ν, ostendendum æquale esse duplo quadrati ex Α Ε. quod quidem [per 23. 2. huj.] ita se habet.

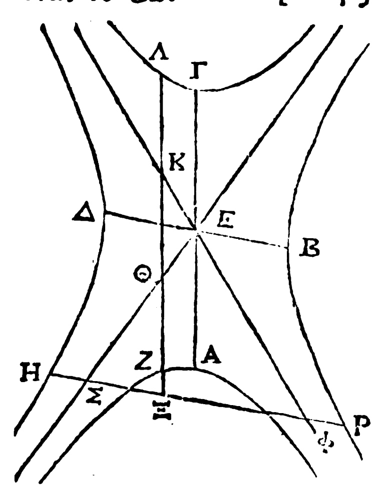
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛʹ.

Ἐὰν ἡ κατὰ τὸ Ξ σύμπτωσις τῶν παραλλήλων ἐντὸς ᾖ μιᾶς τῶν Α, Γ τομῶν, ὡς ὑπόκειται· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ Λ Ξ Ζ, τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ τῆς ἑτέρας τῶν τμημάτων, τουτέστι τὸ ὑπὸ Ρ Ξ Η, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας, ἔλασσον ἔσται τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.

PROP. XXVI. *Theor.*

Quod si parallelarum occursus ad punctum Ξ sit intra unam sectionum Α, Γ, ut positum est: rectangulum quod continetur sub portionibus lineæ parallelæ transversæ diametro, hoc est Λ Ξ Ζ, minus erit quam illud ad quod rectangulum portionibus alterius lineæ contentum, sive Ρ Ξ Η, eandem rationem habet quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transversæ, duplo quadrati ejus quod à dimidia transversæ diametri constituitur.

Ἐπεὶ γὰρ, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ Δ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Α οὕτως τὸ ὑπὸ Φ Ξ Σ πρὸς τὸ ὑπὸ Κ Ξ Θ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ Ρ Ξ Η λόγον ἔχει πρὸς τὸ ὑπὸ Κ Ξ Θ μετὰ τοῦ ἀπὸ Α Ε τὸν τοῦ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας. δεικτέον ἄρα ὅτι τὸ ὑπὸ Λ Ξ Ζ τοῦ ὑπὸ Κ Ξ Θ μετὰ τοῦ ἀπὸ Α Ε ἔλασσόν ἐστι τῷ δὶς ἀπὸ Α Ε. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ Α Ε· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ Λ Ξ Ζ τοῦ ὑπὸ Κ Ξ Θ ἔλασσόν ἐστι τῷ ἀπὸ Α Ε, τουτέστι τῷ ὑπὸ Λ Θ Ζ. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ὑπὸ Λ Θ Ζ μετὰ τοῦ ὑπὸ Λ Ξ Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Κ Ξ Θ.



Quoniam enim, propter eadem quæ prius [in 24.3.huj.] dicta sunt, ut quadratum ex Δ Ε ad quadratum ex Ε Α ita est Φ Ξ Σ rectangulum ad rectangulum Κ Ξ Θ: habebit [per 12.5.] totum rectangulum Ρ Ξ Η ad rectangulum Κ Ξ Θ una cum quadrato ex Α Ε rationem eandem quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transversæ. ergo demonstrare oportet rectangulum Λ Ξ Ζ minus esse quam rectangulum Κ Ξ Θ una cum quadrato ex Α Ε duplo quadrati ex Α Ε. commune auferatur quadratum ex Α Ε: reliquum igitur, nempe rectangulum Λ Ξ Ζ, minus esse quam Κ Ξ Θ quadrato ex Α Ε, hoc est [per 11.2.huj.] rectangulo Λ Θ Ζ, demonstrandum restat. quod quidem ita se habet: nam [per 4. lem.3.huj.] rectangulum Λ Θ Ζ una cum Λ Ξ Ζ æquale est rectangulo Κ Ξ Θ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζʹ.

Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας συζυγεῖς διάμετροι ἀχθῶσι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν ὀρθία, ἡ δὲ πλαγία, καὶ παρ' αὐτὰς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ τῇ γραμμῇ· τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς γραμμῆς τετράγωνα, προσλαβόντα τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν, ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς γραμμῆς, ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εἴδη τῷ ὑποκειμένῳ εἴδει πρὸς τῇ ὀρθίᾳ διαμέτρῳ, ἴσα ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου τετραγώνῳ.

PROP. XXVII. *Theor.*

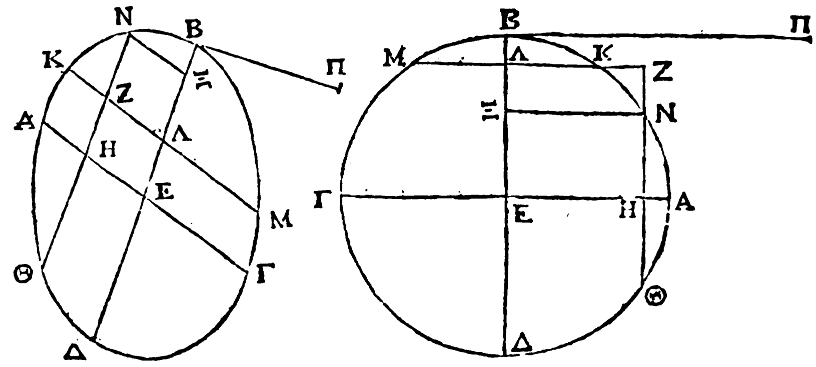
Si in ellipsi vel circuli circumferentia conjugatæ diametri ducantur, quarum altera quidem sit recta, altera vero transversa; & ducantur duæ rectæ lineæ diametris parallelæ, quæ & sibi ipsis & sectioni occurrant: quadrata è portionibus lineæ transversæ diametro parallelæ, quæ inter sectionem & linearum occursum interjiciuntur, una cum figuris ex portionibus lineæ rectæ diametro parallelæ inter ductarum occursum & sectionem interjectis, similibus & similiter descriptis ei quæ ad rectam diametrum constituitur, quadrato transversæ diametri æqualia erunt.

SIT ellipſis vel circuli circumferentia ΑΒΓΔ, cujus centrum Ε; ducanturque ipſius duæ conjugatæ diametri, recta quidem ΑΕΓ, tranſverſa vero ΒΕΔ; & ducantur ΚΖΛΜ, ΝΖΗΘ, quæ ipſis ΑΓ, ΒΔ æquidiſtent: dico quadrata ex ΝΖ, ΖΘ, una cum figuris ex ΚΖ, ΖΜ ſimilibus & ſimiliter deſcriptis ei quæ fit ad ΑΓ, quadrato ex ΒΔ æqualia eſſe.

Ducatur enim à puncto Ν recta ΝΞ parallela ΑΕ; ergo ad ΒΔ ordinatim applicata erit. & ΒΠ ſit rectum figuræ latus. quoniam igitur ut ΒΠ ad ΑΓ ita eſt ΑΓ ad ΒΔ; erit [per 20. & 22. 6.] ut ΒΠ ad ΒΔ ita quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΔ. quadratum autem ex ΒΔ [per 17. 6. & 15. 1. huj.] eſt æquale figuræ quæ ad ΑΓ conſtituitur: ergo ut ΒΠ ad ΒΔ ita quadratum ex ΑΓ ad figuram quæ eſt ad ΑΓ. ſed [per 22. 6.] ut quadratum ex ΑΓ ad figuram quæ ad ΑΓ ita quadratum ex ΝΞ ad figuram quæ fit ex ΝΞ ſimilem ei quæ ad ΑΓ: ergo ut ΠΒ ad ΒΔ ita quadratum ex ΝΞ ad figuram quæ fit ex ΝΞ ſimilem ei quæ ad ΑΓ. eſt autem [per 21. 1. huj.] & ut ΠΒ ad ΒΔ ita quadratum ex ΝΞ ad rectangulum ΒΞΔ: quare [per 9. 5.] figura quæ fit ex ΝΞ, hoc eſt ex ΖΛ, ſimilis ei quæ ad ΑΓ, rectangulo ΒΞΔ eſt æqualis. eodem modo demonſtrabimus figuram quæ fit ex ΚΛ ſimilem illi quæ ad ΑΓ rectangulo ΒΛΔ æqualem eſſe. & quoniam recta linea ΝΘ ſecatur in partes æquales in Η & in partes inæquales in Ζ; quadrata ex ΘΖ, ΖΝ [per 9. 2.] dupla ſunt quadratorum ex ΘΗ, ΗΖ, hoc eſt ex ΝΗ, ΗΖ. eadem quoque ratione quadrata ex ΜΖ, ΖΚ quadratorum ex ΚΛ, ΛΖ ſunt dupla; & [per 22. 6.] figuræ quæ fiunt ex ΜΖ, ΖΚ ſimiles ei quæ ad ΑΓ duplæ ſunt figurarum ſimilium quæ ex ΚΛ, ΛΖ. figuræ autem quæ fiunt ex ΚΛ, ΛΖ rectangulis ΒΛΔ, ΒΞΔ [ut modo oſtenſum] ſunt æquales; & quadrata ex ΝΗ, ΗΖ æqualia ſunt quadratis ex ΞΕ, ΕΛ: ergo quadrata ex ΝΖ, ΖΘ, una cum figuris ex ΚΖ, ΖΜ ſimilibus ei quæ ad ΑΓ, dupla ſunt rectangulorum ΒΞΔ, ΒΛΔ & quadratorum ex ΞΕ, ΕΛ. itaque quoniam recta ΒΔ ſecatur in partes æquales in Ε & in inæquales in Ξ, rectangulum ΒΞΔ [per 5. 2.] una cum quadrato ex ΞΕ æquale eſt quadrato ex ΒΕ: ſimiliter & rectangulum ΒΛΔ una cum quadrato ex ΛΕ æquale eſt quadrato ex ΒΕ: quare rectangula ΒΞΔ,

ΕΣΤΩ γὰρ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓΔ, ἧς κέντρον τὸ Ε, καὶ ἤχθωσαν αὐτῆς δύο συζυγεῖς διάμετροι, ὀρθία μὲν ἡ ΑΕΓ, πλαγία δὲ ἡ ΒΕΔ, καὶ παρὰ τὰς ΑΓ, ΒΔ ἤχθωσαν αἱ ΚΖΛΜ, ΝΖΗΘ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΝΖ, ΖΘ τετράγωνα, προσλαβόντα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΖ, ΖΜ εἴδη ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει, ἴσα ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ν παρὰ τὴν ΑΕ ἡ ΝΞ· τεταγμένως ἄρα κατῆκται ἐπὶ τὴν ΒΔ. καὶ ἔστω ὀρθία ἡ ΒΠ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΒΠ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΒΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΠ πρὸς ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ. τὸ δὲ ἀπὸ ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΠ πρὸς ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ εἶδος. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ εἶδος οὕτω τὸ ἀπὸ ΝΞ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΝΞ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΝΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΞΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος (τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΛ) ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει, τῷ ὑπὸ ΒΞΔ. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι τὸ ἀπὸ ΚΛ εἶδος, ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει, ἴσον τῷ ὑπὸ ΒΛΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΘ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ, τὰ ἀπὸ τῶν ΘΖ, ΖΝ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΘΗ, ΗΖ, τουτέστι τῶν ἀπὸ ΝΗ, ΗΖ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ ἀπὸ ΜΖ, ΖΚ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΚΛ, ΛΖ τετραγώνων, καὶ τὰ ἀπὸ ΜΖ, ΖΚ εἴδη (ὅμοια τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει) διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΚΛ, ΛΖ ὁμοίων εἰδῶν. ἴσα δέ ἐστι τὰ μὲν ἀπὸ ΚΛ, ΛΖ εἴδη τοῖς ὑπὸ ΒΛΔ, ΒΞΔ, τὰ δὲ ἀπὸ ΝΗ, ΗΖ τετράγωνα τοῖς ἀπὸ ΞΕ, ΕΛ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖ, ΖΘ τετράγωνα μετὰ τῶν ἀπὸ ΚΖ, ΖΜ εἰδῶν (ὁμοίων τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει) διπλάσιά ἐστι τῶν ὑπὸ ΒΞΔ, ΒΛΔ καὶ τῶν ἀπὸ ΞΕ, ΕΛ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΔ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ξ, τὸ ὑπὸ ΒΞΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΞΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ. ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΛΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΛΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ· * ὥστε τὰ ὑπὸ ΒΞΔ καὶ ὑπὸ ΒΛΔ καὶ τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΛΕ ἴσα ἐστὶ



* Vide Lemma quintum *Pappi* in hunc librum.

ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖ, ΖΘ τετράγωνα μετὰ τῶν ἀπὸ ΚΖ, ΖΜ εἰδῶν (ὁμοίων τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει) διπλάσιά ἐστι τοῦ δὶς ἀπὸ ΒΕ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΒΔ διπλάσιον τοῦ δὶς ἀπὸ ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖ, ΖΘ τετράγωνα, προσλαβόντα τὰ ἀπὸ ΚΖ, ΖΜ εἴδη ὅμοια τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει, ἴσα ἔσται τῷ ἀπὸ ΒΔ.

ΒΔ & quadrata ex ΞΕ, ΑΕ æqualia sunt duplo quadrati ex ΒΕ: quadrata igitur ex ΝΖ, ΖΘ, una cum figuris ex ΚΖ, ΖΜ similibus ei quæ ad ΑΓ, dupli quadrati ex ΒΕ sunt dupla. atqui quadratum ex ΒΔ duplum est dupli quadrati ex ΒΕ: ergo quadrata ex ΝΖ, ΖΘ una cum figuris ex ΚΖ, ΖΜ similibus ei quæ ad ΑΓ, quadrato ex ΒΔ æqualia erunt.

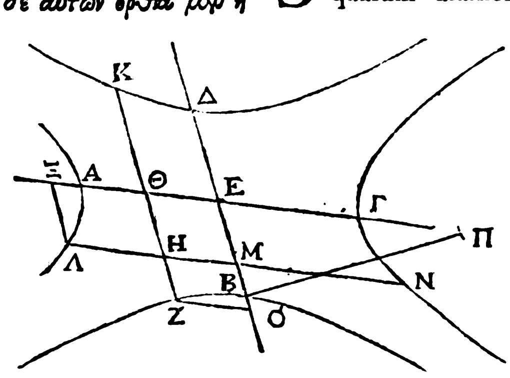
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη΄.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις συζυγεῖς διάμετροι ἀχθῶσι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν ὀρθία, ἡ δὲ πλαγία, ἀχθῶσι δὲ παρ' αὐτὰς δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ ταῖς τομαῖς· τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν, ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν, τετράγωνα πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν, ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν, τετράγωνα λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας.

Prop. XXVIII. *Theor.*

Si in oppositis sectionibus conjugatis diametri conjugatæ ducantur, quarum altera recta sit, altera transversa; & ducantur duæ rectæ lineæ diametris parallelæ, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant: quadrata ex portionibus lineæ rectæ diametro parallelæ, quæ inter linearum occursum & sectiones interjiciuntur, ad quadrata ex portionibus alterius lineæ, quæ transversæ diametro æquidistat, inter sectiones & occursum linearum interjectis, eandem rationem habent quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transversæ.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ὀρθία μὲν ἡ ΑΕΓ, πλαγία δὲ ἡ ΒΕΔ, καὶ παρ' αὐτὰς ἤχθωσαν αἱ ΖΗΘΚ, ΛΗΜΝ τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΛΗ, ΗΝ τετράγωνα πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗ, ΗΚ λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Λ, Ζ τεταγμένως αἱ ΛΞ, ΖΟ· παράλληλοι ἄρα εἰσὶ ταῖς ΑΓ, ΒΔ. ἀπὸ δὲ τοῦ Β ἤχθω ἡ ὀρθία τῆς ΒΔ ἡ ΒΠ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ, καὶ τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΟΔ, καὶ τὸ ὑπὸ ΓΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΞΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΟΖ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΕΘ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΟΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΛΞ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΜΕ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΓΞΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΞΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΟΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΟΕ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ οὕτως τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΕΘ πρὸς τὰ ἀπὸ ΟΕ, ΕΜ, τουτέστι τὰ ἀπὸ ΛΜ, ΜΗ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΘ, ΘΗ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ἀπὸ ΛΜ,

Sint oppositæ sectiones conjugatæ ΑΒ, ΓΔ, quarum diameter quidem recta sit ΑΕΓ, transversa vero ΒΕΔ: & ipsis parallelæ ducantur ΖΗΘΚ, ΛΗΜΝ, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant. dico quadrata ex ΛΗ, ΗΝ ad quadrata ex ΖΗ, ΗΚ eandem rationem habere quam quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΔ.

A punctis enim Λ, Ζ ordinatim applicentur ΛΞ, ΖΟ, quæ parallelæ erunt diametris ΑΓ, ΒΔ. & à puncto Β ducatur ipsius ΒΔ rectum latus ΒΠ: itaque constat [per 20. 6.] ut ΠΒ ad ΒΔ ita esse quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΔ, & [per 15. 5.] quadratum ex ΑΕ ad quadratum ex ΕΒ; & [per 21. 1. huj.] quadratum ex ΖΟ ad ad rectangulum ΒΟΔ; & rectangulum ΓΞΑ ad quadratum ex ΛΞ: est igitur [per 12. 5.] sicut unum antecedentium ad unum consequentium ita antecedentia omnia ad omnia consequentia: quare ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΔ ita rectangulum ΓΞΑ una cum quadrato ex ΑΕ & quadrato ex ΟΖ, hoc est quadrato ex ΕΘ, ad rectangulum ΔΟΒ una cum quadrato ex ΒΕ & quadrato ex ΛΞ, hoc est quadrato ex ΜΕ. sed [per 6. 2.] rectangulum ΓΞΑ una cum quadrato ex ΑΕ æquale est quadrato ex ΞΕ, & rectangulum ΔΟΒ una cum quadrato ex ΒΕ æquale quadrato ΟΕ: ergo ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΔ ita sunt quadrata ex ΞΕ, ΕΘ ad quadrata ex ΟΒ, ΕΜ, hoc est quadrata ex ΛΜ, ΜΗ ad quadrata ex ΖΘ, ΘΗ. quadratorum autem ex ΛΜ, ΜΗ

MH dupla sunt quadrata ex ΛH, HN, ut [ad 9. 2.] demonstratum est; & quadratorum ex ZΘ, ΘH quadrata ex ZH, HK sunt dupla: ut igitur quadratum ex AΓ ad quadratum ex BΔ ita quadrata ex ΛH, HN ad quadrata ex ZH, HK.

MH διπλάσια τὰ ἀπὸ ΛH, HN, ὡς δέδεικται· τῶν δὲ ἀπὸ ZΘ, ΘH τὰ ἀπὸ ZH, HK· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ AΓ πρὸς τὸ ἀπὸ BΔ οὕτως τὰ ἀπὸ ΛH, HN πρὸς τὰ ἀπὸ ZH, HK.

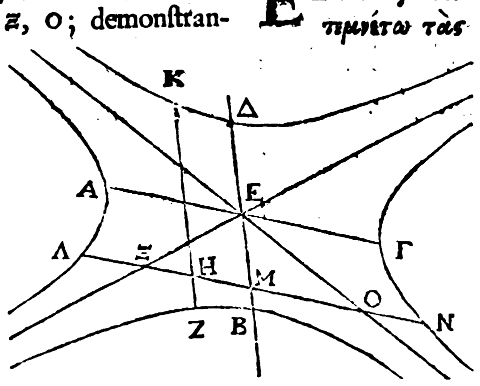
Prop. XXIX. *Theor.*

Iisdem positis, si linea rectæ diametro parallela secet asymptotos: quadrata ex portionibus ipsius quæ inter linearum occursum & asymptotos interjiciuntur, una cum dimidio quadrati facti è recta diametro, ad quadrata ex portionibus ejus quæ transversæ diametro æquidistat inter occursum linearum & sectiones interjectis, eandem rationem habent quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transversæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ΄.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἡ τῇ ὀρθίᾳ παράλληλος τέμνῃ τὰς ἀσυμπτώτους· τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν, ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ἀσυμπτώτων, προσλαβόντα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετραγώνου, πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων, ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν, τετράγωνα λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον.

Sint eadem quæ supra, & recta ΛN secet asymptotos in punctis Ξ, O; demonstrandum est quadrata ex ΞH, HO, una cum dimidio quadrati ex AΓ (hoc est duplo quadrati ex EA, hoc est [per 10.2.huj.] duplo rectanguli ΛΞN) ad quadrata ex ZH, HK eandem rationem habere quam quadratum ex AΓ ad quadratum ex BΔ.



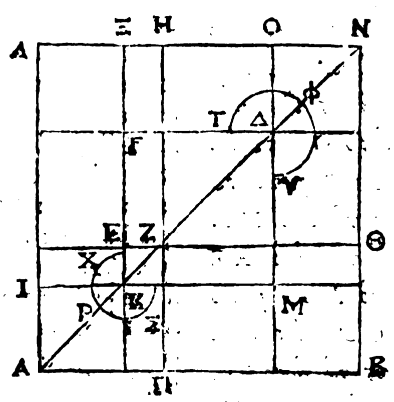
ª Quoniam enim ΛΞ [per 16.2.huj.] æqualis est ON, quadrata ex ΛH, HN superant [per 6.lem.3.huj.] quadrata ex ΞH, HO duplo rectanguli ΛΞN: ergo quadrata ex ΞH, HO una cum duplo quadrati ex AE æqualia sunt quadratis ex ΛH, HN. sed [per 28.3.huj.] quadrata ex ΛH, HN ad quadrata ex ZH, HK eandem habent rationem quam quadratum ex AΓ ad quadratum ex BΔ: quadrata igitur ex ΞH, HO una cum duplo quadrati ex EA ad quadrata ex ZH, HK eandem rationem habent quam quadratum ex AΓ ad quadratum ex BΔ.

ΕΣΤΩ γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, ἡ δὲ ΛN τεμνέτω τὰς ἀσυμπτώτους κατὰ τὰ Ξ, O· δεικτέον ὅτι τὰ ἀπὸ ΞH, HO, προσλαβόντα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ AΓ (τουτέστι τὸ δὶς ἀπὸ EA, τουτέστι τὸ δὶς ὑπὸ ΛΞN) πρὸς τὰ ἀπὸ ZH, HK λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ AΓ πρὸς τὸ ἀπὸ BΔ.

ª Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ON, τὰ ἀπὸ τῶν ΛH, HN τῶν ἀπὸ ΞH, HO ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ ΛΞN· τὰ ἄρα ἀπὸ ΞH, HO μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ AE ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΛH, HN. τὰ δὲ ἀπὸ ΛH, HN πρὸς τὰ ἀπὸ ZH, HK λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ AΓ πρὸς τὸ ἀπὸ BΔ· καὶ τὰ ἀπὸ ΞH, HO ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ EA πρὸς τὰ ἀπὸ ZH, HK λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ AΓ πρὸς τὸ ἀπὸ BΔ.

EUTOCIUS.

ª Quoniam enim ΛΞ æqualis est ON; quadrata ex ΛH, HN superant quadrata ex ΞH, HO, duplo rectanguli ΛΞN. *] Sit recta linea ΛN, auferanturque ab ipsa æquales ΛΞ, NO, & figura describatur. manifestum est, ob similitudinem & propterea quod ΛΞ est æqualis ipsi ON, quadrata ΛΓ, ΔN, ΛK, MB inter se æqualia esse. quoniam igitur quadrata quæ fiunt ex ΛH, HN sunt quadrata ΛZ, ZN, & quæ ex HΞ, HO sunt KZ, ZΔ; sequitur quod quadrata ex ΛH, HN superant quadrata ex ΞH, HO gnomonibus ΣPX, TΦY. & quoniam rectangulum HΔ est æquale rectangulo MΠ, & rectangulum EI ipsi MΘ; erunt gnomones ΣPX, TΦY æquales rectangulis ΛM, ΔB. sed ΛM est æquale ΛΔ,



ª Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ON, τὰ ἀπὸ ΛH, HN τῶν ἀπὸ ΞH, HO ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ ΛΞN.] Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΛN, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπ' αὐτῆς ἴσαι αἱ ΛΞ, NO, καὶ γεγράφθω τὸ σχῆμα. φανερὸν δὴ ὅτι ἐκ τῆς ὁμοιότητος καὶ τοῦ ἴσην εἶναι τὴν ΛΞ τῇ ON, τὰ ΛΓ, NΔ, ΛK, MB τετράγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ ΛH, HN τὰ ΛZ, ΞN ἐστὶν, τὰ δὲ ἀπὸ ΞH, HO ἐστὶ τὰ KZ, ZΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΛH, HN τῶν ἀπὸ ΞH, HO ὑπερέχει τοῖς ΣPX, TΦY γνώμοσι. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ HΔ τῷ MΠ, τὸ δὲ EI τῷ MΘ, οἱ ΣPX, TΦY γνώμονες ἴσοι εἰσὶ τοῖς ΛM καὶ τῷ ΔB. τὸ δὲ ΛM τῷ ΛΔ ἴσον, καὶ τὰ ΔΔ, ΔB ἴσα ἐστὶ τοῖς δὶς

* Vide aliam hujus rei demonstrationem ad VI. *Pappi* Lemma.

δὶς ὑπὸ ΛΞΝ, τουτέστι ὑπὸ ΛΟΝ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΛΗ, ΗΝ, τουτέστι τὰ ΑΖ, ΖΝ, τῶν ἀπὸ ΞΗ, ΗΟ, τουτέστι τῶν ΚΖ, ΖΔ, ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ ΛΞΝ, ἤτοι τοῖς ΛΔ, ΔΒ ὀρθογωνίοις.

& rectangula ΛΔ, ΔΒ simul sunt dupla contenti sub ΛΞΝ, hoc est sub ΛΟΝ. ergo quadrata ex ΛΗ, ΗΝ, hoc est ΑΖ, ΖΝ, superant quadrata ex ΞΗ, ΗΟ, hoc est ΚΖ, ΖΔ, duplo rectanguli ΛΞΝ, hoc est rectangulis ΛΔ, ΔΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

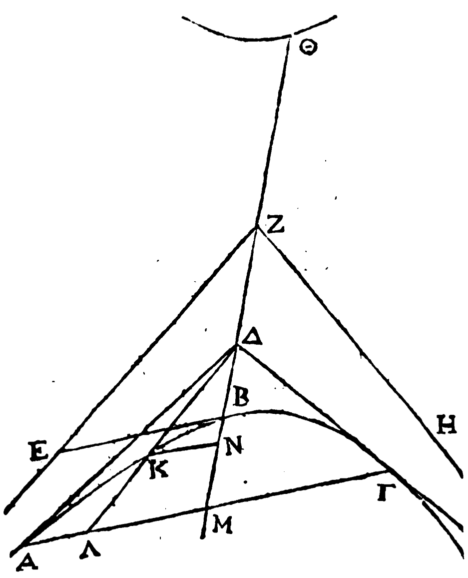
Ἐὰν ὑπερβολῆς δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἀφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων, τέμνουσα τήν τε τομὴν καὶ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν· ἡ μεταξὺ τῆς συμπτώσεως καὶ τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

Prop. XXX. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ hyperbolam contingentes sibi ipsis occurrant, & per tactus recta producatur; per occursum vero ducatur recta uni asymptoton parallela, & sectionem & rectam conjungentem tactus secans: quæ interjicitur inter occursum & rectam tactus conjungentem à sectione bifariam dividetur.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ ἐφαπτόμεναι μὲν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΖΕ ἤχθω ἡ ΔΚΛ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΛ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΖΔΒΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ κείσθω τῇ ΒΖ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ διὰ τῶν Β, Κ σημείων παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθωσαν αἱ ΒΕ, ΚΝ· τεταγμένως ἄρα κατηγμέναι εἰσί. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΖΕΒ τρίγωνον τῷ ΔΚΝ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλὰ ὡς ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΘΝΒ τῷ ἀπὸ ΔΝ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΖΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΖΒ, διότι ἡ μὲν ΑΔ ἐφάπτεται, ἡ δὲ ΑΜ κατῆκται· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΘΝΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΖΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΝ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΝΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΝ· καὶ τὸ ὑπὸ ΜΖΔ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΝ· * ἡ ἄρα ΔΜ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ν, προσκειμένην ἔχουσα τὴν ΔΖ. καὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΚΝ, ΛΜ· ἴση ἄρα ἡ ΔΚ τῇ ΚΛ.



SIT hyperbola ΑΒΓ, quam contingant rectæ lineæ ΑΔ, ΔΓ; asymptoti vero sint ΕΖ, ΖΗ; & juncta ΑΓ, ducatur per Δ recta ΔΚΛ parallela ipsi ΖΕ: dico ΔΚ ipsi ΚΛ æqualem esse.

Jungatur enim ΖΔΒΜ & ex utraque parte producatur, ut sit ΖΘ æqualis ipsi ΒΖ; & per Β, Κ ducantur ΒΕ, ΚΝ parallelæ ipsi ΑΓ, quæ ordinatim applicatæ erunt. & quoniam triangulum ΖΕΒ simile est [per 4. 6.] triangulo ΔΚΝ; erit [per 22. 6.] ut quadratum ex ΔΝ ad quadratum ex ΝΚ ita quadratum ex ΒΖ ad quadratum ex ΒΕ. ut autem quadratum ex ΒΖ ad quadratum ex ΒΕ ita [ex 1. 2. huj.] est ΘΒ ad rectum latus: quare ut quadratum ex ΔΝ ad quadratum ex ΝΚ ita ΘΒ ad rectum latus. sed [per 21. 1. huj.] ut ΘΒ ad rectum latus ita rectangulum ΘΝΒ ad quadratum ex ΝΚ: ut igitur quadratum ex ΔΝ ad quadratum ex ΝΚ ita ΘΝΒ rectangulum ad quadratum ex ΝΚ: ergo [per 9. 5.] rectangulum ΘΝΒ quadrato ex ΔΝ est æquale. est autem [per 37. 1. huj.] rectangulum ΜΖΔ æquale quadrato ex ΖΒ, propterea quod recta ΑΔ sectionem contingit, & ΑΜ ordinatim est applicata: quare rectangulum ΘΝΒ una cum quadrato ex ΖΒ æquale est rectangulo ΜΖΔ una cum quadrato ex ΔΝ. sed [per 6. 2.] rectangulum ΘΝΒ una cum quadrato ex ΖΒ est æquale quadrato ex ΖΝ: ergo & rectangulum ΜΖΔ una cum quadrato ex ΔΝ æquale est quadrato ex ΖΝ: * & idcirco [per conv. 6. 2.] recta ΔΜ ad punctum Ν bifariam secatur, adjunctam habens ΔΖ. & parallelæ sunt ΚΝ, ΑΜ; recta igitur ΔΚ [per 2. 6.] ipsi ΚΛ est æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἀφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ,

Prop. XXXI. *Theor.*

Si duæ rectæ oppositas sectiones contingentes sibi ipsis occurrant, & per

* Hic locum habet Lemma septimum *Pappi*.

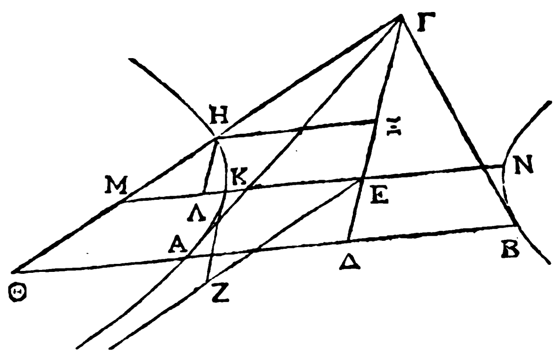
tactus

tactus recta producatur; per occursum vero ducatur recta asymptoto parallela, quæ sectionem & rectam tactus conjungentem secet: recta, inter occursum & eam quæ tactus conjungit interjecta, à sectione bifariam dividetur.

διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον, τέμνουσα τήν τε τομὴν καὶ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· ἡ μεταξὺ τῆς συμπτώσεως καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

SINT oppositæ sectiones A, B, & rectæ contingentes AΓ, ΓB, junctaque AB producatur; asymptotos vero sit ZE, & per Γ ducatur ΓHΘ ipsi ZE parallela: dico ΓH æqualem esse ipsi HΘ.

Jungatur enim ΓE, & ad Δ producatur: & per E, H ducantur NEKM, HΞ ipsi AB parallelæ, & per K, H ducantur KZ, HΛ parallelæ ΓΔ. quoniam igitur triangulum KZE simile est [per 4. 6.] triangulo MΛH, ut quadratum ex EK ad quadratum ex KZ ita [per 22. 6.] quadratum ex MΛ ad quadratum ex ΛH. sed ut quadratum ex EK ad quadratum ex KZ, ita demonstratum est [in antec.] NΛK rectangulum ad quadratum ex ΛH: ergo rectangulum NΛK quadrato ex MΛ est æquale. commune apponatur quadratum ex KE: rectangulum igitur NΛK una cum quadrato ex KE, hoc est [per 6. 2.] quadratum ex ΛE, hoc est quadratum ex HΞ, æquale est quadratis ex MΛ, KE. ut autem quadratum ex HΞ ad quadrata ex MΛ, KE ita quadratum ex ΞΓ ad quadrata ex ΛH, KZ, [propter similitudinem triangulorum ΓΞH, HΛM, ZKE.] ex quibus sequitur quadratum ex ΞΓ æquale esse quadratis ex HΛ, KZ. atqui quadratum ex HΛ æquale est quadrato ex ΞE; & [per 1.2.huj.] quadratum ex KZ æquale quadrato ex dimidio secundæ diametri, hoc est [per 38. 1. huj.] rectangulo ΓEΔ: quadratum igitur ex ΓΞ quadrato ex ΞE & rectangulo ΓEΔ simul est æquale: *ac propterea [per conversf.5.2.] recta ΓΔ in partes quidem æquales secatur ad punctum Ξ, in partes vero inæquales ad E. & ΔΘ parallela est ipsi HΞ; ergo [per 2.6.] ΓH ipsi HΘ æqualis erit.



ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΒ ἐκβεβλήσθω, ἀσύμπτωτος δὲ ἔστω ἡ ΖΕ, καὶ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΖΕ ἤχθω ἡ ΓΗΘ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΗΘ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ διὰ τῶν Ε, Η παρὰ τὴν ΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΝΕΚΜ, ΗΞ, διὰ δὲ τῶν Κ, Η παρὰ τὴν ΓΔ αἱ ΚΖ, ΗΛ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΖΕ τρίγωνον τῷ ΜΛΗ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ δέδεικται τὸ ὑπὸ ΝΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΛΚ τῷ ἀπὸ ΜΛ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΚΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΝΛΚ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΚΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΗΞ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΜΛ, ΚΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΗΞ πρὸς τὰ ἀπὸ ΜΛ, ΚΕ οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΓ πρὸς τὰ ἀπὸ ΛΗ, ΚΖ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΞΓ τοῖς ἀπὸ ΗΛ, ΚΖ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΗΛ τῷ ἀπὸ ΞΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΚΖ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΓΕΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΞ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ ΞΕ καὶ τῷ ὑπὸ ΓΕΔ· * ἡ ἄρα ΓΔ δίχα μὲν τέτμηται κατὰ τὸ Ξ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε. καὶ παράλληλός ἡ ΔΘ τῇ ΗΞ· ἴση ἄρα ἡ ΓΗ τῇ ΗΘ.

EUTOCIUS.

Potest etiam hoc theorema eodem modo demonstrari quo præcedens, cum duæ rectæ lineæ unam sectionum contingant. sed quoniam omnino idem est atque illud quod in una hyperbola demonstratum fuit, ipsa demonstratio ut superflua omissa est.

Δυνατόν ἐστι τοῦτο τὸ θεώρημα δεῖξαι ὁμοίως τῷ πρὸ αὐτοῦ, ποιοῦντας τὰς δύο εὐθείας μιᾶς τομῆς ἐφαπτομένας. ἀλλ᾽ ἐπειδὴ πάντη ταὐτόν ἐστι τῷ ἐπὶ τῆς μιᾶς ὑπερβολῆς προδεδειγμένῳ, αὕτη ἡ ἀπόδειξις ἀπελέχθη.

PROP. XXXII. *Theor.*

Si duæ rectæ hyperbolam contingentes sibi ipsis occurrant, & recta per tactus jungatur, & jungenti tactus recta parallela ducatur per contingentium occursum; perque punctum, quo bisecatur jungens tactus, ducatur

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ΄.

Ἐὰν ὑπερβολῆς δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ ἡ διὰ τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, διὰ δὲ τῆς διχοτομίας τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευ-

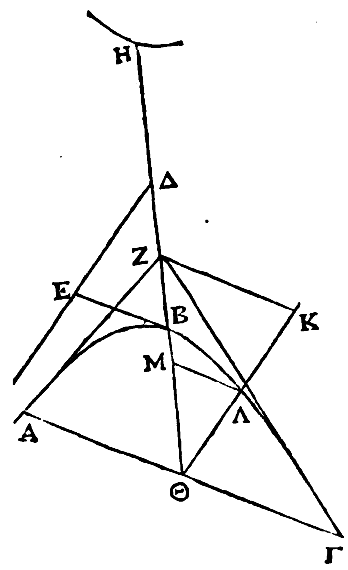
* Hic adhibetur Lemma *Pappi* octavum.

γνυούσης

γνυούσης ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων· ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου ἀπολαμβανομένη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

alia alteri aſymptotôn parallela: quæ inter dictum punctum & rectam parallelam interjicitur à ſectione bifariam dividetur.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἧς κέντρον τὸ Δ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΔΕ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ, καὶ ἡ ΖΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Η, Θ· φανερὸν δὴ ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ. ἤχθω δὴ διὰ μὲν τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΖΚ, διὰ δὲ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΔΕ ἡ ΘΛΚ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΘΛ.



Ηχθωσαν διὰ τῶν Β, Λ παρὰ τὴν ΑΓ αἱ ΒΕ, ΛΜ. ἔσται δὴ, ὡς προδέδεικται, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ οὕτως τό τε ἀπὸ ΘΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΛ, καὶ τὸ ὑπὸ ΗΜΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΛ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΜΒ τῷ ἀπὸ ΜΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΘΔΖ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΒ, διότι ἐφάπτεται ἡ ΑΖ καὶ κατῆκται ἡ ΑΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΜΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘΔΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΜΘ· * δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΖΘ κατὰ τὸ Μ προσκειμένην ἔχουσα τὴν ΔΖ. καί εἰσι παράλληλοι αἱ ΚΖ, ΛΜ· ἴση ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΛΘ.

SIT hyperbola ΑΒΓ, cujus centrum Δ, & aſymptotos ΔΕ; contingant autem ſectionem rectæ ΑΖ, ΖΓ, jungaturque ΓΑ, & ΖΔ ad Η, Θ producatur; erit [per 30. 2. huj.] ΑΘ æqualis ipſi ΘΓ. itaque per Ζ ducatur ΖΚ ipſi ΑΓ parallela, & per Θ recta ΘΛΚ parallela ipſi ΔΕ: dico ΚΛ ipſi ΘΛ æqualem eſſe.

Ducantur enim per Β, Λ rectæ ΒΕ, ΛΜ quæ parallelæ ſunt ipſi ΑΓ. jam ex iis, quæ [in 2bus præced.] demonſtrata ſunt, ut quadratum ex ΔΒ ad quadratum ex ΒΕ ita erit quadratum ex ΘΜ ad quadratum ex ΜΛ, & rectangulum ΗΜΒ ad quadratum ex ΜΛ: rectangulum igitur ΗΜΒ æquale eſt [per 9. 5.] quadrato ex ΜΘ. eſt autem [per 37. 1. huj.] & ΘΔΖ rectangulum quadrato ex ΔΒ æquale; propterea quod ΑΖ ſectionem contingit & ΑΘ ordinatim applicata eſt: ergo rectangulum ΗΜΒ una cum quadrato ex ΔΒ, hoc eſt [per 6.2.] quadratum ex ΔΜ, æquale eſt rectangulo ΘΔΖ una cum quadrato ex ΜΘ: & ideo [per converſ. 6.2.] recta ΖΘ bifariam ſecatur in puncto Μ, adjunctam habens ΔΖ. ſunt autem rectæ ΚΖ, ΛΜ parallelæ; æqualis igitur eſt [per 2.6.] ΚΛ ipſi ΛΘ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ΄.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, διὰ δὲ διχοτομίας τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων, συμπίπτουσα τῇ τομῇ καὶ τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως ἠγμένῃ παραλλήλῳ· ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου ὑπὸ τῆς τομῆς δίχα διαιρεθήσεται.

Prop. XXXIII. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppoſitas ſectiones contingentes ſibi ipſis occurrant, & recta jungens tactus producatur; per occurſum vero contingentium ducatur recta tactus conjungenti parallela, & per punctum quod conjungentem tactus bifariam ſecat ducatur recta alteri aſymptotôn parallela, conveniens & cum ſectione & cum recta parallela per occurſum ductâ: quæ inter biſectionem jungentis tactus & dictam parallelam interjicitur à ſectione bifariam dividetur.

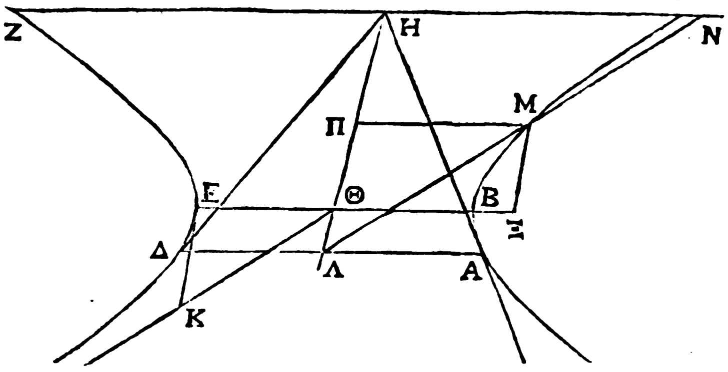
ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΗ, ΗΔ, κέντρον δὲ τὸ Θ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΚΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΗ καὶ ἐκβεβλήσθω, ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ ΑΛΔ· φανερὸν δὴ ὅτι δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Λ. ἤχθωσαν δὲ διὰ τῶν Η, Θ παρὰ τὴν ΑΔ αἱ ΒΘΕ, ΓΗΖ, παρὰ δὲ τὴν ΘΚ διὰ τοῦ Λ ἡ ΛΜΝ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΜΝ.

SINT oppoſitæ ſectiones ΑΒΓ, ΔΕΖ, & rectæ contingentes ΑΗ, ΗΔ, centrum autem ſit Θ, & aſymptotos ΚΘ; ductaque ΘΗ producatur, & jungatur ΑΛΔ: itaque ΑΔ [per 30.2.huj.] bifariam ſecabitur in Λ. ducantur per Η, Θ rectæ ΒΘΕ, ΓΗΖ ipſi ΑΔ parallelæ; & per Λ ducatur ΛΜΝ parallela ipſi ΘΚ: dico ΛΜ æqualem eſſe ipſi ΜΝ.

* Juxta *Pappi* Lemma nonum.

Applicentur

Ducantur ordinatim à punctis Ε, Μ rectæ ΕΚ, ΜΞ parallelæ ipsi ΗΘ; & per Μ ducatur ΜΠ parallela ipsi ΑΔ. quoniam igitur, ex iis quæ ante demonstrata sunt, ut quadratum ex ΘΕ ad quadratum ex ΕΚ ita est rectangulum ΒΞΕ ad quadratum ex ΞΜ; erit [per 12. 5.] ut quadratum ex ΘΕ ad quadratum ex ΕΚ ita rectangulum ΒΞΕ una cum quadrato ex ΘΕ, hoc est [per 6.2.] quadratum ex ΘΞ, ad quadrata ex ΚΕ, ΞΜ. quadratum autem ex ΚΕ ostensum est [ad 38. 1. huj.] æquale rectangulo ΗΘΛ, & quadratum ex ΞΜ æquale est quadrato ex ΘΠ: ut igitur quadratum ex ΘΕ ad quadratum ex ΒΚ ita quadratum ex ΘΞ, hoc est quadratum ex ΜΠ, ad rectangulum ΗΘΛ una cum quadrato ex ΘΠ. sed ut quadratum ex ΘΕ ad quadratum ex ΕΚ ita est [per 4. & 22. 6.] quadratum ex ΜΠ ad quadratum ex ΠΛ: quare ut quadratum ex ΜΠ ad quadratum ex ΠΛ ita quadratum ex ΜΠ ad rectangulum ΗΘΛ una cum quadrato ex ΘΠ; & propterea quadratum ex ΛΠ rectangulo ΗΘΛ una cum quadrato ex ΘΠ æquale erit: ergo [per conv. 5.2.] recta ΛΗ in partes æquales secatur ad Π & in partes inæquales ad Θ. & sunt quidem rectæ ΜΠ, ΗΝ parallelæ; est igitur ΛΜ [per 2,6.] ipsi ΜΝ æqualis.



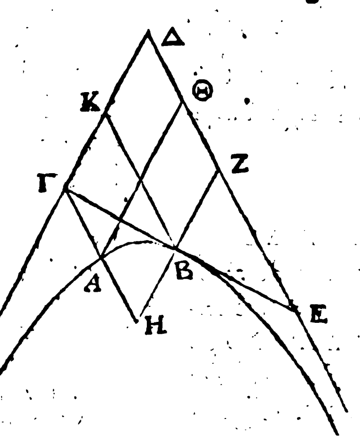
Κατήχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ε, Μ παρὰ τὴν ΗΘ αἱ ΕΚ, ΜΞ, διὰ δὲ τοῦ Μ παρὰ τὴν ΑΔ ἡ ΜΠ. ἐπεὶ οὖν, διὰ τὰ δεδειγμένα, ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΞΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΜ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΞΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΘΞ, πρὸς τὰ ἀπὸ ΚΕ, ΞΜ. τὸ δὲ ἀπὸ ΚΕ ἴσον δέδεικται τῷ ὑπὸ ΗΘΛ, καὶ τὸ ἀπὸ ΞΜ τῷ ἀπὸ ΘΠ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΞ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΜΠ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΛ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΛ οὕτω τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΠ τῷ ὑπὸ ΗΘΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ· εὐθεῖα ἄρα ἡ ΛΗ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Π, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Θ. καί εἰσι παράλληλοι αἱ ΜΠ, ΗΝ· ἴση ἄρα ἡ ΛΜ τῇ ΜΝ.

Prop. XXXIV. *Theor.*

Si in una asymptotôn hyperbolæ aliquod punctum sumatur, ab eoque recta ducta sectionem contingat, & per tactum ducatur asymptoto parallela: quæ per dictum punctum transit, alteri asymptotôn parallela, à sectione bifariam dividetur.

SIT hyperbola ΑΒ, asymptoti vero ΓΔ, ΔΕ; &, sumpto in recta ΓΔ quovis puncto Γ, per ipsum ducatur ΓΒΕ sectionem contingens; & per Β quidem ducatur ΖΒΗ parallela ipsi ΓΔ, per Γ autem ΓΑΗ quæ ipsi ΔΕ æquidistet: dico rectam ΓΑ æqualem esse ipsi ΑΗ.

Ducatur enim per Α recta ΑΘ parallela ipsi ΓΔ; & per Β recta ΒΚ parallela ipsi ΔΕ. itaque quoniam [per 3. 2. huj.] ΓΒ æqualis est ΒΕ; erit [per 2. 6.] & ΓΚ ipsi ΚΔ, & ΔΖ ipsi ΖΒ æqualis. & cum rectangulum ΚΒΖ æquale sit [per 12. 2. huj.] rectangulo ΓΑΘ, & recta ΒΖ æqualis ipsi ΔΚ sive ΓΚ, & ΑΘ ipsi ΔΓ; rectangulum ΔΓΑ æquale erit rectangulo ΚΓΗ:



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ΄.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ εὐθεῖα ἐφάπτηται τῆς τομῆς, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ἀσυμπτώτῳ· ἡ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου ἀγομένη παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων ὑπὸ τῆς τομῆς εἰς ἴσα διαιρεθήσεται.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔ, ΔΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΒΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β παρὰ τὴν ΓΔ ἤχθω ἡ ΖΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΔΕ ἡ ΓΑΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ.

Ἤχθω γὰρ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΘ, διὰ δὲ τοῦ Β τῇ ΔΕ ἡ ΒΚ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΔ, καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΚΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΑΘ, ἴση δὲ ἡ ΒΖ τῇ ΔΚ, τουτέστι τῇ ΓΚ, καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΓΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΓΗ·

ἐστιν

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΚ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΑΓ. διπλῆ δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΚ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΗ τῆς ΑΓ· ἴση ἄρα ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ.

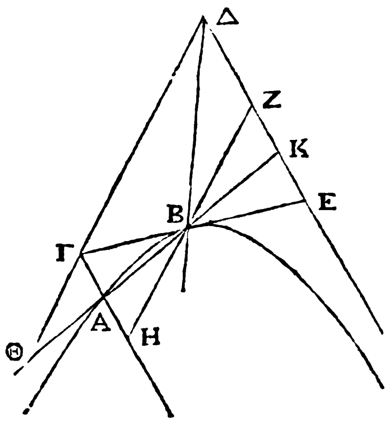
ut igitur ΔΓ ad ΓΚ ita [per 16.6.] ΓΗ ad ΑΓ. est autem ΔΓ ipsius ΓΚ dupla: ergo & ΓΗ dupla ΑΓ; idcircoque recta ΓΑ ipsi ΑΗ est æqualis.

EUTOCIUS.

Ἄλλως.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΔ, ΔΕ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΒΕ, καὶ παράλληλοι αἱ ΓΑΗ, ΖΒΗ· λέγω ὅτι ἴση ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Θ, Κ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΒ τῇ ΒΑ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΒ τῇ ΑΘ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ.



Aliter.

Sit hyperbola ΑΒ, cujus asymptoti ΓΔ, ΔΕ, & contingens ΓΒΕ; parallelæ autem ΓΑΗ, ΖΒΗ: dico ΓΑ ipsi ΑΗ æqualem esse.

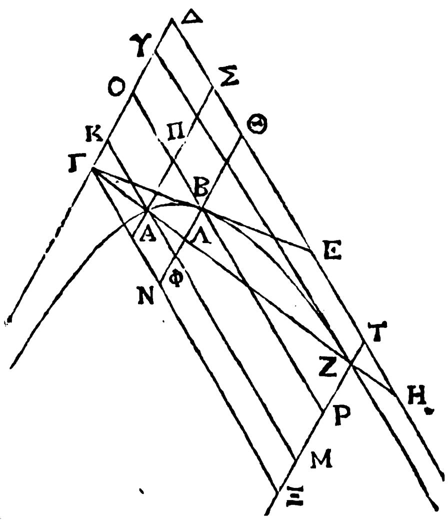
Jungatur enim ΑΒ, & ad Θ, Κ producatur. itaque quoniam ΓΒ [per 3.2.huj.] æqualis est ipsi ΒΕ; erit & ΚΒ ipsi ΒΑ æqualis. sed & ΚΒ [per 8. 2. huj.] est æqualis ΑΘ: ergo & ΓΑ ipsi ΑΗ æqualis erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου εὐθεῖά τις ἀχθῇ τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα· ἔσται ὡς ὅλη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην, οὕτως τὰ τμήματα τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης εὐθείας πρὸς ἄλληλα.

ΕΣΤΩ γὰρ ἡ ΑΒ ὑπερβολή, καὶ αἱ ΓΔ, ΔΕ ἀσύμπτωτοι, καὶ ΓΒΕ ἐφαπτομένη, καὶ ἡ ΘΒ παράλληλος τῇ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ Γ διήχθω τις εὐθεῖα ΓΑΛΖΗ τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ τὰ Α, Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΖΛ πρὸς ΛΑ.

Ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Γ, Α, Β, Ζ παρὰ τὴν ΔΕ αἱ ΓΝΞ, ΚΑΦΜ, ΟΠΒΡ, ΥΖ, διὰ δὲ τῶν Α, Ζ παρὰ τὴν ΓΔ αἱ ΑΠΣ, ΤΖΡΜΞ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΖΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΑ τῇ ΤΗ. ἡ δὲ ΚΑ τῇ ΔΣ ἴση· καὶ ἡ ΤΗ ἄρα τῇ ΔΣ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΔΥ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΔΥ, ἴση καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΓΥ· ὡς ἄρα ἡ ΔΚ πρὸς ΚΓ οὕτως ἡ ΥΓ πρὸς ΓΚ. ὡς δὲ ἡ ΥΓ πρὸς ΓΚ οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ὡς δὲ ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ, ὡς δὲ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ οὕτως τὸ ΜΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΔΑ, ὡς δὲ ἡ ΔΚ πρὸς ΚΓ οὕτως τὸ ΘΚ πρὸς τὸ ΚΝ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΔ πρὸς τὸ ΔΑ οὕτως τὸ ΘΚ πρὸς τὸ ΚΝ. ἴσον δὲ τὸ ΑΔ τῷ ΔΒ παραλληλογράμμῳ, τουτέστι τῷ ΟΝ· (ἴση γὰρ ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ καὶ ἡ ΔΟ τῇ ΟΓ) ὡς ἄρα τὸ ΜΔ πρὸς τὸ ΟΝ οὕτως τὸ ΘΚ πρὸς τὸ ΚΝ, καὶ λοιπὸν τὸ



PROP. XXXV. *Theor.*

Iisdem positis, si à sumpto puncto recta ducatur, sectionem in duobus punctis secans; erit ut tota ad eam quæ extra sumitur, ita inter sese portiones illius quæ intra sectionem continetur.

SIT ΑΒ hyperbola, cujus asymptoti ΓΔ, ΔΕ; contingensque ΓΒΕ, & ΘΒ parallela ipsi ΓΔ; ducatur autem per Γ recta linea ΓΑΛΖΗ, quæ sectionem in punctis Α, Ζ secet: dico ut ΖΓ ad ΓΑ ita esse ΖΛ ad ΛΑ.

Ducantur enim per puncta Γ, Α, Β, Ζ rectæ ΓΝΞ, ΚΑΦΜ, ΟΠΒΡ, ΥΖ ipsi ΔΕ parallelæ, & per Α, Ζ ducantur ΑΠΣ, ΤΖΡΜΞ parallelæ ipsi ΓΔ. quoniam igitur [per 8. 2. huj.] æqualis est ΑΓ ipsi ΖΗ, erit & ΚΑ [per 26.1.] æqualis ΤΗ. sed ΚΑ est æqualis ΔΣ: ergo & ΤΗ ipsi ΔΣ est æqualis; & pari modo ΓΚ ipsi ΔΥ. cumque ΓΚ æqualis est ipsi ΔΥ, & ΔΚ ipsi ΓΥ æqualis erit: ut igitur ΔΚ ad ΚΓ ita ΥΓ ad ΓΚ. sed [per 2. 6.] ut ΥΓ ad ΓΚ ita ΖΓ ad ΓΑ, & ut ΖΓ ad ΓΑ ita ΜΚ ad ΚΑ, & ut ΜΚ ad ΚΑ ita [per 1. 6.] ΜΔ parallelogrammum ad parallelogrammum ΔΑ, & ut ΔΚ ad ΚΓ ita parallelogrammum ΘΚ ad parallelogrammum ΚΝ: ergo [per 11.5.] ut parallelogrammum ΜΔ ad ΔΑ ita ΘΚ ad ipsum ΚΝ. atqui [per 12.2.huj.] parallelogrammum ΑΔ est æquale parallelogrammo ΔΒ, hoc est [per 36.1.] ipsi ΟΝ: (est enim [per 3.2.huj.] recta ΓΒ æqualis ΒΕ, & [per 2. 6.] ΔΟ ipsi ΟΓ) quare ut parallelogrammum ΜΔ ad ΟΝ ita ΘΚ ad ΚΝ; reliquum

liquum igitur M Θ ad reliquum B K est [per 19. 5.] ut totum Δ M ad totum O N. &c. quoniam parallelogrammum K Σ æquale est Θ O, commune auferatur Δ Π; eritque reliquum K Π reliquo Π Θ æquale. commune apponatur A B: totum igitur K B æquale est ipsi A Θ, ideoque ut M Δ ad Δ A ita *M Θ ad Θ A. sed ut parallelogrammum M Δ ad parallelogrammum Δ A ita [per 1.6.] recta M K ad rectam K A, hoc est Z Γ ad Γ A; ut autem parallelogrammum M Θ ad parallelogrammum Θ A ita recta M Φ ad rectam Φ A, hoc est [per 2.6.] Z Λ ad Λ A: ergo ut Z Γ ad Γ A ita Z Λ ad Λ A.

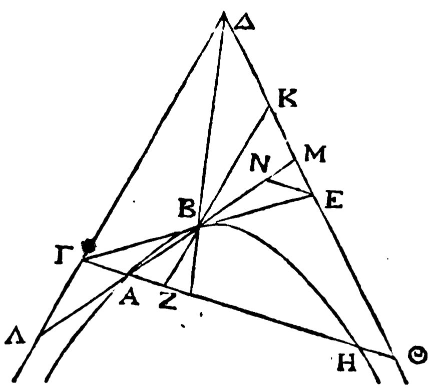
M Θ πρὸς λοιπὸν τὸ B K ἐστὶν ὡς ὅλον τὸ Δ M πρὸς ὅλον τὸ O N. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ K Σ τῷ Θ O, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ Δ Π· λοιπὸν ἄρα τὸ K Π ἴσον ἐστὶ λοιπῷ τῷ Π Θ. κοινὸν προσκείσθω τὸ A B· ὅλον ἄρα τὸ K B ἴσον ἐστὶ τῷ A Θ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ M Δ πρὸς τὸ Δ A οὕτως τὸ M Θ πρὸς τὸ Θ A. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ M Δ πρὸς τὸ Δ A οὕτως ἡ M K πρὸς τὴν K A, τουτέστιν ἡ Z Γ πρὸς Γ A, ὡς δὲ τὸ M Θ πρὸς τὸ Θ A οὕτως ἡ M Φ πρὸς τὴν Φ A, τουτέστιν ἡ Z Λ πρὸς τὴν Λ A· καὶ ὡς ἄρα ἡ Z Γ πρὸς τὴν Γ A οὕτως ἡ Z Λ πρὸς τὴν Λ A.

EUTOCIUS.

Aliter.

Sit hyperbola A B, cujus asymptoti Γ Δ, Δ E, & à puncto Γ recta quidem Γ B E ducta sectionem contingat, Γ A H Θ vero in duobus punctis A, H secet, & per B ducatur Z B K ipsi Γ Δ parallela: demonstrare oportet ut H Γ ad Γ A ita esse H Z ad Z A.

Jungatur enim A B, atque ad Λ, M producatur, & à puncto E ducatur E N parallela ipsi Γ Θ. quoniam igitur [per 3. 2. huj.] Γ B æqualis est ipsi B E, erit Γ A ipsi E N æqualis, & A B ipsi B N; unde N M differentia est ipsarum A B, B M. sed B M [per 8. 2. huj.] est æqualis ipsi Λ A; erit igitur N M differentia ipsarum Λ A, A B. & quoniam in triangulo A M Θ ducta est E N ipsi A Θ parallela, ut A M ad N M ita erit A Θ ad N E. & est N E æqualis ipsi A Γ: ut igitur Θ A ad A Γ ita A M ad differentiam ipsarum A B, B M, hoc est Λ B ad differentiam ipsarum Λ A, A B. ut autem Θ A ad A Γ ita H Γ ad Γ A: (est enim Γ A æqualis ipsi Θ H) ergo ut H Γ ad Γ A ita Λ B ad differentiam ipsarum Λ A, A B, & ita Γ Z ad excessum ipsarum Γ A, A Z. quoniam autem quæstio est an sit ut H Γ ad Γ A ita H Z ad Z A, demonstrare oportet ut tota H Γ ad totam Γ A ita esse ablatam H Z ad ablatam A Z, & reliquam Γ Z ad reliquam, videlicet ad excessum ipsarum Γ A, A Z. demonstratum autem est H Γ esse ad Γ A ita ut Γ Z ad excessum ipsarum Γ A, A Z. [propter similitudinem triangulorum Γ A Λ, Z A B.]



Αλλως.

Εστω ὑπερβολὴ ἡ A B, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ Γ Δ, Δ E, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἡ μὲν Γ B E ἐφαπτέσθω, ἡ δὲ Γ A H Θ τεμνέτω τὴν τομὴν κατὰ τὰ A, H σημεῖα, καὶ διὰ τοῦ B παρὰ τὴν Γ Δ ἤχθω ἡ Z B K· δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ H Γ πρὸς Γ A οὕτως ἡ H Z πρὸς Z A.

Επεζεύχθω ἡ A B καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Λ, M, καὶ ἀπὸ τοῦ E παρὰ τὴν Γ Θ ἤχθω ἡ E N. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ Γ B τῇ B E, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ Γ A τῇ E N, ἡ δὲ A B τῇ B N· ἡ ἄρα N M ὑπεροχή ἐστι τῶν A B, B M. ἴση δὲ ἡ B M τῇ Λ A· ἡ N M ἄρα ὑπεροχή ἐστι τῶν Λ A, A B. καὶ ἐπεὶ ἐπὶ τριγώνου τοῦ A M Θ παρὰ τὴν A Θ ἐστὶν ἡ E N, ἔστιν ὡς ἡ A M πρὸς N M οὕτως ἡ A Θ πρὸς N E. ἴση δὲ ἡ N E τῇ A Γ· ὡς ἄρα ἡ Θ A πρὸς A Γ οὕτως ἡ A M πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν A B, B M, τουτέστιν ἡ Λ B πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν Λ A, A B. ὡς δὲ ἡ Θ A πρὸς A Γ οὕτως ἡ H Γ πρὸς Γ A· (ἴση γὰρ ἡ Γ A τῇ Θ H) καὶ ὡς ἄρα ἡ H Γ πρὸς Γ A οὕτως ἡ Λ B πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν Λ A, A B, καὶ ἡ Γ Z πρὸς τὴν τῶν Γ A, A Z ὑπεροχήν. καὶ ἐπεὶ ζητῶ εἰ ἐστὶν ὡς ἡ H Γ πρὸς Γ A οὕτως ἡ H Z πρὸς Z A, δεικτέον ὅτι ὡς ὅλη ἡ H Γ πρὸς ὅλην τὴν Γ A οὕτως ἀφαιρεθεῖσα ἡ H Z πρὸς ἀφαιρεθεῖσαν τὴν A Z, καὶ λοιπὴ ἡ Γ Z πρὸς λοιπὴν τὴν τῶν Γ A, A Z ὑπεροχήν. δέδεικται δὲ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ H Γ πρὸς Γ A οὕτως ἡ Γ Z πρὸς τὴν τῶν Γ A, A Z ὑπεροχήν.

PROP. XXXVI. *Theor.*

Iisdem positis, si recta à puncto ducta neque sectionem in duobus punctis secet, neque parallela sit asymptoto; cum opposita quidem sectione conveniet: erit autem ut tota ad rectam quæ inter sectionem & parallelam per tactum ductam interjicitur, ita ea quæ est inter oppositam se-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛʹ.

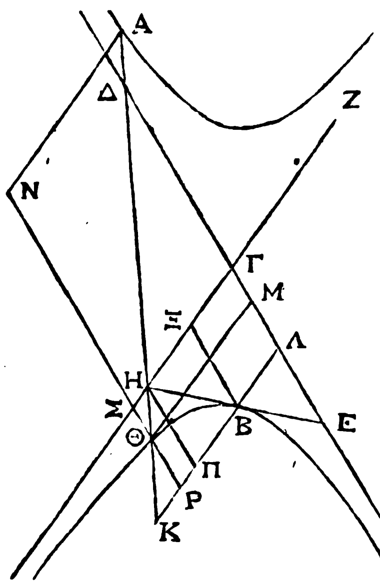
Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου διαγομένη εὐθεῖα μήτε τὴν τομὴν τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, μήτε παράλληλος ᾖ τῇ ἀσυμπτώτῳ, συμπεσεῖται μὲν τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ· ἔσται δὲ ὡς ὅλη πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς διὰ τῆς ἁφῆς παραλλήλου, οὕτως ἡ μεταξὺ τῆς ἀντικειμένης

* Superius enim demonstraverat esse M Δ ad O N, hoc est ad B Δ, hoc est ad Δ A, sicut M Θ ad K B, hoc est ad A Θ.

καὶ

καὶ τῆς ἀσυμπτώτου πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἀσυμπτώτου καὶ τῆς ἑτέρας τομῆς.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΔΕ, ΖΗ, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΗ εἰλήφθω σημεῖον τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἤχθω ἡ μὲν ΗΒΕ ἐφαπτομένη, ἡ δὲ ΗΘ μήτε παράλληλος οὖσα τῇ ΓΕ, μήτε τὴν τομὴν τέμνουσα κατὰ δύο σημεῖα· ὅτι μὲν οὖν ἡ ΘΗ ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τε ΓΔ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ τῇ Α τομῇ, δέδεικται. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Α, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β τῇ ΓΗ παράλληλος ἡ ΚΒΛ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΘ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ.



Ηχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Θ σημείων παρὰ τὴν ΓΗ αἱ ΘΜ, ΑΝ, ἀπὸ δὲ τῶν Β, Η, Θ παρὰ τὴν ΔΕ αἱ ΒΞ, ΗΠ, ΡΘΣΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΗΘ, ἐστὶν ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΗ· καὶ ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ οὕτως ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, ὡς δὲ ἡ ΔΘ πρὸς ΘΗ οὕτως ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ οὕτως ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ οὕτως τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ οὕτως τὸ ΓΡ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΡΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ οὕτω τὸ ΓΡ πρὸς τὸ ΡΗ. καὶ ὡς ἓν πρὸς ἓν οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα· ὡς ἄρα τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ οὕτως ὅλον τὸ ΝΛ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ μετὰ τοῦ ΡΗ παραλληλογράμμου. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΒΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΛΒ τῇ ΒΠ καὶ τὸ ΛΞ τῷ ΒΗ. τὸ δὲ ΛΞ ἴσον τῷ ΓΘ· καὶ τὸ ΒΗ ἄρα ἴσον τῷ ΓΘ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ οὕτως ὅλον τὸ ΛΝ πρὸς τὸ ΒΗ μετὰ τοῦ ΗΡ, τουτέστι πρὸς τὸ ΡΞ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΡΞ τῷ ΛΘ, ἐπεὶ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΒΓ καὶ τὸ ΜΒ τῷ ΞΘ ἴσον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΛΘ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ οὕτως ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, τουτέστιν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΛΘ οὕτως ἡ ΝΡ πρὸς τὴν ΡΘ, τουτέστιν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς ΚΘ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΘ.

ctionem & asymptoton ad eam quæ inter asymptoton & alteram sectionem.

Sint oppositæ sectiones A, B, quarum centrum Γ, & asymptoti ΔE, ZH; & in recta HΓ sumatur punctum H, à quo ducatur HBE quidem sectionem contingens, HΘ vero neque parallela ipsi ΓE, neque sectionem in duobus punctis secans. jam constat ΘH productam convenire cum recta ΓΔ; & propterea cum sectione A, ut [ad 11. 2. huj.] demonstratum est. conveniat igitur in puncto A; & per B ducatur KBΛ parallela ipsi ΓH: dico ut AK ad KΘ ita esse AH ad HΘ.

Ducantur enim à punctis A, Θ rectæ ΘM, AN, quæ ipsi ΓH æquidistent; & à punctis B, H, Θ ducantur BΞ, HΠ; PΘΣN, quæ parallelæ sint ipsi ΔE. itaque quoniam [per 16. 2. huj.] AΔ æqualis est ipsi HΘ, erit ut AH ad HΘ ita ΔΘ ad ΘH; atque ut AH ad HΘ ita [per 2. 6.] NΣ ad ΣΘ, ut vero ΔΘ ad ΘH ita ΓΣ ad ΣH: igitur ut NΣ ad ΣΘ. ita ΓΣ ad ΣH. sed [per 1. 6.] ut NΣ ad ΣΘ ita parallelogrammum NΓ ad parallelogrammum ΓΘ; & ut ΓΣ ad ΣH ita ΓP ad PH: ergo ut NΓ ad ΓΘ ita ΓP ad ipsum PH. & [per 12. 5.] ut unum ad unum ita omnia ad omnia; quare ut NΓ ad ΓΘ ita totum NΛ ad ΓΘ & PH simul. & quoniam [per 3. 2. huj.] EB est æqualis ipsi BH; erit & ΛB ipsi BΠ æqualis, & [per 36. 1.] parallelogrammum ΛΞ æquale ipsi BH. sed [per 12. 2. huj.] ΛΞ, ΓΘ sunt æqualia; ergo & BH ipsi ΓΘ parallelogrammo: ut igitur NΓ ad ΓΘ ita totum ΛN ad parallelogramma BH & HP simul, hoc est ad PΞ. sed PΞ est æquale ipsi ΛΘ, quoniam & ΓΘ ipsi BΓ atque MB ipsi ΞΘ: ergo ut NΓ ad ΓΘ ita NΛ ad ΛΘ parallelogrammum. ut autem NΓ ad ΓΘ parallelogrammum ita recta NΣ ad ΣΘ rectam, hoc est AH ad HΘ; & ut NΛ ad ΛΘ ita recta NP ad rectam PΘ, hoc est AK ad KΘ; quare ut AK ad KΘ ita AH ad HΘ.

EUTOCIUS.

Αλλως.

Εστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Λ, καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΒΚ, ΔΓ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΒΑΔ, καὶ διηγμένη ἡ ΛΚΔΗΖ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΖ· δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΛΖ πρὸς ΖΗ οὕτως ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ.

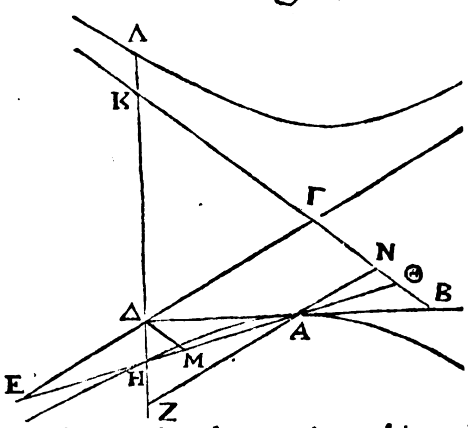
Επεζεύχθω ἡ ΑΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Ε, Θ· φανερὸν οὖν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΑ τῇ ΕΗ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΑΕ. ἤχθω διὰ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΘΓ ἡ ΔΜ, ἴση ἄρα ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ καὶ ἡ ΘΑ τῇ ΑΜ· ἡ ἄρα ΜΗ

Aliter.

Sint oppositæ sectiones A, Λ, quarum asymptoti BK, ΔΓ & contingens BAΔ; ducatur autem ΛKΔHZ, & sit AZ ipsi ΓΔ parallela: demonstrandum est ut ΛZ ad ZH ita esse ΛΔ ad ΔH.

Jungatur AH & ad E, Θ protrahatur: & erit [per 8. 2. huj.] AΘ æqualis EH, & ΘH ipsi AE. ducatur per Δ recta ΔM parallela ipsi ΓΘ; ergo [per 3. 2. huj.] BA ipsi AΔ erit æqualis, & ΘA ipsi AM: quare MH est differentia

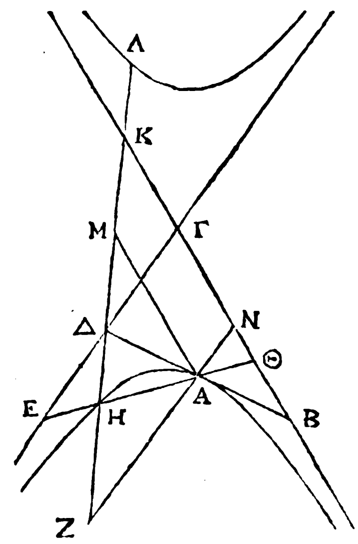
ferentia ipsarum ΘΑ, ΑΗ, sive ipsarum ΑΗ, ΗΕ. & quoniam ΒΚ parallela est ipsi ΔΜ, erit ut ΘΗ ad ΗΜ ita ΚΗ ad ΗΔ. atqui est ΑΕ æqualis ipsi ΘΗ & [per 16. 2. huj.] ΛΔ ipsi ΚΗ: ergo ut ΛΔ ad ΔΗ ita ΑΕ ad ΗΜ, hoc est ad differentiam ipsarum linearum ΑΗ, ΗΕ. sed ut ΑΕ ad differentiam ipsarum ΑΗ, ΗΕ ita ΔΖ ad differentiam ipsarum ΔΗ, ΗΖ [propter similitudinem triangulorum ΔΗΕ, ΖΗΑ:] ergo ut ΛΔ ad ΔΗ ita ΔΖ ad differentiam ipsarum ΔΗ, ΗΖ. & ut unum ad unum ita omnia ad omnia: ut igitur ΛΔ ad ΔΗ ita tota ΛΖ ad ΔΗ una cum differentia ipsarum ΔΗ, ΗΖ, hoc est ad ΗΖ.



ὑπεροχή ἐστι τῶν ΘΑ, ΑΗ, τουτέστι τῶν ΑΗ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΚ τῇ ΔΜ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΜ οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς ΗΔ· καί ἐστιν ἴση ἡ ΑΕ τῇ ΘΗ ἡ δὲ ΛΔ τῇ ΚΗ· ὡς ἄρα ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΗΜ, τουτέστι πρὸς τὴν τῶν ΑΗ, ΗΕ ὑπεροχήν. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν τῶν ΑΗ, ΗΕ ὑπεροχὴν οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν τῶν ΔΗ, ΗΖ ὑπεροχήν· προδέδεικται γάρ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν τῶν ΔΗ, ΗΖ ὑπεροχήν. καὶ ὡς ἓν πρὸς ἓν οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα· ὡς ἄρα ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ὅλη ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΔΗ μετὰ τῆς τῶν ΔΗ, ΗΖ ὑπεροχῆς, τουτέστι πρὸς τὴν ΗΖ.

Aliter.

Sint eadem quæ supra, & per Α ducatur ΑΜ ipsi ΒΓ parallela. quoniam igitur ΑΒ est æqualis ipsi ΑΔ, erit & ΚΜ æqualis ipsi ΜΔ. & cum parallelæ sint ΘΚ, ΑΜ; erit ut ΗΜ ad ΜΚ ita ΗΑ ad ΑΘ, hoc est ΑΗ ad ΗΕ. ut autem ΑΗ ad ΗΕ ita ΖΗ ad ΗΔ, & ut ΗΜ ad ΜΚ ita dupla ipsius ΗΜ ad duplam ΜΚ; atque est ΛΗ dupla ipsius ΗΜ, (est enim [per 16. 2. huj.] ΛΚ ipsi ΔΗ æqualis & ΚΜ ipsi ΜΔ) & ΔΚ dupla ipsius ΚΜ: ut igitur ΛΗ ad ΗΖ ita ΚΔ ad ΔΗ; quare componendo ut ΛΖ ad ΖΗ ita ΚΗ ad ΗΔ, hoc est ΛΔ ad ΔΗ.



Ἄλλως.

Ἔστω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ διὰ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΓ ἤχθω ἡ ΑΜ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΜΔ. καὶ ἐπεὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΘΚ, ΑΜ, ἔστιν ὡς ἡ ΗΜ πρὸς ΜΚ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΘ, τουτέστιν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΕ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ, ὡς δὲ ἡ ΗΜ πρὸς ΜΚ οὕτως ἡ διπλασία τῆς ΗΜ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΜΚ, καί ἐστι διπλασία τῆς ΗΜ ἡ ΛΗ (ἴση γὰρ ἡ ΛΚ τῇ ΔΗ καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΜΔ) καὶ τῆς ΚΜ διπλασία ἡ ΔΚ· ὡς ἄρα ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΔΗ, καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΛΖ πρὸς ΖΗ οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς ΗΔ, τουτέστιν ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ.

PROP. XXXVII. *Theor.*

Si duæ rectæ coni sectionem vel circuli circumferentiam vel sectiones oppositas contingentes sibi ipsis occurrant, & per tactus recta jungatur; ab occursu vero contingentium ducatur recta sectionem in duobus punctis secans: erit ut tota ad eam quæ extra sumitur, ita segmenta quæ à recta jungente tactus abscinduntur inter sese.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας ἢ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ ἐπὶ μὲν τὰς ἁφὰς αὐτῶν ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων διαχθῇ τις τέμνουσα τὴν γραμμὴν κατὰ δύο σημεῖα· ἔσται ὡς ὅλη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης πρὸς ἄλληλα.

SIT coni sectio ΑΒ, contingentesque ΑΓ, ΓΒ; &, junctâ ΑΒ, ducatur ΓΔΕΖ: dico ut ΖΓ ad ΓΔ ita esse ΖΕ ad ΕΔ.

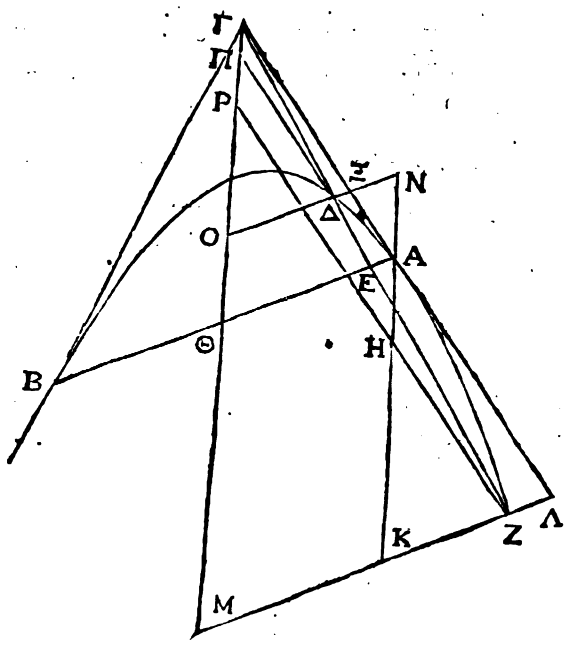
Ducantur enim per Γ, Α sectionis diametri ΓΘ, ΑΚ, & per Ζ, Δ ducantur ΔΠ, ΖΡ; ΛΖΜ, ΝΔΟ parallelæ ipsis ΑΓ, ΑΒ. quoniam igitur

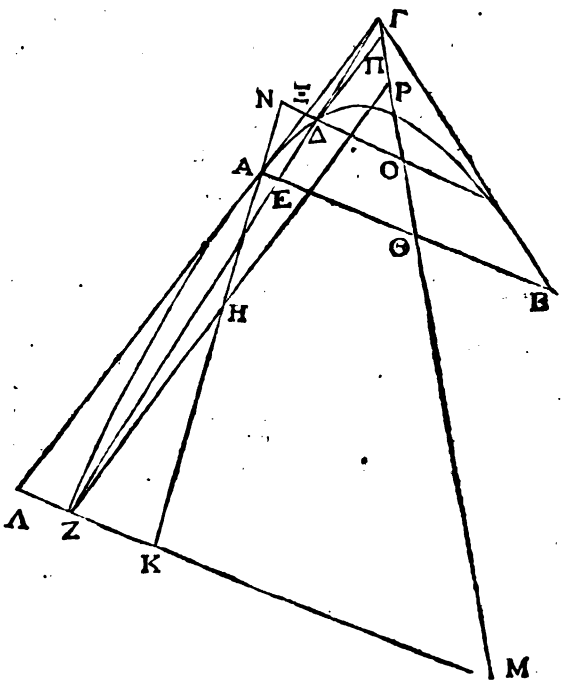
ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΓΔΕΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ.

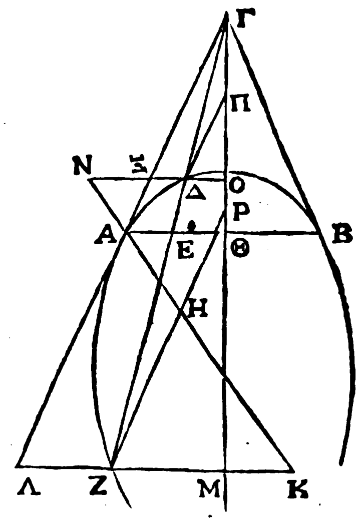
Ἤχθωσαν διὰ τῶν Γ, Α διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΓΘ, ΑΚ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Δ παρὰ τὰς ΑΓ, ΑΒ, αἱ ΔΠ, ΖΡ· ΛΖΜ, ΝΔΟ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός

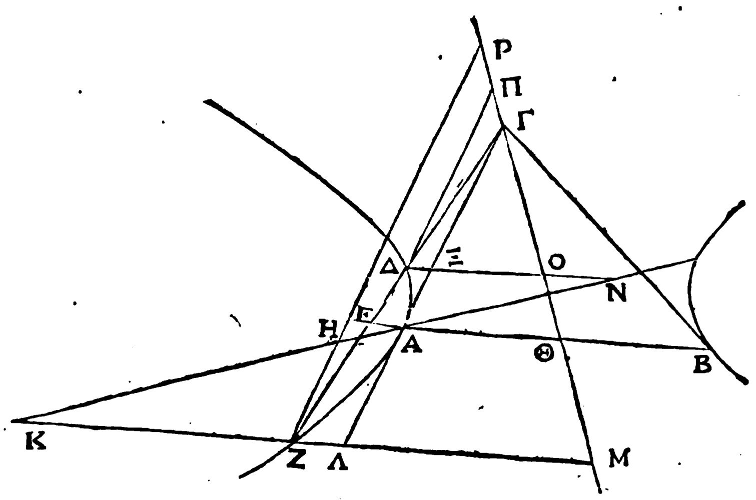
παράλληλός ἐστιν ἡ ΛΖΜ τῇ ΞΔΟ, ἔστιν ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΔ οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς ΞΔ, καὶ ἡ ΖΜ πρὸς ΔΟ, καὶ ἡ ΛΜ πρὸς ΞΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ οὕτως τὸ ΛΜΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΞΟΓ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ οὕτω τὸ

ΛΖΜ parallela est ipsi ΞΔΟ, erit [per 4. 6.] ut ΖΓ ad ΓΔ ita ΛΖ ad ΞΔ, & ita ΖΜ ad ΔΟ, & ΛΜ ad ΞΟ: ergo ut quadratum ex ΛΜ ad quadratum ex ΞΟ ita quadratum ex ΖΜ ad quadratum ex ΔΟ. sed [per 22.6.] ut quadratum ex ΛΜ ad quadratum ex ΞΟ ita ΛΜΓ triangulum ad triangulum ΞΟΓ, & ut quadratum ex ΖΜ ad quadratum ex ΟΔ ita triangulum ΖΡΜ ad trian-









ΖΡΜ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΠΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΛΓΜ τρίγωνον πρὸς τὸ ΞΟΓ οὕτως τὸ ΖΡΜ πρὸς τὸ ΔΠΟ τρίγωνον, καὶ λοιπὸν τὸ ΛΓΡΖ τετράπλευρον πρὸς λοιπὸν τὸ ΞΓΠΔ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΛΓΡΖ τετράπλευρον τῷ ΑΛΚ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΞΓΠΔ τῷ ΑΝΞ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ οὕτως τὸ ΑΛΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΝΞ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ὡς δὲ τὸ ΑΛΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΝΞ οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΞ, καὶ τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ.

gulum ΔΠΟ: quare [per 11. 5.] ut triangulum ΛΓΜ ad triangulum ΞΟΓ ita ΖΡΜ triangulum ad triangulum ΔΠΟ, & [per 19.5.] ita reliquum quadrilaterum ΛΓΡΖ ad reliquum ΞΓΠΔ. est autem [per 49.& 50.1. huj. & 11.3.huj.] ΛΓΡΖ quadrilaterum triangulo ΑΛΚ æquale, & quadrilaterum ΞΓΠΔ æquale triangulo ΑΝΞ: ut igitur quadratum ex ΛΜ ad quadratum ex ΞΟ ita ΑΛΚ triangulum ad triangulum ΑΝΞ. sed ut quadratum ex ΛΜ ad quadratum ex ΞΟ ita quadratum ex ΖΓ ad quadratum ex ΓΔ, & ut triangulum ΑΛΚ ad triangulum ΑΝΞ ita quadratum ex ΛΑ ad quadratum ex ΑΞ, & quadratum ex ΖΕ ad quadratum ex ΕΔ: ergo ut quadratum ex ΖΓ ad quadratum ex ΓΔ ita quadratum ex ΖΕ ad quadratum ex ΕΔ: & ideo [per 22.6.] ut recta ΖΓ ad ΓΔ ita ΖΕ ad ΕΔ.

PROP.

Prop. XXXVIII. Theor.

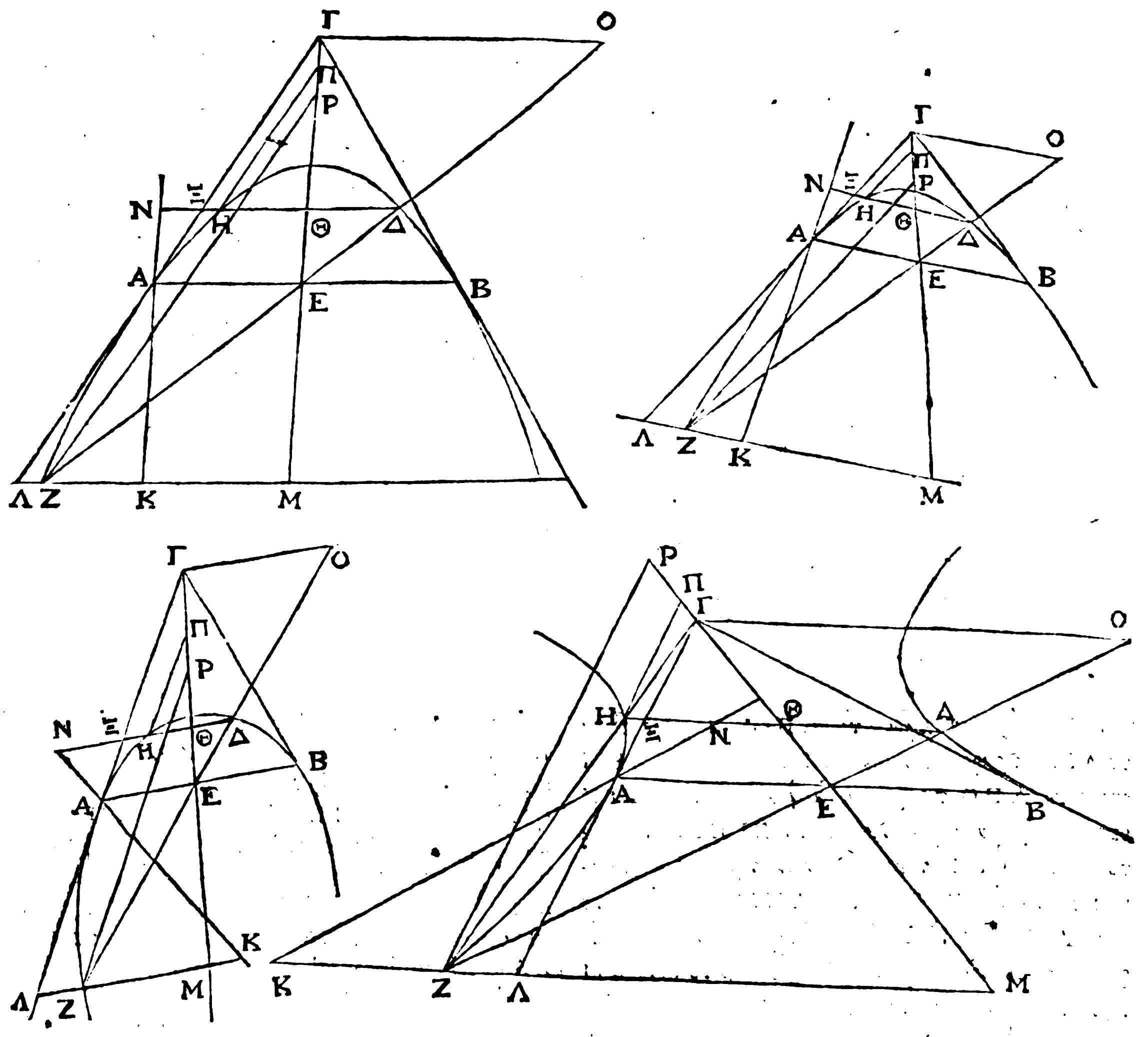
Iisdem positis, si per contingentium occursum ducatur recta tactus conjungenti parallela; & per punctum, quo jungens tactus bifariam dividitur, ducatur recta secans & sectionem ipsam in duobus punctis & rectam parallelam per occursum ductam: ut tota ad eam quæ extra sumitur inter sectionem & rectam parallelam, ita erunt portiones, quæ à recta tactus jungente fiunt, inter se.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, καὶ διὰ μέσης τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα καὶ τὴν διὰ τῆς συμπτώσεως παράλληλον τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ· ἔσται ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς παραλλήλου, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυμένης πρὸς ἄλληλα.

SIT sectio AB, quam contingant rectæ ΑΓ, ΓΒ; sitque AB connectens tactus, & diametri ΝΑΚ, ΓΜ: manifestum igitur est [ex 30. & 39. 2. huj.] rectam AB ad punctum E bifariam secari. ducatur autem à puncto Γ recta ΓΟ ipsi AB parallela; & per E ducatur ΖΕΔΟ: dico ut ΖΟ ad ΟΔ ita esse ΖΕ ad ΕΔ.

ΕΣΤΩ ἡ ΑΒ τομή, καὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ἐφαπτόμεναι, καὶ ἡ ΑΒ ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα, καὶ αἱ ΝΑΚ, ΓΜ διάμετροι· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ε. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΓΟ, καὶ διήχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΖΕΔΟ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΟ πρὸς ΟΔ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ.



Ducantur enim à punctis Ζ, Δ rectæ ΛΖΚΜ, ΔΘΗΞΝ parallelæ ipsi AB; & per Ζ, Η ducantur ΖΡ, ΗΠ, ipsi ΑΓ parallelæ. * & eodem modo quo in præcedente, demonstrabimus † ut quadratum ex ΛΜ ad quadratum ex ΞΘ ita esse quadratum ex ΛΑ ad quadratum ex ΑΞ. est au-

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ζ, Δ παρὰ τὴν ΑΒ αἱ ΛΖΚΜ, ΔΘΗΞΝ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Η παρὰ τὴν ΑΓ αἱ ΖΡ, ΗΠ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΘ οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΞ. καὶ ἔστιν

ὡς

ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΘ οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΞ, καὶ τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΞ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΟ πρὸς ΟΔ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ.

tem [per 4. & 22. 6.] ut quadratum ex ΛM ad quadratum ex ΞΘ ita quadratum ex ΛΓ ad quadratum ex ΓΞ, & ita quadratum ex ZO ad quadratum ex OΔ; atque ut quadratum ex ΛA ad quadratum ex AΞ ita quadratum ex ZE ad quadratum ex EΔ: ergo ut quadratum ex ZO ad quadratum ex OΔ ita quadratum ex ZE ad quadratum ex EΔ: ideoque [per 22.6.] ut recta ZO ad rectam OΔ ita ZE ad EΔ.

Hanc demonstrationem ad hunc modum supplet Codex Arabicus *Reverendiss. Præsulis* Armachani.

* Erit igitur ut ΛA ad AΞ ita ME ad EΘ, & ita ZM ad OΔ sive HΘ; ac propterea triangulum ZMP ad triangulum HΘΠ erit ut triangulum AKΛ ad triangulum ANΞ. sed triangulum ΛAK (per 2.3.huj. in cæteris, ac per 5. ejusdem, in oppositis sectionibus) æquale erit quadrilatero ΛΓPZ, ac triangulum ANΞ quadrilatero ΞΓΠH: erit itaque triangulum ZMP ad triangulum HΘΠ ut quadrilaterum ΛΓPZ ad quadrilaterum ΞΓΠH; & componendo in cæteris, vel dividendo in oppositis sectionibus, erit triangulum ΛMΓ ad triangulum ΞΘΓ sicut quadrilaterum ΛΓPZ ad quadrilaterum ΞΓΠH, sive ut triangulum ΛAK ad triangulum ANΞ. triangulum autem ΛMΓ est ad triangulum ΞΘΓ ut quadratum ex ΛM ad quadratum ex ΞΘ, & triangulum ΛAK est ad triangulum ANΞ sicut quadratum ex ΛA ad quadratum ex AΞ: † ergo quadratum ex ΛM est ad quadratum ex ΞΘ ut quadratum ex ΛA ad quadratum ex AΞ, &c. [*unde erit* ΛM *ad* ΞΘ *sicut* ΛA *ad* AΞ. *sed ut* ΛM *ad* ΞΘ *ita* MΓ *ad* ΓΘ, *hoc est, ob parallelas,* ZO *ad* OΔ; *&* *ut* ΛA *ad* AΞ *ita* ZE *ad* EΔ: *quare* ZO *est ad* OΔ *sicut* ZE *ad* EΔ.]

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

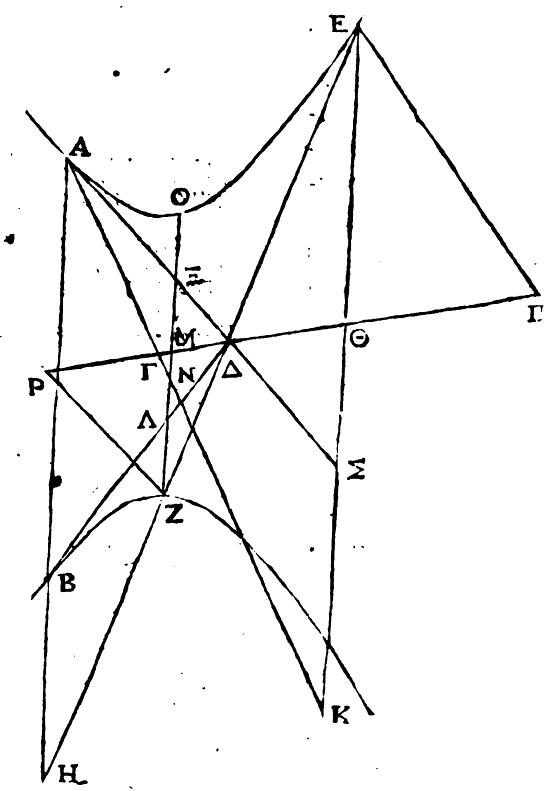
Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· ἔσται ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων πρὸς ἄλληλα.

Prop. XXXIX. *Theor.*

Si duæ rectæ oppositas sectiones contingentes sibi ipsis occurrant, & per tactus recta producatur; ab occursu vero contingentium ducta recta & utramque sectionem & rectam tactus conjungentem secet: erit ut tota ad eam quæ extra sumitur inter sectionem & conjungentem tactus, ita portiones inter sese, quæ inter utramque sectionem & contingentium occursum interjiciuntur.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ διὰ τοῦ Δ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΔΖΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΖ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ.

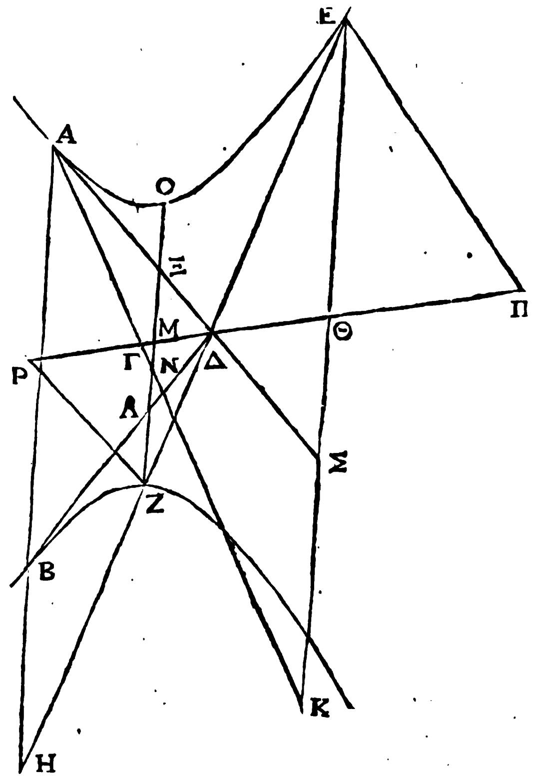
Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ παρὰ μὲν τὴν ΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΕΘΣΚ, ΖΛΝΜΞΟ, παρὰ δὲ τὴν ΑΔ αἱ ΕΠ, ΖΡ. ἐπεὶ οὖν παράλληλοί εἰσιν αἱ ΖΞ, ΕΣ, καὶ διηγμέναι εἰς αὐτὰς αἱ ΕΖ, ΞΣ, ΘΜ· ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΣ οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΞ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΖΜ οὕτως ἡ ΘΣ πρὸς τὴν ΞΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΜ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΜ.



Sint oppositæ sectiones A, B, quarum centrum Γ, & rectæ contingentes AΔ, ΔB; junctæ vero AB, ΓΔ producantur; & per Δ ducatur EΔZH: dico ut EH ad HZ ita esse EΔ ad ΔZ.

Jungatur enim AΓ, producaturque; & per E, Z ducantur EΘΣK, ZΛNMΞO ipsi AB parallelæ, & EΠ, ZP parallelæ ipsi AΔ. quoniam igitur ZΞ, EΣ parallelæ sunt, & ad ipsas ducuntur EZ, ΞΣ, ΘM; erit [per 4.6.] ut EΘ ad ΘΣ ita ZM ad MΞ, & permutando ut EΘ ad ZM ita erit ΘΣ ad ΞM: ergo ut quadratum ex ΘE ad quadratum ex ZM ita quadratum ex ΘΣ ad quadratum ex

ΞM. ut autem quadratum ex EΘ ad quadratum ex MZ ita [per 22.6.] EΘΠ triangulum ad triangulum ZPM; & ut quadratum ex ΘΣ ad quadratum ex ΞM ita triangulum ΔΘΣ ad ΞMΔ triangulum: ergo ut triangulum EΘΠ ad triangulum ZPM ita triangulum ΔΘΣ ad triangulum ΞMΔ. sed [per 11. 3. huj.] triangulum EΘΠ triangulis AΣK, ΘΔΣ est æquale; & triangulum ZPM æquale triangulis AΞN, ΔMΞ: ut igitur triangulum ΔΘΣ ad triangulum ΞMΔ ita triangula AΣK, ΔΘΣ simul ad triangulum AΞN una cum triangulo ΞMΔ: quare reliquum triangulum AΣK ad reliquum AΞN erit ut triangulum ΔΘΣ ad ipsum ΔMΞ. ut autem triangulum AΣK ad AΞN ita quadratum ex KA ad quadratum ex AN, hoc est [per 4. & 22. 6.] quadratum ex EH ad quadratum ex ZH; & ut triangulum ΔΘΣ ad triangulum ΔMΞ ita quadratum ex ΘΔ ad quadratum ex ΔM, hoc est quadratum ex EΔ ad quadratum ex ΔZ: ergo ut EH ad HZ ita EΔ ad ΔZ.



ΞM. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ EΘ πρὸς τὸ ἀπὸ MZ οὕτως τὸ EΘΠ τρίγωνον πρὸς τὸ ZPM, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞM οὕτως τὸ ΔΘΣ τρίγωνον πρὸς τὸ ΞMΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ EΘΠ τρίγωνον πρὸς τὸ ZPM οὕτως τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΞMΔ. ἴσον δὲ τὸ μὲν EΘΠ τοῖς AΣK, ΘΔΣ, τὸ δὲ ZPM τοῖς AΞN, ΔMΞ τριγώνοις· ὡς ἄρα τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΞMΔ οὕτως τὸ AΣK μετὰ τοῦ ΔΘΣ πρὸς τὸ AΞN μετὰ τοῦ ΞMΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ AΣK πρὸς λοιπὸν τὸ AΞN ἐστὶν ὡς τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΔMΞ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ AΣK πρὸς τὸ AΞN οὕτως τὸ ἀπὸ KA πρὸς τὸ ἀπὸ AN, τουτέστι τὸ ἀπὸ EH πρὸς τὸ ἀπὸ ZH· ὡς δὲ τὸ ΔΘΣ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔMΞ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔM, τουτέστι τὸ ἀπὸ EΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔZ· καὶ ὡς ἄρα ἡ EH πρὸς HZ οὕτως ἡ EΔ πρὸς ΔZ.

Prop. XL. *Theor.*

Iisdem positis, si per occursum contingentium ducatur recta linea tactus jungenti parallela; & à puncto, quod jungentem tactus bifariam dividit, ducatur recta utrique sectioni atque parallelæ ei quæ tactus conjungit occurrens: sicut tota ducta ad eam partem quæ extra sumitur inter parallelam & sectionem, ita erunt portiones ejusdem, inter sectiones & jungentem tactus interjectæ, inter se.

Sint oppositæ sectiones A, B, quarum centrum Γ; sintque contingentes AΔ, ΔB, & jungantur AB, ΓΔE: erit itaque [per 39. 2. huj.] AE ipsi EB æqualis. ducatur per Δ recta ZΔHΛ parallela ipsi AB, & per E recta ad libitum ΘEKΛ: dico ut ΘΛ ad ΛK ita esse ΘE ad EK.

Ducantur enim à punctis Θ, K rectæ NMΘΞ, KOΥΠ ipsi AB parallelæ, & ΘP, KΣ parallelæ ipsi AΔ; & ducatur ΞAΓΥ. itaque quoniam in rectas parallelas ΞM, KΠ cadunt ΞAΥ, MAΠ; erit [per 4.6.] ut ΞA ad AΥ ita MA ad AΠ. ut autem ΞA ad AΥ ita [per 34. 1.] ΘE ad EK; & ut ΘE ad EK ita ΘN ad KO, propter simi-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, καὶ ἀπὸ μέσης τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· ἔσται ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς παραλλήλου καὶ τῆς τομῆς, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης πρὸς ἄλληλα.

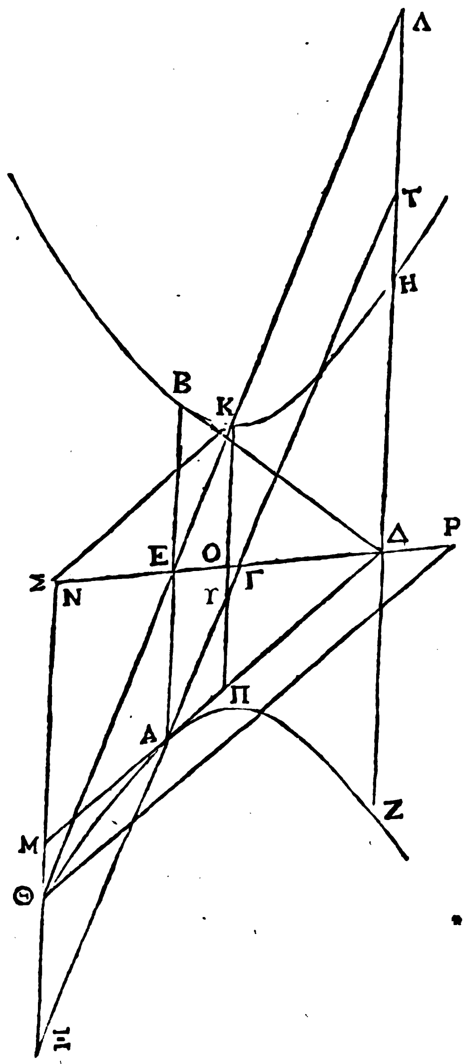
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ A, B, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ AΔ, ΔB, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AB καὶ ἡ ΓΔE· ἴση ἄρα ἡ AE τῇ EB. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Δ παρὰ τὴν AB ἤχθω ἡ ZΔHΛ, ἀπὸ δὲ τοῦ E, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΘEKΛ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΘΛ πρὸς ΛK οὕτως ἡ ΘE πρὸς EK.

Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Θ, K παρὰ μὲν τὴν AB αἱ NMΘΞ, KOΥΠ, παρὰ δὲ τὴν AΔ αἱ ΘP, KΣ, καὶ διήχθω ἡ ΞAΓΥ. ἐπεὶ οὖν εἰς παραλλήλους τὰς ΞM, KΠ διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΞAΥ, MAΠ, ἐστὶν ὡς ἡ ΞA πρὸς τὴν AΥ οὕτως ἡ MA πρὸς AΠ. ἀλλ' ὡς ἡ ΞA πρὸς AΥ οὕτως ἡ ΘE πρὸς EK, ὡς δὲ ἡ ΘE πρὸς EK οὕτως ἡ ΘN πρὸς KO, διὰ τὴν ὁμοιότητα

τῶν

*

τῶ ΘΕΝ, ΚΕΟ τριγώνων· ὡς ἄρα ἡ ΘΝ πρὸς ΚΟ οὕτως ἡ ΜΑ πρὸς ΑΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΟ οὕτως τὸ ΘΡΝ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΣΟ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ οὕτως τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΥΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΘΡΝ πρὸς τὸ ΚΣΟ τρίγωνον οὕτως τὸ ΞΜΑ πρὸς τὸ ΑΥΠ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ ΘΡΝ τοῖς ΞΑΜ, ΜΝΔ τριγώνοις, τὸ δὲ ΚΣΟ τοῖς ΑΥΠ, ΔΟΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΞΜΑ μετὰ τοῦ ΜΝΔ τριγώνου πρὸς τὸ ΑΥΠ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΔΟΠ τριγώνου οὕτως τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΥΠ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα ΜΝΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΟΠ τρίγωνόν ἐστιν ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΥΠ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΥ, ὡς δὲ τὸ ΜΝΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΟΠ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΥ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΥ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ.



litudinem triangulorum ΘΕΝ, ΚΕΟ: quare ut ΘΝ ad ΚΟ ita ΜΑ ad ΑΠ; & idcirco ut quadratum ex ΘΝ ad quadratum ex ΚΟ ita quadratum ex ΜΑ ad quadratum ex ΑΠ. sed [per 22. 6.] ut quadratum ex ΘΝ ad quadratum ex ΚΟ ita triangulum ΘΡΝ ad triangulum ΚΣΟ; & ut quadratum ex ΜΑ ad quadratum ex ΑΠ ita ΞΜΑ triangulum ad triangulum ΑΥΠ: ut igitur triangulum ΘΡΝ ad triangulum ΚΣΟ ita triangulum ΞΜΑ ad triangulum ΑΥΠ. triangulum autem ΘΡΝ [per 11. 3.huj.] triangulis ΞΑΜ, ΜΝΔ est æquale; & triangulum ΚΣΟ æquale triangulis ΑΥΠ, ΔΟΠ: ergo ut triangulum ΞΜΑ una cum triangulo ΜΝΔ ad triangulum ΑΥΠ una cum triangulo ΔΟΠ ita ΞΜΑ triangulum ad triangulum ΑΥΠ: quare & reliquum triangulum ΜΝΔ ad reliquum ΔΟΠ est ut totum ad totum. sed ut triangulum ΞΜΑ ad triangulum ΑΥΠ ita quadratum ex ΞΑ ad quadratum ex ΑΥ; & ut triangulum ΜΝΔ ad triangulum ΔΟΠ ita quadratum ex ΜΝ ad quadratum ex ΠΟ: ergo [per 11. 5.] ut quadratum ex ΜΝ ad quadratum ex ΠΟ ita quadratum ex ΞΑ ad quadratum ex ΑΥ. ut autem quadratum ex ΜΝ ad quadratum ex ΠΟ ita quadratum ex ΝΔ ad quadratum ex ΔΟ, & ut quadratum ex ΞΑ ad quadratum ex ΑΥ ita quadratum ex ΘΕ ad quadratum ex ΕΚ, & ut quadratum ex ΝΔ ad quadratum ex ΔΟ ita quadratum ex ΘΛ ad quadratum ex ΛΚ: ut igitur quadratum ex ΘΛ ad quadratum ex ΛΚ ita quadratum ex ΘΕ ad quadratum ex ΕΚ; & propterea ut ΘΛ ad ΛΚ ita ΘΕ ad ΕΚ.

Divisio hæc rectæ ad conicas sectiones ductæ, de qua in sex ultimis propositionibus agitur, ea est quæ *Harmonica* dicitur: qua fit ut rectangulum sub tota & parte media æquale sit rectangulo sub partibus extremis: ac datis tribus quibusvis è quatuor punctis, facile est quartum invenire, per ea quæ tradit *Pappus* in Lemmatis X. & XI. in hunc Librum. Postulatur autem hæc divisio *Harmonica* ad demonstrationes Libri quarti.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα΄.

Ἐὰν παραβολῆς τρεῖς εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν ἀλλήλαις· εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τμηθήσονται.

ΕΣΤΩ παραβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔΕ, ΕΖΓ, ΔΒΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΒ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ, καὶ ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ.

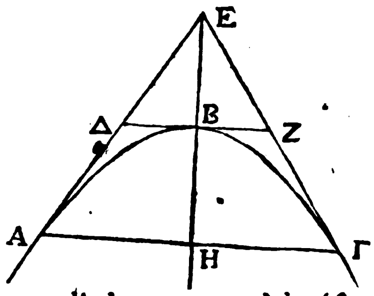
PROP. XLI. *Theor.*

Si parabolam contingentes tres rectæ inter se conveniant; in eadem ratione secabuntur.

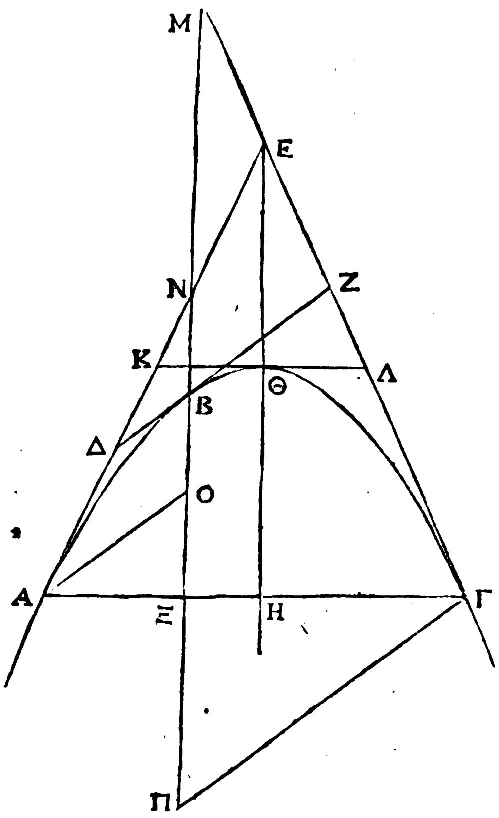
SIT parabola ΑΒΓ, quam rectæ ΑΔΕ, ΕΖΓ, ΔΒΖ contingant: dico ut ΓΖ ad ΖΒ ita esse ΕΔ ad ΔΑ, & ΖΒ ad ΒΔ.

 Conjungatur

Conjungatur enim ΑΓ, & bifariam in Η dividatur: perspicuum est [ex 29. 2. huj.] rectam quæ ab Ε ducitur ad Η, sectionis diametrum esse. si igitur ΕΗ per Β transit, erit [per 5. 2. huj.] recta ΔΖ parallela ipsi ΑΓ, & ab ΕΗ bifariam in puncto Β secabitur: propterea que [per 35. 1. huj.] ΑΔ ipsi ΔΕ, & ΕΖ ipsi ΖΓ æqualis erit: constat igitur verum esse quod proponebatur.



Sed non transeat per Β, sed per aliud punctum, quod sit Θ. & per Θ ducatur ΚΘΛ parallela ipsi ΑΓ, quæ [per 32. 1. huj.] in Θ sectionem continget: & erit, per ea quæ dicta sunt, ΑΚ ipsi ΚΕ æqualis, & ΛΓ ipsi ΛΕ. itaque per punctum quidem Β ducatur ΜΝΒΞ, parallela ipsi ΕΗ; per Α, Γ vero ducantur ΑΟ, ΓΠ parallelæ ipsi ΔΖ. quoniam igitur ΜΒ ipsi ΕΘ parallela est, erit [ex 46. 1. huj.] ΜΒ diameter; & ΔΖ in Β sectionem contingit; quare ΑΟ, ΓΠ ordinatim applicantur. & quoniam ΜΒ diameter est, & ΓΜ sectionem contingit, ordinatimque applicatur ΓΠ: erit [per 35. 1. huj.] ΜΒ ipsi ΒΠ æqualis, adeoque [per 2. 6.] ΜΖ ipsi ΖΓ. quod cum ΜΖ sit æqualis ΖΓ, & ΕΛ ipsi ΛΓ; erit ut ΜΓ ad ΓΖ ita ΕΓ ad ΓΛ, & permutando ut ΜΓ ad ΓΕ ita ΖΓ ad ΓΛ. ut autem ΜΓ ad ΓΕ ita [per 4. 6.] ΞΓ ad ΓΗ: ergo ut ΖΓ ad ΓΛ ita ΞΓ ad ΓΗ. sed ut ΛΓ ad ΓΕ ita ΗΓ ad ΓΑ: (quod utraque utriusque dupla sit) ex æquali igitur [per 22. 5.] ut ΕΓ ad ΓΖ ita ΑΓ ad ΓΞ; & per conversionem rationis ut ΓΕ ad ΕΖ ita ΓΑ ad ΑΞ; dividendoque ut ΓΖ ad ΖΕ ita ΓΞ ad ΞΑ. rursus quoniam diameter est ΜΒ, contingitque ΑΝ, & ordinatim applicatur ΑΟ; erit ΝΒ ipsi ΒΟ, & ΝΔ ipsi ΔΑ æqualis. est autem & ΕΚ æqualis ipsi ΚΑ: ergo ut ΕΑ ad ΑΚ ita ΝΑ ad ΑΔ, & permutando ut ΕΑ ad ΑΝ ita ΚΑ ad ΑΔ. sed ut ΗΑ ad ΑΞ ita ΕΑ ad ΑΝ: quare ut ΗΑ ad ΑΞ ita ΚΑ ad ΑΔ. atque est ut ΓΑ ad ΑΗ ita ΕΑ ad ΑΚ: (utraque enim utriusque est dupla) ex æquali igitur erit ut ΓΑ ad ΑΞ ita ΕΑ ad ΑΔ; & dividendo, ut ΓΞ ad ΞΑ ita ΕΔ ad ΔΑ. demonstratum est autem ut ΓΞ ad ΞΑ ita ΓΖ ad ΖΕ: ergo [per 11. 5.] ut ΓΖ ad ΖΕ ita ΕΔ ad ΔΑ. rursus quoniam ut ΓΞ est ad ΞΑ ita [per 4. 6.] ΓΠ ad ΑΟ, & est quidem ΓΠ dupla ipsius



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Η· ὅτι μὲν οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Η διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς φανερόν. εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ Β ἔρχεται ἡ ΕΗ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΑΓ, καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Β ὑπὸ τῆς ΕΗ· καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἔσται ἡ ΑΔ τῇ ΔΕ, καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΕ· καὶ φανερὸν τὸ ζητούμενον.

Μὴ ἐρχέσθω δὲ διὰ τοῦ Β, ἀλλὰ διὰ τοῦ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΚΘΛ· ἐφάψεται ἄρα τῆς τομῆς κατὰ τὸ Θ· καὶ διὰ τὰ εἰρημένα ἴση ἔσται ἡ ΑΚ τῇ ΚΕ, καὶ ἡ ΛΓ τῇ ΛΕ. ἤχθω διὰ μὲν τοῦ Β παρὰ τὴν ΕΗ ἡ ΜΝΒΞ, διὰ δὲ τῶν Α, Γ παρὰ τὴν ΔΖ αἱ ΑΟ, ΓΠ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΜΒ τῇ ΕΘ, διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΒ. καὶ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β ἡ ΔΖ· κατηγμέναι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΟ, ΓΠ. καὶ ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΜ, κατηγμένη δὲ ἡ ΓΠ· ἴση ἔσται ἡ ΜΒ τῇ ΒΠ, ὥστε καὶ ἡ ΜΖ τῇ ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΖ τῇ ΖΓ καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΓ, ἔστιν ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΖ οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς ΓΛ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς ΓΛ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ οὕτως ἡ ΞΓ πρὸς ΓΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς ΓΛ οὕτως ἡ ΞΓ πρὸς ΓΗ. ὡς δὲ ἡ ΛΓ πρὸς ΓΕ οὕτως ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ· (διπλασία γὰρ ἑκατέρα) δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΕΓ πρὸς ΓΖ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΞ, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, καὶ διελόντι ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ οὕτως ἡ ΓΞ πρὸς τὴν ΞΑ. πάλιν ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΒ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΑΝ, καὶ κατηγμένη ἡ ΑΟ, ἴση ἐστὶν ἡ ΝΒ τῇ ΒΟ, καὶ ἡ ΝΔ τῇ ΔΑ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΚΑ ἴση· ὡς ἄρα ἡ ΕΑ πρὸς ΑΚ οὕτως ἡ ΝΑ πρὸς ΑΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΝ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ. ἀλλ' ὡς ἡ ΗΑ πρὸς ΑΞ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΝ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς ΑΞ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΚ· (διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας) δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΔ, καὶ διελόντι ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ· ὡς ἄρα ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ οὕτως ἡ ΓΠ πρὸς ΑΟ, καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΓΠ

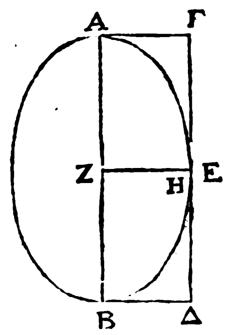
τῆς

τῆς ΒΖ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΓΜ τῆς ΜΖ, ἡ δὲ ΑΟ τῆς ΒΔ, ἐπεὶ ἡ ΑΝ τῆς ΝΔ· ὡς ἄρα ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ, καὶ ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ, καὶ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν ὑπερβολῇ, ἢ ἐλλείψει, ἢ κύκλου περιφερείᾳ, ἢ ταῖς ἀντικειμέναις ἀπ' ἄκρας τῆς διαμέτρου ἀχθῶσι εὐθεῖαι παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, ἄλλη δέ τις ὡς ἔτυχεν ἀχθῇ ἐφαπτομένη· ἀποτεμεῖ ἀπ' αὐτῶν εὐθείας ἴσον περιεχούσας τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ εἴδους.

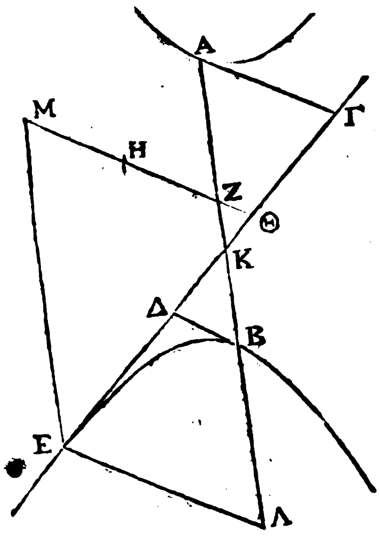
ΕΣΤΩ γάρ τις τῶν προειρημένων τομῶν ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Α, Β ἤχθωσαν παρὰ τεταγμένως κατηγμένην αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἄλλη δέ τις ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Ε ἡ ΓΕΔ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

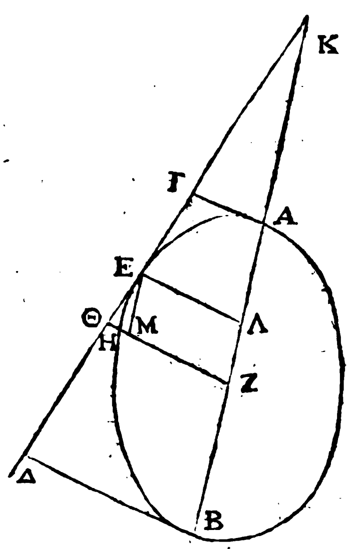


Ἔστω γὰρ κέντρον τὸ Ζ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὰς ΑΓ, ΒΔ ἡ ΗΖΘ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ τῇ κατηγμένῃ παράλληλοί εἰσιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ παράλληλος· συζυγὴς ἄρα διάμετρός ἐστι τῇ ΑΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΖΗ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου διὰ τοῦ Β ἔρχεται, ἴσαι γίνονται αἱ ΑΓ, ΖΗ, ΒΔ· καὶ φανερὸν αὐτόθεν ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΗ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

Μὴ ἐρχέσθω δή, καὶ συμπιπτέτωσαν αἱ ΔΓ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ μὲν τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΕΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΒ ἡ ΕΜ.





ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΖΛ τῷ ἀπὸ ΑΖ· ἔστιν ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΖΑ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς ΖΛ, καὶ ἡ ΚΑ πρὸς ΑΛ. ἔστι δὲ τῇ ΖΑ ἴση ἡ ΖΒ· ἀνά-

ΒΖ, quia ΓΜ ipsius ΜΖ est dupla; dupla vero est ΑΟ ipsius ΒΔ, ob ΑΝ ipsius ΝΔ duplam: ut igitur ΓΞ ad ΞΑ ita ΖΒ ad ΒΔ, & ita ΓΖ ad ΖΕ, & ita ΕΔ ad ΔΑ.

Prop. XLII. *Theor.*

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus, ab extremitatibus diametri ducantur rectæ parallelæ ordinatim applicatæ; & alia quæpiam recta quomodocunque contingens ducatur: abscindet ex ipsis rectas continentes rectangulum æquale quartæ parti figuræ ad eandem diametrum factæ.

SIT aliqua prædictarum sectionum, cujus diameter ΑΒ; atque à punctis Α, Β ducantur rectæ ΑΓ, ΒΔ parallelæ ei quæ ordinatim applicata est; & alia quæpiam recta ΓΕΔ in puncto Ε sectionem contingat: dico rectangulum sub ipsis ΑΓ, ΒΔ æquale esse quartæ parti figuræ quæ ad diametrum ΑΒ fit.

Sit enim sectionis centrum Ζ; & per Ζ ducatur ΖΗΘ ipsis ΑΓ, ΒΔ parallela. itaque quoniam ΑΓ, ΒΔ parallelæ sunt applicatæ, & ipsis parallela est ΖΗ; erit ΖΗ diameter ipsi ΑΒ conjugata: ergo quadratum ex ΖΗ æquale erit quartæ parti figuræ quæ fit ad ΑΒ.

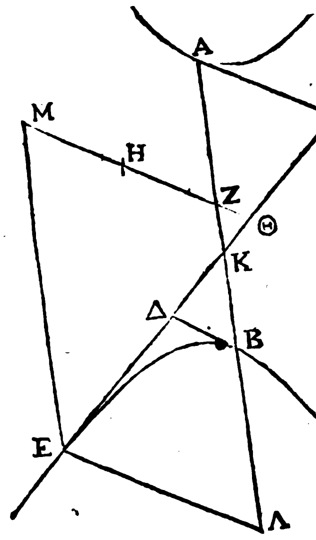
Si igitur in ellipsi & circulo recta ΖΗ per Β transit; æquales sunt ΑΓ, ΖΗ, ΒΔ: & ideo per se manifestum est rectangulum quod continetur sub ΑΓ, ΒΔ æquale esse quadrato ex ΖΗ, hoc est quartæ parti figuræ quæ ad ΑΒ constituitur.

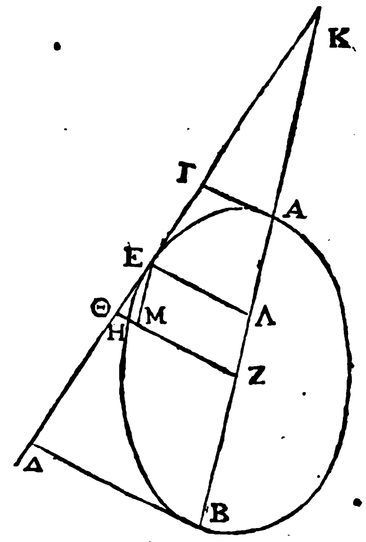
Sed non transeat per Ε; & ΔΓ, ΒΑ productæ conveniant in Κ, ducaturque per Ε recta quidem ΕΛ ipsi ΑΓ parallela, ΕΜ vero ipsi ΑΒ.

quoniam igitur rectangulum ΚΖΛ [per 37.1.huj.] quadrato ex ΑΖ est æquale; ut ΚΖ ad ΖΑ [per 17.6.] ita erit ΑΖ ad ΖΛ, & ita [per 12. vel 19. 5.] ΚΑ ad ΑΛ. sed ΖΒ ipsi ΖΑ æqualis est: quare

quare invertendo, ut BZ ad ZK ita ΛA ad AK; componendoque vel dividendo, ut BK ad KZ

πάλιν ἄρα ὡς ἡ BZ πρὸς ZK οὕτως ἡ ΛA πρὸς AK, καὶ συνθέντι ἢ διελόντι ὡς ἡ BK πρὸς KZ οὕ-





ita ΛK ad KA: ergo ut ΔB ad ZΘ ita EΛ ad ΓA; & propterea [per 16.6.] rectangulum contentum sub ΔB, ΓA æquale est ei quod sub ZΘ, EΛ continetur, hoc est rectangulo ΘZM. rectangulum autem ΘZM [per 38. 1. huj.] est æquale quadrato ex ZH, hoc est quartæ parti figuræ quæ ad AB: rectangulum igitur sub ΔB, ΓA æquale est quartæ parti figuræ quæ ad diametrum AB constituitur.

τως ἡ ΛK πρὸς KA· ὡς ἄρα ἡ ΔB πρὸς ZΘ οὕτως ἡ EΛ πρὸς ΓA· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔB, ΓA ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ZΘ, EΛ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΘZM. τὸ δὲ ὑπὸ ΘZM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ZH, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ AB εἴδους· καὶ τὸ ὑπὸ ΔB, ΓA ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ AB εἴδους.

Prop. XLIII. *Theor.*

Si hyperbolam recta quævis contingat; abscindet ex asymptotis, ad sectionis centrum, rectas continentes rectangulum æquale ei quod continetur sub rectis ab altera contingente abscissis, ad verticem sectionis qui est ad axem.

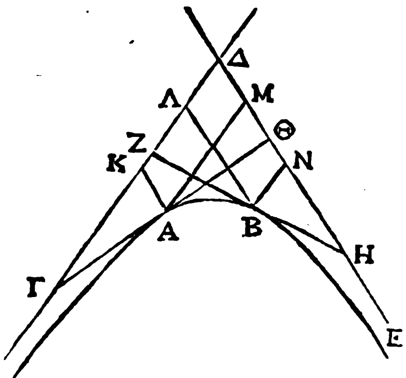
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ′.

Ἐὰν ὑπερβολῆς εὐθεῖά τις ἐπιψαύῃ· ἀποτεμεῖ ἀπὸ τῶν ἀσυμπτώτων, πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, εὐθείας ἴσον περιεχούσας τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων εὐθειῶν ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς κατὰ τὴν πρὸς τῷ ἄξονι κορυφὴν τῆς τομῆς.

SIT hyperbola AB, cujus asymptoti ΓΔ, ΔE, & axis BΔ; ducatur autem per B recta ZBH sectionem contingens, & alia quæpiam utcunque contingens ducatur ΓAΘ: dico rectangulum ZΔH rectangulo ΓΔΘ æquale esse.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ AB, ἀσύμπτωτοι δὲ ἡ ΓΔ, ΔE, ἄξων δὲ ὁ BΔ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ B ἐφαπτομένη ἡ ZBH, ἄλλη δέ τις ὡς ἔτυχεν ἐφαπτομένη ἡ ΓAΘ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ZΔH ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΔΘ.

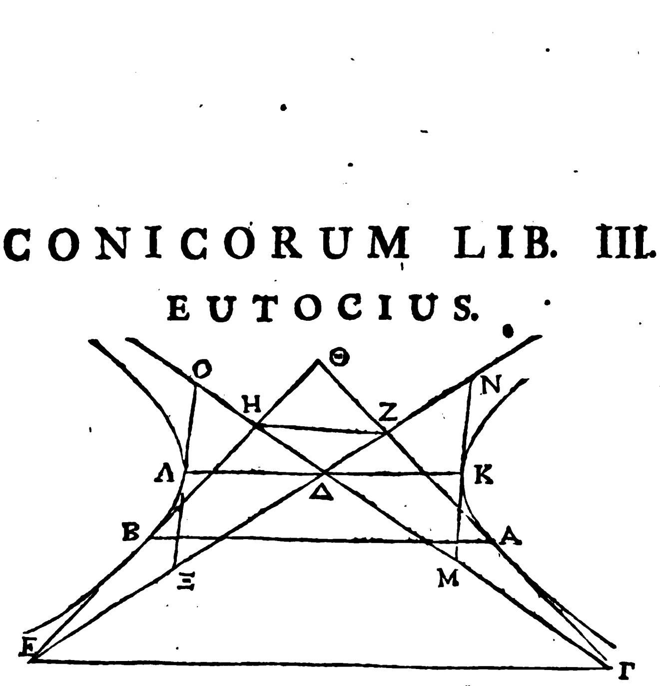
Ducantur enim à punctis A, B rectæ AK, BΛ ipsi ΔH parallelæ, ut & rectæ AM, BN ipsi ΓΔ. quoniam igitur ΓAΘ sectionem contingit; erit [per 3.2.huj.] ΓA æqualis ipsi AΘ: quare ΓΘ dupla est ipsius ΘA, & ΓΔ ipsius AM, & ΔΘ ipsius AK dupla: ergo rectangulum ΓΔΘ quadruplum est rectanguli KAM. eodem modo demonstrabitur rectangulum ZΔH rectanguli ΛBN quadruplum. sed [per 12.2.huj.] rectangulum KAM est æquale rectangulo ΛBN: rectangulum igitur ΓΔΘ rectangulo ZΔH æquale erit. similiter demonstrabitur etiamsi ΔB sit alia quæpiam diameter, & non axis.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν A, B παρὰ μὲν τὴν ΔH αἱ AK, BΛ, παρὰ δὲ τὴν ΓΔ αἱ AM, BN. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΓAΘ, ἴση ἡ ΓA τῇ AΘ· ὥστε ἡ ΓΘ τῆς ΘA διπλῆ, καὶ ἡ ΓΔ τῆς AM, καὶ ἡ ΔΘ τῆς AK· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΔΘ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ KAM. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται τὸ ὑπὸ ZΔH τετραπλάσιον τοῦ ὑπὸ ΛBN. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ KAM τῷ ὑπὸ ΛBN· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΓΔΘ τῷ ὑπὸ ZΔH. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται κἂν ἡ ΔB ἑτέρα τις ᾖ διάμετρος, καὶ μὴ ἄξων.

ΠΡΟ-

EUTOCIUS.



Επὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων, ἐὰν ἡ A B μὴ ἔρχηται διὰ τοῦ Δ κέντρου, ἤχθω διὰ τοῦ Δ παράλληλος τῇ E Γ ἡ Λ Δ K, καὶ διὰ τῶν K, Λ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ M K N, Ξ Λ O. οὕτως γὰρ δὴ γενήσεται ὅτι τὸ ὑπὸ Ξ Δ O ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ M Δ N. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ Ξ Δ O τῷ ὑπὸ E Δ H ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ὑπὸ M Δ N τῷ ὑπὸ Γ Δ Z· τὸ ἄρα ὑπὸ E Δ H ἴσον τῷ ὑπὸ Γ Δ Z.

In oppositis vero sectionibus, si recta A B per centrum Δ non transeat, ducatur per Δ ipsi E Γ parallela Λ Δ K, & per K, Λ ducantur M K N, Ξ Λ O quæ sectiones contingant. sic enim fiet rectangulum Ξ Δ O æquale rectangulo M Δ N. rectangulum autem Ξ Δ O [per 43. 3. huj.] rectangulo E Δ H est æquale, & rectangulum M Δ N æquale rectangulo Γ Δ Z: proinde rectangulum E Δ H rectangulo Γ Δ Z æquale erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

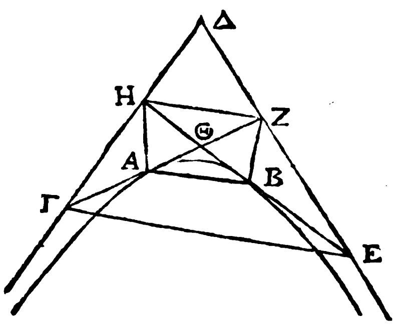
Εὰν ὑπερβολῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι ταῖς ἀσυμπτώτοις· αἱ ἐπὶ τὰς συμπτώσεις ἀγόμεναι παράλληλοι ἔσονται τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ.

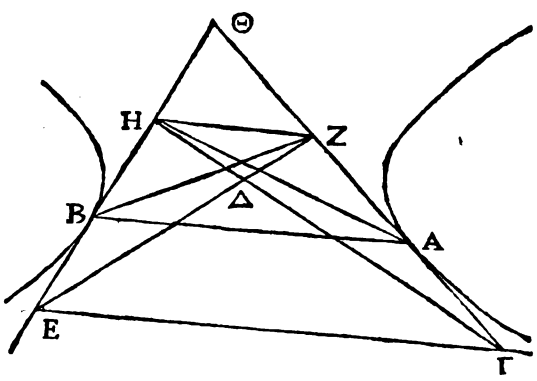
Εστω γὰρ ἡ ὑπερβολή, ἢ ἀντικείμεναι αἱ A, B, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ Γ Δ, Δ E, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ Γ A Θ Z, E B Θ H, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ A B, Z H, Γ E· λέγω ὅτι παράλληλοί εἰσιν.

Prop. XLIV. *Theor.*

Si duæ rectæ hyperbolam vel oppositas sectiones contingentes asymptotis occurrant; quæ ad occursus ducuntur rectæ tactus conjungenti parallelæ erunt.

Sit hyperbola, vel oppositæ sectiones A, B; asymptoti vero Γ Δ, Δ E, & contingentes Γ A Θ Z, E B Θ H; junganturque A B, Z H, Γ E: dico eas inter se parallelas esse.





Επεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ Γ Δ Z ἴσον τῷ ὑπὸ H Δ E, ἔσται ὡς ἡ Γ Δ πρὸς Δ E οὕτως ἡ H Δ πρὸς Δ Z· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ E τῇ Z H· καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ Θ H πρὸς H E οὕτως ἡ Θ Z πρὸς Z Γ. ὡς δὲ ἡ E H πρὸς H B οὕτως ἡ Γ Z πρὸς τὴν Z A, διπλῆ γὰρ ἑκατέρα· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ Θ H πρὸς H B οὕτως ἡ Θ Z πρὸς Z A· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Z H τῇ A B.

Quoniam enim [per 43. 3. huj.] rectangulum Γ Δ Z æquale est rectangulo H Δ E; ut Γ Δ ad Δ E ita erit H Δ ad Δ Z: parallela est igitur [per 2. 6.] Γ E ipsi Z H; & ideo [per 4. 6.] ut Θ H ad H E ita Θ Z ad Z Γ. ut autem E H ad H B ita Γ Z ad Z A; utraque enim utriusque est dupla: ergo ex æquali, ut Θ H ad H B ita Θ Z ad Z A: recta igitur Z H ipsi A B est parallela.

EUTOCIUS.

Αποδεδειγμένων τῶν Γ E, Z H παραλλήλων, ἐπεζεύχθωσαν αἱ H A, Z B. ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ Z H τῇ Γ E, ἴσον τὸ Γ H Z τρίγωνον τῷ E H Z τριγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μὲν Γ H Z τοῦ A H Z διπλάσιον, ἐπεὶ καὶ ἡ Γ Z τῆς Z A, τὸ δὲ E Z H τοῦ B H Z διπλάσιον· ἴσον ἄρα τὸ A H Z τῷ B H Z, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Z H τῇ A B.

Demonstrato rectas Γ E, Z H inter se parallelas, conjungantur H A, Z B. quoniam parallelæ sunt Z H, Γ E, erit triangulum Γ H Z triangulo E H Z æquale. atque est triangulum quidem Γ H Z duplum trianguli A H Z, quia recta Γ Z ipsius Z A est dupla; triangulum vero E Z H duplum trianguli B H Z: ergo triangulum A H Z triangulo B H Z est æquale, & propterea recta Z H ipsi A B parallela.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

Εὰν ἐν ὑπερβολῇ, ἢ ἐλλείψει, ἢ κύκλου περιφερείᾳ, ἢ ταῖς ἀντικειμέναις, ἀπ' ἄκρου τοῦ ἄξονος ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ὀρθάς, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἰ-

Prop. XLV. *Theor.*

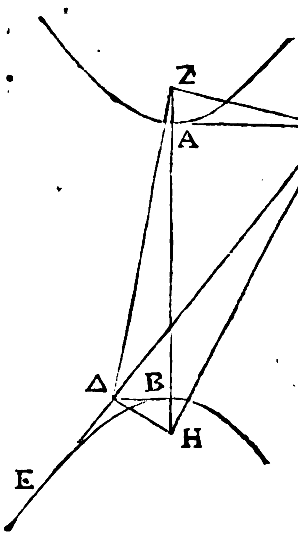
Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus, ab extremo axis rectæ ad rectos angulos ducantur; & rectangu-

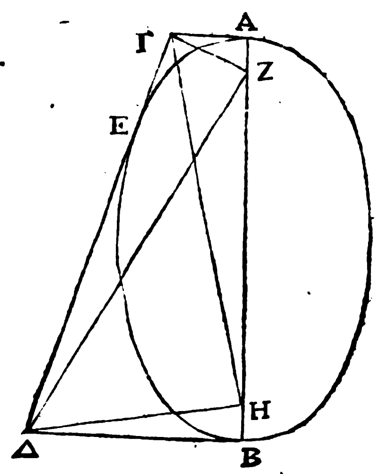
lum æquale quartæ parti figuræ applicetur ad axem ab utraque parte, in hyperbola quidem & sectionibus oppositis excedens figura quadrata, in ellipsi vero deficiens; & ducatur recta sectionem contingens, occurrensque eis quæ sunt ad rectos angulos: rectæ quæ ab occursibus ducuntur ad puncta ex applicatione facta angulos rectos ad dicta puncta efficient.

δύο ἴσον παρὰ τὸν ἄξονα παραβληθῇ ἐφ' ἑκάτερα, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἐλλεῖπον, ἀχθῇ δέ τις εὐθεῖα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, συμπίπτουσα ταῖς πρὸς ὀρθὰς εὐθείαις· αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γενηθέντα σημεῖα, ὀρθὰς ποιοῦσι γωνίας πρὸς τοῖς εἰρημένοις σημείοις.

SIT aliqua dictarum sectionum, cujus axis ΑΒ; & rectæ ΑΓ, ΒΔ ad rectos angulos ducantur; tangat autem ΓΕΔ, & rectangulum quartæ parti figuræ æquale applicetur ab utraque parte, sicuti dictum est, videlicet rectangulum ΑΖΒ, & ΑΗΒ; & jungantur ΓΖ, ΓΗ, ΔΖ, ΔΗ: dico angulum ΓΖΔ, & angulum ΓΗΔ rectum esse.

Ἔστω μία τῶν εἰρημένων τομῶν ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, πρὸς ὀρθὰς δὲ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΕΔ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον παραβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, ὡς εἴρηται, τὸ ὑπὸ ΑΖΒ, καὶ τὸ ὑπὸ ΑΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΖ, ΓΗ, ΔΖ, ΔΗ· λέγω ὅτι ἥ τε ὑπὸ ΓΖΔ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΔ γωνία ὀρθή ἐστιν.





Quoniam enim [ad 42. 3. huj.] ostensum est rectangulum sub ΑΓ, ΒΔ æquale esse quartæ parti figuræ quæ ad ΑΒ fit; atque est rectangulum ΑΖΒ æquale quartæ parti ejusdem figuræ; rectangulum sub ΑΓ, ΒΔ rectangulo ΑΖΒ æquale erit: ergo [per 16. 6.] ut ΓΑ ad ΑΖ ita ΖΒ ad ΒΔ. & sunt anguli qui ad Α, Β recti: angulus igitur ΑΓΖ [per 6. 6.] angulo ΒΖΔ est æqualis; angulusque ΑΖΓ æqualis angulo ΖΔΒ. & quoniam angulus ΓΑΖ est rectus, anguli ΑΓΖ, ΑΖΓ [per 32. 1.] uni recto æquales erunt. demonstratum autem est angulum ΑΓΖ æqualem esse angulo ΔΖΒ: ergo ΓΖΑ, ΔΖΒ anguli uni recto sunt æquales: angulus igitur ΔΖΓ rectus est. similiter & angulus ΓΗΔ rectus demonstrabitur.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐδείχθη τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΖ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Α, Β σημείοις γωνίαι· ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΖΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΖ ὀρθή ἐστιν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΖ, ΑΖΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΖ ἴση τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΖΑ, ΔΖΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί· ἡ ὑπὸ ΔΖΓ ἄρα ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΔ ὀρθή.

PROP. XLVI. *Theor.*

Iisdem positis, rectæ dicto modo junctæ æquales facient angulos ad contingentes.

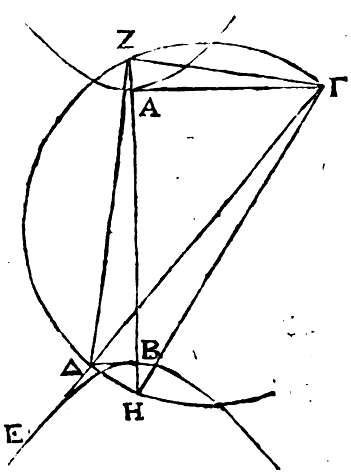
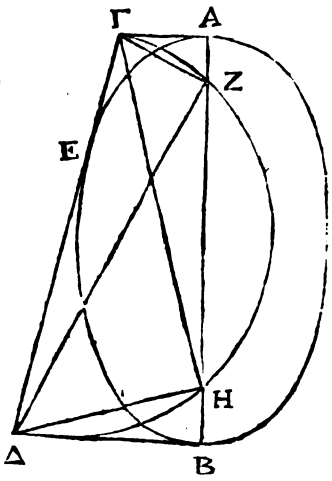
IISDEM namque positis; dico angulum ΑΓΖ angulo ΔΓΗ, & angulum ΓΔΖ angulo ΒΔΗ æqualem esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς ταῖς ἐφαπτομέναις.

Τῶν γὰρ αὐτῶν ὑποκειμένων λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ἐδείχθη ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΖΔ, ΓΗΔ γωνιῶν, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΓΔ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Ζ, Η σημείων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΗ γωνίᾳ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι τοῦ κύκλου εἰσίν. ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΓΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ γωνίᾳ ἴση.

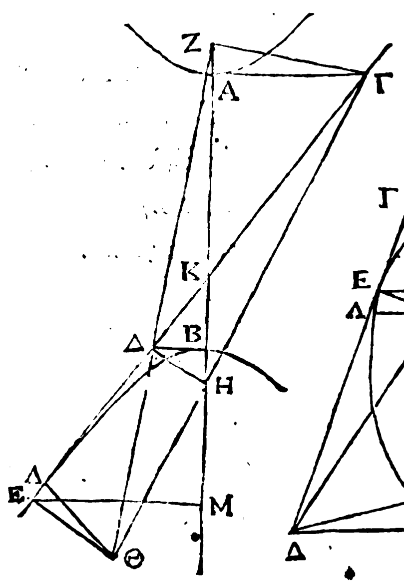
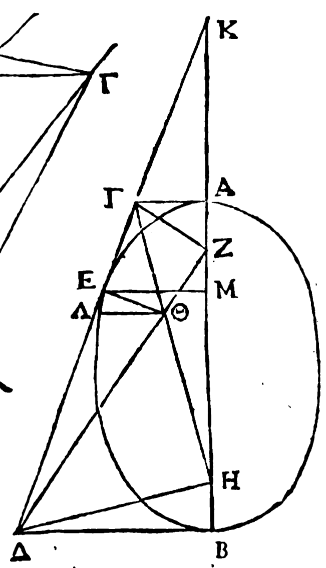
Quoniam enim ostendimus [in præced.] utrumque angulorum ΓΖΔ, ΓΗΔ rectum esse, si circa diametrum ΓΔ circulus describatur [per conv. 31. 3.] per puncta Z, H transibit: quare [per 21. 3.] angulus ΔΓΗ æqualis est angulo ΔΖΗ. quia sunt in eadem circuli portione. angulus autem ΔΖΗ angulo ΑΓΖ est æqualis, ut [in præced.] demonstratum fuit: ergo & ΔΓΗ angulus æqualis erit angulo ΑΓΖ. eodem modo & angulus ΓΔΖ angulo ΒΔΗ æqualis ostendetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζʹ.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἀγομένη πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ ἐφαπτομένῃ.

ΥΠΟΚΕΙΣΘΩ γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις αἱ μὲν ΓΗ, ΖΔ κατὰ τὸ Θ, αἱ δὲ ΓΔ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ· λέγω ὅτι κάθετός ἐστιν ἡ ΕΘ ἐπὶ τὴν ΓΔ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΛΘ ἴση· ὅμοιον ἄρα τὸ ΔΗΒ τρίγωνον τῷ ΛΘΔ· ὡς ἄρα ἡ ΗΔ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΛ. ἀλλ' ὡς ἡ ΗΔ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς ΓΘ, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ζ, Η γωνίας, καὶ τὰς πρὸς τῷ Θ ἴσας. ὡς δὲ ἡ ΖΓ πρὸς ΓΘ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΛ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΖΓ, ΛΓΘ τριγώνων· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΛ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΛ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΕΜ· τεταγμένως ἄρα ἐστὶ κατηγμένη ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἔσται ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ οὕτως ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ. ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ· καὶ ὡς

Prop. XLVII. *Theor.*

Iisdem positis, recta ab occursu junctarum ad tactum ducta perpendicularis erit super contingentem.

PONANTUR eadem quæ prius; & rectæ lineæ ΓΗ, ΖΔ sibi ipsis occurrant in puncto Θ; rectæ vero ΓΔ, ΒΑ productæ occurrant in puncto Κ; jungaturque ΕΘ: dico ΕΘ super ΓΔ perpendicularem esse.

Si enim non ita sit; ducatur à puncto Θ ad ΓΔ perpendicularis ΘΛ. quoniam igitur angulus ΓΔΖ æqualis est [per præced.] angulo ΗΔΒ, & angulus ΔΒΗ rectus æqualis recto ΔΛΘ; triangulum ΔΗΒ triangulo ΛΘΔ simile erit: quare [per 4. 6.] ut ΗΔ ad ΔΘ ita ΒΔ ad ΔΛ. sed ut ΗΔ ad ΔΘ ita ΖΓ ad ΓΘ, propterea quod [ex præc.] anguli ad Z, H recti, & qui ad Θ æquales sunt. est autem ut ΖΓ ad ΓΘ ita ΑΓ ad ΓΛ, ob similitudinem triangulorum ΑΖΓ, ΛΓΘ: ut igitur ΒΔ ad ΔΛ ita [per 11. 5.] ΑΓ ad ΓΛ: & permutando ut ΔΒ ad ΓΑ ita ΔΛ ad ΛΓ. ut autem ΔΒ ad ΓΑ ita ΒΚ ad ΚΑ: ergo ut ΔΛ ad ΛΓ ita ΒΚ ad ΚΑ. à puncto Β ducatur recta ΕΜ ipsi ΑΓ parallela, quæ proinde ad ΑΒ ordinatim applicata erit; & ut ΒΚ ad ΚΑ ita erit [per 36. 1. huj.] ΒΜ ad ΜΑ. sed [per 4. 6.] ut ΒΜ ad ΜΑ ita ΔΕ ad ΕΓ: quare [per 11. 5.] ut

ΔΛ

ΔΛ ad ΛΓ ita erit ΔΕ ad ΕΓ; quod est absurdum. igitur ΘΛ non est perpendicularis ad ΔΓ, neque alia ulla præter ipsam ΘΕ.

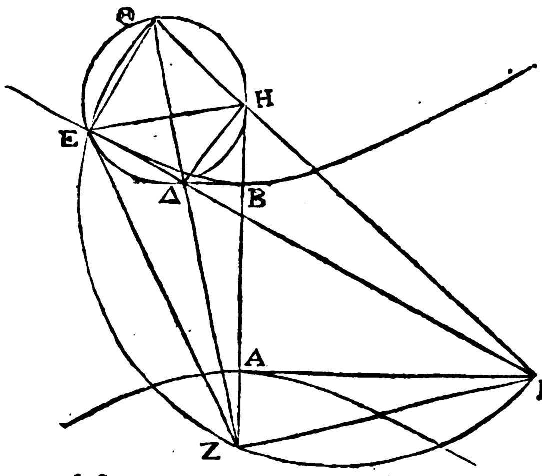
ἄρα ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΘΛ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΓ, οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΘΕ.

Prop. XLVIII. *Theor.*

Iisdem positis, ostendendum est rectas, quæ à tactu ducuntur ad puncta ex applicatione facta, æquales continere angulos cum contingente.

PONANTUR eadem quæ prius; & jungantur ΕΖ, ΕΗ: dico angulum ΓΕΖ angulo ΗΕΔ æqualem esse.

Quoniam enim [per 46. & 47.3.huj.] anguli ΔΗΘ, ΔΕΘ recti sunt, circulus circa diametrum ΔΘ descriptus per puncta Ε, Η transibit: quare [per 21. 3.] angulus ΔΘΗ æqualis erit angulo ΔΕΗ; in eodem enim circuli segmento sunt. similiter & ΓΕΖ angulus angulo ΓΘΖ est æqualis: angulus autem ΓΘΖ angulo ΔΘΗ [per 15.1.] æqualis est; quia sunt ad verticem: angulus igitur ΓΕΖ angulo ΔΕΗ æqualis erit.

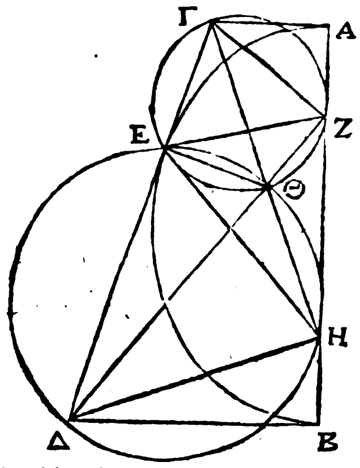


ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, δεικτέον ὅτι αἱ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γινόμενα σημεῖα ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ.

ΥΠΟΚΕΙΣΘΩ τὰ αὐτὰ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΕΔ.

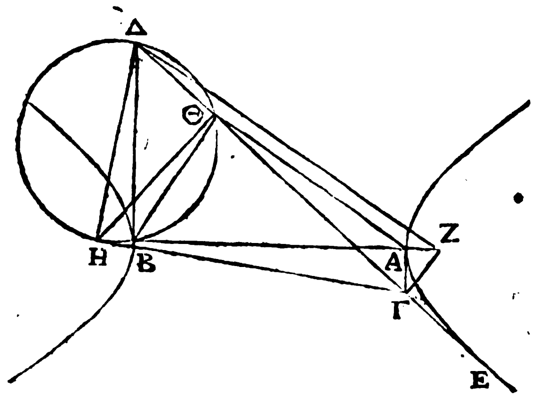
Ἐπεὶ γὰρ ὀρθαί εἰσιν αἱ ὑπὸ ΔΗΘ, ΔΕΘ γωνίαι, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΔΘ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Ε, Η σημείων· ὥστε ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΔΘΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΗ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΖ τῇ ὑπὸ ΓΘΖ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ ὑπὸ ΓΘΖ τῇ ὑπὸ ΔΘΗ ἐστὶν ἴση, κατὰ κορυφὴν γάρ. καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστὶν ἴση.



Prop. XLIX. *Theor.*

Iisdem positis, si ab aliquo horum punctorum perpendicularis ad contingentem demittatur: quæ à puncto quo cadit cathetus ducuntur ad axis utramque extremitatem rectos angulos inter se continebunt.

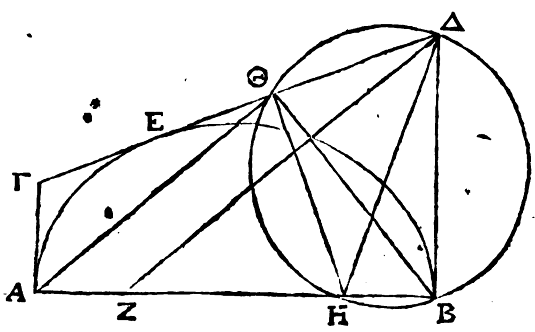
PONANTUR eadem, & à puncto Η ad ΓΔ ducatur perpendicularis ΗΘ; & jungantur ΑΘ, ΒΘ: dico angulum ΑΘΒ rectum esse.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἀπό τινος τῶν σημείων κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην· αἱ ἀπὸ τοῦ γινομένου σημείου ἐπὶ τὰ πέρατα τοῦ ἄξονος ὀρθὴν ποιοῦσι γωνίαν.

ΥΠΟΚΕΙΣΘΩ γὰρ τὰ αὐτὰ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΒΘ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΑΘΒ γωνία ὀρθή ἐστιν.



Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΘΗ, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΔΗ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Θ, Β, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΗΘΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΗ. ἡ δὲ ὑπὸ ΑΗΓ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΗΓ, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΑΘΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΓΘΗ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΓΘΗ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΘΒ.

Quoniam enim angulus ΔBH & ΔΘH est rectus; si circa diametrum ΔH circulus describatur, transibit per puncta Θ, B, & [per 21.3.] angulus HΘB angulo BΔH æqualis erit. angulus autem AHΓ ostensus est [per 45. 3. huj.] æqualis angulo BΔH: ergo HΘB angulus æqualis est angulo AHΓ, hoc est angulo AΘΓ: & propterea angulus ΓΘH angulo AΘB. sed rectus est [ex hyp.] angulus ΓΘH: ergo & AΘB rectus erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

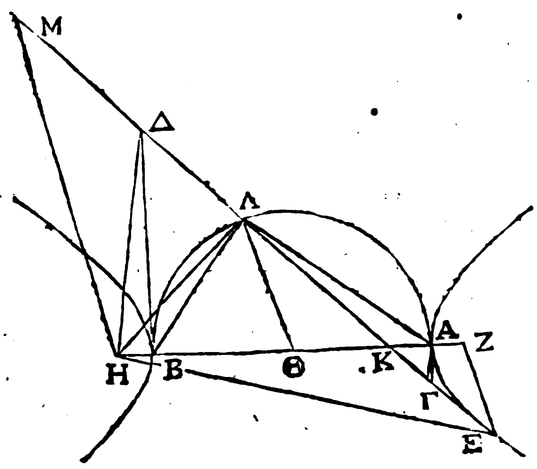
Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς προσπέσῃ τις τῇ ἐφαπτομένῃ, παράλληλος οὖσα τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ ἑνὸς τῶν σημείων ἐκ τῆς παραβολῆς· ἡ ἠγμένη εὐθεῖα ἴση ἔσται τῇ ἡμισείᾳ τοῦ ἄξονος.

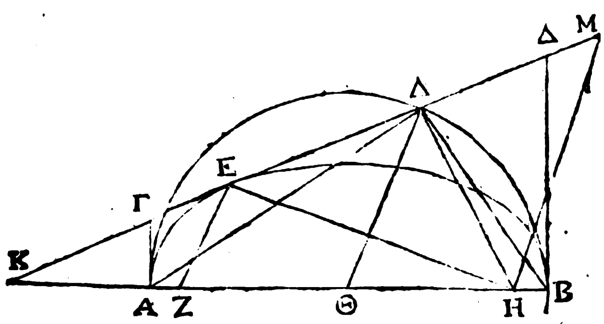
ΕΣΤΩ γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ αἱ ΔΓ, ΒΑ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΕΖ ἤχθω ἡ ΘΛ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΛ τῇ ΘΒ.

Prop. L. *Theor.*

Iisdem positis, si à centro sectionis ducatur recta contingenti occurrens, ac parallela ei quæ per tactum & per alterutrum punctorum ex applicatione ducitur: erit ea dimidio axis æqualis.

SINT eadem quæ supra, & centrum sit Θ; jungatur autem EZ, & rectæ ΔΓ, BA inter se conveniant in K; & per Θ ducatur ΘΛ parallela ipsi EZ: dico ΘΛ ipsi ΘB æqualem esse.





Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΕΗ, ΑΛ, ΛΗ, ΛΒ, καὶ διὰ τοῦ Η παρὰ τὴν ΕΖ ἤχθω ἡ ΗΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΗΒ· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΗΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΘ ἄρα τῇ ΘΗ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΜ ἴση. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΓΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΜΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΜΗ τῇ ὑπὸ ΜΕΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΗ τῇ ΗΜ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΜ ἐδείχθη ἴση· κάθετος ἄρα ἡ ΗΛ ἐπὶ τὴν ΕΜ. ἔστι δέ, διὰ τὸ προδειχθέν, ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΛΒ γωνία· καὶ ὁ ἄρα περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τοῦ Λ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΘΑ τῇ ΘΒ· καὶ ἡ ΘΛ ἄρα, ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα τοῦ ἡμικυκλίου, ἴση ἐστὶ τῇ ΘΒ.

Jungantur enim EH, AΛ, ΛH, ΛB; & per H ducatur HM parallela ipsi EZ. quoniam igitur rectangulum AZB est æquale rectangulo AHB, recta AZ ipsi HB æqualis erit. est autem & AΘ æqualis ΘB: ergo & ZΘ ipsi ΘH; & propterea EΛ ipsi ΛM est æqualis. itaque quoniam demonstratum est [ad 48. 3. huj.] angulum ΓEZ angulo ΔEH æqualem esse; estque angulus ΓEZ [per 29.1.] æqualis angulo EMH: erit & angulus EMH ipsi MEH æqualis, & recta EH ipsi HM. sed & EΛ est æqualis ipsi ΛM, uti demonstravimus: recta igitur HΛ ad EM perpendicularis est. est autem [per 49. 3. huj.] & angulus AΛB rectus: quare si circa diametrum AB circulus describatur, per Λ transibit. atque est ΘA æqualis ipsi ΘB: ergo & ΘΛ, quæ est ex centro circuli, ipsi ΘB æqualis erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ τῶν ἀντικειμένων παρὰ τὸν ἄξονα ἴσον ἐφ' ἑκάτερα παραβληθῇ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ

Prop. LI. *Theor.*

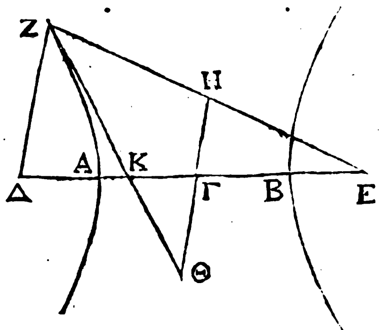
Si in hyperbola, vel oppositis sectionibus applicetur ad axem rectangulum æquale quartæ parti figuræ excedens figurâ quadratâ;

drata; & à punctis ex applicatione factis ad alterutram sectionum rectæ lineæ inclinentur: major minorem quantitate axis superabit.

ἀπὸ τῶν γινομένων ἐκ τῆς παραβολῆς σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ὁποτέραν τῶν τομῶν· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος ὑπερέχει τῷ ἄξονι.

SIT hyperbola, vel oppositæ sectiones, quarum axis A B, centrumque Γ; & quartæ parti figuræ æquale sit utrumque rectangulorum A Δ B, A E B; & à punctis E, Δ ad sectionem inclinentur E Z, Z Δ: dico E Z ipsam Z Δ superare quantitate A B.

Ducatur enim per Z recta Z K Θ sectionem contingens, & per Γ ducatur H Γ Θ parallela ipsi Z Δ: erit igitur angulus K Θ H angulo K Z Δ æqualis; alterni enim sunt. angulus vero K Z Δ [per 48.3.huj.] æqualis est angulo H Z Θ: ergo & H Z Θ ipsi H Θ Z, rectaque H Z ipsi H Θ. sed [per 2.6.] recta Z H ipsi H E æqualis est; quia A E æqualis est Δ B, & A Γ ipsi Γ B, & E Γ ipsi Γ Δ: est igitur recta H Θ æqualis ipsi E H; & ob id Z E ipsius H Θ dupla. itaque quoniam demonstrata est [ad 50. 3. huj] Γ Θ ipsi Γ B æqualis; erit E Z utriusque H Γ, Γ B dupla. sed ipsius quidem H Γ dupla est Z Δ; ipsius vero Γ B dupla A B: recta igitur E Z utrique Z Δ, A B est æqualis; & propterea E Z ipsam Z Δ superat quantitate A B.



Ἔστω γὰρ ὑπερβολὴ, ἢ ἀντικείμεναι, ὧν ἄξων ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον ἔστω ἑκάτερον τῶν ὑπὸ ΑΔΒ, ΑΕΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Δ σημείων κεκλάσθωσαν πρὸς τὴν γραμμὴν αἱ ΕΖ, ΖΔ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ τῆς ΖΔ ὑπερέχει τῇ ΑΒ.

Ἤχθω διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένη ἡ ΖΚΘ, διὰ δὲ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΖΔ ἡ ΗΓΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΘΗ τῇ ὑπὸ ΚΖΔ, ἐναλλὰξ γάρ. ἡ δὲ ὑπὸ ΚΖΔ ἴση τῇ ὑπὸ ΗΖΘ· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΘ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ· ἴση ἄρα ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ. ἡ δὲ ΖΗ τῇ ΗΕ ἴση, ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΔ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ καὶ ἡ ΕΓ τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση· ὥστε ἡ ΖΕ τῆς ΗΘ ἐστὶ διπλῆ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΘ ἴση δέδεικται τῇ ΓΒ, ἡ ΕΖ ἄρα διπλῆ ἐστι συναμφοτέρου τῆς ΗΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τῆς μὲν ΗΓ διπλῆ ἡ ΖΔ, τῆς δὲ ΓΒ διπλῆ ἡ ΑΒ· ἡ ΕΖ ἄρα ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΖΔ, ΑΒ, ὥστε ἡ ΕΖ τῆς ΖΔ ὑπερέχει τῇ ΑΒ.

PROP. LII. *Theor.*

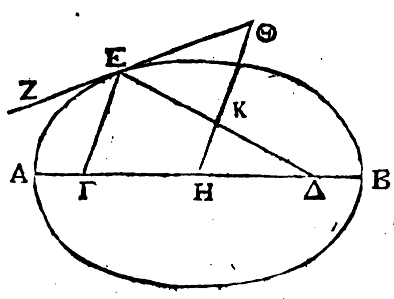
Si in ellipsi ad majorem axem ab utraque parte applicetur rectangulum æquale quartæ parti figuræ deficiens figura quadrata; & à punctis ex applicatione factis ad sectionem rectæ lineæ inclinentur: ipsi axi æquales erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

Ἐὰν ἐλλείψεως παρὰ τὸν μείζονα τῶν ἀξόνων τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον ἐφ' ἑκάτερα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἀπὸ τῶν γινομένων ἐκ τῆς παραβολῆς σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὴν γραμμήν· ἴσαι ἔσονται τῷ ἄξονι.

SIT ellipsis, cujus major axis A B; & sit utrumque rectangulorum A Γ B, A Δ B æquale quartæ parti figuræ; & à punctis Γ, Δ ad sectionem inclinentur rectæ lineæ Γ E, E Δ: dico Γ E, E Δ axi A B æquales esse.

Ducatur enim contingens Z E Θ; & per centrum, quod sit H, ducatur H K Θ ipsi Γ E parallela. quoniam igitur angulus Γ E Z [per 48. 3. huj.] est æqualis angulo Θ E K, & [per 29.1.] angulus Z E Γ angulo E Θ K; erit angulus E Θ K ipsi Θ E K æqualis, & [per 6. 1.] recta Θ K æqualis ipsi K E. & quoniam A H est æqualis ipsi H B, & Γ A ipsi Δ B; erit & Γ H ipsi H Δ æqualis: ergo [per 2.6.] & E K æqualis ipsi K Δ. & ob id E Δ quidem dupla est ipsius Θ K; ut & E Γ [per 4.6.] dupla ipsius K H: utraque igitur Γ E, E Δ ipsius H Θ est dupla. sed A B [per 50.3.huj.] dupla est ipsius H Θ: quare A B ipsis Γ E, E Δ æqualis erit.



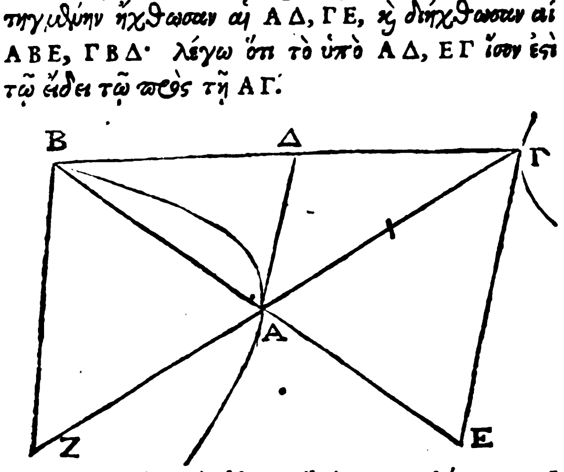
Ἔστω ἔλλειψις, ἧς μείζων τῶν ἀξόνων ὁ ΑΒ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἑκάτερον ἴσον ἔστω τῶν ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ κεκλάσθωσαν πρὸς τὴν γραμμὴν αἱ ΓΕ, ΕΔ· λέγω ὅτι αἱ ΓΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΒ.

Ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΖΕΘ, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ Η παρὰ τὴν ΓΕ ἡ ΗΚΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΖ τῇ ὑπὸ ΘΕΚ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΚ· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΘΕΚ ἐστὶν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ ἴση, καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΔ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΚΔ. καὶ διὰ τοῦτο διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΕΔ τῆς ΘΚ, ἡ δὲ ΕΓ τῆς ΚΗ· καὶ συναμφότερος ἄρα ἡ ΓΕ, ΕΔ διπλῆ ἐστι τῆς ΗΘ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ διπλῆ τῆς ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ ταῖς ΓΕ, ΕΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

Εαν ἐν ὑπερβολῇ, ἢ ἐλλείψει, ἢ κύκλου περιφερείᾳ, ἢ ταῖς ἀντικειμέναις, ἀπ' ἄκρας τῆς διαμέτρου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι τέμνωσι τὰς παραλλήλους· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων ἴσον ἔσται τῷ πρὸς τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ εἴδει.

ΕΣΤΩ μία τῶν εἰρημένων τομῶν ἡ ΑΒΓ, ἧς διάμετρος ἡ ΑΓ, καὶ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΕ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΒΕ, ΓΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ εἴδει τῷ πρὸς τῇ ΑΓ.

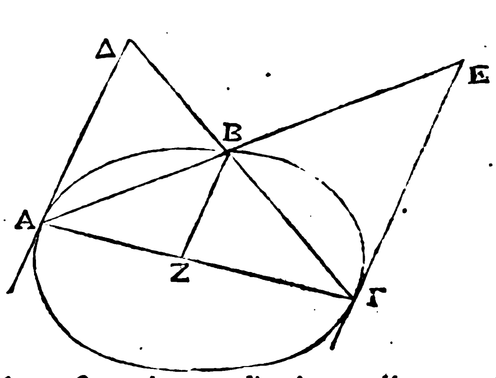


Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΒΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ εἶδος. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΑΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΑΖ πρὸς ΖΒ καὶ τοῦ τῆς ΓΖ πρὸς ΖΒ· ὁ ἄρα τοῦ εἴδους πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΖΒ πρὸς ΑΖ καὶ τοῦ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΓ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς ΑΖ οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς ΓΑ, ὡς δὲ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΓ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΓ· ὁ ἄρα τοῦ εἴδους πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΓΕ πρὸς ΓΑ καὶ τοῦ τῆς ΑΔ πρὸς ΓΑ. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον ἐκ τῶν αὐτῶν· ὡς ἄρα τὸ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ τῷ παρὰ τὴν ΑΓ εἴδει.

Prop. LIII. *Theor.*

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel sectionibus oppositis, ab extremis diametri ducantur rectæ ordinatim applicatis parallelæ; & ab iisdem terminis ad idem sectionis punctum rectæ ductæ occurrant parallelis: rectangulum sub abscissis factum æquale erit figuræ quæ ad eandem diametrum constituitur.

SIT quævis dictarum sectionum ABΓ, cujus diameter AΓ; ducanturque AΔ, ΓE ordinatim applicatis parallelæ, & ABE, ΓBΔ producantur: dico rectangulum contentum sub AΔ, EΓ figuræ quæ fit ad AΓ æquale esse.



A puncto enim B ordinatim applicetur recta BZ: ergo [per 21. 1. huj.] ut rectangulum AZΓ ad quadratum ex ZB ita transversum figuræ latus ad rectum; & [per 1. 6.] ita quadratum ex AΓ ad ipsius figuram. sed [per 23.6.] rectanguli AZΓ ad quadratum ex BZ ratio componitur ex ratione AZ ad ZB & ratione ΓZ ad ZB: ergo ratio figuræ ad quadratum ex AΓ componitur ex ratione ZB ad AZ & ratione BZ ad ZΓ. sed ut ZB ad AZ ita EΓ [per 4. 6.] ad ΓA, & ut BZ ad ZΓ ita ΔA ad AΓ: ratio igitur figuræ ad quadratum ex AΓ componitur ex ratione ΓE ad ΓA & ratione AΔ ad ΓA. sed [per 23.6.] rectangulum contentum sub AΔ, ΓE ad quadratum ex AΓ ex eisdem rationibus componitur: ergo ut figura ad quadratum ex AΓ ita est rectangulum contentum sub AΔ, ΓE ad quadratum ex AΓ: rectangulum igitur contentum sub AΔ, ΓE æquale erit figuræ quæ fit ad AΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

Εαν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἁφῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς διαχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰς ἁφὰς τετράγωνον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον, ἐκ τοῦ

Prop. LIV. *Theor.*

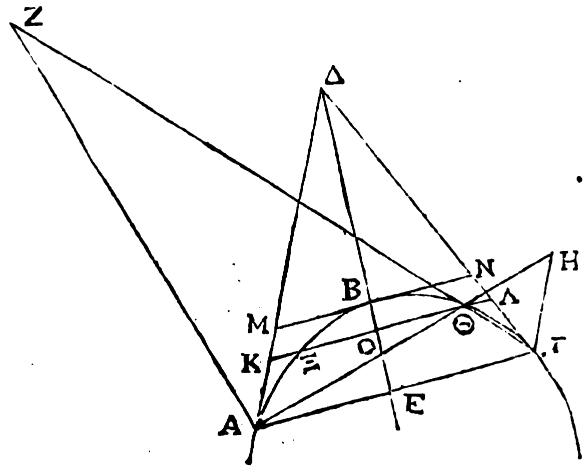
Si duæ rectæ lineæ coni sectionem vel circuli circumferentiam contingentes sibi ipsis occurrant, & per tactus ducantur contingentibus parallelæ; à tactibus vero ad idem sectionis punctum ductæ rectæ parallelis occurrant: rectangulum sub abscissis ad quadratum rectæ tactus jungentis rationem habebit compositam, ex ratione quam habet quadratum portionis rectæ

rectæ ab occursu contingentium ad punctum medium jungentis tactus ductæ quæ est intra sectionem ad reliquæ portionis quadratum, & ex ratione quam habet rectangulum sub contingentibus contentum ad quartam partem quadrati ejus quæ tactus conjungit.

ὃν ἔχει τῆς ἐπιζευγνυούσης τὴν σύμπτωσιν τῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τὸ ἐντὸς τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν δυνάμει, καὶ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετραγώνου.

SIT coni sectio, vel circuli circumferentia ΑΒΓ, quam contingant rectæ lineæ ΑΔ, ΓΔ; & juncta ΑΓ bifariam in puncto Ε dividatur, jungaturque ΔΒΕ; à puncto autem Α ducatur recta ΑΖ ipsi ΓΔ parallela, & à puncto Γ recta ΓΗ parallela ipsi ΑΔ; denique sumpto in sectione quovis puncto Θ, jungantur ΑΘ, ΓΘ, & ad puncta Η, Ζ producantur: dico rectangulum contentum sub ΑΖ, ΓΗ ad quadratum ex ΑΓ rationem habere compositam, ex ratione quadrati ex ΕΒ ad quadratum ex ΒΔ & ratione rectanguli ΑΔΓ ad quartam partem quadrati ex ΑΓ, hoc est ad rectangulum ΑΕΓ.

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΓ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒΕ, καὶ ἤχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Α παρὰ τὴν ΓΔ ἡ ΑΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΔ ἡ ΓΗ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΘ, ΓΘ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Ζ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΕΓ.



Ducatur enim à puncto quidem Θ recta ΘΚΛΞΟ; à puncto autem Β recta ΒΜΝ, quæ ipsi ΑΓ parallelæ sint: perspicuum est [per 32. 1.huj.] rectam ΜΝ sectionem contingere. & cum ΑΕ sit æqualis ipsi ΕΓ; erit & ΜΒ ipsi ΒΝ æqualis, & ΚΟ ipsi ΟΛ, & [per 46. & 47. 1.huj.] ΘΟ ipsi ΟΞ, & ΚΘ ipsi ΞΛ. itaque quoniam ΜΒ, ΜΑ sectionem contingunt, & ipsi ΜΒ parallela ducta est ΚΘΛ; erit [per 16. 3. huj.] ut quadratum ex ΑΜ ad quadratum ex ΜΒ, hoc est ad rectangulum ΝΒΜ, ita quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΞΚΘ, hoc est ad rectangulum ΛΘΚ. ut autem ΝΓ ad ΑΜ ita ΛΓ ad ΚΑ: [a] ut igitur rectangulum sub ΝΓ, ΜΑ ad quadratum ex ΑΜ ita rectangulum sub ΛΓ, ΚΑ ad quadratum ex ΑΚ: ergo ex æquali ut rectangulum sub ΝΓ, ΜΑ ad rectangulum ΝΒΜ ita rectangulum sub ΛΓ, ΚΑ ad rectangulum ΛΘΚ. sed [per 23. 6.] rectangulum sub ΛΓ, ΚΑ ad rectangulum ΛΘΚ rationem habet compositam ex ratione ΓΛ ad ΛΘ, hoc est [per 4.6.] ΖΑ ad ΑΓ, & ratione ΑΚ ad ΚΘ, hoc est ΗΓ ad ΓΑ, atque hæc eadem est ratio quæ rectanguli sub ΗΓ, ΖΑ ad quadratum ex ΓΑ: ut igitur rectangulum sub ΝΓ, ΜΑ ad rectangulum ΝΒΜ ita rectangulum sub ΗΓ, ΖΑ ad quadratum ex ΓΑ. rectangulum vero sub ΝΓ, ΜΑ ad rectangulum ΝΒΜ, (sumpto medio rectangulo ΝΔΜ) habet rationem compositam, ex ratione rectanguli sub ΝΓ, ΜΑ ad rectangulum ΝΔΜ & ratione rectanguli ΝΔΜ ad rectangulum ΝΒΜ: ergo & rectangulum sub ΗΓ, ΖΑ ad quadratum ex ΓΑ habet rationem compositam ex ratione rectanguli sub ΝΓ, ΜΑ ad rectangulum ΝΔΜ & ratione re-

Ἤχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΘΚΛΞΟ, ἀπὸ δὲ τοῦ Β ἡ ΒΜΝ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐφάπτεται ἡ ΜΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ· ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΜΒ τῇ ΒΝ, καὶ ἡ ΚΟ τῇ ΟΛ, καὶ ἡ ΘΟ τῇ ΟΞ, καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΞΛ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΜΒ, ΜΑ, καὶ παρὰ τὴν ΜΒ ἦκται ἡ ΚΘΛ· ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΚΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΛΘΚ. ὡς δὲ ἡ ΝΓ πρὸς ΑΜ οὕτως ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΚΑ· [a] ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΛΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΑ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΛΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ. τὸ δὲ ὑπὸ ΛΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ τῆς ΓΛ πρὸς ΛΘ, τουτέστι τῆς ΖΑ πρὸς ΑΓ, καὶ τοῦ τῆς ΑΚ πρὸς ΚΘ, τουτέστι τῆς ΗΓ πρὸς ΓΑ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ. τὸ δὲ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ (τοῦ ὑπὸ ΝΔΜ μέσου λαμβανομένου) τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ καὶ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ καὶ τοῦ ὑπὸ ΝΔΜ

πρὸς

πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ. [b] ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, [c] ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΓ, ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ τοῦ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ.

ctanguli ΝΔΜ ad rectangulum ΝΒΜ: [b] sed ut rectangulum sub ΝΓ, ΜΑ ad rectangulum ΝΔΜ ita quadratum ex ΕΒ ad quadratum ex ΒΔ; [c] & ut rectangulum ΝΔΜ ad rectangulum ΝΒΜ ita rectangulum ΓΔΑ ad rectangulum ΓΕΑ: rectangulum igitur sub ΗΓ, ΑΖ ad quadratum ex ΑΓ compositam rationem habet ex ratione quadrati ex ΕΒ ad quadratum ex ΒΔ & ratione rectanguli ΓΔΑ ad rectangulum ΓΕΑ.

EUTOCIUS.

[a] Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΛΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΑ.] Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΜ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΔΝ, ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΜ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΓΝ· διὰ ταῦτα δὴ καὶ τὸ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ οὕτως ἡ ΛΓ πρὸς ΓΔ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΜΑ πρὸς ΑΚ οὕτως ἡ ΝΓ πρὸς ΓΛ, ἐναλλὰξ δὲ ὡς ἡ ΜΑ πρὸς ΝΓ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς ΓΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΛΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΑ.

[a] Ut autem rectangulum sub ΝΓ, ΜΑ ad quadratum ex ΑΜ ita rectangulum sub ΛΓ, ΚΑ ad quadratum ex ΚΑ.] Quoniam enim ut ΑΔ ad ΔΜ ita ΓΔ ad ΔΝ, erit per conversionem rationis ut ΔΑ ad ΑΜ ita ΔΓ ad ΓΝ; eadem quoque ratione & invertendo demonstrabitur ut ΚΑ ad ΑΔ ita ΛΓ ad ΓΔ: ergo ex æquali ut ΜΑ ad ΑΚ ita ΝΓ ad ΓΛ, & permutando ut ΜΑ ad ΝΓ ita ΚΑ ad ΓΛ: ut igitur rectangulum sub ΝΓ, ΜΑ ad quadratum ex ΑΜ ita rectangulum sub ΛΓ, ΚΑ ad quadratum ex ΚΑ.

[b] Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.] Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΜ, ΓΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΔ καὶ τοῦ τῆς ΓΝ πρὸς ΝΔ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΔ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς ΒΔ, ὡς δὲ ἡ ΓΝ πρὸς ΝΔ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΜ, ΓΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΒ πρὸς ΒΔ. ἔχει δὲ τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς ΕΒ πρὸς ΒΔ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΜ, ΓΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.

[b] Sed ut rectangulum sub ΝΓ, ΜΑ ad rectangulum ΝΔΜ ita quadratum ex ΕΒ ad quadratum ex ΒΔ.] Nam cum rectangulum sub ΑΜ, ΓΝ ad rectangulum ΝΔΜ compositam rationem habeat ex ratione ΑΜ ad ΜΔ & ratione ΓΝ ad ΝΔ; ut autem ΑΜ ad ΜΔ ita ΕΒ ad ΒΔ, ut vero ΓΝ ad ΝΔ ita ΕΒ ad ΒΔ: habebit igitur rectangulum sub ΑΜ, ΓΝ ad rectangulum ΝΔΜ rationem duplicatam ejus quam habet ΕΒ ad ΒΔ. sed quadratum ex ΕΒ ad quadratum ex ΒΔ duplicatam habet rationem ipsius ΕΒ ad ΒΔ: quare ut rectangulum sub ΑΜ, ΓΝ ad rectangulum ΝΔΜ ita quadratum ex ΕΒ ad quadratum ex ΒΔ.

[c] Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ.] Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΔΝ πρὸς ΝΒ καὶ τοῦ τῆς ΔΜ πρὸς ΜΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΝ πρὸς ΝΒ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΒ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΕ· ἕξει ἄρα τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς ΓΕ καὶ τοῦ τῆς ΔΑ πρὸς ΑΕ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ οὕτω τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ.

[c] Et ut rectangulum ΝΔΜ ad rectangulum ΝΒΜ ita rectangulum ΓΔΑ ad rectangulum ΓΕΑ.] Quoniam enim rectangulum ΝΔΜ ad rectangulum ΝΒΜ rationem habet compositam ex ratione ΔΝ ad ΝΒ & ratione ΔΜ ad ΜΒ; ut autem ΔΝ ad ΝΒ ita ΔΓ ad ΓΕ, & ut ΔΜ ad ΜΒ ita ΔΑ ad ΑΕ: habebit igitur rationem compositam ex ratione ΔΓ ad ΓΕ & ratione ΔΑ ad ΑΕ; quæ quidem ratio eadem est quam rectangulum ΓΔΑ habet ad rectangulum ΓΕΑ: ut igitur rectangulum ΝΔΜ ad rectangulum ΝΒΜ ita rectangulum ΓΔΑ ad rectangulum ΓΕΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν διαχθῶσι παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις, προσβληθῶσι δὲ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἑτέρας τομῆς τέμνουσαι τὰς παραλλήλους· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς συμπτώσεως παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἕως τῆς τομῆς.

Prop. LV. *Theor.*

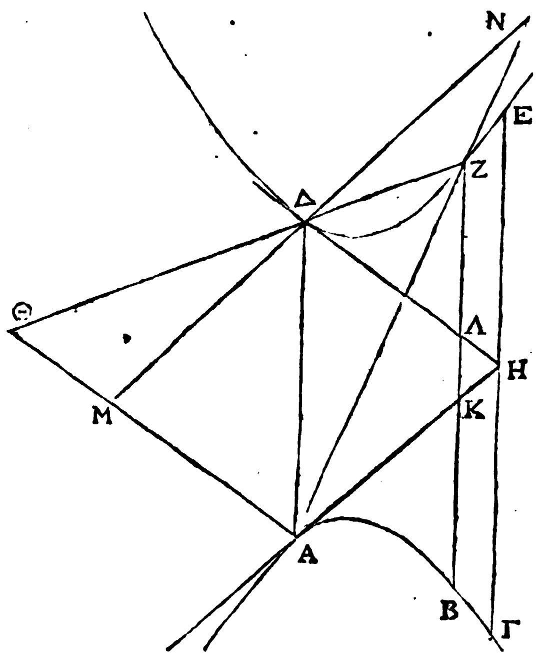
Si duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contingentes sibi ipsis occurrant, & per occursum ducatur recta jungenti tactus parallela; per tactus vero ducantur contingentibus parallelæ, & à tactibus ad idem alterutræ sectionis punctum ducantur rectæ quæ parallelas secent: rectangulum sub abscissis contentum ad quadratum ejus quæ tactus jungit eandem rationem habebit, quam rectangulum sub contingentibus factum ad quadratum rectæ ab occursu ad sectionem ductæ jungentique tactus parallelæ.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΗ, ΗΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Η παρὰ τὴν ΑΔ ἤχθω ἡ ΓΗΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α παρὰ τὴν ΔΗ ἡ ΑΜ,

Sint oppositæ sectiones ΑΒΓ, ΔΕΖ, quas contingant rectæ ΑΗ, ΗΔ; & juncta ΑΔ ducatur per Η recta ΓΗΕ ipsi ΑΔ parallela; & à puncto Α ducatur ΑΜ parallela ipsi ΔΗ, atque

atque à Δ recta Δ M ipsi A H parallela. sumatur autem in sectione Δ Z aliquod punctum Z, & jungantur A Z N, Z Δ Θ: dico rectangulum sub A Θ, N Δ esse ad quadratum ex A Δ sicut rectangulum A H Δ ad quadratum ex Γ H.

Ducatur per Z recta Z Λ K B quæ ipsi A Δ æquidistet. quoniam igitur demonstratum est [ad 20.3.huj.] ut quadratum ex E H ad quadratum ex H Δ ita rectangulum B Λ Z ad quadratum ex Λ Δ; & est Γ H æqualis E H, & K Z ipsi B Λ: erit ut quadratum ex Γ H ad quadratum ex H Δ ita rectangulum K Z Λ ad quadratum ex Λ Δ. est autem ut quadratum ex Δ H ad rectangulum Δ H A ita quadratum ex Δ Λ ad rectangulum sub Δ Λ, A K: ergo ex æquali ut quadratum ex Γ H ad rectangulum Δ H A ita rectangulum K Z Λ ad rectangulum sub Δ Λ, A K. sed ratio rectanguli K Z Λ ad rectangulum sub A K, Δ Λ componitur ex ratione Z K ad K A & ratione Z Λ ad Λ Δ; ut autem Z K ad K A ita [per 4. 6.] A Δ ad Δ N, & ut Z Λ ad Λ Δ ita Δ A ad A Θ: ratio igitur quadrati ex Γ H ad rectangulum Δ H A composita est ex ratione A Δ ad Δ N & ratione Δ A ad A Θ. sed quadrati ex A Δ ad rectangulum sub A Θ, N Δ ratio ex eisdem rationibus componitur: ergo ut quadratum ex Γ H ad rectangulum A H Δ ita est quadratum ex A Δ ad rectangulum ex A Θ, N Δ; & invertendo rectangulum sub A Θ, N Δ erit ad quadratum ex A Δ ut rectangulum A H Δ ad quadratum ex Γ H.



ἀπὸ δὲ τοῦ Δ παρὰ τὴν A H ἡ Δ M· εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Δ Z τομῆς τὸ Z, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ A Z N, Z Δ Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ A Θ, N Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς A Δ οὕτως τὸ ὑπὸ A H Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ H.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Z παρὰ τὴν A Δ ἡ Z Λ K B. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ E H πρὸς τὸ ἀπὸ H Δ οὕτως τὸ ὑπὸ B Λ Z πρὸς τὸ ἀπὸ Λ Δ, ἴση δὲ ἡ μὲν Γ H τῇ E H, ἡ δὲ K Z τῇ B Λ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Γ H πρὸς τὸ ἀπὸ H Δ οὕτως τὸ ὑπὸ K Z Λ πρὸς τὸ ἀπὸ Λ Δ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ Δ H πρὸς τὸ ὑπὸ Δ H A οὕτως τὸ ἀπὸ Δ Λ πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Λ, A K· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ Γ H πρὸς τὸ ὑπὸ Δ H A οὕτως τὸ ὑπὸ K Z Λ πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Λ, A K. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ K Z Λ πρὸς τὸ ὑπὸ A K, Δ Λ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ τῆς Z K πρὸς K A καὶ τοῦ τῆς Z Λ πρὸς Λ Δ· ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ Z K πρὸς K A οὕτως ἡ A Δ πρὸς Δ N, ὡς δὲ ἡ Z Λ πρὸς Λ Δ οὕτως ἡ Δ A πρὸς A Θ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ Γ H πρὸς τὸ ὑπὸ Δ H A λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς A Δ πρὸς Δ N καὶ τοῦ τῆς Δ A πρὸς A Θ. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ A Δ πρὸς τὸ ὑπὸ A Θ, N Δ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ Γ H πρὸς τὸ ὑπὸ A H Δ οὕτως τὸ ἀπὸ A Δ πρὸς τὸ ὑπὸ A Θ, N Δ· καὶ ἀνάπαλιν τὸ ὑπὸ A Θ, N Δ πρὸς τὸ ἀπὸ A Δ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ A H Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ H.

Prop. LVI. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ alteram oppositarum sectionum contingentes sibi ipsis occurrant, & per tactus ducantur contingentibus parallelæ; à tactibus vero ad idem alterius sectionis punctum ducantur rectæ, quæ parallelas secent: rectangulum sub abscissis contentum ad quadratum rectæ tactus jungentis rationem habebit, compositam ex ratione quam habet quadratum portionis rectæ ab occursu contingentium ad punctum medium jungentis tactus ductæ inter punctum illud & alteram sectionem interceptæ ad quadratum ejus quæ inter eandem sectionem & occursum, & ex ratione quam habet rectangulum sub contin-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛʹ.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἁφῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἑτέρας τομῆς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων λόγον ἕξει πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετράγωνον, τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει (ἐπὶ τῆς ἐπιζευγνυούσης τῆς σύμπτωσιν καὶ τὴν διχοτομίαν) ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς ἑτέρας τομῆς πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς αὐτῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως δυνάμει, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον

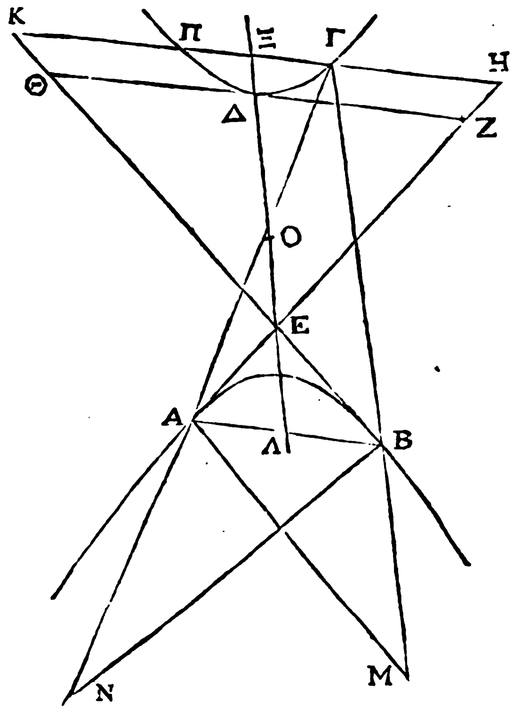
πρὸς

πρὸς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης.

gentibus factum ad quartam partem quadrati tactus jungentis.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ὧν κέντρον τὸ Ο, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΕΖΗ, ΒΕΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΛΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΕ ἡ ΑΜ, ἀπὸ δὲ τοῦ Β παρὰ τὴν ΑΕ ἡ ΒΝ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΓΔ τομῆς τὸ Γ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΓΒΜ, ΓΑΝ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΒΝ, ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΑΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΛΒ.

Sint oppositæ sectiones ΑΒ, ΓΔ, quarum centrum Ο, & contingentes ΑΕΖΗ, ΒΕΘΚ; & juncta ΑΒ dividatur bifariam in Λ, & jungatur ΛΕ & ad Δ producatur; à puncto autem Α ducatur ΑΜ ipsi ΒΕ parallela, & à puncto Β recta ΒΝ parallela ipsi ΑΕ; denique sumpto in sectione ΓΔ quovis puncto Γ, jungantur ΓΒΜ, ΓΑΝ: dico rectangulum sub ΒΝ, ΑΜ ad quadratum ex ΑΒ rationem habere compositam, ex ratione quadrati ex ΛΔ ad quadratum ex ΔΕ & ratione rectanguli ΑΕΒ ad quartam partem quadrati ex ΑΒ, sive ad rectangulum ΑΛΒ.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Γ, Δ παρὰ τὴν ΑΒ αἱ ΗΓΚ, ΖΔΘ· φανερὸν δή, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΛΒ, ὅτι ἴση ἡ ΔΘ τῇ ΔΖ καὶ ἡ ΚΞ τῇ ΞΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΞΓ τῇ ΞΠ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΗΠ. καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΔΓ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΒΕΘ, ΘΔ, καὶ παρὰ τὴν ΔΘ ἡ ΚΗ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΚΓ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΘΔ τῷ ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ δὲ ὑπὸ ΠΚΓ τῷ ὑπὸ ΚΓΗ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΖΑ, ΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΑ, ΚΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΚΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ λόγος (τοῦ ὑπὸ ΘΕΖ μέσου λαμβανομένου) σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕΖ καὶ τοῦ τοῦ ὑπὸ ΘΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ. καὶ ἔστιν ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΘΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ οὕτως τὸ ὑπὸ

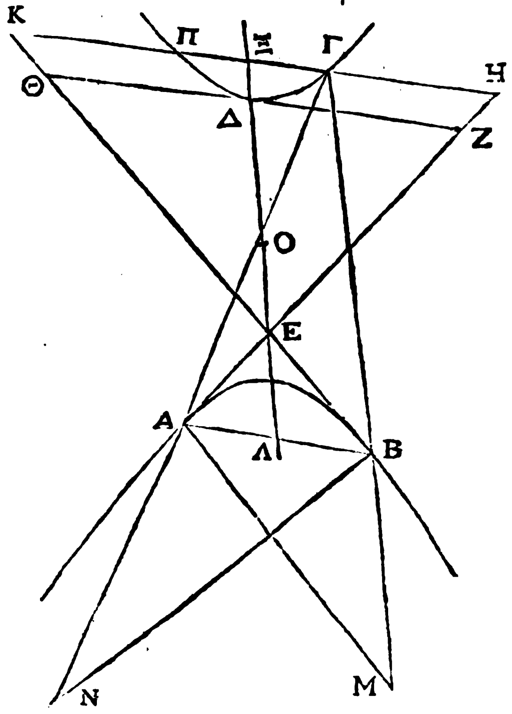
Ducantur enim à punctis Γ, Δ rectæ ΗΓΚ, ΖΔΘ parallelæ ipsi ΑΒ: patet igitur, ob ΑΛ æqualem ipsi ΛΒ, quod ΔΘ ipsi ΔΖ æqualis sit & ΚΞ ipsi ΞΗ. sed [per 47. 1. huj.] ΞΓ est æqualis ipsi ΞΠ: ergo & ΓΚ ipsi ΗΠ. & quoniam ΑΒ, ΔΓ oppositæ sectiones sunt, contingentesque ΒΕΘ, ΘΔ, & ducta est ΚΗ ipsi ΘΔ parallela; erit [per 18. 3. huj.] ut quadratum ex ΒΘ ad quadratum ex ΘΔ ita quadratum ex ΒΚ ad rectangulum ΠΚΓ. quadratum autem ex ΘΔ est æquale rectangulo ΘΔΖ, & rectangulum ΠΚΓ rectangulo ΚΓΗ; ergo ut quadratum ex ΒΘ ad rectangulum ΘΔΖ ita quadratum ex ΒΚ ad rectangulum ΚΓΗ. sed ut rectangulum sub ΖΑ, ΘΒ ad quadratum ex ΘΒ ita rectangulum sub ΗΑ, ΚΒ ad quadratum ex ΚΒ*: ex æquali igitur ut rectangulum sub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΔΖ ita rectangulum ex ΑΗ, ΚΒ ad rectangulum sub ΚΓΗ. ratio autem rectanguli sub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΔΖ (sumpto medio rectangulo ΘΕΖ) componitur ex ratione rectanguli sub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΕΖ & ratione rectanguli ΘΕΖ ad rectangulum ΘΔΖ. sed ut rectangulum sub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΕΖ ita quadratum ex ΛΔ ad quadratum ex ΔΕ†. & ut rectangulum ΘΕΖ ad rectangulum ΘΔΖ ita [per 12. lem. 3. huj.] rectangulum

* Quoniam enim similia sunt triangula ΑΕΒ, ΘΕΖ, ΚΕΗ, erit ΖΕ ad ΕΑ ut ΘΕ ad ΕΒ; & ideo componendo, ut ΖΑ ad ΑΕ ita ΘΒ ad ΒΕ. Pari modo constat esse ΗΑ ad ΑΕ ut ΚΒ ad ΒΕ; & invertendo, ut ΑΕ ad ΑΗ ita ΒΕ ad ΒΚ: quare, ex æquali, est ΖΑ ad ΑΗ sicut ΘΒ ad ΒΚ; adeoque ΖΑ ad ΘΒ ut ΑΗ ad ΒΚ. sed ut ΖΑ ad ΘΒ ita rectangulum sub ΖΑ, ΘΒ ad quadratum ex ΘΒ; & ut ΑΗ ad ΒΚ ita rectangulum sub ΗΑ, ΚΒ ad quadratum ex ΚΒ: est igitur ut rectangulum sub ΖΑ, ΘΒ ad quadratum ex ΘΒ ita rectangulum sub ΗΑ, ΚΒ ad quadratum ex ΚΒ.

† Nam ratio rectanguli sub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΕΖ componitur ex ratione ΑΖ ad ΖΕ & ratione ΒΘ ad ΘΕ. sed tam ratio ΑΖ ad ΖΕ quam ratio ΒΘ ad ΘΕ eadem est cum ratione ΛΔ ad ΔΕ: ergo ratio ex illis composita (hoc est ratio rectanguli sub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΕΖ) eadem est cum ratione quadrati ex ΛΔ ad quadratum ex ΔΕ.

ΑΕΒ

ΑΕΒ ad rectangulum ΑΛΒ; ergo ratio rectanguli sub ΑΗ, ΒΚ ad rectangulum ΚΓΗ composita est ex ratione quadrati ex ΛΔ ad quadratum ex ΔΕ & ratione rectanguli ΑΕΒ ad rectangulum ΑΛΒ. habet autem rectangulum sub ΑΗ, ΚΒ ad rectangulum ΚΓΗ rationem compositam ex ratione ΒΚ ad ΚΓ & ratione ΑΗ ad ΗΓ. atqui ut ΒΚ ad ΚΓ ita est [per 4. 6.] ΜΑ ad ΑΒ, & ut ΑΗ ad ΗΓ ita ΝΒ ad ΒΑ: ratio igitur composita ex ratione ΜΑ ad ΑΒ & ratione ΝΒ ad ΒΑ, quæ quidem eadem est quam habet rectangulum sub ΑΜ, ΒΝ ad quadratum ex ΑΒ, componitur ex ratione quadrati ex ΛΔ ad quadratum ex ΔΕ & ratione rectanguli ΑΕΒ ad rectangulum ΑΛΒ.



ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ· ὁ ἄρα τοῦ ὑπὸ ΑΗ, ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ. ἔχει δὲ τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΚΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ τὸν συγκείμενον λόγον, ἐκ τοῦ τῆς ΒΚ πρὸς ΚΓ καὶ τοῦ τῆς ΑΗ πρὸς ΗΓ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΒΚ πρὸς ΚΓ οὕτως ἡ ΜΑ πρὸς ΑΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ οὕτως ἡ ΝΒ πρὸς ΒΑ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΜΑ πρὸς ΑΒ καὶ τοῦ τῆς ΝΒ πρὸς ΒΑ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΑΜ, ΒΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ.

ΑΠΟΛ-

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ
ΚΩΝΙΚΩΝ
ΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟΝ,
ΜΕΤΑ ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑΤΩΝ.

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBER QUARTUS,
CUM COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITÆ.

Ἀπολλώνιος Ἀττάλῳ χαίρειν.

ΠΡΟΤΕΡΟΝ μὲν ἐξέθηκα, γράψας πρὸς Εὔδημον τὸν Περγαμηνὸν, τῶν συντεταγμένων ἡμῖν Κωνικῶν ἐν ὀκτὼ βιβλίοις τὰ πρῶτα τρία. μετηλλαχότος δὲ ἐκείνου, τὰ λοιπὰ διεγνωκότες πρὸς σε γράψαι, διὰ τὸ φιλοτιμεῖσθαί σε μεταλαμβάνειν τὰ ὑφ' ἡμῶν πραγματευόμενα, πεπόμφαμεν ἐπὶ τοῦ παρόντος σοι τὸ τέταρτον. περιέχει δὲ τοῦτο κατὰ πόσα σημεῖα πλεῖστα δυνατόν ἐστι τὰς τῶν κώνων τομὰς ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλειν, ἐάν περ μὴ ὅλαι ἐπὶ ὅλας ἐφαρμόζωσιν· ἔτι κώνου τομὴ καὶ κύκλου περιφέρεια ταῖς ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα πλεῖστα συμβάλλουσι, καὶ ἔτι ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις· καὶ ἐκτὸς τούτων ἄλλα οὐκ ὀλίγα ὅμοια τούτοις. τούτων δὲ τὸ μὲν προειρημένον Κόνων ὁ Σάμιος ἐξέθηκε πρὸς Θρασυδαῖον, οὐκ ὀρθῶς ἐν ταῖς ἀποδείξεσιν ἀναστραφείς· διὸ καὶ μετρίως αὐτοῦ ἥψατο Νικοτέλης ὁ Κυρηναῖος. περὶ δὲ τοῦ δευτέρου μνείαν μόνον πεποίηται ὁ Νικοτέ-

Apollonius Attalo S. P.

ANTEA quidem ex octo libris, quos de Conicis composuimus, tres priores ad *Eudemum Pergamenum* scriptos edidimus. Verum eo mortuo, cum reliquos ad Te mittere decreverimus, quartum hunc, quod scriptorum nostrorum desiderio tenearis, in præsentia ad Te mittimus. Ostendit autem ad quot puncta, ut plurimum, Coni sectiones inter se & circuli circumferentiæ occurrant, nisi totæ totis congruant: præterea ad quot puncta, ut plurimum, Coni sectio & circuli circumferentia oppositis sectionibus conveniant; itemque oppositæ sectiones oppositis sectionibus: atque ad hæc alia non pauca his similia. Horum autem primum *Conon Samius* ad *Thrasydæum* scribens explicavit, non ritè confectis demonstrationibus: quamobrem *Nicoteles Cyrenæus* eum nonnihil reprehendit. Verum secundi mentionem tantum fecit *Nicoteles*

coteles in libro contra *Cononem*, tanquam ejus quod facile demonstrari posset: quod tamen nos neque ab illo neque ab alio quopiam demonstratum invenimus. At tertium cæteraque id genus plane nemini in mentem venisse comperimus. Ex dictis autem quotquot ab aliis non demonstrata deprehendimus multa atque varia postulant Theoremata nova; quorum plurima in tribus prioribus libris, reliqua autem in hoc ipso exposuimus. Hæc vero probe perspecta non parum utilitatis afferunt tam ad problematum compositiones quam ad eorundem determinationes. Verum *Nicoteles* quidem, ob dissensionem quæ illi cum *Conone* erat, nihil ex iis quæ à *Conone* inventa sunt ad problematum διορισμοὺς commodi provenire asserit: quod plane falsum. Nam etiamsi omnino absque his determinationes dare liceret; eorum tamen ope nonnulla facilius percipiuntur: veluti quod problema pluribus modis construi possit, vel quot modis, vel etiam quod nullo modo fiat. Hujusmodi autem præcognitio satis idoneam solutiones quærendi præbet ansam; & ad analyses διορισμῶν Theoremata hæc admodum utilia sunt. Verum & absque hac utilitate, propter ipsas demonstrationes digna erunt quæ recipiantur: multa enim alia in Mathematicis disciplinis ob hoc ipsum, nec ob aliquid aliud, recipere consuevimus.

λης ἐν τῇ πρὸς τὸν Κόνωνα ἀντιγραφῇ, ὡς δυναμένου δειχθῆναι· δεικνυμένῳ δὲ οὔτε ὑπ' αὐτοῦ τούτῳ οὔθ' ὑπ' ἄλλου τινὸς ἐντετύχαμεν. τὸ μέντοι τρίτον, καὶ τὰ ἄλλα τὰ ὁμογενῆ τούτοις, ἁπλῶς ὑπὸ οὐδενὸς νενοημένα εὕρηκα. πάντα δὲ τὰ λεχθέντα, ὅσοις οὐκ ἐντέτυχα, πολλῶν καὶ ποικίλων προσεδεῖτο ξενιζόντων θεωρημάτων· ὧν τὰ μὲν πλεῖστα τυγχάνω ἐν τοῖς πρώτοις τρισὶ βιβλίοις ἐκτεθεικώς, τὰ δὲ λοιπὰ ἐν τούτῳ. ταῦτα δὲ θεωρηθέντα χρείαν ἱκανὴν παρέχεται πρός τε τὰς τῶν προβλημάτων συνθέσεις καὶ τοὺς διορισμούς. Νικοτέλης μὲν γάρ, ἕνεκα τῆς πρὸς τὸν Κόνωνα διαφορᾶς, οὐδεμίαν ἐκ τῶν ὑπὸ τοῦ Κόνωνος εὑρημένων εἰς τοὺς διορισμούς φησιν ἔρχεσθαι χρείαν, οὐκ ἀληθῆ λέγων. καὶ γὰρ εἰ ὅλως ἄνευ τούτων δύναται κατὰ τοὺς διορισμοὺς ἀποδίδοσθαι, ἀλλά τοίγε δι' αὐτῶν ἔστι κατανοεῖν προχειρότερον ἔνια· οἷον ὅτι πλεοναχῶς ἢ τοσαυταχῶς ἂν γένοιτο, καὶ πάλιν ὅτι οὐκ ἂν γένοιτο. ἡ δὲ τοιαύτη πρόγνωσις ἱκανὴν ἀφορμὴν συμβάλλεται πρὸς τὰς ζητήσεις· καὶ πρὸς τὰς ἀναλύσεις τῶν διορισμῶν εὔχρηστα τὰ θεωρήματά ἐστι ταῦτα. χωρὶς δὲ τῆς τοιαύτης εὐχρηστίας, καὶ δι' αὐτὰς τὰς ἀποδείξεις ἄξια ἔσται ἀποδοχῆς· καὶ γὰρ ἄλλα πολλὰ τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι διὰ τοῦτο, καὶ οὐ δι' ἄλλό τι, ἀποδεχόμεθα.

EUTOCIUS.

Quartus liber, *Anthemi* amicissime, inquirit, quot modis conorum sectiones inter sese & circuli circumferentiæ conveniant, sive contingentes fuerint sive secantes. Est autem & elegans & legentibus perspicuus, præsertim ex editione nostra: ac ne commentariis quidem ullis indiget, quod enim necessarium est explet ipse textus. In eo autem omnia demonstrantur argumentatione ducente ad impossibile; sicut & *Euclides* fecit in iis quæ de intersectionibus & tactionibus circuli conscripsit. quæ sane ratio & ad usum accommodata & necessaria *Aristoteli* ac Geometris, præcipue vero *Archimedi*, visa est. Itaque tibi quatuor libros perlegenti licebit, adhibitis Conicis, resolvere & componere quodcunque propositum fuerit: quocirca & ipse *Apollonius* in principio libri dixit quatuor libros ad hujus disciplinæ elementa sufficere, reliquos autem quatuor ad abundantiorem scientiam pertinere. Perlege igitur eos diligenter, & si tibi placuerit reliquos ad eandem formam à nobis edi, id quoque Deo duce fiet. *Vale.*

Τὸ τέταρτον βιβλίον, ὦ φίλε ἑταῖρε Ἀνθέμιε, ζήτησιν μὲν ἔχει, ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλουσι, ἤτοι ἐφαπτόμεναι ἢ τέμνουσαι. ἔστι δὲ τὸ χαρίεν καὶ σαφὲς τοῖς ἐντυγχάνουσι καὶ μάλιστα ἀπὸ τῆς ἡμετέρας ἐκδόσεως· καὶ οὐδὲ σχολίων δεῖται, τὸ γὰρ ἐνδέον αἱ παραγραφαὶ πληροῦσι. δέδεικται δὲ τὰ ἐν αὐτῷ πάντα διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς, ὥσπερ καὶ Εὐκλείδης ἔδειξε τὰ περὶ τῶν τομῶν τοῦ κύκλου καὶ τῶν ἐπαφῶν. εὔχρηστος δὲ καὶ ἀναγκαῖος ὁ τρόπος οὗτος καὶ τῷ Ἀριστοτέλει δοκεῖ καὶ τοῖς γεωμέτραις, καὶ μάλιστα τῷ Ἀρχιμήδει. ἀναγινώσκοντι οὖν σοὶ τὰ τέσσαρα βιβλία, δυνατὸν ἔσται διὰ τῆς τῶν κωνικῶν πραγματείας ἀναλύειν καὶ συντιθέναι τὸ προτεθέν· διὸ καὶ αὐτὸς ὁ Ἀπολλώνιος, ἐν ἀρχῇ τοῦ βιβλίου, φησὶ τὰ τέσσαρα βιβλία ἀρκεῖν πρὸς τὴν ἀγωγὴν τὴν στοιχειώδη, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι περιουσιαστικώτερα. ἀνάγνωθι οὖν αὐτὰ ἐπιμελῶς, καὶ εἰ σοὶ κατὰ θυμὸν γένηται καὶ τὰ λοιπὰ κατὰ τοῦτον τὸν τύπον ὑπ' ἐμοῦ ἐκτεθῆναι, καὶ τοῦτο Θεοῦ ἡγουμένου γενήσεται. ἔρρωσο.

PROP. I. *Theor.*

Si in coni sectione, vel circuli circumferentia, aliquod punctum extra sumatur; atque ab eo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ, una quidem contingens, altera vero in duobus punctis secans; & quam rationem habet

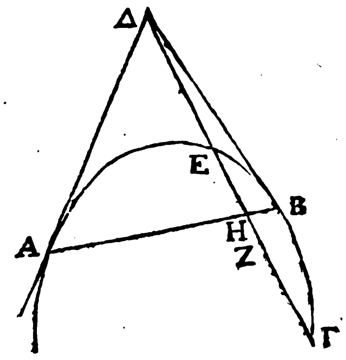
ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν κώνου τομῆς, ἢ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ τομῇ προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν ἐφάπτηται ἡ δὲ τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον ὅλη ἡ τέμνου-

σα

σα πρὸς τῇ ἐκτὸς ἀπολαμβανομένῃ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς γραμμῆς, εἰς τοῦτον τμηθῇ ἡ ἐντὸς ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα, ὥστε τὰς ὁμολόγους εὐθείας πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ εἶναι· ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διαίρεσιν ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγομένη εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς γραμμῆς.

ΕΣΤΩ γὰρ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ΔΒ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Β, ἡ δὲ ΔΕΓ τεμνέτω τὴν τομὴν κατὰ τὰ Ε, Γ, [περιέχοντα πρότερον τὴν κατὰ τὸ Β ἁφήν,] καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, τοῦτον ἐχέτω ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἀγομένη συμπίπτει τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.



Ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΓ τέμνει τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, οὐκ ἔσται διάμετρος αὐτῆς *· δυνατὸν ἄρα ἐστὶ διὰ τοῦ Δ διάμετρον ἀγαγεῖν, ὥστε καὶ ἐφαπτομένην. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΑ τεμνέτω τὴν ΕΓ, εἰ δυνατόν, μὴ κατὰ τὸ Ζ, ἀλλὰ κατὰ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΒΔ, ΔΑ, καὶ ἐπὶ τὰς ἁφάς ἐστιν ἡ ΒΑ, καὶ διῆκται ἡ ΓΔ τέμνουσα τὴν μὲν τομὴν κατὰ τὰ Γ, Ε, τὴν δὲ ΑΒ κατὰ τὸ Η· ἔσται ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ· οὐκ ἄρα ἡ ΒΑ καθ' ἕτερον σημεῖον τέμνει τὴν ΓΕ· κατὰ τὸ Ζ ἄρα.

Ταῦτα μὲν κοινῶς ἐπὶ πασῶν τῶν τομῶν δείκνυται· ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς μόνον, ἐὰν ἡ μὲν ΔΒ ἐφάπτηται, ἡ δὲ ΔΓ τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα τὰ Ε, Γ, τὰ δὲ Ε, Γ περιέχῃ τὴν κατὰ τὸ Β ἁφήν, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ᾖ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, ὁμοίως ἡ ἀπόδειξις γενήσεται.

Δυνατὸν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἄλλην ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν εὐθεῖαν τὴν ΔΑ, καὶ τὰ λοιπὰ τῆς ἀποδείξεως ὁμοίως ποιεῖν.

tota secans ad partem ejusdem quæ extra sumitur, inter punctum & sectionem interjecta, in eandem dividatur ea pars quæ est intra, ita ut rectæ eandem rationem habentes ad idem punctum conveniant: quæ à tactu ad divisionem ducitur, occurret sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad punctum extra sumptum, sectionem continget.

SIT coni sectio, vel circuli circuli circumferentia ΑΒΓ; & puncto extra sectionem sumpto, quod sit Δ, ab eo ducatur recta ΔΒ quidem contingens sectionem in Β; ΔΕΓ vero in punctis Ε, Γ secans, [quæ primum contineant punctum tactus Β;] & quam rationem habet ΓΔ ad ΔΕ, eandem habeat ΓΖ ad ΖΕ: dico rectam, quæ à puncto Β ad Ζ ducitur occurrere sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad Δ, sectionem contingere.

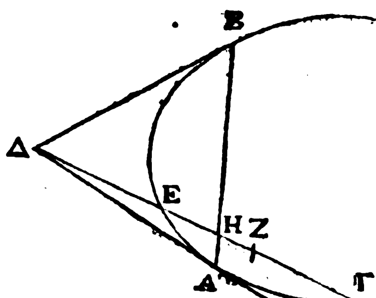
Quoniam enim recta ΔΓ sectionem in duobus punctis secat, cum non sit ipsius diameter, licebit per Δ diametrum & ideo contingentem ducere. ducatur [per 49.2.huj.] à puncto Δ recta ΔΑ sectionem contingens; & juncta ΒΑ secet ipsam ΕΓ non in Ζ, sed in alio puncto Η, si fieri possit. itaque quoniam rectæ ΒΔ, ΔΑ sectionem contingunt; & tactus jungit recta ΒΑ; recta vero ΓΔ sectionem in punctis Γ, Ε secat, ipsamque ΑΒ secat in Η: erit [per 37. 3.huj.] ut ΓΔ ad ΔΕ ita ΓΗ ad ΗΕ, quod est absurdum; posuimus enim, ut ΓΔ ad ΔΕ ita esse ΓΖ ad ΖΒ: igitur ΒΑ non secat ΓΕ in alio puncto; quare in ipso Ζ secet necesse est.

Hæc quidem communiter in omnibus sectionibus demonstrata sunt: at in hyperbola tantum, si recta ΔΒ sectionem contingat, & ΔΓ in punctis Β, Γ secet, puncta vero Ε, Γ contineant tactum ad Β, & punctum Δ sit intra angulum asymptotis comprehensum, similiter fiet demonstratio.

Possumus enim tunc solum à puncto Δ aliam ducere contingentem ΔΑ, & quæ reliqua sunt ad demonstrationem perficere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

ΤΩΝ αὐτῶν ὄντων, τὰ Ε, Γ σημεῖα μὴ περιεχέτω τὴν κατὰ τὸ Β ἁφὴν μεταξὺ αὐτῶν· [ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς,] τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ἔστω τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας· δυνατὸν ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἑτέραν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν τὴν ΔΑ, καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως ἀποδείκνυσιν.



PROP. II. *Theor.*

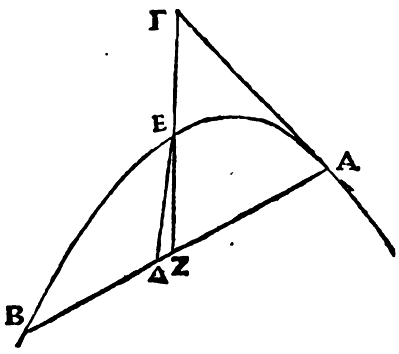
IISDEM existentibus, puncta Ε, Γ tactum ad Β non contineant; at, si fuerit hyperbola, sit punctum Δ intra angulum asymptotis comprehensum: possumus igitur [per 49. 2. huj.] à puncto Δ alteram contingentem ducere, quæ sit ΔΑ, & reliqua similiter demonstrare.

* Nam si Ellipseos diameter fuerit, res manifesta est ex 34. primi.

*PROP.

*Prop. III. *Theor.*

Si vero sectio A B fuerit Parabola, quam contingat Γ A, secet autem Γ B in uno tantum puncto, ac fiat E Z æqualis ipsi Γ B: dico rectam à puncto A ad Z ductam ordinatim esse applicatam, & quæ ab occursu ejus cum sectione ad punctum Γ ducitur sectionem contingere.



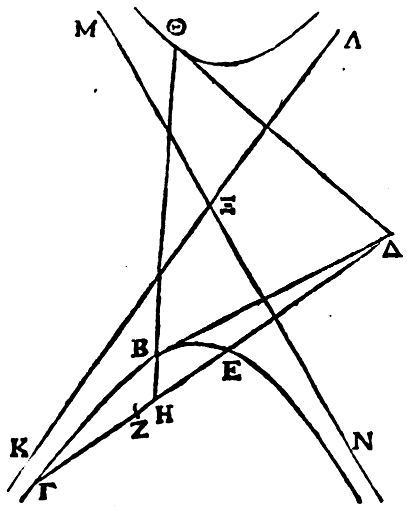
Quoniam enim sectio parabola est, ac Γ B in uno tantum puncto occurrit sectioni, erit Γ B Z sectionis diameter. nam si non sit diameter, fiat E Δ diametro parallela, & [per 46. 1. huj.] erit E Δ diameter sectionis. & quoniam Γ E Z occurrit diametro, producta etiam occurret sectioni [per 27. 1. huj.] in alio puncto; quod est absurdum. posuimus enim eam in uno tantum puncto occurrere: adeoq; Γ E Z est sectionis diameter. cumque Γ B æqualis sit ipsi E Z, erit [per 33. 1. huj.] A Z ordinatim applicata, ac producta occurret sectioni. occurrat ad B, ac [per eandem 33am] juncta Γ B continget sectionem, ob Γ E ipsi E Z æqualem, ac B Z ordinatim applicatam.

* *Tam in Codice* Armachano *quam in Epitome ejus per* Abdolmelec, *præcedens Propositio pro secundâ habetur, quæ in* Græcis *quidem MSS. non reperitur. Quoniam vero in* Græcis *secunda propositio primæ tantum particula sit, & propositio vix dici mereatur, nos eam primæ subjecimus, & hanc* Arabum *secundam (quæ vix alia est quam conversa 33tiæ primi) tertiam fecimus, ne Propositionum ordo in citationibus turbaretur.*

Prop. IV. *Theor.*

Si in Hyperbola occursus E, Γ contineant tactum ad B, & punctum Δ sit in angulo qui deinceps est angulo asymptotis comprehenso: recta, quæ à tactu ad divisionem ducitur, occurret oppositæ sectioni, & quæ ab occursu ejus ad punctum Δ ducitur eandem sectionem continget.

Sint oppositæ sectiones B, Θ, quarum asymptoti K Λ, M Ξ N; & punctum Δ sit in angulo Λ Ξ N; ab eo autem ducta recta Δ B sectionem contingat, & Δ Γ secet, ita ut occursus E, Γ tactum ad B contineant; & quam rationem habet Γ Δ ad Δ E eandem habeat Γ Z ad Z E. demonstrandum est rectam, quæ à puncto B ad Z ducitur, occurrere sectioni Θ; & quæ ab occursu ducitur ad Δ sectionem contingere.



Ducatur enim à puncto Δ recta Δ Θ sectionem contingens; & juncta Θ B, si fieri possit, non transeat per Z, sed per aliud punctum H: est igitur [per 37. 3. huj.] ut Γ Δ ad Δ E ita Γ H ad H E, quod est absurdum; posuimus enim ut Γ Δ ad Δ E ita esse Γ Z ad Z E.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν ἐν τῇ ὑπερβολῇ αἱ μὲν E, Γ συμπτώσεις τὴν κατὰ τὸ B ἁφὴν περιέχωσι, τὸ δὲ Δ σημεῖον ᾖ ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης· ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διαίρεσιν ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἀγομένη εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς ἀντικειμένης.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ B, Θ, καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ KΛ, MΞN, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ὑπὸ Λ Ξ N γωνίᾳ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐφαπτέσθω μὲν ἡ Δ B, τεμνέτω δὲ ἡ Δ Γ, καὶ αἱ E, Γ συμπτώσεις περιεχέτωσαν τὴν B ἁφήν, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ Γ Δ πρὸς Δ E ἐχέτω ἡ Γ Z πρὸς Z E. δεικτέον ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ B ἐπὶ τὸ Z ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται τῇ Θ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ Δ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Θ B πιπτέτω, εἰ δυνατὸν, μὴ διὰ τοῦ Z ἀλλὰ διὰ τοῦ H· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Γ Δ πρὸς Δ E οὕτως ἡ Γ H πρὸς H E, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ Γ Δ πρὸς Δ E οὕτως ἡ Γ Z πρὸς Z E.

Prop. V. *Theor.*

Iisdem positis, si punctum Δ sit in una asymptotôn; quæ à puncto B ad Z ducitur eidem asymptoto parallela erit.

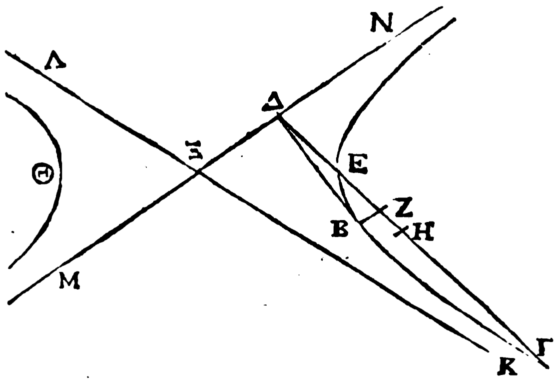
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπί τινος ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ ἀπὸ τοῦ B ἐπὶ τὸ Z ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ αὐτῇ ἀσυμπτώτῳ.

Ὑποκείσθω

Ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτὰ, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΜΝ· δεικτέον ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΜΝ παράλληλος ἀγομένη ἐπὶ τὸ Ζ πεσεῖται.

Μὴ γὰρ, ἀλλ', εἰ δυνατὸν, ἔστω ἡ ΒΗ· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ, ὅπερ ἀδύνατον.



Ponantur enim eadem; & punctum Δ sit in altera asymptotôn, videlicet in MN: demonstrandum est rectam, quæ à puncto B ipsi MN parallela ducitur, in punctum Z cadere.

Non enim, sed, si fieri potest, sit ea BH: erit igitur [per 35. 3. huj.] ut ΓΔ ad ΔE ita ΓH ad HE; quod fieri non potest.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

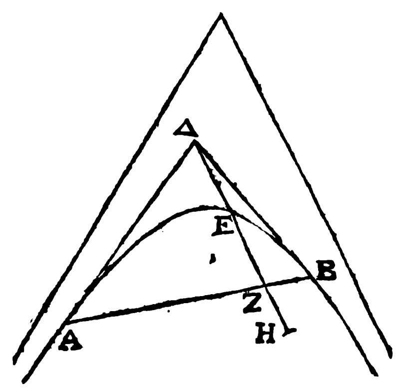
Ἐὰν ὑπερβολῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὴν τομὴν διαχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν ἐφάπτηται, ἡ δὲ παράλληλος ᾖ μιᾷ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τῇ ἀπολαμβανομένῃ ἐπὶ τῆς παραλλήλου μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ σημείου ἴση ἐπ' εὐθείας ἐντὸς τῆς τομῆς τεθῇ· ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸ γινόμενον σημεῖον ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Prop. VI. *Theor.*

Si in hyperbola aliquod punctum extra sumatur, à quo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ, altera quidem contingens, altera vero parallela uni asymptotôn; & portio parallelæ inter sectionem & punctum interjecta æqualis sit ei quæ intra sectionem continetur: recta, quæ à tactu ad inventum punctum ducitur, occurret sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad punctum extra sumptum, sectionem continget.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἔστω πρότερον ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ΒΔ ἐφαπτέσθω, ἡ δὲ ΔΕΖ παράλληλος ἔστω τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΑ τεμνέτω τὴν ΔΕ, εἰ δυνατὸν, μὴ κατὰ τὸ Ζ, ἀλλὰ καθ' ἕτερον τὸ Η· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ ἴση.



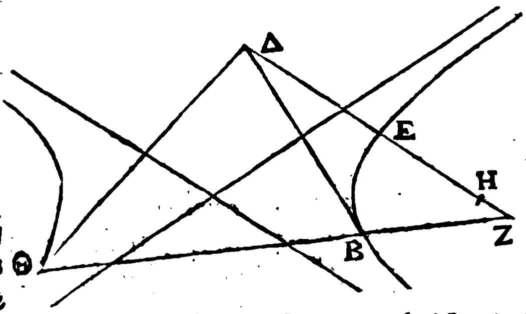
SIT hyperbola AEB, & sumatur aliquod punctum extra, quod sit Δ; sit autem primo Δ intra angulum sub asymptotis contentum, & ab ipso Δ recta quidem ΔB ducta sectionem contingat, ΔEZ vero parallela sit alteri asymptotôn, ponaturque ipsi ΔE æqualis EZ: dico rectam, quæ à puncto B ad Z ducitur, occurrere sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad Δ, sectionem contingere.

Ducatur enim ΔA, quæ sectionem contingat; & juncta BA secet ipsam ΔE, si fieri potest, non in Z, sed in alio puncto H: erit itaque [per 30. 3. huj.] ΔE æqualis ipsi EH, quod est absurdum; supponebatur enim ΔE ipsi EZ æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης· λέγω ὅτι καὶ οὕτως τὰ αὐτὰ συμβήσεται.

Ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη ἡ ΔΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΒ πιπτέτω, εἰ δυνατὸν, μὴ διὰ τοῦ Ζ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ ἴση.



Prop. VII. *Theor.*

IISDEM positis, sit punctum Δ in angulo deinceps ei qui sub asymptotis continetur: dico etiam sic eadem evenire.

Ducatur enim ΔΘ sectionem contingens; & juncta ΘB, si fieri potest, non cadat in Z, sed in aliud punctum H: ergo [per 31. 3. huj.] ΔE est æqualis ipsi BH, quod est absurdum; supponitur enim ΔE æqualis ipsi EZ.

Prop. VIII. *Theor.*

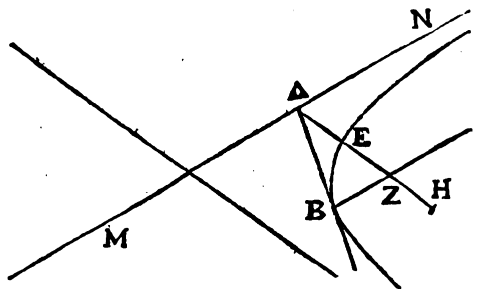
Isdem positis, sit punctum Δ in una asymptotôn, & reliqua eadem fiant: dico rectam, quæ à tactu ad extremitatem sumptæ ducitur, parallelam esse asymptoto in qua est punctum Δ.

Sint enim eadem quæ supra, ponaturque ipsi Δ E æqualis E Z, & à puncto B ducatur B H parallela ipsi M N, si fieri possit: æqualis igitur est [per 34. 3. huj.] Δ E ipsi E H, quod est absurdum; posuimus enim Δ B ipsi E Z æqualem esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

ΤΩΝ αὐτῶν ὄντων, ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω τὰ αὐτά· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπ' ἄκρον τῆς ἀπολαμφθείσης ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ, ἐφ' ἧς ἐστι τὸ Δ σημεῖον.

Ἔστω γὰρ τὰ εἰρημένα, καὶ κείσθω τῇ Δ Ε ἴση ἡ Ε Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β παράλληλος τῇ Μ Ν ἤχθω, εἰ δυνατόν, ἡ Β Η· ἴση ἄρα ἡ Δ Ε τῇ Ε Η, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ Δ Ε τῇ Ε Ζ ἴση.



Prop. IX. *Theor.*

Si ab eodem puncto duæ rectæ lineæ ducantur, quarum utraque coni sectionem vel circuli circumferentiam in duobus punctis secet; & quas rationes habent totæ rectæ ad portiones quæ extra sumuntur, in easdem dividantur quæ sunt intra, ita ut partes proportionales ad idem punctum conveniant: quæ per divisiones ducitur recta sectioni in duobus punctis occurret; & quæ ab occursu ad punctum extra sumptum ducuntur sectionem contingent.

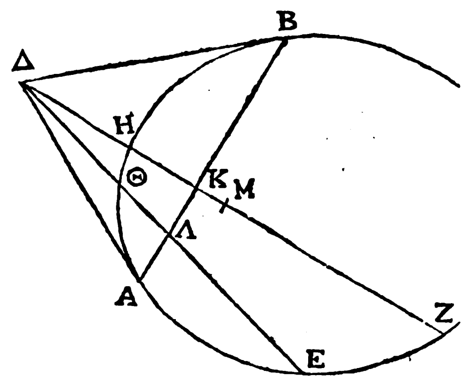
Sit aliqua prædictarum sectionum A B, & ab aliquo puncto Δ ducantur rectæ Δ E, Δ Z quæ sectionem secent, illa quidem in Θ, E punctis, hæc vero in Z, H; & quam rationem habet E Δ ad Δ Θ eandem habeat E Λ & Λ Θ, & rursus quam habet Z Δ ad Δ H habeat Z K ad K H: dico rectam, quæ ab Λ ad K ducitur, utraque ex parte occurrere sectioni; & quæ ab occursibus ducuntur ad Δ, sectionem contingere.

Quoniam enim utraque rectarum E Δ, Z Δ sectionem in duobus punctis secat, poterimus ab ipso Δ sectionis diametrum ducere; atque adeo contingentes ex utraque parte. ducantur igitur Δ A, Δ B, quæ sectionem contingant; & juncta B A, si fieri possit, non transeat per Λ, K, sed vel per alterum ipsorum tantum, vel per neutrum. transeat primo per Λ tantum, & rectam Z H in puncto M secet: ergo [per 37. 3. huj.] ut Z Δ ad Δ H ita Z M ad M H, quod est absurdum: supponitur enim ut Z Δ ad Δ H ita Z K ad K H. si vero recta B A per neutrum punctorum Λ, K transeat, in utraque ipsarum Δ E, Δ Z dictum absurdum sequetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσι τέμνουσαι κώνου τομὴν ἢ κύκλου περιφέρειαν, ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, καὶ ὡς ἔχουσιν αἱ ὅλαι πρὸς τὰς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένας οὕτως αἱ ἐντὸς ἀπολαμβανόμεναι διαιρεθῶσιν, ὥστε τὰς ὁμολόγους πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ εἶναι· ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ κατὰ δύο σημεῖα, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγόμεναι ἐφάψονται τῆς γραμμῆς.

ΕΣΤΩ γὰρ τῶν προειρημένων γραμμῶν τις ἡ Α Β, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Δ διήχθωσαν αἱ Δ Ε, Δ Ζ τέμνουσαι τὴν γραμμήν, ἡ μὲν κατὰ τὰ Θ, Ε ἡ δὲ κατὰ τὰ Ζ, Η, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ Ε Δ πρὸς Δ Θ τοῦτον ἐχέτω ἡ Ε Λ πρὸς Λ Θ, ὃν δὲ ἡ Ζ Δ πρὸς Δ Η τοῦτον ἐχέτω ἡ Ζ Κ πρὸς Κ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται ἐφ' ἑκάτερα τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνύμεναι ἐφάψονται τῆς τομῆς.



Ἐπεὶ γὰρ αἱ Ε Δ, Ζ Δ ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα τέμνουσι τὴν τομήν, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Δ διάμετρον ἀγαγεῖν τῆς τομῆς, ὥστε καὶ ἐφαπτομένας ἐφ' ἑκάτερα. ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ Δ Α, Δ Β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Β Α, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Λ, Κ, ἀλλ' ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν, ἢ δι' οὐδετέρου. ἐρχέσθω πρότερον διὰ μόνου τοῦ Λ, καὶ τεμνέτω τὴν Ζ Η κατὰ τὸ Μ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζ Δ πρὸς Δ Η οὕτως ἡ Ζ Μ πρὸς Μ Η, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ Ζ Δ πρὸς Δ Η οὕτως ἡ Ζ Κ πρὸς Κ Η. ἐὰν δὲ ἡ Β Α μηδὲ δι' ἑτέρου τῶν Λ, Κ πορεύηται, ἐφ' ἑκατέρας τῶν Δ Ε, Δ Ζ συμβήσεται τὸ ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ταῦτα μὲν κοινῶς· ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς μόνον, ἐὰν τὰ μὲν ἄλλα ὑπάρχῃ τὰ αὐτά, αἱ δὲ τῆς μιᾶς εὐθείας συμπτώσεις περιέχωσι τὰς τῆς ἑτέρας συμπτώσεις, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ᾖ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, τὰ αὐτὰ συμβήσεται τοῖς προειρημένοις, ὡς προείρηται ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι.

Prop. X. *Theor.*

Hæc quidem communiter in omnibus: at in hyperbola tantum, si cætera quidem eadem sint, unius autem rectæ lineæ occursus contineant occursus alterius, & punctum Δ sit intra angulum sub asymptotis comprehensum, evenient illa quæ dicta sunt ut in primo theoremate tradidimus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν τῆς μιᾶς συμπτώσεις μὴ περιέχωσι τὰς τῆς ἑτέρας συμπτώσεις, τὸ δὲ Δ σημεῖον ἐντὸς ᾖ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας· καὶ ἡ καταγραφὴ καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ τῷ ἐνάτῳ.

Prop. XI. *Theor.*

Iisdem positis, si occursus unius rectæ alterius occursus non contineant, & punctum Δ sit intra angulum sub asymptotis comprehensum; & figura & demonstratio eadem erit, quæ in nono theoremate.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

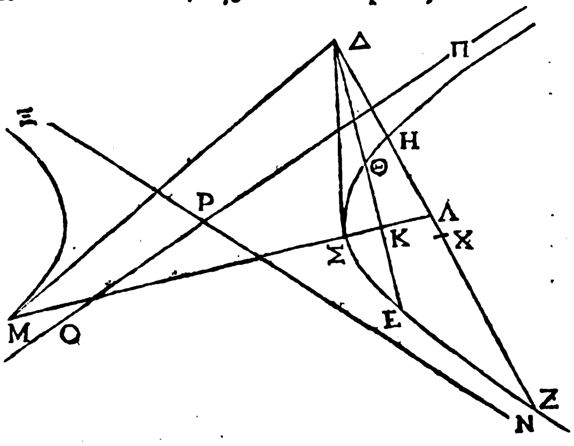
Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν περιέχωσιν αἱ τῆς μιᾶς εὐθείας συμπτώσεις τὰς τῆς ἑτέρας, καὶ ᾖ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης· ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ συμπεσεῖται, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐφάψονται τῶν ἀντικειμένων.

Prop. XII. *Theor.*

Iisdem positis, si unius rectæ occursus alterius occursus contineant, & punctum sumptum sit in angulo deinceps ei qui sub asymptotis comprehenditur: recta per divisiones ducta, si producatur, occurret oppositæ sectioni; & quæ ab occursibus ducuntur ad punctum Δ, oppositas sectiones contingent.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ ΕΗ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΝΞ, ΟΠ, καὶ κέντρον τὸ Ρ, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐν τῇ ΞΡΠ γωνίᾳ, καὶ ἤχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ τέμνουσαι τὴν ὑπερβολήν, ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, καὶ περιεχέσθω τὰ Ε, Θ ὑπὸ τῶν Ζ, Η, καὶ ἔστω ὡς μὲν ἡ ΕΔ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ· δεικτέον ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Λ συμπεσεῖται τῇ τε ΕΖ τομῇ καὶ τῇ ἀντικειμένῃ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν τομῶν.

Ἔστω δὴ ἀντικειμένη ἡ Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΔΜ, ΔΣ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΣ, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Λ, ἀλλ' ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν, ἢ δι' οὐδετέρου. ἐρχέσθω πρότερον διὰ τοῦ Κ, καὶ τεμνέτω τὴν ΖΗ κατὰ τὸ Χ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΖΧ πρὸς ΧΗ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ. ἐὰν δὲ μηδὲ δι' ἑτέρου τῶν Κ, Λ ἔρχηται ἡ ΜΣ, ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΕΔ, ΔΖ τὸ ἀδύνατον συμβαίνει.



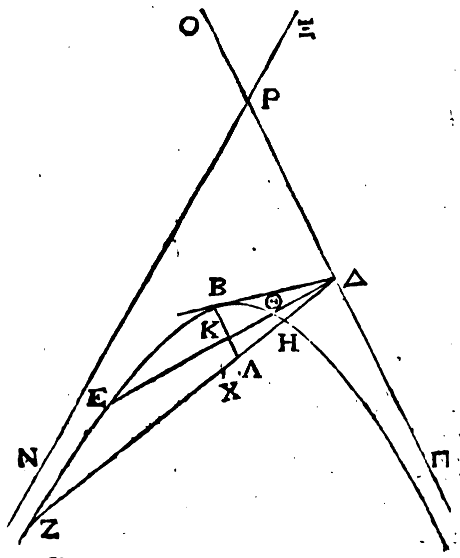
SIT hyperbola EH, cujus asymptoti NΞ, OΠ, & centrum P; punctum vero Δ sit in angulo ΞPΠ; & ducantur ΔE, ΔZ, quarum utraque hyperbolam in duobus punctis secet; & puncta E, Θ à punctis Z, H contineantur; sitque ut EΔ ad ΔΘ ita EK ad KΘ, & ut ZΔ ad ΔH ita ZΛ ad ΛH: demonstrandum est rectam per K, Λ ductam occurrere & sectioni EZ & ei quæ ipsi opponitur; ac rectas quæ ab occursibus ducuntur ad punctum Δ, sectiones contingere.

Sit itaq; sectio opposita M; & à puncto Δ ducantur ΔM, ΔΣ, quæ sectiones contingant; junctaque MΣ, si fieri possit, non transeat per K, Λ; sed vel per alterum ipsorum, vel per neutrum. transeat primum per K, & secet ZH in X: est igitur [per 37.3.huj.] ut ZΔ ad ΔH ita ZX ad XH, quod est absurdum; supponitur enim ut ZΔ ad ΔH ita ZΛ ad ΛH. si vero MΣ per neutrum punctorum K, Λ transeat, in utraque ipsarum EΔ, ΔZ impossibile istud eveniet.

Prop. XIII. *Theor.*

Iisdem positis, si punctum Δ sit in una asymptotôn, & reliqua eadem existant: quæ per divisiones transit recta asymptoto in qua est punctum parallela erit, & producta occurret sectioni; quæ vero ab occursu ad punctum ducitur, sectionem continget.

SIT hyperbola, & asymptoti; sumptoque in una asymptotôn puncto Δ, ducantur rectæ lineæ, & dividantur, ut dictum est; & ab ipso Δ recta Δ B sectionem contingat; dico eam, quæ à puncto B ducitur ipsi O Π parallela, per puncta K, Λ transire.



Si enim non, vel per unum ipsorum transibit, vel per neutrum. transeat primo per K tantum: quare [per 35.3.huj.] ut Z Δ ad Δ H ita Z X ad X H, quod est absurdum *: recta igitur à puncto B ducta parallela ipsi Π O per unum tantum eorum non transibit; ergo per utrumque transeat necesse est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ΄.

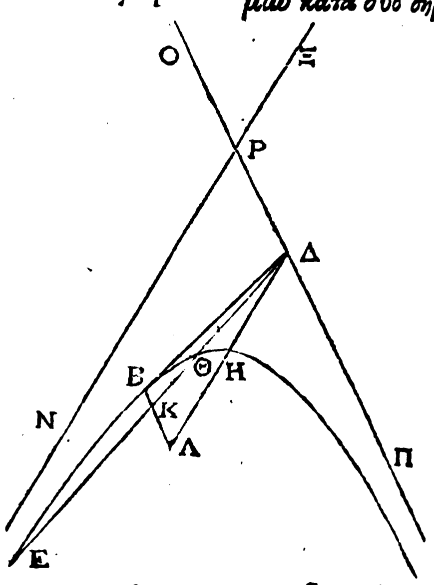
Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων ᾖ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ ὑπάρχῃ· ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ᾽ ἧς ἐστι τὸ σημεῖον, καὶ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ σημεῖον ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ γὰρ ὑπερβολή, καὶ ἀσύμπτωτοι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τὸ Δ, καὶ διήχθωσαν αἱ εὐθεῖαι, καὶ διαιρέσθωσαν ὡς εἴρηται καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ Δ B· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ B παρὰ τὴν Π O ἀγομένη ἥξει διὰ τῶν K, Λ.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι διὰ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν ἐλεύσεται, ἢ δι᾽ οὐδετέρου. ἐρχέσθω διὰ μόνου τοῦ K· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Z Δ πρὸς Δ H οὕτως ἡ Z X πρὸς X H, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ B παρὰ τὴν Π O ἀγομένη διὰ μόνου τοῦ K ἐλεύσεται· δι᾽ ἀμφοτέρων ἄρα.

Prop. XIV. *Theor.*

IISDEM positis, si punctum Δ sit in una asymptotôn, & recta quidem Δ E sectionem in duobus punctis secet, Δ H vero alteri asymptoto parallela illam secet in uno tantum, quod sit H; fiatque ut Δ E ad Δ Θ ita E K ad K Θ, & ipsi Δ H ponatur æqualis & in directo H Λ: quæ per puncta K, Λ transit recta & asymptoto parallela erit, & sectioni occurret; quæ vero ab occursu ducitur ad Δ, sectionem continget.



Similiter enim ut in superioribus, ducta recta Δ B contingente: dico eam, quæ à puncto B ducitur asymptoto Π O parallela, per puncta K, Λ transire.

Si enim per K solum transeat; non erit Δ H ipsi H Λ æqualis, quod [per 34. 3.huj.] est absurdum. si vero per Λ solum, non erit ut E Δ ad Δ Θ ita E K ad K Θ †. quod si neque per K transeat, neque per Λ, in utrisque absurdum sequetur: ergo per utrumque punctum transire necesse est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ΄.

ΤΩΝ αὐτῶν ὄντων, ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἡ μὲν Δ E τέμνῃ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἡ δὲ Δ H κατὰ μόνον τὸ H, παράλληλος οὖσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ γένηται ὡς ἡ Δ E πρὸς Δ Θ οὕτως ἡ E K πρὸς K Θ, τῇ δὲ Δ H ἴση ἐπ᾽ εὐθείας τεθῇ ἡ H Λ· ἡ διὰ τῶν K, Λ σημείων ἀγομένη παράλληλός τε ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ καὶ συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ὁμοίως γὰρ τῷ προειρημένῳ, ἀγαγὼν τὴν Δ B ἐφαπτομένην· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ B παρὰ τὴν Π O ἀσύμπτωτον ἀγομένη ἥξει διὰ τῶν K, Λ σημείων.

Εἰ οὖν διὰ τοῦ K μόνου ἥξει, οὐκ ἔσται ἡ Δ H τῇ H Λ ἴση, ὅπερ ἄτοπον. εἰ δὲ διὰ τοῦ Λ μόνου, οὐκ ἔσται ὡς ἡ E Δ πρὸς Δ Θ οὕτως ἡ E K πρὸς K Θ. εἰ δὲ μήτε διὰ τοῦ K, μήτε διὰ τοῦ Λ, κατ᾽ ἀμφότερα συμβήσεται τὸ ἄτοπον· δι᾽ ἀμφοτέρων ἄρα ἐλεύσεται.

* Ponitur enim Z Δ ad Δ H sicut Z Δ ad Δ H. † Quod est absurdum per 35.3.huj.

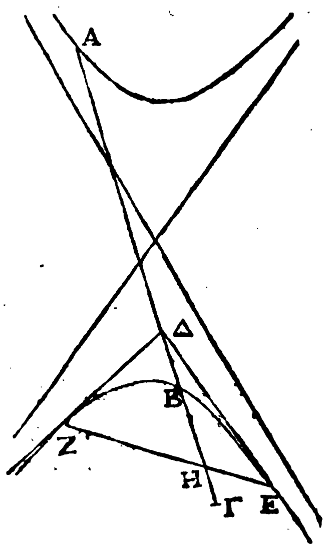
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε΄.

Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ληφθῇ τι σημεῖον μεταξὺ τῶν δύο τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων, ἡ δὲ τέμνῃ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων, καὶ ὡς ἔχει ἡ μεταξὺ τῆς ἑτέρας τομῆς, ἧς οὐκ ἐφάπτεται ἡ εὐθεῖα, καὶ τοῦ σημείου, πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς ἑτέρας τομῆς, οὕτως ἔχῃ μείζων τις εὐθεῖα τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῆς κειμένην ἐπ' εὐθείας τε καὶ πρὸς τῷ αὐτῷ πέρατι τῇ ὁμολόγῳ· ἡ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς μείζονος εὐθείας ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἀγομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Prop. XV. Theor.

Si in sectionibus oppositis inter duas sectiones sumatur aliquod punctum, & ab ipso duæ rectæ ducantur, altera quidem contingens unam oppositarum, altera vero utramque secans; & quam rationem habet ea quæ inter sectionem quam non contingit recta & punctum interjicitur ad rectam quæ est inter punctum & alteram sectionem, eandem habeat recta quædam major ea quæ inter sectiones interjicitur ad excessum ipsius in eadem recta & ad eundem terminum cum ea quæ in eadem est ratione; quæ à termino majoris rectæ ad tactum ducitur, occurret sectioni; & quæ ab occursu ad sumptum punctum, sectionem continget.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον μεταξὺ τῶν τομῶν τὸ Δ, ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ΔΖ διήχθω ἐφαπτομένη, ἡ δὲ ΑΔΒ τέμνουσα τὰς τομάς, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ ἐχέτω ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ· δεικτέον ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.



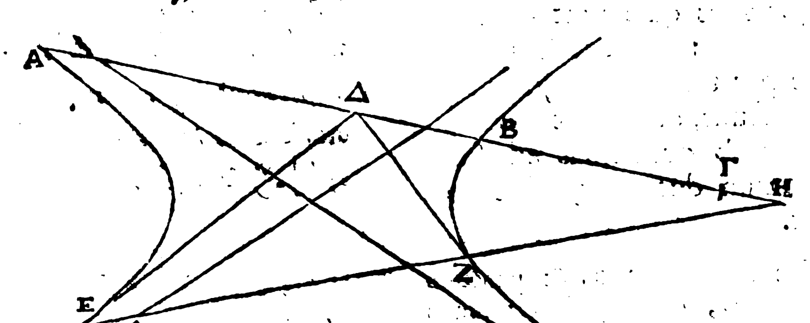
Ἐπεὶ γὰρ τὸ Δ σημεῖον ἐντός ἐστι τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας, δυνατόν ἐστι καὶ ἑτέραν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ Δ. ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΕ ἐρχέσθω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Γ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ.

Sint sectiones oppositæ A, B; sumptoque inter sectiones aliquo puncto Δ intra angulum sub asymptotis contentum, ab ipso ducatur recta quidem ΔZ contingens sectionem, AΔB vero sectiones secans; & quam rationem habet AΔ ad ΔB eandem habeat AΓ ad ΓB: demonstrandum est rectam à puncto Z ad Γ productam occurrere sectioni; & eam quæ ab occursu ducitur ad Δ, sectionem contingere.

Quoniam enim punctum Δ est intra angulum qui sectionem continet, poterimus [per 49. 2. huj.] ab ipso Δ aliam contingentem ducere, quæ sit ΔE; & juncta ZE, si fieri potest, per Γ non transeat, sed per aliud punctum H: erit igitur [per 37. 3. huj.] ut AΔ ad ΔB ita AH ad HB, quod est absurdum; posuimus enim ut AΔ ad ΔB ita esse AΓ ad ΓB.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ΄.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γινέσθω· λέγω ὅτι ἡ



ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευγνυμένη ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς ἀντικειμένης τομῆς.

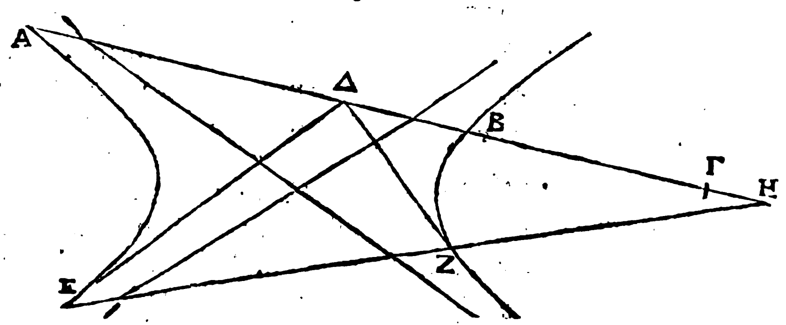
Prop. XVI. Theor.

Iisdem positis, sit punctum Δ in angulo deinceps ei qui sub asymptotis continetur, & reliqua eadem fiant: dico rectam à puncto Z ad Γ productam occurrere oppositæ sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad Δ, eandem oppositam sectionem contingere.

 Sint

Sint enim eadem quæ supra, & punctum Δ sit in angulo deinceps ei qui sub asymptotis continetur; atque à puncto Δ ducatur Δ E sectionem A contingens; juncta autem E Z & pro-

Εστω γὰρ τὰ αὐτὰ, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης; καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς A τομῆς ἡ Δ E, καὶ

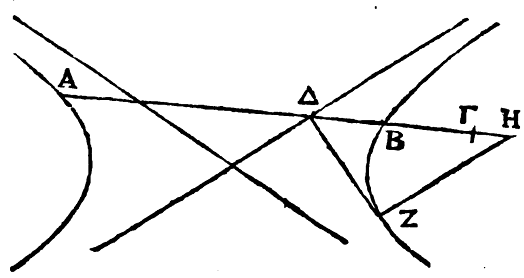


ducta, si fieri potest, non transeat per Γ, sed per aliud punctum H: erit igitur [per 39. 3. huj.] ut A H ad H B ita A Δ ad Δ B, quod est absurdum; supponebatur enim ut A Δ ad Δ B ita A Γ ad Γ B.

ἐπιζεύχθω ἡ E Z, καὶ ἐκβαλλομένη, εἰ δυνατὸν, μὴ ἐρχέσθω ἐπὶ τὸ Γ, ἀλλ' ἐπὶ τὸ H· ἔσται δὴ ὡς ἡ A H πρὸς H B οὕτως ἡ A Δ πρὸς Δ B, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ A Δ πρὸς Δ B οὕτως ἡ A Γ πρὸς Γ B.

Prop. XVII. *Theor.*

Iisdem positis sit punctum Δ in una asymptotôn: dico rectam, quæ à Z ad Γ ducitur, asymptoto, in qua est punctum, esse parallelam.



Sint eadem quæ supra, & punctum Δ in una asymptotôn; ductaque per Z eidem asymptoto parallela non transeat per Γ, si fieri potest, sed per H; erit igitur [per 36. 3. huj.] ut A Δ ad Δ B ita A H ad H B, quod est absurdum *: ergo quæ à puncto Z ducitur asymptoto parallela per punctum Γ transibit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

ΤΩΝ αὐτῶν ὄντων, ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐπί τινος τῶν ἀσυμπτώτων· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ Γ ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ' ἧς ἐστι τὸ σημεῖον.

Εστωσαν τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν, τὸ δὲ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Z παράλληλος, καὶ, εἰ δυνατὸν, μὴ πιπτέτω ἐπὶ τὸ Γ, ἀλλ' ἐπὶ τὸ H· ἔσται δὴ ὡς ἡ A Δ πρὸς Δ B οὕτως ἡ A H πρὸς H B, ὅπερ ἄτοπον· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Z παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον ἐπὶ τὸ Γ πίπτει.

Prop. XVIII. *Theor.*

Si in sectionibus oppositis aliquod punctum sumatur inter duas sectiones, & ab ipso duæ rectæ ducantur utramque sectionem secantes; & quas rationes habent interjectæ inter unam sectionem & punctum ad eas quæ inter idem punctum & alteram sectionem interjiciuntur, easdem habeant rectæ majores iis quæ sunt inter sectiones oppositas ad excessus ipsarum: quæ per terminos majorum rectarum transeunt, occurrent sectionibus; & quæ ab occursibus ad sumptum punctum ducuntur, sectiones contingent.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Εὰν ἐν ἀντικειμέναις ληφθῇ τι σημεῖον μεταξὺ τῶν δύο τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι διαχθῶσι τέμνουσαι ἑκατέραν τῶν τομῶν, καὶ ὡς ἔχουσιν αἱ μεταξὺ τῆς μιᾶς τομῆς πρὸς τὰς μεταξὺ τῆς ἑτέρας καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου οὕτως ἔχωσιν αἱ μείζους τῶν ἀπολαμβανομένων μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων πρὸς τὰς ὑπεροχὰς αὐτῶν· ἡ διὰ τῶν περάτων ἀγομένη εὐθεῖα τῶν μειζόνων εὐθειῶν ταῖς τομαῖς συμπεσεῖται, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἐφάψονται τῶν τομῶν.

SINT oppositæ sectiones A, B, & punctum Δ inter sectiones, quod quidem primum ponatur in angulo sub asymptotis contento, & per Δ rectæ A Δ B, Γ Δ Θ ducantur; major igitur

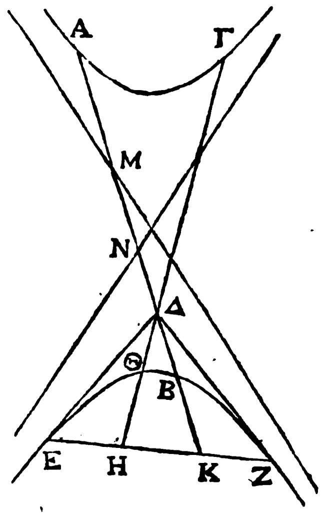
ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ A, B, καὶ τὸ Δ σημεῖον μεταξὺ τῶν τομῶν πρότερον ὑποκείσθω ἐν τῇ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένῃ γωνίᾳ, καὶ διὰ τοῦ Δ διήχθωσαν αἱ A Δ B, Γ Δ Θ· μείζων ἄρα ἐστὶν

* Est enim, [ex hyp.] ut A Δ ad Δ B ita A Γ ad Γ B.

ἡ μὲν

ἡ μὲν ΑΔ τῆς ΔΒ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΔΘ, διότι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΝ τῇ ΑΜ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ ἐχέτω ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, ὃν δὲ ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ ἐχέτω ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η συμπίπτει τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς συμπτώσεις τῆς τομῆς ἐφάψονται.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Δ ἐντός ἐστι τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, δυνατὸν ἀπὸ τοῦ Δ δύο ἐφαπτομένας ἀγαγεῖν. ἤχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ· ἐλεύσεται δὴ διὰ τῶν Κ, Η σημείων. εἰ γὰρ μή, ἤτοι διὰ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν ἐλεύσεται μόνου, ἢ δι' οὐδετέρου. εἰ μὲν γὰρ δι' ἑνὸς αὐτῶν μόνου, ἡ ἑτέρα τῶν εὐθειῶν εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τμηθήσεται καθ' ἕτερον, ὅπερ ἀδύνατον· εἰ δὲ δι' οὐδετέρου, ἐπ' ἀμφοτέρων τὸ ἀδύνατον συμβήσεται.



est ΑΔ quam ΔΒ, & ΓΔ major quam ΔΘ, quoniam [per 16. 2. huj.] ΒΝ est æqualis ΑΜ; quam vero rationem habet ΑΔ ad ΔΒ eandem habeat ΑΚ ad ΚΒ; & quam ΓΔ habet ad ΔΘ eandem habeat ΓΗ ad ΗΘ: dico rectam quæ per Κ, Η transit, occurrere sectioni; & quæ à puncto Δ ad occursus ducuntur, sectionem contingere.

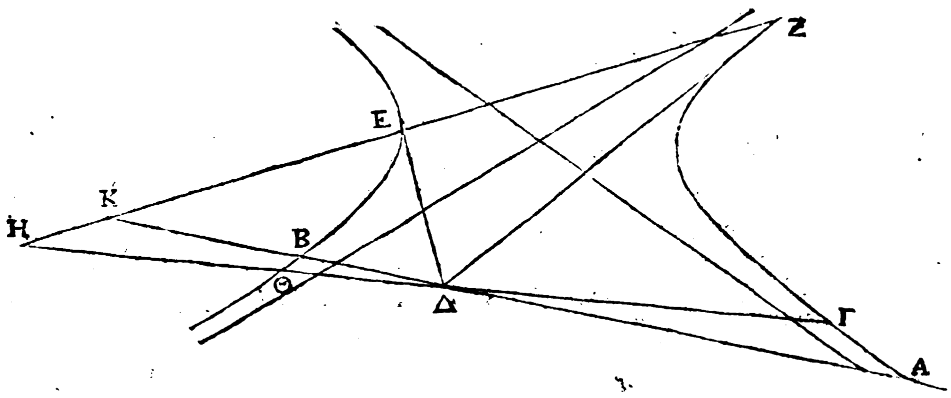
Quoniam enim punctum Δ est in angulo sub asymptotis contento, possumus [per 49. 2. huj.] ab eo duas rectas contingentes ducere. ducantur ΔΕ, ΔΖ; & ΕΖ jungatur: quæ igitur per puncta Κ, Η transibit. si enim non, vel transibit per unum ipsorum tantum, vel per neutrum. & si quidem per unum tantum, altera rectarum [per 37. 3. huj.] in eadem ratione ad aliud punctum secabitur; quod fieri non potest: si vero per neutrum, in utrisque impossibile eveniet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Εἰλήφθω δὴ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ διήχθωσαν αἱ εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς τομάς, καὶ διαιρείσθωσαν ὡς εἴρηται· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν τομῶν.

Prop. XIX. *Theor.*

Sumatur itaque punctum Δ in angulo deinceps ei qui sub asymptotis continetur, ducanturque rectæ sectiones secantes, & modo dicto dividantur: dico eam quæ per Κ, Η producitur, occurrere utrique sectionum; & quæ ab occursibus ducuntur ad Δ, sectiones contingere.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτόμεναι ἑκατέρας τῶν τομῶν αἱ ΔΕ, ΔΖ· ἡ ἄρα διὰ τῶν Ε, Ζ καὶ διὰ τῶν Κ, Η ἐλεύσεται. εἰ γὰρ μή, ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἥξει, ἢ δι' οὐδετέρου· καὶ πάλιν ὁμοίως συναχθήσεται τὸ ἄτοπον.

Ducantur enim à puncto Δ rectæ ΔΕ, ΔΖ, quæ utramque sectionem contingant: ergo quæ ducitur per Ε, Ζ etiam per Κ, Η transibit. si enim non; vel transibit per alterum ipsarum, vel per neutrum: & rursus eodem modo absurdum concludetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν δὲ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπί τινος ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ γένηται τὰ αὐτά· ἡ διὰ τῶν περάτων τῶν ὑπεροχῶν ἀγομένη εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ' ἧς ἐστι τὸ σημεῖον, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν σύμπτωσιν τῆς

Prop. XX. *Theor.*

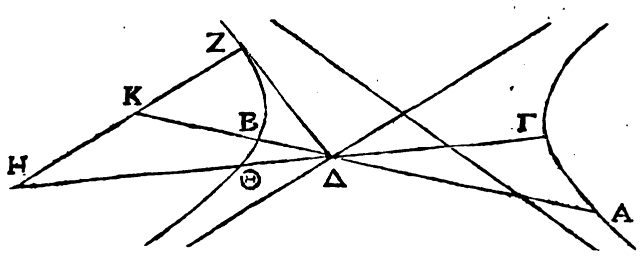
Si sumptum punctum sit in una asymptotôn, & reliqua eadem fiant: recta, quæ transit per terminos excessuum, asymptoto in qua est punctum parallela erit; & quæ à puncto ducitur ad occursum sectionis & rectæ

per

per terminos transeuntis, sectionem continget.

τομῆς καὶ τὸ διὰ τῶν περάτων ἠγμένης εὐθείας ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Sint oppositæ sectiones A, B; & punctum Δ sit in una asymptotôn, & reliqua eadem fiant: dico rectam quæ per K, H transit, occurrere sectioni; [& parallelam esse asymptoto in quâ punctum Δ;] & quæ ab occursu ad Δ ducitur, sectionem contingere.



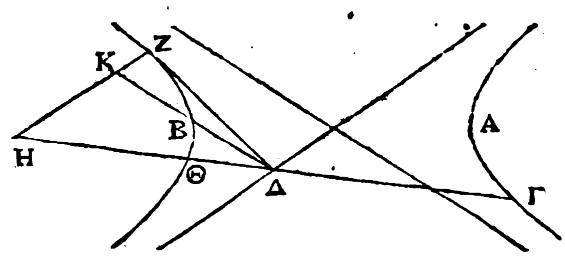
Ducatur enim à puncto Δ recta contingens ΔZ, & à Z ducatur parallela asymptoto in qua est punctum Δ: transibit igitur ea per puncta K, H. si enim non, vel per alterum tantum transibit, vel per neutrum; & ita eadem absurda sequentur ac in præmissis.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ A, B, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γινέσθω· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν K, H συμπεσεῖται τῇ τομῇ, [καὶ παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ' ἧς τὸ Δ σημεῖον,] καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη ἡ ΔZ, καὶ ἀπὸ τοῦ Z, παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον ἐφ' ἧς ἐστι τὸ Δ, ἤχθω εὐθεῖα· ἥξει δὴ διὰ τῶν K, H. εἰ γὰρ μή, ἢ διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἥξει ἢ δι' οὐδετέρου· καὶ τὰ αὐτὰ ἄτοπα συμβήσεται τοῖς πρότερον.

Prop. XXI. *Theor.*

Sint rursus oppositæ sectiones A, B, sitque punctum Δ in una asymptotôn; & recta quidem ΔBK, alteri asymptoto parallela, in uno tantum puncto B occurrat sectioni; recta vero ΓΔΘH utrique sectioni occurrat; & ut ΓΔ ad ΔΘ ita sit ΓH ad HΘ, & ipsi ΔB æqualis sit BK: dico rectam, quæ per puncta K, H transit, occurrere sectioni, & asymptoto in qua est punctum Δ parallelam esse; & quæ ab occursu ad punctum Δ ducitur, sectionem contingere.



Ducatur enim recta contingens ΔZ; & à Z ducatur parallela ei asymptoto in qua est Δ: transibit igitur ea per puncta K, H. nam si non ita sit, eadem absurda sequantur necesse est.

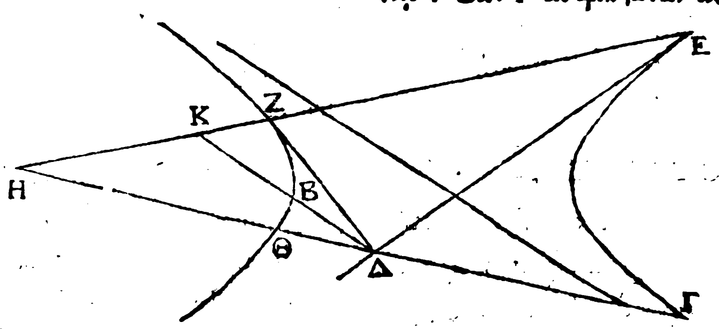
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἔστωσαν πάλιν ἀντικείμεναι αἱ A, B, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἡ μὲν ΔBK τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον συμβαλλέτω τὸ B, παράλληλος οὖσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ δὲ ΓΔΘ ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν συμβαλλέτω, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΓH πρὸς HΘ, τῇ δὲ ΔB ἴση ἔστω ἡ BK· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν K, H σημείων συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ' ἧς ἐστι τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη ἡ ΔZ, καὶ ἀπὸ τοῦ Z παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον ἐφ' ἧς ἐστι τὸ Δ ἤχθω εὐθεῖα· ἥξει δὴ διὰ τῶν K, H. εἰ γὰρ μή, τὰ πρότερον εἰρημένα ἄτοπα συμβήσεται.

Prop. XXII. *Theor.*

Similiter autem sint oppositæ sectiones, asymptotique; & punctum Δ sumatur in angulo deinceps ei qui sub asymptotis continetur; recta vero ΓΔΘ secet utramque sectionem, & ΔB alteri asymptoto parallela sit; sitque ut ΓΔ ad ΔΘ ita ΓH ad HΘ, & ipsi ΔB æqualis ponatur BK: dico rectam quæ per puncta K, H transit, occurrere utrique oppositarum sectionum; & quæ ab occursibus ducuntur ad punctum Δ, sectiones easdem contingere.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἔστωσαν δὲ ὁμοίως αἱ ἀντικείμεναι, καὶ αἱ ἀσύμπτωτοι, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, ὁμοίως εἰλήφθω. καὶ ἡ μὲν ΓΔΘ τέμνουσα τὰς τομάς, ἡ δὲ ΔB παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΓH πρὸς HΘ, τῇ δὲ ΔB ἴση ἔστω ἡ BK· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν K, H σημείων συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἀγόμεναι ἐφάψονται τῶν ἀντικειμένων.

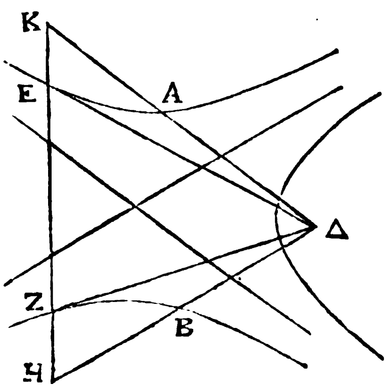
Ἤχθω

Ηχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ Δ Ε, Δ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ε Ζ, καὶ εἰ δυνατὸν μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Η, ἀλλ' ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου, ἢ δι' οὐδετέρου ἥξει. εἰ μὲν διὰ τοῦ Η μόνου, οὐκ ἔσται ἡ Δ Β τῇ Β Κ ἴση, ἀλλ' ἑτέρᾳ. ὅπερ ἄτοπον. εἰ δὲ διὰ μόνου τοῦ Κ, οὐκ ἔσται ὡς ἡ Γ Δ πρὸς Δ Θ οὕτως ἡ Γ Η πρὸς Η Θ, ἀλλ' ἄλλη τις πρὸς ἄλλην. εἰ δὲ δι' οὐδετέρου τῶν Η, Κ, ἀμφότερα τὰ ἀδύνατα συμβήσεται.

Ducantur enim Δ Ε, Δ Ζ, quæ sectiones contingant; & juncta Ε Ζ, si fieri possit, non transeat per Κ, Η, sed vel per alterum ipsorum tantum, vel per neutrum. si enim per Η tantum transeat, recta Δ Β non erit æqualis ipsi Β Κ, sed alii cuidam; quod [per 31. 3. huj.] est absurdum. si vero tantum per Κ, non erit ut Γ Δ ad Δ Θ ita Γ Η ad Η Θ, sed [per 37. 3. huj.] alia quædam ad aliam. quod si per neutrum ipsorum Κ, Η transeat, utraque absurda sequentur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

ΕΣΤΩΣΑΝ πάλιν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ ἤχθω ἡ μὲν Β Δ τὴν Β τομὴν καθ' ἓν μόνον τέμνουσα, τῇ δὲ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων παράλληλος· ἡ δὲ Δ Α τὴν Α τομὴν ὁμοίως τέμνη, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν Δ Β τῇ Β Η, ἡ δὲ Δ Α τῇ Α Κ· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η συμβάλλει ταῖς τομαῖς, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἀγόμεναι ἐφάψονται τῶν τομῶν.



Ηχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ Δ Ε, Δ Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Ε Ζ, εἰ δυνατὸν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Η, ἤτοι δὴ διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἐλεύσεται, ἢ δι' οὐδετέρου. καὶ ἤτοι ἡ Δ Α οὐκ ἔσται ἴση τῇ Α Κ, ἀλλ' ἄλλη τινι, ὅπερ ἄτοπον· ἢ ἡ Δ Β τῇ Β Η οὐκ ἴση, ἢ οὐδετέρα οὐδετέρᾳ. καὶ πάλιν ἐπ' ἀμφοτέρων τὸ αὐτὸ ἄτοπον συμβήσεται. ἥξει ἄρα ἡ Ε Ζ διὰ τῶν Κ, Η.

Prop. XXIII. *Theor.*

SINT itidem oppositæ sectiones Α, Β, punctumque Δ sit in angulo deinceps ei qui sub asymptotis continetur, & recta quidem Β Δ sectionem Β in uno puncto tantum secet, & sit alteri asymptoto parallela, recta vero Δ Α similiter secet sectionem Α, sitque Δ Β ipsi Β Η æqualis, & Δ Α ipsi Α Κ: dico rectam quæ transit per Κ, Η occurrere sectionibus; & quæ ab occursibus ad Δ ducuntur sectiones contingere.

Ducantur enim Δ Ε, Δ Ζ quæ contingant sectiones; & juncta Ε Ζ, si fieri potest, non transeat per Κ, Η; vel igitur per alterum ipsorum, vel per neutrum transibit. unde vel Δ Α non erit æqualis Α Κ, sed alii cuipiam, quod [per 31. 3. huj.] est absurdum: vel Δ Β non erit æqualis ipsi Β Η; vel neutra neutræ. & rursus in utrisque idem continget absurdum: recta igitur Ε Ζ per puncta Κ, Η necessario transibit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

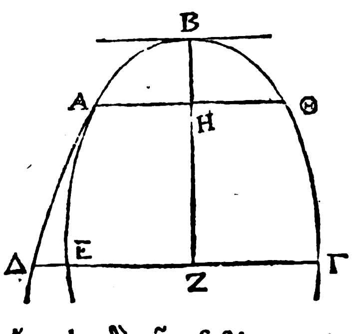
Κώνου τομὴ κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ οὐ συμβάλλει οὕτως, ὥστε μέρος μέν τι εἶναι ταὐτὸν, μέρος δὲ μὴ εἶναι κοινόν.

ΕΙ δυνατὸν, κώνου τομὴ ἡ Δ Α Β Γ κύκλου περιφερείᾳ ἢ κώνου τομῇ τῇ Ε Α Β Γ συμβαλλέτω, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὸν μέρος τὸ αὐτὸ τὸ Α Β Γ, μὴ κοινὸν δὲ τὸ Α Δ καὶ τὸ Α Ε, καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῶν σημεῖον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Θ Α, καὶ διὰ τυχόντος σημείου τοῦ Ε τῇ Α Θ παράλληλος ἤχθω ἡ Δ Ε Γ, καὶ τετμήσθω ἡ Α Θ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η διάμετρος ἤχθω ἡ Β Η Ζ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β παρὰ τὴν Α Θ ἐφάψεται ἑκατέρας τῶν τομῶν, καὶ παράλληλος ἔσται τῇ Δ Ε Γ, καὶ ἔσται ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ Δ Ζ τῇ Ζ Γ ἴση, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ Ε Ζ τῇ Ζ Γ ἴση· ὥστε καὶ ἡ Δ Ζ τῇ Ζ Ε ἐστὶν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Prop. XXIV. *Theor.*

Coni sectio coni sectioni vel circuli circumferentiæ non ita occurrit, ut pars quidem eadem sit, pars vero non sit communis.

SI enim fieri potest, coni sectio Δ Α Β Γ coni sectioni aut circuli circumferentiæ Ε Α Β Γ occurrat, atque ipsarum communis pars sit eadem Α Β Γ, non communis autem Α Δ, Α Ε; & sumpto in ipsis puncto Θ jungatur Θ Α, & per quodvis punctum Ε ducatur Δ Ε Γ parallela ipsi Α Θ; sectaque Α Θ bifariam in Η, ducatur per Η diameter Β Η Ζ: ergo [per 32. 1. huj.] quæ per Β ipsi Α Θ parallela ducitur, utramque sectionem continget, & parallela erit ipsi Δ Ε Γ; eritque [per 46. vel 47. 1. huj.] in altera quidem sectione Δ Ζ æqualis Ζ Γ, in altera vero Ε Ζ æqualis Ζ Γ: quare & Δ Ζ ipsi Ζ Ε æqualis erit, quod fieri non potest.



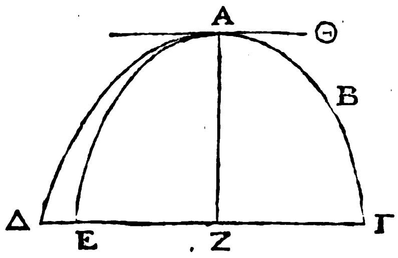
EUTOCIUS.

Ἄλλως.

Ἔστωσαν αἱ Ε Α Β Γ, Δ Α Β Γ τομαὶ, ὡς εἴρηται, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ Δ Ε Γ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ Δ Ε Γ

Aliter.

Sint sectiones Ε Α Β Γ, Δ Α Β Γ, ducaturque utcunque recta Δ Ε Γ, & per Α ipsi Δ Ε Γ parallela ducatur

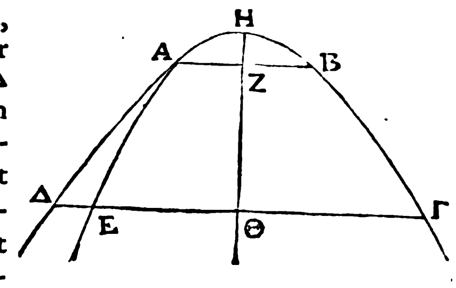


ducatur ΑΘ. si igitur ΑΘ intra sectiones cadit, congruet ea demonstratio quæ ab *Apollonio* affertur. si vero contingit in puncto Α, utrasque sectiones continget: atque tum [per 46. vel 47. 1. huj.] diameter alterius sectionis, quæ ab Α ducitur, reliquæ etiam diameter erit; & propterea in puncto Ζ bifariam secabit & rectam ΓΔ & ΕΓ, quod fieri non potest.

παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ. εἰ οὖν ἐντὸς τῶν τομῶν πίπτει, ἡ ἐν τῷ ῥητῷ ἀπόδειξις ἁρμόσει. εἰ δὲ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Α, ἀμφοτέρων ἐπιψαύσει τῶν τομῶν· καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἀγομένη διάμετρος τῆς ἑτέρας τῶν τομῶν, διάμετρος ἔσται καὶ τῆς λοιπῆς· δίχα ἄρα τέμνει κατὰ τὸ Ζ τήν τε ΓΔ καὶ τὴν ΕΓ, ὅπερ ἀδύνατον.

Aliter.

Sint sectiones ΕΑΒΓ, ΔΑΒΓ, ut dictum est, & in communi ipsarum parte ΑΒΓ sumatur quodvis punctum Β, & ducta ΑΒ bifariam secetur in Ζ, perque Ζ ducatur diameter ΗΖΘ, & per Γ recta ΓΕΔ ipsi ΑΒ parallela. quoniam itaque ΖΘ diameter est, & bifariam secat rectam ΑΒ; erit igitur ΑΒ ordinatim applicata, & illi parallela erit ΓΕΔ: ergo ΓΕ bifariam secabitur in Θ. sed in sectione quidem ΕΑΒΓ ducta est ΕΓ, & in sectione ΔΑΒΓ ipsa ΔΓ: recta igitur ΕΘ rectæ ΘΔ est æqualis, quod fieri non potest.



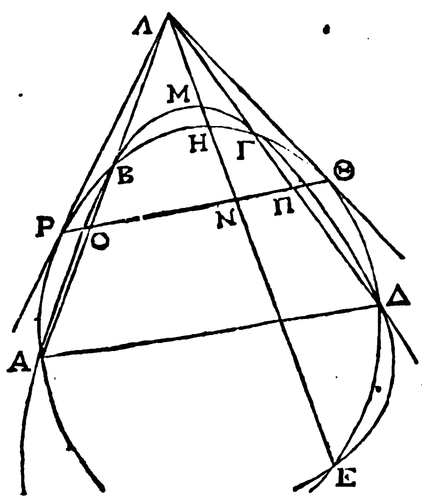
Ἄλλως.

Ἔστωσαν αἱ ΕΑΒΓ, ΔΑΒΓ τομαὶ, ὡς εἴρηται, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ κοινοῦ τμήματος αὐτῶν σημεῖόν τι τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Ζ διάμετρος ἤχθω ἡ ΗΖΘ, καὶ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΒ ἤχθω ἡ ΓΕΔ, ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΖΘ, καὶ δίχα τέμνει τὴν ΑΒ· τεταγμένως ἄρα κατῆκται ἡ ΑΒ, καὶ ἔσται παράλληλος αὐτῇ ἡ ΓΕΔ· δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΓΕ κατὰ τὸ Θ. ἀλλ' ἐν μὲν τῇ ΕΑΒΓ γέγραπται ἡ ΕΓ, ἐν δὲ τῇ ΔΑΒΓ ἡ ΔΓ· ἴση ἄρα ἡ ΕΘ τῇ ΘΔ, ὅπερ ἀδύνατον.

PROP. XXV. *Theor.*

Coni sectio coni sectionem vel circuli circumferentiam in pluribus punctis quam quatuor non secat.

SI enim fieri potest, secet in quinque punctis Α, Β, Γ, Δ, Ε; sintque Α, Β, Γ, Δ, Ε occursus deinceps, nullum intermedium relinquentes, & junctæ ΑΒ, ΓΔ producantur: convenient igitur [per 24. & 25. 2. huj.] inter se extra sectionem in parabola & hyperbola. itaque conveniant in Λ; & quam rationem habet ΑΛ ad ΛΒ eandem habeat ΑΟ ad ΟΒ; quam vero habet ΔΛ ad ΛΓ habeat ΔΠ ad ΠΓ: ergo [per 9. 4. huj.] quæ à puncto Π ad Ο juncta producitur, ex utraque parte occurret sectioni; & quæ ab occursibus ducuntur ad Λ sectiones contingent. occurrat in punctis Θ, Ρ, & ΘΛ, ΛΡ jungantur: contingent igitur hæ sectiones; ergo ΕΛ utramq; secabit, quoniam [ex hyp.] inter Β, Γ nullus est occursus. itaque secet in punctis Μ, Η: ergo [per 37. 3. huj.] in altera quidem sectione erit ut ΕΛ ad ΛΗ ita ΕΝ ad ΝΗ: in altera autem ut ΕΛ ad ΛΜ ita ΕΝ ad ΝΜ: quod fieri non potest *;



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

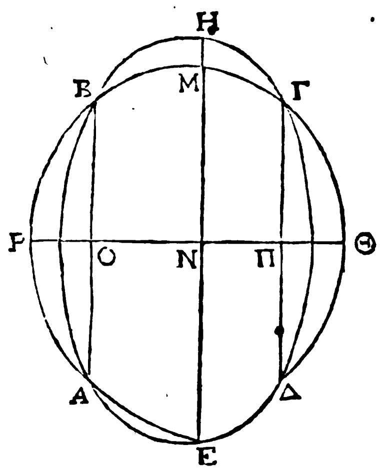
Κώνου τομὴ κώνου τομὴν ἢ κύκλου περιφέρειαν οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα τεσσάρων.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, τεμνέτω κατὰ πέντε σημεῖα, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ ἔστωσαν αἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε συμπτώσεις ἐφεξῆς μηδεμίαν παραλείπουσαι μεταξὺ αὐτῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τῶν τομῶν ἐπὶ τῆς παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΑΛ πρὸς ΛΒ ἐχέτω ἡ ΑΟ πρὸς ΟΒ, ὃν δὲ ἔχει λόγον ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ ἐχέτω ἡ ΔΠ πρὸς ΠΓ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Π ἐπὶ τὸ Ο ἐπιζευγνυμένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνύμεναι ἐφάψονται τῶν τομῶν. συμπιπτέτω δὲ κατὰ τὰ Θ, Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΛ, ΛΡ· ἐφάψονται δὴ αὗται· ἡ ἄρα ΕΛ τέμνει ἑκατέραν τομὴν, ἐπείπερ μεταξὺ τῶν Β, Γ σύμπτωσις οὐκ ἔστι. τεμνέτω κατὰ τὰ Μ, Η· ἔσται ἄρα διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομὴν ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΛΗ οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΗ, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΛΜ οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΜ· τοῦτο δὲ

* Nam ΕΛ ad ΛΜ majorem habet rationem quam ΕΛ ad ΛΗ. est vero [per 37. 3. huj.] ΕΛ ad ΛΜ ut ΕΝ ad ΝΜ; & ΕΛ ad ΛΗ ut ΕΝ ad ΝΗ: ergo ΕΝ ad ΝΜ majorem habet rationem quam ΕΝ ad ΝΗ: unde ΝΜ minor est quam ΝΗ. quod fieri non potest.

ἀδύνατον,

ἀδύνατον, ὥστε καὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. Ἐὰν δὲ αἱ ΑΒ, ΔΓ παράλληλοι ὦσιν, ἔσονται μὲν αἱ τομαὶ ἐλλείψεις, ἢ κύκλου περιφέρεια. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΟ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα· συμπεσεῖται δὴ ταῖς τομαῖς. συμπιπτέτω δὲ κατὰ τὰ Θ, Ρ· ἔσται δὴ διάμετρος τῶν τομῶν ἡ ΘΡ, τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΑΒ, ΓΔ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τὰς ΑΒ, ΓΔ ἡ ΕΝΜΗ· τεμεῖ ἄρα ἡ ΕΜΗ τὴν ΘΡ καὶ ἑκατέραν τῶν γραμμῶν, διότι ἑτέρα σύμπτωσις οὐκ ἔστι παρὰ τὰς Α, Β, Γ, Δ· ἔσται δὴ διὰ ταῦτα ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ ΝΜ ἴση τῇ ΕΝ, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ ΝΕ τῇ ΝΗ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΝΗ ἐστιν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.



quare neque illud quod à principio supponebatur. Si vero ΑΒ, ΔΓ parallelæ sint, sectiones erunt ellipses, vel circuli circumferentia. dividantur ΑΒ, ΓΔ bifariam in Ο, Π; & juncta ΠΟ ad utrasque partes producatur: sectionibus igitur occurret. occurrat in Θ, Ρ: erit igitur [per 28. 2. huj.] ΘΡ diameter sectionum, & ΑΒ, ΓΔ ad ipsam ordinatim applicatæ. à puncto Ε ducatur ΕΝΜΗ ipsis ΑΒ, ΓΔ parallela: secabit igitur rectam ΘΡ & utramq; sectionem, propterea quod alius occursus non est præter Α, Β, Γ, Δ: ergo, per jam dicta, in altera quidem sectione erit ipsi ΕΝ æqualis ΝΜ; in altera vero ΕΝ æqualis ΝΗ; quare ΝΜ erit æqualis ipsi ΝΗ, quod fieri non potest.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛʹ.

Ἐὰν τῶν εἰρημένων γραμμῶν τινες καθ' ἓν ἐφάπτωνται σημεῖον ἀλλήλων, οὐ συμβάλλουσιν ἑαυταῖς καθ' ἕτερα σημεῖα πλείονα ἢ δύο.

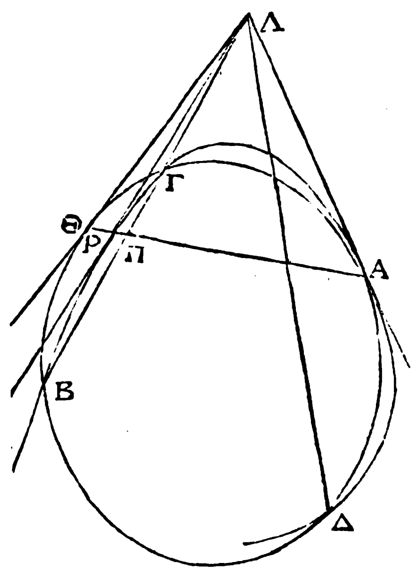
Ἐφαπτέσθωσαν γὰρ ἀλλήλων τινὲς δύο τῶν εἰρημένων γραμμῶν κατὰ τὸ Α σημεῖον· λέγω ὅτι οὐ συμβάλλουσι κατ' ἄλλα σημεῖα πλείονα ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμβαλλέτωσαν κατὰ τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἔστωσαν αἱ συμπτώσεις ἐφεξῆς ἀλλήλαις μηδεμίαν μεταξὺ παραλείπουσαι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΑΛ· ἐφάψεται δὴ τῶν δύο τομῶν, καὶ συμπεσεῖται τῇ ΓΒ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Λ, καὶ γινέσθω ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΛΒ οὕτως ἡ ΓΠ πρὸς ΠΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΠ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ ταῖς τομαῖς, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Λ ἐφάψονται τῶν τομῶν. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Θ, Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΛ, ΛΡ· ἐφάψονται δὴ αὐταὶ τῶν τομῶν· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνυμένη τέμνει ἑκατέραν τῶν τομῶν, καὶ συμβήσεται τὰ πρότερον εἰρημένα ἄτοπα· οὐκ ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, ἢ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἡ ΓΒ παράλληλος ᾖ τῇ ΑΛ, ὁμοίως τῷ προειρημένῳ ποιησόμεθα τὴν ἀπόδειξιν, διάμετρον δείξαντες τὴν ΑΘ.

Prop. XXVI. *Theor.*

Si dictarum curvarum aliquæ in uno puncto sese contingant; non occurrent sibi ipsis ad alia puncta plura quam duo.

Contingant enim sese duæ quæpiam dictarum curvarum in puncto Α: dico eas non occurrere sibi ipsis ad alia puncta plura quam duo.

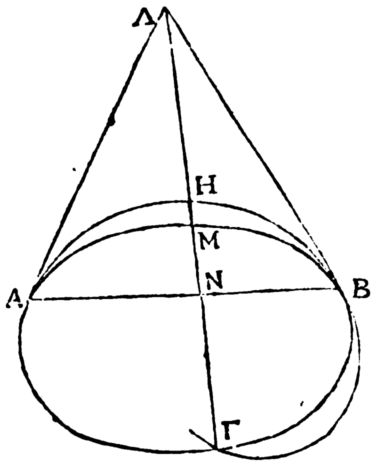


Nam, si fieri potest, occurrant ad puncta Β, Γ, Δ; sintque occursus deinceps, nullum intermedium relinquentes; & juncta ΒΓ producatur; à puncto autem Α ducatur contingens ΑΛ, quæ quidem continget duas sectiones & cum recta ΓΒ conveniet. conveniat in Λ, & fiat ut ΓΛ ad ΛΒ ita ΓΠ ad ΠΒ; jungaturque ΑΠ, & producatur: occurret igitur ea [per 9. 4. huj.] sectionibus; & quæ ab occursibus ad punctum Λ ducuntur, sectiones contingent. itaque occurrat in punctis Θ, Ρ, & jungantur ΘΛ, ΛΡ; contingent igitur sectiones: ergo quæ à puncto Δ ad Λ ducitur utramque sectionem secabit; & eadem quæ dicta sunt [in præced.] absurda sequentur: non igitur se secant ad plura puncta quam duo. Si vero in ellipsi & circuli circumferentia ΓΒ ipsi ΑΛ parallela sit; pari modo [atque in præced.] demonstrationem faciemus, rectam ΑΘ diametrum esse ostendentes.

Prop. XXVII. *Theor.*

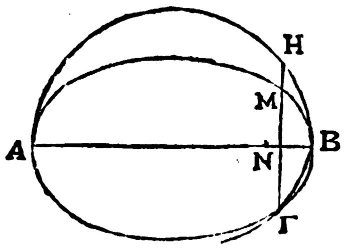
Si prædictarum curvarum aliquæ in duobus punctis sese contingant, in alio puncto sibi ipsis non occurrent.

PRÆDICTARUM enim curvarum duæ sese contingant in duobus punctis A, B: dico eas ad aliud punctum sibi ipsis non occurrere.

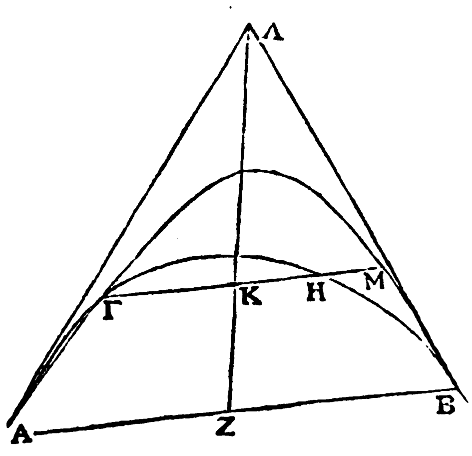


Nam, si fieri potest, occurrant etiam ad punctum Γ; sitque primum Γ extra A, B tactus; & ab ipsis A, B ducantur rectæ contingentes, quæ in punctum Λ conveniant, ut in prima figura apparet: contingent igitur hæ utramque sectionem; & juncta Γ Λ utramque secabit. secet ea in punctis H, M, & jungatur A N B: ergo in altera quidem sectione erit ut Γ Λ ad Λ H ita Γ N ad N H; in altera vero ut Γ Λ ad Λ M ita Γ N ad N M; quod est absurdum [ut ad 25. ostensum est.]

At si Γ H parallela sit rectis ad puncta A, B contingentibus, ut in ellipsi in secunda figura; jungemus lineam A B, quæ [per conversf. 27. 2. huj.] sectionum diameter erit; ergo utraque rectarum Γ H, Γ M in puncto N bifariam secabitur; quod est absurdum: igitur sectiones ad aliud punctum sibi ipsis non occurrunt, sed ad A, B tantum.



Sit deinde Γ inter tactus, ut in tertia figura: perspicuum est igitur sectiones non contingere sese ad punctum Γ, quia ad duo tantum puncta contingere ponebantur. secent igitur seipsas in Γ, & à punctis A, B ducantur A Λ, Λ B, quæ sectiones contingant; jungaturque A B, quæ in Z bifariam dividatur: ergo [per 29. 2. huj.] à puncto Λ ad Z ducta diameter erit; quæ quidem per Γ non transibit. si enim transeat, quæ per Γ ipsi A B parallela ducitur [per conversf. 5, & 6. 2. huj.] continget utramque sectionem, quod fieri non potest. itaque ducatur à puncto Γ recta Γ K H M parallela ipsi A B: erit igitur in altera quidem sectione Γ K æqualis ipsi K H, in altera vero ipsi K Γ æqualis K M; quare K M ipsi K H erit æqualis, quod fieri non potest. eodemque modo si contingentes inter se parallelæ sint, ex iis quæ diximus idem concludetur absurdum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐὰν τῶν προειρημένων γραμμῶν τινες κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις καθ' ἕτερον.

ΔΥΟ γὰρ τῶν εἰρημένων γραμμῶν ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ δύο σημεῖα τὰ A, B· λέγω ὅτι ἀλλήλαις κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ συμβάλλουσιν.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμβαλλέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω πρότερον τὸ Γ ἐκτὸς τῶν A, B, καὶ ἤχθωσαν ἐκ τῶν A, B ἐφαπτόμεναι· ἐφάψονται ἄρα ἀμφοτέρων τῶν γραμμῶν. ἐφαπτέσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ Λ· τέμνει δὴ ἑκατέραν τῶν τομῶν. τεμνέτω κατὰ τὰ H, M, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ A N B· ἔσται ἄρα ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ὡς ἡ Γ Λ πρὸς ΛH οὕτως ἡ ΓN πρὸς N H, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ὡς ἡ Γ Λ πρὸς ΛM οὕτως ἡ ΓN πρὸς NM, ὅπερ ἄτοπον.

Ἐὰν δὲ ἡ Γ H παράλληλος ᾖ ταῖς κατὰ τὰ A, B σημεῖα ἐφαπτομέναις, ὡς ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐν τῇ δευτέρᾳ καταγραφῇ, ἐπιζεύξαντες τὴν A B ἐροῦμεν ὅτι διάμετρος ἔσται τῶν τομῶν· ὥστε δίχα τμηθήσεται ἑκατέρα τῶν Γ H, Γ M κατὰ τὸ N, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα καθ' ἕτερον σημεῖον συμβάλλουσι γραμμαὶ ἀλλήλαις, ἀλλὰ κατὰ μόνα τὰ A, B.

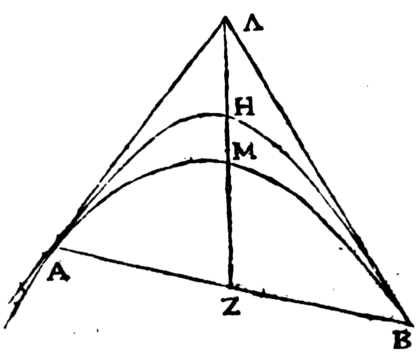
Ἔστω δὴ τὸ Γ μεταξὺ τῶν ἁφῶν, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς· φανερὸν δὴ ὅτι οὐκ ἐφάψονται αἱ γραμμαὶ ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ, κατὰ δύο γὰρ μόνον ὑπέκειντο ἐφαπτόμεναι. τεμνέτωσαν οὖν κατὰ τὸ Γ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν A, B ἐφαπτόμεναι αἱ A Λ, Λ B, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ A B, καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Z· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Z διάμετρος ἔσται, διὰ μὲν οὖν τοῦ Γ οὐκ ἐλεύσεται. εἰ γὰρ ἥξει, ἡ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν A B ἀγομένη ἐφάψεται ἀμφοτέρας τῶν τομῶν. τοῦτο δὲ ἀδύνατον. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Γ παρὰ τὴν A B ἡ Γ K H M· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ Γ K ἴση τῇ K H, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ K M τῇ K Γ ἴση· ὥστε καὶ ἡ K M τῇ K H, ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὴ καὶ ἐὰν παράλληλοι ὦσιν αἱ ἐφαπτόμεναι, κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐπάνω τὸ ἀδύνατον δειχθήσεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Παραβολὴ παραβολῆς οὐκ ἐφάψεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

Εἰ γὰρ δυνατὸν ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ παραβολαὶ κατὰ τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΛ, ΛΒ· ἐφάψονται δὴ αὗται τῶν τομῶν ἀμφοτέρων, καὶ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ Λ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἡ ΛΖ. ἐπεὶ οὖν δύο γραμμαὶ αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ δύο τὰ Α, Β, οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις καθ' ἕτερον· ὥστε ἡ ΛΖ ἑκατέραν τῶν τομῶν τέμνει. τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομὴν ἡ ΛΗ τῇ ΗΖ ἴση, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν ἡ ΛΜ τῇ ΜΖ ἴση, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παραβολὴ παραβολῆς ἐφάψεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.



Prop. XXVIII. Theor.

Parabola parabolam non continget præterquam in uno puncto.

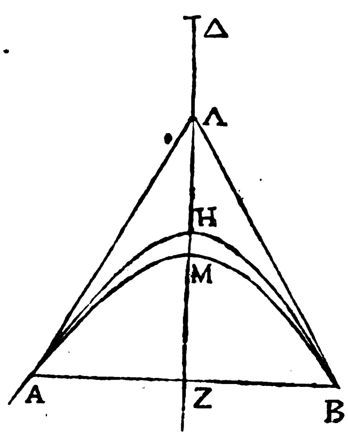
Si enim fieri potest, parabolæ AHB, AMB in punctis A, B sese contingant, & ducantur rectæ contingentes ΛA, ΛB: contingent igitur hæ utrasque sectiones, & in punctum Λ convenient.

Jungatur AB, & bifariam secetur in Z, & ducatur ΛZ. quoniam igitur duæ sectiones AHB, AMB sese contingunt in punctis A, B [per præced.] ad aliud punctum sibi ipsis non occurrent: quare ΛZ utramque sectionem secabit. secet in H, M: ergo [per 35. 1. huj.] in altera quidem sectione erit ΛH æqualis ipsi HZ, in altera vero ΛM ipsi MZ; quod fieri non potest: igitur parabola parabolam præterquam in uno puncto non continget.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Παραβολὴ ὑπερβολῆς οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα, ἐκτὸς αὐτῆς πίπτουσα.

Ἔστω παραβολὴ μὲν ἡ ΑΗΒ, ὑπερβολὴ δὲ ἡ ΑΜΒ, καὶ εἰ δυνατὸν ἐφαπτέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι ἑκατέρας τῶν Α, Β τομῶν, συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΖ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ τομαὶ κατὰ τὰ Α, Β ἐφάπτονται, κατ' ἄλλο οὐ συμβάλλουσιν· ἡ ἄρα ΛΖ κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο τέμνει τὰς τομάς. τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ προσεκβεβλήσθω ἡ ΛΖ· πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς ὑπερβολῆς. ἔστω κέντρον τὸ Δ· ἔσται δὴ, διὰ μὲν τὴν ὑπερβολὴν, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΜ οὕτως ἡ ΜΔ πρὸς ΔΛ, καὶ λοιπὴ ἡ ΖΜ πρὸς ΜΛ. μείζων δὲ ἡ ΖΔ τῆς ΔΜ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΜ τῆς ΜΛ. διὰ δὲ τὴν παραβολὴν ἴση ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ· ὅπερ ἀδύνατον.



Prop. XXIX. Theor.

Parabola hyperbolam non continget in duobus punctis, extra ipsam cadens.

Sit parabola quidem AHB, hyperbola vero AMB; & si fieri potest, sese contingant in punctis A, B; & ab ipsis ducantur rectæ utramque sectionem contingentes, quæ in Λ conveniant; junctaque AB bifariam secetur in Z, & ducatur ΛZ. itaque quoniam sectiones AHB, AMB sese contingunt in punctis A, B [per 27. 4. huj.] ad aliud punctum sibi ipsis non occurrent: quare ΛZ in alio atque alio puncto sectiones secabit. secet in H, M; & producatur ΛZ: igitur [per 29. 2. huj.] in centrum hyperbolæ cadet. sit quidem centrum Δ: ergo, propter hyperbolam, ut ZΔ ad ΔM ita erit [per 37. 1. huj. & 17. 6.] MΔ ad ΔΛ; & [per 19. 5.] ita reliqua ZM ad MΛ. est autem ZΔ major quam ΔM: ergo [per 14. 5.] & ZM major quam MΛ. sed & propter parabolam [per 35. 1. huj.] erit ZH æqualis ipsi HΛ; quod absurdum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Παραβολὴ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα, ἐντὸς αὐτῆς πίπτουσα.

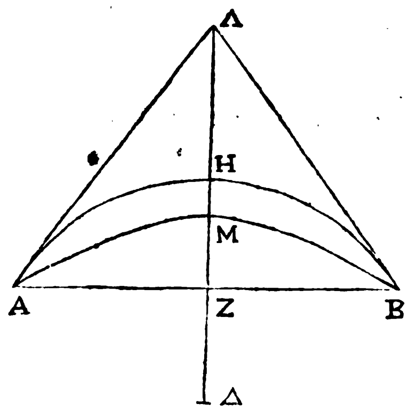
Ἔστω γὰρ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΗΒ, παραβολὴ δὲ ἡ ΑΜΒ, καὶ εἰ δυνατὸν ἐφαπτέσθωσαν κατὰ δύο τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β

Prop. XXX. Theor.

Parabola ellipsim vel circuli circumferentiam non continget in duobus punctis, intra ipsam cadens.

Sit ellipsis, vel circuli circumferentia AHB, parabola vero AMB; &, si fieri potest, in duobus punctis A, B sese contingant, & ab ipsis ducantur

ducantur rectæ contingentes sectiones, quæ conveniant in punctum Λ; junctaque AB secetur in Z bifariam, & jungatur ΛZ: secabit igitur ΛZ utramque sectionem in alio atque alio puncto, uti dictum est. secet in H, M; & producatur ΛZ usque ad Δ centrum ellipseos vel circuli: ergo propter ellipsim & circulum erit [per 37.1.huj.] ut ΛΔ ad ΔH ita HΔ ad ΔZ, & ita reliqua ΛH ad HZ. est autem ΛΔ major quam ΔH; ergo & ΛH major quam HZ. sed & propter parabolam erit [per 35. 1. huj.] ΛM æqualis ipsi MZ; quod fieri non potest.

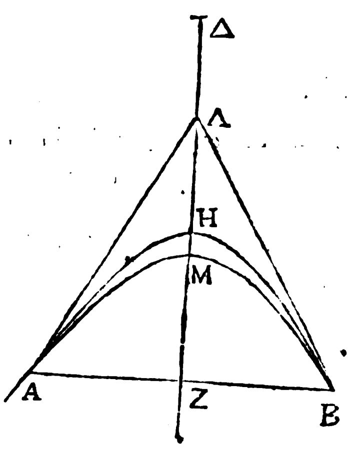


ἐφαπτόμεναι τ̃ τομῶν συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ AB· καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Z, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΛZ· τεμεῖ δὴ ἑκατέραν τ̃ τομῶν κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο, ὡς εἴρηται. τεμνέτω κατὰ τὰ H, M, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΛZ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἔστω τὸ Δ κέντρον τ̃ ἐλλείψεως ἢ τ̃ κύκλου· ἔστιν ἄρα διὰ τὴν ἔλλειψιν καὶ τ̃ κύκλον ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔH οὕτως ἡ ΔH πρὸς ΔZ, καὶ λοιπὴ ἡ ΛH πρὸς HZ. μείζων δέ ἡ ΛΔ τ̃ ΔH· μείζων ἄρα καὶ ΛH τ̃ HZ. διὰ δὲ τ̃ παραβολὴν ἴση ἡ ΛM τῇ MZ· ὅπερ ἀδύνατον.

Prop. XXXI. *Theor.*

Hyperbola hyperbolam idem centrum habentem in duobus punctis non continget.

Hyperbolæ enim AHB, AMB idem habentes centrum Δ, si fieri potest, in punctis A, B sese contingant; & ducantur ab ipsis rectæ contingentes, quæ inter se conveniant, ut AΛ, ΛB; junctaque ΔΛ producatur ad Z, & jungatur AB: ergo [per 30.2.huj.] ΔΛZ secat bifariam rectam AB in Z. utrasque autem sectiones in H, M secabit; quare [per 37.1. huj.] propter hyperbolam AHB, rectangulum ZΔΛ est æquale quadrato ex ΔH; & propter hyperbolam AMB rectangulum ZΔΛ æquale est quadrato ex ΔM: quadratum igitur ex MΔ quadrato ex ΔH æquale erit; quod fieri non potest.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα΄.

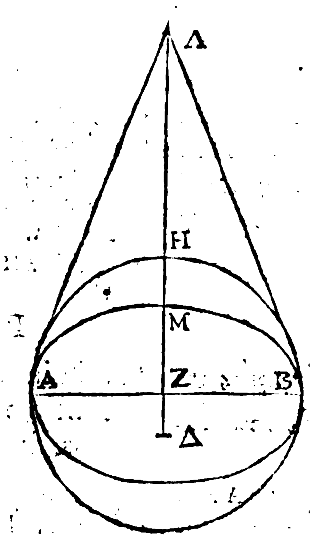
Ὑπερβολὴ ὑπερβολῆς τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσα οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα.

Ὑπερβολαὶ γὰρ αἱ AHB, AMB τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσαι τὸ Δ, εἰ δυνατόν, ἐφαπτέσθωσαν κατὰ τὰ A, B, ἤχθωσαν δὲ ἀπὸ τ̃ A, B ἐφαπτόμεναι αὐτῶν καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις αἱ AΛ, ΛB, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΛ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Z, ἐπιζεύχθω δὲ καὶ ἡ AB. ἡ ἄρα ΔΛZ τὴν AB δίχα τέμνει κατὰ τὸ Z, τεμεῖ δὲ ἡ ΔΛZ τὰς τομὰς κατὰ τὰ H, M· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν AHB ὑπερβολὴν, ἴσον τὸ ὑπὸ ZΔΛ τῷ ἀπὸ ΔH, διὰ δὲ τὴν AMB, τὸ ὑπὸ ZΔΛ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔM· τὸ ἄρα ἀπὸ MΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔH, ὅπερ ἀδύνατον.

Prop. XXXII. *Theor.*

Si ellipsis ellipsim vel circuli circumferentiam idem centrum habentem in duobus punctis contingat; recta conjungens tactus per centrum transibit.

Contingant enim sese dictæ lineæ in punctis A, B; & juncta AB, per A, B puncta ducantur rectæ sectiones contingentes, quæ, si fieri possit, conveniant in Λ; & recta AB in Z bifariam dividatur, & jungatur ΛZ: ergo [per 29. 2. huj.] ΛZ diameter erit sectionum. sit centrum Δ, si fieri potest: rectangu-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ΄.

Ἐὰν ἔλλειψις ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτηται, τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσα· ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τ̃ κέντρου πεσεῖται.

Ἐφαπτέσθωσαν γὰρ ἀλλήλων αἱ εἰρημέναι γραμμαὶ κατὰ τὰ A, B σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ AB, καὶ διὰ τ̃ A, B ἐφαπτόμεναι τ̃ τομῶν ἤχθωσαν, καὶ εἰ δυνατὸν συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἡ AB δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Z, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΛZ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛZ τ̃ τομῶν. ἔστω, εἰ δυνατὸν, κέντρον

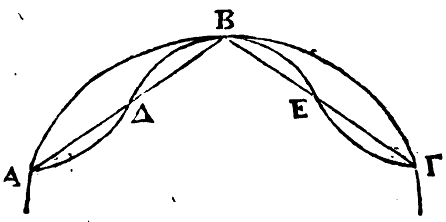
τρον τὸ Δ· ἔσται ἄρα τὸ ὑπὸ ΛΔΖ, διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομὴν ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΗ, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΜ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΗΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΜ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι συμπεσοῦνται· παράλληλοι ἄρα εἰσίν· καὶ διὰ τοῦτο διάμετρός ἡ ΑΒ· ὥστε διὰ τοῦ κέντρου πίπτει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

lum igitur ΛΔΖ [per 37.1.huj.] propter alteram quidem sectionem est æquale quadrato ex ΔΗ; propter alteram vero æquale quadrato ex ΔΜ: quare quadratum ex ΗΔ quadrato ex ΔΜ æquale erit, quod fieri non potest: igitur rectæ contingentes à punctis Α, Β ductæ non conveniunt: ergo parallelæ sunt inter sese: & idcirco recta ΑΒ diameter est; adeoque per centrum transibit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ΄.

Κώνου τομὴ, ἢ κύκλου περιφέρεια κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα ἔχουσα, οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Ει γὰρ δυνατὸν, κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ τῇ ΑΔΒΕΓ συμβαλλέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κυρτὰ ἔχουσα τὰ ΑΒΓ τῇ γραμμῇ. εἰλήφθω τρία σημεῖα τὰ Α, Β, Γ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ· γωνίαν ἄρα περιέχουσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς κοίλοις τῆς ΑΒΓ γραμμῆς. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ αἱ ΑΒ, ΒΓ τὴν αὐτὴν γωνίαν περιέχουσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς κοίλοις τῆς ΑΔΒΕΓ γραμμῆς· αἱ εἰρημέναι ἄρα γραμμαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἔχουσι τὰ κοῖλα, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη.



Prop. XXXIII. *Theor.*

Coni sectio vel circuli circumferentia coni sectioni vel circuli circumferentiæ, ad easdem partes concava non habens, ad plura puncta quam duo non occurret.

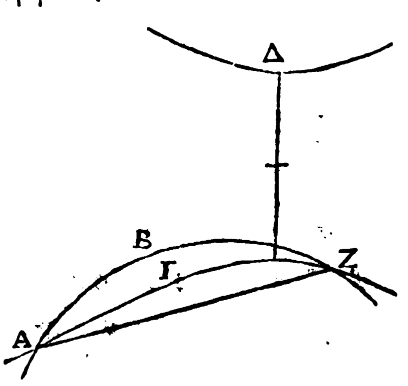
Si enim fieri potest, coni sectio vel circuli circumferentia ΑΒΓ coni sectioni vel circuli circumferentiæ ΑΔΒΕΓ occurrat ad plura puncta quam duo, non habens convexa ΑΒΓ ad easdem partes ad quas altera. sumantur tria puncta Α, Β, Γ; & ΑΒ, ΒΓ jungantur: continent igitur angulum ad easdem partes, ad quas sunt concava sectionis ΑΒΓ. pari modo rectæ ΑΒ, ΒΓ eundem angulum continent ad eas partes ad quas sunt concava sectionis ΑΔΒΕΓ: ergo dictæ curvæ ad easdem partes habent concava sua, quod fieri non potest; posuimus enim ea ad contrarias partes sita.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ΄.

Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια συμπίπτῃ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν συμπτώσεων γραμμαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα ἔχωσι· προσεκβαλλομένη ἡ γραμμὴ κατὰ τὰς συμπτώσεις οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Δ, ΑΓΖ, καὶ ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΖ, συμπίπτουσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Ζ, καὶ ἐχέτωσαν αἱ ΑΒΖ, ΑΓΖ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΖ γραμμὴ ἐκβαλλομένη οὐ συμπεσεῖται τῇ Δ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΖ· καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ Δ, ΑΓΖ, καὶ ἡ ΑΖ εὐθεῖα κατὰ δύο τέμνει τὴν ὑπερβολήν, οὐ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ Δ ἀντικειμένῃ· οὐδὲ ἄρα ἡ ΑΒΖ γραμμὴ συμπεσεῖται τῇ Δ.



Prop. XXXIV. *Theor.*

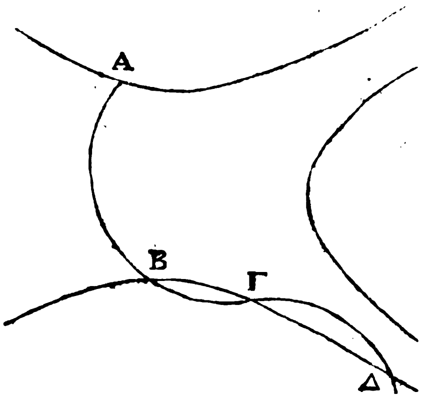
Si coni sectio vel circuli circumferentia occurrat uni oppositarum sectionum in duobus punctis; & curvæ, quæ inter occursus interjiciuntur, ad easdem partes concava habeant: producta curva ultra occursus alteri oppositarum sectionum non occurret.

Sint oppositæ sectiones Δ, ΑΓΖ; & coni sectio vel circuli circumferentia ΑΒΖ occurrat alteri oppositarum sectionum in duobus punctis Α, Ζ; habeantque ΑΒΖ, ΑΓΖ concava ad easdem partes: dico curvam ΑΒΖ productam sectioni Δ non occurrere.

Jungatur enim ΑΖ; &, quoniam Δ, ΑΓΖ oppositæ sectiones sunt, & recta ΑΖ in duobus punctis hyperbolam secat, producta [per 32.2.huj.] non occurret oppositæ sectioni Δ: quare neque curva ΑΒΖ eidem occurret.

Prop. XXXV. *Theor.*

Si coni sectio vel circuli circumferentia uni oppositarum sectionum occurrat; alteri ipsarum non occurret ad plura puncta quam duo.



SINT oppositæ sectiones A, B; & ipsi A occurrat coni sectio vel circuli circumferentia ABΓ, secetque B in punctis B, Γ: dico ad aliud punctum ipsi BΓ non occurrere.

Si enim fieri possit, occurrat in Δ: ergo sectio BΓΔ sectioni BΓ occurrit ad plura puncta quam duo, non habens concava ad easdem partes; quod [per 33.4.huj.] fieri non potest. similiter demonstrabitur si recta ABΓ oppositam sectionem contingat.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε΄.

Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια μιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ, τῇ λοιπῇ αὐτῶν οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ συμβαλλέτω τῇ Α ἡ τοῦ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, καὶ τεμνέτω τὴν Β ἀντικειμένην κατὰ τὰ Β, Γ· λέγω ὅτι κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ συμπεσεῖται τῇ ΒΓ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Δ· ἡ ἄρα ΒΓΔ τῇ ΒΓ τομῇ συμβάλλει κατὰ πλείονα ἢ δύο, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔχουσα τὰ κοῖλα· ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐὰν ἡ ΑΒΓ γραμμὴ τῆς ἀντικειμένης ἐφάπτηται.

Prop. XXXVI. *Theor.*

Coni sectio vel circuli circumferentia oppositis sectionibus ad plura puncta quam quatuor non occurret.

HOC autem perspicue constat ex eo, quod sectio occurrens uni oppositarum sectionum reliquæ non occurrit ad plura puncta quam duo.

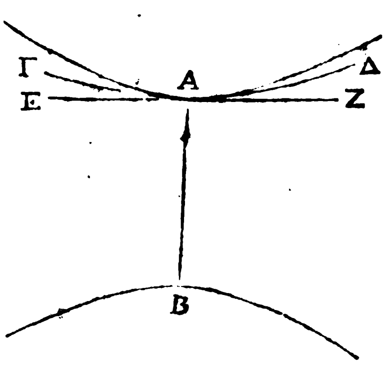
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ΄.

Κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ταῖς ἀντικειμέναις οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

ΦΑΝΕΡΟΝ δὲ τοῦτο, ἐκ τοῦ τὴν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτουσαν τῇ λοιπῇ κατὰ πλείονα δυοῖν μὴ συμπίπτειν.

Prop. XXXVII. *Theor.*

Si coni sectio vel circuli circumferentia unam oppositarum sectionum concava sui parte contingat; alteri oppositarum non occurret.



SINT oppositæ sectiones A, B; & sectionem A contingat alia ΓAΔ: dico sectionem ΓAΔ sectioni B non occurrere.

Ducatur enim per punctum A recta contingens EAZ: utramque igitur sectionem continget in A: quare * non occurret sectioni B; & propterea neque curva ΓAΔ eidem occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ΄.

Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφάπτηται τοῖς κοίλοις αὐτῆς· τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω ἡ ΓΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΑΔ τῇ Β οὐ συμπεσεῖται.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη ἡ ΕΑΖ· ἑκατέρας δὴ τῶν γραμμῶν ἐπιψαύει κατὰ τὸ Α· ὥστε οὐ συμπεσεῖται τῇ Β, ὥστε οὐδὲ ἡ ΓΑΔ.

Prop. XXXVIII. *Theor.*

Si coni sectio vel circuli circumferentia utramque oppositarum sectionum contingat in uno puncto; oppositis sectionibus in alio puncto non occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη΄.

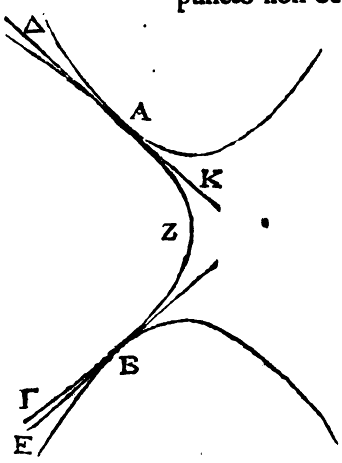
Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων καθ᾽ ἓν ἐφάπτηται σημεῖον καθ᾽ ἕτερον οὐ συμπεσεῖται ταῖς ἀντικειμέναις.

* Non enim potest transire per loca quæ sunt κατὰ κορυφὴν angulo sub asymptotis sectionis.

ΕΣΤΩ

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἐφαπτέσθω ἑκατέρας τῶν Α, Β κατὰ τὰ Α, Β· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓ γραμμὴ καθ' ἕτερον οὐ συμπεσεῖται τῶν Α, Β τομαῖς.

SINT oppoſitæ ſectiones A, B; coni autem ſectio vel circuli circumferentia ABΓ utramque ipſarum in punctis A, B contingat: dico lineam ABΓ oppoſitis ſectionibus A, B in alio puncto non occurrere.



Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒΓ γραμμὴ τῆς Α τομῆς ἐφάπτεται καθ' ἕν, συμπίπτουσα καὶ τῇ Β· τῆς Α ἄρα τομῆς οὐκ ἐφάψεται κατὰ τὰ κοῖλα. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ τῆς Β. ἤχθωσαν τῶν Α, Β τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔΚ, ΒΕ, καὶ αὗται ἐφάψονται τῆς ΑΒΓ γραμμῆς. εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτω ἡ ἑτέρα αὐτῶν, καὶ ἔστω ἡ ΑΖ· μεταξὺ ἄρα τῆς ΔΑΖ ἐφαπτομένης καὶ τῆς Α τομῆς παρεμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΚ, ὅπερ ἀδύνατον· ἐφάψονται ἄρα τῆς ΑΒΓ. καὶ διὰ τοῦτο φανερὸν ὅτι ἡ ΑΒΓ καθ' ἕτερον οὐ συμβάλλει ταῖς Α, Β ἀντικειμέναις. οὕτως καὶ φανερὸν ὅτι ἐὰν ἡ ΓΑΒ γραμμὴ συμπίπτῃ τῇ Β ἀντικειμένῃ, οὐκ ἐφάψεται τῆς Α τοῖς κοίλοις ἑαυτῆς· δειχθήσεται δὲ ἀντιστρόφως τῷ λε'.

Quoniam igitur ABΓ ſectionem A in uno puncto contingit, ſectioni B occurrens; non continget ſectionem A concava ſui parte. ſimiliter demoſtrabitur, neque ita contingere ſectionem B. ducantur rectæ AΔK, BE contingentes ſectiones A, B; quæ & curvam ABΓ contingent. ſi enim fieri poteſt, altera ipſarum ſecet; ſitque ea AZ: ergo inter rectam ΔAZ contingentem & ſectionem A cadit recta intermedia AK; quod [per 32.1.huj.] eſt abſurdum: rectæ igitur AΔ, BE ipſam quoque ABΓ contingent. ex quo apparet curvam ABΓ ad aliud punctum oppoſitis ſectionibus non occurrere. ſic etiam manifeſtum eſt quod, ſi curva ΓAB occurrat oppoſitæ ſectioni B, non continget ſectionem A partibus ejus concavis: è converſo autem 35tæ demonſtrabitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

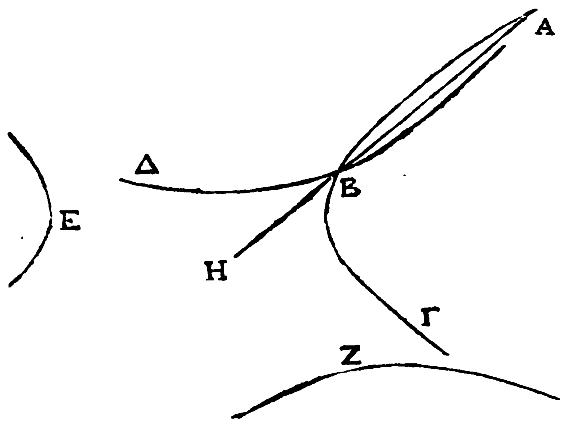
Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα συμπίπτῃ, ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

Prop. XXXIX. *Theor.*

Si hyperbola uni oppoſitarum ſectionum in duobus punctis occurrat, convexa habens è regione ſita; quæ ipſi opponitur ſectio alteri oppoſitarum non occurret.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΔ, Ζ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΒΔ συμβαλλέτω κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα, ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτὰ τοῖς κοίλοις, καὶ τῆς ΑΒΓ ἔστω ἀντικειμένη ἡ Ε· λέγω ὅτι ἡ Ε οὐ συμπεσεῖται τῇ Ζ.

SINT oppoſitæ ſectiones ABΔ, Z; & hyperbola ABΓ ſectioni ABΔ occurrat in punctis A, B, habens convexa è regione ſita; ſitque ſectioni ABΓ oppoſita ſectio E: dico ipſam B ſectioni Z non occurrere.



Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴν τὴν ΑΒΔ εὐθεῖα τέμνει ἡ ΑΒΗ, ἐκβαλλομένη δὲ ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς· ὥστε οὐ συμπεσεῖται τῇ Ζ τομῇ. ὁμοίως δὴ, διὰ τὴν ΑΒΓ ὑπερβολὴν, οὐδὲ τῇ Ε ἀντικειμένῃ συμπίπτει· οὐδὲ ἡ Ε ἄρα τῇ Ζ συμπεσεῖται.

Jungatur enim AB & ad H producatur. quoniam igitur ABH recta ſecat hyperbolam ABΔ, producta vero ex utraque parte extra ſectionem cadit; ideo [per 33. 2. huj.] non occurret ſectioni Z. ſimiliter, propter hyperbolam ABΓ, neque occurret oppoſitæ ſectioni E: ergo ſectio E ſectioni Z non occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῶν ἀντικειμένων οὐδετέρᾳ συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα.

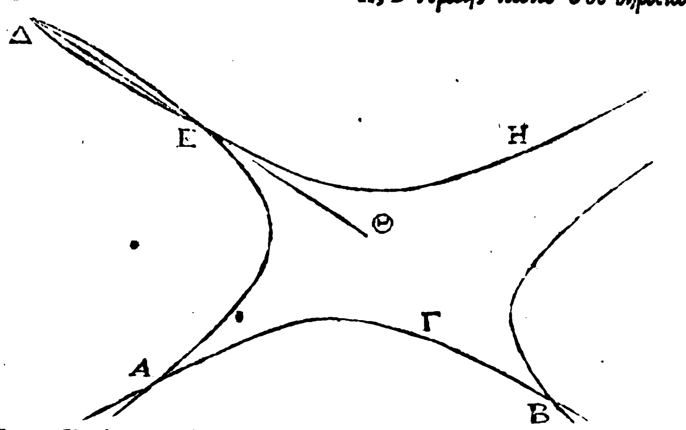
Prop. XL. *Theor.*

Si hyperbola occurrat utrique oppoſitarum ſectionum: quæ ipſi opponitur ſectio nulli oppoſitarum in duobus punctis occurret.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὑπερβολὴ δὲ ἡ ΑΓΒ συμπιπτέτω ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων·

SINT oppoſitæ ſectiones A, B; & AΓB hyperbola utrique occurrat: dico ſectionem, quæ ipsi ΑΓΒ opponitur, nulli sectionum Α, Β occurrere in duobus punctis.

Si enim fieri potest, occurrat in punctis Δ, Ε; & juncta ΔΕ producatur: ergo quidem [per 33.2. huj.] propter sectionem ΔΕΗ recta ΔΕ sectioni ΑΓΒ non occurret; & propter sectionem ΑΕΔ non occurret ipsi Β; (per tres enim locos [per 33.2.huj.] transibit) quod fieri non potest *. similiter demonstrabitur neque sectioni Β in duobus punctis occurrere.



Eadem etiam ratione neutram ipsarum continget. ducatur enim recta contingens ΘΕ, quæ quidem continget utramque sectionem: ergo propter sectionem ΗΕ, ΘΕ ipsi ΑΓ non occurret; & propter sectionem ΑΕ, ΘΕ non occurret sectioni Β: quare neque ΑΓ sectio sectioni Β occurret, contra hypothesin.

λέγω ὅτι ἡ τῇ ΑΓΒ ἀντικειμένη οὐ συμβάλλει ταῖς Α, Β τομαῖς κατὰ δύο σημεῖα.

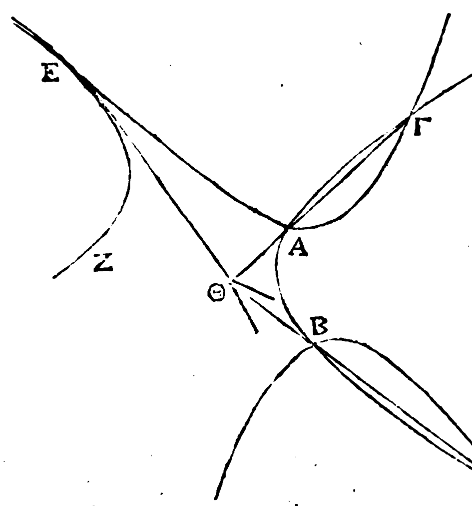
Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμβαλλέτω κατὰ τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω· διὰ μὲν δὴ τὴν ΔΕΗ τομὴν οὐ συμπεσεῖται ἡ ΔΕ εὐθεῖα τῇ ΑΒ τομῇ, διὰ δὲ τὴν ΑΕΔ οὐ συμπεσεῖται τῇ Β τομῇ· (διὰ γὰρ τῶν τριῶν τόπων ἐλεύσεται) ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ τῇ Β τομῇ κατὰ δύο σημεῖα συμπεσεῖται.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ οὐδὲ ἐφάψεται ἑκατέρας αὐτῶν. ἀχθείσης γὰρ ἐπιψαυούσης τῆς ΘΕ, ἐφάπτεται μὲν αὕτη ἑκατέρας τῶν τομῶν· ὥστε διὰ μὲν τὴν ΗΕ τομὴν οὐ συμπεσεῖται ἡ ΘΕ τῇ ΑΓ, διὰ δὲ τὴν ΑΕ οὐ συμβάλλει τῇ Β· ὥστε οὐδὲ ἡ ΑΓ τῇ Β συμβάλλει, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

PROP. XLI. Theor.

Si hyperbola utramque oppositarum sectionum in duobus punctis secet, convexa habens è regione utrique sita; quæ ipsi opponitur sectio nulli oppositarum occurret.

Sint oppositæ sectiones Α, Β; & hyperbola ΓΑΒΔ utramque secet in duobus punctis, convexa habens è regione utrisque sita: dico sectionem ΕΖ huic oppositam nulli ipsarum Α, Β occurrere.



Si enim fieri potest, occurrat sectioni Α in puncto Ε; & junctæ ΓΑ, ΔΒ producantur. convenient igitur hæ inter sese. conveniant autem in Θ: erit igitur [per 25.2. huj.] Θ intra angulum contentum sub asymptotis sectionis ΓΑΒΔ cui opponitur sectio ΕΖ: ergo quæ à puncto Ε ad Θ ducitur, cadet intra angulum contentum sub ipsis ΑΘ, ΘΒ. rursus quoniam ΓΑΕ, ΔΒ oppositæ sectiones sunt, recta ΔΒΘ producta [per 33. 2.huj.] non conveniet sectioni ΓΑΕ: quare si jungatur ΕΘ, cadet ea extra angulum ΑΘΒ, quod quidem absurdum; cadebat enim ea ipsa ΕΘ intra angulum ΑΘΒ: quocirca sectio ΕΖ neutri sectionum Α, Β conveniet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτά· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΓΑΒΔ ἑκατέραν τῶν Α, Β τεμνέτω κατὰ δύο σημεῖα, ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτά· λέγω ὅτι ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ ΕΖ οὐδεμιᾷ τῶν Α, Β συμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμπιπτέτω τῇ ΑΓ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΑ, ΔΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Θ· ἔσται δὴ τὸ Θ ἐν τῇ περιεχομένῃ γωνίᾳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΓΑΒΔ τομῆς, καὶ ἔστιν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ ΕΖ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη [ἐὰν ἐκβληθῇ] ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ τῶν ΑΘΒ περιεχομένης γωνίας. πάλιν ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΓΑΕ, ΔΒ, ἡ ΔΒΘ ἐκβληθεῖσα οὐ συμπίπτει τῇ ΓΑΕ τομῇ· ἡ ἄρα ΕΘ ἐπιζευχθεῖσα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ ΑΘΒ γωνίας, ὅπερ ἄτοπον· ἔπιπτε γὰρ αὐτὴ ἡ ΕΘ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΑΘΒ· οὐκ ἄρα ἡ ΕΖ μηδεμιᾷ τῶν Α, Β συμπεσεῖται.

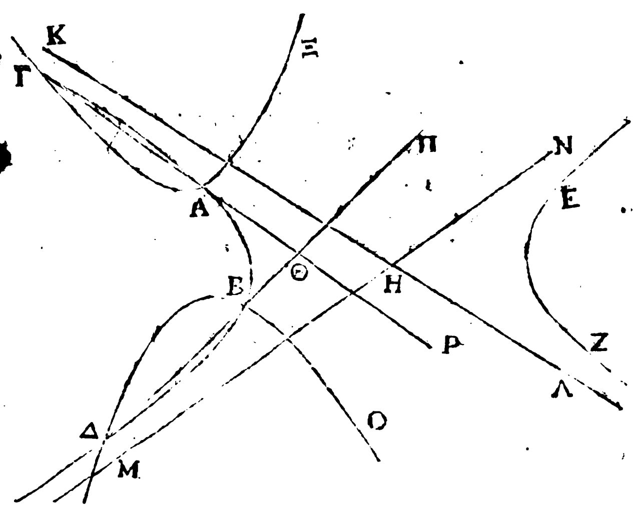
* Scil. fieri non potest ut recta ΔΕΘ, transiens per tres locos [ad 33.2. huj.] definitos, secet ΑΓΒ vel Β. Sed & fieri non potest ut ΑΓΒ secet Β, & tamen ΔΕΘ harum neutri occurrat.

EU-

EUTOCIUS.

Ἄλλως.

Ἐστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΓΑΒΔ ἑκατέραν αὐτῶν τεμνέτω κατὰ τὰ Γ, Α, Β, Δ, καὶ ἔστω ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται. ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ ΔΒ, ΓΑ ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Θ· ἔστιν ἄρα τὸ Θ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΓΑΒΔ τομῆς. ἔστωσαν αἱ τῆς ΓΑΒΔ ἀσύμπτωτοι αἱ ΚΗΛ, ΜΗΝ· φανερὸν δὴ ὅτι αἱ ΝΗ, ΗΛ τὴν ΖΕ τομὴν περιέχουσι. ἡ δὲ ΓΑΘ τέμνει τὴν ΓΑΞ κατὰ δύο τὰ Γ, Α· ἐκβληθεῖσα ἄρα ἐφ' ἑκάτερα οὐ συμπεσεῖται τῇ ΔΒΟ ἀντικειμένῃ, ἀλλ' ἔσται μεταξὺ τῆς ΒΟ καὶ τῆς ΗΛ εὐθείας. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΔΒΘ ἐκβληθεῖσα τῇ ΓΑΞ τομῇ οὐ συμπεσεῖται, ἀλλ' ἔσται μεταξὺ τῶν ΑΞ, ΗΝ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΠΘ, ΘΡ, μὴ συμβάλλουσαι ταῖς Α, Β τομαῖς, περιέχουσι τὰς ΝΗ, ΗΛ ἀσυμπτώτους, καὶ πολλῷ μᾶλλον τὴν ΕΖ τομήν· ἡ ΕΖ ἄρα οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.



Aliter.

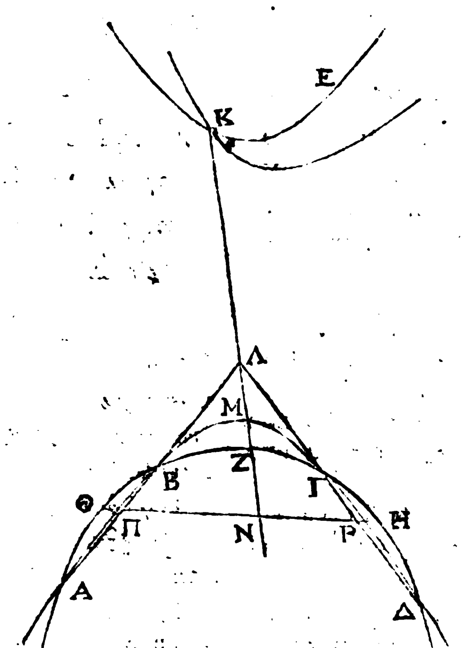
Sint oppositæ sectiones Α, Β, & hyperbola ΓΑΒΔ utramque ipsarum in punctis Γ, Α, Β, Δ secet, & sit sectio ipsi opposita ΕΖ: dico ΕΖ nulli oppositarum sectionum occurrere. junctæ enim ΔΒ, ΓΑ producantur, & conveniant inter se in puncto Θ: erit igitur [per 25. 2. huj.] Θ inter asymptotos sectionis ΓΑΒΔ. sint sectionis ΓΑΒΔ asymptoti ΚΗΛ, ΜΗΝ: perspicuum est igitur rectas ΝΗ, ΗΛ sectionem ΖΕ continere. ΓΑΘ autem sectionem ΓΑΞ in duobus punctis Γ, Α secat: ergo [per 33. 2. huj.] producta ex utraque parte non occurret oppositæ sectioni ΔΒΟ, sed erit inter ΒΟ & rectam ΗΛ. similiter & ΔΒΘ producta sectioni ΓΑΞ non occurret, sed erit inter ΑΞ & ΗΝ. quoniam igitur ΠΘ, ΘΡ, non occurrentes sectionibus Α, Β, continent asymptotos ΝΗ, ΗΛ, & multo magis sectionem ΕΖ; sequitur ΕΖ nulli oppositarum sectionum occurrere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μίαν τῶν ἀντικειμένων κατὰ τέσσαρα τέμνῃ σημεῖα· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

ἘΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓΔ, Ε, καὶ τεμνέτω ὑπερβολὴ τὴν ΑΒΓΔ κατὰ τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστω αὐτῇ ἀντικειμένη ἡ Κ· λέγω ὅτι ἡ Κ οὐ συμπεσεῖται τῇ Ε.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΑΛ πρὸς ΛΒ ἐχέτω ἡ ΑΠ πρὸς ΠΒ, ὃν δὲ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ ἡ ΔΡ πρὸς ΡΓ· ἡ ἄρα διὰ τῶν Π, Ρ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὰς συμπτώσεις ἐφάψονται. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ τὴν



Prop. XLII. *Theor.*

Si hyperbola unam oppositarum sectionum in quatuor punctis secet; quæ ipsi opponitur sectio non occurret alteri oppositarum.

Sint oppositæ sectiones ΑΒΓΔ, Ε; & hyperbola ipsam ΑΒΓΔ secet in quatuor punctis Α, Β, Γ, Δ; sitque ei opposita sectio Κ: dico Κ sectioni Ε non occurrere.

Si enim fieri potest, occurrat in Κ: & junctæ ΑΒ, ΔΓ producantur: convenient igitur [per 25. 2. huj.] inter se. conveniant in Λ; & quam rationem habet ΑΛ ad ΛΒ habeat ΑΠ ad ΠΒ; quam vero habet ΔΛ ad ΛΓ habeat ΔΡ ad ΡΓ: ergo [per 9. 4. huj.] recta, quæ per Π, Ρ producitur, utrique sectioni occurret; & quæ ab Λ ad occursus ducuntur sectionem contingent. jungatur itaque ΚΛ, & producatur: secabit igitur angulum

angulum ΒΑΓ & sectiones in alio atque alio puncto. secet eas in Ζ Μ: ergo [per 39. 3. huj. & 16. 5.] propter oppositas sectiones ΑΘΖΗ, Κ, erit ut ΝΚ ad ΚΛ ita ΝΖ ad ΖΛ; & propter sectiones ΑΒΓΔ, Ε ut ΝΚ ad ΚΛ ita erit ΝΜ ad ΜΛ, quod fieri non potest: igitur sectiones Ε, Κ sibi ipsis non occurrunt.

ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ τὰς τομὰς κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον. τεμνέτω κατὰ τὰ Ζ, Μ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὰς ΑΘΖΗ, Κ ἀντικειμένας, ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς ΖΛ, διὰ δὲ τὰς ΑΒΓΔ, Ε, ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΜΛ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ Ε, Κ συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

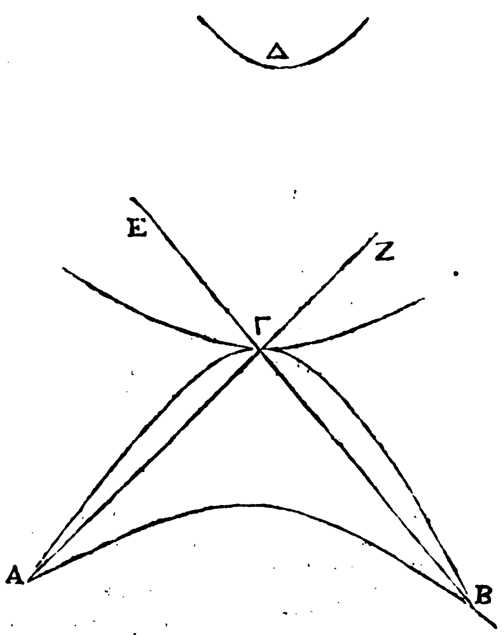
Prop. XLIII. *Theor.*

Si hyperbola alteri oppositarum sectionum in duobus punctis occurrat, concava habens ad easdem partes; alteri vero occurrat in uno puncto: quæ ipsi opponitur sectio nulli oppositarum occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ τῇ μὲν ἀντικειμένων συμπίπτῃ κατὰ δύο σημεῖα, ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔχουσα αὐτῇ τὰ κοῖλα, τῇ δὲ καθ' ἓν σημεῖον· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.

Sint oppositæ sectiones ΑΒ, Γ; & hyperbola ΑΓΒ sectioni quidem ΑΒ in punctis Α, Β occurrat, sectioni vero Γ occurrat in uno puncto Γ; sitque ipsi ΑΓΒ opposita sectio Δ: dico Δ nulli sectionum ΑΒ, Γ occurrere.



Jungantur enim ΑΓ, ΒΓ, & producantur: rectæ igitur ΑΓ, ΒΓ [per 33. 2. huj.] sectioni Δ non occurrent; sed neque occurrent sectioni Γ præterquam in uno puncto Γ. si enim in alio puncto; oppositæ sectioni ΑΒ [per 33. 2. huj.] non occurrent. positum autem est ΑΓ, ΒΓ occurrere sectioni ΑΒ: quare sequitur, ΑΓ, ΒΓ sectioni Γ in solo puncto Γ occurrere; sectioni vero Δ nullo modo: ergo Δ erit intra angulum ΕΓΖ; & propterea sectionibus oppositis ΑΒ, Γ minime occurret.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, Γ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΓΒ τῇ μὲν ΑΒ συμπιπτέτω κατὰ τὰ Α, Β, τῇ δὲ Γ καθ' ἓν τὸ Γ, καὶ ἔστω τῇ ΑΓΒ ἀντικειμένη ἡ Δ· λέγω ὅτι ἡ Δ οὐδετέρᾳ τῶν ΑΒ, Γ συμπεσεῖται.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· αἱ ἄρα ΑΓ, ΒΓ τῇ Δ τομῇ οὐ συμπεσοῦνται· ἀλλ' οὐδὲ τῇ Γ τομῇ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ συμπεσοῦνται πλὴν κατὰ τὸ Γ. εἰ γὰρ συμβάλλουσι καὶ καθ' ἕτερον, τῇ ΑΒ ἀντικειμένῃ οὐ συμπεσοῦνται. ὑπόκεινται δὲ συμπίπτουσαι· αἱ ΑΓ, ΒΓ ἄρα εὐθεῖαι τῇ μὲν Γ τομῇ καθ' ἓν συμβάλλουσι τὸ Γ, τῇ δὲ Δ τομῇ οὐδὲν ὅλως συμβάλλουσιν· ἡ Δ ἄρα ἔσται ὑπὸ τὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΓΖ· ὥστε ἡ Δ τομὴ οὐ συμπεσεῖται ταῖς ΑΒ, Γ ἀντικειμέναις.

Prop. XLIV. *Theor.*

Si hyperbola uni oppositarum sectionum occurrat in tribus punctis; quæ ipsi opponitur, alteri oppositarum, præterquam in uno puncto, non occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ τρία σημεῖα συμβάλλῃ· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται πλὴν καθ' ἕν.

Sint oppositæ sectiones ΑΛΒΓ, ΔΕΖ; & hyperbola ΑΜΒΓ occurrat sectioni ΑΛΒΓ in tribus punctis Α, Β, Γ; sit autem sectioni ΑΜΒΓ opposita sectio ΔΕΚ: dico sectionem ΔΕΚ non occurrere sectioni ΔΕΖ præterquam in uno puncto.

Si enim fieri potest, in punctis Δ, Ε occurrat: & jungantur ΑΒ, ΔΕ; quæ vel parallelæ erunt inter se, vel non.

Sint primum parallelæ; secenturque ΑΒ, ΔΕ bifariam in punctis Η, Θ, & jungatur ΗΘ: est igitur [per 36. 2. huj.] ΗΘ diameter omnium se-

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΛΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΜΒΓ συμβαλλέτω τῇ ΑΛΒΓ κατὰ τρία σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, ἔστω δὲ τῇ ΑΜΒΓ ἀντικειμένη ἡ ΔΕΚ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕΚ τῇ ΔΕΖ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα ἢ ἕν.

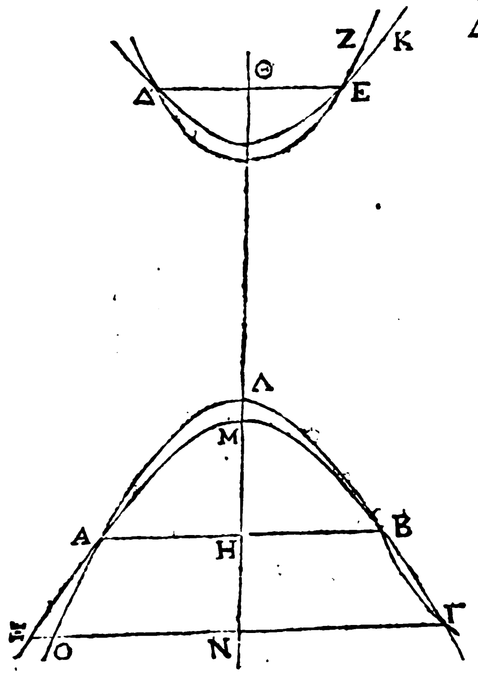
Εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτω κατὰ τὰ Δ, Ε· καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΔΕ ἤτοι παράλληλοί εἰσιν, ἢ οὔ.

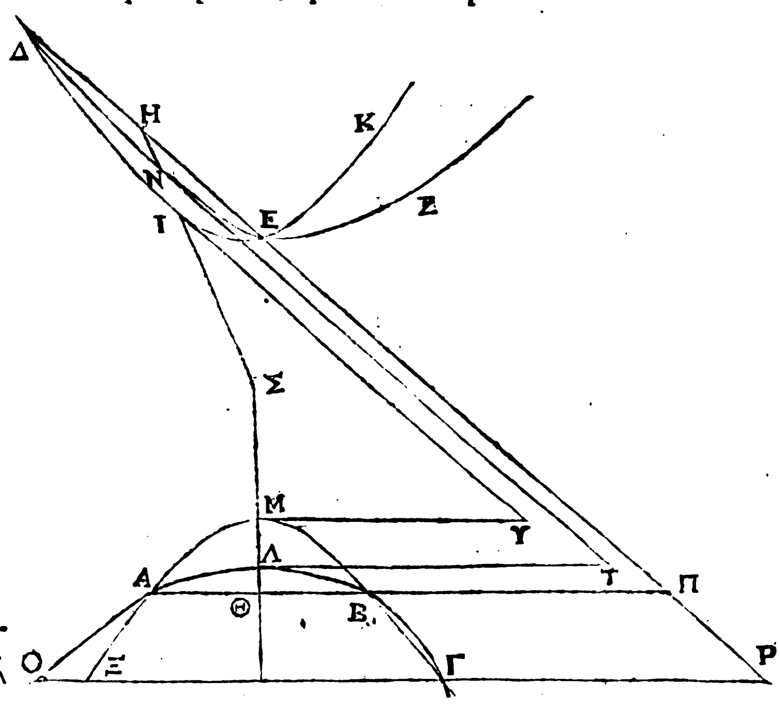
Ἔστωσαν πρότερον παράλληλοι, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ πασῶν τῶν τομῶν,

καὶ

καὶ τεταγμένως ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ Α Β, Δ Ε. ἤχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Γ παρὰ τὴν Α Β ἡ Γ Ν Ο Ξ· ἔσται δὴ καὶ αὐτὴ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον κατηγμένη, καὶ συμπεσεῖται ταῖς τομαῖς κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο. εἰ γὰρ κατὰ τὸ αὐτὸ, οὐκέτι κατὰ τρία συμβάλλουσι, ἀλλὰ τέσσαρα· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ Α Μ Β τομῇ ἴση ἡ Γ Ν τῇ Ν Ξ, ἐν δὲ τῇ Α Λ Β ἡ Γ Ν τῇ Ν Ο· καὶ ἡ Ο Ν ἄρα τῇ Ν Ξ ἐστὶν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

ctionum, atque ad eam applicantur ordinatim A B, Δ E. ducatur à puncto Γ recta Γ N O Ξ parallela A B: erit igitur & ipsa ad diametrum ordinatim applicata; & sectionibus in alio atque alio puncto occurret. si enim in eodem puncto, non occurrerent sectiones sibi ipsis in tribus punctis, sed in quatuor: ergo in sectione A M B erit Γ N ipsi N Ξ æqualis, & in A Λ B sectione Γ N æqualis ipsi N O; quare O N est æqualis ipsi N Ξ, quod fieri non potest.





Μὴ ἔστωσαν δὲ παράλληλοι αἱ Α Β, Δ Ε, ἀλλ' ἐκβαλλόμεναι συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Π, καὶ ἡ Γ Ο ἤχθω παρὰ τὴν Α Π, καὶ συμπιπτέτω τῇ Δ Π ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ρ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ Α Β, Δ Ε δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ τῶν Η, Θ διάμετροι ἤχθωσαν αἱ Η Ν, Σ Ι, Θ Λ, Μ Σ, ἀπὸ δὲ τῶν Ν, Ι, Λ, Μ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ Τ Ι, Ν Τ, Μ Υ, Λ Τ· ἔσονται δὴ αἱ μὲν Υ Ι, Ν Τ παρὰ τὴν Δ Π, αἱ δὲ Λ Τ, Μ Υ παρὰ τὰς Α Π, Ο Ρ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ Μ Υ πρὸς τὸ ἀπὸ Υ Ι οὕτως τὸ ὑπὸ Α Π Β πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Π Ε, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ Λ Τ πρὸς τὸ ἀπὸ Τ Ν οὕτως τὸ ὑπὸ Α Π Β πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Π Ε· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Μ Υ πρὸς τὸ ἀπὸ Υ Ι οὕτως τὸ ἀπὸ Λ Τ πρὸς τὸ ἀπὸ Τ Ν. διὰ τὰ αὐτὰ ἔσται, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ Μ Υ πρὸς τὸ ἀπὸ Υ Ι οὕτως τὸ ὑπὸ Ξ Ρ Γ πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Ρ Ε, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ Λ Τ πρὸς τὸ ἀπὸ Τ Ν οὕτως τὸ ὑπὸ Ο Ρ Γ πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Ρ Ε· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ Ο Ρ Γ τῷ ὑπὸ Ξ Ρ Γ, ὅπερ ἀδύνατον.

Sed non sint parallelæ A B, Δ E; producanturque & conveniant in Π, & ducatur Γ O ipsi A Π parallela, quæ cum Δ Π productâ conveniat in P. secentur autem A B, Δ E bifariam in H, Θ; & per H, Θ ducantur diametri H N, Σ I; Θ Λ, M Σ; & in punctis N, I, Λ, M rectæ Y I, N T, M Y, Λ T sectiones contingant: erunt igitur [per 5. 2. huj.] Y I, N T parallelæ ipsi Δ Π; & Λ T, M Y ipsis A Π, O P parallelæ. & quoniam ut quadratum ex M Y ad quadratum ex Y I ita [per 19. 3. huj.] rectangulum A Π B ad rectangulum Δ Π E, ac (per eandem) ut quadratum ex Λ T ad quadratum ex T N ita rectangulum A Π B ad rectangulum Δ Π E: ut igitur quadratum ex M Y ad quadratum ex Y I ita quadratum ex Λ T ad quadratum ex T N. eadem ratione ut quadratum ex M Y ad quadratum ex Y I ita erit rectangulum Ξ P Γ ad rectangulum Δ P E, & ut quadratum ex Λ T ad quadratum ex T N ita O P Γ rectangulum ad rectangulum Δ P E: ergo rectangulum O P Γ rectangulo Ξ P Γ est æquale, quod impossibile est*.

* *Hanc propositionem fœde depravatam integritati suæ restituimus.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ τῆς μὲν ἐφάπτηται τῶν ἀντικειμένων, τὴν δὲ κατὰ δύο σημεῖα τέμνῃ· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῶν ἀντικειμένων οὐδεμιᾷ συμπεσεῖται.

ἘΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α Β Γ, Δ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ Α Β Δ τὴν μὲν Α Β Γ τεμνέτω κα-

PROP. XLV. *Theor.*

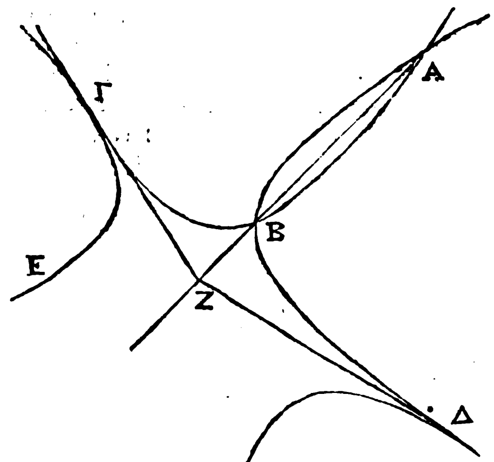
Si hyperbola unam oppositarum sectionum contingat, alteram vero secet in duobus punctis; quæ ipsi opponitur sectio nulli oppositarum occurret.

SINT oppositæ sectiones A B Γ, Δ; & hyperbola A B Δ sectionem quidem A B Γ in pun-

 ctis

ctis A, B fecet, fectionem vero Δ contingat in Δ; & fit hyperbolæ ABΔ oppofita fectio ΓE: dico ΓE nulli ipfarum ABΓ, Δ occurrere.

Si enim fieri poteft, occurrat ipfi ABΓ in Γ puncto, jungaturque AB; & per Δ ducatur contingens, quæ cum recta AB conveniat in Z: punctum igitur Z [per 25 & 3.2.huj.] erit intra afymptotos fectionis ABΔ. eft autem ipfi oppofita fectio ΓE: ergo quæ à puncto Γ ad Z ducitur cadet intra angulum ipfis BZ, ZΔ contentum. rurfus quoniam oppofitæ fectiones funt ABΓ, Δ, contingens ΔZ, fi producatur, non occurret [per 33. 2.huj.] fectioni ABΓ: quæ igitur à puncto Γ ad Z ducitur extra angulum BZΔ cadet, quod eft abfurdum; cadebat enim ipfa ΓZ intra eundem angulum BZΔ: quare ΓE nulli oppofitarum fectionum ABΓ, Δ occurret.



τὰ τὰ Α, Β, τῆς δὲ Δ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἔστω τῆς ΑΒΔ τομῆς ἀντικειμένη ἡ ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ ΓΕ οὐδεμιᾷ τῶν ΑΒΓ, Δ συμπεσεῖται.

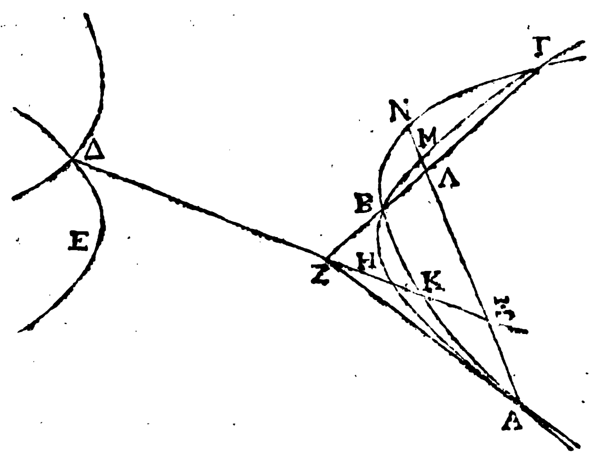
Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἐφαπτομένη ἤχθω συμπίπτουσα τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Ζ· τὸ Ζ ἄρα σημεῖον ἐντὸς ἔσται τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΑΒΔ τομῆς. καὶ ἔστιν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ ΓΕ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ τῶν ΒΖΔ περιεχομένης γωνίας. πάλιν ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΑΒΓ, Δ, ἐφαπτομένη, ἡ ΔΖ, ἐὰν ἐκβληθῇ, οὐ συμπεσεῖται τῇ ΑΒΓ τομῇ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ ΒΖΔ γωνίας, ὅπερ ἄτοπον· ἐπέπιπτε γὰρ καὶ ἐντὸς τῆς αὐτῆς· οὐκ ἄρα ἡ ΓΕ μιᾷ τῶν ΑΒΓ, Δ συμπεσεῖται.

PROP. XLVI. *Theor.*

Si hyperbola unam oppofitarum fectionum in uno puncto contingat, eandemque fecet in duobus punctis; quæ ipfi opponitur fectio alteri oppofitarum non occurret.

SINT oppofitæ fectiones ABΓ, Δ, & hyperbola AHΓ fectionem ABΓ contingat quidem in puncto A, fecet vero in B, Γ; & ipfi AHΓ oppofita fit fectio E: dico E fectioni Δ non occurrere.

Si enim fieri poteft, occurrat in Δ; junctaque BΓ producatur ad Z; & à puncto A ducatur recta AZ contingens. fimiliter demonftrabitur punctum Z effe intra angulum fub afymptotis contentum; & rectam AZ utrafq; fectiones contingere; & ΔZ productam fecare fectiones inter A, B, videlicet in punctis H, K: & quam rationem habet ΓZ ad ZB habeat ΓΛ ad ΛB, & juncta AΛ producatur; fectiones igitur in alio atque alio puncto fecabit. fecet in M, N: ergo [per 1. 4. huj.] quæ per Z ad puncta M, N ducuntur fectiones contingent. & fimiliter iis quæ fuperius dicta funt, propter alteram quidem fectionem [per 39. 3.huj.] erit ut ΞΔ ad ΔZ ita ΞK ad KZ; propter alteram vero ut ΞΔ ad ΔZ ita



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς΄.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων καθ᾽ ἓν μὲν ἐφάπτηται, κατὰ δύο δὲ συμπίπτῃ· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐ συμπεσεῖται ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, Δ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ ΑΗΓ ἐφαπτέσθω μὲν κατὰ τὸ Α, τεμνέτω δὲ κατὰ τὰ Β, Γ, καὶ τῆς ΑΗΓ ἀντικειμένη ἔστω ἡ Ε· λέγω ὅτι ἡ Ε τῇ Δ οὐ συμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΖ ἐφαπτομένη. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι τὸ Ζ σημεῖον ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας ἐστί, καὶ ἡ ΑΖ ἐφάψεται τῶν τομῶν ἀμφοτέρων, καὶ ἡ ΔΖ ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὰς τομὰς μεταξὺ τῶν Α, Β κατὰ τὰ Η, Κ· καὶ ὃν δὲ ἔχει λόγον ἡ ΓΖ πρὸς ΖΒ ἐχέτω ἡ ΓΛ πρὸς ΛΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΛ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ τὰς τομὰς κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο. τεμνέτω κατὰ τὰ Μ, Ν· αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰ Μ, Ν ἐφάψονται τῶν τομῶν. καὶ ἔσται ὁμοίως τοῖς πρότερον, διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομήν, ὡς ἡ ΞΔ πρὸς ΔΖ οὕτως ἡ ΞΚ πρὸς ΚΖ, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν, ὡς ἡ ΞΔ πρὸς ΔΖ οὕτως ἡ

ΞΗ

ΞΗ πρὸς ΗΖ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀντικειμένη συμπεσεῖται τῇ ἀντικειμένῃ.

ΞΗ ad ΗΖ, quod fieri non potest*: opposita igitur sectio alteri oppositarum non occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζʹ.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφαπτομένη καθ' ἕτερον αὐτῇ σημεῖον συμπίπτῃ· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΕΖΗ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ ΔΑΓ ἐφαπτέσθω μὲν κατὰ τὸ Α, τεμνέτω δὲ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω τῇ ΔΑΓ ἀντικειμένη ἡ ΕΖΘ· λέγω ὅτι οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ ἀντικειμένῃ κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

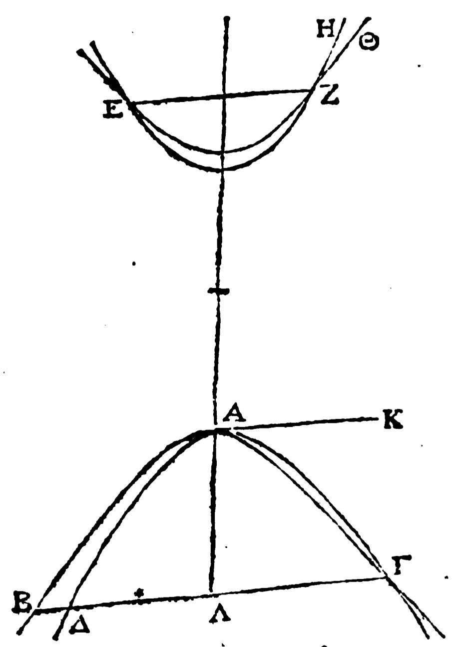
Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμβαλλέτω κατὰ δύο, τὰ Ε, Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ διὰ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῶν τομῶν ἤχθω ἡ ΑΚ· ἤτοι δὴ παράλληλοί εἰσιν, ἢ οὔ. ἔστωσαν πρότερον παράλληλοι, καὶ ἤχθω ἡ διχοτομοῦσα διάμετρος τὴν ΕΖ. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ Α, καὶ ἔσται διάμετρος τῶν δύο συζυγῶν. ἤχθω διὰ τοῦ Γ παρὰ τὰς ΑΚ, ΕΖ ἡ ΓΛΔΒ· τεμεῖ ἄρα τὰς τομὰς κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ ἴση ἡ ΓΛ τῇ ΛΔ, ἐν δὲ τῇ λοιπῇ ἡ ΓΛ τῇ ΛΒ. τοῦτο δὲ ἀδύνατον.

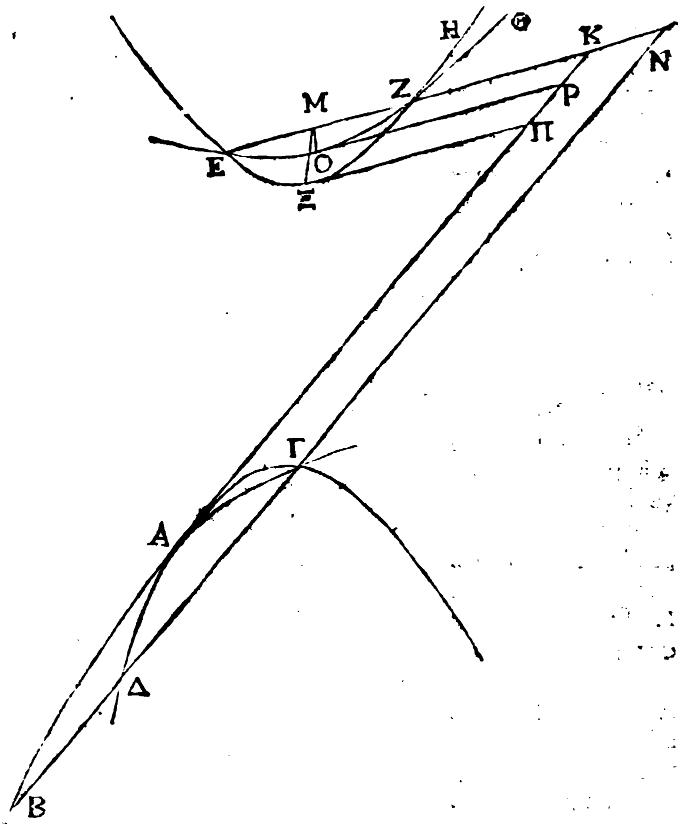
Prop. XLVII. *Theor.*

Si hyperbola unam oppositarum sectionum contingens in alio puncto secet; quæ ipsi opponitur sectio alteri oppositarum non occurret præterquam in uno puncto.

Sint oppositæ sectiones ΑΒΓ, ΕΖΗ; & hyperbola quædam ΔΑΓ contingat ΑΒΓ in Α, & in Γ secet; opponaturque ipsi ΔΑΓ sectio ΕΖΘ: dico eam alteri oppositarum non occurrere præterquam in uno puncto.

Si enim fieri potest, occurrat in duobus punctis Ε, Ζ: jungaturque ΕΖ, & per Α ducatur sectiones contingens ΑΚ: vel igitur ΑΚ, ΕΖ parallelæ sunt inter se, vel non. sint primum parallelæ, & ducatur diameter bifariam secans ipsam ΕΖ: quæ [per 34. 2. huj.] per Α igitur transibit; atque erit diameter duarum conjugatarum. ducatur etiam per Γ recta ΓΛΔΒ parallela ipsis ΑΚ, ΕΖ: secabit igitur ea sectiones in alio atque alio puncto: & in altera quidem erit ΓΛ æqualis ipsi ΛΔ, in altera vero ΓΛ æqualis ipsi ΛΒ. hoc vero fieri non potest.





Μὴ ἔστωσαν δὲ παράλληλοι αἱ ΑΚ, ΕΖ, ἀλλὰ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ ἡ ΓΔ παρὰ τὴν ΑΚ ἠγμένη συμπιπτέτω τῇ ΕΖ κατὰ τὸ Ν, αἱ δὲ διάμετροι διχοτομοῦσαι τὴν ΕΖ κατὰ τὸ Μ τεμνέτωσαν τὰς τομὰς κατὰ τὰ Ξ, Ο, καὶ ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν τῶν τομῶν ἀπὸ τῶν Ξ, Ο αἱ ΞΠ, ΟΡ· ἔσται ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΞ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΟ, καὶ διὰ τοῦτο ὡς τὸ ὑπὸ ΔΝΓ

At non sint parallelæ ΑΚ, ΕΖ, sed conveniant in Κ; recta vero ΓΔ ipsi ΑΚ parallela ducta conveniat cum ΕΖ in Ν; & diametri bifariam dividentes ΕΖ in puncto Μ sectiones in punctis Ξ, Ο secent; atque à Ξ, Ο ducantur ΞΠ, ΟΡ sectiones contingentes: erit igitur [ut in 44.4.huj.] quadratum ex ΑΠ ad quadratum ex ΠΞ sicut quadratum ex ΑΡ ad quadratum ex ΡΟ; & propterea [per 19. 3. huj.] ut rectangulum

* Est enim, [per 11.5.] ΞΗ ad ΗΖ ut ΞΚ ad ΚΖ. & ideo, [per 14.5.] quando ΞΗ major est quam ΞΚ, erit ΗΖ major quam ΚΖ. quod fieri non potest.

ΔΝΓ

ΔΝΓ ad rectangulum ENZ ita rectangulum BNΓ ad rectangulum ENZ: ergo [per 9. 5.] rectangulum ΔΝΓ rectangulo BNΓ est æquale, quod fieri non potest.

πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΝΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΝΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΝΖ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΝΓ τῷ ὑπὸ ΒΝΓ, ὅπερ ἀδύνατον.

Prop. XLVIII. *Theor.*

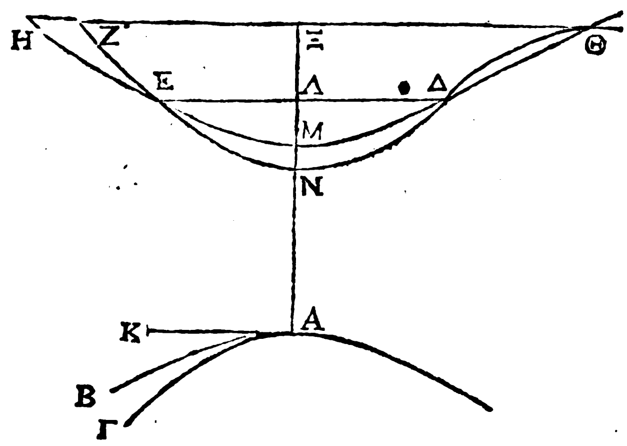
Si hyperbola unam oppositarum sectionum in uno puncto contingat; quæ ipsi opponitur sectio alteri oppositarum non occurret ad plura puncta quam duo.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν σημεῖον ἐπιψαύῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Sint oppositæ sectiones AB, EΔH; & hyperbola AΓ sectionem AB in puncto A contingat; sitque ipsi AΓ opposita sectio ΔEZ: dico ΔEZ non occurrere sectioni ΔEH ad plura puncta quam duo.

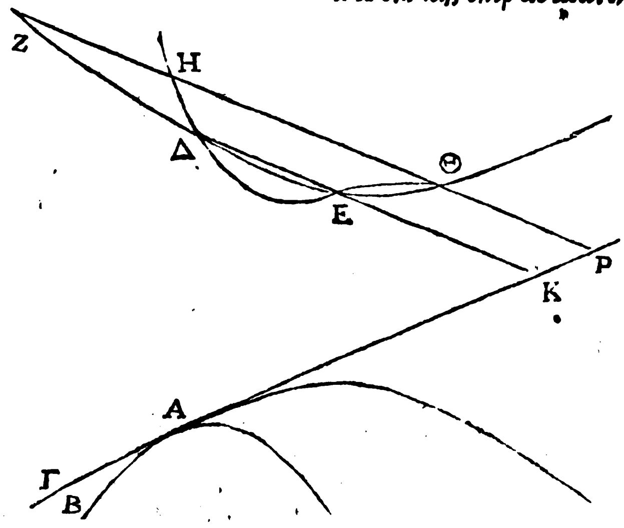
Si enim fieri potest, occurrat ad puncta tria Δ, E, Θ; & ducatur recta AK sectiones AB, AΓ contingens: juncta vero ΔE producatur. & sint primum AK, ΔE inter se parallelæ; seceturque ΔE bifariam in Λ, & jungatur AΛ: erit igitur [per 34. 2. huj.] AΛ diameter duarum conjugatarum, quæ sectiones inter puncta Δ, E secabit in M, N; propter ΔΛE in puncto Λ bifariam sectam. ducatur per Θ recta ΘΞZH parallela ΔE: erit igitur in altera sectione ΘΞ æqualis ipsi ΞZ, in altera vero ΘΞ ipsi ΞH æqualis; quare ΞZ ipsi ΞH est æqualis, quod fieri non potest.



Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΕΔΗ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Α, καὶ ἔστω τῆς ΑΓ ἀντικειμένη ἡ ΔΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕΖ τῇ ΔΕΗ οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμβαλλέτω κατὰ τρία τὰ Δ, Ε, Θ, καὶ ἤχθω τῶν ΑΒ, ΑΓ ἐφαπτομένη ἡ ΑΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω· καὶ ἔστωσαν πρότερον παράλληλοι αἱ ΑΚ, ΔΕ, καὶ τετμήσθω ἡ ΔΕ δίχα κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΛ· ἔσται δὴ διάμετρος ἡ ΑΛ τῶν δύο συζυγῶν, καὶ τεμεῖ τὰς τομὰς μεταξὺ τῶν Δ, Ε, κατὰ τὰ Μ, Ν, ἐπεὶ ἡ ΔΛΕ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΔΕ ἡ ΘΞΖΗ· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἴση ἡ ΘΞ τῇ ΞΖ, ἐν δὲ ἑτέρᾳ ἡ ΘΞ τῇ ΞΗ· ὥστε καὶ ἡ ΞΖ τῇ ΞΗ ἐστὶν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Sed non sint AK, ΔE parallelæ, conveniantque in K, & reliqua eadem fiant: producta vero AK occurrat ipsi ZΘ in P. similiter ac in iis quæ jam dicta sunt, demonstrabimus, ut rectangulum ΔKE ad quadratum ex AK ita esse rectangulum ZPΘ ad quadratum ex PA in sectione ZΔE; &, in sectione HΔE, ita rectangulum HPΘ ad quadratum ex PA: rectangulum igitur HPΘ æquale est rectangulo ZPΘ, quod fieri non potest: ergo EΔZ ipsi EΔH ad plura puncta quam duo non occurret.



Μὴ ἔστωσαν δὲ αἱ ΑΚ, ΔΕ παράλληλοι, ἀλλὰ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γενέσθω, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΑΚ συμπιπτέτω τῇ ΖΘ κατὰ τὸ Ρ. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΔΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΚ, ἐν μὲν τῇ ΖΔΕ τομῇ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΡΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΑ, ἐν δὲ τῇ ΗΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΡΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΡΘ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΡΘ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΕΔΖ τῇ ΕΔΗ κατὰ πλείονα σημεῖα συμβάλλει ἢ δύο.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων ἐφάπτηται· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῶν ἀντικειμένων οὐδετέρᾳ συμπεσεῖται.

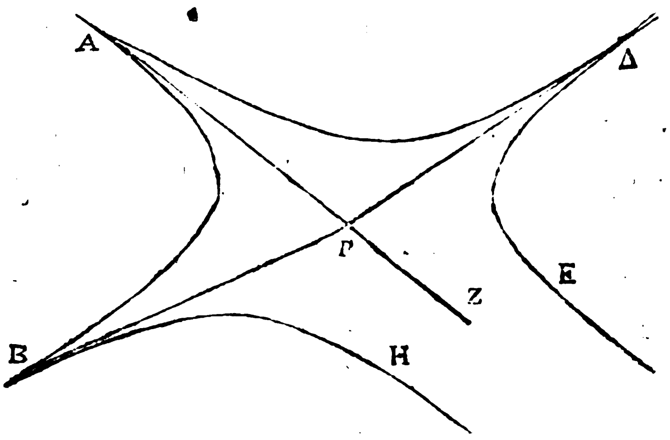
ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΔ, ΒΗ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ ἑκατέρας αὐτῶν ἐφαπτέσθω κατὰ τὰ Α, Β. ἀντικειμένη δὲ αὐτῇ ἔστω ἡ Ε· [a] λέγω ὅτι ἡ Ε οὐδετέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΗ συμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμπιπτέτω τῇ ΑΔ κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις ἐντὸς τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΑΒ τομῆς. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΔ ἐκβληθεῖσα ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ ἔσται τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν ΒΓ, ΓΖ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ Ε συμπεσεῖται τῶν ΑΔ, ΒΗ.

PROP. XLIX. *Theor.*

Si hyperbola contingat utramque oppositarum sectionum; quæ ipsi opponitur sectio, neutri oppositarum occurret.

SINT oppositæ sectiones ΑΔ, ΒΗ, & hyperbola ΑΒ utramque ipsarum in punctis Α, Β contingat; opponaturque ei sectio Ε: [a] dico quod Ε neutri sectionum ΑΔ, ΒΗ occurret.



Si enim fieri potest, occurrat sectioni ΑΔ in Δ; & à punctis Α, Β ducantur rectæ contingentes sectiones, quæ quidem [per 36.1.huj.] intra asymptotos sectionis ΑΒ convenient. conveniant in Γ, & jungatur ΓΔ: ergo [ob sectionem ΔΕ] recta ΓΔ producta cadet in loco intermedio inter ΑΓ, ΓΒ. sed [propter sectionem ΑΔ] cadet eadem inter ΒΓ, ΓΖ, quod fieri non potest: igitur sectio Ε sectionibus oppositis ΑΔ, ΒΗ non occurret.

EUTOCIUS.

[a] Λέγω ὅτι ἡ Ε οὐδετέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΗ συμπεσεῖται.] Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Γ, ἐντὸς τῆς περιεχούσης γωνίας τὴν ΑΒ τομήν· φανερὸν δὴ ὅτι αἱ ΑΓ, ΓΒ ἐκβαλλόμεναι οὐ συμπεσοῦνται ταῖς ἀσυμπτώτοις τῆς Ε τομῆς, ἀλλὰ περιέχουσιν αὐτὰς, καὶ πολὺ μᾶλλον τὴν Ε τομήν. καὶ ἐπεὶ τῆς ΑΔ τομῆς ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, ἡ ΑΓ ἄρα οὐ συμπεσεῖται τῇ ΒΗ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΑΔ· οὐκ ἄρα Ε τομὴ οὐδετέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΗ τομῶν συμπεσεῖται.

[a] Dico Ε neutri sectionum ΑΔ, ΒΗ occurrere.] Ducantur enim à punctis Α, Β rectæ contingentes sectiones, atque conveniant inter se in puncto Γ, intra angulum [per 25.2.huj.] sectionem ΑΒ continentem: itaque constat rectas ΑΓ, ΓΒ productas asymptotis sectionis Ε non occurrere, sed ipsas continere & multo magis sectionem Ε. & quoniam ΑΓ sectionem ΑΔ contingit, [per 33.2.huj.] non occurret ipsi ΒΗ. similiter ostendemus rectam ΒΓ sectioni ΑΔ non occurrere: ergo sectio Ε neutri ipsarum sectionum ΑΔ, ΒΗ occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

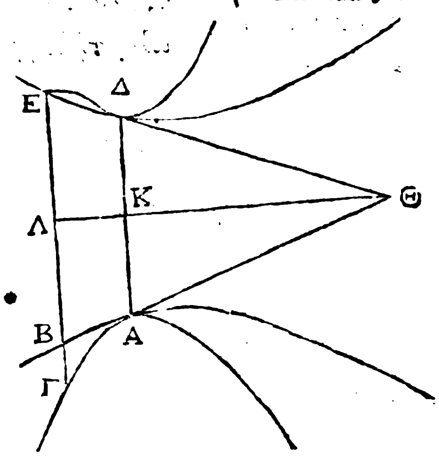
Ἐὰν ἑκατέρα τῶν ἀντικειμένων ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν ἐφάπτηται, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχουσα· οὐ συμπεσεῖται καθ' ἕτερον σημεῖον.

ΕΦΑΠΤΕΣΘΩΣΑΝ γὰρ ἀλλήλων ἀντικείμεναι κατὰ τὰ Α, Δ σημεῖα· λέγω ὅτι καθ' ἕτερον σημεῖον οὐ συμβάλλουσιν.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμβαλλέτωσαν κατὰ τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφαπτομένη κατὰ τὸ Δ, συμπέπτωκε ταύτῃ κατὰ τὸ Ε· ἡ ἄρα ΑΒ τῇ ΑΓ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. ἤχθω-

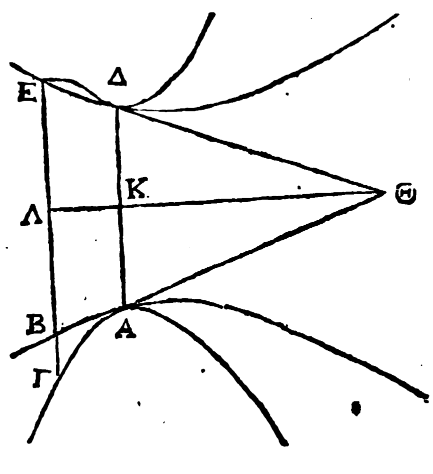
PROP. L. *Theor.*

Si utraque oppositarum sectionum oppositarum utramque in uno puncto contingat, ad easdem partes concava habens; in alio puncto non occurret.



CONTINGANT enim sese oppositæ sectiones in punctis Α, Δ: dico eas in alio puncto sibi ipsis non occurrere.

Si enim fieri potest, occurrant in Ε. & quoniam hyperbola unam oppositarum sectionum in Δ contingens eandem secat in Ε; sectio ΑΒ [per 47.4.huj.] ipsi ΑΓ præterquam in uno puncto non occurret. ducantur à punctis A, Δ rectæ AΘ, ΘΔ, quæ sectiones contingant; junctâque AΔ, per B ducatur EBΓ ipsi AΔ parallela; & per Θ ducatur oppositarum sectionum secunda diameter ΘΚΛ, quæ [per 39. 2. huj.] secabit AΔ bifariam in K: ergo [ex natura 2^{dæ} diam.] utraque EB, EΓ in puncto Λ bifariam secabitur; & propterea BΛ æqualis erit ipsi ΛΓ, quod fieri non potest: igitur in alio puncto sibi ipsis non occurrent.



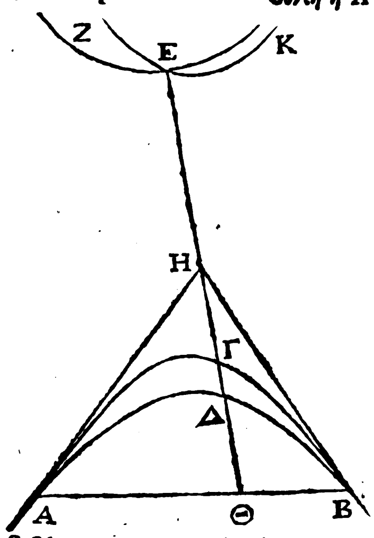
σαν ἀπὸ τῶν Α, Δ τῶν τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΘ, ΘΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΑΔ ἤχθω ἡ ΕΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ δευτέρα διάμετρος ἤχθω τῶν ἀντικειμένων ἡ ΘΚΛ· τεμεῖ δὴ τὴν ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Κ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΒ, ΕΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ· ἴση ἄρα ἡ ΒΛ τῇ ΛΓ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα συμπεσοῦνται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Prop. LI. *Theor.*

Si hyperbola unam oppositarum sectionum contingat in duobus punctis; quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret.

SINT oppositæ sectiones AΔB, E; & hyperbola AΓ sectionem AΔB in duobus punctis A, B contingat; opponaturque ipsi AΓ sectio Z: dico Z ipsi E non occurrere.

Si enim fieri potest, occurrat in E; & à punctis A, B ducantur contingentes sectiones AH, HB; junganturq; AB, EH & producatur EH: secabit igitur sectiones in alio atque alio puncto. sit autem ea EHΓΔΘ. Itaque quoniam AH, HB sectiones contingunt, & AB conjungit tactus; erit [per 37. 3. huj.] in altera quidem conjugatione ut ΘE ad EH ita ΘΔ ad ΔH; in altera vero [ut ΘE ad EH] ita ΘΓ ad ΓH; quod fieri non potest: igitur sectio Z sectioni E non occurret.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτηται· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΔΒ, Ε, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ τῆς ΑΔΒ ἐφαπτέσθω κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Β, καὶ ἔστω ἀντικειμένη τῇ ΑΓ ἡ Ζ· λέγω ὅτι ἡ Ζ τῇ Ε οὐ συμπεσεῖται.

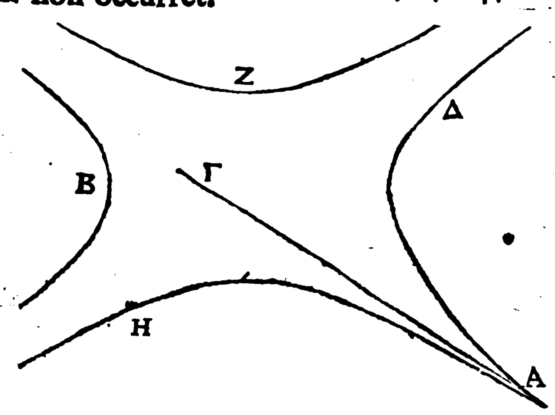
Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ε, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΕΗ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΗ· τεμεῖ δὴ κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὰς τομάς. ἔστω δὲ ὡς ἡ ΕΗΓΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΑΗ, ΗΒ καὶ ἡ ΑΒ τὰς ἁφὰς ἐπέζευξεν, ἔσται ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ συζυγίᾳ ὡς ἡ ΘΕ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΘΔ πρὸς ΔΗ, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ οὕτως ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ Ζ τῇ Ε συμβάλλει.

Prop. LII. *Theor.*

Si hyperbola unam oppositarum sectionum contingat, convexa habens è regione sita; quæ ipsi opponitur sectio alteri oppositarum non occurret.

SINT oppositæ sectiones AΔ, B; & hyperbola quædam AH sectionem AΔ in puncto A contingat; ipsi autem AH opponatur Z: dico Z sectioni B non occurrere.

Ducatur enim à puncto A recta AΓ sectiones contingens: ergo [per 33. 2. huj.] AΓ, ob sectionem AH, se-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐπιψαύῃ, ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΔ, Β, καὶ τῆς ΑΔ τομῆς ἐφαπτέσθω ὑπερβολή τις ἡ ΑΗ κατὰ τὸ Α, ἀντικειμένη δὲ τῇ ΑΗ ἔστω ἡ Ζ· λέγω ὅτι ἡ Ζ τῇ Β οὐ συμπεσεῖται.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῶν τομῶν ἡ ΑΓ· ἡ ἄρα ΑΓ, διὰ μὲν τὴν ΑΗ τομὴν, οὐ συμπεσεῖ-

ται

ται τῇ Z, διὰ δὲ τὰ Α Δ τομὴν, ἐ συμπεσεῖται τῇ B· ὥστε ἡ Α Γ μεταξὺ πεσεῖται τῶν B, Z τομῶν· καὶ φανερὸν ὅτι ἡ B τῇ Z ἐ συμπεσεῖται.

sectioni Z non occurret; &, ob Α Δ sectionem, non occurret sectioni B: quare Α Γ inter B, Z sectiones cadat necesse est: & idcirco sectionem B sectioni Z non occurrere manifesto constat.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ΄.

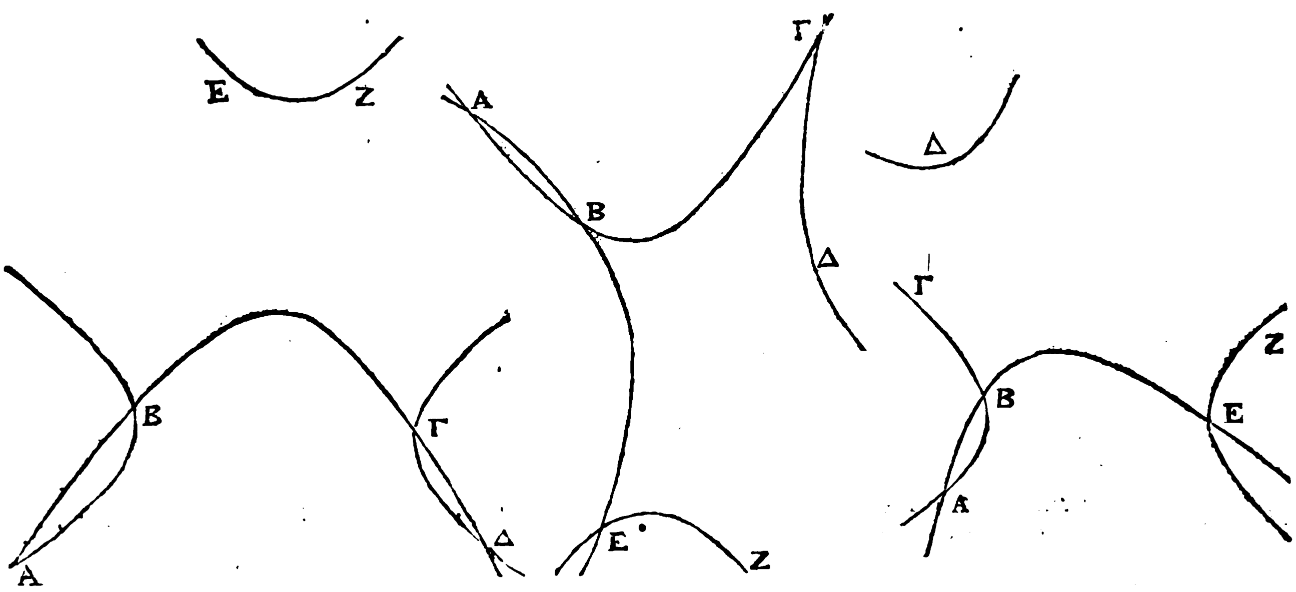
Αντικείμεναι ἀντικειμένας ἐ τέμνουσι κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

Εστωσαν γὰρ ἀντικείμεναι αἱ Α Β, Γ Δ, καὶ ἕτεραι ἀντικείμεναι αἱ Α Β Γ Δ, Ε Ζ, καὶ τεμνέτω πρότερον ἡ Α Β Γ Δ τομὴ ἑκατέραν τῶν Α Β, Γ Δ κατὰ τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσαι, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς· ἡ ἄρα τῇ Α Β Γ Δ τομῇ ἀντικειμένη ἡ Ε Ζ ἐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων τῶν Α Β, Γ Δ ἐ συμπεσεῖται.

Prop. LIII. *Theor.*

Oppositæ sectiones oppositas non secant in pluribus punctis quam quatuor.

Sint oppositæ sectiones Α Β, Γ Δ, & aliæ oppositæ Α Β Γ Δ, Ε Ζ; & secet primo Α Β Γ Δ sectio ipsas Α Β, Γ Δ in quatuor punctis Α, Β, Γ, Δ, convexa habens è regione sita, ut in prima figura apparet: ergo [per 41. 4. huj.] quæ sectioni Α Β Γ Δ opponitur, hoc est sectio Ε Ζ, neutri ipsarum Α Β, Γ Δ occurret.



Αλλὰ δὴ ἡ Α Β Γ τὴν μὲν Α Β Ε τεμνέτω κατὰ τὰ Α, Β, τὴν δὲ Γ Δ καθ᾽ ἓν τὸ Γ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς· ἡ Ε Ζ ἄρα τῇ Γ Δ ἐ συμπεσεῖται. εἰ δὲ τῇ Α Β συμβάλλει ἡ Ε Ζ, καθ᾽ ἓν μόνον συμβάλλει· εἰ γὰρ κατὰ δύο συμβάλλῃ τῇ Α Β, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ Α Β Γ τῇ ἑτέρᾳ ἀντικειμένῃ τῇ Γ Δ ἐ συμπεσεῖται. ὑπόκειται δὲ καθ᾽ ἓν τὸ Γ συμβάλλουσα.

Εἰ δὲ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, ἡ Α Β Γ τὴν μὲν Α Β Ε τέμνει κατὰ δύο τὰ Α, Β, τῇ δὲ Α Β Ε συμβάλλει ἡ Ε Ζ· τῇ μὲν Δ ἐ συμπεσεῖται, τῇ δὲ Α Β Ε συμπίπτουσα ἐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο *.

Sed Α Β Γ sectionem quidem Α Β Ε secet in punctis Α, Β, ipsam vero Γ Δ in uno puncto Γ, ut in secunda figura: quare [per 39. 4. huj.] Ε Ζ non occurret sectioni Γ Δ. si autem sectioni Α Β occurrit Ε Ζ, in uno tantum puncto occurrit: nam si occurrat in duobus punctis, sectio Α Β Γ quæ [per 41. 1. 4. huj.] ipsi opponitur, non occurret alteri Γ Δ. atqui in uno puncto Γ occurrere supponitur.

Quod si sectio Α Β Γ sectionem Α Β Ε in duobus punctis Α, Β secet, ut in tertia figura; occurrat autem Ε Ζ sectioni Α Β Ε: sectioni quidem Δ [per 39. 4. huj.] non occurret; atque ipsi Α Β Ε occurrens [per 35. 4. huj.] non occurret ad plura puncta quam duo *.

* In figura tertia supponitur parallelismus asymptotôn sectionum Α Β Ε & Ε Ζ, quo in casu, eoque solo, oppositæ sectiones oppositis sectionibus ad tria tantum puncta Α, Β, Ε occurrere possunt: nam si non parallelæ sint, sed vel tantillum inclinent versus partes Ε, Ζ, habebitur casus primus, occurrente sectione Ε Ζ sectioni Α Β Ε in alio puncto ultra Ε. Si vero in alteras partes sive versus Γ, Δ inclinent asymptoti, conveniet sectio Α Β Γ cum sectione Δ, eritque casus secundus. Neque alius modus quo sibi conveniant ad quatuor puncta oppositæ hyperbolæ, convexa sua sibi invicem obvertentes, excogitari potest. Idem concipe de figuris propositionis proxime sequentis.

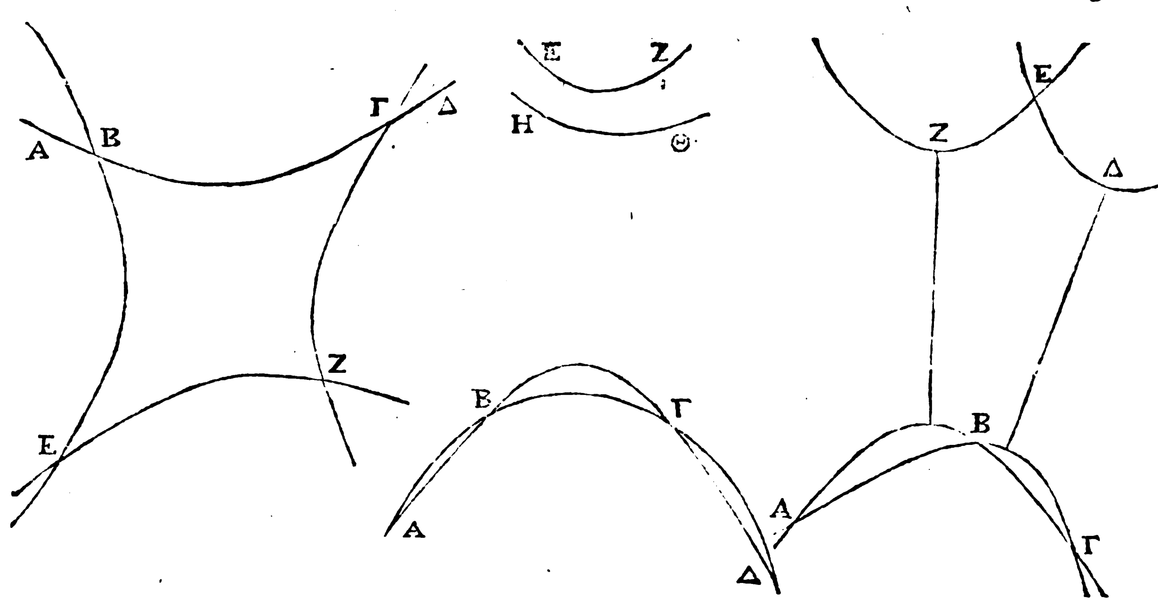
Si

Si vero ΑΒΓΔ utramque secet in uno puncto, ut in quarta figura; sectio ΕΖ [per 40. 4. huj.] nulli ipsarum in duobus punctis occurret: ergo, propter ea quæ dicta sunt & ipsorum conversa, sectiones oppositæ ΑΒΓΔ, ΕΖ sectionibus ΒΕ, ΓΖ non occurrent ad plura puncta quam quatuor.

Εἰ δὲ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τετάρτης καταγραφῆς, ἡ ΑΒΓΔ ἑκατέραν τέμνει καθ' ἓν σημεῖον, καὶ ἡ ΕΖ οὐδετέρᾳ συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα· ὥστε, διὰ τὰ εἰρημένα καὶ τὰ ἀντίστροφα αὐτῶν, αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖ ἀντικείμεναι τῶν ΒΕ, ΓΖ τομαῖς οὐ συμπεσοῦνται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

At si sectiones ad easdem partes concava habeant, atque altera alteram in quatuor punctis secet, ut in quinta figura; ΕΖ neutri oppositarum occurret: neque enim ΕΖ occurret ipsi ΑΚ hyperbolæ; sic enim hyperbola ΑΚ oppositis sectionibus ΑΒΓΔ, ΕΖ occurret [contra 36. 4. huj.] ad plura puncta quam quatuor. sed [per 42. 4. huj.] neque ΗΘ occurret ipsi ΕΖ.

Ἐὰν δὲ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχωσι, καὶ ἑτέρα τὴν ἑτέραν τέμνῃ κατὰ τέσσαρα τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ἐπὶ τῆς πέμπτης καταγραφῆς, ἡ ΕΖ ἑκατέρᾳ οὐ συμπεσεῖται· οὐδὲ μὲν ἡ ΕΖ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΑΚ. οὕτως γὰρ ἔσται ἡ ΑΚ τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖ ἀντικειμέναις συμπίπτουσα κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα. ἀλλ' οὐδὲ ἡ ΗΘ τῇ ΕΖ συμπεσεῖται.



Si autem, ut in sexta figura, sectio ΑΒΓ oppositarum alteri occurrat in tribus punctis, ΕΖ [per 44. 4. huj.] alteri in uno tantum puncto occurret. & eodem modo in reliquis dicemus. Quoniam igitur in omni diversitate casuum constat propositum, oppositæ sectiones oppositis sectionibus ad plura puncta quam quatuor non occurrent.

Εἰ δὲ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς ἕκτης καταγραφῆς, ἡ ΑΒΓ τῇ ἑτέρᾳ τομῇ συμβάλλει κατὰ τρία σημεῖα, ἡ ΕΖ τῇ ἑτέρᾳ καθ' ἓν μόνον συμπεσεῖται. καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον ἐροῦμεν. ἐπεὶ οὖν κατὰ πάσας τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστι τὸ προτεθὲν, ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις οὐ συμβάλλουσι κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

Prop. LIV. *Theor.*

Si oppositæ sectiones oppositas in uno puncto contingant; non occurrent sibi ipsis ad alia puncta plura quam duo.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

Ἐὰν ἀντικείμεναι ἀντικειμένων καθ' ἓν σημεῖον ἐπιψαύωσιν, οὐ συμπεσοῦνται κατ' ἄλλα σημεῖα πλείονα ἢ δύο.

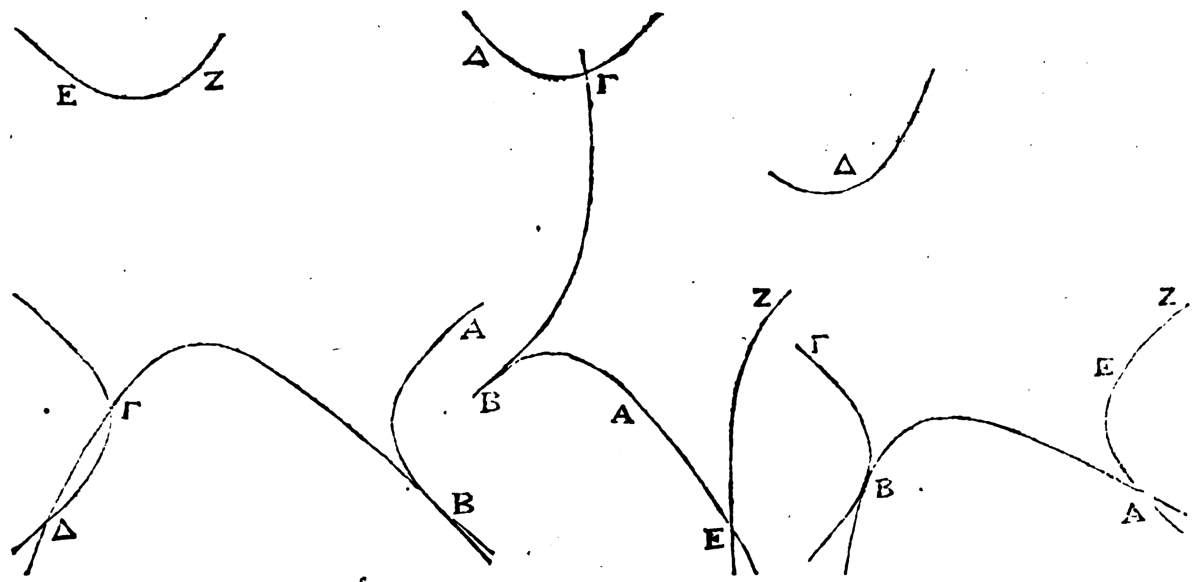
SINT oppositæ sectiones ΑΒ, ΓΔ; aliæ vero ΒΓ, ΕΖ; & sectio ΒΓ contingat ΑΒ in puncto Β, & convexa habeant è regione sita; occurratque primum ΒΓΔ sectio ipsi ΓΔ in duobus punctis Γ, Δ, ut in prima figura. quoniam igitur ΒΓΔ in duobus punctis secat, convexa habens è regione sita; sectio ΕΖ [per 39. 4. huj.] ipsi ΑΒ non occurret. rursus quoniam ΒΓΔ contingit ΑΒ in Β, convexa habens è regione sita; non occurret [per 52. 4. huj.] ΕΖ sectioni ΓΔ; quare ΕΖ neutri sectionum ΑΒ, ΓΔ occurret: occurrunt igitur sibi ipsis ad duo tantum puncta Γ, Δ.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἕτεραι αἱ ΒΓ, ΕΖ, καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΑΒ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Β, καὶ ἐχέτωσαν ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ, καὶ συμπιπτέτω πρῶτον ἡ ΒΓΔ τῇ ΓΔ κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ, ὡς ἐπὶ τοῦ πρώτου σχήματος. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΓΔ κατὰ δύο σημεῖα τέμνει, ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτὰ, ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ οὐ συμπεσεῖται. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΒΓΔ τῆς ΑΒ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β, ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτὰ, ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ οὐ συμπεσεῖται· ἡ ἄρα ΕΖ οὐδετέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ τομῶν συμπεσεῖται· μόνον ἄρα κατὰ δύο τὰ Γ, Δ συμβάλλουσιν.

Ἀλλὰ

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΒΓ τὴν ΓΔ τεμνέτω καθ' ἓν σημεῖον τὸ Γ, ὡς ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος· ἡ ἄρα ΕΖ τῇ μὲν ΓΔ οὐ συμπεσεῖται, τῇ δὲ ΑΒ συμπεσεῖται καθ' ἓν μόνον. ἐὰν γὰρ κατὰ δύο συμβάλλῃ ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ, ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ οὐ συμπεσεῖται. ὑπόκειται δὲ συμβάλλουσα καθ' ἕν.

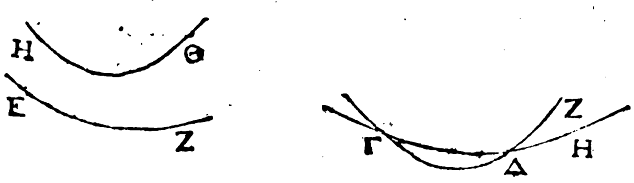
Sed ΒΓ secet ΓΔ in uno puncto Γ, ut in secunda figura: ergo [per 52. 4. huj.] ΕΖ sectioni quidem ΓΔ non occurret; ipsi vero ΑΒ occurret in uno puncto tantum. si enim in duobus punctis occurrat ΕΖ ipsi ΑΒ, [per 39. 4. huj.] non occurret ΒΓ ipsi ΓΔ. atqui in uno puncto occurrere supponebatur.

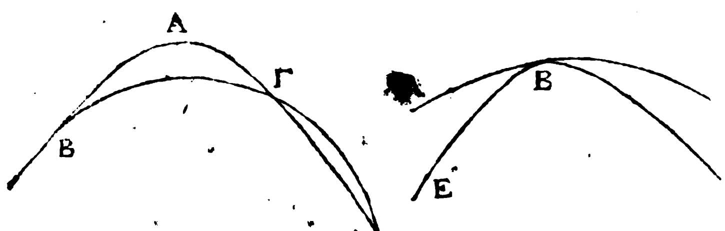


Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῇ Δ τομῇ μὴ συμπίπτῃ, ὡς ἐπὶ τοῦ τρίτου σχήματος, διὰ μὲν τὰ προειρημένα ἡ ΕΖ τῇ Δ οὐ συμπεσεῖται, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΑΒ οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Quod si ΒΓ non occurrat sectioni Δ, ut in tertia figura, propter ea, quæ [ad 52. 4. huj.] dicta sunt, ΕΖ ipsi Δ non occurret: & [per 35. 4. huj.] non occurret ΕΖ ipsi ΑΒ ad plura puncta quam duo.

Ἐὰν δὲ αἱ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχωσι, [ὡς ἐπὶ τοῦ τετάρτου καὶ πέμπτου σχήματος] αἱ αὐταὶ





ἀποδείξεις ἁρμόσουσι. κατὰ πάσας οὖν τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστιν ἐκ τῶν δεδειγμένων τὸ προτεθέν.

At vero si sectiones ad easdem partes concava habeant, [ut in figuris quarta & quinta] demonstrationes eædem accommodabuntur. quare, juxta omnes possibiles diversitates, ex jam demonstratis manifesto constabit propositum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε'.

Ἐὰν ἀντικείμεναι ἀντικειμένων κατὰ δύο ἐφάπτωνται, καθ' ἕτερον σημεῖον οὐ συμπεσοῦνται.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἕτεραι αἱ ΑΓ, ΕΖ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν πρῶτον, ὡς

Prop. LV. *Theor.*

Si sectiones oppositæ oppositas contingant in duobus punctis; in alio puncto sibi ipsis non occurrent.

Sint oppositæ sectiones ΑΒ, ΓΔ, & aliæ ΑΓ, ΕΖ; & primum in punctis Α, Γ sese contingant,

gant, ut in prima figura. quoniam enim Α Γ utramque Α Β, Γ Δ contingit in punctis Α, Γ: sectio igitur Ε Ζ [per 49.4.huj.] neutri ipsarum Α Β, Γ Δ occurret.

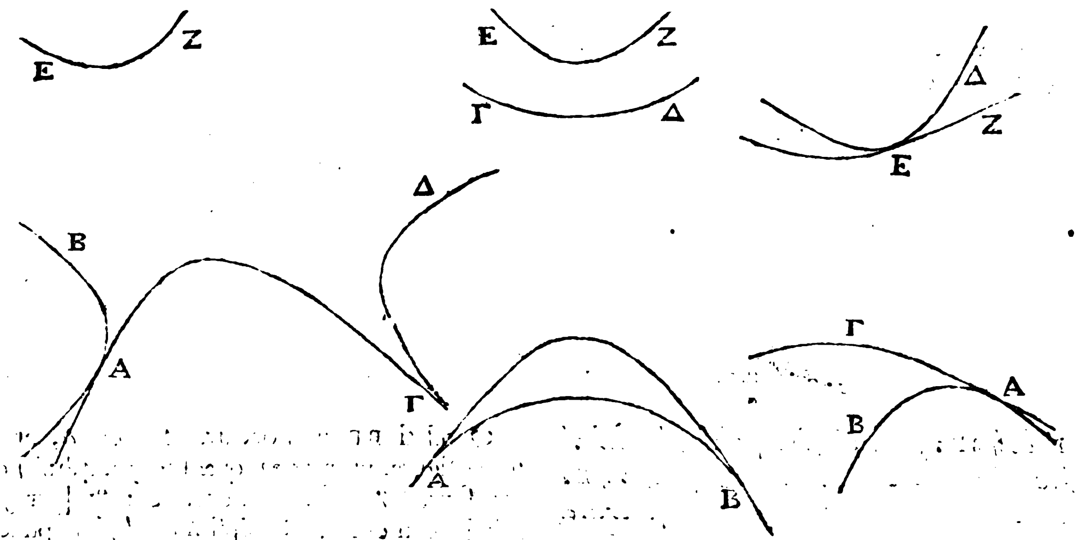
Contingant autem sese, ut in secunda figura. pari modo demonstrabitur [per 51. 4. huj.] Γ Δ ipsi Ε Ζ non occurrere.

* [Sed contingant, ut in —— figura, sectio quidem Γ Α sectionem Α Β in Α: sectio vero Δ ipsam Ε Ζ in Ζ. quoniam igitur Α Γ contingit Α Β, convexa habens è regione sita; Ε Ζ sectioni Α Β non occurret. rursus quoniam Ζ Δ contingit Ε Ζ, non occurret sectio Γ Α sectioni Δ Ζ.]

ἐπὶ τοῦ πρώτου σχήματος, κατὰ τὰ Α, Γ. ἐπεὶ οὖν ἡ Α Γ ἑκατέρας τῶν Α Β, Γ Δ ἐφάπτεται κατὰ τὰ Α, Γ σημεῖα· ἡ Ε Ζ ἄρα οὐδετέρᾳ τῶν Α Β, Γ Δ συμπεσεῖται.

Ἐφαπτέσθωσαν δὲ, ὡς ἐπὶ τοῦ δευτέρου. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι ἡ Γ Δ τῇ Ε Ζ οὐ συμπεσεῖται.

* [Ἐφαπτέσθωσαν δὲ, ὡς ἐπὶ τοῦ —— σχήματος. ἡ μὲν Γ Α τῆς Α Β κατὰ τὸ Α, ἡ δὲ Δ τῆς Ε Ζ κατὰ τὸ Ζ. ἐπεὶ οὖν ἡ Α Γ τῆς Α Β ἐφάπτεται, ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα, ἡ Ε Ζ τῇ Α Β οὐ συμπεσεῖται. πάλιν ἐπεὶ ἡ Ζ Δ τῆς Ε Ζ ἐφάπτεται, ἡ Γ Α τῇ Δ Ζ οὐ συμπεσεῖται.]



Denique si Α Γ contingat Α Β in Α, & Ε Ζ contingat Ε Δ in Ε, habentes concava ad easdem partes, ut in tertia figura; in alio puncto sibi ipsis [per 50.4.huj.] non occurrent: neque quidem Ε Ζ occurret ipsi Α Β. juxta omnes igitur diversitates, ex jam demonstratis constabit illud quod proponebatur.

Εἰ δὲ ἡ μὲν Α Γ τῆς Α Β ἐφάπτηται κατὰ τὸ Α, ἡ δὲ Ε Ζ τῆς Ε Δ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔχωσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα, ὡς ἐπὶ τοῦ τρίτου σχήματος· καθ' ἕτερον οὐ συμπεσοῦνται· οὐδὲ μὴν ἡ Ε Ζ τῇ Α Β συμπεσεῖται. κατὰ πάσας οὖν τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστιν ἐκ τῶν δεδειγμένων τὸ προτεθέν.

* Nescio cujus interpolatoris vitio factum est, ut in omnibus Codicibus tam *Græcis* & *Latinis* quam *Arabicis*, reperiatur casus ille tertius, quem uncis inclusum ut spurium & *Apollonio* nostro indignum abolendum censemus, nec schemate dignamur. Propositione enim LII[da] hujus liquido patet, impossibile esse, si hyperbolæ duæ sese extrinsecus contingant, ut sectiones iisdem oppositæ vel conveniant vel sese contingant.

APOL-

APOLLONII PERGÆI CONICORUM

LIBRI TRES POSTERIORES

(*Sc.* V^{tus}. VI^{tus}. & VII^{mus}.)

EX

ARABICO SERMONE

IN

LATINUM CONVERSI,

CUM

PAPPI ALEXANDRINI

LEMMATIS.

SUBJICITUR

LIBER CONICORUM OCTAVUS

RESTITUTUS.

Opera & ſtudio EDMUNDI HALLEII apud *Oxonienſes* Geometriæ Profeſſoris *Saviliani.*

MAXIME REVERENDO

IN CHRISTO PATRI AC DOMINO

D. *NARCISSO MARSH*,

ARCHIEPISCOPO *ARMACHANO*

ET

TOTIUS *HIBERNIÆ* PRIMATI,

ARTIUM MATHEMATICARUM

FAUTORI SUMMO,

SUIQUE ORDINIS PROPE UNICO,

HANC

QUINTI, SEXTI ET SEPTIMI LIBRI

CONICORUM APOLLONII

VERSIONEM,

E CODICE SUO ARABICO PRÆSTANTISSIMO

ADORNATAM,

Ea qua par eſt reverentia & obſervantia

Humillime offert

EDM. HALLEIUS.

a

LECTORI S.

P*Ræstantissimus ille Codex* Armachanus, *ex quo sequentem Versionem adornavimus, in orâ libri charactere majusculo hunc titulum præ se fert.*

كتب المخروطات لنصير الدين الطوسي

"*Liber Conicorum juxta* Nasir-eddîn Tusæum." *Et tam in principio quam fine libb.* V^{ti}. VI^{ti}. & VII^{mi}. *occurrunt hæc verba.*

كتب ابلونيوس في المخروطات اخرج ثابت بن قرة واصلاح بني موسي

"*Liber* Apollonii *de Conicis. Traduxit* Thebit ben Corah, *emendavit vero* Beni "Moses." *In calce autem legitur Epiloge, quæ quasi Historiola est, quâ manu, quo loco & tempore descriptus fuit ille Codex: atque hoc modo se habet, Interprete* D^{no} Sike LL.D. *viro omnigenâ literaturâ perpolito, Linguarum Orientalium peritissimo,* & Hebraicæ *apud* Cantabrigienses *Professore dignissimo.*

'*Hæc est narratio, quam in fine hujus libri scripsit* Muley *maximus* Nasir-eddîn' (*hic dictus* نصير الحق والدين). "*Absolvit scriptor harum linearum* Mohammed "Ebn Mohammed Ebn Al-Hasan Tusæus *complere hunc librum & corrigere hoc* "*exemplar, auxilio Dei & optimo adjutorio ejus, die* 21. *mensis* Dhi'lhajje *anni* 645, "(*anno Chr.* 1248. *Mart.* 9.) *Inceperat eo describendo occupari die* 12mo *mensis* Rabiae "*prioris ejusdem anni,* (*Chr.* 1247. *Aug.* 16.) *nec tamen ei vacavit amplius quam duas* "*tertias partes ejus intervalli. Absolvit autem scribere Scholia in hoc exemplar, ac dispo-* "*nere & corrigere figuras ejus,* Achmed Ebn Aly Abu'lfaraj Mohammed, *qui cogno-* "*minatur* Ebno'lbawwâb Bagdadensis (*Deus fortunet statum ejus*) *mense* Moharram "*anni* 662. (*Chr.* 1263. *Octob.*) *laudans Deum pro beneficiis ejus, & orans pro propheta* "*ejus electo* Mohammede & *familia ejus. Laus Deo, & pax super servis ejus electis:* "*fiducia nostra est Deus & optimus protector.*

"*Absolutum est exemplar hoc, in urbe* Marâga, *feria secunda, die decimo mensis* Shaa-"bân *anno* 702, (*Chr.* 1303. *Mart.* 30.) *mensis* Persici Chordâd *die* Asmôn.

Ad marginem autem paginæ ultimæ ascribuntur hæc verba,

وجدت مكتوبا علي اخر نسخة الذي نسخت منه هذه النسخة واما المقالة

hoc est, الثامنة من الكتاب لم تنقل الي العربي فلم توجد في اليوناني

"*Scriptum legitur in calce exemplaris unde descriptum est hoc exemplar. Partem octa-* "*vam hujus libri in* Arabicum *non traductam fuisse, quia etiam in* Græco *non reperta* "*est.*" *Adeo ut de octavo libro recuperando vix ulla spes sit.*

Porro urbs Marâga, *in qua ante quadringentos annos nobile hoc Conicorum exemplar scriptum dicitur, est in confiniis* Mediæ & Assyriæ, *sub Long.* 82^{gr}. & *Lat.* 37$\frac{1}{3}^{gr}$. *Urbs autem* Tûs, *unde ortus* Nasir-eddîn, *in eadem fere Latitudine ac* Marâga *sita, Longitudinem habet* 92$\frac{1}{3}^{gr}$. *civitate* Bagdâd *habente* 80^{gr}. *juxta Tabulas* Persicas *Geographicas* à Gravio *nostro editas.*

Benigne igitur velim accipias hoc quicquid est operis, ab oriente ad nos advectum & hoc unico (quod scimus) exemplari feliciter conservatum; & nostris quæso in eo interpretando & luce donando conatibus faveas. Errata quæ operarum incuriâ irrepserunt, aut nobis forsan quandoque minus perspicacibus exciderunt, ne ægre feras hoc modo corrigere.

Pag. 4. lin. 13. *lege*, pro ΓΖ, ΓΣ. *p.* 14. *l.* 48. pro ΓΣΠ, ΓΞΠ. *p.* 16. *l.* 13. pro *quadratum igitur ex* ξΔ, *leg.* Excessus igitur quadrati ex ΓΔ supra quadratum ex ξΔ. *Prop.* 25. in Schem. Hyperb. fiat A pro Λ. *p.* 24. *l.* 4. pro ΒΖ, ΒΕ. *p.* 42. *l.* 12. pro 11^{am}, 10^{am}. *p.* 66. *l.* 38. pro ΑΖ, ΛΖ. *p.* 77. *l.* 7. pro ΜΞ, ΜΧ. *p.* 91. *l.* 5. pro ΗΖΚ, ΖΗΚ. *p.* 92. *l.* 13. pro *quadr. ex* ΓΛΑ, rectangulum ΓΛΑ. *p.* 97. *l.* 13. pro *majorem*, minorem. *p.* 100. *l.* 17. pro 12^{am}, 21^{am}. *p.* 108. *l.* 38. pro *latus ejus rectum*, latere ejus recto. *p.* 113. *l.* 4. pro ΑΒ, ΑΓ. *p.* 123. *l.* penult. pro *recti datur: ab*, *leg.* recti: datur ab. *p.* 126. *l.* 43. pro *major*, minor.

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΛΗΜΜΑΤΑ
ΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟ ΠΕΜΠΤΟΝ
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA
IN QUINTUM LIBRUM CONICORUM
APOLLONII PERGÆI.

ΛΗΜΜΑ α'.

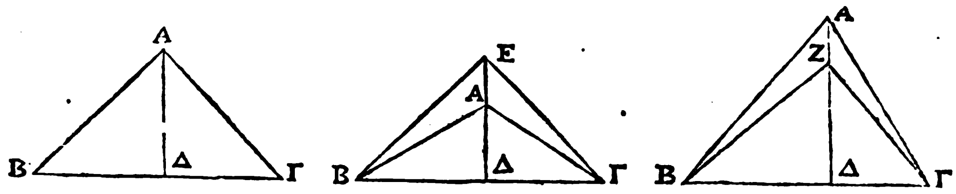
Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ. Λέγω ὅτι εἰ μὲν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΒΔΓ τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ, γίνεται ὀρθὴ ἡ Α γωνία· εἰ δὲ μεῖζον, ἀμβλεῖα· εἰ δὲ ἔλασσον, ὀξεῖα.

ΕΣΤΩ πρότερον ἴσον, ἀνάλογον ἄρα καὶ περὶ ἴσας γωνίας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία τῇ πρὸς τὸ Δ· ὥστε ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τὸ Α γωνία. ἀλλὰ ἔστω μεῖζον, καὶ αὐτῷ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΔΕ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ. ἔσται ἄρα ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία, καὶ αὐτῆς μείζων ἡ Α γωνία. ἀλλὰ ἔστω πάλιν ἔλασσον· καὶ αὐτῷ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΓ· ἔσται δὴ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνία, καὶ αὐτῆς ἐλάσσων ἡ πρὸς τὸ Α γωνία· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία.

LEMMA I.

Sit ΑΒΓ triangulum, ac ducatur cathetus ΑΔ. Dico quod si rectangulum ΒΔΓ æquale sit quadrato ex ΑΔ, erit angulus ad Α rectus; si majus fuerit eo, obtusus; sin minus, acutus.

PRIMO sit æquale, ac ΒΔ erit ad ΑΔ sicut ΑΔ ad ΔΓ, & sunt circa æquales angulos, quare angulus ad Α æqualis est angulo ad Δ: ac propterea angulus ad Α rectus est. Sed sit majus, eique æquale fiat quadratum ex ΔΕ, & jungantur ΒΕ, ΕΓ; erit igitur angulus ΒΕΓ rectus, adeoque angulus ad Α obtusus sive recto major est. Si vero minus fuerit, ipsi æquale ponatur quadratum ex ΔΖ, & jungantur ΒΖ, ΖΓ; ac angulus ΒΖΓ rectus erit, eoque minor est angulus ad Α: ac proinde angulus ad Α acutus. Q. E. D.



ΛΗΜΜΑ β.

Θέσει δοθεισῶν [πρὸς ὀρθὰς] δύο εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ σημείου δοθέντος τοῦ Δ· γράψαι διὰ τοῦ Δ ὑπερβολὴν περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒ, ΒΓ.

ΓΕγονέτω· κέντρον ἄρα αὐτῆς ἐστὶ τὸ Β. ἐπεζεύχθω οὖν ἡ ΔΒ καὶ ἐκβεβλήσθω, διάμετρος ἄρα ἐστί· κείσθω τῇ ΔΒ ἴση ἡ ΒΕ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ Β καὶ πέρας τῆς διαμέτρου. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΔΖ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ. καὶ κείσθω τῇ ΒΖ ἴση ἡ ΖΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Γ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστίν. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒ, δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ δοθὲν, δέδοται ἄρα ἡ ΑΓ τῷ μεγέθει. καὶ ἔσται ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, διὰ τὸ καὶ τὴν ΒΖ τῇ ΖΓ ἴσην εἶναι. Ἔστω δὴ ὀρθία τοῦ πρὸς τῇ ΕΔ εἴδους ἡ ΔΗ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ, ΔΓ δυνάμει ἐστὶ τὸ τέταρτον τοῦ ὑπὸ ΕΔΗ;

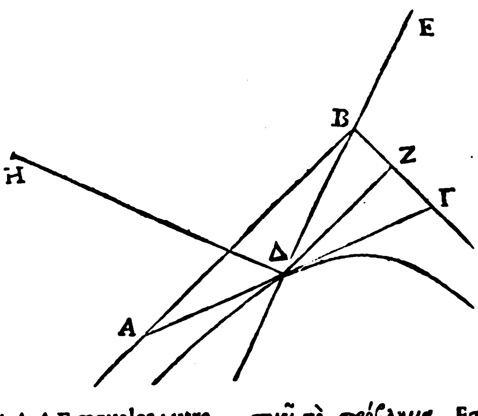
LEMMA II.

Duabus rectis ΑΒ, ΒΓ invicem normalibus positione datis, ac dato puncto Δ, describere per Δ hyperbolam circa asymptotos ΑΒ, ΒΓ.

PUta factum: ac centrum ejus erit Β. Jungatur igitur recta ΒΔ producaturque, quæ proinde diameter erit. Ponatur ΒΕ ipsi ΒΔ æqualis, quare data est; unde & datum punctum Ε diametri terminus est. De Δ super rectam ΒΓ demittatur cathetus ΔΖ, ac fiat ΖΓ ipsi ΒΖ æqualis, ac datum erit punctum Γ. juncta autem & producta recta ΓΔ ad punctum Α, recta ΓΑ data erit positione; ac recta ΑΒ datur positione, quare punctum Α datur. Datur etiam punctum Γ, adeoque recta ΑΓ datur magnitudine. erit quoque ΑΔ ipsi ΔΓ æqualis, ob ΒΖ ipsi ΖΓ æqualem. Sit jam ΑΗ latus rectum figuræ diametri ΔΕ; poterit igitur utraque ΑΔ, ΔΓ quartam partem rectanguli

anguli Ε Δ Η. sed & eædem possunt quartam partem quadrati ex Α Γ, quare rectangulum sub Ε Δ Η æquale est quadrato ex Α Γ. Datum autem est quadratum ex Α Γ, datum igitur rectangulum Ε Δ Η; unde datâ rectâ Ε Δ data quoque est Η Δ, ac punctum Η datum. [a] datis autem positione duabus rectis Ε Δ, Δ Η in eodem plano ad angulos rectos inter se constitutis, per datum punctum Δ & sub angulo Α Δ Β fit hyperbola, cujus diameter est Ε Δ, vertex vero Δ, ordinatim autem applicatæ ducuntur sub angulo dato Α Δ Β, ac possunt spatia ipsi Δ Η adjacentia, latitudinesque habentia eas quas puncto Δ conterminas ipsæ ordinatim applicatæ è diametro productâ abscindunt, excedentia vero figuris similibus figuræ Ε Δ Η. data est igitur positione sectio hyperbolica.

ἀλλὰ καὶ τοῦ ἀπὸ Α Γ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ Ε Δ Η τῷ ἀπὸ Α Γ τετραγώνῳ. δοθὲν δὲ τὸ ἀπὸ Α Γ τετράγωνον, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ Ε Δ Η. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ Ε Δ, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Η Δ, ὥστε δοθὲν τὸ Η. [a] ἐπεὶ οὖν θέσει δεδομένων δύο εὐθειῶν ἐν ἐπιπέδῳ τῶν Ε Δ, Δ Η ὀρθῶν ἀλλήλαις κειμένων, καὶ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Δ ὑπὸ τῆς Α Δ Β γωνίας γίνεται ὑπερβολή, ἧς διάμετρος μὲν ἡ Ε Δ, κορυφὴ δὲ τὸ Δ, αἱ δὲ καταγόμεναι κατάγονται ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ Α Δ Β, δυνάμεναι τὰ παρὰ τὴν Δ Η παρακείμενα, πλάτη ἔχοντα ἃ αὐταὶ ἀφαιροῦσιν ἀπὸ τῆς ἐπ' εὐθείας τῇ διαμέτρῳ πρὸς τὸ Δ, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ Ε Δ Η. θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ τομή.



[b] Componetur autem problema hoc modo. Sint duæ rectæ positione datæ Α Β, Β Γ; punctum autem datum Δ; ac juncta Β Δ producatur ad Ε; ipsique Β Δ æqualis fiat Β Ε; & demittatur normalis Δ Ζ, ac fiat Γ Ζ ipsi Β Ζ æqualis. jungatur Γ Δ & producatur ad Α, ipsique Δ Ε aptetur Δ Η, ita ut quadratum ex Α Γ æquale sit rectangulo Ε Δ Η; & diametro Δ Ε describatur hyperbola, modo in analysi dicto. Dico hanc sectionem problema efficere. Quoniam enim Β Ζ ipsi Ζ Γ æqualis est, erunt etiam Α Δ, Δ Γ æquales: utraque igitur Α Δ, Δ Γ, potens quartam partem rectanguli quadrati ex Α Γ, poterit quartam partem rectanguli Ε Δ Η, nempe figuræ super diametrum Δ Ε factæ. Hoc autem ita se habente, demonstratum est in secundo libro Conicorum, hyperbolæ asymptotos esse rectas Α Β, Β Γ.

[b] Συντεθήσεται δὲ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστωσαν αἱ τῇ θέσει δύο εὐθεῖαι αἱ Α Β, Β Γ, τὸ δὲ δοθὲν τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Β Δ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ αὐτῇ ἴση κείσθω ἡ Β Ε. καὶ ἤχθω κάθετος ἡ Δ Ζ, καὶ τῇ Β Ζ ἴση κείσθω ἡ Ζ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ Δ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Α· καὶ τῇ Δ Ε προσαρμοσθήτω ἡ Δ Η, καὶ τῷ ἀπὸ Α Γ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ Ε Δ Η· καὶ γεγράφθω, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει λέγομεν, περὶ διάμετρον Δ Ε ὑπερβολή. λέγω ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ Β Ζ τῇ Ζ Γ, ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ Α Δ τῇ Δ Γ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ἀπὸ Α Δ, Δ Γ δυνάμει τὸ τέταρτόν ἐστιν τοῦ ἀπὸ τῆς Α Γ τετραγώνου, καὶ ἔστι τοῦ ὑπὸ Ε Δ Η, τουτέστι τοῦ πρὸς τῇ Ε Δ διαμέτρῳ εἴδους. Ἐὰν δὲ ᾖ οὕτω, [c] δέδεικται ἐν τῷ δευτέρῳ ὅτι ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ Α Β, Β Γ τῆς ὑπερβολῆς.

LEMMA III.

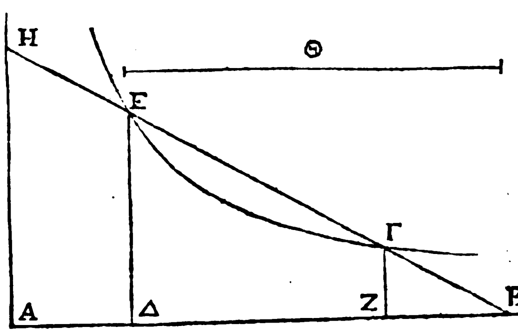
Sit recta Α Β positione data, ac punctum Γ datum; ac, ductâ rectâ Β Γ, sit recta Β Δ data: & erigatur normalis Δ Ε. Dico punctum Ε contingere hyperbolam per punctum Γ transeuntem.

SIT Γ Ζ normalis, ipsique Β Δ æqualis ponatur Ζ Α; datur itaque punctum Α: & erectâ normali Α Η, dabitur positione recta Α Η, occurrens ipsi Β Γ productæ ad punctum Η: datis igitur positione rectis Α Β, Α Η, hyperbola, per datum punctum Γ asymptotis Α Β, Α Η descripta, transibit per punctum Ε; quia Ε Η ipsi Β Γ æqualis est, ob totam Β Ε toti Η Γ æqualem. Hoc autem ex præcedente manifestum est.

ΛΗΜΜΑ γʹ.

Θέσει εὐθεῖα ἡ Α Β, καὶ δοθὲν τὸ Γ· διήχθω ἡ Β Γ, καὶ κείσθω δοθεῖσα ἡ Β Δ, ὀρθὴ δὲ ἀνήχθω ἡ Δ Ε. ὅτι τὸ Ε ἅπτεται θέσει κώνου τομῆς ὑπερβολῆς ἐρχομένης διὰ τοῦ Γ.

Ἤχθω κάθετος ἡ Γ Ζ, καὶ τῇ Β Δ ἴση κείσθω ἡ Ζ Α· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Α. ἀνήχθω ὀρθὴ ἡ Α Η· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Α Η συμπίπτουσα τῇ Β Γ, ἥτις ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ Η· καὶ θέσει δοθεισῶν τῶν Β Α, Α Η, καὶ σημείου δοθέντος τοῦ Γ, ὑπερβολὴ περὶ ἀσυμπτώτους Η Α, Α Β ἐλεύσεται ἄρα καὶ διὰ τοῦ Ε, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν Β Γ τῇ Ε Η, ἐπεὶ καὶ ὅλη Β Ε τῇ Η Γ. καὶ ἔσται διὰ τὸ προγεγραμμένον.



Componetur autem hoc modo. Sit Α Β recta positione data, & punctum datum Γ; sitque Β Γ recta ducta, data autem recta sit Θ. demissâ normali Γ Ζ, ipsi Θ æqualis fiat Ζ Α; & ad angulos rectos erigatur Α Η occurrens rectæ Β Γ productæ in Η: dein asymptotis Η Α, Α Β, per punctum Γ intra datum, describatur hyperbola. Dico eam problemati satisfacere, hoc est, si demittatur cathetus aliqua Ε Δ, semper fiet Β Δ ipsi Θ æqualis. Hoc autem manifestum est propter asymptotos; æquales enim sunt Ε Η, Γ Β, adeoque Α Δ ipsi Ζ Β æqualis: tota igitur Α Ζ, hoc est recta Θ, æqualis est toti Β Δ.

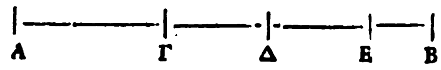
Συντεθήσεται δὴ οὕτως. Ἔστω ἡ μὲν τῇ θέσει δεδομένη εὐθεῖα ἡ Α Β, τὸ δοθὲν τὸ Γ, ἡ δὲ διηγμένη ἡ Β Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα ἡ Θ· καὶ αὐτῇ ἴση ἔστω, καθέτου ἀχθείσης τῆς Γ Ζ, ἡ Ζ Α· καὶ ὀρθὴ ἀνήχθω ἡ Α Η· συμπιπτέτω δὲ τῇ Β Γ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Η· καὶ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς Η Α, Α Β διὰ δοθέντος τοῦ Γ γεγράφθω ὑπερβολή. λέγω ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα, τουτέστιν ὅτι, οἵα ἂν κάθετος ἀχθῇ ἡ Ε Δ, ἴση γίνεται ἡ Β Δ τῇ Θ. τοῦτο δὲ φανερὸν διὰ τὰς ἀσυμπτώτους, ἴση γὰρ ἡ Ε Η τῇ Γ Β, ὥστε καὶ ἡ Α Δ τῇ Ζ Β· καὶ ὅλη ἄρα ἡ Α Ζ, τουτέστιν ἡ Θ, ἴση ἐστὶ τῇ Β Δ.

a Vide Prop. LIII. Lib. primi. b Vide Prop. IV. Lib. secundi. c Vide Prop. I. Lib. secundi.

ΛΗΜΜΑ δ′.

Ἔστω ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ. ὅτι τῶν ΒΑ, ΑΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΑΔ.

Κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ. κατὰ διαίρεσιν ἄρα γίνεται ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, τοῦτ᾽ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΓΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΕΒ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΓΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΕΒ τῷ ἀπὸ ΔΕ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΓΔΕ. ἀνάλογον καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΓ· ὅλη ἄρα πρὸς ὅλην ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΓ· ὥστε τῶν ΒΑ, ΑΓ μέση ἀνάλογόν ἐστι ἡ ΑΔ.



LEMMA IV.

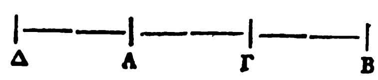
Sit ut ΒΑ ad ΑΓ ita quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΔΓ. Dico ΑΔ mediam esse proportionalem inter ΒΑ & ΑΓ.

Fiat ΔΕ ipsi ΓΔ æqualis; ac dividendo erit ut ΒΓ ad ΓΑ, hoc est, ut rectangulum ΓΒΕ ad rectangulum sub ΑΓ, ΕΒ ita (per sextam II. Elem.) rectangulum ΓΒΕ ad quadratum ex ΕΔ: quare rectangulum sub ΑΓ, ΕΒ æquale est quadrato ex ΔΕ, hoc est rectangulo ΓΔΕ. ob proportionales igitur & componendo, erit ut ΒΔ ad ΔΕ sive ΔΓ, ita ΔΑ ad ΑΓ: quapropter tota ΒΑ ad totam ΑΔ erit in eadem ratione ΑΔ ad ΑΓ; ita ut ΑΔ media proportionalis sit inter ΒΑ, ΑΓ.

ΛΗΜΜΑ ε′.

Ἔστω τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον τῷ δὶς ἀπὸ ΑΓ. ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ.

Κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ· ἔσται ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΓΑ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΒΓ. καὶ παρὰ τὴν αὐτήν. ἴση ἄρα ἐστὶ ἡ ΔΑ, τουτέστιν ἡ ΑΓ, τῇ ΓΒ.



LEMMA V.

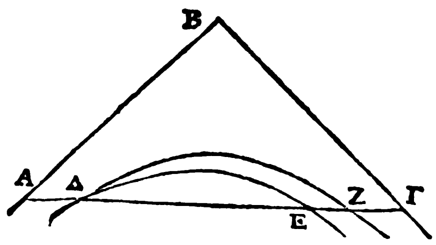
Sit rectangulum ΑΒΓ duplum quadrati ex ΑΓ. Dico ΑΓ ipsi ΓΒ æqualem esse.

Fiat ΑΔ ipsi ΑΓ æqualis: erit itaque rectangulum ΓΔΑ æquale rectangulo ΑΒΓ. & applicato utroque ad eandem rectam ΑΓ, erit ΑΔ ipsi ΑΓ æqualis etiam rectæ ΓΒ æqualis.

ΛΗΜΜΑ ϛ′.

Περὶ τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒ, ΒΓ ὑπερβολαὶ γεγράφθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ· λέγω ὅτι οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις.

Εἰ γὰρ δυνατὸν συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ· καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω εἰς τομὰς εὐθεῖα ἡ ΑΔΕΖΓ· ἔσται δὴ, διὰ μὲν τὴν ΔΖ τομὴν, ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΖΓ· διὰ δὲ τὴν ΔΕ τομὴν, ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΕΓ. ὥστε ἡ ΓΖ τῇ ΓΕ ἴση ἐστὶν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα συμβάλλουσιν αἱ τομαὶ ἀλλήλαις.

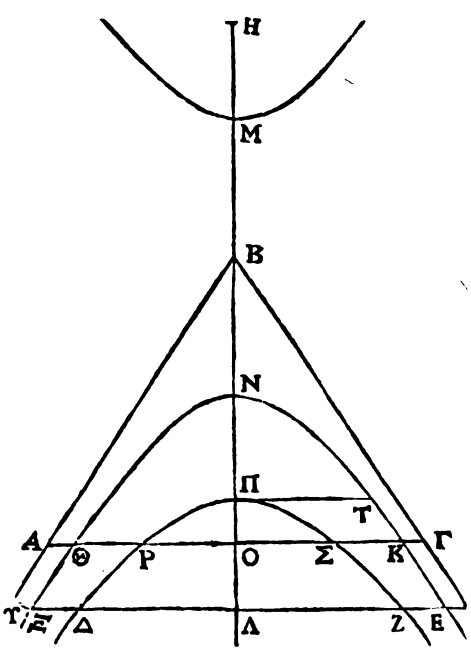


LEMMA VI.

Circa easdem asymptotos ΑΒ, ΒΓ describantur hyperbolæ ΔΕ, ΔΖ. Dico eas non occurrere invicem.

Nam si fieri possit, conveniant in puncto Δ, & per Δ ducatur ad sectiones recta ΑΔΕΖΓ; erit igitur, propter sectionem ΔΖ, recta ΑΔ ipsi ΖΓ æqualis. verum, propter sectionem ΔΕ, eadem ΑΔ ipsi ΕΓ æqualis erit, adeoque ΓΖ ipsi ΓΕ æqualis: quod impossibile est. hæ sectiones igitur non concurrunt inter se.

Λέγω δὲ ὅτι καὶ εἰς ἄπειρον αὐξόμεναι ἔγγιον προσάγουσιν ἑαυταῖς, καὶ εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα. ἤχθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΘΝΚ, καὶ ἔστω ἡ διάμετρος ΜΝ, ἧς πέρας τὸ Μ [ἔστω καὶ τῆς ΔΠΖ διάμετρος ἡ ΠΗ·] ἔσται ἄρα ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΗΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΡ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ὥστε ἐστὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ οὕτω τὸ ὑπὸ ΗΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΡ, καὶ ἐναλλάξ. μεῖζον δὲ ἐστι τὸ ὑπὸ ΜΛΝ τοῦ ὑπὸ ΗΟΠ, * μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΞ τῆς ΘΣ· καὶ διὰ τὰς τομὰς, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΞΔ τῷ ὑπὸ ΣΘΡ, [ἑκάτερον γὰρ τῷ ἀπὸ ΠΤ ἴσον·] ἐλάσσων ἄρα ἐστὶ ἡ ΞΔ τῆς ΘΡ· ὥστε ἀεὶ εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα· ἀλλὰ καὶ παράκεινται, εἰ γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν ταῖς ἀσυμπτώτοις ἔγγιον προσάγει, δῆλον ὅτι καὶ ἑαυταῖς.



Dico quoque quod eædem in infinitum productæ semper invicem propiores fiunt, & ad minorem procedunt distantiam. Ducatur enim alia hyperbola ΘΝΚ, sitque diameter ejus ΜΝ, cujus terminus Μ; ac sit ΗΠ diameter hyperbolæ ΔΠΖ: erit igitur rectangulum ΜΛΝ ad quadratum ex ΛΞ, ut diameter transversa ad latus rectum; & ut rectangulum ΗΟΠ ad quadratum ex ΟΡ ita diameter transversa ad latus rectum: quare rectangulum ΜΛΝ est ad quadratum ex ΛΞ ut rectangulum ΗΟΠ ad quadratum ex ΟΡ, ac permutando. sed rectangulum ΜΛΝ majus est rectangulo ΗΟΠ, * quare ΖΞ major est quam ΘΣ: ac propter sectiones, rectangulum ΖΞΔ rectangulo ΣΘΡ æquale est [utrumque enim quadrato ex ΠΤ æquale] quapropter ΞΔ minor est quam ΘΡ. semper igitur sectiones accedunt invicem ad minora intervalla, sibique adjacent. nam si utraque earum asymptotis semper propius accedit, manifestum est & sibi ipsis semper appropinquare.

* *Manca*

* *Manca est hæc demonstratio: placuit igitur aliam hic subjicere, ab antiquâ & integrâ* Pappi, *ut ex vestigiis ejus conjicere licet, non multum diversam.*

Quoniam enim sectiones sunt circa easdem asymptotos, erit ut rectangulum ΜΛΝ ad quadratum ex ΛΞ ita rectangulum ΗΛΠ ad quadratum ex ΛΔ. pariterque ut rectangulum ΜΟΝ ad quadratum ex ΟΘ ita rectangulum ΗΟΠ ad quadratum ex ΟΡ, sunt enim omnia in ratione lateris transversi ad latus rectum: reliquum igitur ad reliquum erit in eadem ratione. quare ut latus transversum ad rectum ita differentia rectangulorum ΜΛΝ, ΗΛΠ ad differentiam quadratorum ex ΛΞ, ΛΔ, hoc est [per 6. II. El.] ad rectangulum ΖΞΔ; & ita differentia rectangulorum ΜΟΝ, ΗΟΠ ad differentiam quadratorum ex ΟΘ, ΟΡ, sive rectangulum ΣΘΡ. Sed differentia rectangulorum ΜΛΝ, ΗΛΠ æqualis est differentiæ rectangulorum ΜΟΝ, ΗΟΠ; semper enim [per *Pappi* Lem. 4. in Lib. III.] æqualis est rectangulo ΜΠΝ: est igitur rectangulum ΖΞΔ æquale rectangulo ΣΘΡ. Verum ΖΞ major est quam ΣΘ, adeoque ΞΔ minor est quam ΘΡ. Quapropter hæ sectiones semper accedunt invicem ad minora intervalla.

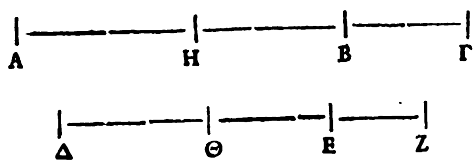
Aliter & brevius.

Propter Hyperbolas, ΑΡ æqualis est ipsi ΣΓ [per 8. II. huj.] ac ΑΘ ipsi ΚΓ; ac proinde reliqua ΘΡ reliquæ ΣΚ æqualis est, quocunque modo duxeris rectam ΑΓ. Est autem [per 10. II. huj.] rectangulum ΣΑΡ semper æquale rectangulo ΖΥΔ, ac rectangula ΚΑΘ, ΕΥΞ sunt ubique æqualia, quare & eorundem differentiæ semper æquales sunt. Sed [per *Pappi* Lem. 4. in III. huj.] differentia rectangulorum ΣΑΡ, ΚΑΘ æqualis est rectangulo ΣΘΡ, & differentia rectangulorum ΖΥΔ, ΕΥΞ æqualis est rectangulo ΖΞΔ, adeoque rectangula ΣΘΡ, ΖΞΔ sunt ubique æqualia: unde patet ΞΔ minorem esse quam ΘΡ. Ac manifestum est hyperbolam ΔΠΖ ubique intra hyperbolam ΞΝΕ constitui, quia rectangulum ΑΘΓ ubique minus est rectangulo ΑΡΓ.

LEMMA VII.

Sit ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, & ut ΒΑ ad ΑΗ ita ΕΔ ad ΔΘ. Dico ut solidum basin habens quadratum ex ΑΓ, altitudinem vero ΑΒ, ad solidum basin habens quadratum ex ΔΖ altitudinemque ΔΕ, ita cubus ex ΑΗ una cum eo quod est ad cubum ex ΗΒ in ratione quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ, ad cubum ex ΔΘ una cum eo quod est ad cubum ex ΘΕ in ratione quadrati ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΕ.

Quoniam enim ut ΓΑ est ad ΑΒ ita ΖΔ ad ΔΕ, erit etiam ut quadratum ex ΓΑ ad quadratum ex ΑΒ ita quadratum ex ΖΔ ad quadratum ex ΔΕ. sed ut quadratum ex ΓΑ est ad quadratum ex ΑΒ, sumptâ communi altitudine ΑΒ, ita solidum basin habens quadratum ex ΑΓ & altitudinem ΑΒ ad cubum ex ΑΒ. ut autem quadratum ex ΖΔ ad quadratum ex ΔΕ, ob communem altitudinem ΔΕ; ita erit solidum basin habens quadratum ex ΖΔ & altitudinem ΔΕ ad cubum ex ΔΕ. Hæc igitur proportionalia sunt; ac permutando. Sed ut cubus ex ΑΒ est ad cubum ex ΔΕ ita cubus ex ΑΗ ad cubum ex ΔΘ, & ita cubus ex ΗΒ ad cubum ex ΘΕ. verum ut cubus ex ΗΒ ad cubum ex ΘΕ ita solidum quod est ad cubum ex ΗΒ in ratione quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ, ad solidum quod est ad cubum ex ΘΕ in ratione quadrati ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΕ. ut vero unus antecedentium est ad unum consequentium ita omnes ad omnes; quare erit, ut solidum basin habens quadratum ex ΑΓ & altitudinem ΑΒ, ad solidum basin habens quadratum ex ΔΖ altitudinemque ΔΕ, ita cubus ex ΑΗ una cum eo quod ad cubum ex ΗΒ rationem habet quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ, ad cubum ex ΔΘ una cum eo quod ad cubum ex ΘΕ rationem habet quadrati ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΕ. Q. E. D.



ΛΗΜΜΑ ζ.

Ἔστω ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΘ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΖ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΑΗ κύβος μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΔ κύβον μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ οὕτω τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, κοινὸν ὕψος ἡ ΑΒ, οὕτω τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβον. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, κοινὸν ὕψος ἡ ΔΕ, οὕτω τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΖΔ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΕ κύβον. καὶ ταῦτα ἄρα ἀνάλογον καὶ ἐναλλάξ ἐστι. ἔστι δὲ ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΕ κύβον, οὕτως ὅτε ἀπὸ ΑΗ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον, καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον. ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον, οὕτω τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, πρὸς τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ στερεὸν βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΑΗ κύβος μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, πρὸς τὸν ἀπὸ ΔΘ κύβον μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ.

LEMMA VIII.

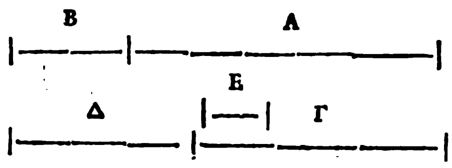
Si sint Α & Β simul æqualia ipsis Γ & Δ simul. Dico Α excedere Γ eodem excessu quo Δ majus est quam Β.

ΛΗΜΜΑ η.

Ἔστω τὸ Α μετὰ τοῦ Β ἴσον τῷ Γ μετὰ τοῦ Δ. ὅτι ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ Δ τοῦ Β.

Ἔστω

ΕΣΤΩ γὰρ ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ τὸ Ε, τὸ ἄρα Α ἴσον ἐστὶ τοῖς Γ, Ε. κοινὸν προσκείσθω τὸ Β· τὰ Α, Β ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς Γ, Ε, Β. ἀλλὰ τὰ Α, Β τοῖς Γ, Δ ἴσα ὑπόκειται· καὶ τὰ Γ, Δ ἄρα τοῖς Γ, Ε, Β ἴσα. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ Γ, λοιπὸν ἄρα τὸ Δ ἴσον τοῖς Β, Ε· ὥστε τὸ Δ τοῦ Β ὑπερέχει τῷ Ε. ᾧ ἄρα ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ Δ τοῦ Β. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἐὰν ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ Δ τοῦ Β, ὅτι τὰ Α, Β ἴσα ἐστὶ τοῖς Γ, Δ.



SIT E excessus quo A majus est quam Γ; A igitur æquale est utrisque Γ, E. commune adjiciatur B, & A, B simul æqualia erunt ipsis, Γ, E, B simul. sed ex hypothesi A, B simul æqualia sunt ipsis Γ, Δ simul; quare Γ, Δ ipsis Γ, E, B æquantur. commune auferatur Γ, ac reliquum Δ reliquis B, E æquale erit; ac Δ majus erit quam B excessu ipsius E: quo igitur excessu A superat Γ eodem & Δ superabit B. Pari modo demonstrari potest, quod si A superat Γ eodem excessu quo Δ superat B, utraque A, B simul utrisque Γ, Δ simul æqualia esse.

ΛΗΜΜΑ θ'.

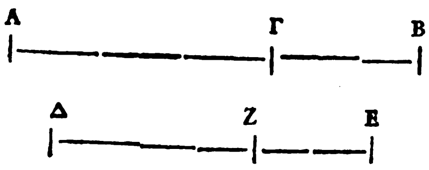
Ἔστω δύο μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΒ. ὅτι ἐὰν ὑπερέχει τὸ ΑΒ τοῦ ΑΓ, ὑπερέχει καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτὸν, τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ΓΒ τὸν αὐτόν.

ΕΣΤΩ γὰρ τὸ μὲν πρὸς τὸ ΑΒ λόγον τινὰ ἔχον τὸ ΔΕ, τόδε πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχον τὸ ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΖ πρὸς τὸ ΒΓ λόγον ἔχει τὸν αὐτόν. καὶ ἔστι τὸ ΕΖ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει τὸ ΔΕ τοῦ ΔΖ, τουτέστι τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτόν.

LEMMA IX.

Sint duæ magnitudines AB, ΓB. Dico quod si majus fuerit AB quam AΓ, illud quod ad AB rationem aliquam habet superabit quod ad AΓ eandem habet rationem, excessu qui eandem ipsam rationem ad ΓB habebit.

HAbeat enim ΔE rationem aliquam ad AB, & sit ΔZ ad AΓ in eadem ratione; reliquum itaque EZ eandem ipsam rationem habebit ad BΓ. est autem EZ excessus quo ΔE superat ΔZ, sive quo id quod ad AB rationem habet excedit illud quod ad AΓ eandem habet rationem.



ΛΗΜΜΑ ι'.

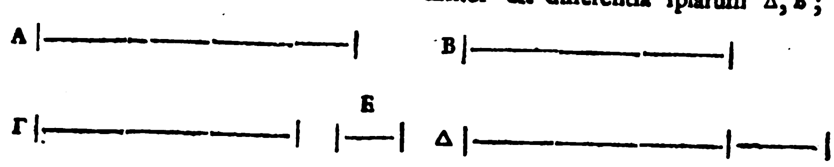
Τὸ Α τοῦ Γ ἐλάσσονι ὑπερεχέτω ἤπερ τὸ Δ τοῦ Β. ὅτι τὰ Α, Β ἐλάσσονά ἐστι τῶν Γ, Δ.

ΕΣΤΩ γὰρ ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ τὸ Ε, τὰ Α, Β ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς Γ, Ε, Β. ἐπεὶ δὲ τὸ Α τοῦ Γ ἐλάσσονι ὑπερέχει ἤπερ τὸ Δ τοῦ Β· τόδε Α τοῦ Γ ὑπερέχει τῷ Ε, τὸ Ε ἄρα ἔλασσόν ἐστι τῆς τῶν Δ, Β ὑπεροχῆς. ὥστε τὰ Ε, Β ἐλάσσονά ἐστι τοῦ Δ. κοινὸν προσκείσθω τὸ Γ, τὰ Γ, Ε, Β ἄρα ἐλάσσονά ἐστι τοῖς Γ, Δ. ἀλλὰ τὰ Γ, Ε, Β ἴσα ἐδείχθη τοῖς Α, Β· τὰ Α, Β ἄρα ἐλάσσονά ἐστι τοῖς Γ, Δ. ὁμοίως καὶ τὸ ἀναστρόφιον· καὶ τὰ τῆς ἐλλείψεως ὁμοίως.

LEMMA X.

Excedat A ipsum Γ minore differentia quam qua Δ superat B. Dico A, B simul minora esse quam Γ, Δ simul sumpta.

SIT enim E excessus ipsius A supra Γ, unde A, B simul ipsis Γ, E, B simul sumptis æqualia erunt. superat autem A ipsum Γ minore quam quo Δ superat B: est autem E excessus quo A superat Γ: igitur E minor est differentia ipsarum Δ, B; adeoque E, B



minora sunt quam Δ. commune addatur Γ, ac Γ, E, B simul minora erunt quam Γ, Δ. Sed demonstratum est Γ, E, B æqualia esse ipsis A, B simul: quare A, B minora sunt quam Γ, Δ simul. Pari modo constabit hujus conversa, & quid accidat ubi A minus fuerit quam Γ.

APOL-

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBER QUINTUS.

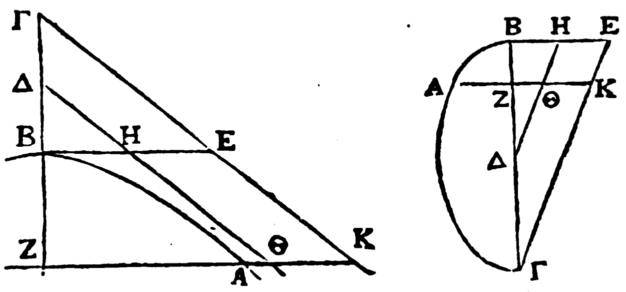
Apollonius Attalo S. P.

—— *Conscriptæ à nobis sunt hoc Libro quinto propositiones de* Maximis *&* Minimis. *Sciendum autem eos qui vel ante nos vel nostro tempore vixerunt,* Minimarum *doctrinam leviter tantum attigisse: ideoque demonstrarunt tantum quænam Rectæ contingant Sectiones, & vicissim, nempe quidnam iis accidat propterea quod Sectionum Tangentes sint. Ac quidem de hisce egimus Libro primo, nisi quod in eorum expositione prætermisimus* Minimarum *doctrinam. Constitueramus autem eum in his quoque demonstrandis servare ordinem, quem in præmissis trium Sectionum Elementis sequuti sumus, relatione habitâ ad quamlibet Sectionum diametrum: quoniam vero innumera sunt quæ hisce accidunt, id solum in præsentia conati sumus, ut ostenderemus quomodo se res habeat respectu Axium sive diametrorum principalium. Has autem Propositiones de* Minimis *accurate admodum divisimus & distinximus in suas Classes: iisque adjunximus illas quæ ad præfatam* Maximarum *doctrinam spectant. Id namque scientiæ hujus studiosis in primis necessarium est, tum ad Divisiones & διορισμοὺς Problematum, tum ad eorundem Compositiones: præterquam quod hæc ipsa res de earum numero sit, quæ per se contemplatione non indignæ videantur.* Vale.

PROPOSITIO I.

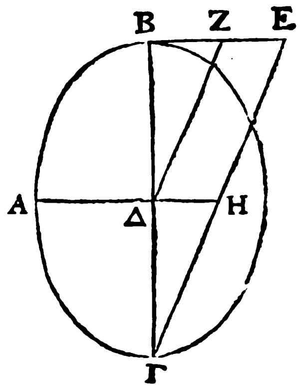
SI in Hyperbola vel Ellipsi ad Verticem principalem Sectionis erigatur Axi normalis, quæ sit dimidio Lateris recti æqualis; & ab ejus extremitate ducatur recta ad centrum sectionis, ut & à quovis in sectione puncto Axi ordinatim applicata: poterit ea duplum quadrilateri sub rectis hoc modo ductis & lateris recti dimidio contenti.

Sit AB Hyperbola vel Ellipsis, cujus Axis BΓ ac centrum Δ: & sit latus rectum Sectionis BE, ipsiusque BE dimidium sit BH. Jungatur ΔH, & ducatur ordinatim applicata quævis AZ, quæ parallela erit ipsi BE; & producatur ad Θ. Dico quadratum ex AZ duplum esse quadrilateri BZHΘ.



Ducatur è puncto E recta EΓ, quæ parallela erit ipsi ΔH; ac producatur ZΘ ad K: erit igitur ΘK parallela & æqualis ipsi HE, hoc est ipsi BH. Adjiciatur communis ZΘ, ac ZK æqualis erit utrisque BH, ZΘ simul sumptis; adeoque quod sit sub ZK & BZ æquale erit ei quod sit sub BH, ZΘ simul sumptis & BZ. Sed rectangulum sub ZK, BZ æquale est quadrato ipsius AZ: (per 12^{am} & 13^{am} I^{mi}.) Igitur rectangulum sub BH, ZΘ simul sumptis & BZ æquale est quadrato ex AZ. Verum rectangulum sub utrisque ZΘ, BH & BZ duplum est quadrilateri BZHΘ. Quocirca quadratum ex AZ duplum est quadrilateri BZHΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO II.

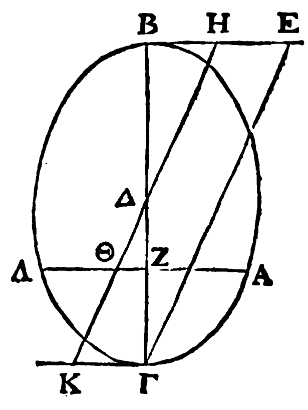


CAdat autem ordinatim applicata super centrum Ellipseos Δ; fiat BZ dimidium ipsius BE: ac jungatur ΔZ. Dico quadratum ex AΔ duplum esse trianguli BZΔ.

Connectatur recta ΓE. Quoniam enim BZ ipsi ZE æqualis est, atque etiam ZE ipsi ΔH æqualis, quæ parallela est ipsi BE, ideo rectangulum sub ΔH, ΔB duplum est trianguli ΔZB. Sed rectangulum sub ΔH, BΔ æquale est quadrato ex AΔ (per 13^{am} I^{mi}.) Igitur quadratum ex AΔ duplum est trianguli ΔZB. Q. E. D.

PROPOSITIO III.

CAdat jam ordinatim applicata ab altera parte puncti Δ, sive ultra centrum Ellipseos, ut AZ; ac fiat BH dimidium lateris recti BE, ac jungatur HΔ quæ producatur in directum. Per punctum Z ipsi BE parallela, ad occursum ipsius HΔ, ducatur ZΘ. Dico quadratum ex AZ duplum esse differentiæ triangulorum BΔH, ZΔΘ.

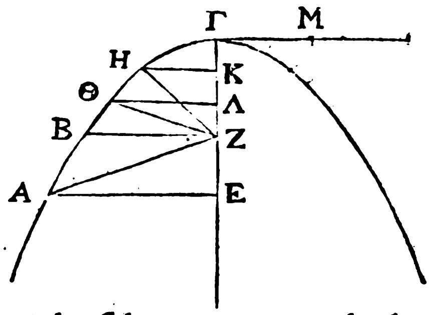


Per punctum Γ ducatur ΓK ipsi BE parallela, quæ occurrat ipsi HΔ in puncto K: ac completâ Sectione AB, producatur AZ ad Λ. erit igitur (per primam hujus) quadratum ex ZΛ duplum plani ΓKΘZ. Est autem ZΛ ipsi ZA æqualis, adeoque quadratum ex AZ æquale est quadrilatero ΓKΘZ. Planum autem hoc ΓKΘZ æquale est differentiæ triangulorum ΓΔK, ZΔΘ; quorum triangulum ΓΔK æquale est triangulo BΔH, ob BΔ ipsi ΔΓ æqualem. Quadratum igitur ex AZ duplum est differentiæ triangulorum BΔH, ZΔΘ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

SI capiatur in Axe Parabolæ punctum cujus distantia à Vertice Sectionis æquetur dimidio Lateris recti, & ab eo ducantur rectæ quælibet ad Sectionem; earundem Minima *erit ea quæ ad Verticem Sectionis ducitur, atque huic propiores minores erunt remotioribus: cujuscunque vero alterius ductæ quadratum superabit quadratum hujus, excessu quadrato interceptæ inter verticem & normalem ad axem ab extremitate ejus demissam æquali.*

Sit Axis Parabolæ ΓΕ, in quo sit ΓΖ æqualis dimidio lateris recti; & è puncto Ζ educantur ad Sectionem ΑΒΓ rectæ ΑΖ, ΒΖ, ΘΖ, ΗΖ, *quarum* ΒΖ *sit Axi normalis.* Dico quod ΓΖ, quæ ad verticem Sectionis de puncto Ζ ducitur, minor est quâvis aliâ ad Sectionem ΑΒΓ ductâ; eidemque propiores minores sunt remotioribus: quodque unaquæque earum potest simul quadratum ipsius ΓΖ, una cum quadrato interceptæ inter Verticem Γ & normalem ad axem demissam.



Demittantur normales ΗΚ, ΘΛ, ΑΕ; ac sit ΓΜ dimidium Lateris recti, adeoque ΓΖ æqualis est ipsi ΓΜ: & (per 11^{mam} primi) duplum rectangulum sub ΓΜ, ΓΚ æquale est quadrato ex ΗΚ. Sed duplum rectangulum sub ΓΜ, ΓΚ æquale est duplo rectangulo sub ΓΖ, ΓΚ; igitur quadratum ex ΗΚ æquale est duplo rectangulo sub ΓΖ, ΓΚ: ac duplum rectangulum sub ΓΖ, ΓΚ una cum quadrato ex ΚΖ æquale erit quadratis ex ΗΚ & ΚΖ simul, hoc est, quadrato ex ΗΖ. Quoniam vero duplum rectangulum sub ΖΓ, ΓΚ una cum quadrato ex ΖΚ (*per* 7. II^{di} *Elem.*) æquale est *quadratis ex* ΓΖ, ΓΚ *simul; æqualia erunt quadrata ex* ΓΖ, ΓΚ quadrato ex ΖΗ. Quadratum igitur ex ΖΗ excedit quadratum ex ΖΓ quadrato ipsius ΓΚ. *Ac pari argumento probabitur quadratum ex* ΖΘ, *& ex* ΑΖ *excedere quadratum ex* ΓΖ *quadratis interceptarum* ΓΛ, ΓΕ, *respectivè. Si vero* ΒΖ *fuerit ordinatim applicata ad Axem* ΓΖ, *erit duplum rectangulum* ΓΜ *in* ΓΖ, *hoc est, duplum quadratum ex* ΓΖ, *æquale quadrato ex* ΒΖ; *adeoque quadratum ex* ΒΖ *excedit quadratum ex* ΓΖ *ipso quadrato ex* ΓΖ. Hinc manifestum est ΑΖ *majorem esse quam* ΒΖ, *&* ΒΖ *quam* ΘΖ, & ΘΖ quam ΗΖ, ac ΗΖ majorem esse quam ΓΖ; omniumque *Minimam* esse ΓΖ: rectasque eidem propiores minores esse remotioribus. Patet etiam excessum quadrati cujuscunque alterius ductæ supra quadratum *Minimæ*, æqualem esse quadrato interceptæ inter normalem ab extremitate ejus ad Axem demissam & Sectionis Verticem. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

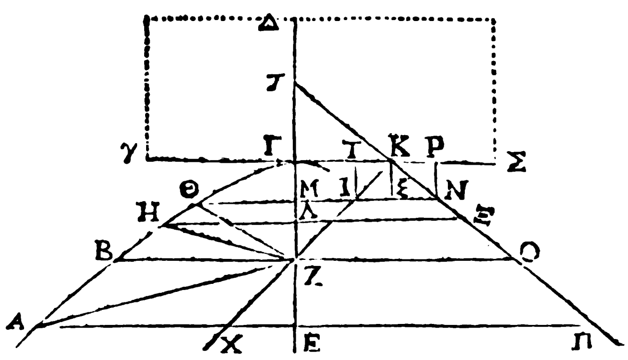
SI vero detur in Axe Hyperbolæ punctum, quod à Vertice Sectionis distet dimidio Lateris recti; eadem evenient in hâc quæ in Parabolâ: præterquam quod excessus quadratorum ductarum supra quadratum Minimæ *æquales erunt rectangulis factis super interceptas inter ordinatim applicatas & Sectionis Verticem, similibusque contento sub Axe transverso & eodem Axe unâ cum latere ejus recto simul, ita ut in singulis Axi transverso respondeat intercepta inter ordinatim applicatam & Sectionis Verticem.*

Sit ΑΒΓ Hyperbola, cujus Axis ΔΓΕ; ac fiat ΓΖ æqualis dimidio lateris recti: & è puncto Ζ educantur ad sectionem rectæ quotcunque ΖΑ, ΖΒ, ΖΗ, ΖΘ. Dico quod recta ΓΖ minor est quavis aliâ de Ζ ad sectionem ducendâ; eidemque propior minor est remotiore: quodque ductæ cujuslibet ΖΑ, ΖΒ, ΖΗ, ΖΘ quadratum exce-

 dit

dit quadratum ex ΓΖ rectangulo facto super interceptam inter Verticem Γ & normalem in Axem, simili vero rectangulo contento sub Axe transverso Sectionis ΔΓ & rectâ utrisque Axi & lateri ejus recto simul sumptis æquali.

Fiat ΓΖ æqualis lateri recto, cujus dimidium sit ΓΚ; ac sit centrum Sectionis τ: *ductisque & productis rectis* τΚ, ΚΖ, *occurrant iis* ordinatim ad Axem ΓΕ applicatæ, ut ΘΜΙΝ, ΗΛΞ, ΑΧΕΠ: & producatur normalis ΒΖ ad Ο. Ducantur etiam ipsi ΓΜ parallelæ ΡΝ, Κξ, ΤΙ. Jam quadratum ex ΘΜ duplum est quadrilateri ΓΚΜΝ (per primam hujus) & quadratum ex ΖΜ duplum est trianguli ΖΜΙ; quia ΖΜ æqualis est ipsi ΜΙ, ob ΓΖ ipsi ΓΚ æqualem. Est igitur quadratum ex ΘΖ duplum triangulorum ΓΚΖ, ΙΚΝ; quia æquale est quadratis ex ΘΜ & ΜΖ simul. Quadratum vero ex ΓΖ æquale est duplo trianguli ΓΚΖ, ob æquales ΓΖ, ΓΚ; ut & rectangulum ΡΝΙΤ duplum est trianguli ΙΚΝ. Quocirca quadratum ex ΓΖ minus est quadrato ex ΘΖ rectangulo ΡΝΙΤ. Est autem ΔΓ ad ΓΖ ut τΓ ad ΓΚ; & ut τΓ ad ΓΚ ita Κξ ad ξΝ. Sed Κξ æqualis est ipsi ξΙ, ob ΙΜ, ΜΖ æquales. Ut igitur ΔΓ ad ΓΣ, hoc est ut Axis transversus ad Latus rectum, ita ξΙ ad ξΝ: & invertendo ut ΓΣ ad ΔΓ ita ξΝ ad Ιξ: dein componendo, erunt ΔΓ, ΓΣ simul sumptæ ad ΔΓ ut ΙΝ ad ξΙ. Verum ξΙ, ΤΙ æquales sunt; quare ΤΙ est ad ΝΙ ut ΔΓ ad ΔΓ, ΓΣ simul. Producatur itaque ΓΣ ad γ, ita ut Γγ æqualis sit Axi ΔΓ, & erit ΤΙ ad ΙΝ sicut ΓΔ ad γΣ. Hæc igitur latera, cum proportionalia sint & sub æqualibus angulis, continebunt spatia similia, nempe rectangula sub ΤΙ, ΙΝ & sub ΓΔ, γΣ: ac recta ΤΙ, quæ ipsi ΓΜ æqualis est, respondet lateri ΓΔ. Quocirca rectangulum super ΓΜ factum, quod simile sit rectangulo sub ΓΔ & ΓΔ una cum latere recto simul, erit rectangulum ΡΝΙΤ. Quadratum igitur ex ΘΖ excedit quadratum ex ΓΖ rectangulo facto super ΓΜ, simili rectangulo contento sub Axe ΓΔ & utrisque ΓΔ & latere ejus recto simul sumptis. Pari modo demonstrabitur quadratum ex ΗΖ excedere quadratum ex ΓΖ rectangulo facto super ΓΛ, similique descripto.



Dico quoque quadratum ex ΒΖ excedere quadratum ex ΓΖ rectangulo etiam simili prædictis. Quoniam enim quadratum ex ΒΖ æquale est duplo quadrilatero ΓΚΟΖ (per primam hujus) ac quadratum ex ΓΖ duplum est trianguli ΓΚΖ: ideo quadratum ex ΒΖ excedit quadratum ex ΓΖ duplo trianguli ΖΚΟ. Manifestum autem est rectangulum, trianguli ΖΚΟ duplum, fieri super rectam ΓΖ, ac simile esse rectangulo modo descripto. Quadratum itaque ex ΒΖ excedit quadratum ex ΓΖ rectangulo super ΓΖ facto & rectangulo dicto simili. Dico quoque quadratum ex ΑΖ eodem modo se habere. Quoniam enim quadratum ex ΑΕ duplum est quadrilateri ΓΚΠΕ (per primam hujus) & quadratum ex ΖΕ duplum est trianguli ΧΖΕ; igitur quadratum ex ΑΖ duplum est triangulorum ΧΚΠ, ΓΚΖ, ob quadratum ex ΑΖ quadratis ex ΑΕ, ΕΖ æquale. Duplum autem trianguli ΓΚΖ est quadratum ex ΓΖ; differentia igitur quadratorum ex ΑΖ & ΓΖ duplum est trianguli ΧΚΠ: unde pari modo demonstrabitur, rectangulum, trianguli ΧΚΠ duplum, fieri super rectam ΓΕ, ac simile esse descripto.

Quoniam vero excessus quadratorum harum rectarum, quibus superant quadratum ex ΓΖ, sunt rectangula super rectas ΓΕ, ΓΖ, ΓΛ, ΓΜ facta, quæ proinde perpetuo variantur; & quod fit super ΓΕ majus est facto super ΓΖ, & quod fit super ΓΖ majus eo super ΓΛ, & quod super ΓΛ majus facto super ΓΜ: erit igitur ΓΖ omnium ductarum *Minima*: reliquarum vero quæ propiores sunt eidem minores erunt remotioribus. Potest autem omnis recta sic ducta quadratum *Minimæ*, una cum rectangulo super interceptam inter ordinatim applicatam & Verticem Γ facto, quod simile sit rectangulo contento sub Axe ΓΔ & utrisque ΓΔ & latere ejus recto simul sumptis. Q. E. D.

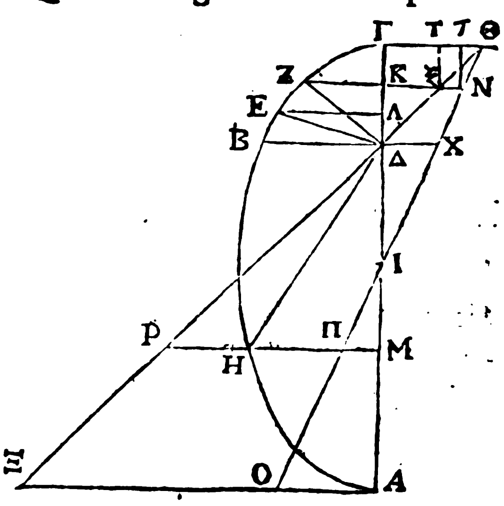
PROPO-

PROPOSITIO VI.

Iisdem positis quæ prius, nisi quod jam Sectio sit Ellipsis, & Axis sit Axis major ejus; erit Minima *omnium de puncto dato ductarum, ea quæ æqualis est semilateri recto*; Maxima *vero residua pars Axis; è reliquis vero, quæ propiores* Minimæ *sunt minores erunt remotioribus ab eâ: Quadratum autem cujuscunque alterius ductæ excedet quadratum* Minimæ *rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatam & Sectionis Verticem, quod simile sit contento sub Axe transverso & excessu ejusdem Axis supra Latus ejus rectum, ita ut Axis transversus respondeat interceptæ inter ordinatim applicatam & Sectionis Verticem.*

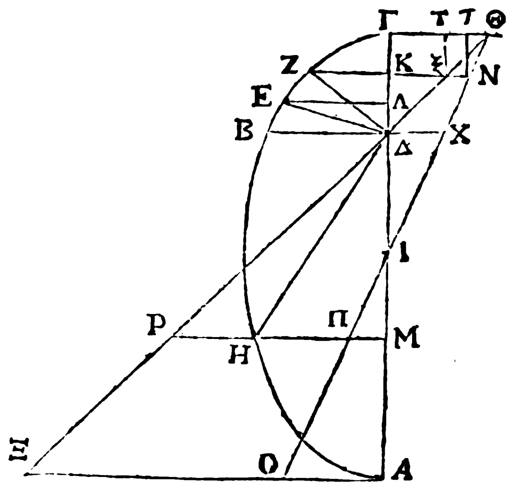
Sit ΑΒΓ Ellipsis, & Axis ejus major ΑΓ; sitque ΓΔ æqualis semilateri recto: & è puncto Δ educantur ad Sectionem rectæ ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ, ΔΗ. Dico quod ΔΓ Minima est è rectis per Δ ducendis; quodque ΔΑ earundem Maxima est; quodque eæ quæ minus distant à ΔΓ minores sunt remotioribus ab eâdem: quodque quadratum ex ΔΖ majus est quadrato ex ΔΓ, spatio æquali rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatam & verticem Γ, simili contento sub Axe ΓΑ & excessu ejusdem supra Latus rectum ejus.

Fiat ΓΘ dimidium Lateris recti, sitque centrum Ι, & ducantur normales ad Axem ΖΚΝ, ΕΛ, ΒΔΧ: & per punctum Α iisdem parallela sit recta ΑΞ, Axique ΓΑ parallelæ duæ ξΤ, Ντ. Jam quadratum ex ΖΚ (per primam hujus) duplum est quadrilateri ΓΘΝΚ; quadratum vero ex ΔΚ duplum est trianguli ΚΔξ, quia ΚΔ ipsi Κξ æqualis est, ob æqualitatem ipsarum ΔΓ, ΓΘ. Quadratum igitur ex ΔΖ duplum est triangulorum ΔΓΘ, ΘξΝ. Sed quadratum ex ΔΓ duplum est trianguli ΔΓΘ, & rectangulum ξΝΤτ duplum est trianguli ξΘΝ: quadratum itaque ex ΔΖ excedit quadratum ex ΔΓ rectangulo ξΝΤτ. Est autem ΙΓ ad ΓΔ sive ΓΘ sicut ΑΓ ad Latus rectum, & Ντ est ad τΘ in eadem ratione; quare Ντ est ad τΘ sicut ΑΓ ad Latus rectum. Sed Ντ ipsi ΘΤ æqualis est, unde ΑΓ est ad Latus rectum sicut ΘΤ ad τΘ; ac per conversionem rationis ΓΑ erit ad excessum ejus supra Latus rectum ut ΘΤ est ad Ττ. Sed ΘΤ ipsi ξΤ æqualis est, ob æquales ΓΔ, ΓΘ; adeoque Τξ est ad Ττ sive ξΝ sicut ΑΓ ad excessum ejusdem supra Latus rectum: Axi vero ΑΓ respondet ipsa Τξ, quæ æqualis est interceptæ ΓΚ: rectangulum igitur ξΝΤτ æquale est facto super ΚΓ, quod simile sit contento sub ΑΓ & excessu ejusdem supra Latus rectum. Quadratum igitur ex ΔΖ excedit quadratum ex ΔΓ spatio æquali rectangulo facto super ΓΚ simílique rectangulo dicto. *Eodem modo constabit quadratum ex* ΕΔ *excedere quadratum ex* ΔΓ *rectangulo simili super interceptam* ΓΛ *facto.*



Dico quoque quadratum ex ΔΒ eodem modo se habere. Quadratum enim ex ΔΒ duplum est quadrilateri ΓΔΧΘ; quadratum vero ex ΓΔ duplum est trianguli ΓΔΘ: igitur differentia inter quadratum ex ΔΒ & ex ΔΓ æquale est duplo trianguli ΔΘΧ. Sed rectangulum factum super ΔΓ jam descripto simile, duplum est trianguli ΔΘΧ; quare differentia inter quadrata ex ΒΔ & ΔΓ æqualis est rectangulo facto super ΔΓ, quod descripto simile sit. Dico etiam quadratum ex ΔΗ majus esse quam quadratum ex ΓΔ rectangulo facto super ΜΓ simílique præmonstrato. Est enim quadratum ex ΗΜ (per primam hujus) duplum quadrilateri ΜΑΟΠ: quadratum vero ex ΜΔ duplum est trianguli ΔΜΡ; quia ΔΜ ipsi ΜΡ æqualis est, ob æquales ΔΓ, ΓΘ. Quadratum igitur ex ΔΗ duplum est utriusque, trianguli ΑΙΟ & trapezii ΙΔΡΠ simul.

Triangulum autem ΑΙΟ æquale est triangulo ΙΘΓ, quare quadratum ex ΔΗ duplum est trianguli ΓΘΙ & spatii ΙΔΡΠ; hoc est, duplum triangulorum ΔΓΘ & ΡΘΠ. Sed quadratum ex ΓΔ duplum est trianguli ΔΓΘ: igitur differentia quadratorum ex ΔΓ & ΔΗ duplum est trianguli ΡΘΠ. Sed rectangulum factum super ΓΜ descripto simile duplum est trianguli ΡΘΠ: quare excessus quadrati ex ΔΗ supra quadratum ex ΔΓ æqualis est rectangulo præmonstratis simili super ΓΜ facto.

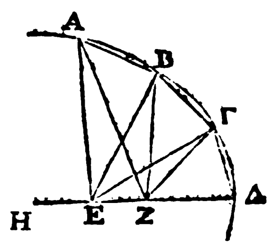


Similiter quadratum ex ΔΑ duplum est trianguli ΞΑΔ; triangulum autem ΟΙΑ æquale est triangulo ΘΙΓ: igitur quadratum ex ΑΔ duplum est triangulorum ΞΘΟ, ΔΓΘ. Sed quadratum ex ΓΔ duplum est trianguli ΔΓΘ; differentia igitur quadratorum ex ΑΔ & ΔΓ duplum est trianguli ΞΘΟ. Rectangulum autem super ΑΓ factum descriptoque simile est etiam duplum trianguli ΞΘΟ. Quocirca quadratum ex ΑΔ excedit quadratum ex ΔΓ rectangulo contento sub ΑΓ & excessu ejusdem supra latus rectum figuræ. Est autem rectangulum factum super ΓΑ majus facto super ΓΜ, & quod super ΓΜ majus facto super ΓΔ, *& quod super* ΓΔ *facto super* ΓΛ, *& quod super* ΓΛ *majus facto super* ΓΚ. Recta igitur ΓΔ *Minima* est è rectis per punctum Δ ad Sectionem ductis, & ΔΑ est earundem *Maxima*. Quoad cæteras vero, quæ propior est Minimæ minor est remotiore ab eadem. Excessus vero quadrati cujuscunque earum supra quadratum Minimæ rectangulum est rectangulo præmonstrato simile. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

SI sumatur punctum in Minimâ *jam descriptâ, in quavis è tribus Sectionibus, à quo ducantur rectæ quælibet ad Sectionem: Earundem* Minima *erit recta jungens punctum illud & Sectionis Verticem. Cæterarum vero ad idem Axis latus ductarum, quæ propior est* Minimæ *minor erit remotiore.*

Sit ΑΒΓΔ sectio Conica, cujus Axis ΔΗ, ac in eo recta *Minima* ΔΕ: inter Δ & Ε capiatur punctum aliquod ut Ζ, à quo ducantur ad Sectionem rectæ quælibet ΖΓ, ΖΒ, ΖΑ. Dico quod ΔΖ earundem Minima est, quodque huic propior minor est remotiore.



Jungatur enim ΓΕ, quæ proinde major erit quam ΔΕ; unde angulus ΓΔΕ major erit angulo ΔΓΕ; ac angulus ΖΔΓ multo major erit angulo ΔΓΖ; adeoque ΓΖ major erit quam ΖΔ. Pariter quoniam ΒΕ major est quam ΓΕ, angulus ΒΓΕ major erit angulo ΓΒΕ, unde & multo major est angulus ΒΓΖ angulo ΖΒΓ: quare ΒΖ major est quam ΖΓ. Eodemque modo demonstrabitur ΑΖ majorem esse quam ΒΖ. Ipsa igitur ΔΖ Minima est rectarum de puncto Ζ ad Sectionem ductarum: è cæteris vero quæ eidem ΔΖ propior est minor erit remotiore. Q. E. D.

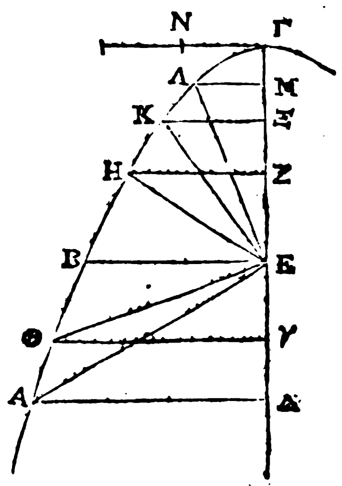
PROPOSITIO VIII.

SI capiatur in Axe Parabolæ punctum, quod à vertice Sectionis plus distet dimidio Lateris recti; & à puncto illo versus Sectionis Verticem ponatur Axis segmentum æquale dimidio lateris recti; à cujus extremitate erigatur Axi normalis ad occursum Sectionis

onis producenda: & ducatur recta jungens punctum hujus occursus & punctum prius datum. Hæc recta Minima *erit omnium de puncto illo in Axe dato ad Sectionem ducendarum. E reliquis vero quæ ab utrâque parte eidem propior est minor erit remotiore. Excessus autem quadrati cujuscunque ductæ supra quadratum* Minimæ *æqualis erit quadrato partis interceptæ inter ordinatim applicatas, ab earundem extremitatibus ad Axem demissas.*

Sit ABΓ Parabola, cujus Axis ΓΔ; in quo capiatur ΓE major dimidio Lateris recti; ac fiat ZE dimidio lateris recti æqualis, ipsique ΓE normalis ducatur ZH, & jungatur EH. Dico EH Minimam esse è rectis per punctum E ad Sectionem ductis: è cæteris vero ad puncta quævis ut A, B, Γ ductis, quæ eidem EH propior est minor erit remotiore, ab utroque ejus latere. Eductis etiam è puncto E ad Sectionem rectis EK, EΛ, EA, dico quadratum cujuscunque earum excedere quadratum ex EH, spatio æquali quadrato interceptæ inter ordinatim applicatam & punctum Z.

Ducantur ordinatim applicatæ, sitque BE Axi normalis, ac fiat ΓN dimidium Lateris recti. Erit igitur (per 11mam primi) duplum rectangulum sub ΓN, ΓΞ æquale quadrato ex KΞ, eidemque æquale est duplum rectangulum sub EZ, ΓΞ. Duplum autem rectangulum sub EZ, ZΞ, una cum quadratis ex EZ & ZΞ simul, æquale est quadrato ex EΞ; quare duplum rectangulum sub EZ & utrâque ΓZ, ZΞ simul sumptâ, una cum quadratis ex EZ, ZΞ simul, æquale est quadratis ex KΞ & ΞE; hoc est quadrato ex KE. Sed duplum rectangulum sub EZ & utraque ΓZ, ZΞ simul duplum est rectanguli sub EZ, ZΓ: Quadratum igitur ex KE æquale est duplo rectangulo sub EZ, ZΓ una cum quadratis ex ZΞ, EZ. Quod autem fit sub EZ, ZΓ bis, æquale est quadrato ex ZH, ob ZE ipsi ΓN æqualem: quare quadrata ex ZH, ZE & ZΞ simul sumpta æqualia sunt quadrato ex EK. Sed quadrata ex ZH, ZE æquantur quadrato ex EH; unde quadratum ex EK æquale est quadratis ex EH, ZΞ; adeoque excessus quadrati ex EK supra quadratum ex EH æqualis est quadrato ex ZΞ. Eodem modo demonstrabitur quadratum ex EΛ excedere quadratum ex EH quadrato ipsius ZM. Quoniam vero duplum rectanguli sub ΓZ, ZE æquale est quadrato ex ZH, ob ZE ipsi ΓN æqualem: erit etiam excessus quadrati ex ΓE supra quadratum ex EH æqualis quadrato ex ΓZ. Est autem ZΞ minor quam ZM, & ZM quam ZΓ: recta igitur EH minor est quavis recta per E ad Sectionem ductâ inter punctum H & Verticem Γ.

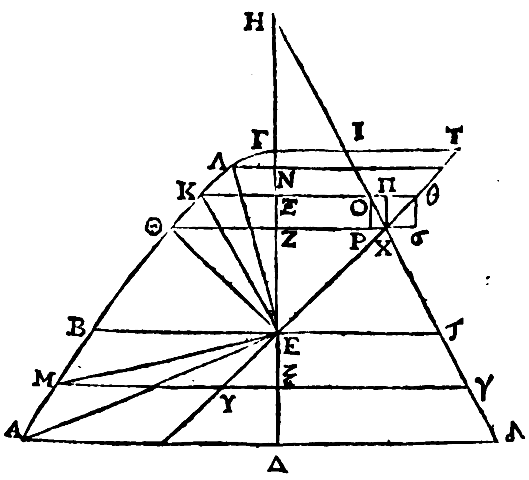


Pariter quadratum ex BE æquale est duplo rectangulo sub ΓN, ΓE; hoc est sub EZ, ΓE bis: quod autem fit sub ΓZ, ZE bis æquale est quadrato ex ZH: quadratum igitur ex BE æquale est quadratis ex EH & EZ simul sumptis. Unde quadratum ex BE excedit quadratum ex EH quadrato ipsius EZ. Quinetiam quadratum ex γΘ æquale est rectangulo sub Γγ, ZE bis, ob ZE ipsi ΓN æqualem. Quadratum autem ex γE excessus est quadratorum ex utraque γZ, ZE supra duplum rectangulum sub γZ, ZE; quapropter rectangulum ΓZ in ZE bis, una cum quadratis ex γZ, ZE simul æquantur quadrato ex ΘE. Sed ΓZ in ZE bis una cum quadrato ex ZE, æquale est quadrato ex EH: excessus igitur quadrati ex ΘE supra quadratum ex EH æquale est quadrato ex γZ. Simili argumento differentia quadratorum ex AE & EH æqualis erit quadrato ex ΔZ. Est autem ΔZ major quam γZ, & γZ quam ZE. Recta igitur EH minor est quavis recta per punctum E ad Sectionem ducta; & quæ illi propior est minor est remotiore: & excessus quadrati alterius cujusvis supra quadratum ejus æqualis est quadrato interceptæ inter ordinatim applicatam & punctum Z. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

SI capiatur in Axe Hyperbolæ punctum quod distet à Vertice Sectionis plus quam dimidio Lateris recti; ac dividatur ea, quæ inter punctum datum & Centrum Sectionis intercipitur, in segmenta rationem diametri transversæ ad latus rectum inter se habentia, ita ut pars illa quæ centro adjacet respondeat diametro transversæ; & ad punctum divisionis erigatur Axi normalis occurrens Sectioni: Ductâ rectâ jungente punctum occursûs & punctum in Axe sumptum, erit hæc rectarum omnium à puncto illo ad Sectionem ductarum Minima. *E cæteris vero ab utroque latere eidem adjacentibus, quæ propior est minor erit remotiore. Excessus etiam quadrati cujuscunque ductæ supra quadratum* Minimæ *æqualis erit rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatas ab iisdem demissas, simili vero contento sub diametro transversâ & utrisque diametro transversâ & Latere recto simul sumptis; ita ut diameter transversa respondeat interceptæ.*

Sit ΑΒΓ Hyperbola, cujus Axis ΔΓ centrumque Η; sitque ΓΕ major dimidio Lateris recti: ac fiat ΗΖ ad ΖΕ ut diameter transversa ad Latus rectum, cadente puncto Ζ inter puncta Γ, Ε. Ad Ζ erigatur normalis super Axem ut ΖΘ, ac jungatur ΘΕ. Dico ΘΕ Minimam esse è rectis de puncto Ε ad sectionem ductis; illique ab utroque latere propiorem minorem esse remotiore: Excessum etiam quadrati cujuscunque earum supra quadratum Minimæ æquari rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatas, quod simile sit rectangulo contento sub diametro transversâ & utrisque diametro transversâ & Latere recto simul sumptis; ita ut diameter transversa respondeat interceptæ inter ordinatim applicatas.



Fiat ΓΙ dimidium Lateris recti, ac juncta ΗΙ producatur ad ϑ; ipsique Ηϑ occurrat ordinatim applicata ΖΘ producta in Χ: ac jungatur & utrinque producatur ΕΧ. Ducantur etiam normales ΛΝ, ΚΞ, cæteræque ad occursum ipsarum Ηϑ, ΕΧ continuandæ. Jam quoniam ΗΓ est ad ΓΙ ut diameter transversa ad Latus rectum, sive (*per constructionem*) ut ΗΖ ad ΖΕ; ac ΗΓ est ad ΓΙ ut ΗΖ ad ΖΧ: ΖΧ itaque ipsi ΖΕ æqualis erit. Quadratum autem ex ΖΘ duplum est quadrilateri ΓΙΖΧ (per primam hujus) & quadratum ex ΖΕ duplum est trianguli ΕΖΧ: quadratum igitur ex ΘΕ duplum est quadrilateri ΓΙΕΧ. Pariter quadratum ex ΚΞ duplum est plani ΓΙΞΟ (per eandem primam) & quadratum ex ΕΞ duplum est trianguli ΕΞθ, adeoque quadratum ex ΕΚ duplum est utriusque, quadrilateri ΓΙΕΧ & trianguli ΟΧθ simul sumpti. Demonstravimus autem quadratum ex ΘΕ duplum esse Trapezii ΓΙΕΧ; excessus igitur quadrati ex ΕΚ supra quadratum ex ΕΘ duplum est trianguli ΟΧθ. Ducantur rectæ ΟΡ, ΧΠ, θσ Axi ΓΔ parallelæ: & erit ut ΗΓ ad ΓΙ ita θΠ ad ΠΟ, ob θΠ ipsi ΧΠ æqualem; adeoque θΠ est ad ΠΟ ut diameter transversa ad latus rectum; componendo autem θΠ erit ad θΟ ut diameter transversa ad rectam compositam ex diametro transversa & Latere recto. Sed θΠ æqualis est ipsi θσ: igitur rectangulum ΡΟθσ simile erit contento sub diametro transversâ & compositâ ex utraque, diametro transversâ & latere recto. Rectangulum autem ΡΟθσ duplum est trianguli ΟΧθ, quo excessu quadratum ex ΕΚ superat quadratum ex ΕΘ: & ΡΟ æqualis est interceptæ

ceptæ ZΞ. Quapropter differentia inter quadrata ex EΘ & EK æqualis eſt rectangulo facto ſuper ZΞ, ſimilique rectangulo deſcripto, ita ut ZΞ reſpondeat diametro tranſverſæ. Pari modo demonſtrabitur quadratum ex EΛ excedere quadratum ex EΘ rectangulo facto ſuper ZN, ſimilique prædicto; ita ut diameter tranſverſa interceptæ ZN reſpondeat. Quinetiam quadratum ex ΓE duplum eſt trianguli ΓET, & quadratum ex EΘ duplum eſt quadrilateri ΓEIX; adeoque exceſſus quadrati ex ΓE ſupra quadratum ex EΘ duplum eſt trianguli IXT: quod æquale eſt rectangulo ſuper ΓZ facto & prædeſcripto ſimili. Exceſſus igitur quadrati ex ΓE ſupra quadratum ex EΘ æqualis eſt rectangulo facto ſuper ΓZ ſimilique prædicto. Sed ZΞ minor eſt quam ZN, & ZN quam ZΓ; adeoque recta EΘ minor eſt quam EK, & EK minor eſt quam EΛ, & EΛ quam EΓ. Recta igitur EΘ minor eſt quavis rectâ per punctum E inter Θ & Verticem Γ ad Sectionem ductâ.

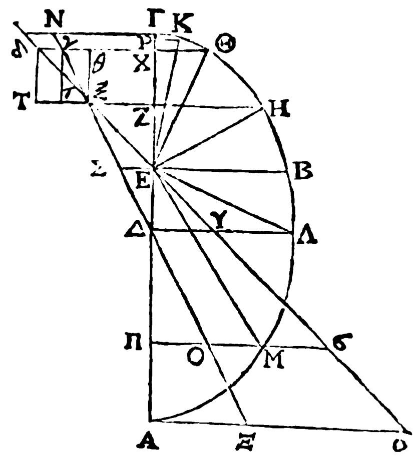
Verum etiam quadratum ex BE æquale eſt duplo quadrilateri ΓEIτ, unde exceſſus quadrati ex EB ſupra quadratum ex EΘ erit duplum trianguli EXτ: duplum autem hujus trianguli rectangulum eſt ſuper ZE factum, ſimileque rectangulo jam dicto. Eſt quoque quadratum ex Mξ (per primam hujus) duplum quadrilateri ΓIξγ, & quadratum ex Eξ duplum trianguli EξΥ: quadratum igitur ex ME duplum eſt trianguli ΥXγ & quadrilateri ΓEIX ſimul ſumpti. Sed demonſtratum eſt quadratum ex ΘE duplum eſſe quadrilateri ΓEIX: quocirca rectangulum ſuper Zξ factum & prædicto ſimile, cum ſcilicet duplum ſit trianguli ΥXγ, exceſſus eſt quo quadratum ex EM ſuperat quadratum ex EΘ. Pari modo conſtabit quadratum ex EA excedere quadratum ex ΘE rectangulo ſuper ZΔ facto prædictiſque ſimili. Jam EZ minor eſt quam Zξ, & Zξ quam ZΔ: quare ΘE minor eſt quam EB, & EB quam EM, & EM quam EA. Eſt igitur recta EΘ Minima omnium per punctum E ad Sectionem ductarum; & quæ ab utraque parte ipſi ΘE propior eſt minor eſt remotiore: & exceſſus quadrati cujuſcunque earum ſupra quadratum ipſius ΘE æqualis eſt rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatas & præmonſtrato rectangulo ſimili. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

SI ſumatur in Axe majore Ellipſeos punctum quod diſtet à Vertice Sectionis pluſquam dimidio lateris recti; ac dividatur intercepta inter Verticem Sectionis & punctum illud, ita ut ſegmentum, quod interjacet Sectionis centrum & punctum diviſionis, ſit ad diſtantiam ejuſdem puncti ab illo in Axe prius ſumpto in ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum; & à puncto diviſionis erigatur Axi normalis Sectioni occurrens; & ab occurſu ducatur recta ad punctum in Axe ſumptum: erit hæc Minima *è rectis quæ per punctum illud ad Sectionem duci poterunt; & è cæteris quæ eidem propior eſt minor erit remotiore: exceſſus autem quadrati cujuſlibet earum ſupra quadratum* Minimæ *æqualis erit rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatas ab iiſdem demiſſas, ſimili vero contento ſub diametro tranſverſa & exceſſu diametri tranſverſæ ſupra latus rectum.*

Sit ABΓ Ellipſis cujus Axis major AΓ, & centrum Δ; ac ſit EΓ major dimidio lateris recti, & fiat ΔZ ad ZE ut AΓ ad Latus rectum. Ad punctum Z erigatur normalis ZH quæ producatur, ac jungatur EH. Dico EH Minimam eſſe è rectis ad Sectionem per punctum E ducendis; eidemque propiorem minorem eſſe remotiore ab eadem: exceſſum etiam, quo quadratum alterius cujuſcunque ductæ ſuperat quadratum ejus, æqualem eſſe rectangulo facto ſuper interceptam inter punctum Z & ordinatim applicatam, quod ſimile ſit contento ſub Axe AΓ & exceſſu quo Axis ille ſuperat latus rectum, ita ut Axi AΓ reſpondeat intercepta inter ordinatam & punctum Z.

Ducantur normales ut in Schemate; sitque ΒΕ ad angulos rectos ipsi ΑΓ; ac fiat ΓΝ dimidium Lateris recti: jungaturque ΝΔ, quæ occurrat ipsi ΗΖ productæ in ξ; ductaque recta Εξ producatur utrinque. Quoniam vero ΔΓ est ad ΓΝ ut diameter transversa ad Latus rectum: ac ΔΖ est ad ΖΕ in eadem ratione diametri transversæ ad Latus rectum; erit igitur ΔΖ ad ΖΕ ut ΔΓ ad ΓΝ, hoc est, ut ΔΖ ad Ζξ: quare eadem est ratio ΔΖ ad ΖΕ ac ad Ζξ, adeoque ipsæ ΖΕ, Ζξ sunt æquales. Ducantur etiam Axi ΑΓ parallelæ ξθ, γτ, Τδ. Jam quadratum ex ΖΕ duplum est trianguli ΖΕξ, ac quadratum ex ΖΗ (per primam hujus) duplum est quadrilateri ΓΝΖξ; quadratum itaque ex ΕΗ duplum est Trapezii ΓΝΕξ. Quadratum quoque ex ΘΧ (per eandem) duplum est quadrilateri ΓΝΧγ; & quadratum ex ΕΧ duplum est trianguli ΧδΕ; unde quadratum ex ΘΕ duplum est Trapezii ΓΝΕξ & trianguli γξδ simul sumpti. Sed quadratum ex ΕΗ duplum est Trapezii ΓΝΕξ: excedit igitur quadratum ex ΕΘ illud ex ΕΗ duplo trianguli γξδ. Duplum autem hujus trianguli æquale est rectangulo sub Τδ, δγ. Cum vero ΔΖ est ad Ζξ ut ξθ ad θγ; ac ΕΖ æqualis est ipsi Ζξ unde recta θξ æqualis est ipsi θδ: ξθ erit ad θγ ut ΔΓ ad ΓΝ, id est, θδ erit ad θγ ut ΔΓ ad ΓΝ. Sed ΔΓ est ad ΓΝ ut axis transversus ad latus rectum: igitur θδ est ad θγ ut axis transversus ad latus rectum, ac per conversionem rationis θδ erit ad δγ ut axis transversus ad excessum ejusdem supra latus rectum. Est autem θδ ipsi Τδ æqualis; quare rectangulum sub Τδ, δγ simile erit rectangulo sub axe transverso & excessu ejusdem supra latus rectum. Ac Τδ æqualis est ipsi ΖΧ, adeoque differentia quadratorum ex ΕΘ & ΕΗ æqualis est rectangulo super ΖΧ facto, quod simile sit rectangulo jam descripto, ita ut ΖΧ Axi transverso respondeat. Pari modo demonstrabitur, differentiam inter quadrata ex ΕΚ & ΕΗ æqualem esse rectangulo facto super ΖΡ simileque prædicto: similiterque quadratum ex ΕΓ excedere quadratum ex ΕΗ rectangulo super ΖΓ facto, eisdemque simili. Recta autem ΖΧ minor est quam ΖΡ, & ΖΡ quam ΖΓ; quare recta ΕΗ minor est quam ΕΘ, & ΕΘ quam ΕΚ, & ΕΚ quam ΕΓ.



Porro quadratum ex ΒΕ (per primam hujus) duplum est Trapezii ΓΝΕΣ. Ostendimus autem quadratum ex ΕΗ duplum est Trapezii ΓΝΕξ; quare excessus, quo quadratum ex ΒΕ superat quadratum ex ΕΗ, duplum est trianguli ΕξΣ, quod æquale est rectangulo facto super ΕΖ simileque descripto, ut ex nuper allatis constabit.

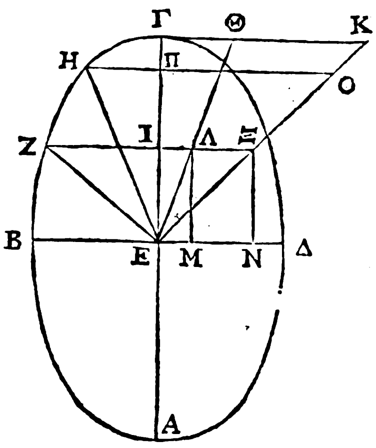
Quadratum quoque ex ΔΛ (per secundam hujus) duplum est trianguli ΓΔΝ, & quadratum ex ΔΕ duplum est trianguli ΔΕΥ; quadratum igitur ex ΛΕ duplum est trianguli ΔΥξ & Trapezii ΓΝΕξ simul sumpti: excedit igitur quadratum ex ΛΕ quadratum ex ΕΗ duplo trianguli ΔΥξ: hujus autem trianguli duplum rectangulum est factum super ΔΖ descripto simile. Quinetiam quadratum ex ΜΠ (per tertiam hujus) duplum est quadrilateri ΞΟΠΑ, & quadratum ex ΠΕ duplum est trianguli ΠΕσ; quapropter quadratum ex ΜΕ duplum est trianguli ΞΔΑ & quadrilateri ΕΔΟσ simul sumpti. Sed triangulum ΞΔΑ æquale est triangulo ΓΔΝ: quare quadratum ex ΜΕ duplum est Trapezii ΓΝΕξ & trianguli Οξσ simul sumpti. Hujus igitur trianguli duplum excessus est quo quadratum ex ΜΕ excedit quadratum ex ΕΗ. Duplum autem trianguli Οξσ rectangulum est super ΖΠ factum, simileque rectangulo descripto. Denique quadratum ex ΑΕ duplum est trianguli οξΞ & Trapezii ΓΝΕξ simul sumpti; excessus itaque quadrati ex ΑΕ supra quadratum ex ΕΗ duplum est trianguli οξΞ; cujus trianguli duplum æquale est rectangulo super ΖΑ formato simileque descripto. Jam vero ΕΖ minor est quam ΔΖ, ac ΔΖ minor quam ΠΖ, ac ΠΖ quam ΑΖ: quocirca ΒΕ minor est quam ΕΛ, ac ΕΛ quam ΕΜ, & ΕΜ quam ΕΑ. Recta igitur ΕΗ minima est è rectis per punctum Ε ad Sectionem ΑΒΓ ducendis. Reliquarum vero quæ eidem ab utroque latere propior est minor est remotiore, & excessus quadratorum earundem supra quadratum ex ΕΗ æquales ſunt rectangulis ſuper interceptas inter ordinatim applicatas factis, deſcriptoque ſimilibus. Q. E. D.

PROPOSITIO XI.

MInima *rectarum de centro Ellipſeos ad Sectionem ductarum dimidium eſt Axis minoris*; Maxima *vero dimidium eſt axis majoris*; Maximæque *propior major eſt remotiore. Exceſſus autem quadrati cujuſcunque ductæ ſupra quadratum* Minimæ *æqualis eſt rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & Sectionis centrum, ſimili vero contento ſub diametro tranſverſâ & exceſſu ejuſdem ſupra latus rectum.*

Sit ABΓ Ellipſis, cujus axis major AΓ, & minor BΔ; centrumque E. Dico quod *Maxima* è rectis per centrum E ad Sectionem ductis eſt ipſa EΓ, *Minima* vero eſt EB; quodque recta quæcunque ipſi EΓ propior major eſt remotiore ab eadem: quodque exceſſus quadrati cujuſcunque earum ſupra quadratum ex BE æqualis eſt rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & centrum E in axe AΓ ſumendam, quod vero ſimile ſit rectangulo contento ſub AΓ & exceſſu ejuſdem ſupra latus rectum ejus.

Ducantur enim EZ, EH, & demittantur normales ZI, HΠ; ac fiat ΓΘ dimidium lateris recti; erit igitur ΓΘ minor quam ΓE. Sit ΓK ipſi ΓE æqualis, & jungantur ΘE, EK, ac producantur HΠ, ZI ad O, Ξ: ducantur etiam MΛ, NΞ axi AΓ parallelæ. Erit igitur EΓ ad ΓK ut EI ad IΞ. Sed EΓ æqualis eſt ipſi ΓK, quare EI & ΞI æquantur. Quadratum autem ex IZ (per primam hujus) duplum eſt quadrilateri ΓΘIΛ: quadratum vero ex IE duplum eſt trianguli EIΞ: quadratum igitur ex ZE duplum eſt triangulorum EΓΘ, EΛΞ ſimul ſumptorum. Sed quadratum ex EB (per ſecundam hujus) duplum eſt trianguli EΓΘ; ac duplum trianguli EΛΞ rectangulum eſt ΛΞMN; quadratum igitur ex EZ excedit quadratum ex EB rectangulo ΛN. Verum ratio KΓ ad ΓΘ eadem eſt ac tranſverſi axis ad Latus rectum, eademque eſt ratio ΞI ad IΛ; unde per converſionem rationis, ΞI erit ad ΞΛ ut diameter tranſverſa ad exceſſum ejuſdem ſupra latus rectum. æquales autem ſunt ΞI, ΞN; rectangulum itaque ſub ΛΞ, ΞN ſimile eſt rectangulo contento ſub diametro tranſverſâ & exceſſu ejuſdem ſupra latus rectum. Sed EI ipſi ΛM æqualis eſt, quare differentia inter quadrata ex EZ & EB æqualis eſt rectangulo facto ſuper EI quod prædicto ſimile eſt. Eodem modo demonſtrabitur exceſſum quadrati ex BH ſupra quadratum ex EB æquari rectangulo ſuper EΠ formato ac jam deſcripto ſimili.



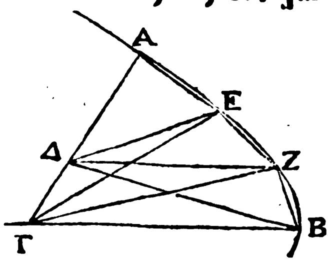
Pari argumento quadratum ex EΓ duplum eſt trianguli ΓEK, & quadratum ex BE duplum eſt trianguli ΓEΘ; differentia igitur quadratorum ex ΓE & EB duplum eſt trianguli ΘEK. Hujus vero trianguli duplum æquale eſt rectangulo facto ſuper ΓE ſimilique deſcripto. Jam ΓE major eſt quam EΠ, & EΠ major quam EI, adeoque EΓ major eſt quam EH, & EH major quam EZ, & EZ quam EB. *Maxima* igitur è rectis per punctum E ductis eſt EΓ, *Minima* vero EB; è cæteris vero, inter ipſas EΓ, EB ductis, quæ propius diſtat ab EΓ major eſt remotiore: & exceſſus quadrati cujuſcunque ductæ ſupra quadratum ex EB æqualis eſt rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim ad axem AΓ applicatam & centrum Sectionis, ſimili vero rectangulo prædicto. Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

SI sumatur punctum quodlibet in rectâ aliquâ Minimâ *ab Axe Sectionis ad Curvam ductâ, juxta jam demonstrata; à quo ducantur rectæ ad Sectionem ab uno ejus latere: earundem* Minima *erit pars illa hujus* Minimæ *quæ adjacet Sectioni, eidemque propior minor erit remotiore.*

Sit A B Sectio quævis Conica, cujus Axis B Γ; sitque Γ A Minima aliqua ad Sectionem ducta: ac sumatur in ea punctum Δ inter ipsa Γ, A situm. Dico rectam Δ A Minimam esse è rectis ad hanc Sectionis partem de puncto Δ ducendis.

Ducantur enim Δ E, Δ Z, Δ B, ac jungantur Z Γ, Γ E, ut & rectæ A E, E Z, Z B. Jam B Γ major est quam Γ A, quare angulus Γ A E major est angulo Γ E A. Angulus vero Γ E A major est angulo Δ E A, adeoque angulus E A Δ multo major erit angulo A E Δ, ac proinde E Δ major erit quam Δ A. Pariter cum Z Γ major est quam Γ E, erit angulus Z E Γ major angulo Γ Z E; unde angulus Δ E Z multo major erit quam E Z Δ: Z Δ igitur major erit quam Δ E. Ac eodem modo demonstrabitur Δ B majorem esse quam Δ Z. Est itaque A Δ Minima rectarum ad hanc partem Sectionis ductarum, eidemque propior minor est remotiore. Idem quoque constabit de rectis ad alteram Sectionis partem ductis. Q. E. D.

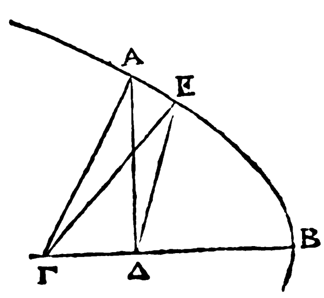


PROPOSITIO XIII.

SI à quovis puncto in Axe Parabolæ ducatur ad Sectionem recta Minima *quæ contineat cum Axe angulum; erit angulus ille acutus: Demissâque ab extremitate ejus normali ad Axem, abscindet illa Segmentum ejus æquale dimidio Lateris recti.*

Sit A B Parabola, cujus Axis B Γ; sitque Minima ad Parabolam ducta A Γ; Dico quod angulus ad Γ est acutus, quodque normalis ab A ad B Γ demissa abscindit ab ea rectam æqualem dimidio lateris recti.

Quoniam recta A Γ Minima est, B Γ major erit dimidio lateris recti. Nam si non major fuerit eâ, vel æqualis erit ei vel minor eâ. quod si æqualis fuerit dimidio lateris recti, erit ipsa B Γ (per 4am hujus) Minima; vel etiam si B Γ minor fuerit dimidio lateris recti, erit quoque (per 7am hujus) Minima: adeoque B Γ minor esset quam Γ A, quod est contra Hypothesin. quare B Γ non est minor dimidio lateris recti, neque etiam æqualis ei, ergo major est eâ. Sit itaque Γ Δ æqualis dimidio lateris recti. Dico Axi normalem è puncto Δ erectam transire per A. Nam si aliter fuerit, sit normalis illa recta Δ E; & Γ E (per octavam hujus) *Minima* erit è rectis de puncto Γ ad Sectionem ducendis: hoc autem absurdum est, nam A Γ minor est eâ. Igitur perpendicularis ad punctum Δ erecta transibit per A, ac Δ Γ dimidium erit lateris recti: erit quoque angulus A Γ B acutus, ob angulum B Δ A rectum Q. E. D.



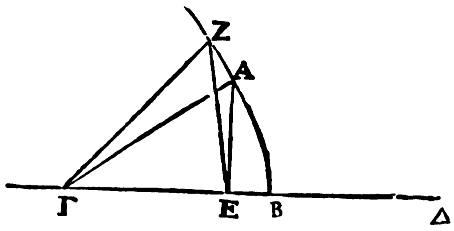
PROPOSITIO XIV.

SI ducatur à puncto in Axe Hyperbolæ recta Minima, *quæ contineat cum Axe angulos deinceps: erit angulus ille, qui respicit Verticem Sectionis, acutus. Ac si ab extremitate* Minimæ *ducatur normalis ad Axem, dividet illa interceptam inter centrum Sectionis &*

& punctum unde educitur Minima *in Segmenta, quorum quod adjacet centro erit ad alterum in ratione diametri transversæ ad Latus rectum.*

Sit AB Hyperbola, cujus Axis BΓ; sitque AΓ Minima de puncto Γ educta, ac sit centrum Δ. Dico angulum AΓB acutum esse, ac normalem de puncto A ad axem BΓ demissam dividere ipsam ΓΔ in ratione axis transversi ad Latus rectum.

Est enim recta BΓ (ut constat ex quinto hujus) major dimidio lateris recti, & recta BΔ dimidium est lateris transversi; ratio itaque ΔB ad BΓ, minor est ratione lateris transversi ad latus rectum. Dividatur ΔΓ in puncto E, ita ut segmenta sint in ratione lateris transversi ad latus rectum: Dico normalem super ipsam ΔΓ ad punctum E erectam transire per punctum A. Nam si hoc non ita sit, illi normalis sit EZ, ac jungatur ΓZ. Erit itaque ΓZ (per nonam hujus) Minima rectarum quæ duci possint per punctum Γ. Hoc autem absurdum est: posuimus enim AΓ Minimam esse. Transit igitur normalis è puncto E excitata per punctum Sectionis A; & angulus AΓB acutus est: ac normalis de puncto A demissa dividit rectam ΓΔ, ita ut segmentum ΔE sit ad EΓ in ratione lateris transversi ad latus rectum Q. E. D.



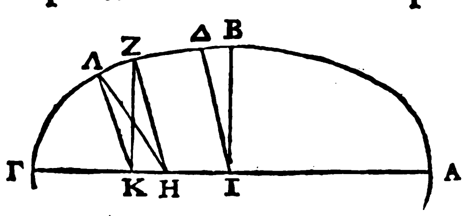
PROPOSITIO XV.

E Ductâ de puncto dato in Axe majore Ellipseos rectâ aliquâ Minima, *si hæc* Minima *transeat per Centrum Sectionis, normalis erit super Axem majorem. Si vero transeat per aliud punctum, continebit cum Axe majore angulum obtusum versus centrum: & normalis ab extremitate* Minimæ *cadet inter punctum unde educta est & Sectionis Verticem: ita ut intercepta inter normalem & centrum sit ad interceptam inter eandem normalem & punctum illud, in ratione diametri transversæ ad latus rectum.*

Sit ABΓ Ellipsis, cujus Axis major AΓ & centrum I: educatur primum è puncto I ad Sectionem recta Minima IB. Dico rectam IB normalem esse super ipsam AΓ. Nam si non ita sit, sit IΔ normalis super AΓ; adeoque (per 11^{mam} hujus) IΔ foret minima recta de puncto I ducenda, contra Hypothesin; posuimus enim IB Minimam esse. Recta igitur IB normalis est super AΓ.

Porro si capiatur punctum aliud in Axe ut H, ac sit HZ Minima ab eodem H ducta: Dico angulum ZHI obtusum esse; ac si normalis de puncto Z ad AΓ demittatur, interceptam inter ordinatim applicatam & punctum I esse ad interceptam inter eandem ordinatam & punctum H, in ratione lateris transversi ad latus rectum.

Quoniam enim ZH Minima est de puncto H ducta, erit HΓ (per septimam hujus) major dimidio lateris recti; ac recta ΓI dimidium est lateris transversi: quare ratio IΓ ad HΓ minor erit ratione lateris transversi ad latus rectum. Dividatur itaque HΓ in puncto K, ita ut IK sit ad KH ut latus transversum ad latus rectum: Dico normalem è puncto K occurrere Sectioni in puncto Z. Nam si hoc non ita sit, sit ea recta KΛ, ac proinde HΛ (per decimam hujus) minima erit è rectis per punctum H ducendis. Est autem HZ recta illa Minima: quod absurdum. Occurrit igitur normalis è puncto K Sectioni ad punctum Z, & angulus IHZ obtusus est; ac demissâ de puncto Z super Axem AΓ normali ZK, IK erit ad KH sicut latus transversum ad latus rectum. Q. E. D.

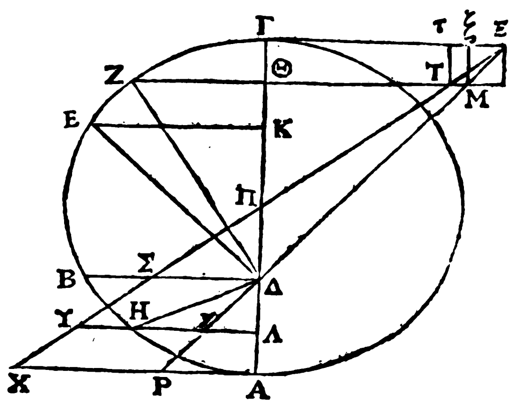


PROPOSITIO XVI.

Si capiatur in Axe minore Ellipseos punctum, quod à Vertice ejusdem Axis distet intervallo dimidio Lateris recti ejus æquali; erit omnium rectarum ab eodem puncto ad Sectionem ductarum Maxima, *segmentum Axis minoris æquale dimidio lateris recti:* Minima *vero residuum erit ejusdem Axis. E cæteris vero, quæ propior est* Maximæ *major erit remotiore; & excessus quadrati ejus supra quadrata quarumcunque aliarum ductarum, æquales erunt rectangulis factis super interceptas inter ordinatim applicatas & Verticem Axis minoris, similibus vero contentis sub Axe minore & excessu lateris recti ejus supra Axem illum.*

Sit ΑΒΓ Ellipsis, cujus Axis minor ΑΓ, centrumque Π: & in Axe capiatur punctum Δ, ita ut ΓΔ æqualis sit dimidio lateris recti. Dico quod ΔΓ major est quâvis aliâ rectâ ad Sectionem de puncto Δ ductâ; quodque ΔΑ Minima est earundem: quodque propiores ipsi ΔΓ majores sunt remotioribus: quodque quadratum ex ΓΔ excedit quadratum ex alia quacunque, rectangulo quod fit super interceptam inter ordinatim applicatam ejus & punctum Γ, simili vero rectangulo nuper descripto.

Ducantur enim ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ, ΔΗ: sitque ΔΒ normalis ad ΑΓ; ac fiat ΓΞ dimidium lateris recti: & jungantur & producantur ipsæ ΞΠ, ΞΔ: demittantur etiam normales ΖΘ, ΕΚ, ΗΛ, quibus parallela sit recta ΑΧ. *Occurrat producta* ΖΘ *ipsis* ΞΠ, ΞΔ *in punctis* Τ, Μ, ac Axi ΑΓ parallelæ ducantur Μξ, Ττ. Quoniam autem ΓΔ æquale est ipsi ΓΞ, quadratum ex ΓΔ duplum est trianguli ΓΔΞ: & quadratum ex ΘΔ duplum est trianguli ΘΔΜ; ac quadratum ex ΘΖ (per primam hujus) duplum est Trapezii ΓΞΘΤ: quadratum igitur ex ΓΔ excedit quadratum ex ΔΖ duplo trianguli ΤΜΞ: duplum vero hujus trianguli rectangulum est ΤΜτξ. Jam ΓΠ est ad ΠΔ ut diameter transversa ad excessum lateris recti supra eandem (dimidium enim diametri transversæ est ad dimidium lateris recti sicut diameter transversa ad latus rectum) ac in eadem est ratione Ττ ad τξ sive τΤ ad ΤΜ: quare τΤ est ad ΤΜ ut diameter transversa ad excessum lateris recti supra transversam. Sed Ττ æqualis est ipsi ΓΘ; differunt igitur quadrata ex ΓΔ, ΖΔ spatio æquali rectangulo facto super ΓΘ, & simili rectangulo descripto. Pari argumento probabitur excessum quadrati ex ΓΔ supra quadratum ex ΔΕ æquari rectangulo facto super ΓΚ, quod simile sit descripto. Quinetiam quadratum ex ΒΔ (per tertiam hujus) duplum est quadrilateri ΑΔΣΧ, & quadratum ex ΔΓ duplum est trianguli ΔΓΞ; cumque triangulum ΑΠΧ æquale est triangulo ΓΠΞ, erit differentia quadratorum ex ΓΔ, ΒΔ, dupla trianguli ΔΣΞ. duplum autem hujus trianguli æquale est rectangulo facto super ΓΔ, similique rectangulo jam descripto. Est igitur ΓΔ major quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΔΕ, & ΔΕ quam ΔΒ.



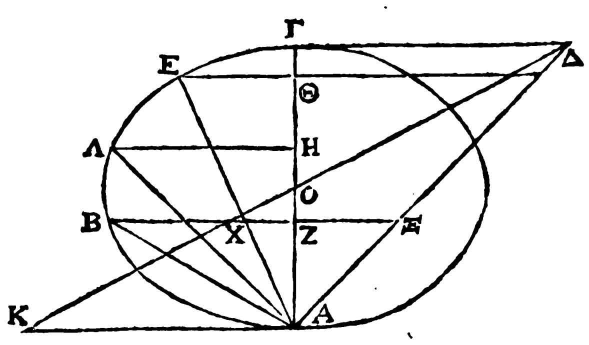
Insuper quadratum ex ΛΗ (per eandem tertiam) duplum est quadrilateri ΑΛΥΧ, & quadratum ex ΛΔ duplum est trianguli ΔγΛ; quare quadratum ex ΔΗ æquale est duplo spatio ΑΛΥΧ, una cum duplo triangulo ΔγΛ: Quadratum autem ex ΓΔ duplum est trianguli ΓΞΔ, & triangulum ΓΣΠ æquale est triangulo ΑΧΠ. Differunt igitur quadrata ex, ΓΔ, ΔΗ duplo trianguli ΞΥγ, cujus trianguli duplum æquale est rectangulo facto super ΓΛ similique prædicto. Denique quadratum ex ΔΑ duplum est trianguli ΔΑΡ, & triangulum ΓΠΞ æquale est triangulo ΠΧΑ; differunt igitur quadrata ex ΔΓ, ΔΑ, duplo trianguli ΞΧΡ; hujus autem trianguli duplum

duplum æquale eſt rectangulo ſuper ΑΓ facto, ſimilique deſcripto. Quapropter ΔΓ Maxima eſt è rectis ad Sectionem de puncto Δ ducendis; ΑΔ vero earundem Minima eſt. E reliquis autem quæ propior eſt ipſi ΓΔ major eſt remotiore, & exceſſus quadrati ipſius ΓΔ ſupra quadratum alterius cujuſvis ductæ, æqualis eſt rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & Verticem Γ, quod ſimile ſit deſcripto. Q. E. D.

PROPOSITIO XVII.

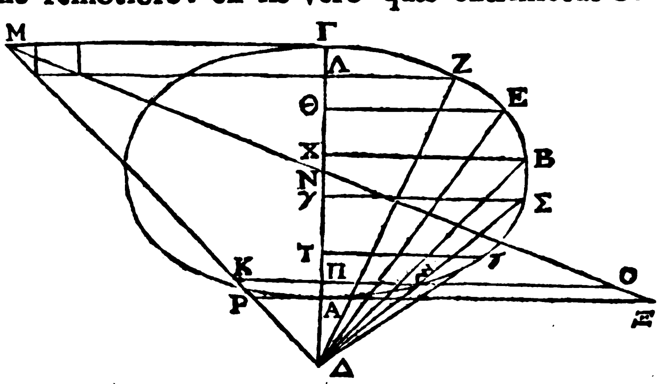
SIT jam ΑΓ Axis minor Ellipſeos, eique æquale ſit dimidium lateris recti, ac ſit centrum Ο. Dico quoque quod ΑΓ *Maxima* eſt è rectis de puncto Α ad Sectionem ductis; quodque eidem propior major eſt remotiore: quodque exceſſus quadrati ejus ſupra quadratum cujuſvis alterius ductæ, æqualis eſt rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & Verticem Γ, quod ſimile ſit rectangulo in præcedente Propoſitione deſcripto

Ordinetur hæc propoſitio ad modum præcedentis; eodemque omnino modo probabitur quadratum ex ΑΓ majus eſſe quadrato ex ΑΕ rectangulo facto ſuper ΓΘ deſcriptoque ſimili: pariterque quadratum ex ΑΓ majus eſſe quadrato ex ΑΛ rectangulo facto ſuper ΓΗ, ſimilique rectangulo prædicto. Quinetiam quadratum ex ΒΖ (per tertiam hujus) duplum eſt plani ΑΖΧΚ, & quadratum ex ΖΑ duplum eſt trianguli ΑΖΞ, ut quadratum ex ΑΓ duplum eſt trianguli ΑΓΔ, ob ΑΓ ipſi ΓΔ æqualem. Triangulum vero ΓΟΔ æquale eſt triangulo ΚΟΑ: differentia igitur quadratorum ex ΑΓ & ΑΒ æqualis eſt duplo triangulo ΔΧΞ; duplum autem hujus trianguli æquale eſt rectangulo facto ſuper ΓΖ ſimilique deſcripto: quod quidem eodem omnino modo demonſtratur ac præcedentia. Recta igitur ΑΓ major eſt quam ΑΕ, & ΑΕ quam ΑΛ, & ΑΛ quam ΑΒ. Proinde ΑΓ maxima eſt inter eductas de puncto Α: quæque eidem propior eſt major eſt remotiore: & exceſſus quadrati ipſius ΑΓ ſupra quadratum alicujus alterius ductæ, æqualis eſt rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & Verticem Γ, quod ſimile ſit rectangulo *contento ſub Axe minori & exceſſu quo latus rectum ſuperat eundem Axem.* Q. E. D.



PROPOSITIO XVIII.

SI vero fuerit ΑΓ Axis minor Ellipſeos, cujus centrum Ν: ac fiat ΓΔ æqualis dimidio lateris recti. Dico ΓΔ *Maximam* eſſe è rectis de puncto Δ ad Sectionem ducendis, ΔΑ vero earundem *Minimam*: propiorem autem ipſi ΓΔ, è rectis Sectionem ſecantibus, majorem eſſe remotiore: ex iis vero quæ extrinſecus Sectioni occurrunt, propiorem ipſi ΑΔ minorem eſſe remotiore: & exceſſum quadrati ipſius ΓΔ ſupra quadratum cujuſvis alterius ductæ, æqualem eſſe rectangulo facto ſuper interceptam inter punctum Γ & ordinatim applicatam, quod ſimile ſit prædicto, nempe rectangulo ſub Axe minore & exceſſu lateris ejus recti ſupra eundem Axem.

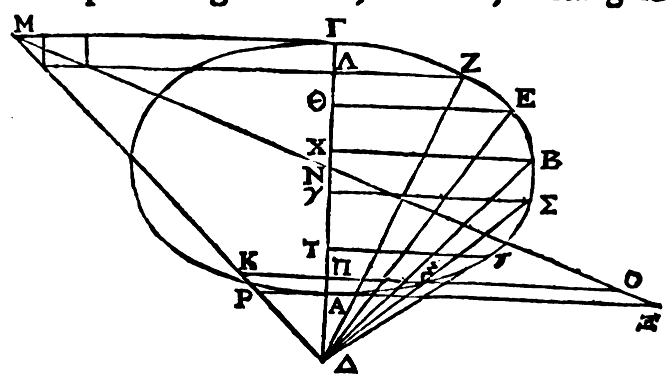


Ducantur rectæ ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ, cæteræque ut in figura præcedente: ac pari argumento patebit quadratum ex ΓΔ, majus eſſe quadrato ex ΖΔ rectangulo facto ſuper ΓΛ ſimilique prædicto; & quadratum ex ΓΔ majus eſſe quadrato ex ΕΔ, rectan-

rectangulo priori simili, facto super interceptam ΓΘ; quadratumque ex ΓΔ majus esse quadrato ex ΒΔ rectangulo ejusdem speciei super ipsam ΓΧ formato.

Quadratum autem ex ΑΔ, duplum est trianguli ΑΔΡ, ob ΓΜ, ΓΔ æquales; quadratum etiam ex ΓΔ duplum est trianguli ΔΓΜ: cumque triangulum ΜΓΝ æquale est triangulo ΑΝΞ, erit igitur excessus quadrati ex ΓΔ supra quadratum ex ΑΔ æqualis duplo triangulo ΞΜΡ, cujus trianguli duplum æquale est rectangulo facto super ΑΓ ejusdem speciei cum prædicto. Quare ΔΓ major est quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΔΕ, & ΔΕ quam ΔΒ, & ΔΒ quam ΔΑ.

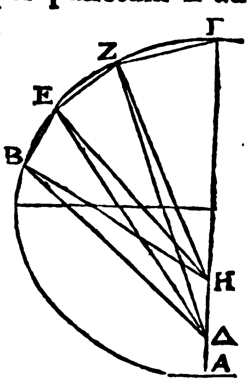
Quinetiam quadratum ex Πξ (per tertiam hujus) duplum est quadrilateri ΞΟΠΑ, & quadratum ex ΔΠ duplum est trianguli ΔΠΚ; quare quadratum ex ξΔ duplum est utriusque, Trapezii ΞΟΠΑ & trianguli ΠΔΚ simul sumpti. Quadratum autem ex ΓΔ duplum est trianguli ΓΜΔ, & triangulum ΓΜΝ triangulo ΑΝΞ æquale est. quadratum igitur ex ξΔ æquale est duplo triangulo ΟΜΚ, hoc est, rectangulo facto super ΓΠ, ejusdem speciei cum jam descriptis in præcedentibus duabus propositionibus. Pari argumento demonstratur quadratum ex ΓΔ, excedere quadratum ex Δτ, rectangulo simili super ΓΤ facto. Nec aliter constabit quadratum ex ΓΔ majus esse quadrato ex ΔΣ, rectangulo ejusdem speciei super Γγ formato. Est autem excessus quadrati ex ΔΓ supra quadratum ex ΔΑ æqualis rectangulo descripto simili, super ΓΑ facto; quare ΔΑ minor est quam Δξ, & Δξ quam Δτ, & Δτ quam ΔΣ. Est igitur ΔΓ Maxima è ductis per punctum Δ, earundem vero minima est ΔΑ; & inter eas quæ Sectionem intersecant, quæ propior est ipsi ΔΓ major est remotiore: ex iis vero quæ Sectioni extrinsecus occurrunt, quæ ipsi ΔΑ propiores sunt minores sunt remotioribus. Quadratum etiam ex ΓΔ excedit quadratum cujusvis alterius ductæ, rectangulo facto super interceptam inter punctum Γ & ordinatim applicatam, quod simile sit descripto. Q. E. D.



PROPOSITIO XIX.

SI capiatur in Axe minore Ellipseos punctum, quod à Vertice Sectionis majori intervallo distet quam dimidio Lateris recti: erit illa Maxima *rectarum de puncto illo ad Sectionem ducendarum, quæ ad Verticem Sectionis ducitur. Reliquarum vero quæ huic propior est major erit remotiore.*

Sit ΑΒΓ Ellipsis, cujus Axis minor sit ΑΓ: & in eo capiatur punctum Δ, ita ut ΓΔ major sit semilatere recto. Dico ΓΔ maximam esse è rectis per punctum Δ ad Sectionem ductis, eidemque propiorem majorem esse remotiore. Sit autem ΓΗ dimidium lateris recti, & ducantur è puncto Δ rectæ ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ, ac jungantur ΗΖ, ΗΕ, ΗΒ, atque etiam rectæ ΓΖ, ΖΕ, ΕΒ. Recta igitur ΓΗ (per tres proximas propositiones) major est quam ΖΗ; adeoque angulus ΓΖΗ major erit angulo ΖΓΗ: unde angulus ΓΖΔ multo major erit angulo ΖΓΔ. Recta itaque ΓΔ major est quam ΖΔ. Similiter cum ΗΖ major est quam ΗΕ, angulus ΖΕΗ major erit angulo ΕΖΗ, ac angulus ΖΕΔ multo major erit angulo ΕΖΔ: quocirca ΔΖ major est quam ΔΕ. Eodemque argumento probabitur rectam ΔΕ majorem esse quam ΔΒ. ΔΓ itaque maxima est rectarum per punctum Δ ad Sectionem ductarum, eidemque propior major est remotiore. Q. E. D.

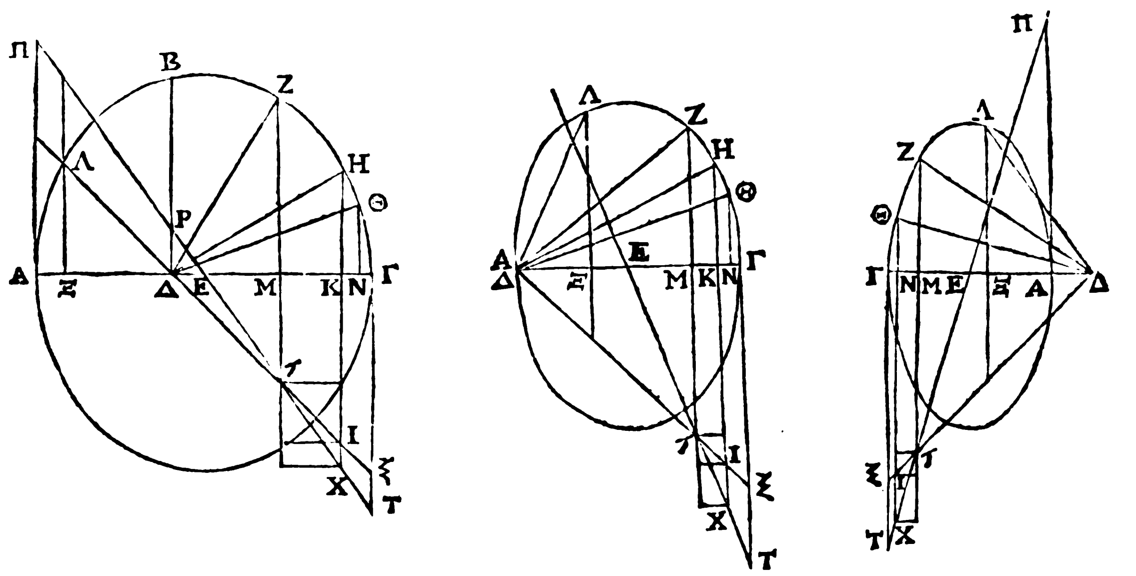


PROPO-

PROPOSITIO XX.

Si sumatur punctum in Axe minore Ellipseos, cujus distantia à Vertice Sectionis minor fuerit dimidio lateris recti, major vero Semiaxe minore; ac dividatur intercepta inter Verticem & centrum Sectionis, ita ut pars illa quæ est inter punctum divisionis & centrum sit ad distantiam ejusdem puncti à puncto prius sumpto, in ratione diametri transversæ ad latus rectum; & è puncto sic invento erigatur normalis ad Axem occurrens Sectioni, ac jungatur punctum prius sumptum cum puncto hujus occursus: erit juncta hæc rectarum omnium de puncto illo ducendarum Maxima; *è reliquis vero quæ eidem propior est major erit remotiore; & quadratum ejus superabit quadratum cujuscumque alterius ductæ, rectangulo facto super interceptam inter punctum inventum & ordinatim applicatam* ab extremitate ductæ demissam, *quod simile sit contento sub diametro transversâ & differentiâ ejusdem & Lateris ejus recti.*

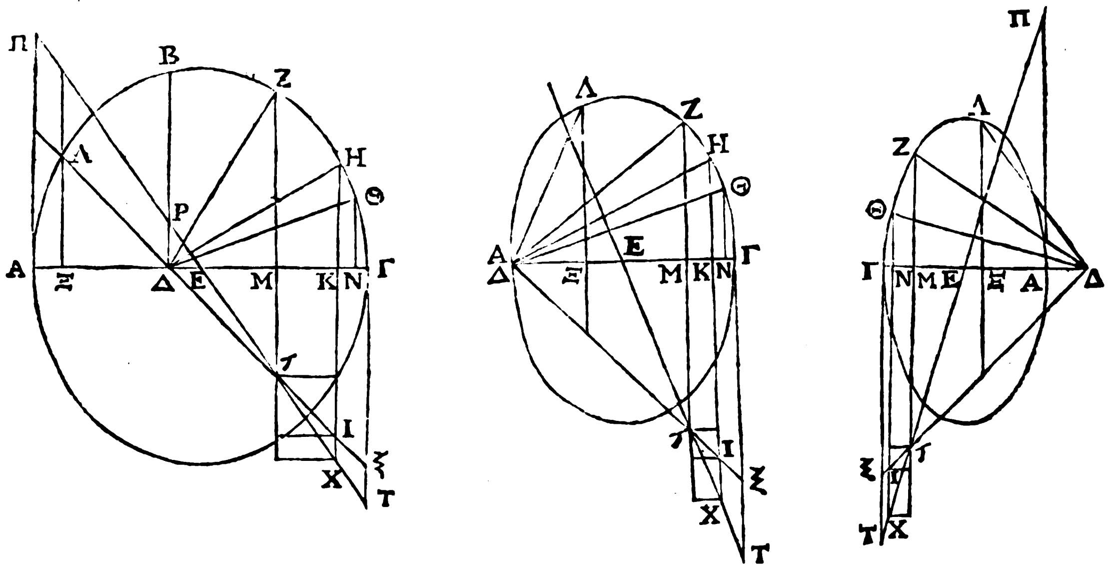
Sit ΑΒΓ Ellipsis, ejusque Axis minor ΑΓ, & in eo capiatur punctum Δ, ita ut ΓΔ major sit dimidio ipsius ΑΓ sive diametri transversæ, minor autem dimidio lateris recti; & sit centrum Ε, & dividatur ΕΓ in puncto Μ, ita ut ΕΜ sit ad ΜΔ ut diameter transversa ΑΓ ad latus ejus rectum; (hoc autem fieri potest, quia dimidium lateris recti majus est quam ΔΓ) & erigatur è puncto Μ normalis ad ΑΓ ut ΖΜ, & jungatur ΖΔ. Dico quod recta ΖΔ Maxima est rectarum per punctum Δ ad Sectionem ductarum; quodque eidem ab utrâque parte propior major est remotiore; quodque excessus quadrati ipsius ΖΔ supra quadratum alterius cujusvis ductæ æqualis est rectangulo facto super interceptam inter punctum Μ & ordinatim applicatam, quod simile sit rectangulo in præcedentibus descripto.



Ducantur rectæ quælibet aliæ ΔΘ, ΔΗ, ΔΖ, ΔΛ, ac sit ΔΒ axi perpendicularis; & fiat ΓΤ æqualis dimidio lateris recti, & demittantur normales ΘΝ, ΗΚ, ΛΞ: jungatur etiam ΕΤ producaturque, & agantur ipsi ΑΓ parallelæ, ut fecimus in præcedentibus. Quoniam vero ΜΕ est ad ΔΜ ut latus transversum ad latus rectum, & in eadem est ratione ΕΓ ad ΓΤ; ut autem ΕΓ ad ΓΤ ita ΜΕ ad Μτ; recta igitur ΜΔ æqualis est ipsi Μτ, & quadratum ex ΜΔ duplum est trianguli ΜΔτ; quadratum autem ex ΜΖ (per primam hujus) æquale est duplo Trapezio ΓΤτΜ: quadratum igitur ex ΔΖ æquale est duplo trianguli ΜΔτ una cum duplo plani

ΓΤτΜ. Jam vero quadratum ex ΗΚ duplum eſt plani ΚΓΤΧ, & quadratum ex ΔΚ duplum eſt trianguli ΚΔΙ; quadratum igitur ex ΔΗ duplum eſt trianguli ΚΔΙ una cum duplo quadrilateri ΚΓΤΧ: adeoque differentia quadratorum ex ΔΖ & ΔΗ æqualis eſt duplo trianguli ΧΙτ. Duplum autem hujus trianguli æquale eſt rectangulo facto ſuper ΚΜ, quod ſimile ſit deſcripto. Hoc autem conſtabit eodem modo quo demonſtravimus decimam ſextam hujus. Pariter probabitur quadratum ex ΖΔ excedere quadratum ex ΔΘ rectangulo facto ſuper ΜΝ, ejuſdem ſpeciei cum prædicto. Eodemque argumento, quadratum ex ΓΔ duplum eſt trianguli ΔΓξ; unde differentia inter quadrata ex ΔΖ & ΔΓ duplum erit trianguli ξΤτ: quod quidem æquale eſt rectangulo facto ſuper ΓΜ, ſpeciei prædictæ. Recta igitur ΔΖ major eſt quam ΔΗ, & ΔΗ quam ΔΘ, & ΔΘ quam ΔΓ.

Præterea quadratum ex ΔΒ (per tertiam hujus) duplum eſt quadrilateri ΠΛΔΡ; quadratum autem ex ΖΔ duplum eſt triangulorum ΕΓΤ, ΔΕτ; & triangulum ΕΓΤ



æquale eſt triangulo ΠΕΛ: igitur differentia inter quadrata ex ΔΖ & ΔΒ duplum eſt trianguli ΡΔτ, quod quidem æquale eſt rectangulo facto ſuper ΔΜ ſpeciei jam deſcriptæ. Hæc autem eodem modo demonſtrantur ac propoſitio 16^ma^. Parique armento differentia quadratorum ex ΔΖ & ΔΛ æqualis eſt rectangulo ſimili ſuper ΜΞ facto.

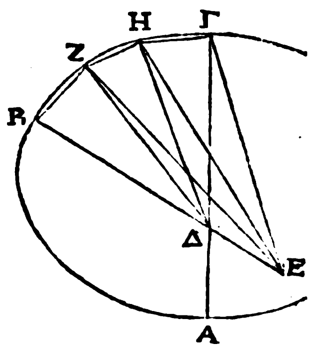
ΔΖ igitur Maxima eſt rectarum per punctum Δ ad Sectionem ducendarum; è quibus etiam quæ eidem propior eſt major erit remotiore, & exceſſus quadrati ipſius ΔΖ ſupra quadratum alterius cujuſvis ductæ æqualis eſt rectangulo ſpeciei deſcriptæ, facto ſuper interceptam inter punctum Μ & ordinatim applicatam. Hæc autem omnia ita ſe habent, ſive Axis minor æqualis fuerit dimidio lateris recti, ſive major, ſive minor eo. Nam ſive major fuerit eo, ac ducantur rectæ à puncto Δ ad modum figuræ primæ; vel à puncto Α, ut in figura ſecunda; vel etiam à puncto exteriore, ut Δ in figura tertia; Maxima erit ea quam deſcripſimus: coincidente demonſtrationis modo, in figuris ſecunda ac tertia, cum ea quam in prima jam expoſuimus. Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

Si capiatur in aliquâ Maximâ, *in Ellipſi juxta propoſitionem præcedentem ductâ ac ultra Axem minorem productâ, punctum aliquod: erit quoque* Maxima *omnium de puncto illo ad eandem Sectionis partem ducendarum, recta ea cujus* Maxima *eſt pars; & ab utroque ejus latere quæ eidem propior eſt major erit remotiore.*

Sit ΑΒΓ Ellipſis, cujus Axis ΑΓ; ſitque ΒΔ recta Maxima de puncto Δ ad Sectionem ducta, modo in Prop. præcedente deſcripto. In ΒΔ capiatur punctum aliquod

quod E, ita ut EB major sit quam BΔ. Dico EB Maximam esse è rectis per punctum E ad Sectionem ductis, eidemque utrinque propiorem majorem esse remotiore.



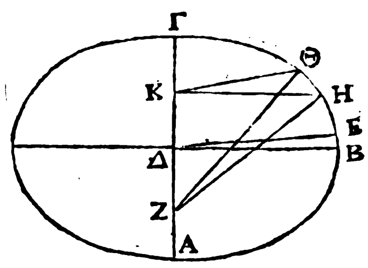
Ducantur rectæ EZ, EH, EΓ, ac jungantur ΔZ, ΔH, ΔΓ, ut & ipsæ ΓH, HZ, ZB. Quoniam vero ΔB major est quam ΔZ, angulus BZΔ major erit angulo ZBΔ, & multo major erit angulus BZE angulo ZBE: quocirca BE major est quam EZ. Pariter cum ΔZ major est quam ΔH, angulus ΔHZ major erit angulo ΔZH, adeoque angulus ZHE multo major erit quam EZH; ac proinde recta ZE major erit quam EH. Eodem modo patebit EH majorem esse quam EΓ. Recta igitur EB maxima est omnium de puncto E ad eandem Sectionis partem ductarum, quæque eidem EB propior est major erit remotiore. Idem autem eodem modo demonstrabitur si Maxima ducta fuerit per punctum A, vel per aliud quodvis punctum in Axe AΓ producto capiendum.

PROPOSITIO XXII.

Si ducatur à puncto in Axe minore Ellipseos sumpto, recta quæ contineat cum eodem Axe angulum; ac fuerit recta hæc Maxima *quæ de puncto illo ad Sectionem duci possit: erit* Maxima *illa super Axem minorem normaliter erecta, si fuerit punctum illud Sectionis Centrum. Si vero non fuerit centrum, erit angulus quem cum Axe continet acutus versus centrum: ac si ab extremitate ejus demittatur normalis ad Axem, erit intercepta inter normalem illam & centrum Sectionis ad interceptam inter normalem & punctum in Axe sumptum, in ratione diametri transversæ ad latus rectum.*

Sit ABΓ Ellipsis cujus Axis minor AΓ; transeat autem imprimis recta Maxima per centrum ut BΔ. Dico BΔ esse ad angulos rectos super AΓ. Nam si non ita sit, sit normalis illa ΔE. erit igitur ΔE (per 11^{mam} hujus) Maxima ductarum de puncto Δ: quod est contra hypothesin; posuimus enim ΔB maximam esse. Quare recta ΔB est ad angulos rectos super AΓ.

Educatur jam recta quævis maxima ZH de puncto alio Z. Dico angulum ΓZH acutum esse; demissâque normali de puncto H ad Axem AΓ, erit intercepta inter ordinatim applicatam & centrum Δ, ad interceptam inter eandem ordinatim applicatam & punctum Z, in ratione diametri transversæ ad latus rectum.



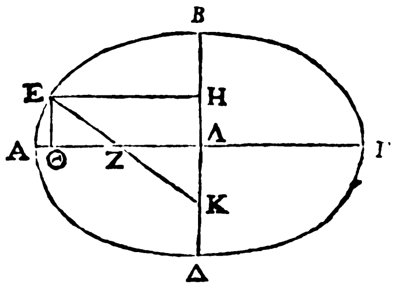
Erit enim recta ZΓ vel major dimidio lateris recti, vel minor eo, vel eidem æqualis. Non autem æqualis est ei, tunc enim (per 16^{am}.17^{am}.18^{am}. hujus) foret maxima: neque major est eo, quia sic etiam (per 19^{am} hujus) foret Maxima: Est igitur ZΓ minor dimidio lateris recti. Quare si fiat intercepta ad rectam compositam ex intercepta & ZΔ simul sumptis, sicut diameter transversa ad Latus rectum, erit intercepta illa minor quam ΓΔ, quia ΔZ minor est excessu dimidii lateris recti supra dimidium lateris transversi; adeoque ratio ejus ad ΓΔ minor erit ratione excessûs lateris recti supra diametrum transversam ad diametrum transversam: est igitur in ea ratione ad minorem quam ΓΔ. Sit ea ΔK, ut sit KΔ ad ZK in ratione diametri transversæ ad latus rectum. Dico normalem super Axem AΓ ad punctum K erectam transire per punctum H. Nam si non eo transeat, cadat ad modum rectæ KΘ: & erit ΘZ (per demonstrata in 20ma hujus) Maxima. Hoc autem fieri nequit, *quia ex Hypothesi* ZH *est illa Maxima.* Transit igitur normalis de puncto H demissa per punctum K, ita ut ΔK sit ad KZ ut diameter transversa ad latus rectum. *Manifestum autem est* ΓZH *angulum esse acutum, ob* ZKH *rectum.* Q. E. D.

PROPO-

PROPOSITIO XXIII.

S*I educatur de puncto quovis in Axe minore Ellipseos* Maxima: *erit pars ejus intercepta inter Sectionem & Axem majorem,* Minima *rectarum quæ duci possint è puncto illo quo intersecat Axem majorem.*

Sit ΑΒΓΔ Ellipsis, cujus Axis major ΑΓ, minor vero ΒΔ; sitque ΚΕ Maxima de puncto Κ ducta, *occurrens Axi majori in puncto* Ζ. Dico ΖΕ Minimam esse rectarum per punctum Ζ ad Sectionem ductarum.

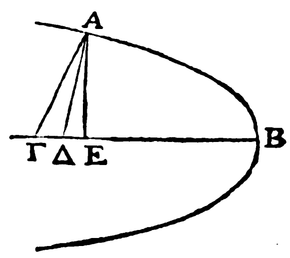


Ducatur enim per Ε recta ΕΗ ipsi ΔΒ normalis, ipsi vero ΑΓ recta ΕΘ. Jam Axis ΔΒ est ad latus rectum ejusdem, ut latus rectum Axis ΑΓ est (per 15^{am} primi) ad ipsam ΑΓ; & ΒΔ est ad latus ejus rectum (per 22^{am} hujus) ut ΛΗ ad ΗΚ: latus igitur rectum Axis majoris ΑΓ est ad Axem ΑΓ ut ΛΗ ad ΗΚ. Sed ΛΗ est ad ΗΚ ut ΘΖ ad ΘΛ, adeoque ΘΛ est ad ΘΖ ut ΑΓ ad latus ejus rectum: ac ΘΕ normalis est super axem ΑΓ. Juncta igitur ΕΖ (per 15^{am} hujus) minima est quæ duci possit ad Sectionem de puncto Ζ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

I*N omni Sectione Conica, duci non potest ab Axe ad idem in Sectione punctum, nisi una sola* Minima.

Sit imprimis ΑΒ Parabola, cujus Axis ΒΓ; ac capiatur in Sectione punctum quodlibet Α. Dico quod non duci potest ab Axe ad punctum Α nisi una recta Minima.

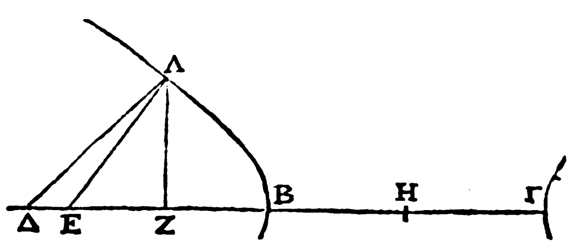


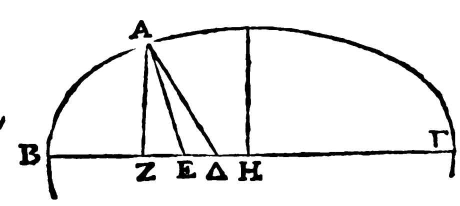
Nam si fieri potest ducantur ΑΓ, ΑΔ; ac demittatur ab Α ad Axem ΒΓ normalis, ut ΑΕ: erit igitur ΕΔ (per 13^{am} hujus) dimidium lateris recti; atque etiam ΕΓ æqualis erit eidem semilateri recto. Quod absurdum. Igitur non duci possunt ab Axe ad punctum Α plures quam una Minima. Q. E. D.

PROPOSITIO XXV.

SI vero Sectio ΑΒ fuerit Hyperbola vel Ellipsis Axe ΓΒ ac centro Η descripta; ac capiatur in ea punctum aliquod ut Α. Dico quod non duci possint ab Axe ad punctum Α plures quam una sola *Minima.*

Nam si fieri potest ducantur plures quam una, ut ΑΕ, ΑΔ; & ab Α demittatur





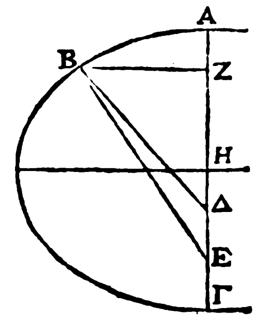
ΑΖ normalis in Axem ΒΓ. Erit igitur ΖΗ ad ΖΕ (per demonstrata in 14ma & 15ma hujus) ut Axis transversus ad latus rectum. Oporteret autem ΗΖ esse ad ΖΔ in eadem ratione diametri transversæ ad latus rectum. Hoc autem impossibile est; ac proinde non duci possunt duæ rectæ Minimæ ab Axe ad idem punctum Α. Quod erat demonstrandum.

* PROPO-

PROPOSITIO XXVI.

SI capiatur punctum quodvis in Ellipsi quod non fuerit in Vertice Axis minoris: non duci poterunt ab eodem ad Axem minorem plures quam una recta Maxima.

Sit ABΓ Ellipsis cujus Axis minor AΓ, sitque punctum in Sectione B. Dico quod de puncto B non duci possit ad Axem AΓ nisi una sola Maxima.



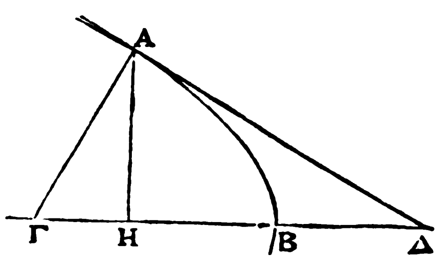
Nam si fieri potest, ducantur ad eam BΔ, BE, & demittatur normalis BZ, ac sit centrum Sectionis H. Jam si BE aliqua fuerit è maximis ad Axem ducendis, erit (per 22^{am} hujus.) ZH ad ZE ut diameter transversa ad latus rectum. Sed etiam oporteret ZH esse ad ZΔ in eadem ratione diametri transversæ ad latus rectum: quod absurdum. Non igitur duci possunt plures quam una recta Maxima de puncto B ad Axem minorem. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

SI ducta ab extremitate Minimæ *alicujus, in præcedentibus descriptæ, Sectionis Tangens fuerit; super eandem* Minimam *ad angulos rectos insistet.*

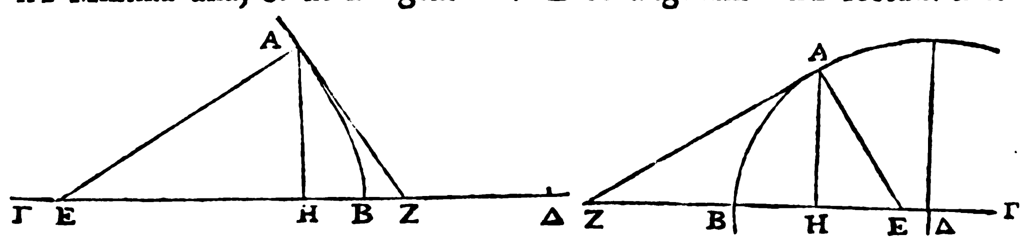
Sit imprimis Sectio AB Parabola, cujus Axis BΓ. Dico rectam ab extremitate cujusvis Minimæ ductam, Sectionemque tangentem, normalem esse super Minimam illam. Si fuerit minima illa pars Axis BΓ, res manifesta est. Si vero fuerit Minima alia ut AΓ, ducatur à puncto A recta AΔ quæ tangat Sectionem AB. Dico angulum ΔAΓ rectum esse.

Demittatur normalis AH, ac (per 13^{am} hujus) erit HΓ æqualis dimidio lateris recti; ac si AΔ tangat Parabolam, normali AH de puncto A demissâ, erit (per 35^{am} primi) BΔ ipsi BH æqualis, adeoque ΓH erit ad latus rectum ut BH ad HΔ: quare rectangulum sub ΓH, HΔ æquale erit facto sub BH & latere recto. Sed factum sub BH & latere recto (per 11^{mam} primi) æquale est quadrato ex AH: quadratum itaque ex AH æquale est rectangulo sub ΓH, HΔ. Angulus autem AHΔ rectus est: rectus est igitur (*per Lemma Pappi* I.) angulus ΔAΓ.



PROPOSITIO XXVIII.

JAM si fuerit Sectio AB Hyperbola vel Ellipsis cujus Axis BΓ. Dico rectam ab extremitate Minimæ alicujus ductam, ita ut tangat Sectionem, eidem Minimæ normaliter insistere. Etenim si Minima illa fuerit pars Axis BΓ, manifestum est rectam Sectionem tangentem in puncto B eidem Minimæ ad angulos rectos esse. Sit autem AE Minima alia, & sit Tangens AZ. Dico angulum ZAE rectum esse.



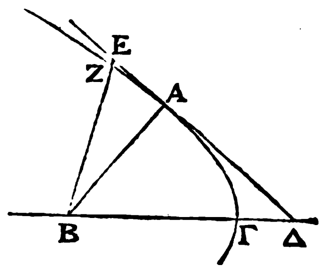
Demittatur normalis AH & sit centrum Δ: ac si fuerit AE minima & AH ordinatim applicata, erit ΔH ad HE (per 14^{am} & 15^{am} hujus) ut diameter transversa ad latus rectum. Est autem ΔH ad HE ut rectangulum sub ΔH, HZ ad rectangulum sub HZ, HE; adeoque erit rectangulum sub ΔH, HZ ad rectangulum sub HZ, HE ut diameter transversa ad latus rectum. Sed diameter transversa est ad latus rectum (per 37^{am} primi) sicut rectangulum sub ΔH, HZ ad quadratum ex AH: igitur

F rectan-

rectangulum sub HZ, HE æquale est quadrato ex AH. Angulus autem AHZ rectus est; quocirca (*per Pappi Lemma* I.) rectus est angulus ZAE. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

Idem autem aliter demonstrari potest hoc modo.



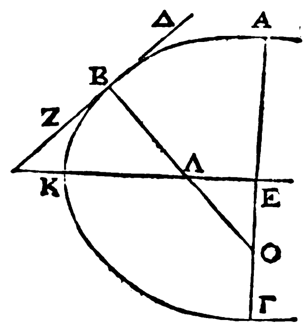
Sit AΓ aliqua è Sectionibus Conicis, cujus axis BΔ; ac sit Minima recta AB, tangens vero AΔ. Dico angulum ΔAB rectum esse.

Nam si non ita sit, normalis sit ipsi AΔ recta BE, adeoque AB major erit quam BE; ac propterea AB multo major erit quam BZ: quod absurdum est. Posuimus enim AB Minimam esse. Quocirca si AB Minima sit, erit angulus ΔAB rectus.

PROPOSITIO XXX.

Si ab extremitate Maximæ *alicujus ad Ellipsin ductæ recta ducatur quæ Sectionem tangat. Dico Tangentem illam super* Maximam *normaliter insistere.*

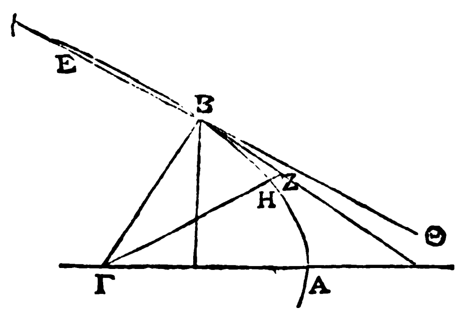
Sit ABΓ Ellipsis cujus Axis minor AΓ, & ab Axe ad Sectionem ducatur Maxima quædam ut OB; tangat autem sectionem recta BΔ ad punctum B. Dico angulum ΔBO rectum esse.



Ducatur è centro ad Sectionem Axi normalis EK, *quæ occurrat Maximæ* OB *in* Λ; quæque dimidium erit Axis majoris. Quoniam vero AΓ Axis minor est, & Axis EK occurrit Maximæ, erit (per 23^{am} hujus) pars ejus intercepta inter Sectionem & Axem majorem recta Minima; quare BΛ Minima est. Tangit autem Sectionem recta BΔ: BΔ igitur (per tres proximas Prop.) normaliter insistit super ipsam BΛ; *hoc est super Maximam* BO. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

Si in qualibet trium Coni sectionum, ab eâ Minimæ *alicujus extremitate quæ ad Sectionem est, erigatur recta eidem* Minimæ *ad angulos rectos: erit recta illa Sectionis Tangens.*



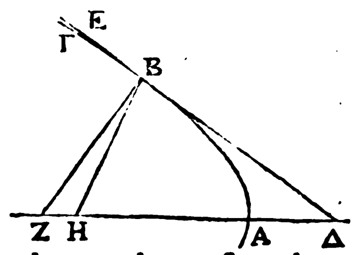
Sit enim Sectio Conica AB, & in eâ recta Minima ΓB. Dico rectam è puncto B ductam, ipsique ΓB normalem, Sectionem tangere.

Nam si fieri possit ut non tangat, intersecet eam, ut recta EBΘ: ac ducatur è puncto quodam Z, extra Sectionem quidem sumpto sed inter eam & ipsam BΘ, recta alia ut BZ: & demittatur in BZ de puncto Γ normalis ΓHZ. Erit igitur angulus ΓBZ acutus, ob angulum ΓZB rectum; adeoque ΓZ minor erit quam ΓB, ac ΓH multo minor quam ΓB: quod absurdum est. Posuimus enim ΓB Minimam esse. Recta igitur per punctum B ipsi BΓ normalis tanget Sectionem. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXII.

Si recta tangat aliquam è Sectionibus Conicis, & erigatur è puncto contactus Tangenti normalis, quæ occurrat Axi: erit hæc recta Minima *quæ per punctum illud ad Axem ducitur.*

Sit



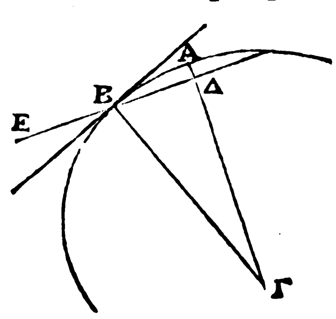
Sit enim ABΓ Sectio Conica, Tangens vero ΔE, & de puncto contactus B erigatur tangenti normalis BZ, quæ producatur ad occursum Axis. Dico BZ Minimam esse.

Nam si non ita sit, transeat Minima BH per punctum B; ac angulus ΔBH (per 27^{am} & 28^{am} hujus) rectus erit: quod quidem absurdum est. Posuimus enim angulum ΔBZ rectum esse. Quocirca recta BZ Minima est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

SI à Maximæ *alicujus extremitate illâ quæ ad Sectionem est erigatur perpendicularis; erit ea Sectionis Tangens.*

Sit enim AB Sectio Conica, sitque BΓ Maxima aliqua. Dico rectam per punctum B ductam, ipsique BΓ normalem, sectionem tangere.

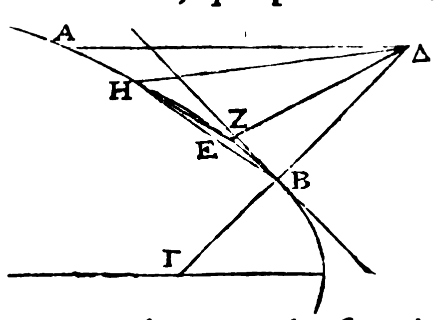


Nam si non ita sit, intersecet eam ad modum rectæ BΔE; & ducatur è puncto Γ recta ΓΔA, occurrens ipsi BE in Δ, *Sectioni autem in* A. Cum autem ΓΔ subtendit angulum rectum, ΓB vero angulum acutum, erit ΓΔ major quam ΓB. Sed AΓ major est quam ΔΓ; adeoque AΓ multo major erit quam ΓB. Hoc autem absurdum est: posuimus enim ΓB Maximam esse. Quapropter recta per punctum B ducta, ipsique ΓB normalis, tanget sectionem. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIV.

SI sumatur punctum in aliquâ vel è Maximis *vel* Minimis, *extra Sectionem Conicam productis: erit portio ejus, quæ interjacet punctum illud & Sectionem,* Minima *rectarum de puncto illo ad utrumvis latus Sectionis egredientium, modo non produci sed in uno tantum puncto Sectioni occurrere concipiantur: è cæteris vero quæ eidem propinquior minor erit remotiore.*

Sit AB Sectio Conica, & BΓ aliqua è Maximis vel Minimis, quæ producatur; & in producta capiatur punctum quodvis Δ, à quo ducantur ad sectionem rectæ ΔA, ΔH, ΔE, quæ singulæ occurrant sectioni in uno tantum puncto. Dico BΔ Minimam esse rectarum de puncto Δ ad sectionem ducendarum, eidemque propiorem minorem esse remotiore.

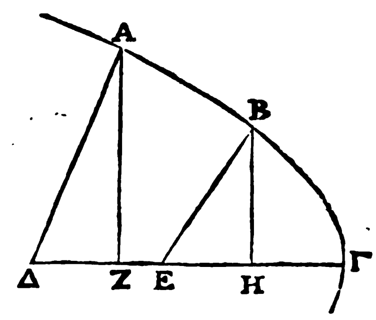


Nam si ducatur BZ sectionem tangens in B, erit (per 27^{am} & 28^{am} ac 30^{am} hujus) angulus ZBΔ rectus; adeoque ΔZ *major erit quam* ΔB, *ac* ducta ΔE multo major quam ΔB. Jungantur rectæ HB, HE; atque angulus ΔEH obtusus erit, angulus vero ΔHZ acutus: quapropter ΔH major erit quam ΔE. Ac pari argumento probabitur ΔA majorem esse quam ΔH. Possumus etiam idem demonstrare de rectis ab alterâ parte ipsius BΔ ducendis. Constat ergo Propositio.

PROPOSITIO XXXV.

IN omni Sectione Conicâ, si ducantur plures Minimæ; *erunt anguli comprehensi sub Axe &* Minimis *à Vertice Sectionis remotioribus majores comprehensis sub Axe & eidem Vertici propinquioribus.*

Sit autem imprimis Sectio Parabola ut ABΓ, cujus Axis ΓΔ: sintque rectæ AΔ, BE Minimæ. Dico angulum AΔΓ majorem esse angulo BEΓ.

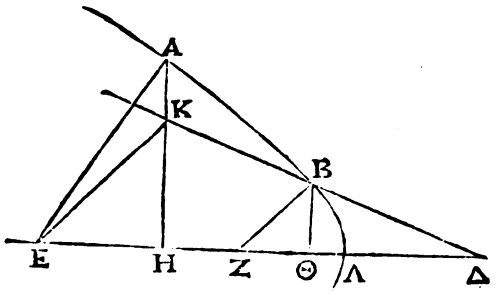


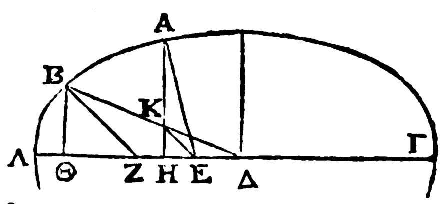
Demittantur normales AZ, BH: cumque BZ Minima est, erit (per 13^{am} hujus) EH dimidium lateris recti; ac (per eandem) erit etiam ΔZ æqualis dimidio lateris recti, ita ut EH æqualis sit ipsi ΔZ. Cathetus vero AZ major est Catheto BH: quare angulus AΔZ major est angulo BEH. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVI.

SIT jam Sectio Hyperbola vel Ellipsis, cujus Axis ΛE & centrum Δ; & sint AE, BZ Minimæ. Dico angulum AEΛ majorem esse angulo BZΛ.

Demittantur normales BΘ, AH; & jungatur ΔKB. Erit igitur ΔH ad HE (per 14^{am} & 15^{am} hujus) sicut diameter transversa ad latus rectum; ac (per easdem) erit ΔΘ ad ΘZ in eadem ratione: proinde ΔH erit ad HE ut ΔΘ ad ΘZ; ac permu-



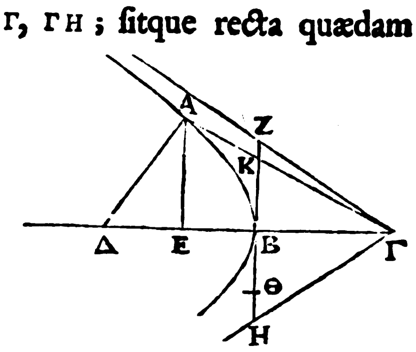


tando erit ΔH ad ΔΘ sicut HE ad ΘZ. Sed ΔH est ad ΔΘ ut KH ad BΘ: quapropter HE est ad ΘZ sicut KH ad BΘ. Anguli autem AHE, BΘZ recti sunt, adeoque triangula KEH, BZΘ similia sunt, *& anguli* KEH, BZΘ *æquales*; angulus igitur AEH major est angulo BZΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVII.

S*I in Hyperbola ducatur recta aliqua* Minima *quæ contineat cum Axe angulum: erit angulus ille minor angulo comprehenso sub alterutro Asymptotorum & rectâ quæ per Verticem Sectionis ducta Axi normalis est.*

Sit Hyperbolæ AB Axis ΓΔ, Asymptoti autem ZΓ, ΓH; sitque recta quædam Minima AΔ: & è puncto B erigatur Axi normalis ZBH. Dico angulum AΔΓ minorem esse angulo ΓZH.



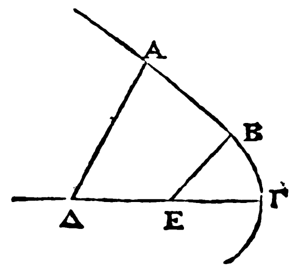
Fiat BΘ dimidium lateris recti, sive cadat punctum Θ super H, vel inter B, H, vel extra ea; ac jungatur AΓ. Jam ΓB est ad BΘ, sicut axis transversus ad latus rectum; est autem ΓE ad EΔ (per 14^{am} hujus) sicut axis transversus ad latus rectum: quare ΓB est ad BΘ ut ΓE ad EΔ. Sed KB est ad BΓ ut AE ad EΓ, adeoque ex æquo erit KB ad BΘ sicut AE ad EΔ. Ratio autem KB ad BΘ minor est ratione ZB ad BΘ; & ZB est ad BΘ (per 3^{am} II^{di}) ut ΓB ad BZ. Quapropter ratio AE ad EΔ minor est ratione ΓB ad BZ. Hæc vero latera continent angulos rectos: unde manifestum est angulum AΔΓ minorem esse angulo ΓZB. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVIII.

S*I ducantur à Sectione aliqua Conica rectæ duæ* Minimæ *ad idem Axis latus; occurrent illæ productæ ad oppositam Sectionis partem, sive ultra Axem.*

Sit

Sit sectio Conica AB super Axe ΓΔ; sintque AΔ, BE duæ Minimæ à sectione ad Axem ductæ. Dico rectas ΔA, BE productas, ad alterum sectionis latus invicem occursuras.

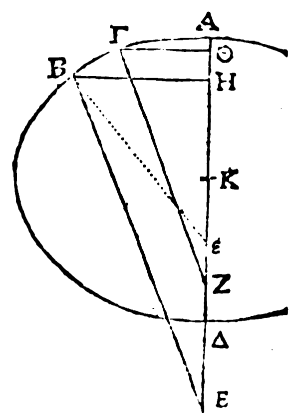


Quoniam enim (per 35^{am} & 36^{am} hujus) angulus AΔΓ major est angulo BEΓ, erunt anguli AΔE, ΔEB majores duobus rectis: erunt igitur anguli iisdem deinceps minores duobus rectis: sunt autem AΔ, BE duæ Minimæ; occurrunt igitur productæ, ad alteram sectionis partem. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIX.

R*Ectæ* Maximæ *à Sectione ad Axem Ellipseos minorem ductæ occurrunt invicem ad eandem Sectionis partem.*

Sit ABΓ Ellipsis, cujus Axis minor AΔ. Dico Maximas à Sectione ABΓ ductas occurrere inter se ad partes Semi-Ellipseos ABΔ.

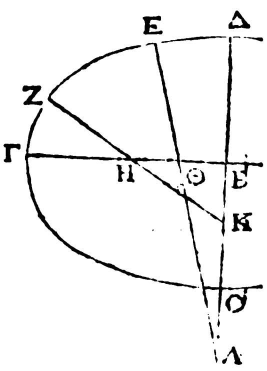


Nam si possibile sit, ut non sese interfecent; sint eæ duæ rectæ Maximæ BE, ΓZ, & ducantur normales BH, ΓΘ, ac sit centrum K. Erit igitur KΘ ad ΘZ ut diameter transversa ad latus rectum (per 22^{am} hujus) similiterque KH erit ad HE in eadem ratione: quare per conversionem rationis KH erit ad KE ut KΘ ad KZ; ac permutando KH erit ad KΘ ut KE ad KZ. Sed KZ minor est quam KE: igitur KΘ minor erit quam KH, quod est contra Hypothesin. Minimæ igitur Bι, ΓZ occurrunt invicem: *cumque* Kι *minor est quam* KZ, *occurrent ad easdem partes Axis ad quas puncta* Γ, B. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XL.

C*Oncursus rectarum* Minimarum *in Ellipsi fiunt intra angulum comprehensum sub Semiaxe ad quem ducuntur* Minimæ *& sub Axe minore.*

Sit ΔEΓ Ellipsis, cujus Axis minor ΔBO; sintque Minimæ duæ EΘ, ZH. Dico rectas EΘ, ZH productas concurrere intra angulum ΓBO.



Producantur enim hæ rectæ ab H & Θ ad occursum ipsius ΔBO, in punctis K, Λ. Quoniam vero EΘ Minima est, erit quoque EΛ (per conversam Prop. XXIII. hujus) Maxima. Pariter cum ZH producta occurrit ipsi BO in puncto K, erit etiam ZK Maxima. Occurrunt autem inter se EΘ, ZH productæ (per 38^{vam} hujus) ad alteram partem Axis. Sed rectæ EΛ, ZK, cum Maximæ sint, occurrunt invicem (per 39^{am} hujus) ad eandem Axis minoris partem. Situm est igitur punctum occursus intra angulum rectis ΓB, BO comprehensum. Q. E. D.

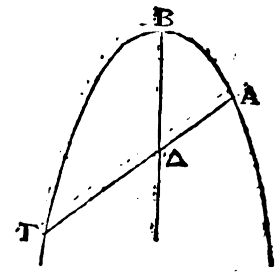
PROPOSITIO XLI.

R*Ectæ* Minimæ *in Parabola vel Ellipsi de Sectione ad Axem ductæ & productæ occurrent etiam Sectioni ad alterum ejus latus.*

Res quidem in Ellipsi per se satis manifesta est.

Sin autem sectio ABΓ Parabola fuerit axe BΔ, sit recta aliqua Minima AΔ. Dico AΔ productam occurrere alteri sectionis parti BΓ.

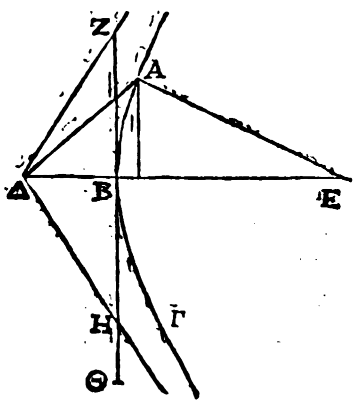
Quoniam enim sectio Parabola est, ac ducitur ad diametrum ejus recta AΔ; producta ea (per 27am primi) conveniet cum sectione BΓ. Q. E. D.



PROPOSITIO XLII.

IN Hyperbola, si diameter transversa non major fuerit latere ejus recto, nulla Minima *de Sectione ad Axem duci potest, quæ occurrat alteri Sectionis lateri. Si vero diameter transversa major fuerit latere ejus recto, pars* Minimarum *producta occurret alteri Sectionis lateri: altera vero pars non item.*

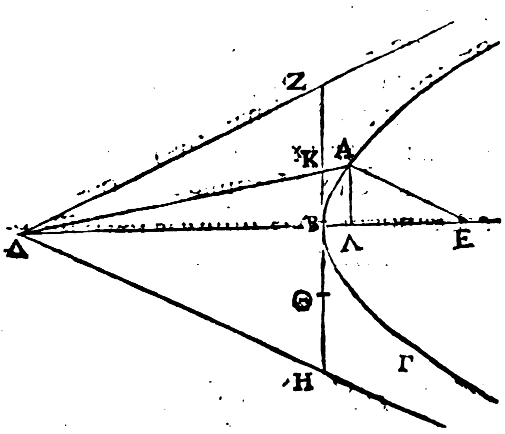
Sit Hyperbolæ ABΓ Axis ΔE, ac centrum Δ; sitque recta aliqua Minima AE: nec sit diameter transversa major latere recto. Dico quod AE producta non occurret sectioni.



Sint Asymptoti duæ ΔZ, ΔH; ac sit ZBH ipsi ΔE ad angulos rectos: ac fiat BΘ dimidium lateris recti. Quoniam vero diameter transversa non major est latere recto, ΔB non major erit quam BΘ; ac ΔB est ad BΘ (per tertiam IIdi) sicut quadratum ex BΔ ad quadratum ex BZ; quadratum igitur ex BΔ non majus erit quadrato ex BZ, adeoque BΔ non major quam BZ: unde & angulus BZΔ non major erit angulo ZΔB. Sed (per 37am hujus) angulus BZΔ major est angulo AEB; quare angulus ZΔB major est angulo AEB. Angulus autem ZΔB æqualis est angulo BΔH: quare angulus BΔH major est angulo AEB. Jam angulus qui ipsi AEB deinceps est una cum angulo AEB æqualis est duobus rectis; adeoque angulus EΔH una cum angulo ipsi AEB deinceps major est duobus rectis; rectæ igitur AE, ΔH productæ ad partes E & H non occurrent inter se. Sed & recta AE non occurret sectionis parti BΓ (per octavam IIdi) quia non occurrit Asymptoto ΔH. Q. E. D.

PROPOSITIO XLIII.

QUod si fuerit diameter transversa major latere recto. Dico *Minimarum* aliquas à Sectione ABΓ ductas & productas occurrere Sectioni ab alterâ ejus parte; aliquas vero eidem non occurrere.



Sint duæ Sectionis Asymptoti ZΔ, ΔH: cumque diameter transversa major est latere recto, erit ΔB major dimidio lateris recti BΘ; adeoque ratio ipsius ZB ad BΘ major erit ratione ZB ad BΔ. Fiat KB ad BΘ sicut ZB ad BΔ; & jungatur ΔK, quæ producta (per 2dam IIdi) occurret sectioni. Occurrat autem in puncto A; & ab A demittatur Axi ΔE normalis AΛ; ac fiat ΔΛ ad ΛE sicut ΔB ad BΘ, sive ut diameter transversa ad latus rectum. Quoniam vero normalis est AΛ, erit intercepta ΛE (per nonam hujus) aliqua è Minimis. Cum autem BK est ad BΔ sicut AΛ ad ΛΔ, atque etiam ΔB est ad BΘ sicut ΔΛ ad ΛE; erit ex æquo AΛ ad ΛE sicut BK ad BΘ. Sed BK est ad BΘ ut ZB ad BΔ; quare AΛ est ad ΛE sicut ZB ad BΔ. Anguli autem ZBΔ, AΛE sunt æquales, quia recti; atque adeo triangula ZBΔ, AΛE similia, & angulus ZΔB angulo AEΛ æqualis:

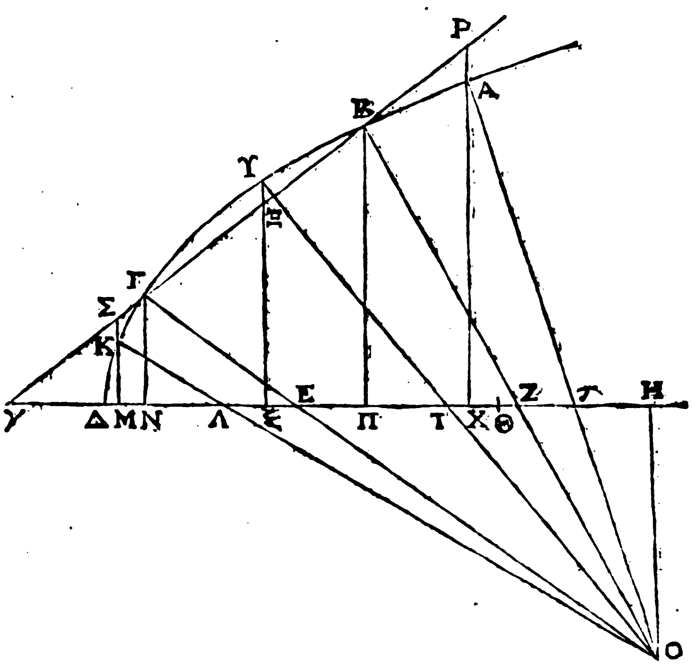
qualis: unde & angulus ΒΔΗ eidem angulo ΑΕΛ æqualis eſt. Quocirca rectæ ΔΗ ΛΕ non occurrent inter ſe, atque ΛΕ producta non occurret ſectioni niſi in puncto Λ; quia (per octavam II[di]) non occurrit utrique Aſymptoto ΔΗ, ΔΖ: eſt enim ΛΕ ipſi ΔΗ parallela. Recta igitur ΛΕ non occurrit ſectioni niſi in ſolo puncta Λ.

At vero Minimæ illæ, quæ occurrunt axi inter puncta Β, Ε, (per 36[am] hujus) minores angulos cum Axe comprehendunt quam ΒΔΗ: (etenim angulus ΛΕΒ æqualis eſt angulo ΒΔΗ, & anguli Minimarum iſtarum inter Β & Ε tranſeuntium minores ſunt angulo ΛΕΒ, *hoc eſt angulo* ΒΔΗ) adeoque productæ non occurrent ipſi ΔΗ; ac proinde non interſecabunt ſectionem ΒΓ, ob cauſam jam dictam, nempe Prop. 8[vam] II[di]. Cæteras vero Minimas comprehendentes cum Axe angulos majores angulo ΛΕΒ, quia ipſi ΔΗ occurrunt, etiam interpoſitæ ſectioni ΒΓ occurrere neceſſe eſt. Q. E. D.

PROPOSITIO XLIV.

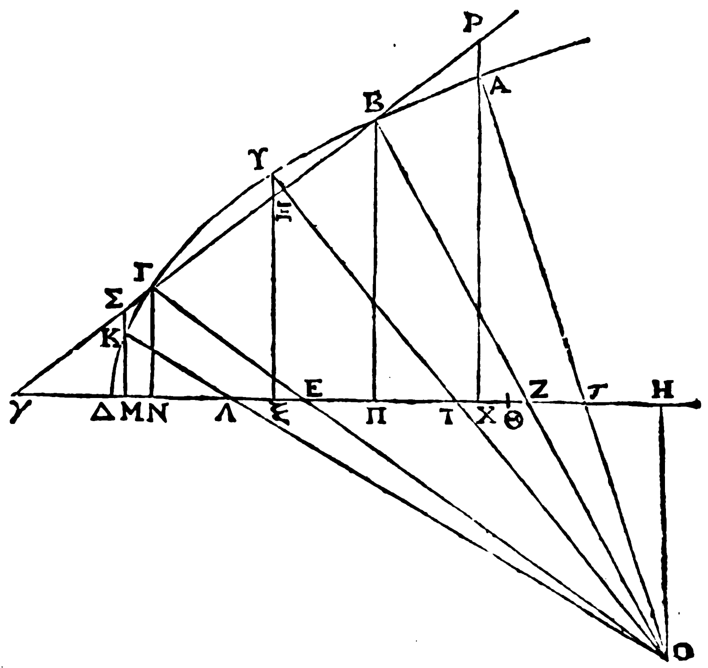
SI ad Axem alicujus Sectionis Conicæ ducantur duæ Minimæ, *quæ ad occurſum producantur; & de puncto occurſus earundem ducatur alia quævis recta, quæ Axem ſecans Sectioni conveniat: portio ejus inter Sectionem & Axem intercepta non erit* Minima. *Ac ſi hæc ducta non fuerit intermedia inter duas* Minimas, *& agatur ab ea extremitate ejus quæ eſt ad Sectionem* Minima; *abſcindet hæc* Minima *portionem Axis Vertici Sectionis adjacentem, quæ major erit portione ejuſdem ab ipſa ducta abſciſſâ. Si vero ducta intermedia fuerit inter duas* Minimas, *ea* Minima, *quæ ab extremitate ejus ad Axem ducitur, auferet portionem Axis Vertici Sectionis adjacentem minorem portione ab ipſa ducta abſciſſâ. Quod ſi Sectio fuerit Ellipſis, oportebit & duas* Minimas *& tertiam ductam occurrere eidem majori Semiaxi Sectionis.*

Imprimis autem ſit Sectio Parabola ut ΑΒΓ, cujus Axis ΔΗ; ac ſint duæ Minimæ ab eadem ductæ ΒΖ, ΓΕ, quæ occurrant inter ſe in puncto Ο: & educatur è puncto Ο recta ΚΛ, primum extra ipſas ΟΓ, ΟΒ. Dico ΚΛ non eſſe aliquam è Minimis, Minimamque per punctum Κ ductam abſcindere ab Axe majorem portionem, Vertici ſectionis Δ conterminam, quam eſt ΔΛ.



Demittantur normales ΟΗ, ΒΠ, ΓΝ, ΚΜ; ac ſit ΘΗ dimidium lateris recti. Quoniam vero ΒΖ Minima eſt, & ΒΠ normalis, erit (per 13[am] hujus) ΠΖ æqualis dimidio lateris recti; adeoque ΠΖ æqualis eſt ipſi ΘΗ: unde & ΠΘ ipſi ΖΗ æqualis erit, ac ΗΘ erit ad ΘΠ ſicut ΠΖ ad ΖΗ. Sed ΠΖ eſt ad ΖΗ ut ΠΒ ad ΟΗ; unde rectangulum ſub ΟΗ, ΗΘ æquale erit rectangulo ſub ΒΠ, ΠΘ. Eodemque modo demonſtratur rectangulum ſub ΓΝ, ΝΘ æquale eſſe rectangulo ſub ΟΗ, ΗΘ: æquale eſt igitur rectangulum ſub ΠΒ, ΘΠ rectangulo ΓΝ, ΝΘ; ac proinde ΠΒ eſt ad ΓΝ ut ΝΘ ad ΘΠ. Jungatur ΒΓ ac producatur ad occurſum Axis ΔΗ in puncto γ; producatur etiam normalis ΚΜ ad Σ. Erit igitur ΠΒ ad ΓΝ ſicut Πγ ad γΝ, adeoque Πγ eſt ad γΝ ſicut ΝΘ ad ΘΠ, *ac dividendo* ΠΝ *eſt*

est ad γN *sicut* ΠN *ad* ΘΠ: æqualis est igitur recta γN ipsi ΠΘ. Est igitur γM minor quam ΠΘ, unde ratio ΠM ad Mγ major est ratione ΠM ad ΠΘ; & componendo ratio Πγ ad γM, hoc est ΠB ad MΣ, major erit ratione MΘ ad ΘΠ: adeoque rectangulum sub BΠ, ΠΘ majus erit rectangulo sub ΣM, MΘ, ac proinde multo majus rectangulo sub KM, MΘ. Demonstravimus autem rectangulum sub BΠ, ΠΘ æquale esse rectangulo sub OH, HΘ: adeoque rectangulum OHΘ majus est rectangulo KMΘ; ac ratio OH ad KM, sive HΛ ad ΛM, major est ratione MΘ ad ΘH: quocirca HΘ major est quam MΛ. Sed HΘ æqualis est dimidio lateris recti, ergo MΛ minor est dimidio lateris recti: Minima igitur à puncto K ducenda auferet ab Axe segmentum majus quam ΛΔ: unde patet (per 24^{am} hujus) KΛ non esse Minimam.



Jam si ducatur ad alterum latus ipsarum BO, OΓ, etiam extra eas, alia quævis recta ut OA. Dico partem ejus Aτ non esse Minimam: Minimam vero è puncto A ductā auferre ab Axe portionem majorem quam Δτ. Sit AX normalis ipsi ΔH, & (per jam demonstrata) recta ΠΘ æqualis est ipsi γN; unde γX major erit quam ΠΘ; ac ratio ΠX ad Xγ minor erit ratione XΠ ad ΠΘ. Dividendo autem ratio XΠ ad Πγ minor erit ratione ejusdem ad XΘ; ac componendo ratio Xγ ad γΠ, *hoc est* XP *ad* ΠB, minor erit ratione ΠΘ ad ΘX: quare ratio XP ad ΠB minor est ratione ΠΘ ad ΘX; ac rectangulum ΘXP minus erit rectangulo BΠΘ; adeoque rectangulum AXΘ multo minus erit rectangulo BΠΘ. Sed BΠΘ æquale est rectangulo OHΘ, quocirca AXΘ minus est rectangulo OHΘ; ad proinde ratio AX ad OH, hoc est Xτ ad τH, minor erit ratione HΘ ad ΘX: erit igitur HΘ major quam Xτ. Sed ΘH dimidium est lateris recti, quare Xτ minor est dimidio lateris recti. Minima itaque de puncto A ducenda auferet rectam majorem quam Xτ; adeoque majus erit segmentum Axis, à sectionis Vertice Δ sumptum, quam segmentum Δτ rectâ Aτ abscissum: ac propterea (per 24^{am} hujus) recta Aτ non est aliqua è Minimis.

Quinetiam si capiatur recta aliqua ut OΥ inter ipsas OB, OΓ intermedia: Dico quod Υτ non est Minima, quodque Minima de puncto Υ ducta abscindet segmentum Axis, vertici Δ adjacens, minus portione ejus Δτ. Demittatur enim normalis Υξ. Cumque jam probatum sit ΠΘ æqualem esse ipsi γN, erit ξγ major quam ΠΘ; adeoque ratio Πξ ad ξγ minor ratione ejusdem ad ΠΘ: & componendo ratio Πγ ad γξ minor erit ratione ξΘ ad ΘΠ. Sed Πγ est ad γξ ut BΠ ad Ξξ; unde ratio BΠ ad Ξξ minor est ratione ξΘ ad ΘΠ: ac rectangulum BΠΘ minus rectangulo ΞξΘ, multoque minus rectangulo ΥξΘ. Rectangulum autem OHΘ æquale est rectangulo BΠΘ; quare rectangulum OHΘ minus est facto sub Υξ, ξΘ: unde & ratio OH ad Υξ minor erit ratione ξΘ ad ΘH. Sed OH est ad Υξ sicut Hτ ad τξ; quare Hτ est ad τξ in minore ratione quam ξΘ ad ΘH: recta igitur HΘ minor est quam τξ. Verum HΘ dimidium est lateris recti; quapropter recta Minima de puncto Υ ducenda auferet portionem minorem quam ξτ: ac segmentum Axis Vertici Sectionis adjacens minus erit quam Δτ: unde Υτ non est Minima, sed Minima de puncto Υ ducenda auferet Axis portionem minorem quam Δτ. Q. E. D.

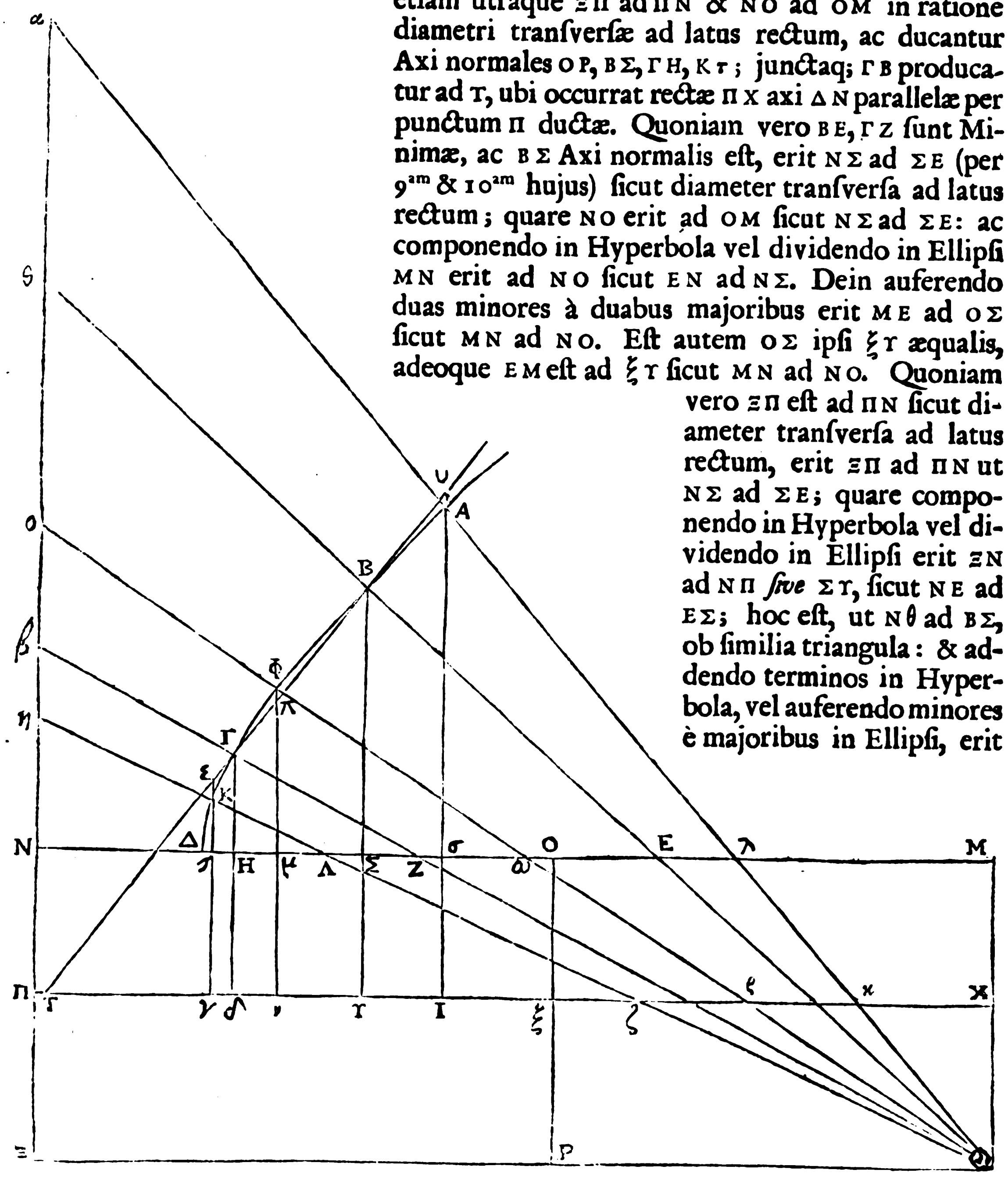
PROPOSITIO XLV.

SI vero sectio fuerit Hyperbola vel Ellipsis ut ABΓΔ, Axe MΔ centro vero N; & ducantur in sectione duæ *Minimæ*, ut BE, ΓZ; à quarum concursu in puncto Θ agatur

Θ agatur

Θ agatur recta ΘΑΚ. Dico portionem ejus inter sectionem & Axem interceptam non esse aliquam è *Minimis*: sed *Minimam* de puncto Κ ductam abscindere segmentum Axis majus quam ΔΛ.

De puncto Θ demittatur ad Axem normalis recta ΘΜ, ac per centrum Ν ipsi ΜΘ parallela ducatur recta ΝΞ, ac per punctum Θ ipsi ΜΝ parallela fit ΘΞ, & producatur ΝΞ ad occursum ipsarum ΘΓ, ΘΒ: iis autem occurrat in punctis β, θ. Fiat etiam utraque ΞΠ ad ΠΝ & ΝΟ ad ΟΜ in ratione diametri transversæ ad latus rectum, ac ducantur Axi normales ΟΡ, ΒΣ, ΓΗ, ΚΤ; junctaq; ΓΒ producatur ad Τ, ubi occurrat rectæ ΠΧ axi ΔΝ parallelæ per punctum Π ductæ. Quoniam vero ΒΕ, ΓΖ sunt Minimæ, ac ΒΣ Axi normalis est, erit ΝΣ ad ΣΕ (per 9^{am} & 10^{am} hujus) sicut diameter transversa ad latus rectum; quare ΝΟ erit ad ΟΜ sicut ΝΣ ad ΣΕ: ac componendo in Hyperbola vel dividendo in Ellipsi ΜΝ erit ad ΝΟ sicut ΕΝ ad ΝΣ. Dein auferendo duas minores à duabus majoribus erit ΜΕ ad ΟΣ sicut ΜΝ ad ΝΟ. Est autem ΟΣ ipsi ξΤ æqualis, adeoque ΕΜ est ad ξΤ sicut ΜΝ ad ΝΟ. Quoniam vero ΞΠ est ad ΠΝ sicut diameter transversa ad latus rectum, erit ΞΠ ad ΠΝ ut ΝΣ ad ΣΕ; quare componendo in Hyperbola vel dividendo in Ellipsi erit ΞΝ ad ΝΠ *sive* ΣΤ, sicut ΝΕ ad ΕΣ; hoc est, ut Νθ ad ΒΣ, ob similia triangula: & addendo terminos in Hyperbola, vel auferendo minores è majoribus in Ellipsi, erit

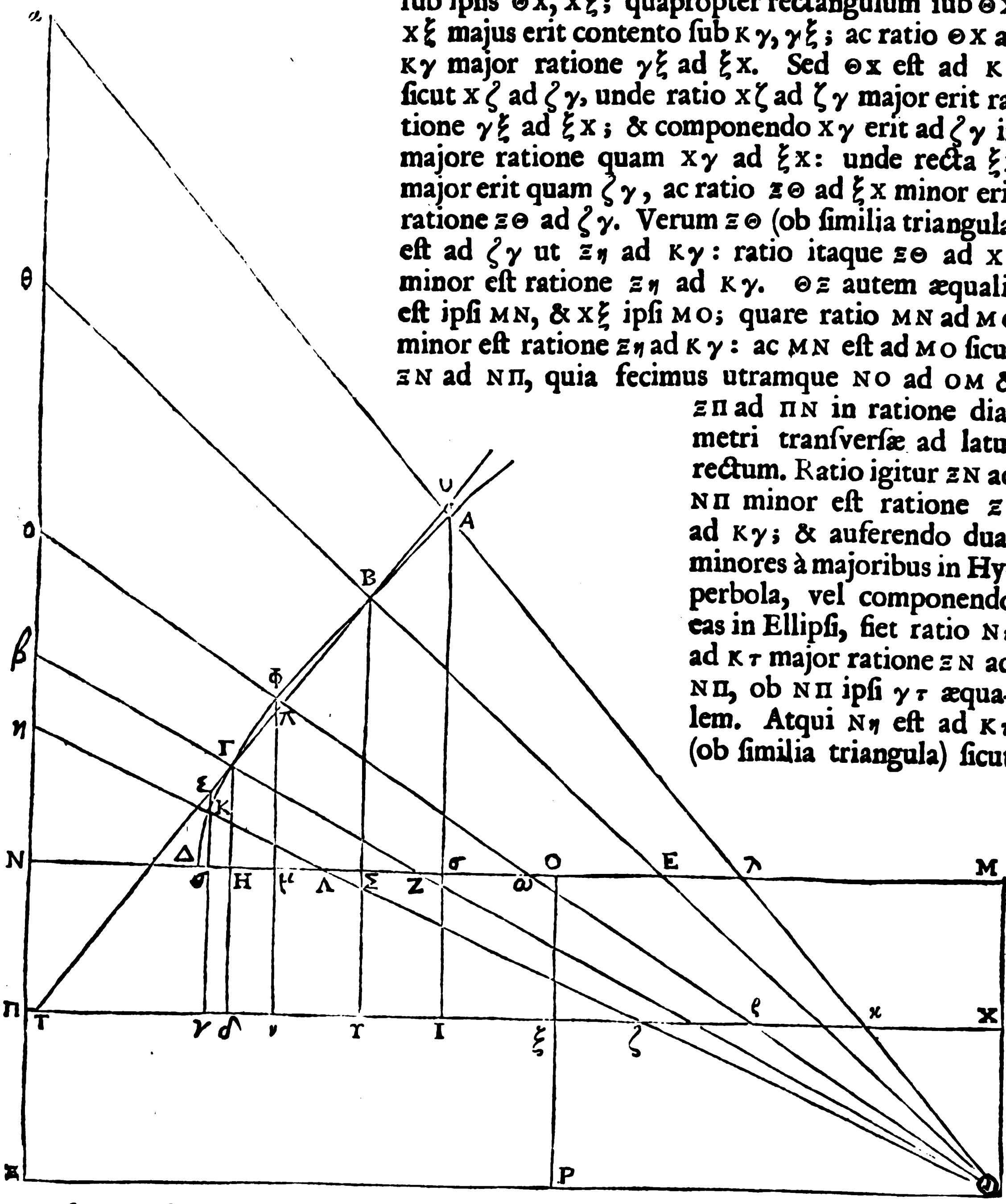


Ξθ ad ΒΥ sicut ΝΕ ad ΕΣ, vel sicut ΞΝ ad ΝΠ. Jam ratio rectanguli ΞΝΜ ad rectangulum ΠΝΟ componitur ex ratione ΞΝ ad ΝΠ & ΜΝ ad ΝΟ: demonstravimus autem ΞΝ esse ad ΝΠ sicut Ξθ ad ΒΥ, & ΜΝ esse ad ΝΟ ut ΕΜ ad ξΥ, ratio igitur rectanguli ΝΜΘ ad rectangulum ΝΠξ componitur ex ratione Ξθ ad ΒΥ & ratione ΕΜ ad ξΥ. Sed rectangulum ΝΜΘ æquale est facto sub Ξθ & ΕΜ, quia Ξθ est ad ΘΞ sicut ΘΜ ad ΜΕ: rectangulum igitur ΝΠξ æquale est contento sub ΒΥ, Υξ. Eodem modo demonstrabitur rectangulum ΝΠξ æquale esse rectangulo Γ$\delta\xi$; atque adeo rectangulum sub ΒΥ, Υξ æquale esse rectangulo sub Γδ, $\delta\xi$: unde ΒΥ est ad Γδ ut $\delta\xi$ est ad ξΥ. Sed ΒΥ est ad Γδ sicut ΤΥ ad Τδ; quare ΤΥ est ad Τδ sicut $\delta\xi$ ad ξΥ; ac dividendo Τδ est ad δΥ sicut Τδ ad ξΥ: unde patet ξΥ ipsi Τδ æquari.

Hinc constabit Τξ majorem esse quam Τγ; ratio itaque γΤ ad Τγ major erit ratione ejusdem ad Τξ, ac componendo erit ratio ΤΥ ad Τγ major ratione $\gamma\xi$ ad

 ξΥ.

ξT. Sed TT est ad Tγ sicut BT ad ιγ; ratio igitur BT ad ιγ major est ratione γξ ad ξT: atque adeo rectangulum sub BT, Tξ majus erit rectangulo sub ιγ, γξ, ac multo majus rectangulo Kγξ. Rectangulum autem sub BT, Tξ æquale est rectangulo NΠξ, quare rectangulum NΠξ majus est rectangulo Kγξ. Rectangulum vero NΠξ æquale est rectangulo XΘP, quia NO est ad OM sicut ΘX ad XM; ergo rectangulum XΘP majus est rectangulo Kγξ. Continetur autem rectangulum XΘP sub ipsis ΘX, Xξ; quapropter rectangulum sub ΘX, Xξ majus erit contento sub Kγ, γξ; ac ratio ΘX ad Kγ major ratione γξ ad ξX. Sed ΘX est ad Kγ sicut Xζ ad ζγ, unde ratio Xζ ad ζγ major erit ratione γξ ad ξX; & componendo Xγ erit ad ζγ in majore ratione quam Xγ ad ξX: unde recta ξX major erit quam ζγ, ac ratio ΞΘ ad ξX minor erit ratione ΞΘ ad ζγ. Verum ΞΘ (ob similia triangula) est ad ζγ ut Ξη ad Kγ: ratio itaque ΞΘ ad Xξ minor est ratione Ξη ad Kγ. ΘΞ autem æqualis est ipsi MN, & Xξ ipsi MO; quare ratio MN ad MO minor est ratione Ξη ad Kγ: ac MN est ad MO sicut ΞN ad NΠ, quia fecimus utramque NO ad OM & ΞΠ ad ΠN in ratione diametri transversæ ad latus rectum. Ratio igitur ΞN ad NΠ minor est ratione Ξη ad Kγ; & auferendo duas minores à majoribus in Hyperbola, vel componendo eas in Ellipsi, fiet ratio Nη ad Kτ major ratione ΞN ad NΠ, ob NΠ ipsi γτ æqualem. Atqui Nη est ad Kτ (ob similia triangula) sicut

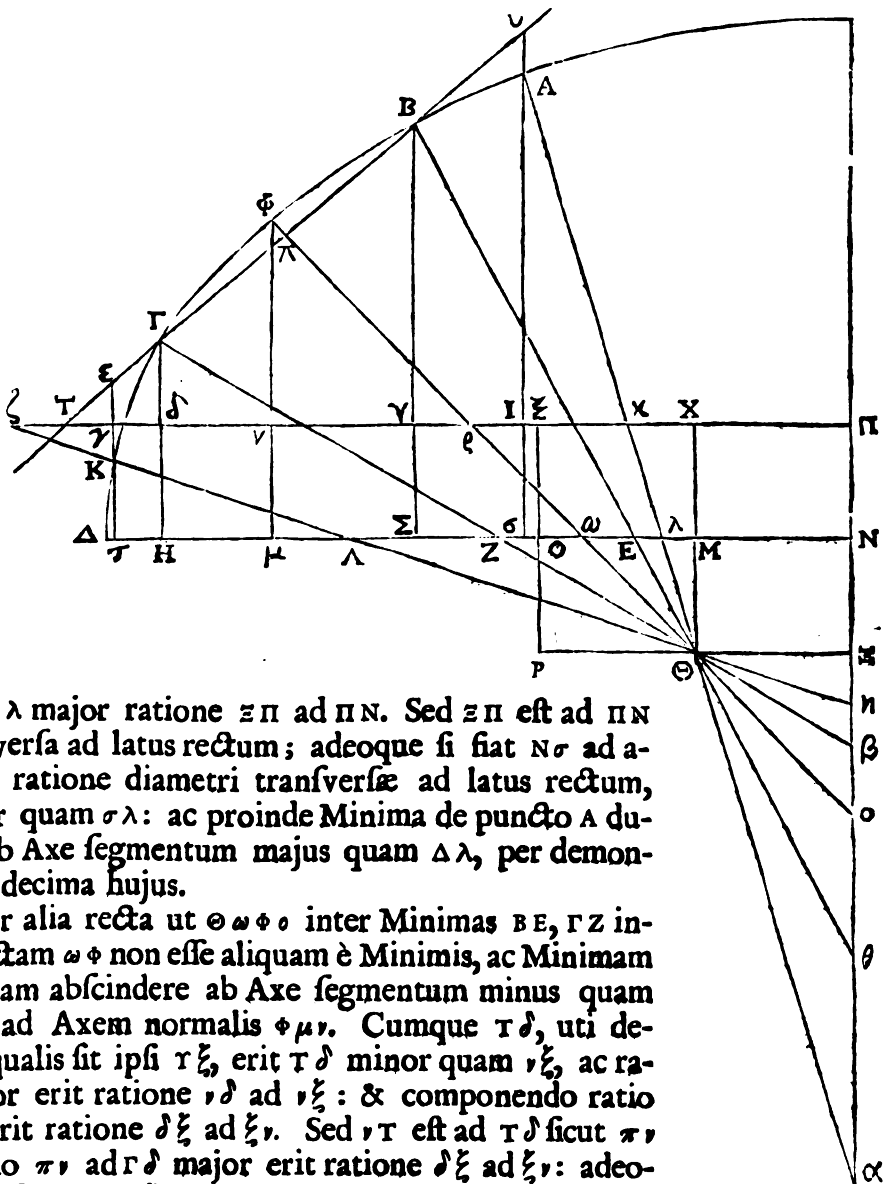


NA ad Aτ; adeoque ratio NA ad Aτ major est ratione ΞN ad NΠ: *ac dividendo in Hyperbola vel componendo in Ellipsi ratio* Nτ *ad* τA *major erit ratione* ΞΠ ad ΠN, hoc est ratione diametri transversæ ad latus rectum. Jam si faciamus Nτ ad rectam aliam sicut diameter transversa ad latus rectum; erit hæc alia major quam Aτ, adeoque recta Minima de puncto K ducenda (per 9am, 10am & 25am hujus) abscindet segmentum Axis Vertici Δ adjacens, quod majus erit quam ΔA.

Porro si ducatur recta alia ad modum ipsius ΘλAα: dico rectam Aλ non esse Minimam, Minimamque per punctum A ductam abscindere ab Axe segmentum majus quam Δλ. Demittatur enim ad Axem normalis Aσ, quæ producatur ad υ & I. Jam quoniam Tδ æqualis est ipsi Tξ, erit Tδ major quam ξI, ac ratio ipsius δI ad Iξ major ratione ejusdem ad Tδ; *ac componendo vel dividendo ratio* δξ *ad* ξI *major erit ratione* IT *ad* Tδ. Sed IT est ad Tδ sicut Iυ ad Γδ; adeoque ratio δξ ad ξI

major

major est ratione ιυ ad Γδ, ac multo major ratione ΙΑ ad Γδ; & rectangulum sub Γδ, δξ majus erit contento sub ΑΙ, Ιξ. Rectangulum vero sub Γδ, δξ æquale est rectangulo ΠΝΟ; quare rectangulum ΠΝΟ majus est rectangulo ΑΙξ. Rectangulum autem ΠΝΟ æquale est rectangulo ΧΘΡ, quia ΝΟ est ad ΟΜ, hoc est Πξ ad ξΧ, ficut ΞΠ ad ΠΝ five Ρξ ad ξΟ: rectangulum igitur ΧΘΡ majus est rectangulo ΑΙξ. Sed rectangulum ΧΘΡ fit sub ΧΘ, Χξ, quare ΘΧξ majus est rectangulo ΑΙξ, ac ratio ΘΧ ad ΑΙ major erit ratione Ιξ ad ξΧ. Sed ΘΧ est ad ΑΙ ficut Χκ ad κΙ; ratio igitur Χκ ad κΙ major est ratione Ιξ ad ξΧ; ac componendo ratio ΙΧ ad Κκ minor erit ratione ΙΧ ad Ιξ: recta igitur Χκ major est quam Ιξ, & applicatâ utrinque communi ξκ, erit Χξ major quam Ικ; unde ratio ΞΘ ad Χξ minor erit ratione ΞΘ ad Ικ. Sed ΞΘ est ad Ικ ficut Ξα ad ΑΙ; quare ratio Ξα ad ΑΙ major est ratione ΞΘ ad Χξ. Verum ΞΘ æqualis est ipsi ΝΜ, ac Χξ ipsi ΜΟ; quare ratio Ξα ad ΑΙ major est ratione ΝΜ ad ΜΟ: & ΝΜ est ad ΜΟ ficut ΞΝ ad ΝΠ; quare auferendo duas minores à duabus majoribus in Hyperbola, vel componendo easdem in Ellipsi, erit ratio αΝ ad Ασ major ratione ΞΝ ad ΝΠ. Sed αΝ est ad Ασ ficut Νλ ad λσ; quare ratio Νλ ad λσ major est ratione ΞΝ ad ΝΠ: ac dividendo in Hyperbola vel componendo in Ellipsi, erit ratio Νσ ad σλ major ratione ΞΠ ad ΠΝ. Sed ΞΠ est ad ΠΝ ut diameter transversa ad latus rectum; adeoque si fiat Νσ ad aliam quandam in ratione diametri transversæ ad latus rectum, erit hæc alia major quam σλ: ac proinde Minima de puncto Α ducenda abscindet ab Axe segmentum majus quam Δλ, per demonstrata in nona & decima hujus.



Quod si ducatur alia recta ut Θωφο inter Minimas ΒΕ, ΓΖ intermedia: dico rectam ωφ non esse aliquam è Minimis, ac Minimam de puncto φ ductam abscindere ab Axe segmentum minus quam Δω. Demittatur ad Axem normalis φμν. Cumque Τδ, uti demonstravimus, æqualis sit ipsi Τξ, erit Τδ minor quam νξ, ac ratio νδ ad δΤ major erit ratione νδ ad νξ: & componendo ratio νΤ ad Τδ major erit ratione δξ ad ξν. Sed νΤ est ad Τδ ficut πν ad Γδ; quare ratio πν ad Γδ major erit ratione δξ ad ξν: adeoque rectangulum sub πν, νξ majus erit rectangulo sub Γδ, δξ. At φν major est quam πν, ac proinde rectangulum φνξ multo majus erit quam rectangulum Γδξ. Est autem rectangulum Γδξ (per jam demonstrata) æquale rectangulo ΝΠξ, quod quidem æquale est rectangulo ΧΘΡ: quare rectangulum sub φν, νξ majus est rectangulo ΧΘΡ. Sed rectangulum ΧΘΡ fit sub ΘΧ, Χξ: quare rectangulum φνξ majus est rectangulo ΘΧξ; ac ratio φν ad ΘΧ major est ratione Χξ ad ξν. Est autem φν ad ΘΧ ficut νρ ad ρΧ, quare ratio νρ ad ρΧ major est ratione Χξ ad ξν; ac componendo ratio νΧ ad Χξ major est ratione νΧ ad νρ: unde constat Χξ minorem esse quam νρ, ac rationem ΞΘ ad Χξ majorem esse ratione ΞΘ ad νρ. Sed (ob similia triangula) ΞΘ est ad νρ ficut Ξο ad φν: ratio igitur ΞΘ ad Χξ major est ratione Ξο ad φν. Cum autem ΞΘ ipsi ΜΝ, ac Χξ ipsi ΜΟ æqualis

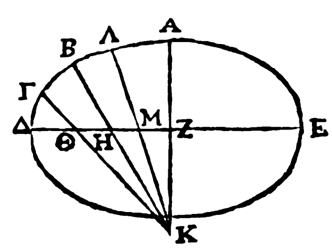
 est,

eſt, ratio ΜΝ ad ΜΟ major erit ratione Ξο ad Φν: cumque ΜΝ eſt ad ΜΟ ſicut ΞΝ ad ΝΠ, erit ratio ΞΝ ad ΝΠ major ratione Ξο ad Φν. Auferendo igitur duas minores à duabus majoribus in Hyperbola, vel componendo eaſdem in Ellipſi, erit ratio ΞΝ ad ΝΠ major ratione οΝ ad Φμ. Sed (ob ſimilia triangula) οΝ eſt ad Φμ ſicut Νω ad ωμ; quare ratio ΞΝ ad ΝΠ major eſt ratione Νω ad ωμ: ac dividendo in Hyperbola vel componendo in Ellipſi, erit ratio ΞΠ ad ΠΝ major ratione Νμ ad μω. Verum ΞΠ eſt ad ΠΝ ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, adeoque ratio illa major erit ratione Νμ ad μω. Propterea ſi faciamus Νμ ad rectam aliam in ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum, minor erit illa quam μω; atque adeo Minima de puncto Φ ducenda (per 9^{am} & 10^{am} hujus) auferet ab Axe ſegmentum minus quam Δω: unde (per 25^{am} hujus) manifeſtum eſt Φω non eſſe aliquam è Minimis. Q. E. D.

PROPOSITIO XLVI.

SI *duæ* Minimæ *in alterutro Ellipſeos quadrante ducantur ad Axem majorem, quarum altera tranſeat per centrum; ac producantur ad occurſum: non duci poterit à puncto occurſûs ad eundem Sectionis quadrantem alia recta, è quâ abſcindat Axis* Minimam. *Ac ſi rectæ quælibet egrediantur ex illo puncto ad Sectionem inter* Minimam *& Verticem Axis majoris*: Minimæ *ab earundem extremitatibus ad Axem ductæ abſcindent Axis ſegmenta Vertici contermina, majora quidem quam ſegmenta ejuſdem ab ipſis egreſſis abſciſſa*; minora vero ſi ductæ fuerint ad alteras partes ſive verſus Axem minorem.

Sit Ellipſeos ΑΒΓ Axis major ΔΕ centrumque Ζ; & è centro erigatur normalis ad Axem ΖΑ, quæ producatur ad occurſum Minimæ alicujus ΒΗ etiam productæ in puncto Κ: ac ducatur alia recta ut ΚΘΓ. Dico quod ΘΓ non eſt Minima, quodque Minima è puncto Γ ad ΔΕ ducenda abſcindet ab Axe portionem majorem quam ΔΘ.



Si enim recta ΓΘ foret Minima, producta occurreret Minimæ ΒΗ intra angulum ΔΖΚ, juxta 40^{mam} hujus: ſed occurrit ei recta ΓΘ non niſi in puncto Κ; adeoque ΘΓ non eſt Minima. Quod vero Minima è puncto Γ ad Axem ΔΕ educta abſcindat ex eodem ſegmentum majus quam ΔΘ, hinc patet; quia (per 40^{mam} hujus) recta Minima per punctum Γ ducta occurrit ipſi ΒΗ, quæ etiam Minima eſt, intra angulum ΗΖΚ: unde manifeſtum eſt illam abſcindere majorem Axis portionem quam ΔΘ.

At ſi ducatur alia ut ΛΜΚ *ad alteram partem Minimæ* ΒΗ; *conſimili argumento patebit* ΛΜ *non eſſe Minimam, Minimamque de puncto* Λ *ad Axem ducendam* (*per eandem* 40^{mam}) *abſcindere minorem Axis portionem quam* ΔΜ: *quia occurret Minimæ* ΒΗ *intra angulum* ΗΖΚ. Q. E. D.

PROPOSITIO XLVII.

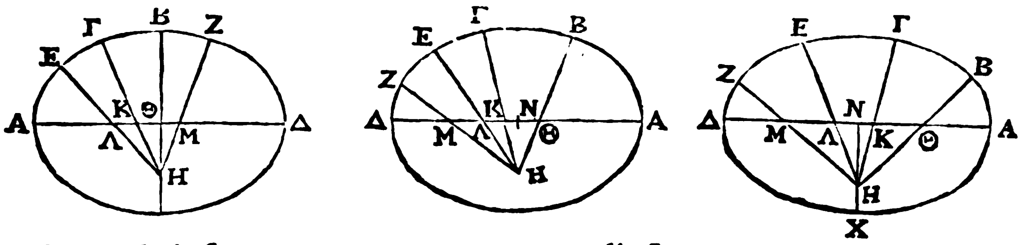
QUatuor *rectæ* Minimæ *in eadem Semi-ellipſi ductæ, & ab Axe majore abſciſſæ, non conveniunt in eodem puncto.*

Sit ΑΒΓΔ Ellipſis cujus Axis major ΑΔ. Dico quod ſi ducantur ab Axe ΑΔ ad Sectionem ΑΒΓΔ quatuor Minimæ, non convenient inter ſe in eodem puncto. Nam, ſi fieri poſſit, ducantur rectæ ΚΓ, ΛΕ, ΜΖ, ΘΒ quæ conveniant inter ſe in puncto Η. Jam vel aliqua ex his rectis normalis erit ſuper Axem ΑΔ, vel nulla earum normalis erit. Sit autem imprimis una earum ΒΘ Axi normalis.

Quoniam vero recta ΒΘ Minima eſt, atque etiam Axi ΑΔ normalis, erit (per 15^{am} hujus) punctum Θ centrum Sectionis: occurrat autem eidem recta Minima

ΚΓ

KΓ in puncto H, & ducatur recta alia EH; ac (per 46^{am} hujus) pars ejus EA non erit Minima. Posuimus autem Minimam esse; quod absurdum.

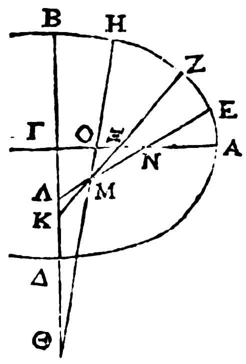


Quod si nulla ipsarum BΘ, KΓ, AE, MZ normalis fuerit super Axem AΔ, sit centrum N inter rectas BΘ, ΓK positum; ac oportebit ducere tres Minimas ad eundem Sectionis Semiaxem, quæ concurrant in eodem puncto. Hoc autem fieri nequit, ut (ex 45ta hujus) manifestum est. Si vero Centrum N intermedium fuerit inter KΓ, AE; axi AΔ normaliter erigatur recta NX, & (per 40^{am} hujus) concursus ipsarum EA, ZM erit intra angulum ΔNX. Pariterque constabit Minimas BΘ, ΓK concursuras intra angulum ANX. Debent autem omnes concurrere in puncto H: hoc autem absurdum. Quatuor igitur Minimæ ad Sectionem ductæ non conveniunt in eodem puncto. Q. E. D.

PROPOSITIO XLVIII.

TRes Maximæ *ad eundem Ellipseos quadrantem ductæ non concurrunt in eodem puncto.*

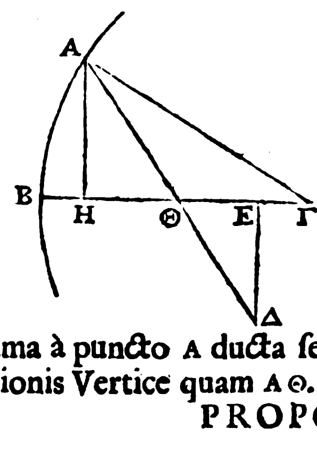
Sit Ellipseos ABΓ Axis major AΓ, minor BΔ. Dico tres Maximas, ad eundem Ellipseos quadrantem ABΓ ductas, non occurrere inter se in eodem puncto. Nam si fieri possit ducantur rectæ EΛ, ZK, HΘ concurrentes in eodem puncto M. Quoniam vero EΛ, ZK, HΘ Maximæ sunt, erunt etiam EN, ZΞ, OH (per 23^{am} hujus) tres Minimæ. Tres igitur Minimæ ad eundem Sectionis quadrantem ductæ concurrere debent in eodem puncto: id quod (per 45^{am} & 46^{am} hujus) absurdum est. Quapropter tres Maximæ ad eundem quadrantem Sectionis ABΓ ductæ non concurrere possunt in eodem puncto M. Q. E. D.



PROPOSITIO XLIX.

IN *omni Sectione Conicâ: si erigatur super Axem normalis, ad punctum ejus quodlibet, modo non longius distet à Vertice Sectionis quam dimidio Lateris recti; ac capiatur punctum aliquod in eadem normali, unde egrediatur recta quævis ad alterum Sectionis latus, inter normalem & Verticem Sectionis: Recta* Minima *ab extremitate ejusdem ducta non erit pars ejus; sed abscindet ex Axe portionem Vertici Sectionis adjacentem, majorem eâ quæ à rectâ de sumpto puncto eductâ abscinditur.*

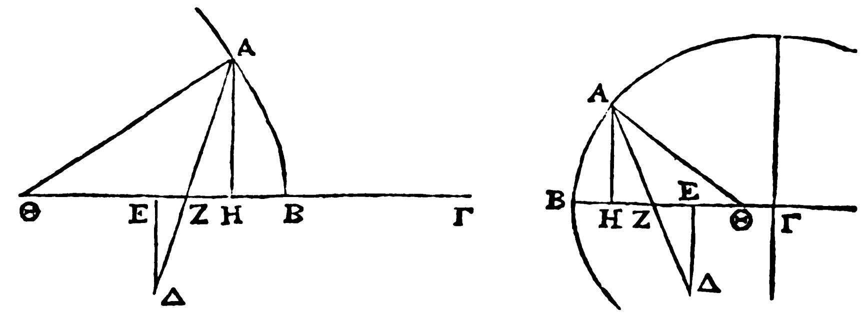
Imprimis Parabolæ AB sit Axis BΓ; normalis vero sit EΔ; ita ut EB, segmentum Axis à normali illâ abscissum, non majus sit dimidio lateris recti; & in ipsa ΔE capiatur punctum quoddam Δ extra Axem; & agatur recta ΔΘA. Dico rectam AΘ non esse Minimam.



Demittatur enim normalis AH. Cumque EB non est major semilatere recto, erit EH minor semilatere recto. Fiat HΓ æqualis semilateri recto, ac ducatur AΓ: erit itaque AΓ (per 8^{vam} hujus) Minima, adeoque AΘ (per 24^{am} hujus) non erit Minima. Abscindit enim recta Minima à puncto A ducta segmentum Axis majus quam BE: cadit igitur remotius à Sectionis Vertice quam AΘ.

PROPOSITIO L.

SIT jam AB Hyperbola vel Ellipsis, cujus axis BΓ centrumque Γ; & Axi normalis erigatur ΔE, ita ut BE non major sit semilatere recto: & è capto in recta ΔE puncto quovis Δ educatur recta aliqua, ut ΔZA. Dico rectam AZ non esse Minimam, Minimamque de puncto A egressam abscindere portionem Axis majorem quam BZ. Oportet autem in Ellipsi normalem cadere in Axem majorem; eductamque occurrere eidem dimidio Axis in quem cadit normalis.



Demittatur enim normalis AH. Cumque BE non est major semilatere recto, ac ΓB semidiameter est transversa, erit ratio diametri transversæ ad latus rectum non major ratione ΓB ad BE. Sed ratio ΓH ad HE major est ratione ΓB ad BE: ratio igitur ΓH ad HE major est ratione diametri transversæ ad latus rectum. Fiat ideo HΓ ad HΘ ut diameter transversa ad latus rectum; ac recta AΘ (per 9am & 10mam hujus) erit Minima. Recta itaque AZ (per 25am hujus) non est Minima, *sed Minima de puncto* A *ducta abscindit portionem axis majorem quam* BZ. Q. E. D.

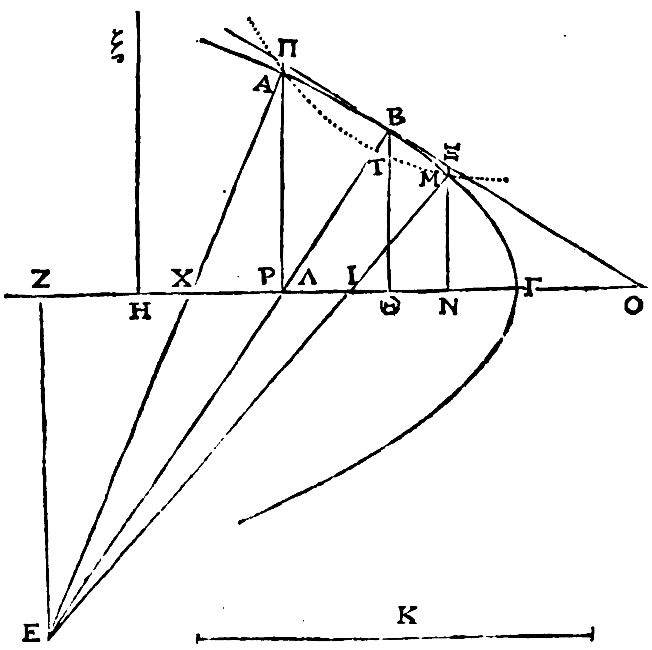
PROPOSITIO LI.

QUod si normalis dicta abscindat Axis segmentum majus semilatere recto: Dico rectam assignari posse, cum quâ comparatione factâ, si puncti sumpti ab Axe distantia, sive longitudo normalis, major fuerit assignatâ, nulla omnino recta ab extremitate normalis ad Sectionem duci potest, è qua abscindat Axis Minimam*: sed* Minima, *ab extremitate cujuscunque rectæ ad Sectionem ex eo puncto egressæ, abscindet ex Axe Segmentum Vertici sectionis conterminum, majus quam ipsa egressa. Quod si normalis æqualis fuerit assignatæ, duci potest ab extremitate ejus una sola recta è qua abscindatur* Minima: Minimæ *vero, ab extremitatibus cæterarum omnium ab eodem puncto egredientium ductæ, abscindent segmenta Axis vertici adjacentia, majora quam ab ipsis egressis abscissa. Si vero normalis minor fuerit assignatâ, duæ tantum rectæ duci possunt è quibus abscindat Axis* Minimas: Minimæque *ab extremitatibus egredientium ductæ, dictasque duas* Minimas *interjacentes, abscindent ab Axe portiones Vertici Sectionis conterminas, minores quam quæ ab ipsis egressis abscinduntur: Quæ vero ducuntur ab extremitatibus cæterarum egredientium, inter duas illas* Minimas *non intermediarum, abscindent portiones Axis majores quam ab ipsis egressis abscissæ. Oportet autem in Ellipsi normalem in Axem majorem demitti.*

Imprimis autem sit ABΓ Parabola, cujus Axis ΓZ; super quem erigatur EZ normaliter: & sit segmentum Axis ΓZ majus dimidio lateris recti. Dico quod si capiantur puncta in ipsa EZ, à quibus egrediantur ad Sectionem rectæ, ea omnia necessariò eventura, prout declaravimus in hac Propositione.

Quoniam

Quoniam ΓZ major est dimidio lateris recti, sit ZH dimidium lateris recti, ac dividatur ΓH in puncto Θ, ita ut segmentum ΘH duplum sit ipsius ΘΓ; & erigatur normalis ΘB, ac fiat recta quædam K ad ΘB sicut ΘH ad HZ: sumptoque in recta EZ puncto E, sit primum ZE major quam K. Dico quod non duci possit è puncto E recta aliqua è qua abscindat Axis Minimam: exempli gratia, ductâ rectâ EAB, dico BA non esse Minimam. Etenim K est ad ΘB ut ΘH ad HZ, & K minor est quam ZE; quare ratio ZE ad BΘ, hoc est ZΛ ad ΛΘ major est ratione ΘH ad HZ, ac componendo ratio ZΘ ad ΘΛ major erit ratione ΘZ ad ZH: adeoque ZH, quæ æqualis est dimidio lateris recti, major est quam ΘΛ, & ΘΛ minor est dimidio lateris recti. Igitur Minima de puncto B ducta (per 8^{vam} hujus) cadet propius puncto Z, ac proinde recta BA (per 24^{am} hujus) non erit Minima. Ac si ducatur alia recta ut EIM: Dico quoque IM non esse aliquam è Minimis. Ducatur enim per punctum B Tangens Sectionis BO; demissaque normalis MN producatur ad Ξ. Ob Parabolam vero erit (per 35^{am} primi) ΓO ipsi ΓΘ æqualis; adeoque ΘO dupla erit ipsius ΘΓ. ΘH autem dupla est ipsius ΘΓ, quare ΘO æqualis est ipsi ΘH. Hinc consequitur ΘH majorem esse quam ON, ac rationem ΘN ad NO majorem esse ratione NΘ ad ΘH: ac componendo ratio ΘO ad ON, hoc est BΘ ad NΞ major erit ratione NH ad HΘ, adeoque rectangulum sub BΘ, ΘH majus erit contento sub ΞN, NH, ac multo majus contento sub MN, NH. Rectangulum vero sub EZ, ZH majus est contento sub BΘ, ΘH; quoniam (per nuper demonstrata) ratio EZ ad BΘ major est ratione ΘH ad ZH; adeoque rectangulum sub EZ, ZH majus est contento sub MN, NH; unde ratio ZE ad MN, sive ZI ad IN, major est ratione NH ad HZ: ac componendo ratio ZN ad NI major ratione NZ ad ZH. Quocirca HZ major erit quam NI. Sed HZ æqualis est dimidio lateris recti; quare NI minor est dimidio lateris recti, ac proinde MI non est aliqua è Minimis; sed Minima de puncto M ad Axem ducta (per 8^{vam} & 24^{am} hujus) propior erit puncto Z.

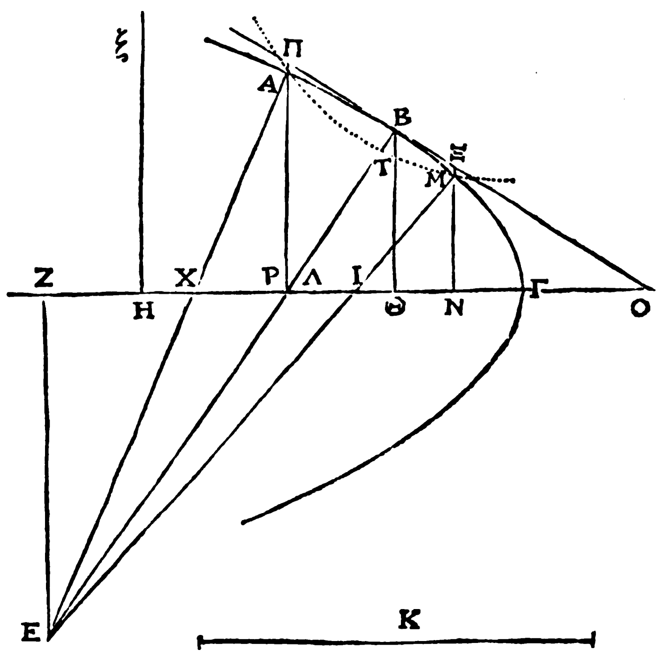


Jam si ducatur alia ut AXE; dico quod AX non est Minima. Demittatur enim normalis AP quæ producatur ad Π. Quoniam vero ΘO æqualis est ipsi ΘH, ut nuper diximus, consequitur rectam ΘO majorem esse quam PH; adeoque ratio PΘ ad ΘO minor erit ratione PΘ ad PH; ac componendo ratio PO ad OΘ minor erit ratione ΘH ad PH. Sed PO est ad OΘ ut PΠ ad BΘ; quare ratio PΠ ad BΘ minor est ratione ΘH ad PH: unde rectangulum sub PΠ, PH minus erit rectangulo sub BΘ, ΘH, ac rectangulum sub AP, PH multo minus erit contento sub BΘ, ΘH. Demonstravimus autem rectangulum sub EZ, ZH majus esse contento sub BΘ, ΘH; quapropter rectangulum sub AP, PH minus erit rectangulo sub EZ, ZH. Ratio igitur AP ad EZ minor est ratione ZH ad HP. Sed AP est ad EZ ut PX ad XZ, adeoque ratio PX ad XZ minor est ratione ZH ad HP; ac invertendo ratio ZX ad XP major erit ratione PH ad HZ: dein componendo ratio ZP ad PX major erit ratione PZ ad ZH. Hinc liquet ZH majorem esse quam PX. Sed ZH æqualis est dimidio lateris recti, ergo PX minor est dimidio lateris recti. Recta igitur AX non est aliqua è Minimis, sed Minima de puncto A ducta (per 8^{vam} & 24^{am} hujus) propius puncto Z cadet. Igitur si normalis EZ major fuerit quam recta K, nulla duci potest ad Sectionem recta per punctum E è qua abscindat Axis Minimam.

Quod si ZE æqualis fuerit ipsi K. Dico quod non nisi una sola recta, è qua abscindatur Minima, de puncto E ad sectionem duci poterit: quodque Minimæ ab extre-

extremitatibus reliquarum ex eodem E egredientium ductæ remotiores sunt à Vertice Γ.

Quoniam enim ΘH est ad HZ sicut K, vel eidem æqualis EZ, ad BΘ, & ZΛ est ad ΛΘ in eadem ratione, erit ΘH ad HZ ut ZΛ ad ΛΘ; *ac componendo* ΘZ *erit ad* HZ *ut* ΘZ *ad* ΛΘ: quare ZH æqualis est ipsi ΛΘ. Sed ZH æqualis est dimidio lateris recti, adeoque & ΛΘ dimidium est lateris recti; ac proinde ΛB (per 8^{vam} hujus) Minima est. Dico quoque quod non duci poterit per punctum E alia recta è qua abscindat Axis Minimam. Ducatur enim recta aliqua alia ut ME, & normalis sit MN ad Ξ producenda; sitque BO Tangens Sectionis: & juxta modum præmonstratum constabit, rectangulum sub BΘ, ΘH quod æquale est rectangulo sub EZ, ZH majus esse rectangulo sub MN, NH. Hinc iisdem argumentis, quibus præcedentia, probabitur ZH æqualem dimidio lateris recti majorem esse quam IN: adeoque IM non esse Minimam, sed Minimam de puncto M ductam cadere versus Z. Pariter si ducatur alia ut AXE, AX non erit Minima; sed Minima de puncto A ducta cadet quoque versus Z. Demissâ enim normali AP & ad Π productâ, eodem modo demonstrabitur rectangulum sub AP, PH minus esse rectangulo sub BΘ, ΘH; quod æquale est rectangulo sub EZ, ZH: unde constabit, juxta nuper ostensa, rectam XP minorem esse quam HZ, hoc est dimidio lateris recti. Proinde AX non erit aliqua è Minimis, sed Minima per A ducta cadet versus Z.



Sit jam EZ minor quam K. Dico duci posse de puncto E ad Sectionem ABΓ duas rectas è quibus abscindat Axis Minimas: ac, si ab extremitatibus rectarum inter has duas intermediarum ducantur Minimæ, abscindere illas segmenta Axis minora quam quæ abscindunt ipsæ rectæ ex E eductæ. Cæteræ vero rectæ exteriores auferent segmenta Axis majora segmentis quæ à Minimis ab earundem extremitatibus ad axem eductis abscinduntur.

Nam cum ZE minor est quam K, erit ratio EZ ad ΘB minor ratione ipsius K ad ΘB, hoc est ratione ΘH ad HZ; adeoque rectangulum sub EZ, HZ minus erit rectangulo sub BΘ, ΘH. Fiat igitur rectangulum sub TΘ, ΘH æquale rectangulo sub EZ, ZH; & sit ξH normalis ipsi ZH: & per datum punctum T, Asymptotis ξH, HΓ (per quartam secundi) describatur Hyperbola, quæ quidem sectio occurrat Parabolæ in punctis A, M. Jungantur rectæ EA, EM, ac demittantur normales AP, MN. Quoniam vero sectio ATM Hyperbola est, cujus Asymptoti ξH, HΓ; ac ducuntur à sectione illa ad angulos rectos AP, MN, TΘ: propterea (per 12^{am} II^{di}) rectangulum sub MN, NH æquale erit contento sub TΘ, ΘH, quod quidem æquale est rectangulo sub EZ, ZH. Hinc MN erit ad EZ sicut ZH ad HN. Sed MN est ad EZ sicut NI ad IZ, quare ZH est ad HN sicut NI ad IZ; ac componendo ZN est ad HZ sicut NZ ad NI: unde NI ipsi ZH sive dimidio lateris recti æqualis est. Recta igitur MI (per 8^{vam} hujus) Minima est. Pari modo constabit ipsam AX Minimam esse. Sunt itaque MI, AX duæ Minimæ concurrentes inter se in puncto E. Ac si educatur ex E ad Sectionem recta quævis alia inter AE & EM, & ab ejusdem extremitate ducatur Minima, cadet ea propius Vertici Sectionis. Quod si educatur recta aliqua extra ipsas AE, EM, cadet Minima ejus versus partes à Vertice Sectionis remotiores. Hæc autem omnia demonstrantur ex 44ta hujus libri. Q. E. D.

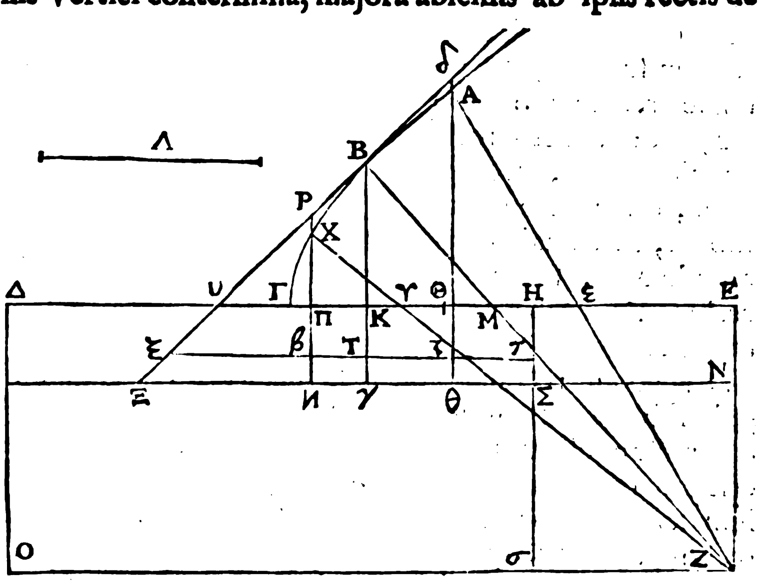
PROPO-

PROPOSITIO LII.

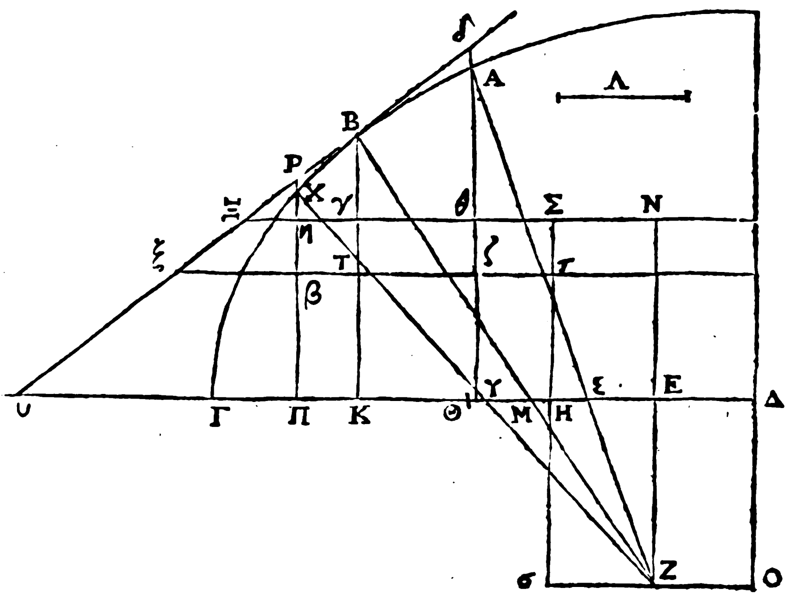
SI vero Sectio proposita ΑΒΓ fuerit Hyperbola vel Ellipsis, Axe ΕΓΔ centroque Δ descripta; ac sit ΖΕ Axi normalis, ita ut ΕΓ major sit dimidio lateris recti. Dico eadem omnia in his consequi, quæ in Parabola.

Quoniam ΔΓ semidiameter transversa est, ac ΓΕ major est semisse lateris recti, erit ratio ΔΓ ad ΓΕ minor ratione diametri transversæ ad latus rectum: atque adeo, si faciamus ΔΗ ad ΗΕ sicut diameter transversa ad latus rectum, cadet punctum Η inter Γ & Ε. Inter ipsas ΔΗ, ΔΓ inveniantur duæ mediæ proportionales ut ΔΘ, ΔΚ; & Axi normalis sit ΚΒ: ac fiat recta quædam Λ ad ipsam ΚΒ in ratione composita ex ratione ΔΕ ad ΕΗ & ratione ΗΚ ad ΚΔ.

Primum autem sit ΕΖ major quam Λ. Dico impossibile esse ducere, de puncto Ζ ad Sectionem, rectam aliquam è qua abscindat Axis Minimam; sed Minimas, ab extremitatibus quarumcunque rectarum de Ζ ad sectionem egredientium, abscindere Axis segmenta, sectionis Vertici contermina, majora abscissis ab ipsis rectis de Ζ eductis. Jungatur enim ΖΜΒ: Dico ΒΜ non esse Minimam. Fiat ΖΝ ad ΝΕ sicut diameter transversa ad latus rectum, ac ducantur duæ Ζσ Ο, ΝΣΞ Axi ΕΓΔ parallelæ, aliæque duæ ΗΣσ, ΔΟ ipsi ΕΖ parallelæ. Quoniam vero ΕΖ major est quam Λ, erit ratio ΕΖ ad ΚΒ major ratione ipsius Λ ad ΚΒ: componitur autem ratio ΕΖ ad ΚΒ ex ratione ΖΕ ad ΕΝ & ratione Κγ ad ΚΒ, ob Κγ ipsi ΕΝ æqualem. Ratio vero ipsius Λ ad ΒΚ, ex hypothesi, componitur ex ratione ΔΕ ad ΕΗ & ratione ΗΚ ad ΚΔ: adeoque ratio composita ex rationibus ΖΕ ad ΕΝ & Κγ ad ΚΒ major est composita ex rationibus ΔΕ ad ΕΗ & ΗΚ ad ΚΔ. Sed ΖΕ est ad ΕΝ sicut ΔΕ ad ΕΗ, quia utraque ΖΝ ad ΝΕ & ΔΗ ad ΗΕ est in ratione diametri transversæ ad latus rectum. Reliqua igitur ratio Κγ ad ΚΒ major est ratione ΗΚ ad ΚΔ: unde rectangulum sub Κγ, ΚΔ majus erit contento sub ΚΒ, ΗΚ. Rectangulum autem sub Κγ, ΚΔ est rectangulum ΔΚγ, adeoque rectangulum sub ΚΒ, ΗΚ minus est rectangulo ΔΚγ. Fiat rectangulum γΚΗ, nempe quod continetur sub Κγ, γΣ, commune: ac rectangulum sub Βγ, γΣ minus erit rectangulo ΔΗΣ. Est vero rectangulum ΔΣ æquale rectangulo σΝ, quia ΖΝ est ad ΝΕ sicut ΔΗ ad ΗΕ; quare rectangulum sub Βγ, γΣ minus est rectangulo σΝ. Probavimus autem, in demonstrandâ 45ta hujus, quod eidem æquale esse debuit, adeoque ΒΜ non est aliqua è Minimis; sed Minima de puncto Β educta abscindet portionem Axis Vertici sectionis adjacentem majorem quam ΓΜ.



Jam vero si ducatur recta alia ut ΖΤΧ, extra punctum Β: dico ipsam quoque ΧΤ non esse Minimam, sed Minimam de puncto Χ ductam abscindere Axis segmentum Vertici sectionis conterminum, majus quam ΓΤ. Ducatur sectionis Tangens ad punctum Β ut ΒΞ, & Axi normalis ΧΠ, quæ producatur ad Ρ. Quoniam vero ratio Κγ ad ΚΒ major est ratione ΗΚ ad ΚΔ, fiat ΤΚ ad ΚΒ sicut ΗΚ ad ΚΔ, ac per Τ axi ΕΓΔ parallela ducatur ξΤτ. Cum autem recta ΒυξΞ tangit sectionem, ac ΒΚ Axi ΔυΚ normalis est; erit rectangulum sub ΚΔ, Δυ (per 37am primi) æquale quadrato ex ΔΓ. Est igitur ΚΔ ad ΔΓ sicut ΔΓ ad Δυ, ac tertia proportionalis ipsis ΚΔ, ΔΓ est Δυ, uti tertia proportionalis ipsis ΗΔ, ΔΘ est recta ΚΔ: ac ΚΔ est ad ΔΓ sicut ΔΗ ad ΔΘ, *quia ΔΚ, ΔΘ sunt duæ mediæ proportionales inter ipsas ΔΗ, ΔΓ*; quapropter ΗΔ est ad ΔΚ sicut ΔΚ ad Δυ: & auferendo duas minores à duabus majoribus, reliqua HK ad reliquam Kυ erit ut HΔ ad ΔK. Sed HΔ est ad ΔK sicut TB ad BK, quia fecimus TK ad KB sicut HK ad KΔ; adeoque HK erit ad Kυ sicut TB ad BK. Verum TB est ad BK sicut Tξ ad Kυ; quare HK est ad Kυ ut Tξ ad Kυ; unde HK ipsi Tξ æqualis est. Sed HK æqualis est ipsi Tτ; adeoque Tτ æqualis est ipsi Tξ. Hinc fiet recta $\xi\beta$ minor quam Tτ, ac ratio Tβ ad $\beta\xi$ major erit ratione ipsius Tβ ad Tτ; & componendo ratio Tξ ad $\xi\beta$ major erit ratione $\beta\tau$ ad Tτ. Sed Tξ est ad $\xi\beta$ ut BT ad Pβ, ac proinde ratio TB ad Pβ major est ratione $\beta\tau$ ad Tτ. Rectangulum igitur sub BT, Tτ majus est rectangulo sub Pβ, $\beta\tau$; adeoque multo majus rectangulo sub X$\beta\tau$. Quinetiam cum HK est ad KΔ sicut TK ad KB, erit contentum sub HK, KB æquale rectangulo sub KΔ, TK; & facto rectangulo sub TK, KH communi, erit rectangulum sub BT, Tτ æquale rectangulo ΔHτ. Est autem rectangulum sub BT, Tτ majus contento sub Xβ, $\beta\tau$; adeoque rectangulum ΔHτ majus est rectangulo sub Xβ, $\beta\tau$: ac facto rectangulo sub $\beta\eta$, $\eta\Sigma$ communi, erit in Hyperbola rectangulum sub Xη, $\eta\Sigma$ minus utroque rectangulo ΔHτ, $\beta\eta\Sigma$ simul sumpto: vel in Ellipsi, sublato rectangulo B$\eta\Sigma$; erit differentia rectangulorum ΔHτ, $\beta\eta\Sigma$ major contento sub X$\eta\Sigma$, unde rectangulum X$\eta\Sigma$ multo minus erit rectangulo ΔHΣ. Sed rectangulum ΔHΣ æquale est rectangulo ΣNZ, quia ZN est ad NE sicut ΔH ad HE; rectangulum itaque sub Xη, $\eta\Sigma$ minus est rectangulo ΣNZ. Ostendimus autem in demonstratione propositionis 45æ hujus, quod eidem æquale esse debuit; adeoque recta XY non est Minima: ac Minima de puncto X ducta abscindet ab Axe portionem Vertici conterminam, majorem quam ΓY.

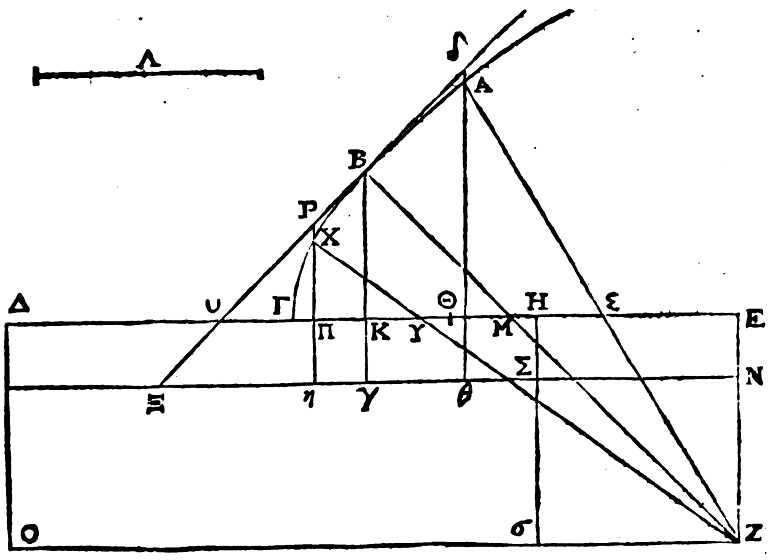


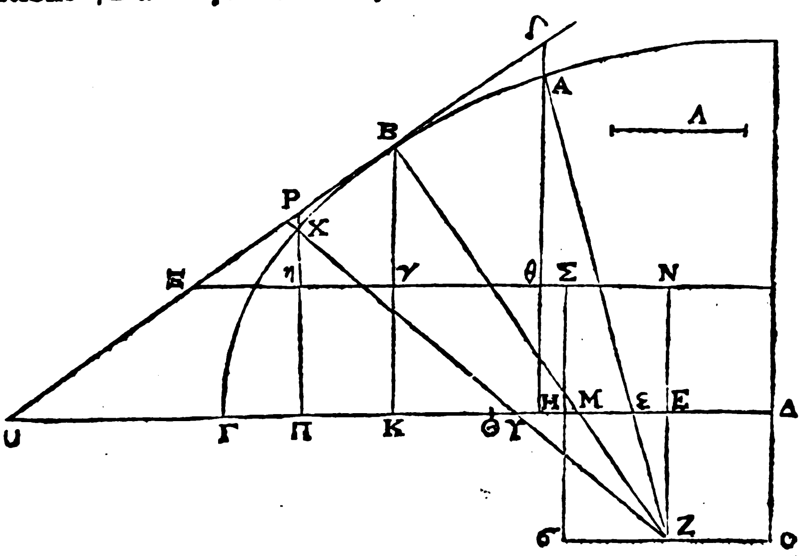
Præterea si ducatur alia recta ut ZιA: Dico quod Aι non est Minima, quodque Minima de puncto A ducta abscindit Axis portionem majorem quam Γι. Demittatur enim normalis Aθ, quæ producatur ad δ. Demonstravimus autem rectam Tτ æqualem esse ipsi Tξ, adeoque $\tau\zeta$ minorem esse quam Tξ; unde ratio Tζ ad $\zeta\tau$ major erit ratione ζT ad Tξ; ac componendo ratio Tτ ad $\tau\zeta$ major ratione $\zeta\xi$ ad Tξ. Sed $\zeta\xi$ est ad Tξ sicut $\delta\zeta$ ad BT; adeoque ratio Tτ ad $\tau\zeta$ major est ratione $\delta\zeta$ ad BT: ac rectangulum sub BT, Tτ majus erit rectangulo sub $\delta\zeta$, $\zeta\tau$. Unde argumento nuper usurpato simili, demonstrabitur rectangulum sub Aθ, $\theta\Sigma$ minus esse rectangulo ΣNZ; ac propterea (per 45am hujus) constabit Aι non esse Minimam; sed Minimam de puncto A eductam abscindere portionem Axis majorem quam Γι.

Ponamus jam normalem ZE æqualem esse ipsi Λ. Dico quod una sola recta duci possit de puncto Z, è quâ abscindatur Minima: quodque Minimæ ab extremitatibus reliquarum omnium ab eodem puncto eductarum abscindunt ex Axe portiones majores quam quæ auferuntur ab ipsis eductis.

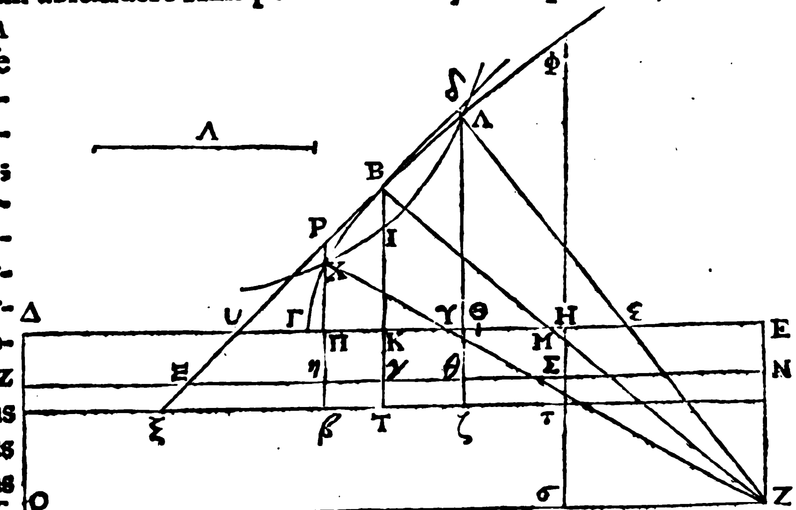
Ad modum superius dictum ducatur recta BK, & jungatur ZB: & erit ZE ad BK sicut Λ ad BK. Ratio autem ZE ad BK componitur ex ratione ZE ad EN & ratione Kγ, ipsi EN æqualis, ad BK: ratio vero ipsius Λ ad BK componitur ex ratione ΔE ad EH & ratione HK ad KΔ, per constructionem superius traditam. Ratio igitur composita ex rationibus ZE ad EN & Kγ ad KB æqualis est compositæ ex rationibus ΔE ad EH & HK ad KΔ. Sed ratio ZE ad EN æqualis est rationi ΔE ad EH; adeoque ratio Kγ ad KB eadem est ac ratio HK ad KΔ; ac proinde rectangulum sub Kγ, KΔ æquale erit contento sub KB, HK: & rectangulo sub Kγ, KH communi

muni facto, erit in Hyperbola summa vel in Ellipsi differentia, hoc est rectangulum sub Bγ, γΣ, æqualis rectangulo ΔΗΣ, quod rectangulo ΖΝΣ etiam æquale est; quare rectangulum ΖΝΣ æquale est rectangulo sub Bγ, γΣ. Probavimus autem (in demonstratione Prop. 45ae hujus) hoc ita se habere in Minimis: recta igitur BM Minima est. Dico quoque quod non duci possit de puncto Z recta alia è qua abscindat Axis Minimam. Ductâ enim aliâ ut ZTX, ac demissa normali XΠ, modo superius monstrato patebit rectam γΣ æqualem esse ipsi γΞ. Sed Ξη minor est quam γΣ; adeoque ratio ηγ ad Ξη major est ratione ejusdem ad γΣ; ac componendo γΞ ad Ξη major erit ratione ηΣ ad Σγ. Verum γΞ est ad Ξη sicut Bγ ad Pη; quare ratio Bγ ad Pη major est ratione ηΣ ad Σγ: proinde rectangulum sub Bγ, γΣ majus erit rectangulo sub Pη, ηΣ, ac multo majus rectangulo sub Xη, ηΣ. Demonstratum autem est rectangulum sub Bγ, γΣ æquale esse rectangulo ΣΝΖ; propterea rectangulum sub Xη, ηΣ minus erit rectangulo ΣΝΖ. At (per 45am hujus) eidem æquale esse debuit, adeoque recta XT non est Minima. Minima vero de puncto X educta abscindet ex Axe segmentum Sectionis Vertici adjacens ipsâ ΓΤ majus. Ac pari argumento demonstrabitur Aε non esse Minimam; sed Minimam de puncto A ductam abscindere Axis portionem majorem quam Γε.

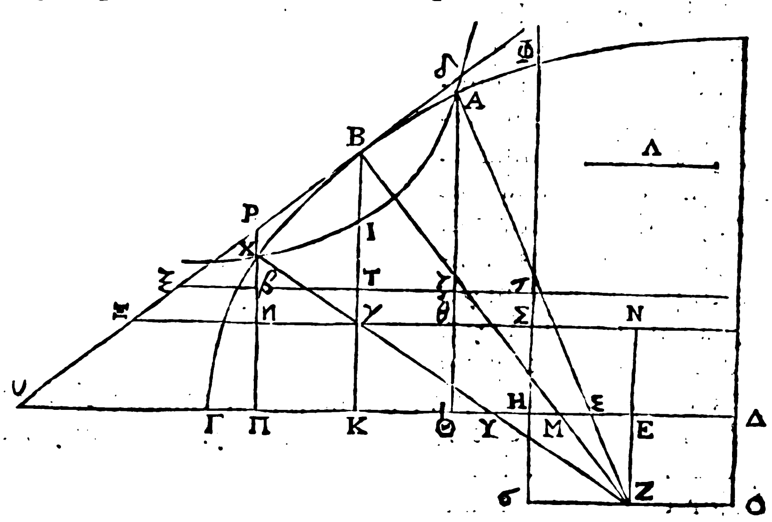




Denique sit ZE ipsâ Λ minor: Dico duci posse de puncto Z duas tantum rectas è quibus abscindat Axis Minimas; Minimas autem de punctis in Sectione, inter illas duas eductas intermedias, abscindere portiones Axis minores abscissis à rectis è puncto Z egredientibus: Minimas vero, ab extremitatibus cæterarum extra istas duas è puncto Z egressarum, abscindere segmenta Axis Vertici adjacentia, majora quam quæ ex eodem abscindunt ipsæ egressæ.

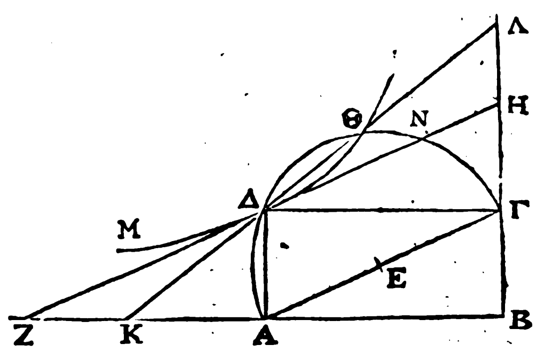


Quoniam enim ratio ΖΕ ad ΒΚ minor est ratione Λ ad ΒΚ; per superius demonstrata, constabit rationem Κγ ad ΚΒ minorem esse ratione ΗΚ ad ΚΔ, ac rectangulum ΣΝΖ minus esse rectangulo sub Βγ, γΣ. Fiat igitur rectangulum sub γΙ, γΣ æquale rectangulo ΣΝΖ, & per punctum Ι describatur Hyperbola Asymptotis ΞΣ, ΣΗΦ; quod quidem fiet juxta 4^{am} secundi. Sit Hyperbola illa ΑΙΧ, demissisque normalibus Αθ, Χη, erit utrumque rectangulum sub Αθ, θΣ ac sub Χη, ηΣ æquale rectangulo ΣΝΖ; ac proinde (juxta præmissa in hac propositione) constabit rectas Αι, ΧΥ esse duas Minimas, quæ productæ occurrent in puncto Ζ. Demonstravimus autem (in 45^{ta} hujus) quod, si hoc ita se habeat, ac si ducatur recta aliqua alia è puncto Ζ, non abscindi possit ex eadem Minima. Nam si è puncto Ζ egrediatur recta inter ipsas Αι, ΧΥ, & ab extremitate ejus ducatur ad Axem Minima; abscindet illa Axis portionem Vertici conterminam, minorem segmento à rectâ per Ζ ductâ abscisso. Contrarium autem fiet in Minimis ab extremitatibus reliquarum eductarum, quæ abscindent Axis portiones majores. Quæ vero dicta sunt de Axe Ellipseos intelligi debent de Axe majori. Q. E. D.



INTERPRETIS ARABIS SCHOLION.

In sequentibus hujus libri requiritur inventio duarum mediarum proportionalium inter duas rectas datas, idemque postulat Apollonius *in hac propositione. Modus autem effectionis hic est. Sint duæ rectæ* ΑΒ, ΒΓ; *ac si æquales fuerint, manifestum est terminos interpositos etiam iisdem æquales esse. Quod si inæquales fuerint, sit* ΑΒ *major; & conveniant ad angulos rectos in* Β, *ac producantur indefinitè. Completo autem parallelogrammo* ΑΒΓΔ, *jungatur* ΑΓ *quæ bisecetur in puncto* Ε; *ac centro* Ε *describatur Circulus* ΑΒΓΔ *parallelogrammo circumscriptus; & per* Δ *agatur recta* ΖΔΗ *ipsi* ΑΓ *parallela, quæ divisa erit bifariam in puncto* Δ, *ob æquales* ΑΕ, ΕΓ: *intersecabit vero arcum* ΔΓ, *quia* ΓΔ *major est quam* ΔΑ: *occurrat autem ei in puncto* Ν. *Describatur (juxta quartam* II^{di}*) per punctum* Δ *Asymptotis* ΒΖ, ΒΗ *Hyperbola* ΘΔΜ; *& erit* ΖΗ *(per nonam* II^{di}*) Tangens ejusdem, ob æquales* ΖΔ, ΔΗ. *Ac manifestum est Sectionem illam Circulo occurrere inter puncta* Δ, Ν; *aliter enim caderet segmentum arcus* ΔΝ *& subtensa ejusdem inter sectionem Tangentemque ejus, quod (per* 32^{dam} *primi) fieri non potest. Neque erunt intersectiones cum circulo* ΑΒΓΔ *(per* 33^{am} II^{di}*) plures quam duæ. Occurrat igitur in punctis* Δ, Θ; *ac juncta* ΔΘ *producatur utrinque ad* Κ, Λ; *ipsæque* ΔΚ, ΘΛ *(per* 8^{vam} II^{di}*) æquales erunt. Dico quod inter rectas* ΑΒ, ΒΓ *duæ mediæ proportionales sunt* ΛΓ, ΚΑ.



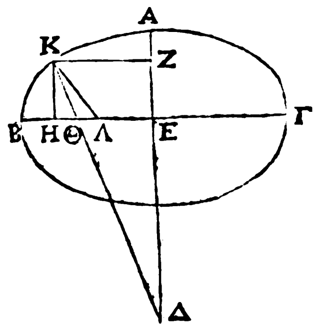
Quoniam ΔΚ *ipsi* ΘΛ *æqualis est, erit rectangulum sub* ΔΛ, ΛΘ, *hoc est (ob Circulum) rectangulum sub* ΒΛ, ΛΓ, *æquale rectangulo sub* ΘΚ, ΚΔ, *sive sub* ΒΚ, ΚΑ; *adeoque* ΛΓ *erit ad* ΚΑ *sicut* ΒΚ *ad* ΒΛ. *Sed* ΒΚ *est ad* ΒΛ *sicut* ΔΓ, *hoc est* ΑΒ *ad* ΛΓ; *atque etiam in eâdem est ratione* ΚΑ *ad* ΑΔ, hoc est ΒΓ. *Hoc autem fit ob similitudinem triangulorum* ΛΒΚ, ΛΓΔ, ΔΑΚ. *Proinde* ΑΒ *erit ad* ΛΓ *sicut* ΛΓ *ad* ΚΑ *ac* ΚΑ *ad* ΒΓ; quare ΛΓ, ΚΑ sunt duæ mediæ proportionales inter ΑΒ, ΒΓ. Q. E. D.

PROPO-

PROPOSITIO LIII.

SI capiatur, extra dimidium Ellipsis ab Axe majore divisæ, punctum quoddam, à quo normalis ad Axem demissa cadat super centrum Sectionis; ac fuerit ratio hujus normalis semiaxe minore auctæ ad semiaxem minorem, non minor ratione diametri transversæ ad latus rectum: Ex hoc puncto egredi nequit recta aliqua ad Sectionem, cujus portio intercepta inter Axem & Sectionem sit Minima; *sed* Minima *ab extremitate alicujus ductæ cadet ad eas partes ejus quæ à Vertice Axis majoris remotiores sunt.*

Sit ΒΑΓ semi-ellipsis, Axe majore ΒΓ; & detur extra illam punctum quodvis Δ, unde demissa normalis cadat super Sectionis centrum; hoc est, ducta ΔΕ ad angulos rectos ipsi ΓΒ, sit punctum Ε, super quod cadit, centrum Sectionis: & sit ratio ΔΑ ad ΑΕ non minor ratione diametri transversæ ad latus rectum. Dico non duci posse de puncto Δ rectam aliquam, cujus portio intercepta inter Sectionem & Axem ΒΓ Minima sit; ac si educatur ex eo recta quælibet ΔΚ, Minima è puncto Κ ducta cadet versus Ε, *respectu ipsius* ΔΚ.

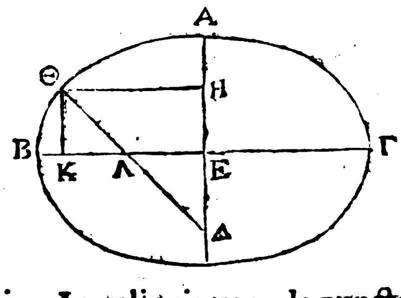


Ducantur normales ΚΗ, ΚΖ, ac sit ratio ΔΑ ad ΑΕ non minor ratione diametri transversæ ad latus rectum; erit autem ratio ΔΑ ad ΑΕ minor ratione ΔΖ ad ΖΕ; adeoque ratio ΔΖ ad ΖΕ sive ΕΗ ad ΗΘ major erit ratione diametri transversæ ad latus rectum. Fiat itaque ΕΗ ad ΗΛ sicut diameter transversa ad latus rectum; ac recta ΚΛ (per decimam hujus) Minima erit, adeoque recta ΚΘ (per 25[am] hujus) non est Minima: sed recta Minima per Κ ducta cadet propius centro Ε quam recta ΚΔ. Q. E. D.

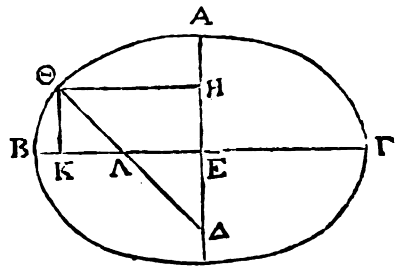
PROPOSITIO LIV.

SI capiatur punctum quodvis extra dimidium Ellipseos ab Axe majore divisæ, à quo demissa normalis super centrum cadat; ac sit ratio hujus normalis una cum semiaxe minore simul sumptæ ad semiaxem minorem, minor ratione diametri transversæ ad latus rectum: non potest exire ab hoc puncto, ad alterutrum Quadrantem Ellipseos, nisi una sola recta, cujus portio intercepta inter Axem majorem & sectionem sit Minima: *è nullâ vero reliquarum ad idem latus eductarum abscindi potest* Minima. *Sed si propior fuerit Vertici sectionis quam* Minima *illa,* Minima *ab ejusdem extremitate ducta remotior erit à Vertice; è contra vero, si remotior à Vertice fuerit,* Minima *ab extremitate ejus educta cadet Vertici propius.*

Sit ΒΑΓ semi-ellipsis, Axe majore ΒΓ; & detur extra illam punctum aliquod Δ, à quo normalis cadat super centrum; ut ΔΕ cadens super centrum Sectionis Ε, ad angulos rectos Axi ΓΒ: sitque ratio ΔΑ ad ΑΕ minor ratione diametri transversæ ad latus rectum. Dico quod ad eundem sectionis quadrantem non nisi una recta duci possit de puncto Δ, cujus portio inter Curvam ΒΑΓ & Axem ΒΓ intercepta sit aliqua è Minimis. In reliquis vero de puncto Δ eductis; si ab extremitatibus earum quæ Vertici Β propiores sunt, agantur Mi-



nimæ, cadent eæ remotiores à puncto Β: Minimæ vero, ab extremitatibus rectarum ex Δ exeuntium punctoque Β remotiorum, propiores erunt Vertici quam ipsæ eductæ.

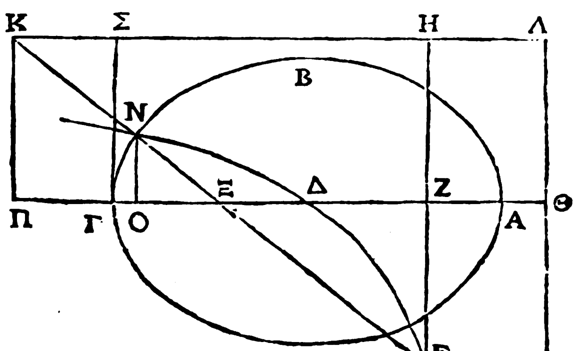


Quoniam enim ratio ΔΑ ad ΑΕ minor est ratione diametri transversæ ad latus rectum; fiat ΔΗ ad ΗΕ ut diameter transversa ad latus rectum, & ducantur ΗΘ, ΘΚ ipsis ΒΓ, ΑΕ parallelæ; & jungatur ΘΛΔ. Dico ΘΛ, partem interceptam ipsius ΘΔ, esse Minimam. Nam ΔΗ est ad ΗΕ sicut ΕΚ ad ΚΛ, quare ΕΚ est ad ΚΛ ut diameter transversa ad latus rectum; punctum autem Ε est centrum sectionis: quare (per 11^{am} hujus) ΘΛ Minima est. Occurrit autem Axi minori in puncto Δ; adeoque si exeat de puncto Δ recta alia præter ΔΘ, quæ remotior fuerit eâ à Vertice Β, Minima ab extremitate ejus ducenda propior erit puncto Β quam recta ipsa. Quod si minus distet à Vertice Β quam ΔΘ, Minima ab ejus extremitate ducta (per 46^{am} hujus) occurret Axi majori in puncto à Vertice Β remotiori.

PROPOSITIO LV.

SI sumatur punctum aliquod extra dimidium Ellipsis ab Axe majore bisectæ, à quo demissa normalis non cadat super centrum: Duci poterit ab eodem recta occurrens alteri semissi Axis majoris in quem non cadit normalis, cujus portio intercepta inter sectionem & Axem majorem sit Minima; *nec ab eodem puncto duci potest alia recta occurrens eidem reliquo semiaxi, è qua abscindatur* Minima.

Sit ΑΒΓ Ellipsis, Axe majore ΑΓ ac centro Δ; & sit datum punctum Ε, è quo demittatur Axi ΑΓ normalis ΕΖ; nec sit centrum in puncto Ζ. Dico quod duci possit ex Ε recta occurrens ipsi ΔΓ, ita ut inter sectionem ΑΒΓ & semiaxem ΔΓ intercipiatur Minima. Fiat ΕΗ ad ΗΖ sicut diameter transversa ad latus rectum; atque etiam in eadem ratione fiat ΔΘ ad ΘΖ: ac per Η ipsi ΑΓ parallela ducatur ΚΛ, uti per Θ ipsi ΕΖ parallela recta ΜΘΛ: dein per datum punctum Ε, Asymptotis ΜΛ, ΛΚ (per 4^{am} secundi) describatur Hyperbola. Sit Hyperbola illa ΕΝ, occurrens Ellipsi in puncto Ν, jungaturque ΝΞΕ. Dico ΝΞ Minimam esse.



Producatur ΕΝ ad occursum utriusque Asymptoti ΜΛ, ΛΚ; conveniat autem iis in punctis Μ, Κ, ac demittantur ad ΑΓ normales ΝΟ, ΚΠ: & erit (per 8^{vam} secundi) ΜΕ ipsi ΚΝ æqualis; adeoque ΖΘ ipsi ΠΟ æqualis est. Est autem ΕΗ ad ΗΖ sicut diameter transversa ad latus rectum, & ut ΕΗ est ad ΗΖ ita ΖΠ ad ΠΞ; adeoque ΖΠ est ad ΠΞ ut diameter transversa ad latus rectum. Sed ΔΘ est ad ΘΖ in eadem ratione diametri transversæ ad latus rectum; quare ΖΠ est ad ΠΞ ut ΔΘ ad ΘΖ. Recta vero ΘΖ ipsi ΠΟ æqualis est, uti ΔΘ utrisque ΠΟ, ΔΖ simul sumptis. Auferendo igitur ab ipsa ΖΠ utrasque ΖΔ, ΠΟ, & ab ipsa ΠΞ rectam ΠΟ, erit residuum ΔΟ ad residuum ΟΞ ut totum ΠΖ ad totum ΠΞ; hoc est ut diameter transversa ad latus rectum. Verum ΝΟ normalis est, & Δ est sectionis centrum; ergo (per 10^{um} hujus) recta ΝΞ Minima est. Q. E. D.

PROPO-

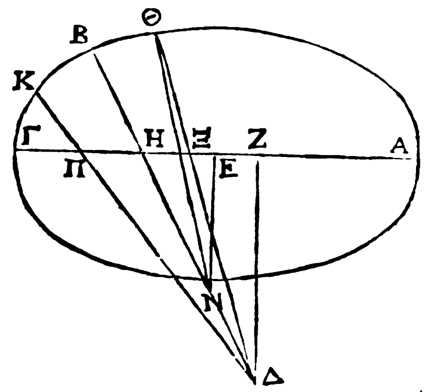
PROPOSITIO LVI.

Diximus autem in præcedente propositione Hyperbolam Ellipsi concursuram: quod hoc modo demonstratur. Ducatur ΓΣ tangens Ellipsin in Vertice Γ. Quoniam vero ΔΘ est ad ΘZ sicut diameter transversa ad latus rectum, ac ratio ΔΘ ad ΘZ minor est ratione ΓΘ ad ΘZ; erit ratio ΓΘ ad ΘZ major ratione diametri transversæ ad latus rectum, nempe ratione HE ad HZ. Cum autem ratio ΓΘ ad ΘZ *major est ratione* HE *ad* HZ, *rectangulum igitur sub* ΓΘ, HZ majus erit rectangulo sub ΘZ, HE. Sed HZ æqualis est ipsi ΓΣ, uti ZΘ ipsi HA: quapropter rectangulum sub ΘΓ, ΓΣ majus erit contento sub EH, HA. Sectio igitur Hyperbolica per punctum E transiens, ac Asymptotis MA, AΣ descripta (per conversam duodecimi secundi) occurret rectæ ΓΣ. Est autem ΓΣ Tangens Sectionis ABΓ, ac proinde Hyperbola illa occurret semi-ellipsi ABΓ. Q. E. D.

PROPOSITIO LVII.

Hoc demonstrato, jam restat probandum nullam aliam rectam eidem Sectionis quadranti occurrentem, ab eodem puncto duci posse, è qua abscindat Axis Minimam.

Sit ABΓ Ellipsis, Axe majore ΓA & centro E; & à dato infra Axem puncto Δ demittatur normalis ΔZ, ac ex eodem Δ ducatur recta ΔHB, è qua abscissa sit Minima HB. Ducantur etiam ΔK, ΔΘ, *occurrentes Axi in punctis* Π, Ξ. *Dico neque* ΘΞ, *nec* KΠ *Minimas esse.*

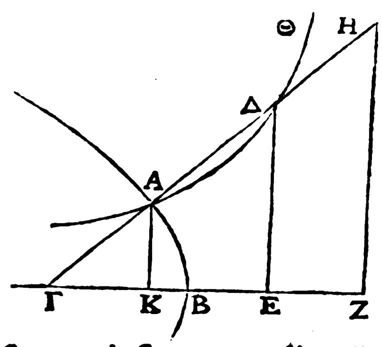


E centro Sectionis E ducatur EN ipsi ΔZ parallela, occurrens rectæ BHΔ in puncto N; ac jungatur NΘ. Quoniam vero BH Minima est, occurrens Minimæ per centrum Sectionis ductæ in puncto N, intra angulum HZΔ; portio rectæ NΘ inter Axem & Sectionem intercepta non erit Minima: sed Minima de puncto Θ ducta (per 46^{am} hujus) propior erit Vertici Γ; ac proinde recta ΘΞ *à Vertice adhuc remotior* (per 25^{am} hujus) non erit Minima. Pari modo demonstrabitur rectam KΠ non esse Minimam, Minimamque per punctum K ductam longius à Vertice Γ cum Axe concurrere quam KΠ. Q. E. D.

PROPOSITIO LVIII.

Dato quovis puncto extra ambitum Sectionis posito, quod nec sit in Axe ejus, neque in eodem producto: possumus educere ex eo rectam, cujus intercepta inter Sectionem & Axem sit Minima.

Sit autem sectio imprimis Parabola, ut AB; & sit Axis productus ΓZ: detur vero extra sectionem & ad latus Axis punctum Δ. Dico quod è puncto Δ egredi potest recta, cujus portio intercepta inter sectionem & Axem ejus Minima sit.



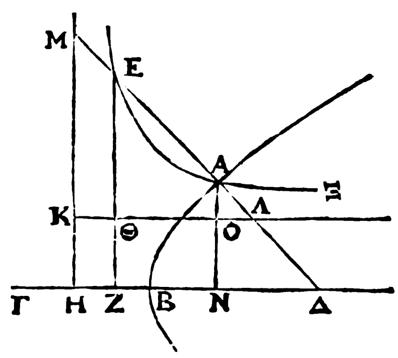
Demittatur normalis ΔE ad Axem ΓZ, & fiat EZ dimidium lateris recti; sitque ZH normalis in ipsam ZΓ. Dein per punctum Δ, Asymptotis HZ, ZΓ describatur Hyperbola AΔΘ, quæ occurrat Parabolæ in puncto A. Jungatur ΔA, ac producatur ad H, Γ: *Dico* AΓ *Minimam esse.*

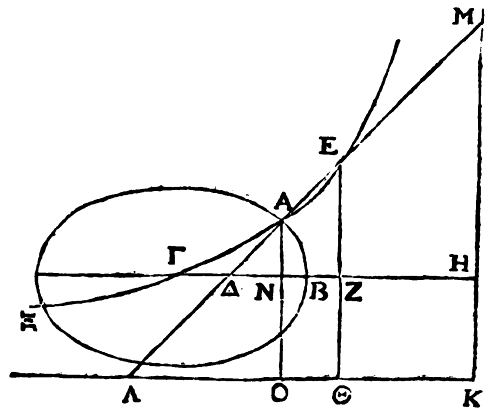
Ex A demittatur ad ΓZ cathetus AK; cumque ΔH (per 8^{vam} secundi) ipsi AΓ æqualis est; erit quoque recta ZE ipsi KΓ æqualis. Sed ZE dimidium est lateris recti; adeoque & KΓ æqualis est dimidio lateris recti. Est autem KA normalis, ac proinde (per 8^{vam} hujus) recta AΓ Minima est. Q. E. D.

PROPOSITIO LIX.

SI vero ſectio fuerit Hyperbola vel Ellipſis ut ΑΒ, Axe ΒΔ & centro Γ; ac detur punctum quoddam Ε extra ſectionem, nec in Axe, neque in Axe producto; à quo demittatur ad Axem ΒΔ normalis ΕΖ. Imprimis autem non cadat ſuper Centrum. Dico quod poſſumus ducere per punctum Ε rectam, è quâ portio abſciſſa inter Curvam ΑΒ & Axem ΒΔ ſit Minima.

Fiat ΓΗ ad ΗΖ ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, & ducatur ad angulos rectos normalis ΗΜ. Fiat etiam ΕΘ ad ΘΖ in eadem ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum, & agatur recta ΚΛ per punctum Θ ipſi ΖΔ parallela; & per punctum datum Ε deſcribatur (per 4$^{\text{tam}}$ ſecundi) Hyperbola Aſymptotis ΜΚ, ΚΛ; quæ quidem occurret ſectioni ΑΒ. Sit autem Hyperbola illa ΕΑΞ conveniens ſectioni ΑΒ in puncto Α; & jungatur ΕΑ producaturque utrinque ad Μ, Λ; *occurrat autem Axi ad* Δ. *Dico rectam* ΑΔ *Minimam eſſe.* Demittatur normalis ΑΝ.

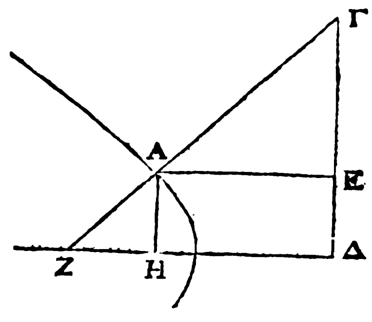




Quoniam vero recta ΜΕ (per 8$^{\text{vam}}$ ſecundi) æqualis eſt ipſi ΑΛ; erit quoque ΚΘ ipſi ΟΛ, ac proinde ΟΚ ipſi ΘΛ æqualis, cui etiam æqualis eſt ΝΗ. Eſt autem ΖΔ ad ΘΛ ſive ΝΗ, ut ΖΕ ad ΕΘ; hoc eſt ut ΖΓ ad ΓΗ: *quare alternando* ΖΔ *eſt ad* ΖΓ *ſicut* ΝΗ *ad* ΗΓ. Ac componendo in Hyperbola, vel dividendo in Ellipſi erit ΔΓ ad ΓΝ ſicut ΖΓ ad ΓΗ; quare per converſionem rationis in Ellipſi, vel dividendo in Hyperbola, ΓΝ erit ad ΝΔ, ſicut ΓΗ ad ΗΖ, hoc eſt, ut diameter tranſverſa ad latus rectum. Verum ΑΝ normalis eſt in Axem ΒΔ, adeoque (per 9$^{\text{am}}$ & 10$^{\text{am}}$ hujus) ΑΔ Minima eſt. Pari modo demonſtrabitur, ſi cadat normalis ΖΕ ad alteram partem verticis Β.

PROPOSITIO LX.

QUod ſi in Hyperbola normalis, à puncto Γ extra ſectionem dato demiſſa, cadat ſuper centrum, ut ΓΔ. Fiat ΓΕ ad ΕΔ ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, & ducatur ΑΕ Axi ΔΖ parallela, & producatur ad occurſum ſectionis in Α. Jungatur ΓΑ conveniens Axi in Ζ. Dico ΑΖ Minimam eſſe.



De puncto Α ducatur ad Axem normalis ΑΗ. Quoniam vero ΓΕ eſt ad ΕΔ ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum; ΓΑ ad ΑΖ erit in eadem ratione. Sed ut ΓΑ ad ΑΖ ita ΔΗ ad ΗΖ: quare ΔΗ eſt ad ΗΖ ut diameter tranſverſa ad latus rectum. Eſt autem ΑΗ normalis in Axem; adeoque (per nonam hujus) ΑΖ Minima eſt. Q. E. D.

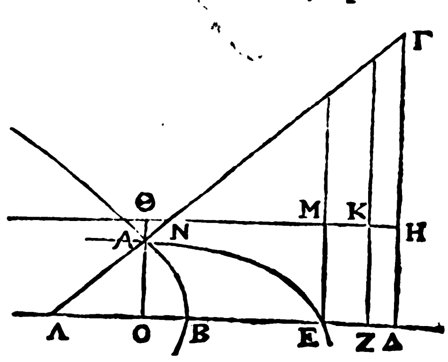
PROPOSITIO LXI.

AT vero ſi normalis de puncto dato demiſſa cadat ab altera parte, ſive ultra centrum Hyperbolæ ad modum rectæ ΓΔ. Sit Ε centrum Hyperbolæ, ac fiat ΕΖ ad ΖΔ ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, ac in eadem ratione fiat ΓΗ ad ΗΔ; & ducatur ΗΘ Axi ΔΕ parallela, ut & ΖΚ, ΕΜ ipſi ΓΔ parallelæ. Per punctum Ε Aſymptotis ΘΚ, ΚΖ deſcribatur Hyperbola quæ occurret ſectioni ΑΒ.

Occurrat

Occurrat autem in puncto Α, ac sit Hyperbola illa ΑΕ. Jungatur ΓΑ quæ producatur ad Λ. Dico ΑΛ Minimam esse.

Demittatur recta ΘΑΟ normalis super Axem ΛΟ. Jam fecimus ΓΗ ad ΗΔ sicut ΕΖ ad ΖΔ; adeoque rectangulum sub ΓΗ & ΗΚ (hoc est ΖΔ) æquale est rectangulo sub ΚΜ (sive ΕΖ) & ΜΕ, hoc est ΗΔ. Sed rectangulum sub ΚΜ, ΜΕ (per 12^am secundi) æquale est rectangulo sub ΚΘ, ΘΑ, quia sunt inter Asymptotos; quare rectangulum sub ΓΗ, ΗΚ æquale est rectangulo sub ΚΘ, ΘΑ; unde ΑΘ est ad ΓΗ sicut ΗΚ ad ΚΘ. Verum ΑΘ est ad ΓΗ sicut ΘΝ ad ΝΗ; ac propterea ΗΚ est ad ΚΘ sicut ΘΝ ad ΝΗ, *ac componendo* ΗΘ *est ad* ΘΚ *sicut* ΘΗ *ad* ΗΝ, *adeoque* ΘΚ *æqualis est ipsi* ΗΝ. Est autem ΘΚ ipsi ΖΟ æqualis, ac proinde ΖΟ, ΝΗ æquales sunt. Hinc ΛΔ est ad ΝΗ sicut eadem ΛΔ ad ΖΟ, quare ΛΔ est ad ΖΟ sicut ΛΓ ad ΓΝ; ac ΛΓ est ad ΓΝ sicut ΔΓ ad ΓΗ; quapropter ΛΔ est ad ΖΟ sicut ΔΓ ad ΓΗ. Sed ΔΓ est ad ΓΗ sicut ΔΕ ad ΕΖ; *adeoque permutando* ΛΔ *est ad* ΔΕ *sicut* ΟΖ *ad* ΖΕ. Residuum itaque ΛΕ ad residuum ΕΟ est ut ΔΕ ad ΕΖ: ac dividendo, ΕΟ ad ΟΛ erit ut ΕΖ ad ΖΔ, hoc est ut diameter transversa ad latus rectum. Cum autem ΕΟ est ad ΟΛ ut diameter transversa ad latus rectum, erit (per nonam hujus) ΑΛ Minima. Q. E. D.

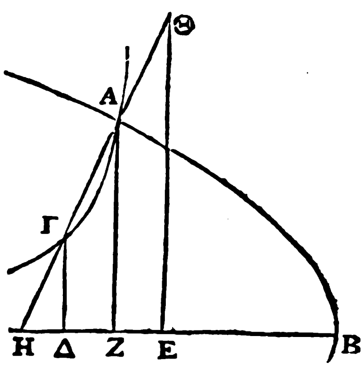


PROPOSITIO LXII.

Dato quovis puncto intra ambitum Sectionis Conicæ quod non sit in Axe: *possumus* Minimam *ducere per idem punctum.*

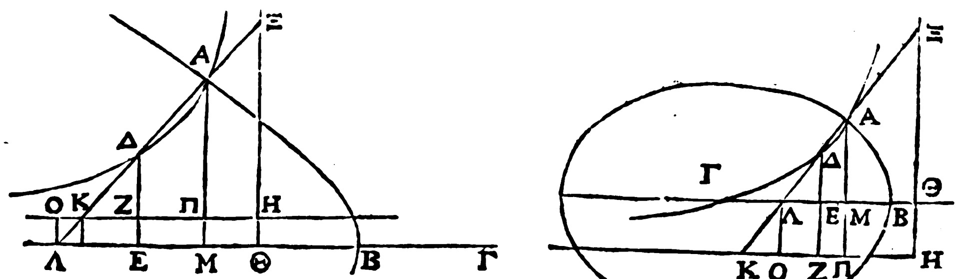
Sit autem imprimis Sectio Parabola, ut ΑΒ, Axe ΒΗ: ac detur punctum Γ intra ambitum Sectionis. Dico possibile esse ducere per punctum Γ rectam Minimam.

De puncto Γ demittatur ad Axem normalis ΓΔ, & sit ΔΕ dimidium lateris recti: ipsi autem ΒΗ per Ε erigatur ad angulos rectos recta ΕΘ; & per punctum Γ Asymptotis ΘΕ, ΕΗ describatur Hyperbola ΑΓ, quæ quidem occurret Parabolæ: occurrat autem in puncto Α, ac juncta recta ΑΓ producatur ad Η, Θ. Dico rectam ΑΗ esse Minimam. Demittatur normalis ΑΖ: cumque ΓΗ (per 8^vam secundi) ipsi ΘΑ æqualis est, erit ΔΗ ipsi ΕΖ æqualis; *ac proinde* ΕΔ *ipsi* ΖΗ *æqualis*. Sed ΕΔ est dimidium lateris recti, adeoque & ΖΗ dimidium est lateris recti. Quocirca ΑΗ (per 8^vam hujus) Minima est. Q. E. D.

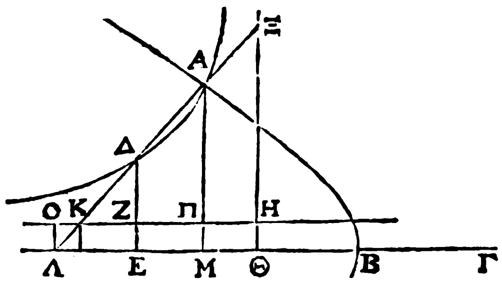


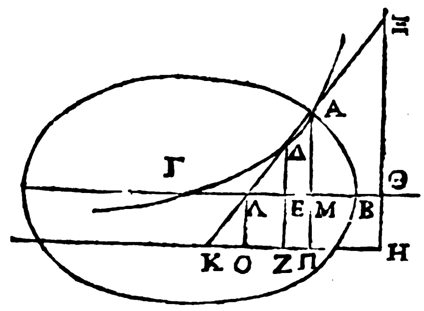
PROPOSITIO LXIII.

Si vero Sectio ΑΒ fuerit Hyperbola vel Ellipsis, Axe ΒΛ ac centro Γ: ac detur punctum aliquod Δ, in situ superius descripto. Dico quod possumus ducere per punctum Δ Minimam.



Demittatur enim normalis ΔΕ; ac fiat ΓΘ ad ΘΕ, ut & ΔΖ ad ΖΕ, sicut diameter transversa ad latus rectum; & per punctum Ζ ducatur ΗΚ Axi ΒΓ parallela, ipſi vero ΔΕ parallela ſit recta ΗΘΞ: Deſcribatur per punctum Δ Aſymptotis ΗΞ, ΗΚ, Hyperbola ΑΔ, quæ quidem occurret datæ Hyperbolæ vel Ellipſi. Sit autem punctum occurſus Α, ac juncta ΑΛ producatur ad Λ, Ζ. Dico rectam ΑΛ Minimam eſſe.





Quoniam enim ΞΛ, ΔΚ (per 8^{vam} ſecundi) æquales ſunt, erunt etiam ΗΠ ſive ΘΜ & ΚΖ æquales: eſt autem ΖΚ ad ΚΟ differentiam inter ΖΚ & ΕΛ, ſicut ΔΖ ad ΖΕ; ac ΔΖ eſt ad ΖΕ ſicut ΓΘ ad ΘΕ; quare ΘΜ eſt ad differentiam inter ΘΜ & ΕΛ ut ΓΘ ad ΘΕ; *adeoque per converſionem rationis ac permutando* ΜΘ *eſt ad* ΘΓ *ſicut* ΛΕ *ad* ΕΓ; unde dividendo in Ellipſi vel componendo in Hyperbola erit ΓΜ ad ΜΛ ſicut ΓΘ ad ΘΕ. Sed ΓΘ eſt ad ΘΕ ut diameter tranſverſa ad latus rectum, ac ΜΛ Axi ΘΓ normalis eſt. Quapropter recta ΑΛ (per 9^{am} & 10^{am} hujus) Minima eſt. Q. E. D.

PROPOSITIO LXIV.

SI detur punctum infra Axem Parabolæ vel Hyperbolæ, à quo recta ad Sectionis Verticem ducta contineat cum Axe angulum acutum; impoſſibile autem ſit ut ducatur è puncto illo recta aliqua cujus portio inter Axem & Sectionem intercepta ſit Minima; *vel* in Ellipſi, *ſi una tantum fuerit recta, ex dato puncto exeuns ad partes Sectionis contrarias illis ad quas jacet datum punctum, è qua abſcindat Axis* Minimam: *erit recta, quæ de puncto illo ad Verticem Sectionis ducitur,* Minima *omnium ad illam Sectionis partem ab eodem ducendarum, atque huic propior minor erit remotiore.*

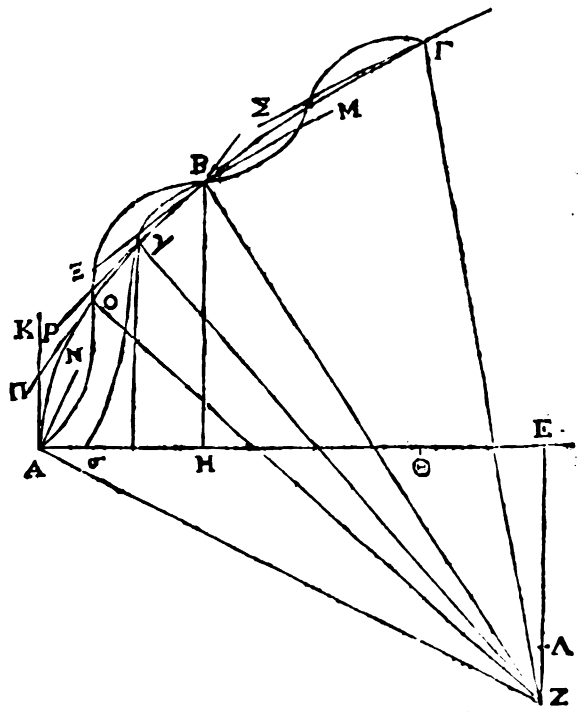
Sit autem imprimis ſectio Parabola ut ΑΒΓ, Axe ΑΕ; ſitque datum punctum Ζ infra Axem, ita ut angulus ΖΑΕ, qui continetur à rectâ per punctum illud ad Verticem ſectionis ductâ & Axe ΑΕ, acutus fuerit. Primum autem non ſit poſſibile, ut ducatur ad ſectionem recta aliqua cujus portio inter Curvam & Axem intercepta ſit Minima. Dico quod Minima omnium, quæ duci poſſint ad ſectionem ΑΓ de puncto Ζ, eſt ipſa ΑΖ; quodque eidem propiores ductæ minores ſunt remotioribus. Hoc autem manifeſtum erit ex eo quod, rectis quibuſlibet è puncto Ζ eductis & ad ſectionem continuatis, ab earundem extremitatibus non duci poſſint rectæ Minimæ, quæ non occurrant Axi remotius à Vertice Α quam ipſæ rectæ è puncto Ζ eductæ.

Demonſtrabitur autem hoc modo. Demittatur normalis ΖΕ; ac recta ΑΕ vel erit æqualis ſemilateri recto, vel major eo vel minor. Sit autem imprimis æqualis ei vel minor eo; ac è cunctis rectis per Ζ ad ſectionem ductis, non erit ulla cujus portio inter Sectionem & Axem intercepta Minima eſt; ſed Minimæ, ab earundem in Sectione extremitatibus ad Axem ductæ, cadent verſus partes ab Α remotiores quam rectæ quæ ex Ζ prodeunt, juxta 49^{am} hujus.

Si vero ΑΕ major fuerit ſemilatere recto, ſit ΕΘ dimidium lateris recti; ac ſit ΘΗ duplum ipſius ΑΗ; & ad punctum Η ipſi ΑΕ normalis ſit ΗΒ: ac fiat ΕΛ ad ΗΒ ſicut ΘΗ ad ΘΕ. Erit autem ΖΕ vel æqualis ipſi ΕΛ, vel minor eâ, vel major. At non erit æqualis ipſi ΕΛ, quia (per 51^{am} hujus) ſi ΖΕ fuerit ipſi ΕΛ æqualis, duci poſſit una recta de puncto Ζ è quâ abſcinderetur Minima: ΖΕ igitur non erit ipſi ΕΛ æqualis. Pari modi conſtabit ΕΖ minorem eſſe non poſſe quam recta ΕΛ. Nam

* (per

(per eandem 51$^{\text{am}}$ hujus) si EZ minor fuerit quam EA, duci possint duæ rectæ, quarum utriusque portio inter Sectionem & Axem intercepta sit Minima; contra Hypothesin. Posuimus enim non duci posse de puncto Z aliquam rectam è quâ interciperetur Minima: adeoque ZE non est minor quam EA, neque etiam eidem æqualis est, ac propterea major erit eâ. Per eandem autem 51$^{\text{am}}$ constat, quod si ZE major fuerit quam EA, non duci possit de puncto Z recta ulla cujus portio intercepta inter sectionem & Axem fuerit Minima: quodque rectis quibusvis de puncto Z ad sectionem eductis, si ab extremitatibus earum agantur Minimæ ad Axem, convenirent illæ Axi ultra occursûs rectarum è Z egredientium, sive remotius à Vertice A. Quapropter, sive AE æqualis fuerit dimidio lateris recti, sive minor eo; vel etiam si AE major fuerit dimidio lateris recti, simulq; ZE major quam EA; rectæ omnes de puncto Z ad sectionem prodeuntes occurrent Axi propius puncto Verticis A quam Minimæ ab extremitatibus earundem ductæ. Hoc posito: Dico rectam ZA Minimam esse rectarum de puncto Z ad sectionem prodeuntium, eidemque propiorem minorem esse remotiore.



Ducantur rectæ ZB, ZΓ; ac primum si fieri possit, sit AZ ipsi BZ æqualis, & ad A tangat sectionem recta AK; & erit (per 17$^{\text{am}}$ primi) AK Axi AE normalis, quia ordinatim ad Axem applicatis parallela est; unde angulus ZAK obtusus est. Ductâ autem ipsi AZ normali ut AN, cadet ea intra sectionem, quia (per 32$^{\text{dam}}$ primi) impossibile est ducere inter Tangentem & Sectionem rectam aliquam. Ducatur etiam per punctum B Tangens Sectionis BΞ, ac Minima de puncto B ad Axem ducta remotior erit à puncto A quam BZ, per nuper demonstrata; comprehendit autem Minima (per 27$^{\text{mam}}$ hujus) cum Tangente BΞ angulum rectum, adeoque angulus ZBΞ acutus erit. Ac si centro Z radio BZ describatur arcus circuli, occurret ille Tangenti BΞ; recta vero NA erit tota extra illum, quia angulus ZBΞ acutus est, angulus vero ZAN rectus. Quare si sit circulus ille curva BΞOA, necesse est ut occurrat sectioni; sitque punctum occursus O. Jungatur OZ, ac tangat sectionem recta OΠ cadens necessariò extra circulum. Cum autem Minima de puncto O ad Axem ducta remotior est à Vertice A quam recta OZ, ac Minima illa cum Tangente OΠ (per 27$^{\text{am}}$ hujus) comprehendit angulum rectum: angulus igitur ZOΠ acutus erit; ac proinde recta OΠ circulo occurrere debet. Eadem autem cadit extra illum. Hoc autem absurdum est, adeoque AZ non est ipsi BZ æqualis.

Si vero fieri possit, sit AZ major quam ZB; ac centro Z radio ZB describatur circulus, qui quidem occurret ipsi AZ: portio autem aliqua Tangentis BZ erit intra circulum, per nuper demonstrata: occurret igitur circulus sectioni necessariò, quia rectæ AZ occurrit. Sit circulus ille Bγσ, ac jungatur Zγ; ducaturque per punctum γ sectionis Tangens γP, quæ quidem cadet intra circulum; quia Minima inter punctum γ & Axem intercepta cadit versus partes remotiores à puncto A quam recta γZ: unde angulus ZγP acutus est. Recta itaque γP occurrere debet circulo. Manifestum autem est debere eandem totam extra reperiri: quod absurdum. Recta igitur AZ non est major quam BZ, neque eidem æqualis; est ergo minor eâ.

Dico quoque rectas ipsi AZ propiores remotioribus minores esse. Producatur enim Tangens ZB ad Σ; cumque recta BZ tangit sectionem in puncto B, & angulus ZBΞ acutus est, erit angulus deinceps, nempe ZBΣ, obtusus; & per B ipsi BZ normalis sit BM; quæ proinde cadet intra sectionem. De puncto Γ ducatur sectionis Tangens

Tangens ΓΣ; & ponatur imprimis, si fieri possit, recta BZ ipsi ΓZ æqualis. Centro Z radio ZΓ describatur circulus, qui quidem cadet extra rectam ΓΣ; quia angulus ZΓΣ acutus est; idem vero cadet intra rectam BM, quia BM ipsi BZ normalis est, atque adeo occurret circulus ille Sectioni. Jam si ducatur recta per punctum hujus intersectionis ad punctum Z, patebit absurditas eodem modo quo demonstravimus absurdam esse æqualitatem ipsarum AZ, ZB.

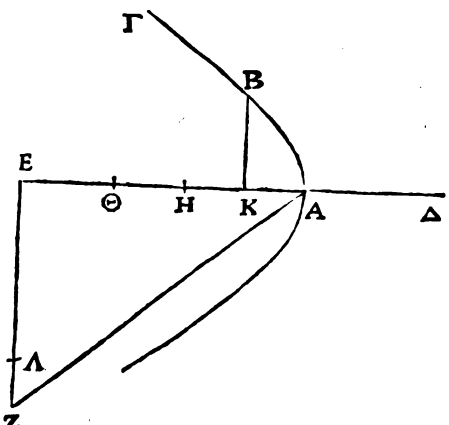
Pari argumento, si ponamus ZB majorem esse quam ZΓ, demonstrabitur absurditas, ac in rectis AZ, ZB; ubi supposuimus AZ majorem esse quam BZ. Est igitur AZ recta Minima quæ duci possit de puncto Z ad sectionem ABΓ, eidemque propior minor est remotiore.

Manifestum est igitur, quod si talis fuerit situs puncti Z, ut non duci possit ab eo ad sectionem recta aliqua è quæ abscindat Axis Minimam, & sit angulus ZAE acutus: foret recta AZ Minima omnium ad sectionem de puncto Z ductarum, ipsique AZ propior minor esset remotiore. Quinetiam si non fuerit nisi una sola recta de puncto Z educta, è quâ abscindatur Minima, ac fuerit angulus ZAE acutus; in sequente 67ma hujus demonstrabitur AZ minorem esse quâvis aliâ de puncto Z ad sectionem ductâ, eidemque propiorem minorem esse remotiore.

PROPOSITIO LXV.

Quod si sectio fuerit Hyperbola, ut ABΓ, Axe ΔE & centro Δ descripta; & sumatur infra Axem punctum Z, ita ut juncta recta AZ contineat cum Axe angulum ZAE acutum; *ac nulla recta ab eodem Z duci possit cujus intercepta sit Minima.* Dico rectam AZ minorem esse quâvis aliâ ad sectionem de puncto Z ducendâ; ductisque rectis quibusvis ex eodem Z ad sectionem, propiorem ipsi AZ minorem esse remotiore ab eadem.

Hoc autem manifestum erit, si recta quælibet Minima, à quovis in sectione ABΓ puncto ad Axem AE ducta, cadat versus partes remotiores à Vertice A quam quæ jungit punctum illud & Z. Demittatur ad Axem de puncto Z normalis ZE, & AE vel æqualis erit dimidio lateris recti, vel erit major eo, vel minor. Si vero eidem vel æqualis fuerit vel minor eo, ac rectæ de puncto Z ad sectionem ABΓ egrediantur; quæ ab earundem extremitatibus ducuntur ad Axem Minimæ (per 45ta hujus) remotiores erunt ipsis à Vertice A. Si vero AE major fuerit dimidio lateris recti, fiat ΔΘ ad ΘE sicut diameter transversa ad latus rectum: ac inter ipsas ΘΔ, ΔA capiantur duæ mediæ proportionales ΔH, ΔK; & de puncto K ipsi AE normalis erigatur KB; & fiat EΛ ad KB in ratione rectanguli sub ΔE, ΘK ad rectangulum sub ΔK, ΘE. Dico quod ZE major esse debet quam recta EΛ. Nam si possibile sit ut non sit major eâ, ponamus imprimis eas æquales esse: ac (per 52^{dam} hujus) demonstratum est rectam unam duci posse de puncto Z è qua abscindat Axis Minimam. Cum autem hoc non ita se habeat, recta EZ non æqualis erit ipsi EΛ. Per eandem etiam probatur



rectam ZE non minorem esse quam EΛ, quia si minor fuerit eâ, non impossibile esset ducere de puncto Z duas rectas, quarum portiones inter Sectionem & Axem interceptæ forent Minimæ: recta igitur ZE major erit quam EΛ. Verum (per 52^{dam} hujus) demonstratum est quod, si ZE major fuerit quam EΛ, non duci possit è puncto Z recta aliqua è qua abscindat Axis Minimam; quodque Minimæ, à terminis rectarum de puncto Z prodeuntium ductæ, longius distent à Vertice A quam ipsæ prodeuntes. Quapropter rectis quibuscunque de puncto Z ad sectionem ductis, Minimæ ab earundem extremitatibus ad Axem emissæ remotiores erunt ipsis à puncto A: adeoque iisdem argumentis, quibus in præcedente propositione rem demonstravimus in Parabolâ, manifestum erit rectam AZ minorem esse quavis aliâ per punctum Z ad sectionem ABΓ ductâ, eidemque propiorem minorem esse remotiore.

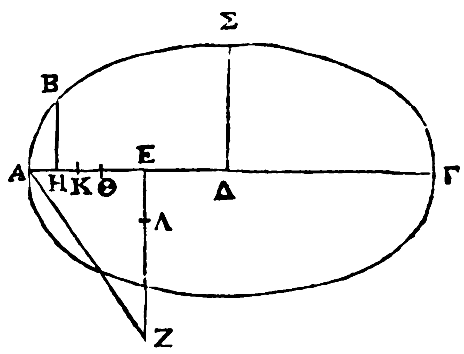
PROPO-

PROPOSITIO LXVI.

QUinetiam si sectio fuerit Ellipsis, ut ΑΒΓ, cujus Axis major ΑΓ & centrum Δ; ac sumatur infra Axem majorem punctum Ζ, ita ut angulus ΖΑΓ sit acutus: & è centro Δ erigatur Axi normalis ΔΣ: sit autem punctum Ζ tale, ut ab eo non duci poterit ad quadrantem sectionis ΑΣ recta aliqua, cujus portio inter Sectionem & Axem intercepta sit Minima. Dico ΑΖ minorem esse rectâ quâvis aliâ de Ζ ad sectionis partem ΑΣ ducendâ, eidemque viciniorem minorem esse remotiore.

Oportet autem normalem de Ζ ad axem demissam cadere inter puncta Α, Δ: non potest enim cadere inter Δ, Γ, quin possibile esset ducere ad sectionem de Ζ (per 55^{mam} hujus) rectam, cujus pars intercepta inter Axem & Sectionem foret aliqua è Minimis. Posuimus vero hoc non fieri posse, adeoque normalis non cadet inter puncta Δ, Γ. Neque cadet super centrum Δ; quia si cadat super Δ, ac producatur ad sectionem, portio ejus inter Sectionem & Axem intercepta (per 11^{mam} hujus) foret Minima. Occurret igitur ipsi ΑΔ ad modum normalis ΖΕ: ac ΑΕ vel æqualis erit dimidio lateris recti, vel minor erit eo, vel major.

Jam si minor fuerit eo vel eidem æqualis, patet quod è rectis quibusvis de Ζ ad sectionem ΑΣ prodeuntibus non fieri possit ut abscindantur Minimæ: sed Minimæ à prodeuntium extremitatibus ad Axem ductæ (per 52^{dam} hujus) longius aberunt à Vertice Α quam ipsæ prodeuntes. Quod si ΑΕ major fuerit dimidio lateris recti; fiat ΔΘ ad ΘΕ sicut diameter transversa ad latus rectum, ac capiantur inter ipsas ΑΔ, ΔΘ duæ mediæ proportionales ΗΔ, ΔΚ; & per Η ducatur Axi ad angulos rectos ordinatim applicata ΗΒ: dein fiat ΕΛ ad ΗΒ in ratione rectanguli sub ΔΕ, ΘΗ ad rectangulum sub ΔΗ, ΘΕ; ac ΖΕ vel æqualis erit ipsi ΕΛ, vel major erit eâ, vel minor. Si vero ΕΖ ipsi ΕΛ æqualis fuerit, una quidem recta duci potest (per 52^{dam} hujus) de Ζ ad sectionem ΑΣ, è qua abscindat Axis Minimam. Sed aliter fieri oportet; *adeoque* ΕΖ *non est recta* ΕΛ *æqualis*. Neque ΕΖ minor esse potest quam ΕΛ, tum enim duci poterunt duæ rectæ è quibus (*per eandem*) abscinderentur Minimæ. Quapropter ΕΖ major esse debet quam ΕΛ; quo in casu nulla recta duci potest de puncto Ζ ad sectionem ΑΣ, cujus portio intercepta sit Minima: ac si ducatur à tali puncto Ζ ad sectionem recta quælibet, Minima inter ejusdem extremitatem & Axem interjecta (per 52^{dam} hujus) longius aberit à Vertice Α quam ipsa recta de Ζ educta.



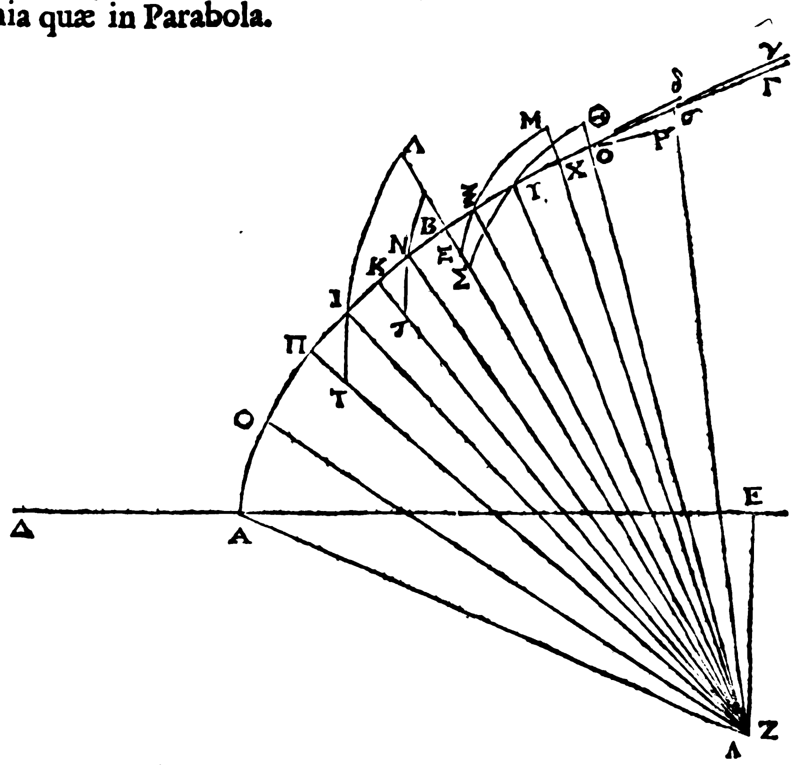
Jam si quovis modo Minimæ, à quolibet sectionis ΑΣ puncto ad Axem eductæ, remotiores fuerint à Vertice Α quam rectæ de sumpto puncto Ζ prodeuntes; pari quo in Parabola argumento, probabitur ΑΖ minorem esse quavis aliâ de Ζ ad sectionem ΑΣ ducendâ, eidemque propiorem minorem esse remotiore. Demonstratio enim una eademque est in omnibus tribus sectionibus, quoties in data sectione rectæ Minimæ, de punctis ejus ad Axem ductæ, occurrunt eidem Axi remotius à Vertice quam rectæ jungentes hæc puncta & sumptum Ζ.

PROPOSITIO LXVII.

SIT jam sectio ΑΒΓ Parabola vel Hyperbola, cujus Axis ΔΕ; & detur punctum infra Axem ut Ζ; sitque angulus ΖΑΕ acutus: possibile autem sit ut prodeat de puncto Ζ una sola recta cujus portio intercepta sit Minima. Dico quod, etiam hoc in casu, ΑΖ minor est quavis alia recta de puncto Ζ ad sectionem ΑΒΓ eductâ, quodque eidem propior minor est remotiore.

De Ζ ad Axem demittatur normalis ΖΕ; ac dico quod, rectâ quavis de puncto Ζ ad sectionem ΑΒΓ egrediente, Minima ab ejusdem extremitate ad Axem ducta longius aberit à Vertice Α quam ipsa egressa, si unam solam excipias: adeoque ΑΕ in Parabola vel Hyperbola major erit dimidio lateris recti. Nam si non major fuerit eo, impossibile esset ducere de puncto Ζ rectam aliquam è qua interciperetur Minima, uti constat ex 49na & 52da hujus. Est itaque ΑΕ major semilatere recto. Jam si Parabola fuerit, auferatur ab AE, à parte puncti E, recta dimidio lateris recti æqualis: ac fiat, modo (in Prop. 64ta hujus) monstrato, usque dum inveniatur recta EA, cum qua comparanda est recta EZ; & EZ eidem æqualis erit. Non enim potest esse minor eâ, quia tum duci poterint de puncto Z ad sectionem duæ rectæ è quibus abscindat Axis Minimas (per 51^{am} hujus) contra Hypothesin: neque erit ZE major illa, quia hac conditione (per eandem 51^{mam}) non duci poterit ulla recta de puncto Z cujus portio intercepta sit aliqua è Minimis. Hoc autem aliter se habet: quare recta EZ ipsi æqualis erit. Quo posito, ex eadem 51ma, manifestum est unam singularem rectam duci posse de puncto Z, cujus portio inter Sectionem & Axem intercepta Minima sit; cæterasque omnes Minimas à terminis rectarum de puncto Z prodeuntium ductas remotiores esse à Vertice A quam ipsæ prodeuntes.

Idem etiam demonstrabitur si sectio fuerit Hyperbola, cujus centrum Δ. Dividatur ΔE ita ut segmenta sint inter se in ratione diametri transversæ ad latus rectum; ac fiant reliqua ad modum Prop. 65^{tæ} hujus, usque dum inveniatur recta EA cum normali ZE comparanda. Et, si recta ZE æqualis fuerit inventæ EA, pari ac in Parabola argumento constabit punctum Z tale esse, ut una tantum recta ab eodem duci possit è qua abscindatur Minima: ductisque ad sectionem de Z rectis quibuscunque, Minimas ab earundem extremitatibus ad Axem emissas longius abesse à Vertice A quam ipsæ ductæ, per 52^{dam} hujus manifestum est. Hinc consequuntur eadem omnia quæ in Parabola.



Sit jam ZB unica illa recta per Z ad sectionem ABΓ ducta, è qua abscindit Axis Minimam; ac ducantur ad sectionem inter A & B duæ aliæ, ut ZO, ZΠ; &, eodem modo quo demonstravimus Propositionem LXIV^{tam} hujus, constabit AZ Minimam esse è rectis de puncto Z ad sectionem ductis. Prodeuntibusq; ad sectionem rectis quibusvis ZO, ZΠ, inter puncta A & B; quæ eidem AZ vicinior est minor erit remotiore.

Dico quoque quod ZΠ minor est quam ZB. Nam si non sit minor eâ, primum sit æqualis ei, ac ducatur inter eas recta ZK; erit igitur ZK major quam ZΠ, per nuper demonstrata: quare in ZK capiatur recta major quam ZB, minor vero quam ZK, ut Zτ; & centro Z, radio Zτ describatur circulus occurrens rectæ ZK in τ, sectioni autem ad N inter K & B, ad modum circuli Nτ; & jungatur ZN. Est autem recta KZ ipsi AZ propior quam ZN; recta igitur ZK minor est quam ZN, *hoc est quam* Zτ, quod absurdum est: quare absurda est positio ZK majorem esse quam ZB; adeoque ZΠ, ZB non sunt æquales.

Ponamus jam, si fieri possit, ZΠ majorem esse quam ZB; ac capiatur recta aliqua in ZΠ quæ major sit quam ZB, minor vero quam ZΠ, ut ZT; & centro Z, radio ZT describatur circulus occurrens rectæ ZΠ, sectioni vero necessariò inter Π & B. Occurrat autem iis ad modum arcus TIA, & jungatur ZI; ideoque recta ZΠ minor erit quam ZI, quia propior est ipsi AZ quam ZI. Sed ZI ipsi ZT æqualis est, adeoque ZΠ minor est quam ZT, quod absurdum. Recta igitur ZΠ non est major quam ZB; neque eidem æqualis, per nuper demonstrata: ac proinde minor est ea. Constat itaque rectas omnes de puncto Z ad sectionem inter A, B ductas minores esse quam ZB.

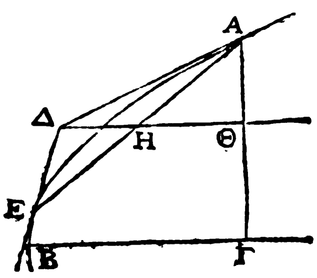
Ducantur

Ducantur jam ad reliquam sectionem BΓ, ab altera parte ipsius ZB, rectæ Zο, Zσ. Dico ZB minorem esse quam Zο, ac Zο quam Zσ. Agantur sectionis Tangentes οδ, σγ: & erunt anguli Zοδ, Zσγ obtusi, quia rectæ Minimæ de punctis ο, σ ad Axem ductæ remotiores sunt à Vertice A quam rectæ ad utrumque punctum ab ipso Z eductæ. Ipsi Zο ad punctum ο normalis sit οP, quæ quidem cadet intra sectionem, unde patebit, eodem quo Prop. 64^{am} demonstravimus modo, rectam Zο minorem esse quam Zσ; adeoque etiam ab altera parte ipsius BZ, rectæ per Z ductæ, quæ propiores sunt Vertici A, minores erunt remotioribus. Dico quoque quod ZB minor est illis omnibus. Quoniam enim Axis abscindit è recta ZB Minimam; erit angulus comprehensus à Tangente per punctum B ductâ & ipsâ ZB rectus. Jam si fieri possit, fiat imprimis ZB ipsi Zο æqualis, & ducatur inter eas recta ZX; & ZX minor erit quam Zο, quia propior est ipsi AZ, hoc est quam ZB. Capiatur igitur recta ZΞ minor quam ZB, sed major quam ZX; ac centro Z, radio ZΞ circinetur circulus, quæ propterea occurret sectioni inter puncta B, X. Sit autem circulus ille MξΞ occurrens sectioni in ξ, & jungatur Zξ; ideo Zξ minor erit quam ZX, quia propior est ipsi AZ: adeoque ZM ipsi Zξ æqualis minor erit quam ZX. absurdum est igitur ZΞ majorem esse quam ZX: quare recta Zο non est ipsi ZB æqualis. Si vero fieri possit, sit minor ea; ac fiat ZΣ major quam Zο, minor vero quam ZB; & centro Z, radio ZΣ describatur circulus occurrens sectioni inter puncta B, ο. Occurrat autem in Υ, & sit circulus ille ΣΥΘ; & jungatur ΥZ: adeoque erit ΥZ minor quam Zο, quia propior est ipsi AZ. Sed ΥZ æqualis est ipsi ZΘ, ideoque ZΘ minor est quam Zο. Eadem vero ex hypothesi major est ea; quod absurdum: recta igitur Zο non minor est quam ZB. Probavimus autem eas non esse æquales: adeoque ZB minor est quam Zο. Quapropter recta BZ minor est quavis recta de puncto Z ad sectionis partem BΓ ducibilem. Unde & ex præmissis patet, AZ minorem esse omnibus rectis ad sectionem ABΓ ducendis, eidemque propiorem minorem esse remotiore. Q. E. D.

PROPOSITIO LXVIII.

SI duæ rectæ Sectionem Conicam contingant; erit intercepta inter punctum concursûs earundem, & punctum contactûs in Tangente Vertici Sectionis propiore, minor interceptâ in Tangente à Vertice remotiore.

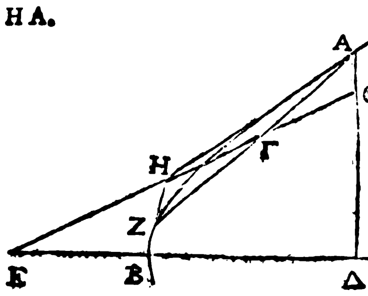
Sit Sectio AB imprimis Parabola, cujus Axis BΓ: & Sectionem tangant duæ rectæ AΔ, ΔE. Dico ΔE minorem esse quam ΔA.



Junge rectam AE; & per Δ, ipsi BΓ parallela, ducatur ΔH: ideoque (per 30^{mam} secundi) AH æqualis erit ipsi EH. De puncto A demittatur normalis ad Axem ut AΓ, & erit angulus AΘΔ rectus; ac proinde angulus AHΔ obtusus. Est verò ΔH utrique triangulo AΔH, EΔH communis; ac duo latera AH, HΔ æqualia sunt duobus lateribus EH, HΔ: angulus autem EHΔ minor est angulo AHΔ: Basis igitur ΔE minor est basi ΔA. Q. E. D.

PROPOSITIO LXIX.

SIT jam Sectio Hyperbola ut AB, cujus Axis ΔE, centrum E: sintque duæ Tangentes ZH, HA. Dico quod ZH minor est quam HA.

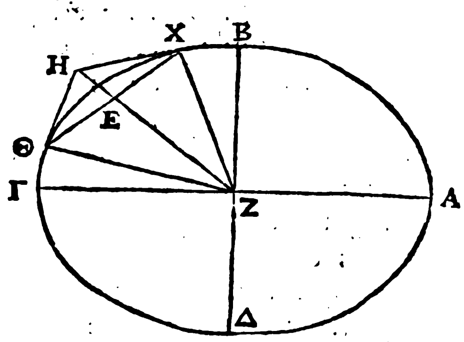


Junge HE, quæ producatur in directum; jungatur etiam AΓZ, occurrens ipsi HE in Γ: ideoque AΓ (per 30^{mam} secundi) æqualis erit ipsi ΓZ. Demittatur normalis AΔ, & producatur EΓ ad Θ; &, ob angulum AΔE rectum, angulus AΘE major eo obtusus erit; unde & angulus AΓH obtusus: ac propterea HΓZ eidem deinceps minor erit eo, utpote acutus. Sed recta AΓ ipsi ΓZ æqualis est, & HΓ utrique triangulo AΓH, HΓZ communis: Basis igitur ZH minor est Basi HA. Q. E. D.

 PROPO-

PROPOSITIO LXX.

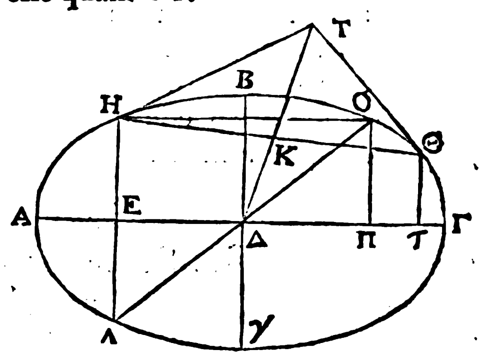
SIT autem Sectio ΑΒΓΔ Ellipsis, cujus Axis major ΑΓ, minor ΒΔ, *& centrum* Ζ; & ducantur inter puncta Β, Γ, sive ad eundem sectionis quadrantem Tangentes duæ ΧΗ, ΗΘ. Dico Axi propiorem minorem esse remotiore.



Jungantur rectæ ΘΧ, ΗΕΖ; & erit ΧΕ (per 30^{mam} secundi) ipsi ΕΘ æqualis. Cumque recta ΖΧ propior est Semi-axi minori ΖΒ quam ΖΘ, & recta ΖΘ propior est Semi-axi majori quam ΖΧ; erit (per 11^{am} hujus) ΖΘ major quam ΖΧ. Latera autem ΖΕ, ΕΘ æqualia sunt lateribus ΖΕ, ΕΧ; angulus igitur ΘΕΖ major est angulo ΧΕΖ, ac propterea angulus ΧΕΗ major angulo ΗΕΘ. Sed latera ΧΕ, ΕΗ æqualia sunt lateribus ΘΕ, ΕΗ: adeoque Basis ΧΗ major est Basi ΘΗ. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXI.

SIT ΑΒΓ Ellipsis, cujus Axis major ΑΓ, minor Βγ, ac centrum Δ; sintque ΗΕ, Θτ normales super Axem majorem, ita ut ΗΕ major sit quam Θτ: tangant autem sectionem rectæ duæ ΗΤ, ΤΘ, quæ proinde (per 27^{mam} secundi) convenient inter se ad easdem partes centri. Dico ΗΤ majorem esse quam ΘΤ.



Jungantur ΗΚΘ, ΔΚΤ, & producatur ΗΕ ad Λ, ac juncta ΛΔ producatur ad Ο: ideoque erit ΛΔ (per 30^{mam} primi) ipsi ΔΟ æqualis. Cumque ΛΕ ipsi ΕΗ æqualis est, ac ΔΕ super ΛΗ normalis, erit ΛΔ ipsi ΔΗ æqualis. Sed ΛΔ ipsi ΔΟ est æqualis: quare etiam ΗΔ, ΔΟ sunt æquales; junctaque ΗΟ ipsi Ετ parallela erit. Demittatur normalis ΟΠ, quæ proinde ipsi ΗΕ parallela & æqualis erit. Sed ΗΕ major est quam Θτ; unde & ΟΠ major est quam Θτ, ac recta ΔΘ propior est Axi majori ΑΓ quam ΔΟ: quocirca ΔΘ (per 11^{mam} hujus) major est quam ΔΟ, hoc est quam ΔΗ. Est autem ΘΚ (per 30^{mam} secundi) ipsi ΚΗ æqualis. Unde, ob ΔΚ communem, angulus ΔΚΘ major est angulo ΗΚΔ; ac proinde angulus ΤΚΗ major erit angulo ΤΚΘ. Latera vero duo ΗΚ, ΚΤ æqualia sunt duobus ΤΚ, ΚΘ: Basis igitur ΗΤ major erit Basi ΤΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXII.

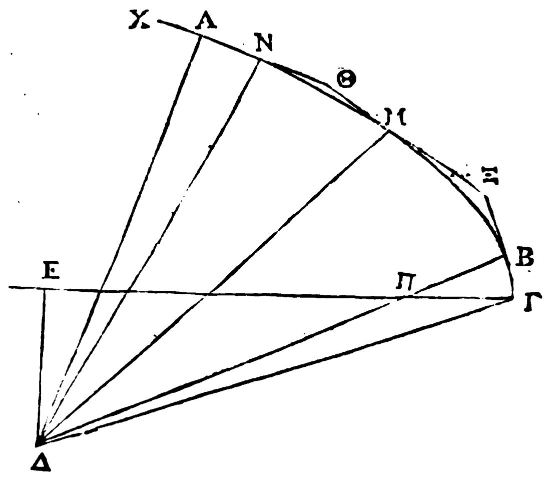
S*I sumatur punctum infra Axem Parabolæ vel Hyperbolæ, à quo possibile sit educere duas rectas, ita ut in utrâque portio intercepta inter Sectionem & Axem sit* Minima: *erit ea, quæ ex his duabus Vertici Sectionis propius adjacet, omnium rectarum, de sumpto puncto ad eam Sectionis partem quæ interjacet Verticem & rectam alteram ductarum,* Maxima: *è cæteris vero ad eandem partem ductis, quæ* Maximæ *utrinque propior est major erit remotiore: altera vero recta minor erit cæteris omnibus ab eodem puncto ad reliquam istius partis Sectionem, sive ad ejusdem lateris complementum: quæque eidem propior est, è rectis ad reliquam Sectionem ductis, minor erit remotiore.*

Sit Sectio ΑΒΓ, cujus Axis ΓΕ; sub quo sumptum est punctum Δ: ac sint ΔΑ, ΔΒ, rectæ duæ ad sectionem ductæ, è quibus abscindit Axis Minimas. Dico quod ΔΒ major est omnibus rectis è puncto Δ ad sectionis partem ΑΒΓ ducendis; quodque

rectæ

rectæ utrinque eidem ΒΔ propiores majores sunt remotioribus: quodque ΔΑ minor est quavis recta de puncto Δ ad reliquam sectionem ΑΧ ducibili: quodque eidem propior minor est remotiore.

De puncto Δ Axi ΓΕ demittatur normalis ΔΕ; & inquiratur, modo in 64^{ta} & 65^{ta} hujus usurpato, recta ΕΑ cum recta ΔΕ comparanda, qua minor esse debet ΔΕ. Non enim potest esse major eâ, quia sic impossibile esset aliquam rectam ducere per punctum Δ, è qua abscinderetur Minima. Neque eidem æqualis est, quia hâc conditione (per 51^{mam} & 52^{dam} hujus) non nisi una sola Minima daretur. Erit igitur ΔΕ minor rectâ quæsitâ ΕΑ: quo in casu duci poterunt duæ rectæ, quarum portiones interceptæ Minimæ sint; ac Minimæ à terminis rectarum inter ipsas ΔΑ, ΔΒ intermediarum propiores erunt Vertici Γ quam ipsæ intermediæ: Minimæ vero de cæterarum ductarum extremitatibus emissæ (per easdem 51^{am} & 52^{dam} hujus) remotiores erunt ab eodem. Unde, eodem modo quo demonstravimus 64^{tam} hujus, patebit, rectam ΔΒ majorem esse quâvis rectâ per Δ ad sectionis partem ΒΓ ductâ; eidemque ΔΒ propiores à parte Verticis Γ majores esse remotioribus: simulq; rectam ΔΒ majorem esse quacunque alia ad sectionis partem ΑΒ ductâ; eidemque propius adjacentem majorem esse remotiore. Demonstrabitur autem hoc modo. Ducantur rectæ ΔΜ, ΔΝ, & ad puncta Β, Μ tangant sectionem rectæ ΒΞ, ΞΜΘ; & ob ΒΠ Minimam, & ΒΞ sectionis Tangentem, erit (per 27^{mam} & 28^{vam} hujus) angulus ΞΒΠ rectus: angulus autem ΞΜΔ obtusus est, quia Minima de puncto Μ ad Axem ΓΕ ducta (per 51^{mam} & 52^{dam} hujus) propinquior est Vertici Γ quam recta ΜΔ. Cum autem angulus ΞΒΔ rectus est, ac angulus ΞΜΔ obtusus, erunt quadrata ex ΞΒ & ΒΔ simul sumpta majora quadratis ex ΞΜ, ΜΔ. Sed (per 68^{vam} & 69^{nam} hujus) ΒΞ minor est quam ΞΜ, quare ΒΔ major est quam ΔΜ. Pari modo demonstrabitur rectam ΜΔ majorem esse quam ΔΝ, quia angulus ΘΜΔ acutus est; ac ductâ ΝΘ sectionis Tangente, erit angulus ΘΝΔ obtusus. Similiter probabitur rectam ΝΔ majorem esse quam ΔΑ. Recta igitur ΒΔ Maxima est è rectis de puncto Δ ad partem sectionis ΑΓ ductis, eidemque propior major est remotiore. Quod vero ΔΑ minor est quavis rectâ de puncto Δ ad reliquam sectionem ΑΧ ductâ, eodem argumento constabit quo usi sumus in demonstrandâ 64^{ta} hujus. Pariterque patebit rectam ipsi ΑΔ propiorem, inter eas quæ prodeunt è puncto Δ ad sectionem ΑΧ, majorem esse remotiore ab eadem.



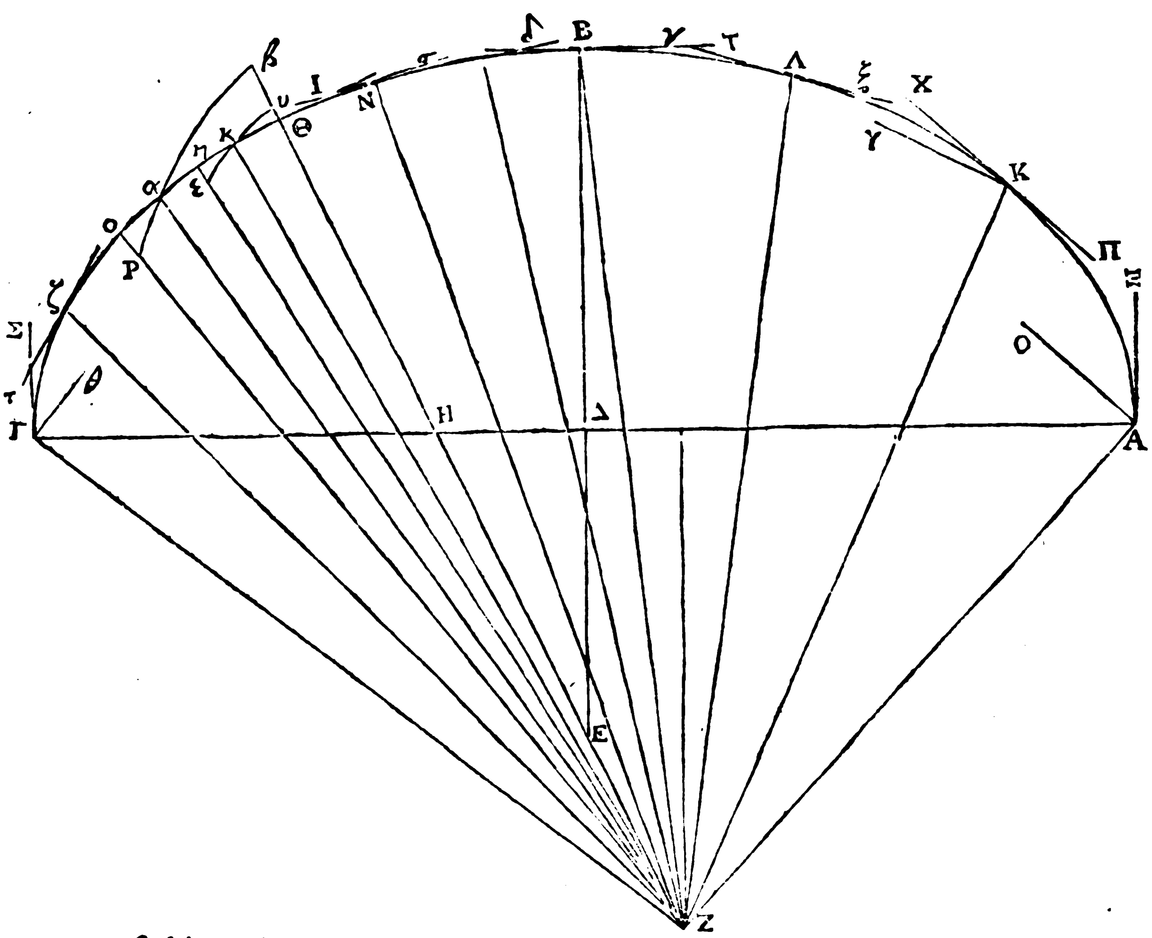
PROPOSITIO LXXIII.

SI capiatur punctum infra majorem Ellipseos Axem, quod non sit in Axe minore producto; ac inter rectas è puncto illo ad Sectionem ducendas non sit nisi una sola è qua abscindat Axis Minimam: *erit hæc recta major quâvis aliâ; eidemque propior major erit remotiore:* Minima *vero quæ duci possit de puncto illo ad eandem semi-ellipsin, ad quam ducitur* Maxima, *erit recta jungens punctum datum & Sectionis Verticem puncto illi viciniorem.*

Sit ΑΒΓ Ellipsis, cujus Axis ΑΓ & centrum Δ; & ad Δ erigatur Axi normalis ΒΔΕ: sumatur etiam sub Axe punctum Ζ, è quo non nisi una sola recta ad sectionem ΑΒΓ duci potest, cujus portio intercepta sit Minima. Hæc igitur recta, è qua abscinditur Minima, talis esse debet, ut præter eam non alia duci possit ad sectionem de puncto sumpto. Semper autem possibile est unam rectam ducere de puncto Ζ, cujus intercepta sit Minima, quæque occurrat alteri semi-axi, sive semissi illi

Axis in quam non cadit normalis de puncto Z, per demonstrata in 55^{ta} hujus. Recta igitur illa de Z ad sectionem ABΓ ducta, è qua abscinditur Minima, occurret reliquo semi-axi ΓΔ. Sit autem ea recta ZHΘ, & jungatur ZΛ. Dico ZΘ Maximam esse è rectis de puncto Z ad sectionem ABΓ ducendis, eidemque ab utraque parte propiorem majorem esse remotiore; AZ vero Minimam esse omnium.

Quoniam enim sectio ABΓ Ellipsis est; ac sumitur sub Axe majore punctum, à quo non duci potest ad sectionem nisi una sola recta, cujus portio intercepta sit Minima: demonstratum est (per 52^{dam} hujus) cæteras Minimas, à quibuslibet sectionis punctis ad Axem ductas, longius abesse à Verticibus A vel Γ, quam rectæ jungentes puncta illa & Z. Educantur de puncto Z ad sectionem rectæ ZK, ZΛ, ZM; tangat autem AΞ sectionem in puncto A: erit igitur angulus ZAΞ obtusus. Ipsi vero AZ ad punctum A perpendicularis sit AO, quæ (per 32^{dam} primi) cadet intra sectionem. Ducatur etiam per K sectionis Tangens ΠKX. Quoniam vero Minima de puncto K ad Axem ducta remotior est ab A quam recta KZ, erit (per 57^{am} hujus) angulus ΠKZ acutus. Sed angulus OAZ rectus est; adeoque demissâ de puncto Z normali, eodem argumento, quo in demonstrandâ 64^{ta} hujus usi fumus, constabit rectam AZ non majorem esse quam ZK, neque eidem æqualem: adeoque AZ minor est quam ZK. Similiter cum ΠKX tangit sectionem, angulus XKZ obtusus erit; ac KT, ipsi KZ ad angulos rectos, cadet intra sectionem; quia (per 32^{dam} primi) nulla recta duci potest quæ cadat inter sectionem & Tangentem. Agatur jam per punctum Λ sectionis Tangens ξΛT, & Minima per Λ ducta remotior erit à Vertice A quam ΛZ; unde, juxta demonstrata in 64^{ta} hujus, recta ZK minor erit quam ZΛ. Ac si jungatur ZB & per B ducatur Tangens sectionis γBδ, ob angulum γBΔ rectum erit angulus γBZ acutus; adeoque ΛZ (juxta eandem 64^{tam}) minor erit quam ZB.



Dico quoque ZB minorem esse quam ZM. Sectionem tangat recta δMσ ad punctum M. Quoniam vero ABΓ Ellipsis est, atque transit normalis BΔE per centrum sectionis Δ, ac Bδ, δM sunt duæ Tangentes; erit Bδ major quam δM (per 70^{mam} hujus). Quadrata autem ex δB, BZ simul minora erunt quadratis ex δM, MZ simul,

simul, quia angulus δ B Z obtusus est, angulus vero δ M Z acutus; adeoque recta Z B minor erit quam Z M. Similiter demonstrabitur Z M minorem esse quam Z N, ductâ scilicet Tangente σ N I. Hinc manifestum est rectas ipsi Θ Z propiores majores esse remotioribus.

Dico quoque Θ Z majorem esse quam Z N. Ducatur per Θ sectionis Tangens Θ I, & erit angulus I Θ Z rectus (per 28[vam] hujus) & angulus I N Z obtusus est, Tangens autem N I (per 70[am] hujus) major est quam I Θ. Quapropter Θ Z major erit quam Z N; ac proinde major quavis recta de puncto Z ad sectionis partem A Θ ducenda, eidemque propior major erit remotiore.

Porro recta Γ Z Minima est è rectis ad sectionis partem Θ Γ ducendis; puta Z ζ Z o, Z η. Tangat sectionem recta Γ Σ in puncto Γ, ipsique Γ Z normalis sit Γ θ, quæ (per 32[dam] primi) cadet intra sectionem; & ad punctum ζ sectionem tangat ζ τ. Minima autem de puncto ζ ad Axem ducta remotior erit à Vertice Γ quam ipsa Z ζ, adeoque angulus $\tau \zeta$ Z acutus erit; propterea que recta Z Γ minor erit quam Z ζ, juxta demonstrata in 64[ta] hujus. Eodemque modo probabitur quod è rectis ad sectionis partem Θ Γ de puncto Z ducendis, quæ propior est ipsi Z Γ minor erit remotiore. Recta igitur Z ζ minor est quam Z o. Dico quoque quod Z o minor est quam Z Θ. Vel enim minor erit eâ, vel æqualis ei, vel major. Ac si fieri possit, sit major eâ, & capiatur Z P major quam Z Θ, minor vero quam Z o; ac centro Z, radio Z P describatur circulus P α β, qui proinde occurret sectioni inter Θ & o, puta ad α. Jungatur Z α: cumque Z α remotior est à Z Γ quam Z o, major erit Z α quam Z o. Verum Z α æqualis est ipsi Z P *ex Hypothesi*: recta igitur Z P major erit quam Z o. Sed manifesto minor est eâ; quod absurdum: quare Z o non major est quam Z Θ. Si vero fieri possit, sit æqualis ei, & ducatur inter eas intermedia aliqua ut Z η: recta igitur Z η major erit quam Z o, ac proinde major quam Z Θ. Fiat igitur Z ι major quam Z Θ, minor vero quam Z η; ac centro Z, radio Z ι describatur circulus $\iota \kappa \upsilon$ occurrens sectioni inter Θ & o. Occurrat autem ad κ: adeoque juncta Z κ major erit quam Z η, utpote remotior à Z Γ. Eadem autem æqualis est ipsi Z ι: quare Z ι major est quam Z η. Posuimus autem eam minorem esse: quod absurdum. Recta igitur Z o minor est quam Z Θ. Quapropter Z Θ major est quavis aliâ de puncto Z ad sectionem A B Γ ducendâ, eidemque propior major est remotiore. Recta vero Z Γ Minima est rectarum de puncto Z ad sectionis partem Γ Θ ductarum, *uti* Z A *Minima est ductarum ad alteram ejus partem* A Θ; atque Z Γ major est quam Z A: igitur Z A minor est quavis recta quæ de puncto Z ad totam sectionem A B Γ duci potest, quemadmodum Z Θ earundem Maxima est. Q. E. D.

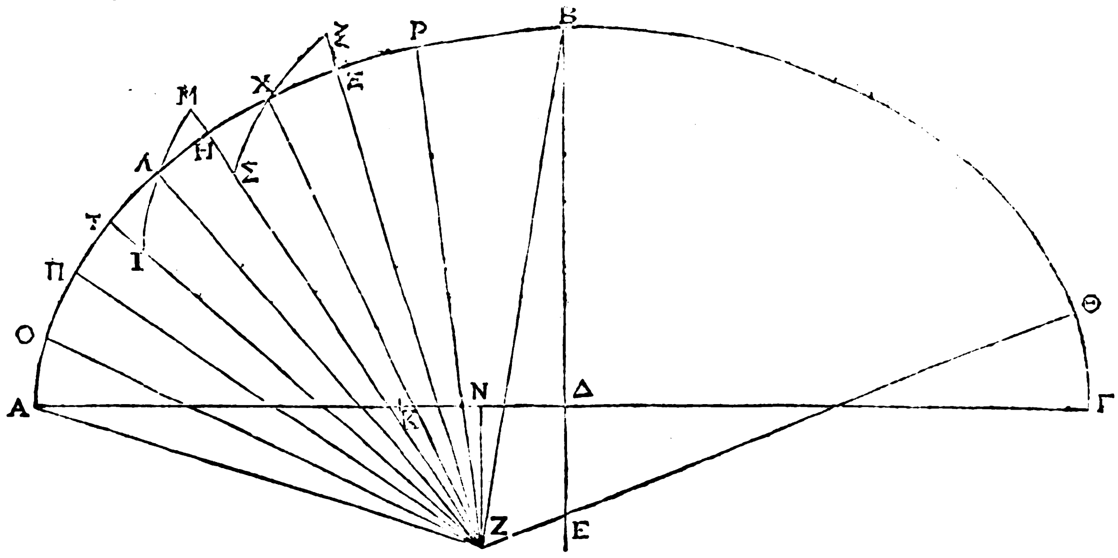
PROPOSITIO LXXIV.

SI detur punctum sub Axe majore Ellipseos, de quo possibile sit duas tantum rectas, è quibus abscindat Axis Minimas, *ad oppositam sectionem ducere*: *erit* Maxima *rectarum, de puncto illo ad latus istud Sectionis ducendarum, altera ex duabus illis quæ occurrit Axi minori*; *eidemque ab utroque latere propior major erit remotiore*: *earundem vero* Minima *erit ea quæ à dato puncto ad Verticem Sectionis propiorem ducitur.*

Sit A B Γ Ellipsis, cujus Axis major A Γ, & sit punctum datum Z sub Axe majore; de centro vero sectionis Δ erigatur Axi normalis B Δ E: ac possibile sit de puncto Z duas tantum rectas ducere, quarum portiones inter sectionem A B Γ & Axem interceptæ sint Minimæ. Ponamus autem has rectas de Z ductas esse Z H, Z Θ; neque duci posse aliam præter has duas à qua abscindatur Minima. Dico rectam Z Θ, quæ occurrit Axi minori, majorem esse qualibet aliâ de Z ad sectionem A B Γ ducendâ; eidemque Z Θ ab utroque latere propiorem majorem esse remotiore: rectam vero Z A minorem esse quavis aliâ.

De puncto Z demittatur normalis Z N, ac manifestum est Z N non cadere posse super

ſuper centrum Sectionis. Nam ſi caderet ſuper centrum; vel impoſſibile eſſet ducere de Z rectam aliam è qua abſcinderetur Minima, præter ipſam ZN ad ſectionem productam; vel poſſibile eſſet ducere duas alias rectas æquales (per 53^{am} & 54^{am} hujus) è quarum utrâque abſcinderetur Minima. Hoc autem eſt contra hypotheſin. Cadat igitur normalis ZN inter puncta A, Δ; ac recta AN major erit ſemilatere recto; quia ſi non major fuerit eo, impoſſibile foret (per 50^{mam} hujus) ducere de Z inter A & B rectam aliquam cujus portio intercepta ſit Minima. Itaque AN, uti diximus, major eſſe debet dimidio lateris recti. Fiat ΔK ad KN ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, & inveniantur inter AΔ, ΔK duæ mediæ proportionales; & erigatur normalis, quemadmodum fecimus in Prop. 64^{ta} hujus; cæteraque peragantur, uſque dum inveniatur recta illa quæ cum recta ZN conferenda eſt. Huic autem ſic inventæ æqualis eſſe debet recta ZN: nam ſi major fuerit eâ, nulla duci poteſt recta de Z ad ſectionis partem AB, è qua abſcindatur Minima. Neque minor erit ea: tunc enim poterimus ducere duas rectas ad ſectionem AB, è quarum utraque (per 52^{dam} hujus) intercipiatur Minima; poſſumus etiam (per 55^{am} hujus) rectam tertiam educere de Z ad ſectionis partem BΓ. Recta igitur ZN æqualis erit rectæ inventæ.



Jam ſi duci poſſit, de Z ad ſectionem AB, una tantum recta è qua abſcindatur Minima; erunt Minimæ, à terminis cæterarum ad ſectionem AB ductarum emiſſæ, remotiores à Vertice A quam ipſæ rectæ de Z ductæ. Ducantur igitur per Z rectæ ZA, ZO, ZΠ; ac, modo in demonſtrandis Propoſitionibus 72^{da} & 73^{tia} uſitato, manifeſtum erit rectam ZA minorem eſſe quam ZO, ac ZO quam ZΠ. Dico quoque quod ZΠ minor eſt quam ZH. Nam ſi non ſit minor ea, ſit major ea, vel æqualis ei. Imprimis autem ſit æqualis ei, & ducatur inter eas alia recta ZT quæ major erit quam ZΠ, *utpote remotior ab* AZ: cumque ZΠ ipſi ZH æqualis eſt, erit ZT major quam ZH. Capiatur in ZT recta aliqua minor quam ZT, major vero quam ZH, ut ZI; ac centro Z, radio ZI deſcribatur circulus IΛM; qui neceſſario occurret ſectioni TH. Occurrat autem in Λ, & jungatur ZΛ, quæ, cum remotior ſit ab AZ, major erit quam ZT. Verum ZΛ ipſi ZI æqualis eſt, quare ZI major erit quam ZT. ſed eadem minor eſt, quod abſurdum: *adeoque* ZΠ *ipſi* ZH *non eſt æqualis.* Parique argumento conſtabit ZH non eſſe minorem quam ZΠ; ac proinde major erit ea. Quapropter ZH major eſt quavis recta de Z ad ſectionis partem AH ducibili; eidemque propior major eſt remotiore: earundem vero Minima eſt ZA.

Simili autem methodo, qua rem demonſtravimus in rectis inter A & H ductis, probabitur ipſam ZB majorem eſſe quavis recta inter H & B ab eodem puncto Z ducendâ; eidemque propiorem majorem eſſe remotiore. Dico quoque quod ZH minor eſt quavis recta inter H, B ducta. Ducatur enim alia ut ZP; ac, ſi fieri poſſit ut non ſit major quam ZH, ſit æqualis ei, vel minor eâ. Sit autem primo æqualis ei, & inter ipſas ZH, ZP ducatur intermedia ut ZΞ; quæ proinde minor erit quam ZP: adeoque minor quam ZH. Fiat ZΣ major quam ZΞ, minor vero quam ZH;

ac

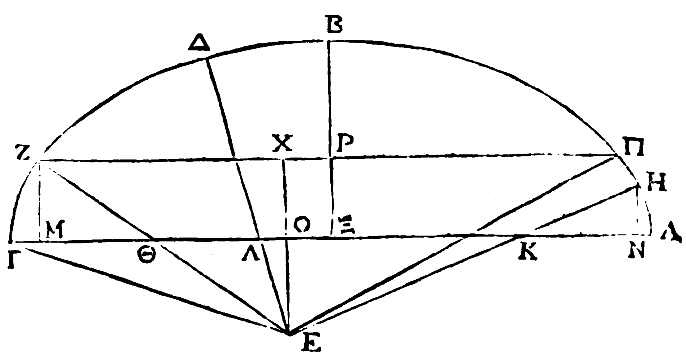
ac centro Z radio ZΣ circinetur circulus ΣXξ, occurrens sectioni inter Ξ & H, puta ad X: & juncta recta ZX minor erit quam ZΞ, quia longius abest ab ipsa ZB. Hæc autem æqualis est ipsi Zξ; adeoque Zξ minor erit ipsa ZΞ: eandem autem suppo-suimus majorem eâ: quod absurdum. Quare recta ZP non est æqualis ipsi ZH. Pariterque demonstrari potest ZP non esse minorem eâ. Recta igitur ZB Maxima est rectarum de puncto Z ad sectionis partem AB ductarum, eidemque propior major est remotiore, ZH *vero minor est quavis recta ad sectionis partem* HB *ductâ.*

Quoniam vero ABΓ Ellipsis est, cujus Axis major AΓ, ac minor BΔE; punctum autem Z situm est intra angulum AΔE, si ab eodem ad sectionis partem BΓ ducatur recta altera ZΘ, *cujus intercepta* ΘΛ *sit Minima*: constabit, modo in proximâ Propositione usurpato, rectam ZΘ Maximam esse omnium de puncto Z ad sectionis partem BΓ ductarum, eidemque propiorem majorem esse remotiore. Demonstratum autem est ZB majorem esse quavis recta ad sectionis partem AB ducta, eidemque propiorem majorem esse remotiore. Quocirca ZΘ major est quavis ductâ de puncto Z ad totam sectionem ABΓ, eidemque utrinque propiores majores sunt remotioribus: Omnium vero Minima est recta ZA. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXV.

S*I detur punctum infra Axem majorem Ellipseos, tale ut ab eodem duci possint ad Sectionem tres rectæ, è quibus abscindat Axis* Minimas; *quarum duæ quidem ad easdem partes Axis minoris ad quas situm est punctum, tertia vero ad contrarias: erit tertia illa, quæ ad partes contrarias ducitur, major quavis alia ductâ quæ mediam trium & Sectionis Verticem à puncto dato remotiorem interjacet, eidemque propior major erit remotiore; è cæteris vero, inter mediam trium & Sectionis Verticem puncto dato viciniorem interjectis,* Maxima *erit illa quæ Vertici puncto dato adjacenti adjacet, eidemque utrinque propior* major erit remotiore; ex his autem duabus Maximis, major *erit ea, quæ ducitur ad partes contrarias iis ad quas situm est punctum datum.*

Sit ABΓ Ellipsis, cujus Axis major AΓ & centrum Ξ; & sit BΞ normalis super Axem ad centrum sectionis, sub quo sit punctum datum E: ducantur autem ex eodem tres rectæ è quibus abscindat Axis Minimas, ut EH, EZ, EΔ; quarum duæ, ut EZ, EΔ, erunt ad easdem partes ad quas situm est E; tertia vero EH ad contrarias. Dico EH Maximam esse rectarum de puncto E ad totam sectionem ABΓ ductarum; eidemque utrinque propiorem, è rectis ad sectionis partem inter Δ & A ductis, majorem esse remotiore.



Quoniam enim rectæ ΔΛ, ZΘ sunt Minimæ, constabit, eo quo in Parabola demonstravimus modo (Prop. 72[da] hujus) quod recta EZ Maxima est ex iis quæ de puncto E ad sectionis partem ΓΔ duci possint; quodque eidem propior major est remotiore. Pariter cum ΔΛ & HK sunt Minimæ, eodem modo ac in Propositione præcedente, probabitur rectam EH majorem esse quavis rectâ de puncto E ad partem AΔ ductâ.

Dico quoque quod EH major est quam EZ. De punctis Z, H, E demittantur normales ZM, HN, EO; & MΞ erit ad MΘ (per 15[am] hujus) sicut diameter transversa ad latus rectum: ac (per eandem) NΞ erit ad NK sicut diameter transversa ad latus rectum: quare ΞM erit ad MΘ sicut ΞN ad NK. Ratio autem OM ad MΘ minor est ratione ΞM ad MΘ, ac proinde ratio OM ad MΘ minor est ratione ΞN ad NK;

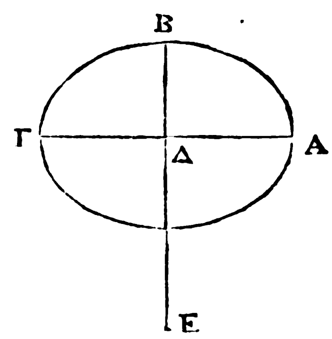
 ac

ac multo minor ratione ON ad NK: dividendo autem ratio OΘ ad ΘM minor erit ratione OK ad KN. Sed OΘ est ad ΘM sicut EO ad ZM: & OK est ad KN sicut EO ad HN: ratio igitur EO ad ZM minor est ratione ejusdem ad HN. unde patet ZM majorem esse quam HN; adeoque recta per punctum Z Axi AΓ parallela remotior erit à puncto A quam punctum H. Sit hæc parallela recta ZPΠ, & producatur normalis EO ad X; & ob ZP ipsi PΠ æqualem, recta ΠX major erit quam XZ. Recta vero EX, utrique triangulo EXZ, EXΠ communis, normalis est super ZΠ: quapropter EΠ major est quam EZ, & EH major est quam EΠ; atque adeo major est quam EZ. Igitur EH Maxima est è rectis ad sectionem ABΓ de puncto E ducendis, ac quæ propiores vel remotiores sunt ab eadem ita se habebunt quemadmodum in Propositione descriptum est. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXVI.

SI *normalis de puncto dato ad Ellipseos Axem majorem demissa cadat super centrum Sectionis; ac si nulla alia recta, è quâ abscindat Axis* Minimam, *duci possit de puncto illo ad oppositos Ellipseos quadrantes: erit* Maxima *rectarum de puncto dato ad Sectionem ducendarum ipsa normalis producta; eidemque propior major erit remotiore.*

Sit ABΓ Ellipsis, cujus Axis major AΓ & centrum Δ; & sit datum punctum E; normalis autem ab E ad centrum demissa sit EΔ, quæ producatur ad B: nec possibile sit de puncto E ad sectionem BΓ rectam aliquam ducere, cujus portio intercepta sit Minima, præter ipsam BΔ. Dico EB Maximam esse rectarum quæ de puncto E ad sectionem duci possunt.

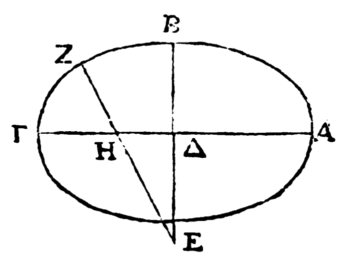


Nam si non duci possit de puncto E ad sectionem BΓ recta aliqua è qua abscindatur Minima; rectæ Minimæ, ab extremitatibus rectarum de puncto E eductarum (per 53am hujus) remotiores erunt à Vertice Γ quam ipsæ eductæ. Ductis autem Tangentibus, eo quo demonstrata est Prop. 72da modo, constabit EB majorem esse quâvis aliâ rectâ de puncto E ad sectionem ductâ; eidemque propiorem majorem esse remotiore. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXVII.

SI *normalis ad Axem majorem Ellipseos demissa cadat super centrum Sectionis; possibile autem sit ad quadrantem alterutrum Sectionis ducere rectam aliquam è qua abscindat Axis* Minimam: *erit recta hæc* Maxima *omnium de puncto dato ad eundem quadrantem ductarum, eidemque propior major erit remotiore.*

Sit ABΓ Ellipsis, cujus Axis major AΓ, ac centrum Δ; sit autem E punctum infra Axem AΓ datum, unde demissa normalis EΔ: ac possibile sit ab E ad sectionis quadrantem ΓB educere rectam aliam è qua abscindatur Minima, puta EHZ. Dico EZ majorem esse quavis alia de puncto E ad ΓB ducenda, eidemque ab utraque parte propiorem majorem esse remotiore.



Quoniam enim BΔ, ZH sunt duæ Minimæ, quæ productæ conveniunt in E; rectæ Minimæ prodeuntes è punctis quibusvis sectionis inter Γ & Z (per 46am hujus) occurrent Axi remotius à Vertice Γ quam rectæ connectentes eadem puncta & E, Minimæ vero de punctis sectionis inter B & Z ductæ (per eandem 46tam) propiores erunt Vertici Γ quam rectæ de puncto dato E ad eadem in sectione puncta prodeuntes. Quibus positis, ad modum demonstrationis Prop. 72dæ, ope Tangentium, probabitur rectam EZ majorem esse quâvis alia de puncto E ad sectionem BΓ ducta, eidemque propiorem majorem esse remotiore. Q. E. D.

ΠΑΠΠΟΥ

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΛΗΜΜΑΤΑ
ΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟ ΕΚΤΟΝ
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA
IN SEXTUM LIBRUM CONICORUM
APOLLONII PERGÆI.

ΛΗΜΜΑ α΄.

Ἔστω δύο τρίγωνα ἀμβλυγώνια τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἀμβλείας ἔχοντα τὰς Γ, Ζ γωνίας, καὶ ἴσας τὰς Α, Δ ὀξείας· ὀρθαὶ ταῖς ΒΓ, ΕΖ ἤχθωσαν αἱ ΓΗ, ΖΘ· ἔστω δὲ ὡς τὸ ὑπὸ τῆς ΒΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΕΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

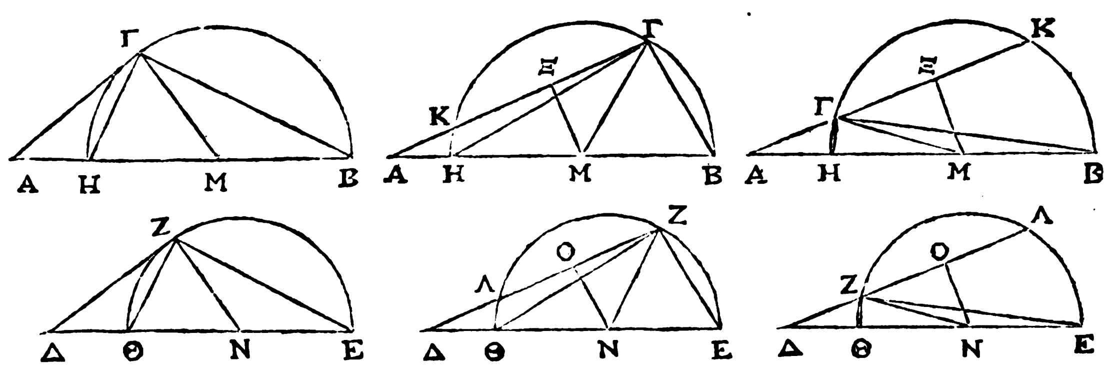
ΓΕΓΡΑΦΘΩ γὰρ ἐπὶ τῶν ΗΒ, ΕΘ ἡμικύκλια, ἐλεύσεται δὴ καὶ διὰ τῶν Γ, Ζ. ἐρχέσθω· καὶ ἔστω τὰ ΗΓΒ, ΕΖΘ· ἤτοι δὴ ἐφάπτονται αἱ ΑΓ, ΔΖ τῶν ἡμικυκλίων, ἢ γ᾽ οὔ. εἰ μὲν οὖν ἐφάπτονται, φανερὸν ὅτι γίνεται ὅμοια τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα. ἐὰν γὰρ λάβω τὰ κέντρα τὰ Μ, Ν, καὶ ἐπιζεύξω τὰς ΜΓ, ΝΖ, ἔσονται ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΜΓΑ, ΝΖΔ γωνίαι. καὶ εἰσὶν αἱ Α, Δ γωνίαι ἴσαι· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΓ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΝΖ γωνίᾳ, καὶ τὰ ἡμίση· ἡ Β ἄρα γωνία τῇ Ε ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ Α τῇ Δ· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἐφαπτέσθωσαν, ἀλλὰ τεμνέτωσαν τὰ ἡμικύκλια κατά τινα σημεῖα τὰ Κ, Λ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΜΞ, ΝΟ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΚΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ ΛΟ τῇ ΟΖ. ὅμοιον δὲ τὸ ΑΜΞ τῷ ΔΝΟ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΜ οὕτως ἡ ΟΔ πρὸς ΔΝ. ἐπειδὴ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΑ

LEMMA I.

Sint duo triangula obtusangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, angulos habentia obtusos Γ, Ζ; acutos vero & æquales angulos Α, Δ. ipsis ΒΓ, ΕΖ ad angulos rectos sint ΓΗ, ΖΘ: rectangulum autem ΒΑΗ sit ad quadratum ex ΑΓ in eadem ratione quam habet rectangulum ΕΔΘ ad quadratum ex ΔΖ. Dico triangulum ΑΒΓ simile esse triangulo ΔΕΖ.

DIAMETRIS ΗΒ, ΕΘ describantur semicirculi, quæ proinde transibunt per puncta Γ, Ζ; atque sint semicirculi ΒΓΗ, ΕΖΘ, quos vel tangunt rectæ ΑΓ, ΔΖ, vel non. Si vero tangant, manifestum est similia esse triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ. Nam si capiantur centra Μ, Ν ac jungantur ΜΓ, ΝΖ, erunt anguli ΜΓΑ, ΝΖΔ recti.



& anguli Α, Δ sunt æquales: angulus igitur ΑΜΓ angulo ΔΝΖ æqualis est, unde & eorundem semisses, nempe anguli ΑΒΓ, ΔΕΖ sunt æquales. Sed anguli ad Α & Δ sunt æquales: quocirca triangula sunt similia.

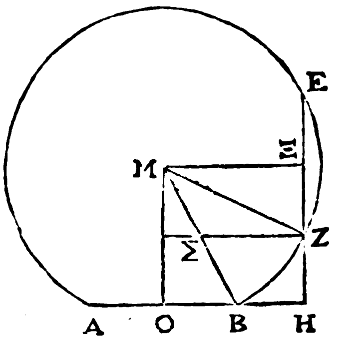
Sed non tangant, sed occurrant semicirculis in punctis Κ, Λ, ac ducantur normales ΜΞ, ΝΟ: est igitur ΚΞ ipsi ΞΓ æqualis, ut & ΛΟ ipsi ΟΖ. Simile autem est triangulum ΑΜΞ triangulo ΔΝΟ, adeoque ΞΑ est ad ΑΜ sicut ΟΔ ad ΔΝ. Cum vero rectangulum ΒΑΗ est ad quadratum ex ΑΓ sicut rectangulum ΕΔΘ ad quadratum ex ΔΖ, erit etiam rectangulum ΚΑΓ ad quadratum ex ΑΓ, sive ΚΑ ad ad Α Γ, ficut rectangulum Λ Δ Ζ ad quadratum ex Δ Ζ, hoc eft Λ Δ ad Δ Ζ; unde fit Ξ Α ad Α Γ ficut Ο Δ ad Δ Ζ. Sed Ξ Α eft ad Α Μ ficut Ο Δ ad Δ Ν, ob fimilia triangula: ex æquo igitur Γ Α eft ad Α Μ ficut Ζ Δ ad Δ Ν: ac circa æquales angulos latera funt proportionalia, quare anguli Α Μ Γ, Δ Ν Ζ, eorumque femiffes, nempe anguli Β, Ε funt æquales. Sed & anguli Α, Δ ex hypothefi funt æquales: quapropter triangulum Α Β Γ triangulo Δ Ε Ζ fimile eft.

Hujus autem converfa manifefta eft: nempe quod, fi fuerint triangula Α Β Γ, Δ Ε Ζ fimilia, anguli vero Β Γ Η, Ε Ζ Θ recti, fiet rectangulum Β Α Η ad quadratum ex Α Γ ficut rectangulum Ε Δ Θ ad quadratum ex Δ Ζ. Etenim ob fimilia triangula, Β Α eft ad Α Γ ficut Ε Δ ad Δ Ζ; ac Η Α eft ad Α Γ ficut Θ Δ ad Δ Ζ: componendo igitur rationes *conftat propofitum.*

LEMMA II.

Super chordas Α Β, Γ Δ, fint duo fimilia fegmenta majora femicirculo, ac ducantur catheti Ε Ζ Η, Θ Κ Λ: fit autem ut Ε Η ad Η Ζ ita Θ Λ ad Λ Κ. oportet demonftrare circumferentiam Β Ζ fimilem effe circumferentiæ Δ Κ.

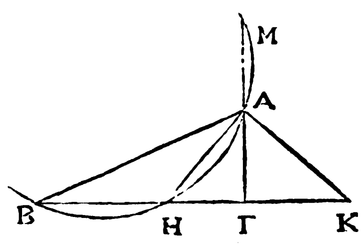
CAPIANTUR centra Μ, Ν, ac ducantur normales Μ Ξ, Μ Ο; Ν Π, Ν Ρ: ac jungantur Μ Β, Ν Δ. Anguli autem Ο Μ Β, Ρ Ν Δ æquales funt, quia angulis in utroque fegmento funt æquales; ac anguli Ο, Ρ recti funt: quare & anguli Μ Β Ο, Ν Δ Ρ funt æquales. Ipfis Α Β, Γ Δ parallelæ ducantur Ζ Σ, Κ Τ ac jungantur Μ Ζ, Ν Κ: angulus igitur Μ Σ Ζ angulo Ν Τ Κ æquatur. Quoniam vero Ε Η eft ad Η Ζ ficut Θ Λ ad Λ Κ, erit Ξ Η ad Η Ζ ficut Π Λ ad Λ Κ; erit quoque Η Ξ ad Ξ Ζ, hoc eft Μ Β five Ζ Μ ad Μ Σ, ficut Λ Π ad Π Κ, hoc eft Δ Ν five Ν Κ ad Ν Τ. Anguli autem Μ Σ Ζ, Ν Τ Κ funt æquales, anguli vero Μ Ζ Σ, Ν Κ Τ acuti: proinde angulus Σ Μ Ζ angulo Τ Ν Κ æqualis eft; adeoque circumferentia Β Ζ circumferentiæ Δ Κ fimilis. *Q. E. D.*



LEMMA III.

Sint duo triangula rectangula Α Β Γ, Δ Ε Ζ rectos angulos habentia Γ, Ζ; ac ducantur fub æqualibus angulis Β Α Η, Ε Δ Θ rectæ Α Η, Δ Θ: fit autem ut rectangulum fub Β Γ Η ad quadratum ex Α Γ, ita rectangulum Ε Ζ Θ ad quadratum ex Ζ Δ. Dico triangulum Α Β Γ fimile effe triangulo Δ Ε Ζ.

CIRCA triangula Α Β Η, Δ Ε Θ defcribantur fegmenta circulorum Β Η Α, Δ Θ Ε, quæ proinde fimilia funt. Tangent autem fegmenta rectæ Α Γ, Δ Ζ, vel non: primum vero tangant; ac proinde rectangulum Β Γ Η æquale erit quadrato ex Α Γ; hoc eft, fi ipfi Α Η ducatur normalis Α Κ, rectangulo Η Γ Κ: rectangulum autem Ε Ζ Θ æquale erit quadrato ex Δ Ζ, hoc eft rectangulo Θ Ζ Λ,



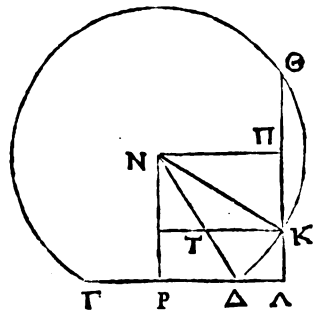
πρὸς Α Γ οὕτω τὸ ὑπὸ Λ Δ Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Ζ, τουτέστιν ἡ Λ Δ πρὸς Δ Ζ· ὥστε καὶ ὡς ἡ Ξ Α πρὸς Α Γ οὕτως ἡ Ο Δ πρὸς Δ Ζ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ Ξ Α πρὸς Α Μ οὕτως ἐστὶν ἡ Ο Δ πρὸς Δ Ν, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Γ Α πρὸς Α Μ οὕτως ἡ Ζ Δ πρὸς Δ Ν, καὶ παρ᾽ ἴσας γωνίας τὰς Α, Δ ἀνάλογόν εἰσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν Α Μ Γ τῇ ὑπὸ τῶν Δ Ν Ζ γωνίᾳ, καὶ τὰ ἡμίση. ἡ Β ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ Ε. ἀλλὰ καὶ ἡ Α τῇ Δ καθ᾽ ὑπόθεσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α Β Γ τρίγωνον τῷ Δ Ε Ζ τριγώνῳ.

Συμφανὲς δὲ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ, τοῦ Α Β Γ ὄντος ὁμοίου τῷ Δ Ε Ζ, καὶ ὀρθῶν τῶν ὑπὸ Β Γ Η, Ε Ζ Θ, δεῖξαι ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ Β Α Η πρὸς τὸ ἀπὸ Α Γ οὕτω τὸ ὑπὸ Ε Δ Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Ζ· ἔστι γάρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, ὡς μὲν Β Α πρὸς Α Γ οὕτως ἡ Ε Δ πρὸς Δ Ζ, ὡς δὲ ἡ Η Α πρὸς Α Γ οὕτως ἡ Θ Δ πρὸς Δ Ζ· καὶ ὁ συνημμένος.

ΛΗΜΜΑ β΄.

Ἔστω δύο ὅμοια τμήματα μείζονα ἡμικυκλίου τὰ ἐπὶ τῶν Α Β, Γ Δ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι Ε Ζ Η, Θ Κ Λ· ἔστω δὲ ὡς ἡ Ε Η πρὸς Η Ζ οὕτως ἡ Θ Λ πρὸς Λ Κ. δεικτέον ὅτι ὁμοία ἐστὶν ἡ Β Ζ περιφέρεια τῇ Δ Κ περιφερείᾳ.

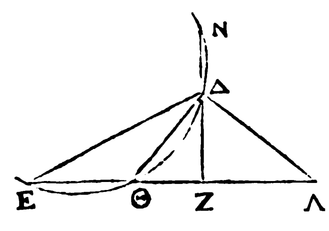
ΕΙΛΗΦΘΩ τὰ κέντρα τὰ Μ, Ν, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ Μ Ξ, Μ Ο, Ν Π, Ν Ρ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Μ Β, Ν Δ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ Ο Μ Β γωνία τῇ ὑπὸ Ρ Ν Δ γωνίᾳ, ἴσαι γάρ εἰσι ταῖς ἐν τοῖς τμήμασι κατὰ μίαν, καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ Ο, Ρ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ Μ Β Ο γωνία τῇ ὑπὸ Ν Δ Ρ γωνίᾳ. Ἤχθωσαν τῶν Α Β, Γ Δ παράλληλοι αἱ Ζ Σ, Κ Τ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Μ Ζ, Ν Κ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ Μ Σ Ζ γωνία τῇ ὑπὸ Ν Τ Κ γωνίᾳ. ἐπειδή ἐστιν ὡς ἡ Ε Η πρὸς Η Ζ, οὕτως ἡ Θ Λ πρὸς Λ Κ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Ξ Η πρὸς Η Ζ οὕτως ἐστὶν ἡ Π Λ πρὸς Λ Κ· ὥστε καὶ ἡ Η Ξ πρὸς Ξ Ζ, τουτέστι ἡ Μ Β ἤτοι Ζ Μ πρὸς Μ Σ, οὕτως ἡ Λ Π πρὸς Π Κ, τουτέστι ἡ Δ Ν ἤτοι Ν Κ πρὸς Ν Τ. καί εἰσιν αἱ μὲν ὑπὸ Μ Σ Ζ, Ν Τ Κ ἴσαι, αἱ δὲ ὑπὸ Μ Ζ Σ, Ν Κ Τ ὀξεῖαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ Σ Μ Ζ γωνία τῇ ὑπὸ Τ Ν Κ· ὅμοια ἄρα ἐστὶν ἡ Β Ζ περιφέρεια τῇ Δ Κ περιφερείᾳ.



ΛΗΜΜΑ γ΄.

Ἔστω δύο ὀρθογώνια τὰ Α Β Γ, Δ Ε Ζ, ὀρθὰς ἔχοντα τὰς Γ, Ζ γωνίας· καὶ διήχθωσαν αἱ Α Η, Δ Θ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ Β Α Η, Ε Δ Θ· ἔστω τε ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Β Γ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Α Γ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Ε Ζ Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Δ. λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ Α Β Γ τρίγωνον τῷ Δ Ε Ζ τριγώνῳ.

ΓΕΓΡΑΦΘΩ γὰρ περὶ τὰ Α Β Η, Δ Ε Θ τρίγωνα τμήματα κύκλων τὰ Β Η Α, Δ Θ Ε· ὅμοια ἄρα ἐστίν. ἤτοι ἐφάπτονται αἱ Α Γ, Δ Ζ τῶν τμημάτων, ἢ οὔ. ἐφαπτέσθωσαν πρότερον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ Β Γ Η τῷ ἀπὸ Α Γ, τουτέστι, ἐὰν πρὸς ὀρθὰς ἀγάγω τῇ Α Η τὴν Α Κ, τῷ ὑπὸ τῶν Η Γ Κ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν Ε Ζ Θ τῷ ἀπὸ Δ Ζ, τουτέστι, ἐὰν ὀρθὴν ἀγάγω Δ Λ τῇ Δ Θ, τῷ ὑπὸ



ὑπὸ Θ Z Λ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ μὲν B Γ τῇ Γ K, ἡ δὲ E Z τῇ Z Λ. καὶ ὀρθαὶ αἱ Γ, Z· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ B A K γωνία τῆς ὑπὸ B A Γ γωνίας, ἡ δὲ ὑπὸ E Δ Λ γωνία τῆς ὑπὸ E Δ Z. καί εἰσιν ἴσαι αἱ ὑπὸ B A K, E Δ Λ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ μὲν ὑπὸ B A H τῇ ὑπὸ E Δ Θ, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ H A K, ὀρθή τε ἡ ὑπὸ Θ Δ Λ· αἱ ἄρα ὑπὸ B A Γ, E Δ Z ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ ὀρθαὶ αἱ Γ, Z· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ A B Γ τρίγωνον τῷ Δ E Z τριγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἐφαπτέσθωσαν αἱ A Γ, Δ Z, ἀλλὰ τεμνέτωσαν κατὰ τὰ M, N σημεῖα. ἔστιν οὖν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν M Γ A πρὸς τὸ ἀπὸ Γ A, τουτέστιν ὡς ἡ M Γ πρὸς Γ A, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν Δ Z N πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Z, τουτέστιν ἡ N Z πρὸς Z Δ. καὶ ἔστιν ὅμοια μείζονα τμήματα τὰ B A H, E Δ Θ· ὅμοια ἄρα ἐστὶν ἡ A H περιφέρεια τῇ Δ Θ περιφερείᾳ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ B γωνία τῇ E. ὅμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ A B Γ τρίγωνον τῷ Δ E Z τριγώνῳ.

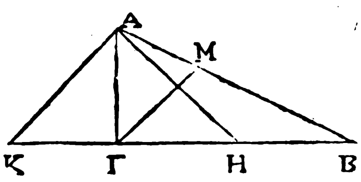
ducta scilicet ipsi Δ Θ normali Δ Λ: quare recta B Γ ipsi Γ K æqualis est, ut & E Z ipsi Z Λ. & anguli ad Γ, Z sunt recti; duplus est igitur angulus B A K anguli B A Γ, anguli etiam E Δ Z duplus est angulus E Δ Λ angulus autem B A K æqualis est angulo E Δ Λ. quia anguli B A H, E Δ Θ sunt æquales, uti & anguli H A K, Θ Δ Λ, quia recti; quare anguli B A Γ E Δ Z æquales sunt. sed anguli ad Γ, Z sunt recti: triangulum igitur A B Γ triangulo Δ E Z simile est. *Q. E. D.*

Jam si non tangant circulos rectæ A Γ, Δ Z, conveniant iisdem in punctis M, N. erit igitur ut rectangulum M Γ A ad quadratum ex Γ A, hoc est M Γ ad Γ A, ita rectangulum Δ Z N ad quadratum ex Δ Z, sive ut N Z ad Z Δ. sunt autem segmenta B A H, E Δ Θ similia & majora semicirculo: quare (*per præcedens Lemma*) circumferentia A H circumferentiæ Δ Θ similis est; adeoque anguli B, E æquales. Simile est igitur triangulum A B Γ triangulo Δ E Z. *Q. E. D.*

Ἄλλως τὸ αὐτό.

Ἔστω δύο τρίγωνα ὀρθὰς ἔχοντα τὰς Γ, Z γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ A H, Δ Θ ἐν ἴσαις γωνίαις τῶν ὑπὸ B A H, E Δ Θ· ἔστω τε ὡς τὸ ὑπὸ B Γ H πρὸς τὸ ἀπὸ A Γ οὕτω τὸ ὑπὸ E Z Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Z. ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ A B Γ τρίγωνον τῷ Δ E Z τριγώνῳ.

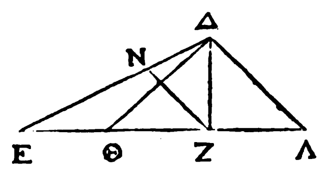
Ἤχθωσαν ταῖς A H, Δ Θ ὀρθαὶ αἱ A K, Δ Λ· ἴσον ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ A Γ τῷ ὑπὸ H Γ K, τὸ δὲ ἀπὸ Δ Z τῷ ὑπὸ Θ Z Λ. ἔστιν οὖν ὡς τὸ ὑπὸ B Γ H πρὸς τὸ ὑπὸ H Γ K, τουτέστιν ὡς ἡ B Γ πρὸς τὴν Γ K, οὕτω τὸ ὑπὸ E Z Θ πρὸς τὸ ὑπὸ Θ Z Λ, τουτέστιν ἡ E Z πρὸς Z Λ. ἤχθωσαν ταῖς A K, Δ Λ παράλληλοι αἱ Γ M, Z N· καὶ ὡς ἄρα ἡ B M πρὸς M A οὕτως ἡ E N πρὸς N Δ. καί εἰσιν ὀρθαὶ μὲν αἱ πρὸς τοῖς Γ, Z σημείοις, ἴσαι δὲ αἱ πρὸς τοῖς M, N γωνίαι ταῖς ὑπὸ B A K, E Δ Λ. διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον ὅμοιόν ἐστι τὸ A B Γ τρίγωνον τῷ Δ E Z τριγώνῳ.



Idem Aliter.

Sint duo triangula rectos habentia angulos Γ, Z; ac ducantur A H, Δ Θ sub æqualibus angulis B A H, E Δ Θ: sit autem rectangulum B Γ H ad quadratum ex A Γ sicut rectangulum E Z Θ ad quadratum ex Δ Z. dico triangulum A B Γ simile esse triangulo Δ E Z.

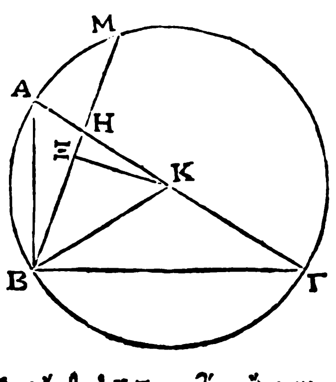
Ducantur ad angulos rectos ipsis A H, Δ Θ rectæ A K, Δ Λ: æquale est igitur quadratum ab A Γ rectangulo H Γ K; ac quadratum ex Δ Z rectangulo Θ Z Λ. unde rectangulum B Γ H erit ad rectangulum H Γ K, sive B Γ ad Γ K, sicut rectangulum E Z Θ ad rectangulum Θ Z Λ, sive E Z ad Z Λ. ipsis A K, Δ Λ parallelæ ducantur Γ M, Z N; ac fiet B M ad M A sicut E N ad N Δ. anguli autem ad puncta Γ, Z sunt recti, & anguli ad puncta M, N æquales sunt angulis B A K, E Δ Λ. Quapropter ex præmissis constabit triangulum A B Γ triangulo Δ E Z simile esse.



ΛΗΜΜΑ δ'.

Ἔστω δύο τρίγωνα ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς B, E σημείοις γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ B H, E Θ ἐν ἴσαις γωνίαις τῶν ὑπὸ A H B, Δ Θ E· ἔστω τε ὡς τὸ ὑπὸ τῶν A H Γ πρὸς τὸ ἀπὸ H B, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν Δ Θ Z πρὸς τὸ ἀπὸ Θ E. δεικτέον ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ A B Γ τρίγωνον τῷ Δ E Z τριγώνῳ.

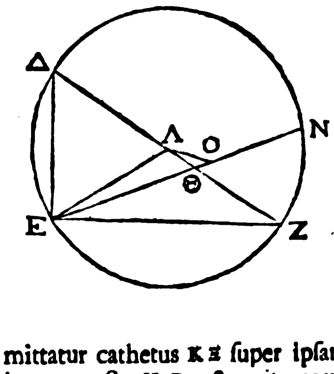
Περιγεγράφθωσαν κύκλοι, καὶ εἰλήφθω αὐτῶν τὰ κέντρα τὰ K, Λ. φανερὸν δὴ ὅτι ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν H, Θ σημείων εἰσίν. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τὸ μὲν K μεταξὺ τῶν Γ, H σημείων, τὸ δὲ Λ μεταξὺ τῶν Δ, Θ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ B H, E Θ ἐπὶ τὰ M, N σημεῖα, καὶ ἀπὸ τοῦ K ἐπὶ τὴν M B κάθετος ἤχθω ἡ K Ξ. πίπτει ἄρα μεταξὺ τῶν H, B, ἀμβλεῖά τε γίνεται ἡ ὑπὸ A H B γωνία, καὶ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ Δ Θ E· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ Δ Θ E γωνία· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ Δ Θ N. ὥστε ἡ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν E N κάθετος ἀγομένη πίπτει μεταξὺ τῶν Θ, N. πιπτέτω καὶ ἔστω ἡ Λ O· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ N O τῇ O E, ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ N O τῆς Θ E, πολλῷ ἄρα ἡ N Θ τῆς Θ E ἐστὶ μείζων· καὶ τὸ ὑπὸ N Θ E, τουτέστι τὸ Δ Θ Z, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ



LEMMA IV.

Sint duo triangula rectos angulos habentia ad puncta B, E, ac ducantur B H, E Θ sub æqualibus angulis A H B, Δ Θ E: sit autem rectangulum A H Γ ad quadratum ex H B sicut rectangulum Δ Θ Z ad quadratum ex Θ E. demonstrandum est triangulum A B Γ triangulo Δ E Z simile esse.

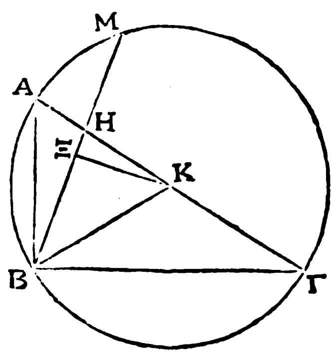
Circumscribantur circuli quorum capiantur centra K, Λ. ac manifestum est centra esse ad easdem partes punctorum H, Θ. nam si fieri possit sit K inter puncta Γ, H, centrum vero Λ inter Δ & Θ, ac producantur B H, E Θ ad puncta M, N, & de puncto K demittatur cathetus K Ξ super ipsam M B. cadat autem inter puncta H, B; & erit angulus A H B obtusus, cui æqualis est angulus Δ Θ E: unde angulus Δ Θ E est etiam obtusus, adeoque angulus Δ Θ N acutus. hinc normalis à puncto Λ in E N demissa cadet inter puncta Θ, N. cadat, sitque ea recta Λ O: est igitur N O ipsi O E æqualis, ac proinde N O major erit quam Θ E, ac N Θ multo major quam Θ E; unde rectangulum N Θ E sive Δ Θ Z majus erit quadrato ex



Q E Θ.

sed rectangulum ΔΘZ est ad quadratum ex ΘE sicut rectangulum AHΓ ad quadratum ex HB. absurdum est igitur *rectangulum* ΔΘZ *majus esse quadrato ex* ΘE. cum enim MH minor est quam HB erit rectangulum MHB, *hoc est* AHΓ, minus quadrato ex HB: centro igitur K existente inter puncta H, Γ, non erit centrum Λ inter puncta Δ, Θ.

Cadat igitur inter puncta Θ, Z, ac demittatur normalis ΛO. quoniam vero rectangulum AHΓ, hoc est rectangulum MHB, est ad quadratum ex HB, sive MH ad HB, sicut rectangulum ΔΘZ sive NΘE ad quadratum ex ΘE, hoc est ut NΘ ad ΘE; ac rectæ BM, NE bisecantur in Ξ & O: erit igitur ut BΞ ad ΞH ita EO ad OΘ. sed ut HΞ ad ΞK ita ΘO ad

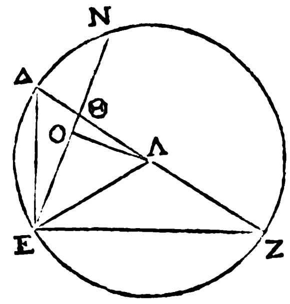


OΛ; quia anguli ad Ξ, O sunt recti, anguli vero ad H, Θ æquales: ex æquo igitur ut BΞ ad ΞK ita EO ad OΛ; comprehendunt autem æquales angulos: ac proinde angulus BKΞ angulo EΛO æqualis est. verum angulus ΞKH angulo OΛΘ æqualis est: totus igitur BKH toti EΛΘ æqualis, eorundemque dimidia sive anguli AΓB, ΔZE æqualia sunt: adeoque, ob rectos angulos ad B & E, erit triangulum ABΓ triangulo ΔEZ simile.

Ac manifesta est hujus conversa: nempe, si triangulum ABΓ triangulo ΔEZ fuerit simile, atque etiam triangulum HBΓ triangulo ΘEZ; fieri rectangulum AHΓ ad quadratum ex HB sicut rectangulum ΔΘZ ad quadratum ex ΘE, ob similitudinem triangulorum.

EΘ τετραγώνου, καί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΔΘZ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘE οὕτω τὸ ὑπὸ AHΓ πρὸς τὸ ἀπὸ HB· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. ἔστι γὰρ ἔλασσον, ἐπειδήπερ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ MH τῆς HB καὶ τὸ ὑπὸ MHB τοῦ ἀπὸ HB· οὐκ ἄρα τοῦ K κέντρου ὄντος μεταξὺ τῶν H, Γ τὸ Λ ἔσται μεταξὺ τῶν Δ, Θ.

Ἔστω οὖν μεταξὺ τῶν Θ, Z, καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ ἤχθω ἡ ΛO κάθετος. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ AHΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ MHB, πρὸς τὸ ἀπὸ HB, τουτέστιν ὡς ἡ MH πρὸς HB, οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΘZ, τουτέστι τὸ ὑπὸ NΘE, πρὸς τὸ ἀπὸ ΘE, τουτέστιν ἡ NΘ πρὸς ΘE. καὶ τέμνονται αἱ BM, NE δίχα τοῖς Ξ, O· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BΞ πρὸς ΞH οὕτως ἡ EO πρὸς OΘ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ



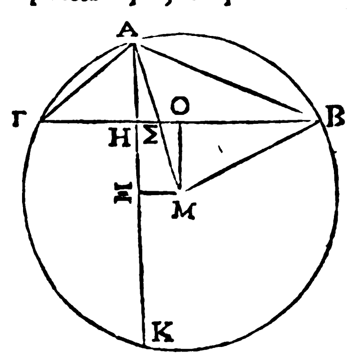
HΞ πρὸς ΞK οὕτως ἡ ΘO πρὸς τὴν OΛ· ὀρθαὶ μὲν γὰρ αἱ Ξ, O, ἴσαι δὲ αἱ πρὸς τοῖς H, Θ σημείοις γωνίαι· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ BΞ πρὸς ΞK οὕτως ἡ EO πρὸς OΛ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ἴση ἄρα ἐστὶ ἡ ὑπὸ τῶν BKΞ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν EΛO γωνίᾳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΞKH γωνία τῇ ὑπὸ OΛΘ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ BKH ὅλῃ τῇ ὑπὸ EΛΘ ἴση, καὶ τὰ ἡμίσεια· καὶ ἡ ὑπὸ τῶν AΓB ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΔZE. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ B, E γωνίαι· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Φανερὸν δὲ καὶ τούτῳ ἀντίστροφον, τὸ, ἐὰν ᾖ ὅμοιον τὸ μὲν ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ, τὸ δὲ HBΓ τῷ ΘEZ, ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ AHΓ πρὸς τὸ ἀπὸ HB οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΘZ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘE, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων.

LEMMA V.

Sint duo triangula ABΓ, ΔEZ æquales habentia angulos ad A, Δ, non autem rectos; ac ducantur catheti AH, ΔΘ; habeat autem rectangulum BHΓ ad quadratum ex AH eandem rationem quam habet rectangulum EΘZ ad quadratum ex ΔΘ: ac sint BH, EΘ segmenta majora rectarum BΓ, EZ. dico triangulum ABH simile esse triangulo ΔEΘ, reliquumque reliquo.

Circumscribantur circuli, ac producantur normales AH, ΔΘ ad puncta K, Λ; sintque circulorum centra M, N: à quibus ad ipsas AK, BΓ; ΔΛ, EZ demittantur catheti MΞ, MO; NΠ, NP. & eodem quo præcedentia constabit modo, quod KH est ad HA sicut ΛΘ ad ΘΔ, quodque AΞ est ad ΞH sicut ΔΠ ad ΠΘ. junge AM, ΔN, & erit ut AΞ ad ΞH ita

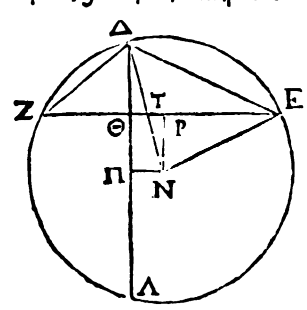


AM ad MΣ, utque ΔΠ ad ΠΘ ita ΔN ad NT; adeoque AM est ad MΣ sicut ΔN ad NT. Connectantur etiam BM, EN. quoniam vero segmentum BAΓ simile est segmento EΔZ, reliquum segmentum BKΓ reliquo segmento EΛZ simile est. quæ igitur in illis insunt anguli sunt inter se æquales, ac proinde anguli BMO, ENP sunt æquales, in primo casu. In secundo vero manifestum est angulum BMO angulo ENP æqualem esse, quia sunt in segmentis æ-

ΛΗΜΜΑ έ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ABΓ, ΔEZ ἴσας ἔχοντα τὰς A, Δ γωνίας, μὴ ὀρθὰς δέ· καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ AH, ΔΘ· καὶ ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν BHΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AH, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν EΘZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΘ· καὶ ἔστω τῶν BΓ, EZ εὐθειῶν μείζονα τμήματα BH, EΘ. λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ μὲν ABH τρίγωνον τῷ ΔEΘ, τὸ δὲ λοιπὸν τῷ λοιπῷ.

Περιγεγράφθωσαν κύκλοι καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ AH, ΔΘ ἐπὶ τὰ K, Λ σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ M, N. καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰς AK, BΓ· ΔΛ, EZ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ MΞ, MO· NΠ, NP. ἔστι δὲ κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς προγεγραμμένοις, ὡς ἡ KH πρὸς HA οὕτως ἡ ΛΘ πρὸς ΘΔ· ὥστε καὶ ὡς AΞ πρὸς ΞH, οὕτως ἡ ΔΠ πρὸς ΠΘ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ AM, ΔN. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AΞ πρὸς

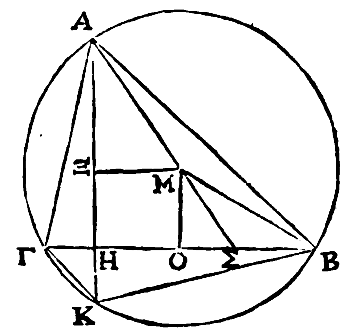


ΞH οὕτως ἡ AM πρὸς MΣ, ὡς δὲ ἡ ΔΠ πρὸς ΠΘ οὕτως ἡ ΔN πρὸς NT· καὶ ὡς ἄρα AM πρὸς MΣ οὕτως ἡ ΔN πρὸς NT. ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ BM, EN. ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ BAΓ τμῆμα τῷ EΔZ τμήματι· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ BKΓ τμῆμα λοιπῷ τῷ EΛZ τμήματι ὅμοιόν ἐστι· αἱ ἄρα ἐν αὐτοῖς γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, καί εἰσιν αὐτῶν κατὰ μίαν ἴσαι· αἱ ὑπὸ τῶν BMO, ENP ἄρα γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἐπὶ τῆς προτέρας διαθέσεως τῶν πτώσεων. ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, ἐκ παρακειμένου δηλονότι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν BMO γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ENP, καὶ γὰρ αἱ ἐν ἴσοις

BAΓ,

ΒΑΓ, ΕΔΖ τμήμασι γωνίαι· γίνεται οὖν ὡς ἡ ΒΜ πρὸς ΜΟ, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΟ, οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΔΝ πρὸς ΝΡ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΣ, οὕτως ἡ ΔΝ πρὸς ΝΤ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΜΟ πρὸς ΜΣ οὕτως ἡ ΡΝ πρὸς ΝΤ. καί εἰσιν ὀρθαὶ μὲν αἱ Ο, Ρ γωνίαι, ὀξεῖα δ' ἑκατέρα τῶν Σ, Τ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΟΜΣ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΡΝΤ γωνίᾳ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΜΟ τῇ ὑπὸ ΕΝΡ ἴση ἐστίν· καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΜΣ ἄρα τῇ ὑπὸ τῶν ΕΝΤ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ Γ γωνία τῇ Ζ ἐστὶν ἴση. ὅμοια ἄρα ἐστὶ πάντα πᾶσι.

Δυνατὸν δέ, καὶ τῆς μιᾶς γωνίας, ἢ τῶν ἀμβλειῶν ἢ ὀξειῶν, προγεγραμμένης τῆς δείξεως, τὸ λοιπὸν ἀποδοῦναι οὕτως. ὑποκείσθω γὰρ ἀποδεδεῖχθαι, οὐσῶν ἴσων ἀμβλειῶν τῶν γωνιῶν τὸ πρότερον, κατὰ τὸν προγεγραμμένον τρόπον, καὶ ἔστω δεῖν, ὀξειῶν οὐσῶν ἴσων τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ, δεῖξαι, ὅτι ὅμοια τὰ τρίγωνα. πάλιν περιγεγράφθωσαν οἱ κύκλοι, καὶ ἐκβεβλημμένων τῶν ΑΗ, ΔΘ ἐπὶ τὰ Κ, Λ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ· ἴσαι ἄρα εἰσὶν καὶ αἱ ὑπὸ ΒΚΓ, ΕΛΖ γωνίαι ἀμβλεῖαι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, τουτέστι ἡ ΚΗ πρὸς ΗΑ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΘΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΔΘΛ, πρὸς τὸ ἀπὸ

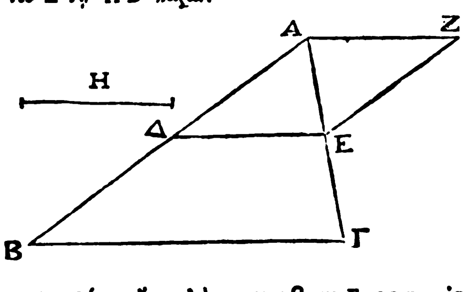


ΔΘ, τουτέστι ἡ ΛΘ πρὸς ΘΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΛ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΛ. καί εἰσιν ἴσαι ἀμβλεῖαι αἱ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ, ΕΛΖ γωνίαι, καὶ κάθετοι αἱ ΚΗ, ΛΘ· διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΒΚΗ τρίγωνον τῷ ΕΛΘ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΓΚΗ τῷ ΖΛΘ. ὥστε καὶ τὸ μὲν ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ ἐστὶν ὅμοιον, τὸ δὲ ΑΗΓ τῷ ΔΘΖ· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ ὅλῳ τῷ ΔΕΖ ἐστὶν ὅμοιον.

ΛΗΜΜΑ ϛʹ.

Θέσει δεδομένων τῶν ΑΒ, ΑΓ εὐθειῶν, ἀγαγεῖν παρὰ θέσει τὴν ΔΕ, καὶ ποιεῖν δοθείσῃ τὴν ΔΕ.

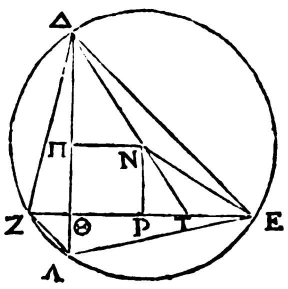
ΓΕΓΟΝΕΤΩ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ· παρὰ θέσει ἄρα ἐστί. καί ἐστι δοθὲν τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ. διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΔΕ. καὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΔΕ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΑΖ. ἀλλὰ καὶ θέσει, καὶ δοθέν ἐστι τὸ Α· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Ζ. διὰ δὲ δεδομένου τοῦ Ζ παρὰ θέσει τῇ ΑΒ ἦκται ἡ ΖΕ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ, θέσει δὲ ἡ ΑΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Ε. καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ θέσει ἦκται ἡ ΔΕ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ.



Συντεθήσεται δὲ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν τῇ θέσει δεδομέναι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα τῷ μεγέθει ἔστω ἡ Η, παρ' ἣν δὲ ἀγαγεῖν δεῖ ἔστω ἡ ΑΖ, καὶ τῇ Η ἴση κείσθω ἡ ΑΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ζ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΕ, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΑΖ ἤχθω ἡ ΕΔ. λέγω ὅτι ἡ ΔΕ ποιεῖ τὸ πρόβλημα. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶ ἡ ΔΕ τῇ ΑΖ, ἀλλὰ ἡ ΑΖ τῇ Η ἐστὶν ἴση, τουτέστι τῇ δοθείσῃ· καὶ ἡ ΔΕ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ Η τῇ δοθείσῃ· ἡ ΔΕ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα. καὶ φανερὸν ὅτι μόνη, ἀεὶ γὰρ ἡ ἔγγιον τοῦ Α τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων.

qualibus ΒΑΓ, ΕΔΖ: est igitur sicut ΒΜ ad ΜΟ sive ΑΜ ad ΜΟ ita ΕΝ sive ΔΝ ad ΝΡ. sed ΑΜ est ad ΜΣ sicut ΔΝ ad ΝΤ: ex æquo igitur ΜΟ est ad ΜΣ sicut ΡΝ ad ΝΤ. anguli autem ad Ο, Ρ sunt recti, quare uterque angulus ad Σ, Τ acutus est; adeoque angulus ΟΜΣ angulo ΡΝΤ æqualis est. sed angulus ΒΜΟ angulo ΕΝΡ æqualis est: angulus itaque ΒΜΣ angulo ΕΝΤ æquatur; ac proinde angulus Γ angulo Ζ æqualis est. unde patet triangula esse quoad omnia similia.

Absoluta autem demonstratione in altero angulorum, sive obtuso sive acuto, in reliquo etiam hoc modo absolvi potest. ponatur enim demonstratum esse modo jam descripto, rem ita se habere, existentibus angulis obtusis, ac probandum est quod, si fuerint anguli ΒΑΓ, ΕΔΖ acuti, triangula quoque similia essent. circumscriptis circulis & productis ΑΗ, ΔΘ ad Κ, Λ, jungantur ΒΚ, ΚΓ; ΕΛ, ΛΖ: æquales igitur sunt anguli obtusi ΒΚΓ, ΕΛΖ. cum autem rectangulum ΒΗΓ sive ΑΗΚ est ad quadratum ex ΑΗ, hoc est ΚΗ ad ΗΑ, sicut rectangulum ΕΘΖ sive ΔΘΛ ad quadratum ex ΔΘ, hoc est ut ΛΘ ad ΘΔ;



erit igitur quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΗΚ sicut quadratum ex ΔΘ ad quadratum ex ΘΛ. sed rectangulum ΒΗΓ est ad quadratum ex ΑΗ sicut rectangulum ΕΘΖ ad quadratum ex ΔΘ: ex æquo igitur rectangulum sub ΒΗΓ erit ad quadratum ex ΗΚ sicut rectangulum ΕΘΖ ad quadratum ex ΘΛ. æquales autem sunt anguli obtusi ΒΚΓ, ΕΛΖ, ac normales sunt ΚΗ, ΛΘ; unde per jam dicta simile erit triangulum ΒΚΗ triangulo ΕΛΘ, triangulumque ΓΚΗ triangulo ΖΛΘ. Quapropter triangulum ΑΒΗ triangulo ΔΕΘ simile est, uti triangulum ΑΗΓ triangulo ΔΘΖ: adeoque totum ΑΒΓ toti ΔΕΖ simile est.

LEMMA VI.

Datis duabus rectis ΑΒ, ΑΓ, ducere rectam ΔΕ positione datæ parallelam, quæ magnitudine datæ æqualis sit.

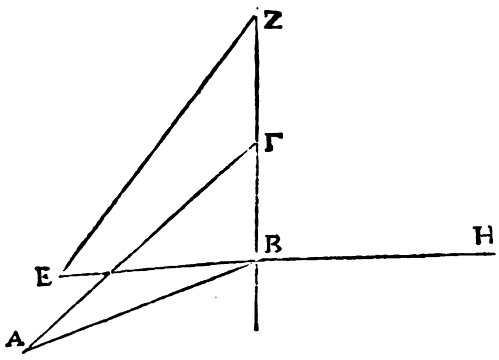
PUTA factum, & per Α ipsi ΔΕ parallela ducatur ΑΖ; ΑΖ igitur positione datæ parallela est: datum autem punctum Α, adeoque ΑΖ positione datur. per Ε ipsi ΑΒ parallela ducatur ΕΖ: æqualis est igitur ΑΖ ipsi ΔΕ. ac data est ΔΕ, quare ΑΖ etiam data est. sed & positione datur, & datum est punctum Α; unde punctum Ζ quoque datur. per datum autem punctum Ζ positione datæ ΑΒ parallela ducta est recta ΖΕ; datur igitur positione ΖΕ. ac datur positione recta ΑΓ: datum est igitur punctum Ε, ac per ipsum ducta est ΔΕ positione datæ parallela: datur itaque positione recta ΔΕ.

Componetur autem problema hoc modo. sint rectæ duæ positione datæ ΑΒ, ΑΓ, magnitudine autem data sit recta Η; ac sit ΑΖ ea cui parallela ducenda est. ipsi Η æqualis fiat ΑΖ, & per Ζ ipsi ΑΒ parallela ducatur ΖΕ; per Ε autem ipsi ΑΖ parallela ducatur ΕΔ. dico rectam ΕΔ satisfacere problemati. quoniam enim ΔΕ æqualis est ipsi ΑΖ, ac ΑΖ rectæ datæ Η facta est æqualis; recta igitur ΔΕ solvit problema. ac manifestum est quod ea sola rem præstat, semper enim puncto Α propior minor est remotiore.

LEMMA VII.

Sint duo plana ABΓ, EBZ, secundum eandem rectam BΓ super idem planum subjectum normaliter erecta. dico rectas AB, BE, BΓ esse in eodem plano.

DUCATUR enim è puncto B in subjecto plano recta BH ipsi BΓ ad angulos rectos: quæ proinde plano EBZ normalis erit; adeoque & rectæ BE. pari argumento ipsi etiam AB normalis est. sed & rectæ BΓ normalis est eadem BH: tribus igitur rectis AB, BE, BΓ ad angulos rectos insistit recta BH ad ipsarum concursum in B: quare [per quintam undecimi El.] rectæ AB, BE, BΓ sunt in eodem plano. Q. E. D.



ΛΗΜΜΑ ζ'.

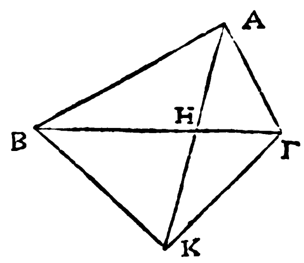
Εϛω δύο ἐπίπεδα τὰ ΑΒΓ, ΕΒΖ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΒΓ ἐφεϛῶτα, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ ὀρθά. λέγω ὅτι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΕ, ΒΓ εὐθεῖαι.

ΗΧΘΩ γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἡ ΗΒ· καὶ τῷ ΕΒΖ ἄρα ἐπιπέδῳ ἔϛαι ὀρθὴ ἡ ΗΒ, ὥϛε καὶ τῇ ΒΕ ἐϛὶν ὀρθή. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τῇ ΑΒ. ἐϛὶ δὲ καὶ τῇ ΒΓ εὐθείᾳ ἡ ΒΗ ὀρθή· ἡ ΒΗ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΑΒ, ΒΕ, ΒΓ ὀρθὴ ἐπὶ τῆς ἁφῆς τοῦ Β ἐφέϛηκεν· διὰ ἄρα τὸ δέκατον πέμπτον ϛοιχεῖον ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ αἱ ΑΒ, ΒΕ, ΒΓ εὐθεῖαι.

LEMMA VIII.

Sint duo triangula ABΓ, ΔEZ rectos habentia angulos A & Δ, ac ducantur rectæ AH, ΔΘ sub æqualibus angulis AHB, ΔΘE; sit autem ut BH ad HΓ ita EΘ ad ΘZ. dico triangulum ABH triangulo ΔEΘ simile esse, *& triangulum* AHΓ *triangulo* ΔΘZ, *totumque toti.*

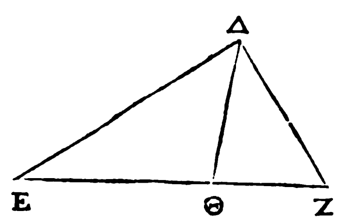
PRODUCATUR AH, ac fiat ut ΔΘ ad ΘE ita ΓH ad HK, ac jungantur BK, KΓ: est igitur angulus ΔEΘ angulo ΓKH æqualis. quoniam vero BH est ad HΓ sicut EΘ ad ΘZ, facta autem est ΓH ad HK sicut ΔΘ ad ΘE; erit ex æquo perturbatè ut BH ad HK ita ΔΘ ad ΘZ; & sunt circa angulos æquales: angulus igitur BKH angulo ad Z æqualis est. demonstratum autem est angulum ΓKH angulo ad E æqualem esse, ac anguli duo ad Z & E æquales sunt recto: adeoque angulus BKΓ rectus est. sed ex hypothesi angulus BAΓ rectus est: unde puncta A, B, Γ, K sunt in circulo; ac proinde angulus AKΓ, hoc est ΔEZ, angulo ABΓ æqualis est. ex hypothesi autem angulus AHB angulo ΔΘE æqualis est: simile igitur est triangulum ABH triangulo ΔEΘ, pariterque triangulum AHΓ triangulo ΔΘZ simile est, *totumque toti.*



ΛΗΜΜΑ η'.

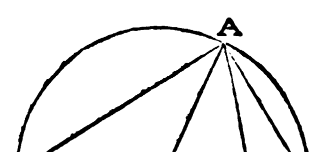
Εϛω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ὀρθὰς ἔχοντα τὰς Α, Δ γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΑΗΒ, ΔΘΕ· ἔϛω δὲ ὡς ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΖ. λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐϛι τὸ μὲν ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ, [τὸ δὲ ΑΗΓ τῷ ΔΘΖ, καὶ ὅλον ὅλῳ.]

ΕΚΒΕΒΛΗΣΘΩ ἡ ΑΗ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΔΘ πρὸς ΘΕ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ· ἴση ἄρα ἐϛὶν ἡ ὑπὸ ΔΕΘ τῇ ὑπὸ ΓΚΗ γωνίᾳ. ἐπειδὴ ἐϛὶν ὡς μὲν ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΖ, ὡς δὲ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΕ· δι' ἴσου ἄρα ἐϛὶν ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ ὡς ἡ ΒΗ πρὸς ΗΚ οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΖ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ἴση ἄρα ἐϛὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΚΗ γωνία τῇ Ζ γωνίᾳ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΚΗ γωνία ἴση τῇ Ε, καί εἰσιν αἱ Ε, Ζ ὀρθῇ ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ γωνία ἐϛὶν ὀρθή. ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὀρθή· ἐν κύκλῳ ἄρα ἐϛὶ τὰ Α, Β, Γ, Κ σημεῖα· ἴση ἄρα ἐϛὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΓ, τουτέϛι ἡ ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ γωνία καθ' ὑπόθεσιν ἴση ἐϛὶ τῇ ὑπὸ ΔΘΕ γωνίᾳ· ὅμοιον ἄρα ἐϛὶν τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ, κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ ἐϛὶν ὅμοιον, [καὶ ὅλον ὅλῳ.]



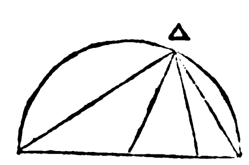
Aliter & melius.

BISECENTUR in punctis K, Λ rectæ BΓ, EZ, ac jungantur AK, ΔΛ. jam quoniam BH est ad HΓ sicut EΘ ad ΘZ, componendo ac dimidiando antecedentes, deinde per conversionem rationis, fiet ΓK sive AK ad KH sicut ΛZ sive ΔΛ ad ΛΘ. anguli autem ad puncta H, Θ sunt æquales, & uterque angulus KAH, ΛΔΘ acutus est: angulus igitur AKH angulo ΔΛΘ est æqualis; eorundemque semisses, nempe anguli ad B & E, sunt æquales. sed angulus ad H angulo ad Θ æqualis est: simile est igitur triangulum ABH triangulo ΔEΘ. pari argumento triangulum AHΓ triangulo ΔΘZ simile est, ac totum toti. Q. E. D.



Ἄλλως καὶ ἄμεινον.

ΤΕΤΜΗΣΘΩΣΑΝ δίχα τοῖς Κ, Λ σημείοις αἱ ΒΓ, ΕΖ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΔΛ. ἐπεὶ οὖν ἐϛὶν ὡς ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΖ, συνθέντι, καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἡγουμένων, καὶ ἀναϛρέψαντι γίνεται ὡς ἡ ΓΚ τουτέϛιν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΗ οὕτως ἡ ΛΖ, τουτέϛιν ἡ ΔΛ πρὸς ΛΘ. καί εἰσιν ἴσαι μὲν αἱ πρὸς τοῖς Η, Θ σημείοις γωνίαι, αἱ δὲ ὑπὸ ΚΑΗ, ΛΔΘ ἑκατέρα ἅμα ὀξεῖα· ἴση ἄρα ἐϛὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΛΘ γωνίᾳ, καὶ τὰ ἡμίση· καὶ ἡ Β ἄρα γωνία ἴση ἐϛὶ τῇ Ε. ἀλλὰ καὶ ἡ Η γωνία τῇ Θ ἴση ἐϛίν· ὅμοιον ἄρα ἐϛὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ τριγώνῳ ἐϛὶν ὅμοιον, καὶ ὅλον ὅλῳ.



APOL-

APOLLONII PERGÆI CONICORUM

LIBER SEXTUS.

Apollonius Attalo S. P.

MITTO tibi Sextum Conicorum librum: qui complectitur Propositiones de Sectionibus Conicis & Sectionum Segmentis æqualibus & inæqualibus, similibus & dissimilibus; ut & alia nonnulla prætermissa ab iis qui nos præcesserunt. Nam specialiter in hoc libro invenies quomodo Sectio Sectioni datæ æqualis in dato Cono recto sit secanda: & quomodo designandus sit Conus rectus Cono dato similis qui contineat datam Sectionem Conicam. Quæ quidem uberius aliquanto ac dilucidius tractavimus quam qui ante nos his de rebus scripserunt. Vale.

DEFINITIONES.

I. Sectiones Conicæ dicantur *æquales*, si applicari possit altera super alteram; ita ut ubique conveniant, nec occurrant inter se. *Inæquales* autem sunto quæ non ita se habent.

II. *Similes* vero dicantur Sectiones, in quibus, ductis ad utriusque Axem ordinatim applicatis, ipsæ ordinatim applicatæ ad portiones Axis ab iisdem abscissas Verticique conterminas fuerint respectivè proportionales: diviso scilicet utroque Axe in partes numero æquales, vel eandem inter se rationem servantes. *Dissimiles* vero sint Sectiones, quibus modo dicta non competunt.

III. Recta subtendens segmentum aliquod circumferentiæ Circuli vel Sectionis Conicæ, *Basis* Segmenti vocetur.

IV. Recta autem quæ occurrens rectis Basi segmenti parallelis eas omnes bifariam dividit, dicatur segmenti *Diameter*.

V. Dicatur etiam punctum in Sectione per quod ducitur Diameter, segmenti *Vertex*.

VI. Segmenta vocentur *æqualia*, si, Basibus æqualibus existentibus, fieri possit ut unum super alterum ita applicetur ut nusquam occurrant inter se, sed utrobique congruant. *Inæqualia* vero sint, quæ aliter se habent.

VII. Segmenta vero *ſimilia* dicantur, quorum baſes cum diametris æquales continent angulos, & in quorum ſingulis, ductis rectis Baſi parallelis numeroque æqualibus, ipſæ parallelæ, ut & Baſes ad abſciſſas diametrorum portiones verticibus conterminas, ſunt in iiſdem rationibus reſpectivè. Diviſâ ſcilicet ab ipſis parallelis utriuſque diametro in partes invicem proportionales.

VIII. Dicatur *Sectio Conica in Cono poni*, vel *Conus à Sectione Conicâ contineri*, ſi vel tota ſectio comprehenſa fuerit in ſuperficie Conicâ inter Verticem & Baſim Coni interceptâ: Vel ſi, eâdem ſuperficie infra Baſim Coni productâ, tota Sectio fuerit in ea ſuperficiei parte quæ eſt infra Baſim: Vel etiam ſi fuerit partim in hac partim in altera ſuperficie.

IX. Coni vero recti dicantur *ſimiles*, ſi eorundem Axes ad diametros Baſium ſint in eadem ratione.

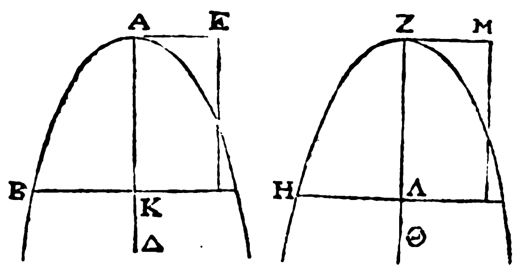
X. Dicatur etiam *Figura Sectionis ſuper Axem vel diametrum aliquam facta*, rectangulum contentum ſub Axe vel diametro illâ & Latere ejuſdem recto.

PROPOSITIO I.

SI in duabus Parabolis latera recta fuerint æqualia, erunt ipſæ Sectiones æquales. Ac ſi fuerint Sectiones æquales, erunt quoque earundem latera recta æqualia.

Sint duæ Parabolæ quarum Axes AΔ, ZΘ: ſintque earundem latera recta AE, ZM æqualia. Dico ipſas ſectiones eſſe æquales.

Nam ſi applicetur Axis AΔ ſuper Axem ZΘ, ſectio coincidet cum ſectione & cum eadem ubique congruet. Si enim fieri poſſit ut non congruant, ſit pars aliqua ſectionis AB quæ non congruat cum ZH, & capiatur punctum quoddam B, in parte cum ipſâ ZH non congruente, à quo demittatur normalis ad Axem BK, ac compleatur parallelogrammum rectangulum KE: &, factâ ZΛ ipſi AK æquali, erigatur normalis ad Axem recta HΛ, ac compleatur parallelogrammum rectangulum ΛM. Quoniam vero latera KA, AE æqualia ſunt lateribus ΛZ, ZM, utraque inter ſe congruent, ac proinde rectangulum KE æquale erit rectangulo ΛM. Sed



recta KB poteſt rectangulum KE (per 11^mam primi) ac (per eandem) ΛH poterit rectangulum ΛM; adeoque ipſæ KB, ΛH ſunt æquales. Poſito igitur Axe ſuper Axem, ita ut coincidat recta AK cum AZ, recta BK cadet ſuper ΛH, punctumque B ſuper punctum H. Poſuimus autem non debere coincidere punctum B cum ſectione ZH: quod abſurdum. Unde patet fieri non poſſe ut ſectio ſectioni non ſit æqualis.

Porro ſi ſectio fuerit æqualis ſectioni, capiatur AK ipſi ZΛ æqualis, & è punctis K, Λ erigantur normales BK, HΛ; ac compleantur rectangula parallelogramma KE, ΛM. Congruente autem ſectione AB cum ſectione ZH, Axis quoque AK cum Axe ZΛ congruet; aliter enim Parabola ZH duos haberet Axes, quod fieri non poteſt: coincidet igitur punctum K cum puncto Λ, ob AK, ZΛ æquales. Cadente autem puncto B ſuper H, erit recta BK ipſi ΛH æqualis; ac proinde (per 11^mam primi) rectangula KE, ΛM æqualia erunt. Sed AK ipſi ZΛ facta eſt æqualis. Latus igitur rectum AE Lateri recto ZM æquale eſt. Q. E. D.

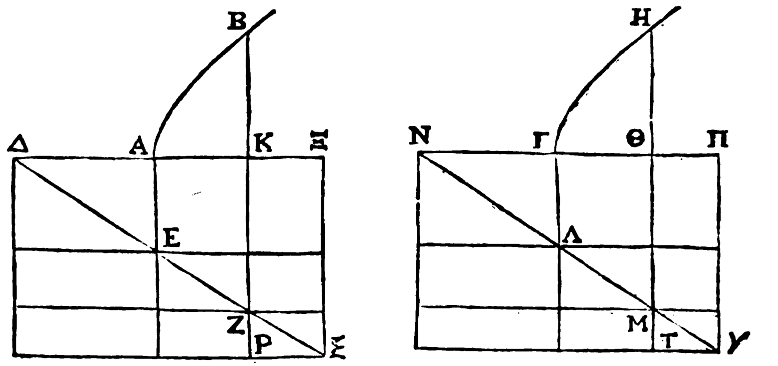
PROPO-

PROPOSITIO II.

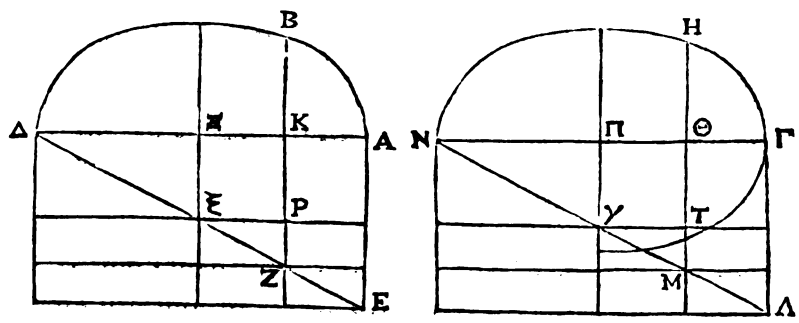
SI Figuræ factæ super Axes transversos Hyperbolarum vel Ellipsium fuerint æquales ac similes inter se, erunt ipsæ Sectiones æquales. Ac si fuerint Sectiones æquales, erunt quoque Figuræ, factæ super Axes earundem transversos, æquales ac similes similiterque sitæ.

Sint AB, ΓH duæ Hyperbolæ vel Ellipses, quarum Axes AK, ΓΘ; sintque figuræ super Axes transversos factæ æquales ac similes, ut ΔE, NΛ. Dico sectiones AB, ΓH æquales esse.

Applicetur Axis AK super Axem ΓΘ, ac coincidet sectio cum sectione. Nam si aliter fuerit, sit pars aliqua sectionis AB extra sectionem ΓH; & in hac parte capiatur punctum aliquod B, à quo demittatur ad Axem normalis BK, ac compleatur rectangulum ΔZ. Capiatur etiam in Axe ΓΘ recta ΓΘ ipsi AK æqualis, ac erectâ normali super Axem ΓΘ ad punctum Θ, ut HΘM, compleatur rectangulum NM. Quoniam vero rectæ AE, AK æquales sunt ipsis AΓ, ΓΘ; rectangula BK, ΛΘ erunt æqualia. Rectangula autem AM, EZ similia sunt similiterque sita, quia similia sunt rectangulis similibus ΔE, NΛ. Sed rectæ AK, ΓΘ æquales sunt, adeoque rectangula EZ, AM sunt etiam æqualia. Verum rectangula KE, ΘΛ æqualia sunt, ac proinde rectangulum AZ rectangulo ΓM æquale erit. Possunt autem hæc rectangula (per 12^am & 13^am primi) ordinatim applicatæ BK, HΘ: applicato igitur Axe super Axem, cadet recta BK super ΘH, ac punctum B super punctum H. Absurde igitur posuimus punctum B cadere extra sectionem ΓH: ac propterea tota sectio AB coincidet cum sectione ΓH.



Quinetiam si fuerint sectiones æquales; fiant AK, ΓΘ æquales, ac erigantur normales KB, ΘH, compleanturque parallelogramma rectangula ΔE, ΔZ; NΛ, NM, & applicetur sectio AB super sectionem ΓH: cadet igitur Axis AK super Axem ΓΘ necessario. Nam si non cadat super eum, in Hyperbola forent duo Axes, & in Ellipsi tres: quod quidem impossibile est. Cadente autem AK super ΓΘ quæ eidem æqualis est, cadet punctum K super Θ: coincidentibusque rectis KB, ΘH punctum B cadet super H; ac proinde KB, ΘH æquales sunt. Hinc consequitur (per 12^am & 13^am primi) rectangula AZ, ΓM æqualia esse. Sed AK ipsi ΓΘ æqualis est, adeoque KZ ipsi ΘM. Simili modo, si ponatur AΞ ipsi ΓΠ æqualis, demonstrabitur Zξ ipsi Πγ æqualem esse; quare & PZ ipsi MT & Pξ ipsi Tγ æquales erunt: unde & rectangula Zξ, Mγ æqualia & similia, ac (*per* 24^am VI. *Elem.*) rectangula ΔZ, NM erunt quoque similia. Sed KZ, ΘM sunt æquales; quare etiam ΔK, ΘN sunt æquales: & ob æquales AK, ΓΘ, ipsæ quoque AΔ, ΓN erunt æquales. Rectangula autem ΔE, NΛ similia sunt, adeoque rectæ AE, ΓΛ æquales. Quapropter rectangula ΔE, NΛ similia & æqualia sunt; quæ quidem sunt Figuræ æqualium sectionum super Axes factæ. Q. E. D.



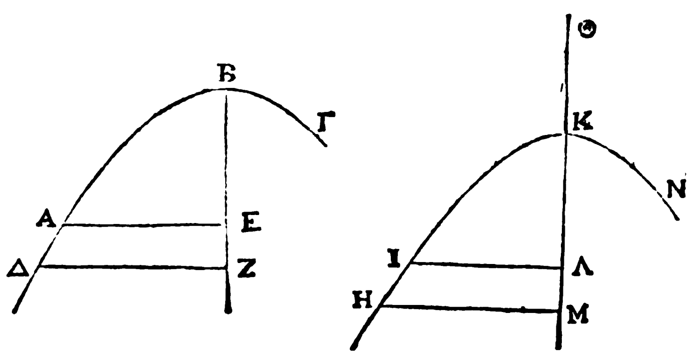
Similiter si sectiones fuerint Parabolæ, & occurrant ordinatim applicatæ diametris quibuscunque in utrâque sectione sub æqualibus angulis; ac sint harum diametrorum Latera recta æqualia; erunt quoque Sectiones æquales.

Ac si fuerint sectiones Hyperbolæ vel Ellipses, & ordinatim applicatæ occurrant diametris sub angulis æqualibus; fuerintque Figuræ factæ super has diametros æquales & similes inter se; erunt etiam sectiones æquales. Hoc autem eodem modo constabit, quo rem ita se habere quoad Axes jam demonstratum est.

PROPOSITIO III.

Manifestum est Ellipsin non posse æqualem esse duabus reliquis sectionibus, quia terminata est; hæ vero in infinitum prodeunt. Dico quoque nullam Parabolam æqualem esse Hyperbolæ.

Sit ΑΒΓ Parabola, Hyperbola vero ΗΙΚΝ; ac si fieri possit, sint inter se æquales. Sint autem sectionum Axes ΒΖ, ΚΜ, ac ΚΘ diameter transversa Hyperbolæ: &, factis ΒΕ, ΒΖ ipsis ΚΛ, ΚΜ æqualibus, ducantur ad Axes normales ΑΕ, ΔΖ; ΙΛ, ΗΜ.

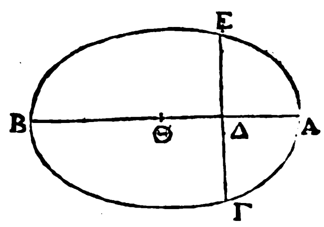


Jam si fuerint æquales, sectio applicari potest super sectionem; & cadent puncta Ε, Ζ, Α, Δ super puncta Λ, Μ, Ι, Η. Verum ΖΒ est ad ΒΕ (per 20^{um} primi) ut quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΕΑ: erit igitur ΜΚ ad ΚΛ ut quadratum ex ΜΗ, ad quadratum ex ΛΙ. Hoc autem fieri nequit, quia quadratum ex ΜΗ est ad quadratum ex ΙΛ sicut rectangulum sub ΘΜ, ΜΚ ad rectangulum sub ΘΛ, ΛΚ, per 21^{um} primi. Parabola igitur Hyperbolæ non est æqualis.

PROPOSITIO IV.

Si in Ellipsi de centro ducatur recta quælibet utrinque ad Sectionem terminata: dividet hæc sectionem in duas partes æquales; itemque Area ejus divisa erit bifariam.

Sit ΑΒΓ Ellipsis, cujus centrum Θ; & per centrum ducatur recta ΑΒ, quæ primò sit alter Axium sectionis. Dico applicari posse Curvam ΑΓΒ super Curvam ΑΕΒ, ita ut tota Area ΑΓΒ super totam Aream ΑΕΒ superposita ubique coincidat cum eadem.

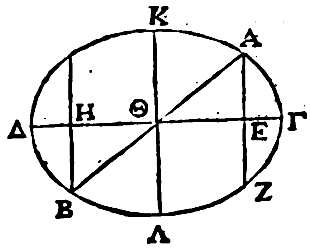


Nam, si fieri possit ut non coincidat Curva ΑΓΒ cum Curva ΑΕΒ, capiatur in parte non coincidente punctum Γ; &, demissa ad Axem ΑΒ, normalis ΓΔ producatur ad Ε. Recta igitur ΓΔ cadet super rectam ΔΕ, ob angulos ad punctum Δ rectos: ΓΔ autem ipsi ΔΕ æqualis est, atque adeo punctum Γ cadet super punctum Ε. Absurda est igitur positio punctum illud non cadere in sectione ΑΕΒ. Curva igitur ΑΓΒ cadet super Curvam ΑΕΒ, ubique coincidens cum eâ, uti superficies ΑΓΒ coincidet cum superficie ΑΕΒ. Quocirca Curva æqualis est Curvæ, & Area Areæ. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

Si vero ΑΒ non fuerit alter Axium, sint Axes ΓΔ, ΚΛ; & demittantur normales ΑΕ, ΒΗ: & applicatâ Curvâ ΓΑΔ super Curvam ΓΖΔ, eo quo factum est modo in Propositione præcedente, cadet punctum Ζ super punctum Α, ac Area ΑΓΕ super Aream ΓΖΕ. Similiter ΚΓΛ cadet super ΚΔΛ, & ΕΘ super ΘΗ; ut & ΕΖ super ΒΗ, ob ΕΘ ipsi ΘΗ & ΕΖ ipsi ΒΗ æquales. Cadet igitur Area ΓΕΖ super

per Aream ΔHB, ac proinde Area ΑΓΕ coincidet cum Area ΒΔΗ, eidemque æqualis est, ut & Curva ΑΓ Curvæ ΔΒ æqualis. Triangulum autem ΑΕΘ æquale est triangulo ΒΗΘ: Area igitur ΑΓΘ Areæ ΒΔΘ æqualis est, *ac area residua* ΑΘΚ *residuæ* ΒΘΛ, ut & Curva ΑΚ Curvæ ΒΛ æqualis. Quapropter Curva ΑΚΔ Curvæ ΓΛΒ æqualis est, totaque Area ΑΚΔΒ toti ΑΓΛΒ, totaque Curva ΑΚΔΒ Curvæ ΑΓΛΒ etiam æqualis. Q. E. D.

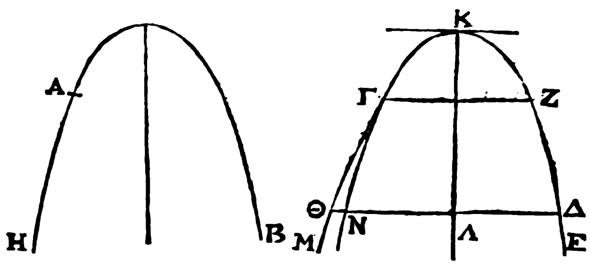


PROPOSITIO VI.

SI portio aliqua Sectionis Conicæ, applicata super portionem aliquam alterius cujusdam Sectionis, coincidat cum eâdem: erit tota Sectio toti Sectioni æqualis.

Sit ΑΒ segmentum sectionis alicujus ΗΑΒ, quod applicatum congruat cum ΓΔ segmento sectionis ΓΔΕ. Dico sectionem ΗΑΒ æqualem esse sectioni ΓΔΕ.

Nam, si fieri possit, congruat pars ΑΒ cum parte ΓΔ; non autem congruat sectionis pars reliqua ΑΗ cum ΓΝ reliqua parte sectionis alterius: sint autem ad modum sectionum ΔΓΜ, ΔΓΝ. Capiatur in ΓΜ punctum aliquod Θ, junctâque ΔΘ ducatur in sectione ΓΔΕ diameter ΚΛ bifariam dividens ipsam ΔΘ: erit igitur recta, quæ sectionem ΓΔΕ tangit in puncto Κ, ipsi ΔΘ parallela. Diameter autem ΚΛ omnes rectas ipsi ΔΘ parallelas

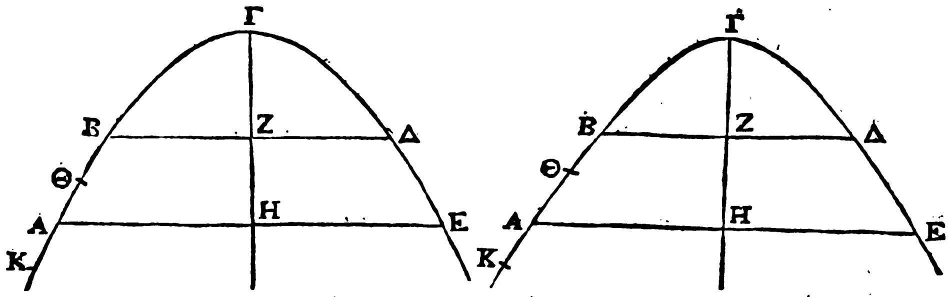


bifariam dividit; quare, ductâ ΓΖ ipsi ΔΘ parallelâ, ΚΛ eam bifariam dividet; adeoque ΓΖ parallela est rectæ sectionem ΔΓΜ tangenti in puncto Κ. Sed & eadem recta Tangens est sectionis ΔΓΝ; ac proinde (per 7^{um} secundi) recta ΚΛ diameter est sectionis ΔΓΝ, dividetque ipsam ΔΝ bifariam in puncto Λ. Eadem autem dividit rectam ΔΘ bifariam in puncto Λ: quod absurdum est. Tota igitur sectio ΒΑΗ super totam ΔΓΝ applicata ubique congruit, eidemque æqualis est. Q. E. D.

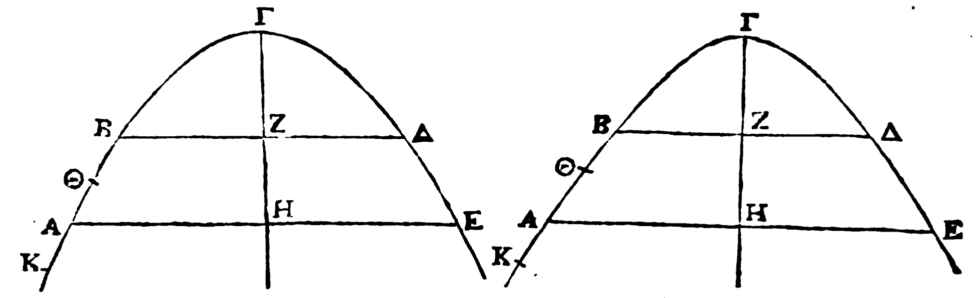
PROPOSITIO VII.

IN Parabolâ vel Hyperbolâ, si ductæ ad Axem ordinatim applicatæ ad alteram Sectionis partem producantur: abscindentur è Sectione ab utroque Axis latere segmenta, quæ applicatæ congruent inter se; sed quæ neutiquam coincident cum aliâ quâvis Sectionis parte, si eidem imponantur.

Sit ΑΒΓ Parabola vel Hyperbola, cujus Axis ΓΗ; & capiatur segmentum aliquod sectionis ΒΑ; & demittantur ad Axem ΓΗ ordinatim applicatæ, quæ ad alterum sectionis latus productæ, ut ΒΖΔ, ΑΗΕ, abscindant è sectione segmenta ΒΓΔ, ΑΓΕ. Dico Curvam ΒΓ congruere cum Curva ΓΔ, & Curvam ΒΑ cum Curva ΔΕ, itemque Aream ΑΓΗ cum Area ΗΓΕ, segmentumque ΑΒΓ cum segmento ΕΔΓ.



Hoc autem constabit ad modum præcedentium; quia omnes ordinatim applicatæ, à segmento ΑΒΓ ad Axem ΓΗ ductæ, poterunt rectangula æqualia rectangulis quæ possunt ordinatim applicatæ à segmento ΓΔΕ ad eandem ΓΗ ductæ; adeoque, continuatis ipsis ordinatim applicatis, erit ΒΖ ipsi ΖΔ & ΑΗ ipsi ΕΗ æquales. Anguli autem ad puncta Ζ, Η recti sunt: segmentum igitur ΓΒ applicatum super segmentum ΓΔ coincidet cum eo; coincidet etiam segmentum ΑΒ cum segmento ΔΕ, areæque areis congruent.

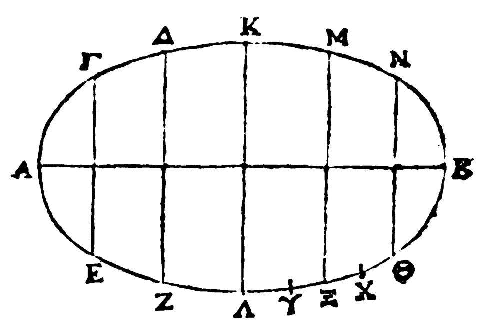


Sit jam ΘΚ segmentum aliquod aliud his duabus normalibus non interceptum. Dico, quod si segmentum ΔΕ super illud applicetur, non coincidet cum eo. Nam si non ita sit, ac fieri possit ut congruant inter se, superimponatur ΔΕ coincidatque cum ΚΘ; coincidet igitur (per Prop. proximè præcedentem) Curva ΓΔ cum eâ sectionis parte quæ cum ΚΘ continuatur. Cadet vero punctum Γ in segmento ΓΔΕ in diverso situ ac in segmento ΚΘΓ; quia segmentum ΚΘΓ non est æqualis segmento ΓΔΕ: ac proinde Axis ΗΓ diversas haberet positiones, ac Parabola vel Hyperbola plures haberet Axes; quod (per 48^{vam} secundi) absurdum est. Quapropter segmentum ΔΕ cum segmento ΘΚ congruere non potest. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

SI in Ellipsi demissæ ad Axem normales producantur ad alterum Sectionis latus: segmenta ab utrâque Axis parte abscissa, unum super alterum applicata, congruent inter se. Si vero imponantur super segmenta à normalibus ad easdem à centro distantias, sed ab alterâ ejus parte abscissa: coincident etiam cum iisdem, congruent autem cum nullo alio Sectionis segmento.

Sit ΑΒΓΔ Ellipsis, cujus Axes ΑΒ, ΚΛ, & ad ΑΒ demittantur normales duæ quæ occurrant utrinque sectioni ut ΓΕ, ΔΖ: ducantur etiam in sectione aliæ duæ normales ad easdem à centro distantias ac priores, ut ΜΞ, ΝΘ. Jam si segmentum ΓΔ ipsi ΕΖ superimponatur, congruent inter se, juxta demonstrata in Prop. proxime præcedente. Eodemque modo constabit segmentum ΜΝ cum ipso ΞΘ congruiturum. Area autem ΚΑΛ super aream ΚΒΛ applicata (per quartam hujus) coincidet; ac recta ΓΕ cadet super ipsam ΝΘ, quia eadem est utriusque à centro distantia; cadet etiam ΔΖ super ΜΞ, adeoque cadet segmentum ΓΔ super segmentum ΜΝ; ac proinde congruet ΓΔ cum segmento ΞΘ, quia ΜΝ, ΞΘ congruunt inter se. Idem quoque manifestum est de segmento ΕΖ.



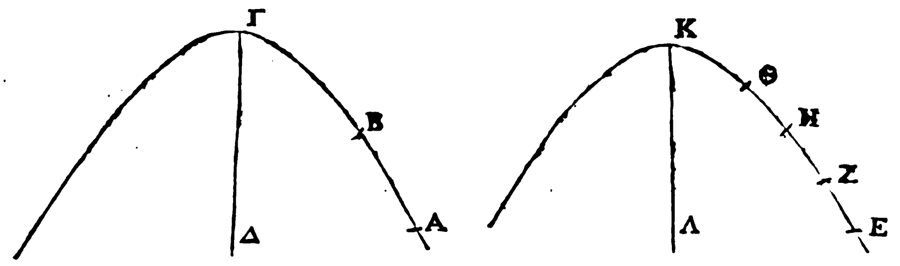
Si vero capiatur in sectione segmentum aliquod aliud præter hæc quatuor, ut ΥΧ. Dico illud congruere non posse cum prædictis segmentis. Nam si fieri possit, coincidat cum segmento ΜΝ; ac, per demonstrata in præcedentibus, invenietur Ellipsis plures quam duos habitura Axes. Hoc autem (per 48^{vam} secundi) absurdum est. Quocirca segmentum ΜΝ non congruet cum segmento ΥΧ. Q. E. D.

PROPO-

PROPOSITIO IX.

IN Sectionibus æqualibus, segmenta, quæ æqualiter à Verticibus earundem distant, superposita coincident inter se: quæ vero non distant æqualiter à Verticibus, non congruent inter se.

Sectionum duarum æqualium sint Axes ΓΔ, ΚΛ, ac sit distantia segmenti ΑΒ à puncto Γ æqualis distantiæ segmenti ΕΗ à puncto Κ. Dico ΑΒ congruere cum ΕΗ.
Imponatur enim sectio ΓΑ super sectionem ΚΕ, ac punctum Β cadet super punctum Η, quia distantiæ earundem à Vertice utriusque sectionis æquales sunt: cadet etiam punctum Α super punctum Ε, adeoque & segmentum ΑΒ super segmentum ΕΗ. Dico quoque, si superimponatur super aliud quodvis segmentum,

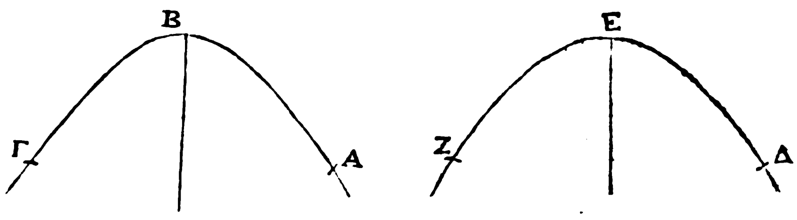


non congruet cum illo: Nam, si fieri potest, cadat super segmentum ΖΘ. Demonstravimus autem ΑΒ congruere cum segmento ΕΗ, ac proinde congruet ΖΘ cum ipso ΕΗ. Segmenta vero ΖΘ, ΕΗ non sunt abscissa à duabus normalibus, neque ad easdem à centro distantias. Absurdum est igitur ea congruere posse, per demonstrata in duabus Propositionibus præcedentibus. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

SI Sectiones fuerint inæquales, fieri non potest ut pars aliqua unius congruat cum ulla parte alterius.

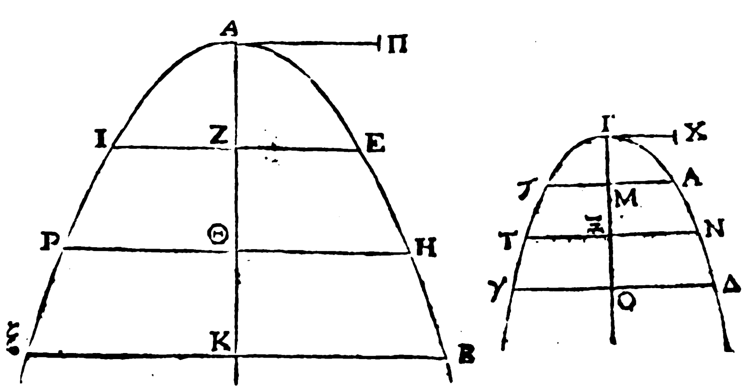
Sint ΑΒΓ, ΔΕΖ sectiones duæ inæquales. Dico nullam partem unius coincidere posse cum parte aliquâ alterius.



Nam, si fieri possit, congruat pars ΑΒ cum parte ΔΕ; ac tota sectio ΑΒΓ (per sextam hujus) congruere deberet cum ipsâ ΔΕΖ: atque adeo sectio ΑΒΓ æqualis esset sectioni ΔΕΖ. Hoc autem est contra hypothesim. Quapropter non coincidet pars ulla sectionis ΑΒΓ cum parte aliquâ ipsius ΔΕΖ. Q. E. D.

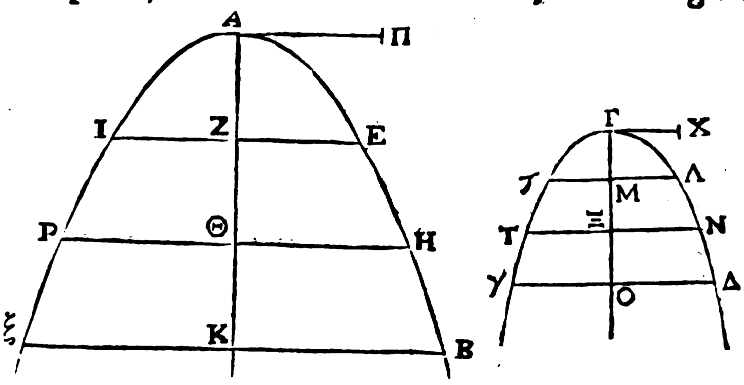
PROPOSITIO XI.

PArabolæ omnes similes sunt inter se.



Sint ΑΒ, ΓΔ duæ Parabolæ, quarum Axes ΑΚ, ΓΟ. Dico sectiones inter se similes esse.
Sint earundem latera recta ΑΠ, ΓΧ, ac fiat ΑΚ ad ad ΑΠ sicut ΓΟ ad ΓΧ; ac dividatur ΑΚ in punctis Ζ, Θ utcunque, & in iisdem rationibus dividatur etiam ΓΟ in punctis Μ, Ξ; & ad Axes ΑΚ, ΓΟ erigantur normales ΖΕ, ΘΗ, ΚΒ; ΜΛ, ΝΞ, ΔΟ.

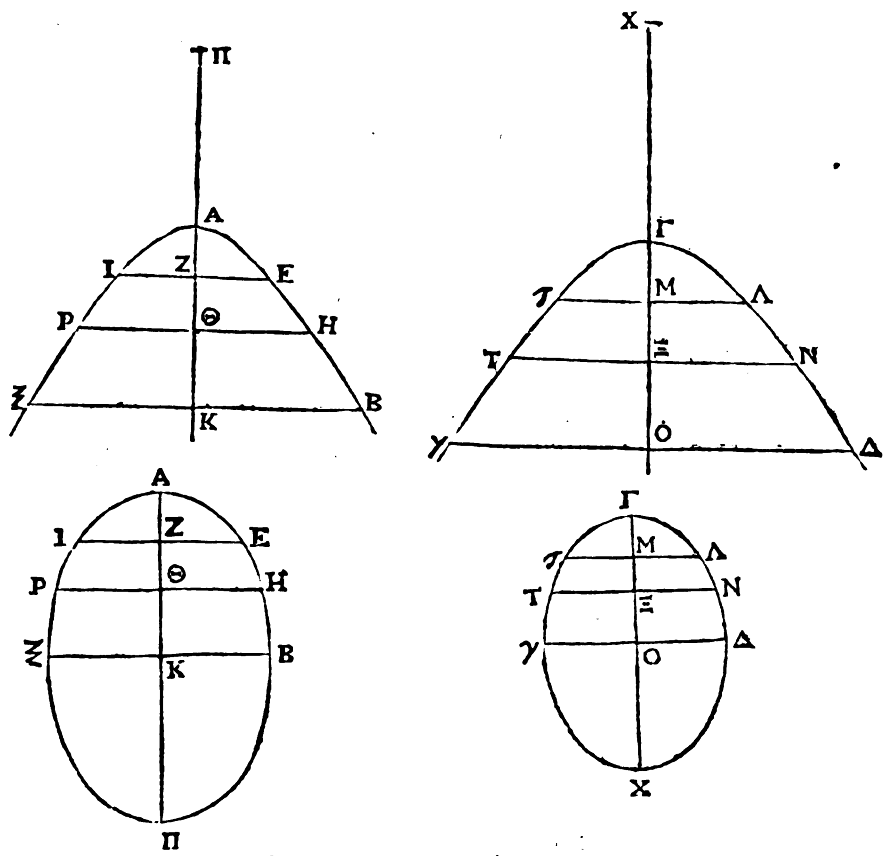
Quoniam vero ΠΑ est ad ΑΚ sicut ΓΧ ad ΓΟ; & ΚΒ media est proportionalis inter ipsas ΠΑ, ΑΚ, (per 11mam primi) uti ΔΟ media est inter ΓΧ, ΓΟ: erit igitur ΚΒ ad ΚΑ sicut ΔΟ ad ΟΓ; cumque Βξ dupla est ipsius ΒΚ, uti Δγ dupla ipsius ΔΟ; erit Βξ ad ΑΚ sicut Δγ ad ΓΟ. Pariter cum ΠΑ est ad ΑΚ sicut ΓΧ ad ΓΟ, ac ΑΚ est ad ΑΘ sicut ΓΟ ad ΓΞ: erit ex æquo ΠΑ ad ΑΘ sicut ΓΧ ad ΓΞ. Patebit igitur modo nuper ostenso, ΡΗ esse ad ΑΘ sicut ΝΤ ad ΓΞ; ac simili argumento ΕΙ erit ad ΑΖ sicut ΤΛ ad ΓΜ. Rationes igitur normalium ad Axem, Βξ, ΗΡ, ΕΙ, ad *abscissas* ΑΚ, ΑΘ, ΑΖ, *eædem sunt ac rationes normalium* Δγ, ΝΤ, ΛΤ *ad abscissas* ΓΟ, ΞΓ, ΓΜ respectivé. Segmenta autem ex uno Axium abscissa proportionalia sunt segmentis alterius Axis. Quocirca (*per Definitionem secundam*) sectio ΑΒ similis est sectioni ΓΔ. Q. E. D.



PROPOSITIO XII.

SI Hyperbolarum vel Ellipsium figuræ super Axes factæ fuerint similes; ipsæ etiam Sectiones similes erunt. Ac si sectiones fuerint similes; figuræ super Axes factæ erunt quoque similes.

Sint ΑΒ, ΓΔ duæ Hyperbolæ vel Ellipses, quarum figuræ super Axes factæ sunt similes. Sint autem earum Axes ΑΚ, ΓΟ, diametri vero transversæ ΑΠ, ΓΧ; & capiantur Axium segmenta ΑΚ, ΓΟ, ita ut ΑΚ sit ad ΑΠ sicut ΓΟ ad ΓΧ. Dividatur ΑΚ utcunq; in punctis Ζ, Θ; & in iisdem rationibus quoq; recta ΓΟ in punctis Μ, Ξ: ac per puncta Ζ, Θ, Κ; Μ, Ξ, Ο erigantur super Axes normales ΒΚ, ΘΗ, ΖΕ; ΟΔ, ΞΝ, ΜΛ. Quoniam autem figuræ sectionum sunt similes, erit (per 21am primi) quadratum ex ΒΚ ad rectangulum sub ΠΚΑ sicut quadratum ex ΔΟ ad rectangulum sub ΧΟΓ. Rectangulum vero sub ΠΚΑ est ad quadratum ex ΚΑ, sicut rectangulum sub ΧΟΓ ad quadratum ex ΟΓ, quia ΠΚ est ad ΚΑ sicut ΧΟ ad ΟΓ. Erit igitur ΒΚ ad ΚΑ sicut ΔΟ ad ΟΓ, & Βξ erit ad ΚΑ sicut Δγ ad ΓΟ. Jam ΚΑ est ad ΑΘ sicut ΟΓ ad ΓΞ, *ac* ΠΑ *est ad* ΑΚ *sicut* ΧΓ *ad* ΓΟ: quare *ex æquo* ΠΑ est ad ΑΘ sicut ΧΓ ad ΓΞ. Constabit igitur per jam demonstrata ΗΡ esse ΑΘ sicut ΝΤ ad ΓΞ: ac pari argumento



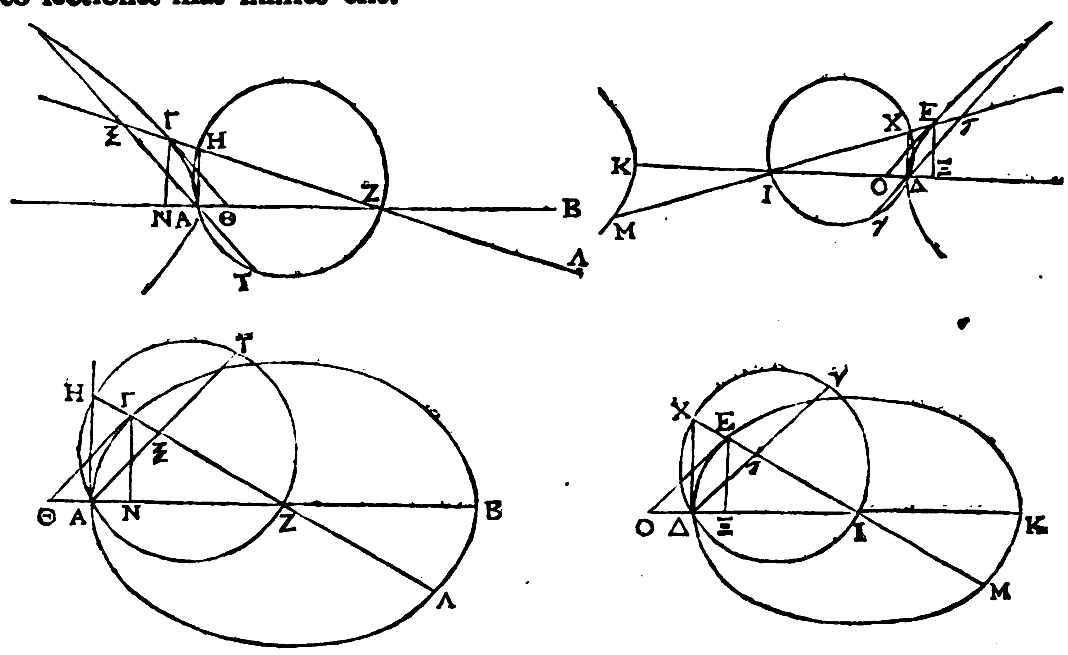
argumento ΕΙ esse ad ΑΖ sicut τΛ ad ΓΜ. Normales itaque Βξ, ΗΡ, ΕΙ sunt ad segmenta Axis ΑΚ, ΑΘ, ΑΖ in iisdem rationibus ac normales Δγ, ΝΤ, τΛ ad segmenta Axis ΟΓ, ΓΞ, ΓΜ *respectivè*: atque segmenta ipsius ΑΚ Axis sectionis ΑΒ à normalibus abscissa, ad segmenta ipsius ΓΟ Axis sectionis ΓΔ à normalibus abscissa, sunt in eadem ratione. Quare (*per Definit.* 2^{dam}) sectio ΑΒ similis est sectioni ΓΔ.

Quod si sectio ΑΒ similis fuerit sectioni ΓΔ: Dico *Figuras* utriusque sectionis esse similes inter se. Demittantur enim à sectione ΑΒ normales quotlibet ad Axem ΑΚ, ut Βξ, ΗΡ, ΕΙ: & à sectione ΓΔ normales Δγ, ΝΤ, ΛΤ; ita ut normales ad abscissas in utroque Axe sint *respectivè* in iisdem rationibus, uti & abscissæ in uno Axium ad abscissas in altero sint in eadem ratione; nempe sit ΒΚ ad ΑΚ sicut ΔΟ ad ΟΓ, ac ΚΑ ad ΑΘ sicut ΟΓ ad ΓΞ, ac ΑΘ ad ΘΗ sicut ΓΞ ad ΞΝ. Erit igitur ΒΚ ad ΘΗ sicut ΔΟ ad ΝΞ, adeoque quadratum ex ΒΚ ad quadratum ex ΘΗ erit ut quadratum ex ΔΟ ad quadratum ex ΝΞ; unde (per 21^{um} primi) rectangulum ΠΚΑ erit ad rectangulum ΠΘΑ sicut rectangulum ΧΟΓ ad rectangulum ΧΞΓ. Sed ΚΑ est ad ΑΘ sicut ΟΓ ad ΓΞ: erit igitur ΚΠ ad ΠΘ sicut ΟΧ ad ΧΞ; atque adeo ΠΘ erit ad ΘΚ sicut ΧΞ ad ΞΟ. *Sed* ΘΚ *est ad* ΞΟ *sicut* ΑΘ *ad* ΓΞ; igitur ΠΘ est ad ΘΑ sicut ΧΞ ad ΞΓ, ac rectangulum ΠΘΑ est ad quadratum ex ΘΑ, sicut rectangulum ΧΞΓ ad quadratum ex ΞΓ. *Quoniam vero* ΑΘ *est ad* ΘΗ *sicut* ΓΞ *ad* ΞΝ, erit rectangulum ΠΘΑ ad quadratum ex ΘΗ sicut rectangulum ΧΞΓ ad quadratum ex ΞΝ. Sed rectangulum ΠΘΑ est ad quadratum ex ΘΗ (per 21^{um} primi) sicut diameter ΑΠ ad Latus ejus rectum, & rectangulum ΧΞΓ est ad quadratum ex ΞΝ sicut diameter ΧΓ ad Latus ejus rectum. Figuræ igitur utriusque sectionis super ΠΑ, ΓΧ factæ sunt similes.

PROPOSITIO XIII.

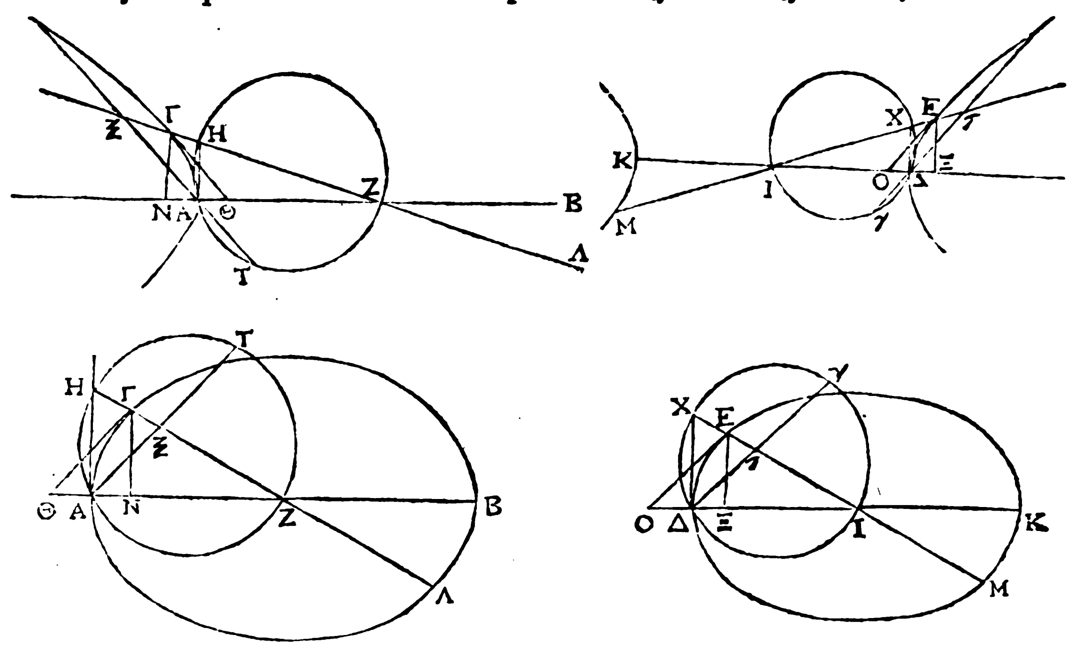
SI fuerint Hyperbolarum vel Ellipsium figuræ, super alios diametros præter Axes factæ, similes inter se; ac ordinatim applicatæ ad has diametros contineant cum ipsis angulos æquales: erunt hæ sectiones inter se similes.

Sint Hyperbolarum vel Ellipsium duarum centra Ζ, Ι, diametri vero quævis ΓΛ, ΕΜ; sintque anguli quos continent diametri hæ cum ordinatim applicatis suis inter se æquales; Figuræ autem quæ fiunt super diametros ΓΛ, ΕΜ sint similes. Dico sectiones illas similes esse.



Ducantur enim è punctis Γ, Ε rectæ duæ quæ sectiones contingant, ut ΓΘ, ΕΟ, quæque proinde parallelæ erunt ordinatim applicatis ad has diametros: adeoque anguli qui fiunt ad puncta Γ, Ε cum diametris ΓΛ, ΕΜ erunt æquales: sint etiam ΑΒ, ΔΚ sectionum Axes, occurrentes Tangentibus in punctis Θ, Ο. Erit igitur angulus ΘΓΖ angulo ΟΕΙ æqualis, ob Tangentes ordinatim ductis parallelas. Per puncta Α, Δ erigantur normales ad Axes occurrentes diametris ΓΛ, ΕΜ in punctis Η & Χ, nempe rectæ ΑΗ, ΔΧ; & circumscribantur circuli triangulis ΖΑΗ, ΙΔΧ: & agantur per Vertices Α, Δ Tangentibus ΓΘ, ΕΟ parallelæ ΑξΤ, Δτγ.

Quoniam vero Figuræ super ΓΛ, ΕΜ factæ similes sunt; ac rectæ ΑΗ, ΔΧ contingunt sectiones; & rectæ Αξ, Δτ sunt ordinatim applicatæ ad diametros ΓΛ, ΕΜ: erit (per 37^am^ primi) rectangulum sub Ζξ, ξΗ ad quadratum ex Αξ ut rectangulum sub Ιτ, τΧ ad quadratum ex Δτ; utraque enim harum rationum eadem est, nempe diametri transversæ ad latus rectum utrique diametro competens. Rectangulum autem sub Ζξ, ξΗ æquale est rectangulo ΤξΑ, ac rectangulum ΙτΧ æquale est rectangulo Δτγ; adeoque rectangulum ΤξΑ erit ad quadratum ex ξΑ sicut rectangulum Δτγ ad quadratum ex Δτ: ac proinde Τξ erit ad ξΑ ut τγ ad Δτ. Ve-



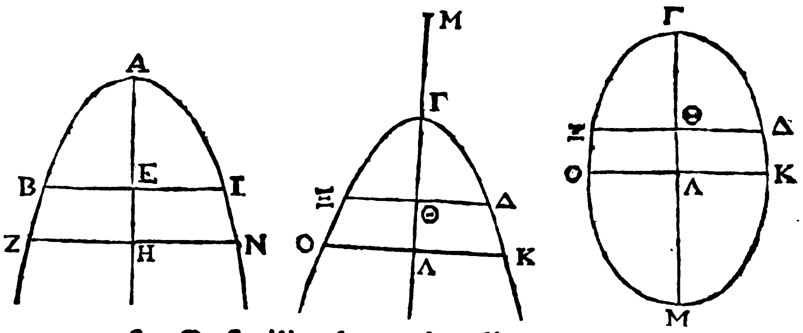
rum anguli duo ad puncta ξ, τ sunt æquales, sed non recti, quia diametri ΓΛ, ΕΜ non sunt Axes sectionum, ac circulorum diametri sunt rectæ ΗΖ, ΧΙ: quare (*& per Lemmata priora* Pappi) erit angulus ad Ζ angulo ad Ι æqualis. Anguli autem ΖΓΘ, ΙΕΟ sunt æquales, ac propterea triangula ΖΓΘ, ΙΕΟ sunt similia. De punctis Γ, Ε demittantur ad Axes normales ΓΝ, ΕΞ; & erit rectangulum ΖΝΘ ad quadratum ex ΓΝ (*per conversas Lemmatum*) ut rectangulum ΙΞΟ ad quadratum ex ΕΞ. Sed (per 37^am^ primi) rectangulum ΖΝΘ est ad quadratum ex ΓΝ sicut Axis transversus ΑΒ ad latus ejus rectum; & rectangulum ΙΞΟ est ad quadratum ex ΕΞ ut Axis ΔΚ ad latus ejus rectum. Ipsæ igitur sectiones (per præcedentem 12^mam^) similes sunt. Oportet autem in Ellipsibus utrumque Axem ΑΒ, ΚΔ esse Axem majorem vel minorem, quia ratio ipsius ΒΑ ad latus ejus rectum eadem debet esse cum ratione Axis ΚΔ ad latus rectum ejusdem ΚΔ. Perinde autem est si uterque Axis vel major vel minor fuerit. Q. E. D.

PROPOSITIO XIV.

P*arabola nec Hyperbolæ neque Ellipsi similis est.*

Sint duæ sectiones, nempe Parabola ΑΒ Axe ΑΗ descripta; ac Hyperbola vel Ellipsis, *si fieri possit*, eidem similis, ut ΓΔ. Sit sectionis ΓΔ Axis ΓΛ, ac sit latus transversum figuræ sive diameter transversa ΜΓ. In utrâque sectione ducantur normales, ut ΒΙ, ΖΝ; ΔΞ, ΚΟ; & sint rationes earum ad abscissas in uno Axium, eædem ac rationes normalium ad abscissas in altero respectivè; simulque divisus sit uterque Axis in segmenta eandem inter se rationem habentia, nempe sit ΖΗ ad ΗΑ ut ΚΛ ad ΛΓ, ac ΗΑ ad ΑΕ ut ΛΓ ad ΓΘ, ac ΑΕ ad ΕΒ sicut ΓΘ ad ΘΔ: erit igitur ΖΗ ad ΕΒ sicut ΚΛ ad ΔΘ, adeoque quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΕΒ ut quadratum ex ΚΛ ad quadratum ex ΔΘ. Sed quadratum ex ΖΗ est ad quadratum

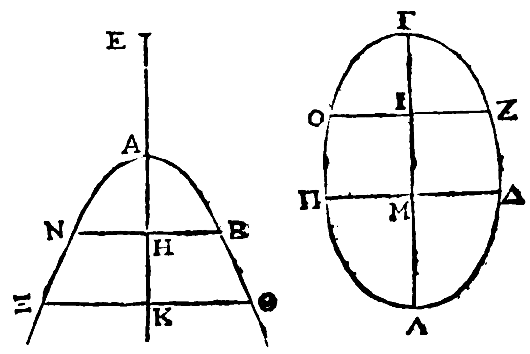
quadratum ex ΒΕ (per 20^{mam} primi) sicut ΗΑ ad ΑΕ, ac ΗΑ est ad ΑΕ sicut ΑΓ ad ΓΘ: quadratum igitur ex ΚΑ est ad quadratum ex ΔΘ sicut ΑΓ ad ΓΘ. Verum (per 21^{am} primi) quadratum ex ΚΑ est ad quadratum ex ΔΘ ut rectangulum ΜΑΓ ad rectangulum ΜΘΓ, ac proinde ΜΑ ipsi ΜΘ æqualis: quod absurdum. Parabola itaque non potest esse similis alterutri reliquarum sectionum.



PROPOSITIO XV.

Hyperbola non est similis Ellipsi.

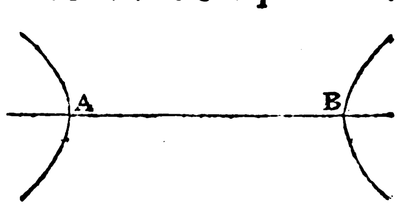
Sit ΑΒ Hyperbola ac ΓΔ Ellipsis, axibus ΑΚ, ΓΜ, *diametris vero transversis* ΕΑ, ΓΛ descriptæ: ac si sint sectiones similes, ducantur in utrâque normales, ut ΒΝ, ΘΞ; ΖΟ, ΔΠ; ita ut earundem rationes ad abscissas in utroque Axe sint respectivè eædem, uti & abscissæ ad abscissas in eadem ratione. Eodem igitur modo, quo præcedentem demonstravimus, constabit quadratum ex ΘΚ esse ad quadratum ex ΒΗ sicut quadratum ex ΔΜ ad quadratum ex ΖΙ. Sed ut quadratum ex ΘΚ ad quadratum ex ΒΗ ita rectangulum ΕΚΑ ad rectangulum ΕΗΑ; & ut quadratum ex ΔΜ ad quadratum ex ΙΖ ita rectangulum ΓΜΛ ad rectangulum ΓΙΛ: quare rectangulum ΕΚΑ est ad rectangulum ΕΗΑ ut rectangulum ΓΜΛ ad rectangulum ΓΙΛ. Sed, ex hypothesi, ΚΑ est ad ΑΗ sicut ΜΓ ad ΓΙ; foret igitur ΚΕ ad ΕΗ sicut ΜΛ ad ΛΙ. Hoc autem absurdum est. Sectio itaque ΑΒ non est similis sectioni ΓΔ. Q. E. D.



PROPOSITIO XVI.

Hyperbolæ oppositæ sunt similes inter se & æquales.

Sint Α, Β sectiones oppositæ, quarum Axis ΑΒ. Dico eas & similes & æquales esse. Quoniam enim latera recta Sectionum Α, Β (per 14^{am} primi) sunt æqualia, recta vero ΑΒ est latus transversum commune figuræ utriusque sectionis; erunt igitur figuræ, quæ fiunt super eundem Axem ΑΒ, inter se similes & æquales: ac proinde sectio Α (per 12^{mam} hujus) similis & æqualis est sectioni Β. Q. E. D.



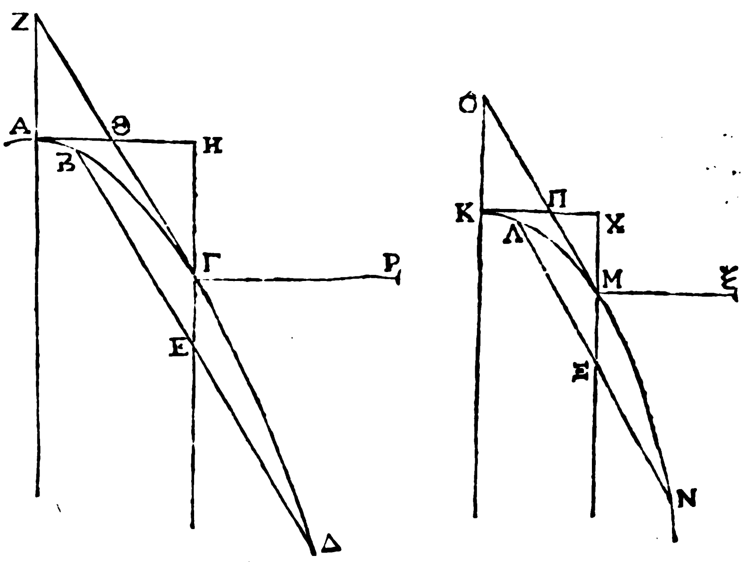
PROPOSITIO XVII.

Ductis ad similes Sectiones Conicas Tangentibus, quæ Axibus occurrentes cum iisdem contineant angulos æquales; eductisque de punctis contactuum diametris sectionum, in quarum utrâque capiantur puncta, ita ut interceptæ inter hæc puncta & diametrorum Vertices sint ad ipsas Tangentes in eadem ratione: si per puncta sumpta ducantur rectæ Tangentibus parallelæ, abscindent hæ ab utrâque sectione segmenta similia & similiter posita. Ac si segmenta fuerint similia & similiter posita, eædem erunt rationes

diametrorum ad Tangentes in utraque sectione, angulique sub diametris & Tangentibus contenti erunt æquales.

Sint imprimis sectiones similes Parabolæ duæ, ut ΑΒΓ, ΚΛΜ; quarum Axes ΑΖ, ΚΟ; Tangentes vero ΓΖ, ΜΟ, cum Axibus æquales continentes angulos ΑΖΓ, ΚΟΜ; ac per Γ, Μ, ducantur sectionum diametri ΓΕ, ΜΞ; ac fiat ΕΓ ad ΓΖ sicut ΞΜ ad ΜΟ; perque Ε, Ξ ipsis ΓΖ, ΜΟ parallelæ agantur ΔΒ, ΝΛ. Dico segmenta ΒΓΔ, ΛΜΝ esse similia similiterque posita.

E punctis Α, Κ erigantur ΑΗ, ΚΧ normales ad Axes; ac producantur diametri ΕΓ, ΜΞ usque ad occursum earundem in punctis Η, Χ: ac fiat ΡΓ ad duplam ipsius ΓΖ sicut ΘΓ ad ΓΗ, atque etiam ξΜ ad duplam ipsius ΜΟ sicut ΠΜ ad ΜΧ. Erunt igitur (per 49^{am} primi) ΡΓ, Μξ latera recta ad diametros ΓΕ, ΜΞ; ac proinde quadratum ex ΔΕ æquale erit rectangulo ΡΓΕ, uti quadratum ex ΝΞ rectangulo ΞΜξ. Anguli autem ΚΟΜ, ΑΖΓ sunt æquales inter se, adeoque & ipsæ ΧΜΟ, ΗΓΖ æquales; quia rectæ ΧΞ, ΗΕ (per 46^{am} primi) parallelæ sunt ipsis ΟΚ, ΖΑ. Quoniam vero anguli ΧΜΟ, ΗΓΖ sunt æquales, & anguli ad Η & Χ recti ideoque æquales, erunt triangula ΘΗΓ, ΠΧΜ similia; ac ΘΓ erit ad ΓΗ sicut ΠΜ ad ΜΧ: unde ΡΓ erit ad ΓΖ sicut ξΜ ad ΜΟ. Fecimus autem ΓΖ ad ΓΕ sicut ΜΟ ad ΜΞ; quare *ex æquo* ΡΓ erit ad ΓΕ sicut ξΜ ad ΜΞ. Pari igitur argumento, quo Prop. XI^{mam} hujus demonstravimus, constabit quod, si ducantur ad diametrum ΓΕ rectæ ipsi ΒΔ parallelæ; & ad ΜΞ ipsi ΛΝ parallelæ, *ad intervalla ipsis* ΓΕ, ΜΞ *proportionalia*, erunt hæ rectæ basibus ΒΔ, ΛΝ parallelæ, ad intercepta segmenta utriusque diametri, Verticibus Γ, Μ contermina, in eadem ratione respectivè; anguli autem contenti sub ordinatim applicatis utrique basi parallelis & diametris utriusque segmenti sunt utrobique æquales, ob angulos ad Γ & Μ æquales. Quapropter segmentum ΒΓΔ simile est segmento ΛΜΝ similiterque situm. Q. E. D.



At vero si fuerit segmentum ΔΓΒ in unâ sectionum simile segmento ΝΜΛ in alterâ, ac sint eorundem diametri ΓΕ, ΜΞ, Bases vero ΔΒ, ΛΝ, ac Vertices puncta Γ, Μ, ad quæ tangunt sectiones rectæ ΓΖ, ΜΟ. Dico angulos ΑΖΓ, ΚΟΜ esse æquales, ac ΕΓ esse ad ΓΖ sicut ΞΜ ad ΜΟ.

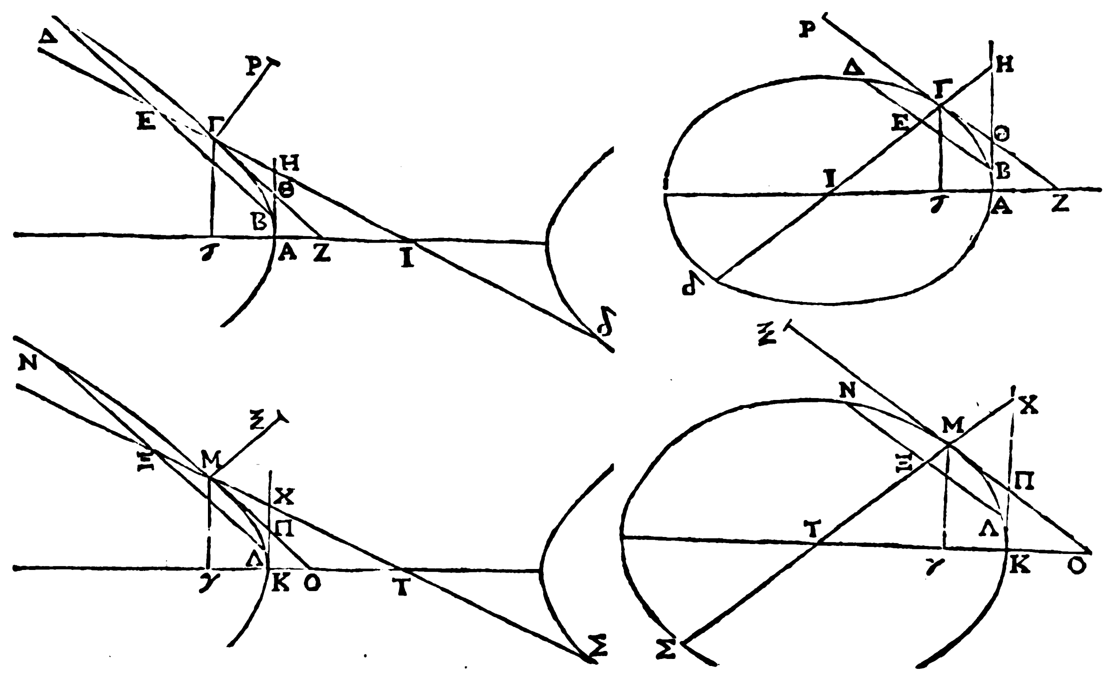
Maneant rectæ nuper descriptæ. Quoniam vero segmenta sunt similia, erit angulus contentus sub Base ΒΔ & diametro ΓΕ æqualis contento sub ΛΝ & ΜΞ; ac rectæ ΖΓ, ΟΜ parallelæ sunt ipsis ΒΔ, ΛΝ; adeoque anguli ad puncta Γ, Ε; Μ, Ξ sunt æquales. Anguli itaque obtusi ΖΓΕ, ΟΜΞ sunt inter se æquales; unde, ob parallelas, angulus ad punctum Ζ æqualis est angulo ad punctum Ο. Porro quoniam ΔΒ est ad ΕΓ sicut ΝΛ ad ΞΜ, ob similia segmenta; ΔΕ erit ad ΕΓ sicut ΝΞ ad ΞΜ. At vero ΡΓ est ad ΔΕ sicut ΔΕ ad ΕΓ, & ξΜ ad ΝΞ sicut ΞΝ ad ΞΜ, propter Parabolas: *quare* ΡΓ *est ad* ΔΕ *sicut* ξΜ *ad* ΝΞ. *Sed* ΔΕ *ad* ΕΓ *sicut* ΝΞ *ad* ΞΜ; *ex æquo* igitur ΡΓ erit ad ΕΓ sicut ξΜ ad ΜΞ. Jam ΡΓ est ad duplam ipsius ΓΖ (per 49. primi) sicut ΘΓ ad ΓΗ, & ξΜ est ad duplam ipsius ΜΟ ut ΠΜ ad ΜΧ. Sed ΘΓ est ad ΓΗ sicut ΠΜ ad ΜΧ, propter similia triangula ΓΘΗ, ΠΜΧ; quare ΡΓ est ad ΓΖ sicut ξΜ ad ΜΟ. *Cumque* ΡΓ *est ad* ΓΕ *sicut* ξΜ *ad* ΜΞ, *ut jam dictum est*; erit ex æquo ΕΓ ad ΓΖ sicut ΜΞ ad ΜΟ. Anguli autem ΑΖΓ, ΚΟΜ per nuper demonstrata æquales sunt: *ergo constat Propositio.*

PROPO-

PROPOSITIO XVIII.

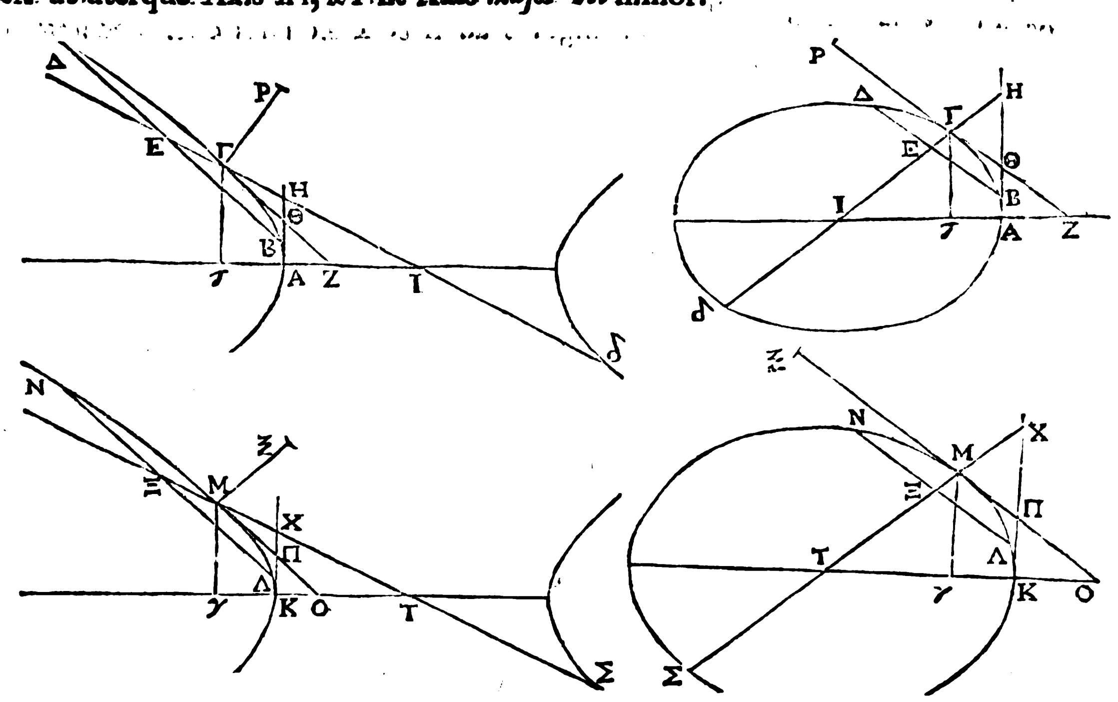
Sint jam sectiones, de quibus agitur, Hyperbolæ vel Ellipses; ac sint omnia descripta ut in figurâ præcedente, & producantur diametri ΓΕ, ΜΞ ad centra sectionum Ι, Τ: habeat autem abscissa ΓΕ ad Tangentem ΓΖ eandem rationem ac ΞΜ ad ΜΟ. Dico segmenta ΔΓΒ, ΛΜΝ similia esse.

Fiat ΡΓ ad duplum Tangentis ΓΖ sicut ΘΓ ad ΓΗ; ac ξΜ ad duplum Tangentis ΜΟ sicut ΠΜ ad ΜΞ: erunt igitur (per 50^{mam} primi) ΓΡ & ξΜ latera recta ad diametros ΓΕ, ΜΞ. De punctis Α, Κ, Γ, Μ ducantur ad Axes normales ΑΗ, ΚΧ, Γτ, Μγ. Jam quoniam sectiones similes sunt, erunt earum figuræ super Axes factæ (per 12^{am} hujus) etiam similes; ac si figuræ super Axes factæ fuerint similes, erit (per 37^{am} primi) rectangulum ΙτΖ ad quadratum ex Γτ sicut rectangulum Τγο ad quadratum ex γΜ. Anguli autem ad puncta Ζ, Ο ex hypothesi sunt æquales, & anguli ad τ & γ sunt etiam æquales, utpote recti: triangulum igitur ΓτΖ triangulo Μγο simile est. Manifestum autem est (*per Lemmata* 3^{um} *&* 5^{tum} Pappi) quod, si rectangulum ΙτΖ sit ad quadratum ex Γτ sicut rectangulum Τγο ad quadratum ex γΜ, triangula ΓτΙ, ΜΤγ erunt similia, ac proinde anguli ad centra Ι, Τ æquales. Anguli igitur ΖΓΙ, ΤΜΟ sunt æquales, quibus etiam æquales sunt anguli ad Ε & Ξ, propter ordinatim applicatas Tangentibus parallelas. Ob æquales autem angulos ad Ι & Τ, necesse est etiam angulos ad Η & Χ æquales esse. Sed anguli



ΖΓΙ, ΤΜΟ sunt æquales; quare triangula ΘΓΗ, ΠΜΧ sunt similia, ac ΘΓ est ad ΓΗ sicut ΠΜ ad ΜΧ. Fecimus autem ΡΓ ad duplum ipsius ΓΖ *sicut* ΘΓ *ad* ΓΗ, *&* ξΜ *ad duplum ipsius* ΜΟ sicut ΠΜ ad ΜΧ; erit igitur ΓΡ ad ΓΖ sicut Μξ ad ΜΟ; & (ob similia triangula) ΓΖ est ad ΓΙ sicut ΟΜ ad ΜΤ: quare *ex æquo* ΓΡ est ad ΓΙ sicut Μξ ad ΜΤ, adeoque ΓΡ est ad Γδ sicut Μξ ad ΜΣ. Figuræ igitur contentæ sub ipsis ΓΡ, Γδ, & sub Μξ, ΜΣ sunt similes. Quinetiam cum ΓΡ est ad ΓΖ sicut Μξ ad ΜΟ, & ΓΖ ad ΓΕ ut ΜΟ ad ΜΞ, erit *ex æquo* ΡΓ ad ΓΕ ut Μξ ad ΜΞ. Hoc autem cum ita sit, ac figura contenta sub ΓΡ, Γδ similis sit contentæ sub Μξ, ΜΣ; si jam secetur ΓΕ utcunque, ac per punctum divisionis ducatur recta ipsi ΒΔ basi segmenti parallela, ac dividatur diameter ΜΞ in eadem ratione qua divisa est ΓΕ, ac per punctum divisionis agatur parallela basi segmenti ΛΝ: erunt (per demonstrata in $12^{mâ}$ hujus) parallelæ diametro ΜΞ occurrentes ad abscissas ex eâdem Vertici Μ conterminas, *in eâdem ratione ac basi* ΒΔ *parallelæ ad portiones ab iisdem in diametro* ΓΕ *abscissas verticique* Γ *conterminas*. Angulus autem quem comprehendit basis ΒΔ cum ΓΕ æqualis est angulo comprehenso sub basi ΛΝ & ipsâ ΜΞ; quia hi anguli æquales sunt æqualibus angulis ad puncta Γ, Μ sub Tangentibus & diametris contentis. Segmenta igitur ΔΓΒ, ΝΜΛ similia sunt & similiter posita. Q. E. D.

Verum si fuerint segmenta similia. Dico angulos ΓΖΑ, ΜΟΚ æquales esse, ac ΓΕ esse ad ΓΖ ut ΞΜ ad ΜΟ. Positis igitur segmentis duabus similibus, ducantur in iisdem utcunque rectæ ipsis ΔΒ, ΝΛ parallelæ numeroque æquales, occurrentes ipsis ΓΕ, ΜΞ sub angulis æqualibus: & erunt ipsæ, ut & bases ΔΒ, ΛΝ, ad abscissas è diametris in iisdem rationibus respectivè; ac abscissæ in ipsa ΓΕ ad abscissas in diametro ΜΞ (*per Definit. septimam*) proportionales erunt. Poterunt autem rectæ in segmento ΔΓΒ ipsi ΔΒ parallelæ & ad ΓΕ ductæ (per 50^{am} primi) rectangula lateri recto ΓΡ adjacentia, & excedentia vel deficientia figuris rectangulis similibus contentæ sub ΕΡ, Γδ pariterque poterunt rectæ in segmento ΝΜΛ ad rectam ΜΞ ductæ, ipsique ΛΝ parallelæ, rectangula ipsi ξΜ adjacentia, & excedentia vel deficientia figuris rectangulis rectangulo sub ξΜ, ΜΣ contento similibus. Hoc autem cum ita sit, erit (per 12^{am} hujus) ΓΡ ad Γδ sicut Μξ ad ΜΣ; occurruntque ordinatim applicatæ diametris sub iisdem angulis: *quare* (per 13^{am} hujus) *sectiones similes sunt, ac figuræ Axium similes*. Unde (per 37^{am} primi) rectangulum ΙτΖ erit ad quadratum ex Γτ sicut rectangulum ΤγΟ ad quadratum ex Μγ. Verum anguli ad τ, γ sunt recti, & anguli ΖΓΙ, ΟΜΤ æquales, ac proinde triangula ΙΓΖ, ΤΜΟ (*per* Pappi *Lemmata* 3^{um} & 5^{um}) sunt similia: *adeoque angulus* ΓΖΑ *angulo* ΜΟΚ *æqualis est*. Atque hoc in Hyperbola universim constat, in Ellipsi vero opus est ut uterque Axis ΑΙ, ΚΤ sit Axis *major vel* minor.



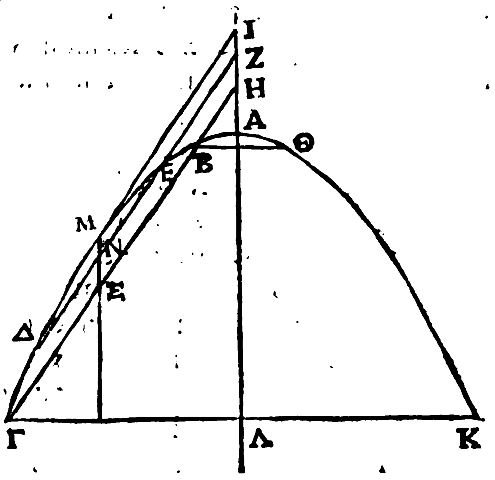
Quoniam vero ΡΓ est ad Γδ sicut ξΜ ad ΜΣ; & *rectangulum* δΕΓ *est* (per 21^{am} primi) *ad quadratum ex* ΔΕ *ut* δΓ *ad* ΓΡ, quemadmodum rectangulum ΜΞΣ est ad quadratum ex ΝΞ sicut ΣΜ ad Μξ; *erit rectangulum* δΕΓ *ad quadratum ex* ΔΕ *sicut rectangulum* ΜΞΣ *ad quadratum ex* ΝΞ. Quadratum autem ex ΔΕ est ad quadratum ex ΕΓ sicut quadratum ex ΝΞ ad quadratum ex ΜΞ; *ex æquo* igitur rectangulum δΕΓ erit ad quadratum ex ΕΓ sicut rectangulum ΜΞΣ ad quadratum ex ΞΜ; hoc est δΕ ad ΕΓ sicut ΣΞ ad ΞΜ: & *dividendo vel componendo* δΓ *erit ad* ΓΕ *sicut* ΣΜ *ad* ΜΞ. Ob similia autem triangula ΙΓΖ, ΤΜΟ, ΙΓ erit ad ΓΖ sicut ΤΜ ad ΜΟ: At vero δΓ, ΣΜ duplæ sunt ipsarum ΙΓ, ΤΜ; quare δΓ est ad ΓΖ sicut ΣΜ ad ΜΟ; ac proinde ΓΕ est ad ΓΖ sicut ΜΞ ad ΜΟ, anguli autem ad Ζ, Ο sunt æquales: *ergo constat Propositio*.

PROPOSITIO XIX.

DUctis ad Axem Parabolæ vel Hyperbolæ normalibus, erunt segmenta à duabus quibusvis normalibus, ab utroque Axis latere abscissa, similia & æqualia; segmentum autem quodvis aliud ejusdem sectionis non erit iisdem simile.

Sit

Sit ΓΑΚ Parabola vel Hyperbola, cujus Axis ΑΛ; & ducantur in sectione rectæ duæ ad Axem normales, puta ΒΘ, ΓΚ, abscindentes è sectione segmenta ΒΓ, ΘΚ: sint autem segmenta ΔΕ, ΘΚ à diversis normalibus abscissa. Dico segmenta ΒΓ, ΘΚ esse similia, quia (per 7^{mam} hujus) æqualia sunt, ac superimposita unum super alterum congruunt inter se: segmenta vero ΔΕ, ΘΚ non esse similia.

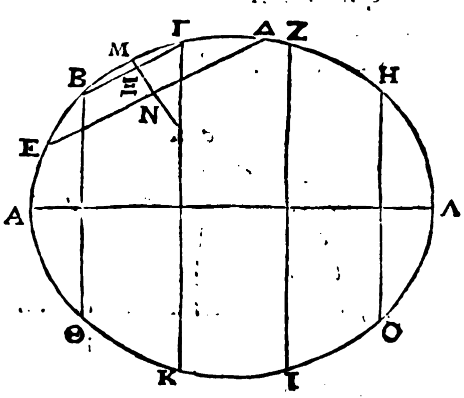


Nam, si fieri possit, sint segmenta ΔΕ, ΘΚ similia. Segmentum autem ΘΚ segmento ΒΓ (per eandem 7^{mam}) simile est: segmentum igitur ΔΕ simile erit segmento ΒΓ; atque adeo bases ΒΓ, ΔΕ productæ (per duas Prop. præcedentes) occurrent Axi sub æqualibus angulis ΑΗΒ, ΑΖΕ: unde rectæ ΓΒ, ΔΕ erunt parallelæ. Ducatur recta ΜΞ dividens ipsas ΓΒ, ΔΕ bifariam in Ξ & Ν, & per punctum Μ ipsi ΔΕΖ parallela sit ΜΙ. Erit igitur ΜΞ (per 28^{vam} secundi) sectionis diameter, ac ΜΙ ordinatim applicatis parallela tanget sectionem. Jam si segmenta ΓΒ, ΔΕ sint similia, erit (per duas proximè præcedentes) ΜΙ ad ΜΞ sicut ΜΙ ad ΜΝ. Hoc autem absurdum est, ac proinde segmentum ΔΜΕ non potest esse simile segmento ΘΚ. Q. E. D.

PROPOSITIO XX.

DUctis ad Axem Ellipseos normalibus; erunt segmenta à duabus quibusvis normalibus ab utroque Axis latere abscissa, similia & æqualia inter se, ut & segmentis, à normalibus ab altera parte centri ad easdem ab eo distantias ductis, abscissis: positio quoque horum quatuor segmentorum similis erit; neque ullum aliud segmentum ejusdem sectionis his simile esse potest.

Sit Ellipseos Axis ΑΛ, & ad rectos angulos occurrant Axi rectæ duæ ΒΘ, ΓΚ; ut & ab alterâ parte centri aliæ duæ ad easdem à centro distantias ut ΖΙ, ΗΟ: Dico segmenta ΒΓ, ΘΚ, ΖΗ, ΙΟ esse similia, neque aliud dari segmentum in sectione quod iisdem simile sit.



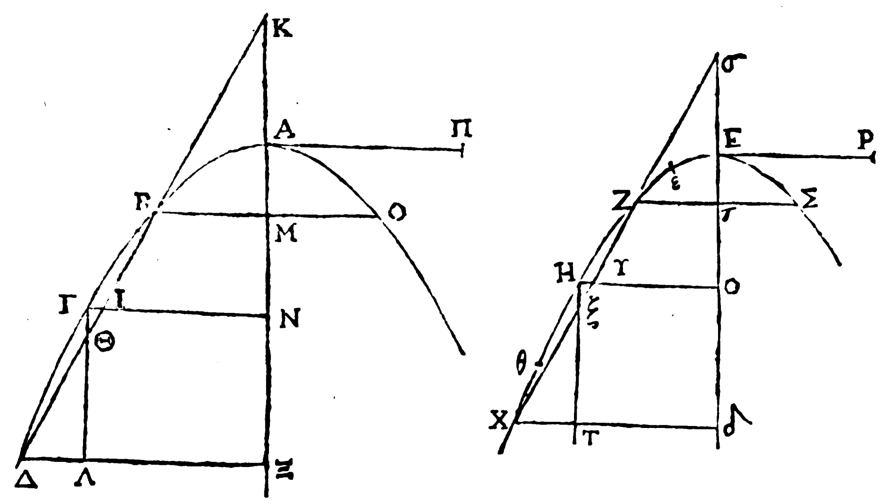
Quod autem segmenta hæc ΒΓ, ΘΚ, ΖΗ, ΙΟ similia sint ac similiter posita, hinc manifestum est; quia (per 8^{vam} hujus) æqualia sunt, ac applicatæ coincident inter se. Verum quod nullum aliud segmentum his simile sit hoc modo probabitur. Si fieri possit, simile sit iis segmentum ΔΕ, ac jungantur rectæ ΔΕ, ΒΓ; quas productas ad occursum Axis eidem (per 18^{vam} hujus) convenire oportet sub æqualibus angulis. Rectæ igitur ΔΕ, ΓΒ erunt parallelæ; ductâque rectâ ΜΞΝ parallelas has bifariam dividente in punctis Ν, Ξ, erit ΜΞΝ (per 28^{vam} II^{di}) segmentorum diameter. Jam si segmenta ΔΕ, ΓΒ sint similia, foret ΓΒ ad ΞΜ sicut ΔΕ ad ΜΝ. Hoc autem absurdum est: nam si hoc ita sit, transirent rectæ ΜΒ, ΜΓ junctæ & productæ per puncta Ε, Δ. Segmentum igitur ΔΕ non esse potest simile segmento ΓΒ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

SI ducantur ad Axes duarum Parabolarum normales, ita ut Axium portiones interceptæ Verticibusque conterminæ fuerint in eadem ratione ac latera recta utriusque sectionis: erunt segmenta à normalibus abscissa in unâ sectionum similia segmentis alterius, *similiterque posita; neque in iisdem sectionibus reperietur segmentum aliud quodcunque prædictis simile.*

Sint AB, EZ duæ Parabolæ quarum Axes AΞ, Eδ, latera vero recta AΠ, EP; & in alterâ sectionum ducantur normales BM, ΔΞ, in alterâ vero normales Zτ, Xδ: fiat autem ut AM ad AΠ ita Eτ ad EP, & ut ΞA ad AΠ ita Eδ ad EP. Dico segmentum BAO simile esse segmento ZEΣ; ac segmentum ΔA simile segmento XE, atque etiam segmentum BΔ segmento ZX.

Segmentum autem BAO simile esse segmento ZEΣ (in 11mâ hujus) demonstratum est. Quod autem segmenta BΔ, ZX sint similia, hoc modo demonstrabitur. Junctæ rectæ BΔ, ZX producantur ad puncta K, σ; ac dividantur ipsæ BΔ, ZX bifariam in punctis Θ, ξ, per quæ ducantur Axibus parallelæ ΓΘΛ, HξT; & de punctis Γ, H demittantur ad Axes normales ΓN, Hο. Quoniam vero AΠ est ad utramque AM, AΞ ut EP ad utramque ex ipsis Eτ, Eδ; manifestum est AΞ esse ad AM sicut Eδ ad Eτ, ac proinde (per 20mam primi) erit quadratum ex ΔΞ ad quadratum ex BM ut quadratum ex Xδ ad quadratum ex Zτ; quapropter ΔΞ est ad BM ut Xδ ad Zτ; atque adeo ΞK ad KM sicut δσ ad στ: per conversionem autem rationis erit KΞ ad ΞM sicut δσ ad δτ. Cum autem AΞ est ad AM sicut δE ad Eτ; per conversionem rationis AΞ erit ad ΞM sicut δE ad δτ. Sed jam constat KΞ esse ad ΞM sicut σδ ad δτ; erit itaque KΞ ad ΞA sicut σδ ad δE. Verum (per 11mam hujus) ΞA est ad ΞΔ sicut Eδ ad δX; *adeoque* KΞ *ad* ΞΔ *sicut* σδ *ad* δX. Anguli autem ad puncta Ξ, δ sunt recti, adeoque triangula KΞΔ, σδX similia sunt, ac proinde anguli ad puncta K, σ æquales. Jam propter similia triangula, ΔK est ad KB sicut Xσ ad σZ; ac per conversionem rationis KΔ est ad ΔB sicut Xσ ad XZ. Bisecatur autem BΔ in Θ, uti XZ in ξ; quare KΔ est ad ΔΘ sicut Xσ ad Xξ: ac ΔΞ



erit ad ΞA sicut Xδ ad δT. Sed ΞA æqualis est ipsi ΓN, ac δT ipsi Hο; quare ΔΞ erit ad ΓN sicut Xδ ad Hο, ac (per 20mam primi) ΞA erit ad AN sicut δE ad Eο; *ac per conversionem rationis* ΞA *ad* ΞN *sicut* δE *ad* δο. Demonstravimus autem KΞ esse ad ΞA sicut σδ ad δE, unde *ex æquo* KΞ erit ad ΞN sicut σδ ad δο; atque adeo KΔ erit ad ΔI sicut σX ad XY. Verum KΘ est ad ΘΔ ut σξ ad ξX, unde KΘ est ad ΘI sicut σξ ad ξY: ob similia autem triangula IΘΓ, YξH; erit IΘ ad ΘΓ sicut Yξ ad ξH; quare *ex æquo* KΘ erit ad ΘΓ sicut σξ ad ξH. Recta autem ΘK æqualis est Tangenti sectionis ad punctum Γ ad Axem terminatæ, quia eidem ΘK parallela est ac inter duas parallelas. Pariter σξ æqualis erit Tangenti per punctum H ductæ ad Axem: quare Tangens per H ducta est ad Hξ sicut Tangens per Γ ducta est ad ΓΘ. Quod si hoc ita se habeat ac æquales sint anguli quos continent Tangentes hæ cum suis Axibus, manifestum est (per 17am hujus) fore segmenta similia de quorum verticibus Tangentes ducuntur: adeoque segmentum ΔΓB segmento XHZ esse simile.

Quinetiam si capiatur aliud segmentum ut θι, quod non intercipiatur à prædictis normalibus. Dico illud non esse simile segmento ΔΓB. Nam segmentum ΔΓB simile est segmento XHZ, & segmentum XHZ (per 19am hujus) non est simile segmento θι, quia non intercipitur ab iisdem normaliter applicatis. Segmentum igitur θι non est simile segmento ΔΓB.

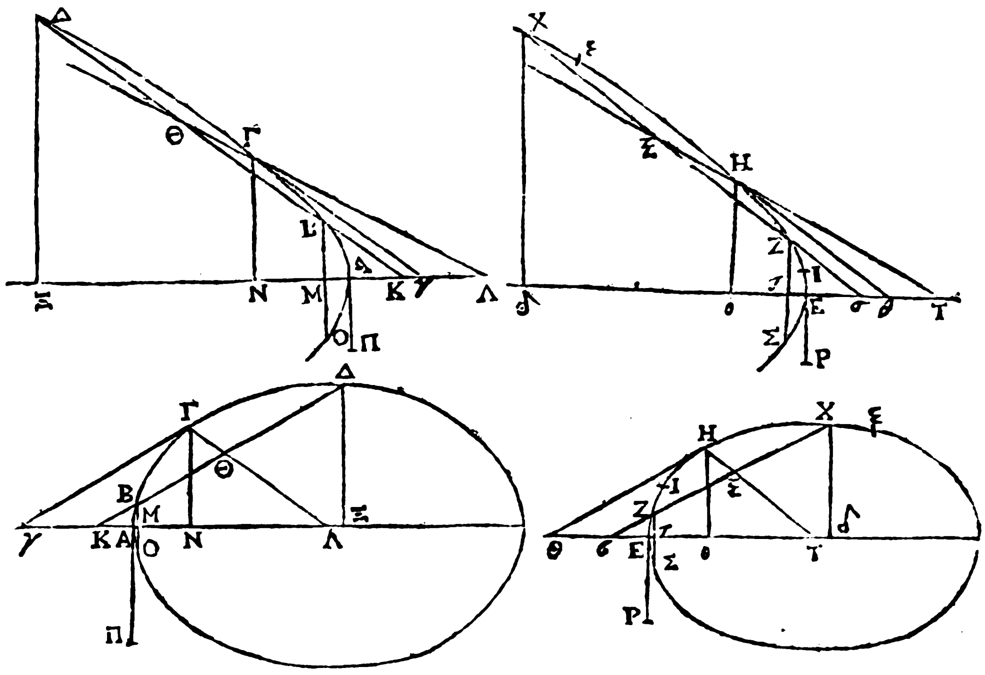
PROPO-

PROPOSITIO XXII.

Iisdem positis in Hyperbolis & Ellipsibus similibus, eadem evenient quæ in Parabola evenire, in Propositione præcedente, demonstravimus.

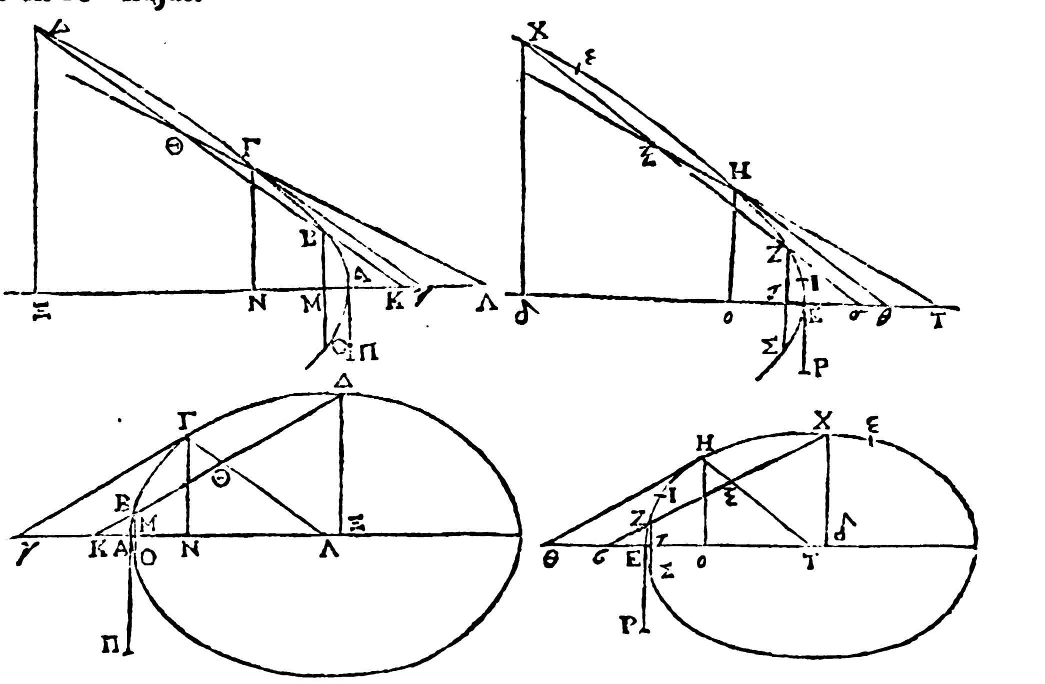
Iisdem factis quæ prius in Parabola fecimus, producantur diametri segmentorum ΓΘ, ΗΞ ad centra Λ, Τ; & ad puncta Γ, Η tangant sectiones rectæ Γγ, Ηθ, quæ parallelæ erunt ipsis ΔΚ, Χσ. Sint autem ΑΜ, ΑΞ ad latus rectum ΑΠ sicut ΕΤ, Εδ ad latus rectum alterius sectionis ΕΡ.

Quoniam vero sectiones sunt similes, erunt etiam (per 12^{mam} hujus) earundem figuræ similes, ac Axis transversus unius erit ad latus ejus rectum sicut Axis alterius ad latus ejus rectum. Supponimus autem ΑΜ, ΕΤ esse in ratione laterum rectorum; quare, per demonstrata in 12ma hujus, si ducantur in segmento ΒΑΟ rectæ ipsi ΒΟ parallelæ, & in segmento ΖΕΣ rectæ ipsi ΖΣ parallelæ, sitque numerus harum parallelarum in utroque segmento æqualis; erunt parallelæ in segmento ΖΕΣ & ipsa Basis ΖΣ, ad portiones Axis ΕΤ, ab iisdem abscissas verticique Ε conterminas, in eisdem rationibus quas habent parallelæ in segmento ΒΑΟ & ipsa ΒΟ ad abscissas in Axe ΑΜ vertici Α adjacentes, *respectivè*: erunt quoque abscissæ Axis ΑΜ ad abscissas Axis ΕΤ in eadem ratione. Quocirca (*per Definit. septimam*) segmenta ΒΑΟ, ΖΕΣ similia sunt.



Quoniam autem ΑΜ est ad latus rectum ΑΠ sicut ΕΤ ad latus rectum ΕΡ, ac ΑΞ est ad ΑΠ sicut δΕ ad ΕΡ; erunt (propter similes sectiones) ΑΜ ad ΜΒ sicut ΕΤ ad ΤΖ, & ΞΑ est ad ΑΜ sicut δΕ ad ΕΤ: unde *ex æquo* ΞΑ est ad ΒΜ sicut δΕ ad ΤΖ. Sed & ΔΞ est ad ΞΑ sicut Χδ ad δΕ; quare *iterum ex æquo* ΔΞ erit ad ΒΜ sicut δΧ ad ΤΖ; ac proinde ΞΚ ad ΚΜ sicut δσ ad σΤ: per conversionem autem rationis ΚΞ erit ad ΞΜ sicut δσ ad δΤ. Verum ΞΜ est ad ΞΑ ut δΤ ad δΕ (ob ΞΑ ad ΑΜ sicut δΕ ad ΕΤ) quare ΚΞ est ad ΞΑ ut σδ ad δΕ. Est autem ΞΑ ad ΔΞ sicut Εδ ad δΧ; quare *ex æquo* ΚΞ est ad ΔΞ sicut σδ ad δΧ. Anguli autem ad puncta Ξ, δ sunt recti, adeoque triangula ΚΔΞ, σΧδ sunt similia & anguli ad Κ, σ æquales. Jam sectionum similium figuræ sunt similes, ac rectæ Γγ, Ηθ sunt Tangentes; erit igitur (per 37^{mam} primi) rectangulum ΛΝγ ad quadratum ex ΓΝ sicut rectangulum Τοθ ad quadratum ex Ηο. Sed quadratum ex ΓΝ est ad quadratum ex Νγ ut quadratum ex Ηο ad quadratum ex οθ, ob similia triangula ΓΝγ, Ηοθ: quare *ex æquo* rectangulum ΛΝγ est ad quadratum ex Νγ sicut rectangulum Τοθ ad quadratum ex οθ; ac propterea ΛΝ erit ad Νγ sicut Το ad οθ. Sed Νγ est ad ΓΝ sicut θο ad οΗ; adeoque ΛΝ erit ad ΓΝ sicut Το ad οΗ. Anguli autem ad Ν & ο sunt

ſunt recti, ac triangula ΓγΝ, Ηθο ſunt ſimilia; quare anguli ad Λ, Τ ut & ad γ, θ ſunt æquales: quocirca triangula ΓγΛ, ΗθΤ ſunt ſimilia, ac γΛ eſt ad ΓΛ ſicut θΤ eſt ad ΤΗ. Eſt autem γΚ ad ΓΘ ſicut σθ ad Ηξ, propter parallelas γΓ ipſi ΘΚ ac Ηθ ipſi σξ. Porro ob ſimilitudinem ſectionum ΛΜ eſt ad ΜΒ ſicut ΕΤ ad ΤΖ; & ΜΒ eſt ad ΜΚ ſicut ΖΤ ad Τσ; *unde* ex æquo ΛΜ *eſt ad* ΜΚ *ſicut* ΕΤ *ad* Τσ, *ac componendo vel dividendo* ΛΜ *eſt ad* ΛΚ *ſicut* ΕΤ *ad* Εσ. Eſt autem ΛΑ ad ΛΜ ſicut ΕΤ ad ΤΕ (quia ratio compoſita ex ratione ΛΑ ad ΛΠ & ΛΠ ad ΛΜ eadem eſt ac ratio compoſita ex ratione ΕΤ ad ΕΡ & ΕΡ ad ΤΕ) *ex æquo* igitur ΛΑ eſt ad ΛΚ ſicut ΤΕ ad Εσ, *ac proinde* ΛΑ *eſt ad* ΛΚ *ſicut* ΕΤ *ad* Τσ. Ob ſimilia autem triangula, ΛΝ eſt ad Λγ ſicut οΤ ad Τθ; & ΝΛ eſt ad Λγ (per 37^um^ primi) ſicut quadratum ex ΛΑ ad quadratum ex Λγ, quemadmodum οΤ eſt ad Τθ ſicut quadratum ex ΕΤ ad quadratum ex Τθ: quadratum igitur ex ΛΑ eſt ad quadratum ex Λγ ſicut quadratum ex ΕΤ eſt ad quadratum ex Τθ; adeoque ΛΑ eſt ad Λγ ſicut ΕΤ ad Τθ. Verum jam demonſtravimus ΛΑ eſſe ad ΛΚ ſicut ΕΤ ad Τσ; quare Λγ eſt ad ΛΚ ſicut Τθ ad Τσ, ac proinde Λγ eſt ad γΚ ſicut Τθ ad θσ. Sed Γγ eſt ad γΛ ſicut θΗ ad θΤ, ob ſimilia triangula γΛΓ, θΤΗ: erit igitur *ex æquo* Γγ ad γΚ ſicut θΗ ad θσ. Nuper autem oſtenſum eſt γΚ eſſe ad ΓΘ ſicut σθ ad Ηξ; quare *ex æquo* Γγ *eſt ad* ΓΘ *ſicut* θΗ *ad* Ηξ. Anguli autem ad puncta γ, θ ſunt æquales: ſegmenta igitur ΒΓΔ, ΖΗΧ ſimilia ſunt ſimiliterque poſita, juxta ea quæ demonſtrata dedimus in 18^va^ hujus.



Quod ſi capiatur ſegmentum aliquod aliud ut Ιι, quod non ſit interceptum ſub iiſdem ordinatim applicatis, nec in Ellipſi ſub ordinatis æqualiter ab altera parte centri diſtantibus: Dico illud non eſſe ſimile ſegmento ΔΓΒ. Nam ſi fieri poſſit, ſit illi ſimile. Cumque ſegmentum ΒΔ ſimile eſt ſegmento ΖΧ, erit quoque ſegmentum Ιι ipſi ΖΧ ſimile. Non autem interceptum eſt ſub iiſdem ad Axem normalibus, neque ſub iis quæ ſunt ad eaſdem à centro diſtantias. Itaque (per 19^nam^ & 20^mam^ hujus) poſuimus abſurdum. Segmentum igitur Ιι non poteſt eſſe ſimile ſegmento ΧΖ, adeoque nec ſegmento ΔΓΒ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

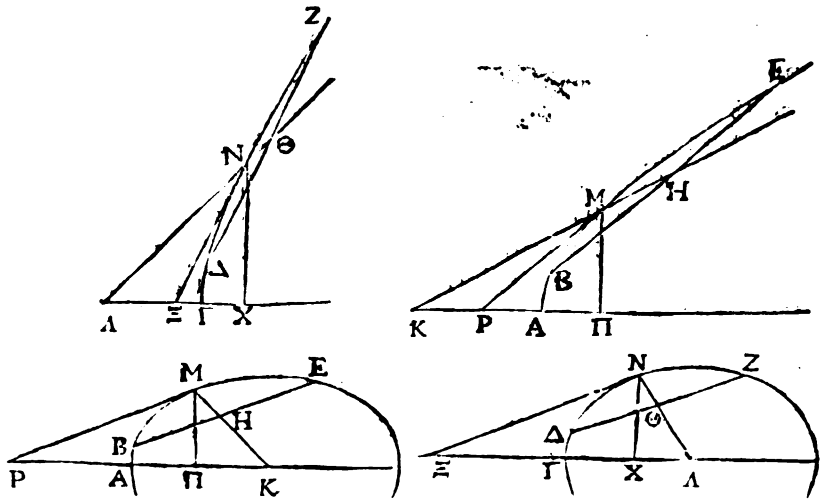
IN ſectionibus diſſimilibus, nulla portio unius ſimilis eſt alicui alterius portioni.

Sint ΑΒ, ΓΔ ſectiones diſſimiles, ac primum ſint ambæ Hyperbolæ vel Ellipſes. Dico nullum ſegmentum ſectionis ΑΒ ſimile eſſe ſegmento alicui ex ΓΔ.

Nam ſi fieri poſſit, ſint ΒΕ, ΔΖ ſegmenta ſimilia. Jungantur ΒΕ, ΔΖ ac dividantur biſariam in punctis Θ, Η; ac per centra ſectionum, Κ, Λ ducantur rectæ ΗΜΚ, ΘΝΛ: quæ (per 47^am^ primi) diametri erunt ſectionum. Hæ vero vel erunt ſectionum

onum Axes, vel non erunt. Quod si Axes fuerint, ac segmenta ΒΕ, ΔΖ sint similia; demissæ ad Axes normales parallelæ erunt ipsis ΕΒ, ΔΖ; & erunt normales ad abscissas Axis vertici conterminas in unâ sectionum sicut normales ad abscissas Axis in alterâ in iisdem rationibus *respective*: atque etiam abscissæ in uno Axe erunt ad abscissas in altero in eadem ratione. At hæ parallelæ normales sunt super Axes sectionum; quare sectiones ipsæ erunt similes. Hoc autem absurdum est. Posuimus enim eas dissimiles esse.

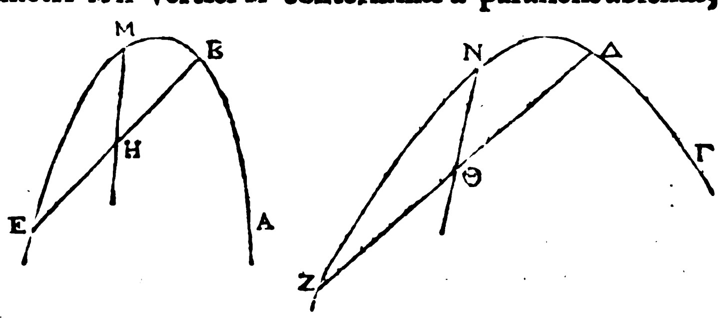
Si vero ΗΜΚ, ΘΝΛ non fuerint Axes, sint sectionum Axes ΑΚ, ΓΛ, & de punctis Μ, Ν demittantur ad Axes normales ΜΠ, ΝΧ, & ab iisdem ducantur tangentes ΜΡ, ΝΞ: ac (per demonstrata in 18va hujus) manifestum erit triangula ΜΡΚ, ΝΞΛ similia esse; quorum perpendicularia sunt ΜΠ, ΝΧ: quare (*per*



Conversas Lemmatum Pappi *tertii & quinti*) rectangulum ΚΠΡ erit ad quadratum ex ΜΠ sicut rectangulum ΛΧΞ ad quadratum ex ΝΧ. Sed rectangulum ΚΠΡ est ad quadratum ex ΜΠ (per 37^{am} primi) sicut Axis transversus sectionis ΑΒ ad latus ejus rectum; ac (per eandem) rectangulum ΛΧΞ erit ad quadratum ex ΝΧ sicut Axis transversus sectionis ΓΔ ad latus ejus rectum. Quapropter Axis sectionis ΑΒ est ad latus ejus rectum sicut Axis sectionis ΓΔ ad ejus latus rectum. Figuræ igitur sectionum ΑΒ, ΓΔ sunt similes, ac proinde (per 12^{mam} hujus) sectiones ipsæ sunt similes. Sectiones itaque ΑΒ, ΓΔ sunt similes, quas tamen dissimiles esse supposuimus. Absurdum est igitur segmentum ΒΕ simile esse segmento ΔΖ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

SI vero sectio ΑΒΕ fuerit Parabola, ΓΔΖ vero Hyperbola aut Ellipsis; demonstravimus quidem (per 14^{am} hujus) sectionem sectioni non esse similem. Dico quoque segmenta earum non posse similia esse. Nam, si possibile sit ut sint similia, duci poterunt in iisdem (*per Definit. septimam*) rectæ numero æquales, ipsis ΒΕ, ΔΖ parallelæ, ita ut portiones diametri ΜΗ vertici Μ conterminæ à parallelis abscissæ, fuerint ad ipsas parallelas in segmento ΒΕ, in iisdem rationibus ac abscissæ diametri ΝΘ vertici Ν conterminæ ad parallelas in altera segmento ΔΖ ductas: simulque Basis unius erit ad diametrum ejus sicut Basis alterius ad diametrum ejus; ac portiones in



unâ diametrorum abscissæ erunt ad abscissas in alterâ ubique in eadem ratione. Hoc autem fieri non posse, eodem modo quo rem in integris sectionibus (per Prop. 14^{am}) demonstravimus, facile constabit. Q. E. D.

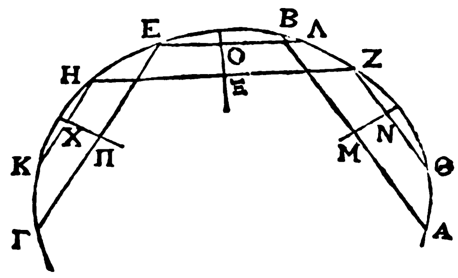
Quod si una sectionum fuerit Hyperbola, altera vero Ellipsis, patebit absurditas juxta argumentum Propositionis 15^{tæ} hujus.

PROPOSITIO XXV.

TRium *sectionum Conicarum nulla portio est arcus Circuli.*

Sit ΑΒΓΕ sectio aliqua. Dico quod fieri nequit ut pars aliqua ejus sit arcus circularis.

Nam, si fieri possit, sit ΑΒΓ arcus Circuli, & in eâ ducantur utcunque rectæ duæ non parallelæ ut ΑΒ, ΓΕ; atque etiam altera ut ΖΗ iisdem non parallela; ducantur quoque ΖΘ ipsi ΑΒ parallela, ut ΗΚ ipsi ΓΕ, ac ΕΛ ipsi ΖΗ; bisecentur omnes hæ rectæ in punctis Μ, Ν; Ο, Ξ; Π, Χ: ac junctæ rectæ ΜΝ, ΟΞ, ΠΧ diametri erunt Circuli, ac proinde dividentes chordas parallelas bifariam (*per* 3. III. *Element.*) iisdem normales erunt. Eædem vero sunt diametri sectionis (per 28^{vam} secundi) & *ob angulos ipsis parallelis rectos*, ΜΝ, ΞΟ, ΠΧ erunt quoque sectionis Axes. Neque coincidunt in eandem rectam, quia tres chordas prius ductas non esse parallelas supponitur. Hoc autem absurdum est, quia (per 48^{vam} secundi) in nullâ sectione habentur plures quam duo Axes. Fieri igitur nequit ut pars aliqua cujuslibet sectionis Conicæ sit arcus Circuli. Q. E. D.

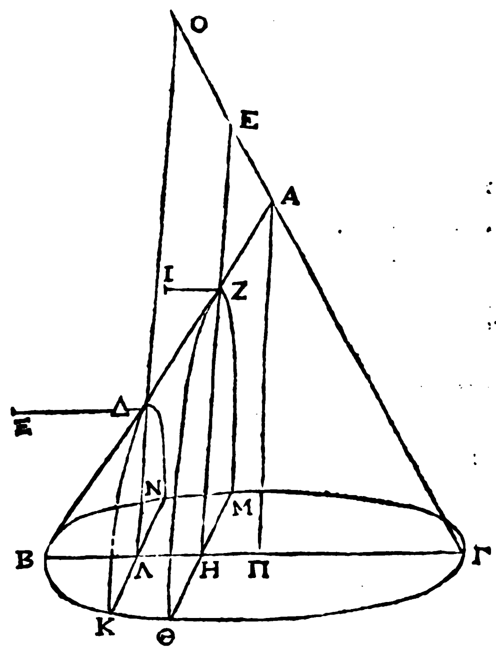


PROPOSITIO XXVI.

SI secetur Conus planis æquidistantibus, quæ producta supra Coni verticem subtendantur angulo ejus exteriori: Sectiones Hyperbolicæ hinc genitæ similes erunt inter se, sed inæquales.

Sit Conus ΑΒΓΔ; ac secetur planis æquidistantibus quorum communes sectiones cum plano Basis Coni sint ΘΜ, ΚΝ; & per centrum Basis ad has rectas demittatur Cathetus ΒΛΗΓ: secetur etiam Conus alio plano per Axem ejus, secundum rectam ΒΓ, quod Conicæ superficiei occurrat in rectis ΑΒ, ΑΓ; ac sint communes intersectiones hujus plani cum duobus prædictis planis parallelis, rectæ ΔΛ, ΖΗ, quæ producantur ad Ο, Ε. Dico sectionem ΘΖΜ similem esse sectioni ΚΔΝ, sed tamen non illi æqualem.

De puncto Α ipsis ΔΛ, ΖΗ parallela ducatur ΑΠ; ac fiat ΟΔ ad ΔΞ ut quadratum ex ΑΠ ad rectangulum ΒΠΓ: fiat etiam ΕΖ ad ΖΙ ut quadratum ex ΑΠ ad rectangulum ΒΠΓ: *adeoque* ΕΖ *erit ad* ΖΙ *sicut* ΟΔ *ad* ΔΞ. Jam recta ΒΛ normalis est ipsi ΚΝ, adeoque cæteræ in sectione Hyperbolica ΚΔΝ ad rectam ΔΛ ductæ ipsique ΛΝ parallelæ (per 12^{mum} primi) poterunt plana lateri recto ΔΞ adjacentia, excedentia vero rectangulis similibus contento sub ΟΔ, ΔΞ. Pariter, quia recta ΒΗ normalis est ipsi ΜΘ, rectæ eodem modo ductæ in Hyperbola ΘΖΜ poterunt rectangula lateri recto ΖΙ adjacentia, excedentia autem figuris rectangulis similibus contentâ sub ΕΖ, ΖΙ. Verum angulus quem continent rectæ ΔΛ, ΚΝ æqualis est angulo contento sub ΖΗ, ΘΜ; quia parallelæ sunt inter se. *Figura autem* ΕΖΙ *similis est figuræ* ΟΔΞ: Sectiones igitur (per 12^{mum} hujus) sunt similes. Quoniam vero rectangulum ΟΔΞ majus est rectangulo ΕΖΙ, sectiones (per secundam hujus) non erunt æquales. Q. E. D.

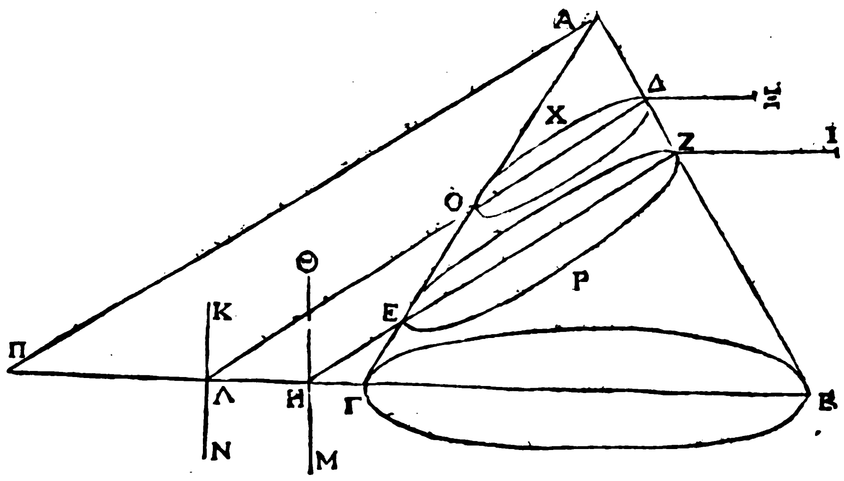


PROPOSITIO XXVII.

SI secetur Conus planis inter se parallelis occurrentibusque utrique lateri trianguli per verticem, neque Basi Coni parallelis, neque eidem subcontrariè positis; erunt sectiones genitæ Ellipses similes, verum non æquales.

Secent

Secent Conum ABΓ plana duo æquidistantia, sintque communes eorum intersectiones cum plano Basis Coni rectæ ΘM, KN. De centro Basis Coni ad ipsas ΘM, KN demittatur normalis BΓHΛ; ac secetur Conus plano juxta hanc rectam Conique Axem designato: sint autem communes horum planorum intersectiones rectæ ZEH, ΔOΛ. Dico sectiones ZPE, ΔXO similes esse, sed inæquales.

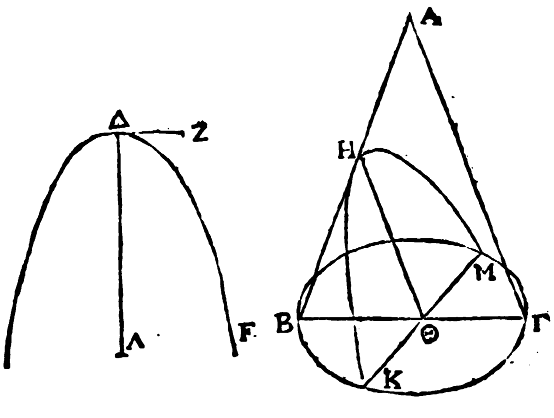


Ducatur de vertice Coni A recta ipsis ZH, ΔΛ parallela, ut AΠ; & erit diameter OΔ ad latus rectum ΔΞ sicut diameter EZ ad latus rectum ZI, quia utraque ratio est ut quadratum ex AΠ ad rectangulum BΠΓ. Est autem recta BΓΛ ipsi KN normalis; ac proinde rectæ, ordinatim ad Axem ΔO ductæ in sectione Elliptica ΔXO, ipsi KN parallelæ erunt; poteruntque rectangula lateri recto ΔΞ adjacentia, deficientia vero figuris (per 13^{am} primi) similibus contentæ sub ipsis ΞΔ, ΔO. Simili ratione ordinatim ductæ ad diametrum ZE, in Ellipsi ZPE, ipsi ΘM parallelæ erunt; ac poterunt rectangula lateri recto ZI adjacentia, deficientia autem figuris similibus factæ sub EZ, ZI. Verum angulus KΛΔ æqualis est angulo ΘHZ, quia rectæ KΛ, ΛΔ ipsis ΘH, HZ parallelæ sunt. *Cumque* OΔ *est ad* ΔΞ *sicut* EZ *ad* ZI, figura contenta sub OΔ, ΔΞ similis erit contentæ sub ZE, ZI. Quod si hoc ita se habeat, sectiones ipsæ (per 12^{mam} hujus) similes erunt, adeoque sectiones ZPE, ΔXO sunt similes. Non possunt autem æquales esse, quia rectangulum EZI majus est contento sub OΔ, ΔΞ; ac proinde (juxta demonstrata in secundâ hujus) sectiones quoque sunt inæquales.

PROPOSITIO XXVIII. PROBL.

IN Cono recto dato invenire sectionem datæ Parabolæ æqualem.

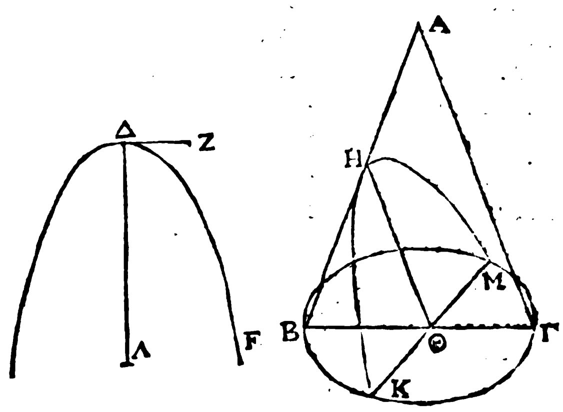
Sit Conus rectus datus, cujus sectio per Axem est triangulum ABΓ: Parabola autem data sit ΔE, cujus Axis ΔΛ & latus rectum ΔZ: fiat ΔZ ad AH sicut quadratum ex ΓB ad rectangulum sub AB, AΓ; ac ducatur recta HΘ ipsi AΓ parallela: dein secetur Conus plano transeunte per rectam HΘ & ad angulos rectos super planum ABΓ, ac genita erit sectio KHM super Axem HΘ. Dico sectionem KHM æqualem esse sectioni ΔE.



Quoniam normales in sectione KH, ad Axem HΘ ductæ, possunt rectangula *lateri ejus recto* adjacentia; quod quidem est ad AH (per 11^{mam} primi) sicut quadratum ex BΓ ad rectangulum sub AB, AΓ: fecimus autem ΔZ ad AH in eadem ratione quadrati ex BΓ ad rectangulum BAΓ; recta igitur ΔZ æqualis est lateri recto sectionis KHM. Sed, si ita fuerit, manifestum est (per primam hujus) sectiones esse æquales; ac proinde sectio ΔE sectioni HK æqualis est.

Dico quoque quod non reperietur in hoc Cono alia Parabola datæ æqualis, cujus vertex sive Axis extremitas sit in recta AB, præter hanc solam. Nam si fieri possit ut reperiatur alia Parabola æqualis sectioni ΔE, planum ejus secabit triangulum per Coni Axem ad angulos rectos; & erit Axis sectionis in plano trianguli

ABΓ, ob Conum rectum: in Cono enim recto omnium sectionum Axes ita se habent. At si possibile sit ut alia sectio æqualis sectioni ΔE Verticem habeat in recta AB, erit Axis ejus parallela ipsi AΓ, & punctum Verticis diversum erit à puncto H: erit autem latus ejus rectum ad interceptam in recta AB, inter sectionis illius & Coni Verticem A, ut quadratum ex BΓ ad rectangulum BAΓ. Hæc autem eadem est ratio ipsius ΔZ ad AH; quare ΔZ non est æqualis lateri recto hujus alterius sectionis, quæ proinde sectioni ΔE non est æqualis. Posuimus autem sectiones æquales esse: quod absurdum est, uti constat ex primâ hujus. Non igitur reperietur in recta AB Vertex Axis alicujus alterius sectionis sectioni ΔE æqualis.

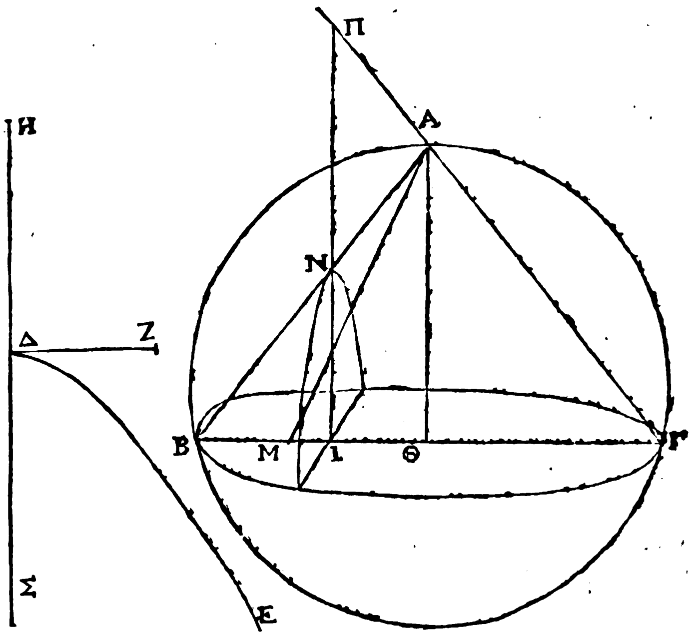


PROPOSITIO XXIX. PROBL.

IN Cono recto dato invenire sectionem Hyperbolæ datæ æqualem. Oportet autem rationem quadrati Axis Coni ad quadratum semidiametri Basis non majorem esse ratione quam habet diameter transversa, sive Axis datæ sectionis, ad latus ejus rectum.

Sit Conus rectus propositus, in quo triangulum per Axem est ABΓ, Axis vero AΘ: sit quoque Hyperbola data ΔE, cujus Axis HΔΣ; figura vero rectangulum contentum sub HΔ, ΔZ. Primum autem sit quadratum ex AΘ ad quadratum ex BΘ in ratione HΔ ad ΔZ; ac ducatur (*per Lemma* VI. Pappi) recta ipsi AΘ parallela ipsique HΔ æqualis, quæ subtendat angulum BAΠ, ad modum rectæ NΠ; & per NΠ, ad angulos rectos super planum trianguli ABΓ, erigatur planum Conicæ superficiei occurrens. Dico Hyperbolam sectione ejus genitam, cujus Axis est INΠ, *æqualem esse Hyperbolæ datæ* ΔE.

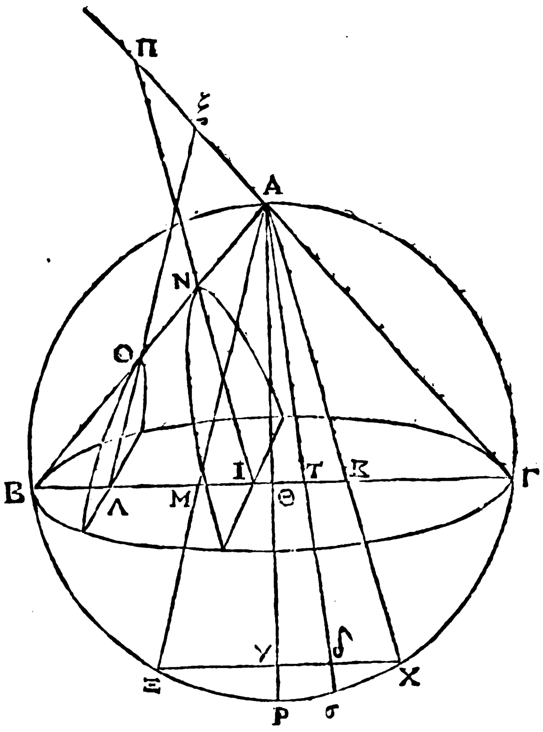
Quoniam enim AΘ parallela est ipsi ΠN, erit ΠN, sive diameter transversa, ad latus rectum sectionis (per 12^{am} primi) ut quadratum ex AΘ ad rectangulum sub ΓΘ, ΘB; & HΔ est ad ΔZ in eadem ratione; ΠN autem ipsi HΔ facta est æqualis: quare ΔZ æqualis erit lateri recto sectionis cujus Axis est ΠNI. Figura igitur sectionis cujus Axis est ΠNI æqualis est figuræ sectionis ΔE, ac proinde (per secundam hujus) sectiones ipsæ sunt æquales.



Neque reperietur alia sectio sectioni ΔE æqualis, cujus punctum Axis verticale sit in recta AB. Nam, si fieri possit, erit quoque Axis hujus sectionis in plano trianguli ABΓ (ut demonstratum est in Propositione præcedente) ac planum hujus alterius sectionis erit ad angulos rectos super planum trianguli ABΓ. Cum autem sectio altera Hyperbola est & æqualis sectioni ΔE, occurret Axis ejus lateri AΓ ultra apicem Coni A producto, ita ut portio intercepta inter latus trianguli AB & occursum cum AΓ productâ (per 2^{dam} hujus) æqualis sit ipsi ΔH. At vero non est ipsa ΠN, neque eidem parallela; quia si rectæ

ΠN

ΠΝ parallela esset, non foret eidem æqualis. Sit igitur eidem non parallela, ac ab Α Axi ejus parallela ducatur ΑΜ, quæ cadet vel inter ΑΒ & ΑΘ, vel inter ΑΘ & ΑΓ: erit igitur (per 12^{mam} primi & secundam hujus) quadratum ex ΑΜ ad rectangulum ΒΜΓ sicut ΔΗ ad ΔΖ. Hoc autem absurdum est: nam quadratum ex ΑΜ majus est quadrato ex ΑΘ & rectangulum ΒΜΓ minus rectangulo ΒΘΓ.



Jam habeat quadratum ex ΑΘ ad quadratum ex ΘΒ minorem rationem quam ΔΗ ad ΔΖ, ac circumscribatur Circulus triangulo ΑΒΓ, ac producatur Axis ΑΘ ad Ρ: erit igitur ratio ΑΘ ad ΘΡ minor ratione ipsius ΗΔ ad ΔΖ. Fiat itaque ΑΘ ad Θγ sicut ΗΔ ad ΔΖ, ac, ductâ rectâ Χγ Ξ Basi ΒΓ parallelâ, jungantur rectæ ΑΜΞ, ΑΚΧ: fiat etiam utraque ΠΝ, ξΟ (*per sextum Lemma* Pappi) ipsi ΔΗ æqualis, ita ut ΠΝ sit ipsi ΑΧ, & ξΟ ipsi ΑΞ parallela; ac concipiantur, per rectas ΠΝ, ξΟ, plana duo ad angulos rectos super planum trianguli ΑΒΓ erecta, quæ proinde generabunt in superficie Conica Hyperbolas binas, quarum Axes sunt ξΟΛ, ΠΝΙ. *Dico utramque Hyperbolam æqualem esse Hyperbolæ propositæ* ΔΕ.

Quoniam enim ΔΗ est ad ΔΖ sicut ΑΘ ad Θγ, hoc est ut ΑΜ ad ΜΞ, atque etiam quadratum ex ΑΜ (per 12^{am} primi) est in eadem ratione ad *rectangulum* ΑΜΞ, *hoc est ad* rectangulum ΒΜΓ, quam habet ξΟ diameter transversa figuræ sectionis cujus Axis est ξΟΛ, ad latus rectum ejus: erit figura sectionis ΔΕ & sectionis cujus Axis est ξΟΛ inter se æquales; ac proinde (per secundam hujus) sectiones ipsæ æquales sunt. Pari argumento probabitur sectionem ΔΕ æqualem esse sectioni cujus Axis est ΠΝΙ.

Neque reperietur sectio alia *sectioni* ΔΕ *æqualis, quæ verticem habeat in recta* ΑΒ, præter jam descriptas. Nam, si fieri possit, erit Axis sectionis (juxta demonstrata in Parabola) in plano ΑΒΓ: huic autem Axi parallela ducatur recta ΑΤ; ac, argumento nuper usurpato constabit rectam ΑΤ non coincidere cum recta ΑΚ, neque cum recta ΑΜ; sed ΔΗ esse ad ΔΖ (per 12^{mam} primi) sicut quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΒΤΓ, sive ut quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΑΤσ, quod æquale est rectangulo ΒΤΓ. Sed quadratum ex ΑΤ est ad rectangulum ΑΤσ sicut ΑΤ ad Τσ; quare ΔΗ est ad ΔΖ sicut ΑΤ ad Τσ: quod absurdum. Nam ΔΗ est ad ΔΖ sicut ΑΘ ad Θγ, sive ut ΑΤ ad Τϑ.

Porro si fuerit ratio quadrati ex ΑΘ ad quadratum ex ΒΘ major ratione ΔΗ ad ΔΖ; Dico non reperiri posse in Cono sectionem aliquam sectioni ΔΕ æqualem. Nam, si fieri possit, reperiatur; ac ducatur recta ΑΜ hujus sectionis diametro parallela: erit igitur quadratum ex ΑΜ ad rectangulum ΒΜΓ sicut ΔΗ ad ΔΖ. Supponitur autem ratio quadrati ex ΑΘ ad rectangulum ΒΘΓ major ratione ΔΗ ad ΔΖ: quapropter ratio quadrati ex ΑΜ ad rectangulum ΒΜΓ minor erit ratione quadrati ex ΑΘ ad rectangulum ΒΘΓ. Sed quadratum ex ΑΜ majus est quadrato ex ΑΘ, & rectangulum ΒΜΓ minus rectangulo ΒΘΓ: quod quidem absurdum est. Non reperietur igitur in hoc Cono sectio aliqua sectioni ΔΕ æqualis.

PROPOSITIO XXX. PROBL.

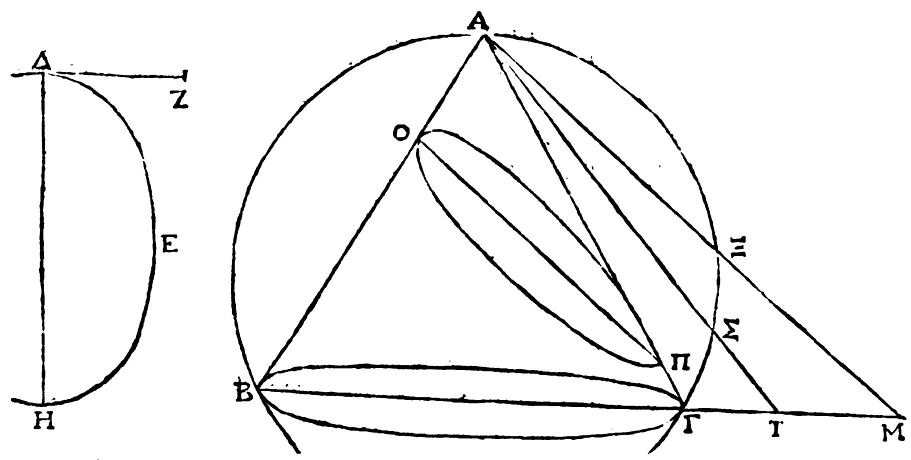
In dato Cono recto invenire sectionem Ellipsi datæ æqualem.

Detur Conus rectus, cujus sectio per Axem sit triangulum ΑΒΓ; ac sit Ellipsis data ΔΕ, cujus Axis *major* ΔΗ ac latus rectum ΔΖ: circumscribatur triangulo ΑΒΓ Circulus;

Circulus; ac fiat ΑΜ ad ΜΞ ſicut ΔΗ ad ΔΖ (quod quidem nullo negotio fieri poteſt) ac in triangulo ΑΒΓ ducatur recta ΟΠ ipſi ΑΜ parallela rectæque ΔΗ æqualis: erigatur autem normaliter ſuper planum trianguli ΑΒΓ, ſecundum rectam ΟΠ, planum quod Conicæ ſuperficiei occurrens producat Ellipſin. *Dico hanc Ellipſin, cujus Axis eſt* ΟΠ, *æqualem eſſe Ellipſi datæ* ΔΕ.

Eſt enim ΟΠ ad latus ejus rectum (per 13^{am} primi) ut quadratum ex ΑΜ ad rectangulum ΒΜΓ. Sed rectangulum ΒΜΓ æquale eſt rectangulo ΑΜΞ; quare Axis tranſverſus ΟΠ erit ad latus rectum ſectionis hujus, ut quadratum ex ΑΜ ad rectangulum ΑΜΞ, hoc eſt ut ΑΜ ad ΜΞ. Fecimus autem ΑΜ ad ΜΞ ſicut ΔΗ ad ΔΖ; quapropter ΟΠ eſt ad latus rectum ſectionis cujus Axis eſt ΟΠ, ſicut ΔΗ ad ΔΖ: figura igitur ſectionis ΔΕ & ejus cujus Axis eſt ΟΠ ſunt æquales; adeoque (per ſecundam hujus) & ipſæ ſectiones ſunt æquales.

Dico quoque non reperiri in hoc Cono ſectionem aliam ipſi ΔΕ æqualem, cujus Vertex apici Coni vicinior fuerit in recta ΑΒ. Nam, ſi fieri poſſit, (juxta demonſtrata in $28^{væ}$ hujus) conſtabit Axem ejus eſſe in plano trianguli ΑΒΓ, planumque ejus normaliter inſiſtere eidem plano ΑΒΓ. Quoniam vero hæc ſectio Ellipſis eſt, occurret Axis ejus productus rectæ ΒΓ, & erit ipſi ΔΗ æqualis (per 2^{dam} hujus) ac Vertex ejus puncto Α propior erit in recta ΑΒ. Verum non cadet Axis ille ſuper rectam ΟΠ, neque eidem parallela eſſe poteſt. Ducatur igitur de puncto Α



huic Axi parallela, quæ non coincidat cum recta ΑΜ, ſicut ΑΣΤ; hæc autem occurret arcui ΑΓ, quia non eſt ipſi ΒΓ parallela. Verum eſt Axis tranſverſus hujus ſectionis ad latus ejus rectum (per 13^{am} primi) ut quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΒΤΓ, ac in eâdem debet eſſe ratione ΔΗ ad ΔΖ. Sed rectangulum ΒΤΓ æquale eſt rectangulo ΑΤΣ; erit igitur ΔΗ ad ΔΖ ut quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΑΤΣ, hoc eſt ut ΑΤ ad ΤΣ. Verum ΔΗ eſt ad ΔΖ ut quadratum ex ΑΜ ad rectangulum ΑΜΞ, ſive ut ΑΜ ad ΜΞ; quare ΑΤ ad ΤΣ erit ut ΑΜ ad ΜΞ, quod abſurdum & impoſſibile eſt. Quapropter non reperietur in hoc Cono ſectio alia æqualis ſectioni ΔΕ, cujus Vertex apici Coni propior fuerit in recta ΑΒ, præter ſolam ſectionem cujus Axis major eſt ΟΠ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA.

Invenire Conum rectum Cono recto dato ſimilem, qui contineatur à Parabolâ datâ.

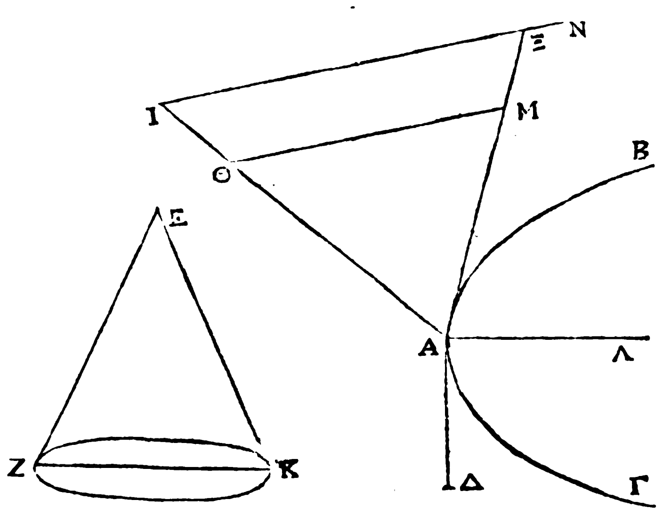
Sit ſectio ΑΒΓ Parabola, cujus Axis ΑΛ, latus vero rectum ejus ΑΔ; ſitque Conus datus & triangulum per Axem ejuſdem ΕΖΚ: & ſecundum ΑΛ erigatur normaliter, ſuper planum ſectionis ΑΒΓ, planum aliud, ut ΘΑΛ; & in hoc plano ducatur recta ΑΜ quæ contineat cum recta ΑΛ angulum æqualem angulo ΕΖΚ: ac fiat ΔΑ ad ΑΜ ſicut ΚΖ ad ΖΕ: & ſuper baſim ΑΜ deſcribatur triangulum ΑΘΜ ſimile triangulo ΖΕΚ, ac ducantur rectæ ΘΑ, ΘΜ de punctis Α, Μ; ac fiat Conus cujus Vertex Θ, ac Baſis circulus, cujus diameter ΑΜ, ſuper planum ΑΘΜ normaliter erectus. *Dico Conum* ΑΘΜ *Cono* ΕΖΚ *ſimilem contineri à Parabolâ datâ* ΑΒΓ.

Eſt enim angulus ΜΑΛ æqualis angulo ΕΖΚ, & angulus ΕΖΚ æqualis eſt angulo

* ΘΜΑ

ΘΜΛ; angulus igitur ΜΑΛ æqualis est angulo ΘΜΑ, adeoque ΑΛ ipsi ΘΜ parallela est. Sed ΘΜ latus est trianguli per Axem Coni; adeoque planum sectionis propositæ producit in superficie Conicâ Parabolam. Jam vero ΔΑ est ad ΑΜ sicut ΚΖ ad ΖΕ, hoc est ut ΑΜ ad ΜΘ; quare ΔΑ est ad ΑΜ sicut ΑΜ ad ΑΘ (ob ΑΘ ipsi ΜΘ æqualem) quocirca quadratum ex ΑΜ rectangulo ΔΑΘ æquale, est ad rectangulum ΑΘΜ sicut ΑΔ ad ΑΘ: est igitur latus rectum sectionis in Cono genitæ (per 11^{am} primi) ipsa recta ΔΑ. Eadem autem est latus rectum sectionis ΒΑΓ: cumque utraque Parabola est, quarum latera recta sunt æqualia, ipsæ sectiones (per primam hujus) sunt etiam æquales. Posita itaque est sectio ΑΒΓ in Cono jam invento, qui quidem similis est Cono ΖΕΚ, quia similia sunt triangula ΕΖΚ, ΘΜΑ.

Dico quoque hanc sectionem non reperiri in alio Cono simili Cono ΕΖΚ, ita ut Apex ejus respiciat idem latus plani in quo est sectio, præter hunc Conum solum. Nam, si fieri possit, sit alter ille Conus qui contineat hanc sectionem, similisque sit Cono ΕΖΚ, Conus cujus Apex est Ι; & per Axem ejus transeat planum super planum sectionis normaliter erectum, eidem occurrens secundum Axem sectionis, nempe in recta ΑΛ: erit igitur ΑΛ communis intersectio planorum. Planum autem ΘΑΛ erigitur ad angulos rectos super planum sectionis, juxta eandem rectum ΑΛ; quare punctum Ι (*per Lemma* VII.) erit in plano ΘΑΛ. Jam sint ΑΙ, ΙΝ latera Coni, ac erit ΙΝ ipsi ΑΛ parallela, & angulus ΖΕΚ angulo ΑΙΝ æqualis, ut & angulo ΑΘΜ: recta igitur ΑΙ est in directo ipsius ΘΑ. Producatur recta ΑΜ ad Ξ; ac si foret sectio ΒΑΓ in Cono cujus Apex est Ι, & caperetur recta quædam ad ΑΙ in ratione quadrati ex ΑΞ ad rectangulum ΑΙΞ; esset recta illa latus rectum sectionis ΒΑΓ. Sed ΑΔ est latus rectum sectionis ΒΑΓ; quare quadratum ex ΑΞ *esset ad rectangulum* ΑΙΞ *sicut* ΑΔ *ad* ΑΙ: *quadratum autem ex* ΑΜ est ad rectangulum ΑΘΜ sicut ΑΔ ad ΑΘ. Est vero quadratum ex ΑΜ ad rectangulum ΑΘΜ sicut quadratum ex ΑΞ ad rectangulum ΑΙΞ; adeoque ΑΔ erit ad ΑΘ in eadem ratione ac ad ΑΙ. Hoc autem absurdum est. Non itaque inveniri potest Conus alius Cono dato ΖΕΚ similis, qui contineat sectionem ΑΒΓ, ita ut Apex ejus respiciat idem latus plani sectionis. Q. E. D.

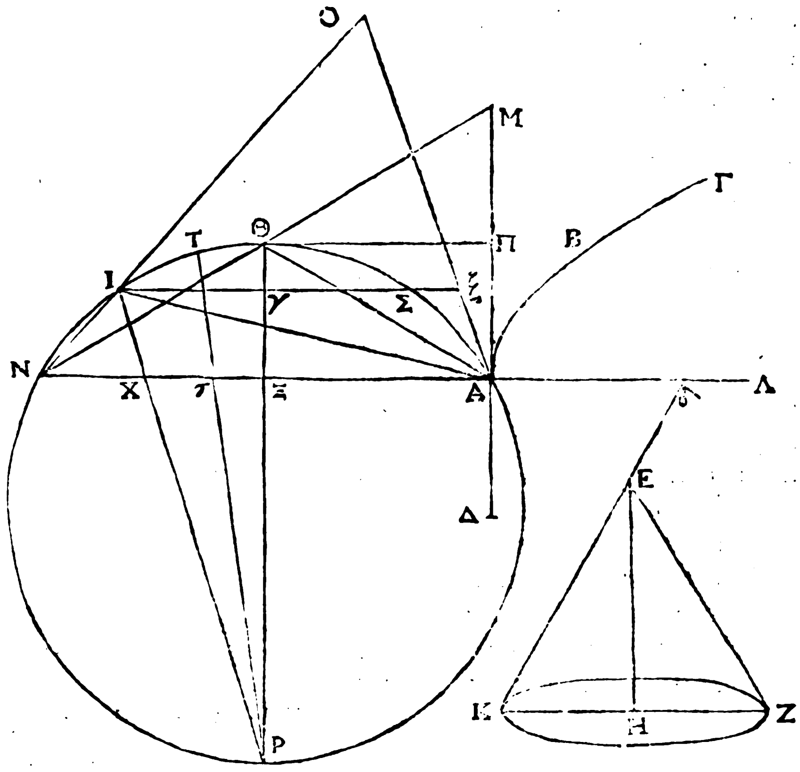


PROPOSITIO XXXII. PROBL.

INvenire Conum rectum Cono recto dato similem ab Hyperbolâ datâ contentum. Oportet autem rationem quadrati Axis Coni ad quadratum semidiametri Basis ejus non majorem esse ratione lateris transversi, in figurâ sectionis super Axem factâ, ad latus rectum ejusdem.

Sit ΑΒΓ Hyperbola data, cujus Axis ΑΛ, diameter transversa ΑΝ ac *latus rectum* ΑΔ; *ita ut* figura super Axem facta sit rectangulum ΝΑΔ: sit etiam Conus datus Conus ille in quo triangulum per Axem est triangulum ΕΖΚ. Producatur recta ΚΕ ad δ; & secundum Axem sectionis ΑΛ erigatur planum ΘΑΛ, ad angulos rectos super planum sectionis; in hoc autem plano super rectam ΝΑ describatur segmentum circuli ΝΘΑ (*per* 33^{am} III. *Elem.*) quod capiat angulum æqualem angulo δΕΖ: ac completo circulo dividatur arcus ΑΘΝ bifariam in puncto Θ, & per Θ ipsi ΑΝ normalis ducatur ΘΞΡ.

Imprimis autem sit quadratum ex Axe Coni, sive ex ΕΗ, ad quadratum ex ΖΗ in ratione ΑΝ ad ΑΔ; & producatur recta ΝΘ ultra punctum Θ, ut ΜΝ, cui occurrat recta AM, ipsi ΘP parallela, in puncto M. Quoniam vero arcus NP æqualis est arcui PA, erit angulus NΘP æqualis angulo AΘP, adeoque angulus ΘMA æqualis angulo MAΘ. Fiat itaque Conus æquicruris cujus Apex est Θ, ac Basis circulus cujus diameter est AM, & cujus planum normaliter insistit plano ΘAΛ. Dico, his positis, planum in quo est sectio producere in hoc Cono Hyperbolam cujus Axis est AΛ, diameter transversa AN, *& latus rectum* AΔ; *Conumque hunc* ΘAM *Cono dato* EKZ *similem esse.*



Angulus enim AΘM angulo ZEK æqualis est, quia fecimus segmentum AΘN capax anguli angulo ZEδ æqualis; ac ΘA, ΘM sunt æquales inter se, ut sunt rectæ ZE, EK. Demissa igitur normali ΘΠ, erit quadratum ex EH ad rectangulum KHZ (*per Convers. Lemmat.* V.) sicut quadratum ex ΘΠ ad rectangulum MΠA. Sed (*ex hypothesi*) quadratum ex EH est ad rectangulum KHZ sicut NA ad AΔ; est igitur quadratum ex ΠΘ ad rectangulum MΠA sicut NA ad AΔ. Poterunt igitur ordinatim applicatæ ad AΛ Axem sectionis genitæ (per 12^{mam} primi) rectangula lateri recto AΔ adjacentia, excedentia vero figuris similibus factæ sub ipsis NA, AΔ. Normales autem ad AΛ ductæ in sectione ABΓ possunt etiam rectangula adjacentia eidem AΔ & excedentia figuris similibus factæ sub iisdem NA, AΔ: sectioni itaque BAΓ (per 2^{dam} hujus) æqualis est sectio genita in Cono ΘAM, cujus Apex est Θ, ac basis circulus diametro AM descriptus. Sunt autem in eodem plano, ac Axis coincidit cum Axe: continetur igitur à sectione BAΓ Conus ille cujus vertex est Θ, qui quidem similis est Cono EZK, quia ΘΠ est ad ΠM ut EH ad HZ.

Dico quoque non contineri ab hac sectione Conum alium Cono EZK similem, ita ut Apex ejus ad idem latus plani, in quo est sectio ABΓ, jaceat, ad quod jacet punctum Θ, præter Conum jam factum. Nam si possibile sit, contineat Conum alium, cujus vertex est I; ac, per ea quæ in Propositione præcedente demonstravimus, manifestum erit punctum I in plano ΘAΛ reperiri. Sint autem latera hujus Coni rectæ IO, IA; ac sit Conus ille similis Cono ZEK, adeoque anguli AIO, ZEK æquales, ut & anguli AIN, ZEδ: unde punctum I cadet in arcu AΘN; ac recta IO producta transibit per N. Jungatur PXI, & per A eidem parallela ducatur AO; & per punctum I ipsi AN parallela fit recta ξI. Si igitur sectio ABΓ fuerit in Cono cujus Apex est I; producto sectionis Axe AΛ ad N, erit quadratum ex ξI ad rectangulum Aξo sicut diameter transversa AN ad latus rectum AΔ. Sed AN est ad AΔ ut quadratum ex EH ad rectangulum ZHK; anguli autem duo NIP, PIA, hoc est, anguli IAO, AOI sunt æquales inter se, utpote angulis EZK, EKZ æquales; sicut angulus AIO angulo ZEK æqualis est: quare similia sunt triangula AIO, ZEK. Verum, per jam demonstrata, quadratum ex Iξ est ad rectangulum Aξo sicut quadratum ex EH ad rectangulum ZHK. Est autem ZH æqualis ipsi HK, adeoque & Aξ ipsi ξo. Sed Aξ est ad ξo sicut NI ad IO, hoc est sicut NX ad XA: quapropter rectæ NX, XA æquales erunt. Hoc autem absurdum est; quia sola ΘP circuli diameter occurrit ipsi AN ad angulos rectos in puncto Ξ. Non igitur invenire

*

venire

venire licet Conum alium Cono EZK similem, qui à sectione ABΓ contineatur, præter Conum ΘAM jam descriptum.

Jam si fuerit ratio quadrati ex EH ad quadratum ex HZ minor ratione NA ad AΔ: fiant eadem quæ in priori casu, & erit quadratum ex EH ad rectangulum HZK ut quadratum ex ΘΠ (*per Lemma quintum*) ad rectangulum MΠA, ob similia triangula. Rectangulum autem MΠA æquale est quadrato ex ΠA, hoc est quadrato ex ΘΞ, & quadratum ex ΘΠ æquale est quadrato ex AΞ; quare quadratum ex EH est ad rectangulum ZHK ut quadratum ex AΞ est ad quadratum ex ΘΞ. Sed quadratum ex AΞ æquale est rectangulo PΞΘ; quare quadratum ex EH est ad rectangulum ZHK, hoc est ad quadratum ex ZH, sicut rectangulum PΞΘ ad quadratum ex ΞΘ, sive ut PΞ ad ΞΘ. Posuimus autem rationem quadrati ex HE ad quadratum ex ZH minorem esse ratione NA ad AΔ; ratio igitur PΞ ad ΞΘ minor erit ratione NA ad AΔ. Fiat itaque PΞ ad Ξγ sicut NA ad AΔ, & per punctum γ ipsi NA parallela ducatur recta IγΣξ, ac jungantur IN, IA, IP & per A ipsi IP parallela sit AO.

Manifestum quidem est ex præmissis triangula æquicrura OIA, ZEK esse similia; ac si fiat Conus cujus Apex est I, ac Basis circulus cujus diameter AO, cujusque planum super planum ΘAA normaliter erectum sit, planum in quo est sectio ABΓ huic Cono occurrere, Hyperbolamque producere cujus Axis est recta AA ac diameter transversa AN. Fecimus autem PΞ ad Ξγ, sive PX ad XI, sicut AN ad AΔ. Sed PX est ad XI ut rectangulum PXI ad quadratum ex XI, ac rectangulum PXI æquale est rectangulo NXA; quare rectangulum NXA est ad quadratum ex IX sicut NA ad AΔ. Sed & rectangulum NXA est ad quadratum ex IX sicut quadratum ex Iξ ad rectangulum OξA, (nam ob parallelogrammum AξIX, XA *est ad* IX *sicut* Iξ *ad* ξA; *ac* XN *est ad* XI *sicut* Iξ *ad* ξO, *& componendo*) quapropter NA est ad AΔ sicut quadratum ex Iξ ad rectangulum AξO: recta igitur AΔ est latus rectum sectionis in Cono AIO genitæ. Unde & per ea quæ in hac Propositione demonstrata sunt, manifestum erit Conum cujus Apex est punctum I contineri ab hac sectione ABΓ. Continebitur etiam ab eadem sectione Conus alter cujus Apex est punctum Σ, junctis rectis NΣ, ΣA, ac productâ ipsâ NΣ; ac Conus uterque similis erit Cono dato EZK.

Dico quoque non contineri ab eadem Conum aliquem tertium Cono EZK similem, cujus Apex fuerit ad easdem partes plani sectionis BAΓ ad quas situm est punctum I. Apex enim ejus erit, per præmissa, in arcu AIN. Sit autem ille in puncto T, ac jungatur recta TτP; & è conversâ præcedentis demonstrationis consequetur AN esse ad AΔ sicut Pτ ad Tτ: quod quidem absurdum est, cum scilicet PΞ sit ad Ξγ in illâ ratione. Sectio igitur BAΓ non continet tertium Conum similem Cono EZK.

Quod si ratio quadrati ex EH ad quadratum ex ZH major fuerit ratione AN ad AΔ, impossibile erit ut Conus Cono EZK similis contineatur à sectione ABΓ. Nam, si fieri possit, contineatur ab ea Conica superficies cujus Apex est I; & modo in præcedentibus usurpato, constabit PX esse ad XI sicut AN ad AΔ. Sed ratio AN ad AΔ minor est ratione quadrati ex EH ad quadratum ex ZH, quam demonstravimus esse sicut PΞ ad ΞΘ; erit igitur ratio PX ad XI minor ratione PΞ ad ΞΘ. Hoc autem absurdum est: ac proinde nullus Conus Cono dato EZK similis contineri potest à sectione BAΓ. Q. E. D.

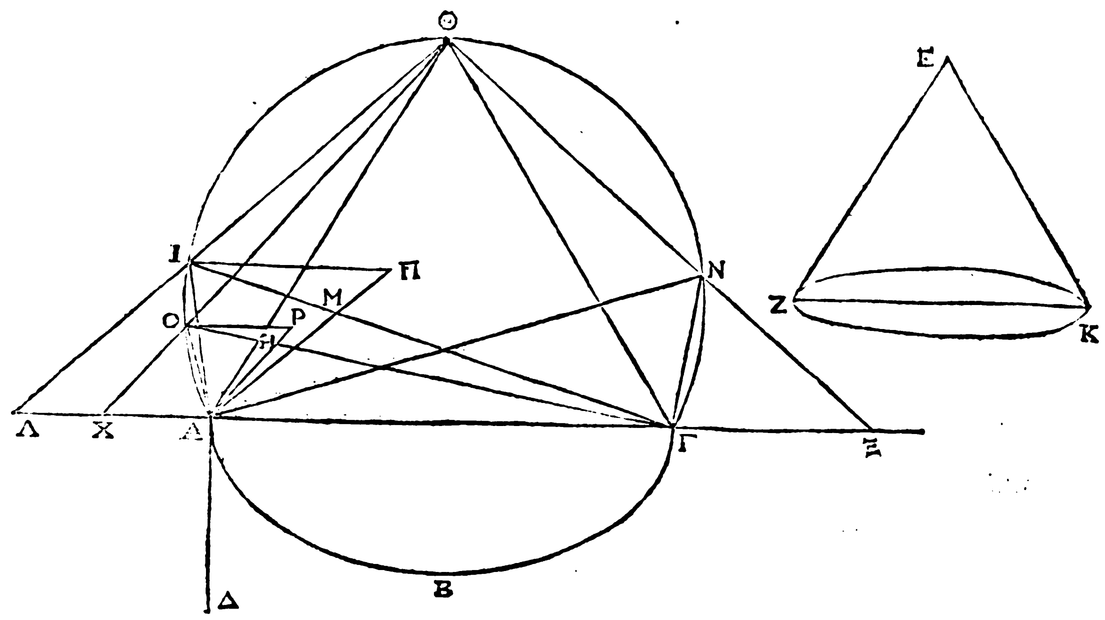
PROPOSITIO XXXIII. PROBL.

INvenire Conum rectum Cono recto dato similem qui contineatur ab Ellipsi data.

Sit ABΓ data Ellipsis, cujus Axis major AΓ & latus rectum AΔ. Conus autem rectus datus sit EZK; & secundum rectam AΓ normaliter, super planum in quo est sectio ABΓ, erigatur planum, & in eo super basin AΓ describatur arcus circuli qui capiat angulum æqualem angulo ZEK, ut arcus AΘΓ: & bisecetur hic arcus in puncto Θ, & è puncto Θ educatur recta ΘIA, ita producenda ut ΘA sit ad AI sicut AΓ ad AΔ. Pari modo ducatur recta ΘΞ in eadem ratione dividenda in puncto N. Jungantur AI, IΓ, ac ipsi AΓ parallela ducatur IΠ; ipsique ΘA parallela sit AΠ, *occur-*

rens ipsi ΙΓ *in* Μ: ac fiat Conus cujus Apex sit Ι, & Basis circulus cujus diameter est ΑΜ. Dico hunc Conum similem esse Cono ΕΖΚ, ac à sectione ΑΒΓ contineri.

Quoniam enim angulus ΘΙΓ æqualis est angulo ΘΑΓ, utpote in eodem arcu; idemque æqualis est angulo ΙΜΑ, ob parallelas ΘΑ, ΑΜ; erit igitur angulus ΘΑΓ æqualis angulo ΙΜΑ: angulus autem ΜΙΑ æqualis est angulo ΑΘΓ: reliquus igitur ΙΑΜ reliquo ΘΓΑ æqualis est, ac triangula ΑΙΜ, ΑΘΓ similia. Triangulum autem ΑΘΓ simile est triangulo æquicruri ΕΖΚ; adeoque triangulum ΑΜΙ etiam æquicrure est ac simile triangulo ΕΖΚ: Conus igitur cujus Apex est Ι, ac Basis circulus cujus diameter est ΑΜ, similis est Cono ΕΖΚ; & planum in quo est sectio ΑΒΓ producet in hoc Cono Ellipsin cujus Axis major est ΑΓ; & factum est ut ΑΓ ad ΑΔ ita ΘΑ ad ΑΙ, sive rectangulum ΘΑΙ ad quadratum ex ΑΙ. Sed rectangulum ΘΑΙ æquale est rectangulo ΓΑΛ; quare ΓΑ est ad ΑΔ sicut rectangulum ΓΑΛ ad quadratum ex ΑΙ. Est autem quadratum ex ΓΑΛ ad quadratum ex ΑΙ ut quadratum ex ΠΙ ad rectangulum ΑΠΜ, ob parallelogrammum ΠΑΛΙ: quare ΓΑ est ad ΑΔ ut quadratum ex ΙΠ ad rectangulum ΑΠΜ. Sed ΑΓ est diameter transversa, ergo ΑΔ (per 13am primi) est latus rectum sectionis in Cono ΑΙΜ genitæ. Est etiam latus rectum sectionis datæ ΑΒΓ; adeoque sectio illa (per secundam hujus) æqualis est sectioni ΑΒΓ. Sectio igitur ΑΒΓ continet Conum jam descriptum.



Pari modo demonstrabitur eandem continere Conum alium cujus Apex est Ν, ac latera rectæ ΑΝ, ΝΓ. Neque continetur ab hac sectione Conus aliquis tertius Cono ΕΖΚ similis, cujus Apex fuerit ad easdem partes plani sectionis. Nam, si fieri possit ut contineat Conum alium, demonstrabitur, eo quo in præcedentibus modo, quod, si erigatur ad angulos rectos super planum sectionis, secundum Axem ejus, planum aliquod, communis intersectio horum planorum esset sectionis Axis major; ac quemadmodum demonstravimus de Hyperbolâ in Prop. præced. reperiretur Apex Coni in arcu ΑΘΓ. Sit autem ille in puncto Ο, ac sint latera Coni ΟΑ, ΟΗ. Juncta ΘΟ producatur ad Χ, ipsique ΘΧ parallela ducatur ΑΡ, ipsi vero ΑΓ recta ΟΡ: erit igitur triangulum ΟΑΗ æquicrure, ac quadratum ex ΟΡ erit ad rectangulum ΑΡΗ sicut ΑΓ ad ΑΔ. Sed quadratum ex ΟΡ est ad rectangulum ΑΡΗ sicut rectangulum ΓΧΑ ad quadratum ex ΟΧ, propter parallelogrammum ΟΡΑΧ; rectangulum autem ΓΧΑ æquale est rectangulo ΘΧΟ, *ob circulum*: adeoque ΓΑ est ad ΑΔ sicut rectangulum ΘΧΟ ad quadratum ex ΟΧ, hoc est ut ΘΧ ad ΧΟ. Demonstravimus autem ΓΑ esse ad ΑΔ sicut ΘΑ ad ΑΙ; quare ΘΧ erit ad ΧΟ sicut ΘΑ ad ΑΙ; quod quidem impossibile est. Fieri igitur nequit ut tres Coni Cono ΕΖΚ similes contineantur ab hac sectione ΑΒΓ. Q. E. D.

ΠΑΠΠΟΥ

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΛΗΜΜΑΤΑ
ΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟ Ζ'. ΚΑΙ Η'.
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA
IN VII. ET VIII. LIBRUM CONICORUM
APOLLONII PERGÆI.

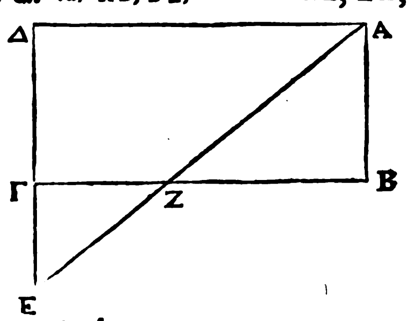
ΛΗΜΜΑ α'.

Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖΑ. ὅτι τὸ ὑπὸ ΕΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΖΒΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΓΔΕ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΖ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΑ, ΑΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΔΑ, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΒΓ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΒΖ τετραγώνοις· [ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ ΕΖ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ ΕΑΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΕΑ, ΑΖ, τὰ δ' ἀπὸ ΓΕ, ΓΖ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ ΕΔΓ καὶ τοῦ δὶς ὑπὸ ΖΒΓ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ ΕΔ, ΒΓ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΒΖ τετραγώνοις·] λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΕΔ, ΔΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΖΒ, ΒΓ· καὶ τὸ ἅπαξ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν ΕΔΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΖΒΓ.

LEMMA I.

Sit ΑΓ parallelogrammum rectangulum, ac ducatur recta ΕΖΑ. dico rectangulum ΕΑΖ æquale esse utrique rectangulo ΖΒΓ & ΓΔΕ simul.



Quoniam enim quadratum ex ΕΖ æquale est quadratis ex ΕΓ, ΓΖ simul, ac quadrata ex ΕΑ, ΑΖ simul æqualia sunt quadratis ex ΕΔ, ΔΑ, hoc est, quadratis ex ΕΔ, ΒΓ, una cum quadratis ex ΑΒ, ΒΖ simul, hoc est quadratis ex ΓΔ, ΒΖ. [Sed quadratum ex ΕΖ (per 7.2^{di} El.) una cum duplo rectangulo sub ΕΑΖ æquale est utrique quadrato ex ΕΑ, ΑΖ; quadrata vero ex ΓΕ, ΓΖ una cum duplo rectanguli sub ΕΔΓ & duplo rectanguli ΖΒΓ æqualia sunt quadratis ex ΕΔ, ΒΓ & ex ΓΔ, ΒΖ.] reliquum igitur nempe duplum rectanguli ΕΑΖ æquale erit duplo rectanguli ΕΔΓ una cum duplo rectanguli ΖΒΓ: quare rectangulum ΕΑΖ æquale est rectangulis ΕΔΓ, ΖΒΓ simul sumptis.

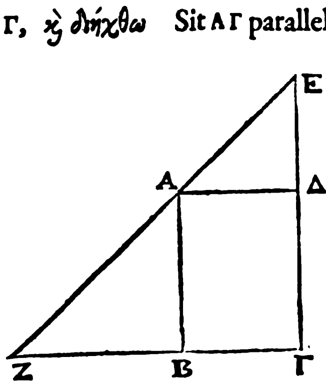
ΛΗΜΜΑ β'.

Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΑΖ. ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΑΖ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΖ, ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΑ, ΑΖ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΔΓ, ΓΒ, ΒΖ· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΑΖ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΔΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΖΒΓ· καὶ τὸ ἅπαξ ἄρα τῷ ἅπαξ.

LEMMA II.

Sit ΑΓ parallelogrammum rectangulum ac ducatur ΕΑΖ. dico rectangulum ΕΔΓ una cum rectangulo ΓΒΖ æquale esse rectangulo ΕΑΖ.



Quoniam enim quadratum ex ΕΖ æquale est quadratis ex ΕΓ, ΓΖ simul, quadrata vero ex ΕΑ, ΑΖ simul æqualia sunt quadratis ex ΕΔ, ΔΓ, ΓΒ, ΒΖ simul: duplum igitur rectanguli ΕΑΖ æquale erit duplo rectanguli ΕΔΓ una cum duplo rectanguli ΖΒΓ; ac proinde rectangulum ΕΑΖ semel æquale est utrique rectangulo ΕΔΓ, ΖΒΓ.

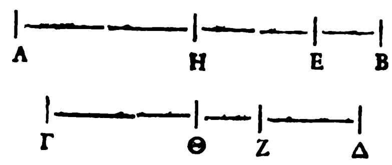
ΛΗΜΜΑ γ'.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ, καὶ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΕΒ τῷ ὑπὸ ΓΖΔ, καὶ ἔστω μείζονα τμήματα αἱ ΑΕ, ΓΖ. ὅτι μείζων ἐστὶ ἡ ΑΕ τῆς ΓΖ.

LEMMA III.

Sit ΑΒ major quam ΓΔ, & rectangulum ΑΕΒ æquale rectangulo ΓΖΔ, ac sint ΑΕ, ΓΖ utriusque portiones majores. dico majorem esse ΑΕ quam ΓΖ.

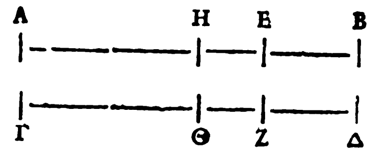
BISECENTUR totæ A B, Γ Δ in punctis H, Θ: major itaque est H B quam Δ Θ, ac quadratum ex H B majus quadrato ex Δ Θ. verum rectangulum A E B æquale est rectangulo Γ Z Δ; majus igitur est quadratum ex H E quadrato ex Θ Z, ac proinde H E major quam Θ Z. est autem A H major quam Γ Θ; tota igitur A E totâ Γ Z major est.



ΤΕΤΜΗΣΘΩΣΑΝ ὅλαι αἱ A B, Γ Δ δίχα τοῖς H, Θ σημείοις· μείζων ἄρα ἐστὶ ἡ H B τῆς Δ Θ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς H B μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς Δ Θ τετραγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ A E B ἴσον τῷ ὑπὸ Γ Z Δ· καὶ τὸ ἀπὸ H E ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ Θ Z· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ H E τῆς Θ Z. ἔστι δὲ καὶ ἡ A H μείζων τῆς Γ Θ· ὅλη ἄρα ἡ A E ὅλης τῆς Γ Z μείζων ἐστί.

LEMMA IV.

Sit rectangulum A E B æquale rectangulo Γ Z Δ, æqualibus existentibus rectis A B, Γ Δ. dico majora segmenta A E, Γ Z esse æqualia.



HOC autem eodem modo manifestum erit, bisectis rectis A B, Γ Δ in punctis H, Θ, &c.

ΛΗΜΜΑ δʹ.

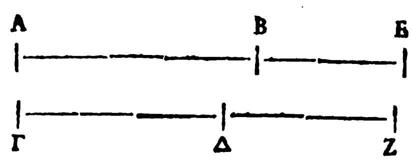
Ἴσον τὸ ὑπὸ A E B τῷ ὑπὸ Γ Z Δ, ἴσων οὐσῶν τῶν A B, Γ Δ. ὅτι τὰ μείζονα τμήματα τὰ A E, Γ Z ἴσα ἐστί.

ΤΕΤΜΗΣΘΩΣΑΝ γὰρ αἱ A B, Γ Δ δίχα τοῖς H, Θ, καὶ τὰ ἑξῆς.

LEMMA V.

Sit A B major quam Γ Δ; B E vero minor quam Δ Z; existente A B majore quam B E, ac Γ Δ quam Δ Z. dico excessum quo A B superat B E majorem esse excessu quo Γ Δ superat Δ Z.

QUONIAM enim A B major est quam Γ Δ, major erit excessus ipsius A B supra B E excessu quo Γ Δ superat eandem B E. major autem est excessus ipsius Γ Δ supra E B quam supra Δ Z, quia E B minor est quam Δ Z: quocirca excessus ipsius A B supra B E multo major erit excessu quo Γ Δ superat Δ Z.



ΛΗΜΜΑ εʹ.

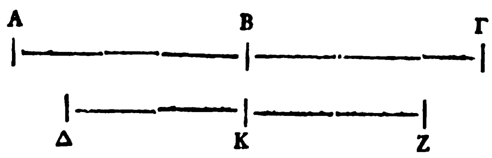
Ἔστω μὲν μείζων ἡ A B τῆς Γ Δ, ἐλάσσων δὲ ἡ B E τῆς Δ Z, οὔσης μείζονος τῆς μὲν A B τῆς B E, τῆς δὲ Γ Δ τῆς Δ Z· ὅτι ἡ τῶν A B, B E ὑπεροχὴ μείζων ἐστὶ τῆς τῶν Γ Δ, Δ Z ὑπεροχῆς.

ΕΠΕΙ γὰρ μείζων ἐστὶ ἡ A B τῆς Γ Δ· μείζων ἄρα ἔσται ἡ τῶν A B, B E ὑπεροχὴ τῆς τῶν Γ Δ B E ὑπεροχῆς. ἀλλὰ ἡ τῶν Γ Δ, E B μείζων τῆς τῶν Γ Δ, Δ Z ὑπεροχῆς, ἐλάσσων γάρ ἐστιν ἡ E B τῆς Δ Z· ὥστε ἡ τῶν A B, B E ὑπεροχὴ πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς τῶν Γ Δ, Δ Z ὑπεροχῆς.

LEMMA VI.

Sit A B ipsi B Γ æqualis, uti Δ K ipsi K Z: dico rectangulum sub A Γ, Δ Z quadruplum esse rectanguli sub A B, Δ K.

QUONIAM enim Γ A dupla est ipsius A B, sumptâ in communem altitudinem Δ K, erit rectangulum sub Γ A, Δ K duplum rectanguli sub A B, Δ K. rursus quoniam Δ Z dupla est ipsius Z K, sub communi altitudine A Γ, fiet rectangulum sub A Γ, Δ Z duplum rectanguli sub A Γ, Δ K: sed & rectangulum sub A Γ, Δ K duplum est rectanguli sub A B, Δ K: proinde rectangulum sub A Γ, Δ Z quadruplum est facti sub A B, Δ K.



ΛΗΜΜΑ ϛʹ.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν A B τῇ B Γ, ἡ δὲ Δ K τῇ K Z· ὅτι τὸ ὑπὸ A Γ, Δ Z τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ A B, Δ K.

ΕΠΕΙ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ Γ A τῆς A B, κοινὸν ὕψος ἡ Δ K· τὸ ἄρα ὑπὸ Γ A, Δ K διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ A B, Δ K. πάλιν ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ Δ Z τῆς Z K, κοινὸν ὕψος ἡ A Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ A Γ, Δ Z διπλάσιόν ἐστιν τοῦ ὑπὸ A Γ, Δ K. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ A Γ, Δ K τοῦ ὑπὸ A B, Δ K· τὸ ἄρα ὑπὸ A Γ, Δ Z τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ A B, Δ K.

LEMMA VII.

Sit ut A B ad B Γ ita Δ K ad K Z, & ut A B ad B H ita Δ K ad K Θ. dico rectangulum sub A B H esse ad rectangulum sub A H Γ sicut rectangulum Δ K Θ ad rectangulum Z Θ Δ.

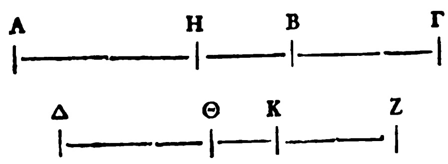
NAM cum A B est ad B H sicut Δ K ad K Θ, per conversionem rationis B A erit ad A H sicut K Δ ad Δ Θ; adeoque quadratum ex B A ad quadratum ex A H sicut quadratum ex Δ K ad quadratum ex Δ Θ. sed ut quadratum ex A B ad rectangulum A B H ita quadratum ex Δ K ad rectangulum Δ K Θ: erit igitur ut quadratum ex A H ad rectangulum A B H

ΛΗΜΜΑ ζʹ.

Ἔστω ὡς μὲν ἡ A B πρὸς τὴν B Γ οὕτως ἡ Δ K πρὸς τὴν K Z, ὡς δὲ ἡ A B πρὸς τὴν B H οὕτως ἡ Δ K πρὸς τὴν K Θ. ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν A B H πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A H Γ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν Δ K Θ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Z Θ Δ.

ΕΠΕΙ γάρ ἐστι ὡς ἡ A B πρὸς τὴν B H οὕτως ἡ Δ K πρὸς τὴν K Θ, ἀναστρέψαντί ἐστιν ὡς ἡ B A πρὸς τὴν A H οὕτως ἡ K Δ πρὸς τὴν Δ Θ· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ B A πρὸς τὸ ἀπὸ A H οὕτω τὸ ἀπὸ Δ K πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Θ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ A B πρὸς τὸ ὑπὸ A B H οὕτω τὸ ἀπὸ Δ K πρὸς τὸ ὑπὸ Δ K Θ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ A H πρὸς τὸ ὑπὸ A B H οὕτω

οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚΘ. ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΚ πρὸς ΚΖ, ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΚ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΗ οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΔΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς ΔΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΑΗ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΘΔ, καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ οὕτω τὸ ὑπὸ ΖΘΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΗ οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚΘ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΓ οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΚΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΘΔ.

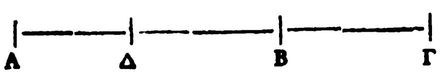


ita quadratum ex ΔΘ ad rectangulum ΔΚΘ. quoniam vero ponitur ΑΒ esse ad ΒΓ sicut ΔΚ ad ΚΖ, componendo inverse erit ΓΑ ad ΑΒ sicut ΔΖ ad ΔΚ. est autem ΒΑ ad ΑΗ sicut ΚΔ ad ΔΘ: ex æquo igitur ΓΑ est ad ΑΗ sicut ΖΔ ad ΔΘ, ac proinde dividendo ΓΗ erit ad ΗΑ sicut ΖΘ ad ΘΔ: rectangulum igitur ΑΗΓ erit ad quadratum ex ΑΗ sicut rectangulum ΖΘΔ ad quadratum ex ΔΘ. sed [per jam ostensa] quadratum ex ΑΗ est ad rectangulum ΑΒΗ ut quadratum ex ΔΘ ad rectangulum ΔΚΘ; ex æquo igitur rectangulum ΑΒΗ erit ad rectangulum ΑΗΓ sicut rectangulum ΔΚΘ ad rectangulum ΖΘΔ.

ΛΗΜΜΑ η'.

Ἔστω δοθέντα συναμφότερα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ δοθεῖσα ἡ τῶν αὐτῶν ὑπεροχή. ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Κείσθω γὰρ τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΒΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑΔ· ὑπεροχὴ γάρ ἐστι τῶν ἀπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ ΓΑΔ δοθέν ἐστι, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑΔ δοθέν ἐστι· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρας τῆς ΓΑ, ΑΔ, ὥστε δοθεῖσά ἐστι συναμφοτέρα ἡ ΓΑ, ΑΔ. καὶ ἔστιν αὐτῆς ἡμίσεια ἡ ΒΑ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ δοθεῖσά ἐστιν.



LEMMA VIII.

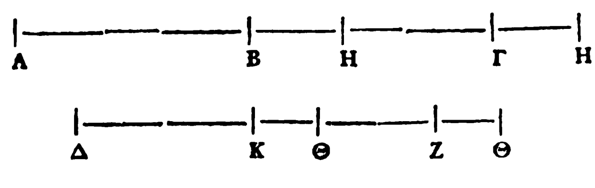
Datâ summâ quadratorum ex ΑΒ & ΒΓ, una cum differentia eorundem. dico utramque ex ipsis ΑΒ, ΒΓ datam esse.

Ponatur enim ΒΔ ipsi ΓΒ æqualis, ac datum erit rectangulum ΓΑΔ, quod nempe [per 6. 2.] differentia est quadratorum ex ΑΒ, ΒΓ; dato autem rectangulo ΓΑΔ ejusdem duplum quoque datur, ac proinde (per 10. 2.) datum est quadratum ex ΓΑ, ΑΔ simul sumptâ. adeoque & summa ipsarum ΓΑ, ΑΔ data est. hujus vero dimidia est recta ΒΑ; quare ΒΑ data est, ac proinde ΒΓ quoque datur.

ΛΗΜΜΑ θ'.

Ἔστω ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ ἴση, ἡ δὲ ΔΚ τῇ ΚΖ, ἔτι δὲ ἔστω ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΘ. ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΘΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΖΘ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΔ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΘ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘΚ. ἀλλὰ καὶ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ οὕτω τὸ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΖΘ· ἔσται ἄρα δι' ἴσου ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΘΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΖΘ.



LEMMA IX.

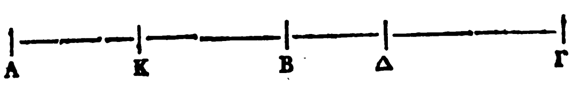
Sit ΑΒ ipsi ΒΓ æqualis, ut & ΔΚ ipsi ΚΖ; sit etiam ut ΓΒ ad ΒΗ ita ΖΚ ad ΚΘ. dico rectangulum ΑΗΒ esse ad rectangulum ΒΓΗ sicut rectangulum ΔΘΚ ad rectangulum ΚΖΘ.

Quoniam enim ΓΒ est ad ΒΑ sicut ΖΚ ad ΚΔ, atque etiam ΓΒ est ad ΒΗ sicut ΖΚ ad ΚΘ; erit igitur ut quadratum ex ΑΗ ad rectangulum ΑΗΒ ita quadratum ex ΔΘ ad rectangulum ΔΘΚ. sed ut quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΒΓ ita quadratum ex ΔΘ ad quadratum ex ΚΖ; & ut quadratum ex ΒΓ ad rectangulum ΒΓΗ ita quadratum ex ΚΖ ad rectangulum ΚΖΘ: ex æquo igitur erit ut rectangulum ΑΗΒ ad rectangulum ΒΓΗ ita rectangulum ΔΘΚ ad rectangulum ΚΖΘ.

ΛΗΜΜΑ ι'.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΒΚ. ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΚ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση μέν ἐστι ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΒΚ· ἡ ΓΔ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΑΚ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΔ· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΒ τοῦ ὑπὸ ΓΚΒ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ τοῦ ὑπὸ ΒΑΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΓΚΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΚ.



LEMMA X.

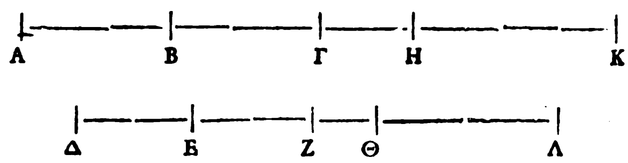
Sit ΑΒ ipsi ΒΓ æqualis, minor vero sit ΒΔ quam ΒΚ. dico rectangulum ΑΔΒ ad rectangulum ΒΓΔ minorem habere rationem quam habet rectangulum ΓΚΒ ad rectangulum ΒΑΚ.

Nam cum ΑΒ æqualis est ipsi ΒΓ, ac ΒΔ minor quam ΒΚ, ΓΔ major erit quam ΑΚ, quemadmodum ΓΚ major est quam ΑΔ: minus igitur est rectangulum ΑΔΒ rectangulo ΓΚΒ, majus vero rectangulum ΒΓΔ rectangulo ΒΑΚ. quocirca rectangulum ΑΔΒ ad rectangulum ΒΓΔ minorem habet rationem quam rectangulum ΓΚΒ ad rectangulum ΒΑΚ.

LEMMA XI.

Restat jam præcedentium conversam demonstrare. nempe existentibus æqualibus Α Β, Β Γ; Δ Ε, Ε Ζ; ac rectangulo Α Η Β eandem rationem habente ad Β Γ Η quam habet rectangulum Δ Θ Ε ad rectangulum Ε Ζ Θ: fieri ut Γ Β ad Β Η ita Ζ Ε ad Ε Θ.

PONATUR rectangulum sub Γ Η, Α Κ æquale rectangulo sub Α Η Β, & rectangulum sub Ζ Θ, Δ Λ æquale rectangulo Δ Θ Ε: est igitur ut rectangulum sub Α Κ, Γ Η ad rectangulum Β Γ Η, hoc est Α Κ ad Β Γ, ita rectangulum sub Δ Λ, Ζ Θ ad rectangulum Ε Ζ Θ, hoc est Δ Λ ad Ε Ζ, sed ut Γ Β ad Β Α ita Ζ Ε ad Ε Δ, quare rectæ Α Β, Β Γ, Γ Κ ipsis Δ Ε, Ε Ζ, Ζ Λ eandem inter se servant rationem & ordinem, nempe Β Γ est ad Γ Κ sicut Ε Ζ ad Ζ Λ, ac proinde Β Γ est ad Β Κ sicut Ζ Ε ad Ε Λ.



quoniam vero rectangulum Α Η Β æquale est rectangulo sub Α Κ, Γ Η, auferatur utrumque è rectangulo sub Α Κ, Η Β, ac residuum rectangulum sub Η Κ, Η Β æquale erit rectangulo sub Α Κ, Β Γ: erit igitur ut rectangulum sub Α Κ, Β Γ ad quadratum ex Β Κ ita rectangulum Β Η Κ ad idem quadratum ex Β Κ. simili argumento rectangulum sub Δ Λ, Ε Ζ erit ad quadratum ex Ε Λ sicut rectangulum Ε Θ Λ ad quadratum ex Ε Λ. est autem rectangulum sub Α Κ, Β Γ ad quadratum ex Β Κ, sicut rectangulum sub Δ Λ, Ε Ζ ad quadratum ex Ε Λ, ob proportionalitatem partium pari ordine dispositarum: ut igitur rectangulum Β Η Κ ad quadratum ex Β Κ ita rectangulum Ε Θ Λ ad quadratum ex Ε Λ. eædem autem sunt portiones Β Η, Ε Θ: erit igitur ut Κ Β ad Β Η ita Λ Ε ad Ε Θ. sed prius ostensum est Β Γ esse ad Β Κ sicut Ζ Ε ad Ε Λ; ex æquo igitur Β Γ est ad Β Η sicut Ζ Ε ad Ε Θ.

ΛΗΜΜΑ ια'.

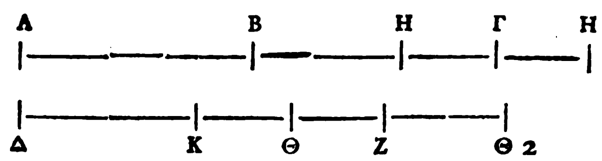
Εστω δὲ νῦν τὸ τοῖς προηγουμένοις ἀντίστροφον δεῖξαι. οὔσης ἴσης τῆς μὲν Α Β τῇ Β Γ, τῆς δὲ Δ Ε τῇ Ε Ζ, καὶ ἔτι ὡς τὸ ὑπὸ Α Η Β πρὸς τὸ ὑπὸ Β Γ Η οὕτως τὸ ὑπὸ Δ Θ Ε πρὸς τὸ ὑπὸ Ε Ζ Θ· δεῖξαι ὅτι γίνεται ὡς ἡ Γ Β πρὸς Β Η οὕτως ἡ Ζ Ε πρὸς Ε Θ.

ΚΕΙΣΘΩ τῷ μὲν ὑπὸ Α Η Β ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Γ Η, Α Κ, τῷ δὲ ὑπὸ Δ Θ Ε ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ Ζ Θ, Δ Λ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ Α Κ, Γ Η πρὸς τὸ ὑπὸ Β Γ Η, τουτέστιν ἡ Α Κ πρὸς Β Γ, οὕτω τὸ ὑπὸ Δ Λ, Ζ Θ πρὸς τὸ ὑπὸ Ε Ζ Θ, τουτέστιν ἡ Δ Λ πρὸς Ε Ζ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ Γ Β πρὸς Β Α οὕτως ἐστὶν ἡ Ζ Ε πρὸς Ε Δ· αἱ ἄρα Α Β, Β Γ, Γ Κ ταῖς Δ Ε, Ε Ζ, Ζ Λ ὁμοταγεῖς εἰσιν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τουτέστιν ὡς ἡ Β Γ πρὸς Γ Κ οὕτως ἡ Ε Ζ πρὸς Ζ Λ· [καὶ ὡς ἄρα ἡ Β Γ πρὸς τὴν Β Κ οὕτως ἡ Ζ Ε πρὸς τὴν Ε Λ.] ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α Η Β ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Α Κ, Γ Η, ἀμφότερον ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ὑπὸ τῶν Α Κ, Η Β· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Η Κ, Η Β ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α Κ, Β Γ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α Κ, Β Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β Κ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν Β Η Κ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β Κ. διὰ ταῦτα δὴ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Δ Λ, Ε Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε Λ, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ Ε Θ Λ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε Λ. καί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α Κ, Β Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β Κ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν Δ Λ, Ε Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε Λ, διὰ τὴν ἀναλογίαν τῶν ὁμοιοταγῶν τμημάτων· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Β Η Κ πρὸς τὸ ἀπὸ Β Κ οὕτω τὸ ὑπὸ Ε Θ Λ πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Λ. καὶ ἔστι τὰ αὐτὰ τμήματα τὰ Β Η, Ε Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Κ Β πρὸς Β Η οὕτως ἡ Λ Ε πρὸς Ε Θ. [ἀλλ' ἐδείχθη ὡς ἡ Β Γ πρὸς τὴν Β Κ οὕτως ἡ Ζ Ε πρὸς τὴν Ε Λ· δι' ἴσου] ἄρα ὡς ἡ Β Γ πρὸς Β Η οὕτως ἐστὶν ἡ Ζ Ε πρὸς Ε Θ.

LEMMA XII.

Sit Α Β ipsi Β Γ uti & Δ Κ ipsi Κ Ζ æqualis; habeat autem Β Γ ad Γ Η majorem rationem quam Κ Ζ ad Ζ Θ. dico quod in primo casu Α Η majorem habet rationem ad Β Γ quam Δ Θ ad Κ Ζ: in secundo vero minorem.

QUONIAM enim Β Γ majorem habet rationem ad Γ Η quam Κ Ζ ad Ζ Θ; in primo casu Γ Β ad Β Η minorem habet rationem quam Ζ Κ ad Κ Θ; in secundo vero, majorem. adeoque Α Β ad Β Η minorem habet rationem quam Δ Κ ad Κ Θ: in secundo vero casu majorem. quare Η Α in primo casu majorem habet rationem ad Α Β quam Θ Δ ad Δ Κ, in secundo vero minorem. sed ut Α Β ad Β Γ ita Δ Κ ad Κ Ζ; ex æquo igitur, in primo casu, Α Η majorem habet rationem ad Β Γ quam Δ Θ ad Κ Ζ: in secundo vero casu minorem.



ΛΗΜΜΑ ιβ'.

Εστω ἴση ἡ μὲν Α Β τῇ Β Γ, ἡ δὲ Δ Κ τῇ Κ Ζ, ἔτι δὲ ἡ Β Γ πρὸς Γ Η μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ Κ Ζ πρὸς τὴν Ζ Θ. ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως, ἡ Α Η πρὸς τὴν Β Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Δ Θ πρὸς τὴν Κ Ζ· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, ἐλάσσονα.

ΕΠΕΙ γὰρ Β Γ πρὸς Γ Η μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ [ἡ Κ Ζ πρὸς Ζ Θ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἡ Γ Β πρὸς Β Η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ] ἡ Ζ Κ πρὸς Κ Θ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζονα· ὥστε καὶ ἡ Α Β πρὸς τὴν Β Η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Δ Κ πρὸς Κ Θ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζονα· καὶ ἡ Η Α ἄρα πρὸς τὴν Α Β, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Θ Δ πρὸς Δ Κ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσονα. καὶ ἔστιν ὡς ἡ Α Β πρὸς Β Γ οὕτως ἡ Δ Κ πρὸς Κ Ζ· δι' ἴσου ἄρα, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως, ἡ Α Η πρὸς τὴν Β Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ Δ Θ πρὸς τὴν Κ Ζ· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσονα.

LEMMA XIII.

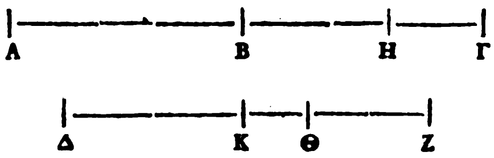
Sint rursus Α Β, Β Γ æquales, ut & Δ Κ, Κ Ζ; habeat autem Α Η ad Η Β minorem rationem quam Δ Θ ad Θ Κ. dico Β Γ majorem habere rationem ad Γ Η quam Κ Ζ ad Ζ Θ.

ΛΗΜΜΑ ιγ'.

Εστω πάλιν ἴση ἡ μὲν Α Β τῇ Β Γ, ἡ δὲ Δ Κ τῇ Κ Ζ, ἔτι δὲ ἡ Α Η πρὸς τὴν Η Β ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ Δ Θ πρὸς τὴν Θ Κ. ὅτι ἡ Β Γ πρὸς τὴν Γ Η μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Κ Ζ πρὸς τὴν Ζ Θ.

ΕΠΕΙ

Ἐπεὶ γὰρ κατ' ἀναστροφὴν καὶ διαίρεσιν ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΑ, τουτέστι τὴν ΒΓ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΔ, τουτέστι πρὸς τὴν ΚΖ· ἀναστρέψαντι καὶ διελόντι, ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ.



QUONIAM enim per conversionem rationis & dividendo HB ad BA sive BΓ majorem habet rationem quam ΘK ad KΔ, hoc est ad KZ: per conversionem rationis & dividendo, BΓ majorem habet rationem ad ΓH quam KZ ad ZΘ.

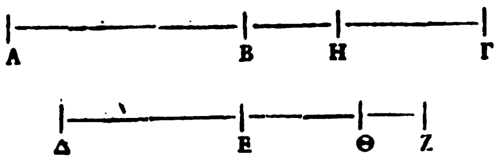
ΛΗΜΜΑ ιδ'.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ, καὶ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ· ὅτι ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΖ.

LEMMA XIV.

Sint AB, BΓ æquales, uti & ΔE, EZ; habeat autem AH ad HB majorem rationem quam ΔΘ ad ΘE. dico BH majorem habere rationem ad HΓ quàm EΘ ad ΘZ.

Ἐπεὶ γὰρ κατὰ διαίρεσιν ἡ ΑΒ, τουτέστιν ἡ ΒΓ, πρὸς τὴν ΒΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΕ, τουτέστιν ἡ ΕΖ, πρὸς τὴν ΕΘ· ἀναστρέψαντι καὶ κατὰ διαίρεσιν ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΖ.

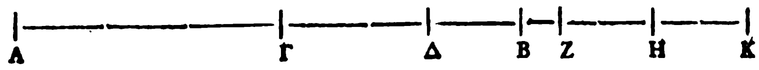


DIVIDENDO enim AB sive BΓ majorem habet rationem ad BH quam ΔE sive EZ ad EΘ: per conversionem rationis igitur ac dividendo BH ad HΓ minorem habet rationem quam EΘ ad ΘZ.

His subjungere liceat Lemmata nonnulla manifestò assumpta in demonstrationibus hujus Libri septimi, quæ propterea eidem præfixit Abdolmelec Schirazita *Author Epitomes Conicorum* Apollonii Arabicè *scripta.*

LEMMA I.

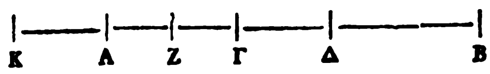
Si dividatur AB utcunque in punctis Γ, Δ; erit quadratum ex AB, BΓ simul æquale quadruplo rectanguli sub AB, ΓΔ simul sumptis & BΔ, una cum quadrato ex AΔ, ΔΓ simul.



FIAT BK ipsi BΓ æqualis, ac ΔZ ipsi ΔΓ, & erit ZK duplum ipsius BΔ. Bisecetur KZ in H, ac erit [per 8. II. El.] quadratum ex AK sive ex AB, BΓ simul, æquale quadruplo rectanguli AHZ, hoc est quadruplo rectanguli sub AB, ΔΓ simul & BΔ, una cum quadrato ex AZ, hoc est quadrato ex AΔ, ΔΓ simul.

LEMMA II.

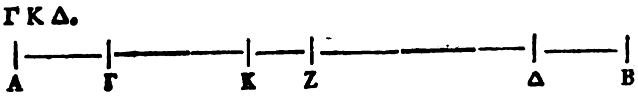
Si dividatur recta AB utcunque in punctis Γ, Δ; erunt quadrata ex AB, BΓ simul sumpta æqualia quadratis ex AΔ, ΔΓ simul, una cum duplo rectangulo sub AB, ΔΓ simul & BΔ.



QUONIAM quadrata ex AB, BΓ [per 7. II. El.] æqualia sunt duplo rectangulo ABΓ una cum quadrato ex AΓ, ac quadrata ex AΔ, ΔΓ [per eandem] æqualia sunt duplo rectangulo AΔΓ cum quadrato ex AΓ: ob utrinque commune quadratum ex AΓ, erit excessus quadratorum ex AB, BΓ supra quadrata ex AΔ, ΔΓ æqualis excessui dupli rectanguli ABΓ supra duplum rectangulum AΔΓ. Bisecetur AΓ in Z, ac fiat AK ipsi ΔΓ æqualis, & erit [per 6. II.] excessus dupli rectanguli ABΓ supra duplum rectangulum AΔΓ æqualis excessui quo duplum quadrati ex BZ superat duplum quadrati ex ΔZ, hoc est, duplo rectanguli KBΔ. sed KB æqualis est utrisque AB, ΓΔ: quare quadrata ex AB, BΓ æqualia sunt quadratis ex AΔ, ΔΓ una cum duplo rectangulo sub AB, ΓΔ simul & BΔ.

LEMMA III.

Divisâ rectâ AB in punctis Γ, Δ, ita ut AΓ, ΔB fuerint æquales; si sumatur in ΓΔ punctum K, erunt quadrata ex AΔ, ΔB æqualia quadratis ex AK, KB una cum duplo rectanguli ΓKΔ.

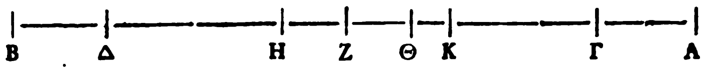


SI dividatur ΔΓ bifariam in K, res manifesta est. Sin secus fuerit, dividatur bifariam in Z. Quoniam vero AB divisa est inæqualiter in Δ, æqualiter vero in Z; erunt quadrata ex AΔ, ΔB [per 9. II.] æqualia duplo quadratorum ex AZ, ZΔ. Sed duplum quadrati ex ZΔ [per 5. II.] æquale

æquale est duplo rectangulo ΓΚΔ una cum duplo quadrato ex ZK, ob ΓΔ æqualiter divisum in Z & inæqualiter in K: quadrata igitur ex AΔ, ΔB æqualia sunt duplo quadratorum ex AZ, ZK una cum duplo rectangulo ΓΚΔ. Sed duplum quadratorum ex AZ, ZK [per 9. II.] æquale est quadratis ex AK, KB: quadrata igitur ex AΔ, ΔB æqualia sunt quadratis ex AK, KB una cum duplo rectangulo ΓΚΔ.

LEMMA IV.

Si dividatur recta AB in punctis Γ, Δ ita ut AΓ, BΔ sint æquales, ac bisecetur ΓΔ in Z, secetur autem utcunque in K; secta vero sit ZΔ in H ita ut KZ major sit quam ZH: erunt quadrata ex AH, HB una cum rectangulo sub KH & duplâ differentiâ ipsarum HB, KA æqualia quadratis ex AK, KB.



Fiat ΘZ ipsi ZH æqualis, & erit ΘA ipsi BH æqualis, ac ΘK erit differentia inter HZ, ZK; eademque differentia est ipsarum HB, KA: erit igitur excessus quadratorum ex AK & KB supra quadrata ex AH, HB [per 9. II.] æqualis duplæ differentiæ quadratorum ex KZ, ZH. Hæc autem [per 6. II.] æqualis est duplo rectangulo sub HK, KΘ, ob HZ ipsi ZΘ æqualem & ΘK adjectam: quadrata igitur ex AH, HB una cum duplo rectanguli sub HK, KΘ æqualia sunt quadratis ex AK, KB.

LEMMA V.

Iisdem positis, erit quadruplum rectanguli BZΘ, una cum duplo rectangulo KΘB & quadruplo quadrati ex ΘZ, æquale duplo rectanguli sub KZ, ZΘ simul & ΘB.

Quadruplum enim rectanguli BZΘ una cum quatuor quadratis ex ZΘ [per 3. II.] æquale est quadruplo rectanguli BΘZ: adjiciatur utrinque duplum rectanguli KΘB; fiet summa æqualis duplo rectangulo sub ZK, ΘB una cum duplo rectanguli BΘZ, hoc est, rectangulo sub KZ, ZΘ simul & duplo ipsius ΘB.

LEMMA VI.

Iisdem positis, erit etiam duplum rectanguli AΘB una cum quadruplo quadrati ex ΘZ æquale quadratis ex AΘ, ΘB.

Quoniam enim AΘ ipsi HB æqualis est, erit rectangulum AΘB æquale rectangulo ΘBH; ac quadruplum quadrati ex ΘZ æquale est quadrato ex HΘ, ob ΘZ ipsi ZH æqualem: duplum igitur rectanguli sub ΘB, BH, hoc est rectangulum AΘB una cum quadrato ex HΘ, æquale est [per 7. II.] quadratis ex ΘB & BH, hoc est quadratis ex AΘ, ΘB.

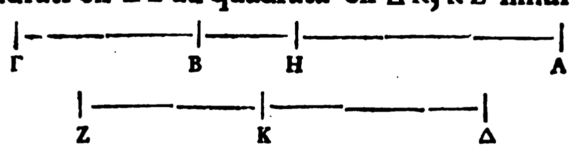
LEMMA VII.

Erit etiam duplum rectanguli sub AB, ΓZ æquale differentiæ quadratorum ex AΓ, ΓB.

Quoniam duplum rectanguli AB, ΓZ æquale est duplo rectanguli sub BΓ, ΓZ, sive rectangulo BΓΔ (ob ΓZ ipsi ZΔ æqualem) una cum duplo rectanguli AΓZ sive rectangulo BΔΓ; erit rectangulum BΓΔ una cum rectangulo BΔΓ, sive duplum rectanguli BΔΓ una cum quadrato ex ΔΓ, æquale rectangulo sub BA, ΓZ: rectangulum igitur sub BA, ΓZ [per 4. II.] æquale est excessui quo quadratum ex BΓ superat quadratum ex BΔ sive ex AΓ.

LEMMA VIII.

Si ratio ipsius AB ad BΓ major fuerit ratione ΔK ad KZ, [existente AB majore quam BΓ & ΔK quam KZ] erit ratio quadrati ex AΓ ad quadrata ex AB & BΓ simul minor ratione quadrati ex ΔZ ad quadrata ex ΔK, KZ simul.



Fiat AH ad HΓ sicut ΔK ad KZ, & erit AΓ ad ΓH sicut ΔZ ad ZK; pariterque AΓ erit ad AH sicut ΔZ ad ΔK: quocirca quadratum ex AΓ erit ad quadrata ex AH & ΓH sicut quadratum ex ΔZ ad quadrata ex ΔK, KZ simul sumpta. Sed ratio quadrati ex AΓ ad quadrata ex AB, BΓ minor est ratione quadrati ex AΓ ad quadrata ex AH, HΓ; quia quadrata ex AB, BΓ majora sunt quadratis ex AH, HΓ: erit igitur ratio quadrati ex AΓ ad quadrata ex AB, BΓ minor ratione quadrati ex ΔZ ad quadrata ex ΔK, KZ.

APOLLONII PERGÆI CONICORUM

LIBER SEPTIMUS.

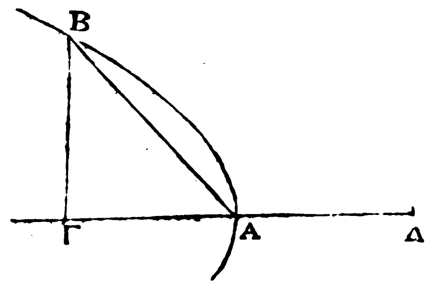
Apollonius Attalo S. P.

MITTO tibi una cum his librum Septimum de Conicis Sectionibus. In hoc autem libro insunt plurimæ Propositiones novæ, diametros Sectionum figurasque super eas factas spectantes: quæ quidem omnes utilitatem suam habent in multis Problematum generibus, præcipueque in eorum διορισμοῖς. *Horum autem plura occurrunt exempla in Problematis Conicis determinatis, à nobis resolutis & demonstratis in Octavo libro; qui loco appendicis est, quemque tibi quantocyus fieri possit mittendum curabo. Vale.*

PROPOSITIO I.

SI in Axe Parabolæ supra verticem Sectionis producto ponatur recta æqualis lateri recto; ac ducatur recta quælibet à Vertice ad Sectionem, de cujus extremitate demissa sit normalis ad Axem: poterit recta sic ducta rectangulum contentum sub interceptâ inter Verticem & normalem & interceptâ inter normalem & punctum ad quod productus est Axis.

Sit AB Parabola cujus Axis AΓ, & producatur AΓ ad Δ, ita ut AΔ æqualis sit lateri recto: & de puncto A ducatur utcunque ad sectionem recta AB, & sit BΓ Axi normalis. Dico quadratum ex AB æquale esse rectangulo ΔΓA.



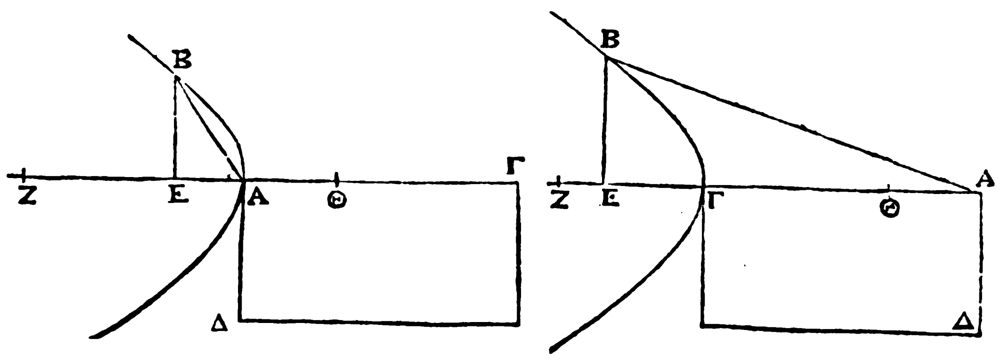
Quoniam enim AΓ est Axis sectionis, & BΓ eidem normalis est, ac AΔ æqualis est lateri recto; erit quadratum ex BΓ (per 11^{am} primi) æquale rectangulo ΔAΓ. Huic autem si adjiciatur quadratum ex AΓ, erunt quadrata ex AΓ, ΓB simul sumpta æqualia rectangulo ΔAΓ una cum quadrato ex AΓ, hoc est rectangulo ΔΓA. Sed quadrata ex AΓ, ΓB simul æqualia sunt quadrato ex AB: quocirca quadratum ex AB æquale est rectangulo ΔΓA. Q. E D.

PROPO-

PROPOSITIO II.

SI dividatur Axis transversus Hyperbolæ in ratione ejusdem Axis ad latus ejus rectum, ita ut portio ea, quæ Axis termino alterutri adjacet, respondeat lateri recto; ac si ab eodem Axis termino ducatur recta ad punctum quodlibet in Sectione, à quo demittatur Axi normalis: erit quadratum rectæ sic ductæ ad rectangulum sub interceptis inter normalem & utramque Axis portionis lateri recto respondentis extremitatem, sicut Axis transversus ad residuam Axis partem. Vocetur autem Axis portio lateri recto respondens recta Homologa.

Sit Hyperbolæ Axis productus ΑΓΕ, figura autem sectionis sit ΓΔ; ac dividatur Axis ΑΓ in Θ, ita ut ΓΘ sit ad ΘΑ sicut ΓΑ ad ΑΔ sive ad latus rectum: & ab Α ducatur utcunque recta ΑΒ, & demittatur ΒΕ normalis ad Axem. Dico quadratum ex ΑΒ esse ad rectangulum ΘΕΑ sicut ΑΓ ad ΓΘ.



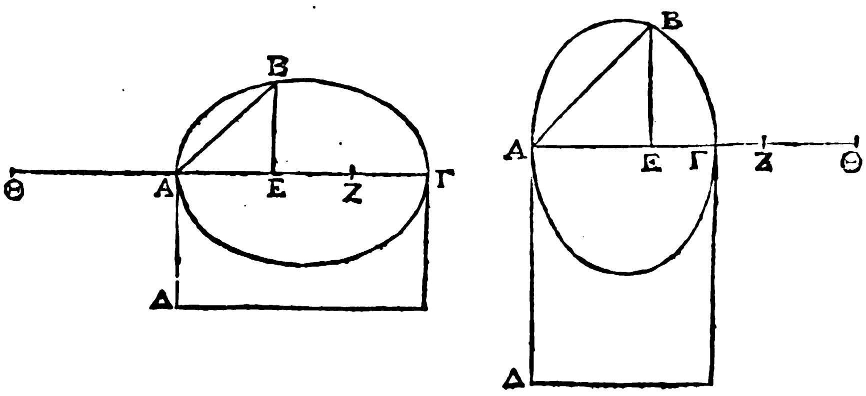
Fiat rectangulum ΑΕΖ æquale quadrato ex ΒΕ, ac erit rectangulum ΑΕΖ ad rectangulum ΑΕΓ sicut quadratum ex ΒΕ ad rectangulum ΑΕΓ. At vero quadratum ex ΒΕ est ad rectangulum ΑΕΓ (per 12^{am} primi) sicut latus rectum ΑΔ ad Axem transversum ΑΓ: quare rectangulum ΑΕΖ est ad rectangulum ΑΕΓ sicut ΔΑ ad ΑΓ; ac proinde ΖΕ est ad ΕΓ sicut ΔΑ ad ΑΓ, hoc est sicut ΑΘ ad ΘΓ; ac componendo ΖΓ erit ad ΓΕ sicut ΑΓ ad ΓΘ: unde consequitur ΖΑ esse ad ΘΕ sicut ΑΓ ad ΓΘ. Sumptâ autem in communem altitudinem ΑΕ, erit rectangulum ΖΑΕ ad rectangulum ΘΕΑ in eadem ratione, sive ut ΑΓ ad ΓΘ. Sed rectangulum ΖΑΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; adeoque quadratum ex ΑΒ est ad rectangulum ΘΕΑ ut ΑΓ ad ΓΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO III.

SI Axis alteruter Ellipseos producatur extra sectionem, ita ut Axis auctus ejusdemque pars extra sectionem fuerint inter se ut Axis ipse & latus ejus rectum inter se; & ab eo Vertice, cui contermina est portio illa quæ lateri recto respondet, ducatur recta ad punctum quodlibet in sectione, de quo demittatur ad Axem normalis: erit quadratum ductæ ad rectangulum sub interceptis inter normalem & utramque lateri recto respondentis rectæ extremitatem, sicut Axis sectionis ad portionem illam quæ Axi proportionalis est. Vocetur autem ea quæ lateri recto respondet recta Homologa.

Sit sectio Ellipsis, cujus Axis ΑΓ ac figura ΓΔ; sitque ΑΘ recta in Axe producto, ita ut ΓΘ sit ad ΘΑ sicut ΓΑ ad ΑΔ: &, ductâ utcunque rectâ ΑΒ, demittatur ad Axem normalis ΒΕ. Dico quadratum ex ΑΒ esse ad rectangulum ΑΕΘ ut ΑΓ ad ΓΘ.

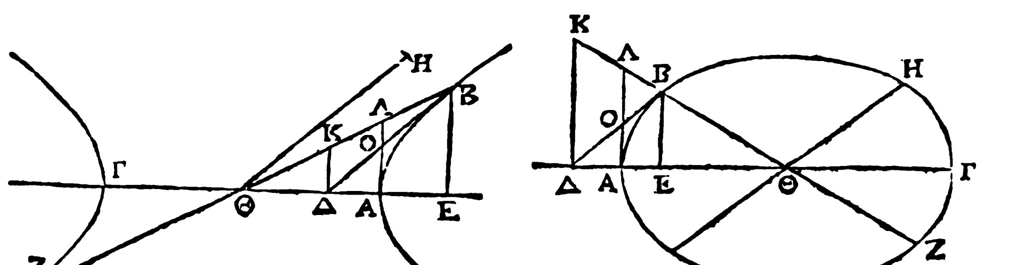
Fiat rectangulum ΑΕΖ æquale quadrato ex ΒΕ: erit igitur rectangulum ΑΕΖ ad ad rectangulum ΑΕΓ ut quadratum ex ΒΕ ad rectangulum ΑΕΓ. Quadratum autem ex ΒΕ eſt ad rectangulum ΑΕΓ (per 21^{mam} primi) ut latus rectum ΑΔ ad latus tranſverſum ΑΓ. Eſt igitur rectangulum ΑΕΖ ad rectangulum ΑΕΓ ſicut ΔΑ ad ΑΓ, unde etiam ΖΕ eſt ad ΕΓ ſicut ΑΔ ad ΑΓ ſive ut ΑΘ ad ΘΓ; ac dividendo ΖΓ erit ad ΓΕ ſicut ΑΓ ad ΓΘ. *Summa autem vel differentia antecedentium eſt ad ſummam vel differentiam conſequentium in eadem ratione*; quare ΖΑ erit ad ΕΘ ſicut ΑΓ ad ΓΘ; ac ſumptâ ΑΕ in communem altitudinem, erit ut ΖΑ ad ΕΘ ita rectangulum ΖΑΕ ad rectangulum ΑΕΘ: eſt itaque ΑΓ ad ΓΘ ut rectangulum ΖΑΕ ad rectangulum ΑΕΘ. Sed rectangulum ΖΑΕ æquale eſt quadrato ex ΑΒ. Quapropter quadratum ex ΑΒ eſt ad rectangulum ΑΕΘ ſicut ΑΓ ad ΓΘ. Q. E. D.



PROPOSITIO IV.

SI tangat Hyperbolam vel Ellipſin recta quælibet ſectionis axi occurrens, ac ſi à puncto contactus ducatur ordinatim applicata, ut & è centro recta Tangenti parallela, æqualis vero ſemidiametro conjugatæ cum diametro illâ quæ per punctum contactûs ducitur: erit quadratum Tangentis ad quadratum ſemidiametri eidem parallelæ, ſicut intercepta inter ordinatim applicatam & punctum occurſûs axis & Tangentis, ad interceptam inter eandem ordinatim applicatam & centrum ſectionis.

Sit ΑΓ Axis Hyperbolæ vel Ellipſeos, cujus centrum Θ; tangat autem ſectionem recta ΒΔ in puncto Β, & ſit ΒΕ ordinatim applicata ad diametrum ΓΑΕ; ac ſit ΘΗ ipſi ΒΔ parallela, æqualis vero ſemidiametro conjugatæ cum diametro illâ quæ per punctum contactûs Β ducitur. Dico quadratum ex ΒΔ eſſe ad quadratum ex ΘΗ ſicut ΔΕ ad ΕΘ.



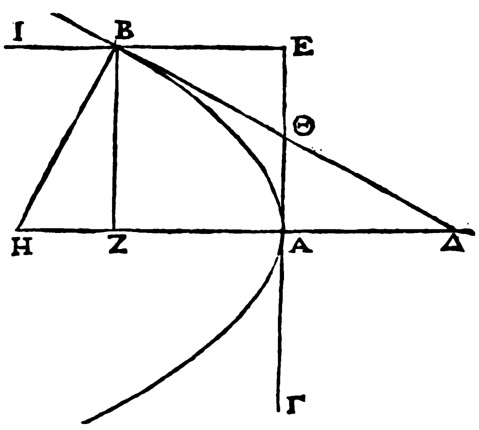
Per punctum Β ducatur diameter ΒΘΖ, ac ſint rectæ ΑΛ, ΔΚ ipſi ΒΕ parallelæ, & fiat recta quædam Μ ad ΒΔ ſicut ΟΒ ad ΒΛ: erit igitur recta Μ dimidium lateris recti, ſive illius juxta quam poſſunt ordinatim ductæ ad diametrum ΒΘ; rectangulis, quæ eidem adjacent, excedentibus quidem in Hyperbolâ, *deficientibus vero in Ellipſi*, figuris ſimilibus contentæ ſub duplo ipſius Μ & diametro ΖΒ (uti conſtat ex 50ma primi). Recta autem ΘΗ dimidium eſt diametri conjugatæ cum diametro ΖΒ: erit igitur rectangulum ſub ΘΒ & Μ (per 15ta primi & 20ta ſecundi) æquale quadrato ex ΘΗ. Verum ΟΒ eſt ad ΒΛ ſicut Μ ad ΒΔ, hoc eſt ut ΒΔ ad ΒΚ; quare rectangulum ſub Μ & ΒΚ æquale eſt quadrato ex ΒΔ. Sed rectangulum ſub Μ & ΒΚ eſt ad rectangulum ſub Μ & ΒΘ ut ΒΚ ad ΒΘ: eſt igitur quadratum ex ΒΔ ad rectangulum ſub ΒΘ & Μ ſicut ΒΚ ad ΒΘ; hoc eſt ſicut

ΕΔ ad ΕΘ. Rectangulum autem sub ΒΘ & Μ demonstravimus æquale esse quadrato ex ΘΗ: quapropter quadratum ex ΒΔ est ad quadratum ex ΘΗ ut ΔΕ ad ΕΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

SI in Parabola sumatur diameter quævis, à cujus vertice demittatur ad Axem normalis: erit recta illa juxta quam poterunt ordinatim applicatæ à sectione ad diametrum illam ductæ, nempe latus rectum sumptæ diametri, æqualis lateri recto Axis una cum quadrupla interceptæ inter normalem & Verticem principalem sectionis.

Sit Parabolæ Axis ΑΗ, ac sit ΒΙ aliqua alia è diametris ejus, sitque ΑΓ ea juxta quam possunt ordinatim applicatæ ad Axem ΑΗ, sive latus rectum Axis; ac de puncto Β demittatur ad Axem normalis ΒΖ. Dico rectas à sectione ad diametrum ΒΙ ordinatim ductas, sive ipsi ΒΔ sectionis Tangenti in puncto Β parallelas, posse rectangula adjacentia rectæ ΑΓ quadrupla ipsius ΑΖ auctæ.



Ducatur ΑΕ Axi normalis, ac producatur ΒΙ ad Ε; rectæ autem ΒΔ, sectionem tangenti in puncto Β, ad rectos angulos insistat recta ΒΗ. Erit igitur triangulum ΒΔΗ simile triangulo ΒΘΕ, adeoque ΒΘ ad ΒΕ erit ut ΗΔ ad ΔΒ; unde (per 49^{am} primi) ΔΗ erit dimidium lateris recti diametri ΒΙ. Sed rectangulum sub ΔΖ, ΖΗ æquale est quadrato ex ΒΖ, ob angulum ΔΒΗ rectum & ΒΖ perpendicularem; ac quadratum ex ΒΖ æquale est rectangulo ΓΑΖ: quare rectangulum ΔΖΗ æquale est rectangulo ΓΑΖ. Verum (per 35^{am} primi) recta ΔΖ dupla est ipsius ΑΖ, unde & ΑΓ dupla erit ipsius ΖΗ: quadrupla igitur ipsius ΑΖ dupla est rectæ ΔΖ. Quocirca ΑΓ una cum quadrupla ipsius ΑΖ simul, æqualis erit duplæ ipsarum ΔΖ, ΖΗ simul, sive dupla ipsius ΔΗ. Demonstravimus autem ΔΗ dimidium esse lateris recti ad diametrum ΒΙ: latus igitur rectum ad diametrum ΒΙ æquale est ipsi ΑΓ, lateri recto Axis, una cum quadruplâ ipsius ΑΖ. Q. E. D.

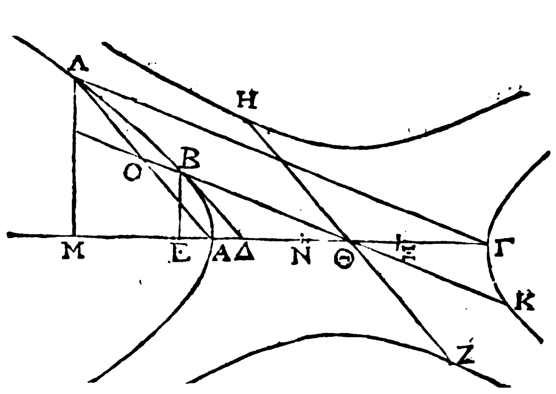
PROPOSITIO VI.

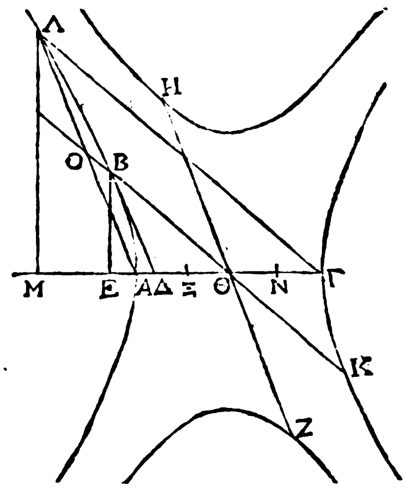
SI ponantur in Axe Hyperbolæ rectæ duæ, utrique Axis termino adjacentes, & illi quam Homologam *diximus æquales similiterque sitæ; ac si ducantur quælibet duæ sectionis diametri conjugatæ, ut & à Vertice principali ad occursum sectionis recta ipsi diametro ὀρθίᾳ parallela; & de puncto occursûs demittatur normalis ad Axem: erit potentiâ diameter transversa ex his conjugatis ad diametrum ejus ὀρθίαν, sicut intercepta inter normalem & terminum rectæ* Homologæ *Vertici remotiori* adjacentis *ad interceptam inter eandem normalem & terminum* Homologæ *Vertici propiori adjacentis: longitudine autem ratio diametri transversæ ad latus ejus rectum, sive ad eam juxta quam possunt ordinatim ductæ, hoc est diametro ὀρθίᾳ sive secundæ parallelæ, eadem erit quam habent interceptæ modo dictæ inter se.*

Sit Hyperbolæ Axis ΓΑΜ, Axis autem transversus sectionis ΑΓ & centrum Θ; sitque utraque ΑΝ, ΓΞ æqualis rectæ Homologæ, ac per punctum Θ ducantur diametri

metri conjugatæ ZH, BK; ipſique ZH parallela ſit AΛ, & ad Axem AM demittatur normalis ΛM. Dico quadratum diametri tranſverſæ BK eſſe ad quadratum diametri ὀρθίας ſive ſecundæ ZH ſicut ΞM ad MN.

Jungatur ΓΛ & è puncto B demittatur normalis BE, & ex eodem ducatur recta BΔ ipſi ZH parallela, quæ proinde ſectionem continget. Quoniam vero ΓΘ ipſi ΘA æqualis eſt, & ΛO ipſi OA; erit ΓΛ ipſi BΘ parallela: adeoque ob ſimilia triangula, ΔE erit ad EΘ ſicut ΛM ad MΓ. Sed & ΔE eſt ad EΘ (per 4^{tam} hujus) ſicut quadratum ex ΔB ad quadratum ex ΘH. Cum autem, ob ſimilia triangula, quadratum ex ΘB eſt ad quadratum ex BΔ ut quadratum ex ΓΛ ad quadratum ex AΛ; ac quadratum ex BΔ eſt ad quadratum ex ΘH ſicut ΛM ad MΓ; componetur ratio quadrati ex ΘB ad quadratum ex ΘH ex ratione quadrati ex ΓΛ ad quadratum ex AΛ & ratione ΛM ad MΓ. Sed ratio quadrati ex ΓΛ ad quadratum ex AΛ componitur ex rationibus quadrati ex ΓΛ ad rectangulum ΓMΞ, & rectanguli ΓMΞ ad rectangulum ΛMN, & rectanguli ΛMN ad quadratum ex AΛ. Compoſita eſt igitur ratio quadrati ex ΘB ad quadratum ex ΘH ex rationibus quadrati ex ΓΛ ad rectangulum ΓMΞ, & rectanguli ΓMΞ ad rectangulum ΛMN, & rectanguli ΛMN ad quadratum ex AΛ & ratione ipſius ΛM ad MΓ. Quadratum autem ex ΓΛ (per 2^{dam} hujus) eſt ad rectangulum ΓMΞ ſicut AΓ ad AΞ; &, per eandem,





dem, rectangulum ΛMN eſt ad quadratum ex AΛ ſicut ΓN ad AΓ. Verum ratio rectanguli ΓMΞ ad rectangulum ΛMN componitur ex ratione MΞ ad MN & ratione ΓM ad MΛ: ratio igitur quadrati ex ΘB ad quadratum ex ΘH componitur ex rationibus AΓ ad AΞ, ΓN ad AΓ, MΞ ad MN, ΓM ad MΛ, & ratione ΛM ad MΓ. Ratio autem ex his omnibus conflata æqualis eſt rationi MΞ ad MN. Nam ratio ΓN ad AΓ conjuncta cum ratione AΓ ad AΞ fit ratio ΓN ad AΞ; ac ΓN æqualis eſt ipſi AΞ: Ratio autem ΓM ad MΛ compoſita cum ratione ΛM ad MΓ, fit ratio ipſius MΓ ad ſeipſam. Quare ratio ex his omnibus compoſita æqualis erit rationi reliquæ, nempe rationi MΞ ad MN. Eſt igitur quadratum ex ΘB ad quadratum ex ΘH ſicut MΞ ad MN; adeoque quadratum ex BK ad quadratum ex ZH eſt ut MΞ ad MN. Porro quadratum ex BK (per 21^{am} primi) eſt ad quadratum ex ZH, ſicut KB ad rectam juxta quam poſſunt ductæ à ſectione ad diametrum KB, ipſi ZH parallelæ: erit igitur KB ad latus rectum ejus, ſive ad eam juxta quam poſſunt ordinatim ad eandem applicatæ, ſicut MΞ ad MN. Q. E. D.

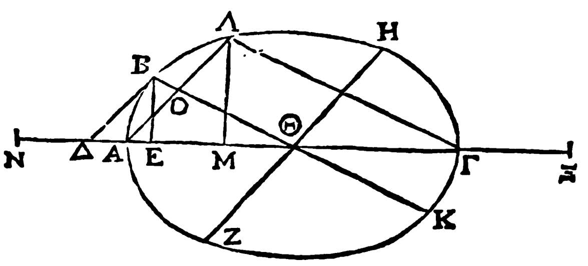
PROPOSITIO VII.

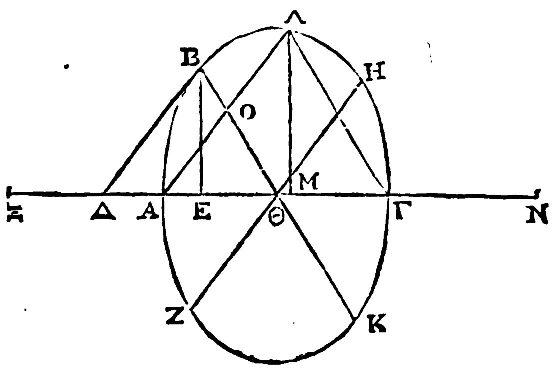
SI adjaceant utrique Axis Ellipſeos Vertici rectæ æquales illi quam Homologam *diximus, & habeantur in ſectione quælibet diametri duæ conjugatæ; & ſi ducatur de ſectionis Vertice recta alteri conjugatarum parallela, & ab occurſu ejus cum ſectione demittatur normalis ad Axem: erit potentiâ diameter ea cui non ducitur parallela ad alteram quæ ejuſdem conjugata eſt, ſicut intercepta*

cepta inter normalem & terminum rectæ* Homologæ *Vertici alteri adjacentis ad interceptam inter eandem normalem & terminum* Homologæ *Vertici, à quo ducta est parallela, adjacentis: sive fuerint* Homologæ *in Axe majore extra sectionem, sive in Axe minore super Axem ipsum. Erit quoque diameter ista ad eam juxta quam possunt ordinatim ductæ, sive alteri diametro parallelæ, in ratione dictarum interceptarum.

Sit Ellipseos Axis ΑΓ, ac rectæ duæ Homologæ ΑΝ, ΓΞ; sintque diametri duæ conjugatæ ΒΚ, ΖΗ. Ducatur recta ΛΑ diametro ΖΗ parallela, & de puncto in sectione Λ demittatur normalis ad Axem, ut ΛΜ. Dico quadratum ex ΒΚ esse ad quadratum ex ΖΗ sicut ΜΞ ad ΜΝ: & in eadem esse ratione ΚΒ ad rectam juxta quam possunt ordinatim applicatæ ad diametrum ΚΒ sive ipsi ΖΗ parallelæ; nempe ΚΒ ad latus rectum ejus esse ut ΜΞ ad ΜΝ.

Jungatur ΓΛ & de puncto Β demittatur cathetus ad Axem ΒΕ, & per idem Β ducatur ΒΔ ipsi ΖΗ parallela, quæ proinde sectionem continget. Quoniam autem ΓΘ ipsi ΘΑ æqualis est, & ΛΟ ipsi ΟΑ æqualis, erit ΓΛ ipsi ΒΘ parallela: unde, ob similia triangula, ΔΕ erit ad ΕΘ sicut ΑΜ ad ΜΓ. Sed & ΔΕ est ad ΕΘ (per 4tam hujus) sicut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΘΗ; adeoque ΑΜ est ad ΜΓ sicut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΘΗ. Quoniam vero, ob similia triangula, quadratum ex ΒΘ est ad quadratum ex ΒΔ sicut quadratum ex ΓΛ ad quadratum ex ΑΛ; ac quadratum ex ΒΔ est ad quadratum ex ΘΗ sicut ΑΜ ad ΜΓ





erit quadratum ex ΒΘ ad quadratum ex ΘΗ in ratione compositâ ex ratione quadrati ex ΓΛ ad quadratum ex ΑΛ & ratione ΑΜ ad ΜΓ. Ratio autem quadrati ex ΓΛ ad quadratum ex ΑΛ componitur ex ratione quadrati ex ΓΛ ad rectangulum ΓΜΞ, & ratione rectanguli ΓΜΞ ad rectangulum ΑΜΝ, & ratione rectanguli ΑΜΝ ad quadratum ex ΑΛ: quare ratio quadrati ex ΒΘ ad quadratum ex ΘΗ componitur ex rationibus quadrati ex ΓΛ ad rectangulum ΓΜΞ, & rectanguli ΓΜΞ ad rectangulum ΑΜΝ, & rectanguli ΑΜΝ ad quadratum ex ΑΛ, una cum ratione ΑΜ ad ΜΓ. Est autem quadratum ex ΓΛ ad rectangulum ΓΜΞ (per tertiam hujus) sicut ΑΓ ad ΑΞ; ac, per eandem, rectangulum ΑΜΝ est ad quadratum ex ΑΛ sicut ΓΝ ad ΑΓ. Ratio autem rectanguli ΓΜΞ ad rectangulum ΑΜΝ componitur ex ratione ΓΜ ad ΑΜ & ΜΞ ad ΜΝ: quapropter ratio quadrati ex ΒΘ ad quadratum ex ΘΗ componitur ex rationibus ΑΓ ad ΑΞ, ΓΝ ad ΑΓ, ΓΜ ad ΑΜ & ΜΞ ad ΜΝ, & ex ratione ΑΜ ad ΜΓ. Est autem ratio ex his omnibus composita eadem ac ratio ΜΞ ad ΜΝ: nam ratio ΓΝ ad ΑΓ conjuncta cum ratione ΑΓ ad ΑΞ fit ratio ΓΝ ad ΑΞ, quæ quidem æqualitatis est; ac ratio composita ex ratione ΓΜ ad ΑΜ & ratione ΑΜ ad ΜΓ fit ratio ipsius ΓΜ ad seipsam: ratio igitur ex his omnibus composita erit ratio reliqua, nempe ΜΞ ad ΜΝ. Quocirca quadratum ex ΘΒ est ad quadratum ex ΘΗ ut ΜΞ ad ΜΝ. Quinetiam cum quadratum ex ΒΚ est ad quadratum ex ΖΗ sicut ΒΚ ad illam juxta quam possunt rectæ ipsi ΖΗ parallelæ, à sectione ad diametrum ΒΚ ductæ; erit ΒΚ ad rectam illam, nempe ad latus rectum ejus, sicut ΜΞ ad ΜΝ. Q. E. D.

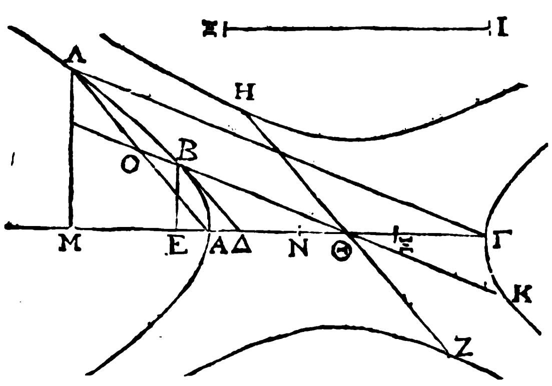
Hinc manifestum est, quod si normalis de puncto Λ cadat super centrum sectionis, diameter ΚΒ æqualis erit diametro ΖΗ, quia ΜΞ ipsi ΜΝ æqualis est.

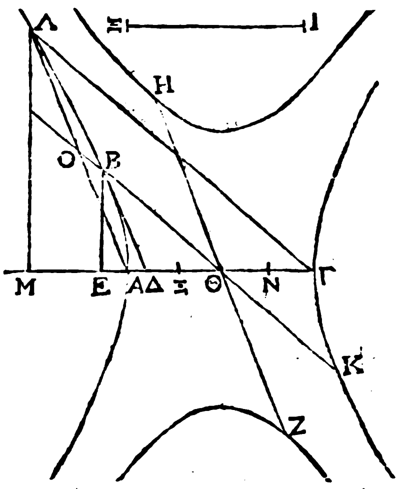
PROPO-

PROPOSITIO VIII.

Iisdem positis quæ in Propositionibus sextâ & septimâ præcedentibus, tam in Hyperbolâ quam in Ellipsi. Dico quadratum Axis transversi ΑΓ esse ad quadratum ex utraque ΒΚ, ΖΗ simul sumptâ & in directum productâ, ut rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex utrâque ΜΞ & eâ quæ potest rectangulum ΝΜΞ simul sumptâ.

Fiat ΞΙ media proportionalis inter ipsas ΜΝ, ΜΞ. Jam quadratum ex ΑΓ est ad quadratum ex ΒΚ sicut quadratum ex ΑΘ ad quadratum ex ΘΒ; quadratum autem ex ΑΘ (per 37^{am} primi) æquale est rectangulo ΔΘΕ: quare quadratum ex ΑΓ est ad quadratum ex ΒΚ sicut rectangulum ΔΘΕ ad quadratum ex ΘΒ. Rectangulum autem ΔΘΕ est ad quadratum ex ΘΒ sicut rectangulum ΑΓΜ ad quadratum ex ΓΛ, propter rectas ΔΒ, ΒΘ ipsis ΑΛ, ΑΓ parallelas, *per Lemma* IX. *in Lib. secundum*: quapropter rectangulum ΑΓΜ est ad quadratum ex ΓΛ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΚ. Sumatur ΓΜ in communem altitudinem, ac erit ut ΓΛ ad ΓΝ ita rectangulum ΑΓΜ ad rectangulum ΜΓΝ. Quadratum autem ex ΓΛ est ad rectangulum ΞΜΓ (per 2^{dam} & 3^{am} hujus) sicut ΑΓ ad ΑΞ; ac ΓΝ ipsi ΑΞ est æqualis, quia rectæ sunt Homologæ: rectangulum igitur ΑΓΜ est ad rectangulum ΜΓΝ sicut quadratum ex ΓΛ ad rectangulum ΞΜΓ, ac permutando rectangulum ΑΓΜ erit ad quadratum ex ΓΛ ut rectangulum ΜΓΝ ad rectangulum ΓΜΞ:





Demonstravimus autem rectangulum ΑΓΜ esse ad quadratum ex ΓΛ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΚ; quare quadratum ex ΑΓ est ad quadratum ex ΒΚ sicut rectangulum ΜΓΝ ad rectangulum ΓΜΞ sive ut ΓΝ ad ΜΞ. At vero ut ΓΝ ad ΜΞ ita rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ; *adeoque quadratum ex ΑΓ est ad quadratum ex ΒΚ ut rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ.* Jam ex duabus Propositionibus præcedentibus constat quadratum ex ΒΚ esse ad quadratum ex ΖΗ ut ΞΜ ad ΜΝ; adeoque ΒΚ est ad ΖΗ sicut ΞΜ ad ΞΙ mediam proportionalem inter ΞΜ & ΜΝ: unde ΒΚ erit ad ΒΚ, ΖΗ simul sicut ΜΞ ad ΜΙ sive ΜΞ, ΞΙ simul; ac quadratum ex ΒΚ erit ad quadratum ex ΒΚ, ΖΗ simul sumptis ut quadratum ex ΜΞ ad quadratum ex ΜΙ. Verum jam ostensum est quadratum ex ΑΓ esse ad quadratum ex ΒΚ sicut rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΞΜ: ex æquo igitur quadratum ex ΑΓ erit ad quadratum ex ΒΚ, ΖΗ simul ut rectangulum sub ΓΝ, ΞΜ ad quadratum ex ΜΙ. Sed ΜΙ æqualis est ipsi ΜΞ una cum ea quæ potest rectangulum ΝΜΞ: quadratum igitur Axis ΑΓ est ad quadratum summæ duarum diametrorum conjugatarum ΒΚ, ΖΗ simul, sicut rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΙ; quæ scilicet æqualis est utrique ΜΞ & ΞΙ simul, quarum ΞΙ potest rectangulum ΝΜΞ. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

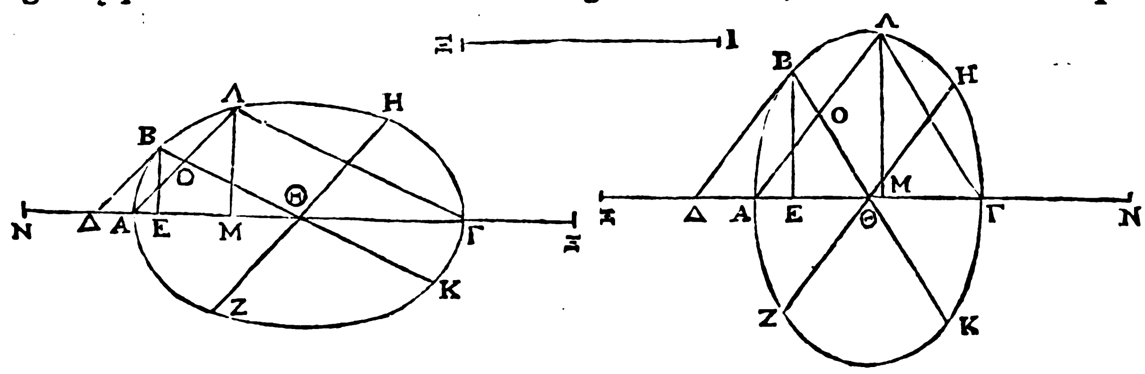
Iisdem manentibus ac in sextâ & septimâ præcedentibus. Dico quadratum ex ΑΓ esse ad quadratum differentiæ inter ΒΚ, ΖΗ sicut rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum differentiæ inter ΜΞ & ΞΙ, sive illam quæ potest rectangulum ΝΜΞ.

Quoniam KB est ad ZH sicut MΞ ad ΞI, uti patet ex demonstratione Propositionis ultimæ; erit quadratum ex KB ad quadratum differentiæ inter BK & ZH ut quadratum ex MΞ ad quadratum differentiæ ipsarum MΞ, ΞI. Quadratum autem ex AΓ est ad quadratum ex BK sicut rectangulum sub ΓN, MΞ ad quadratum ex MΞ, per eandem præcedentis octavæ demonstrationem: quare ex æquo quadratum ex AΓ erit ad quadratum differentiæ ipsarum BK, ZH sicut rectangulum sub ΓN, MΞ ad quadratum differentiæ inter ipsas MΞ, ΞI. Sed recta ΞI potest rectangulum NMΞ: quadratum igitur ex AΓ est ad quadratum differentiæ inter conjugatas diametros BK, ZH ut rectangulum sub NΓ, MΞ ad quadratum differentiæ inter MΞ & illam quæ potest rectangulum NMΞ, hoc est ΞI. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

Iisdem manentibus. Dico quadratum ex AΓ esse ad rectangulum sub BK, ZH sicut NΓ ad illam quæ potest rectangulum NMΞ.

Quoniam enim quadratum ex AΓ est ad quadratum ex BK (per demonstrata in 8^va hujus) sicut ΓN ad MΞ; & ex eâdem constat quadratum ex BK esse ad rectangulum sub BK, ZH sicut MΞ ad ΞI, quia MΞ est ad ΞI sicut BK ad ZH: ex æquo igitur quadratum ex AΓ erit ad rectangulum sub BK, ZH sicut ΓN ad ΞI quæ



potest rectangulum NMΞ: quocirca quadratum ex AΓ est ad rectangulum sub diametris conjugatis BK, ZH sicut NΓ ad illam quæ potest rectangulum NMΞ Q. E. D.

PROPOSITIO XI.

Iisdem manentibus quæ in Hyperbolâ descripsimus ad Propositionem sextam hujus. Dico quadratum ex AΓ esse ad quadrata ex BK & ZH simul ut ΓN ad utramque NM, MΞ simul sumptam.

Quoniam enim (per 8^vam hujus) quadratum ex AΓ est ad quadratum ex BK sicut ΓN ad MΞ, ac quadratum ex BK est ad quadrata ex BK, ZH simul sicut MΞ ad utramque MΞ, MN simul; per sextam enim hujus constat quadratum ex BK esse ad quadratum ex ZH sicut MΞ ad MN: ex æquo igitur quadratum ex AΓ erit ad summam quadratorum ex diametris conjugatis BK, ZH sicut ΓN ad utramque NM, MΞ simul sumptam. Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

In omni Ellipsi quadrata ex quibusvis diametris conjugatis simul sumpta æqualia sunt quadratis Axium simul sumptis.

Adhibeatur Schema quo usi sumus in Propositione septima hujus, & sit alter Axium AΓ, ac diametri conjugatæ BK, ZH; rectæ autem duæ Homologæ sint AN, ΓΞ.

Quoniam quadratum ex AΓ est ad quadratum Axis alterius Ellipseos (per 15^am primi) sicut Axis transversus AΓ ad latus ejus rectum; & AΓ est ad latus ejus rectum sicut ΓN ad NA, quia recta AN Homologa est; & AN ipsi ΓΞ æqualis est: quadratum igitur ex AΓ est ad quadratum alterius Axis sicut NΓ ad ΓΞ, unde componendo quadratum ex AΓ erit ad quadratum ex AΓ una cum quadrato alterius Axis sicut NΓ ad NΞ. Sed quadratum ex AΓ est ad quadratum ex BK (per demonstrata in 8^va hujus) sicut NΓ ad MΞ: ac quadratum ex BK est ad quadrata ex BK, ZH simul

sicut

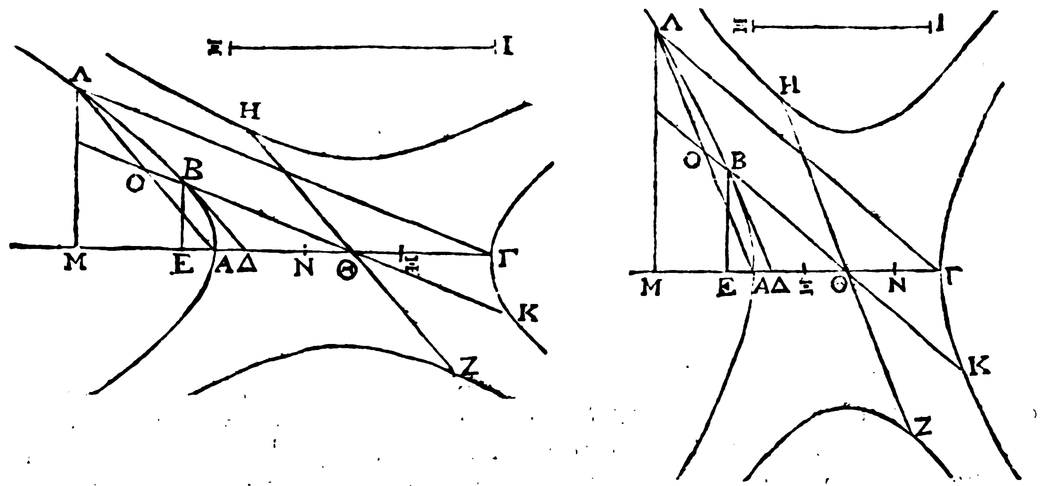
ſicut MΞ ad MΞ, MN ſimul ſumptas, quia (in ſeptima hujus) oſtendimus quadratum ex BK eſſe ad quadratum ex ZH ſicut MΞ ad MN; atque ſunt MΞ, MN ſimul ſumptæ æquales ipſi NΞ: quare ex æquo quadratum ex AΓ eſt ad quadrata ex BK, ZH ſimul ſicut NΓ ad NΞ. Sed jam demonſtratum eſt NΓ eſſe ad NΞ ut quadratum Axis AΓ ad quadrata ex utroque Axe ſimul: quadrata igitur Axium æqualia ſunt quadratis quarumvis diametrorum conjugatarum Ellipſeos, BK, ZH. Q. E. D.

PROPOSITIO XIII.

IN omni Hyperbola differentia inter quadrata Axium æqualis eſt differentiæ inter quadrata ex diametris quibuſvis conjugatis ſectionis.

Adhibeatur figura Hyperbolæ quâ uſi ſumus in ſextâ hujus, in quâ AΓ eſt alter Axium, ac BK, ZH diametri conjugatæ, rectæque duæ Homologæ ſunt AN, ΓΞ.

Quoniam quadratum ex Axe AΓ eſt ad quadratum alterius Axis Hyperbolæ (per 16am primi) ſicut AΓ ad latus ejus rectum; & AΓ eſt ad latus rectum ejus ſicut ΓN ad NA, quia AN Homologa eſt; eadem autem eſt ipſi ΓΞ æqualis: erit igitur quadratum ex AΓ ad differentiam quadratorum utriuſque Axis ſicut ΓN ad NΞ. Quadratum autem ex AΓ eſt ad quadratum ex BK (per 8vam hujus) ſicut ΓN ad MΞ,



ac (per 6tam hujus) quadratum ex BK eſt ad quadratum ex ZH ſicut MΞ ad MN; adeoque per converſionem rationis quadratum ex BK eſt ad differentiam quadratorum ex BK & ZH ſicut MΞ ad ΞN: ex æquo igitur quadratum ex AΓ eſt ad differentiam quadratorum ex BK, ZH ſicut ΓN ad NΞ. Sed jam demonſtratum eſt quadratum ex AΓ eſſe ad differentiam quadratorum utriuſque Axis ſectionis in eadem ratione ac ΓN ad NΞ: quapropter differentia inter quadrata Axium ſectionis æqualis eſt differentiæ quadratorum diametrorum quarumvis conjugatarum BK, ZH. Q. E. D.

PROPOSITIO XIV.

QUinetiam manente figura Ellipſeos quâ in Propoſitione ſeptimâ hujus uſi ſumus. Dico quadratum Axis AΓ eſſe ad differentiam quadratorum diametrorum conjugatarum BK, ZH ſicut NΓ ad duplam ipſius MΘ; poſito quod AΔ fuerit diametro ZH parallela, ac AM normalis ad Axem demiſſa.

Quoniam enim (per octavam hujus) quadratum ex AΓ eſt ad quadratum ex BK ſicut ΓN ad MΞ, ac (per hujus ſeptimam) quadratum ex BK eſt ad quadratum ex ZH ſicut MΞ ad MN; unde, per converſionem rationis, quadratum ex BK erit ad differentiam quadratorum ex BK & ZH ſicut MΞ ad differentiam inter MΞ & MN. Differentia autem ipſarum MΞ, MN dupla eſt rectæ MΘ: ex æquo igitur quadratum ex AΓ erit ad differentiam quadratorum ex BK, ZH ſicut ΓN ad duplam ipſius MΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

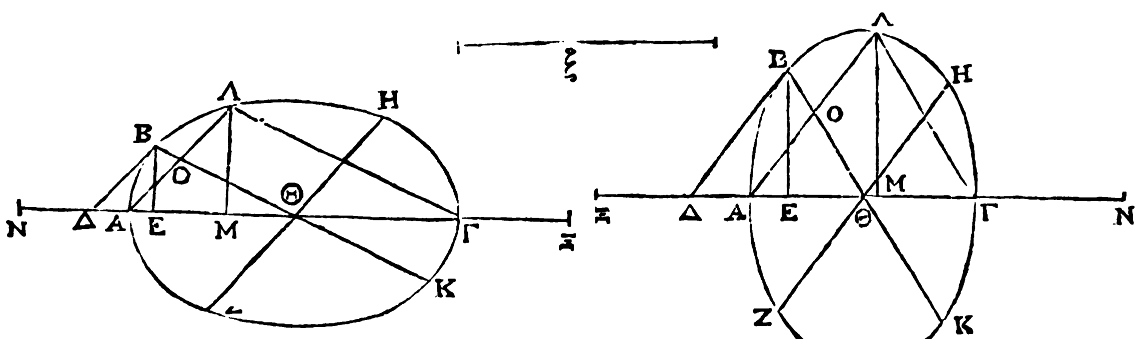
Manentibus Schematis tum Hyperbolæ tum Ellipseos in Prop. sexta & septima hujus descriptis. Dico quadratum ex ΑΓ esse ad quadratum ejus quæ cum ΒΚ continet figuram sectionis, hoc est ad quadratum lateris recti ad diametrum ΒΚ, sicut rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΝ.

Fiat ΒΚ ad ξ sicut ΜΞ ad ΜΝ. Cumque ΜΞ est ad ΜΝ (per 6^{am} & 7^{am} hujus) sicut ΚΒ ad latus ejus rectum: recta ξ continebit cum diametro ΚΒ figuram sectionis. Est autem quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΚΒ sicut rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ, per demonstrata in octava hujus; & quadratum ex ΒΚ est ad quadratum lateris recti ξ sicut quadratum ex ΜΞ ad quadratum ex ΜΝ: erit igitur ex æquo quadratum ex ΑΓ ad quadratum lateris recti ξ sicut rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΝ. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

Iisdem manentibus ac in sextâ & septimâ hujus, sit ξ latus rectum diametri ΒΚ. Dico quadratum ex ΑΓ esse ad quadratum differentiæ inter ipsas ΒΚ & ξ ut rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum differentiæ inter ipsas ΜΝ, ΜΞ.

Quoniam enim (per 6^{am} & 7^{am} hujus) ΒΚ est ad ξ sicut ΜΞ ad ΜΝ; erit, per conversionem rationis, ΒΚ ad differentiam inter ΒΚ & ξ sicut ΜΞ ad differentiam



inter eam & ΜΝ, ac proinde earundem quadrata: nempe quadratum ex ΒΚ erit ad quadratum differentiæ inter ΒΚ & ξ sicut quadratum ex ΜΞ ad quadratum differentiæ inter ΜΞ, ΜΝ. Sed quadratum ex ΑΓ est ad quadratum ex ΒΚ (per 8^{vam} hujus) sicut rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ: est igitur ex æquo quadratum ex ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΒΚ & ξ sicut rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum differentiæ inter ΜΞ & ΜΝ. Q. E. D.

PROPOSITIO XVII.

Iisdem manentibus quæ in sextâ & septimâ hujus descripsimus. Dico quadratum ex ΑΓ esse ad quadratum summæ diametri ΒΚ & lateris ejus recti ξ sicut rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum summæ ipsarum ΜΞ, ΜΝ simul sumptarum.

Quoniam enim (per dictas 6^{tam} & 7^{mam}) ΒΚ est ad ξ sicut ΜΞ ad ΜΝ, erit componendo quadratum ex ΒΚ ad quadratum utriusque ΒΚ & ξ simul sumptæ, sicut quadratum ex ΜΞ ad quadratum ex ipsis ΜΞ, ΜΝ simul sumptis. Est autem quadratum ex ΑΓ (per 8^{vam} hujus) ad quadratum ex ΒΚ ut rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ: quocirca ex æquo quadratum ex ΑΓ erit ad quadratum summæ ipsarum ΒΚ & ξ sicut rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ipsis ΜΞ, ΜΝ simul sumptis. Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

Iisdem etiam manentibus. Dico quadratum Axis ΑΓ esse ad rectangulum sub diametro ΒΚ & latus ejus rectum ξ sicut ΝΓ ad ΜΝ.

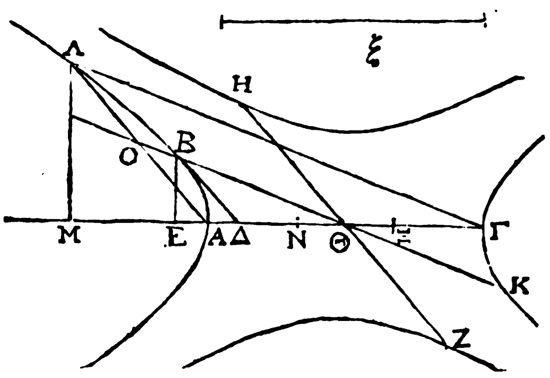
Quoniam enim quadratum ex ΑΓ (per 8^{vam} hujus) est ad quadratum ex ΒΚ sicut ΝΓ ad ΜΞ; & quadratum ex ΒΚ est ad rectangulum sub ΒΚ & ξ sicut ΒΚ ad ξ, hoc est (per 6^{tam} & 7^{mam} hujus) sicut ΜΞ ad ΜΝ: erit ex æquo quadratum ex ΑΓ ad rectangulum sub ΒΚ, ξ sicut ΝΓ ad ΜΝ. Q. E. D.

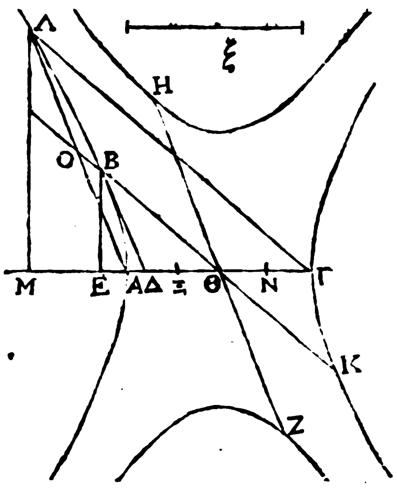
PROPO-

PROPOSITIO XIX.

Iisdem etiam manentibus. Dico quadratum ex AΓ esse ad quadrata ex utraque BK & ξ simul sumpta sicut rectangulum sub NΓ, MΞ ad quadrata ex utraque MN, MΞ simul sumpta.

Quoniam enim quadratum ex AΓ est ad quadratum ex BK (per 8^{vam} hujus) sicut rectangulum sub NΓ, MΞ ad quadratum ex MΞ; & quadratum ex BK est ad summam quadratorum ex BK & ξ sicut quadratum ex MΞ ad quadrata ex utraque MN, MΞ simul sumpta; nam per demonstrata in sexta & septima hujus, BK est ad ξ ut MΞ ad MN: erit igitur ex æquo quadratum ex AΓ ad utrumque quadratum ex BK & ξ simul sicut rectangulum sub ΓN, MΞ ad quadrata ex utraque MN, MΞ simul sumpta. Q. E. D.





PROPOSITIO XX.

Iisdem etiam manentibus. Dico quadratum ex AΓ esse ad differentiam quadratorum ex BK & ξ sicut rectangulum sub NΓ, MΞ ad differentiam quadratorum ex MN, MΞ.

Quoniam enim (per 8^{vam} hujus) quadratum ex AΓ est ad quadratum ex BK sicut rectangulum sub NΓ, MΞ ad quadratum ex MΞ; ac (per sextam & septimam hujus) BK est ad ξ sicut MΞ ad MN: erit quadratum ex BK ad differentiam quadratorum ex BK & ξ sicut quadratum ex MΞ ad differentiam quadratorum ex MΞ & MN. Ex æquo igitur erit quadratum ex AΓ ad differentiam quadratorum ex BK & ξ ut rectangulum sub ΓN, MΞ ad differentiam quadratorum ex MN, MΞ. Q. E. D.

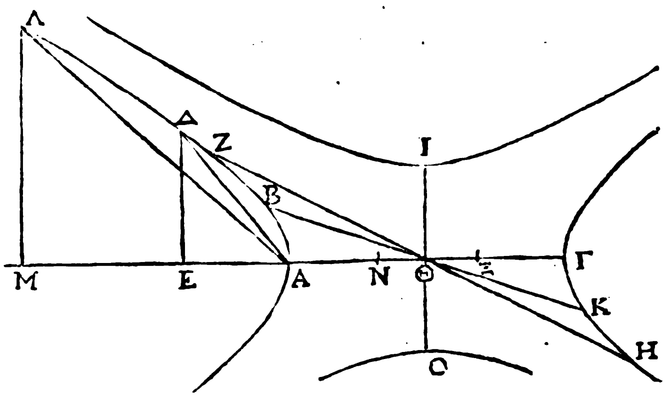
PROPOSITIO XXI.

In Hyperbola si fuerit Axis transversus major Axe recto: diameter omnis transversa, è diametris conjugatis sectionis, major erit diametro ejus ὀρθίᾳ: & ratio Axis majoris ad minorem major erit ratione cujusvis alterius diametri transversæ ad diametrum ὀρθίαν conjugatam: ac ratio cujusvis diametri transversæ Axi majori propioris, ad diametrum cum eâ conjugatam major erit ratione diametri transversæ ab Axe remotioris ad diametrum ὀρθίαν cum eadem conjugatam.

Sint Hyperbolæ Axes AΓ, IO, ac sint diametri duæ transversæ BK, ZH: sit autem AΓ major quam IO. Dico diametrum BK majorem esse diametro ὀρθίᾳ cum eadem conjugatâ, pariterque ZH majorem esse diametro ejus ὀρθίᾳ: rationem autem AΓ ad IO majorem esse ratione BK ad diametrum ὀρθίαν cum eâ conjugatam, vel ratione ZH ad conjugatam ejus: denique rationem diametri BK Axi propioris ad conjugatam ejus majorem esse ratione diametri ZH ad ὀρθίαν cum eadem conjugatam.

 Fiat

Fiat utraque ΓΝ ad ΑΝ & ΑΞ ad ΓΞ sicut Axis ΑΓ ad latus ejus rectum: & proinde ΑΝ, ΓΞ erunt rectæ quas Homologas voco. Ducatur ΑΔ parallela rectæ quæ contingit sectionem in puncto Β, ac sit ΑΛ parallela tangenti sectionem in puncto Ζ, & demittantur normales ad Axem majorem ut ΔΕ, ΛΜ: erit igitur quadratum ex ΒΚ (per 6^{am} hujus) ad quadratum diametri ὀρθίας cum eadem conjugatæ sicut ΞΕ ad ΕΝ; pariterque quadratum ex ΖΗ erit ad quadratum conjugatæ ejus ut ΞΜ ad ΜΝ. Quapropter ΒΚ major est ὀρθίᾳ ejus conjugatâ, ut & ΖΗ major conjugatâ cum eadem. Est autem ΑΓ ad latus ejus rectum sicut ΓΝ ad ΑΝ, vel ΑΞ ad ΞΓ; quia ΓΝ, ΑΞ æquales sunt, & ratio utriusque ad ΑΝ eadem est: ratio autem ΞΕ ad ΕΝ minor est ratione ΞΑ ad ΑΝ; ac proinde ratio ΞΑ ad ΓΞ major est ratione ΞΕ ad ΕΝ. Ac pari modo probabitur rationem ΞΑ ad ΓΞ majorem esse ratione ΞΜ ad ΜΝ. Verum ΞΑ est ad ΓΞ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΙΟ, quia utraque ratio (per 16^{am} primi) eadem est ac ratio ipsius ΑΓ ad latus ejus rectum: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΙΟ major est ratione ΞΕ ad ΕΝ, vel ratione ΞΜ ad ΜΝ. Est autem ΞΕ ad ΕΝ ut quadratum ex ΒΚ ad



quadratum diametri ὀρθίας cum eadem conjugatæ, & ΜΞ est ad ΜΝ ut quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex conjugatâ illius: quapropter ratio quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΙΟ major est ratione quadrati ex ΒΚ ad quadratum diametri cum eadem conjugatæ; ac major ratione quadrati ex ΖΗ ad quadratum conjugatæ cum eadem: unde & laterum, sive ratio ΑΓ ad ΙΟ major est ratione ΒΚ ad suam conjugatam, vel ratione ΖΗ ad suam. Cum autem ratio ΞΕ ad ΕΝ, sive quadrati ex ΒΚ ad quadratum conjugatæ ejus, major sit ratione ΞΜ ad ΜΝ, sive quadrati ex ΖΗ ad quadratum conjugatæ ejus; erit ratio diametri ΒΚ ad ejusdem conjugatam major ratione diametri ΖΗ ad conjugatam ejus. Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

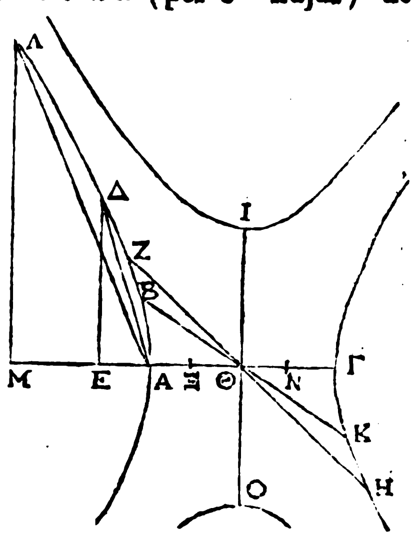
SI vero Axis transversus Hyperbolæ minor sit Axe ὀρθίῳ: erit quælibet diameter transversa minor diametro ὀρθίᾳ cum eadem conjugatâ; ac ratio axis minoris ad majorem minor erit ratione cujusvis diametri transversæ ad suam ὀρθίαν conjugatam; & ratio diametri Axi minori propioris ad suam conjugatam minor erit ratione diametri remotioris ab eadem ad suam conjugatam.

Sint Hyperbolæ Axes ΑΓ, ΟΙ, & centrum Θ; sintque ΒΚ, ΖΗ duæ quælibet diametri: minor autem sit ΑΓ quam ΙΟ. Dico utramque ΒΚ, ΖΗ minorem esse diametro ὀρθίᾳ cum illis respective conjugatâ; ac rationem ΑΓ ad ΙΟ minorem esse ratione ΒΚ ad diametrum cum illâ conjugatam, ut & ratione ΖΗ ad conjugatam suam: & rationem ipsius ΒΚ ad suam conjugatam minorem esse ratione diametri ΖΗ ad suam conjugatam.

Fiat ΓΝ ad ΝΑ sicut Axis ΑΓ ad latus ejus rectum, & in eadem ratione capiatur ΑΞ ad ΞΓ; & erunt ΞΓ, ΑΝ rectæ quas Homologas vocamus: ducatur etiam ΑΔ parallela rectæ quæ contingit sectionem in puncto Β, ut & ΑΛ parallela tangenti sectionis in puncto Ζ; & de punctis Δ, Λ Axi normales sint ΔΕ, ΛΜ. Jam quadratum diametri ΒΚ est ad quadratum diametri ὀρθίας cum eadem conjugatæ (per 6^{am} hujus) sicut ΞΕ ad ΕΝ; pariterque quadratum ex ΖΗ ad quadratum conjugatæ ejus est ut ΞΜ ad ΜΝ: unde manifestum est diametrum ΒΚ minorem esse diametro ὀρθίᾳ cum eadem conjugatâ, ac diametrum ΖΗ minorem esse conjugatâ ejus. Quinetiam quia ΓΑ est ad latus ejus rectum sicut ΓΝ ad ΝΑ, ac ΞΑ est ad ΓΞ in eadem ratione; erit ΓΝ ipsi ΑΞ æqualis, eademque erit utriusque ratio ad

rectam

rectam ΑΝ. Ratio autem ΞΒ ad ΕΝ major est ratione ΞΑ ad ΑΝ; adeoque ratio ΞΕ ad ΕΝ major est ratione ΓΝ ad ΝΑ. Sed ΞΕ est ad ΕΝ (per 6am hujus) ut quadratum ex ΒΚ ad quadratum conjugatæ ejus; ac ΓΝ est ad ΝΑ (per 16am primi) ut quadratum Axis transversi ΑΓ ad quadratum Axis ὀρθίας: ratio igitur ipsius ΑΓ ad Axem ὄρθιον conjugatum minor est ratione diametri ΒΚ ad diametrum cum eadem conjugatam; ac pari argumento minor erit ratione ΖΗ ad diametrum rectam cum eadem conjugatam. Quoniam vero ratio ΞΕ ad ΕΝ minor est ratione ΞΜ ad ΜΝ; ac ΞΕ est ad ΕΝ ut quadratum ex ΒΚ ad quadratum conjugatæ ejus; & ΞΜ est ad ΜΝ ut quadratum ex ΖΗ ad quadratum diametri cum eadem conjugatæ: erit ratio diametri ΚΒ ad suam ὀρθίαν conjugatam minor ratione diametri ΖΗ ad conjugatam ejus. Q. E. D.



PROPOSITIO XXIII.

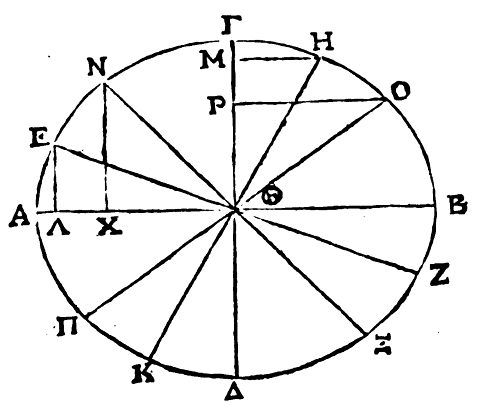
Si vero Axes Hyperbolæ fuerint æquales, diametri quoque omnes conjugatæ erunt inter se æquales.

Manente enim Schemate Propositionis 21mæ, si fuerit ΑΓ ipsi ΟΙ æqualis, erit etiam ΑΓ (per 16am primi) æqualis lateri recto. Est autem ΑΘ ipsi ΘΓ æqualis, quarum quoque utraque recta est Homologa, quia sunt inter se sicut diameter transversa ΑΓ ad latus ejus rectum: quadratum vero ex ΒΚ est ad quadratum diametri ὀρθίας cum eadem conjugatæ sicut ΘΕ ad ΕΘ, sive ut æqualis ad æqualem; quadratum quoque ex ΖΗ est ad quadratum conjugatæ ejus ut ΘΜ ad ΜΘ. Utraque igitur diameter ΒΚ, ΖΗ æqualis est conjugatæ suæ, ac proinde lateri ejus recto. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

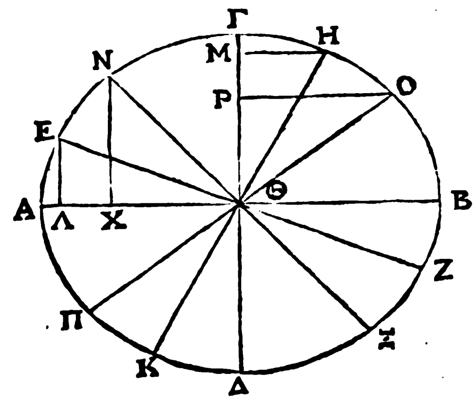
Si ducantur diametri quævis conjugatæ in Ellipsi: erit ratio diametri majoris ad conjugatam suam minorem, minor ratione Axis longioris ad Axem minorem; ac ratio diametri majoris, Axi sectionis longiori propioris, ad diametrum conjugatam ejus minorem, major erit ratione diametri majoris ab Axe longiore remotioris ad conjugatam suam.

Sit ΑΒ Axis longior Ellipseos, ac ΓΔ Axis minor; ac sint sectionis diametri conjugatæ ΕΖ, ΗΚ; ΞΝ, ΠΟ, quarum ΕΖ major sit conjugatâ ejus ΗΚ, ac ΞΝ major conjugatâ ΟΠ: & de punctis Ε, Ν ad Axem ΑΒ demittantur normales ΕΛ, ΝΧ; & de punctis Η, Ο ducantur ad Axem ΓΔ normales ΗΜ, ΟΡ. Jam rectangulum ΑΘΒ (per 21am primi) est ad quadratum ex ΘΓ sicut rectangulum ΑΛΒ ad quadratum ex ΛΕ; rectangulum autem ΑΘΒ majus est quadrato ex ΘΓ: adeoque rectangulum ΑΛΒ majus est quadrato ex ΛΕ; unde ΑΘ major erit quam ΘΕ. [*Nam si fiat quadratum ex ΘΛ commune, rectangulum ΑΛΒ una cum quadrato ex ΘΛ, hoc est quadratum ex ΘΑ, majus erit quadratis ex ΕΛ, ΛΘ simul sumptis, sive quadrato ex ΘΕ,*] ac ΑΒ major erit quam ΖΕ. Rectangulum etiam ΓΘΔ est ad quadratum ex ΘΒ sicut rectangulum ΓΜΔ ad quadratum ex ΜΗ, & rectangulum ΓΘΔ minus est quadrato ex ΘΒ; quare



rectangulum ΓΜΔ minus est quadrato ex ΜΗ, ac proinde ΘΔ minor erit quam ΘΗ ac ΓΔ minor quam ΗΚ. Est autem ΑΒ major quam ΕΖ, adeoque ratio ΑΒ ad ΓΔ major est ratione ΕΖ ad ΗΚ, ac diameter ΕΖ conjugata est cum diametro ΗΚ, quæ nempe parallela est rectæ sectionem contingenti in puncto Ε.

Diameter autem ΟΠ conjugata est cum diametro ΝΞ, sive *parallela* rectæ sectionem tangenti in puncto Ν; diameter igitur ΟΠ propior est Axi majori ΑΒ quam ΚΗ: ac rectangulum ΑΛΒ est ad rectangulum ΑΧΒ (per 21^{am} primi) ut quadratum ex ΛΕ ad quadratum ex ΝΧ; & rectangulum ΑΧΒ majus est rectangulo ΑΛΒ; quare quadratum ex ΝΧ majus est quadrato ex ΕΛ, & excessus rectanguli ΑΧΒ supra rectangulum ΑΛΒ major est excessu quadrati ex ΝΧ supra quadratum ex ΕΛ. Constat etiam rectangulum ΑΧΒ majus esse quadrato ex ΝΧ. Excessus autem rectanguli ΑΧΒ supra rectangulum ΑΛΒ æqualis est excessui quadrati ex ΘΛ supra quadratum ex ΘΧ; excessus igitur quadrati ex ΘΛ supra quadratum ex ΘΧ major est excessu quo quadratum ex ΝΧ superat quadratum ex ΕΛ; adeoque quadrata ex ΘΛ, ΛΕ simul sumpta majora sunt quadratis ex ΘΧ, ΧΝ simul; ac proinde ΘΕ major est quam ΘΝ, ac diameter ΕΖ major diametro ΝΞ. Pari argumento rectangulum ΓΡΔ est ad rectangulum ΓΜΔ (per 21^{am} primi) sicut quadratum ex ΟΡ ad quadratum ex ΗΜ, & rectangulum ΓΡΔ minus est quadrato *ex* ΟΡ, *uti rectangulum* ΓΜΔ *minus est quadrato* ex ΗΜ; quare excessus quo rectangulum ΓΡΔ superat rectangulum ΓΜΔ minor est excessu quadrati ex ΟΡ supra quadratum ex ΗΜ. Excessus autem rectanguli ΓΡΔ supra rectangulum ΓΜΔ æqualis est excessui quadrati ex ΘΜ supra quadratum ex ΘΡ; quare excessus quadrati ex ΘΜ supra quadratum ex ΘΡ minor est excessu quadrati ex ΟΡ supra quadratum ex ΗΜ; atque adeo quadrata ex ΘΜ, ΜΗ simul sumpta minora sunt quadratis ex ΘΡ, ΡΟ simul sumptis: quapropter recta ΘΗ minor est quam ΘΟ, diameterque ΗΚ minor diametro ΟΠ. Quoniam vero diameter ΕΖ conjugata cum ΗΚ major est diametro ΞΝ conjugatâ cum ΟΠ, ac ΗΚ minor est quam ΟΠ; erit ratio diametri ΕΖ ad conjugatam ejus ΗΚ major ratione diametri ΞΝ ad conjugatam ejus ΟΠ.



Hinc etiam manifestum est excessum Axis ΑΒ supra Axem ΓΔ majorem esse excessu diametri ΕΖ supra ΗΚ, excessumque ipsius ΕΖ supra ΗΚ majorem esse excessu diametri ΞΝ supra ΟΠ. Excessus quoque quadrati ex ΑΒ supra quadratum ex ΓΔ major erit excessu quadrati ex ΕΖ supra quadratum ex ΗΚ, qui major est excessu quadrati ex ΞΝ supra quadratum ex ΟΠ.

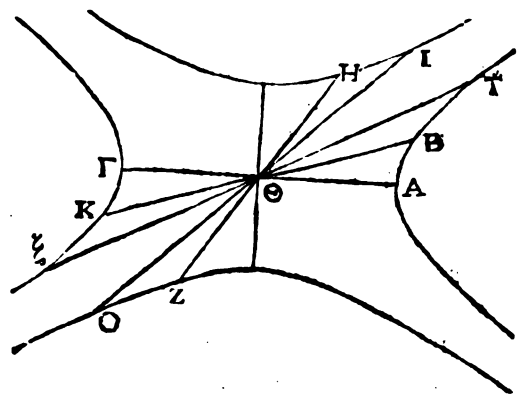
Dico quoque illam quæ cum ΑΒ continet figuram sectionis minorem esse eâ quæ cum ΕΖ continet figuram sectionis; illam etiam quæ cum ΕΖ continet figuram sectionis minorem esse eâ quæ cum ΞΝ ejusdem figuram continet: ut & illam quæ cum ΞΝ continet figuram ejus minorem esse eâ quæ cum Axe breviore ΓΔ sectionis figuram continet. Nam Axis ΑΒ major est quam ΟΠ, & ΟΠ quam ΗΚ, & ΗΚ quam ΓΔ; ac ΞΝ minor est quam ΕΖ, & ΕΖ quam ΑΒ: quadratum autem ex ΑΒ æquale est rectangulo sub ΓΔ & eâ quæ cum ΓΔ continet figuram sectionis, per 15^{am} primi; & quadratum ex ΟΠ æquale est figuræ sectionis quæ fit super ΞΝ; *& quadratum ex* ΗΚ *æquale est figuræ sectionis super* ΕΖ factæ; uti quadratum ex ΓΔ æquale est figuræ super Axe ΑΒ factæ. *Figura igitur major applicata ad rectam minorem producit altitudinem majorem, quam quæ producitur applicatione figuræ minoris ad majorem.* Ergo constat Propositio.

PROPOSITIO XXV.

IN Hyperbola summa duorum Axium minor est summâ duarum quarumvis diametrorum conjugatarum: & diameter omnis transversa, quæ propior est Axi transverso sectionis, una cum suâ conjugatâ

conjugatâ simul sumpta, minor est diametro quavis transversâ ab Axe magis remotâ una cum conjugata ejus simul sumptâ.

Sit Hyperbolæ Axis transversus ΑΓ, & centrum Θ: aliæ vero diametri conjugatæ sint ΒΚ, ΗΖ; ΤΞ, ΙΟ. Axis autem ΑΒ vel æqualis erit Axi ὀρθῷ, vel non erit eidem æqualis. Si vero æqualis fuerit ei, erunt (per 23^am hujus) diametri ΚΒ, ΗΖ æquales, pariterque diameter ΤΞ æqualis erit diametro ΙΟ. Sed diameter ΚΒ major est Axe ΓΑ, ac diameter ΤΞ major diametro ΚΒ. Ergo constat Propositio.

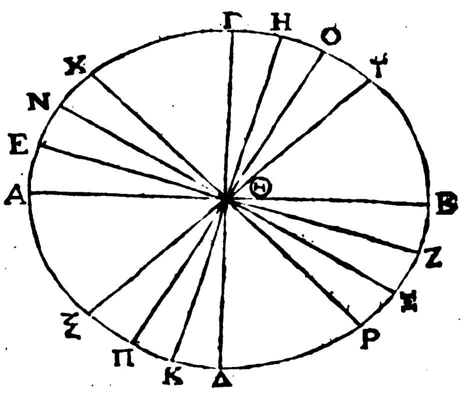


Si vero Axis ΑΓ non fuerit æqualis alteri sectionis Axi, erit differentia quadratorum Axis ΑΓ & alterius Axis sectionis æqualis differentiæ quadratorum ex diametris conjugatis ΚΒ, ΖΗ, per 13^am hujus: recta igitur utrique Axi æqualis minor erit rectâ utrisque ΚΒ, ΖΗ æquali. Quoniam autem differentia quadratorum ex ΒΚ, ΖΗ æqualis est differentiæ quadratorum ex ΤΞ, ΙΟ, *ac* ΤΞ *major est quam* ΒΚ; erit recta æqualis utrique diametro ΒΚ, ΖΗ minor rectâ utrique diametro ΤΞ, ΙΟ æquali. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVI.

IN Ellipsi axes duo simul sumpti minores sunt quibusvis aliis duabus diametris conjugatis sectionis simul sumptis: diametrique duæ conjugatæ Axibus propiores simul sumptæ minores sunt diametris conjugatis ab iisdem remotioribus simul: diametri autem conjugatæ, quæ sunt inter se æquales, simul sumptæ majorem efficiunt summam quam diametri quævis aliæ conjugatæ.

Sit Ellipseos Axis major ΑΒ, minor ΓΔ: sint etiam ΖΕ, ΚΗ; ΝΞ, ΟΠ; ΤΞ, ΧΡ diametri conjugatæ; ac sit ΕΖ major quam ΚΗ, & ΝΞ major quam ΟΠ; ΧΡ vero æqualis sit diametro ΤΞ. Dico rectam utrique Axi ΑΒ, ΓΔ æqualem minorem esse rectâ diametris ΕΖ, ΗΚ æquali; ut & rectâ utrisque ΝΞ, ΟΠ æquali: omnium autem maximam summam esse diametrorum æqualium ΧΡ, ΤΞ.



Quoniam enim ratio ΑΒ ad ΓΔ (per 24^am hujus) major est ratione ΕΖ ad ΚΗ, erit ratio summæ quadratorum ex ipsis ΑΒ, ΓΔ ad quadratum rectæ compositæ ex utrâque ΑΒ, ΓΔ (*per Lemm.* VIII. *Abdol.*) major ratione summæ quadratorum ex ΕΖ, ΚΗ ad quadratum ipsarum ΕΖ, ΚΗ simul sumptarum. Quadrata autem ex ΕΖ, ΚΗ simul sumpta (per 12^am hujus) æqualia sunt utrique quadrato ex ΑΒ, ΓΔ simul: quadratum igitur compositæ ex ΑΒ, ΓΔ simul minus est quadrato compositæ ex ipsis ΖΕ, ΚΗ. Summa igitur Axium ΑΒ, ΓΔ minor est recta æquali diametris ΕΖ, ΚΗ simul sumptis. Pari modo demonstrabitur summam ipsarum ΕΖ, ΚΗ minorem esse *diametris* ΝΞ, ΟΠ *simul sumptis*; *ipsasque* ΝΞ, ΟΠ *simul* minores esse diametris æqualibus conjugatis ΧΡ, ΤΞ simul sumptis. Q. E. D.

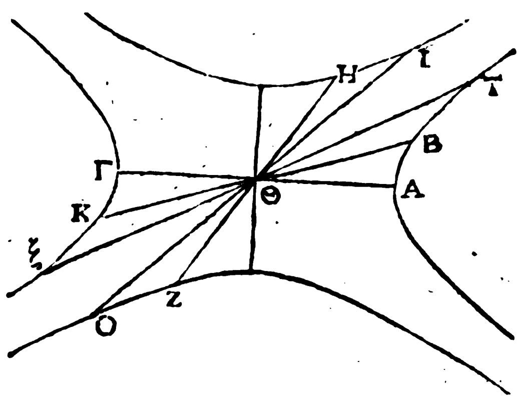
PROPOSITIO XXVII.

IN omni Ellipsi vel Hyperbola, cujus Axes sunt inæquales, excessus Axis majoris supra minorem major est excessu cujusvis alterius diametri supra conjugatam suam: & excessus diametri

 Axi

Axi majori propioris supra suam conjugatam major est excessu remotioris ab eadem supra diametrum cum eadem conjugatâ.

Hoc autem in Ellipsi manifestum est per demonstrata in 24ª hujus. In Hyperbola vero hunc in modum probabitur. Sit ΑΓ Axis Hyperbolæ in qua sint diametri conjugatæ ΚΒ, ΖΗ; ξΤ, ΙΟ. Dico differentiam inter ΑΓ & Axem alterum sectionis majorem esse differentia inter ΚΒ & ΖΗ; & differentiam inter ΚΒ, ΖΗ majorem esse differentia inter ξΤ & ΙΟ.

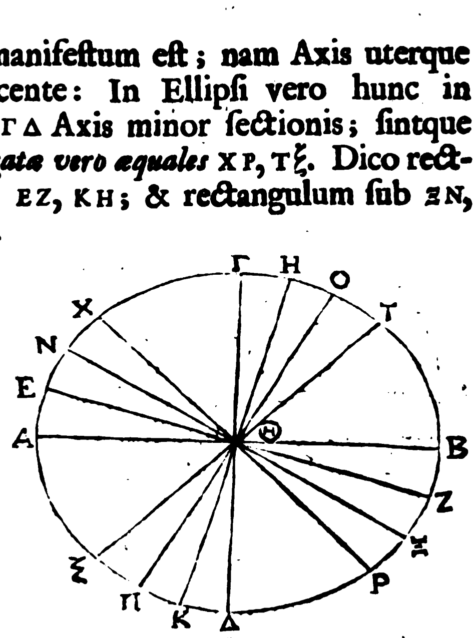


Quoniam enim differentia inter quadratum ex ΑΓ & quadratum alterius Axis sectionis (per 13ªᵐ hujus) æqualis est differentiæ inter quadrata ex ΚΒ & ΖΗ, ac diameter ΚΒ major est Axe: erit differentia inter ΑΓ & Axem cum eodem conjugatam major differentia inter ΚΒ & ΖΗ. Eodemque modo probabitur differentiam inter ΚΒ & ΖΗ majorem esse differentiâ inter ξΤ & ΙΟ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

IN omni Hyperbola vel Ellipsi, rectangulum sub Axibus contentum minus erit contento sub quibuslibet aliis diametris conjugatis: contentaque sub diametris conjugatis, quæ propiores sunt sectionis Axibus, minora erunt contentis sub conjugatis remotioribus ab iisdem.

Hoc autem in Hyperbola ex præcedentibus manifestum est; nam Axis uterque minor est qualibet aliâ diametro eidem adjacente: In Ellipsi vero hunc in modum demonstrabitur. Sit ΑΒ Axis major & ΓΔ Axis minor sectionis; sintque diametri ejus conjugatæ ΕΖ, ΚΗ; ΝΞ, ΟΠ; *conjugatæ vero æquales* ΧΡ, Τξ. Dico rectangulum sub ΑΒ, ΓΔ minus esse rectangulo sub ΕΖ, ΚΗ; & rectangulum sub ΞΝ, ΟΠ minus esse rectangulo contento sub ΧΡ, Τξ.



Quoniam enim Axes ΑΒ, ΓΔ simul sumpti (per 26ªᵐ hujus) minores sunt diametris conjugatis ΕΖ, ΚΗ simul; quadratum etiam summæ ipsarum ΑΒ, ΓΔ minus erit quadrato ex ΕΖ, ΚΗ simul sumptis. Quadrata autem ex ΑΒ & ΓΔ simul (per 12ᵐªᵐ hujus) æqualia sunt summæ quadratorum ex ΕΖ, ΚΗ: quibus utrinque sublatis, duplum rectangulum sub ΑΒ, ΓΔ minus erit duplo rectangulo sub ΕΖ, ΚΗ; adeoque rectangulum sub ΑΒ, ΓΔ minus est rectangulo sub ΕΖ, ΚΗ. Pari argumento constabit rectangulum sub ΕΖ, ΚΗ minus esse contento sub ΝΞ, ΟΠ, ac rectangulum sub ΝΞ, ΟΠ minus esse rectangulo sub *æqualibus conjugatis* ΧΡ Τξ contento; *quod proinde rectangulum maximum est*. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

IN Hyperbola, differentia inter figuram sectionis super diametrum quamlibet factam & ejusdem diametri quadratum ubique æqualis est. Vide figuram Prop. XXVII.

Sit Hyperbolæ Axis ΑΓ & centrum Θ; sint autem in eâ diametri conjugatæ ΒΚ, ΖΗ; ξΤ, ΟΙ. Dico differentiam inter figuram sectionis super ΑΓ factam & quadratum ex ΑΓ æqualem esse differentiæ inter figuram sectionis super ΒΚ factam

&

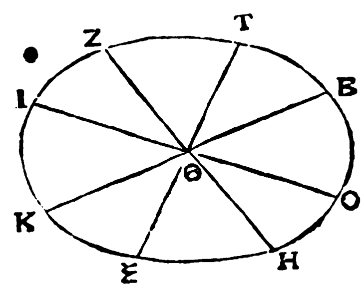
& quadratum ex BK; ut & differentiæ inter quadratum ex ξT & figuram super ξT factam.

Quoniam enim differentia inter quadratum ex AΓ & quadratum alterius Axis sectionis æqualis est differentiæ inter quadrata ex KB & ZH; atque etiam (per 13^{am} hujus) differentiæ inter quadrata ex ξT & OI: ac figura sectionis super AΓ facta æqualis est quadrato alterius Axis (per 16^{mam} primi) sicut figura sectionis super KB facta æqualis est quadrato ex ZH; & figura sectionis super ξT æqualis est quadrato ex OI: differentia igitur inter figuram sectionis super AΓ factam & quadratum ejusdem AΓ æqualis est differentiæ inter figuram sectionis super BK factam & quadratum ex BK; eademque æqualis est differentiæ inter figuram super ξT factam & quadratum ipsius ξT. Q. E. D.

PROPOSITIO XXX.

IN Ellipsi vero, si adjiciatur figuræ super quamvis diametrum factæ quadratum ejusdem diametri, fiet summa semper æqualis.

Sit centrum Ellipseos Θ, & diametri ejus conjugatæ BK, ZH; ξT, OI. Dico figuram sectionis super BK factam una cum quadrato ex BK æqualem esse figuræ sectionis super ξT factæ una cum quadrato ex ξT.

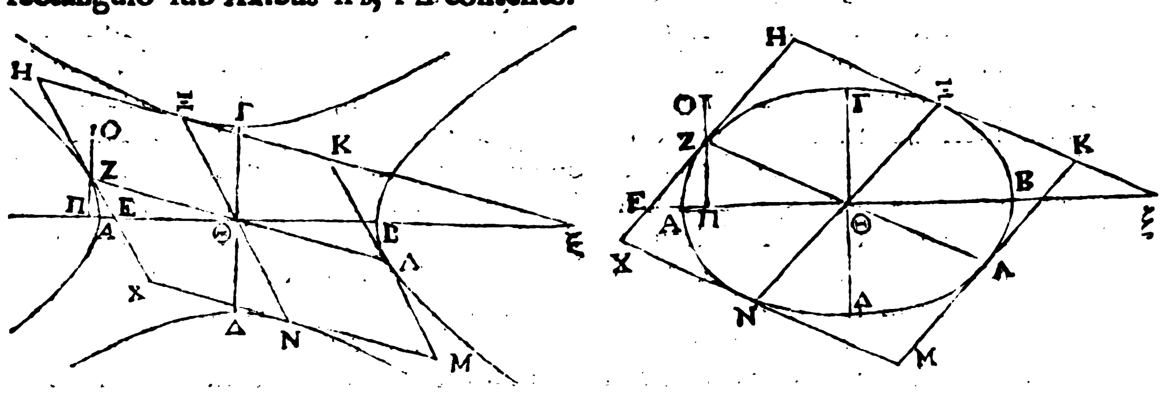


Quoniam enim quadratum ex BK una cum quadrato ex ZH (per 12^{mam} hujus) æquale est quadrato ex ξT una cum quadrato ex OI; ac figura sectionis super BK facta æqualis est quadrato ex ZH, uti & quadratum ex OI (per 15^{am} primi) æqualis est figuræ sectionis super ξT factæ: figura igitur super BK facta una cum quadrato ex BK æqualis est figuræ super ξT factæ una cum quadrato ex ξT. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

SI ducantur diametri quævis conjugatæ in Ellipsi, vel inter sectiones oppositas conjugatas; erit parallelogrammum contentum sub his diametris æquale rectangulo sub ipsis Axibus facto: modo anguli ejus æquales sint angulis ad centrum sectionis à diametris conjugatis comprehensis.

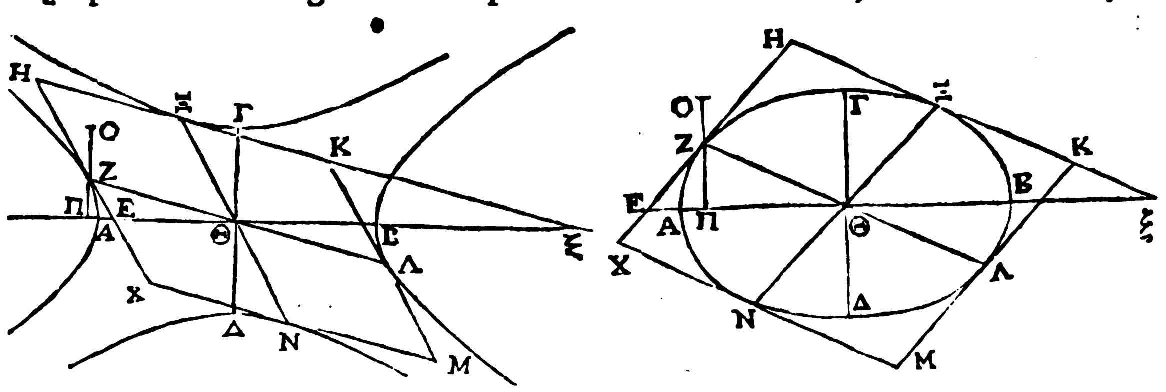
Sit Ellipseos vel Sectionum oppositarum conjugatarum centrum Θ, Axes autem sint AB, ΓΔ, ac diametri quævis conjugatæ ZΛ, ΞN. Per puncta Z, Λ; Ξ, N ducantur tangentes HX, KM; HK, XM; erunt igitur HX, KM diametro ΞN parallelæ, ut rectæ HK, XM (per 6^{am} & 20^{mam} secundi) diametro ZΛ parallelæ sunt.: erit quoque HM parallelogrammum, cujus anguli æquales sunt angulis à diametris conjugatis ZΛ, ΞN ad centrum Θ contentis. Dico ideo parallelogrammum HM æquale esse rectangulo sub Axibus AB, ΓΔ contento.



Occurrant Axi transverso AB parallelæ HX, HK in punctis E & ξ; & de puncto Z demittatur ad Axem AΘB normalis ZΠ; ac fiat ΠO media proportionalis inter

 ipsas

ipsas ΕΠ, ΠΘ: & erit (per 37^{am} primi) quadratum ex ΑΘ ad quadratum ex ΘΓ sicut rectangulum ΘΠΕ ad quadratum ex ΖΠ. Rectangulum autem ΘΠΕ æquale est quadrato ex ΟΠ; quare quadratum ex ΑΘ est ad quadratum ex ΘΓ ut quadratum ex ΠΟ ad quadratum ex ΖΠ: unde etiam ΑΘ est ad ΘΓ sicut ΠΟ ad ΖΠ. Sed ΑΘ est ad ΘΓ ut quadratum ex ΑΘ ad rectangulum ΑΘΓ; ac ΟΠ est ad ΠΖ sicut rectangulum sub ΟΠ, ΘΕ ad rectangulum sub ΠΖ, ΘΕ: quadratum igitur ex ΑΘ est ad rectangulum ΑΘΓ ut rectangulum sub ΟΠ, ΘΕ ad rectangulum sub ΠΖ, ΘΕ; ac permutando erit quadratum ex ΑΘ ad rectangulum sub ΟΠ, ΘΕ sicut rectangulum ΑΘΓ ad rectangulum sub ΖΠ, ΘΕ. Quadratum autem ex ΑΘ (per trigesimam septimam primi) æquale est rectangulo ΕΘΠ; quare rectangulum ΕΘΠ est ad rectangulum sub ΟΠ, ΘΕ ut rectangulum ΑΘΓ ad rectangulum sub ΖΠ, ΘΕ. Verum recta ΘΞ parallela est ipsi ΖΕ, adeoque (per quartam hujus) quadratum ex ΖΕ est ad quadratum ex ΘΞ sicut ΕΠ ad ΠΘ: atque triangulum ΘΖΕ est ad triangulum ΘΞξ ut quadratum ex ΖΕ ad quadratum ex ΘΞ, ob similia triangula; adeoque triangulum ΘΖΕ est ad triangulum ΘΞξ, atque eorundem dupla, in ratione ΕΠ ad ΠΘ. Parallelogrammum autem ΞΘΖΗ medium proportionale est inter duplum trianguli ΘΖΕ & duplum trianguli ΞΘξ: [duplum enim trianguli ΘΖΕ ad planum ΘΗ est ut ΕΖ ad ΖΗ, sive ut ΕΘ ad Θξ; ac



planum ΘΗ est ad duplum trianguli ΞΘξ sicut ΗΞ ad Ξξ, sive ut ΘΕ ad Θξ.] Porro cum ΟΠ media proportionalis sit inter ΕΠ & ΠΘ; erit duplum trianguli ΘΖΕ ad parallelogrammum ΗΘ ut ΟΠ ad ΠΘ. Verum ΟΠ est ad ΠΘ ut rectangulum sub ΟΠ, ΘΕ ad rectangulum ΠΘΕ: ac jam demonstravimus rectangulum sub ΟΠ, ΘΕ esse ad rectangulum ΠΘΕ sicut rectangulum sub ΠΖ, ΘΕ ad rectangulum ΑΘΓ: duplum igitur trianguli ΘΖΕ *est ad parallelogrammum* ΘΗ sicut rectangulum sub ΖΠ, ΘΕ ad rectangulum ΑΘΓ. Sed duplum trianguli ΘΖΕ æquale est rectangulo sub ΖΠ, ΘΕ: quapropter parallelogrammum ΘΗ æquale est rectangulo ΑΘΓ; ac quadruplum plani ΘΗ, nempe parallelogrammum ΗΜ, æquale est quadruplo rectanguli ΑΘΓ, hoc est rectangulo contento sub Axibus ΑΒ, ΓΔ. Q. E. D.

Demonstravimus itaque, in præcedentibus Propositionibus, quod in omni Hyperbola quadrata Axium simul sumpta minora sunt quadratis ex quibusvis aliis diametris conjugatis sectionis: quodque quadrata diametrorum conjugatarum Axibus propiorum minora sunt quadratis diametrorum conjugatarum ab Axibus remotiorum: quodque in omni Ellipsi differentia inter quadrata Axium major est differentia quadratorum quarumvis diametrorum conjugatarum: quodque differentia inter quadrata diametrorum conjugatarum Axibus propiorum major est differentia quadratorum ex diametris conjugatis ab iisdem remotioribus: quodque in Hyperbola, si Axis, sive latus transversum figuræ sectionis super Axem factæ, major fuerit latere ejus recto, latus transversum figuræ super diametrum quamvis aliam factæ majus erit latere recto ejusdem: quodque ratio Axis transversi ad ejusdem latus rectum major erit ratione cujusvis alterius diametri transversæ ad latus rectum ejusdem: quodque ratio hæc, in figuris super diametros Axi propiores factis, major est ratione eâ in figuris super remotiores ab Axe factis. Si vero Axis, sive latus transversum figuræ sectionis, minor fuerit latere ejus recto; cæteræ diametri transversæ minores erunt earundem lateribus rectis; ac ratio Axis transversi

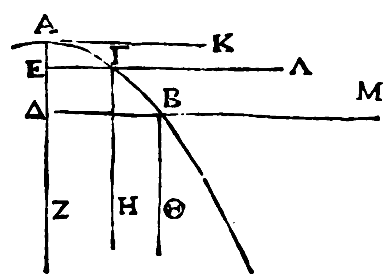
versi ad latus ejus rectum minor erit ratione cujusvis alterius diametri transversæ ad latus rectum figuræ super eandem diametrum factæ: atque hæc ratio, in figuris super diametros transversas Axi propiores factis, *minor* erit eâ quam habet latus transversum ad latus rectum in figuris super diametros ab Axe remotiores factis. Quod si figura sectionis super Axem facta æquilatera fuerit, figuræ cæteræ super reliquas diametros factæ erunt quoque æquilateræ.

Demonstratum etiam est, quod in omni Ellipsi, latus transversum figuræ sectionis, super diametrum quamlibet inter Axem majorem & diametros conjugatas æquales intermediam factæ, majus est latere recto ejusdem diametri: ac ratio quam habet diameter ad latus ejus rectum major est in iis quæ Axi majori propius adjacent, quam in iis quæ ab eodem longius absunt. E contrario vero latus transversum figuræ sectionis factæ super diametrum quamlibet, inter Axem minorem & diametros conjugatas æquales jacentem, minus est latere ejus recto: ac diametri quæ propiores sunt Axi minori, minores habent rationes ad latera sua recta, quam quæ remotiores sunt ab eodem. Hæc autem Corollaria sunt ad ea quæ demonstravimus in Propositionibus de diametris & figuris Sectionum.

PROPOSITIO XXXII.

IN omni Parabola latus rectum, sive ea juxta quam possunt ordinatim ad Axem applicatæ, minus est latere recto cujusvis alterius diametri; ac diametri sectionis quæ Axi propiores sunt minora habent latera recta quam quæ longius distant ab eodem.

Sit ΑΒ Parabola, cujus Axis ΑΖ, diametri autem aliæ sint ΒΘ, ΓΗ; latera vero recta, sive juxta quas possunt ordinatim ad eas applicatæ, sint ΑΚ, ΓΛ, ΒΜ. Dico ΑΚ minorem esse quam ΓΛ, ac ΓΛ minorem quam ΒΜ.

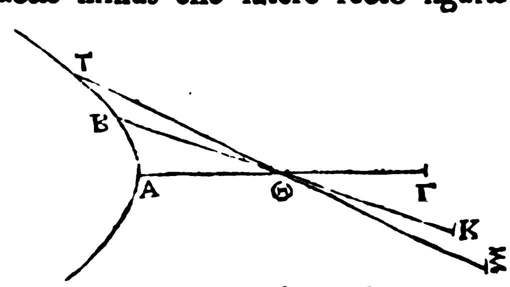


De punctis Β, Γ demittantur ad Axem normales ΒΔ, ΓΕ; & recta ΓΛ (per quintam hujus) æqualis erit ipsi ΑΚ una cum quadruplo ipsius ΑΕ. Pariter ΒΜ æqualis erit ipsi ΑΚ cum quadruplo ipsius ΑΔ. Quare ΑΚ minor est quam ΓΛ, ac ΓΛ quam ΒΜ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII.

IN Hyperbola, si latus transversum figuræ sectionis super Axem factæ non sit minus latere ejus recto; erit latus illud rectum figuræ super Axem minus latere recto cujusvis alterius figuræ super aliam quamvis diametrum sectionis factæ: & latus rectum figuræ super diametrum Axi propiorem factæ minus erit latere recto figuræ super remotiorem ab Axe factæ.

Sit Hyperbolæ Axis ΑΓ & centrum Θ; diametri autem aliæ sint ΚΒ, Τξ. Dico latus rectum figuræ sectionis super ΑΓ factæ minus esse latere recto figuræ super ΒΚ factæ; & latus rectum super ΒΚ factæ minus esse latere recto figuræ sectionis super Τξ factæ.



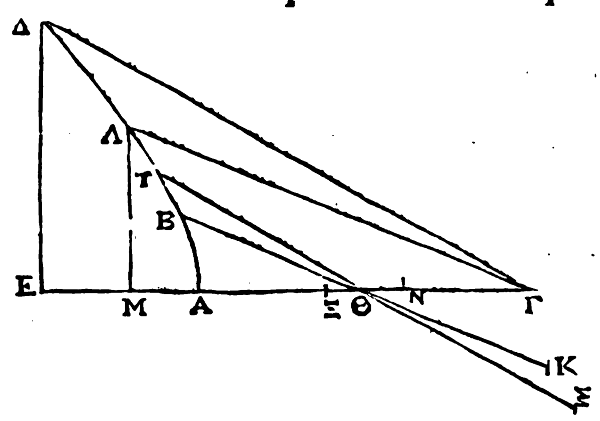
Ponatur imprimis Axis ΑΓ æqualis lateri recto figuræ sectionis super ΑΓ factæ; & erit ΒΚ æqualis lateri recto figuræ super illam factæ, per 23^tim hujus & 16^tam primi. Sed ΑΓ minor est quam ΒΚ: latus igitur rectum Axis ΑΓ minus est latere recto diametri ΒΚ. Quoniam etiam diameter Τξ æqualis est lateri recto figuræ super eam factæ; ac diameter ΚΒ minor est diametro ξΤ: latus rectum diametri ΚΒ minus erit latere recto ad diametrum ξΤ.

Si vero Axis ΑΓ major fuerit latere recto figuræ super Axem factæ, erit ratio ipsius ΑΓ ad latus ejus rectum (per 21^{am} hujus & 16^{mam} primi) major ratione diametri ΚΒ ad latus rectum ejusdem ΚΒ: ac pari argumento ratio ΚΒ ad latus ejus rectum major erit ratione Τξ ad latus rectum ejus. Sed ΑΓ minor est quam ΚΒ, ac ΚΒ minor quam Τξ. Quapropter latus rectum diametri ΑΓ minus est latere recto diametri ΚΒ; & latus rectum diametri ΚΒ minus latere recto diametri Τξ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIV.

QUinetiam si Axis ΑΓ minor fuerit latere recto figuræ super Axem factæ, non tamen minor dimidio ejusdem lateris recti. Dico quoque latus rectum figuræ super Axem factæ minus esse latere recto figuræ super ΚΒ factæ: ac latus rectum figuræ diametri ΚΒ minus esse latere recto figuræ diametri Τξ.

Fiat ΓΝ ad ΝΑ, ut & ΑΞ ad ΞΓ, sicut ΑΓ ad latus rectum figuræ Axis ΑΓ; & è puncto Γ educantur rectæ, ΓΛ ipsi ΚΒ parallela & ΓΔ ipsi ξΤ parallela; & de punctis Δ, Λ demittantur normales ad Axem ΔΕ, ΛΜ. Cum autem ΓΝ est ad ΝΑ, sicut & ΑΞ ad ΞΓ, in ratione Axis ΑΓ ad latus rectum figuræ ejus; erit ΓΝ ipsi ΑΞ æqualis, ut & ΓΞ ipsi ΑΝ; ac proinde quadratum ex ΑΓ erit ad quadratum lateris recti ejus ut rectangulum sub ΓΝ, ΑΞ ad quadratum ex ΑΝ. Sed Axis ΑΓ minor est latere recto ejus, at non minor dimidio lateris recti; quare ΑΝ major est quam ΑΞ, at non major duplo ejus. Verum rectæ ΜΝ, ΝΑ simul sumptæ majores sunt duplo ipsius ΑΝ; unde rectangulum sub ΜΝ, ΝΑ simul & ΑΞ majus est quadrato ex ΑΝ; [*quia ratio ipsarum* ΜΝ, ΝΑ *simul sumptarum ad rectam* ΑΝ *major est ratione ipsius* ΑΝ *ad* ΑΞ:] rectangulum igitur sub ΜΝ, ΝΑ simul & ΑΜ ad rectangulum sub ΜΝ, ΝΑ simul & ΑΞ, hoc est ΜΑ ad ΑΞ, est in minore ratione quam contentum sub ΜΝ, ΝΑ simul & ΑΜ ad quadratum ex ΑΝ: ac *componendo* ratio ΜΞ ad ΞΑ minor erit ratione rectanguli sub ΜΝ, ΝΑ simul & ΑΜ una cum quadrato ex ΑΝ ad quadratum ex ΑΝ. Est autem rectangulum sub ΜΝ, ΝΑ simul & ΑΜ una cum quadrato ex ΑΝ æquale quadrato ex ΜΝ, *per* 6. II. *Elem.*: quare ratio ΜΞ ad ΞΑ minor est ratione quadrati ex ΜΝ ad quadratum ex ΑΝ. Cum autem ΜΞ est ad ΞΑ ut rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum sub ΓΝ, ΑΞ; erit ratio rectanguli sub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum sub ΓΝ, ΑΞ minor ratione quadrati ex ΜΝ ad quadratum ex ΑΝ; ac permutando ratio rectanguli sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΝ minor erit ratione rectanguli sub ΓΝ, ΑΞ ad quadratum ex ΑΝ. Sed rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ (per 15^{am} hujus) est ad quadratum ex ΜΝ, ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum lateris recti diametri ΚΒ: ac rectangulum sub ΓΝ, ΑΞ est ad quadratum ex ΑΝ (per jam demonstrata) sicut quadratum Axis ΑΓ ad quadratum lateris recti figuræ Axis; ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad quadratum lateris recti diametri ΚΒ minor est ratione ejusdem quadrati ex ΑΓ ad latus rectum figuræ Axis: quare latus rectum Axis ΑΓ minus est latere recto diametri ΚΒ.



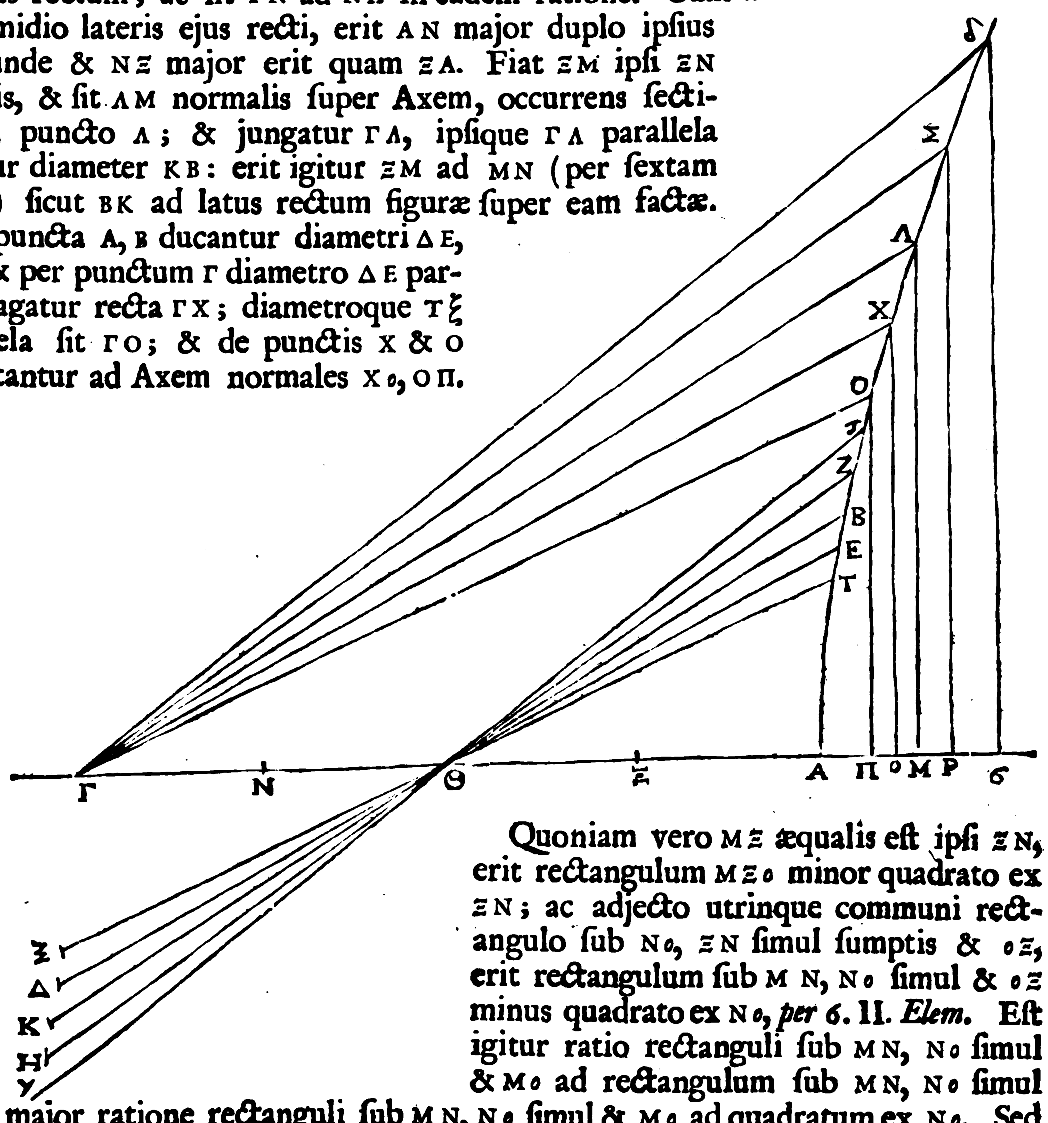
Quinetiam cum ΑΝ non sit major duplo ipsius ΑΞ, erit ΜΝ minor duplo rectæ ΜΞ; ipsæ autem ΕΝ, ΝΜ simul sumptæ majores sunt duplo rectæ ΜΝ; quare rectangulum sub ΜΞ & ΕΝ, ΝΜ simul majus est quadrato ex ΜΝ. Hinc ratio rectanguli sub ΝΕ, ΜΝ simul & ΜΕ ad rectangulum sub ΝΕ, ΜΝ simul & ΜΞ minor est ratione rectanguli sub ΝΕ, ΜΝ simul & ΜΕ, *ad quadratum ex* ΜΝ; *adeoque ratio* ΜΕ *ad* ΜΞ *minor est ratione rectanguli sub* ΝΕ, ΜΝ *simul &* ΜΕ *ad quadratum ex* ΜΝ; *ac componendo ratio* ΕΞ *ad* ΜΞ *minor erit ratione rectanguli sub* ΕΝ, ΝΜ *simul &* ΕΜ una cum quadrato ex ΜΝ, *hoc est* (*per* 6. II. *Elem.*) *quadrati ex* ΕΝ, ad quadratum ex ΜΝ: ratio itaque ΕΞ ad ΞΜ minor est ratione quadrati ex ΕΝ ad quadratum ex ΜΝ. Sed ΕΞ est ad ΞΜ ut rectangulum sub ΓΝ, ΞΕ ad rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ; quare ratio rectanguli sub ΓΝ, ΞΕ ad rectangulum sub ΓΝ, ΞΜ minor

minor est ratione quadrati ex EN ad quadratum ex MN. Permutando autem ratio rectanguli sub ΓN, ΞE ad quadratum ex EN minor est ratione rectanguli sub ΓN, ΞM ad quadratum ex MN. Verum rectangulum sub ΓN, ΞE (per 15^am hujus) eandem habet rationem ad quadratum ex EN quam habet quadratum ex Axe AΓ ad quadratum lateris recti diametri ξT; ac, per eandem, rectangulum sub ΓN, MΞ est ad quadratum ex MN ut idem quadratum ex AΓ ad quadratum lateris recti diametri BK. Ratio igitur quadrati ex AΓ ad quadratum lateris recti diametri ξT minor est ratione ejusdem ad quadratum lateris recti diametri BK: proinde latus rectum diametri BK minus est latere recto diametri ξT, uti latus rectum Axis AΓ minus est latere recto diametri KB. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXV.

SI vero Axis Hyperbolæ minor fuerit dimidio lateris recti figuræ super Axem factæ. Dico ab utraque Axis parte reperiri diametrum, cujus latus rectum diametri duplum est; atque hoc latus rectum minus esse quovis alio latere recto cujuscunque diametri ad idem sectionis latus ductæ; latera etiam recta diametrorum reliquarum his duabus utrinque propiorum minora esse lateribus rectis remotiorum ab iisdem.

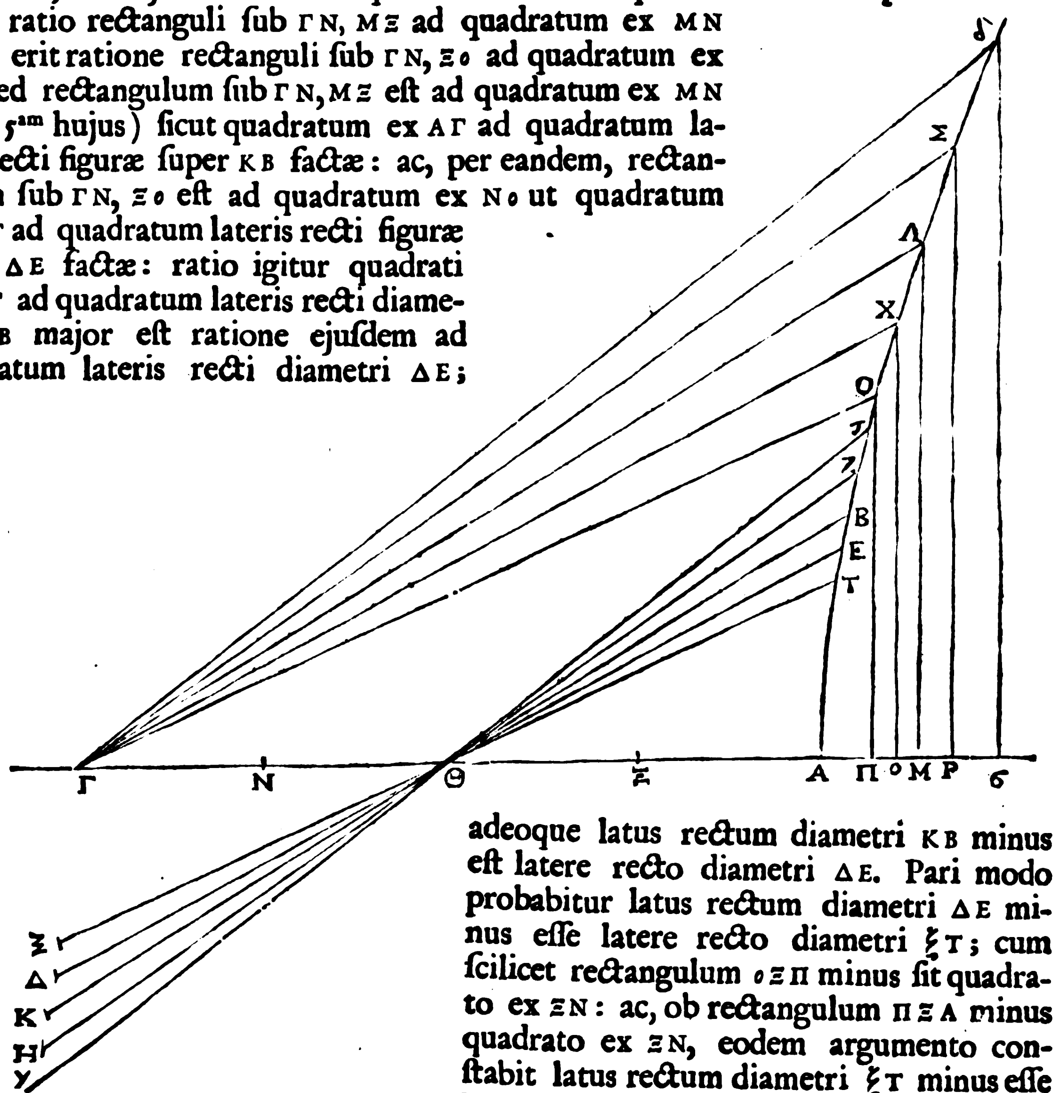
Dividatur recta AΓ in punctis Ξ, N, ita ut AΞ sit ad ΞΓ sicut Axis AΓ ad latus ejus rectum; ac sit ΓN ad NA in eadem ratione. Cum autem Axis AΓ minor est dimidio lateris ejus recti, erit AN major duplo ipsius AΞ; unde & NΞ major erit quam ΞA. Fiat ΞM ipsi ΞN æqualis, & sit AM normalis super Axem, occurrens sectioni in puncto Λ; & jungatur ΓΛ, ipsique ΓΛ parallela ducatur diameter KB: erit igitur ΞM ad MN (per sextam hujus) sicut BK ad latus rectum figuræ super eam factæ. Inter puncta Λ, B ducantur diametri ΔE, Tξ; & per punctum Γ diametro ΔE parallela agatur recta ΓX; diametroque Tξ parallela sit ΓO; & de punctis X & O demittantur ad Axem normales Xο, OΠ.



Quoniam vero MΞ æqualis est ipsi ΞN, erit rectangulum MΞο minor quadrato ex ΞN; ac adjecto utrinque communi rectangulo sub Nο, ΞN simul sumptis & οΞ, erit rectangulum sub MN, Nο simul & οΞ minus quadrato ex Nο, *per 6. II. Elem.* Est igitur ratio rectanguli sub MN, Nο simul & Mο ad rectangulum sub MN, Nο simul & Ξο major ratione rectanguli sub MN, Nο simul & Mο ad quadratum ex Nο. Sed rectangulum sub MN, Nο simul & Mο est ad rectangulum sub MN, Nο simul & Ξο

 sicut

ſicut Mο ad Ξο; quare ratio Mο ad Ξο major eſt ratione rectanguli ſub MN, Nο ſimul & Mο ad quadratum ex Nο; ac componendo ratio MΞ ad Ξο major erit ratione rectanguli ſub MN, Nο ſimul & Mο una cum quadrato ex Nο ad quadratum ex Nο. Verum (*per* 6. II.) rectangulum ſub MN, Nο ſimul & Mο una cum quadrato ex Nο æquale eſt quadrato ex MN; quare MΞ eſt ad Ξο in majori ratione quam quadratum ex MN ad quadratum ex Nο. Eſt autem MΞ ad Ξο ſicut rectangulum ſub ΓN, MΞ ad rectangulum ſub ΓN, Ξο; adeoque ratio rectanguli ſub ΓN, MΞ ad rectangulum ΓN, Ξο major erit ratione quadrati ex MN ad quadratum ex Nο: permutando autem ratio rectanguli ſub ΓN, MΞ ad quadratum ex MN major erit ratione rectanguli ſub ΓN, Ξο ad quadratum ex Nο. Sed rectangulum ſub ΓN, MΞ eſt ad quadratum ex MN (per 15^{am} hujus) ſicut quadratum ex AΓ ad quadratum lateris recti figuræ ſuper KB factæ: ac, per eandem, rectangulum ſub ΓN, Ξο eſt ad quadratum ex Nο ut quadratum ex AΓ ad quadratum lateris recti figuræ ſuper ΔE factæ: ratio igitur quadrati ex AΓ ad quadratum lateris recti diametri KB major eſt ratione ejuſdem ad quadratum lateris recti diametri ΔE;



adeoque latus rectum diametri KB minus eſt latere recto diametri ΔE. Pari modo probabitur latus rectum diametri ΔE minus eſſe latere recto diametri ξT; cum ſcilicet rectangulum οΞΠ minus ſit quadrato ex ΞN: ac, ob rectangulum ΠΞA minus quadrato ex ΞN, eodem argumento conſtabit latus rectum diametri ξT minus eſſe latere recto Axis AΓ.

Porro ſi ducantur diametri ZH, τγ remotiores ab Axe quam KB. Dico latus rectum diametri KB minus eſſe latere recto diametri ZH; ac latus rectum diametri ZH minus eſſe latere recto diametri τγ. Per punctum Γ ducantur ipſis ZH, τγ parallelæ, ut ΓΣ, Γδ; & de punctis Σ, δ demittantur normales ad Axem ΣP, δσ: erit igitur rectangulum PΞM majus quadrato ex NΞ; ac, procedendo juxta modum nuper traditum, demonſtrabitur rationem rectanguli ſub ΓN, ΞP ad quadratum ex NP minorem eſſe ratione rectanguli ſub ΓN, ΞM ad quadratum ex NM; unde manifeſtum eſt latus rectum diametri ZH majus eſſe latere recto diametri KB. Cumque rectangulum σΞP majus eſt quadrato ex ΞN, erit latus rectum diametri τγ majus latere recto diametri ZH. Q. E. D.

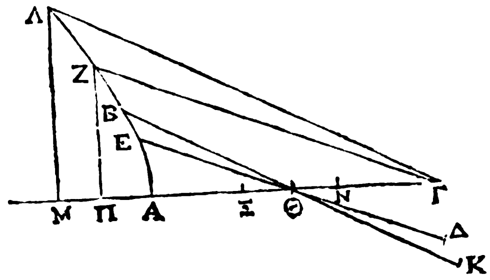
PROPOSITIO XXXVI.

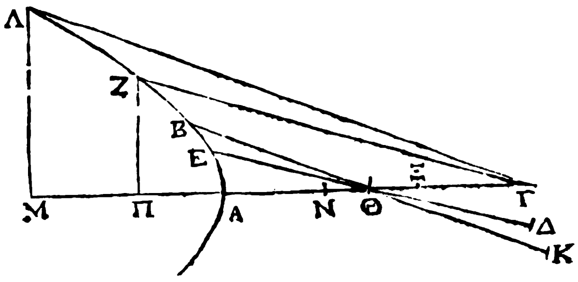
SI in Hyperbola latera figuræ ſectionis ſuper Axem factæ fuerint inæqualia; differentia laterum figuræ Axis major erit differentiâ laterum figuræ ſuper quamvis aliam diametrum factæ: ac differentia hæc laterum figuræ major eſt in diametris Axi propioribus quam in remotioribus.

Sit

Sit Hyperbolæ Axis ΑΓ, ac centrum Θ; ac sint aliæ quælibet diametri ΔΕ, ΒΚ. Dico differentiam inter latera figuræ Axis ΑΓ majorem esse differentiâ inter latera figuræ diametri ΔΕ; ac differentiam laterum figuræ diametri ΔΕ majorem esse differentiâ inter latera figuræ diametri ΒΚ.

Ducantur ΓΖ, ΓΛ ipsis ΔΕ, ΒΚ parallelæ; & de punctis Ζ, Λ cadant normales ΖΠ, ΛΜ ad Axem: ac fiant ΓΝ ad ΝΑ; ΑΞ ad ΞΓ in ratione Axis ΑΓ ad latus rectum figuræ ejus. Hinc quadratum ex ΑΓ erit ad quadratum differentiæ inter ΑΓ & latus ejus rectum ut rectangulum sub ΓΝ, ΑΞ ad quadratum ex ΞΝ. Recta vero ΓΖ parallela est diametro ΔΕ, ac ΖΠ normalis est super Axem; erit igitur rectangulum sub ΓΝ, ΞΠ ad quadratum differentiæ inter ΞΠ & ΠΝ (per 16^{am} hujus) ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΔΕ & latus rectum figuræ super ΔΕ factæ. Differentia autem inter ΞΠ, ΠΝ est recta ΞΝ; quare quadratum





ex ΑΓ est ad quadratum differentiæ inter diametrum ΔΕ & latus rectum ejus, ut rectangulum sub ΓΝ, ΞΠ ad quadratum ex ΞΝ. Ratio autem rectanguli sub ΓΝ, ΞΠ ad quadratum ex ΞΝ major est ratione rectanguli sub ΓΝ, ΑΞ ad quadratum ex ΞΝ; quare ratio quadrati Axis ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΔΕ & latus ejus rectum major est ratione ejusdem quadrati ex ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΑΓ & latus ejus rectum: ac proinde differentia inter ΔΕ & latus ejus rectum minor est differentiâ inter ΑΓ & latus rectum figuræ ejus.

Pari modo cum ΓΛ parallela sit diametro ΚΒ, ac ΛΜ normalis sit super Axem, rectangulum sub ΓΝ, ΞΜ erit ad *quadratum* differentiæ inter ΜΞ, ΜΝ (*sive ad quadratum ex* ΞΝ) sicut quadratum ex ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΒΚ & latus rectum ejus, per 16^{am} hujus. Sed ratio rectanguli sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΞΝ major est ratione rectanguli sub ΓΝ, ΞΠ ad idem quadratum ex ΞΝ; quare ratio quadrati ex ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΚΒ & ejus latus rectum major est ratione quadrati ex ΑΓ ad quadratum differentiæ *inter* ΔΕ & latus ejus rectum. Quapropter differentia inter ΒΚ & latus ejus rectum minor est differentiâ *inter* ΔΕ *& latus ejus rectum*; *& differentia inter* ΔΕ *& latus ejus rectum minor est differentia* inter ΑΓ & latus ejus rectum. Q. E. D.

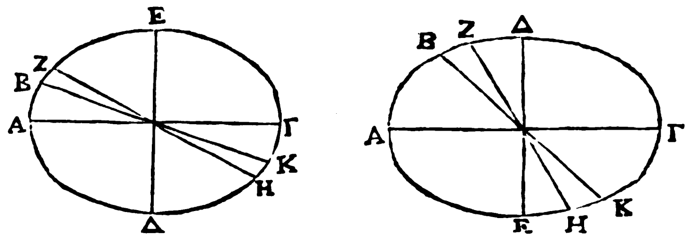
PROPOSITIO XXXVII.

In omni Ellipsi, si figuræ sectionis fiant super diametros lateribus suis rectis majores: erit differentia laterum figuræ super Axem majorem factæ major differentiâ laterum figuræ super quamvis aliam ex diametris illis factæ; ac differentia hæc in diametris Axi propioribus major erit quam in remotioribus: differentia autem laterum figuræ, in diametris lateribus suis rectis minoribus, maxima fit inter Axem minorem & latus ejus rectum: quæque Axi minori propiores sunt diametri majorem habent hanc differentiam quam ab eodem remotiores: differentia etiam inter latera figuræ Axis minoris major *est quam inter latera figuræ Axis majoris.*

Sit Ellipseos Axis major ΑΓ, minor vero ΔΕ; ac sint diametri aliæ ΚΒ, ΖΗ, quarum utraque major sit latere suo recto. Dico differentiam inter ΑΓ & latus ejus rectum majorem esse differentia inter ΒΚ & latus ejus rectum; differentiam vero inter BK & latus ejus rectum majorem esse differentia inter ZH & latus ejus rectum.

Quoniam enim AΓ major est latere ejus recto, & KB major latere ejus recto; ac latus rectum diametri KB (per 24^{am} hujus) majus est latere recto figuræ Axis AΓ; erit differentia inter AΓ & latus ejus rectum major differentiâ inter BK & latus ejus rectum. Eodem modo probabitur differentiam inter BK & latus ejus rectum majorem esse differentiâ inter ZH & latus rectum ejus.

Similiter si utræque BK, ZH minores fuerint quam latera sua recta. Dico differentiam inter ΔE & latus ejus rectum majorem esse differentiâ inter ZH & latus rectum ejus: ac differentiam inter ZH & latus ejus rectum majorem esse differentia inter BK & latus ejus rectum.



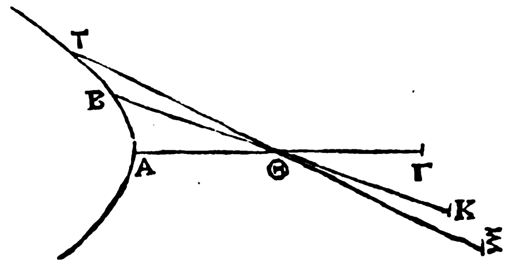
Quia Axis ΔE minor est quam ZH, ac latus ejus rectum majus est latere recto diametri ZH, per 24^{am} hujus; erit differentia inter ΔE & latus ejus rectum major differentia inter ZH & latus ejus rectum: ac pari argumento differentia inter ZH & latus ejus rectum major erit differentia inter KB & latus ejus rectum.

Porro cum latus rectum figuræ Axis minoris ΔE (per 15^{am} primi) sit ad ΔE sicut AΓ ad latus rectum figuræ Axis AΓ; ac, per eandem, latus rectum figuræ Axis ΔE majus sit quam AΓ; erit differentia inter ΔE & latus ejus rectum *major* differentia inter AΓ & latus ejus rectum. [*Per conversionem enim rationis latus rectum Axis* ΔE *est ad differentiam inter* ΔE *&* *latus ejus rectum sicut* AΓ *ad differentiam inter latera figuræ Axis* AΓ, *ac permutando.*] Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVIII.

SI in Hyperbolâ latus transversum figuræ Axis non minus fuerit tertiâ parte lateris ejus recti: summa utriusque lateris figuræ sectionis, super quamlibet diametrum præter Axem factæ, major erit summâ laterum figuræ Axis simul sumptorum; ac summa laterum figuræ super diametrum Axi propiorem factæ minor erit quam latera figuræ diametri remotioris simul sumpta.

Sit AΓ Hyperbolæ Axis, qui non sit minor tertiâ parte lateris ejus recti; ac sint KB, ξT diametri duæ quævis aliæ. Dico quod latera duo figuræ Axis AΓ simul sumpta minora sunt lateribus figuræ diametri KB simul sumptis, quodque latera figuræ ipsius KB minora sunt lateribus figuræ diametri ξT.

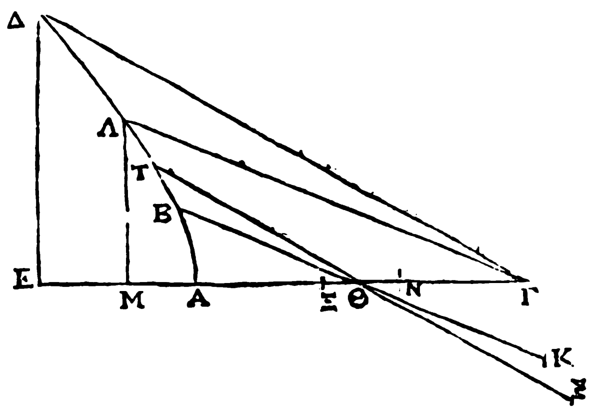


Primum sit AΓ non minor latere ejus recto: & diameter KB major erit Axe AΓ, & diameter ξT major diametro KB; latus etiam rectum diametri ξT (per 33^{am} hujus) majus erit latere recto diametri KB; & latus rectum diametri KB majus erit latere recto Axis AΓ: diameter igitur ξT una cum latere ejus recto major erit diametro KB unà cum latere ejus recto: ac diameter KB unà cum latere ejus recto major erit Axe AΓ unà cum latere ejus recto. Latera igitur, figuram super diametrum ξT factam continentia, simul sumpta majora sunt lateribus figuræ diametri KB: atque hæc latera majora sunt utroque latere figuræ super AΓ factæ simul sumpto. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIX.

VErum si Axis ΑΓ minor fuerit latere ejus recto, sed non minor tertiâ parte ejusdem lateris recti. Fiat ΓΝ ad ΝΑ & ΑΞ ad ΞΓ in ratione Axis ΑΓ ad latus ejus rectum; ac per punctum Γ ducantur utrique diametro Τξ, ΚΒ parallelæ, ut ΓΔ, ΛΓ; & de punctis Δ, Λ demittantur ad Axem normales ΔΕ, ΛΜ.

Quoniam vero ΑΓ est ad latus ejus rectum sicut ΑΞ ad ΞΓ, ac ΑΓ non est minor tertiâ parte lateris ejus recti; erit ΑΞ non minor tertiâ parte ipsius ΑΝ: unde etiam recta ΑΞ non minor erit quartâ parte ipsarum ΑΝ, ΑΞ simul sumptarum, & rectangulum sub ΑΝ, ΑΞ simul in quadruplum ipsius ΑΞ non minus erit quadrato ex ipsis ΑΝ, ΑΞ simul; adeoque ratio quadrupli rectanguli sub ΝΑ, ΑΞ simul & ΑΜ ad quadruplum rectangulum sub ΝΑ, ΑΞ simul & ΑΞ non major erit ratione quadrupli rectanguli sub ΝΑ, ΑΞ simul & ΑΜ ad quadratum ex ipsis ΝΑ, ΑΞ simul sumptis; ac componendo ratio ΜΞ ad ΞΑ non major erit ratione quadrupli rectanguli sub ΝΑ, ΑΞ simul & ΑΜ una cum quadrato ex utrâque ΝΑ, ΑΞ simul ad quadratum ex ΝΑ, ΑΞ simul. Sed quater rectangulum sub ΝΑ, ΑΞ simul & ΑΜ cum quadrato ex ΝΑ, ΑΞ simul (*per Lemm.*I. *Abdol.*) minus est quadrato ex ΞΜ, ΜΝ simul: adeoque ratio ΜΞ ad ΞΑ minor est ratione quadrati ex ΜΝ, ΜΞ simul ad quadratum ex ipsis ΝΑ, ΑΞ simul sumptis. Sed ΜΞ est ad ΞΑ ut rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum sub ΓΝ, ΞΑ; quare ratio rectanguli sub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum sub ΓΝ, ΞΑ minor est ratione quadrati ex ΜΝ, ΜΞ simul ad quadratum ex ΝΑ, ΑΞ: ac permutando, ratio rectanguli sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΝ, ΜΞ simul minor est ratione facti sub ΓΝ, ΞΑ ad quadratum ex ΝΑ, ΑΞ simul. Verum rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ (per 17^{am} hujus) est ad quadratum ex ΜΝ, ΜΞ simul, ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum diametri ΚΒ unà cum latere ejus recto simul sumptæ; ac rectangulum sub ΓΝ, ΑΞ est ad quadratum ex ΝΑ, ΑΞ simul, sicut quadratum Axis ΑΓ ad quadratum ex ΑΓ una cum latere ejus recto simul sumpto: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad quadratum summæ laterum figuræ diametri ΚΒ minor est ratione ejusdem quadrati ex ΑΓ ad quadratum summæ laterum figuræ super Axem ΑΓ factæ; ac proinde summa laterum figuræ diametri ΚΒ major est summâ laterum figuræ Axis ΑΓ.



Quinetiam cum ΜΞ major sit quartâ parte ipsarum ΜΝ, ΜΞ simul sumptarum, erit quadruplum rectanguli sub ΜΝ, ΜΞ *simul* & ΜΞ majus quadrato ex ΜΝ, ΜΞ simul sumptis: unde argumento supra usitato probabitur, rationem rectanguli sub ΓΝ, ΞΕ ad quadratum ex ΝΕ, ΕΞ simul minorem esse ratione rectanguli sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ipsarum ΜΝ, ΜΞ simul. Sed rectangulum sub ΓΝ, ΞΕ (per 17^{am} hujus) est ad quadratum ex ΝΕ, ΕΞ simul, ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum summæ laterum figuræ diametri ξΤ; ac rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ est ad quadratum ex ipsis ΜΝ, ΜΞ simul, sicut quadratum ex ΑΓ ad quadratum summæ laterum figuræ diametri ΒΚ: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad quadratum summæ laterum figuræ diametri ξΤ minor est ratione ejusdem ad quadratum summæ laterum figuræ diametri ΚΒ. Quapropter latera figuræ super diametrum ξΤ factæ simul sumpta majora sunt lateribus figuræ super diametrum ΚΒ factæ simul; prout latera figuræ super ΚΒ majora sunt lateribus figuræ Axis simul sumptis. Q. E. D.

PROPOSITIO XL.

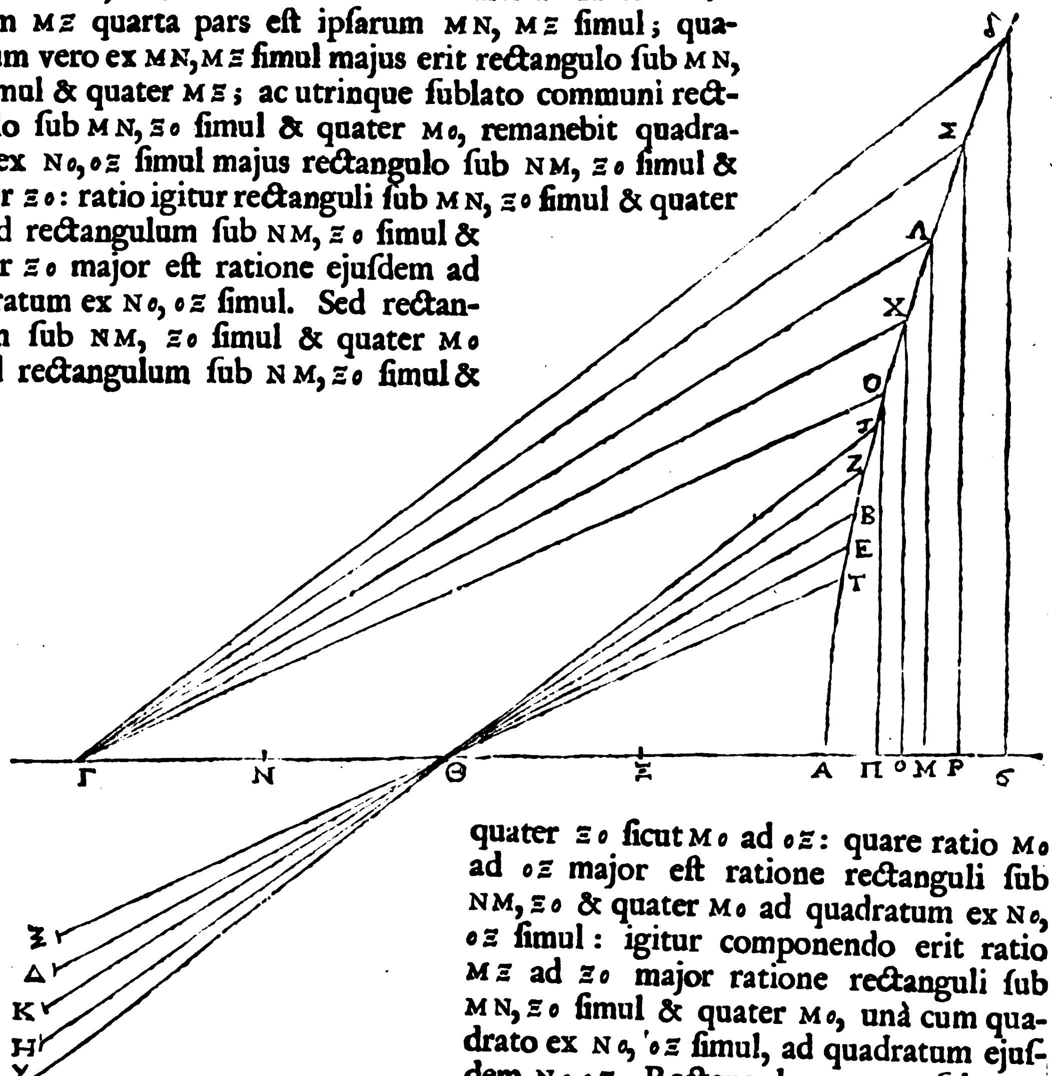
SI vero in Hyperbolâ Axis transversus minor fuerit tertiâ parte lateris ejus recti datur: ab utrâque Axis parte diameter una tertiæ parti lateris sui recti æqualis, cujus latera figuræ simul

 sumpta

ſumpta minorem efficiunt ſummam quam latera figuræ cujuſvis alterius diametri ad eandem Axis partem ductæ; latera quoque figuræ, ſuper diametrum huic utrinque propiorem factæ, ſimul ſumpta minora ſunt lateribus figuræ ſuper remotiorem ab eâdem factæ.

Repetatur figura in Propoſitione 35ª adhibita, ac ſit AΞ jam minor tertiâ parte ipſius AN; unde & minor erit dimidio ipſius ΞN. Fiat MΞ æqualis dimidio ipſius ΞN; & erectâ MΛ normali ſuper Axem jungatur ΓΛ, ipſique ΓΛ parallela ducatur ſectionis diameter KB. Eſt autem (per 6ᵃᵐ hujus) MΞ ad MN ſicut KB ad latus rectum figuræ ejus, ac MΞ eſt pars tertia ipſius MN; quare & KB tertia pars eſt lateris ejus recti. Ducantur inter A & B diametri quælibet ut ΔE, ξT, iiſdemque parallelæ ΓX, ΓO; ac demittantur normales ad Axem Xo, OΠ.

Jam MΞ quarta pars eſt ipſarum MN, MΞ ſimul; quadratum vero ex MN, MΞ ſimul majus erit rectangulo ſub MN, Ξo ſimul & quater MΞ; ac utrinque ſublato communi rectangulo ſub MN, Ξo ſimul & quater Mo, remanebit quadratum ex No, oΞ ſimul majus rectangulo ſub NM, Ξo ſimul & quater Ξo: ratio igitur rectanguli ſub MN, Ξo ſimul & quater Mo ad rectangulum ſub NM, Ξo ſimul & quater Ξo major eſt ratione ejuſdem ad quadratum ex No, oΞ ſimul. Sed rectangulum ſub NM, Ξo ſimul & quater Mo eſt ad rectangulum ſub NM, Ξo ſimul & quater Ξo ſicut Mo ad oΞ: quare ratio Mo ad oΞ major eſt ratione rectanguli ſub NM, Ξo & quater Mo ad quadratum ex No, oΞ ſimul: igitur componendo erit ratio MΞ ad Ξo major ratione rectanguli ſub MN, Ξo ſimul & quater Mo, unà cum quadrato ex No, oΞ ſimul, ad quadratum ejuſdem No, oΞ. Rectangulum autem ſub MN, Ξo ſimul & quater Mo una cum quadrato ex No, oΞ ſimul (*per Lemma* I. *Abdol.*) æquale eſt quadrato ex NM, MΞ ſimul; quare ratio MΞ ad Ξo major eſt ratione quadrati ex NM, MΞ ſimul ad quadratum ex No, oΞ ſimul. Verum MΞ eſt ad Ξo ſicut rectangulum ſub ΓN, MΞ ad rectangulum ſub ΓN, Ξo; quare ratio rectanguli ſub ΓN, MΞ ad rectangulum ſub ΓN, Ξo major eſt ratione quadrati ex MN, MΞ ſimul ad quadratum ex No, oΞ: ac permutando ratio rectanguli ſub ΓN, MΞ ad quadratum ex MN, MΞ ſimul major eſt ratione rectanguli ſub ΓN, Ξo ad quadratum ex No, oΞ ſimul. Eſt autem rectangulum ſub ΓN, MΞ ad quadratum ex MN, MΞ ſimul (per 17ᵃᵐ hujus) ſicut quadratum ex AΓ ad quadratum ſummæ laterum figuræ diametri KB: ac (per eandem 17ᵃᵐ) rectangulum ſub ΓN, Ξo eſt ad quadratum ex No, oΞ ſimul ſicut quadratum ex AΓ ad quadratum ſummæ laterum figuræ diametri ſectionis ΔE. Ratio igitur quadrati ex AΓ ad quadratum ſummæ



diametri

laterum figuræ diametri KB major eſt ratione ejuſdem ad quadratum laterum figuræ diametri ΔE ſimul ſumptorum. Quocirca latera figuræ diametri KB minora ſunt lateribus figuræ diametri ΔE.

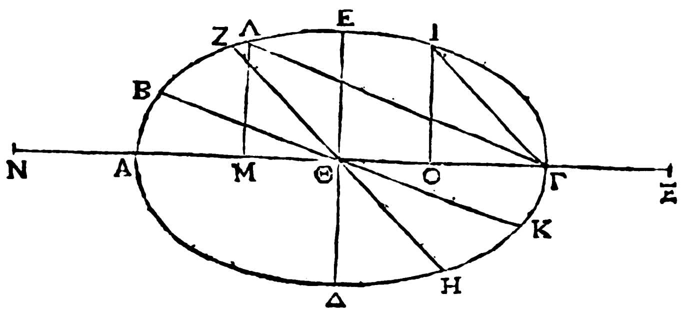
Porro cum quadratum ipſarum Nο, οΞ ſimul ſumptarum majus eſt rectangulo ſub Nο, ΞΠ ſimul & quater ΞΠ; eodem, quo præcedentia demonſtravimus, modo probabitur latera figuræ diametri ΔE minora eſſe lateribus figuræ diametri ξT ſimul ſumptis. Nec abſimili argumento, cum rectangulum ſub NΠ, ΞA & quater AΞ minus ſit quadrato ex NΠ, ΠΞ ſimul, conſtabit latera figuræ diametri ξT minora eſſe lateribus figuræ Axis AΓ ſimul ſumptis.

Ducantur jam diametri aliæ remotiores ab Axe quam KB, ſicut ZH, τγ; iiſdemque parallelæ ſint ΓΣ, Γδ; ac de punctis Σ, δ demittantur normales ad Axem ut ΣP, δσ: ac erit rectangulum ſub PN, MΞ ſimul & quater MΞ majus quadrato ex MN, MΞ ſimul. Adjecto autem communi rectangulo ſub PN, MΞ ſimul & quater PM, *erit rectangulum ſub* PN, MΞ *ſimul & quater* PΞ *majus quadrato ex* NP, PΞ *ſimul*; & eâdem argumentandi methodo, qua in præcedentibus uſi ſumus, manifeſtum erit latera figuræ diametri ZH majora eſſe lateribus figuræ diametri BK. Pari modo demonſtrabitur latera figuræ diametri τγ majora eſſe lateribus figuræ diametri ZH, ex eo quod rectangulum ſub σN, PΞ ſimul & quater PΞ majus eſt quadrato ex PN, ΞP ſimul. Q. E. D.

PROPOSITIO XLI.

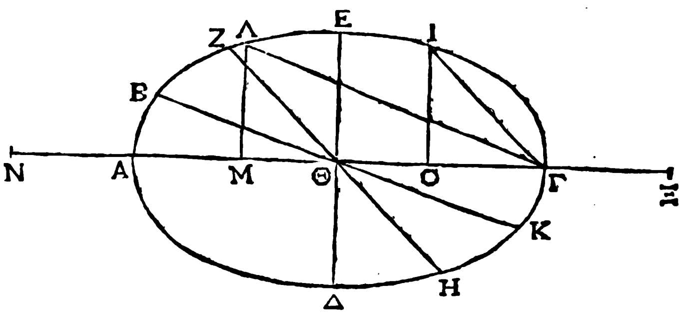
In omni Ellipſi latera figuræ Axis majoris ſimul ſumpta minora ſunt lateribus figuræ cujuſcunque alterius diametri: ac latera figuræ diametri Axi majori propioris minora ſunt lateribus figuræ diametri remotioris ab eodem: latera vero figuræ Axis minoris ſimul ſumpta majora ſunt lateribus figuræ ſuper quamlibet aliam diametrum factæ.

Sit AΓ Axis major Ellipſeos, minor vero ΔE; diametri autem aliæ ſint KB, ZH, quibus parallelæ ducantur ΓΛ, ΓI; & ad Axem demittantur normales ΛM, IO; ac fiat ΓN ad NA, ut & AΞ ad ΞΓ, ſicut Axis AΓ ad latus rectum figuræ Axis: & erit quadratum ex AΓ ad quadratum rectæ ipſi AΓ una cum latere ejus recto ſimul æqualis, ſicut quadratum ex NΓ, ſive rectangulum ſub NΓ, AΞ, ad quadratum ex NΞ. Sed quadratum ex AΓ eſt ad quadratum ex ΔE ſicut NΓ ad ΓΞ, quia (per 15^{am} primi) demonſtratum eſt quadratum ex AΓ eſſe ad quadratum ex ΔE ſicut AΓ ad latus ejus rectum; NΓ autem eſt ad ΓΞ ſicut rectangulum ſub NΓ, ΓΞ ad quadratum ex ΓΞ: quadratum etiam ex ΔE eſt ad quadratum rectæ æqualis utriſque ΔE & lateri recto ejuſdem ſimul, ut quadratum ex ΓΞ eſt ad quadratum ex NΞ, per eandem 15^{am} primi: ex æquo igitur quadratum ex AΓ eſt ad quadratum ex utrâque ΔE & latere recto ejuſdem, ſicut rectangulum ſub NΓ, ΓΞ ad quadratum ex NΞ. Sed rectangulum ſub NΓ, AΞ eſt ad quadratum ex NΞ ut quadratum ex AΓ ad quadratum compoſitæ ex AΓ & latere ejus recto: ratio igitur



Axis AΓ ad AΓ una cum latere ejus recto ſimul major eſt ratione ipſius AΓ ad ΔE una cum latere recto ejuſdem ΔE ſimul. Latera igitur figuræ Axis majoris AΓ minora ſunt lateribus figuræ Axis minoris ΔE ſimul ſumptis.

Jam rectangulum ſub NΓ, MΞ eſt ad quadratum ex NΞ (per 17^{am} hujus) ſicut quadratum ex AΓ ad quadratum diametri KB una cum latere ejus recto; quare ratio ipſius AΓ ad AΓ una cum latere ejus recto major eſt ratione ejuſdem AΓ ad KB cum latere ejus recto ſimul: ac proinde latera figuræ ſuper AΓ factæ minora ſunt lateribus figuræ diametri KB. Quinetiam cum rectangulum ſub NΓ, MΞ eſt ad quadratum ex ΝΞ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum diametri ΚΒ una cum latere ejus recto; ac rectangulum ΝΓ, ΞΟ eſt ad quadratum ex ΝΞ (per eandem 17^{am}) ſicut quadratum ex ΑΓ ad quadratum diametri ΖΗ una cum latere ejus recto ſimul: erit igitur ratio ΑΓ ad ΚΒ una cum latere ejus recto major ratione ejuſdem ad ΖΗ una cum latere ejus recto: proinde latera figuræ diametri ΚΒ ſimul minora ſunt lateribus figuræ diametri ΖΗ. Quoniam vero rectangulum ſub ΓΝ, ΞΟ eſt ad quadratum ex ΝΞ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum diametri ΖΗ una cum latere ejus recto; ac, per nuper demonſtrata, rectangulum ſub ΝΓ, ΓΞ eſt ad quadratum ex ΝΞ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum Axis minoris ΔΕ una cum latere ejus recto ſimul; erit ratio ΑΓ ad ΖΗ & latus ejus rectum ſimul major ratione ejuſdem ad ΔΕ una cum latere ejus recto. Unde latera figuræ diametri ΖΗ ſimul minora ſunt lateribus figuræ Axis ΔΕ ſimul ſumptis. Q. E. D.

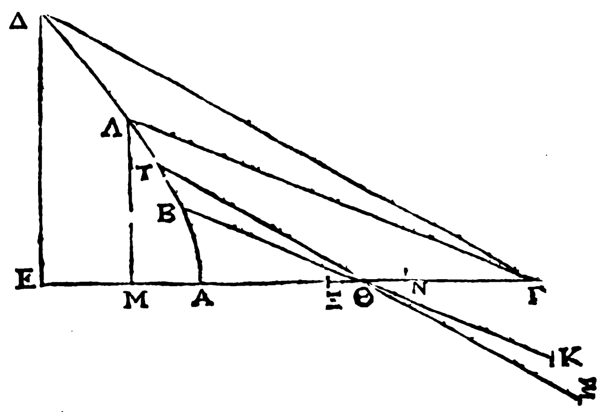


PROPOSITIO XLII.

Figura Axis, in ſectione Hyperbolica, minor eſt figura cujuſvis alterius diametri; ac diametri Axi propiores minores habent figuras quam quæ ab eodem remotiores ſunt.

Sit Hyperbolæ Axis ΑΓ, diametri autem quævis aliæ ΚΒ, ξΤ. Dico figuram ſuper ΑΓ factam minorem eſſe factâ ſuper quamlibet aliam diametrum præter Axem: ac figuram diametri ΚΒ minorem eſſe figura diametri ξΤ.

Ducantur rectæ ΓΛ, ΓΔ diametris ΚΒ, ξΤ parallelæ; ac demittantur normales ad Axem ΛΜ, ΔΕ; ac fiat ΓΝ ad ΝΑ ſicut ΑΓ ad latus rectum figuræ ſuper ΑΓ factæ: erit igitur ΓΝ ad ΝΑ ut quadratum ex ΑΓ ad figuram ſectionis ſuper Axem factam; ac ΓΝ eſt ad ΝΜ (per 18^{vam} hujus) ſicut quadratum ex ΑΓ ad figuram diametri ΚΒ. Ratio autem ΓΝ ad ΝΑ major eſt ratione ejuſdem ad ΝΜ; quare ratio quadrati ex ΑΓ ad figuram ſuper ΑΓ factam major eſt ratione ejuſdem ad figuram ſuper ΚΒ factam: adeoque figura Axis ΑΓ minor eſt figura diametri ΚΒ. Porro (per 18^{vam} hujus) ΓΝ eſt ad ΝΕ ſicut quadratum ex ΑΓ ad figuram ſuper ξΤ factam, ac ΓΝ eſt ad ΝΜ ſicut quadratum ex ΑΓ ad figuram diametri ΚΒ; ratio autem ΓΝ ad ΝΜ major eſt ratione ejuſdem ad ΝΕ: erit igitur ratio quadrati ex ΑΓ ad figuram diametri ΚΒ major ratione ejuſdem ad figuram diametri ξΤ; ac proinde figura ſuper ΚΒ facta major eſt factâ ſuper ξΤ. Q. E. D.



PROPOSITIO XLIII.

Figura Axis majoris in Ellipſi minor eſt figurâ cujuſlibet alterius diametri; maxima autem figura ea eſt quæ fit ſuper Axem minorem: figura quoque diametri Axi majori propioris minor eſt factâ ſuper remotiorem ab eodem. Vide figuram Prop. XLI.

Sit Ellipſeos Axis major ΑΓ, minor ΔΕ, ac aliæ quævis diametri ΚΒ, ΖΗ. Dico figuram Axis ΑΓ minorem eſſe figurâ diametri ΚΒ; ac figuram ipſius ΚΒ minorem eſſe factâ ſuper diametrum ΖΗ: denique figuram ipſius ΖΗ minorem eſſe figurâ ſuper Axem minorem ΔΕ factâ.

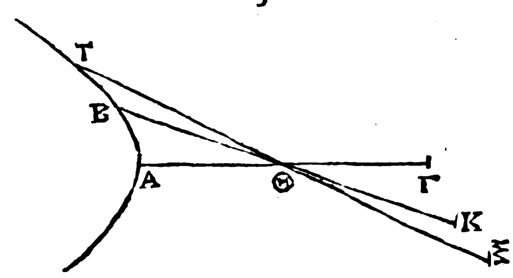
* Ducantur

Ducantur ΓΛ, ΓΙ ipsis ΚΒ, ΖΗ parallelæ, ac demittantur ad Axem normales ΛΜ, ΙΟ; fiat etiam ΓΝ ad ΝΑ sicut ΑΓ ad latus ejus rectum: unde quadratum ex Axe ΑΓ erit ad figuram super Axe factam sicut ΓΝ ad ΝΑ. Sed quadratum ex ΑΓ (per 15^{am} primi) æquale est figuræ Axis minoris ΔΕ; quare figura Axis ΑΓ minor est factâ super Axe minore ΔΕ. Quoniam vero ΓΝ est ad ΝΜ (per 18^{vam} hujus) sicut quadratum ex ΑΓ ad figuram diametri ΚΒ; pariterque ΓΝ est ad ΝΟ ut quadratum ex ΑΓ ad figuram diametri ΖΗ; ut est ΓΝ ad ΝΓ sicut quadratum ex ΑΓ ad figuram Axis ΔΕ: ΑΝ autem minor est quam ΝΜ, ac ΝΜ quam ΝΟ, ac ΝΟ quam ΝΓ: erit igitur figura Axis ΑΓ minor figura diametri ΚΒ; & figura super ΚΒ facta minor erit figura diametri ΖΗ; ac figura diametri ΖΗ minor erit figura Axis ΔΕ. Q. E. D.

PROPOSITIO XLIV.

IN Hyperbola, si vel latus transversum figuræ Axis non minus fuerit latere ejus recto; vel si minus fuerit eo, quadratum vero ejus non minus fuerit dimidio quadrati differentiæ inter latera figuræ: erunt quadrata è lateribus figuræ Axis simul sumpta minora quadratis laterum figuræ, super quamlibet aliam sectionis diametrum factæ, simul sumptis.

Sit Hyperbolæ Axis ΑΓ, ac quælibet aliæ diametri ΚΒ, ΞΤ; ac sive ΑΓ non minor fuerit latere ejus recto, vel si minor fuerit eo, modo quadratum ex ΑΓ non minus fuerit dimidio quadrati differentiæ inter Axem & latus ejus rectum. Dico summam quadratorum laterum figuræ Axis minorem esse quadratis laterum figuræ diametri ΚΒ simul sumptis; quadrata vero laterum figuræ super ΚΒ factæ simul minora esse quadratis laterum figuræ diametri ΞΤ.



Imprimis autem sit ΑΓ non minor latere ejus recto; ac (per 33^{am} hujus) erit latus rectum diametri ΚΒ majus latere recto Axis ΑΓ; & (per eandem) latus rectum diametri ΞΤ majus erit latere recto diametri ΚΒ; ΑΓ autem minor est quam ΚΒ, ac ΚΒ quam ΞΤ: proinde quadrata laterum figuræ Axis ΑΓ minora sunt quadratis laterum figuræ diametri ΚΒ; ac quadrata laterum figuræ diametri ΚΒ minora sunt quadratis laterum figuræ ΞΤ simul sumptis. Q. E. D.

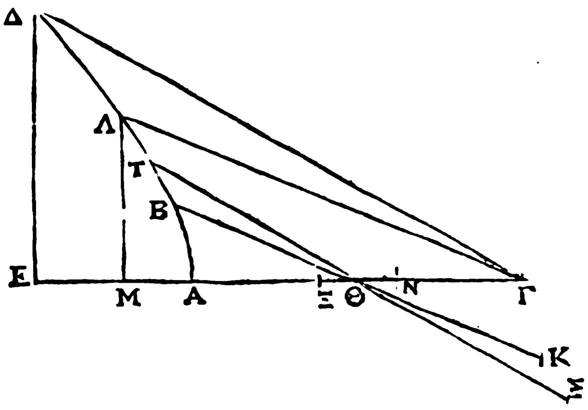
PROPOSITIO XLV.

SI vero Axis minor fuerit quam latus ejus rectum, quadratum autem ejus non minus dimidio quadrati differentiæ inter Axem & latus ejus rectum. Dico eadem etiam consequi quæ in proximâ Propositione demonstravimus.

Maneat figura Propositionis XLII. præcedentis; ac fiat ΓΝ ad ΝΑ ut & ΑΞ ad ΞΓ in ratione ipsius ΑΓ ad latus ejus rectum: duplum igitur quadrati ex ΑΞ non minus erit quadrato ex ΝΞ (quia ΑΞ ipsi ΓΝ æqualis est, ac ΑΓ est ad latus ejus rectum sicut ΑΞ ad ΞΓ; ac quadratum ex ΑΓ non minus est dimidio quadrati differentiæ inter ΑΓ & latus ejus rectum.) Ductis autem sectionis diametris ΚΒ, ΞΤ, parallelæ agantur rectæ ΓΔ, ΓΛ; & demittantur ad Axem normales ΔΕ, ΛΜ.

Quoniam vero ΑΓ est ad latus ejus rectum sicut ΓΝ ad ΝΑ, atque etiam ut ΑΞ ad ΞΓ; ac duplum quadrati ex ΑΞ non minus est quadrato ex ΞΝ: duplum rectangulum sub ΜΞ, ΑΞ majus erit quadrato ex ΞΝ. Adjiciatur utrinque duplum rectangulum sub ΝΑ, ΑΞ; & duplum rectangulum sub ΜΝ, ΑΞ simul & ΑΞ majus erit duplo rectangulo sub ΝΑ, ΑΞ una cum quadrato ex ΞΝ simul: hoc est, majus erit quadratis ex ΝΑ, ΑΞ simul, *per* 7.II. *El.* Quocirca ratio dupli rectanguli sub ΝΜ, ΑΞ

& MA ad duplum rectangulum sub NM, AΞ & ΞA minor est ratione ejusdem ad quadrata ex NA, AΞ simul. Sed duplum rectangulum sub MN, AΞ simul & AM est ad duplum rectangulum sub MN, AΞ simul & AΞ, sicut AM ad AΞ; quare ratio AM ad AΞ minor est ratione dupli rectanguli sub MN, AΞ simul & MA ad quadrata ex NA, AΞ simul. Quadrata autem ex NM, MΞ simul (*per Lemma* II. *Abdolm.*) *æqualia* sunt quadratis ex NA, AΞ simul una cum duplo rectangulo sub NM, AΞ simul & AM: *componendo* igitur ratio MΞ ad ΞA minor erit ratione quadratorum ex NM & MΞ simul ad quadrata ex NA & AΞ simul. Sed MΞ est ad ΞA ut rectangulum sub ΓN, MΞ ad rectangulum sub ΓN, ΞA; quare ratio rectanguli sub ΓN, MΞ ad rectangulum sub ΓN, ΞA minor est ratione quadratorum ex NM & MΞ simul ad quadrata ex NA & AΞ simul. Permutando autem ratio rectanguli sub ΓN, MΞ ad quadrata ex NM & MΞ simul minor est ratione rectanguli sub ΓN, AΞ ad quadrata ex NA & AΞ simul. Verum rectangulum sub ΓN, MΞ (per 19^{am} hujus) est ad quadrata ex NM & MΞ simul, ut quadratum ex AΓ ad quadrata laterum figuræ diametri KB simul; ac rectangulum sub ΓN, ΞA, *sive quadratum ex* ΞA, est ad quadrata ex NA & AΞ simul, sicut quadratum ex AΓ ad quadrata laterum figuræ Axis AΓ; ut manifestum est ex præmissis: ratio igitur quadrati ex AΓ ad summam quadratorum laterum figuræ diametri KB minor est ratione ejus ad summam quadratorum laterum figuræ Axis AΓ: quadrata igitur laterum figuræ super KB factæ simul majora sunt quadratis laterum figuræ Axis simul sumptis. Quoniam vero duplum quadrati ex MΞ majus est quadrato ex ΞN, ac duplum rectangulum sub EΞ, ΞM majus est quadrato ex NΞ; modo in præcedentibus usurpato, probabitur quadrata laterum figuræ diametri ξT majora esse quadratis laterum figuræ diametri KB. Q. E. D.



PROPOSITIO XLVI.

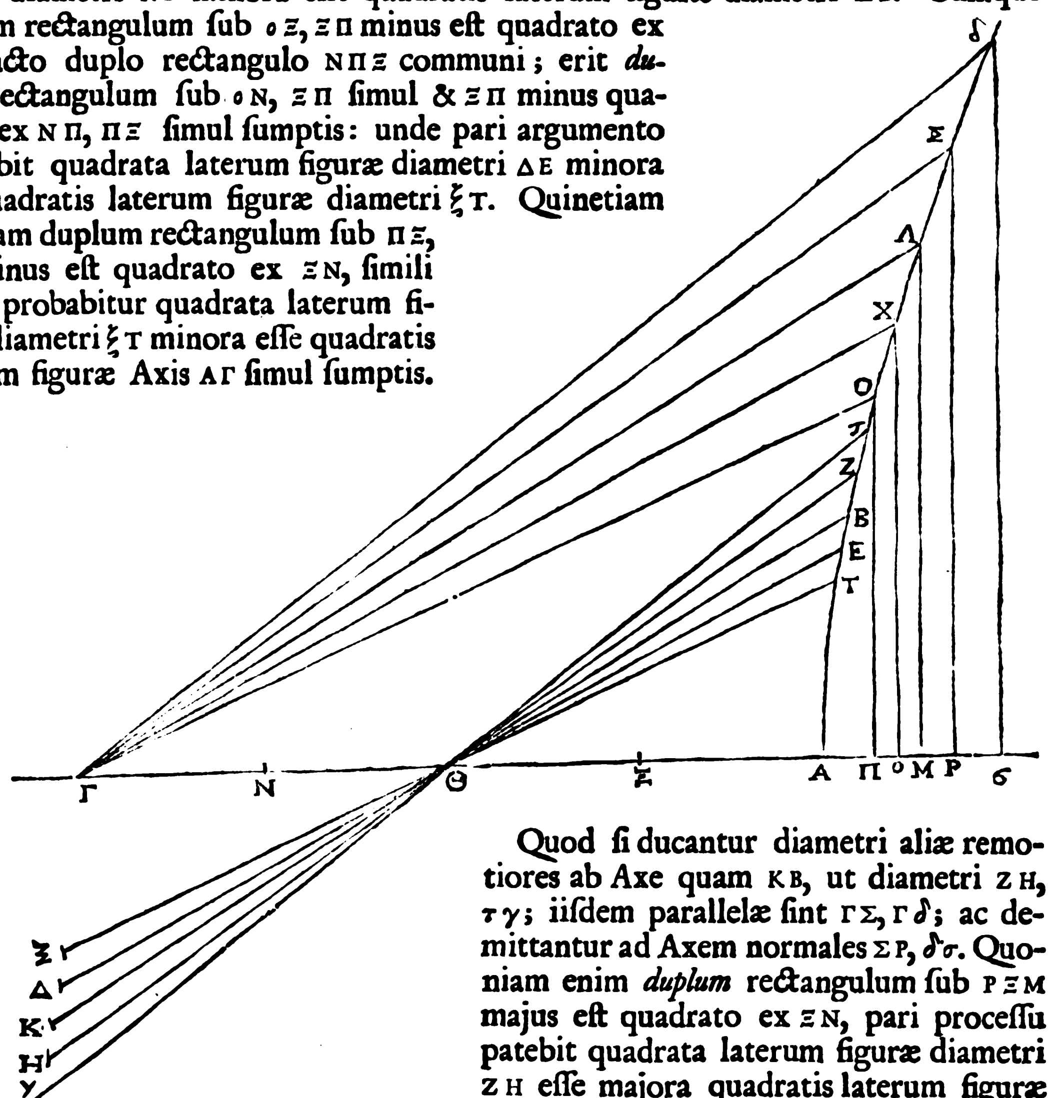
SI vero quadratum Axis transversi minus fuerit dimidio quadrati differentiæ inter Axem & latus ejus rectum: ab utrâque parte Axis reperietur diameter cujus quadratum æquatur dimidio quadrati differentiæ inter ipsam & latus ejus rectum; ac summa quadratorum laterum figuræ ejus minor erit quadratis laterum figuræ cujuscunque alterius diametri ab utrâque ejus parte sumendæ: summa quoque quadratorum laterum figuræ super diametrum huic propiorem factæ minor erit summâ quadratorum laterum figuræ diametri remotioris ab eâdem.

Sint ΓN ad NA, sicut AΞ ad ΞΓ, in eadem ratione quam habet AΓ ad latus ejus rectum; ac sit duplum quadrati ex AΞ minus quadrato ex NΞ. Fiat duplum quadrati ex MΞ æquale quadrato ex NΞ, & ad punctum M erigatur Axi normalis MA, ac junctâ ΓA eidem parallela ducatur diameter KΘB: erit igitur MΞ ad MN (per 6^{am} hujus) sicut KB ad latus rectum ejusdem, adeoque quadratum ex KB æquale erit dimidio quadrati differentiæ inter eam & latus ejus rectum.

Ducantur jam inter puncta A, B aliæ quævis diametri ut ΔE, ξT, iisdemque parallelæ ΓX, ΓO; & Axi normales sint Xo, OΠ. Quoniam autem duplum quadrati ex MΞ æquale est quadrato ex ΞN, erit duplum rectangulum sub MΞ, Ξo minus quadrato ex ΞN; ac, facto duplo rectangulo sub oN, Ξo communi, erit duplum rectanguli sub MN, Ξo simul & Ξo minus *duplo rectangulo sub* oN, Ξo *& quadrato ex* ΞN *simul*; *hoc est* (*per* 7. II. *El.*) quadratis ex oN, Ξo. Unde eodem omnino argumentandi modo, quo usi sumus in Propositione præcedente, manifestum erit quadrata laterum

figuræ

figuræ diametri ΚΒ minora esse quadratis laterum figuræ diametri ΔΕ. Cumque duplum rectangulum sub ΟΞ, ΞΠ minus est quadrato ex ΞΝ, facto duplo rectangulo ΝΠΞ communi; erit *duplum* rectangulum sub ΟΝ, ΞΠ simul & ΞΠ minus quadratis ex ΝΠ, ΠΞ simul sumptis: unde pari argumento constabit quadrata laterum figuræ diametri ΔΕ minora esse quadratis laterum figuræ diametri ξΤ. Quinetiam quoniam duplum rectangulum sub ΠΞ, ΞΑ minus est quadrato ex ΞΝ, simili modo probabitur quadrata laterum figuræ diametri ξΤ minora esse quadratis laterum figuræ Axis ΑΓ simul sumptis.



Quod si ducantur diametri aliæ remotiores ab Axe quam ΚΒ, ut diametri ΖΗ, τγ; iisdem parallelæ sint ΓΣ, Γδ; ac demittantur ad Axem normales ΣΡ, δσ. Quoniam enim *duplum* rectangulum sub ΡΞΜ majus est quadrato ex ΞΝ, pari processu patebit quadrata laterum figuræ diametri ΖΗ esse majora quadratis laterum figuræ diametri ΚΒ. Denique cum *duplum* rectangulum σΞΡ majus est quadrato ex ΞΝ, eodem modo demonstrabitur quadrata laterum figuræ diametri τγ majora esse quadratis laterum figuræ diametri ΖΗ. Q. E. D.

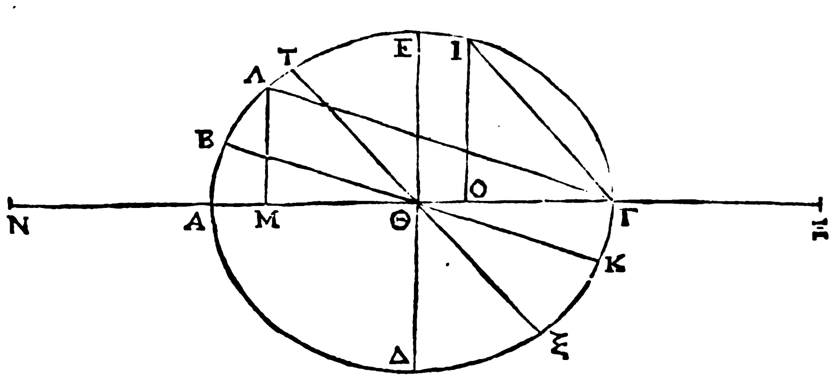
PROPOSITIO XLVII.

IN Ellipsi, si quadratum lateris transversi figuræ Axis majoris non majus fuerit dimidio quadrati summæ laterum figuræ ejus: erunt quadrata laterum figuræ Axis majoris simul sumpta minora quadratis laterum figuræ cujuscunque alterius diametri; ac quadrata laterum figuræ diametri Axi propioris simul sumpta minora erunt quadratis laterum figuræ diametri remotioris ab eodem; maxima autem quadratorum summa fiet ex lateribus figuræ Axis minoris.

Sit Ellipseos Axis major ΑΓ, minor vero ΔΕ; sitque quadratum Axis ΑΓ non majus dimidio quadrati summæ laterum figuræ ejus: sint etiam aliæ sectionis diametri ΚΒ, ξΤ, quibus ducantur parallelæ ΓΛ, ΓΙ; ac demittantur ad Axem normales ΛΜ, ΙΟ.

Fiat ΓΝ ad ΝΑ & ΑΞ ad ΞΓ in ratione Axis ΑΓ ad latus ejus rectum; ac rectangulum sub ΝΓ, ΑΞ, *sive quadratum ex* ΑΞ, erit ad quadrata ex ΝΓ, ΓΞ simul ut quadratum ex ΑΓ ad quadrata laterum figuræ super ΑΓ factæ. Latus autem rectum figuræ Axis minoris ΔΕ est ad ΔΕ sicut ΓΝ ad ΓΞ: quia ΓΝ est ad ΓΞ, sicut ΑΓ ad latus ejus rectum, ac ΑΓ est ad latus ejus rectum (per 15am primi) ut latus rectum Axis ΔΕ ad ipſam ΔΕ. Verum latus rectum Axis ΔΕ (per eandem 15^{am} primi) eſt ad ipſam ΔΕ ſicut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΔΕ; ac ΝΓ eſt ad ΓΞ ſicut rectangulum ΝΓΞ ad quadratum ex ΓΞ: erit igitur rectangulum ΝΓΞ ad quadratum ex ΓΞ ſicut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΔΕ. Quadratum autem ex ΓΞ eſt ad ſummam quadratorum ex ΝΓ & ΓΞ ſicut quadratum Axis ΔΕ ad ſummam quadratorum ex lateribus figuræ ſuper ΔΕ factæ: ex æquo igitur rectangulum ΝΓΞ erit ad ſummam quadratorum ex ΝΓ & ΓΞ ſicut quadratum ex ΑΓ ad ſummam quadratorum laterum figuræ ſuper ΔΕ factæ. Rectangulum autem ſub ΝΓ & ΑΞ eſt ad quadrata ex ΝΓ, ΓΞ ſimul ſicut quadratum ex ΑΓ ad quadrata laterum figuræ ipſius ΑΓ.

Quadratum autem ex ΑΓ non majus eſt dimidio quadrati ſummæ laterum figuræ ejus: duplum igitur rectanguli ſub ΝΓ, ΑΞ non erit majus quadrato ex ΝΞ; ac proinde quod fit ſub ΝΓ, ΜΞ bis minus erit quadrato ex ΝΞ. Sublato itaque utrinque communi rectangulo ΝΜ, ΜΞ bis; erit reſiduum rectangulum ſub ΜΓ, ΜΞ bis minus quadratis ex ΝΜ, ΜΞ ſimul: ratio igitur dupli rectanguli ſub ΑΜ, ΜΓ ad duplum rectangulum ſub ΜΓ, ΜΞ, ſive ratio ΑΜ ad ΜΞ, major erit ratione rectanguli dupli ſub ΑΜ, ΜΓ ad quadrata ex ΝΜ, ΜΞ ſimul. Sed duplum rectangulum ſub ΑΜ, ΜΓ una cum quadratis ex ΝΜ, ΜΞ ſimul (*per Lemma* III. *Abdolm.*) æqualia ſunt quadratis ex ΝΓ, ΓΞ, ob æquales ΑΝ, ΓΞ: quare componendo erit ratio ΑΞ ad ΞΜ major ratione quadratorum ex ΝΓ & ΓΞ ad quadrata ex ΝΜ, ΜΞ ſimul; adeoque ratio rectanguli ſub ΝΓ, ΑΞ ad rectangulum ſub ΝΓ, ΞΜ major erit ratione quadratorum ex ΝΓ, ΓΞ ad quadrata ex ΝΜ, ΜΞ. Permutando autem ratio rectanguli ſub ΝΓ, ΑΞ ad quadrata ex ΝΓ, ΓΞ ſimul major erit ratione rectanguli ſub ΝΓ, ΜΞ ad quadrata ex ΝΜ, ΜΞ ſimul: atque ſupra demonſtratum eſt rectangulum ſub ΝΓ, ΑΞ eſſe ad quadrata ex ΝΓ, ΓΞ ſimul ſicut quadratum ex ΑΓ ad ſummam quadratorum laterum figuræ ejus. Sed & (per 19^{am} hujus) rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ eſt ad ſummam quadratorum ex ΝΜ, ΜΞ, ſicut quadratum ex ΑΓ ad ſummam quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad quadrata laterum figuræ ejus ſimul major eſt ratione ejuſdem ad quadrata laterum figuræ diametri ΚΒ; adeoque quadrata laterum figuræ Axis majoris ΑΓ minora ſunt quadratis laterum figuræ diametri ΚΒ ſimul ſumptis.



Jam vero ΜΝ vel minor erit quam ΟΞ, vel non minor erit eâ. Imprimis autem ſit minor eâ. Unde quadrata ex ΜΝ, ΜΞ ſimul majora erunt quadratis ex ΝΟ, ΟΞ ſimul; ac quadrata ex ΝΟ, ΟΞ ſimul majora ſunt rectangulo ſub ΟΞ & dupla differentia ipſarum ΟΞ, ΜΝ; quare ratio rectanguli ſub ΜΟ & dupla differentia inter ΟΞ & ΜΝ ad rectangulum ſub ΟΞ & dupla differentia inter ΟΞ & ΜΝ major eſt ratione ejuſdem ad ſummam quadratorum ex ΝΟ, ΟΞ; ac proinde ratio ΜΟ ad ΟΞ major erit ratione rectanguli ſub ΜΟ & dupla differentia ipſarum ΟΞ, ΜΝ ad quadrata ex ΝΟ, ΟΞ ſimul. Sed rectangulum ſub ΜΟ & dupla differentia ipſarum ΟΞ, ΜΝ unà cum quadratis ex ΝΟ, ΟΞ ſimul (*per Lemma* IV. *Abdolm.*) æquale eſt quadratis ex ΜΝ, ΜΞ ſimul; quia differentia inter quadrata ex ΜΝ, ΜΞ & quadrata ex ΝΟ, ΟΞ ſimul æqualis eſt duplæ differentiæ inter quadrata ex ΜΘ, ΘΟ: componendo igitur ratio ΜΞ ad ΞΟ major erit ratione quadratorum ex ΜΝ & ΜΞ ſimul ad quadrata ex ΝΟ & ΟΞ ſimul. Sed ut ΜΞ ad ΞΟ ita rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum ſub ΓΝ, ΞΟ; quare ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum ΓΝ, ΞΟ major eſt ratione ſummæ quadratorum ex ΜΝ, ΜΞ ad ſummam quadratornm ex ΝΟ, ΟΞ: ac permutando ratio rectanguli ſub ΝΓ, ΜΞ ad ſummam quadratorum ex ΜΝ, ΜΞ major eſt ratione rectanguli

guli NΓ, ΞO ad summam quadratorum ex NO, OΞ. Sed rectangulum sub NΓ, MΞ est ad summam quadratorum ex MN, MΞ (per 19^{am} hujus) sicut quadratum ex AΓ ad summam quadratorum laterum figuræ diametri KB; ac, per eandem, rectangulum sub NΓ, ΞO est ad quadrata ex NO, OΞ simul ut quadratum ex AΓ ad summam quadratorum laterum figuræ diametri ξT: ratio itaque quadrati ex AΓ ad summam quadratorum laterum figuræ diametri KB major est ratione ejusdem ad summam quadratorum laterum figuræ diametri ξT; ac proinde quadrata laterum figuræ diametri KB minora sunt quadratis laterum figuræ diametri ξT.

Si vero MN non minor fuerit quam ΞO, summa quadratorum ex MN, MΞ non major erit summa quadratorum ex NO, OΞ; ac proveniet ratio rectanguli sub NΓ, MΞ ad quadrata ex NM, MΞ simul major ratione rectanguli sub NΓ, ΞO ad summam quadratorum ex NO, OΞ: unde, modo nuper ostenso, manifestum erit quadrata laterum figuræ diametri KB minora esse quadratis laterum figuræ diametri ξT. Hæc autem ita se habebunt, sive cadat normalis de puncto I demissa inter puncta Θ & M, vel super ipsum Θ, vel etiam inter Θ, Γ; modo segmentum MN minus fuerit intercepta NO. Est autem rectangulum sub NΓ, ΓΞ ad quadrata ex NΓ, ΓΞ simul ut quadratum ex AΓ ad summam quadratorum laterum figuræ Axis minoris ΔE, per demonstrata in principio hujus Propositionis; ac rectangulum sub NΓ, OΞ est ad quadrata ex NO & OΞ simul (per 19^{am} hujus) ut quadratum ex AΓ ad summam quadratorum laterum figuræ diametri ξT: unde, consimili argumento, probabitur summam quadratorum laterum figuræ diametri cujuscunque ξT minorem esse quadratis laterum figuræ Axis ΔE simul sumptis. Q. E. D.

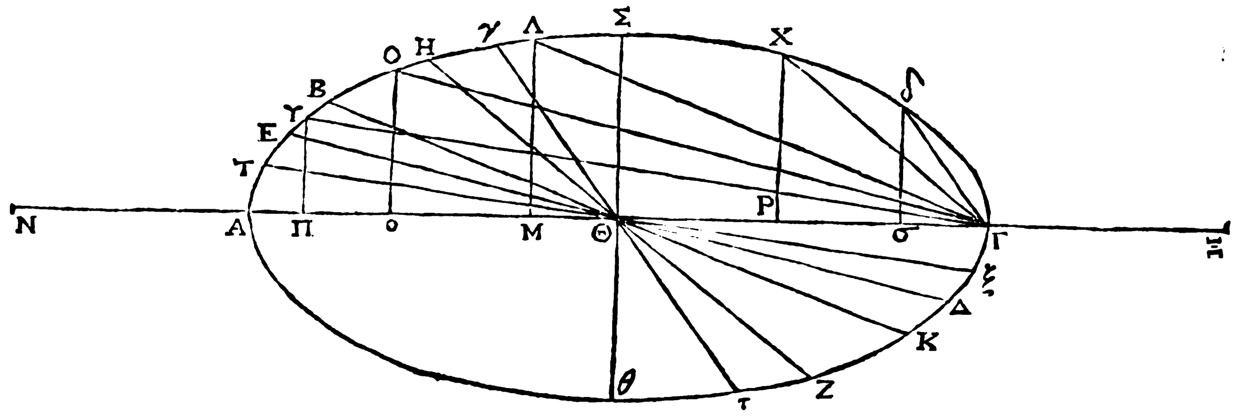
PROPOSITIO XLVIII.

SI vero in Ellipsi quadratum Axis majoris majus fuerit dimidio quadrati summæ laterum figuræ Axis: dabitur ab utraque Axis parte diameter, cujus quadratum æquale est dimidio quadrati summæ laterum figuræ ejus: ac summa quadratorum laterum figuræ hujus diametri minor erit summa quadratorum laterum figuræ cujuscunque alterius diametri ad eundem sectionis quadrantem ducendæ: quadrata etiam laterum figuræ diametri huic utrinque propioris minora sunt quadratis laterum figuræ super diametrum remotiorem factæ.

Describatur Schema præcedenti simile: ac eodem modo constabit duplum quadratum ex AΞ majus esse quadrato ex NΞ. Fiat duplum quadrati ex MΞ æquale quadrato ex NΞ, & ad punctum M erigatur Axi normalis AM occurrens sectioni in A; & jungatur ΓA, eidemque parallela ducatur sectionis diameter KB: erit igitur MΞ ad ΞN (per 7^{mam} hujus) sicut diameter KB ad latera figuræ ejus simul sumpta; ac proinde quadratum ex MΞ ad quadratum ex ΞN sicut quadratum ipsius KB ad quadratum summæ laterum figuræ ejus. Sed quadratum ex MΞ dimidium est quadrati ex ΞN; quare quadratum ex KB dimidium est quadrati summæ laterum figuræ ejus.

Ducantur jam diametri ΔE, ξT inter A & B; & per punctum Γ iisdem parallelæ sint ΓO, ΓT; ac demittantur ad Axem normales Oο, TΠ. Quoniam vero quadratum ex MΞ dimidium est quadrati ex ΞN, ac rectangulum sub NΞ, ΞΘ etiam dimidium est quadrati ex ΞN; erit rectangulum sub NΞ, ΞΘ æquale quadrato ex MΞ: unde NΞ erit ad MΞ sicut MΞ ad ΞΘ; ac auferendo antecedentes à consequentibus, erit residuum MN ad residuum MΘ sicut NΞ ad MΞ. Hinc rectangulum sub NΞ, MΘ æquale erit rectangulo sub MN, MΞ. Est igitur rectangulum sub NΞ, MΘ majus rectangulo sub Nο, MΞ; ac duplum rectanguli sub NΞ, MΘ majus rectangulo duplo sub Nο, MΞ: rectangulum igitur sub MΘ, ΘΞ quater majus est duplo rectangulo sub Nο, MΞ: Adjiciatur commune duplum rectangulum sub Mο, MΞ; & quadruplum rectangulum sub MΘ, ΘΞ unà cum duplo rectangulo sub Mο, MΞ majus erit duplo rectangulo sub MN, MΞ. Addatur insuper quater quadratum ex ΘM utrinque; & erit quadruplum rectangulum sub $M\Theta$, $\Theta\Xi$, unà cum duplo rectangulo sub Mo, $M\Xi$ & quater quadrato ex ΘM simul, majus quam duplum rectangulum sub MN, $M\Xi$ unà cum quadruplo quadrato ex ΘM. Verum quadruplum rectangulum sub $M\Theta$, $\Theta\Xi$, una cum duplo rectangulo sub Mo, $M\Xi$ & quater quadrato ex ΘM simul (*per Lemma* V. *Abdolm.*) æquale est duplo rectangulo sub Θo, ΘM simul & $M\Xi$; ac duplum rectangulum sub NM, $M\Xi$ unà cum quadrato ex ΘM quater (*per Lemma* VI. *Abdolm.*) æquale est quadratis ex NM, $M\Xi$ simul: rectangulum igitur duplum sub Θo, ΘM simul & $M\Xi$ majus est quadratis ex NM, $M\Xi$ simul. Unde ratio dupli rectanguli sub Θo, ΘM simul & Mo ad duplum rectangulum sub Θo, ΘM simul & $M\Xi$ minor est ratione dupli rectanguli sub Θo, ΘM simul & Mo ad summam quadratorum ex MN, $M\Xi$: id est, ratio Mo ad $M\Xi$ minor est ratione dupli rectanguli sub Θo, ΘM & Mo ad summam quadratorum ex MN, $M\Xi$. Quadrata autem ex No & $o\Xi$ simul majora sunt quadratis ex MN, $M\Xi$, excessu rectanguli dupli sub Mo & Θo, ΘM simul, *per Lemma* IV. *Abdolm.* componendo igitur ratio $o\Xi$ ad $M\Xi$ minor erit ratione quadratorum ex No & $o\Xi$ simul ad quadrata ex MN, $M\Xi$ simul. Hinc, modo in Propositione præcedente usurpato, demonstrabitur quadrata laterum figuræ diametri KB minora esse quadratis laterum figuræ diametri ΔE. Cumque duplum rectangulum sub $N\Xi$, $o\Theta$ majus est duplo rectangulo sub $N\Pi$, $o\Xi$; eodem argumento probabitur quadrata laterum figuræ diametri ΔE minora esse quadratis laterum figuræ diametri ξT.

Quoniam etiam duplum rectangulum sub $N\Xi$, $\Pi\Theta$ majus est duplo rectangulo sub NA, $\Pi\Xi$; pari modo patebit rationem $A\Xi$ ad $\Xi\Pi$ minorem esse ratione quadratorum ex NA & $A\Xi$ simul ad quadrata ex $N\Pi$, $\Pi\Xi$ simul sumpta: unde pari ratiocinio constabit quadrata laterum figuræ ξT minora esse quadratis laterum figuræ Axis $A\Gamma$.



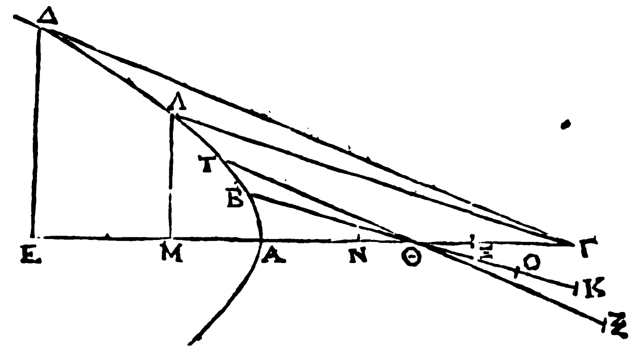
Ducantur jam, in iisdem Ellipseos quadrantibus, diametri aliæ remotiores ab Axe majore quam KB, ut ZH, $\tau\gamma$; & per punctum Γ his diametris parallelæ sint ΓX, $\Gamma\delta$: ac demittantur ad Axem normales XP, $\delta\sigma$. Et, argumento prædictis consimili, manifestum fiet quadrata laterum figuræ diametri KB minora esse quadratis laterum figuræ diametri ZH: atque hæc quoque minora esse quadratis laterum figuræ diametri $\tau\gamma$; sive puncta P, σ ceciderint utraque inter Θ & M, sive eorum unum fuerit in centro & alterum inter Θ & M vel inter Θ & Γ; vel denique si utrumque fuerit inter Θ & Γ. Quadrata igitur laterum figuræ diametri KB, cujus quadratum dimidium est quadrati summæ laterum figuræ ejus, minora sunt quadratis laterum figuræ cujuscunque alterius diametri in Ellipseos quadrantibus $A\Sigma$, $\Gamma\theta$ ducendæ: ac quadrata laterum figuræ diametri huic utrinque propioris, in iisdem quadrantibus ductæ, minora sunt quadratis laterum figuræ diametri ab eadem remotioris. Consequitur etiam quadrata laterum figuræ Axis minoris $\Sigma\theta$ majora esse quadratis è lateribus figuræ cujuscunque alterius diametri sectionis simul sumptis. Q. E. D.

PROPOSITIO XLIX.

SI in Hyperbola latus transversum figuræ Axis majus fuerit latere ejus recto: erit differentia quadratorum laterum figuræ Axis

Axis minor differentia quadratorum laterum figuræ cujuslibet alterius diametri: ac differentia quadratorum laterum figuræ diametri Axi propioris minor erit differentia quadratorum laterum figuræ diametri ab eodem remotioris: differentia autem inter quadrata laterum figuræ cujuscunque diametri sectionis præter Axem, major erit differentia inter quadratum Axis & figuram ejusdem; sed minor duplo ejus.

Sit Axis Hyperbolæ ΑΓ, & centrum Θ; & sit ΑΓ major latere ejus recto: fiat ΓΝ ad ΝΑ & ΑΞ ad ΞΓ in ratione ipsius ΑΓ ad latus ejus rectum, ac ducantur diametri ΚΒ, ξΤ. Dico differentiam inter quadratum ex ΑΓ & quadratum lateris ejus recti minorem esse differentiâ inter quadratum diametri ΚΒ & quadratum lateris recti ejusdem ΚΒ: ac differentiam inter quadrata ex ΚΒ & ex latere ejus recto minorem esse differentia inter quadrata ex ξΤ & ex latere ejus recto.



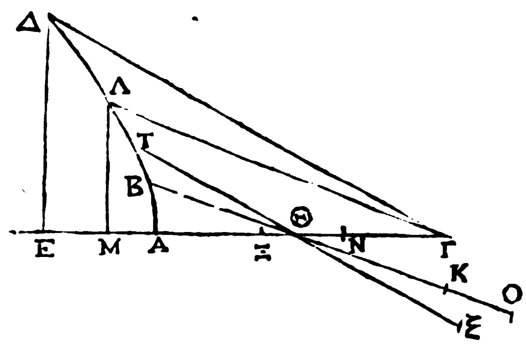
Ducantur ΓΛ, ΓΔ diametris ΚΒ, ξΤ parallelæ; ac demittantur ad Axem normales ΛΜ, ΔΕ. Quoniam vero ΑΓ est ad latus ejus rectum ut ΓΝ ad ΝΑ sive ut ΑΞ ad ΞΓ; erit rectangulum sub ΓΝ, ΞΑ ad differentiam quadratorum ex ΑΞ & ΑΝ sicut quadratum ex ΑΓ ad differentiam quadratorum ex ΑΓ & ex latere ejus recto. Ratio autem ΜΞ ad ΞΑ minor est ratione ΜΝ ad ΝΑ; adeoque ratio ΜΞ ad ΞΑ minor est ratione ipsarum ΜΞ, ΜΝ simul ad ipsas ΞΑ, ΑΝ simul: ac proinde minor est ratione rectanguli sub ΞΜ, ΜΝ simul & ΞΝ ad rectangulum sub ΞΑ, ΑΝ simul & ΞΝ. Verum rectangulum sub ΞΜ, ΜΝ simul & ΞΝ (*per 6.* II. *Elem.*) differentia est inter quadrata ex ΞΜ & ΜΝ, ac rectangulum sub ΞΑ, ΑΝ simul & ΞΝ differentia est inter quadrata ex ΞΑ, ΑΝ: quare ratio rectanguli sub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum sub ΓΝ, ΞΑ minor est ratione differentiæ quadratorum ex ΞΜ & ΜΝ ad differentiam quadratorum ex ΞΑ & ΑΝ: ac permutando ratio rectanguli sub ΓΝ, ΜΞ ad differentiam quadratorum ex ΞΜ & ΜΝ minor erit ratione rectanguli sub ΓΝ, ΞΑ ad differentiam quadratorum ex ΞΑ, ΑΝ. Sed rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ est ad differentiam quadratorum ex ΞΝ, ΜΝ (per 20^{mam} hujus) sicut quadratum ex ΑΓ ad differentiam quadratorum è lateribus figuræ diametri ΚΒ; ac rectangulum sub ΓΝ, ΑΞ est ad differentiam quadratorum ex ΞΑ & ΑΝ ut quadratum ex ΑΓ ad differentiam quadratorum ex Axe ΑΓ & ex latere ejus recto: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad differentiam quadratorum è lateribus figuræ diametri ΚΒ minor est ratione ejusdem ad differentiam quadratorum laterum figuræ Axis ΑΓ. Quocirca differentia quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ major est differentia quadratorum laterum figuræ Axis.

Similiter, quoniam ratio ΕΞ ad ΞΜ minor est ratione ΕΝ ad ΝΜ, erit ratio ΕΞ ad ΞΜ minor ratione ipsarum ΕΞ, ΝΕ simul ad ΞΜ, ΜΝ simul; unde modo nuper adhibito probabitur differentiam quadratorum laterum figuræ diametri ξΤ majorem esse differentiâ quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ. Quinetiam si fiat ΒΟ æqualis lateri recto figuræ diametri ΚΒ; erit differentia inter quadrata ex ΒΚ & ΒΟ æqualis duplo rectangulo sub ΒΟ, ΟΚ una cum quadrato ex ΟΚ; quæ proinde major erit rectangulo sub ΒΚ, ΚΟ, minor vero duplo ejusdem. Verum rectangulum sub ΒΚ, ΚΟ æquale est differentiæ inter quadratum ex ΒΚ & figuram super ΒΚ factam; quæ quidem differentia (per 29^{um} hujus) æqualis est differentiæ inter quadratum Axis ΑΓ & figuram ejusdem: differentia igitur inter quadratum diametri ΒΚ & quadratum lateris ejus recti major est differentia inter quadratum Axis ΑΓ & figuram ejusdem; minor vero est duplo istius differentiæ. Q. E. D.

PROPOSITIO L.

SI vero in Hyperbola latus transversum figuræ sectionis minus fuerit latere ejus recto: erit differentia inter quadrata laterum figuræ Axis major differentia inter quadrata laterum figuræ cujuscunque alterius diametri: ac differentia quadratorum laterum figuræ factæ super diametrum Axi propiorem major erit differentia quadratorum laterum factæ super remotiorem: differentia autem inter quadratum cujusvis diametri & quadratum lateris ejus recti major erit duplo differentiæ inter quadratum Axis & figuram super Axem factam.

Sit sectionis Axis ΑΓ, ac fiat ΓΝ ad ΝΑ ut & ΑΞ ad ΞΓ in ratione ΑΓ ad latus ejus rectum; & quoad cætera sit Schema idem ac in Propositione præcedente: erit igitur rectangulum sub ΓΝ, ΑΞ ad differentiam inter quadrata ex ΑΝ & ex ΑΞ, sicut quadratum ex Axe ΑΓ ad differentiam inter quadratum istud & quadratum lateris recti figuræ Axis. Ratio autem ΜΞ ad ΞΑ major est ratione ΜΝ ad ΝΑ; adeoque ratio ΜΞ ad ΞΑ major est ratione ipsarum ΜΞ, ΜΝ simul ad ΞΑ, ΑΝ simul, ac ratio rectanguli sub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum sub ΓΝ, ΞΑ major erit ratione ipsarum ΜΞ, ΜΝ ad ΑΞ, ΑΝ simul. Sed rectæ ΜΞ, ΜΝ simul sunt ad ΑΞ, ΑΝ simul sicut rectangulum sub ΜΞ, ΜΝ simul & ΝΞ ad rectangulum sub ΞΑ, ΑΝ simul & ΝΞ: ratio igitur rectanguli sub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum sub ΓΝ, ΞΑ major est ratione rectanguli sub ΜΞ, ΜΝ simul & ΝΞ ad rectangulum sub ΞΑ, ΑΝ simul & ΝΞ. *Sed rectangulum sub* ΜΞ, ΜΝ *simul &* ΝΞ *æquale est differentiæ quadratorum ex* ΜΝ, ΜΞ; *ac rectangulum sub* ΞΑ, ΑΝ *simul &* ΝΞ *æquale est differentiæ quadratorum ex* ΞΑ *&* ΑΝ: quare, eodem modo quo præcedentia, demonstrabitur differentiam quadratorum diametri ΚΒ laterisque recti ejusdem minorem esse differentiâ quadrati Axis ΑΓ & lateris ejus recti: pariterque differentiam quadratorum diametri ξΤ & lateris ejus recti minorem esse differentia quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ.



Fiat autem ΒΟ æqualis lateri recto diametri ΚΒ, ac rectangulum sub ΒΚ, ΚΟ (per 29^{am} hujus) æquale erit differentiæ inter quadratum Axis ΑΓ & figuram super Axem factam. Duplum autem rectanguli sub ΒΚ, ΚΟ una cum quadrato ex ΚΟ, *hoc est differentia quadratorum ex* ΒΚ *&* ΒΟ, majus est duplo rectangulo sub ΒΚ, ΚΟ: differentia igitur quadratorum laterum figuræ cujuscunque diametri ΚΒ major erit duplâ differentiâ *inter quadratum Axis* ΑΓ *ejusdemque figuram.* Q. E. D.

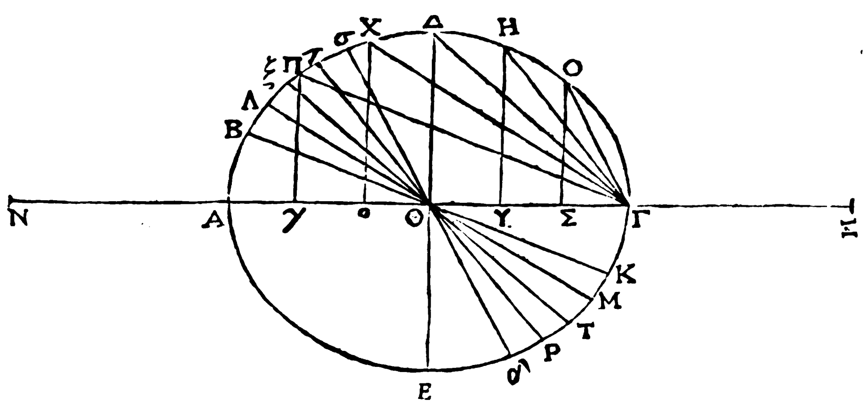
PROPOSITIO LI.

DIfferentia quadratorum laterum figuræ Axis majoris, in Ellipsi, major est differentia quadratorum laterum figuræ cujuslibet alterius diametri, quæ major est latere suo recto: ac differentia quadratorum laterum figuræ factæ super diametrum Axi majori propiorem major est differentia quadratorum laterum figuræ diametri remotioris ab eodem: differentia autem quadratorum laterum figuræ Axis minoris major est differentia quadratorum laterum figuræ cujusvis alterius diametri, quæ minor est latere suo recto: ac differentia quadratorum laterum figuræ diametri Axi minori propioris major erit differentia quadratorum laterum figuræ super remotiorem factæ.

Sit

Sit Ellipseos Axis major ΑΓ, minor vero ΔΕ; ac sit ξΤ altera è diametris conjugatis æqualibus. Ducantur inter puncta Α & ξ diametri ΚΒ, ΛΜ, ac iisdem parallelæ ΓΠ, ΓΧ; & ad Axem demittantur normales Πγ, Χο: atque fiant reliqua omnia prout in Schemate Hyperbolæ Propositionis proximæ. Dico excessum quadrati ex ΑΓ supra quadratum lateris ejus recti majorem esse excessu *quadrati ex* ΚΒ supra quadratum lateris recti ejusdem; atque hunc quoque excessum majorem esse excessu quadrati ex ΛΜ supra quadratum lateris ejus recti.

Quoniam enim ratio ΑΞ ad Ξγ minor est ratione ΑΘ ad Θγ, erit ratio rectanguli sub ΓΝ, ΑΞ ad rectangulum sub ΓΝ, Ξγ minor ratione dupli rectanguli sub ΞΝ, ΑΘ ad duplum rectangulum sub ΞΝ, Θγ. Sed duplum rectangulum sub ΞΝ, ΑΘ (*per Lem.* VII. *Abd.*) æquale est differentiæ quadratorum ex ΞΑ, ΑΝ; ac duplum rectangulum sub ΞΝ, Θγ æquale est differentiæ quadratorum ex Ξγ, γΝ: ratio igitur rectanguli sub ΓΝ, ΑΞ ad rectangulum sub ΓΝ, Ξγ minor est ratione differentiæ quadratorum ex ΞΑ & ΑΝ ad differentiam quadratorum ex Ξγ, γΝ. Permutando autem ratio rectanguli sub ΓΝ, ΞΑ ad differentiam quadratorum ex ΞΑ, ΑΝ minor est ratione rectanguli sub ΓΝ, Ξγ ad differentiam quadratorum ex Ξγ, γΝ. Verum rectangulum sub ΓΝ, ΞΑ est ad differentiam quadratorum ex ΞΑ, ΑΝ sicut quadratum ex Axe ΑΓ ad differentiam quadratorum laterum figuræ ejusdem Axis, (quia ΓΝ est ad ΑΝ ut & ΑΞ ad ΞΓ in ratione Axis ad latus ejus rectum; atque adeo utraque ΑΝ, ΓΞ sunt rectæ quas Homologas vocamus) ac rectangulum sub ΓΝ, Ξγ (per 20^mam^ hujus) est ad differentiam quadratorum ex Ξγ, γΝ sicut quadratum ex ΑΓ ad differentiam quadratorum diametri ΚΒ laterisque recti ejusdem: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad differentiam quadratorum laterum figuræ ejus minor est ratione ejusdem quadrati ex ΑΓ ad differentiam quadratorum diametri ΚΒ & lateris ejus



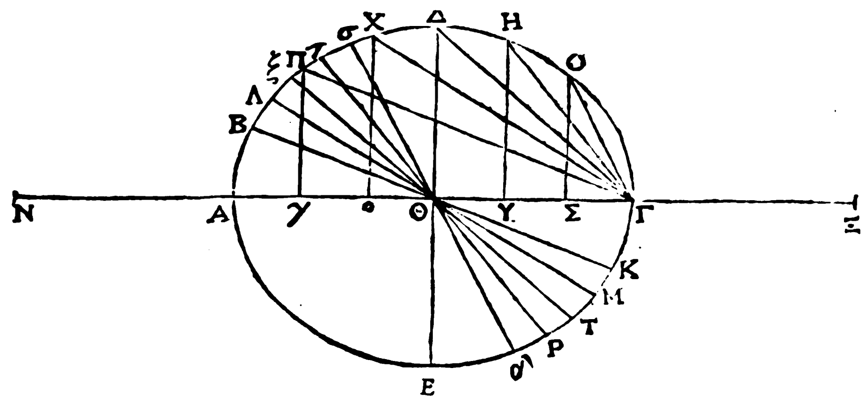
recti: quapropter differentia quadratorum laterum figuræ Axis ΑΓ major est differentiâ quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ. Eodemque modo demonstrabitur rationem rectanguli sub ΓΝ, Ξγ ad rectangulum sub ΓΝ, Ξο minorem esse ratione differentiæ quadratorum ex Ξγ, γΝ ad differentiam quadratorum ex Ξο, οΝ: ac permutando rationem rectanguli sub ΓΝ, Ξγ ad differentiam quadratorum ex Ξγ, γΝ minorem esse ratione rectanguli sub ΓΝ, Ξο ad differentiam quadratorum ex Ξο, οΝ. Unde manifestum fiet differentiam quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ majorem esse differentiâ quadratorum laterum figuræ diametri ΛΜ.

Ducantur jam aliæ diametri inter ξ & Δ, sicut σδ, ΤΡ; ac per punctum Γ agantur parallelæ illis rectæ ΓΗ, ΓΟ; & demittantur ad Axem normales ΗΥ, ΟΣ. Dico differentiam quadratorum laterum figuræ Axis minoris ΔΕ majorem esse differentia inter quadratum diametri σδ & quadratum lateris recti ejus; atque hanc differentiam majorem esse differentiâ quadratorum laterum figuræ diametri ΤΡ.

Quoniam enim ratio rectanguli sub ΓΝ, ΞΥ ad rectangulum sub ΓΝ, ΞΣ major est ratione ΥΘ ad ΘΣ, (quia ΞΥ major est quam ΞΣ ac ΥΘ minor quam ΘΣ) ac ΥΘ est ad ΘΣ ut duplum rectangulum sub ΝΞ & ΥΘ ad duplum rectangulum sub ΝΞ, ΘΣ; duplum autem rectangulum sub ΞΝ, ΥΘ æquale est differentiæ quadratorum ex ΝΥ, ΥΞ, uti duplum rectangulum sub ΞΝ, ΘΣ æquale est differentiæ

 quadra-

quadratorum ex ΝΣ, ΣΞ: ratio igitur rectanguli sub ΓΝ, ΞΥ ad rectangulum sub ΓΝ, ΞΣ major est ratione differentiæ quadratorum ex ΝΥ, ΥΞ ad differentiam quadratorum ex ΝΣ, ΣΞ: permutando autem ratio rectanguli sub ΓΝ, ΞΥ ad differentiam quadratorum ex ΝΥ, ΥΞ major erit ratione rectanguli sub ΓΝ, ΞΣ ad differentiam quadratorum ex ΝΣ, ΣΞ. Unde, eodem quo in præcedentibus usi sumus argumento, constabit rationem quadrati ex ΑΓ ad differentiam quadratorum diametri τρ & lateris ejus recti majorem esse ratione ejusdem quadrati ex ΑΓ ad differentiam quadratorum laterum figuræ diametri σδ: ac proinde differentiam quadratorum laterum figuræ diametri σδ majorem esse differentiâ inter quadratum diametri τρ & quadratum lateris recti ejus.



Denique cum ratio ΣΞ ad ΞΓ major est ratione ΣΘ ad ΘΓ (quia ΣΞ major est quam ΞΓ & ΣΘ minor quam ΘΓ) erit ratio rectanguli sub ΓΝ, ΣΞ ad rectangulum ΓΝ, ΞΓ major ratione dupli rectanguli sub ΝΞ, ΣΘ ad duplum rectangulum sub ΝΞ, ΘΓ: quocirca, modo in præcedentibus usurpato, demonstrabitur differentiam quadratorum laterum figuræ Axis minoris ΔΕ majorem esse differentia inter quadratum diametri σδ & quadratum lateris recti figuræ ejusdem. Q. E. D.

APOL-

APOLLONII PERGÆI CONICORUM
LIBER OCTAVUS RESTITUTUS:
SIVE
DE PROBLEMATIS DETERMINATIS DIVINATIO.

Halleius Aldrichio S. P.

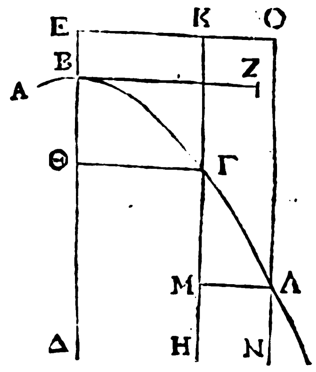
CUM de Apollonio *edendo tecum agerem, non mediocriter nos angebat, quod in Codicibus etiam* Arabicis *ultimus Conicorum liber desideraretur. Tu tamen, qua es ingenii felicitate, statim sensisti, pro re deplorata non habendum esse, sed forte quadantenus restitui posse, indicio ex eo facto quod in* Pappi Collectionibus Mathematicis *eadem ipsa tradantur* Lemmata *Conicorum Octavo pariter ac Septimo demonstrando inservientia; quæ tamen in cæteros libros diversos diversa reperiuntur. Hinc Tibi pro comperto fuit, utriusque libri argumenta conjunctissima fuisse; ac Problemata Octavi à Theorematis Septimi* διοριστικῶς *suas sortiri determinationes. Illud quidem mihi, re probe perpensa, cum conjecturâ probabile tum vestigiis quibusdam indicari videbatur: quo factum ut, Te viam monstrante, jacturæ isti, quantum in me est, resarciendæ memet accingerem. Quæso igitur hoc, quicquid est conaminis, benigne accipias. Vale.*

PROPOSITIO I. PROBL.

DAto in Parabola data cujuslibet diametri latere recto; exhibere latus rectum cujuscunque alterius diametri.

Quoniam (per 5^{tm} VII^{mi}) demonstratum est, latus rectum cujuslibet alterius diametri Parabolæ excedere latus rectum Axis, quadruplâ interceptæ inter normalem ad Axem demissam & verticem principalem sectionis: manifestum est quod, si supra verticem Axis capiatur punctum quod quartâ parte lateris ejus recti distet à vertice, portio Axis, inter punctum illud & normalem à vertice cujusvis alterius diametri demissam, erit quarta pars lateris recti istius diametri.

Sit itaque Parabolæ ABΓ vertex B, Axis BΔ, & latus rectum BZ; producaturque Axis ad E, ita ut EB sit quarta pars lateris recti Axis; & per punctum quodvis sectionis Γ ducatur Axi parallela ΓH, quæ proinde (per 46. 1. hujus) diameter erit; ac demittatur ad Axem normalis ΓΘ. Dico latus rectum diametri ΓH quadruplum esse interceptæ ΘE.



Quod si diameter data non fuerit Axis, ut ΓH; producatur ΓH supra verticem ad K, ita ut ΓK sit quarta pars lateris recti datæ diametri; ad quam demittatur normalis de puncto quovis sectionis Λ, ut ΛM: erit latus rectum diametri ΛN quadruplum interceptæ KM. Hæc autem omnia liquido patent ex quintâ septimi hujus.

PROPOSITIO II. PROBL.

Vicissim dato in Parabola cujuslibet diametri latere recto; invenire diametrum quæ habeat latus suum rectum rectæ datæ æquale.

Sit data Parabola ABΓ, datæ autem diametri ΓH sit latus rectum datum. producatur ΓH ad K, ita ut ΓK sit quarta pars lateris recti diametri istius; ac fiat KM æqualis quartæ parti alicujus alterius lateris recti; & per M ipsi ΓH normalis erigatur ΛM, occurrens sectioni in Λ; per Λ vero ipsi ΓH parallela ducatur ΛN. Dico ΛN esse diametrum sectionis quæsitam, quæ producatur ad O.

Vel si per K ducatur diametro normalis EKO, & intervallo OΛ quartæ parti lateris recti dati æquali ducatur MΛ ipsi EKO parallela; occurret sectioni in puncto quæsito Λ. Etenim cum ΓK sit quarta pars lateris recti diametri ΓH, & KM sit quarta pars lateris recti dati, cui æqualis est ΛO; sit autem ΛO (per demonstrata in quinto VII^{mi}) quarta pars lateris recti diametri ΛN: erit igitur ΛN diameter illa quam quærimus.

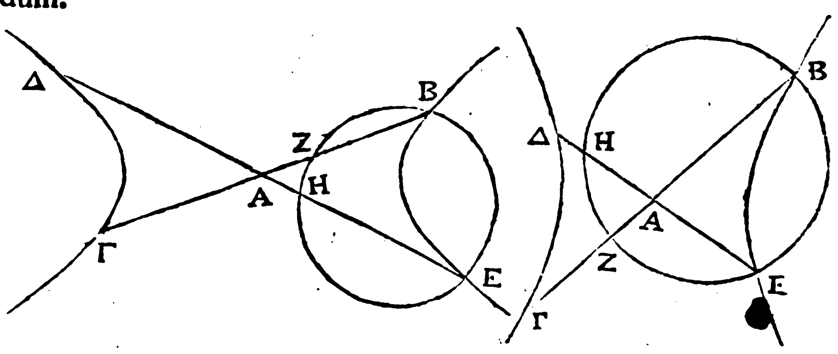
Latus autem rectum datum (per 32. VII^{mi}) non minus esse potest latere recto Axis.

PROPOSITIO III. PROBL.

Dato in data Hyperbola datæ cujuslibet diametri latere recto; alterius cujusvis diametri latus rectum invenire.

Sit in Hyperbola BE, cujus centrum A, data aliqua diameter ΓB, ac semissi lateris ejus recti fiat ZB æqualis: proponitur latus rectum diametri cujuscunque alterius ΔE investigandum.

Per data tria puncta B, E, Z (per 5. 4. *El.*) describatur circulus EBZH occurrens diametro propositæ ΔE in puncto H. Dico EH dimidium esse lateris recti quæsiti. Nam (per 29^{am}. VII^{mi}) differentia inter quadratum diametri cujuscunque Hyperbolæ & figuram ejusdem ubique eadem est: adeoque rectangula sub diametris & differentiis inter easdem & latera sua recta sunt semper æqualia, uti & rectangula contenta sub earundem dimidiis; quare rectangulum BAZ æquale est contento sub AE & differentia inter AE & semissem lateris recti diametri ΔE. Sed, ob circulum (per 35. vel 36. III. *Elem.*) rectangulum sub EA, AH æquale est rectangulo BAZ: est igitur AH differentia inter semidiametrum AE & semilatus rectum ejusdem diametri, ac proinde EH dimidium est lateris recti quæsiti.

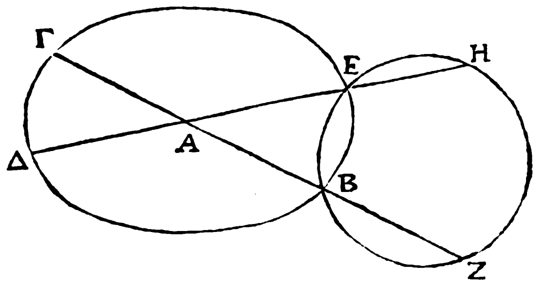


PRO-

PROPOSITIO IV. PROBL.

IN Ellipsi datâ, si detur diameter aliqua una cum ejusdem latere recto; possumus diametri cujusvis alterius latus rectum exhibere.

Sit ΓΕΒΔ Ellipsis data, cujus centrum Α; & diametri ΓΒ detur latus rectum, ejusque dimidio æqualis fiat ΒΖ, in producta diametro ponenda: ac sit quælibet alia diameter ΔΕ: & per tria puncta Ε, Β, Ζ describatur circulus occurrens ipsi ΔΕ productæ in puncto Η. Dico ΕΗ dimidium esse lateris recti quæsiti.

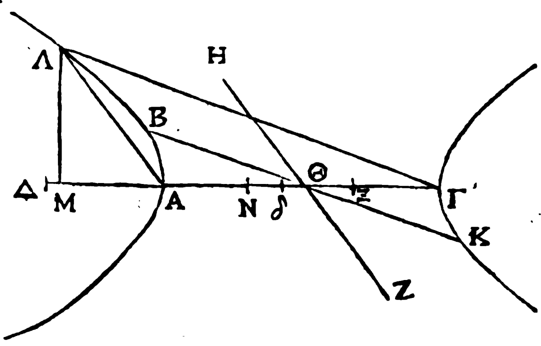


Est enim in Ellipsi (per 30. VII^{mi}) summa quadrati diametri cujuscunque & figuræ ejusdem semper æqualis; hoc est, rectangulum contentum sub diametro & utrâque diametro & latere ejus recto simul ubique æquale est; adeoque & contenta sub earundem dimidiis: rectangulum igitur ΒΑΖ æquale est contento sub ΕΑ & utrâque ΕΑ & semisse lateris ejus recti simul. Sed (per 36^{am} III. *El.*) rectangulum ΕΑΗ æquale est rectangulo ΒΑΖ; quare ΑΗ æqualis est semidiametro ΕΑ una cum semisse lateris ejus recti simul sumpto: quapropter ΑΗ superat ΕΑ dimidio lateris recti quæsiti; duplum igitur rectæ ΕΗ eidem lateri recto æquale est.

PROPOSITIO V. PROBL.

DAtis lateribus figuræ Axis Hyperbolæ, & datâ quavis ejusdem diametro magnitudine: positionem diametri istius in sectione determinare, atque situm & magnitudinem diametri cum eâdem conjugatæ, latusque ejus rectum.

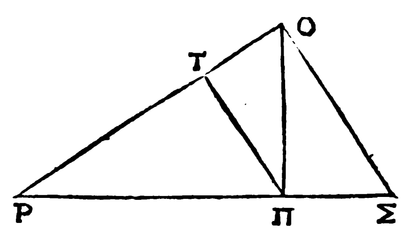
Sit Hyperbolæ ΑΒ Axis transversus ΑΓ, & latus rectum ΑΔ; quod ponatur in directo Axis ad Δ & ϑ; ac fiat ΓΝ ad ΝΑ ut & ΑΞ ad ΞΓ sicut ΓΑ ad ΑΔ; erunt itaque puncta Ν, Ξ (per 2^{dam} VII^{mi}) termini rectarum quas *Homologas* diximus: Componendo autem ΓΑ erit ad ΑΝ sicut Axis transversus & latus ejus rectum simul ad latus rectum, sive ut ΓΔ ad ΔΑ; per conversionem vero rationis ΑΝ erit ad ΝΞ sicut ΑΔ ad Γϑ differentiam Axis & lateris recti: ex æquo igitur ΓΑ erit ad ΝΞ sicut ΓΔ ad ϑΓ; ac proinde rectangulum sub ΝΞ & ΓΔ æquale erit contento sub ΑΓ & Γϑ, sive sub Axe & differentiâ Axis laterisque recti. Rectangulum autem sub ΑΓ & differentiâ ejusdem & lateris ejus recti æquale est differentiæ quadrati Axis & figuræ ejus, quæ quidem (per 13^{am} & 29^{am} VII^{mi}) differentia est quadratorum è quibusvis sectionis diametris conjugatis: adeoque rectangulum sub ΝΞ, ΓΔ æquale est differentiæ quadratorum ex quibuslibet sectionis diametris conjugatis. Pone jam ΒΚ esse diametrum quam quærimus, ac repetito Schemate Prop. 6^{tæ} VII^{mi} (per eandem 6^{tam}) quadratum ex ΒΚ erit ad quadratum ex ΖΗ ut ΞΜ ad ΜΝ, ac per conversionem rationis quadratum ex ΒΚ erit ad differentiam quadratorum ex ΒΚ, ΖΗ, sive ad rectangulum sub ΝΞ & ΓΔ, sicut ΞΜ ad ΝΞ: quocirca quod sit sub ΝΞ & quadrato ex ΒΚ æquale erit contento sub ΝΞ & rectangulo sub ΓΔ & ΞΜ; adeoque quadratum ex ΒΚ æquale erit rectangulo sub ΞΜ & ΓΔ, sive sub ΞΜ & summâ Axis & lateris ejus recti: est igitur ΒΚ media proportionalis inter ΓΔ & ΜΞ. Dantur autem ΒΚ & ΓΔ; data est igitur ΜΞ, ac dato puncto Ξ punctum Μ datur.



Compositio autem manifesta est: manentibus enim descriptis, fiat ut ΓΔ ad ΒΚ ita BK ad MΞ, & erectâ Axi normali AM, fiat quadratum ex AM ad rectangulum AMΓ sicut figuræ Axis latus rectum ad transversum, ac punctum A (per 21^{am} primi) tanget sectionem. Jungantur AA, AΓ; & per centrum Θ ipsis AA, AΓ parallelæ ducantur diametri BK, ZH: habemus itaque (per demonstrata in 6ta VII^{mi}) positionem utriusque diametri quæsitæ; ac factâ ΘB æquali semidiametro datæ, punctum B tanget sectionem. Fiat autem quadratum ex ΘZ vel ΘH ad quadratum ex ΘB sicut MN ad MΞ, & erit ZH diameter cum BK conjugata: ac (per eandem 6^{tam} VII$_{mi}$) data diameter BK erit ad latus suum rectum sicut MΞ ad MN.

Invenimus itaque positionem diametri BK, & conjugatæ cum eadem tam magnitudinem quam situm, latusque rectum ejusdem, Curvâ nondum descriptâ: id quod in cæteris omnibus observandum. In hunc enim usum destinasse librum suum septimum videtur *Apollonius*, ut viam sterneret ad solutiones & determinationes problematum omnium quæ summas vel differentias diametrorum conjugatarum vel laterum figuræ earundem; sicut & summas vel differentias quadratorum ex iisdem similiaque spectant, absque supposita Sectionum delineatione: nec vulgari artificio quæsitarum diametrorum positiones in singulis assequitur.

Diametri autem conjugatæ cum diametro datâ magnitudinem, & latus rectum ejus, constructione paulo faciliore invenies, modo positionem non requiras. Capiatur enim media proportionalis inter AΓ & Γδ sive inter Axem & differentiam Axis & lateris ejus recti: quæ proinde poterit differentiam quadrati ex Axe & figuræ ejusdem, hoc est (per 29^{am} VII^{mi}) differentiam quadratorum è quibusvis diametris conjugatis. Sit ea ΠO; & erectâ ad OΠ normali ΠP, fiat OP æqualis diametro datæ, & erit ΠP æqualis diametro conjugatæ cum PO: si nempe latus rectum minus fuerit Axe. Si vero majus fuerit eo, fiat ΠP diametro propositæ æqualis, & juncta OP erit ejusdem diametro conjugatæ æqualis; & erecta super OP normali OΣ, erit PΣ latus rectum diametri ΠP. In priori vero casu, demissâ normali ΠT erit PT latus rectum diametri OP: conjugata enim media est proportionalis inter diametrum & latus suum rectum. Cætera patent ex 13^{a} & 29^{a} VII^{mi}.

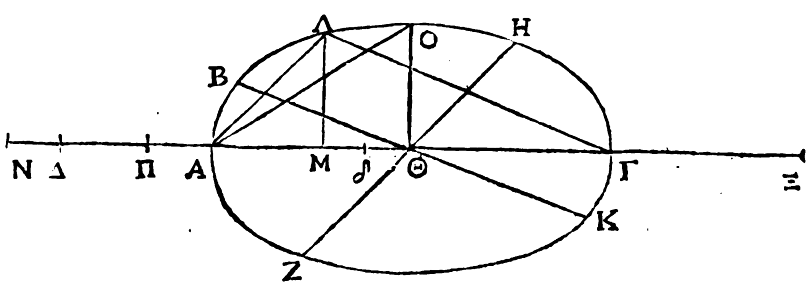


Ac manifestum est diametrum propositam non minorem esse debere Hyperbolæ Axe dato.

PROPOSITIO VI. PROBL.

Datis Ellipseos Axe & latere recto, & datâ quavis ejusdem diametro magnitudine: diametri istius positionem designare, situmque & magnitudinem diametri cum datâ conjugatæ, simulque latus rectum ejusdem.

Sit Ellipseos ABΓ Axis transversus AΓ, qui producatur utrinque, ac fiat utraque AΔ, Aδ æqualis lateri recto, & (per 3^{am} VII^{mi}) habeantur rectæ Homologæ AN, ΓΞ; capiendo scilicet ΓN ad NA & AΞ ad ΞΓ sicut AΓ ad AΔ. Hinc dividendo ΓA erit ad AN sicut differentia Axis & lateris ejus recti ad latus rectum, sive ut Γδ ad ΔA; componendo vero AN erit ad NΞ sicut latus rectum ad summam Axis laterisque ejus recti, sive ut AΔ ad ΔΓ: ex æquo igitur ΓA erit ad NΞ sicut Γδ ad ΔΓ, sive ut differentia Axis & lateris ejus recti ad summam eorundem: rectangulum igitur sub Axe & summâ Axis & lateris ejus recti æquale est rectangulo sub NΞ & eorundem differentiâ. Sed rectangulum sub Axe & utroque Axe & latere recto simul æquale est quadrato ex Axe & figuræ ejusdem simul; quorum quidem summa (per 30^{am} & 12^{am} VII^{mi}) æqualis est sum-



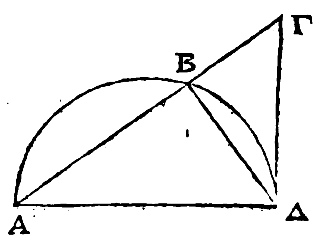
mæ

mæ quadratorum è quibuscunque sectionis diametris conjugatis: huic igitur summæ æquale est rectangulum sub datis ΝΞ, Γδ sive differentiâ Axis & lateris recti.

Puta jam factum quod quæritur, sitque diameter ΒΚ æqualis datæ, eidemque conjugata ΖΗ; ductâque ΑΓ ipsi parallelâ, jungatur ΑΔ & demittatur normalis ΑΜ: & (per demonstrata in 7^{ma} VII^{mi}) quadratum ex ΒΚ erit ad quadratum ex ΖΗ sicut ΞΜ ad ΜΝ. Componendo autem quadratum ex ΒΚ erit ad summam quadratorum ex ΒΚ, ΖΗ, hoc est ad rectangulum sub ΝΞ & Γδ sive differentiâ Axis & lateris ejus recti, sicut ΞΜ ad ΝΞ: igitur quod fit sub ΝΞ & quadrato ex ΒΚ æquale erit facto sub ΝΞ & rectangulo sub ΜΞ & Γδ; unde quadratum ex ΒΚ æquale erit rectangulo sub ΜΞ & Γδ, & proinde ΒΚ media proportionalis erit inter ΜΞ & Γδ. Datur autem utraque ΒΚ & Γδ: data est itaque ΜΞ; &, ob datum punctum Ξ, punctum Μ quoque datur.

Componetur autem hoc modo. Fiat ut Γδ sive differentia Axis & lateris ejus recti ad diametrum datam ΒΚ ita eadem ΒΚ ad ΞΜ: &, erecta normali ΜΑ, fiat quadratum ex ΜΑ ad rectangulum ΑΜΓ sicut latus rectum Axis ad ipsum Axem, ac (per 21^{am} primi) punctum Α tanget sectionem. Jungantur ΑΓ, ΑΔ, & per centrum Θ parallelæ ipsis ducantur diametri ΒΘΚ, ΖΘΗ; ac (per demonstrata in 7^{ma} VII^{mi}) habebuntur diametri quæsitæ positione; ac, factâ utraque ΘΒ, ΘΚ æquali semidiametro datæ, puncta quoque Β, Κ tangent sectionem. Per eandem autem 7^{am} VII^{mi}, erit ut ΜΞ ad ΜΝ ita ΒΚ ad latus rectum ejusdem, & ita quadratum ex ΒΚ ad quadratum diametri ΖΗ cum ΒΚ conjugatæ. Satisfactum est igitur problemati, & inventus est situs utriusque diametri, Ellipsi etiam nondum descriptâ.

Absque positione autem paratius est diametri conjugatæ laterisque recti magnitudinem invenire. Nam cum quadrata ex ΒΚ, ΖΗ quadratis Axium simul sumptis, hoc est summæ quadrati Axis & figuræ ejus (per 12^{mam} & 30^{am} VII^{mi}) semper æqualia sunt, si capiatur ΓΠ media proportionalis inter ΑΓ & ΓΔ, poterit ΓΠ summam quadratorum ex ΒΚ, ΖΗ, sive quadruplum summæ quadratorum semiaxium ΑΘ, ΘΟ, hoc est quadrati ex ΑΟ. Quapropter si diametro ΓΠ vel radio ΑΟ describatur semi-circulus ΑΔΒ, in quo inscribatur recta ΑΒ datæ diametro ΒΚ æqualis, ac jungatur ΒΔ: erit ΒΔ æqualis conjugatæ ΖΗ; erectaque ΓΔ normali super ΑΔ usque dum occurrat ipsi ΑΒ productæ in Γ, erit ΒΓ tertia proportionalis ipsis ΑΒ, ΒΔ, hoc est ipsis ΒΚ, ΖΗ; ac proinde ΒΓ æqualis erit lateri recto quæsito.

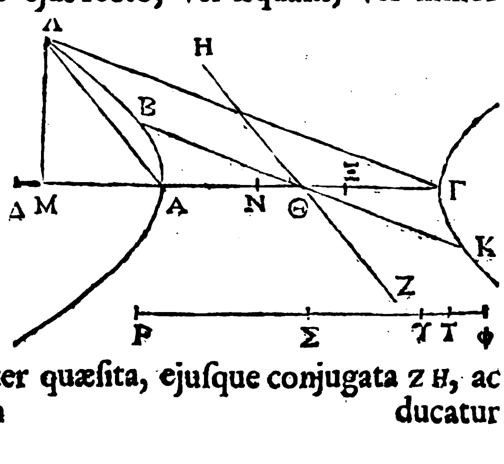


Manifestum autem est oportere diametrum ΒΚ non majorem esse Axe majore, nec minorem Axe minore, sive mediâ proportionali inter latus rectum Axis ipsumque Axem.

PROPOSITIO VII. PROBL.

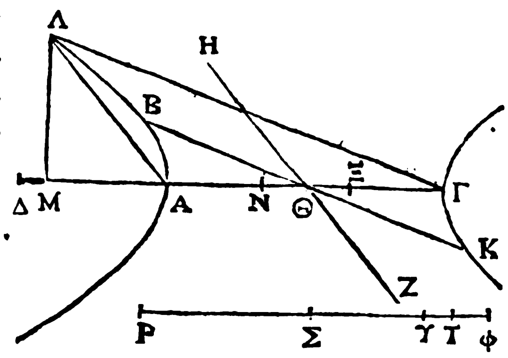
Datis Axe & latere recto Axis Hyperbolæ, ac datâ ratione diametrorum sectionis conjugatarum: invenire diametros illas conjugatas tam magnitudine quam positione.

Habeantur puncta Ξ, Ν Homologarum termini, ut in quinta hujus docetur: & quoniam fieri potest ut Axis major sit latere ejus recto, vel æqualis, vel minor eo; primum sit major eo, ac (per demonstrata in 21^{ma} VII^{mi}) ratio Axis ad suam conjugatam major esse debet ratione cujuscunque alterius diametri ad suam conjugatam. Sit igitur ratio data sicut ΡΣ ad ΣΤ sive majoris ad minorem, sed minor ratione Axium inter se; ac fiat ut ΡΣ ad ΣΤ ita ΣΤ ad ΣΥ: datis igitur ΡΣ, ΣΤ datur quoque ΣΥ, & ratio ΡΣ ad ΣΥ quoque datur, nempe ratio quadratorum ex ΡΣ, ΣΤ, hoc est ratio quadratorum diametrorum quas quærimus. Puta jam factum, & sit ΒΚ diameter quæsita, ejusque conjugata ΖΗ, ac



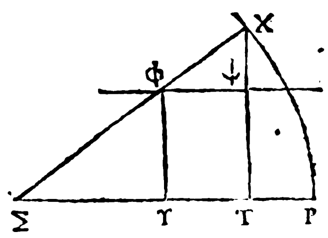
 ducatur

ducatur ΓΑ ipsi ΒΚ parallela, & demittatur normalis ΑΜ. Erit igitur (per 6^{am} VII^{mi}) quadratum ex ΒΚ ad quadratum ex ΖΗ ficut ΜΞ ad ΜΝ, adeoque ΜΞ erit ad ΜΝ ficut ΡΣ ad ΣΤ: ac, factâ ΣΦ ipsi ΡΣ æquali, erit dividendo ΞΝ ad ΜΞ ficut ΦΤ ad ΣΡ. Datur autem ratio ΦΤ ad ΣΡ, adeoque data eft ratio ΞΝ ad ΜΞ: ac data eft ΝΞ, quare & ΜΞ datur; unde, ob datum punctum Ξ, punctum Μ quoque datur. Eft autem (per ea quæ in quinta hujus demonftravimus) diameter ΒΚ media proportionalis inter datas ΜΞ & fummam Axis laterifque ejus recti; adeoque & ΒΚ datur magnitudine. Sed & ratio ΒΚ ad ΖΗ datur; quapropter, ob datum ΒΚ, ΖΗ quoque datur.



Componetur itaque problema, fi fiat ut ΦΥ ad ΣΡ, five ut differentia quadratorum è terminis rationis ΣΡ, ΣΤ, ad quadratum termini diametro ΒΚ analogi, ita ΞΝ ad ΜΞ; &, erecta normali ΜΔ, fiat quadratum ex ΜΔ ad rectangulum ΔΜΓ ficut latus rectum Axis ad ipfum Axem. Jungantur ΔΓ, ΔΑ, & per centrum Θ iis parallelæ ducantur ΒΘΚ, ΖΘΗ: dico eas effe diametros quæfitas politione, ut ex analyfi manifeftum eft. Dein capiatur ΒΚ media proportionalis inter ΓΔ & ΜΞ; & ponatur femiffis ejus de centro Θ ad Β & Κ, quæ proinde contingent fectionem; ac fiat ut ΡΣ ad ΣΥ ita ΘΒ ad ΘΗ vel ΘΖ: ac recta ΖΗ erit diameter conjugata cum diametro ΒΚ.

Cum autem differentia quadratorum ex diametris conjugatis fit femper æqualis differentiæ quadratorum Axium, poffumus modo fatis expedito problema hoc refolutum dare, fed abfque diametrorum pofitione. Radio ΣΡ defcribatur arcus circuli; ac, ductâ de centro recta ΣΡ, fiat ΣΥ æqualis minori rationis termino; & erigatur normalis ΥΧ occurrens circulo in Χ; & per Χ ducatur ΣΧ, fi opus eft, producenda. Dein capiatur ΤΨ, quæ poterit differentiam quadratorum ex Axibus fectionis, & ad diftantiam ΤΨ ipfi ΣΤ parallela ducatur ΨΦ, occurrens ipfi ΣΧ in Φ, & ipfi ΤΧ parallela ducatur ΦΥ: dico ΣΦ, ΣΥ effe diametros quæfitas. Nec aliâ demonftratione opus eft, nifi quod ΣΥ fit ad ΣΦ ficut ΣΤ ad ΣΧ, hoc eft ad ΣΡ, five in ratione propofita; quodque ΦΥ poffit differentiam quadratorum ex utroque Axe, five rectangulum fub Axe & differentia Axis laterifque ejus recti. Hoc autem fieri debet juxta 13^{am} & 29^{am} VII^{mi}.



Quod fi Axis minor fuerit latere ejus recto, eadem prorfus erit tam analyfis quam compofitio: oportebit autem rationem propofitam majorem effe ratione Axis ad Axem ejus conjugatam, minorem vero ratione æqualis ad æqualem, prout demonftratur in 22da VII^{mi}. At vero fi Axes fuerint æquales, erunt quoque omnes diametri conjugatæ (per 23^{am} VII^{mi}) æquales inter fe refpective; ac proinde in Hyperbola quam vocant, æquilatera, nulla alia reperietur inter conjugatas ratio nifi æqualitatis: in cæteris vero omnibus, ad rationem æqualitatis propius accedunt diametri, quo propiores afymptotis funt.

PROPOSITIO VIII. PROBL.

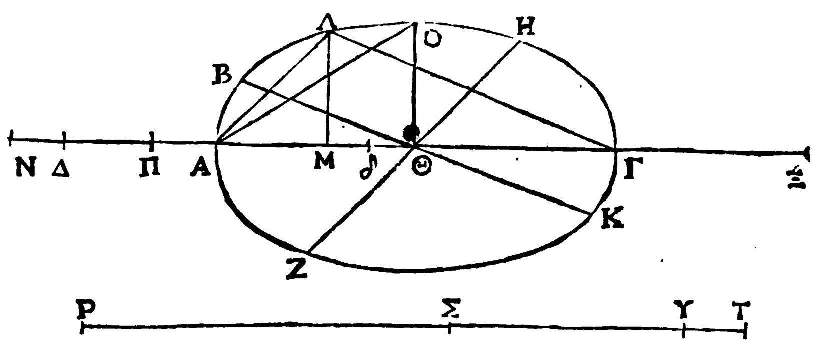
Pariter in Ellipfi, datis Axe & latere recto ejufdem, oporteat invenire conjugatas diametros, tam magnitudine quam pofitione, quæ inter fe fint in datâ ratione.

Manentibus defcriptis in Prop. VI^{ta}, fit ratio data ficut ΡΣ ad ΣΤ, & fit invenienda diameter ΒΚ quæ eandem habeat rationem ad conjugatam fuam ΖΗ ac ΡΣ ad ΣΤ. Fiat ut ΡΣ ad ΣΤ ita ΣΤ ad ΣΥ, ac ΡΣ erit ad ΣΥ ficut quadratum ex ΒΚ ad quadratum ex ΖΗ. Quoniam vero (per 7^{am} VII^{mi}) quadratum ex ΒΚ eft ad quadratum ex ΖΗ ficut ΜΞ ad ΜΝ, erit quoque ΡΣ ad ΣΥ ficut ΜΞ ad ΜΝ, ac

compo-

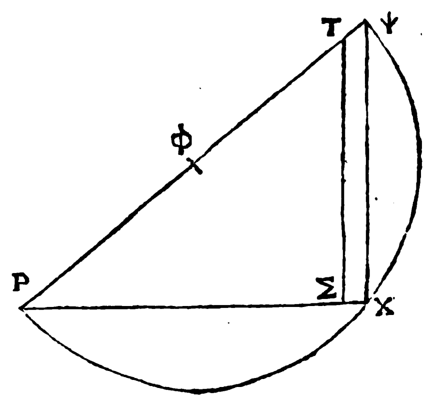
componendo ΓΡ erit ad ΡΣ sicut ΝΞ ad ΞΜ. Datur autem ratio ΓΡ ad ΡΣ, ac proinde ratio ΝΞ ad ΞΜ datur; ac, ob datam ΝΞ, data quoque est ΞΜ, punctumque Μ datur.

Componetur itaque problema, si fiat ut ΡΣ ad ΣΤ ita ΣΤ ad ΣΥ; dein fiat ut ΡΥ ad ΣΡ ita ΝΞ ad ΞΜ; &, erecta normali ΜΛ, cujus quadratum sit ad rectangulum ΑΜΓ sicut latus rectum ad Axem ΑΓ, jungantur ΑΓ, ΛΑ, quæ ex jam dictis parallelæ erunt diametris quæsitis ΒΚ, ΖΗ per centrum Θ ducendis. Invenimus igitur utramque diametrum positione: media autem proportionalis inter ΓΔ (differentiam inter Axem & latus ejus rectum) & nuper inventam ΞΜ erit (per 6am hujus) æqualis diametro quæsitæ ΒΚ; ac si capiatur ΖΗ ad ΒΚ in ratione propositâ, sive ut ΣΤ ad ΡΣ, erit ΖΗ diameter cum ΒΚ conjugata; & ΒΚ erit ad latus ejus rectum sicut ΡΣ ad ΣΤ sive ut ΜΞ ad ΜΝ, ut patet ex 7ma VIImi. Atque hæc in sequentibus ubique observanda; nec opus est ut repetantur.



Oportebit autem rationem propositam non majorem esse quam ratio Axis majoris ad minorem, nec minorem ratione Axis minoris ad majorem, per ea quæ in 24ta septimi demonstrata sunt.

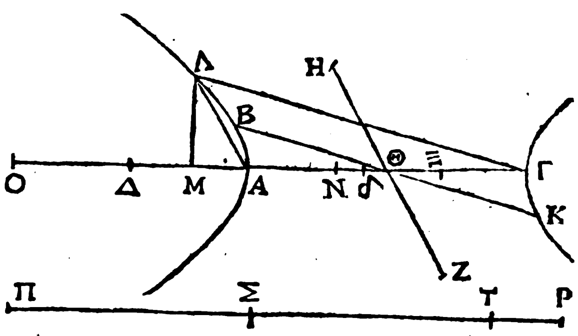
Absque positione autem diametrorum magnitudinem hoc modo invenies. Quoniam data est earum ratio, ac summa quadratorum ex iisdem æqualis est quadrato Axis & figuræ ejus simul, hoc est (per 12am & 30mam VIImi) summæ quadratorum Axium, sive quadruplo quadrati ex ΑΟ: si termini rationis ΡΣ, ΣΤ ponantur ad angulos rectos, & in junctâ ΡΤ capiatur ΡΦ ipsi ΑΟ æqualis; ac centro Φ, radio ΦΡ, describatur semicirculus occurrens ipsi ΡΣ in puncto Χ, & diametro ΡΤ in puncto Ψ, & jungatur ΧΨ: dico rectas ΡΧ, ΧΨ æquales esse diametris quæsitis. possunt enim simul quadruplum quadrati ex ΑΟ, ob angulum rectum, & sunt in ratione ΡΣ ad ΣΤ; ac proinde æquales sunt ipsis ΒΚ, ΖΗ, quas quærimus.



PROPOSITIO IX. PROBL.

Datis Hyperbolæ Axe & latere recto; invenire diametros ejus conjugatas, tam positione quam magnitudine, quarum summa æqualis sit rectæ datæ.

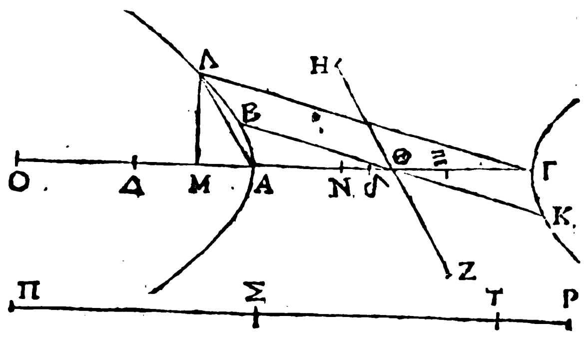
Repetatur Schema Propositionis quintæ hujus, ac habeantur puncta Ξ, Ν termini rectarum Homologarum. Quoniam vero ΝΑ est ad ΓΝ sicut latus rectum ad Axem transversum; erit componendo ΑΓ ad ΓΝ sicut Axis transversus ac latus rectum simul ad ipsum Axem ΑΓ; ac proinde quadratum ex ΑΓ æquale erit rectangulo ΝΓΔ, sive sub ΝΓ & eâ quæ æqualis est utrique Axi & lateri recto simul sumpto. Jam (per 8vam VIImi) quadratum ex ΑΓ, hoc est rectangulum sub ΝΓ, ΓΔ, est ad rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ sicut quadratum summæ diametrorum conjugatarum ad quadratum ex utrâque ΜΞ & eâ quæ potest



teſt

test rectangulum NMΞ simul sumptâ: erit igitur ΓΔ sive summa, Axis & lateris ejus recti ad MΞ sicut quadratum summæ diametrorum conjugatarum ad quadratum ex MΞ & eâ quæ potest rectangulum NMΞ simul sumptâ, hoc est (per 4. II. *El.*) ad quadratum ex MΞ una cum rectangulo NMΞ & duplo rectangulo sub MΞ & eâ quæ potest NMΞ: erit igitur, ob utrinque inventam MΞ, ut ΓΔ (summa Axis & lateris recti) ad ΠΡ (datam summam diametrorum conjugatarum) ita eadem conjugatarum summa ad ΞM, MN simul (hoc est ad duplam ipsius ΘM) una cum dupla ejus quæ potest rectangulum NMΞ; ac proinde ita semi-summa conjugatarum ad ΘM & eam quæ potest NMΞ simul. Sit ea ΘO, quæ, ob datas ΓΔ & conjugatarum summam, data erit; &, ob datum Θ, datur quoque punctum O. Auferatur utrinque communis ΘM, & erit OM æqualis ei quæ potest rectangulum NMΞ: quocirca MN erit ad OM sicut OM ad MΞ, ac componendo NO erit ad OM sicut OΞ ad ΞM. Permutando autem NO erit ad OΞ sicut OM ad MΞ; unde iterum componendo NO & OΞ simul, sive dupla ipsius ΘO, erit ad OΞ sicut OΞ ad ΞM. Datis autem punctis Ξ, N, O rectæ quoque ΞO, ON dantur; adeoque & ΞM data est: &, dato puncto Ξ, punctum M quoque datur.

Componetur itaque problema hoc modo. Inventis punctis N, Ξ fiat ut semi-summa Axis & lateris ejus recti ad semi-summam diametrorum conjugatarum ita eadem semi-summa conjugatarum ad ΘO, quæ à centro Θ in Axe Hyperbolæ producto ponatur: dein fiat ut dupla ipsius ΘO ad OΞ ita OΞ ad ΞM; ac invento jam puncto M erigatur normalis MΛ, ac fiant cætera, prout in Prop. quinta & septima præcedentibus ostensum est.



Coëuntibus autem punctis Θ, N, Ξ, ut fit in Hyperbola æquilatera, erunt ΘO, ΞO æquales; ac proinde, si fiat ut Axis ad semi-summam conjugatarum datam ita eadem semi-summa ad ΘO: & si capiatur ΘM ipsius ΘO dimidium; erit punctum M quod quærimus. Id quod aliunde, nempe ex quintâ hujus, manifestum est.

Aliter autem, nec inconcinne, problema hoc resolvi potest. Etenim cum differentia quadratorum è quibusvis conjugatis (per 13^{um} & 29^{um} VII^{mi}) æqualis sit rectangulo sub Axe & differentia Axis laterisque ejus recti; ac rectangulum sub summâ & differentiâ diametrorum conjugatarum sit (per 6. II. *El.*) æquale differentiæ quadratorum ex iisdem; erit rectangulum sub summa & differentia conjugatarum æquale rectangulo sub Axe & differentiâ Axis & lateris ejus recti: quapropter summa conjugatarum erit ad Axem sicut differentia Axis & lateris recti ad differentiam conjugatarum. Datis autem cæteris, data quoque est differentia conjugatarum; ac proinde ipsæ conjugatæ, ob datas tam summam quam differentiam earundem.

Fiat igitur ut summa proposita ΠΡ ad Axem AΓ ita Γδ ad quartam proportionalem, quæ sit ΡΤ; ac, divisa ΠΤ bifariam in Σ, erit ΡΣ major è diametris, ΠΣ vero minor.

Inventis autem diametris (per quintam hujus) earundem positionem obtinebimus, capiendo MΞ tertiam proportionalem ipsis ΓΔ, BK, vel NM tertiam proportionalem ipsis ΓΔ, ZH. Sed hoc inversâ (ut ita dicam) compositione fit, nec ad mentem *Apollonii*, quem in singulis problematis ante omnia punctum M, unde cætera consequuntur, quæsivisse verisimile est.

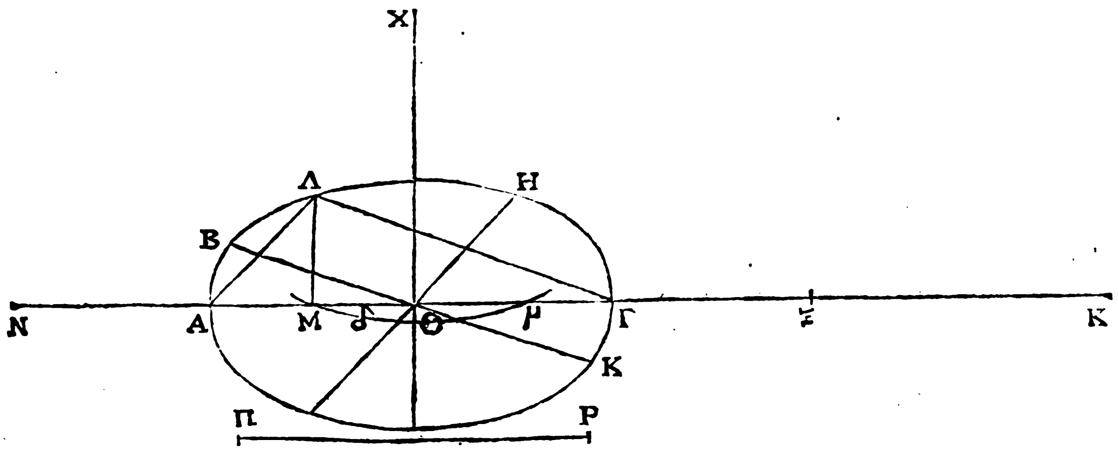
Oportebit autem summam propositam non minorem esse summa Axium conjugatarum, per ea quæ demonstrata sunt ad Prop. 25. Lib. VII^{mi}.

PROPOSITIO X. PROBL.

Datis Ellipseos Axe & latere recto, invenire diametros ejus conjugatas, tam positione quam magnitudine, quarum summa rectæ datæ æqualis sit.

Habeantur

Habeantur Homologarum termini, puncta nempe N, Ξ: & quoniam AN est ad NΓ sicut latus rectum ad Axem transversum, erit dividendo AΓ ad ΓN sicut differentia Axis & lateris recti ad Axem AΓ; adeoque quadratum Axis æquale erit rectangulo sub ΓN & Γδ differentiâ Axis & lateris recti. Est autem (per 8^{vam} VII^{mi}) differentia Axis & lateris recti sive Γδ ad MΞ sicut quadratum è datâ summâ diametrorum Ellipseos conjugatarum ad quadratum ex MΞ una cum eâ quæ potest rectangulum NMΞ simul sumptâ. Hoc autem quadratum conficitur (per 4^{am} II^{di} *El.*) ex quadrato ex MΞ & rectangulo NMΞ una cum duplo rectangulo sub MΞ & eâ quæ potest rectangulum NMΞ; & ob utrinque inventam MΞ, erit ut Γδ ad summam diametrorum conjugatarum ita eadem summa ad MΞ, MN simul (hoc est NΞ) una cum duplâ ejus quæ potest rectangulum NMΞ; & ita semi-summa diametrorum ad ΘΞ una cum ea quæ potest rectangulum NMΞ: data est igitur ΘΞ una cum ea quæ potest rectangulum NMΞ. Sit ea ΘK, è quâ auferatur data ΘΞ: datum itaque residuum ΞK poterit rectangulum NMΞ; hoc est (per 6^{am} II^{di} *El.*) differentiam quadratorum ex ΞΘ, ΘM: ac proinde excessus quadrati ex ΞΘ supra quadratum ex ΞK æqualis erit quadrato ex ΘM. Dantur autem ΞΘ, ΞK; adeoque ΘM data est, datumque punctum M.



Componetur itaque hoc modo: fiat ut semi-differentia Axis & lateris recti ad semi-summam conjugatarum (quæ sit ΠP) ita eadem semi-summa ad quartam proportionalem ΘK; quæ ponatur in Axe ultra punctum Ξ: dein in producto Axe altero ponatur ΘX ipsi KΞ æqualis, ac centro X radio ΞΘ describatur arcus circuli occurrens Axi, si problema possibile sit, in puncto M; & ordinatim ductâ rectâ MΛ, jungantur ΓΛ, AΛ, quibus parallelæ erunt diametri quas quærimus &c. Est enim quadratum ex ΘM æquale excessui quo quadratum ex ΞΘ superat quadratum ex ΘX sive quadratum ex KΞ, prout ex præmissâ Analysi fieri oportuit.

Invenientur autem diametri ipsæ ex data earum summa, methodo omnino diversa. Cum enim summa quadratorum diametrorum quarumvis conjugatarum sit (per 30^{am} VII^{mi}) æqualis datæ summæ quadrati Axis & figuræ ejusdem; atque (per 4^{am} II^{di} *El.*) quadratum summæ sit æquale summæ quadratorum partium una cum duplo rectangulo earundem, & hoc quoque quadratum datum sit: dabitur etiam duplum rectangulum sub diametris conjugatis. Hoc autem duplo rectangulo è datâ quadratorum summâ sublato, erit reliquum (per 7^{am}. II. *El.*) æquale dato quadrato differentiæ conjugatarum: adeoque & ipsa differentia data est. Datis autem tam summâ quam differentiâ habentur quoque ipsæ diametri quas quærimus.

Oportebit autem datam summam diametrorum conjugatarum non minorem esse summâ Axium, nec majorem summâ conjugatarum æqualium, sive eâ quæ potest duplum quadratorum ex utroque Axe simul sumptorum; ut ex iis quæ in 26ta septimi demonstrata sunt.

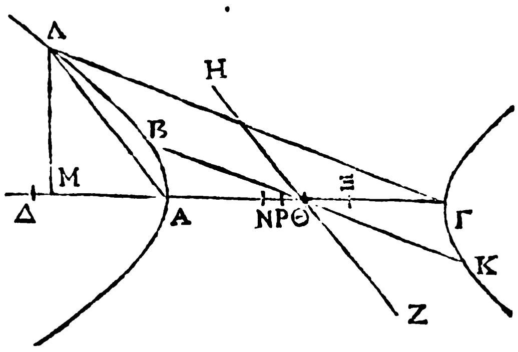
PROPOSITIO XI. PROBL.

Datis Hyperbolæ Axe & latere recto, invenire diametros conjugatas, quarum differentia æqualis sit rectæ datæ.

Maneant

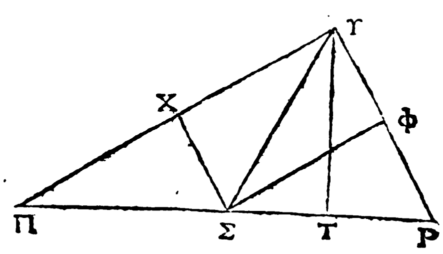
Maneant ea quæ in Hyperbola prius descripta sunt, ac eodem quo in præcedentibus demonstratum est modo, constabit (ex 9na septimi) ΓΔ, sive summam Axis & lateris recti, esse ad ΜΞ sicut quadratum ex differentiâ diametrorum quarumvis conjugatarum ad quadratum differentiæ ipsius ΜΞ & ejus quæ potest rectangulum ΝΜΞ; hoc est ad quadratum ex ΜΞ & rectangulum ΝΜΞ simul, dempto duplo rectangulo sub ΜΞ & eâ quæ potest ΝΜΞ. Cumque ΜΞ ex utraque parte inventa sit, erit ut ΓΔ ad differentiam conjugatarum ita eadem differentia ad ΜΞ, ΜΝ simul (sive ad duplam ipsius ΘΜ) demptâ duplâ ejus quæ potest rectangulum ΝΜΞ. Si igitur fiat ut ΓΔ ad datam differentiam conjugatarum ita semissis ejusdem differentiæ ad ΘΡ, data erit recta ΘΡ, punctumque Ρ datum. Est autem ΘΡ æqualis ipsi ΘΜ demptâ eâ quæ potest rectangulum ΝΜΞ: quare ΜΡ poterit rectangulum ΝΜΞ, ac ΝΜ erit ad ΜΡ sicut ΜΡ ad ΜΞ; dividendo autem ΝΡ erit ad ΡΜ sicut ΡΞ ad ΞΜ, & permutando ΝΡ erit ad ΡΞ sicut ΡΜ ad ΜΞ; unde iterum dividendo dupla ipsius ΘΡ erit ad ΡΞ sicut ΡΞ ad ΞΜ. Dantur autem puncta Θ, Ρ, Ξ; adeoque & rectæ ΘΡ, ΡΞ; ac proinde recta ΞΜ datur, punctumque Μ datum est.

Componetur igitur hoc modo. Inventis punctis Ν, Ξ, fiat ut ΓΔ, sive summa Axis & lateris ejus recti, ad datam conjugatarum differentiam, ita ejusdem differentiæ semissis ad quartam proportionalem, quæ sit ΘΡ in Axe ponenda: dein fiat ut dupla ipsius ΘΡ ad ΡΞ ita ΡΞ ad ΞΜ, ac invento puncto Μ erigatur normalis ΜΛ; fiantque cætera prout supra.



Quoniam vero in nonâ hujus ostensum est rectangulum sub summâ & differentiâ quarumvis Hyperbolæ diametrorum conjugatarum æquale esse rectangulo sub Axe & differentiâ Axis & lateris ejus recti; erit ἀνάλογον ut differentia conjugatarum ad Axem sectionis ita differentia Axis & lateris recti ad diametrorum conjugatarum summam; ac datis cæteris data quoque erit summa conjugatarum: & ob datam summam & differentiam dabuntur etiam ipsæ conjugatæ.

Hinc modo satis expedito tam nonum quam hoc undecimum problema construxeris. Erecta enim normali ΤΥ super rectam aliquam ΠΡ, fiat ΤΥ æqualis mediæ proportionali inter Axem & differentiam Axis & lateris recti, sive quæ possit differentiam quadratorum Axium, ac capiatur ΥΡ æqualis differentiæ quarumvis conjugatarum, vel ΠΥ æqualis summæ earundem; junctaque ΡΥ vel ΥΠ bifariam secetur in Φ, Χ; ac ducatur ipsi ΥΡ normalis ΦΣ, vel ΣΧ ipsi ΠΥ, quæ occurrat rectæ ΠΡ in puncto Σ: Dico rectas ΣΡ, ΣΥ æquales esse diametris conjugatis quæsitis, si ΥΡ fuerit data differentia; vel ΠΣ, ΣΥ, si ΠΥ data fuerit conjugatarum summa. Namque ob æquales ΡΦ, ΦΥ, erunt ΣΡ, ΣΥ æquales inter se, ac quadratum ex ΣΥ, hoc est ΣΡ, superabit quadratum ex ΣΤ quadrato ex ΤΥ sive differentiâ inter quadratum Axis & figuram sectionis: adeoque (per 13^{am} & 29^{am} VII^{mi}) ΡΣ, ΣΥ sunt diametris quæsitis æquales. Pari modo, si ΠΥ fuerit data summa, ΠΣ, ΣΥ erunt æquales, ob ΠΥ in Χ bisectam & angulum ΠΧΣ rectum; ac quadratum ex ΤΥ æquale erit differentiæ quadratorum ex ΠΣ, ΣΤ, quæ proinde erunt diametri quæsitæ. Oportebit autem, per ea quæ in 27ma septimi demonstrata sunt, differentiam conjugatarum datam minorem esse differentia inter Axes Hyperbolæ conjugatas.



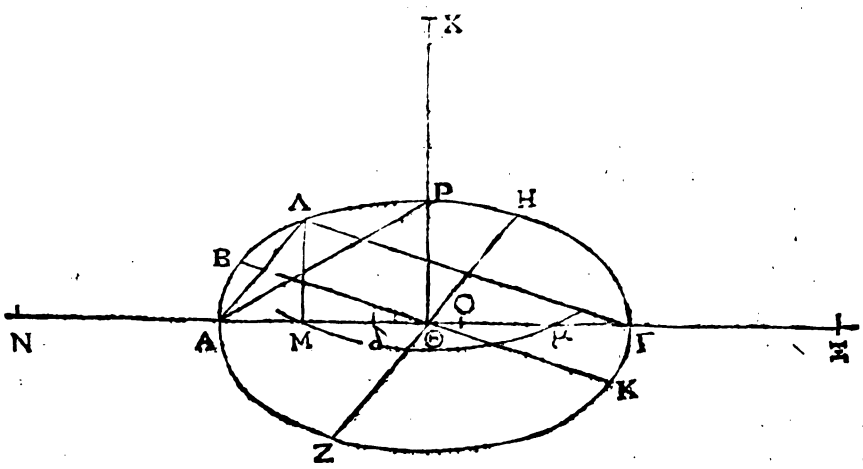
Coroll. Hinc manifestum est quod, si in diversissimis Hyperbolis differentiæ inter quadrata Axium & figuras sectionum æquales fuerint, quascunque sumpseris diametros magnitudine datas, æquales quoque erunt diametri cum æqualibus conjugatæ.

PRO-

PROPOSITIO XII. PROBL.

Datis Ellipseos Axe majore & latere recto, invenire diametros ejus conjugatas, quarum differentia æqualis sit rectæ datæ.

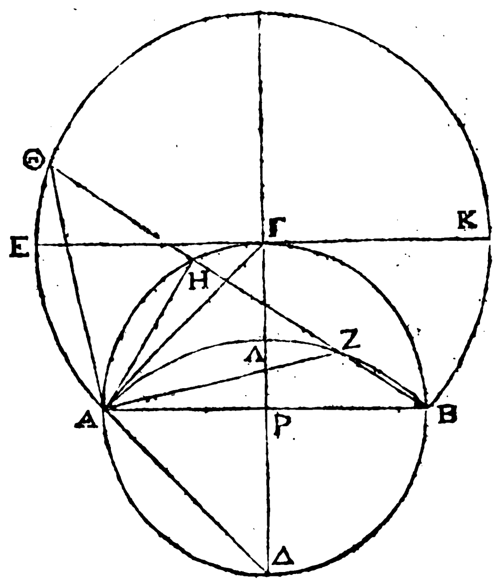
Iisdem manentibus quæ in Ellipsi descripsimus, erit (per 9^{am} VII^{mi}) ut quadratum Axis ad rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ ita quadratum differentiæ diametrorum conjugatarum ad quadratum differentiæ ipsius ΜΞ & ejus quæ potest rectangulum ΝΜΞ; unde eodem omnino argumento quo in præcedente usi sumus, erit ut Γδ (sive differentia Axis & lateris recti) ad differentiam diametrorum conjugatarum ita eadem differentia ad ΜΞ, ΜΝ simul, hoc est ad ΝΞ sive dupla ipsius ΘΞ, demptâ duplâ ejus quæ potest rectangulum ΝΜΞ. Fiat igitur ut differentia Axis & lateris recti ad differentiam conjugatarum ita semissis ejusdem differentiæ ad ΟΘ, quæ proinde data est, datumque punctum Ο. Sed ΟΘ, per jam dicta, æqualis est excessui quo ΘΞ superat eam quæ potest rectangulum ΝΜΞ: poterit igitur recta ΞΟ rectangulum ΝΜΞ, hoc est (per 6^{am}. II. *El.*) differentiam quadratorum ex ΘΞ, ΘΜ; adeoque quadratum ex ΘΜ æquale est excessui quo quadratum ex ΘΞ superat quadratum ex ΟΞ. Dantur autem ΘΞ, ΟΞ, unde & ΘΜ quoque data est, punctumque Μ datum.



Componetur itaque problema, si fiat ut differentia Axis & lateris recti ad differentiam conjugatarum datam, ita semissis datæ differentiæ ad ΘΟ; quæ à centro Θ in Axe versus Ξ ponatur: deinde in producto Axe minore fiat ΘΧ ipsi ΟΞ æqualis, ac centro Χ radio ΘΞ describatur arcus circuli occurrens Axi in punctis Μ, μ, æqualiter à centro Θ distantibus; & erectis normalibus ut ΜΛ, invenientur diametri quæsitæ modo superius descripto. Cujus compositionis ratio ex Analysi & ex 47^{ma} I. *El.* manifesta est.

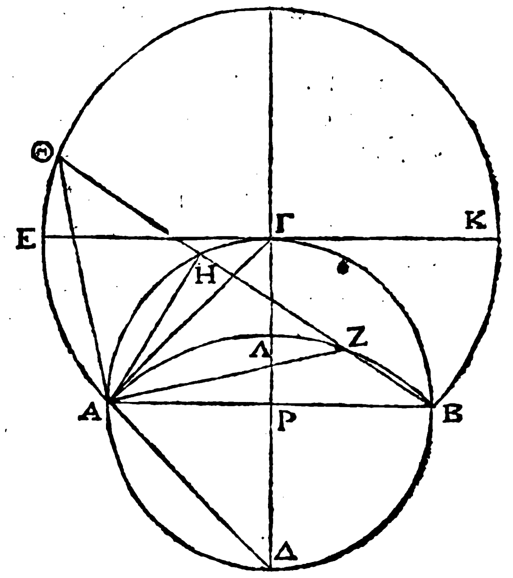
Differentia autem proposita non major esse debet differentiâ Axium Ellipseos, nam (per 27^{am} VII^{mi}) si ponatur major eâ, problema impossibile erit, punctumque Μ extra Axem cadet.

Aliter autem, ac modo sane non ineleganti, invenire possumus diametros Ellipseos conjugatas, datâ earundem vel summâ vel differentiâ. Quoniam enim ΑΡ (sive ea quæ potest semiaxium quadrata simul) poterit quoque (per duodecimam VII^{mi}) quarumvis semidiametrorum conjugatarum quadrata; radio ΑΡ describatur circulus ΑΓΒΔ, & super diametrum ΑΒ ad centrum Ρ erigatur normalis ΓΡΔ, occurrens circulo in Γ, Δ: dein centro Δ radio ΔΑ circinetur arcus ΑΖΒ, qui ob æquales ΑΡ, ΡΔ erit circuli quadrans, ac proinde angulus quem capit erit (per 20^{am}. III. *El.*) sesquialter anguli recti. Huic arcui inscribatur ΖΒ æqualis differentiæ diametrorum conjugatarum, quæ producatur ad occursum semi-circuli ΑΓΒ in puncto Η: Dico rectas ΒΗ, ΗΖ æquales esse diametris conjugatis quas quærimus.



Jungantur

Jungantur enim AH, AZ, & (per 31^{am}. III. *El.*) angulus AHB erit rectus; angulus autem HZA, qui deinceps est angulo AZB, est semirectus: adeoque & angulus HAZ angulo HZA æqualis, unde & AH ipsi HZ æqualis: quadrata igitur ex AH, HB (hoc est ex ZH, HB) simul sumpta, ob angulum AHB rectum, æqualia sunt quadruplo quadrati ex AP, hoc est quadratis Axium Ellipseos simul sumptis, per constructionem: ipsarum vero BH, HZ differentia est recta proposita ZB; quare (per 12^{am} VII^{mi} hujus) BH, HZ diametris conjugatis quæsitis sunt æquales.



Si vero, ut in Propositione decima, data fuerit conjugatarum summa, ac proponatur diametros ipsas exhibere; centro Γ radio ΓA describatur arcus AΘB, qui (per 20^{am} III. *El.*) capiet angulum æqualem semirecto: igitur si recta datæ summæ conjugatarum æqualis, puta BΘ, eidem arcui inscribatur, & ducantur AΘ, AH, erit angulus AΘH semirectus; & ob angulum AHB rectum, erit quoque angulus ΘAH semirectus, ac proinde ΘH ipsi HA æqualis erit. Quadrata autem ex AH, HB, hoc est ex ΘH, HB æqualia sunt quadrato ex AB sive quadratis Axium simul: quare rectæ ΘH, HB, quarum summa est ΘB, æquales sunt diametris conjugatis quas invenire oportuit.

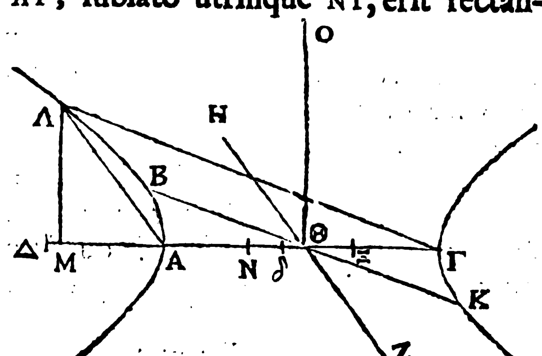
Coroll. Ac manifestum est quod, si in quibusvis Ellipsibus specie diversis, summæ quadratorum Axium æquales fuerint inter se, quascunque sumpseris diametros magnitudine datas, æquales quoque erunt diametri cum æqualibus conjugatæ.

Hic obiter notandum quod, quemadmodum quadrato radii AP æqualis est *Lunula Hippocratis* AΛBΓ; ita, si ducatur diameter EΓK ipsi AB parallela, erit spatium AEKBΛ æquale quadrato ex EΓ, ac proinde duplum Lunulæ AΛBΓ: unde spatium EΓHA semi-lunulæ AHΓΛ fit æquale. Cujus rei demonstratio manifesta est.

PROPOSITIO XIII. PROBL.

D*atis Axe & latere recto Hyperbolæ, invenire diametros ejus conjugatas, tam magnitudine quam positione, quæ contineant rectangulum rectangulo dato æquale.*

Manentibus Schematis Hyperbolæ prius descriptis, ponatur BK, ZH diametros esse quæsitas. Quoniam autem (per 10^{am} VII^{mi}) quadratum ex AΓ est ad rectangulum sub diametris conjugatis Hyperbolæ sicut NΓ ad eam quæ potest rectangulum NMΞ, ac (per demonstrata in 7ma VIII^{vi}) rectangulum sub NΓ & summâ Axis & lateris recti æquale est quadrato ex AΓ; sublato utrinque NΓ, erit rectangulum sub ΓΔ (Axe & latere ejus recto simul) & eâ quæ potest rectangulum NMΞ æquale rectangulo dato sub diametris quæsitis BK, ZH. Si igitur applicetur rectangulum propositum ad ΓΔ summam Axis & lateris ejus recti, data erit latitudo, nempe ea quæ potest rectangulum NMΞ, hoc est (per 6^{am}. II. *El.*) ea quæ potest differentiam quadratorum ex ΘM, ΘΞ. Sit latitudo ea ΘO, ac quadratum ex ΘO æquale erit differentiæ quadratorum ex ΘM, ΘΞ: utrinque adjiciatur quadratum ex ΘΞ, & quadrata ex ΘO, ΘΞ æqualia erunt quadrato ex ΘM: Dantur autem ΘO, ΘΞ: adeoque & ΘM datur, unde & punctum M datum.



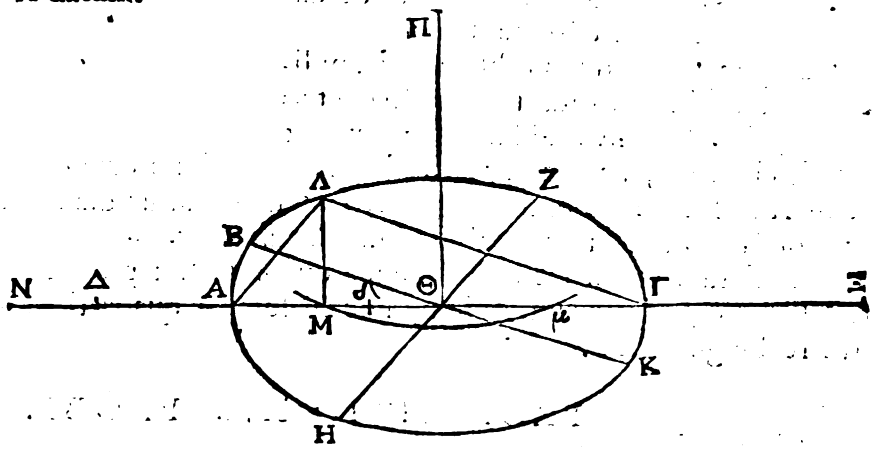
Componetur

Componetur autem problema hoc modo. Iisdem manentibus quæ in præcedentibus Hyperbolæ figuris, applicetur datum rectangulum sub diametris conjugatis ad rectam ΓΔ, sive ad æqualem summæ Axis & lateris ejus recti; sitque latitudo inde orta recta ΘΟ, ita ut rectangulum sub ΓΔ, ΘΟ æquale sit rectangulo dato; ac ponatur ΘΟ in Axe conjugato, & jungatur ΟΞ; ac fiat ΘΜ ipsi ΟΞ æqualis; & invento jam puncto Μ, fiant cætera ut prius. Demonstratio autem manifesta est ex Analysi & ex $47^{mæ}$ I. *El.*

PROPOSITIO XIV. PROBL.

Similiter in Ellipsi, datis Axe & latere recto, oporteat invenire diametros ejus conjugatas, tam magnitudine quam positione, sub quibus rectangulum æquale rectangulo dato comprehendatur.

Manentibus descriptis in prioribus Ellipseos Schematis, eodem omnino argumento quo in præcedenti usi sumus, erit (per decimam VII^{mi}) sicut rectangulum sub ΝΓ & Γδ differentiâ Axis laterisque ejus recti (hoc est quadratum ex ΑΓ) ad rectangulum sub diametris conjugatis ΒΚ, ΖΗ, ita ΝΓ ad eam quæ potest rectangulum ΝΜΞ; &, ob ΝΓ ex utraque parte repertam, erit rectangulum sub Γδ differentiâ Axis & lateris ejus recti & eâ quæ potest rectangulum ΝΜΞ æquale rectangulo dato, nempe sub diametris conjugatis quæsitis ΒΚ, ΖΗ contento: applicato igitur rectangulo illo proposito ad datam Γδ, dabitur latitudo ex applicatione orta, æqualis ei quæ poterit rectangulum ΝΜΞ; hoc est (per 5^{am}. II. *El.*) ei quæ poterit excessum quo quadratum ex ΘΞ superat quadratum ex ΘΜ. Sit latitudo ista rectæ ΘΠ æqualis, & quadratum ex ΘΠ æquale erit excessui quo quadratum ex ΘΞ superat quadratum ex ΘΜ: quadratum igitur ex ΘΞ superat quadratum ex ΘΠ quadrato ex ΘΜ. Dantur autem ΘΞ, ΘΠ: quare recta ΘΜ quoque datur, punctumque Μ datum.

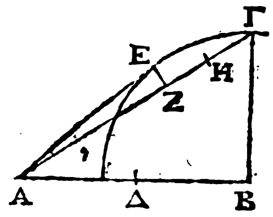


Compositio autem manifesta est. Nam si applicetur rectangulum datum ad Γδ differentiam Axis & lateris ejus recti; hoc est, si habeatur latitudo ΘΠ, ita ut rectangulum sub ΘΠ, Γδ sit æquale rectangulo dato, ac ponatur ΘΠ in axe minore producto; dein centro Π radio ΘΞ describatur arcus circuli occurrens Axi in punctis Μ, μ: erectis normalibus, ut ΜΛ, habebuntur, modo toties dicto, diametri conjugatæ, quarum rectangulum æquale erit dato.

Oportebit autem rectangulum datum (per 28^{am} VII^{mi}) non minus esse rectangulo sub utroque Axe comprehenso; nec majus esse quadrato sub æqualibus diametris contento, hoc est (per 12^{am} VII^{mi}) semi-summâ quadratorum ex utroque Axe, sive rectangulo sub ΘΓ, ΓΔ, quod æquale est semi-summæ quadrati Axis & figuræ ejusdem.

Obtinebimus autem easdem diametros modo prorsus diverso. Quoniam enim (per 12^{am} VII^{mi}) summa quadratorum ex ΒΚ, ΖΗ sit æqualis summæ datæ quadratorum Axium Ellipseos; si eidem summæ adjiciatur duplum rectangulum sub ΒΚ, ΖΗ, fiet (per 4^{am} II. *Elem*) quadratum ex ΒΚ, ΖΗ simul sumptis, adeoque ΒΚ, ΖΗ simul dantur. Si vero ab eadem quadratorum summâ auferatur duplum illud rectangulum, remanebit (per 7^{am} II. *Elem.*) quadratum differentiæ ipsarum ΒΚ, ΖΗ: adeoque & ipsa differentia data est. Datis autem summâ ac differentiâ duarum rectarum, ipsæ rectæ quoque dantur.

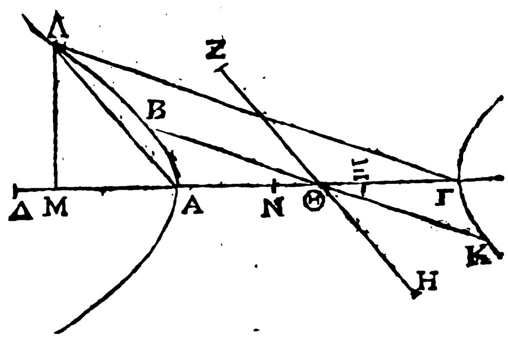
Componetur itaque, si poterit AB summam quadratorum Axium; ac ad rectos angulos ponatur BΓ potens duplum rectanguli dati sub diametris quæsitis; ac centro B, radio BΓ, describatur arcus circuli ΓE. dividatur bifariam recta AB in Δ, ac centro Δ, radio BΔ, describatur semicirculi particula occurrens arcui ΓE in E, & jungantur AE, AΓ: quæ, per jam dicta, æquales erunt summæ ac differentiæ diametrorum quæsitarum. Fiat AZ ipsi AE æqualis, & secetur ZΓ bifariam in H, & erit AH diametrorum major, HΓ vero earundem minor.



PROPOSITIO XV. PROBL.

Datis Hyperbolæ Axe & latere recto, invenire situm & magnitudinem diametrorum ejus conjugatarum, quarum data sit quadratorum summa.

Maneant figuræ Hyperbolæ prius descriptæ, ac proposito diametrorum quarumvis conjugatarum BK, ZH quadratorum aggregato, oporteat ipsas diametros invenire. Quoniam (per 11^{am} VII^{mi}) quadratum ex AΓ est ad summam quadratorum ex diametris conjugatis Hyperbolæ sicut NΓ ad utramque NM, MΞ simul; ac quadratum ex AΓ æquale est rectangulo sub NΓ & ΓΔ summâ Axis & lateris recti: ob utrinque communem NΓ, erit rectangulum sub ΓΔ & utrâque NM, MΞ simul, sive duplâ ipsius ΘM, æquale datæ summæ quadratorum è diametris conjugatis. Applicatâ igitur quadratorum illorum datâ summâ ad ΓΔ summam Axis & lateris ejus recti, data erit latitudo duplæ ipsius ΘM æqualis: data est igitur ΘM, ac ob datum Θ punctum M quoque datur.



Componetur itaque problema, si applicetur semi-summa quadratorum è diametris conjugatis ad ΓΔ sive ad summam Axis & lateris ejus recti, ac ponatur latitudo ex applicatione orta de centro Θ ad punctum M in Axe situm: inventoque puncto M habebuntur diametri ipsæ, prout supra. Demonstratio autem ex Analysi manifestissima est.

Manifestum etiam est quod summa quadratorum proposita non minor esse potest summâ quadratorum Axium, hoc est summâ quadrati Axis & figuræ ejusdem, sive rectangulo AΓΔ.

PROPOSITIO XVI. PROBL.

Datis Ellipseos Axe & latere recto, oporteat invenire diametros ejus conjugatas, tam magnitudine quam positione, quæ datam habeant quadratorum differentiam.

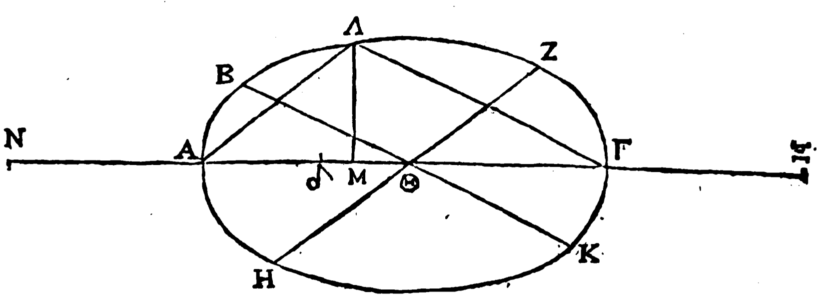
Manentibus Ellipseos figuris prius descriptis, sint diametri BK, ZH conjugatæ, quarum quadrata datam habeant differentiam: ipsarumque situm ac magnitudinem hoc modo investigabimus. Quoniam (per 14^{am} VII^{mi}) quadratum ex AΓ est ad differentiam quadratorum è diametris conjugatis sicut NΓ ad duplam ipsius ΘM; argumento toties usurpato, erit rectangulum sub Γϑ (differentiâ Axis & lateris ejus recti) & duplâ ipsius ΘM æquale differentiæ quadratorum è diametris conjugatis: applicatâ itaque datâ quadratorum differentiâ ad Γϑ (datam Axis & lateris recti differentiam) emerget latitudo data, nempe dupla ipsius ΘM; est igitur ΘM data, punctumque M datum.

Manifesta autem est Compositio: nam si applicetur semi-differentia quadratorum è diametris conjugatis ad Γϑ differentiam Axis & lateris recti, orietur ex applicatione latitudo quæsitæ ΘM æqualis, unde cætera consequuntur.

Oportebit

Oportebit autem differentiam quadratorum propositam non majorem esse differentiâ quadratorum Axium, sive differentiâ quadrati & figuræ Axis, hoc est rectangulo ΑΓδ.

Possumus etiam aliter tam XV^{um} quam XVI^{um} problema resolvere, ope 12^{mæ} & 13^{æ} Prop. lib. Septimi. Nam cum in Hyperbola (per 13^{am} VII^{mi}) differentia quadratorum Axium æqualis sit differentiæ quadratorum quarumvis conjugatarum, si semi-summæ propositæ quadratorum ex iisdem adjiciatur ac auferatur semi-differentia data; dabuntur quadrata utriusque diametri quæsitæ, æqualia nempe datorum summæ ac differentiæ. Pariterque, ob summam quadratorum in Ellipsi (per 12^{am} VII^{mi}) datam, si detur quoque earundem differentia, eodem argumento obtinebimus utriusque diametri quadratum. Unde, si libuerit, punctum Μ quoque inveniemus, per demonstrata in 5ta & 6ta Octavi.



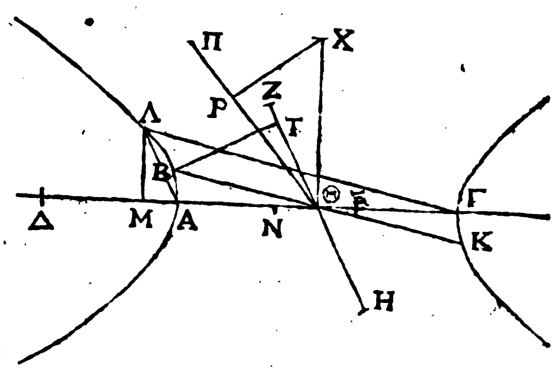
PROPOSITIO XVII. PROBL.

Datis Hyperbolæ Axe & latere recto, invenire diametros ejus conjugatas tam magnitudine quam positione, quæ datum contineant angulum.

Hoc problema, sicut etiam sequens, nobis resolutum dedit *Apollonius* in fine Libri secundi: ibi tamen sectiones ipsas jam descriptas esse supponit. Propositionem autem 31^{mam} septimi inter *Theoremata dioristica* inseruisse videtur, ut viam sterneret ad solutionem eorundem problematum, ipsis Curvis nondum describi suppositis, ut in præmissis dictum est.

Quoniam enim (per 31^{am} septimi) rectangulum sub Axibus contentum sit æquale parallelogrammo obliquangulo sub quibuscunque duabus conjugatis diametris comprehenso; si ab extremitate diametri alicujus ad conjugatam ejus demittatur normalis, erit duplum rectanguli sub normali & diametro illâ conjugatâ contenti æquale rectangulo sub Axibus sectionis: quod proinde rectangulum erit ad rectangulum sub ipsis conjugatis contentum sicut normalis ipsa ad semi-diametrum, à cujus extremitate demissa est normalis. Dato autem angulo, data est ratio hæc, adeoque, ob datum Axium rectangulum, datum est rectangulum sub diametris conjugatis.

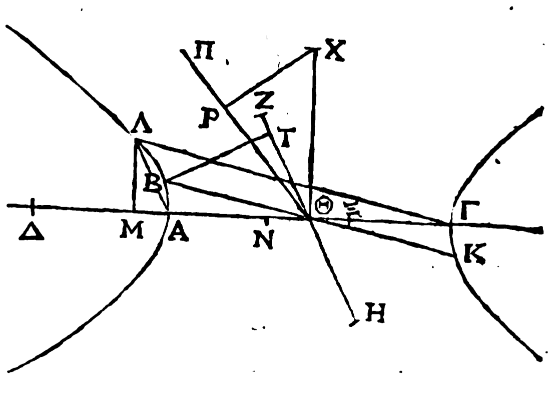
Pone jam factum esse quod quæritur, ac sint ΒΚ, ΖΗ diametri conjugatæ, continentes angulum ΒΘΖ æqualem angulo dato: demittaturq; normalis ΒΤ ad diametrum ΖΗ; ac, ob datum angulum ΒΘΖ, dabitur ratio ΒΤ ad ΒΘ. Sed, per jam dicta, sicut ΒΤ ad ΒΘ ita rectangulum sub Axibus ad rectangulum sub ΒΚ, ΖΗ contentum: &, ob datos Axes, datum quoque erit rectangulum sub ΒΚ, ΖΗ. Dato autem rectangulo sub diametris conjugatis dantur quoque ipsæ diametri, tam magnitudine quam positione, per ea quæ demonstravimus in 13^{a} hujus.



Hinc talis conficitur problematis compositio. Fiat angulus ΑΘΠ æqualis angulo dato, in qua capiatur ΘΡ ad Axem ΑΓ sicut Axis conjugatus ad ΓΔ sive summam Axis & lateris ejus recti, & super ΘΡ ad angulos rectos erigatur ΡΧ occurrens Axi conjugato producto in Χ: Dico ΧΞ junctam vel jungi suppositam ipsi ΘΜ æqualem esse. Invento autem puncto Μ, erigatur normalis ΛΜ, ac habebuntur cætera sicut prius.

 Fecimus

Fecimus enim rectangulum sub ΓΔ, ΘΡ æquale rectangulo sub Axibus contento; &, ob angulum ΘΧΡ æqualem angulo ΖΘΒ, erit ΡΘ ad ΘΧ sicut ΤΒ ad ΒΘ, hoc est (per 31^{am} VII^{mi} huj.) ut rectangulum sub Axibus ad rectangulum sub diametris ΒΚ, ΖΗ; erit igitur rectangulum sub ΓΔ, ΘΧ æquale contento sub diametris conjugatis ΒΚ, ΖΗ; adeoque, per ea quæ in Compositione problematis 13^{i} ostensa sunt, rite inventum est punctum Μ. Ac manifestum est angulum hunc non habere limitem; sed quo propiores sunt diametri conjugatæ ipsis Asymptotis, eo minorem evadere.

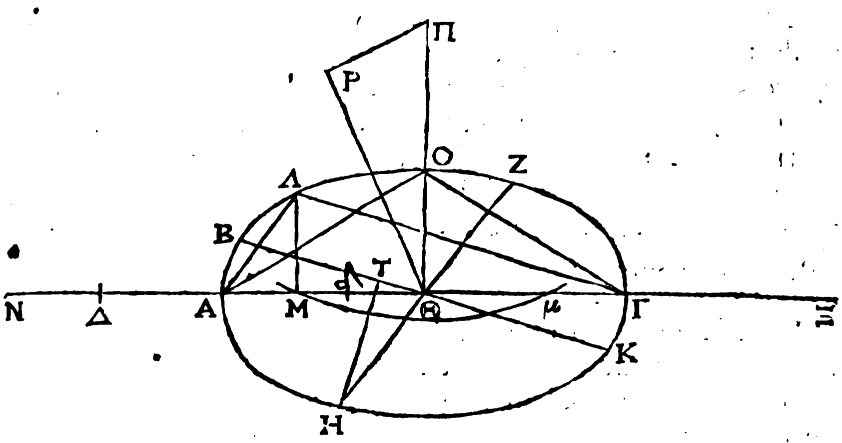


PROPOSITIO XVIII. PROBL.

Similiter in Ellipsi, datis Axe & latere ejus recto, oporteat invenire diametros conjugatas, tam magnitudine quam positione, quæ datum contineant angulum.

Rectangulum sub Axibus Ellipseos contentum (per eandem 31^{am} VII^{mi}) æquale est parallelogrammo cuivis obliquangulo sub diametris conjugatis contento: adeoque, demissa normali ab extremitate alicujus diametri ΖΗ ad conjugatam ejus ΒΚ, ut ΗΤ, erit duplum rectangulum sub ΒΚ, ΗΤ æquale rectangulo sub Axibus contento; quod quidem datum est, adeoque rectangulum sub ΒΚ, ΗΤ datur. Est autem rectangulum sub ΒΚ, ΗΤ ad rectangulum sub ΒΚ, ΗΘ sicut ΗΤ ad ΗΘ; ratio autem ΗΤ ad ΗΘ datur, ob angulum ΒΘΗ datum: ac proinde datum est rectangulum sub ΒΚ, ΗΘ, ejusque duplum sub ΒΚ, ΗΖ, sive rectangulum sub diametris quæsitis. Dato autem conjugatarum rectangulo dabitur quoque (per 14^{am} VIII^{vi}) recta ΘΜ; unde punctum Μ datum.

Componetur itaque problema hoc modo. Fiat angulus ΑΘΡ æqualis angulo dato sub conjugatis contento, ac capiatur ΘΡ, ita ut rectangulum sub ΘΡ & Γδ (differentiâ Axis & lateris ejus recti) æquale sit rectangulo sub Axibus sectionis; & erigatur normalis ΡΠ occurrens Axi minori producto in Π: dein centro Π, radio ipsi ΘΞ æquali, describatur arcus circuli occurrens Axi majori in punctis Μ, μ; & erigantur normales ut ΜΛ, unde cætera consequentur modo toties dicto.



Rectangulum enim sub Γδ, ΘΡ æquale est parallelogrammo Ellipsi circumscripto; quod quidem est ad rectangulum sub conjugatis ΒΚ, ΖΗ sicut ΗΤ ad ΗΘ, hoc est ut ΘΡ ad ΘΠ, quia angulus ΘΠΡ angulo ΒΘΗ factus est æqualis: proinde rectangulum sub Γδ, ΘΠ erit æquale rectangulo sub ΒΚ, ΖΗ: quare (per ea quæ in 14ta hujus invenimus) circulus centro Π, radio ΘΞ descriptus, per punctum quæsitum Μ necessario transibit.

Oportebit autem angulum acutum à diametris conjugatis contentum non minorem esse angulo deinceps ei qui sub rectis ΑΟ, ΟΓ ad mediam sectionem inclinatis continetur; uti demonstravit *Apollonius* in penultima Propositione libri II. Ac si minor fuerit eo, recta ΘΠ major evadet ipsa ΘΞ, ac proinde circulus præscriptus ad occursum Axis ΑΓ pertingere non potest.

Ipsas autem diametros obtinebimus, si datæ summæ quadratorum ex utroque Axe

Axe, sive rectangulo ΑΓΔ, adjiciatur ac auferatur duplum dati rectanguli sub conjugatis, quod nempe est ad rectangulum datum sub Axibus Ellipseos in data ratione ΘΗ ad ΗΤ, sive ut Radius ad sinum anguli dati: habebuntur enim (per 4^am & 7^am II. *El.*) quadrata tam summæ quam differentiæ ipsarum diametrorum quæsitarum ΒΚ, ΖΗ.

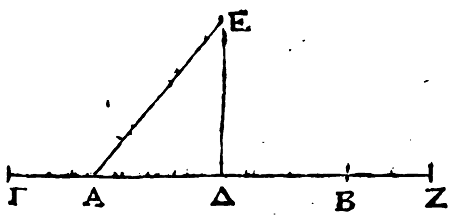
Observandum autem hic loci, quod in omnibus his problematis sectionum diametros conjugatas spectantibus, non nisi duas, nempe ΒΚ, ΖΗ, inquisivimus; cum tamen etiam aliud diametrorum par proposito satisfacere possit, inclinatis diametris ad Axem sub iisdem quidem angulis sed ad alterum ejus latus. Notandum etiam quod in Schematis ac demonstrationibus præcedentibus posuimus Axem latere recto majorem: quod si minor latere recto fuerit Axis, nulla omnino difficultas aut diversitas vel in Analysi vel in Compositione Problematum exinde orietur.

SCHOLION.

Veteribus Geometris, ac speciatim Apollonio *nostro, mos erat problemata plana pro resolutis habere, postquam rem eo deduxerant, ut rectangulum dato rectangulo æquale sub lateribus quæsitis contineretur, quorum summa vel differentia datæ rectæ æqualis fuerat. Hoc autem docet* Euclides *in* 28^va *&* 29^na Sexti Elem. *monstrando quo pacto applicandum sit parallelogrammum datum ad rectam datam, quod excedat vel deficiat parallelogrammo cuivis dato simili. Cujus quidem rei generalissime propositæ casus sunt particulares; applicare rectangulum vel quadratum ad rectam datam, quod excedat vel deficiat quadrato: hujusque effectionem postulant Geometræ* Euclide *posteriores. Quoniam vero in subsequentibus problematis fere omnibus usui erunt dictæ effectiones, ab hoc loco non alienum videbitur, earundem compendia, quantum fieri possit, simplicissima exhibere; ac more Lemmatum præmittere.*

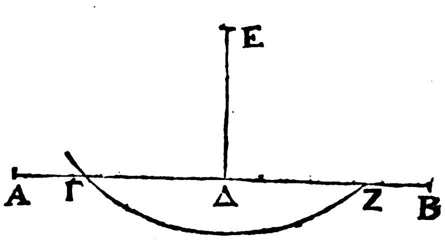
Oporteat igitur primo, applicare datum quadratum ad rectam datam excedens quadrato: hoc est, invenire puncta Γ, Ζ *in data rectâ* ΑΒ *productâ, ita ut rectangula* ΑΓΒ, ΑΖΒ *æqualia sint quadrato è rectâ datâ* ΔΕ. *Bisecetur* ΑΒ *in* Δ, *& erigatur normalis* ΔΕ, *quæ fiat æqualis lateri quadrati applicandi: ac junctæ rectæ* ΑΕ *vel jungi suppositæ æquales fiant* ΔΓ, ΔΖ: *Dico* Γ, Ζ *esse puncta quæsita.*

Est enim quadratum ex ΑΕ, *hoc est quadratum ex* ΓΔ, *æquale quadratis ex* ΑΔ, ΔΕ *simul. Quadratum autem ex* ΓΔ (*per* 6^am *II. Elem.*) *æquale est quadrato ex* ΑΔ *una cum rectangulo* ΑΓΒ: *quadrata igitur ex* ΑΔ, ΔΕ *æqualia sunt quadrato ex* ΑΔ *& rectangulo* ΑΓΒ; *quare sublato communi quadrato ex* ΑΔ, *erit quadratum ex* ΔΕ *æquale rectangulo* ΑΓΒ; *quod fieri oportuit. Ac eodem modo probabitur rectangulum* ΑΖΒ *eidem quadrato ex* ΔΕ *æquale: unde manifestum est rectas* ΑΓ, ΒΖ *æquales esse.*



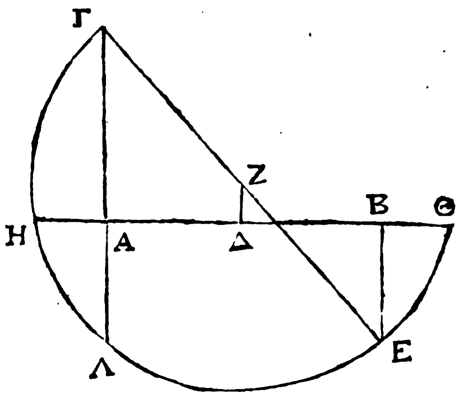
2^do *Oporteat applicare datum quadratum ad rectam datam deficiens quadrato, sive invenire in rectâ datâ* ΑΒ, *inter* Α *&* Β, *puncta* Γ, Ζ, *ita ut rectangula* ΑΓΒ, ΑΖΒ *æqualia sint quadrato datæ alicujus* ΔΕ. *Bisecetur similiter* ΑΒ *in* Δ, *ac sit normalis* ΔΕ *latus quadrati dati; & centro* Ε, *radio* ΑΔ *describatur arcus circuli occurrens rectæ* Α, Β *in punctis* Γ, Ζ: *Dico* Γ, Ζ *puncta esse quæ quærimus.*

Quadratum etenim ex ΕΓ *æquale est quadratis ex* ΔΕ, ΓΔ *simul, ac idem quadratum ex* ΕΓ *sive* ΑΔ (*per* 5^am *II. Elem.*) *æquale est rectangulo* ΑΓΒ *una cum quadrato ex* ΓΔ: *sublato itaque communi quadrato ex* ΓΔ, *restabit quadratum ex* ΔΕ *æquale rectangulo* ΑΓΒ; *parique argumento etiam rectangulo* ΑΖΒ: *unde* ΑΓ *ipsi* ΖΒ *&* ΑΖ *ipsi* ΓΒ *fiunt æquales. Ac manifestum est quod* ΔΕ *latus quadrati applicandi non majus esse debet dimidio rectæ datæ* ΑΒ; *nam si aliter fuerit, circulus centro* Ε *radio* ΑΔ *descriptus nec secabit neque continget ipsam* ΑΒ; *adeoque problema impossibile est.*



3^o *Applicandum sit rectangulum sub datis lateribus contentum ad rectam datam excedens*

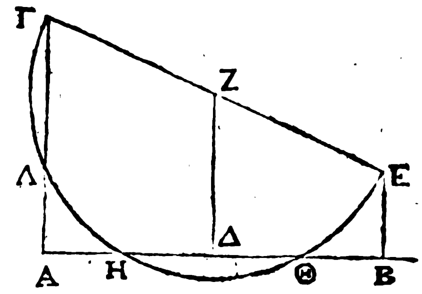
dens quadrato, hoc est, invenienda sint in rectâ ΑΒ *productâ puncta* Η, Θ, *ita ut rectangulum* ΑΘΒ *vel* ΑΗΒ *æquale sit rectangulo sub datis lateribus* ΑΓ, ΒΕ *contento. Erectis normalibus* ΑΓ, ΒΕ *ad extrema rectæ* ΑΒ *& ad contrarias partes, jungatur* ΓΕ, *quæ bisecetur in* Ζ; *ac circulus centro* Ζ *radio* ΖΓ *descriptus transibit per quæsita puncta* Η, Θ.



Demittatur enim de centro Ζ *normalis* ΖΔ; *&, ob æquales* ΓΖ, ΖΕ, *erit* ΑΔ *ipsi* ΔΒ *æqualis, ac proinde* ΑΛ *ipsi* ΒΕ, *&* ΑΗ *ipsi* ΒΘ *æquales sunt: ob circulum igitur, rectangulum* ΓΑΛ, *hoc est quod sub datis* ΓΑ, ΒΕ *continetur æquale erit (per* 35^{am} *III. Elem.) rectangulo* ΗΑΘ *sive* ΑΗΒ, *eidemque æquali* ΑΘΒ. *Inventa igitur sunt puncta* Η, Θ, *de quibus quæsitum fuit.*

4to *Applicandum sit rectangulum sub datis lateribus ad rectam datam, deficiens quadrato; sive oporteat invenire puncta* Η, Θ *in recta* ΑΒ, *ita ut rectangula* ΑΗΒ, ΑΘΒ *æqualia fiant rectangulo sub datis* ΑΓ, ΒΕ *contento. Erigantur ad angulos rectos, ad easdem partes rectæ* ΑΒ, *normales* ΑΓ, ΒΕ; *ac juncta* ΓΕ *bisecetur in* Ζ: *dein centro* Ζ *radio* ΖΓ *describatur arcus circuli, qui quidem (si problema possibile sit) occurret rectæ* ΑΒ *in punctis quæsitis* Η, Θ.

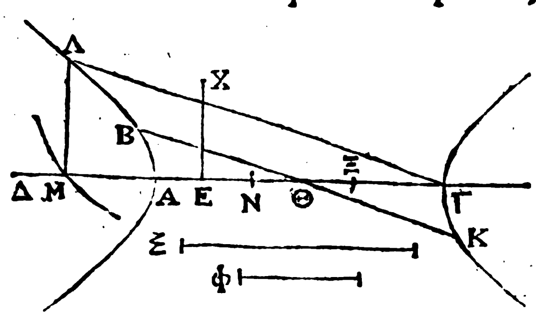
Ducatur enim ΖΔ *ipsi* ΑΒ *normalis, & ob bisectam* ΓΕ *in* Ζ *erit* ΑΔ *ipsi* ΔΒ *æqualis, ut &* ΑΛ *ipsi* ΒΕ: *proinde rectangulum* ΛΑΓ, *hoc est rectangulum sub* ΑΓ, ΒΕ, *æquale erit (per* 36^{am} *III. Elem.) rectangulo* ΗΑΘ, *hoc est ipsi* ΑΗΒ *vel* ΑΘΒ *rectangulo, adeoque puncta* Η, Θ *rem præstant. Oportebit autem rectangulum sub* ΑΓ, ΒΕ *non majus esse quadrato ex* ΑΔ, *quia (per* 5^{am} *II. El.) quadratum ex* ΑΔ *majus est rectangulo* ΑΗΒ *quadrato ex* ΗΔ; *adeoque rectangulum* ΑΗΒ, *hoc est* ΓΑΛ, *sive quod fit sub* ΑΓ, ΒΕ, *non majus erit quadrato ex* ΑΔ *vel* ΔΒ. *Sin aliter fuerit, circulus* ΓΛΕ *rectæ* ΑΒ *non occurret: unde constabit applicationem propositam impossibilem esse.*



PROPOSITIO XIX. PROBL.

Datis in Hyperbola Axe & latere ejus recto, invenire diametrum quæ habeat latus suum rectum rectæ datæ æquale.

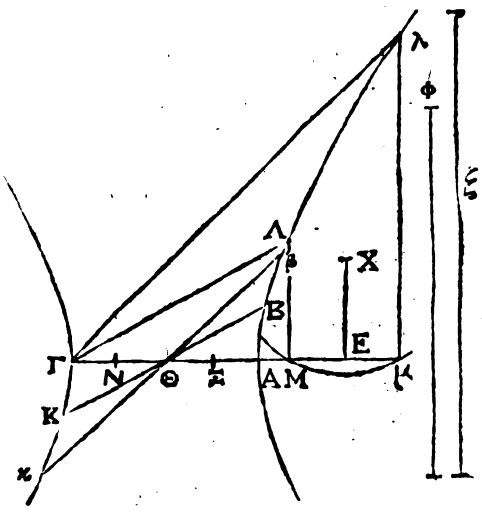
Manentibus Schematis Hyperbolæ præcedentibus, sit recta data ξ, & erit (per 15^{am} VII^{mi}) ut quadratum ex Axe ΑΓ, sive rectangulum sub ΝΓ & ΓΔ (summa Axis & lateris recti) ad rectangulum sub ΝΓ & ΜΞ, hoc est, ut summa illa Axis & lateris recti ad ΜΞ, ita quadratum lateris recti dati ξ ad quadratum ex ΜΝ; adeoque si fiat, ut summa Axis & lateris ejus recti ad latus rectum ξ ita idem ξ ad aliam, puta ad Φ, data erit recta Φ; ac rectangulum sub ΜΞ & Φ æquale erit quadrato ex ΜΝ: unde ΜΞ erit ad ΜΝ sicut ΜΝ ad Φ. Jam si Axis sectionis major fuerit latere ejus recto, ΜΞ major erit quam ΜΝ, ac proinde ΜΝ major quam Φ: quare per conversionem rationis ΜΞ erit ad ΞΝ sicut ΜΝ ad excessum quo ΜΝ superat Φ, ac permutando ΜΞ erit ad ΜΝ sicut ΞΝ ad differentiam inter ΜΝ & Φ: rursusque per conversionem rationis ΜΞ erit ad ΞΝ sicut ΞΝ ad excessum quo ipsa ΞΝ superat differentiam ipsarum ΜΝ & Φ. Sed ΜΝ est excessus quo ΜΞ superat ΞΝ; igitur excessus quo ΞΝ superat differentiam ipsarum ΜΝ & Φ æqualis est excessui quo dupla ipsius ΝΞ & Φ simul superant ΜΞ: erit igitur ut ΜΞ ad ΝΞ ita ΝΞ ad excessum quo dupla ipsius ΝΞ & Φ simul superant ΜΞ; unde rectangulum sub ΜΞ & excessu quo dupla ipsius ΝΞ & Φ simul superant ΜΞ æquale est



est quadrato ex NΞ. Datur autem quadratum ex NΞ; datur igitur rectangulum sub MΞ & excessu jam dicto. Adjacet autem datæ rectæ, nempe duplæ ipsius NΞ una cum Φ simul, deficiens quadrato: datur igitur recta MΞ, punctumque M datum est.

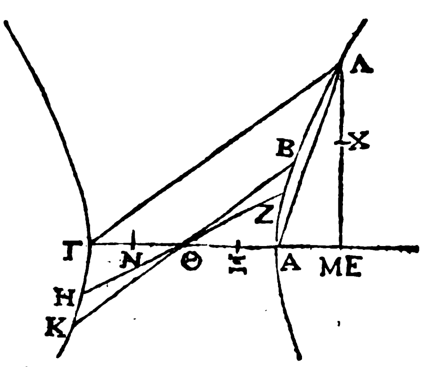
Componetur autem hoc modo. Fiat ut semi-summa Axis & lateris ejus recti ad dimidium lateris recti dati ξ, ita idem dimidium lateris recti ad semissem ipsius Φ, cui fiat NE æqualis, & erigatur Axi normalis EX quæ ponatur ipsi NΞ æqualis, & centro X radio ΞE describatur circuli particula occurrens Axi in puncto M &c. Cujus rei ratio ex Analysi & Lemmate 2do Scholii manifesta est.

Si vero Hyperbolæ Axis minor fuerit latere ejus recto, erit MΞ minor quam MN. Cum autem, per præcedentia, MΞ est ad MN sicut MN ad Φ, erit Φ major quam MN: quare per conversionem rationis MΞ erit ad NΞ sicut MN ad excessum quo Φ superat MN, ac permutando MΞ erit ad MN sicut NΞ ad excessum ipsius Φ supra MN; adeoque rursus, per conversionem rationis MΞ erit ad NΞ sicut NΞ ad excessum quo differentia inter Φ & duplam ipsius NΞ superat MΞ: igitur rectangulum sub MΞ & excessu quo MΞ superatur à differentia quæ est inter Φ & duplam ipsius NΞ æquale erit quadrato ex NΞ. Sed datum est quadratum ex NΞ: datum igitur est rectangulum sub MΞ & dictum excessum. Adjacet autem rectangulum illud datum rectæ datæ, nempe excessui quo Φ superat duplam ipsius NΞ, deficiens quadrato: datur igitur MΞ, punctumque M datum.



Compositio autem vix diversa est, nisi quod, hoc in casu, punctum N à vertice remotius est quam Ξ: fiat igitur ut semi-summa Axis & lateris ejus recti ad semi-latus rectum datum, ita idem semi-latus rectum ad tertiam proportionalem, cui æqualis ponatur NE; & erectâ ad Axem normali EX, fiat EX ipsi NΞ æqualis; & centro X radio ΞE describatur arcus circuli occurrens Axi in puncto M quæsito, vel in punctis M, μ, quoties fieri possit: est enim NE æqualis dimidio ipsius Φ; adeoque ΞE æqualis dimidio ejus cui adjacet rectangulum æquale quadrato ex NΞ deficiens quadrato, nempe dimidio excessûs quo Φ superat duplam ipsius NΞ.

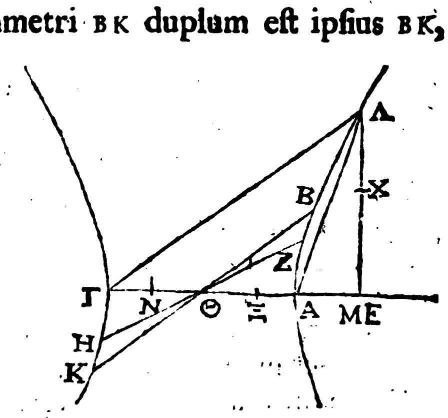
Διορισμός. In primo quidem casu, ubi Axis major est latere ejus recto, manifestum est (ex 33^{am} VII^{mi}) quod latus rectum Axis minus erit latere recto cujusvis alterius diametri; adeoque propositum latus rectum ξ debet esse majus latere recto Axis; ac quo majus est ξ eo remotior erit diameter quæsita ab Axe sectionis. Atque etiam in altero casu, si Axis minor fuerit latere ejus recto, non tamen minor dimidio ejus, eodem modo (per 34^{am} VII^{mi}) se res habebit. At vero si latus rectum majus fuerit duplo Axis, erit NΞ major quam ΞA: ac si fiat ΞM ipsi NΞ æqualis, & erigatur normalis MX sive EX ipsi NΞ æqualis, habebitur (per 35^{am} VII^{mi}) diameter illa sectionis BK, cujus latus rectum, ex omnibus lateribus rectis *Minimum*, duplum erit diametri; coincidentibus scilicet punctis M, E, & circulo, cujus centrum X & radius MΞ, Axem contingente in puncto M, propter ΞE ipsi EX æqualem. Diameter autem BK, per ea quæ in sextâ hujus demonstravimus, media est proportionalis inter MΞ sive NΞ & summam Axis ejusque lateris recti; adeoque rectangulum sub NΞ & summâ Axis & lateris recti æquale est quadrato ex BK. Sed summa Axis & lateris recti est ad differentiam earundem sicut Axis AΓ ad NΞ; quare rectangulum sub NΞ & summa Axis laterisque recti ejus æquale est rectangulo sub Axe & excessu lateris recti supra Axem: quadratum igitur ex BK æquale est rectangulo sub Axe & differentia Axis & lateris recti, hoc est differentiæ inter figuram Axis ejusdemque



Axis quadratum: erit igitur BK media proportionalis inter Axem & differentiam Axis & lateris recti; & latus rectum Hyperbolæ *minimum* duplum erit ipsius BK.

Quapropter si propositum latus rectum minus fuerit duplo mediæ proportionalis inter Axem & differentiam Axis laterisque ejus recti, hoc est, si quadratum ejus minus fuerit quadruplo excessu quo rectangulum sub Axe & latere ejus recto superat quadratum Axis, impossibile erit problema. Hoc si majus fuerit, sed minus latere recto Axis, invenientur duæ diametri ab utraque Axis parte, quibus idem datum latus rectum competat: si vero fuerit lateri recto Axis æquale, utrinque una reperietur præter Axem, ita ut omnino tres diametri rem præstent. Si vero latere recto Axis majus fuerit latus rectum propositum, non nisi una diameter ab utroque Axis latere problemati satisfacere potest. *Maximum* autem non datur.

Dico insuper, quemadmodum latus rectum diametri BK duplum est ipsius BK, ita, in omni casu ubi habentur, ab utraque Axis parte, duæ diametri quarum latera recta sunt æqualia, earundem summam æqualem esse communi earum lateri recto.



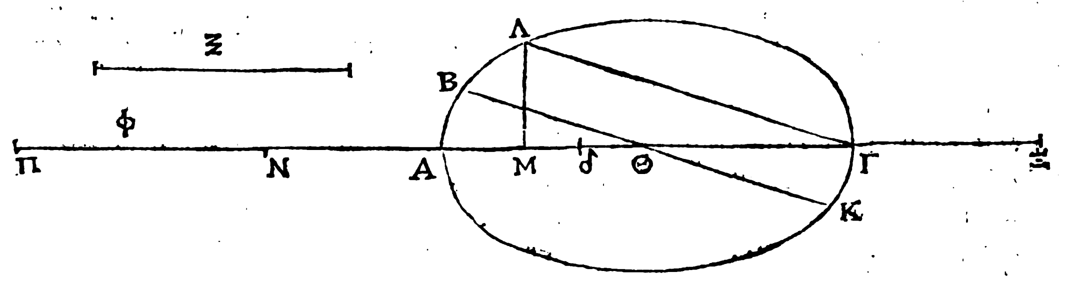
Est enim (per 29^{am} VII^{mi}) differentia quadrati ex diametro quavis ZH & figuræ super ZH factæ æqualis differentiæ quadrati Axis AΓ & figuræ ejusdem; hoc est, æqualis est rectangulo sub Axe & differentiâ inter Axem & latus rectum ejus: rectangulum igitur sub ZH & excessu quo latus rectum ejus superat ipsam ZH datum est. Adjacet autem rectæ datæ, nempe lateri recto proposito, deficiens quadrato: proinde latus rectum æquale erit utrique & ZH & alteri diametro quæ idem habeat latus rectum ac ZH.

Coroll. Hinc manifestum est alteram diametrum, quæ latus rectum idem habet ac Axis AΓ, æqualem esse excessui quo latus illud rectum superat Axem.

PROPOSITIO XX. PROBL.

D*atis in Ellipsi Axe & latere ejus recto: invenire diametrum, quæ habeat latus suum rectum rectæ datæ æquale.*

Iisdem manentibus quæ in Schematis Ellipseos prioribus. Sit recta data ξ, & oporteat invenire diametrum illam Ellipseos quæ habeat latus ejus rectum ipsi ξ æquale. Per 15^{am} VII^{mi}, demonstratum est quadratum ex AΓ, sive rectangulum sub NΓ & Γδ (differentiâ Axis & lateris ejus recti) esse ad rectangulum sub NΓ, MΞ, sicut quadratum lateris recti ξ ad quadratum ex MN: est igitur ut differentia Axis & lateris recti ad MΞ ita quadratum ex ξ ad quadratum ex MN: quapropter si

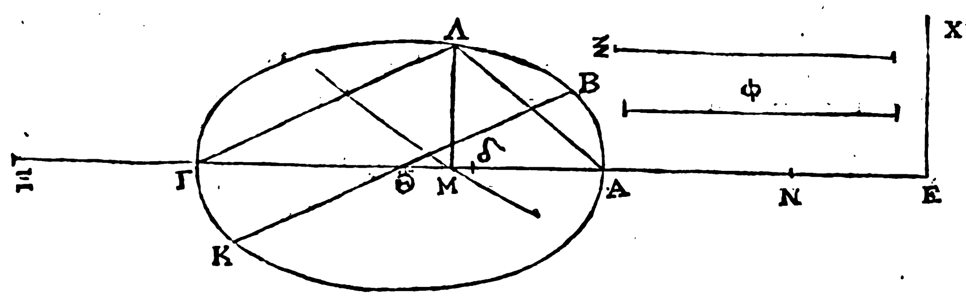


fiat ut differentia Axis & lateris ejus recti ad ξ ita ξ ad aliam, quæ sit Φ; data erit recta Φ, ac rectangulum sub MΞ & Φ æquale erit quadrato ex MN: ἀνάλογον itaque MΞ erit ad MN sicut MN ad Φ, ac componendo ΞN erit ad MN sicut MN & Φ simul ad Φ; unde rectangulum sub ΞN & Φ æquale erit quadrato ex MN una cum rectangulo sub MN & Φ. Datum autem est rectangulum sub ΞN, Φ; datum igitur est rectangulum sub MN & MN & Φ simul: adjacet igitur rectangulum datum sub ΞN & Φ datæ rectæ Φ excedens quadrato; quare data est recta MN; ac ob punctum N datum, datur quoque punctum M.

Compo-

Compositio igitur manifesta est: nam, si producatur ΞN ad Π, ac fiat NΠ ipsi Φ æqualis, sive ut NΠ sit ad ξ sicut ξ ad Γδ differentiam Axis laterisque ejus recti; & ad NΠ applicetur rectangulum æquale contento sub ΞN & NΠ excedens quadrato, quod sit rectangulum NMΠ: inventum erit (*per Lem.* 3^um *Schol.*) punctum M, unde habebitur positio diametri BK quæ problemati satisfacit.

In Ellipsi etiam aliter resolvetur hoc problema, eo nempe quo usi sumus modo in Hyperbolâ; unde paulo paratior oritur constructio: nam cum MΞ sit ad MN sicut MN ad Φ, erit componendo MΞ ad ΞN sicut MN ad MN & Φ simul: ac per-



mutando MΞ erit ad MN sicut ΞN ad MN & Φ simul: rursusque componendo, MΞ erit ad ΞN sicut ΞN ad MN, ΞN & Φ simul sumptas, sive ad excessum quo Φ & duplum ipsius ΞN superat MΞ: quadratum igitur ex ΞN æquale est rectangulo sub MΞ & excessu quo Φ & duplâ ipsius ΞN superant MΞ. Quod quidem rectangulum datum est, ob datam NΞ; adjacet vero rectæ datæ, nempe ei quæ æqualis est ipsis Φ & duplæ ipsius ΞN simul, deficiens quadrato: datur itaque recta MΞ; &, ob datum punctum Ξ, punctum M quoque datur.

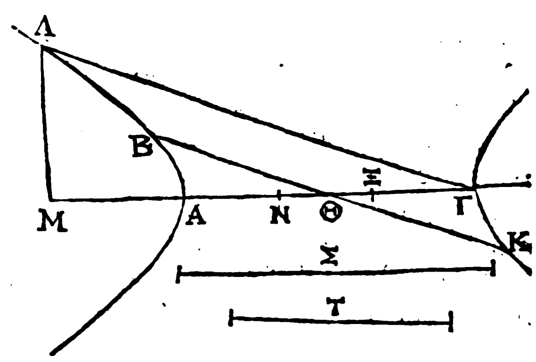
Hinc talis conficitur constructio. Fiat ut differentia Axis laterisque ejus recti ad ξ ita dimidium ipsius ξ ad dimidium ipsius Φ, cui fiat ipsa NE æqualis; & erectâ normali EX, fiat EX ipsi NΞ æqualis, ac centro X radio ΞE describatur circuli particula occurrens Axi in puncto M: quo invento, cætera peragantur ut prius.

Ac manifestus est hujus problematis διορισμός. Nam si latus rectum propositum minus fuerit latere recto Axis majoris, vel majus latere recto Axis minoris, impossibile erit problema; cadente puncto M, in priori casu, inter E & A; in posteriore, ultra verticem Γ.

PROPOSITIO XXI. PROBL.

D*atis Hyperbolæ Axe & latere recto Axis; invenire diametrum ejus, quæ ad latus suum rectum datam habeat rationem.*

Manentibus prius descriptis, sit ratio data sicut Σ ad T, ac ponatur BK diameter quæsita; &, demissâ normali AM, erit (per 6^am VII^mi) ut Σ ad T, sive ut BK ad latus ejus rectum, ita MΞ ad MN: datur igitur ratio MΞ ad MN: ac dividendo ratio NΞ ad ΞM data est, quæ nempe eadem est ac ratio differentiæ terminorum Σ & T ad terminum Σ diametro analogum: ac ob datam NΞ data quoque est ΞM, unde & punctum M datum.



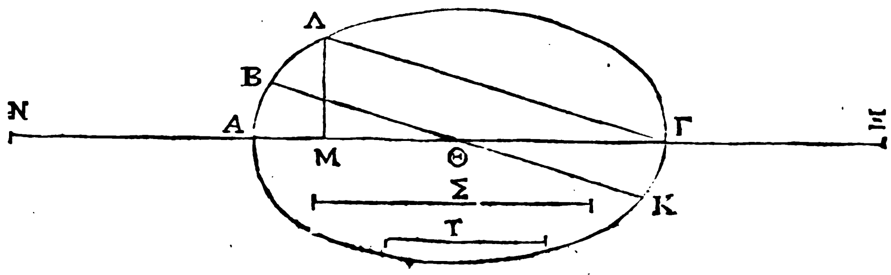
Si igitur fiat ut differentia terminorum ad terminum diametro analogum, ita NΞ ad ΞM; habebitur punctum quæsitum M, unde cætera consequuntur.

Ratio autem proposita non major esse potest ratione Axis ad latus ejus rectum, si Axis major fuerit latere recto; nec minor ratione eorundem, si Axis minor fuerit.

PROPOSITIO XXII. PROBL.

PAri modo, datis Ellipseos Axe & latere recto Axis, invenienda sit diameter ea quæ ad latus suum rectum datam habeat rationem.

Manentibus Schematis Ellipseos prioribus, sit ratio data sicut Σ ad T. Puta factum, ac sit BK diameter quam quærimus: erit igitur (per 7^{mam} VII^{mi}) ut Σ ad T, hoc est ut BK ad latus suum rectum, ita MΞ ad MN: datur itaque ratio MΞ ad MN, ac componendo ratio NΞ ad ΞM data est; eadem enim est ac ratio summæ terminorum Σ, T ad terminum Σ qui diametro respondet. Datur autem ΞN; adeoque MΞ quoque datur, punctumque M datum.



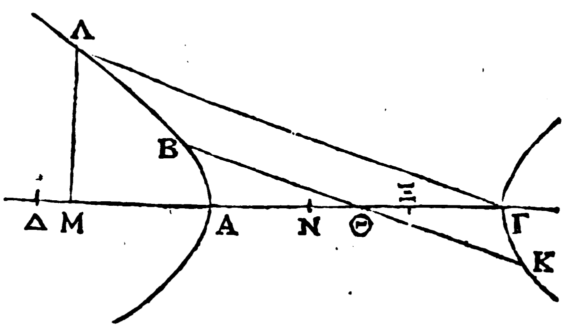
Si igitur fiat ut summa terminorum Σ, T ad terminum Σ ita NΞ ad ΞM, habebimus punctum M, & ejus ope diametrum quæsitam, tam magnitudine quam positione, per ea quæ in sexta hujus ostendimus.

Ratio autem proposita non major esse potest ratione Axis majoris ad latus ejus rectum; nec minor ratione Axis minoris ad latus ejus rectum; hoc est non minor ratione lateris recti Axis majoris ad Axem ipsum.

PROPOSITIO XXIII. PROBL.

DAtis Hyperbolæ Axe & latere recto; oporteat invenire diametri situm & magnitudinem, quæ datâ differentiâ differat à latere suo recto.

Manentibus Hyperbolæ figuris, puta factum; sitque diameter quæsita BK, eidemque parallela ΓΛ, ac demittatur normalis ΛM. Erit itaque (per 16^{am} VII^{mi}) ut quadratum ex ΛΓ, sive rectangulum sub NΓ, ΓΔ, ad rectangulum sub NΓ, MΞ (hoc est ut ΓΔ ad MΞ) ita quadratum differentiæ diametri BK laterisque ejus recti ad quadratum ex ΞN. Data autem est ratio quadrati differentiæ istius ad quadratum ex ΞN, ob datas ipsas: quare datur ratio ΓΔ ad MΞ; &, ob datam ΓΔ, recta MΞ quoque datur, adeoque & punctum M.



Componetur autem problema hoc modo. Fiat ut quadratum differentiæ datæ ad quadratum ex ΞN, ita summa Axis laterisque ejus recti ad MΞ: invento autem puncto M peragantur cætera ad modum superius dictum.

Ac constabit differentiam datam minorem esse debere differentiâ inter Axem ejusque latus rectum, ex iis quæ in 6ta VII^{mi} demonstrata sunt, uti & ex ipsâ constructione: sunt enim rectæ omnes MΞ reciprocè ut quadrata differentiarum inter diametros lateraque earundem recta: adeoque perpetuo augentur dum differentiæ illæ decrescunt, quæ proinde ad *Minimam* nunquam devenire possunt.

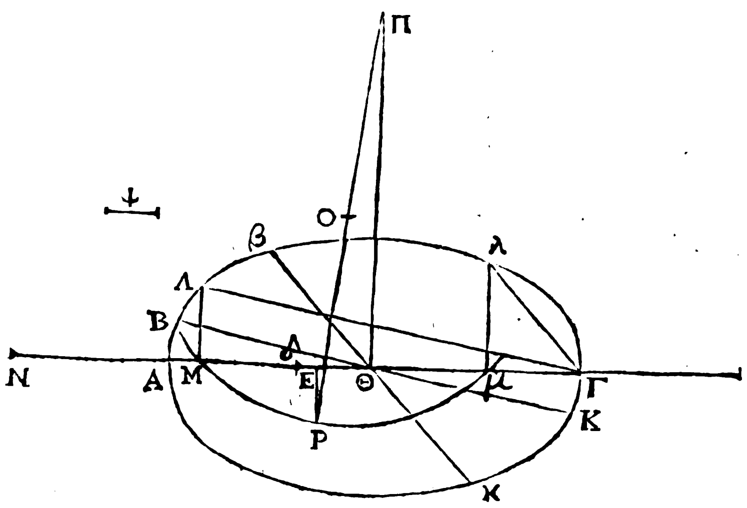
Diametrorum autem magnitudines aliunde obtinebimus: cum enim differentia inter cujusvis diametri quadratum & figuram ejusdem (per 29^{am} VII^{mi}) sit ubique æqualis

æqualis differentiæ inter quadratum Axis & figuram ejus; erit ἀνάλογον ut differentia data inter diametrum quæsitam & latus ejus rectum ad differentiam inter Axem & latus rectum Axis, ita Hyperbolæ Axis ad diametrum quæsitam. Unde manifestum est has differentias ubique diametris suis reciprocè proportionales esse.

PROPOSITIO XXIV. PROBL.

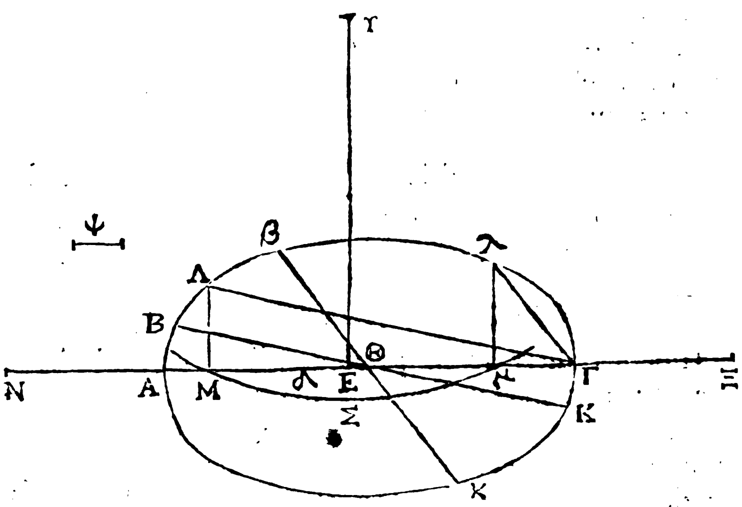
IN Ellipsi autem, datis Axe & latere recto ejusdem; oporteat invenire sectionis diametrum, quæ à latere suo recto datâ differentiâ differat.

Manentibus prius descriptis in Ellipsi, puta factum; ac sit ΒΚ diameter quam quærimus. Per 16^{am} VII^{mi} demonstratum est quadratum ex ΑΓ, sive rectangulum sub ΝΓ, Γδ, esse ad rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ, hoc est Γδ ad ΜΞ, sicut quadratum semissis differentiæ propositæ inter ΒΚ & latus ejus rectum ad quadratum ex ΘΜ. Si igitur fiat ut Γδ, sive differentia Axis & lateris ejus recti, ad semissem differentiæ propositæ, ita eadem semi-differentia ad aliam, puta ad ψ; data erit recta ψ; & rectangulum sub ψ & ΜΞ æquale erit quadrato ex ΘΜ: ac proinde ἀνάλογον ΜΞ erit ad ΘΜ sicut ΘΜ ad ψ; ac dividendo vel componendo ΞΘ erit ad ΘΜ sicut differentia vel summa ipsarum ΘΜ & ψ ad ipsam ψ; adeoque datum rectangulum sub ΞΘ & ψ æquale erit rectangulo sub ΘΜ & summâ vel differentiâ ipsarum ΘΜ & ψ; quod rectangulum proinde datum est: adjacet igitur rectangulum æquale rectangulo sub ΞΘ & ψ datæ rectæ ψ, excedens quadrato; quia ψ data est differentia laterum: datur igitur (*per Lem.* 3. *Schol. nostri*) recta ΘΜ; ac, ob datum Θ, datur quoque punctum Μ.



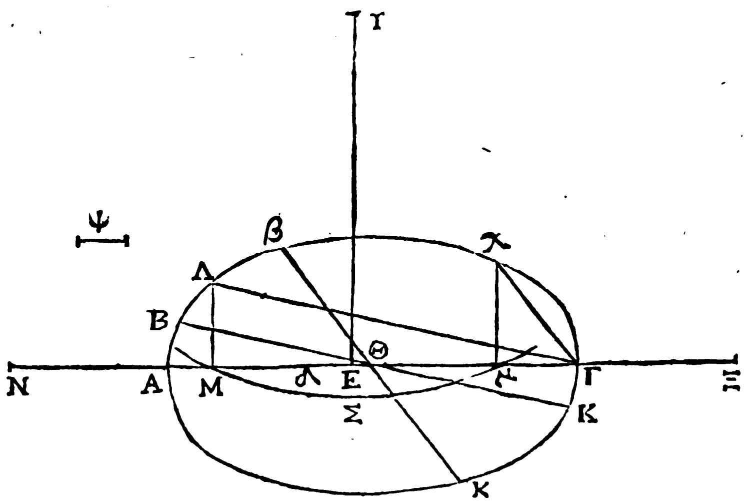
Unde talis oritur Compositio. Fiat ut differentia Axis & lateris ejus recti ad semi-differentiam diametri laterisque recti propositam, ita eadem semi-differentia ad quartam, nempe ad ipsam ψ; cui æqualis ponatur in Axe recta ΘΕ: & producto Axe minore ad Π ita ut ΘΠ sit æqualis ipsi ΘΞ, eidem parallela ducatur ΡΒ ipsi ΕΘ æqualis; ac jungatur ΠΡ, quæ bisecetur in Ο: ac arcus circuli ΜΡμ centro Ο radio ΡΟ descriptus, si problema possibile sit, occurret Axi in punctis Μ, μ, vel in solo μ; uti in sequentibus patebit.

Aliter autem & paulo simplicior habetur problematis solutio. Nam cum ΜΞ sit ad ΘΜ sicut ΘΜ ad ψ, erit per conversionem rationis ΜΞ ad ΞΘ sicut ΘΜ ad excessum quo ΘΜ superat ψ, ac permutando ΜΞ erit ad ad ΘΜ sicut ΞΘ ad dictum excessum: quare rursus, per conversionem rationis, ΜΞ erit ad ΞΘ sicut ΞΘ ad excessum quo ΞΘ & ψ simul sumptæ superant ΘΜ, hoc est ad excessum quo ΝΞ & ψ simul superant ΜΞ: quadratum igitur ex ΞΘ æquale est rectangulo sub ΜΞ & ex-



cessu quo NΞ & ψ simul superant MΞ; quod quidem rectangulum datum est, ob datum quadratum ex NΞ. Adjacet autem rectangulum illud rectæ æquali ipsis NΞ & ψ simul, deficiens quadrato; ac proinde (*per Lem.* 2. *Schol. nostr.*) data est recta ΞM, & ob datum Ξ punctum M datur.

Componetur itaque hoc modo. Fiat ΘE æqualis dimidio ipsius ψ, à Θ versus N ponenda; &, erecta normali EΥ, ponatur EΥ ipsi ΘΞ æqualis: dein centro Υ radio ΞE describatur arcus circuli MΣμ occurrens Axi in punctis M, μ; è quorum utroque habebitur positio diametri quæ habeat à latere suo recto propositam differentiam. In alterâ autem diameter excedet latus rectum, in altera vero latus rectum eâdem differentiâ superabit diametrum.



Hujus autem problematis διορισμοὶ ex Proposit. 37^ma VII^mi petendi. Nam si differentia proposita major fuerit eâ qua Axis major superat latus ejus rectum, cadet punctum M extra Axem, ultra verticem A: ac si major fuerit differentiâ quæ est inter Axem minorem & latus ejus rectum, cadet quoque punctum μ ultra verticem Γ: unde omnino impossibile erit problema. Hac vero si minor fuerit, sed major eâ quæ inter Axem majorem & latus ejus rectum intercedit, duabus diametris utrinque Axi minori adjacentibus satisfactum erit problemati. Si vero differentia proposita minor fuerit differentia inter Axem majorem & latus ejus rectum, cadet utrumque M & μ in Axe AΓ, & omnino habebuntur quatuor diversæ diametri quarum differentiæ à lateribus suis rectis æquales erunt inter se & eidem datæ. *Minima* autem non datur differentia, sed in diametris conjugatis æqualibus evanescit, punctis M & μ in centro Θ coeuntibus.

Coroll. Ac nullo negotio demonstrabitur, duarum diversarum diametrorum rem propositam præstantium differentiam æqualem esse dimidio datæ differentiæ inter diametros illas & latera sua recta: adeoque si data fuerit altera harum diametrorum una cum latere ejus recto, alteram facile invenies. Etenim datarum (diametri & semi-differentiæ) summa ac differentia æquales sunt, altera quidem diametro, altera lateri ejus recto, quæsitis.

Coroll. 2. Quare duplum diametri alicujus æquale erit alteri diametro ejusque lateri recto simul sumptis, quarum differentia æqualis sit differentiæ inter datam diametrum & latus rectum ejusdem.

Coroll. 3. Eodemque argumento patebit, Ellipseos diametrum, cujus conjugata ipsi æqualis est, mediam proportionalem esse inter duas quasvis diametros sectionis, quarum altera excesserit latus suum rectum eodem excessu quo latus rectum alterius superat diametrum.

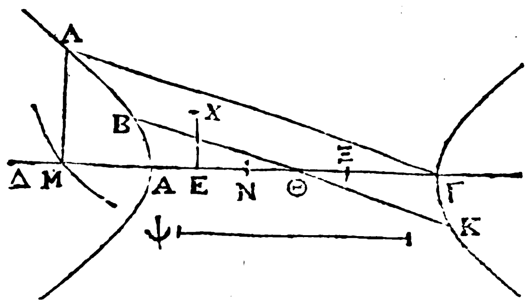
PROPOSITIO XXV. PROBL.

D*Atis in Hyperbola Axe & latere ejus recto; oporteat invenire positionem diametri illius, quæ una cum latere suo recto datam conficit summam.*

Iisdem positis ac in præcedentibus Hyperbolæ Schematis, puta factum quod quæritur: ac sit BK diameter illa quæ cum latere suo recto propositam facit summam. Per 17^am VII^mi quadratum ex AΓ, sive rectangulum NΓΔ, id est, quod sub NΓ & utroque Axe & latere ejus recto simul, est ad rectangulum sub NΓ & MΞ, sicut quadratum summæ diametri alicujus BK & lateris ejus recti ad quadratum rectæ compositæ ex NM, MΞ simul sumptis: erit igitur ut summa Axis & lateris ejus recti

recti ad MΞ, ita quadratum ex BK & latus ejus rectum simul ad quadratum ex NM, MΞ simul, sive ad quadruplum quadrati ex ΘM. Hinc si fiat ut summa Axis & lateris recti ad semi-summam propositam, ita eadem semi-summa ad aliam, puta ad ψ; erit recta ψ data, & rectangulum sub MΞ & ψ æquale erit quadrato ex ΘM: adeoque MΞ erit ad ΘM sicut ΘM ad ψ; ac dividendo ΞΘ erit ad ΘM sicut differentia inter ΘM & ψ ad ipsam ψ: datum igitur rectangulum sub ΞΘ & ψ æquale erit contento sub ΘM & differentiâ ipsarum ΘM & ψ; ac proinde datum est rectangulum illud. Adjacet autem rectæ ψ excedens quadrato, si Axis sectionis major fuerit latere ejus recto; deficiens vero quadrato, si latus rectum Axis majus fuerit ipso Axe: unde (*per Lemm.* 3^{um} *vel* 4^{tum} *Scholii*) manifesta erit in utroque casu problematis constructio.

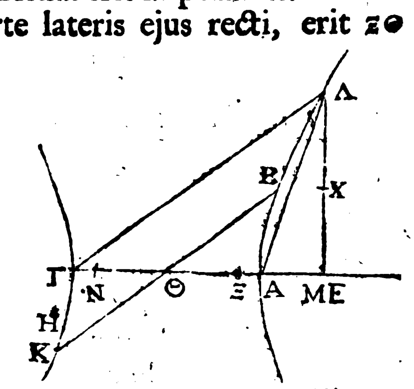
Sed ut in præcedentibus, ita in hoc quoque problemate, paulo paratior habetur Compositio. Cum enim MΞ sit ad ΘM sicut ΘM ad ψ; per conversionem rationis & permutando erit MΞ ad ΘM sicut ΞΘ ad excessum quo ΘM superat ψ: ac rursus per conversionem rationis MΞ erit ad ΞΘ sicut ΞΘ ad excessum quo ΞΘ & ψ simul superant ΘM, excessum scilicet quo MΞ superat ipsam ΞΘ; hoc est, MΞ erit ad ΞΘ sicut ΞΘ ad excessum quo dupla ipsius ΞΘ & ψ simul superant MΞ, si latus rectum minus fuerit Axe. Ubi vero Axis minor fuerit latere recto, pari ratione erit ut MΞ ad ΞΘ ita ΞΘ ad excessum quo differentia inter ψ & duplam ipsius ΞΘ superat MΞ: rectangulum igitur sub MΞ & dictum excessum æquale erit quadrato ex ΞΘ. Datâ autem ΞΘ, datum est rectangulum illud, adjacens rectæ datæ, æquali nempe ipsi ψ auctæ vel minutæ duplo ipsius ΞΘ, & deficiens quadrato: unde (*per Lemma* 2^{dum} *Schol.*) data erit recta MΞ, punctumque M datum.



Componetur itaque hoc modo. Fiat ut dupla summa Axis & lateris ejus recti, sive ΓΔ bis, ad datam semi-summam diametri & lateris ejus recti, ita eadem semi-summa ad tertiam proportionalem, quæ ideo æqualis erit dimidio rectæ quam ψ diximus; ac fiat ΘE (versus A ponenda) eidem dimidio rectæ ψ æqualis: unde ΞE æqualis erit dimidio ejus cui applicandum est rectangulum æquale quadrato ex ΞΘ, idque in utroque Casu. Erigatur igitur (*per Lemma* 2^{dum}) normalis EX ipsi ΞΘ æqualis, ac centro X radio ΞE describatur arcus circuli occurrens Axi in puncto M, vel etiam in punctis M, μ, si problema dupliciter construi possit; uti proxime docebitur.

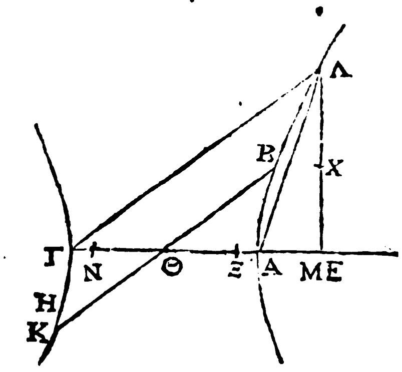
Determinatur autem problema hoc ex propositionibus 38^{va}, 39^{na} & 40^{a} Septimi. Nam si Axis sectionis major fuerit latere ejus recto, per 38^{vam} erit summa Axis & lateris ejus recti minor quavis aliâ diametro una cum latere ejus recto simul sumpto; oportebit igitur summam propositam majorem esse Axe & latere ejus recto simul. Nec aliter si Axis minor fuerit latere ejus recto, sed non minor tertia parte ejusdem; nam, per 39^{am} Septimi, constat quoque summam Axis laterisque ejus recti minorem esse summâ diametri alterius cujusvis & lateris ejus recti: eâ igitur major esse debet summa proposita; aliter problema erit impossibile.

Quod si Axis Hyperbolæ minor fuerit tertia parte lateris ejus recti, erit ΞΘ major quartâ parte Axis; ac si fiat ΞE ipsi ΞΘ æqualis, cadet punctum E in Axe ultra verticem A; erectâque normali EX ipsi ΞΘ æquali, circulus centro X radio ΞE, hoc est ΞΘ, continget Axem in puncto E; ac proinde diameter BK, cujus positio hoc in casu determinatur per punctum E coincidens cum puncto M, *Minimam omnium habebit summam sui laterisque sui recti.* Et quoniam NE tripla est ipsius ΞE, erit (per 6^{am} VII^{mi}) latus rectum diametri BK triplum ipsius BK, quod quidem plenius in 40^{ma} VII^{mi} demonstratum invenietur. Diameter autem illa BK



 (per

(per ea quæ ostendimus in 6^{ta} hujus) media est proportionalis inter ΞΕ (sive ΞΘ) & ΓΔ summam Axis & lateris ejus recti; unde rectangulum sub ΘΞ, ΓΔ æquale erit quadrato ex ΒΚ. Summa autem Axis & lateris ejus recti est ad earundem differentiam sicut ΑΘ ad ΘΞ; quocirca rectangulum sub semi-Axe ΑΘ & differentiâ Axis & lateris ejus recti æquale est quadrato ex ΒΚ. Ac diametri ΒΚ quadruplum ostensum est æquale summæ minimæ diametri & lateris sui recti: erit igitur summa illa minima media proportionalis inter octuplum Axis ΑΓ & differentiam Axis & lateris ejus recti; ac quadratum summæ hujus *minimæ* æquale erit octuplo excessui quo figura Axis superat ejusdem Axis quadratum: proinde si octuplus ille excessus auferatur è quadrato summæ Axis & lateris ejus recti, remanebit quadratum excessûs quo latus rectum Axis superat Axis triplum.



Igitur in Hyperbolâ, cujus latus rectum Axis majus sit triplo Axe, si proponatur invenienda diameter, quæ una cum latere ejus recto datam efficiat summam, ac quadratum summæ datæ minor fuerit quadrato summæ Axis & lateris ejus recti spatio majori quam quadrato ejus quo latus rectum Axis superat triplum Axis, problema erit impossibile. Si vero quadratum summæ propositæ, una cum quadrato excessûs quo latus rectum Axis superat Axis triplum, æquale fuerit quadrato summæ Axis & lateris ejus recti, sola recta ΒΚ rem præstat ad idem latus Axis. Hac vero si major fuerit summa proposita, minor vero summa Axis & lateris ejus recti, occurret circulus radio ΞΕ centro Χ descriptus Axi in punctis Μ & μ, ultra verticem Α; unde obtinebuntur duæ diametri ab utraque parte ipsius ΒΚ & ad idem Axis latus, quæ habeant eandem ipsarum & laterum suorum rectorum summam: ut omnino quatuor diametri rem præstent. Si vero summa illa æqualis fuerit summæ Axis & lateris ejus recti, duæ tantum præter Axem diametri, (ab utroque ejus latere una) satisfaciunt problemati, coincidente puncto μ cum vertice Α. Quod si summa proposita major fuerit eâ summâ, una tantum diameter ab utraque parte Axis, ultra ΒΚ, solutionem præbet; cadente puncto μ citra verticem Α. *Maxima* autem non datur.

Coroll. 1. Hinc facillime constabit, quod quemadmodum diameter ΒΚ quarta pars est summæ ipsius ΒΚ & lateris ejus recti, ita summa duarum quarumvis diametrorum, communem una cum lateribus suis rectis summam conficientium, semissis est communis illius summæ.

Coroll. 2. Hinc diameter illa quæ eandem habet summam sui laterisque sui recti, quam habet alia quævis data diameter, æqualis erit semissi excessûs quo latus rectum diametri datæ superat ipsam diametrum: ac latus rectum alterius illius diametri æquale erit semi-summæ lateris recti diametri datæ ac triplæ ipsius diametri.

Coroll. 3. Diameter autem illa quæ eandem habet summam sui laterisque sui recti. quam habet Axis, æqualis erit semissi excessûs quo latus rectum Axis superat Axem: ac latus ejus rectum æquale erit semi-summæ lateris recti Axis & Axis tripli; ac proinde minus est latere recto Axis semisse excessûs quo latus rectum Axis superat Axis triplum.

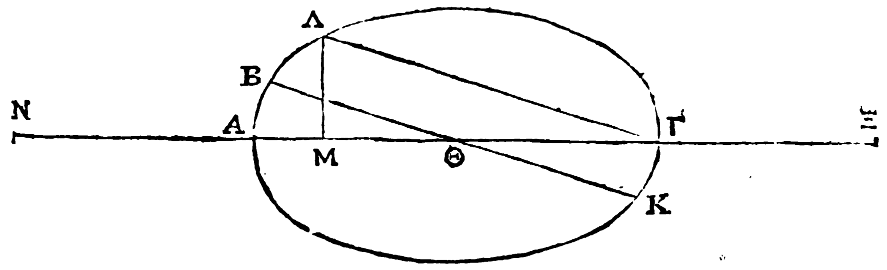
PROPOSITIO XXVI. PROBL.

Ellipseos Axe & latere recto datis, oporteat invenire diametrum, quæ una cum latere suo recto datam conficiat summam.

Manentibus iis quæ in Ellipsi supposuimus, puta factum; ac sit ΒΚ diameter quam quærimus. Ac (per 17^{am} Septimi) erit quadratum Axis ad rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ sicut quadratum summæ diametri & lateris recti datæ ad quadratum summæ ipsarum ΜΝ, ΜΞ, hoc est, ad quadratum ex ΝΞ; erit igitur, per toties dicta, differentia Axis & lateris ejus recti ad ΜΞ sicut quadratum summæ propositæ ad quadratum

dratum ex N Ξ. Sed data sunt cætera; ergò datur quoque M Ξ: nam quadratum summæ propositæ est ad quadratum ex N Ξ sicut differentia Axis & lateris ejus recti ad M Ξ: & dato puncto Ξ, punctum M quoque datur.

Manifesta autem est Compositio. Fiat enim ut quadratum è summâ propositâ ad quadratum ex N Ξ, ita differentia Axis laterisque recti ejusdem ad rectam ipsi M Ξ æqualem, quæ ponatur à Ξ versus N; ac, si problema propositum possibile sit, cadet punctum M in Axe A Γ: obtento autem puncto M, cætera efficiantur ut in præmissis.



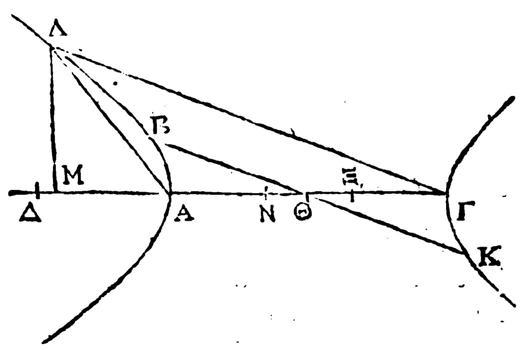
Hujus autem problematis limites ex 41ma Septimi petendi sunt; nam summa illa non minor esse potest Axe majore & latere ejus recto simul: nec major summâ Axis minoris & lateris recti ejusdem. In priori casu cadet punctum M ultra verticem A, in posteriore citra punctum Γ, extra Ellipsin.

Diametrum autem ipsam, datâ summâ ejusdem & lateris ejus recti, satis expedite invenire licet. Nam, per 30^{am} VII^{mi}, rectangulum sub qualibet diametro & summâ ejusdem & lateris recti æquale est rectangulo sub Axe & Axe unà cum latere ejus recto simul sumpto: proinde ἀνάλογον erit ut summa proposita diametri alicujus & lateris ejus recti ad summam Axis laterisque recti Axis, ita ipse Axis Ellipseos ad diametrum quæsitam: unde manifestum est, ob datum Axem ejusque latus rectum, summam diametri cujusvis & lateris ejus recti reciprocè proportionalem esse ipsi diametro Ellipseos.

PROPOSITIO XXVII. PROBL.

Datis lateribus figuræ Axis Hyperbolæ, oporteat invenire positionem diametri quæ habeat figuram ejus, sive rectangulum sub diametro & latere ejus recto, proposito rectangulo æquale.

Iisdem manentibus quæ in figuris Hyperbolæ præmissis, erit (per 18^{vam} VII^{mi}) quadratum ex A Γ ad rectangulum sub diametro B K & latere ejus recto, sicut N Γ ad M N; sed quadratum ex A Γ ostensum est æquale rectangulo sub N Γ & summâ Axis & lateris ejus recti: quare, ob utrinque inventum N Γ, erit rectangulum sub M N & summa Axis & lateris ejus recti æquale rectangulo sive figuræ propositæ: si igitur rectangulum illud datum applicetur rectæ datæ, nempe ipsi Γ Δ, summæ Axis & lateris ejus recti; latitudo ex applicatione orta æqualis erit quæsitæ M N, quæ proinde data est: ac ob datum punctum N punctum M quoque datur.



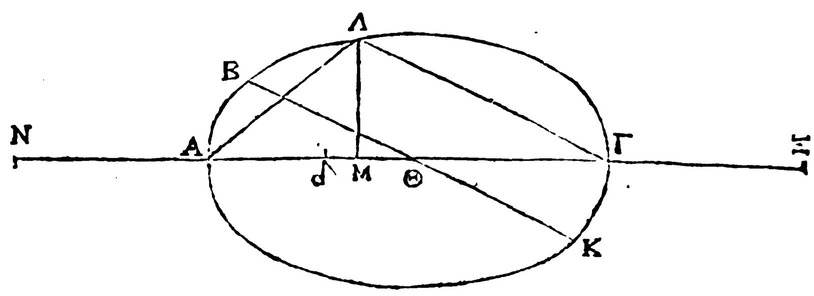
Applicetur igitur figura proposita ad summam Axis & lateris ejus recti, ac ponatur inventa latitudo à puncto N versus A, ut N M; ac si major fuerit N M quam N A, possibile erit problema: invento autem puncto M, peragantur cætera ut in præcedentibus. Διορισμὸν autem habet ex 42da VII^{mi}, qua demonstratur figuram propositam minorem esse non posse figurâ Axis: *Maximam* autem figuram non habet Hyperbola.

PROPOSITIO XXVIII. PROBL.

Datis lateribus figuræ Axis Ellipseos, proponatur sectionis diametrum illam invenire, quæ cum suo latere recto datam figuram sive rectangulum contineat.

Iisdem positis ac in Schematis Ellipseos præcedentibus; argumento omnino consimili probabitur (ex 18^va VII^mi) rectangulum sub MN & differentiâ Axis & lateris ejus recti æquale esse figuræ propositæ, sive rectangulo sub diametro quæsitâ & latere ejus recto: quare si rectangulum illud datum applicetur rectæ datæ, hoc est, differentiæ Axis & lateris ejus recti, latitudo inde orta æqualis erit quæsitæ MN, quæ propterea data est: ac dato puncto N, datur etiam punctum M.

Applicato igitur rectangulo proposito ad rectam Γ∂ differentiæ Axis & lateris ejus recti æqualem, latitudini ex applicatione inventæ æqualis fiat NM, à N versus centrum ponenda; ac si punctum M cadat in Axe, sive inter A & Γ, problema possibile erit: ac dato puncto M erigatur normalis MΛ, cujus quadratum sit ad rectangulum AMΓ ut latus rectum Axis ad ipsum Axem; junctæque ΓΛ parallela ducatur BK, quæ, per demonstrata in præmissis, diameter erit quam quærimus.



Limites autem habet problema hoc ex 43^ia Septimi, qua constat figuram propositam non minorem esse figurâ Axis majoris; aliàs enim caderet punctum M citra A, extra sectionem: nec potest esse major figurâ Axis minoris; hoc enim si fuerit, caderet M extra sectionem, ultra verticem Γ. Nec opus est ut toties repetamus, reperiri aliam diametrum ipsi BK æqualem, parique intervallo alteri Axis lateri adjacentem, quæ quoque rem propositam efficiat.

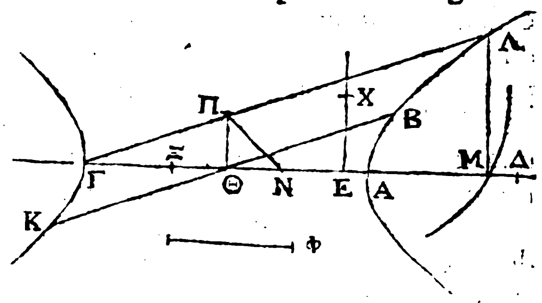
In hac autem, uti & in præcedente, diametrum quæsitam habebimus, ope 29^næ & 30^mæ VII^mi. Nam cum in Ellipsi (per 30^mam) summa quadrati & figuræ Axis sit semper æqualis summæ quadrati diametri cujuscunque & figuræ ejusdem; si de datâ summâ quadrati & figuræ Axis auferatur data figura diametri quæsitæ, restabit quadratum ipsius diametri. In Hyperbola autem differentia quadrati & figuræ Axis (per 29^am VII^mi) æqualis est differentiæ quadrati & figuræ cujusvis diametri; erit igitur excessus, quo quadratum Axis & proposita figura simul superant figuram Axis, æqualis quadrato diametri quæsitæ.

PROPOSITIO XXIX. PROBL.

Datis lateribus figuræ Axis Hyperbolæ, proponatur diametrum sectionis invenire, cujus quadratum una cum quadrato lateris recti ejusdem datam conficiat summam.

Iisdem positis, quæ in prioribus Hyperbolæ Schematis descripta sunt, puta factum; & sit BK diameter illa quam quærimus: erit igitur (per 19^am VII^mi) quadratum ex AΓ, sive rectangulum sub NΓ & summâ Axis & lateris ejus recti, ad rectangulum sub NΓ & MΞ; hoc est, ut summa Axis & lateris recti ad MΞ, ita proposita summa quadratorum ex BK & latere ejus recto ad summam quadratorum ex NM & MΞ: ac applicatâ quadratorum summâ illâ datâ ad summam Axis & lateris ejus recti, erit rectangulum sub MΞ & latitudine ex applicatione ortâ, quæ sit ψ, æquale summæ quadratorum ex MN & MΞ.

Jam Axis sectionis vel major erit latere ejus recto, vel minor, vel eidem æqualis; ac ac primum sit major eo; unde (per 6^{am} VII^{mi}) $M\Xi$ major erit quam NM, ac (per 7^{mam} II^{di} *Elem.*) quadrata ex NM, $M\Xi$ simul æqualia erunt duplo rectangulo sub $NM\Xi$ & quadrato ex $N\Xi$: quocirca rectangulum sub $M\Xi$ & datâ latitudine ψ nuper inventâ, æquale erit duplo rectangulo sub $NM\Xi$ & quadrato ex $N\Xi$. Sed NM excessus est quo $M\Xi$ superat $N\Xi$; adeoque duplum rectangulum $NM\Xi$ æquale est duplo excessus quo quadratum ex $M\Xi$ superat rectangulum sub $N\Xi M$: quadratum igitur ex $N\Xi$, una cum duplo excessu quo quadratum ex $M\Xi$ superat rectangulum $N\Xi M$, æquale est rectangulo sub ψ & $M\Xi$: ac dempto utrinq; duplo illius excessus, erit differentia, qua rectangulum sub $M\Xi$ & ψ superat duplum excessum quadrati ex $M\Xi$ supra rectangulum $N\Xi M$, æqualis quadrato ex $N\Xi$: ac dimidiando erit rectangulum sub $M\Xi$ & semisse ipsius ψ & $N\Xi$ simul, dempto quadrato ex $M\Xi$, æquale semissi quadrati ex $N\Xi$. Datur autem quadratum ex $N\Xi$: datum igitur est rectangulum sub $M\Xi$ & $\frac{1}{2}\psi$ & $N\Xi$ simul, deficiens quadrato ex $M\Xi$: adjacet autem rectæ datæ, nempe ipsi $\frac{1}{2}\psi$ & $N\Xi$ simul sumptæ: datur igitur $M\Xi$; ac dato puncto Ξ, datur quoque punctum M.



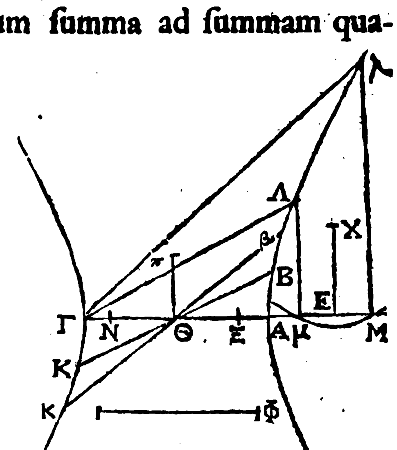
Componetur autem problema ad hunc modum. Descriptis cæteris ut prius, applicetur pars quarta summæ quadratorum propositæ ad $\Gamma\Delta$ summam Axis & lateris ejus recti; ac ponatur latitudo applicatione obtenta, quæ sit Φ, (quæque quartæ parti ipsius ψ æqualis est) in Axe versus verticem A, de centro Θ ad E, ita ut rectangulum sub $\Gamma\Delta$, ΘE sit æquale quartæ parti datæ quadratorum summæ; & erigatur normalis EX: factâque $\Theta\Pi$ in Axe minore ipsi $\Theta\Xi$ vel ΘN æquali, jungatur $N\Pi$, & capiatur EX eidem æqualis: dein centro X radio ΞE describatur circuli portio, quæ occurrat Axi in puncto M, ad quod erigatur Axi normalis $M\Lambda$; cæteraque fiant quæ in præcedentibus. Demonstratio autem Analysi reciproca satis manifesta est, cum scilicet facta sit EX æqualis ei quæ potest duplum quadrati ex $\Xi\Theta$, sive semissi quadrati ex $N\Xi$.

Neque alium habet limitem, præterquam quod in 44^{ta} VII^{mi} demonstratum sit summam quadratorum Axis laterisque ejus recti minorem esse summa quadratorum laterum figuræ cujuslibet alterius diametri. Hâc igitur si summa proposita minor fuerit, cadet punctum M citra verticem, sive extra sectionem; vel circulus Axem non attinget: ac proinde problema impossibile erit.

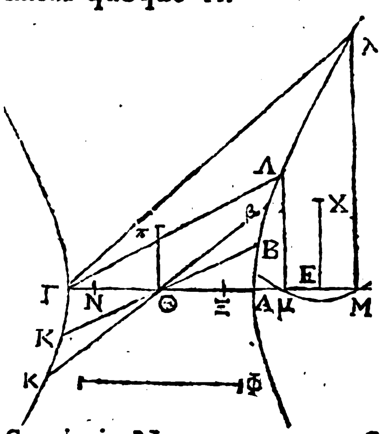
PROPOSITIO XXX. PROBL.

Iisdem positis, sit jam Axis Hyperbolæ minor latere ejus recto; ac oporteat invenire diametrum sectionis, quæ habeat quadrata laterum figuræ ejus simul sumpta æqualia dato rectangulo.

Per ea quæ in præcedente demonstravimus, ex 19^{na} VII^{mi} erit ut summa Axis & lateris ejus recti ad $M\Xi$, ita proposita quadratorum summa ad summam quadratorum ex NM & $M\Xi$: quare applicatâ summâ illâ datâ ad summam Axis & lateris ejus recti, erit rectangulum sub $M\Xi$ & datâ latitudine ex applicatione ortâ, quæ sit recta ψ, æquale summæ quadratorum ex MN, $M\Xi$. Quoniam vero Axis $A\Gamma$ minor est quam latus ejus rectum, erit $M\Xi$ minor quam MN. Verum (per 7^{am} II^{di} *Elem.*) quadrata ex MN, $M\Xi$ simul æqualia erunt duplo rectangulo sub $NM\Xi$ una cum quadrato ex $N\Xi$, hoc est, duplo rectangulo sub $M\Xi$ & $M\Xi$, $N\Xi$ simul una cum quadrato ex $N\Xi$: quapropter rectangulum sub $M\Xi$ & ψ æquale erit duplo rectangulo sub $M\Xi$, $N\Xi$ simul & $M\Xi$ una cum quadrato ex $N\Xi$: & utrinque sublato communi, duplo nempe rectangulo sub $N\Xi$, $M\Xi$ simul & $M\Xi$, erit excessus, quo rectangulum sub ψ & $M\Xi$ superat duplum rectangulum



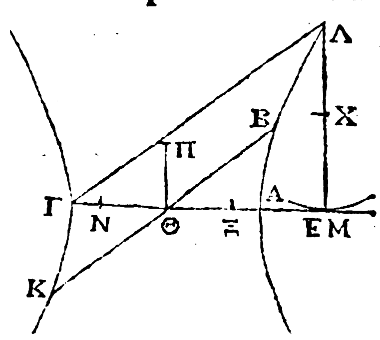
NΞM & duplum quadratum ex MΞ simul, æqualis quadrato ex NΞ: ac, capiendo æqualium dimidia, erit rectangulum sub MΞ & excessu quo ½ψ superat ipsam NΞ dempto quadrato ex MΞ, æquale dimidio quadrati ex NΞ: datur autem quadratum ex NΞ; adeoque datur rectangulum sub dicto excessu & MΞ. Adjacet autem rectangulum illud datæ rectæ, nempe differentiæ ipsarum ½ψ & NΞ, deficiens quadrato: datur itaque MΞ, ac ob datum punctum Ξ, datur quoque M.



Compositio autem hoc in casu nihil differt à præcedente, nisi quod hic punctum Ξ vertici A jam vicinior sit quam centrum Θ: applicatâ igitur quartâ parte summæ quadratorum propositæ ad summam Axis & lateris ejus recti, ponatur latitudo inde orta, quæ sit Φ, à Θ versus verticem A, ut ΘE; ac ad punctum E & ad angulos rectos super Axem erigatur recta EX æqualis ipsi Nπ, quæ possit dimidium quadrati ex NΞ; & centro X, radio ΞE describatur arcus circuli, qui quidem, si problema possibile sit, occurret Axi ultra verticem, in puncto M, vel etiam in punctis M, μ, sub certis conditionibus mox dicendis.

Διορισμὸς autem habet problema hoc ex 45^{ta} & 46^{ta} Septimi. Nam, per 45^{tam}, si quadratum Axis Hyperbolæ non minus fuerit dimidio quadrati differentiæ inter Axem & latus ejus rectum, summa quadratorum Axis & lateris ejus recti minor erit quadratis laterum figuræ cujusvis alterius sectionis diametri simul sumptis: ac proinde oportebit propositam summam majorem esse quadratis laterum figuræ Axis; ac quo major fuerit summa illa, tanto longius aberit ab Axe diameter quam quærimus.

Si vero quadratum Axis minus fuerit dimidio quadrati differentiæ inter Axem & latus ejus rectum, demonstratur, in 46^{ta} VII^{mi}, quod ab utraque Axis parte reperiatur diameter, cujus quadratum, una cum quadrato lateris ejus recti simul, minus erit summâ quadratorum laterum figuræ cujuscunque alterius diametri, ab eadem Axis parte sumendæ; quodque huic utrinque propiores diametri minorem habent summam quadratorum laterum figuræ quam ab eadem remotiores: hoc enim in casu punctum E cadet in Axe Hyperbolæ ultra verticem producto; ac EX, sive ea quæ poterit dimidium quadrati ex NΞ, æqualis erit ipsi ΞE, ac circulus centro X descriptus continget Axem in puncto E, hoc in casu cum puncto M coincidente: adeoque quartâ pars ipsius ψ, sive ΘE, æqualis erit ei quæ poterit duplum quadrati ex ΞΘ una cum ipsâ ΞΘ; ac proinde ΘE erit ad ΞΘ sicut diagonium quadrati & latus ejus simul ad latus quadrati, sive ut $\sqrt{2}+1$ ad 1. Rectangulum autem sub ΘE, hoc est ¼ψ, & summâ Axis & lateris ejus recti, æquale est (per construct.) quartæ parti minimæ quadratorum summæ; ac proinde rectangulum sub sub $\sqrt{2}+1 \times N\Xi$ & summâ Axis & lateris ejus recti æquale erit dimidio minimæ illius summæ. Cum autem summa Axis & lateris ejus recti sit ad differentiam earundem sicut Axis ad NΞ; erit rectangulum sub NΞ & summâ Axis & lateris ejus recti æquale excessui quo figura Axis superat Axis quadratum; adeoque *Minima* summa quadratorum è lateribus figuræ erit ad excessum quo figura Axis superat Axis quadratum sicut $\sqrt{8}+2$ ad unitatem, sive ut dupla summa diagonii quadrati & lateris ejus ad ipsum latus.



Hac igitur *Minimâ* summâ si minor fuerit proposita, impossibile erit problema; circulo, cujus radius est ΞE, Axem non attingente. Si vero major fuerit eâ, minor vero summâ quadratorum è lateribus figuræ Axis; occurret circulus Axi in duobus punctis ultra verticem, ut ad M & μ; quorum ope, modo toties dicto, invenientur duæ diametri ab utroque Axis latere, hoc est omnino quatuor, quæ habeant eandem propositam quadratorum laterum figuræ summam. Quod si data summa æqualis fuerit summæ quadratorum è lateribus figuræ Axis, coincidet punctum μ cum

cum vertice A; punctum M vero dabit duas alias diametros, ab utraque scilicet Axis parte unam, quæ habeant eandem summam. Verum si major fuerit summa proposita quam est summa quadratorum laterum figuræ Axis, cadet punctum μ citra verticem A: at alterum punctum occursûs M duas præbebit diametros, utrinque unam, quæ problemati satisfacient. *Maxima* autem quadratorum summa, ex natura Hyperbolæ, dari non potest.

Quod si Axis æqualis fuerit lateri ejus recto, erunt quoque (per 23^{am} VII^{mi}) diametri omnes lateribus suis rectis æquales; adeoque dimidium summæ propositæ æquale erit quadrato diametri quam quærimus.

Coroll. 1. Hinc manifesto constabit duarum diametrorum Hyperbolæ, eandem summam quadratorum laterum figuræ habentium, quadrata simul sumpta æqualia esse excessui quo semi-summa illa quadratorum laterum figuræ, una cum quadrato Axis, superat Axis figuram.

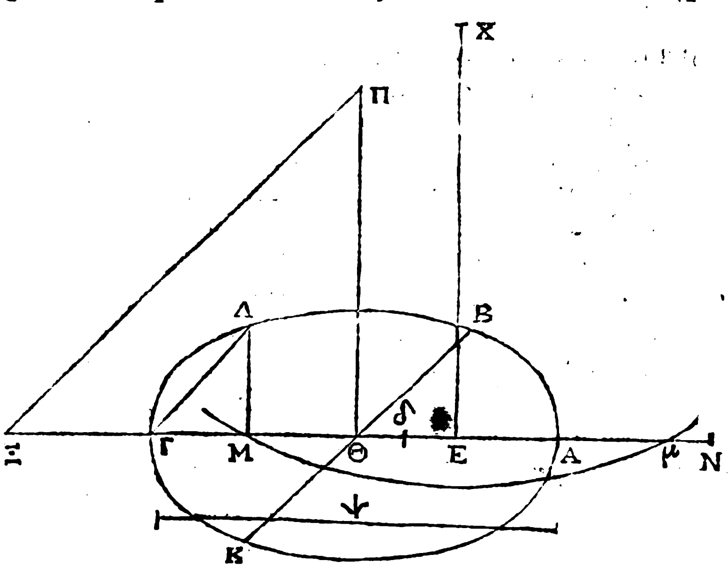
Coroll. 2. Proinde quadratum diametri illius, quæ eandem habet summam ac ipse Axis, æquale erit excessui quo semi-summa illa quadratorum laterum figuræ superat figuram Axis; hoc est dimidio quadrati ex differentia Axis & lateris ejus recti. Quadratum autem lateris recti ejus æquale erit eidem semi-summæ quadratorum laterum figuræ Axis una cum eorundem rectangulo sive figurâ Axis simul sumptâ; hoc est dimidio quadrati è summâ utriusque & Axis & lateris ejus recti.

Coroll. 3. Idem dicendum de alia quavis datâ diametro, quæ non sit Axis sectionis.

PROPOSITIO XXXI. PROBL.

Datis lateribus figuræ Axis Ellipseos, oporteat invenire diametrum, cujus quadratum, una cum quadrato lateris ejus recti simul sumpto, propositam conficiat summam.

Manentibus iis quæ in præcedentibus Ellipseos Schematis descripta sunt, puta factum; sitque BK diameter illa quam quærimus. Erit igitur (per 19^{am} VII^{mi}) ut quadratum ex ΑΓ, sive rectangulum sub ΝΓ & differentia Axis & lateris ejus recti, ad rectangulum sub ΝΓ & ΜΞ, hoc est ut Γδ differentia Axis & lateris ejus recti ad ΜΞ, ita summa illa proposita ad summam quadratorum ex ΜΝ, ΜΞ; adeoque applicato rectangulo summæ propositæ æquali ad differentiam Axis & lateris recti, dicatur latitudo inde orta ψ, quæ proinde data est. Ac manifestum est rectangulum sub ΜΞ & ψ æquale esse quadratis ex ΜΝ, ΜΞ simul. Verum (per 4^{tam} II^{di} *Elem.*) quadratum ex ΝΞ æquale est quadratis ex ΜΝ, ΜΞ simul una cum duplo rectangulo sub ΝΜΞ, hoc est quadratum ex ΝΞ æquale est rectangulo sub ΜΞ & ψ una cum duplo rectangulo sub ΝΜΞ; rectangulum autem sub ΝΜΞ æquale est rectangulo sub ΝΞΜ dempto quadrato ex ΜΞ: quapropter rectangulum sub ΜΞ & utraque ΝΞ & $\frac{1}{2}$ ψ simul, dempto quadrato ex ΜΞ, æquale est dimidio quadrati ex ΝΞ. Sed datur quadratum ex ΝΞ: datum est igitur rectangulum



sub ΜΞ & utrâque ΝΞ & $\frac{1}{2}$ ψ simul, dempto quadrato ex ΜΞ. Adjacet autem rectæ datæ, ipsis nempe $\frac{1}{2}$ ψ & ΝΞ simul sumptis æquali, deficiens quadrato: data est igitur recta ΜΞ, datumque punctum M.

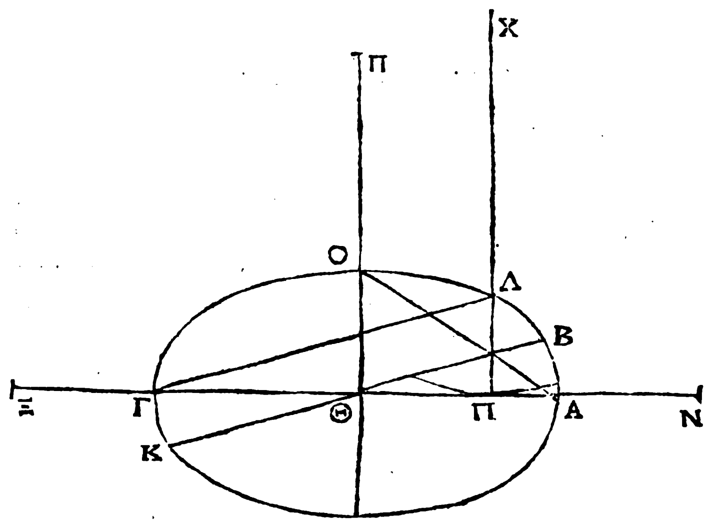
Componetur itaque problema ad hunc modum. Applicetur quarta pars datæ

 summæ

summæ quadratorum ad differentiam Axis & lateris ejus recti; ac latitudini inventæ, sive quartæ parti ipsius ψ, æqualis ponatur recta ΘΕ in Axe, de centro Θ versus Ν; & ad punctum Ε erigatur normalis ΕΧ ipsi ΞΠ æqualis, sive quæ poterit dimidium quadrati ex ΝΞ: dein centro Χ radio ΞΕ describatur arcus circuli, qui, si problema propositum possibile sit, occurret Axi inter Α & Γ, ad punctum Μ; &, erectâ ad Axem normali ΜΑ, habebitur tam magnitudo quam positio diametri quæsitæ ΒΚ.

Determinatur autem problema ex 47^ma^ & 48^va^ VII^mi^. Nam si quadratum Axis majoris Ellipseos non majus fuerit dimidio quadrati summæ laterum figuræ ejusdem Axis, manifestum est (per dictam 47^mam^) summam quadratorum propositam minorem esse non posse quam quadrata laterum figuræ Axis majoris simul sumpta, quo in casu punctum Μ cadet citra verticem Α; nec majorem quam quadrata laterum figuræ Axis minoris simul sumpta: nam hoc posito punctum Μ cadet ultra verticem Γ, ac impossibile erit problema. Si vero quadratum Axis majoris æquale fuerit dimidio quadrati summæ laterum figuræ ejus, ac proponatur summa, summæ quadratorum laterum figuræ Axis æqualis, coincidet punctum Ε cum puncto Α; in cæteris vero casubus longius aberit Ε à centro Θ, & extra sectionem cadet.

Verum si quadratum ex Axe ΑΓ majus fuerit dimidio quadrati è summa laterum figuræ Axis, reperietur (per 48^vam^ VII^mi^) ab utraque Axis parte diameter, cujus quadratum æquale erit dimidio quadrati ex eadem diametro & latere ejus recto simul sumpto; cujus quidem diametri quadratum una cum quadrato lateris sui recti omnium *Minimam* conficiet summam: ac quadrata laterum figuræ diametri huic utrinque propioris minora erunt quadratis laterum figuræ diametri ab eadem remotioris, prout ibidem demonstratur. Quænam autem fuerit minima illa summa, eodem argumento quo in Hyperbola usi sumus, statim patebit. Quoniam enim punctum Μ, in hoc *summæ minimæ* casu, coincidit cum puncto Ε; erit ΧΕ, quæ semper æqualis est ei quæ poterit duplum quadrati ex ΝΘ, rectæ ΞΕ æqualis; adeoque ΘΕ æqualis erit excessui quo potens duplum quadrati ex ΝΘ superat ΝΘ: quare ΘΕ erit ad ΝΘ sicut excessus quo diagonium quadrati superat latus ejus ad ipsum latus, sive ut $\sqrt{2}-1$ ad 1.



Per constructionem autem, rectangulum sub ΘΕ & differentiâ Axis & lateris ejus recti æquale est quartæ parti summæ quadratorum laterum figuræ; adeoque rectangulum sub $\overline{\sqrt{2}-1} \times$ ΝΞ & differentiâ Axis & lateris ejus recti æquale erit dimidio summæ minimæ quadratorum laterum figuræ, quam quærimus. Cum autem differentia Axis & lateris ejus recti sit ad earundem summam sicut ipse Axis ad ΝΞ; erit rectangulum sub ΝΞ & differentia Axis & lateris ejus recti æquale rectangulo sub Axe & summâ Axis & lateris ejus recti; hoc est, quadrato Axis & figuræ ejusdem simul, sive summæ quadratorum ex utroque Axe: *Minima* igitur summa quadratorum è lateribus figuræ erit ad summam quadratorum Axium Ellipseos sicut $\sqrt{8}-2$ ad unitatem, sive ut duplus excessus quo diagonium quadrati superat latus ejusdem ad ipsum latus.

Quapropter, si in Ellipsi proponeretur inquirere diametrum, quæ habeat summam quadratorum laterum figuræ minorem jam ostensâ, impossibile erit problema, ac circulus juxta leges compositionis descriptus non attinget Axem. Si vero major fuerit dictâ *Minimâ*, minor vero quam summa quadratorum laterum figuræ Axis, conveniet circulus cum Axe in duobus punctis Μ, μ intra sectionem; ac proinde ab ab utroque Axis latere habebuntur duæ diametri, hoc est omnino quatuor, quæ habeant propositam summam quadratorum laterum figuræ. Ac si æqualis fuerit summa proposita quadratis ex Axe & è latere ejus recto simul sumptis, ipse Axis ac duæ aliæ diametri, utrinque una, rem præstant. Verumtamen si proponatur summa adhuc major, sed quæ minor sit summâ quadratorum è lateribus figuræ Axis minoris; invenietur ab utroque Axis latere una diameter, quæ problemati satisfaciat, cadente adhuc puncto M intra sectionem. *Maxima* autem quadratorum summa ea est quæ fit è quadratis laterum figuræ Axis minoris; quæque est ad summam quadratorum è lateribus figuræ Axis majoris in ratione Axis ad latus ejus rectum. Hâc si major proponatur, rursus impossibile erit problema, egresso jam puncto M ultra verticem Γ.

Coroll. 1. Summa autem quadratorum duarum quarumvis diametrorum, eandem quadratorum laterum figuræ summam habentium, æqualis est propositæ quadratorum semi-summæ una cum rectangulo sub Axe & Axe cum latere ejus recto simul sumpto; sive una cum quadratis ex utroque Axe simul.

Coroll. 2. Ac proinde diameter illa, quæ eandem habet quadratorum summam quam habet Axis ipse, æqualis erit ei quæ poterit dimidium quadrati ex Axe & latere ejus recto simul sumptis: latus autem rectum ejus poterit dimidium quadrati excessûs quo Axis major superat latus ejus rectum. Idemque verum est etiamsi diameter data non fuerit Axis.

Coroll. 3. Unde manifestum est quatuor illas Ellipseos diametros, quoties quatuor sunt, quæ, ut dictum est, eandem habere possunt summam, semper cadere inter Axem majorem & conjugatas æquales; cum scilicet diametri majores sunt lateribus suis rectis.

Coroll. 4. Quadratum autem diametri ejus quæ omnium minimam habet quadratorum summam, erit ad eam quæ potest semi-summam quadratorum Axium, hoc est ad quadratum ex AO, sicut diagonium quadrati ad ejusdem latus, sive ut $\sqrt{2}$ ad 1: & latus rectum ejusdem diametri ad ipsam diametrum erit ut $\sqrt{2}$ ad $2-\sqrt{2}$.

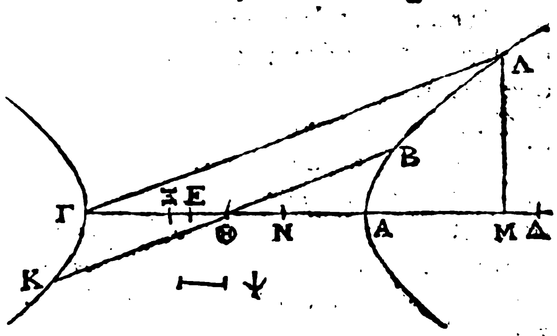
Coroll. 5. Unde in omni Ellipsi, tam diametri quam latera recta, quarum summa quadratorum minima est, eandem semper habent rationem ad AO subtensam quadrantis Ellipseos.

Coroll. 6. Ac manifestum est, ex determinationibus jam dictis, quod, si Axis major majorem habeat rationem ad Axem conjugatam quam habet Unitas ad $\sqrt{\sqrt{2}-1}$, sive quam 1 ad 0,6436; duci possunt quatuor diametri, quæ eandem habeant quadratorum sui & lateris sui recti summam: aliter vero non item.

PROPOSITIO XXXII. PROBL.

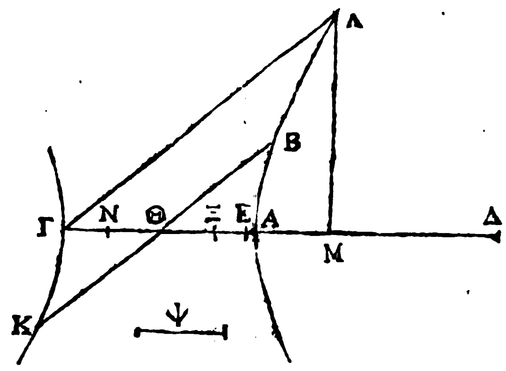
Datis Hyperbolæ Axe & latere recto; invenire diametrum ejus, cujus quadratum à quadrato lateris recti ejus datâ differentiâ differat.

Manentibus Hyperbolæ figuris in præcedentibus descriptis, puta factum: sitque BK diameter quæsita, cujus quadratum differat à quadrato lateris sui recti datâ differentiâ. Per 20^{mam} VII^{mi} erit quadratum Axis sectionis, sive rectangulum sub NΓ, ΓΔ, ad rectangulum sub NΓ, MΞ, hoc est ΔΓ ad MΞ, sicut differentia quadratorum proposita ad differentiam quadratorum ex NM, MΞ. Est autem differentia quadratorum ex NM, MΞ (per 6^{am} II^{di} *El.*) æqualis quadruplo rectanguli sub ΘM, ΘΞ; adeoque si fiat rectangulum sub ΓΔ & aliâ quadam ψ æquale quartæ parti differentiæ quadratorum propositæ, data erit recta ψ: ac, argumento toties usurpato, rectangulum sub MΞ & ψ æquale erit rectangulo sub ΘM, ΘΞ; erit igitur ἀνάλογον ut ΘΞ ad ψ ita MΞ ad ΘM, ac dividendo erit differentia ipsarum ΘΞ & ψ



ad ΘΞ sicut ΘΞ ad ΞM. Datis autem ΘΞ & ψ dabitur quoque MΞ, unde punctum M datum.

Componetur itaque problema, si applicetur quarta pars differentiæ quadratorum datæ ad ΓΔ, sive ad summam Axis & lateris ejus recti; unde latitudo fiet ipsi ψ æqualis. Dein in Axe versus Ξ ponatur ΘE ipsi ψ æqualis, ac fiat ut EΞ ad ΞΘ ita ΘΞ ad ΞM. Invento autem puncto M dabitur quoque diameter BK tam magnitudine quam positione; ut abunde in præcedentibus dictum est.



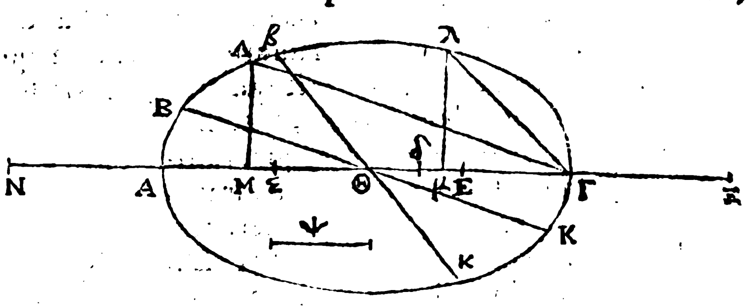
Διορισμὸς autem hujus problematis ex 49^{na} & 50^{ma} VII^{mi} petendus. Nam si Axis major fuerit latere recto ejus, differentia quadratorum Axis laterisque ejus recti minor erit quavis aliâ quadratorum diametri & lateris recti differentiâ: adeoque differentia proposita hac non minor esse potest, uti ex 49^{na} constabit. Si vero Axis minor fuerit latere ejus recto, differentia quadratorum Axis & lateris ejus recti major erit qualibet aliâ differentiâ; ac proinde differentia proposita non major esse potest excessu quo quadratum lateris recti Axis superat ipsius Axis quadratum, prout ex 50^{ma} VII^{mi} patebit.

Porro per easdem demonstratur, in priori casu, differentiam quadratorum *Maximam* non majorem esse duplo excessûs, quo quadratum Axis superat figuram ejus: in altero vero, differentiam *Minimam* non minorem esse duplo excessûs quo figura Axis superat quadratum ejusdem. Coeuntibus etenim punctis E & Ξ, evanescit recta ΞE, & in infinitum abit recta ΞM.

PROPOSITIO XXXIII. PROBL.

Datis Ellipseos Axe & latere recto; invenire diametros ejus, quarum quadrata datâ differentiâ superent quadrata laterum suorum rectorum, ac ab iisdem deficiant.

Manentibus iis quæ in Ellipsi hactenus descripta sunt; erit quadratum ex AΓ sive rectangulum sub NΓ, Γδ ad rectangulum sub NΓ, MΞ (per 20^{mam} VII^{mi}) sicut differentia data quadratorum ex BK & lateris ejus recti ad differentiam quadratorum ex NM, MΞ: adeoque, per toties dicta, erit Γδ ad MΞ sicut differentia proposita ad differentiam quadratorum ex NM, MΞ; hoc est, (per 5^{am} II^{di} *Elem.*) ad quadruplum rectanguli sub ΘΞ, ΘM: proinde si applicetur quarta pars datæ quadratorum differentiæ ad rectam Γδ, & habeatur latitudo, quam dicamus ψ, hoc est, si fiat ut rectangulum sub Γδ & ψ æquale sit quartæ parti datæ quadratorum differentiæ; erit rectangulum sub MΞ & ψ æquale rectangulo sub ΘΞ & MΘ: ἀνάλογον itaque erit ut ψ ad ΘΞ ita ΘM ad MΞ: componendo autem ac dividendo, ΘΞ aucta & minuta rectâ ψ erit ad ΘΞ sicut ΘΞ ad ΞM. Verum dantur ΘΞ & ψ, adeoque & recta ΘM datur; unde, ob datum Θ, punctum M quoque datur.



Componetur itaque problema, si fiat rectangulum sub differentiâ Axis & lateris ejus recti & aliâ quadam ψ æquale quartæ parti datæ differentiæ quadratorum; & ab utroque centri latere ponantur rectæ ΘE, Θε ipsi ψ æquales: deinde fiat ut EΞ ad ΞΘ ita ΘΞ ad ΞM, ut diameter major sit latere suo recto; ac ut εΞ ad ΞΘ ita ΘΞ ad Ξμ, ut latus rectum majus fuerit diametro: & inventis punctis M, μ, utramque diametrum obtinebimus ut prius. Nec opus est ut demonstratione regressivâ res, ex Analysi quantum fieri potest manifesta, stabiliatur.

Ex iis autem quæ in ultima Propositione Libri Septimi traduntur problema hoc limites suos sortitur. Nam ex omnibus diametris Ellipseos quæ majores sunt lateribus suis rectis, Axis majoris quadratum majori spatio superat quadratum lateris sui recti: ex illis vero quæ lateribus suis rectis minores sunt, omnium *Maximam* habet quadratorum illorum differentiam Axis minor; quæ quidem differentia major est excessu quo quadratum Axis majoris superat quadratum lateris sui recti, in ratione lateris recti Axis majoris ad Axem ipsum. Quocirca si differentia data minor fuerit differentiâ quadratorum Axis majoris laterisque ejus recti, quatuor diversæ diametri, ab utroque Axis latere duæ, satisfacient problemati; cadente utroque puncto Μ & μ inter vertices Ellipseos Α, Γ. Quod si major fuerit hâc, minor vero differentiâ quadratorum Axis minoris & lateris ejus recti, duæ tantum diametri rem præstant, ab utroque scilicet Axis minoris latere. Verum si hac quoque major fuerit, problema impossibile erit, cadente utroque puncto Μ, μ extra Axem ΑΓ. *Minima* autem non datur quadratorum differentia: nam in æqualibus diametris conjugatis differentia hæc nulla evadit, quia diametris ipsis æqualia fiunt latera recta.

Quoniam vero ΖΕ est ad ΖΘ sicut ΖΘ ad ΖΜ, erit ΖΘ ad ΘΕ sicut ΖΜ ad ΜΘ: ac pari ratione ΖΘ erit ad Θε, hoc est ad ΘΕ, sicut Ζμ ad μΘ; adeoque erit ΖΜ ad ΜΘ sicut Ζμ ad μΘ. Quocirca in omni casu recta ΖΜ Harmonice dividitur in punctis Θ, μ; ac proinde, data qualibet diametro, facile erit correspondentem invenire, quæ eandem habeat differentiam quadratorum sui laterisque sui recti.

Hactenus, eodem ubique observato ordine quo traduntur διορισμοὶ, operam dedimus resolutioni problematum illorum, quorum limites immediate pendent à propositionibus διοριστικοῖς libri Septimi: nec diversam fuisse libri Octavi deperditi materiam omnino mihi persuasum habeo. Speramus autem, si ita contigerit ut ipsas Apollonii *Analyses & Compositiones minus assecuti simus, nos illud saltem præstitisse, ut quæcunque in earum locum substituimus æquo Lectori haud inconcinna videantur. Etiamsi vero innumera fere sint Problemata Conica determinata, quorum Analyses ex his Elementis non multo studio peti possunt; in præsentia tamen, id solum nobis propositum fuit, ut* Apollonii *vestigia, quoad ejus fieri posset, premeremus. Quod si forte fortuna integrum Auctoris opus posthac lucem conspexerit, nobis leve damnum erit, ea conditione oleum & operam perdidisse.*

F I N I S.

ΣΕΡΗΝΟΥ
*ΑΝΤΙΝΣΕΩΣ ΦΙΛΟΣΟΦΟΥ
ΠΕΡΙ
ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΤΟΜΗΣ.

SERENI
ANTISSENSIS PHILOSOPHI
DE
SECTIONE CYLINDRI
LIBER.

ΠΟΛΛΟΥΣ ὁρῶν, ὦ φίλε Κύρε, τῶν περὶ γεωμετρίαν ἀναστρεφομένων, οἰομένους τὴν τοῦ κυλίνδρου πλαγίαν τομὴν ἑτέραν εἶναι τῆς τοῦ κώνου τομῆς τῆς καλουμένης ἐλλείψεως· ἐδικαίωσα μὴ χρῆναι περιορᾷν ἀγνοοῦντας αὐτούς τε καὶ τοὺς ὑπ' αὐτῶν οὕτω φρονεῖν ἀναπεπεισμένους· καί τοι δόξειεν ἂν παντὶ ἄλογον εἶναι, γεωμέτρας γε ὄντας περὶ γεωμετρικοῦ προβλήματος ἄνευ ἀποδείξεως ἀποφαίνεσθαί τι καὶ πιθανολογεῖν ἀτέχνως, ἀλλότριον γεωμετρίας πρᾶγμα ποιοῦντας. ὁμοίως δ' οὖν ἐπείπερ οὕτως ὑπειλήφασι, ἡμεῖς δὲ οὐ συμφερόμεθα, φέρε γεωμετρικῶς ἀποδείξωμεν, ὅτι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κατ' εἶδος ἀνάγκη γίνεσθαι ἐν ἀμφοτέροις τοῖς σχήμασι τομήν, τῷ κώνῳ λέγω καὶ τῷ κυλίνδρῳ, τοίως δὲ μέντοι, ἀλλ' οὐχ ἁπλῶς τεμνομένοις. ὥσπερ δὲ οἱ τὰ κωνικὰ πραγματευσάμενοι τῶν παλαιῶν οὐκ ἠρκέσθησαν τῇ κοινῇ ἐννοίᾳ τοῦ κώνου, ὅτι τριγώνου περιενεχθέντος ὀρθογωνίου συνίσταιτο, περιωσότερον δὲ καὶ

CUM viderem, Amice *Cyre*, plurimos eorum qui in Geometria versantur, in ea esse opinione, transversam Cylindri sectionem plane diversam esse ab ista Coni sectione quæ Ellipsis vocatur; non committendum putavi, ut ab errore non liberarem tum eos ipsos, tum & illos quibus persuaserunt ita se rem habere: quòd absurdum omnino videatur, Geometras de problemate Geometrico absque demonstratione quicquam affirmare, argumentis à probabili inscite adhibitis; quod à Geometria quam maxime alienum est. Itaque quoniam hi ita sentiunt, nos vero illis non assentimur, libeat Geometrice demonstrare unam eandemque specie sectionem necessario fieri in utraque figura, in Cono inquam & Cylindro; si modo ratione quadam & non simpliciter secentur. Quemadmodum autem Veteres qui Conica tractarunt, non contenti communi notitiâ Coni, nempe quod circumductu trianguli rectanguli describatur; uberius &

* Pro Αντισσέως juxta scribendi modum sequioris ævi *Græcis* familiarem.

universalius rem contemplati sunt, non tantum rectos sed etiam scalenos Conos statuentes: ita oportebit & nos, quoniam Cylindri sectionem tractandam proposuerimus, non de recto solum agere, sed insuper ad Cylindri scaleni sectionem disquisitiones nostras ulterius aliquanto extendere. Quanquam autem non ignoro, neminem fore qui non facile admittat omnem Cylindrum non rectum esse, communi id suadente ratione, tamen contemplationis gratiâ melius esse judicavi definitione magis universali utrumque complecti; quoniam recti Cylindri sectionem eandem fore cum Ellipsi in solo Cono recto sectâ probari continget: ex hypothesi vero universaliori Ellipsi cuilibet sectionem illam æquiparari deprehendetur; id quod in hoc libro demonstrandum suscipimus. Præmittendæ autem nobis sunt istæ ad rem propositam spectantes definitiones.

DEFINITIONES.

1. SI igitur duorum circulorum æqualium & æquidistantium diametri semper inter sese parallelæ, & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur; & unà circumferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte conjungens, quousque rursus in eum locum restituatur à quo moveri coepit: superficies, quæ à circumlata recta describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, rectâ ipsam describente in infinitum productâ.

2. Cylindrus autem figura, quæ circulis æquidistantibus & cylindrica superficie inter ipsos interjectâ continetur.

3. Cylindri vero bases, circuli ipsi.

4. Axis autem, recta linea quæ per circulorum centra ducitur.

5. Latus vero cylindri, linea quæ, cum recta sit & in superficie ipsius cylindri bases utrasque contingit; quamque circumlatam cylindri superficiem describere antea diximus.

6. E Cylindris autem recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

7. Scaleni vero, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

καθολικώτερον ἐφιλοτεχνήσαντο, μὴ μόνον ὀρθοὺς ἀλλὰ καὶ σκαληνοὺς ὑποστησάμενοι κώνους· οὕτω χρὴ καὶ ἡμᾶς, ἐπειδὴ πρόκειται περὶ κυλίνδρου τομῆς ἐπισκέψασθαι, μὴ τὸν ὀρθὸν μόνον ἀφορίσαντας ἐπ' αὐτοῦ ποιεῖσθαι τὴν σκέψιν, ἀλλὰ καὶ τὸν σκαληνὸν περιλαβόντας ἐπὶ πλέον ἐκτεῖναι τὴν θεωρίαν. ὅτι μὲν γὰρ οὐκ ἂν προέσοιτό τις ἑτοίμως μὴ οὐχὶ πάντα κύλινδρον ὀρθὸν εἶναι, τῆς κοινῆς ἐννοίας τοῦτο συνεφελκυούσης, οὐκ ἀγνοῶ δήπουθεν· οὐ μὴν ἀλλ' ἕνεκά γε τῆς θεωρίας ἄμεινον ᾠήθην καθολικωτέρῳ ὁρισμῷ περιλαβεῖν, ἐπεὶ καὶ τὴν τομήν, ὀρθοῦ μὲν ὄντος αὐτοῦ, μόνῃ τῇ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐλλείψει τὴν αὐτὴν εἶναι συμβήσεται· καθολικωτέρου δὲ ὑποτεθέντος ὅλῃ τῇ ἐλλείψει καὶ αὐτὴν ἐξισάζειν· ὃ δὴ καὶ δεῖξαι ὁ παρὼν λόγος ἐπαγγέλλεται. ἰστέον οὖν ἡμῖν περὶ τὸ προκείμενον ὁρισαμένοις τάδε.

ΟΡΟΙ.

α΄. ΕΑΝ μὲν οὖν τῶν δύο κύκλων ἴσων τε καὶ παραλλήλων αἱ διάμετροι παράλληλοι ὦσι διαπαντός, αὗται τε περιενεχθεῖσαι ἐν τοῖς τῶν κύκλων ἐπιπέδοις περὶ μένον τὸ κέντρον, καὶ συμπεριενεγκοῦσαι τὴν τὰ πέρατα αὐτῶν κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν, εἰς ταὐτὸ πάλιν ἀποκαταστῶσιν· ἡ γραφεῖσα ὑπὸ τῆς περιενεχθείσης εὐθείας ἐπιφάνεια, κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια καλείσθω· ἥτις καὶ ἐπ' ἄπειρον αὔξεσθαι δύναται, τῆς γραφούσης αὐτὴν εὐθείας ἐκβαλλομένης.

β΄. Κύλινδρος δὲ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν παραλλήλων κύκλων καὶ τῆς μεταξὺ αὐτῶν ἀπειλημμένης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

γ΄. Βάσεις δὲ τοῦ κυλίνδρου οἱ κύκλοι.

δ΄. Ἄξων δὲ ἡ διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν ἀγομένη εὐθεῖα.

ε΄. Πλευρὰ δὲ τοῦ κυλίνδρου γραμμή τις, ἥτις εὐθεῖα οὖσα καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας οὖσα τοῦ κυλίνδρου τῶν βάσεων ἀμφοτέρων ἅπτεται· ἣν καί φαμεν περιενεχθεῖσαν γράφειν τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν.

ς΄. Τῶν δὲ κυλίνδρων, ὀρθοὶ μὲν οἱ τὸν ἄξονα πρὸς ὀρθὰς ἔχοντες ταῖς βάσεσι.

ζ΄. Σκαληνοὶ δὲ οἱ μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντες ταῖς βάσεσι τὸν ἄξονα.

Ὁριστέον

Ὁριστέον δὲ κατ᾽ Ἀπολλώνιον καὶ τάδε.

η'. Πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ οὔσης, διάμετρος καλείσθω εὐθεῖά τις, ἥτις ἠγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείας εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ.

θ'. Κορυφὴ δὲ τῆς καμπύλης γραμμῆς τὸ πέρας τῆς εὐθείας τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ.

ι'. Τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

ια'. Συζυγεῖς δὲ διάμετροι καλείσθωσαν, αἵτινες ἀπὸ τῆς γραμμῆς τεταγμένως ἀχθεῖσαι ἐπὶ τὰς συζυγεῖς διαμέτρους, ὁμοίως αὐτὰς δίχα τέμνουσι.

ιβ'. Τούτων δὲ γραμμῶν ὑφισταμένων καὶ ἐν ταῖς πλαγίαις τομαῖς τοῦ κυλίνδρου, ἡ διχοτομία τῆς διαμέτρου κέντρον τομῆς καλείσθω.

ιγ'. Η δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν γραμμὴν προσπίπτουσα, ἐκ τοῦ κέντρου τῆς γραμμῆς.

ιδ'. Η δὲ διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθεῖσα καὶ περατουμένη ὑπὸ τῆς γραμμῆς, δευτέρα διάμετρος καλείσθω· δειχθήσεται γὰρ πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν διάμετρον δίχα τέμνουσα.

ιε'. Ετι κἀκεῖνο προσδιορείσθω· ὅτι ὅμοιαι ἐλλείψεις εἰσίν, ὧν ἑκατέρας αἱ συζυγεῖς διάμετροι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον, καὶ πρὸς ἴσας γωνίας τέμνουσιν ἀλλήλας.

Sed & hæc juxta Apollonium *definienda.*

8. Omnis lineæ curvæ, in uno plano existentis, diameter vocetur recta linea; quæ quidem ducta à linea curva omnes quæ in ipsa ducuntur rectas rectæ cuipiam parallelas bifariam dividit.

9. Vertex autem curvæ, terminus illius rectæ qui est ad curvam.

10. Ordinatim vero ad diametrum applicari unamquamque rectarum parallelarum.

11. Conjugatæ diametri dicantur, quæ quidem, à curva ordinatim ductæ ad conjugatas diametros, ipsas similiter bifariam dividunt.

12. His igitur suppositis lineis in transversis sectionibus cylindri, punctum quod diametrum bifariam dividit centrum sectionis vocetur.

13. Quæ vero à centro ad lineam curvam perducitur, *dicatur* ea quæ ex centro.

14. Quæ vero per centrum sectionis transit, parallela ei quæ ordinatim applicata est, & terminatur ab ipsa linea curva, secunda diameter dicatur: demonstrabitur enim rectas omnes in sectione ductas, quæ priori diametro parallelæ sunt, bifariam secare.

15. Illud etiam definiendum est: similes ellipses esse, quarum conjugatæ diametri, sese ad angulos æquales secantes, eandem habent rationem inter se.

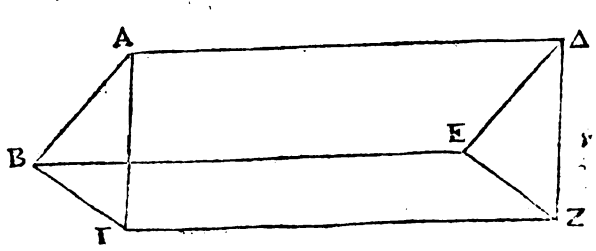
ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Εὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, καὶ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· αἱ τὰ πέρατα αὐτῶν ἐπιζευγνύουσαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Prop. I. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ conveniant, ac duabus rectis lineis etiam convenientibus parallelæ sint, & sint utræque utrisque æquales: rectæ quæ terminos earum conjungunt & ipsæ æquales & parallelæ erunt.

ΕΣΤΩΣΑΝ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΑΒ, ΒΓ, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἴση ἔστω ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ· λέγω ὅτι αἱ ΑΓ, ΔΖ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.



Επεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. ἐπεὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ ΑΔ ἴση τε καὶ παράλληλος

SINT duæ rectæ lineæ concurrentes AB, BΓ; quæ duabus rectis lineis etiam concurrentibus, ut ΔE, BZ, parallelæ sint; sitque AB æqualis ΔE, & BΓ ipsi EZ; & jungantur AΓ, ΔZ: dico rectas AΓ, ΔZ & æquales esse & parallelas.

Junctis enim AΔ, BE, ΓZ; quoniam AB ipsi ΔE est æqualis & parallela; erit [per 33. 1.] BE & æqualis & parallela

rallela ipſi Α Δ. ac pari ratione Γ Ζ æqualis & parallela erit ipſi Β Ε: quare Α Δ, Γ Ζ [per 30. 1.] æquales inter ſeſe & parallelæ erunt; ac propterea ipſæ quoque Α Γ, Δ Ζ. quod erat oſtendum.

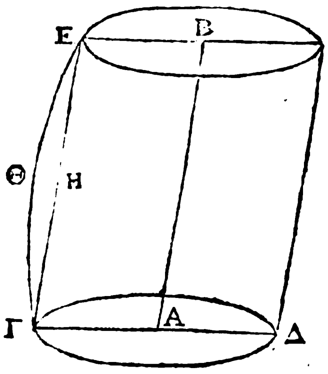
ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ Γ Ζ τῇ Β Ε ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· αἱ ἄρα Α Δ, Γ Ζ ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι· καὶ αἱ Α Γ, Δ Ζ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

Prop. II. *Theor.*

Si cylindrus plano ſecetur per axem; ſectio parallelogrammum erit.

SIT cylindrus, cujus baſes circuli circa centra Α, Β, axis autem Α Β recta linea; & ducatur per Α Β planum ſecans cylindrum, facienſque ſectiones, in circulis quidem rectas lineas Γ Δ, Ε Ζ, quæ diametri ſunt; in ſuperficie autem cylindri ipſas Ε Η Γ, Ζ Δ: dico utramque linearum Ε Η Γ, Δ Ζ rectam eſſe.

Si enim fieri poteſt, non ſint rectæ; & ducatur recta Ε Θ Γ. quoniam igitur linea Ε Η Γ & recta Ε Θ Γ in plano Ε Δ conveniunt ad puncta Ε, Γ; atque eſt Ε Η Γ in ſuperficie cylindri: ipſa Ε Θ Γ in cylindri ſuperficie non erit. & quoniam circuli Α, Β æquales ſunt & æquidiſtantes, ſecanturque à plano Ε Δ; communes ipſorum ſectiones [per 16. 11.] parallelæ erunt, atque etiam æquales, cum diametri ſint æqualium circulorum. itaque ſi, manentibus Α, Β punctis, diametros Α Γ, Β Ε intelligamus circumferri, & una cum ipſis rectam lineam Ε Θ Γ circa circulos Α, Β, quouſque ruſus in eundem locum reſtituantur, à quo moveri cœperunt: recta Ε Θ Γ cylindri ſuperficiem deſcribet, & erit Θ punctum in ſuperficie ipſa. atqui erat extra ſuperficiem, quod fieri non poteſt: recta igitur linea eſt Ε Η Γ; ſimiliter & recta eſt ipſa Ζ Δ. & conjungunt æquales & parallelas rectas Ε Ζ, Γ Δ: parallelogrammum igitur [per 33. 1.] erit planum Ε Δ. quod erat demonſtrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ β′.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος· ἡ τομὴ παραλληλόγραμμον ἔσται.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ τὰ Α, Β κέντρα κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ Α Β εὐθεῖα, καὶ διὰ τῆς Α Β ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον τέμνον τὸν κύλινδρον, ποιήσει δή, ἐν μὲν τοῖς κύκλοις εὐθείας τὰς Γ Δ, Ε Ζ διαμέτρους οὔσας, ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὰς Ε Η Γ, Ζ Δ γραμμάς· λέγω ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν Ε Η Γ, Δ Ζ γραμμῶν εὐθεῖά ἐστιν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ ἔστωσαν εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ε Θ Γ εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν ἡ Ε Η Γ γραμμὴ καὶ ἡ Ε Θ Γ εὐθεῖα ἐν τῷ Ε Δ ἐπιπέδῳ εἰσὶ, συνάπτουσι κατὰ τὰ Ε, Γ σημεῖα, καί ἐστιν ἡ Ε Η Γ γραμμὴ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· ἡ Ε Θ Γ εὐθεῖα οὐκ ἔσται ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. ἐπεὶ οὖν οἱ Α, Β κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοί εἰσι, καὶ τέμνονται ὑπὸ τοῦ Ε Δ ἐπιπέδου· αἱ ἄρα κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. εἰσὶ καὶ ἴσαι, διάμετροι γάρ εἰσι ἴσων κύκλων· ἐὰν ἄρα, μενόντων τῶν Α, Β σημείων, τὰς Α Γ, Β Ε διαμέτρους νοήσωμεν περιενεγκούσας τὴν Ε Θ Γ εὐθεῖαν περὶ τοὺς Α, Β κύκλους, καὶ εἰς ταυτὸ πάλιν ἀποκαθισταμένας, ἡ Ε Θ Γ εὐθεῖα γράψει τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, καὶ ἔσται τὸ Θ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. ἦν δὲ ἐκτὸς, ὅπερ ἀδύνατον· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ Ε Η Γ, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ Ζ Δ. καὶ ἐπιζευγνύουσιν ἴσας τε καὶ παραλλήλους τὰς Ε Ζ, Γ Δ· τὸ Ε Δ ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. III. *Theor.*

Si cylindrus plano ſecetur æquidiſtante parallelogrammo quod fit per axem: ſectio parallelogrammum erit, angulos habens æquales angulis parallelogrammi per axem

SIT cylindrus, cujus baſes circuli circa centra Α, Β; & axis recta linea Α Β, parallelogrammum autem per axem Γ Δ; & ſecetur cylindrus alio plano Ε Ζ Η Θ parallelo ipſi Γ Δ parallelogrammo, quod faciat ſectiones, in baſibus quidem rectas lineas Ε Ζ, Η Θ, in ſuperficie autem cylindri ipſas Ε Η, Ζ Θ: dico figuram Ε Η Ζ Θ parallelogrammum eſſe æquiangulum ipſi Γ Δ.

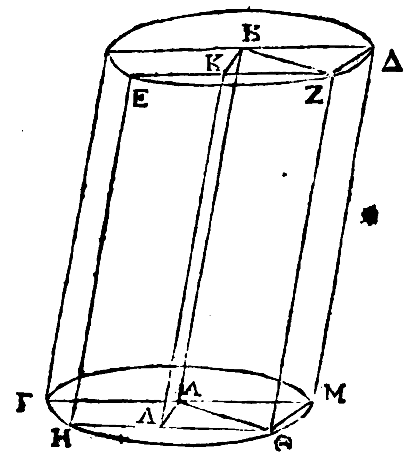
ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ′.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμῳ· ἡ τομὴ παραλληλόγραμμον ἔσται ἴσας γωνίας ἔχον τῷ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμῳ.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ τὰ Α, Β κέντρα κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ Α Β εὐθεῖα, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ Γ Δ, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ, παραλλήλῳ ὄντι τῷ Γ Δ παραλληλογράμμῳ, καὶ ποιοῦντι τομὰς ἐν μὲν ταῖς βάσεσι τὰς Ε Ζ, Η Θ εὐθείας, ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὰς Ε Η, Ζ Θ γραμμάς· λέγω ὅτι τὸ Ε Η Ζ Θ σχῆμα παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἰσογώνιον τῷ Γ Δ.

Ηχθω

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β κέντρου ἐπὶ τὴν ΕΖ εὐθεῖαν κάθετος ἡ ΒΚ, καὶ διὰ τῶν ΚΒ, ΒΑ διεκβεβλήσθω ἐπίπεδον, καὶ ἔστωσαν κοιναὶ τομαὶ αἱ ΑΛ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΛΘ. ἐπεὶ οὖν παράλληλος ὁ μὲν Α κύκλος τῷ Β, τὸ δὲ ΕΘ ἐπίπεδον τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ, καὶ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ΑΒΚΛ ἐπιπέδου· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΛ τῇ ΒΚ, ἡ δὲ ΚΛ τῇ ΒΑ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΑ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΒΚ τῇ ΑΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΒΚ τῇ ΑΛ παράλληλός ἐστιν, ἡ δὲ ΚΖ τῇ ΛΘ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΚΖ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΛΘ ἴση. καὶ ἔστιν ἡ ΒΚ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΖ· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΛΘ. καί εἰσιν ἴσαι· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ΕΖ, ΗΘ, ἀλλὰ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΖ τῇ ΛΘ παράλληλός ἐστι· τὸ ἄρα διὰ τῆς ΒΖ καὶ τοῦ ἄξονος ἀγόμενον ἐπίπεδον ἥξει καὶ διὰ τῆς ΛΘ, καὶ τομὴν ποιήσει παραλληλόγραμμον, καὶ πλευρὰ αὐτοῦ ἔσται ἡ τὰ Ζ, Θ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας οὖσα τοῦ κυλίνδρου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΘ πλευρὰ τοῦ ΕΖΗΘ σχήματος ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· κοινὴ ἄρα πλευρά ἐστι τοῦ τε διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου καὶ τοῦ ΕΗΖΘ σχήματος. εὐθεῖα δὲ ἐδείχθη ἡ πλευρὰ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου· ἡ ΖΘ ἄρα ἐστὶν εὐθεῖα, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΕΗ. καὶ ἐπιζευγνύουσιν ἴσας τε καὶ παραλλήλους τὰς ΕΖ, ΗΘ· τὸ ΕΘ ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστι.



Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον τῷ ΓΔ. ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ ΔΒ, ΒΖ δυσὶ ταῖς ΜΑ, ΛΘ παράλληλοί εἰσι, καί εἰσιν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἴσαι· καὶ αἱ ΖΔ, ΜΘ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα· καὶ αἱ ΖΘ, ΔΜ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΑΜ παράλληλος· ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΘΖ γωνία τοῦ ΕΘ παραλληλογράμμου τῇ ὑπὸ ΑΜΔ γωνίᾳ τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΕΘ τῷ ΓΔ.

Ducatur à centro B ad EZ perpendicularis BK; perque rectas KB, BA ducto plano, communes sectiones sint AΛ, KΛ; & jungantur BZ, ΛΘ. quoniam igitur circulus A circulo B æquidistat, & EΘ planum plano ΓΔ, secaturque ab ipso ABKΛ plano: recta AΛ [per 16. 11.] parallela erit rectæ BK, & KΛ ipsi BA; quare KA parallelogrammum est: ideoque recta KΛ æqualis est rectæ BA, & BK ipsi AΛ. & quoniam BK quidem ipsi AΛ parallela est, KZ vero ipsi ΛΘ; erit BKZ angulus [per 10. 11.] æqualis angulo AΛΘ. atque est BK ad KZ perpendicularis: perpendicularis est igitur AΛ ad ipsam ΛΘ. sunt autem æquales: ergo æquales sunt ipsæ EZ, HΘ, & parallelæ. præterea quoniam BZ parallela est ipsi ΛΘ; planum per BZ atque axem ductum transibit etiam per ΛΘ; sectionemque faciet parallelogrammum, cujus latus recta linea, quæ puncta Z, Θ conjungit, & in superficie ipsius cylindri existit. est autem & ZΘ latus figuræ EZHΘ in superficie cylindri: commune igitur latus est & parallelogrammi per axem & figuræ EHZΘ. sed [per 2. huj.] demonstratum est latus parallelogrammi per axem esse rectam lineam: quare recta linea est ZΘ, similiter & recta erit ipsa EH. conjungunt autem æquales & parallelas rectas EZ, HΘ: ergo [per 33. 1.] planum EΘ parallelogrammum erit.

Dico insuper & æquiangulum esse parallelogrammo ΓΔ. quoniam enim duæ rectæ ΔB, BZ duabus rectis MA, ΛΘ parallelæ sunt, suntque quatuor rectæ æquales; & ipsæ ZΔ, MΘ inter se æquales erunt & parallelæ, per primum theorema: ergo & æquales & parallelæ sunt ipsæ ZΘ, ΔM. est autem & ΛΘ ipsi AM parallela: angulus igitur ΛΘZ parallelogrammi EΘ æqualis est angulo AMΔ parallelogrammi ΓΔ: quare parallelogrammum EΘ parallelogrammo ΓΔ æquiangulum erit.

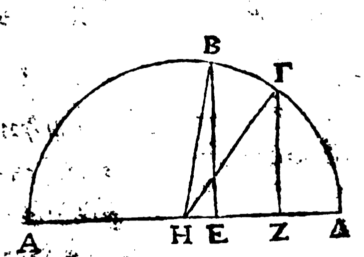
ΠΡΟΤΑΣΙΣ δʹ.

Ἐὰν καμπύλην γραμμὴν ὑποτείνῃ εὐθεῖα, αἱ δὲ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν κάθετοι ἴσον δύνωνται τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης· ἡ γραμμὴ κύκλου περιφέρεια ἔσται.

Prop. IV. Theor.

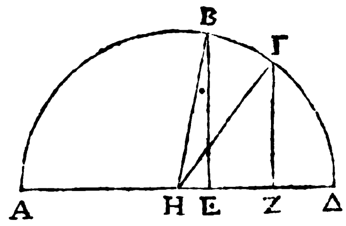
Si curvæ lineæ recta subtendatur; & quæ à linea ad subtensam perpendiculares ducuntur, possint spatium æquale ei, quod ipsius subtensæ partibus continetur: dicta linea circuli circumferentia erit.

ἜΣΤΩ καμπύλη γραμμὴ ἡ ΑΒΓΔ, ὑποτείνουσα δὲ αὐτὴν ἡ ΑΔ εὐθεῖα, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν ἐπὶ τὴν ΑΔ αἱ ΒΕ, ΓΖ, καὶ ὑποκείσθω τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΖΔ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΔ κύκλου περιφέρειά ἐστι.



SIT curva linea ABΓΔ, & quæ ei subtenditur recta AΔ; ducantur autem BE, ΓZ perpendiculares ad ipsam AΔ, ponaturque quadratum ex BE æquale rectangulo AE, EΔ, & quadratum ex ΓZ æquale ipsi AZΔ: dico lineam ABΓΔ circuli circumferentiam esse.

Secetur enim Α Δ bifariam in puncto Η, & jungantur ΗΒ, ΗΓ. quoniam igitur quadratum ex Η Δ [per 5.2.] æquale est quadrato ex Η Ε & rectangulo Α Ε, Ε Δ, sive quadrato ex Β Ε; quadratum autem ex Β Η æquale est quadratis ex Η Ε, Ε Β: erit recta Β Η ipsi Η Δ æqualis. & similiter demonstratur Γ Η æqualis ipsi Η Δ, cæteræque: semicirculus igitur est linea Α Β Γ Δ.



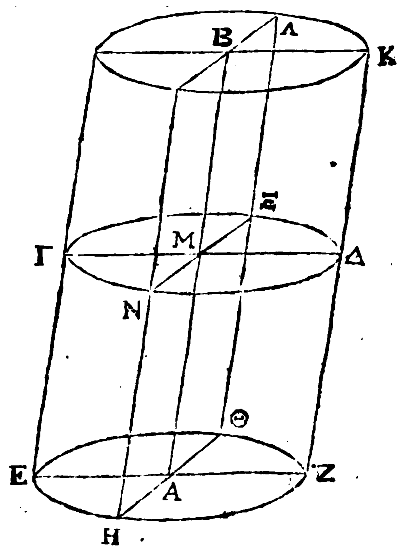
Τετμήσθω δίχα ἡ Α Δ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Η Β, Η Γ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς Η Δ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς Η Ε καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α Ε, Ε Δ, ὅ ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς Β Ε, ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Β Η ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν Η Ε, Ε Β· ἴση ἄρα ἡ Β Η τῇ Η Δ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ Γ Η τῇ Η Δ ἴση δείκνυται, καὶ αἱ ἄλλαι· ἡμικύκλιον ἄρα τὸ Α Β Γ Δ.

Prop. V. *Theor.*

Si cylindrus plano basibus æquidistante secetur; sectio circulus erit centrum habens in axe.

Sit cylindrus, cujus bases quidem circuli Α, Β, axis autem Α Β recta; & secetur plano basibus æquidistante, quod faciat sectionem in superficie cylindri lineam Γ Ξ Δ Ν: dico ipsam Γ Ξ Δ Ν circuli circumferentiam esse.

Describantur in circulo Α diametri Ε Ζ, Η Θ; & per utramque ipsarum & axem ducantur plana cylindrum secantia, quæ quidem facient sectiones parallelogramma; & sit parallelogrammi Ε Κ & plani Γ Ξ Δ Ν communis sectio Γ Δ, parallelogrammi autem Η Λ & ejusdem plani communis sectio Ν Ξ. quoniam igitur planum Γ Ξ Δ Ν æquidistat circulo Α, & secatur à plano Ε Κ, recta Γ Δ ipsi Ε Ζ est parallela; & eadem ratione recta Ν Ξ parallela est ipsi Η Θ. itaque quoniam Β Α utrique Γ Ε, Δ Ζ parallela est, & est Ε Α æqualis ipsi Α Ζ: erit Γ Μ ipsi Μ Δ æqualis. similiter quoque cum sit Η Α æqualis ipsi Α Θ, Μ Ν æqualis erit ipsi Μ Ξ. sunt autem Α Ε, Α Η æquales; ergo & Μ Γ, Μ Ν æquales erunt: quare omnes Μ Γ, Μ Δ, Μ Ν, Μ Ξ inter se æquales. & simili ratione aliæ æquales ostendentur, quæcunque à puncto Μ ad lineam Γ Ξ Δ Ν pertingunt: circulus igitur est sectio Γ Ξ Δ Ν. quod autem centrum habeat in recta Α Β manifesto patet: nam cum punctum Μ sit in tribus planis; & in ipsa Α Β communi planorum sectione necessario erit, hoc est in ipso axe.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ταῖς βάσεσιν· ἡ τομὴ κύκλος ἔσται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ Α Β εὐθεῖα, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ ταῖς βάσεσι, ποιοῦντι ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὴν Γ Ξ Δ Ν γραμμήν· λέγω ὅτι ἡ Γ Ξ Δ Ν γραμμὴ κύκλου ἐστὶ περιφέρεια.

Ἤχθωσαν ἐν τῷ Α κύκλῳ διάμετροι αἱ Ε Ζ, Η Θ, καὶ δι᾽ ἑκατέρας τῶν Ε Ζ, Η Θ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδα τέμνοντα τὸν κύλινδρον· ποιήσει δὴ παραλληλόγραμμα τὰς τομάς. ἔστω τοῦ μὲν Ε Κ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ Γ Ξ Δ Ν ἐπιπέδου κοινὴ τομὴ ἡ Γ Δ, τοῦ δὲ Η Λ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ Γ Ξ Δ Ν ἐπιπέδου κοινὴ τομὴ ἡ Ν Ξ. ἐπεὶ οὖν τὸ Γ Ξ Δ Ν ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ Α κύκλῳ, καὶ τέμνεται ὑπὸ τοῦ Ε Κ ἐπιπέδου· ἡ Γ Δ ἄρα εὐθεῖα τῇ Ε Ζ παράλληλός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ Ν Ξ τῇ Η Θ παράλληλός ἐστι. ἐπεὶ οὖν ἡ Β Α ἑκατέρᾳ τῶν Γ Ε, Δ Ζ παράλληλός ἐστι, καὶ ἴση ἡ Ε Α τῇ Α Ζ· ἴση ἄρα καὶ ἡ Γ Μ τῇ Μ Δ. ὁμοίως ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Η Α τῇ Α Θ, ἴση ἄρα καὶ ἡ Μ Ν τῇ Μ Ξ. ἐπεὶ δὲ αἱ Α Ε, Α Η ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ Μ Γ, Μ Ν ἄρα ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· πᾶσαι ἄρα αἱ Μ Γ, Μ Δ, Μ Ν, Μ Ξ ἴσαι εἰσίν. ὁμοίως δὲ, κἂν ἄλλαι διαχθῶσι, πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν Γ Ξ Δ Ν γραμμὴν προσπίπτουσαι ἴσαι εὑρεθήσονται· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Ξ Δ Ν τομή. ὅτι δὲ καὶ τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς Α Β εὐθείας ἔχει, δῆλον· τὸ γὰρ Μ, ἐν τοῖς τρισὶν ἐπιπέδοις ὄν, ἐπὶ τῆς Α Β κοινῆς τομῆς τῶν παραλληλογράμμων ἔσται, τουτέστιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Prop. VI. *Theor.*

Si cylindrus scalenus per axem secetur plano ad rectos angulos ipsi basi; secetur autem & alio plano recto ad parallelogrammum per axem, quod faciat communem sectionem in pa-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς΄.

Ἐὰν κύλινδρος σκαληνὸς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ τε πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον, καὶ ποιῇ τὴν κοινὴν

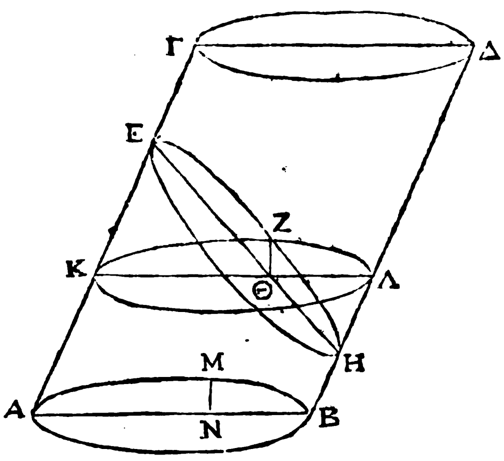
τομὴν

τομὴν ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ εὐθεῖαν, ἴσας δὲ ποιοῦσαν γωνίας ταῖς τοῦ παραλληλογράμμου, μὴ παράλληλον δὲ οὖσαν ταῖς βάσεσι τοῦ παραλληλογράμμου· ἡ τομὴ κύκλος ἔσται. καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη ἀγωγὴ τοῦ ἐπιπέδου ὑπεναντία.

rallelogrammo rectam lineam, continentem angulos æquales angulis parallelogrammi, non autem ipsius basibus parallelam: sectio circulus erit: vocetur autem talis sectio *Subcontraria*.

ΕΣΤΩ σκαληνὸς κύλινδρος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον ἔστω τὸ ΑΔ, πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει, τετμήσθω δὲ ὁ κύλινδρος καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ΕΖΗ, ὀρθῷ ὄντι αὐτῷ πρὸς τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον, καὶ ποιοῦντι ἐν αὐτῷ κοινὴν τομὴν τὴν ΕΗ εὐθεῖαν, μὴ παράλληλον μὲν ταῖς ΑΒ, ΓΔ, ἴσας δὲ γωνίας ποιοῦσαν τὴν μὲν ὑπὸ ΗΕΑ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ, τὴν δὲ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖΗ τομὴ κύκλος ἐστίν.

SIT cylindrus scalenus, cujus parallelogrammum per axem ΑΔ, ad rectos angulos existens ipsi basi; secetur autem cylindrus & alio plano ΕΖΗ ad parallelogrammum ΑΔ recto, quod in ipso communem sectionem faciat rectam lineam ΕΗ basibus ΑΒ, ΓΔ, non quidem parallelam, sed quæ contineat angulum ΗΕΑ æqualem angulo ΕΑΒ, angulum vero ΕΗΒ æqualem ipsi ΑΒΗ: dico sectionem ΕΖΗ circulum esse.



Εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΕΗ εὐθείας τὸ Θ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΕΗ ἤχθω εὐθεῖα ἡ ΘΖ, ἐν τῷ ΕΖΗ ἐπιπέδῳ οὖσα· ἡ ΖΘ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ ΑΔ ἐπίπεδον. ἤχθω διὰ τοῦ Θ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΚΘΛ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΜΝ, καὶ διὰ τῶν ΖΘ, ΚΛ ἤχθω ἐπίπεδον ποιοῦν τὴν ΚΖΛ τομήν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΝ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΑΒ κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων, ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ οὖσα· κάθετος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ ἐπὶ τὸ ΑΔ ἐπίπεδον· παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΖΘ, ΜΝ. παράλληλοι δὲ καὶ αἱ ΚΛ, ΑΒ· καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπίπεδα· ἡ ΚΖΛ ἄρα τομὴ παράλληλός ἐστι τῇ βάσει· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΖΛ τομή. διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἡ ΚΛ, καὶ τῇ ΚΛ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΘ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΖ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ ἴσον ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ μὲν ΕΘ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΘΛ, διὰ τὸ τὰς πρὸς τῆς ΕΚ, ΛΗ βάσεσι γωνίας ἴσας εἶναι· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ ἴσον ἐστί, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ΖΘ ἐπὶ τὴν ΕΗ. ὁμοίως δὲ, κἂν ἄλλην ἀγάγῃς παράλληλον τῇ ΖΘ ἐπὶ τὴν ΕΗ, ἴσον δυνήσεται τῷ ὑπὸ τῶν γινομένων τμημάτων τῆς ΕΗ· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖΗ τομή, οὗ διάμετρος ἡ ΕΘΗ εὐθεῖα.

Sumatur aliquod punctum in recta ΕΗ, quod sit Θ; & ad rectos angulos ipsi ΕΗ ducatur ΘΖ in ΕΖΗ plano: ergo [per 4.def.11] ΖΘ perpendicularis est ad planum ΑΔ. ducatur per Θ ipsi ΑΒ parallela ΚΘΛ, ponaturque ipsi ΑΒ ad rectos angulos ΜΝ, & per ΖΘ, ΚΛ ducatur planum faciens sectionem ΚΖΛ. quoniam igitur ΜΝ, in basis plano existens, perpendicularis est ad ΑΒ communem planorum sectionem; erit ipsa ΜΝ perpendicularis ad planum ΑΔ: quare [per 6. 11.] ΖΘ, ΜΝ parallelæ sunt. sed & parallelæ ipsæ ΚΛ, ΑΒ: ergo [per 15. 11.] parallela quoque quæ per illas transeunt plana: sectio igitur ΚΖΛ parallela est basi; ideoque [per præc.] circulus est, & ejus diameter ΚΛ, cui ipsa ΖΘ ad rectos angulos insistit: quare [per corr.13.6.] rectangulum ΚΘ, ΘΛ est æquale quadrato ex ΘΖ. at rectangulum ΚΘ, ΘΛ æquale est ipsi ΕΘ, ΘΗ rectangulo, cum sit [per 6.1.] ΕΘ æqualis ipsi ΘΚ, & ΗΘ ipsi ΘΛ, propterea quod ad bases ΕΚ, ΛΗ anguli æquales sunt: ergo quadratum ex ΖΘ æquale est rectangulo ΕΘ, ΘΗ; atque est ΖΘ ad ΕΗ perpendicularis. similiter autem, si ad ΕΗ alia ducatur parallela ipsi ΖΘ, poterit spatium æquale ei, quod sub partibus ipsius ΕΗ continetur: igitur [per 4. huj.] sectio ΕΖΗ circulus est, cujus diameter est recta ΕΘΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Δοθέντος κυλίνδρου καὶ σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἀγαγεῖν διὰ τοῦ σημείου πλευρὰν τοῦ κυλίνδρου.

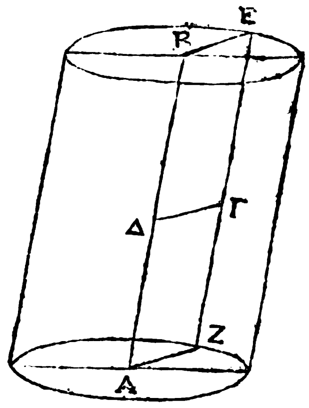
Prop. VII. *Probl.*

Cylindro dato & puncto in superficie ejus; per dictum punctum latus cylindri ducere.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ

SIT cylindrus, cujus bases circuli Α,Β, axis vero recta linea ΑΒ; datum autem punctum in ejus superficie

ſuperficie Γ; atque oporteat per Γ ducere cylindri latus.



Ducatur à puncto Γ perpendicularis ad ipſam AB, quæ ſit ΓΔ; & per AB, ΓΔ rectas ducatur planum cylindrum ſecans: ſectio igitur per Γ tranſibit, & faciet in ſuperficie rectam lineam ZΓE, quæ quidem cylindri latus erit.

τῆς ἐπιφανείας τὸ Γ, καὶ δέον ἔστω διὰ τοῦ Γ ἀγαγεῖν τὴν τοῦ κυλίνδρου πλευράν.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ εὐθειῶν ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον τέμνον τὸν κύλινδρον· ἥξει ἄρα ἡ τομὴ διὰ τοῦ Γ, καὶ ποιήσει εὐθεῖαν ὡς τὴν ΖΓΕ, ἥτις ἔσται πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου.

Prop. VIII. *Theor.*

Si in ſuperficie cylindri duo puncta ſumantur, non exiſtentia in uno latere parallelogrammi per axem: quæ dicta puncta conjungit recta linea intra cylindri ſuperficiem cadet.

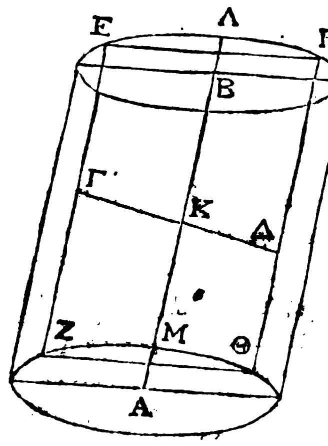
SIT cylindrus, cujus baſes circuli A, B; ſumanturque in ſuperficie ejus duo puncta Γ, Δ, quæ non ſint in uno latere parallelogrammi per axem; & jungatur ΓΔ: dico ipſam ΓΔ intra cylindri ſuperficiem cadere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

Ἐὰν ἐπὶ κυλίνδρου ἐπιφανείας δύο σημεῖα ληφθῇ, μὴ ἐπὶ μιᾶς ὄντα πλευρᾶς τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου· ἡ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας.

ἜΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις εἰσὶν οἱ Α, Β κύκλοι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ, μὴ ὄντα ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ εὐθεῖα· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐντὸς πίπτει τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας.

Si enim fieri poteſt, vel in ſuperficie ejus, vel extra ſuperficiem cadat; & quoniam puncta Γ, Δ non ſunt in latere cylindri, ducatur per Γ quidem latus EΓZ, per Δ vero ipſum HΔΘ; & jungantur EH, ZΘ: ergo [per 2. 3.] EH, ZΘ intra circulos cadent. ſumatur aliquod punctum in recta ΓΔ, quod ſit K: igitur K vel erit in ſuperficie cylindri, vel extra. ſit primum in ſuperficie; & per K ducatur latus cylindri recta linea ΛKM, quæ quidem cadens in circumferentias EH, ZΘ, ſi producatur, neutram rectarum EH, ZΘ ſecabit: quare ΛM non erit in plano ZEHΘ. ſed punctum K eſt in recta ΛM; igitur K non erit in plano ZEHΘ. quoniam autem ΓΔ eſt in ipſo ZEHΘ plano, & in ΓΔ eſt punctum K; erit K in eodem ZEHΘ plano: quare K in dicto plano erit & non erit; quod fieri non poteſt. igitur ΓΔ non eſt in ſuperficie cylindri.



Sed ſit extra; ſumaturque in circumferentia EH aliquod punctum Λ, & jungatur KΛ: ergo KΛ ex utraque parte producta neutram rectarum EH, ZΘ ſecabit: quare KΛ non erit in plano ZEHΘ. cætera manifeſta ſunt.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, πιπτέτω ἢ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἢ ἐκτὸς αὐτῆς· καὶ ἐπεὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα οὐκ ἔστιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, ἤχθω διὰ μὲν τοῦ Γ ἡ ΕΓΖ πλευρὰ, διὰ δὲ τοῦ Δ ἡ ΗΔΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΘ εὐθεῖαι· ἐντὸς ἄρα πίπτουσι τῶν κύκλων αἱ ΕΗ, ΖΘ. εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΓΔ τὸ Κ· τὸ δὴ Κ ἤτοι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου, ἢ ἐκτός. ἔστω πρότερον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας· καὶ διὰ τοῦ Κ ἤχθω πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΛΚΜ εὐθεῖα, πίπτουσα ἐπὶ τὰς ΕΗ, ΖΘ περιφερείας· ἐκβαλλομένη ἄρα ἡ ΛΚΜ εὐθεῖα οὐδετέραν τεμεῖ τῶν ΕΗ, ΖΘ εὐθειῶν· οὐκ ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ Κ· οὐδὲ τὸ Κ ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ. ἐπεὶ δὲ ἡ ΓΔ ἐστὶν ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΖΕΗΘ· ἔστιν ἄρα καὶ οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τὸ Κ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἐκτὸς, καὶ ληφθέντος σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς ΕΗ περιφερείας τοῦ Λ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΛ· ἐκβληθεῖσα δὴ ἐφ' ἑκάτερα ἡ ΚΛ οὐδετέραν τεμεῖ τῶν ΕΗ, ΖΘ εὐθειῶν· ὥστε οὐκ ἔσται ἡ ΚΛ ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ. καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

Prop. IX. *Theor.*

Si cylindrus plano ſecetur, neque baſibus æquidiſtante, neque ſubcontrarie poſito, neque per axem, neque æ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ΄.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μήτε παρὰ τὰς βάσεις, μήτε ὑπεναντίως, μήτε διὰ τοῦ ἄξονος,

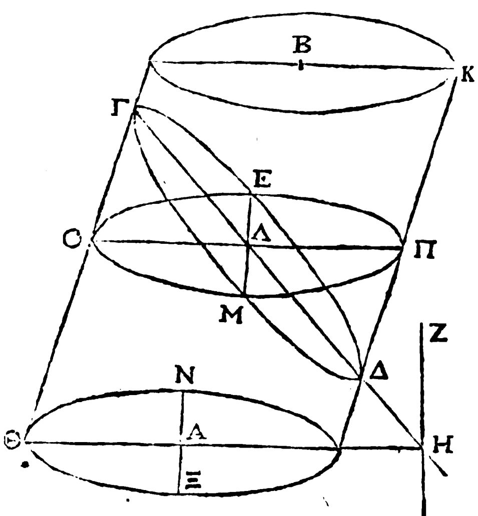
μήτε

μήτε παραλλήλῳ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ· ἡ τομὴ οὐκ ἔσται κύκλος, οὐδὲ εὐθύγραμμον.

Ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις οἱ Α, Β κύκλοι, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ, μήτε παρὰ τὰς βάσεις, μήτε ὑπεναντίως, μήτε διὰ τοῦ ἄξονος, μήτε παραλλήλως τῷ ἄξονι· τὸ δὴ τέμνον ἐπίπεδον ἤτοι καὶ τὰς βάσεις τέμνει ἀμφοτέρας, ἢ τὴν ἑτέραν, ἢ οὐδετέραν. πρῶτον δὲ μηδετέραν τεμνέτω, καὶ ποιείτω γραμμὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὴν ΓΕΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΕΔ τομὴ οὔτε κύκλος ἐστὶν, οὔτε εὐθύγραμμον.

Ὅτι μὲν οὐκ ἔστιν εὐθύγραμμον, δῆλον. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω εὐθύγραμμον, καὶ εἰλήφθω πλευρά τις αὐτοῦ ἡ ΓΕ. ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου δύο σημεῖα εἴληπται τὰ Γ, Ε, μὴ ὄντα ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, (ἡ γὰρ πλευρὰ κατὰ δύο σημεῖα οὐ τέμνει τὴν τοιαύτην γραμμὴν) ἡ ἄρα τὰ Γ, Ε σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΓΕ γραμμή· τὸ ἄρα ΓΕΔ σχῆμα οὐκ ἔστιν εὐθύγραμμον.

Δεικτέον δὴ ὅτι οὐδὲ κύκλος. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΕΔ τομῆς ἐπίπεδον τῷ τοῦ Α κύκλου ἐπιπέδῳ οὐκ ἔστι παράλληλον, ἐκβαλλόμενα τὰ ἐπίπεδα τεμεῖ ἄλληλα. τεμνέτω, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ ΖΗ, καὶ διὰ τοῦ Α κέντρου ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ ἡ ΘΑΗ, καὶ διὰ τῆς ΘΑ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον, ποιοῦν ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον, ἐν δὲ τῇ ΓΕΔ τομῇ τὴν ΓΔ εὐθεῖαν· καὶ, τῆς ΓΔ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ Λ, ἤχθωσαν τῇ ΖΗ παράλληλοι, διὰ μὲν τοῦ Λ ἡ ΕΛΜ, διὰ δὲ τοῦ Α ἡ ΝΑΞ· αἱ ἄρα ΜΕ, ΝΞ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις. ἤχθω τοίνυν διὰ τῆς ΕΜ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου, ποιοῦν ἐν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν τὴν ΟΕΠΜ· ἡ ΟΕΠΜ ἄρα τομὴ κύκλος ἐστὶν, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ ΟΠ, δίχα τετμημένη κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ γὰρ τῶν ΛΟΓ, ΛΠΔ τριγώνων, ὁμοίων ὄντων, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΛ τῇ ΛΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΟΛ τῇ ΛΠ· διάμετρος ἄρα καὶ ἡ ΕΛΜ τοῦ ΟΕΠ κύκλου. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΟΛ τῇ ΘΑ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΑΞ· ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΜ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΘΑ, ΑΞ ἴση ἐστίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΘΑΞ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΜ· ἡ ΕΛ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΟΠ διάμετρον τοῦ κύκλου· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΟΛ, ΛΠ. ἐπεὶ δὲ οὐκ ἔστιν ἡ τομὴ ὑπεναντία, ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΟΓ γωνία οὐκ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΟΓΛ· οὐδὲ ἡ ΟΛ ἄρα εὐθεῖα τῇ ΓΛ ἴση ἐστίν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΟΛ ἄρα, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΠ, τῷ ἀπὸ τῆς ΓΛ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τῶν ΓΛ, ΛΔ, ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΠ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΛ ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ οὐκ ἔστι τῷ ὑπὸ



quidistante ei quod per axem fit, parallelogrammo; sectio neque circulus, neque rectilineum erit.

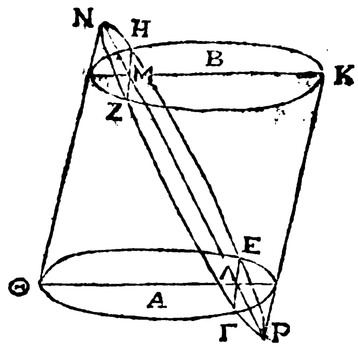
Sit cylindrus, cujus bases circuli A, B; & secetur plano neque æquidistante basibus, neque subcontrarie posito, neque per axem, neque axi æquidistante: vel igitur secans planum bases utrasque secabit, vel alteram tantum, vel neutram. primum vero neutram secet, & faciat in superficie cylindri lineam ΓΕΔ: dico sectionem ΓΕΔ neque circulum esse, neque rectilineum.

Nam rectilineum non esse manifesto constat. sit enim rectilineum, si fieri potest: & sumatur latus quodpiam ipsius ΓΕ. quoniam igitur in cylindri superficie duo puncta Γ, Ε sumuntur, in eodem latere cylindri non existentia; (latus enim in duobus punctis talem lineam non secat) erit recta linea, quæ puncta Γ, Ε conjungit, in superficie ipsius cylindri; quod quidem [per præced.] fieri non posse jam demonstratum est: ΓΕ igitur recta linea non est, neque figura ΓΕΔ rectilinea.

Demonstrandum deinceps est, neque circulum esse. quoniam enim sectionis ΓΕΔ planum plano circuli A non est æquidistans: si plana producantur, ipsa se invicem secabunt. secent ergo sese, & sit ipsorum communis sectio ΖΗ; perque A centrum ducatur ΘΑΗ ad ΖΗ perpendicularis; & per ΘΑ perque axem ducatur planum, faciens in cylindro sectionem parallelogrammum ΘΚ, in sectione autem ΓΕΔ rectam lineam ΓΔ; &, secta ΓΔ bifariam in puncto Λ, ducantur ipsi ΖΗ parallelæ, per Λ quidem recta ΕΛΜ, per A vero ipsa ΝΑΞ: quare [per 9.11.] ΜΕ, ΝΞ inter sese parallelæ erunt. ducatur deinde planum per ΕΜ basi cylindri æquidistans, quod faciat in cylindro sectionem ΟΕΠΜ; & erit [per 5. huj.] sectio ΟΕΠΜ circulus, cujus diameter ΟΠ bifariam secatur in Λ. nam, cum triangula ΛΟΓ, ΛΠΔ similia sint, & sit ΓΛ æqualis ipsi ΛΔ; erit & ΟΛ ipsi ΛΠ æqualis: quare ΕΛΜ circuli ΟΕΠ diameter erit. & quoniam recta ΟΛ ipsi ΘΑ parallela est, ut & ΛΜ ipsi ΑΞ; angulus ΟΛΜ [per 10.11.] angulo ΘΑΞ est æqualis: rectus autem est angulus ΘΑΞ; rectus igitur est ΟΛΜ, & ΕΛ perpendicularis est ad ΟΠ circuli diametrum: unde sequitur quadratum ex ΕΛ æquale esse rectangulo ΟΛΠ. quoniam autem sectio non est subcontraria, angulus ΛΟΓ angulo ΟΓΛ æqualis non erit: & idcirco latera ΟΛ, ΓΛ inæqualia: igitur quadratum ex ΟΛ, hoc est rectangulum ΟΛΠ, non est æquale quadrato ex ΓΛ, hoc est rectangulo ΓΛΔ. sed rectangulo ΟΛΠ æquale est quadratum ex ΕΛ: quare quadratum ex ΕΛ non est æquale rectangulo

ΓΑΔ: & propterea [per 4. huj.] sectio ΓΕΔ non est circulus. demonstratum autem est neque rectilineum esse. quod erat demonstrandum. simul vero & illud demonstratum est, rectam lineam, quæ in sectione ipsi ΖΗ ducta parallela bifariam dividit ipsam ΓΔ, diametro basis æqualem esse.

Sed secet planum etiam ipsas bases; basim quidem Α recta linea ΓΕ, ipsam vero Β recta ΖΗ; perque Α ducatur ΘΑΛ perpendicularis ad ΓΕ; & per ΘΑ diametrum & axem ducatur planum, quod faciat sectionem ΘΚ parallelogrammum: plani autem ΖΓΕΗ & parallelogrammi ΘΚ communis sectio sit ΛΜ. quoniam igitur planum ΖΕ neque per axem ductum est, neque axi æquidistans; recta ΛΜ in infinitum protracta occurret ipsi axi: quare & rectæ ΘΝ axi parallelæ; utræque enim sunt in ΘΚ plano. occurrat in puncto Ν, & producatur ΘΝ utramque in partem. itaque si, axe & circulis manentibus, ipsa ΘΝ circumferatur unà cum diametris, quousque redeat in eum locum à quo moveri cœpit; cylindri superficies secundum altitudinem augebitur: &, producto plano ΖΕ, augebitur etiam sectio usque in punctum Ν. illud idem continget & ex parte ΓΛ: erit itaque ΝΗΕΡ cylindri sectio, qualis in præcedenti theoremate: unde constat ΝΗΕΡ neque circulum esse, neque rectilineum: quare sectio ΓΕΗΖ neque rectilineum est, neque circulus, neque portio circuli; sed erit ejusmodi sectio portio sectionis cylindri.



τῆ ΓΑ, ΔΔ ἴσον· οὐκ ἄρα κύκλος ἐστὶν ἡ ΓΕΔ τομή. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ εὐθύγραμμον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ συναπεδείχθη ὅτι ἡ τὴν ΓΔ ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ΖΗ διχοτομοῦσα εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως.

Ἀλλὰ δὴ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τεμνέτω καὶ τὰς βάσεις, τὴν μὲν Α βάσιν τῇ ΓΕ εὐθείᾳ, τὴν δὲ Β τῇ ΖΗ, καὶ διὰ τοῦ Α ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΕ ἡ ΘΑΛ, καὶ διὰ τῆς ΘΑ διαμέτρου καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον, ὃ ποιεῖ τομὴν τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον, τῆς δὲ ΖΓΕΗ τομῆς καὶ τοῦ ΘΚ παραλληλογράμμου κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ ΛΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΖΕ ἐπίπεδον οὔτε διὰ τοῦ ἄξονος ἦκται, οὔτε παραλλήλως τῷ ἄξονι· ἡ ΛΜ ἄρα ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὸν ἄξονα· τεμεῖ ἄρα καὶ τὴν ΘΝ παράλληλον οὖσαν τῷ ἄξονι, ἀμφότερα γὰρ ἐν τῷ ΘΚ εἰσιν ἐπιπέδῳ· τεμνέτω δὴ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα ἡ ΘΝ. ἐὰν ἄρα μένοντος τοῦ ἄξονος καὶ τῶν κύκλων, ἡ ΘΝ περιενεχθεῖσα σὺν ταῖς διαμέτροις ἀποκατασταθῇ, αὐξήσει τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς κυλίνδρου ἐπιφάνειαν κατὰ τὸ ὕψος, καὶ προσεκβληθέντος τοῦ ΖΕ ἐπιπέδου, αὐξηθήσεται καὶ τομὴ μέχρι τοῦ Ν. τὸ δ' αὐτὸ ἔσται καὶ ἐπὶ τὰ ΓΛ μέρη· ἡ ΝΗΕΡ ἄρα τομή ἐστι κυλίνδρου, οἵα καὶ ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι· ἡ ΝΗΕΡ ἄρα τομὴ οὔτε κύκλος, οὔτε εὐθύγραμμόν ἐστι· καὶ ἡ ΓΕΗΖ ἄρα τομὴ οὔτε εὐθύγραμμον, οὔτε κύκλος, οὔτε τμῆμα κύκλου, ἀλλ' ἔστιν ἡ τοιαύτη τομὴ κυλίνδρου τομῆς τμῆμα.

Prop. X. *Theor.*

Si cylindrus plano per axem secetur; sumatur autem aliquod punctum in ejus superficie, quod non sit in latere parallelogrammi per axem; & ab ipso ducatur recta linea parallela rectæ cuipiam in eodem plano existenti in quo cylindri basis, quæque ad rectos angulos incidit basi parallelogrammi per axem: cadet ea intra parallelogrammum, & producta usque ad alteram partem superficiei ab ipso parallelogrammo bifariam secabitur.

SIT cylindrus, cujus bases Α, Β circuli, & parallelogrammum per axem ΓΔ; sumatur autem aliquod punctum Ε in superficie cylindri, & ab ipso ducatur recta linea ΕΖ parallela rectæ cuipiam, quæ perpendicularis sit ad ΓΑ basim parallelogrammi per axem: dico rectam ΕΖ intra ΓΔ parallelogrammum cadere; &, si ulterius producatur usque ad alteram partem superficiei, ab ipso parallelogrammo bifariam secari.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

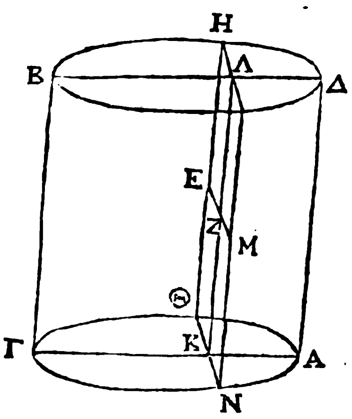
Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος εὐθείᾳ τινὶ, ἥτις, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσα τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου, πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου· ἐντὸς πεσεῖται τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ παραλληλογράμμου.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε παράλληλος ἤχθω εὐθείᾳ τινὶ καθέτῳ ἐπὶ τὴν ΓΑ βάσιν τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ ἔστω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἐντὸς πεσεῖται τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου, καὶ προσεκβαλλομένη μέχρι τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἤχθω

Ἤχθω διὰ τοῦ Ε σημείου παρὰ τὸν ἄξονα ἡ ΘΕΗ εὐθεῖα, τέμνουσα τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἤχθω ἡ ΘΚ παράλληλος τῇ ἐπὶ τὴν ΓΑ καθέτῳ, ᾗτινι παράλληλος ὑπόκειται ἡ ΕΖ· τεμεῖ ἄρα ἡ ΘΚ τὴν ΓΑ καὶ αὐτή. ἤχθω οὖν διὰ τῶν ΗΘ, ΘΚ ἐπίπεδον τέμνον τὸν κύλινδρον, καὶ ποιείτω τὸ ΗΝ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΛ κοινὴ τομὴ τῶν ΓΔ, ΝΗ παραλληλογράμμων. ἐπεὶ τοίνυν αἱ ΕΖ, ΚΘ τῇ αὐτῇ εἰσι παράλληλοι· καὶ ἀλλήλαις ἄρα εἰσὶ παράλληλοι. καί ἐστιν ἡ ΘΚ ἐν τῷ ΚΗ ἐπιπέδῳ· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα ἐν τῷ ΚΗ ἐστιν ἐπιπέδῳ· ἐκβαλλομένη ἄρα ἡ ΕΖ πίπτει ἐπὶ τὴν ΛΚ, ἥτις ἐστὶν ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ· ἡ ΕΖ ἄρα ἐντὸς πίπτει τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου. φανερὸν δὲ ὅτι, κἂν εἰς τὸ ἕτερον μέρος ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ Μ, ὅπερ ἐστὶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, δίχα ἔσται τετμημένη ἡ ΕΜ κατὰ τὸ Ζ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΑ διάμετρος πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΘΚ· ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΚΝ. καὶ παράλληλοι αἱ ΜΝ, ΛΚ, ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΜΖ τῇ ΖΕ.

Ducatur enim per E recta ΘEH parallela axi, quæ basis circumferentiam secet in Θ; & per Θ ducatur ΘK parallela perpendiculari ad ΓA, cui etiam parallelam posuimus EZ: ergo & ΘK ipsam ΓA secabit. itaque juxta rectas lineas HΘ, ΘK ducatur planum secans cylindrum, quod faciat sectionem parallelogrammum HN; & jungatur KΛ communis sectio parallelogrammorum ΓΔ, NH. quoniam igitur rectæ EZ, KΘ eidem sunt parallelæ, etiam inter se parallelæ sunt: atque est ΘK in plano KH, quare & EZ in plano KH erit; adeoque producta conveniet cum ΛK quæ in plano ΓΔ est: recta igitur EZ intra ΓΔ parallelogrammum cadet. perspicuum autem est, si ad alteram partem producatur usque in punctum M, quod est in superficie cylindri, bifariam secari EM in Z. nam cum diameter ΓA perpendicularis sit ad ΘK; erit [per 3.3.] ΘK ipsi KN æqualis. sed parallelæ sunt ipsæ MN, ΛK, HΘ: ergo MZ ipsi ZE æqualis erit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι μὲν τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ· αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς τομῆς τῆς ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου γινομένης ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, παράλληλοι τῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων πεσοῦνται, καὶ προσεκβαλλόμεναι ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων· καὶ ἡ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ὀρθοῦ μένοντος τοῦ κυλίνδρου, πρὸς ὀρθὰς ἔσται καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τε διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου. Σκαληνοῦ δὲ ὄντος, οὐκέτι· πλὴν ὅταν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου.

Prop. XI. *Theor.*

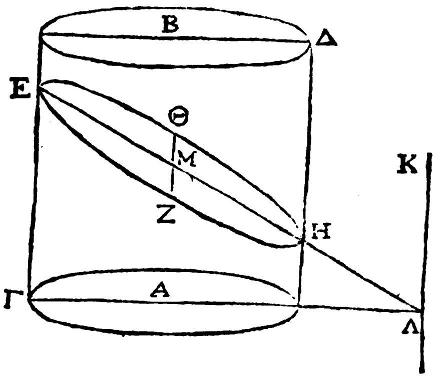
Si cylindrus secetur plano per axem, secetur etiam alio plano basis planum extra circulum secante; communis autem planorum sectio perpendicularis sit ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur: rectæ lineæ quæ à sectione in superficie cylindri à secante plano factâ ducuntur, parallelæ ei quæ perpendicularis est ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur, communi planorum sectioni occurrent, & productæ usque ad alteram sectionis partem, à communi planorum sectione bifariam dividentur; quæ vero perpendicularis est ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur, cylindro recto existente, etiam ad communem planorum sectionem, parallelogrammi scilicet per axem & secantis plani, perpendicularis erit. Scaleno autem existente cylindro, non item; præterquam cum parallelogrammum per axem ad ipsam basim cylindri rectum fuerit.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος, ὡς εἴρηται, ἐπιπέδῳ

SIT cylindrus, cujus bases quidem circuli A, B, parallelogrammum autem per axem ΓΔ; & secetur plano, ut dictum est, quod faciat

ciat sectionem EZHΘ, ita ut planis sectionis EZHΘ & basis AΓ occurrentibus, communis sectio KΛ perpendicularis sit ad ipsam ΓAΛ; & à sectione EZHΘ ducatur recta ZM parallela ipsi KΛ, quæ producta pertingat ad alteram partem superficiei in puncto Θ: dico rectam ZM occurrere ipsi EH, & ipsi MΘ æqualem esse.

Nam quoniam in sectione EZHΘ ducta est ZM parallela ipsi KΛ; intra ΓΔ parallelogrammum cadet. quoniam autem ZM est in plano EZHΘ, atque est EH communis sectio ipsius & parallelogrammi ΓΔ; occurret ZM ipsi EH, & ZM ipsi MΘ æqualis erit: id quod patet ex antecedenti theoremate. Reliquum est ut ostendamus, si cylindrus rectus sit, vel planum ΓΔ rectum super basim cylindri, rectam KΛ ad ipsam EHΛ perpendicularem esse. quoniam enim planum ΓΔ ad planum basis rectum est, & KΛ in basis plano existens perpendicularis est ad ΓAΛ communem planorum sectionem; & ad reliquum ipsius ΓΔ parallelogrammi planum [per 4. defin. 11.] perpendicularis erit.



Quod si planum ΓΔ non sit rectum ad basim, scaleno existente cylindro, KΛ ad ΛE perpendicularis non erit. si enim fieri potest, sit KΛ perpendicularis ad ΛE; est autem & ad ΛΓ perpendicularis: quare [per 4. 11.] & ad planum quod per ipsas transit, hoc est ad planum ΓΔ: planum igitur per KΛ, hoc est planum basis A, ad planum ΓΔ [per 18. 11.] rectum erit, contra hypothesin: ergo KΛ ad ΛE non est perpendicularis.

Ex jam demonstratis itaque constat, rectam EH sectionis EZHΘ diametrum esse; omnes enim, quæ ad ipsam ducuntur parallelas ipsi KΛ, bifariam dividit, quemadmodum ZΘ.

ποιοῦντι τὴν ΕΖΗΘ τομὴν, ὥστε, συμπιπτόντων τοῦ τε τῆς ΕΖΗΘ τομῆς καὶ τοῦ τῆς ΑΓ βάσεως ἐπιπέδου, τὴν κοινὴν τομὴν τὴν ΚΛ πρὸς ὀρθὰς εἶναι τῇ ΓΑΛ εὐθείᾳ, καὶ ἀπὸ τῆς ΕΖΗΘ τομῆς ἤχθω τις εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΚΛ ἡ ΖΜ, καὶ προσεκβληθεῖσα περατούσθω κατὰ τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸ Θ· λέγω ὅτι ἡ ΖΜ πίπτει ἐπὶ τὴν ΕΗ, καὶ ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΖΜ τῇ ΜΘ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν τῇ ΕΖΗΘ τομῇ παράλληλος ἦκται τῇ ΚΛ ἡ ΖΜ· ἐντὸς ἄρα πίπτει τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου. ἐπεὶ δέ ἐστιν ἡ μὲν ΖΜ εὐθεῖα ἐν τῷ ΕΖΗΘ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ ΕΗ κοινὴ τομή ἐστιν αὐτοῦ καὶ τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου· ἡ ΖΜ ἄρα ἐπὶ τὴν ΕΗ πίπτει. ὅτι δὲ καὶ ἡ ΖΜ τῇ ΜΘ ἴση ἐστὶ, φανερὸν καὶ αὐτὸ, διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα. Λοιπὸν δεῖ δεῖξαι, ὅτι ἡ ΚΛ, ὀρθοῦ μένοντος τοῦ κυλίνδρου, ἢ τοῦ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ὄντος τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΕΗΛ. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ΓΔ ἐπίπεδον πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ, τῇ δὲ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΓΑΛ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΚΛ, ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ οὖσα· καὶ τῷ λοιπῷ ἄρα τῷ τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

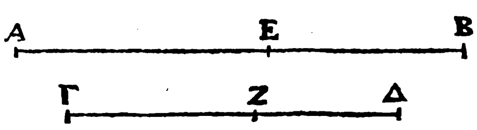
Εἰ δὲ τὸ ΓΔ οὐκ ἔστι πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, σκαληνοῦ δηλαδὴ ὄντος τοῦ κυλίνδρου, οὐκ ἔσται πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΛ τῇ ΛΕ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΛ τῇ ΛΕ· ἔστι δὴ καὶ τῇ ΛΓ πρὸς ὀρθάς· καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῷ ΓΔ, πρὸς ὀρθὰς ἔσται ἡ ΚΛ· καὶ τὸ δι' αὐτῆς ἄρα ἐπίπεδον, τουτέστι τὸ τῆς Α βάσεως, πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ ΓΔ, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἡ ΚΛ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΛΕ.

Ἐκ δὴ τῶν δεδειγμένων φανερὸν, ὅτι ἡ ΕΗ διάμετρός ἐστι τῆς ΕΖΗΘ τομῆς· πάσας γὰρ τὰς παρὰ τὴν ΚΛ καταγομένας ἐπ' αὐτὴν δίχα τέμνει, ὥσπερ τὴν ΖΘ.

Prop. XII. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ similiter secentur; erit ut quadratum primæ ad quadratum secundæ, ita quod fit sub primæ partibus rectangulum ad rectangulum sub partibus secundæ.

Rectæ namque lineæ AB, ΓΔ similiter secentur in punctis E, Z: dico ut quadratum ex AB ad quadratum ex ΓΔ, ita esse rectangulum AEB ad rectangulum ΓZΔ.



Quoniam enim ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ; erit componendo & permutando ut AB ad ΓΔ ita EB ad ZΔ. & rursus quoniam ut AE

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὁμοίως τμηθῶσιν· ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς προτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς προτέρας πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς δευτέρας.

Εὐθεῖαι γὰρ αἱ ΑΒ, ΓΔ ὁμοίως τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα· λέγω ὅτι ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, συνθέντι ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ οὕτως

οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ. ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

ad EB ita ΓZ ad ZΔ; rectangulum AEB ad rectangulum ΓZΔ duplicatam rationem habebit ejus quam habet EB ad ZΔ, hoc est, quam habet AB ad ΓΔ. sed & quadratum ex AB ad quadratum ex ΓΔ duplicatam rationem habet ejus quæ est AB ad ΓΔ: ergo ut quadratum ex AB ad quadratum ex ΓΔ ita rectangulum AEB ad rectangulum ΓZΔ. quod erat demonstrandum.

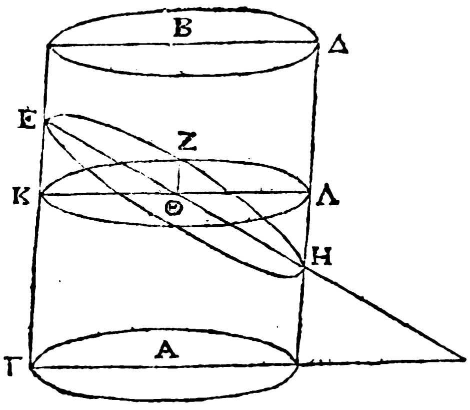
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τούτου τῆς βάσεως καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἀπὸ δὲ τῆς τομῆς ἀχθῇ τις ἐπὶ τὴν διάμετρον παράλληλος τῇ εἰρημένῃ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων· ἡ ἀχθεῖσα δυνήσεταί τι χωρίον, πρὸς ὃ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως.

Prop. XIII. *Theor.*

Si cylindrus plano secetur per axem; & secetur alio plano basis planum secante, ita ut communis sectio basis & secantis plani perpendicularis sit ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur; à sectione autem ad diametrum ducatur recta communi planorum sectioni parallela: poterit dicta recta spatium quoddam, ad quod rectangulum sub partibus diametri sectionis contentum eam rationem habet, quam habet quadratum diametri sectionis ad quadratum diametri basis.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ κατ' εὐθεῖαν ὀρθὴν πρὸς τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν, καὶ ἔστω ἡ γινομένη τομὴ ἡ ΕΖΗ, κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἡ ΕΗ, διάμετρος οὖσα τῆς τομῆς, ὡς ἐδείχθη· ληφθέντος δὲ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ Ζ, κατήχθω ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν διάμετρον εὐθεῖα παράλληλος τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἡ ΖΘ· πίπτει ἄρα ἡ ΖΘ ἐπὶ τὴν ΕΗ, ὡς ἐδείχθη· λέγω δὴ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως.



Ἤχθω διὰ τοῦ Θ παράλληλος τῇ ΓΑ ἡ ΚΘΛ, καὶ διὰ τῶν ΖΘ, ΚΛ εὐθειῶν ἤχθω ἐπίπεδον, τομὴν ποιοῦν τὴν ΚΖΛ. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΓΑ παράλληλος, ἡ δὲ ΖΘ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων, οὔσῃ ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ· καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπίπεδα παράλληλά ἐστιν· ἡ ΚΖΛ ἄρα τομὴ κύκλος ἐστί. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΓΑ, ἡ δὲ ΖΘ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς οὔσῃ πρὸς τὴν ΓΑ· καὶ ἡ ΖΘ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΚΛ. καὶ ἔστι κύκλος ὁ ΚΖΛ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΕ τῇ ΛΗ παράλληλός ἐστιν· ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΛ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν

SIT cylindrus, cujus bases A, B circuli; & parallelogrammum per axem ΓΔ; secetur autem cylindrus plano occurrenti plano basis secundum rectam lineam, quæ ad ipsam ΓA productam sit perpendicularis; sitque sectio facta EZH; & communis sectio parallelogrammi ΓΔ & secantis plani sit recta EH, quæ diameter est sectionis, ut ostensum est; sumpto deinde in sectione quovis puncto Z, ab eo ad diametrum ducatur recta linea ZΘ, parallela communi planorum sectioni: cadet igitur ZΘ, ex iis quæ [per 11. huj.] demonstrata sunt, in ipsam EH: dico itaque rectangulum EΘH ad quadratum ex ZΘ eam rationem habere quam diametri EH quadratum ad quadratum diametri basis.

Ducatur enim per Θ recta KΘΛ parallela ipsi ΓA; & per ZΘ, KΛ rectas planum ducatur, quod faciat sectionem KZΛ. itaque quoniam recta KΛ parallela est ipsi ΓA, & ZΘ parallela communi planorum sectioni quæ in basis plano existit; igitur [per 15. 11.] quæ per ipsas transeunt plana inter se æquidistantia erunt: quare [per 5. huj.] circulus est sectio KZΛ. rursus quoniam KΛ ipsi ΓA est parallela; & ZΘ parallela communi sectioni planorum, quæ perpendicularis est ad ΓA: erit & ZΘ ad KΛ perpendicularis. est autem circulus KZΛ; ergo [per 4. huj.] quadratum ex ZΘ rectangulo KΘΛ æquale erit. & cum parallela sit KE ipsi ΛH, erit ut KΘ ad ΘΛ ita EΘ ad ΘH: quare rectangulum ΕΘΗ simile est rectangulo ΚΘΛ: & propterea ut rectangulum ΕΘΗ ad ipsum ΚΘΛ, hoc est ad quadratum ex ΖΘ, ita [per 12. huj.] quadratum diametri ΕΗ ad quadratum ex ΚΛ, hoc est ad quadratum diametri basis.

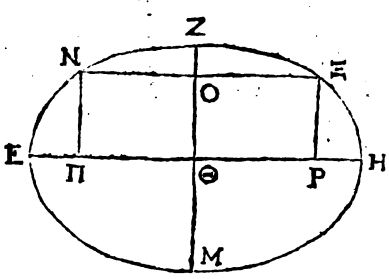
ΕΘ, ΘΗ ὅμοιόν ἐστι τῷ ὑπὸ ΚΘ, ΘΛ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως.

Prop. XIV. *Theor.*

Recta linea, quæ per punctum quod diametrum sectionis bifariam dividit ordinatim in sectione applicatur, secunda diameter erit.

SIT sectionis ΕΖΗ diameter ΕΗ, quæ bifariam secetur in Θ; & ΖΘΜ ordinatim applicetur: dico ΖΜ secundam diametrum esse sectionis.

Ducatur enim recta ΝΟΞ parallela ipsi ΕΗ, & ducantur ΝΠ, ΞΡ ipsi ΖΜ parallelæ: ergo & ΝΠ, ΞΡ ordinatim applicatæ sunt. itaque quoniam [per præced. 13. huj.] quadratum ex ΝΠ ad rectangulum ΕΠΗ eandem habet rationem, quam habet quadratum diametri basis cylindri ad quadratum diametri sectionis, & habet quadratum ex ΞΡ ad rectangulum ΕΡΗ hanc eandem rationem; erit ut quadratum ex ΝΠ ad rectangulum ΕΠΗ ita quadratum ex ΞΡ ad rectangulum ΕΡΗ, & permutando. est autem quadratum ex ΝΠ æquale quadrato ex ΞΡ, parallelogrammum enim est ΝΠΡΞ: ergo & rectangulum ΕΠΗ æquale est rectangulo ΕΡΗ. quibus sublatis ab æqualibus quadratis ex ΕΘ, & ΘΗ, erit [per 5. 2.] reliquum quadratum ex ΠΘ reliquo quadrato ex ΘΡ æquale: æqualis igitur est ΠΘ ipsi ΘΡ, hoc est ΝΟ ipsi ΟΞ. Eadem ratione & aliæ omnes ipsi ΕΗ parallelæ à ΖΜ bifariam secabuntur: ergo [ex definit.] ΖΜ secunda diameter est sectionis.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδʹ.

Ἡ διὰ τῆς διχοτομίας τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς τεταγμένως ἀγομένη ἐν τῇ τομῇ, δευτέρα διάμετρος ἔσται.

ΕΣΤΩ γὰρ τῆς ΕΖΗ τομῆς διάμετρος ἡ ΕΗ, καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Θ, καὶ διήχθω ἡ ΖΘΜ τεταγμένως· λέγω ὅτι ἡ ΖΜ δευτέρα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

Ἤχθω παρὰ μὲν τὴν ΕΗ ἡ ΝΟΞ, παρὰ δὲ τὴν ΖΜ αἱ ΝΠ, ΞΡ· τεταγμέναι ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΝΠ, ΞΡ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΝΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΠΗ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΡΗ τὸν αὐτὸν λόγον· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΝΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΠΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΡΗ, καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΝΠ τῷ ἀπὸ ΞΡ, παραλληλόγραμμον γάρ ἐστι τὸ ΝΠΡΞ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΠΗ τῷ ὑπὸ ΕΡΗ. καὶ ἀπ' ἴσων ἀφῄρηται τῶν ἀπὸ ΕΘ, ΘΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΠΘ λοιπῷ τῷ ἀπὸ ΘΡ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΠΘ τῇ ΘΡ, τουτέστιν ἡ ΝΟ τῇ ΟΞ. ὁμοίως δὲ πᾶσαι αἱ παρὰ τὴν ΕΗ δίχα τέμνονται ὑπὸ τῆς ΖΜ· δευτέρα διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ.

Prop. XV. *Theor.*

Si cylindrus plano secetur basis planum secante; communis autem sectio plani basis & secantis plani perpendicularis sit ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur: quæ à sectione ad diametrum ducitur, parallela communi planorum sectioni jam dictæ, poterit spatium quoddam, ad quod rectangulum sub diametri partibus contentum eam rationem habet, quam habet diametri sectionis quadratum ad quadratum secundæ diametri; quæ vero à sectione ad secundam diametrum ducitur parallela diametro, poterit spatium, ad

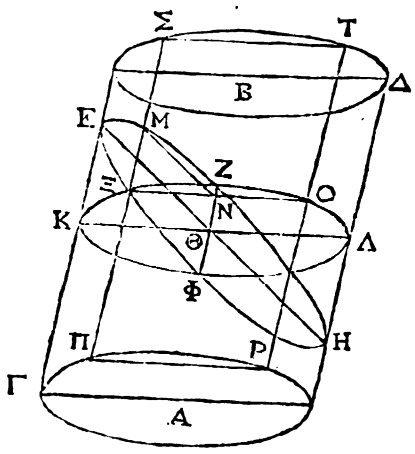
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιεʹ.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ τέμνοντι τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ τε τῆς βάσεως καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ· ἡ μὲν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀχθεῖσα παράλληλος τῇ εἰρημένῃ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων, δυνήσεται χωρίον, πρὸς ὃ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου· ἡ δὲ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον ἀχθεῖσα παράλληλος τῇ διαμέτρῳ δυνήσεται χωρίον, πρὸς ὃ τὸ

ὁ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς δευτέρας διαμέτρου λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, καὶ κατεσκευάσθω ὡς ἐν τῷ ιγ'. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη τὸ μὲν ὑπὸ τῶν Ε Θ, Θ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Η ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ε Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τῆς διχοτομούσης τὴν Ε Η τεταγμένως, ὡς ἐδείχθη πρὸς τὸ θ'. θεωρήματι· ἡ δὲ διχοτομοῦσα τὴν διάμετρον τεταγμένως δευτέρα διάμετρός ἐστιν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου· εἴη ἂν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ε Η διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Ε Θ, Θ Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ζ Θ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ δὴ ὑποκείσθω τὸ μὲν Θ διχοτομεῖν τὴν Ε Η διάμετρον, τὴν δὲ Ζ Θ Φ τεταγμένην εἶναι· δευτέρα ἄρα διάμετρος ἡ Ζ Φ. κατήχθω ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τῆς τομῆς ἡ Μ Ν παράλληλος τῇ Ε Η· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Φ Ν, Ν Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Μ Ν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς Φ Ζ δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε Η διαμέτρου τῆς τομῆς. ἤχθω διὰ τῆς Μ Ν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ Γ Δ παραλληλογράμμῳ τέμνον τὸν κύλινδρον· ποιήσει δὴ παραλληλόγραμμον τὴν τομήν. ποιείτω τὸ Ρ Σ, ἔστωσαν δὲ κοιναὶ τομαὶ αὐτοῦ μὲν καὶ τῶν παραλλήλων κύκλων αἱ Σ Τ, Ξ Ο, Π Ρ, αὐτοῦ δὲ καὶ τῆς Ε Ζ Η τομῆς κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ Μ Ν. ἐπεὶ οὖν παράλληλα ἐπίπεδα τὰ Γ Δ, Ρ Σ τέμνεται ὑπὸ τοῦ Κ Ζ Λ ἐπιπέδου, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἡ Θ Κ τῇ Ν Ξ. ἦν δὲ καὶ ἡ Θ Ε τῇ Μ Ν παράλληλος· ἡ ἄρα ὑπὸ Κ Θ Ε γωνία τῇ ὑπὸ Ξ Ν Μ ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ τὸ Ρ Σ παραλληλόγραμμον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ Γ Δ παραλληλογράμμῳ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ γ'. θεωρήματι· ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν Σ Π Ρ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν Ε Γ Α ἴση ἐστὶ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ Σ Ξ Ν τῇ ὑπὸ Ε Κ Θ· ὅμοια ἄρα ἀλλήλοις τὰ Ε Κ Θ, Μ Ξ Ν τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ Κ Θ πρὸς Θ Ε οὕτως ἡ Ξ Ν πρὸς Ν Μ· καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Κ Θ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ Ε, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῆς Φ Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε Η διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ξ Ν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ν Μ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Ν Ξ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Φ Ν, Ν Ζ (κύκλος γάρ ἐστιν ὁ Κ Ζ Λ καὶ ὀρθὴ ἡ Θ Ζ ἐπὶ τὰς Κ Θ, Ξ Ν) ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Φ Ζ δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε Η διαμέτρου, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Φ Ν, Ν Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Μ Ν. ὃ προέκειτο δεῖξαι.



quod rectangulum sub secundæ diametri partibus eam habet rationem, quam quadratum secundæ diametri ad ipsius diametri quadratum.

SIT cylindrus, & construantur omnia sicut in decimo tertio theoremate. quoniam igitur ostensum est, rectangulum Β Θ Η esse ad quadratum ex Ζ Θ sicut quadratum ex Ε Η ad quadratum diametri basis, hoc est ad quadratum ejus quæ ordinatim applicata bifariam secat ipsam Ε Η, uti demonstratum est in nono theoremate; ea autem quæ ordinatim applicatur & bifariam diametrum secat, secunda diameter est, ex præcedenti theoremate: ergo ut quadratum diametri Ε Η ad quadratum secundæ diametri ita rectangulum Ε Θ Η ad quadratum ex Ζ Θ. quod erat demonstrandum.

Sed ponatur jam in puncto Θ bifariam secari diametrum Ε Η, & rectam Ζ Θ Φ ordinatim applicatam esse; erit igitur Ζ Φ secunda diameter. ducatur autem ad ipsam recta Μ Ν parallela ipsi Ε Η: dico rectangulum Φ Ν Ζ ad quadratum ex Μ Ν eam rationem habere quam quadratum ex Φ Ζ secundâ diametro ad quadratum diametri sectionis Ε Η. ducatur per rectam Μ Ν planum æquidistans parallelogrammo Γ Δ, quod cylindrum secet: faciet igitur [per 3. huj.] sectionem parallelogrammum. faciat Ρ Σ; & communes sectiones ipsius & æquidistantium circulorum sint Σ Τ, Ξ Ο, Π Ρ; ipsius vero & plani sectionis Ε Ζ Η communis sectio Μ Ν. itaque quoniam æquidistantia plana Γ Δ, Ρ Σ secantur à plano Κ Ζ Λ, communes eorum sectiones parallelæ erunt: parallela est igitur Θ Κ ipsi Ν Ξ. erat autem & Θ Ε ipsi Ν Μ parallela: ergo [per 10. 11.] angulus Κ Θ Ε æqualis est angulo Ξ Ν Μ. & cum parallelogrammum Ρ Σ parallelogrammo Γ Δ æquiangulum sit, id quod demonstravimus in tertio theoremate, angulus Σ Π Ρ angulo Ε Γ Α æqualis erit, hoc est Σ Ξ Ν ipsi Ε Κ Θ: similia igitur triangula sunt Ε Κ Θ, Μ Ξ Ν: quare ut Κ Θ ad Θ Ε ita Ξ Ν ad Ν Μ, & [per 22. 6.] ut quadratum ex Κ Θ ad quadratum ex Θ Ε, hoc est ut quadratum ex Φ Ζ secundâ diametro ad quadratum diametri Ε Η, ita quadratum ex Ξ Ν ad quadratum ex Ν Μ. sed quadratum ex Ν Ξ æquale est rectangulo Φ Ν Ζ, quia Κ Ζ Λ circulus est & Θ Ζ perpendicularis ad Κ Θ, Ξ Ν; ut igitur quadratum ex Φ Ζ secundâ diametro ad quadratum diametri Ε Η ita rectangulum Φ Ν Ζ ad quadratum ex Μ Ν. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Ἐὰν κυλίνδρου τομῆς συζυγεῖς διάμετροι ὦσι, καὶ ποιηθῇ ὡς ἡ διάμετρος τῆς τομῆς πρὸς τὴν δευ-

Prop. XVI. *Theor.*

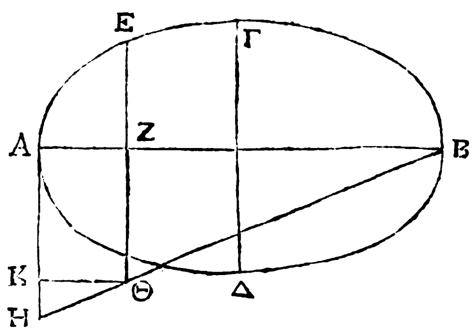
Si in cylindri sectione conjugatæ diametri sint; & fiat ut diameter sectionis

ctionis ad secundam diametrum ita secunda diameter ad aliam quampiam: quæ à sectione ad diametrum ordinatim applicata est poterit spatium, quod adjacet tertiæ illi proportionali, latitudinem habens eam quæ inter ordinatim applicatam & sectionem interjicitur, deficiens vero figura simili ei quæ sub diametro ipsâ & tertiâ proportionali continetur.

τέραν διάμετρον τῆς τομῆς οὕτως ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς ἄλλην τινά· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀχθῇ τεταγμένως δυνήσεται τὸ παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον παρακείμενον χωρίον, πλάτος ἔχον τὴν ἀπ' αὐτῆς τεταγμένως ἀχθείσης ἀπολαμβανομένην πρὸς τῇ τομῇ, ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς τρίτης ἀνάλογον.

SIT cylindri sectio, cujus diameter quidem A B, secunda vero diameter Γ Δ, & fiat ut A B ad Γ Δ ita Γ Δ ad A H; apteturque A H ipsi A B ad rectos angulos; & junctâ B H, applicetur E Z ordinatim ad A B; & ducatur Z Θ ipsi A H parallela & Θ K parallela ipsi A Z: dico quadratum ex E Z æquale esse rectangulo A Θ.

ΕΣΤΩ κυλίνδρου τομή, ἧς διάμετρος μὲν ἡ A B, δευτέρα δὲ διάμετρος ἡ Γ Δ, καὶ γενέσθω ὡς ἡ A B πρὸς τὴν Γ Δ οὕτως ἡ Γ Δ πρὸς τὴν A H, καὶ κείσθω ἡ A H πρὸς ὀρθὰς τῇ A B, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ B H, καὶ ἐπὶ τὴν A B ἤχθω τεταγμένως ἡ E Z, καὶ παρὰ μὲν τὴν A H ἡ Z Θ, παρὰ δὲ τὴν A Z ἡ Θ K· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς E Z ἴσον ἐστὶ τῷ A Θ παραλληλογράμμῳ.



Quoniam enim ut quadratum ex A B ad quadratum ex Γ Δ ita recta A B ad ipsam A H, hoc est B Z ad Z Θ; ut autem quadratum ex A B ad quadratum ex Γ Δ ita rectangulum B Z A ad quadratum ex E Z, & ut B Z ad Z Θ ita B Z A rectangulum ad rectangulum Θ Z A, hoc est ad A Θ parallelogrammum: quadratum igitur ex E Z æquale erit rectangulo A Θ, quod quidem adjacet tertiæ proportionali A H, latitudinem habens A Z, & deficiens figura H K Θ ipsi H A B simili. vocetur autem A B transversum figuræ latus, & A H latus rectum.

Ἐπεὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ Δ οὕτως ἡ A B πρὸς τὴν A H, τουτέστιν ἡ B Z πρὸς Z Θ· ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς A B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ Δ οὕτως τὸ ὑπὸ Z B, Z A πρὸς τὸ ἀπὸ Z Θ, ὡς δὲ ἡ B Z πρὸς Z Θ οὕτως τὸ ὑπὸ B Z, Z A πρὸς τὸ ὑπὸ Θ Z, Z A, τουτέστι τὸ A Θ παραλληλόγραμμον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς E Z ἴσον ἐστὶ τῷ A Θ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν A H τρίτην ἀνάλογον, πλάτος ἔχον τὴν A Z, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ὑπὸ H K Θ ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ A H B. καλείσθω δὲ ἡ μὲν A B πλαγία τοῦ εἴδους πλευρά, ἡ δὲ A H ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά.

Ex quibus manifeste constat, cylindri sectionem A B Γ ellipsim esse. quæcunque enim hoc loco demonstrata sunt inesse huic sectioni, omnia similiter & coni ellipsi insunt, ut demonstratum est in elementis conicis, theoremate quinto decimo [libri primi] iis saltem qui ejus theorematis vim rite perceperint: & nos quoque in nostris in idipsum commentariis geometrice demonstravimus *.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, φανερόν ἐστιν ὅτι ἡ A B Γ τοῦ κυλίνδρου τομὴ ἔλλειψίς ἐστιν. ὅσα γὰρ ἐνταῦθα τῇ τομῇ ἐδείχθη ὑπάρχοντα, πάντα ὁμοίως καὶ ἐπὶ τοῦ κώνου τῇ ἐλλείψει ὑπῆρχον· ὡς ἐν τοῖς κωνικοῖς δείκνυται, θεωρήματι ιε', τοῖς δυναμένοις λέγειν τὴν ἀκρίβειαν τοῦ θεωρήματος· καὶ ἡμεῖς ἐν τοῖς εἰς αὐτὰ ὑπομνήμασιν γεωμετρικῶς ἀπεδείξαμεν.

Prop. XVII. *Theor.*

Si in cylindri sectione conjugatæ diametri sint; & fiat ut secunda diameter ad diametrum ita diameter ad aliam quampiam: quæ à sectione ad secundam diametrum ordinatim applicatur poterit spatium quod adjacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam quæ inter ordinatim applicatam & sectionem interjicitur, deficiens vero figura simili ei quæ sub secundâ diametro & tertia proportionali inventâ continetur.

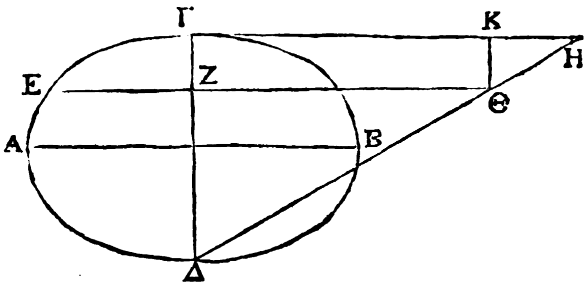
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Ἐὰν ἐν κυλίνδρου τομῇ συζυγεῖς διάμετροι ὦσι, καὶ ποιηθῇ ὡς ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς ἄλλην τινά· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον ἀχθῇ τεταγμένως, δυνήσεται τὸ παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον, πλάτος ἔχον τὴν ὑπ' αὐτῆς τεταγμένως ἀχθείσης ἀπολαμβανομένην πρὸς τῇ τομῇ, ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου καὶ τῆς πορισθείσης τρίτης ἀνάλογον.

* Vide *Eutocii* Comment. in prop. XVI. lib. primi Conicorum *Apollonii*.

ΕΣΤΩ

ΕΣΤΩ κυλίνδρου τομὴ ἡ ΑΒΓΔ, καὶ γενέσθω ὡς ἡ ΓΔ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν ΑΒ διάμετρον οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΗ, καὶ κείσθω ἡ ΓΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ, καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΕΖ, καὶ παρὰ μὲν τὴν ΓΗ ἡ ΖΘ, παρὰ δὲ τὴν ΓΔ ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΘ παραλληλογράμμῳ.



Ἐπεὶ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΗ, τουτέστιν ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΖ, ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ταῦτα γὰρ ἐδείχθη· ὡς δὲ ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΖ, ΖΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖ, ΖΓ, τουτέστι τὸ ΓΘ ὀρθογώνιον· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ΓΘ, ὃ παραβέβληται παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον τὴν ΓΗ, πλάτος ἔχον τὴν ΖΓ, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ὑπὸ ΘΚΗ ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΔΓΗ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ταῦτα σαφέστατα παρακολουθεῖ τῇ ἐλλείψει ἐν τῷ ιε΄. θεωρήματι τοῦ πρώτου τῶν κωνικῶν· ἔλλειψις ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒΓΔ τομὴ τοῦ κυλίνδρου.

SIT cylindri sectio ΑΒΓΔ, & fiat ut ΓΔ secunda diameter ad diametrum ΑΒ ita ΑΒ ad ΓΗ; ponaturque ΓΗ ad rectos angulos ipsi ΓΔ, & jungatur ΔΗ; deinde ad ΓΔ ordinatim applicetur ΕΖ, & ducatur ΖΘ quidem ipsi ΓΗ parallela, ΘΚ vero parallela ipsi ΓΔ: dico quadratum ex ΕΖ parallelogrammo ΓΘ æquale esse.

Quoniam enim ut quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΑΒ, ita recta ΓΔ ad ipsam ΓΗ, hoc est ΔΖ ad ΖΘ; ut autem quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΑΒ ita rectangulum ΔΖΓ ad quadratum ex ΕΖ, quod [per 15. huj.] demonstratum jam est: ut autem ΔΖ ad ΖΘ ita rectangulum ΔΖΓ ad rectangulum ΘΖΓ, hoc est ad ΓΘ: quadratum igitur ex ΕΖ æquale est rectangulo ΓΘ, quod quidem adjacet tertiæ proportionali ΓΗ, latitudinem habens ΖΓ, deficiens vero figura ΘΚΗ simili ei quæ sub ΔΓΗ continetur. quod erat demonstrandum.

Hæc autem manifestissime conveniunt ellipsi, ut ex quinto decimo theoremate primi Conicorum apparet: unde sequitur sectionem cylindri ΑΒΓΔ necessario ellipsim esse.

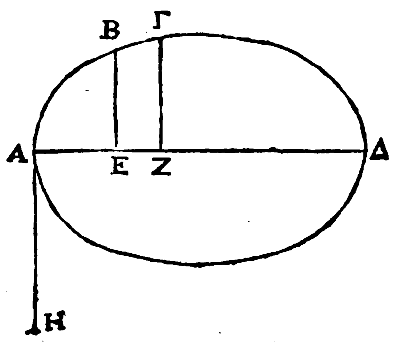
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη΄.

Ἐὰν ἐν κυλίνδρου τομῇ εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως· ἔσται τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς μὲν τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς, ὡς τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν· πρὸς ἑαυτὰ δὲ ὡς τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν, ὡς εἴρηται, ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν.

Prop. XVIII. *Theor.*

Si in sectione cylindri rectæ lineæ ad diametrum ordinatim applicentur: erunt quadrata earum ad spatia contenta eis quæ inter ipsas & terminos transversi lateris figuræ interjiciuntur, ut rectum figuræ latus ad transversum; inter sese vero ut spatia, quæ rectis modo dicto intercepta continentur.

ΕΣΤΩ κυλίνδρου τομὴ ἡ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΔ καὶ πλαγία πλευρὰ τοῦ εἴδους, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΑΗ, καὶ ἐπὶ τὴν ΑΔ τεταγμένως ἤχθωσαν αἱ ΒΕ, ΓΖ· λέγω ὅτι τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΗΑ πρὸς ΑΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΔ.



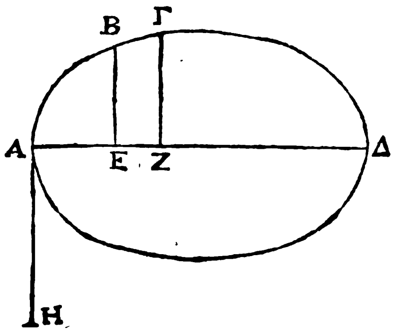
Ἐπεὶ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου οὕτως τό τε ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ, καὶ ἡ ΑΗ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν ΑΔ πλαγίαν· ὡς ἄρα ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ

SIT cylindri sectio ΑΒΓΔ, cujus diameter quidem & transversum figuræ latus ΑΔ, rectum vero latus ΑΗ, & ad ipsam ΑΔ ordinatim applicentur ΒΕ, ΓΖ: dico ut quadratum ex ΒΕ ad rectangulum ΑΕΔ ita esse ΗΑ ad ΑΔ, & quadratum ex ΒΕ ad quadratum ex ΓΖ sicut rectangulum ΑΕΔ ad rectangulum ΑΖΔ.

Quoniam enim ut quadratum secundæ diametri ad diametri quadratum ita est quadratum ex ΒΕ ad rectangulum ΑΕΔ, & ita ΑΗ rectum latus ad transversum ΑΔ: erit ut rectum latus ad transversum ita quadratum ex ΒΕ ad rectangulum ΑΕΔ. similiter autem & quadratum ex ΓΖ ad rectangulum ΑΖΔ: quare & permutando

tando ut quadratum ex B E ad quadratum ex Γ Z ita erit rectangulum A E Δ ad rectangulum A Z Δ. quod erat demonstrandum. & hæc in ellipsi contingere demonstratum est in Conicis, theoremate vigesimo primo.

Ex aliis quidem multis sectiones easdem esse ostendere possumus, per ea quæ ipsis communiter accidunt; verum principaliora accidentia fere jam dicta sunt. & cum hucusque progressus fuerim, non ad me attinet, eorum quæ restant singula persequentem, in alienis versari: necesse est enim eum, qui de ellipsi subtiliter differere velit, in medium afferre quæcunque de ipsa ab *Apollonio Pergæo* conscripta sunt.

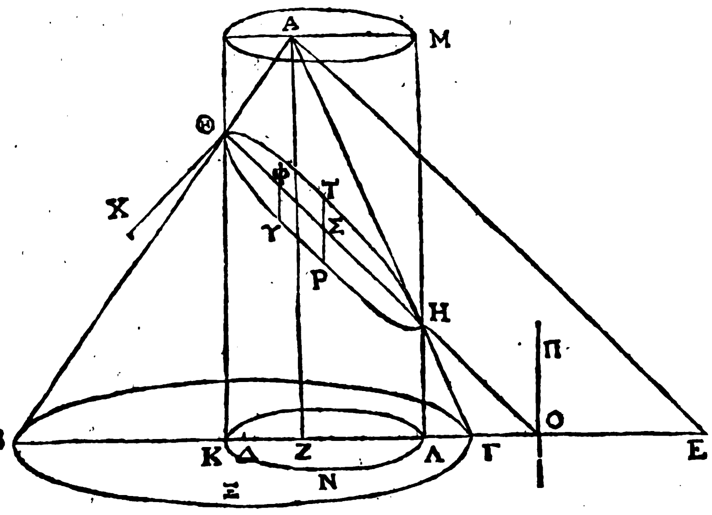


sed si cui forte lubeat rem ulterius contemplari, licebit hæc comparare cum iis quæ in primo Conicorum libro traduntur; & exinde propositi veritatem confirmare: etenim quæcunque in illis contingunt circa coni sectionem ellipsin vocatam, eadem & circa sectionem cylindri contingere, ex iis quæ hoc loco demonstrata sunt, facile inveniet. quare ab his abstinens, cum lemmatia nonnulla apposuero, quæ sectiones plane easdem esse ostendunt, ad alia me convertam.

Prop. XIX. *Theor.*

Itaque dico fieri posse, ut conum simul & cylindrum una eademque ellipsi sectos ostendamus.

Constituatur triangulum scalenum A B Γ super basim B Γ, quæ bifariam secetur in Δ; sitque A B major quam A Γ; & ad rectam lineam Γ A ad A punctum constituatur angulus Γ A E, qui vel major sit angulo A B Γ, vel minor; occurrat autem A E ipsi B Γ E in puncto E; & inter B E, E Γ media proportionalis sit E Z; junctaque A Z, ducatur in triangulo recta Θ H ipsi A E parallela; & per puncta Θ, H ducantur Θ K, Λ H M parallelæ ipsi A Z, & compleatur parallelogrammum K M; deinde, juxta rectam B E ducto plano ad rectos angulos super planum B A E, describatur in eo, circa diametrum quidem K Λ, circulus K N Λ, qui cylindri basis erit cujus parallelogrammum per axem est K M; circa diametrum vero B Γ descri-



ἀπὸ τῆς B E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ Z οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν A E Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A Z Δ. ὃ προέκειτο δεῖξαι. καὶ ταῦτα δέδεικται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐν τοῖς κωνικοῖς θεωρήματι κα΄.

Ἔστι μὲν οὖν δι᾽ ἑτέρων πλείστων ἀποδεῖξαι τὴν ταυτότητα τῶν τομῶν διὰ τῶν κοινῇ συμβαινόντων αὐταῖς· οὐ μὴν ἀλλὰ τάγε ἀρχικώτερα τῶν συμπτωμάτων εἴρηται σχεδόν. ἐπεί τοι μέχρι τοῦδε προαχθείσης τῆς θεωρίας, οὐκ ἐμοὶ ἥκει, τοὐντεῦθεν ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἕκαστα δείξαντι, τοῖς ἀλλοτρίοις ἐνδιατρίβειν· ἀνάγκη γάρ που λεπτολογοῦντα περὶ ἐλλείψεως ἐπισυκλῆσαι καὶ τὰ τῷ Περγαίῳ Ἀπολλωνίῳ τεθεωρημένα περὶ αὐτῆς. ἀλλ᾽ ὅτῳ φίλον δὴ περαιτέρω σκοπεῖν, ταῦτα παραθέντι τοῖς ἐν τῷ πρώτῳ τῶν κωνικῶν εἰρημένοις, ἔξεστι αὐτῷ δι᾽ αὐτοῦ βεβαιῶσαι τὸ προκείμενον· ὅσα γὰρ ἐν ἐκείνοις περὶ τὴν τοῦ κώνου τομὴν συμβαίνοντα, τὴν καλουμένην ἔλλειψιν, τοσαῦτα καὶ περὶ τὴν τοῦ κυλίνδρου τομὴν ἐκ τῶν ἐνταῦθα προδεδειγμένων εὑρήσει συμβαίνοντα. διόπερ τούτου μὲν ἀποστάς, ὀλίγα δὲ ἄττα λημμάτια προσθείς, δι᾽ ὧν καὶ αὐτῶν ἐνδείκνυται πῶς ἡ τῶν τομῶν ταυτότης, ἐπ᾽ ἄλλό τι τρέψομαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ΄.

Λέγω τοίνυν ὅτι δυνατόν ἐστι δεῖξαι κῶνον ὁμοῦ καὶ κύλινδρον μιᾷ καὶ τῇ αὐτῇ τεμνομένους ἐλλείψει.

Ἐκκείσθω τρίγωνον σκαληνὸν τὸ A B Γ ἐπὶ τῆς B Γ βάσεως δίχα τεμνομένης κατὰ τὸ Δ, καὶ μείζων ἔστω ἡ A B τῆς A Γ, καὶ πρὸς τῇ Γ A εὐθείᾳ καὶ τῷ A σημείῳ συνεστάτω γωνία ἡ ὑπὸ τῶν Γ A, A E, ἢ μείζων ἢ ἐλάττων τῆς A B Γ γωνίας, καὶ συμπιπτέτω ἡ A E τῇ B Γ E κατὰ τὸ E, καὶ τῶν B E, E Γ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ E Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ A Z, καὶ τῇ A E παράλληλος ἐν τῷ τριγώνῳ διήχθω ἡ Θ H, καὶ διὰ τῶν Θ, H σημείων τῇ A Z παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ Θ K, Λ H M, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ K M παραλληλόγραμμον· καὶ, διὰ τῆς B E ἀχθέντος ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς τῷ B A E ἐπιπέδῳ, γεγράφθω ἐν τῷ ἀχθέντι, περὶ μὲν τὴν K Λ διάμετρον, ὁ K N Λ κύκλος, βάσις ἐσόμενος κυλίνδρου οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ K M· περὶ δὲ τὴν B Γ διάμετρον

διάμετρον ὁ ΒΞΓ κύκλος, βάσις ἐσόμενος κώνου οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνόν ἐστι τὸ ΑΒΓ· καὶ τῆς ΘΗ ἐκβληθείσης ἐπὶ τὸ Ο, ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΕ ἡ ΟΠ, ἐν τῷ τῶν κύκλων ἐπιπέδῳ οὖσα, καὶ ἤχθω διὰ τῶν ΟΠ, ΟΘ εὐθειῶν ἐπίπεδον· ποιήσει δὴ τομὴν ἐν τῷ κώνῳ τῷ ἐπὶ τῆς ΒΞΓ βάσεως. ποιείτω τὴν ΘΡΗ· ἡ ΘΗ ἄρα εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς. τῆς οὖν ΘΗ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ Σ, κατήχθωσαν τεταγμένως ἐπ' αὐτήν, δευτέρα μὲν διάμετρος ἡ ΡΣΤ, τυχοῦσα δὲ ἡ ΥΦ, καὶ γενέσθω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ διαμέτρου τῆς ΘΡΗ τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΡΤ δευτέρας διαμέτρου τῆς αὐτῆς τομῆς, οὕτως ἡ ΘΗ πλαγία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν ΘΧ ὀρθίαν.

Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΘΚ τῇ ΑΖ παράλληλός ἐστιν, ἡ δὲ ΘΟ τῇ ΑΕ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΘΟ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΟ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΓ * οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ διαμέτρου τῆς τοῦ κώνου τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΡΤ δευτέρας διαμέτρου τῆς αὐτῆς τομῆς· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΟ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΟΚ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, τουτέστιν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ὡς ἐδείχθη πρότερον· ἡ ἄρα δευτέρα διάμετρος τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς ἴση ἐστὶ τῇ ΡΤ δευτέρᾳ διαμέτρῳ τῆς τοῦ κώνου τομῆς. καί ἐστιν ἡ διχοτομία τῆς ΘΗ κατὰ τὸ Σ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἄγεται τῇ ΘΗ δευτέρα διάμετρος τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ὥσπερ καὶ ἡ ΡΤ· ἡ ἄρα ΡΤ δευτέρα διάμετρός ἐστι τοῦ τε κώνου καὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς. ὁμοίως δὲ ἡ ΘΗ διάμετρός ἐστι τῆς τοῦ κώνου καὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς· τὸ Ρ ἄρα σημεῖον ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἐν ταῖς τομαῖς τοῦ τε κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου αἱ αὐταί εἰσι διάμετροι, ἥ τε ΘΗ καὶ ἡ ΡΤ· καὶ ἡ τρίτη ἄρα ἀνάλογον ἡ αὐτή, τουτέστιν ἡ ΘΧ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά· ἡ ἄρα ΘΧ καὶ ἐπὶ τῆς κυλίνδρου τομῆς ὀρθία ἐστὶ τοῦ εἴδους πλευρά. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΘΧ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΗΦ, ΦΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΦΥ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ὡς ἡ πλαγία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως καὶ ποιούσης τὰ τμήματα· καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἄρα τομῆς ὡς ἡ ΘΗ πλαγία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν ΘΧ ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΗΦ, ΦΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἴσης τῇ ΥΦ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας ἀγομένη ἐπὶ τὴν ΘΗ. ἀλλ' ἡ ἴση τῇ ΥΦ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἀγομένη κατὰ τὸ Φ οὐχ ἑτέρα ἐστὶ τῆς ΥΦ· ἡ ἄρα ΦΥ καὶ ἐν τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶ τομῇ· τὸ ἄρα Υ σημεῖον, ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας ὄν, καὶ ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἐπιφανείας. ὁμοίως δὲ δείκνυται, κἂν ὁσασοῦν ὁμοίως τεταγμένως ἀγάγωμεν· ἡ ΘΡΗ ἄρα γραμμὴ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις ἐστὶν ἀμφοτέρων τῶν σχημάτων· ἡ ΘΡΗ ἄρα τομὴ μία καὶ αὐτὴ ἐν ἀμφοτέροις ἐστὶ τοῖς σχήμασι. καὶ ἐπεὶ κατεσκευάσθη ἡ ὑπὸ ΓΑ, ΑΕ γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΗ, ΗΘ, ἤτοι μείζων ἢ ἐλάττων οὖσα

batur circulus ΒΞΓ, pro base coni cujus triangulum per axem sit ΑΒΓ; &, protractâ ΘΗ ad Ο, ducatur in circulorum plano recta ΟΠ ad rectos angulos ipsi ΒΕ; perque ΟΠ, ΟΘ ducatur planum: faciet igitur sectionem in cono cujus basis circulus ΒΞΓ. sit autem ea sectio ΘΡΗ; recta igitur ΘΗ diameter est sectionis: eâ ideo bifariam divisâ in Σ, ad ipsam ordinatim applicetur secunda diameter ΡΣΤ, & alia quævis ΥΦ; fiatque ut quadratum ex ΘΗ diametro sectionis ΘΡΗ, ad quadratum ex ΡΤ secundâ diametro ejusdem sectionis, ita ΗΘ transversum figuræ latus ad rectum ΘΧ.

Quoniam igitur ΘΚ quidem ipsi ΑΖ parallela est, ΘΟ vero ipsi ΑΕ: erit ut quadratum ex ΑΕ ad quadratum ex ΕΖ ita quadratum ex ΘΟ ad quadratum ex ΚΟ. sed ut quadratum ex ΑΕ ad rectangulum ΒΕΓ * ita quadratum ex ΘΗ diametro sectionis coni ad quadratum ex ΡΤ secundâ diametro ejusdem sectionis; ut autem quadratum ex ΘΟ ad quadratum ex ΟΚ ita quadratum ex ΘΗ ad quadratum ex ΚΛ, hoc est, ita quadratum ex ΘΗ diametro sectionis cylindri ad quadratum secundæ diametri ejusdem cylindri sectionis, sicut demonstratum est superius: quare secunda diameter sectionis cylindri æqualis est ipsi ΡΤ secundæ diametro sectionis coni. dividiturque ΘΗ bifariam in puncto Σ, & ipsi ad rectos angulos ducitur secunda diameter sectionis cylindri, quemadmodum & ipsa ΡΤ: ergo ΡΤ secunda diameter est sectionis tum coni tum cylindri. similiter & ΘΗ est diameter sectionis coni & cylindri: & propterea punctum Ρ & in coni & in cylindri superficie erit. rursus quoniam in sectionibus coni & cylindri eædem diametri sunt ΘΗ, ΡΤ, tertia etiam proportionalis eadem erit; hoc est ΘΧ rectum latus figuræ sectionis coni: quare ΘΧ & in cylindri sectione rectum est figuræ latus. quoniam igitur ut ΘΗ ad ΘΧ ita rectangulum ΗΦΘ ad quadratum ex ΦΥ; atque ostensum est in cylindri sectione, ut transversum figuræ latus ad rectum ita rectangulum sub diametri partibus contentum ad quadratum ejus quæ ad ipsam ordinatim applicata partes efficit: erit & in cylindri sectione ut ΘΗ transversum figuræ latus ad ΘΧ rectum ita rectangulum ΗΦΘ ad quadratum rectæ ipsi ΥΦ æqualis & sub angulis æqualibus ad ipsam ΘΗ ductæ. sed recta, æqualis ipsi ΥΦ & sub æqualibus angulis cum ipsa ΘΗ ad punctum Φ occurrens, non alia est quam ipsa ΥΦ; ergo ΦΥ & in cylindri sectione erit: ac propterea punctum Υ, in coni superficie existens, in cylindri etiam erit superficie. simili modo demonstratio fiet & in aliis, quæ ad ipsam ordinatim applicabuntur; linea igitur ΘΡΗ in superficiebus utriusque figuræ continetur: quare ΘΡΗ una eademque sectio est in utraque figura. præterea quoniam angulus ΓΑΕ, hoc est, angulus ΑΗΘ, factus est vel major vel minor angulo qui ad Β, se-

* Hoc est ad quadratum ex ΕΖ, per constructionem.

ctio

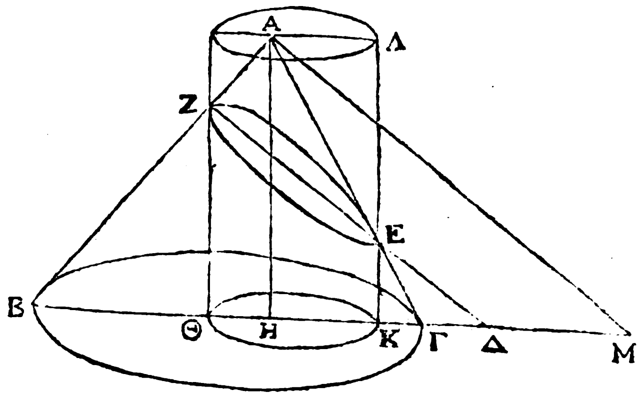
ctio non erit subcontraria; ideoque sectio ΘΡΗ non est circulus; ellipsis igitur est: quare sectio coni expositi ac cylindri eadem ellipsis erit. quod erat demonstrandum.

τῆς πρὸς τῷ Β· ἡ ἄρα τομὴ οὐκ ἔστιν ὑπεναντία· ἡ ΘΡΗ ἄρα τομὴ οὐκ ἔστι κύκλος· ἔλλειψις ἄρα ἐστίν· ϗ τοῦ κώνου ἄρα τοῦ ἐκκειμένου ϗ τοῦ κυλίνδρου τομὴ ἡ αὐτὴ ἔλλειψίς ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XX. *Probl.*

Cono dato & in eo ellipsi; invenire cylindrum eadem ellipsi sectum, quâ conus sectus est.

SIT datus conus, cujus per axem triangulum sit ΑΒΓ; & data in ipso ellipsis cujus diameter ΖΕ: protrahatur ea ad Δ, & ipsi ΖΔ parallela ducatur ΑΜ occurrens ipsi ΒΔ protractæ ad Μ; interque ΒΜ, ΜΓ media proportionalis sit ΜΗ; &, junctâ ΑΗ, per puncta Ζ, Ε ducantur ΖΘ, ΚΕΛ parallelæ ipsi ΑΗ; & compleatur parallelogrammum ΘΛ. itaque si concipiamus cylindrum, cujus basis quidem sit circulus circa diametrum ΘΚ, parallelogrammum vero per axem ΘΛ: erit & in ipso cylindro sectio, cujus diameter ΖΕ. & simili modo, atque in antecedenti theoremate, demonstrabimus secundam diametrum eandem esse, easdemq; omnes quæ ad diametrum ordinatim applicantur: inventus igitur est cylindrus, quæ secatur eadem ellipsi qua conus datus. quod erat faciendum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κʹ.

Κώνου δοθέντος ϗ ἐλλείψεως ἐν αὐτῷ· εὑρεῖν κύλινδρον τεμνόμενον τῇ αὐτῇ ἐλλείψει τοῦ κώνου.

ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κῶνος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα ἐν αὐτῷ ἔλλειψις ἧς διάμετρος ἡ ΖΕ, ἥτις ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, ϗ παράλληλος ἔστω τῇ ΖΔ ἡ ΑΜ συμπίπτουσα τῇ ΒΔ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Μ, ϗ τῶν ΒΜ, ΜΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΜΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ, ϗ διὰ τῶν Ζ ϗ Ε σημείων τῇ ΑΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΘ, ΚΕΛ, ϗ συμπεπληρώσθω τὸ ΘΛ παραλληλόγραμμον. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κύλινδρον, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΘΚ κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΘΛ, ἔσται καὶ ἐν τῷ κυλίνδρῳ τομὴ ἧς διάμετρός ἐστιν ἡ ΖΕ. ὁμοίως δὲ τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι δειχθήσεται καὶ ἡ δευτέρα διάμετρος ἡ αὐτὴ οὖσα, ϗ πᾶσαι αἱ τεταγμένως ἀγόμεναι· εὕρηται ἄρα κύλινδρος, ὃς τέμνεται τῇ δοθείσῃ ἐλλείψει τοῦ δοθέντος κώνου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXI. *Probl.*

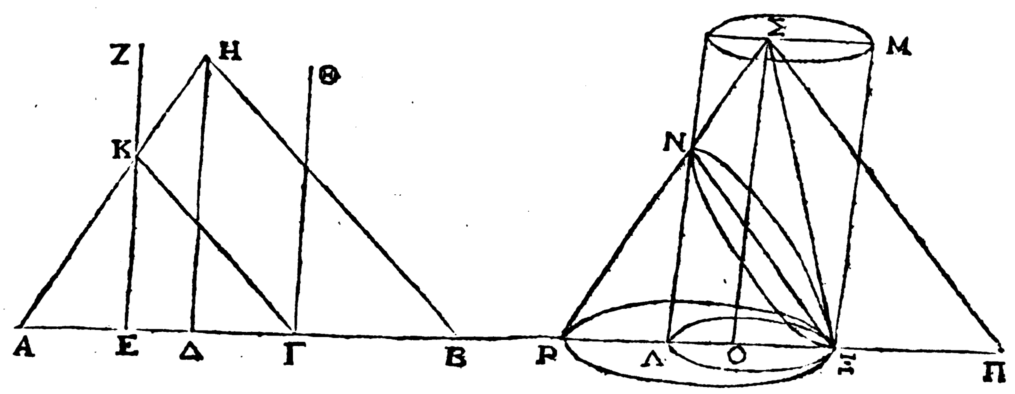
Cylindro dato & in eo ellipsi; invenire conum eadem ellipsi sectum qua cylindrus sectus est.

EXPONATUR seorsum recta linea ΑΒ, & in ea sumatur quodvis punctum Δ, fiatque ut ΑΒ ad ΒΔ ita ΒΔ ad ΒΓ, ut autem

ΠΡΟΤΑΣΙΣ καʹ.

Κυλίνδρου δοθέντος ϗ ἐλλείψεως ἐν αὐτῷ· εὑρεῖν κῶνον τεμνόμενον τῇ αὐτῇ ἐλλείψει τοῦ κυλίνδρου.

ΕΚΚΕΙΣΘΩ ἔξωθεν εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, ϗ τυχὸν σημεῖον ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ Δ, καὶ γενέσθω ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ, ὡς δὲ



ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ ad ΔΕ, & à punctis Ε, Δ, Γ attollantur rectæ lineæ ΕΖ, ΔΗ, ΓΘ, quæ

ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ, ϗ ἀπὸ μὲν τῶν Ε, Δ, Γ σημείων τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς οἵαν δήποτε πρὸς γωνίαν, ἐφεστώσαν εὐθεῖαι παράλληλοι ἀλλήλαις αἱ ΕΖ, ΔΗ, ΓΘ, διὰ δὲ τοῦ Γ ἤχθω τις εὐθεῖα τέμνουσα τὰς ΕΖ, ΔΗ ἡ ΓΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΚ συμπιπτέτω τῇ ΔΗ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ.

Τούτων οὕτως ἰδίᾳ κατασκευασθέντων, ἔστω ὁ δοθεὶς κύλινδρος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΛΜ, τῆς δὲ δοθείσης ἐν αὐτῷ ἐλλείψεως διάμετρος ἔστω ἡ ΝΞ, καὶ τετμήσθω ἡ ΛΞ βάσις τοῦ παραλληλογράμμου ὁμοίως τῇ ΕΓ, ἵν᾽ ᾖ ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΞ· ἔτι γενέσθω ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞΠ, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ οὕτως ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΛΡ, καὶ διὰ τοῦ Ο ἤχθω παράλληλος ταῖς τοῦ παραλληλογράμμου πλευραῖς ἡ ΟΣ, ἡ δὲ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΡΝ συμπιπτέτω τῇ ΟΣ κατὰ τὸ Σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΠ, ΣΞ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΡΠ εὐθεῖα ὁμοίως τῇ ΑΒ τέτμηται, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς μὲν ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΟ οὕτως ἡ ΟΠ πρὸς τὴν ΠΞ, ὡς δὲ ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΞ οὕτως ἡ ΡΟ πρὸς τὴν ΟΛ, τουτέστιν οὕτως ἡ ΡΣ πρὸς τὴν ΣΝ· παράλληλος ἄρα τῇ ΝΞ ἡ ΣΠ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κῶνον, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον ΡΞ κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΣΡΞ, ἔσται καὶ ἐν τῷ κώνῳ τομή, ἧς διάμετρός ἐστιν ἡ ΝΞ. ὁμοίως δὲ τοῖς προδεδειγμένοις δειχθήσεται καὶ ἡ δευτέρα διάμετρος ἡ αὐτὴ οὖσα, καὶ πᾶσαι αἱ τεταγμέναι· τέτμηται ἄρα καὶ ὁ κῶνος τῇ αὐτῇ ἐλλείψει τοῦ δοθέντος κυλίνδρου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

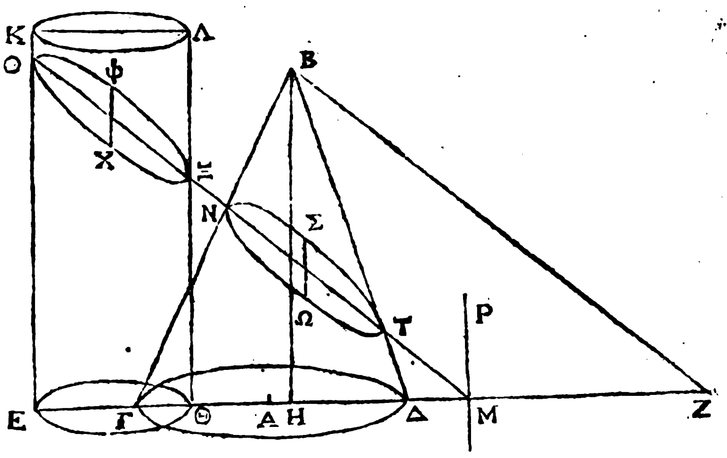
cum ipsa AB quemlibet angulum contineant: & sint inter sese parallelæ; deinde per Γ ducatur recta linea ΓΚ secans ipsas ΕΖ, ΔΗ; junctaque ΑΚ conveniat cum ΔΗ in puncto Η, & jungatur ΗΒ. *

His igitur seorsum in hunc modum præparatis, sit datus cylindrus cujus parallelogrammum per axem ΛΜ, & datæ in eo ellipseos diameter sit ΝΞ; seceturque ΛΞ basis parallelogrammi in eadem ratione, in qua secta est ΕΓ, ita ut sit ΕΔ ad ΔΓ sicut ΛΟ ad ΟΞ: rursus fiat ut ΕΓ ad ΓΒ ita ΛΞ ad ΞΠ, atque ut ΓΕ ad ΕΑ ita ΞΛ ad ΛΡ; & per Ο ducatur ΟΣ parallela ipsius parallelogrammi lateribus; ductaque ΡΝ conveniat cum ΟΣ in Σ, & jungantur ΣΠ, ΣΞ. quoniam igitur recta linea ΡΠ similiter secta est atque ipsa ΑΒ; erit ut ΡΠ ad ΠΟ ita ΟΠ ad ΠΞ. sed & ut ΡΠ ad ΠΞ ita ΡΟ ad ΟΛ, hoc est, ita ΡΣ ad ΣΝ: parallela est igitur ΣΠ ipsi ΝΞ. quod si concipiamus conum, cujus quidem basis sit circulus circa diametrum ΡΞ, triangulum vero per axem ΣΡΞ; erit etiam in eo sectio cujus diameter ΝΞ. eodemque modo quo supra, demonstrabitur & secundam diametrum eandem esse, omnesque ad diametrum ordinatim applicatas easdem: conus igitur sectus est eadem ellipsi qua datus cylindrus. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβʹ.

Κώνου δοθέντος εὑρεῖν κύλινδρον, καὶ τεμεῖν ἀμφοτέρους ἑνὶ ἐπιπέδῳ, διὰ τὸ τομὰς ποιοῦντι ἐν ἑκατέρῳ ὁμοίας ἐλλείψεις.

ΔΕΔΟΣΘΩ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὸ Α κέντρον κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Β σημεῖον, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΓΒΔ, πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει τοῦ κώνου· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα ἡ ΑΓΕ, ΑΔΖ, καὶ πρὸς τῇ ΔΒ καὶ πρὸς τῷ ἐν αὐτῇ σημείῳ τῷ Β συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΖ γωνία, ἤτοι μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ ΒΓΔ ἢ ἐλάσσων· καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ, τοῦ δὲ ζητουμένου κυλίνδρου βάσις ἔστω ἤτοι ὁ Α κύκλος, ἢ καὶ ἄλλος τις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ Α κύκλῳ, οὐδὲν γὰρ διοίσει. ἔστω δὴ ὁ περὶ τὴν ΕΘ διάμετρον, καὶ διὰ τῶν Ε, Θ σημείων παράλληλοι τῇ ΒΗ εὐθείᾳ ἤχθωσαν αἱ ΕΚ, ΘΛ· ἐν τῷ



PROP. XXII. *Probl.*

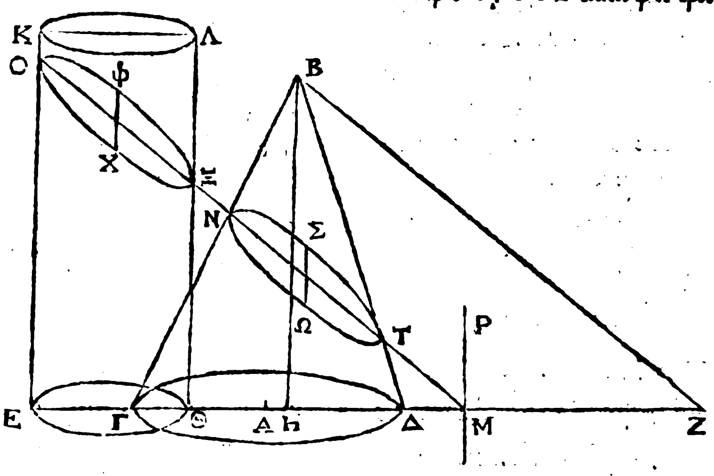
Cono dato invenire cylindrum, & utrumque eodem plano secare, ita ut sectiones faciat in utrisque ellipses similes.

SIT conus datus, cujus basis quidem circulus circa centrum Α, vertex punctum Β, triangulum vero per axem ΓΒΔ ad basim coni rectum; producaturque in utramque partem ΑΓΕ, ΑΔΖ; ac ad rectam lineam ΔΒ & ad punctum Β constituatur angulus ΔΒΖ vel major vel minor ipso ΒΓΔ; atque inter ΓΖ, ΖΔ media proportionalis sumatur ΖΗ, & jungatur ΒΗ; cylindri autem quæsiti basis sit vel circulus Α, vel alius aliquis in eodem plano quo circulus Α existens; nihil enim differt. itaque sit is circulus circa diametrum ΕΘ; & per puncta Ε, Θ ipsi ΒΗ parallelæ ducantur ΕΚ, ΘΛ: eodem igitur plano sunt in quo triangulum

* *Hoc loco desunt nonnulla in hunc sensum*: Et per jam ostensa, ΓΚ diameter erit ellipseos, communis nempe sectionis tam coni cujus basis est circulus diametro ΑΓ ac vertex Η, quam cylindri cujus basis est ΓΒ & planum per axem ΖΕΓΘ; sive cylindrus rectus fuerit, sive sub quolibet angulo scalenus.

ΓΒΔ. & quoniam BZ ſecat BH, ſi producatur, ſecabit etiam omnes, quæ ipſi BH parallelæ ſunt, in infinitum productas: ac proinde ipſi BZ parallelæ ſecabunt eas quæ rectæ BH parallelæ ſunt. ducatur igitur MN ipſi BZ parallela, quæ producta ſecet ΘΛ, EK in punctis Ξ, O; ipſi vero EΘ parallela ducatur KΛ; & circa diametrum KΛ deſcribatur circulus æquidiſtans ei qui eſt circa EΘ: concipietur itaque cylindrus, cujus baſes quidem circuli EΘ, KΛ, parallelogrammum vero per axem KΘ, quod ad baſim rectum ſit. ſi igitur per M ducatur recta MP ad rectos angulos ipſi ΓΔZ, quæque ſit in eodem plano in quo circulus A; & per rectas MP, MO planum ducatur: faciet illud ſectionem in cono quidem ellipſim NΣT, cujus diameter NT; in cylindro vero ellipſim OΦΞ, cujus diameter OΞ: dico ellipſim NΣT ipſi OΦΞ ſimilem eſſe.

αὐτῷ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ ΓΒΔ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ BZ τέμνει τὴν BH, ἡ BZ ἄρα ἐκβαλλομένη πάσας τὰς τῇ BH παραλλήλους ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένας τέμνει· καὶ αἱ παράλληλοι οὖν τῇ BZ πάσας τὰς τῇ BH παραλλήλους τέμνουσιν. ἤχθω τῇ BZ παράλληλος ἡ MN, καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὰς ΘΛ, EK κατὰ τὰ Ξ, O σημεῖα, καὶ τῇ EΘ παράλληλος ἤχθω ἡ KΛ, καὶ περὶ τὴν KΛ διάμετρον κύκλος παράλληλος τῷ περὶ τὴν EΘ· νοήσεται δὴ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ EΘ, KΛ κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ KΘ δηλονότι, καὶ αὐτὸ πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει. καὶ ἐὰν διὰ τοῦ M τῇ ΓΔZ πρὸς ὀρθὰς ἀγάγωμεν τὴν MP, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαν τῷ A κύκλῳ, καὶ διὰ τῶν MP, MO διεκβάλλωμεν ἐπίπεδον, ποιήσει ἐν μὲν τῷ κώνῳ τὴν NΣT ἔλλειψιν, ἐν δὲ τῷ κυλίνδρῳ τὴν OΦΞ, διάμετροι δὲ τῆς μὲν ἡ NT, τῆς δὲ ἡ OΞ· λέγω δὴ ὅτι ἡ NΣT ἔλλειψις τῇ OΦΞ ἐλλείψει ὁμοία ἐστίν.



Quoniam enim OM, BZ parallelæ ſunt inter ſe, itemque parallelæ EK, ΘΛ, BH, & recta EZ communiter omnes ſecat; erit ut MO ad ME, hoc eſt ut OΞ ad ΘE, ita BZ ad ZH: quare ut quadratum ex OΞ ad quadratum ex ΘE, ita quadratum ex BZ ad quadratum ex ZH, hoc eſt ad rectangulum ΓZΔ [per conſtructionem.] ſed ut quadratum ex OΞ ad quadratum ex ΘE ita quadratum diametri OΞ ad quadratum conjugatæ diametri, videlicet ipſius ΦX. ut autem quadratum ex BZ ad rectangulum ΓZΔ ita [per 15. 1. conic.] quadratum diametri NT ad quadratum conjugatæ diametri ΣΩ: ergo ut quadratum ex OΞ ad quadratum ex ΦX ita quadratum ex NT ad quadratum ex ΣΩ; ac propterea ut OΞ ad conjugatam ΦX ita NT ad diametrum conjugatam ΣΩ. at vero diametrum OΞ ſecare ΦX ad rectos angulos, itemque NT ſimiliter ſecare ΣΩ, manifeſte apparet; quia ipſas ΦX, ΩΣ, & inter ſeſe & ipſi MP parallelas, recta linea MO ad rectos angulos ſecat: ſectio igitur OΦΞ ſimilis eſt ſectioni NΣT. neutra autem earum eſt circulus, quippe quia ſectio ſubcontraria non ſit; angulus enim ΔBZ, videlicet BTN, non eſt æqualis angulo BΓΔ: quocirca utraque ſectionum OΦΞ, NΣT ellipſis eſt, ſuntque ſimiles inter ſeſe. quod erat faciendum.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ OM, BZ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις· ἀλλὰ καὶ αἱ EK, ΘΛ, BH παράλληλοι ἀλλήλαις, κοινὴ δὲ ἡ EZ τέμνει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ MO πρὸς τὴν ME, τουτέστιν ὡς ἡ OΞ πρὸς τὴν ΘE, οὕτως ἡ BZ πρὸς τὴν ZH· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς OΞ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς OΞ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς OΞ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, φέρε τῆς ΦX. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς BZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς NT διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, φέρε τῆς ΣΩ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς OΞ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΦX οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς NT πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΣΩ· καὶ ὡς ἡ OΞ ἄρα πρὸς τὴν ΦX συζυγῆ διάμετρον οὕτως καὶ ἡ NT πρὸς τὴν ΣΩ συζυγῆ διάμετρον. ὅτι δὲ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας τέμνουσιν, ἥτε OΞ τὴν ΦX, καὶ ἡ NT τὴν ΣΩ, δῆλον· τὰς γὰρ ΦX, ΩΣ, παραλλήλους οὔσας ἀλλήλαις τε καὶ τῇ MP, ἡ MO τέμνει· ἡ ἄρα OΦΞ τομὴ τῇ NΣT τομῇ ὁμοία ἐστί. καὶ οὐκ ἔστι κύκλος οὐδετέρα αὐτῶν, διὰ τὸ μὴ ὑπεναντίαν εἶναι τὴν τομήν· τῆς ὑπὸ τῶν ΔBZ γωνίας, τουτέστι τῆς ὑπὸ τῶν BTN, ἀνίσου οὔσης τῇ ὑπὸ τῶν BΓ, ΓΔ· ἔλλειψις ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν OΦΞ, NΣT τομῶν, καί εἰσιν ὅμοιαι ἀλλήλαις. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

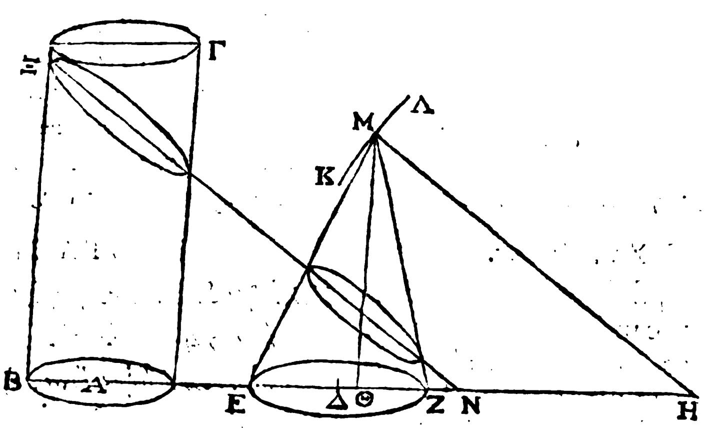
Prop. XXIII. *Probl.*

Cylindro dato invenire conum, & utroſque eodem plano ſecare, ita ut ſectiones faciat in utriſque ellipſes ſimiles.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Κυλίνδρου δοθέντος εὑρεῖν κῶνον, καὶ τέμνειν ἀμφοτέρους ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ποιοῦντι διὰ τῆς τομῆς ἐν ἑκατέρῳ ὁμοίας ἐλλείψεις.

ΔΕΔΟΣΘΩ κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ Α κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓ, πρὸς ὀρθὰς ἐν τῇ βάσει, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ· τοῦ δὲ ζητουμένου κώνου βάσις ἔστω ἤτοι ὁ Α κύκλος, ἢ καὶ ἄλλος τις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ Α, οἷον ὁ περὶ τὴν ΕΖ διάμετρον, ἐφ᾽ ἧς κέντρον τὸ Δ· καὶ ληφθέντος σημείου τυχόντος ἐπὶ τῆς ΖΗ τοῦ Η, εἰλήφθω τῶν ΕΗ, ΗΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΘΗ, καὶ κέντρῳ τῷ Η, διαστήματι δὲ ἤτοι μείζονι ἢ ἐλάττονι τοῦ ΗΘ, γεγράφθω ἐν τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ περιφέρεια κύκλου ἡ ΚΛ, καὶ διὰ τοῦ Θ ταῖς πλευραῖς τοῦ ΒΓ παραλληλογράμμου παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, καὶ τῇ ΜΗ παράλληλος ἤχθω τέμνουσα τὸ τρίγωνον καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ἡ ΝΞ. ἐὰν δὴ διὰ τῆς ΝΞ διάγωμεν ἐπίπεδον, κατὰ τὸν ἀποδειχθέντα τρόπον, ἔσται ἡ τομὴ ὁμοία ἐν ἑκατέρῳ. δεῖξις δὲ ἡ αὐτὴ τῷ περὶ τούτου. ὅτι δὲ καὶ ἐλλείψεις αἱ τομαί, καὶ οὐχὶ κύκλοι, δῆλον· τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ΜΗ ἤτοι μεῖζον κατεσκευάσθη ἢ ἔλαττον τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ.



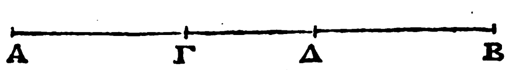
SIT cylindrus datus, cujus basis circulus Α; & parallelogrammum per axem ΒΓ super basim rectum; & producatur ΒΑ; coni vero quæsiti basis sit vel circulus Α, vel alius aliquis in eodem existens plano, qualis est cujus diameter ΕΖ, in qua centrum Δ; & sumpto quovis puncto Η in recta ΖΗ, inter ΕΗ, ΗΖ media proportionalis capiatur ΘΗ; & centro Η, intervalloque vel majore vel minore quam sit ΗΘ, describatur in plano ΒΓ circuli circumferentia ΚΛ, perque Θ ducatur ΘΜ parallelogrammi ΒΓ lateribus parallela; & jungantur ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ: dein ducatur ΝΞ ipsi ΜΗ parallela, tam triangulum quam parallelogrammum secans. itaque si per ΝΞ, eodem modo quo ante dictum est, planum ducatur, sectio in utroque similis erit. demonstratio autem eadem est quæ supra. verum sectiones ellipses esse, non circulos, perspicue constat; quadratum enim ex ΜΗ factum est vel majus vel minus quadrato ex ΗΘ, hoc est rectangulo ΕΗΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ κατὰ δύο σημεῖα, τὸ δὲ πρὸς τῷ ἑνὶ πέρατι τῆς εὐθείας τμῆμα μὴ μεῖζον ᾖ τοῦ πρὸς τῷ λοιπῷ πέρατι τμήματος, τῷ δὲ συναμφοτέρου τούτου μέσου τμήματος καὶ τοῦ λοιποῦ τετραγώνῳ ἴσον παρὰ τὸ μὴ μεῖζον τμῆμα παραβληθῇ χωρίον, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ· ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων μὲν ἔσται τοῦ μέσου τμήματος, ἐλάττων δὲ συναμφοτέρου τούτε μέσου καὶ τοῦ πρὸς τῷ λοιπῷ πέρατι τμήματος.

ΕΣΤΩ εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τετμημένη κατὰ τὰ Γ καὶ Δ, ἡ δὲ ΑΓ τῆς ΔΒ μὴ ἔστω μείζων· λέγω δὴ ὅτι ἐὰν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ ἴσον χωρίον παρὰ τὴν ΑΓ παραβληθῇ, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων μὲν ἔσται τῆς ΓΔ, ἐλάττων δὲ τῆς ΓΒ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ποιείσθω πρῶτον ἡ ΓΔ πλευρὰ εἶναι τοῦ ὑπερβλήματος. ἐπεὶ οὖν τὸ παρὰ τὴν ΑΓ παραβαλλόμενον, ὑπερβάλλον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ, ταὐτόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ· ἔστι δὲ τὸ παρὰ τὴν ΑΓ παραβαλλόμενον, ὑπερβάλλον



PROP. XXIV. *Theor.*

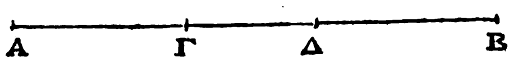
Si recta linea secetur in duobus punctis, segmentum vero quod ad unum rectæ extremum non majus sit eo quod ad alterum; applicetur autem ad non majus segmentum spatium æquale quadrato ex segmento medio & non minore simul sumpto, excedens figurâ quadratâ: latus excessus majus quidem erit medio, minus vero quam medium & quod ad alterum rectæ terminum adjacet segmentum simul sumptum.

SIT recta linea ΑΒ, quæ secetur in punctis Γ, Δ; & sit ΑΓ non major quam ΔΒ: dico si ad ΑΓ applicetur spatium æquale quadrato ex ΓΒ excedens figurâ quadratâ, latus excessûs majus quidem esse quam ΓΔ, minus vero quam ΓΒ.

Si enim fieri potest, primum ponatur ΓΔ latus esse excessus. quoniam igitur id quod ad ΑΓ applicatur, excedens quadrato ex ΓΔ, idem est ac rectangulum ΑΔΓ, quod quidem æquale est quadrato ex ΓΒ; erit rectangulum

ΑΔΓ

ΑΔΓ quadrato ex ΓΒ æquale. ſed quadratum ex ΓΒ non eſt minus quadrato ex ΑΔ; nam cum ΔΒ non ſit minor quam ΑΓ, neque erit ΓΒ minor quam ipſa ΑΔ: rectangulum igitur ΑΔΓ quadrato ex ΑΔ non eſt minus; quod fieri non poteſt. idem abſurdum ſequeretur, ſi latus exceſſus ponatur minus quam ΓΔ. Sed rurſum ſit ΓΒ exceſsûs latus; erit itaque rectangulum ΑΒΓ quadrato ex ΓΒ æquale: quod impoſſibile eſt. idemque ſequeretur, ſi latus exceſsûs ponatur majus ipſa ΓΒ: latus igitur exceſsûs majus erit quam ΓΔ, & minus quam ΓΒ.

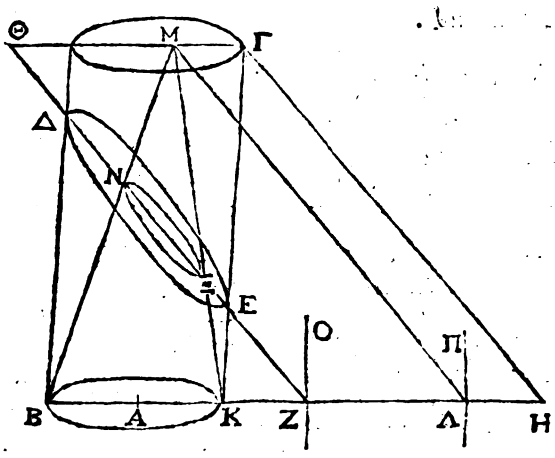


εἴδει τετραγώνῳ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ οὐκ ἔλαττον, οὐ γὰρ ἐλάττων ἡ ΔΒ τῆς ΑΓ, οὐδὲ ἡ ΓΒ τῆς ΑΔ· καὶ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνου οὐκ ἔστιν ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ δὲ αὐτὸ δειχθήσεται, εἰ καὶ ἐλάττων τῆς ΓΔ ὑποτεθείη γίνεσθαι ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος. ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος ἡ ΓΒ· ἔσται ἄρα τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ αὐτὸ δὲ συμβήσεται, εἰ καὶ μείζων τῆς ΓΒ ὑποτεθείη γίνεσθαι ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος· ἡ ἄρα πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων ἔσται τῆς ΓΔ, ἐλάττων δὲ τῆς ΓΒ·

Prop. XXV. *Theor.*

Dato cylindro ellipſi ſecto; conum conſtituere ſuper eandem baſim quam habet cylindrus, eâdemque altitudine, ita ut eodem plano ſectus ſectionem faciat ellipſin cylindri ellipſi ſimilem.

SIT datus cylindrus, cujus baſis quidem circulus circa centrum Α; parallelogrammum vero per axem ΒΓ; & in eo diameter datæ ellipſeos ſit ΕΔ, quæ producta occurrat ipſi ΒΑ in Ζ: perque Γ ducatur ΓΗ ipſi ΔΖ parallela occurrens rectæ ΒΑ in Η; &, protracta recta linea ΖΔ ad Θ, compleatur parallelogrammum ΗΘ.



Quoniam igitur parallelogrammi ΗΘ, latus ΖΗ lateri ΘΓ eſt æquale, latus autem ΘΓ non eſt minus ipſa ΒΚ; neque igitur ΖΗ ipſa ΒΚ minor erit. ſi igitur ad rectam ΒΚ applicetur ſpatium æquale quadrato ex ΚΗ excedens figurâ quadratâ, latus exceſsûs majus erit quam ΚΖ, & minus quam ΚΗ, per ea quæ proxime demonſtrata ſunt. itaque ſit latus exceſsûs ΚΛ, & per Λ ipſi ΗΓ parallela ducatur ΛΜ; junctiſque ΜΒ, ΜΚ, concipiatur conus, cujus vertex punctum Μ & baſis circulus Α; triangulumque per axem ΒΚΜ. ſi igitur intelligamus conum ſectum eodem plano à quo facta eſt ΕΔ diameter ſectionis cylindri; erit etiam in cono ſectio cujus diameter ΝΞ. & quoniam ad rectam ΒΚ applicatum eſt ſpatium æquale quadrato ex ΚΗ excedens quadrato ex ΚΛ; rectangulum ΒΛΚ quadrato ex ΚΗ æquale erit. & ſunt ΔΒ, ΚΓ inter ſe parallelæ, itemque parallelæ ſunt ΔΖ, ΜΛ, ΓΗ: ut igitur ΔΖ ad ΖΒ ita ΓΗ ad

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Κυλίνδρου δοθέντος τετμημένου ἐλλείψει· κῶνον συστήσασθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τεμνόμενον, καὶ ποιοῦντα ὁμοίαν ἔλλειψιν τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψει.

ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὸ Α κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓ, ἐν ᾧ διάμετρος τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἡ ΕΔ, ἥτις ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ΒΑ κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῇ ΔΖ διὰ τοῦ Γ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ, συμπίπτουσα τῇ ΒΑ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΖΔ ἐπὶ τὸ Θ, συμπεπληρώσθω τὸ ΗΘ παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ οὖν τοῦ ΗΘ παραλληλογράμμου ἡ ΖΗ πλευρὰ τῇ ΘΓ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ΘΓ τῆς ΒΚ οὐκ ἔστιν ἐλάττων· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΒΚ οὐκ ἔστιν ἐλάττων. ἐὰν ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΚΗ τετραγώνῳ ἴσον παραβάλλωμεν παρὰ τὴν ΒΚ ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων μὲν ἔσται τῆς ΚΖ, ἐλάττων δὲ τῆς ΚΗ, διὰ τὸ προδειχθέν. ἔστω τοίνυν ἡ ΚΛ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος, καὶ διὰ τοῦ Λ παράλληλος ἤχθω τῇ ΗΓ ἡ ΛΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΒ, ΜΚ, καὶ νενοήσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Μ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ Α κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον δηλονότι τὸ ΒΚΜ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν καὶ τὸν κῶνον τετμημένον τῷ ἐπιπέδῳ, ὑφ' οὗ γέγονεν ἡ ΕΔ διάμετρος τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς· ἔσται καὶ ἐν τῷ κώνῳ τομή, ἧς διάμετρος ἡ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΚΗ τετραγώνῳ ἴσον παρὰ τὴν ΒΚ παραβέβληται, ὑπερβάλλον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΛ, ΛΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΗ τετραγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἐπεὶ οὖν αἱ ΔΒ, ΚΓ παράλληλοι ἀλλήλαις εἰσίν, ἀλλὰ καὶ αἱ ΔΖ, ΜΛ, ΓΗ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις· ὡς ἄρα ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΒ οὕτως

ἡ ΓΗ

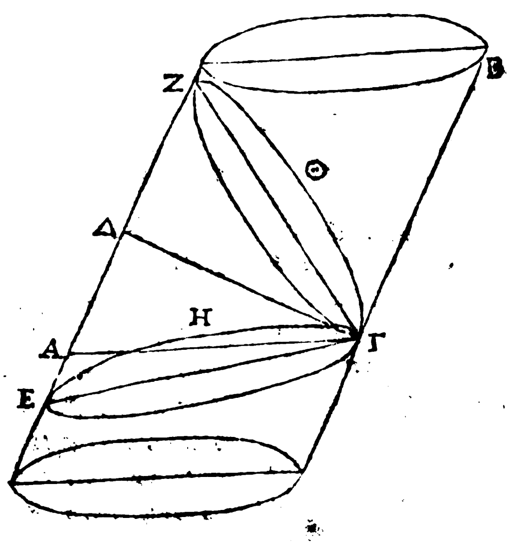
ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΛ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΛ, ΛΚ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΔ τῆς διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΛ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΛΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΝΞ τῆς τοῦ κώνου ἐλλείψεως διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τοῦ κώνου ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου· καὶ ὡς ἄρα ἡ διάμετρος τῆς ἐλλείψεως τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον, οὕτως ἡ διάμετρος τῆς τοῦ κώνου ἐλλείψεως πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον. καί εἰσιν αἱ δεύτεραι διάμετροι πρὸς ἴσας γωνίας ταῖς διαμέτροις, ἀμφότεραι γὰρ παράλληλοί εἰσι ταῖς πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΗ, τῇ ΖΟ καὶ τῇ ΛΠ· ἡ ἄρα τοῦ κώνου ἔλλειψις ὁμοία ἐστὶ τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψει, καὶ γέγονεν ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ συνέστη ὁ κῶνος ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ἅπερ ἦν τὰ ἐπιταχθέντα.

ΗΚ, & idcirco ut quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΒ ita quadratum ex ΓΗ ad quadratum ex ΗΚ, hoc est quadratum ex ΜΛ ad rectangulum ΒΛΚ. sed ut quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΒ ita quadratum ex ΕΔ ad quadratum ex ΒΚ, hoc est quadratum diametri ellipseos cylindri ΕΔ ad quadratum conjugatæ diametri; & ut quadratum ex ΜΛ ad rectangulum ΒΛΚ, ita quadratum ipsius ΝΞ diametri ellipseos coni ad conjugatæ diametri quadratum: ergo ut quadratum diametri ellipseos cylindri ad quadratum conjugatæ diametri ejus, ita quadratum diametri ellipseos coni ad quadratum conjugatæ diametri ejusdem: ut igitur diameter ellipseos cylindri ad conjugatam diametrum ejus, ita ellipseos coni diameter ad conjugatam ejus diametrum. sunt autem secundæ diametri perpendiculares ad diametros; utræque enim parallelæ sunt rectis ΖΟ, ΛΠ, quæ sunt ad rectos angulos ipsi ΒΗ: quocirca coni ellipsis ellipsi cylindri similis erit, & facta est ab eodem plano; constitutusque est conus super eandem basin & eâdem altitudine. quæ omnia fecisse oportebat.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Τὸν δοθέντα κύλινδρον ἢ κῶνον σκαληνὸν δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου μέρους ἀπειραχῶς τεμεῖν δυσὶν ἐπιπέδοις, μὴ παραλλήλως μὲν κειμένοις, ποιοῦσι δὲ ὁμοίας ἐλλείψεις.

ΕΣΤΩ πρῶτον ὁ δοθεὶς κύλινδρος σκαληνός, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου, καὶ ὑποκείσθω ἡ πρὸς τὸ Α γωνία ὀξεῖα, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ πλευρὰν ἡ ΓΔ· ἐλαχίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ πασῶν τῶν τὰς ΑΔ, ΓΒ παραλλήλους ἐμπιπτουσῶν. εἰλήφθωσαν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Δ ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΕΔ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΓ, ΓΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΓ τῇ ΖΓ. ἐὰν οὖν, κατὰ τὸν προδεδομένον τρόπον, ἀγάγωμεν διὰ τῶν ΓΕ, ΓΖ ἐπίπεδα, τεμεῖ τὸν κύλινδρον. τεμνέτω καὶ ποιείτω τὰς ΕΗΓ, ΖΘΓ ἐλλείψεις· λέγω δὴ ὅτι ὅμοιαί εἰσιν.



Ἐπεὶ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἑαυτῇ συζυγοῦς διαμέτρου, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΓ

PROP. XXVI. *Probl.*

Datum cylindrum vel conum scalenum possumus ex eadem parte infinite secare duobus planis, non æquidistanter positis, quæ ellipses similes efficiant.

SIT primum datus cylindrus scalenus, cujus per axem parallelogrammum ΑΒ rectum sit ad basim cylindri; ponaturque angulus ad Α acutus, & per Γ ducatur ΓΔ ad latus ΑΔ perpendicularis: minima igitur est ΓΔ omnium quæ inter parallelas ΑΔ, ΓΒ cadunt. sumantur ex utraque parte puncti Δ rectæ æquales ΕΔ, ΔΖ, & jungantur ΕΓ, ΓΖ: erit igitur ΕΓ ipsi ΖΓ æqualis. si igitur per ΓΕ, ΓΖ, juxta prædictum modum, plana ducantur, secabunt cylindrum. secent itaque & faciant ellipses ΕΗΓ, ΖΘΓ: dico eas inter se similes esse.

Quoniam enim ut quadratum ex ΕΓ ad quadratum ex ΓΑ, ita quadratum ex ΖΓ ad quadratum ex ΓΑ; ratio autem quadrati ex ΕΓ ad quadratum ex ΓΑ ratio est quadrati ex ΕΓ diametri sectionis ad quadratum conjugatæ diametri; & ratio quadrati ex ΖΓ ad quadratum ex ΑΓ ratio est quadrati diametri sectionis ΖΓ ad quadratum conjugatæ ipsi diametri: erit ut ΕΓ

diameter

diameter ad conjugatam ejus diametrum, ita & diameter ZΓ ad conjugatam ipsi diametrum. sed & ad æquales angulos secantur utræque diametri, [ut] sæpius ostensum est: ergo similes inter se sunt EHΓ, ZΘΓ ellipses. quod si alias sumpseris æquales rectas ex utraque parte puncti Δ, rursus aliæ duæ ellipses inter se similes constituentur, idque in infinitum. notandum autem est in cylindro ellipses ex eadem parte similes etiam æquales esse; propterea quòd ratio diametrorum ad eandem lineam AΓ necessario eadem sit.

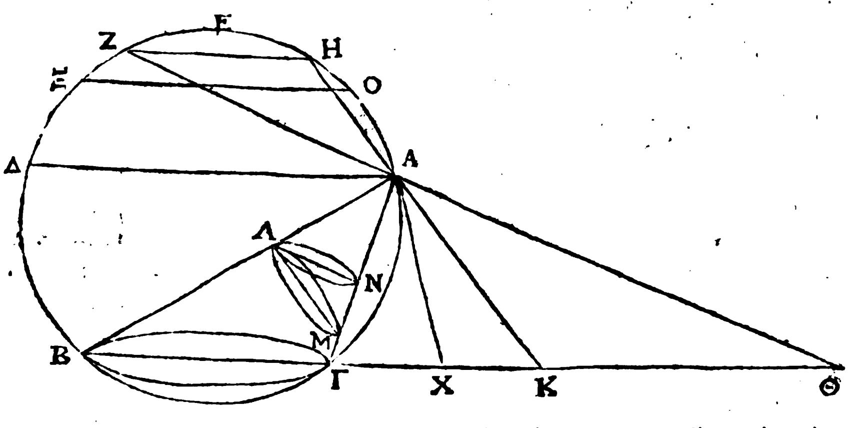
διάμετρος πρὸς τὴν ἑαυτῇ συζυγῆ διάμετρον, οὕτως καὶ ἡ ZΓ διάμετρος πρὸς τὴν ἑαυτῇ συζυγῆ διάμετρον. ἀλλὰ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας τέμνονται ἑκάτεραι αἱ διάμετροι, ὡς ἐδείχθη πολλάκις· ὅμοιαι ἄρα ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ EHΓ, ZΘΓ ἐλλείψεις. κἂν ἑτέρας δὲ ἀπολάβῃς ἴσας εὐθείας παρ' ἑκάτερα τοῦ Δ, συστήσονται πάλιν ἕτεραι δύο ἐλλείψεις ὅμοιαι ἀλλήλαις, καὶ τοῦτο ἐπ' ἄπειρον. ἐπισημαντέον δὲ ὅτι ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἀνάγκη τὰς ἐκ τοῦ αὐτοῦ μέρους ὁμοίας καὶ ἴσας εἶναι, διὰ τὸ λόγον εἶναι τῶν διαμέτρων τὸν αὐτὸν πρὸς τὴν αὐτὴν τὴν AΓ.

Prop. XXVII. *Probl.*

SED sit datus conus scalenus, cujus per axem triangulum ABΓ ad basim coni rectum, sitque AB major quam AΓ, & circa ipsum circulus describatur; & per A ducatur AΔ parallela ipsi BΓ, quæ circulum secabit; deinde, circumferentiâ ΔA bifariam sectâ in E, sumatur in ipsâ punctum aliquod Z, & ducatur ZH parallela ipsi ΔA; junctisque ZA, HA & productis, occurrat ZA quidem rectæ BΓ in Θ, HA vero eidem in K; adeoque ut AK ad KH ita AΘ ad ΘZ. sed ut AK ad KH ita quadratum ex AK ad rectangulum HKA; & ut AΘ ad ΘZ ita quadratum ex AΘ ad rectangulum AΘZ: ut igitur quadratum ex AK ad rectangulum HKA, hoc est [per 36.3.] ad rectangulum BKΓ, ita quadratum ex AΘ ad rectangulum ZΘA,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

ΕΣΤΩ δὲ νῦν ὁ δοθεὶς κῶνος σκαληνὸς, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ABΓ πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει τοῦ κώνου, καὶ ἔστω ἡ AB τῆς AΓ μείζων, καὶ περιγεγράφθω κύκλος, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ A τῇ BΓ παράλληλος ἡ AΔ, δηλονότι τέμνουσα τὸν κύκλον, καὶ τῆς ΔA περιφερείας δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ E εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔE περιφερείας τὸ Z, καὶ ἤχθω παράλληλος τῇ ΔA ἡ ZH, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι ἡ μὲν ZA συμπιπτέτω τῇ BΓ κατὰ τὸ Θ, ἡ δὲ HA κατὰ τὸ K· ὡς ἄρα ἡ AK πρὸς τὴν KH οὕτως ἡ AΘ πρὸς τὴν ΘZ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AK πρὸς τὴν KH οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AK πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν HK, KA, ὡς δὲ ἡ AΘ πρὸς τὴν ΘZ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AΘ, ΘZ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AK πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν HK, KA, τουτέστι



hoc est ad rectangulum BΘΓ. itaque si ducantur rectæ lineæ parallelæ, ΛM quidem ipsi AK, ΛN vero ipsi AΘ, & per ipsas plana conum secantia; similes habebuntur ellipses. Quoniam enim ut quadratum ex AK ad rectangulum BKΓ ita est quadratum ex AΘ ad rectangulum BΘΓ; est autem quadratum ex AK ad rectangulum BKΓ sicut quadratum ex ΛM diametro ellipseos ad quadratum conjugatæ diametri ejus; & ut quadratum ex AΘ ad rectangulum BΘΓ ita quadratum ex ΛN diametro ellipseos ad quadratum diametri ipsi conjugatæ: erit igitur ut diameter ΛM ad conjugatam ei diametrum ita diameter ΛN ad diametrum ipsi conjugatam: & idcirco ΛM, ΛN similium ellipsium diametri sunt. quod demonstrandum erat. At si alias rectas ipsi ZH parallelas ducamus, ut ΞO; & à punctis Ξ, O rectas junctas producamus

πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BK, KΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ZΘ, ΘA, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BΘ, ΘΓ. ἐὰν οὖν διάγωμεν εὐθείας παραλλήλους τῇ μὲν AK τὴν ΛM, τῇ δὲ AΘ τὴν ΛN, καὶ δι' αὐτῶν ἀχθέντα ἐπίπεδα τέμῃ τὸν κῶνον, ὁμοίας ἐλλείψεις ποιήσει. ἐπεὶ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AK πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BK, KΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AΘ πρὸς τὸ ὑπὸ BΘ, ΘΓ· ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς AK πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BK, KΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΛM διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BΘ, ΘΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΛN διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛM διάμετρος πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον οὕτως ἡ NΛ διάμετρος πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον· αἱ ἄρα ΛM, ΛN ὁμοίων ἐλλείψεων εἰσὶ διάμετροι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. κἂν ἑτέρας δὲ τῇ ZH παραλλήλους ἀγάγωμεν, ὡς τὴν ΞO, καὶ ἀπὸ τῶν Ξ καὶ O ἐπὶ τὸ A ἐπιζεύξαντες

ζεύξαντες ἐκβάλλωμεν ἐπὶ τὴν ΒΘ, καὶ τῇ ἐκβληθείσῃ παραλλήλους ἀγάγωμεν ἐν τῷ τριγώνῳ· συστήσονται πάλιν δύο ἐλλείψεις ὅμοιαι ἀλλήλαις, καὶ τοῦτο ἐπ' ἄπειρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

mus ad occursum ipsius BΘ; ipsisque parallelas in triangulo ducamus; rursus duæ aliæ ellipses inter se similes formabuntur; atque hoc in infinitum. id quod erat probandum.

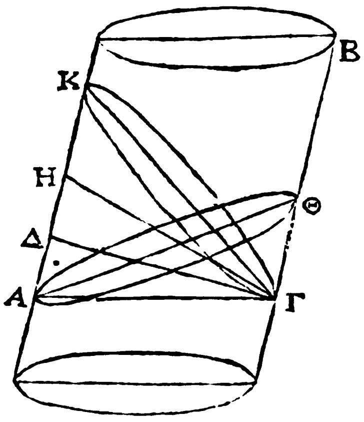
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Τὸν δοθέντα κύλινδρον σκαληνὸν ἢ κῶνον δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ἀπειραχῶς τεμεῖν δυσὶν ἐπιπέδοις, καὶ ποιεῖν ἐλλείψεις ὁμοίας.

PROP. XXVIII. *Probl.*

Datum cylindrum scalenum vel conum possumus ex oppositis partibus infinite secare duobus planis, quæ ellipses similes faciant.

ΕΣΤΩ πρῶτον ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου δεῖξαι, καὶ κείσθω ἡ αὐτὴ καταγραφὴ τῇ πρότερον, καὶ τῇ ΑΔ ἴση ἔστω ἡ ΔΗ· ἴση ἄρα ἡ ΓΑ τῇ ΗΓ. ἐπεὶ τοίνυν ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΒ ἀγομένη εὐθεῖα μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ΑΓ, ΓΗ, καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ μεταξὺ τῶν Η, Α σημείων πιπτουσῶν· δῆλον ὡς, ἐὰν ἐκ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ἀγάγωμεν δύο εὐθείας ἴσας ἀλλήλαις, ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἀγομένη ὑπερπεσεῖται τὸ Η. ἤχθωσαν οὖν ἐκ τῶν ἀντικειμένων μερῶν αἱ ΑΘ, ΓΚ, ἴσαι οὖσαι ἀλλήλαις, δι' ὧν ἐὰν ἀχθῇ ἐπίπεδα ποιοῦντα ἐλλείψεις, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΓ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τουτέστιν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου· αἱ ἄρα ΚΓ, ΑΘ διάμετροί εἰσιν ὁμοίων ἐλλείψεων.



SIT primum cylindrus, ut in superiori figura; & rectæ AΔ æqualis ponatur ΔH: æqualis igitur est AΓ ipsi ΓH. & quoniam ea quæ à puncto A ad ΓB ducitur major est alterutra ipsarum AΓ, ΓH, majorque omnibus quæ à Γ puncto inter puncta A, H cadunt; manifestum est, si ex oppositis partibus ducantur duæ rectæ lineæ inter se æquales, ea quæ ducitur à puncto Γ cadet supra H. itaque ducantur ex oppositis partibus rectæ AΘ, ΓK æquales inter se, & per ipsas plana ellipses facientia: erit igitur ut quadratum ex ΘA diametro ellipseos ad quadratum ex AΓ, hoc est ad quadratum conjugatæ diametri, ita quadratum ex KΓ diametro ellipseos ad quadratum ex AΓ, hoc est ad quadratum diametri ipsi conjugatæ: ergo KΓ, AΘ ellipsium similium diametri sunt.

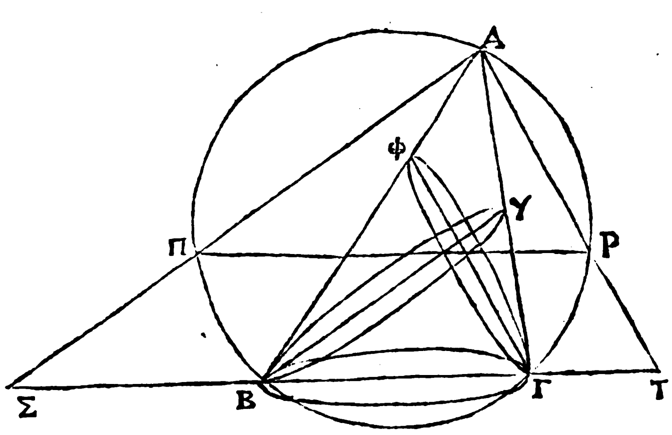
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

ΚΕΙΣΘΩ πάλιν ἡ καταγραφὴ τοῦ κώνου, καὶ, ἐκβληθείσης τῆς ΓΒ ἐπὶ θάτερα, δέον ἔστω ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μερῶν ἀγαγεῖν ἐπίπεδα ποιοῦντα ὁμοίας ἐλλείψεις.

Διήχθω τις εἰς τὸν κύκλον εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΒΓ ἡ ΠΡ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΠ, ΑΡ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ Σ, Τ σημεῖα· ὡς ἄρα ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΠ, οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς τὴν ΤΡ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΣ, ΣΠ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΤ, ΤΡ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΤ, ΤΓ. ἐὰν ἄρα ταῖς ΣΑ, ΑΤ παραλλήλους εὐθείας ἀγάγωμεν ἐν τῷ τριγώνῳ, ὡς τὰς ΒΥ, ΓΦ, καὶ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ποιοῦντα ἐλλείψεις· ἔσονται, διὰ τὰ πολλάκις εἰρημένα, αἱ ΒΥ, ΓΦ εὐθεῖαι ὁμοίων ἐλλείψεων διάμετροι.

PROP. XXIX. *Probl.*

SIT deinde conus, ut supra; &, producta ΓB, oporteat ab utraque parte ducere plana quæ ellipses similes faciant.



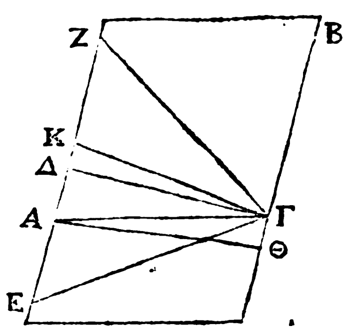
Ducatur in circulo recta quædam linea ΠP, ipsi BΓ parallela; & junctæ AΠ, AP ad puncta Σ, T producantur: ut igitur AΣ ad ΣΠ, ita AT ad TP, & ut quadratum ex AΣ ad rectangulum AΣΠ, hoc est ad rectangulum ΓΣB, ita quadratum ex AT ad rectangulum ATP, hoc est ad rectangulum BTΓ. quare si rectas lineas in triangulo duxerimus ipsis ΣA, AT parallelas, ut BT, ΓΦ; & per eas plana ellipses facientia: erunt BT, ΓΦ similium ellipsium diametri, per ea quæ superius demonstrata sunt.

PROP.

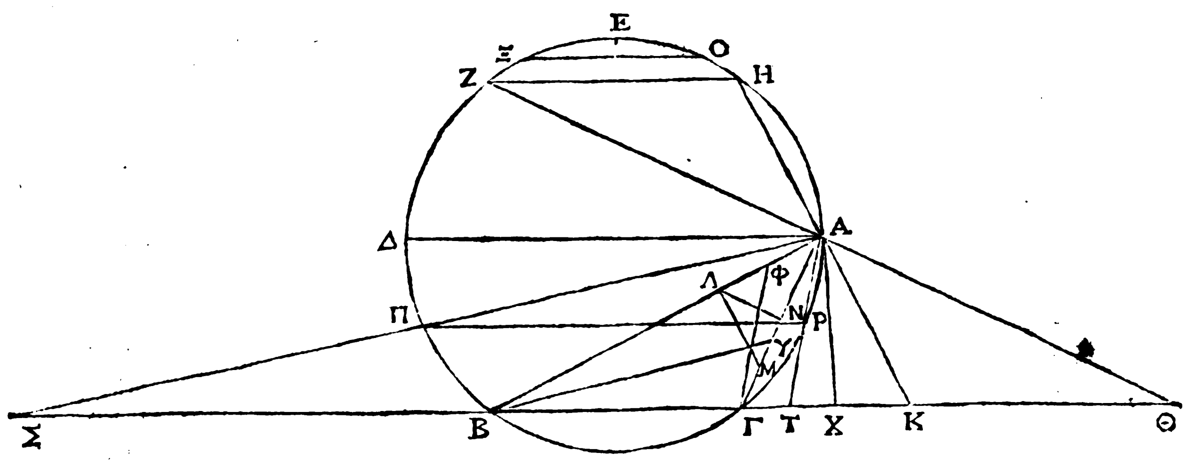
Prop. XXX. *Theor.*

Ex his manifestum est, conjugationi similium ellipsium, quæ ex eadem parte fit, similem esse conjugationem quandam similium ellipsium ex oppositis partibus; quippe quæ diametros habeat ex contraria parte diametris respondentes.

Si enim in cylindri figura fiat ut quadratum ex ΕΓ vel ΓΖ ad quadratum ex ΓΑ, ita quadratam ex ΓΑ ad quadratum ex ΑΘ vel ΓΚ; erit ut quadratum ex alterutra ipsarum ΕΓ, ΓΖ ad quadratum ex ΓΑ, hoc est ut quadratum diametri similium ellipsium quæ ex eadem parte fiunt, ad quadratum secundæ diametri ipsis conjugatæ, ita quadratum ex ΓΑ ad quadratum ex alterutra ipsarum ΑΘ, ΓΚ, hoc est ita quadratum secundæ diametri similium ellipsium quæ ex oppositis partibus fiunt ad quadratum conjugatæ ipsis diametri: ut igitur unius conjugationis transversa diameter ad secundam diametrum, ita alterius conjugationis secunda diameter ad diametrum ipsius transversam.



In cono autem, si rursus fiat ut ΗΑ ad ΑΚ ita ΑΠ ad ΠΣ: erit ut ΑΚ ad ΚΗ ita ΠΣ ad ΣΑ; hoc est ut quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΗΚΑ ita rectangulum ΠΣΑ ad quadratum ex ΑΣ. sed ut quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΗΚΑ, hoc est ad rectangulum ΒΚΓ, ita quadratum diametri duarum similium ellipsium quæ ex eadem parte fiunt, nempe



quadratum ex ΛΝ vel ΛΜ, ad quadratum secundæ diametri eidem conjugatæ; ut autem rectangulum ΠΣΑ, hoc est ΓΣΒ, ad quadratum ex ΣΑ, ita quadratum secundæ diametri similium ellipsium quæ ex oppositis partibus fiunt ad conjugatæ diametri ΒΥ vel ΓΦ quadratum: ergo ut unius conjugationis diameter ad secundam ejus diametrum, ita alterius conjugationis secunda diameter ad diametrum ipsam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ′.

Καὶ φανερὸν ὅτι τῇ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους τῶν ὁμοίων ἐλλείψεων συζυγίᾳ γίνεταί τις ὁμοία ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ὁμοίων ἐλλείψεων συζυγία, ἀντιπεπονθυίας μέν τοι τὰς διαμέτρους ἔχουσα ταῖς διαμέτροις.

Εὰν γὰρ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου καταγραφῆς κατασκευάσωμεν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἢ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἢ τῆς ΓΚ· γενήσεται ὡς τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ΕΓ, ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῶν ὁμοίων ἐλλείψεων τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους ἠγμένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας συζυγοῦς διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ΑΘ, ΓΚ, τουτέστιν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων ἠγμένων ὁμοίων ἐλλείψεων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου· ὡς ἄρα τῆς ἑκατέρας συζυγίας ἡ διάμετρος πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον οὕτως τῆς ἑτέρας συζυγίας ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἐπὶ δὲ τοῦ κώνου, ἐὰν πάλιν κατασκευάσωμεν ὡς τὴν ΗΑ πρὸς ΑΚ, οὕτως τὴν ΑΠ πρὸς τὴν ΠΣ· ἔσται ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΗ, οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΣΑ, τουτέστι ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΠΣ, ΣΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους ὁμοίων δύο ἐλλείψεων, ἤτοι τῆς ΛΝ ἢ τῆς ΛΜ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας συζυγοῦς διαμέτρου· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΠΣ, ΣΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΒ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΣΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῶν ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ἠγμένων ἐλλείψεων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου τῆς ΒΥ ἢ τῆς ΓΦ· ὡς ἄρα τῆς ἑτέρας συζυγίας ἡ διάμετρος πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον, οὕτως τῆς ἑτέρας συζυγίας ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον.

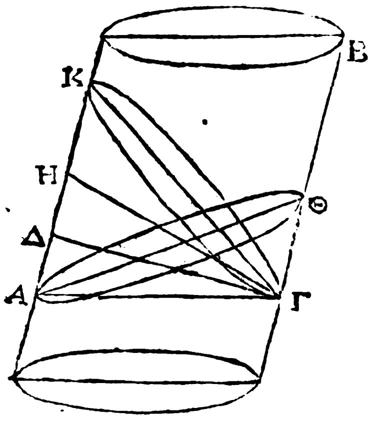
Καὶ

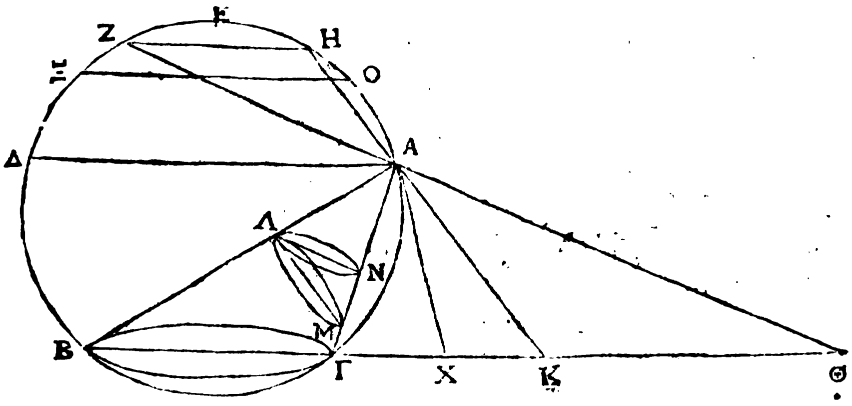
Καὶ γέγονε φανερὸν ἐκ τούτων, ὅτι ἐν παντὶ μὲν κυλίνδρῳ καὶ κώνῳ σκαληνῷ συνίστανται δύο συζυγίαι ἐλλείψεων, ὁμοίων μὲν ἀλλήλαις, ἀντιπεπονθυίας δὲ τὰς διαμέτρους ἐχουσῶν, καὶ ὅτι παρὰ τὰς τέσσαρας ταύτας ἄλλη ὁμοία οὐ συνίσταται πλὴν τῶν παραλλήλων αὐταῖς, ἀεὶ γὰρ αἱ παράλληλοι τομαὶ ὁμοίας ποιοῦσιν ἐλλείψεις, ἐὰν ποιῶσι· καὶ ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ κυλίνδρου, ἡ διὰ τῆς Γ Η ἀγωγὴ τοῦ ἐπιπέδου ὑπεναντία τέ ἐστι καὶ κύκλον ποιεῖ τὴν τομήν.

Ἐπὶ δὲ τοῦ κώνου, ἐὰν διὰ τοῦ Α τοῦ κύκλου ἐφάπτηταί τις, ὡς ἡ Α Χ, διὰ τὸ εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς Α Χ τῷ ὑπὸ Β Χ, Χ Γ ἴσον, ἡ διὰ τῆς τῇ Α Χ παραλλήλων εὐθειῶν ἐν τῷ τριγώνῳ τῶν ἐπιπέδων ἀγωγὴ ποιεῖ κύκλους, ὑπεναντία γάρ ἐστι καὶ αὐτὴ ὡς τῷ προσέχοντι γίνεται καταφανές· καὶ ὅτι τῇ δοθείσῃ ἐλλείψει ἐν κυλίνδρῳ σκαληνῷ καὶ κώνῳ τρεῖς ὁμοίας ἄλλας ἐστὶν εὑρεῖν, μίαν μὲν αὐτῇ δοθείσῃ σύζυγον, δύο δὲ ἑαυτῆς μὲν συζύγους, τῶν δὲ λοιπῶν ὁμοίας κατὰ ἀντιπεπονθὸς τῶν διαμέτρων, ὥστε καὶ τῇ δοθείσῃ δυνατὸν τρεῖς ὁμοίας πορίσασθαι. δεῖ δὲ τὴν δοθεῖσαν μήτε ὑπεναντίαν εἶναι, ταύτῃ γὰρ οὐδεμία συνίσταται ὁμοία πλὴν τῶν

Ex quibus apparet, in omni cylindro & cono scaleno constitui duas conjugationes ellipsium inter se similium, quæ ex contraria parte respondentes diametros habent, & præter has quatuor nullam aliam constitui similem, nisi ipsis æquidistantes; etenim sectiones æquidistantes similes semper faciunt ellipses, si modo ellipses faciant: atque in cylindro patet planum juxta rectam Γ Η ductum sectionem facere subcontrariam & propterea circulum.

In cono autem, si ad punctum A recta circulum contingat, ut A X, & in triangulo ducantur rectæ ipsi A X parallelæ; quoniam quadratum ex A X rectangulo B X Γ est æquale, plana per dictas lineas transeuntia sectiones faciunt circulos; etenim hæc subcontraria sectio est, quod diligenter intuenti perspicuum fiet. Præterea datâ ellipsi in cylindro scaleno & cono tres aliæ similes inveniri possunt, una quidem ipsi datæ conjugata, duæ vero conjugatæ inter sese ac prioribus similes, sed quæ diametros habeant ex contraria parte diametris respondentes. Oportet autem neque datam sectionem subcontrariam esse; huic enim nulla





παραλλήλων· μήτε τὴν διάμετρον αὐτῆς παράλληλον εἶναι τῇ διὰ τῶν Ε καὶ Α ἀγομένῃ εὐθείᾳ, ἐν τῇ καταγραφῇ τοῦ κώνου· μονήρης γὰρ καὶ αὐτή, διὰ τὸ τὴν διὰ τοῦ Ε τῇ Α Δ παράλληλον ἀγομένην ἐφάπτεσθαι τοῦ κύκλου καὶ πίπτειν ἐκτός· ὥστε μὴ εἶναι τῷ Ε σημείῳ σύζυγον, ὡς τῷ Ξ τὸ Ο ἢ τῷ Ζ τὸ Η.

Περὶ μὲν οὖν τοῦ προτεθέντος ἡμῖν προβλήματος ἀπὸ πλειόνων ἀρκείτω καὶ τὰ εἰρημένα. ὥρα δ' ἂν εἴη μετελθεῖν ἐφ' ὅπερ ἀρτίως ἐπηγγείλαμεν· ἀφορμὴ δέ μοι τῆς μελλούσης σκέψεως οὐκ ἄκαιρος, ἔστι δὲ ἥδε. Πείθων ὁ γεωμέτρης, ἐν συγγράμματι ἑαυτοῦ τὰς παραλλήλους ἐξηγούμενος, οἷς μὲν Εὐκλείδης εἶπεν οὐκ ἠρκέσθη, σαφέστερον δὲ δι' ὑποδείγματος αὐτὰς ἐσαφήνισε· φησὶ γὰρ τὰς παραλλήλους εὐθείας εἶναι τοιαύτας οἵας ἐν τοῖς τοίχοις ἢ τῷ ἐδάφει τὰς τῶν κιόνων σκιὰς ὁρῶμεν τελουμένας, ἤτοι ἀπὸ λαμπάδος τινὸς ἀπ' ἀντικρὺ καιομένης ἢ λύχνου. τοῦτο δὲ εἰ καὶ πᾶσι πλεῖστον παρέχει καταγελᾶν, ἀλλὰ ἡμῖν οὐ καταγέλαστον, αἰδοῖ τοῦ γεγραφότος· φίλος γὰρ ἀνήρ. ἀλλὰ σκεπτέον ὅπως τὸ τοιοῦτον ἔχει μαθηματικῶς· οἰκεία δὲ ἡ σκέψις τοῖς ἐνταῦθα προτεθεωρημένοις, δι' αὐτῶν γὰρ ἀποδειχθήσεται τὸ προκείμενον.

similis constituitur præter æquidistantes: neque ipsius diametrum parallelam esse ei quæ per B & A ducitur in figura coni; hæc enim solitaria est, quia recta per E ducta ipsi A Δ parallela circulum contingit, & cadit extra: nec est aliud punctum compar puncto E, quemadmodum est O ipsi Ξ & Z ipsi H. *

De proposito igitur nobis problemate hæc dicta sufficiant. Tempus est ut ad ea aggrediar, quæ modo pollicitus sum: mihi vero futuræ contemplationis occasio non intempestiva fuit, nempe hæc. *Pitho* geometra, in adversariis ejus rectas parallelas explicans, non contentus iis quæ scripserat *Euclides*, latius duxit eas exemplo declarare: dixit enim lineas parallelas esse, quales in parietibus vel pavimento columnarum umbras, à lampade è regione ardente vel lucernâ factas, videmus. quod tametsi omnibus non parvum risum moverit, mihi tamen ridiculum non videtur, propter meam in auctorem, qui amicus noster est, observantiam. sed videamus quomodo hoc mathematice se habeat; talis enim contemplatio hujus loci propria est; quippe quòd per ea quæ proxime demonstrata sunt propositum ostendi possit.

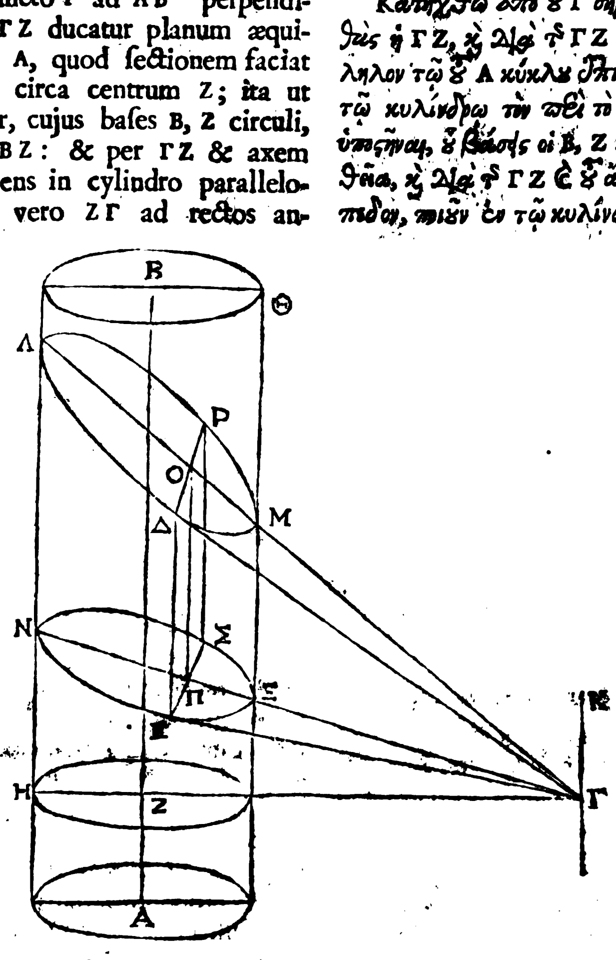
* Sectio hæc, cujus diameter ipsi A E parallela est, rationem habet omnium minimam diametri ad latus ejus rectum: ac proinde, si proponatur ellipsis, cujus diameter ad latus ejus rectum minorem habet rationem; duæ tantum duci possunt rectæ, secundum quas designata plana sectiones datæ similes producant.

Prop. XXXI. Theor.

Rectæ lineæ, quæ ab eodem puncto cylindricam superficiem ex utraque parte contingunt, in unius parallelogrammi lateribus tactiones faciunt.

SIT cylindrus, cujus bases circuli A, B, axis recta linea AB; & sumatur aliquod punctum Γ extra, à quo ducantur ΓΔ, ΓE cylindri superficiem contingentes ex eadem parte in punctis Δ, E: dico omnia puncta tactuum Δ, E in una recta linea axi parallela reperiri.

Ducatur enim à puncto Γ ad AB * perpendicularis ΓZ, & per ΓZ ducatur planum æquidistans plano circuli A, quod sectionem faciat in cylindro circulum circa centrum Z; ita ut cylindrus constituatur, cujus bases B, Z circuli, axisque recta linea BZ: & per ΓZ & axem planum ducatur faciens in cylindro parallelogrammum HΘ; ipsi vero ZΓ ad rectos angulos ducatur ΓK in plano circuli Z, & per ΓK & utramque ipsarum ΓΔ, ΓE plana ducantur cylindrum secantia, quæ faciant in superficie quidem cylindri curvas ΛΔM, NEΞ; in plano vero parallelogrammi rectas lineas ΛMΓ, NΞΓ: diametri igitur sectionum sunt ΛM, NΞ. ad eas igitur ordinatim applicentur ΔO, EΠ, & ad alteram partem superficiei ad puncta P, Σ producantur. itaque quoniam recta ΓΔ contingit sectionem ΛΔMP in puncto Δ; & hujusmodi cylindri sectio ostensa est ellipsis, non circulus; ordinatimque applicata est ΔO: erit ut ΛΓ ad ΓM ita ΛO ad OM, id quod demonstratum est ab *Apollonio* in 36^to^ primi libri Conicorum: & eadem ratione ut NΓ ad ΓΞ ita NΠ ad ΠΞ. est autem NH ipsi ΘM parallela; quare ut ΛΓ ad ΓM ita NΓ ad ΓΞ, & propterea ut ΛO ad OM ita NΠ ad ΠΞ: recta igitur puncta Π, O connectens est in plano HΘ, & utrique ipsarum BA, ΘM parallela.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα΄.

Αἱ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι, κατ᾽ ἀμφότερα τὰ μέρη, πᾶσαι καθ᾽ ἑνὸς παραλληλογράμμου πλευρῶν τὰς ἐπαφὰς ποιοῦνται.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἤχθωσαν αἱ ΓΔ, ΓΕ εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα· λέγω ὅτι τὰ Ε, Δ τῶν ἐπαφῶν σημεῖα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἐστί.

Κατήχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΖ, καὶ διὰ τῆς ΓΖ ἤχθω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ τοῦ Α κύκλου ἐπιπέδῳ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῷ κυλίνδρῳ τὸν περὶ τὸ Ζ κύκλον, ὥστε κύλινδρον ὑποστῆναι, οὗ βάσεις οἱ Β, Ζ κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΒΖ εὐθεῖα, καὶ διὰ τῆς ΓΖ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον, ποιοῦν ἐν τῷ κυλίνδρῳ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ· καὶ τῇ ΓΖ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΚ ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ οὔσα, καὶ διὰ τῆς ΓΚ καὶ ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ διεκβεβλήσθω ἐπίπεδα τέμνοντα τὸν κύλινδρον, καὶ ποιείτω διὰ τῆς τομῆς, ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου, τὰς ΛΔΜ, ΝΕΞ γραμμάς, ἐν δὲ τῷ τοῦ παραλληλογράμμου ἐπιπέδῳ, τὰς ΛΜΓ, ΝΞΓ εὐθείας· διάμετροι ἄρα τῶν τομῶν εἰσιν αἱ ΛΜ, ΝΞ εὐθεῖαι. κατήχθωσαν τοίνυν ἐπὶ τὰς ΛΜ, ΝΞ διαμέτρους αἱ ΔΟ, ΕΠ τεταγμένως, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπὶ θάτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὰ Ρ καὶ Σ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται τῆς ΛΔΜΡ γραμμῆς ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Δ, καὶ δέδεικται ἡ τοιαύτη τοῦ κυλίνδρου τομὴ ἔλλειψις οὖσα ἀλλ᾽ οὐ κύκλος, καὶ κατῆκται τεταγμένως ἡ ΔΟ· ὡς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΜ, ὡς δέδεικται τῷ Ἀπολλωνίῳ ἐν τῷ α΄. τῶν Κωνικῶν τριακοστῷ ἕκτῳ θεωρήματι. καὶ διὰ τὰ αὐτά, ὡς ἡ ΝΓ πρὸς τὴν ΓΞ οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς τὴν ΠΞ. ἐπεὶ δὲ ἡ ΝΗ τῇ ΘΜ παράλληλός ἐστιν· ὡς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΝΓ πρὸς τὴν ΓΞ· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΛΟ πρὸς ΟΜ οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς ΠΞ· ἡ ἄρα τὰ Π, Ο σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐν τῷ ΗΘ ἐπιπέδῳ ἐστί, καὶ παράλληλος ἑκατέρᾳ τῶν ΒΑ,

* Hæc demonstratio cylindrum supponit rectum; sed propositio non minus vera est de scaleno, ubicunque situm fuerit punctum Γ: nec modo diverso probabitur, nisi quod angulus BZΓ, jam non sit necessario rectus: oportebit autem planum circuli, cujus centrum Z, transire per datum punctum Γ, ita ut basi A plano æquidistet.

ΘΜ.

ΘΜ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΔΟ, ΕΠ τῇ ΓΚ παράλληλός ἐστιν, αἱ ΔΟ, ΕΠ ἄρα καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. ἐὰν δὴ διὰ τῶν ΔΟ, ΕΠ εὐθειῶν ἀχθῇ ἐπίπεδον, τεμεῖ τὸ ΘΗ παραλληλόγραμμον κατὰ τὴν ΟΠ γραμμὴν, καὶ ἔσται τὸ ΠΕΔΟ ἐπίπεδον παράλληλον ἐπιπέδῳ τινὶ τῶν διὰ τῆς ΒΑ ἀγομένων καὶ τεμνόντων τὸ ΗΘ· τὸ ἄρα ΠΕΔΟ ἐπίπεδον τομὴν ποιήσει ἐν τῷ κυλίνδρῳ παραλληλόγραμμον, ὡς ἐδείχθη ἐν θεωρήματι τρίτῳ. καὶ ἔστιν ἡ ΕΔ γραμμὴ κοινὴ τομὴ τοῦ ΠΕΔΟ ἐπιπέδου καὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· ἡ ΕΔ ἄρα εὐθεῖά ἐστι καὶ πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου. ὁμοίως δὴ δείκνυται καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἐφαπτομένων· καὶ ὅτι πάλιν ἐπὶ θάτερα μέρη αἱ ἁφαὶ κατὰ τὰ Ρ καὶ Σ γίνονται, καί εἰσιν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου τῇ ΕΔ· πᾶσαι ἄρα αἱ ἐφαπτόμεναι καθ' ἑνὸς παραλληλογράμμου πλευρῶν τὰς ἁφὰς ποιοῦνται. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

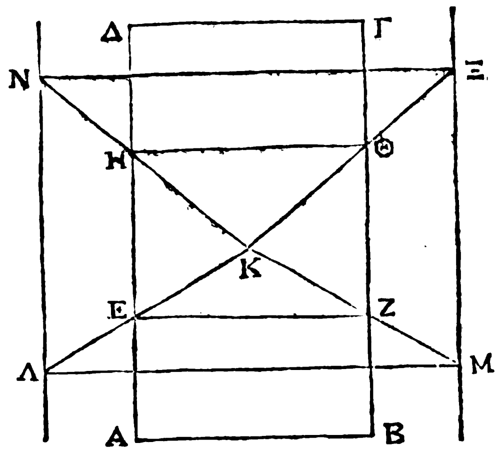
& quoniam ΔΟ, ΕΠ parallelæ ſunt ipſi ΓΚ, etiam inter ſe parallelæ erunt: quare ſi per eas planum ducatur, ſecabit parallelogrammum ΘΗ ſecundum rectam lineam ΟΠ, atque erit planum ΠΕΔΟ æquidiſtans plano alicui eorum quæ per axem ΒΑ ducta ſecant parallelogrammum ΗΘ: planum igitur ΠΕΔΟ ſectionem facit in cylindro parallelogrammum, ut oſtenſum eſt in theoremate tertio; & recta ΕΔ eſt communis ſectio ipſius & ſuperficiei cylindri: quare ΕΔ recta linea eſt & parallelogrammi latus. pari modo etiam in cæteris contingentibus idem demonſtrabitur; fientque ruſus tactus ex altera parte in punctis Ρ, Σ, quæ ſunt in una recta ipſi ΕΔ parallelâ: omnes igitur rectæ cylindrum contingentes in unius parallelogrammi lateribus tactiones faciunt. quod demonſtrandum proponebatur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϐʹ.

Τούτου δειχθέντος, ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ παρὰ τὴν ΑΒ αὐτοῦ βάσιν ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Κ, μὴ ὂν ἐν τῷ τοῦ παραλληλογράμμου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ καὶ ἐκβληθεῖσαι προσπιπτέτωσαν ἐπιπέδῳ τινὶ παραλλήλῳ ὄντι τῷ ΑΒΓΔ κατὰ τὰ Λ, Μ, Ν, Ξ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΝ, ΜΞ· λέγω ὅτι ἡ ΜΞ τῇ ΛΝ παράλληλός ἐστι.

Prop. XXXII. *Theor.*

HOC demonſtrato, ſit parallelogrammum ΑΒΓΔ, & ejus baſi ΑΒ parallelæ ducantur ΕΖ, ΗΘ; ſumpto autem aliquo puncto Κ non exiſtente in plano parallelogrammi, jungantur ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ, quæ productæ occurrant plano cuipiam æquidiſtanti ipſi ΑΒΓΔ in punctis Λ, Μ, Ν, Ξ, & jungantur ΛΝ, ΜΞ: dico rectam ΜΞ ipſi ΛΝ parallelam eſſe.



Τὸ γὰρ διὰ τῶν ΚΛ, ΕΖ εὐθειῶν ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον τεμεῖ καὶ τὸ ΛΜΝΞ ἐπίπεδον, καὶ ποιήσει ἐν αὐτῷ κοινὴν τομὴν ΛΜ παράλληλον οὖσαν τῇ ΕΖ· ὁμοίως δὴ καὶ τὸ διὰ τῶν ΚΝ, ΗΘ εὐθειῶν ἐπίπεδον ποιήσει παράλληλον τὴν ΝΞ τῇ ΗΘ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΛΚΝ τρίγωνον τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓΔ, ΛΜΞΝ, αἱ ἄρα κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις, τουτέστιν ἡ ΝΛ τῇ ΗΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΞΜ τῇ ΘΖ παράλληλος· ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΝ, καὶ ὡς ἡ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΝ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΝΞ. ὡς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΛ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΛΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΛΜ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΝΞ, καὶ ἐναλλάξ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῇ ΝΞ. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα καὶ ἡ ΜΞ εὐθεῖα τῇ ΛΝ.

Ἐὰν δὴ τὸ μὲν Κ σημεῖον ὑποθώμεθα εἶναι τὸ φωτίζον, τὸ δὲ ΑΓ παραλληλόγραμμον τὸ ἐπιπροσθοῦν τῶν ἀκτίνων, εἴτε καθ' αὑτὸ εἴη, εἴτε ἐν κυλίνδρῳ· συμβήσεται τὰς ἀπὸ τοῦ Κ φωτίζοντος ἀκτῖνας ἐκβαλλομένας ὁρίζεσθαι τῇ τε ΝΛ καὶ τῇ ΜΞ εὐθείᾳ, καὶ τὸ μεταξὺ τῶν ΝΛ, ΜΞ παραλλήλων ἐσκιασμένον

Planum enim per rectas ΚΛ, ΕΖ ductum ſecabit etiam planum ΛΜΝΞ, & in eo communem ſectionem faciet rectam lineam ΛΜ ipſi ΕΖ parallelam: ſimiliter & planum per ΚΝ, ΗΘ ductum faciet ΝΞ parallelam ipſi ΗΘ. quoniam igitur ΛΚΝ triangulum ab æquidiſtantibus planis ΑΒΓΔ, ΛΜΞΝ ſecatur, communes ipſorum ſectiones ΝΛ, ΗΕ [per 16. 11.] inter ſe parallelæ ſunt. & eadem ratione parallelæ ſunt rectæ ΞΜ, ΘΖ: quare ut ΕΚ ad ΚΛ ita ΗΚ ad ΚΝ, & ut ΗΚ ad ΚΝ ita ΗΘ ad ΝΞ. ſed ut ΕΚ ad ΚΛ ita ΕΖ ad ΛΜ; ut igitur ΕΖ ad ΛΜ ita ΗΘ ad ΝΞ, & permutando. eſt autem ΕΖ æqualis ipſi ΗΘ; ergo & ΛΜ ipſi ΝΞ. & ſunt inter ſe parallelæ; recta igitur ΜΞ [per 33. 1.] ipſi ΛΝ parallela eſt.

Si igitur ponamus punctum Κ eſſe corpus illuminans, & ΑΓ parallelogrammum quod ejus radiis opponatur, ſive per ſe ſive in cylindro: accidet ut radii, qui ab ipſo Κ producuntur, terminentur rectis lineis ΝΛ, ΜΞ; & quod intra parallelas ΝΛ, ΜΞ continetur umbroſum

ſum

ſum ſit. demonſtratum quidem eſt rectam ΔΑ ipſi ΓΒ, & ΝΛ ipſi ΞΜ parallelam eſſe. verum non ita apparebunt; nam intervallorum ΛΜ, ΝΞ quod propius viſui eſt illud majus apparet. hæc autem ex Opticis deſumpſimus. quoniam autem in promptu eſt & de cono ſimile quid comminiſci, propterea quod ellipſis communis ſit & cono & cylindro; ac jam dictum eſt de cylindro: age nunc & de cono dicamus.

ἔσται. ὅτι μὲν οὖν παράλληλος καὶ ἡ ΔΑ τῇ ΓΒ καὶ ἡ ΝΛ τῇ ΞΜ, δέδεικται. οὐ μὴν καὶ οὕτω φανοῦνται· τῶν γὰρ ΛΜ, ΝΞ διαστάσεων ἡ ἐγγύτερον τῆς ὄψεως μείζων φαίνεται. ταῦτα δὲ παρειλήφαμεν ἐκ τῶν ὀπτικῶν. ἐπειδὴ δὲ παρακείμενόν ἐστι καὶ περὶ τοῦ κώνου θεωρῆσαι τὸ ὅμοιον, διὰ τὸ κοινὸν εἶναι τὴν ἔλλειψιν τοῦ τε κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου, ἔσκεπται δὲ περὶ τοῦ κυλίνδρου· φέρε καὶ περὶ τοῦ κώνου σκεψώμεθα.

Prop. XXXIII. *Theor.*

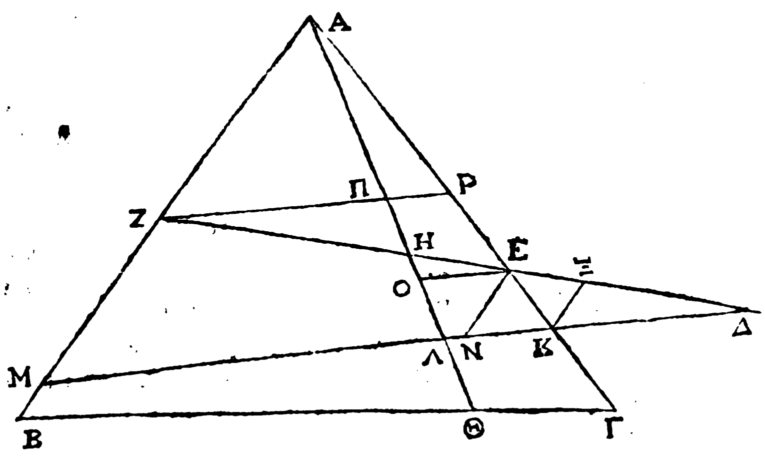
Si extra triangulum punctum aliquod ſumatur, & ab eo ducatur quædam recta linea triangulum ſecans; à vertice autem ad baſim alia recta agatur, quæ ita ductam ſecet, ut quam rationem habet tota ad partem extra triangulum aſſumptam, eandem habeat major portio ejus quæ intra triangulum continetur ad minorem parti exteriori adjacentem: quælibet recta linea, quæ ex eodem puncto ducta triangulum ſecat, ab ea quæ à vertice ad baſim ducitur in eadem proportione ſecatur. quod ſi rectæ ab eo puncto ad triangulum ductæ ſecentur in eadem proportione; recta linea, quæ intra triangulum ipſas ſecat, per trianguli verticem neceſſario tranſibit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγʹ.

Ἐὰν τριγώνου ληφθῇ σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸ τρίγωνον, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθῇ τις ἑτέρα εὐθεῖα τέμνουσα τὴν διηγμένην οὕτως, ὥστε ἔχειν ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου οὕτως τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον πρὸς τῷ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου κείμενον· ἥτις ἂν ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὸ τρίγωνον, ἀνάλογον τέτμηται ὑπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν εὐθείας. κἂν πᾶσαι αἱ οὕτως ἠγμέναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ τέμνουσα αὐτὰς εὐθεῖα, ἐν τῷ τριγώνῳ ἀγομένη, διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου ἐλεύσεται.

Sumatur enim aliquod punctum Δ extra triangulum ΑΒΓ, à quo ducatur recta linea ΔΕΖ triangulum ſecans; & à vertice Α ad baſim ducatur ΑΗΘ, quæ ita ſecet ΖΔ, ut ΖΔ ad ΔΕ eandem rationem habeat quam ΖΗ ad ΗΕ; deinde ducatur alia recta ΔΚΛΜ: dico ut ΜΔ ad ΔΚ ita eſſe ΜΛ ad ΛΚ.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω εὐθεῖα τέμνουσα τὸ τρίγωνον ἡ ΔΕΖ, ἀπὸ δὲ τῆς Α κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθήτω ἡ ΑΗΘ τέμνουσα τὴν ΖΔ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως τὴν ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, καὶ διήχθω τις ἑτέρα εὐθεῖα ἡ ΔΚΛΜ· λέγω ὅτι ὡς ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ.



Per puncta enim Ε, Κ ducantur rectæ ΕΝ, ΚΞ ipſi ΑΒ parallelæ; & per Ε, Ζ ducantur ΕΟ, ΖΠΡ parallelæ ipſi ΜΔ. quoniam igitur in triangulo ΑΜΚ ducta eſt ΕΝ ipſi ΑΜ parallela, erit ut ΝΕ ad ΕΚ ita ΜΑ ad ΑΚ, hoc eſt ΖΑ ad ΑΡ. rurſus quoniam ΖΑ pa-

Ἤχθωσαν διὰ μὲν τῶν Ε, Κ σημείων τῇ ΑΒ παράλληλοι αἱ ΕΝ, ΚΞ, διὰ δὲ τῶν Ε, Ζ τῇ ΜΔ παράλληλοι αἱ ΕΟ, ΖΠΡ. ἐπεὶ οὖν τοῦ ΑΜΚ τριγώνου παρὰ τὴν ΑΜ πλευρὰν ἐστιν ἡ ΕΝ· ὡς ἄρα ἡ ΝΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως ἡ ΜΑ πρὸς τὴν ΑΚ, τουτέστιν οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΡ. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΖΑ τῇ

ΚΞ

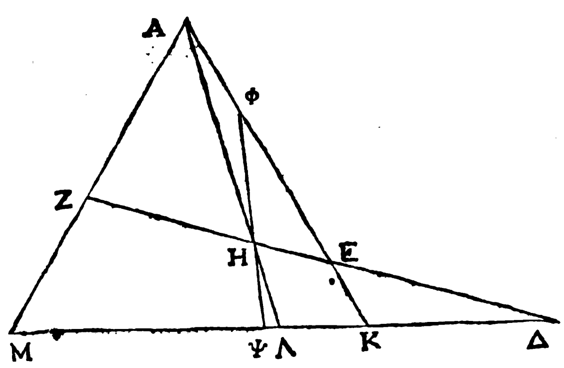
ΚΞ παράλληλός ἐστιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΞ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΖ. ἐπεὶ οὖν ὡς μὲν ἡ ΝΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΡ, ὡς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΞ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΖ· δι' ἴσου ἄρα ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ ὡς ἡ ΕΝ πρὸς τὴν ΚΞ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΡ, τουτέστιν ἡ ΕΟ πρὸς τὴν ΠΡ. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΔΞ λόγῳ, ὁ δὲ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΔΞ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΕΔ καὶ τοῦ τῆς ΕΔ πρὸς τὴν ΔΞ· καὶ ὁ τῆς ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ λόγος ἄρα σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΕΔ καὶ τοῦ τῆς ΕΔ πρὸς τὴν ΔΞ. ἀλλ' ὁ μὲν τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΕΔ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, διὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὁ δὲ τῆς ΕΔ πρὸς τὴν ΔΞ, τουτέστιν ὁ τῆς ΕΝ πρὸς τὴν ΞΚ, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ· ὁ ἄρα τῆς ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ λόγου καὶ τοῦ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ. πάλιν ἐπεὶ ὁ τῆς ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΖΠ πρὸς τὴν ΠΡ, ὁ δὲ τῆς ΖΠ πρὸς τὴν ΠΡ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΠ πρὸς τὴν ΟΕ λόγου, τουτέστι τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, καὶ τοῦ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ· καὶ ὁ τῆς ΜΛ ἄρα πρὸς τὴν ΛΚ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΗΖ πρὸς τὴν ΗΕ λόγου καὶ τοῦ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ τῆς ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν συγκείμενος· ὡς ἄρα ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἄλλαι διαχθῶσιν ἀπὸ τοῦ Δ· πᾶσαι γὰρ ὑπὸ τῆς ΑΘ διαιρεθήσονται τὸν εἰρημένον τρόπον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Κἂν αἱ ἀπὸ τοῦ Δ διαχθεῖσαι ἀνάλογον ὦσι τετμημέναι, ἵν' ἡ ὡς μὲν ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, ὡς δὲ ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ· ἡ τὰς ἐν τῷ τριγώνῳ ἀπειλημμένας εὐθείας, οἷον τὰς ΖΕ, ΜΚ, ἀνάλογον τέμνουσα εὐθεῖα διαγομένη διὰ τῆς κορυφῆς ἥξει τοῦ τριγώνου.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἡκέτω ἐκτὸς κατὰ τὸ Φ σημεῖον, καὶ διήχθω ἡ ΑΗΨ εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν, κατὰ τὸ προδειχθέν, εὐθεῖά τις ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἡ ΑΨ ἀγομένη τέμνει τὴν ΖΔ εὐθεῖαν, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως τὴν ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ· καὶ τὴν ΜΔ ἄρα ἀνάλογον τεμεῖ· ὡς ἄρα ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΜΨ πρὸς τὴν ΨΚ, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ· ἡ ἄρα ΛΗ ἐκβαλλομένη οὐχ ἥξει δι' ἄλλου σημείου πλὴν τοῦ Α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

rallela est ipsi ΚΞ; ut igitur ΕΚ ad ΚΞ ita est ΕΑ ad ΑΖ; quoniam ideo ut ΝΕ ad ΕΚ ita ΖΑ ad ΑΡ, & ut ΕΚ ad ΚΞ ita ΕΑ ad ΑΖ: erit ex æquali in perturbata ratione, ut ΕΝ ad ΚΞ ita ΕΑ ad ΑΡ, hoc est ita ΕΟ ad ΠΡ. quoniam igitur ratio ΜΔ ad ΔΚ eadem est quæ ΖΔ ad ΔΞ, ratio autem ΖΔ ad ΔΞ componitur ex ratione ΖΔ ad ΕΔ & ΕΔ ad ΔΞ: erit ratio ΜΔ ad ΔΚ ex eisdem rationibus composita. sed ratio ΖΔ ad ΕΔ eadem est quæ ratio ΖΗ ad ΗΕ, ex hypothesi; & ratio ΕΔ ad ΔΞ, hoc est ΕΝ ad ΞΚ, ostensa est eadem quæ est ΟΕ ad ΠΡ: ergo ratio ΜΔ ad ΔΚ componitur ex ratione ΖΗ ad ΗΕ & ratione ΟΕ ad ΠΡ. rursus quoniam ratio ΜΛ ad ΛΚ eadem est quæ ratio ΖΠ ad ΠΡ, & ratio ΖΠ ad ΠΡ componitur ex ratione ΖΠ ad ΟΕ, hoc est ΖΗ ad ΗΕ, & ratione ΟΕ ad ΠΡ: ratio igitur ΜΛ ad ΛΚ composita est ex ratione ΗΖ ad ΗΕ & ratione ΟΕ ad ΠΡ: sed ratio ΜΔ ad ΔΚ componitur ex eisdem rationibus, ut jam ostensum est: ergo ut ΜΔ ad ΔΚ ita ΜΛ ad ΛΚ. pari modo & de aliis, quæ à puncto Δ ductæ fuerint, demonstrabitur: omnes enim à recta ΑΘ in eadem, quam diximus, proportione secabuntur [Harmonica nempe.] quod erat demonstrandum.

Quod si à puncto Δ ductæ lineæ in eadem proportione secentur, ita ut quam rationem habet ΖΔ ad ΔΕ eandem habeat ΖΗ ad ΗΕ; & rursus quam habet ΜΔ ad ΔΚ eandem habeat ΜΛ ad ΛΚ: recta linea, proportionaliter secans eas quæ intra triangulum continentur, nempe rectas ΖΕ, ΜΚ, per verticem trianguli necessario transibit.



Si enim fieri potest, transeat extra verticem per punctum Φ; & ducatur recta linea ΑΗΨ. quoniam igitur, ex iis quæ proxime demonstrata sunt, recta quædam ΑΨ à vertice ducta secat ΖΔ, ita ut quam rationem habet ΖΔ ad ΔΕ eandem habeat ΖΗ ad ΗΕ; etiam ipsam ΜΔ in eadem proportione secabit; eritque ut ΜΔ ad ΔΚ ita ΜΨ ad ΨΚ, quod est absurdum; posuimus enim ΜΔ ad ΔΚ sicut ΜΛ ad ΛΚ: quare ΛΗ producta non transibit per aliud punctum quam per verticem trianguli. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Αἱ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου κωνικῆς ἐπιφανείας ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι κατ' ἀμφότερα τὰ μέρη, πα-

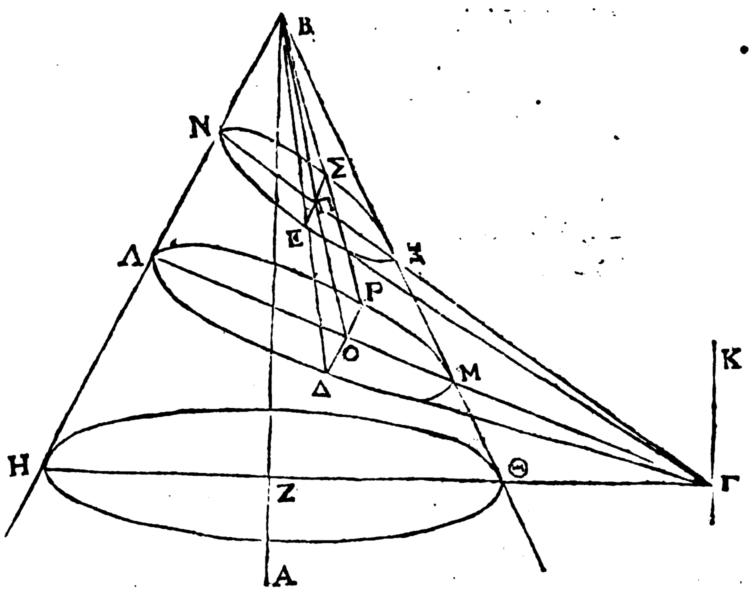
Prop. XXXIV. *Theor.*

Omnes rectæ lineæ, quæ ab eodem puncto conicam superficiem ex utraque parte contingunt, in unius trianguli lateribus tactiones faciunt.

σαι καθ' ἑνὸς τριγώνου πλευρᾶς τὰς ἐπαφὰς ποιοῦνται.

SIT conus, cujus basis quidem circulus circa centrum A, vertex punctum B, axis autem recta linea AB; & sumpto aliquo puncto Γ extra conum, ab eo ducantur ΓΔ, ΓE rectæ lineæ, conicam superficiem ex eadem parte contingentes: dico omnia puncta tactionum E, Δ in eadem recta linea esse.

Ducatur à puncto Γ ad AB * perpendicularis ΓZ; & per ΓZ ducatur planum æquidistans plano circuli A, quod sectionem in cono faciat circulum circa centrum Z, ita ut conus constituatur, cujus basis circulus Z, & axis ZB. rursus per ΓZ & axem aliud planum ducatur, faciens in cono triangulum BHΘ; & ipsi ΓZ ad rectos angulos agatur ΓK, quæ in circuli Z plano existat; deinde per ΓK & utramque ipsarum ΓΔ, ΓE ducantur plana conum secantia, quæ faciant in coni quidem superficie sectiones ΛΔM, NEΞ, in plano autem trianguli BHΘ rectas lineas ΛΓ, NΓ: diametri igitur sectionum ΛΔM, NEΞ sunt rectæ ΛM, NΞ. itaque ad diametros ΛM, NΞ ordinatim applicentur ΔO, EΠ; quæ ad alteram partem superficiei ad puncta P, Σ producantur. quoniam igitur recta linea ΓΔ contingit sectionem ΛΔM in puncto Δ, & ΔO ordinatim applicata est; erit [per 36. 1.] ut ΛΓ ad ΓM ita ΛO ad OM. eadem quoque ratione ut NΓ ad ΓΞ ita erit NΠ ad ΠΞ: ergo, per proxime demonstrata, recta linea quæ connectit puncta O, Π, si producatur, per verticem transibit. ducatur igitur OΠB. & quoniam EΣ, ΔP ipsi ΓK sunt parallelæ; etiam inter se parallelæ & in eodem plano erunt: itaque planum juxta rectas BΠO & EΣ, ΔP ductum sectionem faciet in coni superficie triangulum: adeoque puncta E, Δ, quæ sunt in superficie coni, erunt etiam in latere trianguli secantis triangulum BHΘ secundum rectam lineam BΠO. simili modo demonstrabitur idem evenire in quibusvis aliis, uti & in contingentibus ad puncta P, Σ. omnes igitur rectæ lineæ, quæ à puncto Γ ductæ conicam



ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὸ Α κέντρον κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Β σημεῖον, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, σημείου δέ τινος τοῦ Γ ληφθέντος ἐκτὸς τοῦ κώνου, ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Γ αἱ ΓΔ, ΓΕ εὐθεῖαι, ἐφαπτόμεναι τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι τὰ Ε, Δ σημεῖα τῶν ἐπαφῶν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἐστί.

Κατήχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΖ, καὶ διὰ τῆς ΓΖ ἤχθω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ τοῦ Α κύκλου ἐπιπέδῳ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῷ κώνῳ τὸν περὶ τὸ Ζ κέντρον κύκλον, ὥστε κῶνον ὑποστῆναι, οὗ βάσις μὲν ὁ Ζ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΖΒ· καὶ διὰ τῆς ΓΖ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον ποιοῦν ἐν τῷ κώνῳ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΒΗΘ, καὶ τῇ ΓΖ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΚ, ἐν τῷ τοῦ Ζ κύκλου ἐπιπέδῳ οὖσα· καὶ διὰ τῆς ΓΚ καὶ ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ ἤχθω ἐπίπεδα τέμνοντα τὸν κῶνον, καὶ ποιείτω διὰ τῆς τομῆς, ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὰς ΛΔΜ, ΝΕΞ γραμμὰς, ἐν δὲ τῷ τοῦ ΒΗΘ τριγώνου ἐπιπέδῳ τὰς ΛΓ, ΝΓ εὐθείας· διάμετροι ἄρα τῶν ΛΔΜ, ΝΕΞ τομῶν εἰσὶν αἱ ΛΜ, ΝΞ εὐθεῖαι. ἤχθωσαν τοίνυν ἐπὶ τὰς ΛΜ, ΝΞ διαμέτρους αἱ ΔΟ, ΕΠ τεταγμένως, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπὶ θάτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὰ Ρ καὶ Σ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ εὐθεῖα τῆς ΛΔΜ γραμμῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κατῆκται τεταγμένως ἡ ΔΟ· ὡς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΜ· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ὡς ἡ ΝΓ πρὸς τὴν ΓΞ οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς τὴν ΠΞ· ἡ ἄρα τὰ Ο καὶ Π ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἥξει διὰ τῆς κορυφῆς, διὰ τὸ πρὸ τούτου. διήχθω τοίνυν ἡ ΟΠΒ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΕΣ, ΔΡ τῇ ΓΚ ἐστὶ παράλληλος· αἱ ἄρα ΔΡ, ΕΣ παράλληλοί τε εἰσὶν ἀλλήλαις καὶ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. τὸ οὖν διὰ τῆς ΒΠΟ καὶ τῶν ΕΣ, ΔΡ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον τὴν τομὴν ποιήσει τρίγωνον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ· τὰ ἄρα Ε καὶ Δ σημεῖα, ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ὄντα τοῦ κώνου, ἐπὶ πλευρᾶς ἐστι τριγώνου τοῦ τέμνοντος τὸ ΒΗΘ τρίγωνον κατὰ τὴν ΒΠΟ εὐθεῖαν. ὁμοίως δέδεικται ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων πασῶν, καὶ ἐπὶ τῶν κατὰ τὰ Ρ καὶ Σ ἐφαπτομένων, τὸ αὐτὸ συμβαῖνον· πᾶσαι ἄρα αἱ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτόμεναι τῆς κω-

* Supponit hic conum rectum esse, sed eâdem fere demonstratione res in cono scaleno comprobari potest, uti diximus in nota ad vigesimam nonam propositionem de Cylindro.

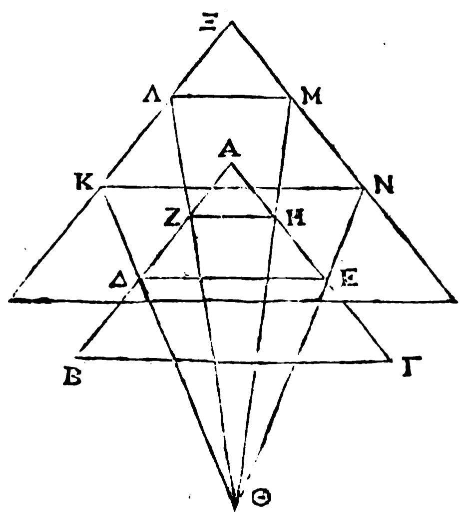
νικῆς

νικῆς ἐπιφανείας καθ' ἑνὸς τριγώνου πλευρῶν ἅπτουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λέ.

ΤΟΥΤΟΥ δὴ δειχθέντος, ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ παρὰ τὴν ΒΓ βάσιν αἱ ΔΕ, ΖΗ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Θ, μὴ ὂν ἐν τῷ τοῦ τριγώνου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΘΔ, ΘΖ, ΘΗ, ΘΕ ἐκβληθεῖσαι προσπιπτέτωσαν ἐπιπέδῳ τινὶ, παραλλήλῳ ὄντι τῷ ΑΒΓ ἐπιπέδῳ, κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα· τὸ δὴ διὰ τῶν ΕΔ, ΚΘ εὐθειῶν ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον τεμεῖ τὸ ΚΛΜΝ ἐπίπεδον, καὶ ποιήσει ἐν αὐτῷ κοινὴν τομὴν τὴν ΚΝ εὐθεῖαν, παράλληλον οὖσαν τῇ ΕΔ. ὁμοίως δὴ καὶ τὸ διὰ τῶν ΖΗ, ΛΘ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ποιήσει παράλληλον τῇ ΖΗ τὴν ΛΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΚΘΛ ἐπίπεδον τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΚΛΜΝ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΚΛ, ΔΖ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις. διὰ ταῦτα δὲ καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΗΕ παράλληλός ἐστιν· ἐκβληθεῖσαι ἄρα αἱ ΚΛ, ΜΝ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ Ξ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΚΞ, ΞΝ δυσὶ ταῖς ΔΑ, ΑΕ παράλληλοί εἰσιν· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τὸ Ξ γωνία τῇ πρὸς τὸ Α. πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ΞΚ, ΚΝ δυσὶ ταῖς ΑΔ, ΔΕ παράλληλοί εἰσιν· ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν ΞΚ, ΚΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ ἴση· τὰ ἄρα ΞΚΝ, ΑΒΓ τρίγωνα ὅμοιά ἐστιν ἀλλήλαις.

Ἐὰν οὖν πάλιν τὸ μὲν Θ σημεῖον ὑποθώμεθα τὸ φωτίζον εἶναι, τὸ δὲ ΑΒΓ τρίγωνον τὸ ἐπιπροσθοῦν ταῖς ἀκτῖσιν, εἴτε καθ' αὑτὸ ὂν τὸ τρίγωνον εἴτε ἐν κώνῳ, συμβήσεται τὰς ἀπὸ τοῦ Θ φερομένας ἀκτῖνας, ἐκπιπτούσας διὰ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ποιεῖν τὸ ΚΝΞ τρίγωνον τῆς σκιᾶς, ὅμοιον ὂν τῷ ΑΒΓ. ταῦτα εἰ καὶ ὀπτικῆς θεωρίας ἔχεται, καὶ δοκεῖ διὰ τοῦτο τῆς παρούσης πραγματείας ἀλλότρια εἶναι· ἀλλ' οὖν ἐκεῖνό γε φανερὸν γέγονεν, ὅτι, ἄνευ τῶν περὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς τοῦ κώνου τομῆς ἐνταῦθα δειχθέντων, τῆς ἐλλείψεως λέγω καὶ τῶν ἁπτομένων αὐτῆς εὐθειῶν, ἀδύνατον ἦν κατασκευάσαι τὸ τοιοῦτον πρόβλημα. ὥστε οὐκ ἀλόγως, ἀλλὰ διὰ τὴν χρείαν, ἐπεισήχθη ὁ περὶ τούτων λόγος.



superficiem contingunt, in unius trianguli lateribus tactus faciunt. quod erat demonstrandum.

Prop. XXXV. *Theor.*

HOC igitur demonstrato, sit triangulum ABΓ, cujus basi BΓ parallelæ ducantur ΔE, ZH; & sumpto aliquo puncto Θ, quod non sit in trianguli plano, jungantur ΘΔ, ΘZ, ΘH, ΘE; quæ productæ occurrant plano alicui, quod plano ABΓ æquidistet, in punctis K, Λ, M, N: planum igitur per rectas EΔ, KΘ ductum secabit etiam planum KΛMN, & in eo communem sectionem faciet rectam lineam KN ipsi ΔE parallelam. eodem modo & planum ductum per ipsas ZH, ΛΘ faciet rectam lineam ΛM parallelam ipsi ZH. quoniam igitur planum KΘΛ æquidistantibus planis ABΓ, KΛMN secatur, communes ipsorum sectiones KΛ, ΔZ parallelæ erunt. eadem ratione parallelæ sunt rectæ MN, HE: ergo KΛ, MN productæ convenient inter se. conveniant in Ξ; & cum duæ rectæ KΞ, ΞN duabus ΔA, AE parallelæ sint; erit angulus ad Ξ angulo ad A æqualis. rursus cum duæ ΞK, KN duabus AΔ, ΔE parallelæ sunt, erit angulus ΞKN angulo AΔE æqualis; triangula igitur ΞKN, ABΓ inter se similia erunt.

Quod si punctum Θ fingamus esse corpus illuminans, & triangulum ABΓ ejus radiis oppositum, sive per se sive in cono, eveniet ut radii, qui ab ipso Θ emittuntur juxta triangulum ABΓ, faciant triangulum umbræ KNΞ ipsi ABΓ simile. etsi enim hæc ad Opticam contemplationem pertineant, & ob id à proposita tractatione aliena videantur, tamen perspicue constat, absque iis quæ hoc loco de coni & cylindri sectione, hoc est de ellipsi & rectis lineis eam contingentibus, demonstrata sunt, problema hujusmodi absolvi non posse: quare non temere, sed necessario de his sermonem instituimus.

ΣΕΡΗ-

ΣΕΡΗΝΟΥ
ΑΝΤΙΝΣΕΩΣ ΦΙΛΟΣΟΦΟΥ
ΠΕΡΙ
ΚΩΝΟΥ ΤΟΜΗΣ.

SERENI
ANTISSENSIS PHILOSOPHI
DE
SECTIONE CONI
LIBER.

CUM ea sectio, præstantissime *Cyre*, quæ in Conis per verticem fit, in eorum quidem superficiebus triangula efficiat, variamque & perpulchram præbeat contemplationem; à nullo autem eorum qui nos præcesserunt, quod sciam, pertractata sit: non malè me facturum existimavi, si locum hunc inexplicatum non relinquerem, sed perscriberem de his quæcunque ipse cogitatione complectebar. Propemodum quidem hæc omnia, quæque profundiore geometriâ indigere videntur, me hoc libro comprehendisse arbitror: neque mirum alicui videri debeat, si nonnulla quæ dici debuerant prætermiserim, utpote qui primus ad hanc contemplationem sim aggressus. Quamobrem par est, ut vel tu, in eorundem studium incumbens, vel posteriorum aliquis, qui in hæc inciderit, nostro exemplo ductus, à nobis omissa supplenda curaret. Quædam autem sunt quæ consultò præterierim, vel quod manifesta essent, vel quod ab aliis tractata. Siquidem in omni cono sectionem triangulum esse, si per

ΤΗΣ ἐν τοῖς κώνοις τομῆς, ἄριστε Κῦρε, ὅταν διὰ τῆς κορυφῆς αὐτῶν γίνηται, τρίγωνα μὲν ὑφιστάσης ἐν τοῖς κώνοις, ποικίλην δὲ καὶ γλαφυρὰν θεωρίαν ἐχούσης, καὶ μηδενὶ τῶν πρὸ ἡμῶν, ὅσα γε μὲ εἰδέναι, πραγματευθείσης· ἔδοξέ μοι μὴ καλῶς ἔχειν ἀνεξέργαστον ἀφεῖναι τὸν τόπον τοῦτον, εἰπεῖν δὲ περὶ αὐτῶν ὅσα γε εἰς ἐμὴν ἀφῖκται κατάληψιν. σχεδὸν μὲν οὖν τά γε πλεῖω, καὶ βαθυτέρας δοκοῦντα δεῖσθαι γεωμετρίας, ἡγοῦμαι λόγου τετυχηκέναι παρ' ἡμῶν. οὐκ ἂν δὲ θαυμάσαιτό τις, εἰ καί τι τῶν ὀφειλόντων λεχθῆναι παριέναι ὀφθείην, ἅτε πρῶτος ἐγχειρήσας τῇ τούτων θεωρίᾳ. ὥστε εἰκὸς ἢ σὲ καθιέντα εἰς τὴν αὐτὴν σκέψιν, ἢ τῶν ὕστερον ἐντευξομένων τινὰ, ὁρμώμενον ἐνθένδε, τὸ παροφθὲν ἡμῖν προσθεῖναι. ἔστι δὲ ἃ καὶ ἑκόντες παραλελοίπαμεν, ἢ διὰ τὸ σαφὲς, ἢ διὰ τὸ ἄλλοις δεδεῖχθαι. αὐτίκα τὸ μὲν ἐν παντὶ κώνῳ τρίγωνον εἶναι τομὴν, εἰ διὰ τῆς κορυφῆς

τμηθείη,

τμηθείη, διὰ τὸ δεδεῖχθαι ἄλλοις ὡς οὕτως ἔχει, ἡμεῖς παραλιμπάνομεν, ἵνα μηδὲν ἀλλότριον τοῖς ὑφ' ἡμῶν εὑρεθεῖσι συντεταγμένον ᾖ. τὰ δ' ἐπιπολαιότερα καὶ τοῖς πολλοῖς εὔληπτα γραφῆς οὐκ ἠξιώσαμεν, ἵνα μὴ τῶν ἐντυγχανόντων τὴν προσοχὴν τῆς διανοίας ἐκλύσωμεν. ἰτέον δὴ ἐπὶ τὴν προκειμένην ἀπόδειξιν.

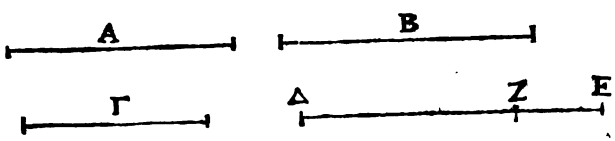
verticem secetur, cum ab aliis demonstratum sit, nos omisimus, ne aliena nostris inventis insererentur. Quæ vero magis obvia sunt, & facillime intelligi possunt, non existimavi me scribere oportere, ne legentium animos parum attentos redderem. igitur ad rem propositam accedamus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν τεσσάρων εὐθειῶν ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην· τὸ ὑπὸ πρώτης καὶ τετάρτης μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ δευτέρας καὶ τρίτης.

ΕΥΘΕΙΑ γὰρ ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν ΔΕ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν Β, Γ.

Ἐπεὶ ἡ Α πρὸς Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν ΔΕ, ἔστω ὡς ἡ Α πρὸς Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΔΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, ΔΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ Α, ΔΕ τοῦ ὑπὸ Α, ΔΖ· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ Α, ΔΕ.



Prop. I. *Theor.*

Si prima quatuor rectarum ad secundam majorem rationem habeat quam tertia ad quartam: rectangulum contentum sub prima & quarta majus est eo quod sub secunda & tertia continetur.

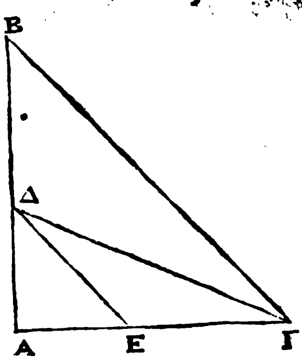
HABEAT recta A ad rectam B majorem rationem quam Γ ad ΔB: dico rectangulum sub A & ΔE rectangulo sub B & Γ majus esse. Quoniam enim A ad B majorem rationem habet quam Γ ad ΔE; fiat ut A ad B ita Γ ad ΔZ: rectangulum igitur sub A & ΔZ æquale rectangulo sub B & Γ. majus autem est quod fit sub A & ΔE eo quod sub A & ΔZ; ergo rectangulum sub A & ΔE rectangulo sub B & Γ majus erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν τριγώνου ὀρθογωνίου ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν γωνιῶν ἐπὶ μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἀχθῇ εὐθεῖα· ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ καθέτῳ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐξ ἀρχῆς ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν πρὸς τὴν τμηθεῖσαν πλευρὰν ὑπὸ τῆς ἀχθείσης.

ΤΡΙΓΩΝΟΥ γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχοντος τὴν Α γωνίαν, ἀπὸ μιᾶς τῶν γωνιῶν τῆς Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἤχθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ πρὸς ΔΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ.

Ἤχθω παρὰ τὴν ΓΒ ἡ ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ, ἀμβλεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΓ· μείζων ἄρα ἡ ΔΓ τῆς ΔΕ· ἡ ἄρα ΓΔ πρὸς ΔΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ.



Prop. II. *Theor.*

Si in triangulo orthogonio ab altero angulorum ad unum latus quod est circa angulum rectum recta ducatur: ducta illa habebit ad eam quæ inter ipsam & perpendicularem interjicitur majorem rationem, quam quæ à principio subtenditur recto angulo ad jam dictum latus.

SIT triangulum orthogonium ABΓ, rectum habens angulum ad A; & ab uno angulorum, videlicet à Γ, ad AB ducatur recta ΓΔ: dico ΓΔ ad ΔA majorem rationem habere quam ΓB ad BA.

Ducatur enim recta ΔE ipsi ΓB parallela. & quoniam rectus est angulus ΔAΓ, angulus ΔEΓ obtusus erit: major igitur est ΔΓ quam ΔE; & idcirco ΓΔ ad ΔA majorem rationem habet quam EΔ ad ΔA, hoc est quam ΓB ad BA.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

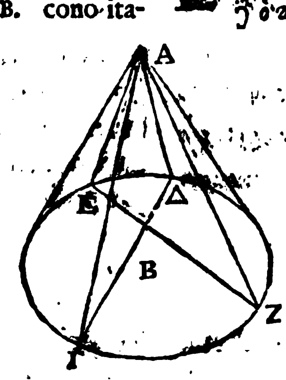
Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ τῶν γινομένων ἐν ταῖς τομαῖς τριγώνων τὰ ἴσας ἔχοντα βάσεις ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Prop. III. *Theor.*

Si conus rectus planis per verticem secetur; triangula illa, quæ in sectionibus fiunt & æquales habent bases, inter se æqualia erunt.

SIT conus rectus, cujus vertex punctum A, & basis circulus circa centrum B. cono itaque planis per verticem secto, generentur triangula AΓΔ, AEZ, æquales bases habentia ΓΔ, EZ (triangula enim ex his sectionibus fieri alibi [per 3. 1. conic.] ostensum est.) dico triangula AΓΔ, AEZ æqualia esse.

Nam cum bases sint æquales, itemque æquales inter se AΓ, AΔ, AE, AZ; erit triangulum triangulo quoque æquale.



ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ B κέντρον κύκλος· καὶ τοῦ κώνου διὰ τῆς κορυφῆς τμηθέντος ἐπιπέδοις, γεγενήσθωσαν τὰ ὑπὸ τῆς τομῆς γινόμενα τρίγωνα. (ὅτι γὰρ τρίγωνα ποιοῦσιν αἱ τοιαῦται τομαὶ ἐν ἄλλοις δέδεικται) γεγενήσθωσαν τὰ AΓΔ, AEZ, ἴσας ἔχοντα τὰς ΓΔ, EZ βάσεις· λέγω ὅτι τὰ AΓΔ AEZ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ αἵ τε βάσεις ἴσαι ἀλλήλαις, ἴσαι δὲ καὶ αἱ AΓ, AΔ, AE, AZ· καὶ τὸ τρίγωνον ἄρα τῷ τριγώνῳ ἴσον.

Prop. IV. *Theor.*

In conis rectis similia triangula inter se æqualia sunt.

SIT enim in proposita figura AΓΔ triangulum triangulo AEZ simile: dico & æquale esse. quoniam enim ut AΓ ad ΓΔ ita AE ad EZ; erit permutando ut ΓA ad AE ita ΓΔ ad EZ. & sunt ΓA, AE æquales; ergo & æquales sunt ΓΔ, EZ. triangula vero æqualium basium, quæ in conis rectis fiunt, inter se [per 3. huj.] sunt æqualia: ergo & triangula AΓΔ, AEZ æqualia erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐν τοῖς ὀρθοῖς κώνοις τὰ ὅμοια τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

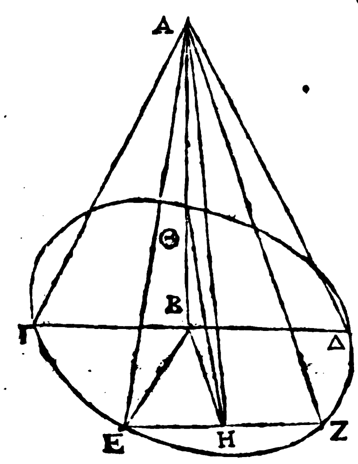
ΕΣΤΩ γὰρ ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὸ AΓΔ τρίγωνον τῷ AEZ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ ἴσον ἐστίν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ AΓ πρὸς ΓΔ οὕτως ἡ AE πρὸς EZ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα. καί εἰσιν ἴσαι αἱ ΓA, AE· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΔ, EZ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων τρίγωνα ἐν τοῖς ὀρθοῖς κώνοις ἴσα ἐστίν· ἴσα ἄρα τὰ AΓΔ, AEZ τρίγωνα.

Prop. V. *Theor.*

Si conus rectus planis per verticem secetur, & per axem & extra axem; sitque axis non minor semidiametro basis: eorum quæ fiunt triangulorum maximum est illud quod per axem transit.

SIT conus, cujus vertex A, basis circulus circa B centrum, & axis AB; cono itaque per verticem secto, fiant triangula, per axem quidem AΓΔ, extra axem vero AEZ; ponaturque EZ ipsi ΓΔ parallela; axis autem AB non minor sit ipsa BΓ: dico AΓΔ triangulum triangulo AEZ majus esse.

Jungatur BE, & ab ipso B ad EZ perpendicularis ducatur BH: ergo [per 3. 3.] EZ bifariam dividetur in H; & juncta AH perpendicularis erit ad EZ; triangulum enim EAZ æquicrure est. quoniam igitur AB non est minor semidiametro BE, & est EH minor quam BE; erit AB ipsa EH major. itaque abscindatur BΘ æqualis ipsi EH, & jungatur HΘ: quoniam igitur EH ipsi BΘ est æqualis, communis autem est BH; ergo



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς ἐπιπέδοις τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, τοῖς μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῖς δὲ ἐκτὸς τοῦ ἄξονος, ὁ δὲ ἄξων τοῦ κώνου μὴ ἐλάττων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· τῶν γινομένων ἐν τῷ κώνῳ τριγώνων μέγιστον ἔσται τὸ διὰ τοῦ ἄξονος.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ B κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ AB· τμηθέντος δὲ τοῦ κώνου διὰ τῆς κορυφῆς, γεγενήσθω τρίγωνα, διὰ μὲν τοῦ ἄξονος τὸ AΓΔ, ἐκτὸς δὲ τοῦ ἄξονος τὸ AEZ, καὶ κείσθω παράλληλος ἡ EZ τῇ ΓΔ, ὁ δὲ ἄξων, τουτέστιν ἡ AB εὐθεῖα, μὴ ἐλάττων ἔστω τῆς BΓ· λέγω ὅτι τὸ AΓΔ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ AEZ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω ἡ BE, καὶ ἀπὸ τοῦ B κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν EZ ἡ BH· δίχα ἄρα τέτμηται ἡ EZ κατὰ τὸ H. ἐπεζεύχθω ἡ AH· ἡ AH ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν EZ, ἰσοσκελὲς γὰρ τὸ EAZ. ἐπεὶ οὖν ἡ AB οὐκ ἔστιν ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς BE, ἐλάττων δὲ ἡ EH τῆς BE· ἡ ἄρα AB μείζων ἐστὶ τῆς EH. ἀφῃρήσθω τοίνυν τῇ EH ἴση ἡ BΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘH. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν EH τῇ BΘ, κοινὴ δὲ ἡ BH· δύο ἄρα

ἄρα δυσὶν ἴσαι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΒΘ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΕΒ τῇ ΘΗ ἴση ἐστὶ, καὶ ὅμοια τὰ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ. ἡ δὲ ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ, ὡς προεδείχθη, ὀρθογώνιον γὰρ τὸ ΑΒΗ· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα πρὸς ΕΗ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΕΗ, τουτέστι ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΒΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΗΑ, διὰ τὸ πρῶτον λημμάτιον. ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ ΓΔ, ΒΑ ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ ΕΖ, ΗΑ ἥμισυ τὸ ΕΑΖ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΓΔ ἄρα τρίγωνον τοῦ ΑΕΖ μεῖζόν ἐστι· καὶ πάντων ἄρα τῶν ἴσας βάσεις ἐχόντων τῇ ΕΖ, καὶ διὰ τοῦτο ἴσων ὄντων, μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΓΔ. ὁμοίως δὲ δείξομεν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τομῶν τῶν ἐκτὸς τοῦ ἄξονος· μέγιστον ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον.

duæ ΘΒ, ΒΗ, duabus ΕΗ, ΗΒ æquales sunt, & angulus ΕΗΒ æqualis angulo ΗΒΘ, nam uterque rectus: basis igitur ΕΒ basi ΘΗ est æqualis, & triangulum triangulo simile: quare ut ΒΕ ad ΕΗ ita ΗΘ ad ΘΒ. sed ΗΘ ad ΘΒ majorem rationem habet quam ΗΑ ad ΑΒ, ut proxime [per 2.huj.] demonstravimus; orthogonium enim triangulum est ΑΒΗ: ergo ΒΕ ad ΕΗ, hoc est ΓΒ ad ΕΗ, hoc est ΓΔ ad ΕΖ, majorem rationem habet quam ΗΑ ad ΑΒ: rectangulum igitur quod fit sub ΓΔ, ΒΑ majus est eo quod sub ΕΖ, ΗΑ, per primum theorema, sed rectanguli quidem sub ΓΔ, ΒΑ dimidium est ΑΓΔ triangulum; rectanguli vero sub ΕΖ, ΗΑ dimidium est triangulum ΒΑΖ: quare triangulum ΑΓΔ majus est triangulo ΑΕΖ, & majus aliis omnibus quæ bases habent æquales basi ΕΖ, ac proinde inter se æqualia sunt. pari modo demonstrabitur, & in aliis sectionibus quæ extra axem fiunt: triangulum igitur per axem omnium maximum erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ΄.

Ἔστι τὸ αὐτὸ ἄλλως καὶ καθολικώτερον δεῖξαι, ὅτι καὶ ἁπλῶς τῶν τριγώνων τὸ μείζονα βάσιν ἔχον μεῖζόν ἐστι.

Τμηθέντος γὰρ τοῦ κώνου, γενέσθω τὰ ΑΓΔ, ΑΖΔ, ὥστε τὰς ΓΔ, ΖΔ βάσεις συμβάλλειν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ πέρας, καὶ ἔστω μείζων τῆς ΖΔ ἡ ΓΔ, ἔστε διὰ τοῦ κέντρου οὖσα, ἔστε μή· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΖΔ μεῖζόν ἐστιν.

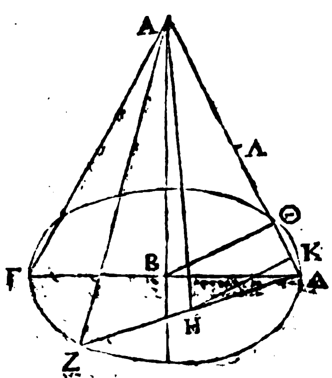
Ἤχθωσαν ἐπὶ τὰς ΖΔ, ΓΔ κάθετοι αἱ ΑΒ, ΑΗ, ἐπὶ δὲ τὴν ΑΔ ἡ ΒΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΖΔ μείζων ἐστὶ, καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα ἡ ΒΔ τῆς ΔΗ μείζων· τὸ ἀπὸ ΒΔ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΗ μεῖζόν ἐστι· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΑ λοιποῦ τοῦ ἀπὸ ΑΗ ἔλαττόν ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΔ· καὶ ἡ ΑΘ ἄρα πρὸς ΘΔ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ. γενέσθω ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΚ· κάθετος ἄρα ἐστὶ καὶ ΗΚ ἐπὶ τὴν ΑΔ, ὡς δειχθήσεται.

Καὶ ἐπεὶ ὑπόκειται ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ οὐκ ἐλάττων, ἤτοι μείζων ἔσται ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ, ἢ ἴση. ἔστω πρότερον μείζων· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΘ τῆς ΘΔ. τετμήσθω ἡ ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ ΑΘ, ΘΔ τοῦ ἀπὸ ΑΛ ἔλαττόν ἐστι τῷ ἀπὸ ΛΘ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΚ, ΚΔ τοῦ ἀπὸ ΑΛ ἔλαττόν ἐστι τῷ ἀπὸ ΛΚ, καὶ ἔστι μεῖζον τὸ ἀπὸ ΛΚ τοῦ ἀπὸ ΛΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΘΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΘ, τοῦ ὑπὸ ΑΚ, ΚΔ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΗΚ· ἡ ΘΒ ἄρα μείζων τῆς ΗΚ. καί εἰσιν αἱ

PROP. VI. *Theor.*

Licet idem aliter & universalius demonstrare, quòd simpliciter in his triangulis, quod majorem basim habet illud majus est.

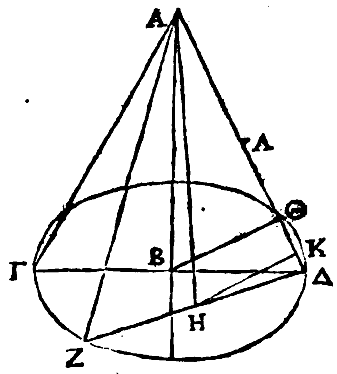
Secto namque cono, fiant triangula ΑΓΔ, ΑΖΔ, ita ut bases ΓΔ, ΖΔ inter se ad terminum Δ conveniant; & sit ΓΔ major ipsa ΖΔ, sive per centrum transeat, sive non: dico triangulum ΑΓΔ majus esse triangulo ΑΖΔ.



Ducantur enim ad ΖΔ, ΓΔ perpendiculares ΑΒ, ΑΗ; & ad ΑΔ ducatur ΒΘ perpendicularis. itaque quoniam ΓΔ major est ipsa ΖΔ; erit ejus dimidia ΒΔ major quam ΔΗ: ergo quadratum ex ΒΔ quadrato ex ΔΗ majus erit; & propterea reliquum quadratum ex ΒΑ minus quadrato ex ΑΗ: quadratum igitur ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΔ minorem rationem habet quam quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΗΔ. sed ut quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΔ ita est ΑΘ ad ΘΔ: ergo ΑΘ ad ΘΔ minorem habet rationem quam quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΗΔ. fiat ut quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΗΔ ita ΑΚ ad ΚΔ, & jungatur ΗΚ; quæ ad ΑΔ perpendicularis erit, uti mox demonstrabitur.

Quoniam igitur ponimus ΑΒ non minorem ipsâ ΒΔ, erit ΑΒ vel major quam ΒΔ, vel ipsi æqualis. sit primum major; ergo ΑΘ major est quam ΘΔ. secetur ΑΔ bifariam in Λ. & quoniam [per 5. 2.] rectangulum ΑΘΔ minus est quam quadratum ex ΑΛ quadrato ex ΛΘ; rectangulum vero ΑΚΔ minus quam quadratum ex ΑΛ quadrato ex ΛΚ, & majus est quadratum ex ΛΚ quadrato ex ΛΘ; erit rectangulum ΑΘΔ, hoc est quadratum ex ΒΘ, majus rectangulo ΑΚΔ, hoc est quadrato ex ΗΚ: recta igitur ΘΒ major est

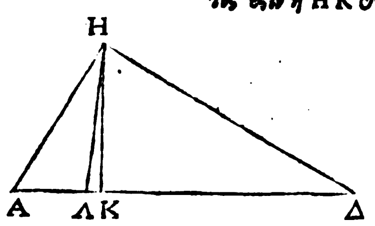
est recta HK. suntque BΘ, HK altitudines triangulorum ABΔ, AHΔ: quare triangulum ABΔ majus est triangulo AHΔ, ut & eorundem dupla, videlicet triangulum AΓΔ majus triangulo AZΔ. sed ipsi AZΔ æquale est aliud omne basim habens ipsi ZΔ æqualem: triangulum igitur AΓΔ majus est quolibet triangulo, cujus basis est æqualis ipsi ZΔ.



Quod si AB sit æqualis ipsi BΔ, erit & AΘ ipsi ΘΔ æqualis: & similiter rectangulum AΘΔ, hoc est quadratum ex BΘ, majus erit rectangulo AKΔ, hoc est quadrato ex HK: proptereaque recta BΘ major quam HK, & triangulum ABΔ triangulo AHΔ majus. eodem modo demonstrabitur etiam, si alias bases duxerimus: quare triangulum majorem habens basim triangulo minorem habente majus erit.

At vero rectam HK ad AΔ perpendicularem esse, hoc modo ostendetur.

Sit triangulum orthogonium AHΔ rectum habens angulum ad H, & à puncto H ad basim ducatur HK, ita ut quam rationem habet quadratum ex AH ad quadratum ex HΔ eandem habeat recta AK ad KΔ: dico HK ad AΔ perpendicularem esse.

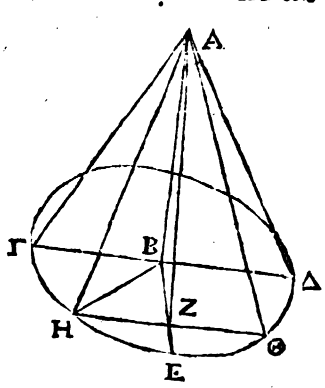


Si enim non ita sit, sit HΛ perpendicularis: ut igitur quadratum ex HA ad quadratum ex HΔ ita AΛ ad ΛΔ. erat autem ut quadratum ex AH ad quadratum ex HΔ ita AK ad KΔ; quare ut AΛ ad ΛΔ ita erit AK ad KΔ, quod est absurdum: igitur HΛ non est perpendicularis. similiter ostendemus neque aliam ullam perpendicularem esse præter ipsam HK: ergo HK ad AΔ perpendicularis erit.

Prop. VII. *Theor.*

Si in cono recto triangulum per axem majus sit quovis triangulo extra axem constituto: axis coni non minor erit semidiametro.

SIT conus cujus vertex quidem A punctum, axis recta AB; basis autem circulus circa centrum B; & triangulum per axem AΓΔ, quod majus sit omni triangulo extra axem in cono constituto: dico rectam AB semidiametro basis non minorem esse.



Si enim fieri potest, sit minor: & ducatur in circulo recta BE ad ΓΔ perpendicularis. quoniam igitur angulus ABE rectus est, recta quæ puncta A, E conjungit, major est semidiametro BE: quare si à puncto A in angulo ABE aptetur recta linea ipsi semidiametro æqualis, inter puncta B & E

BΘ, HK ὕψη τῶν ABΔ, AHΔ τριγώνων· μεῖζον ἄρα τὸ ABΔ τοῦ AHΔ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια· τὸ ἄρα AΓΔ τοῦ AΔZ μεῖζόν ἐστιν. ἀλλὰ τῷ AZΔ ἴσον ἕκαστον οὗ ἡ βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ZΔ· τὸ ἄρα AΓΔ παντὸς τριγώνου μεῖζόν ἐστιν, οὗ ἡ βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ZΔ.

Εἰ δὲ ἡ AB τῇ BΔ ἴση, ἴση ἄρα καὶ ἡ AΘ τῇ ΘΔ· ὁμοίως ἄρα τὸ ὑπὸ AΘ, ΘΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ BΘ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ AK, KΔ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ HK· ἡ ἄρα BΘ μείζων ἐστὶ τῆς HK, καὶ τὸ ABΔ τρίγωνον τοῦ AHΔ τριγώνου μεῖζον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἄλλας βάσεις διαγάγωμεν· ὥστε τὸ οὕτως ἔχον μείζονα βάσιν τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἔχοντος ἐλάσσονα.

Ὅτι δὲ ἡ HK κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν AΔ, δείκνυται οὕτως.

Τριγώνου γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ AHΔ, ὀρθὴν ἔχοντος τὴν πρὸς τὸ H γωνίαν, διῃρήσθω ἡ AΔ βάσις ὑπὸ τῆς HK, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ἀπὸ AH πρὸς τὸ ἀπὸ HΔ οὕτως ἡ AK πρὸς KΔ· λέγω ὅτι κάθετός ἐστιν ἡ HK ἐπὶ τὴν AΔ.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ HΛ κάθετος· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ HA πρὸς τὸ ἀπὸ HΔ οὕτως ἡ AΛ πρὸς τὴν ΛΔ. ἦν δὲ ὡς τὸ ἀπὸ AH πρὸς τὸ ἀπὸ HΔ οὕτως ἡ AK πρὸς KΔ· ἔσται ἄρα ὡς ἡ AΛ πρὸς ΛΔ οὕτως ἡ AK πρὸς KΔ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κάθετός ἐστιν ἡ HΛ. ὁμοίως δὲ δείκνυται ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς HK· ἡ ἄρα HK κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν AΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζʹ.

Ἐὰν ἐν κώνῳ ὀρθῷ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον μέγιστον ᾖ πάντων τῶν ἐκτὸς τοῦ ἄξονος συνισταμένων τριγώνων· ὁ ἄξων τοῦ κώνου οὐκ ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A, ἄξων δὲ ἡ AB εὐθεῖα, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ B κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ AΓΔ, μέγιστον ὂν πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων ἐκτὸς ἄξονος· λέγω ὅτι ἡ AB οὐκ ἔστιν ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου.

Εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ἐλάττων, καὶ ἤχθω ἐν τῷ κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ ἡ BE. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ABE γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα τὰ A, E σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς BE· ἐὰν ἄρα ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ A ὑπὸ τὴν ABE γωνίαν ἐναρμοσθῇ, μεταξὺ πεσεῖται τῶν B καὶ E σημείων.

μένων. ἐναρμόσθω ἡ ΑΖ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ διὰ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΓΔ ἤχθω ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ· γενήσεται δὴ, ὡς ἐν τῷ ε΄. θεωρήματι ἐδείχθη, τὰ ΑΒΖ, ΗΒΖ τρίγωνα ὅμοια· καὶ ἴσαι αἱ ὁμόλογοι πλευραί· ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς ΗΖ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΗΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΖΗ, τουτέστιν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ τὸ ΑΓΔ μέγιστον εἶναι. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου.

cadet. itaque aptetur, ſitque ΑΖ; perque Ζ ducatur ΗΘ ipſi ΓΔ parallela, & jungatur ΒΗ: fient igitur triangula ΑΒΖ, ΗΒΖ ſimilia, ut in quinto theoremate demonſtratum eſt; & latera homologa inter ſe æqualia erunt; ut igitur ΖΑ ad ΑΒ ita ΒΗ ad ΗΖ, hoc eſt ΓΒ ad ΗΖ: quare [per 16. 6.] rectangulum ΑΒΓ æquale eſt rectangulo ΑΖΗ, hoc eſt triangulum per axem æquale erit triangulo ΑΗΘ, quod fieri non poteſt; poſuimus enim triangulum ΑΓΔ maximum eſſe. igitur ΑΒ non minor eſt ſemidiametro baſis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

Κῶνον ὀρθὸν, οὗ ὁ ἄξων οὐκ ἔστιν ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τρίγωνον, λόγον ἔχον δεδομένον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον. δεῖ δὲ τὸν δεδομένον λόγον ἐλάττονος εἶναι πρὸς μείζον.

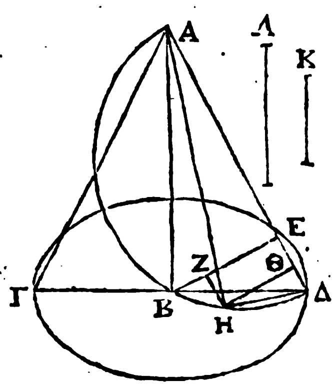
Prop. VIII. *Probl.*

Conum rectum, cujus axis non ſit minor ſemidiametro baſis, plano per verticem ducto ita ſecare, ut faciat triangulum quod ad triangulum per axem rationem habeat datam. oportet autem datam rationem eſſe minoris ad majus.

ΕΣΤΩ κορυφὴ μὲν τοῦ κώνου τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ἐν ᾧ κάθετος ἡ ΑΒ ἐστί· δεῖ δὴ τὸν κῶνον τεμεῖν τριγώνῳ, ὃ λόγον ἕξει πρὸς τὸ ΑΓΔ τὸν ἐπιταχθέντα. ἐπιτετάχθω δὲ ὁ τῆς Κ ἐλάττονος πρὸς μείζονα τὴν Λ λόγος.

Επεὶ οὖν τὸ ΑΒΔ ὀρθογώνιόν ἐστι, γεγράφθω περὶ αὐτὸ ἡμικύκλιον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἤχθω ἡ ΒΕ, καὶ ὡς ἡ Κ πρὸς Λ οὕτως ἔστω ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ, καὶ διὰ τοῦ Ζ παράλληλος ἤχθω τῇ ΕΔ ἡ ΖΗ, διὰ δὲ τοῦ Η τῇ ΖΕ παράλληλος ἡ ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΗΘ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Κ πρὸς Λ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΒΕ, ὡς δὲ ἡ ΘΗ πρὸς ΒΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΘ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕ, ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΗΘ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕ, ΑΔ οὕτως τὰ ἡμίση, τουτέστι τὸ ΑΗΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΔ· ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς Λ οὕτως τὸ ΑΗΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΔ· τὸ ΑΗΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΔ ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστίν. ἐὰν οὖν ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου ἐναρμόσωμεν διπλῆν τῆς ΗΔ, καὶ διὰ τῆς ἐναρμοσθείσης καὶ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπίπεδον ἐκβάλλωμεν, ποιήσει τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ διπλάσιον τοῦ ΑΗΔ· ἕξει ἄρα τὸ συνιστάμενον τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον, ὃν τὸ ΑΗΔ ἔχει πρὸς τὸ ΑΒΔ, τουτέστιν ὃν ἡ Κ πρὸς Λ.

SIT coni vertex Α, baſis circulus circa Β centrum, & triangulum per axem ΑΓΔ, in quo ſit ΑΒ perpendicularis; & oporteat conum ſecare triangulo, quod ad triangulum ΑΓΔ rationem datam habeat. ſit autem data ratio ea quæ eſt Κ minoris ad Λ majorem.



Quoniam igitur triangulum ΑΒΔ rectangulum eſt, deſcribatur circa ipſum ſemicirculus; atque à puncto Β ducatur ΒΕ perpendicularis; & quam rationem habet Κ ad Λ eandem habeat ΖΕ ad ΕΒ; deinde per Ζ ducatur ΖΗ ipſi ΕΔ parallela, & per Η ipſa ΗΘ parallela ipſi ΖΕ: & erit ΖΕ æqualis ipſi ΗΘ. itaque quoniam ut Κ ad Λ ita ΖΕ ad ΕΒ, hoc eſt ΘΗ ad ΒΕ; ut autem ΘΗ ad ΒΕ ita eſt rectangulum ſub ΗΘ & ΑΔ ad rectangulum ſub ΒΕ & ΑΔ; & ut rectangulum ſub ΗΘ & ΑΔ ad rectangulum ſub ΒΕ & ΑΔ ita eorundem dimidia, videlicet triangulum ΑΗΔ ad triangulum ΑΒΔ; erit itaque ut Κ ad Λ ita ΑΗΔ triangulum ad triangulum ΑΒΔ: quare triangulum ΑΗΔ ad ipſum ΑΒΔ eſt in data ratione. ſi igitur in baſi coni aptabimus rectam duplam ipſius ΗΔ, perque ipſam & verticem planum ducemus; faciet id in cono triangulum ipſius ΑΗΔ duplum: quod quidem ad triangulum ΑΓΔ eandem rationem habebit quam ΑΗΔ triangulum ad triangulum ΑΒΔ, hoc eſt quam Κ habet ad Λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ΄.

Εὰν κῶνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ, τῷ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῖς δὲ ἐκτὸς τοῦ ἄξονος, τῶν δὲ γινομένων τριγώνων ἐκτὸς τοῦ ἄξονος ἓν ὁποιονοῦν ἴσον ἔστω τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ· ὁ τοῦ κώνου ἄξων ἐλάττων ἔσται τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

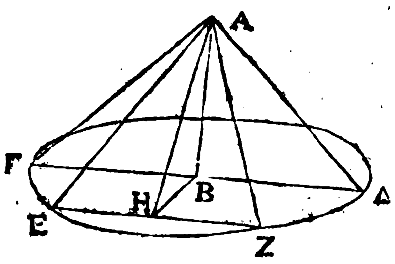
Prop. IX. *Theor.*

Si conus rectus planis per verticem ſecetur, & per axem & extra axem; triangulorum autem, quæ fiunt extra axem, unum aliquod æquale ſit triangulo per axem: axis coni ſemidiametro baſis minor erit.

SECTO enim cono fiant triangula, per axem quidem ΑΓΔ, extra axem vero ΑΕΖ, quod triangulo ΑΓΔ sit æquale; sitque ΕΖ ipsi ΓΔ parallela, & ducantur ΑΒ, ΑΗ perpendiculares, & jungantur ΒΕ, ΒΗ: dico axem ΑΒ semidiametro ΒΔ minorem esse.

Quoniam enim ΑΕΖ triangulum æquale est triangulo ΑΓΔ; & eorundem dupla æqualia erunt, videlicet rectangulum sub ΕΖ & ΗΑ æquale rectangulo sub ΓΔ & ΒΑ: ergo [per 14.6.] ut ΓΔ ad ΕΖ, hoc est ΓΒ ad ΕΗ [sive ΒΕ ad ΕΗ] ita ΗΑ ad ΑΒ. quoniam igitur duo triangula ΒΕΗ, ΗΑΒ unum angulum ΕΗΒ uni angulo ΑΒΗ æqualem habent; (est enim uterque rectus) circa alios autem angulos latera sunt proportionalia, estque reliquorum ΕΒΗ, ΑΗΒ uterque recto minor; triangula inter se similia erunt: ut igitur ΕΗ ad ΗΒ ita ΑΒ ad ΗΒ; quare ΑΒ ipsi ΕΗ est æqualis. sed ΕΗ minor est semidiametro ΒΕ; ergo ΑΒ coni axis semidiametro minor erit. quod erat demonstrandum.

ΤΜΗΘΕΝΤΟΣ γὰρ κώνου, γινέσθω τρίγωνα, διὰ μὲν τοῦ ἄξονος τὸ ΑΓΔ, ἐκτὸς δὲ τὸ ΑΕΖ, ἴσον ὂν τῷ ΑΓΔ, ἔστω δὲ παράλληλος ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ, καὶ κάθετοι αἱ ΑΒ, ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΒΗ· λέγω δὴ ὅτι ἡ ΑΒ ὁ ἄξων ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΒΔ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου.



Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΓΔ, καὶ τὰ διπλάσια ἄρα ἴσα, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΗΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΔ, ΒΑ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΕΗ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΒΕΗ, ΗΑΒ μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ ἴσην ἔχει, (ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα) περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ΒΕΗ, ΗΑΒ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἑκατέρα δὲ τῶν λοιπῶν τῶν ὑπὸ ΕΒΗ, ΑΗΒ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΗΒ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΕΗ. ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΒΕ· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα, ἄξων οὖσα τοῦ κώνου, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

Corollarium.

Quod autem demonstratum est in lineis parallelis ΓΔ, ΕΖ; constabit etiam si non fuerint parallelæ: quippe cum [per 3.huj.] ostensum sit triangula bases æquales habentia inter se æqualia esse.

Πόρισμα.

Ἐπεὶ τοίνυν ἐδείχθη ἐπὶ παραλλήλων τῶν ΓΔ, ΕΖ, φανερὸν ὡς, κἂν μὴ παράλληλοι ὦσιν, οὐδὲν διοίσει· ἐδείχθη γὰρ ὡς τὰ ἴσας ἔχοντα βάσεις τρίγωνα ἴσα ἐστί.

PROP. X. *Theor.*

Iisdem manentibus, demonstrandum est, si rursus planum ducatur conum per verticem secans, faciensque in basi rectam lineam, cujus magnitudo media sit inter bases æqualium triangulorum; triangulum illud utrisque triangulis æqualibus majus esse.

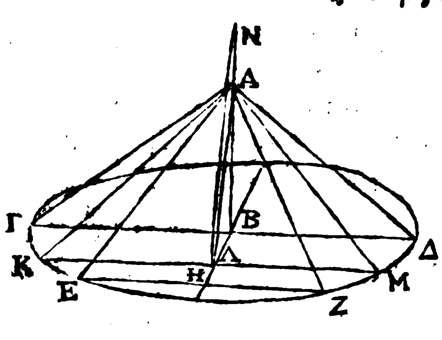
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, δεικτέον ὅτι ἐὰν διαχθῇ πάλιν ἐπίπεδον τέμνον τὸν κῶνον διὰ τῆς κορυφῆς, καὶ ποιοῦν ἐν τῇ βάσει εὐθεῖαν τῷ μεγέθει μεταξὺ τῶν βάσεων τῶν ἴσων τριγώνων· ἐκεῖνο τὸ τρίγωνον μεῖζον ἔσται ἑκατέρου τῶν ἴσων τριγώνων.

SIT, ut in antecedenti figura, triangulum per axem ΑΓΔ æquale triangulo basim habenti ΕΖ; & ducatur quælibet recta linea ΚΜ, cujus magnitudo sit inter ΓΔ, ΕΖ; ponatur autem utrique earum parallela, & per ipsam & verticem planum ducatur: dico triangulum ΑΚΜ utroque ipsorum ΑΓΔ, ΑΕΖ majus esse.

Secetur enim rursus ΚΜ bifariam in Λ, & jungantur ΑΛ, ΒΚ, ΒΛ. itaque quoniam ΑΓΔ triangulum æquale est triangulo ΑΕΖ: erit ΑΒ ipsi ΕΗ, hoc est dimidiæ ipsius ΕΖ, æqualis, ut proxime demonstratum fuit. sed ΚΛ est major quam ΕΗ: ergo & ΚΛ ipsa ΑΒ major erit. ponatur ΒΝ æqualis ipsi ΚΛ,

ΕΣΤΩ γάρ, ἐπὶ τῆς ὁμοίας καταγραφῆς, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΓΔ ἴσον τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν ΕΖ, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ ΚΜ μεγέθει μεταξὺ τῶν ΓΔ, ΕΖ, καὶ ἑκατέρᾳ αὐτῶν κείσθω παράλληλος, καὶ διήχθω τὸ ἐπίπεδον· λέγω δὴ ὅτι τὸ ΑΚΜ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ΑΓΔ, ΑΕΖ.



Τετμήσθω γὰρ πάλιν δίχα ἡ ΚΜ τῷ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΒΚ, ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ τριγώνῳ, ἡ ἄρα ΑΒ τῇ ΕΗ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΕΖ ἴση ἐστίν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου συναπεδείχθη. μείζων δὲ ἡ ΚΛ τῆς ΕΗ· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ΚΛ. κείσθω οὖν τῇ ΚΛ ἴση ἡ

ΒΝ

Β Ν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Λ Ν· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοῖς προειρημένοις ἔσαι τὸ Β Κ Λ τρίγωνον τῷ Λ Ν Β τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιον· ὡς ἄρα ἡ Β Κ πρὸς Κ Λ, τουτέστιν ὡς ἡ Γ Β πρὸς Κ Λ, τουτέστιν ἡ Γ Δ πρὸς Κ Μ, οὕτως ἡ Λ Ν πρὸς Ν Β. ἡ δὲ Λ Ν πρὸς Ν Β ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Λ Α πρὸς Α Β· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Γ Δ, Β Α ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν Κ Μ, Λ Α, τουτέστι τὸ Α Γ Δ τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι τοῦ Α Κ Μ τριγώνου· μεῖζον ἄρα τὸ Α Κ Μ τοῦ Α Γ Δ καὶ τοῦ Α Ε Ζ τριγώνου.

& jungatur Λ N, ac eadem ratione quæ supra, demonstrabimus triangulum B K Λ æquale & simile triangulo Λ N B: quare ut B K ad K Λ, hoc est ut Γ B ad K Λ, hoc est Γ Δ ad K M, ita Λ N ad N B. sed Λ N ad N B minorem rationem habet quam Λ A ad A B; & propterea rectangulum sub Γ Δ & B A minus est rectangulo sub K M & Λ A, hoc est triangulum A Γ Δ minus triangulo A K M: triangulum igitur A K M & triangulo A Γ Δ & triangulo A E Z majus erit.

Πόρισμα.

Τὸ αὐτὸ δὴ δείκνυται καὶ ἐπὶ πάντων τριγώνων, ὧν ἡ βάσις μεγέθει μεταξύ ἐστι τῆς Γ Δ καὶ Ε Ζ· οὐδὲν γὰρ διοίσει κἂν μὴ παράλληλοι ὦσιν αἱ βάσεις, ὡς καὶ πρότερον ἐδείχθη.

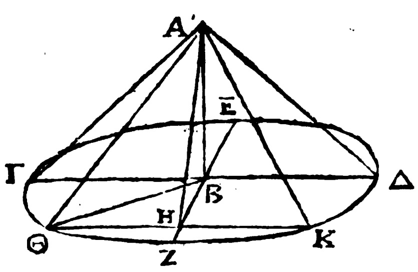
Corollarium.

Idem demonstrabitur etiam in omnibus triangulis, quorum bases magnitudine inter Γ Δ, B Z intermediæ sint, nihil enim differt si bases non sint parallelæ, ut supra demonstratum fuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Δοθέντα κῶνον ὀρθὸν, οὗ ὁ ἄξων ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς, ὥστε τὸ γινόμενον τρίγωνον ἴσον εἶναι τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος, οὗ ἄξων μὲν ὁ Α Β, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ Α Γ Δ· καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὸν κῶνον ἐπιπέδῳ, ποιοῦντι τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ ἴσον τῷ Α Γ Δ.



Ἤχθω τῇ Γ Δ ἐν τῷ κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς διὰ τοῦ κέντρου ἡ Ε Β Ζ. καὶ ἐπεὶ ἡ Α Β ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἐνηρμόσθω ἡ Α Η, ὑποτείνουσα μὲν τὴν ὑπὸ Α Β Ζ γωνίαν, ἴση δὲ οὖσα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, (τοῦτο δὲ ῥᾴδιον ποιῆσαι) καὶ διὰ τοῦ Η παράλληλος τῇ Γ Δ ἤχθω ἡ Θ Η Κ· ἡ Θ Η Κ ἄρα κατὰ τὸ Η δίχα τέτμηται καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ Ε Β Ζ. διεκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν Θ Κ, Η Α ἐπίπεδον, ποιοῦν τὸ Α Θ Κ τρίγωνον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ Α Γ Δ.

Ἐπεζεύχθω ἡ Β Θ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ Α Η τῇ Β Θ, ὡς ἄρα ἡ Α Η πρὸς Η Β οὕτως ἡ Θ Β πρὸς Η Β. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ Β Θ Η, Η Α Β μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχει (ὀρθαὶ γὰρ αἱ ὑπὸ Θ Η Β, Α Β Η) παρὰ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τάς τε λοιπὰς ὀρθῆς ἐλάσσονας· ὅμοια ἄρα τὰ Β Θ Η, Η Α Β τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ Β Θ πρὸς Θ Η, τουτέστιν ὡς ἡ Γ Δ πρὸς Θ Κ, οὕτως ἡ Η Α πρὸς Α Β· τὸ ἄρα ὑπὸ Γ Δ, Β Α ἴσον τῷ ὑπὸ Θ Κ, Η Α, καὶ τὰ ἡμίσεα· τὸ Α Γ Δ τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ Α Θ Κ τριγώνῳ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XI. *Probl.*

Datum conum rectum, cujus axis sit minor semidiametro basis, plano per verticem ita secare, ut faciat triangulum æquale ei quod per axem constituitur.

SIT datus conus rectus, cujus axis quidem A B; triangulum vero per axem A Γ Δ: & oporteat eum plano per verticem ita secare, ut faciat triangulum triangulo A Γ Δ æquale.

Ducatur in circulo per centrum recta E B Z ad rectos angulos ipsi Γ Δ. & quoniam A B minor est semidiametro basis, aptetur A H subtendens angulum A B Z, quæ semidiametro sit æqualis (quod quidem facile effici potest) deinde per H ducatur Θ H K ipsi Γ Δ parallela: ergo [per 3. 3.] Θ H K ad H bifariam secatur & ad E B Z est perpendicularis. ducatur juxta rectas Θ K, H A planum triangulum A Θ K efficiens: dico A Θ K triangulo A Γ Δ æquale esse.

Jungatur enim B Θ, & quoniam A H est æqualis ipsi B Θ, erit ut A H ad H B ita Θ B ad B H: quod cum duo triangula B Θ H, H A B unum angulum uni angulo æqualem habeant (sunt enim Θ H B, A B H utrique recti) & circa alios angulos latera proportionalia sint, reliquorum vero uterque recto minor; erunt B Θ H, H A B triangula inter se similia: quare ut B Θ ad Θ H, hoc est Γ Δ ad Θ K, ita H A ad A B: & idcirco rectangulum quod fit sub Γ Δ & B A æquale est rectangulo sub Θ K & H A; proinde eorum dimidia, videlicet triangulum A Γ Δ æquale erit triangulo A Θ K. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ, τῶν δὲ γινομένων ἐν τῷ κώνῳ τριγώνων τινὸς ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἴση ᾖ τῇ ἡμι-

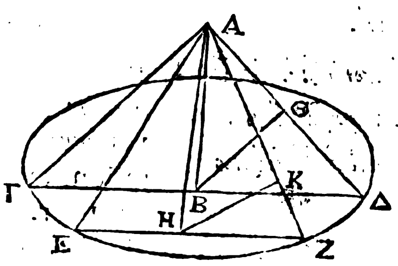
PROP. XII. *Theor.*

Si conus rectus planis per verticem secetur, & in uno triangulorum sectione factorum recta à vertice ad basim perpendicularis ducta æqualis sit dimidiæ

dimidiæ basis: erit illud triangulum majus omnibus triangulis dissimilibus in cono constitutis.

SIT in cono recto triangulum ΑΓΔ, quod perpendicularem ΑΒ æqualem habeat ipsi ΒΔ dimidiæ ΓΔ basis: dico ΑΓΔ triangulum majus esse omnibus triangulis dissimilibus quæ in cono constituuntur.

Sumatur enim aliud quodvis triangulum ΑΕΖ ipsi dissimile, in quo sit perpendicularis ΑΗ; & à puncto quidem Β ad ΑΔ perpendicularis ducatur ΒΘ; à puncto autem Η ad ΑΖ itidem ducatur perpendicularis ΗΚ. quoniam igitur triangulum ΑΓΔ dissimile est triangulo ΑΕΖ, & ΑΒΔ ipsi ΑΗΖ dissimile erit. sunt autem orthogonia, & æquicrure est ΑΒΔ: ergo ΑΗΖ non est æquicrure; & quadratum quidem ex ΑΒ æquale est quadrato ex ΒΔ, quadratum vero ex ΑΗ quadrato ex ΗΖ non est æquale. ut autem quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΔ ita recta ΑΘ ad ΘΔ; & ut quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΗΖ ita ΑΚ ad ΚΖ: recta igitur ΑΔ in partes æquales dividitur, ΑΖ vero in partes inæquales. itaque quoniam id quod sub æqualibus partibus continetur majus est contento sub partibus inæqualibus; erit ΑΘΔ rectangulum majus rectangulo ΑΚΖ. sed rectangulo ΑΘΔ æquale est quadratum ex ΒΘ; & rectangulo ΑΚΖ æquale quadratum ex ΗΚ: quadratum igitur ex ΒΘ quadrato ex ΗΚ majus erit; idcircoque linea ΒΘ major quam ΗΚ. ut autem ΒΘ ad ΗΚ ita rectangulum sub ΒΘ, ΑΔ ad rectangulum sub ΗΚ, ΑΖ; & ita dimidium ad dimidium, hoc est triangulum ΑΒΔ ad triangulum ΑΗΖ: majus igitur est ΑΒΔ triangulum triangulo ΑΗΖ, & eorundem dupla, videlicet triangulum ΑΓΔ majus triangulo ΑΕΖ. similiter ostendetur ΑΓΔ majus esse omnibus triangulis ipsi dissimilibus. quod erat demonstrandum.



Prop. XIII. *Probl.*

Datum conum rectum, cujus axis sit minor semidiametro basis, plano per verticem ita secare, ut faciat triangulum majus omnibus triangulis dissimilibus in cono constitutis.

SIT datus conus rectus, cujus vertex quidem Α punctum; basis circulus circa centrum Β, axis vero ΑΒ minor semidiametro basis: & oporteat conum juxta præscriptum secare.

Ducatur planum per axem quod faciat triangulum ΑΓΔ, & erit ΑΒ perpendicularis & minor quam ΒΔ. deinde in plano circuli ducatur ΒΕ ad rectos angulos ipsi ΓΒ; & quo quadratum ex ΔΒ superat quadratum ex ΒΑ, ejus dimidium sit quadratum ex ΒΗ; perque

σείας τῆς βάσεως· τοῦτο μεῖζον ἔσται πάντων τῶν ἀνομοίων ἐν τῷ κώνῳ τριγώνων.

ΕΝ γὰρ κώνῳ ὀρθῷ τρίγωνον ἔστω τὸ ΑΓΔ, ἔχον τὴν ΑΒ κάθετον ἴσην τῇ ΒΔ, ἡμισείᾳ οὔσῃ τῆς ΓΔ βάσεως· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι πάντων τῶν ἀνομοίων ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων.

Εἰλήφθω γὰρ ἄλλο τυχὸν τρίγωνον ἀνόμοιον αὐτῷ τῷ ΑΕΖ, ἐν ᾧ κάθετος ἡ ΑΗ· καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΑΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΑΖ κάθετος ἤχθω ἡ ΗΚ. ἐπεὶ οὖν ἀνόμοιόν ἐστι τὸ ΑΓΔ τῷ ΑΕΖ, ἀνόμοιον ἄρα καὶ τὸ ΑΒΔ τῷ ΑΗΖ. καί ἐστιν ὀρθογώνια, καὶ ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΔ· τὸ ΑΗΖ ἄρα ἀνισοσκελές· καὶ τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἄνισον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΖ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΖ· ἡ μὲν ἄρα ΑΔ εἰς ἴσα τέτμηται, ἡ δὲ ΑΖ εἰς ἄνισα. ἐπεὶ οὖν αἱ ΔΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἡ μὲν εἰς ἴσα διῄρηται, ἡ δὲ εἰς ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων τμημάτων τοῦ ὑπὸ τῶν ἀνίσων μεῖζόν ἐστι· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΘΔ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΚΖ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ ΑΘΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΒΘ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΚΖ ἴσον τῷ ἀπὸ ΗΚ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΘ τοῦ ἀπὸ ΗΚ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΘ τῆς ΗΚ. ὡς δὲ ἡ ΒΘ πρὸς ΗΚ οὕτως τό τε ὑπὸ ΒΘ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΚ, ΑΖ, καὶ τὸ ἥμισυ πρὸς τὸ ἥμισυ, τουτέστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΗΖ· μεῖζον ἄρα τὸ ΑΒΔ τοῦ ΑΗΖ, καὶ τὰ διπλάσια τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι πάντων τῶν ἀνομοίων μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ΄.

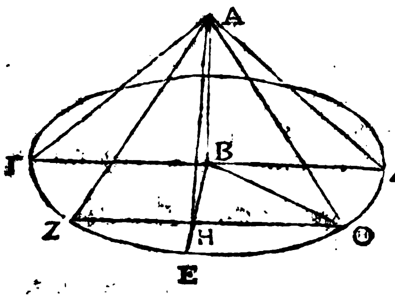
Τὸν δοθέντα κῶνον ὀρθὸν, οὗ ὁ ἄξων ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ γινόμενον τρίγωνον μεῖζον εἶναι πάντων τῶν ἀνομοίων αὐτῷ ἐν τῷ κώνῳ γινομένων τριγώνων.

ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κῶνος ὀρθὸς, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, ἐλάττων ὢν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὸν κῶνον ὡς προστέτακται.

Ἤχθω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον, ποιοῦν τὸ ΑΓΔ τρίγωνον· ἡ ΑΒ ἄρα κάθετος ἐλάττων ἐστὶ τῆς ΒΔ. ἤχθω ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ τῇ ΓΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τούτου ἥμισυ ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· καὶ διὰ τοῦ

Η παράλ-

Η, παράλληλος ἤχθω τῇ ΓΔ ἡ ΖΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΒΘ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΒΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΘ, τοῦ ἀπὸ ΒΑ μεῖζόν ἐστι δυσὶ τοῖς ἀπὸ ΒΗ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΗ τοῦ ἀπὸ ΑΒ μεῖζόν ἐστιν ἑνὶ τῷ ἀπὸ ΒΗ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΒΘ τοῦ ἀπὸ ΑΗ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ ΒΗ. ἔστι δὲ καὶ τοῦ ἀπὸ ΗΘ τῷ ἀπὸ ΒΗ μεῖζον τὸ ἀπὸ ΒΘ· ἑκατέρου ἄρα τῶν ἀπὸ ΑΗ, ΗΘ τῷ αὐτῷ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΒΘ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΗ τῷ ἀπὸ ΗΘ, καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΗΘ ἴση. καὶ ἔστι καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ ἴση· ἡ ἄρα ΑΗ ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΖΘ· ἐὰν ἄρα διὰ τῶν ΖΘ, ΗΑ διεκβάλλωμεν ἐπίπεδον, ἔσται τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ. γεγονέτω τὸ ΑΖΘ. ἐπεὶ οὖν τρίγωνόν ἐστιν ἐν κώνῳ τὸ ΑΖΘ, οὗ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετος ἡ ΑΗ ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως· τὸ ΑΖΘ ἄρα μεῖζόν ἐστι πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ γινομένων τριγώνων ἀνομοίων αὐτῷ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

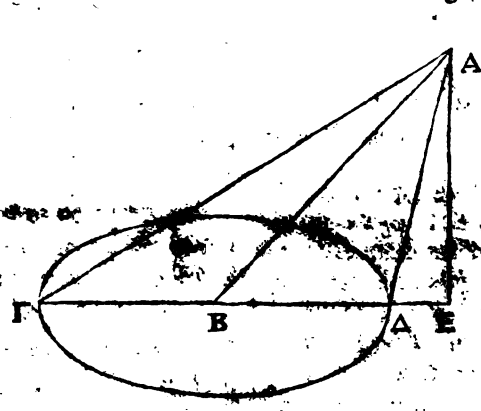
H ducatur ZHΘ parallela ipsi [illegible] jungantur AH, BΘ.

Quoniam quadratum ex BΔ, hoc est ex BΘ, superat quadratum ex BA duobus quadratis ex BH, quadratum autem ex AH superat quadratum ex AB uno quadrato ex BH: ergo quadratum ex BΘ superat quadratum ex AH ipsius BH quadrato. sed quadratum ex BΘ superat quadratum ex HΘ quadrato ex BH; quadratum igitur ex BΘ utrumque quadratum ex AH & ex HΘ eodem quadrato superat: adeoque quadratum ex AH æquale est quadrato ex HΘ, & recta AH rectæ HΘ æqualis. est autem & ZH æqualis ipsi HΘ; quare AH æqualis est dimidiæ ipsius ZΘ: si igitur per ZΘ, HA planum ducatur, fiet in cono triangulum, quod sit AZΘ. itaque quoniam triangulum AZΘ est in cono, à cujus vertice ducta perpendicularis AH æqualis est dimidiæ basi: erit [per 12. huj.] AZΘ triangulum majus omnibus triangulis dissimilibus in ipso cono constitutis. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδʹ.

Τὸν δοθέντα κῶνον διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τεμεῖν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ· καὶ δέον ἔστω τὸν κῶνον τεμεῖν διὰ τῆς ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει.



Εἰ μὲν οὖν ὀρθός ἐστιν ὁ κῶνος, δῆλον ὅτι ἡ τε ΑΒ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ βάσει, καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ βάσει· ὥστε τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, διὰ τῆς ΑΒ ὄν, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ βάσει.

Ἀλλὰ δὴ σκαληνὸς ἔστω ὁ κῶνος· ἡ ἄρα ΑΒ οὐκ ἔστι πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει. ἤχθω τοίνυν ἡ ἀπὸ τῆς Α κορυφῆς κάθετος ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διεκβεβλήσθω τὸ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἐπίπεδον, ποιοῦν ἐν τῷ κώνῳ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ τοῦ κώνου βάσει. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΕ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον· καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΑΕ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ· καὶ τὸ ΑΓΔ ἄρα τρίγωνον πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XIV. *Probl.*

Datum conum plano per axem ad rectos angulos ipsi basi secare.

SIT datus conus, cujus vertex A punctum, basis circulus circa centrum B; axis vero AB: & oporteat conum secare secundum rectam AB ad rectos angulos ipsi basi.

Si igitur conus sit rectus, perspicuum est rectam AB ad basim perpendicularem esse; & ob id [per 18. 11.] omnia quæ per ipsam transeunt plana ad rectos angulos erunt: quare & triangulum AΓΔ per lineam AB ductum ad rectos angulos erit ipsi basi.

Sed sit conus scalenus; ergo AB non est ad basim perpendicularis. cadat à vertice A perpendicularis ad basis planum in puncto E; & juncta BE, producatur trianguli ABE planum, quod in cono sectionem faciat triangulum AΓΔ: dico, AΓΔ triangulum ad rectos angulos esse basi coni. quoniam enim AE perpendicularis est ad basis planum; & omnia quæ per ipsam AE transeunt plana eidem ad rectos angulos erunt: ergo & triangulum AΓΔ ad rectos angulos erit plano basis. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιεʹ.

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει· τὸ γινόμενον τρίγω-

Prop. XV. *Theor.*

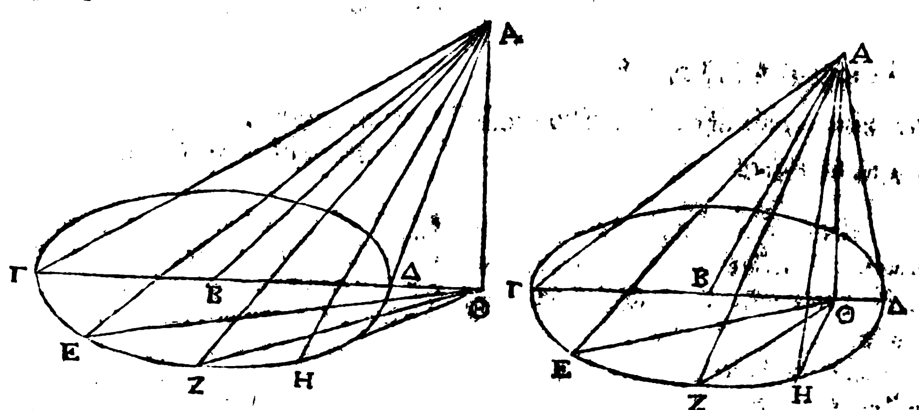
Si conus scalenus plano per axem secetur ad rectos angulos ipsi basi: tri-

angulum in cono factum scalenum erit, cujus latus majus maxima erit linearum omnium, quæ à vertice coni ad basis circumferentiam ducuntur; & minus latus linearum omnium similiter ductarum minima erit; è reliquis vero, quæ maximæ propinquior est major erit quam quæ ab ipsâ remotior.

SIT conus scalenus, cujus vertex A punctum, basis circulus Γ E Δ, & axis A B; cono autem secto per axem ad rectos angulos ipsi Γ E Δ circulo, fiat triangulum A Γ Δ; & axis ad partes Δ vergat. cum igitur conus scalenus sit, non erit A B perpendicularis ad circulum Γ E Δ. ducatur A Θ ad ipsum perpendicularis, quæ proinde erit in plano trianguli A Γ Δ, & in rectam Γ B Δ productam cadet. itaque quoniam major est Γ Θ quam Θ Δ, & quadratum ex Γ Θ quadrato ex Θ Δ erit majus. commune apponatur quadratum ex Θ A: quadrata igitur ex Γ Θ, Θ A majora sunt quadratis Δ Θ, Θ A, hoc est quadratum ex Γ A majus quadrato ex A Δ: ergo recta A Γ major ipsa A Δ.

νον ἔςαι σκαληνόν, ἧ ἡ [illegible] ἄρα μεγίςη ἔςαι πασῶν τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς [illegible] πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένων [illegible], ἡ δὲ ἐλάττων πλευρὰ ἐλαχίςη πασῶν [illegible] ὁμοίως ἀγομένων εὐθειῶν, τῶν δὲ ἄλλων εὐθειῶν ἡ τῇ μεγίςῃ ἔγγιον τῆς ἀπώτερον ἔςαι μείζων.

ΕΣΤΩ κῶνος σκαληνὸς, ἧ κορυφὴ μὲν τὸ A, βάσις δὲ ὁ Γ E Δ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ A B· τοῦ δὲ κώνου τμηθέντος διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῷ Γ E Δ κύκλῳ, τὸ γινόμενον τρίγωνον ἔςω τὸ A Γ [illegible] νευέτω δὲ ὁ ἄξων ἐπὶ τὸ Δ μέρος. ἐπεὶ οὖν σκαληνοῦ ὄντος τοῦ κώνου, οὐκ ἔςιν ἡ A B πρὸς ὀρθὰς τῷ Γ E Δ κύκλῳ, ἔςω πρὸς ὀρθὰς αὐτῷ ἡ A Θ· ἡ A Θ ἄρα ἐν τῷ τοῦ A Γ Δ ἐςὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πεσεῖται ἐπὶ τὴν Γ B Δ ἐκβληθεῖσαν. ἐπεὶ οὖν μείζων ἡ Γ Θ τῆς Θ Δ, καὶ τὸ ἀπὸ Γ Θ ἄρα τοῦ ἀπὸ Θ Δ μεῖζον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ Θ A· τὰ ἄρα ἀπὸ Γ Θ, Θ A τῶν ἀπὸ Δ Θ, Θ A μείζονά ἐςι, τουτέςι τὸ ἀπὸ Γ A μεῖζόν ἐςι τοῦ ἀπὸ A Δ· μείζων ἄρα ἡ A Γ τῆς A Δ.



Dico A Γ maximam esse rectarum omnium quæ à vertice ad basis circumferentiam ducuntur; A Δ vero minimam.

Ducantur enim Θ E, Θ Z, Θ H, & jungantur A E, A Z, A H. itaque quoniam [per 7 & 8.3.] Γ Θ maxima est ex iis quæ à Θ in circumferentiam cadunt; erit quadratum ex Θ Γ majus quadratis ex Θ E, Θ Z, Θ H, Θ Δ. commune apponatur quadratum ex Θ A; quadrata igitur ex utrisque Γ Θ, Θ A facta majora sunt eis quæ fiunt ex E Θ, Θ A; Z Θ, Θ A; Δ Θ, Θ A; hoc est quadratum ex A Γ majus est quolibet è quadratis ex A E, A Z, A H, A Δ: adeoque recta A Γ major est qualibet rectarum A E, A Z, A H, A Δ. similiter demonstrabitur etiam quavis alia majorem esse: igitur A Γ, uti diximus, maxima est omnium rectarum, quæ in ipso cono ducuntur. eadem ratione demonstrabitur rectam A Δ minimam esse; è cæteris vero A E major est quam A Z, & A Z major quam A H; & quæ propinquior est ipsi A Γ semper major est quam quæ ab eadem magis distat. quod erat demonstrandum.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ A Γ καὶ πασῶν ἁπλῶς μεγίςη ἐςὶ τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν [illegible] ἀγομένων εὐθειῶν, ἡ δὲ A Δ ἐλαχίςη.

Ηχθωσαν γὰρ αἱ Θ E, Θ Z, Θ H, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ A E, A Z, A H. ἐπεὶ οὖν ἡ Γ Θ μεγίςη ἐςὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Θ Γ ἄρα μέγιςόν ἐςι τῶν ἀπὸ Θ E, Θ Z, Θ H, Θ Δ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ Θ A· συναμφότερον ἄρα τὸ ἀπὸ τῶν Γ Θ, Θ A μεῖζόν ἐςιν ἑκάςου συναμφοτέρου τοῦ ἀπὸ τῶν E Θ, Θ A· Z Θ, Θ A· Δ Θ, Θ A, τουτέςι τὸ ἀπὸ A Γ ἑκάςου τῶν ἀπὸ A E, A Z, A H, A Δ· ἡ A Γ ἄρα μείζων ἐςὶν ἑκάςης τῶν A E, A Z, A H, A Δ· ὁμοίως δειχθήσεται ὅτι καὶ τῶν ἄλλων· μεγίςη ἄρα ἡ A Γ πασῶν τῶν ὡς εἴρηται ἀγομένων εὐθειῶν ἐν τῷ κώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δείκνυται ὅτι καὶ ἡ μὲν A Δ ἐλαχίςη· τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν A E τῆς A Z μείζων, ἡ δὲ A Z τῆς A H, καὶ ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῇ A Γ τῆς ἀπώτερόν ἐςι μείζων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XVI. Theor.

Si in triangulo recta linea ducatur à vertice ad [illegible] quod basim bi-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν τριγώνου ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν [illegible] μίαν τῆς βάσεως εὐθεῖα ἀχθῇ [illegible]

πλευρὰν

πλευρῶν τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς βάσεως, καὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν εὐθείας.

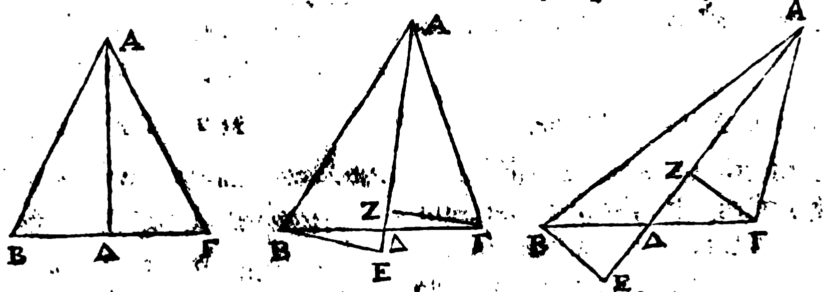
fariam divisæ: quadrata ex lateribus facta æqualia erunt quadratis quæ fiunt ex basis partibus, una cum duplo quadrati ejus quæ à vertice ad basim ducta est.

ΕΣΤΩ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, οὗ δίχα τετμήσθω ἡ βάσις κατὰ τὸ Δ, καὶ διήχθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ΑΔ.

Εἰ μὲν οὖν ἰσοσκελές ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, φανερὰ ἡ δεῖξις, διὰ τὸ ἑκατέραν τῶν πρὸς τῷ Δ γωνιῶν εἶναι ὀρθήν. ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ ΒΑ μείζων· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΔΓ. ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ, καὶ κατήχθωσαν ἐπ' αὐτὴν κάθετοι αἱ ΒΕ, ΓΖ· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ΕΒΔ, ΓΖΔ ὀρθογώνια, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΒΕ, ΖΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΔ

SIT triangulum ΑΒΓ, cujus basis secetur bifariam in Δ; & ducatur ΑΔ: dico quadrata ex ΑΒ, ΑΓ quadratis ex ΒΔ, ΔΓ una cum duplo quadrati ex ΑΔ æqualia esse.

Si enim æquicrure sit ΑΒΓ triangulum, demonstratio manifesta erit; propterea quod uterque angulorum qui ad Δ est rectus. sed sit ΒΑ major quam ΑΓ: ergo ΒΔΑ angulus major est angulo ΑΔΓ. producatur ΑΔ, & ad ipsam perpendiculares ducantur ΒΕ, ΓΖ. similia igitur sunt triangula orthogonia ΕΒΔ, ΓΖΔ, propter parallelas ΒΕ, ΖΓ: quare ut ΒΔ ad ΔΓ ita



πρὸς ΔΓ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ, καὶ τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ τῶν ἀπὸ ΑΔ, ΔΒ μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ, τουτέστι τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΓ τῶν ἀπὸ ΑΔ, ΔΓ ἔλαττόν ἐστι τῷ αὐτῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΒΔ, ΔΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ΑΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΒΔ ad ΔΖ. æqualis autem est ΒΔ ipsi ΓΔ: ergo & ΕΔ æqualis est ipsi ΔΖ, & rectangulum ΑΔΕ rectangulo ΑΔΖ æquale; & duplum rectanguli ΑΔΕ duplo rectanguli ΑΔΖ. itaque quoniam [per 12. 2.] quadratum ex ΑΒ majus est quadratis ex ΑΔ, ΔΒ duplo rectanguli ΑΔΕ, hoc est duplo rectanguli ΑΔΖ; quadratum vero ex ΑΓ [per 13. 2.] minus est quadratis ex ΑΔ, ΔΓ duplo rectanguli ΑΔΖ: erunt quadrata ex ΒΑ & ΑΓ simul æqualia quadratis ex ΒΔ, ΔΓ una cum duplo quadrati ex ΑΔ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Ἐὰν τεσσάρων εὐθειῶν ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τετάρτης. κἂν τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τετάρτης· ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην.

PROP. XXVII. Theor.

Si prima quatuor rectarum ad secundam majorem rationem habeat quam tertia ad quartam; etiam quadratum primæ ad quadratum secundæ majorem habebit rationem quam tertiæ quadratum ad quadratum quartæ. quòd si quadratum primæ ad quadratum secundæ majorem rationem habeat quam tertiæ quadratum ad quadratum quartæ; prima quoque ad secundam majorem rationem habebit quam tertia ad quartam.

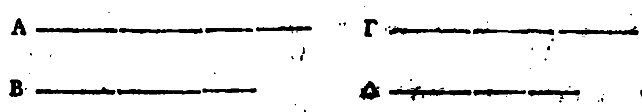
ΕΣΤΩΣΑΝ εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, Δ, ἐχέτω δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· λέγω ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ὁ τοῦ μείζονος ἄρα διπλάσιος μείζων

SINT quatuor rectæ lineæ Α, Β, Γ, Δ; & habeat Α ad Β majorem rationem quam Γ ad Δ: dico quadratum ipsius Α ad quadratum ex Β majorem habere rationem quam quadratum ex Γ ad quadratum ex Δ.

Etenim cum ratio Α ad Β major sit quam habet Γ ad Δ; erit dupla majoris rationis major quam dupla

dupla minoris. est autem [per 20.6.] rationis majoris A ad B dupla ratio quadrati ex A ad quadratum ex B; & rationis minoris Γ ad Δ dupla est ratio quadrati ex Γ ad quadratum ex Δ: ergo ratio quadrati ex A ad quadratum ex B major est ratione quadrati ex Γ ad quadratum ex Δ. Rursus quadratum ex A ad quadratum ex B majorem rationem habeat quam quadratum ex Γ ad quadratum ex Δ: dico A ad B majorem rationem habere quam Γ ad Δ. nam cum ratio quadrati ex A ad quadratum ex B major sit quam quadrati ex Γ ad quadratum ex Δ, erit majoris rationis dimidia major quam dimidia minoris. sed rationis quidem majoris quadrati ex A ad quadratum ex B dimidia est ratio A ad B; rationis vero minoris quadrati ex Γ ad quadratum ex Δ dimidia est ratio Γ ad Δ: ratio igitur A ad B major est quam Γ ad Δ. quod erat demonstrandum.

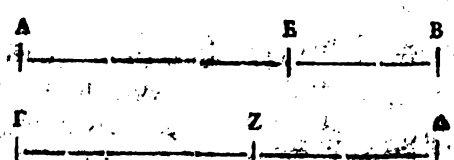


ἐστὶ τοῦ ἐλάττονος διπλασίου. ἔστι δὲ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου μείζονος ὄντος διπλάσιος ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγος· τοῦ δὲ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ λόγου ἐλάττονος ὄντος διπλάσιος ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγος· καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. Πάλιν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· λέγω ὅτι ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγου, καὶ ὁ τοῦ μείζονος ἄρα ἡμίσους τοῦ ἐλάττονος ἡμίσεος μείζων ἐστίν. ἔστι δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγου μείζονος ὄντος ἡμίσους ὁ τῆς Α πρὸς τὴν Β, τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ ἐλάττονος ὄντος ἡμίσους ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ ὁ τῆς Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ. ὅ.ἔ.δ.

Prop. XVIII. *Theor.*

Si duæ magnitudines æquales dissimiliter dividantur; & alterius partium major ad minorem rationem majorem habeat quam partium alterius major ad minorem, vel æqualis ad æqualem: prius dictarum partium major omnium maxima, minor vero omnium minima erit.

Sint duæ magnitudines æquales AB, ΓΔ, dividaturque AB in E & ΓΔ in Z; & sit AE major quam EB; & ΓZ non minor quam ZΔ, ita ut AE ad EB majorem rationem habeat quam ΓZ ad ZΔ: dico magnitudinum AE, EB, ΓZ, ZΔ maximam quidem esse AE, minimam vero EB.



Quoniam enim AE ad EB majorem rationem habet quam ΓZ ad ZΔ; componendo AB ad BE majorem habebit quam ΓΔ ad ΔZ; permutandoque AB ad ΓΔ majorem quam EB ad ZΔ. est autem AB ipsi ΓΔ æqualis; minor igitur est EB quam ZΔ. estque ZΔ non major quam ΓZ; quare est EB quam ΓZ minor. sed & erat minor quam AE; ergo EB minima erit. rursus quoniam AB est æqualis ipsi ΓΔ, quarum pars EB minor est parte ΔZ; erit reliqua EA major quam reliqua ΓZ. & ΓZ non est minor quam ZΔ: quare AE major est quam ZΔ. erat autem & major quam EB; adeoque AE omnium maxima erit, uti EB minima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν δύο μεγέθη ἴσα ἀνομοίως διαιρεθῇ, τῶν δὲ τοῦ ἑτέρου τμημάτων τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τοῦ λοιποῦ τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον, ἢ τὸ ἴσον πρὸς τὸ ἴσον· τῶν προειρημένων τμημάτων τὸ μὲν μεῖζον μέγιστον ἔσται τῶν τεσσάρων τμημάτων, τὸ δὲ ἔλασσον ἐλάχιστον τῶν τεσσάρων.

Ἔστω δύο μεγέθη ἴσα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΔ τῷ Ζ, ἔστω δὲ τὸ μὲν ΑΕ τοῦ ΕΒ μεῖζον, τὸ δὲ ΓΖ τοῦ ΖΔ μὴ ἔλαττον, ὥστε τὸ ΑΕ πρὸς ΕΒ μείζονα λόγον ἔχειν ἤπερ τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω ὅτι τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, μεγεθῶν μέγιστον μὲν ἐστι τὸ ΑΕ, ἐλάχιστον δὲ τὸ ΕΒ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΕ πρὸς ΕΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΖ πρὸς ΖΔ, καὶ συνθέντι ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς ΒΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΔ πρὸς ΔΖ, καὶ ἐναλλὰξ τὸ ΑΒ πρὸς ΓΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΕΒ πρὸς ΖΔ. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· ἔλαττον ἄρα τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. τὸ δὲ ΖΔ τοῦ ΓΖ οὐ μεῖζον· καὶ τοῦ ΓΖ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ ΕΒ. ἦν δὲ καὶ τοῦ ΑΕ ἔλαττον· ἐλάχιστον ἄρα τὸ ΕΒ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ ἴσον, ὧν τὸ ΕΒ τοῦ ΔΖ ἔλαττον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΑ λοιποῦ τοῦ ΓΖ μεῖζον. τὸ δὲ ΓΖ τοῦ ΖΔ οὐκ ἔλαττόν ἐστι· καὶ τοῦ ΖΔ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΕ. ἦν δὲ καὶ τοῦ ΕΒ μεῖζον· μέγιστον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕ, τὸ δὲ ΕΒ ἐλάχιστον.

Prop. XIX. *Theor.*

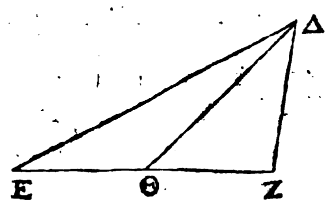
Si duo triangula bases æquales habeant, itemque rectas quæ à vertice ad puncta

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς βάσεις ἴσας ἔχῃ, ἔχῃ δὲ καὶ τὰς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως στοις ἠγμένας εὐθείας ἴσας, τοῦ δὲ ἑτέρου ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ τοῦ λοιποῦ μείζων πρὸς τὴν ἐλάττονα, ἢ καὶ ἴση πρὸς τὴν ἴσην· οὗ ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχει ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

ΕΣΤΩ δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς ΒΓ, ΕΖ βάσεις, ὧν ἑκατέρα τετμήσθω δίχα κατὰ τὰ Η καὶ Θ σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΗ, ΔΘ ἴσαι ἔστωσαν· ἔστω δὲ ἡ μὲν ΕΔ τῆς ΔΖ μείζων, ἡ δὲ ΒΑ τῆς ΑΓ μὴ ἐλάττων, ὥστε τὴν ΕΔ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχειν ἤπερ τὴν ΒΑ πρὸς ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ ἴσαι τέ εἰσι καὶ εἰς ἴσα διῄρηνται, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΔΘ ἴση· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα ἴσα ἐστί· τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΗ, ΗΓ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΑΗ τοῖς ἀπὸ ΕΘ, ΘΖ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΘΔ ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ ΒΗ, ΗΓ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΑΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ, (τοῦτο γὰρ ἐδείχθη) τοῖς δὲ ἀπὸ ΕΘ, ΘΖ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΘΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΕΔ, ΔΖ· καὶ συναμφότερον ἄρα τὸ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΔΖ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ· καὶ

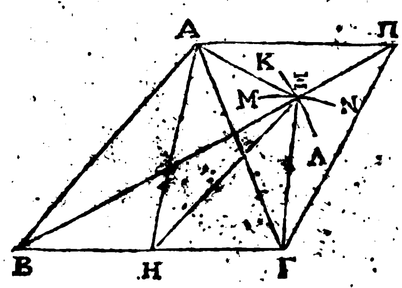


τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν δύο ἴσων μεγεθῶν, τοῦτε συναμφοτέρου ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ καὶ τοῦ συναμφοτέρου ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΔΖ, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλαττον, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ τοῦ λοιποῦ τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ· τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ ΕΔ, μέγιστον ὄν, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ. τὸ δὲ ἀπὸ ΔΖ, ἐλάχιστον ὄν, ἔλαττόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ, διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα· καὶ ἡ μὲν ΕΔ ἄρα ἑκατέρας τῶν ΒΑ, ΑΓ μείζων ἐστίν. ἡ δὲ ΔΖ ἑκατέρας τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάττων· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΕΔ γραφόμενος κύκλος ὑπερπεσεῖται τὴν ΒΑ. γεγράφθω ὁ ΚΛ, καὶ ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΔΖ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΑΓ. γεγράφθω ὁ ΜΝ· τέμνουσι δὴ ἀλλήλους οἱ ΚΛ, ΜΝ κύκλοι, ὡς δειχθήσεται. τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΞΑ, ΞΒ, ΞΗ, ΞΓ· ἡ μὲν ἄρα ΒΞ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΞΓ τῇ ΔΖ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΒΞΓ τρίγωνον τῷ ΕΔΖ ἴσον ἐστίν· ὥστε ἴση καὶ ἡ ΞΗ τῇ ΔΘ, τουτέστι τῇ ΑΗ· ὀξεῖα

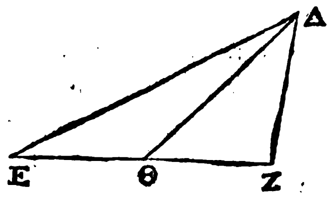
ctum quo bisecatur basis ducuntur; alterius autem majus latus ad minus majorem rationem habeat quam reliqui majus latus ad minus, vel æquale ad æquale: triangulum illud, cujus majus latus ad minus majorem habet rationem, altero minus erit.

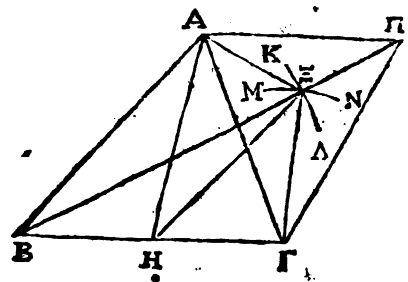
SINT duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ bases ΒΓ, ΕΖ æquales habentia; quarum utraque bifariam secetur in punctis Η, Θ; ductæque ΑΗ, ΔΘ inter se æquales sint; & sit ΕΔ major quam ΔΖ; ΒΑ vero non minor quam ΑΓ, ita ut ΕΔ ad ΔΖ majorem rationem habeat quam ΒΑ ad ΑΓ: dico triangulum ΔΕΖ minus esse triangulo ΑΒΓ.

Quoniam enim ΒΓ, ΕΖ & æquales sunt & in partes æquales dividuntur; suntque æquales ΑΗ, ΔΘ; erunt & quæ ex ipsis fiunt quadrata æqualia: quadrata igitur ex ΒΗ, ΗΓ una cum duplo quadrati ex ΑΗ æqualia sunt quadratis ex ΕΘ, ΘΖ una cum duplo quadrati ex ΘΔ. sed quadratis ex ΒΗ, ΗΓ una cum duplo quadrati ex ΑΗ æqualia sunt quadrata ex ΒΑ, ΑΓ, ut [per 16. huj.] ostensum est; &



quadratis ex ΕΘ, ΘΖ una cum duplo quadrati ex ΘΔ æqualia sunt quadrata ex ΕΔ, ΔΖ: utraque igitur quadrata ex ΒΑ, ΑΓ utrisque quadratis ex ΕΔ, ΔΖ æqualia erunt. & quoniam ΕΔ ad ΔΖ majorem rationem habet quam ΒΑ ad ΑΓ; habebit quadratum ex ΕΔ ad quadratum ex ΔΖ [per 17. huj.] majorem rationem quam quadratum ex ΒΑ ad quadratum ex ΑΓ. igitur cum duarum magnitudinum æqualium, videlicet ejus quæ ex quadratis ex ΒΑ, ΑΓ & ejus quæ quadratis ex ΕΔ, ΔΖ, major pars ad minorem, videlicet quadratum ex ΕΔ ad quadratum ex ΔΖ, majorem rationem habeat quam reliqua pars ad reliquam, videlicet quam quadratum ex ΒΑ ad quadratum ex ΑΓ; erit quadratum ex ΕΔ, quod [per 18. huj.] est maximum, utroque quadrato ex ΒΑ vel ex ΑΓ majus. quadratum vero ex ΔΖ minimum erit, & utroque quadrato ex ΒΑ vel ex ΑΓ minus, per antecedens theorema: quare recta ΕΔ major est utrâque ipsarum ΒΑ, ΑΓ; & ΔΖ utrâque minor: circulus igitur, qui centro Β & intervallo ipsi ΕΔ æquali describitur, videlicet ΚΛ, transibit ultra rectam ΒΑ; & circulus centro Γ intervalloque æquali ipsi ΔΖ descriptus, hoc est ΜΝ, secabit ipsam ΑΓ: qui quidem duo circuli ΚΛ, ΜΝ sese invicem secabunt, ut mox demonstrabitur. secent autem sese in puncto Ξ; & jungantur ΞΑ, ΞΒ, ΞΗ, ΞΓ: est igitur ΒΞ ipsi ΕΔ æqualis, & ΞΓ æqualis ipsi ΔΖ. eratque ΒΓ æqualis ipsi ΕΖ; quare totum triangulum ΒΞΓ triangulo ΕΔΖ est æquale; ac propterea ΞΗ æqualis ipsi ΔΘ, hoc est ipsi ΑΗ: unde consequitur angulum Ξ A H acutum esse. & quoniam B A non est minor quam A Γ, angulus A H B [per 25.1.] angulo A H Γ non erit minor: angulus igitur A H Γ non est major recto. erat autem Ξ A H angulus recto minor; ergo anguli A H Γ, Ξ A H duobus rectis minores sunt, ac proinde recta A Ξ ipsi H Γ non est parallela. ducatur per A ipsi B Γ parallela recta A Π; & protrahatur B Ξ ad Π, jungaturque Γ Π: triangulum igitur A B Γ [per 38.1.] triangulo B Π Γ est æquale; & idcirco B A Γ majus est ipso B Ξ Γ, hoc est triangulo E Δ Z. quod erat demonstrandum.

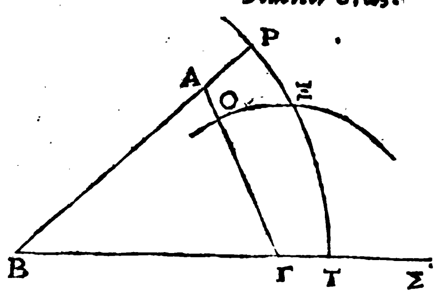




ἄρα ἡ ὑπὸ Ξ A H γωνία. καὶ ἐπεὶ ἡ B A τῆς A Γ οὐκ ἔστιν ἐλάττων· καὶ ἡ ὑπὸ A H B ἄρα γωνία τῆς ὑπὸ A H Γ οὐκ ἔστιν ἐλάττων· ἡ ἄρα ὑπὸ A H Γ οὐ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ἦν δὲ ἡ Ξ A H ὀρθῆς ἐλάσσων· αἱ ἄρα ὑπὸ A H Γ, Ξ A H δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν· οὐκ ἄρα ἡ A Ξ τῇ H Γ παράλληλός ἐστιν. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ A τῇ B Γ παράλληλος ἡ A Π, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ B Ξ Π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ Π· τὸ ἄρα A B Γ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ B Π Γ τριγώνῳ· καὶ τὸ ἄρα B A Γ μεῖζόν ἐστι τοῦ B Ξ Γ, τουτέστι τοῦ E Δ Z τριγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Circulos autem K Λ, M N sese invicem secare, hoc modo demonstrabitur.

Sit enim lateri majori E Δ æqualis B A P; ac ponatur Γ Z ipsi Δ Z æqualis, in directum ipsi B Γ: tota igitur B Σ æqualis est utrisque E Z, Z Δ. & quoniam E Z, Z Δ simul excedunt ipsam E Δ, erit & B Σ ipsâ E Δ major: itaque circulus centro B & intervallo B P descriptus ipsam Γ Σ secabit. secet ad T, ac intra circulum ducatur recta quædam Γ A major quam Γ Σ sive Δ Z; itaque circulus centro Γ & intervallo Γ Σ descriptus occurret ipsi A Γ. occurrat ad O: circulus igitur, per puncta Σ, O transiens, per circumferentiam P T transibit necessario; atque adeo circuli K Λ, M N sese invicem secabunt.



Ὅτι δὲ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ K Λ, M N κύκλοι, δεικτέον οὕτως.

Ἔστω γὰρ τῇ μὲν μείζονι πλευρᾷ τῇ E Δ ἴση ἡ B A P, τῇ δὲ Δ Z ἴση ἡ Γ Σ, ἐπ' εὐθείας οὖσα τῇ B Γ· ὅλη ἄρα ἡ B Σ ἴση ἐστὶ συναμφοτέροις τῇ E Z, Z Δ. ἐπεὶ οὖν συναμφότερος ἡ E Z, Z Δ τῆς E Δ μείζων ἐστί, καὶ ἡ B Σ ἄρα τῆς E Δ μείζων ἐστίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ B διαστήματι δὲ τῷ B P γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν Γ Σ. τεμνέτω κατὰ τὸ T, καὶ ἤχθω ἐντὸς τοῦ κύκλου εὐθεῖά τις ἡ Γ A μείζων τῆς Γ Σ, τουτέστι τῆς Δ Z· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ Γ Σ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν A Γ. τεμνέτω κατὰ τὸ O· ἥξει ἄρα ὁ διὰ τῶν Σ, O κύκλος καὶ διὰ τῆς P T περιφερείας· τέμνουσιν ἄρα ἀλλήλους καὶ οἱ K Λ, M N κύκλοι.

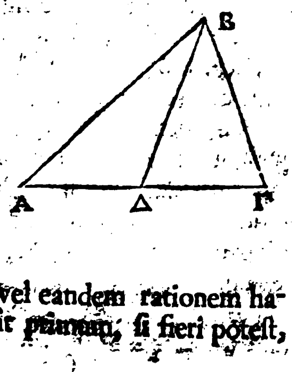
PROP. XX. Theor.

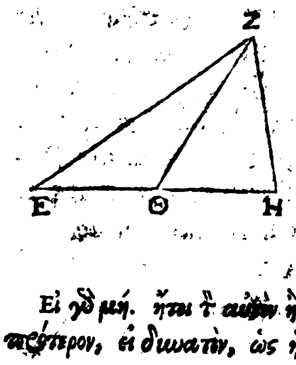
Si duo triangula, quorum latera inæqualia, bases æquales habeant, itemque rectas quæ à vertice ad punctum quo bisecatur basis ducuntur: minoris trianguli majus latus ad minus majorem rationem habebit quam majoris trianguli majus latus ad minus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἀνισοσκελῆ τάς τε βάσεις ἴσας ἔχῃ, ἔχῃ δὲ καὶ τὰς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένας εὐθείας ἴσας· τοῦ ἐλάττονος ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τοῦ μείζονος μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα.

SINT triangula A B Γ, E Z H, bases A Γ, E H æquales habentia, quæ bifariam secentur in punctis Δ, Θ; & sint æquales B Δ, Z Θ; sit autem majus triangulum E Z H; & sit A B major quam B Γ, itemque E Z quam Z H major: dico A B ad B Γ majorem habere rationem quam E Z ad Z H.





ΕΣΤΩ τρίγωνα τὰ A B Γ, E Z H ἴσας ἔχοντα τάς τε A Γ, E H βάσεις, δίχα τετμημένας κατὰ τὰ Δ καὶ Θ σημεῖα, ἴσας δὲ ἔχοντα καὶ τὰς B Δ, Z Θ· καὶ μεῖζον τὸ E Z H τρίγωνον, ἔστω δὲ ἡ μὲν A B τῆς B Γ μείζων, ἡ δὲ E Z τῆς Z H· λέγω ὅτι ἡ A B πρὸς B Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ E Z πρὸς Z H.

Si enim non ita sit, vel eandem rationem habebit, vel minorem. sit primum, si fieri potest,

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι τὸν αὐτὸν ἢ ἐλάττονα ἕξει. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, ὡς ἡ A B πρὸς B Γ οὕτως ἡ

E Z

ΕΖ πρὸς ΖΗ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· καὶ συνθέντι ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερον τὸ ἀπὸ ΑΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΓ πρὸς συναμφότερον τὸ ἀπὸ ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΗ οὕτω τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. ἀλλὰ συναμφότερον τὸ ἀπὸ ΑΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΓ συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΗ ἴσον· καὶ τὸ ἀπὸ ΒΓ ἄρα τῷ ἀπὸ ΖΗ ἴσον. ὥστε καὶ λοιπὸν τὸ ἀπὸ ΑΒ λοιπῷ τῷ ἀπὸ ΕΖ ἴσον. ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΖΗ. ἀλλὰ καὶ αἱ βάσεις ἴσαι· πάντα ἄρα πᾶσιν ἴσα· ἴσον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΖΗ, ὅπερ ἄτοπον, ἦν γὰρ ἔλαττον τὸ ΑΒΓ· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ λόγον ἔχει ὃν ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ.

Ἀλλ', εἰ δυνατὸν, ἐχέτω ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ ἐλάττονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ. ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ· τὸ ἄρα ΕΖΗ τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ, διὰ τὰ δειχθέντα· ὅπερ ἄτοπον. ὑπέκειτο γὰρ μεῖζον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ τὸν αὐτόν· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ.

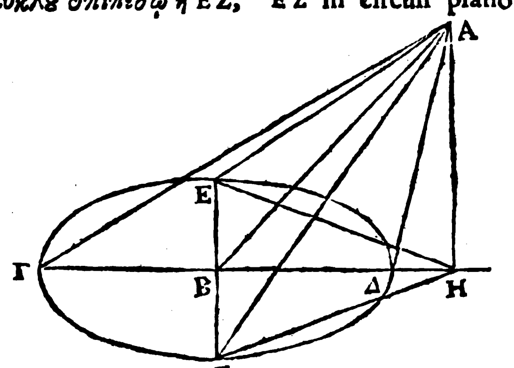
ut A B ad B Γ ita E Z ad Z H; ergo ut quadratum ex A B ad quadratum ex B Γ ita quadratum ex E Z ad quadratum ex Z H; & componendo permutandoque ut quadrata ex A B, B Γ simul ad quadrata ex E Z, Z H simul ita quadratum ex B Γ ad quadratum ex Z H. sed quadrata ex A B, B Γ simul [per 16.huj.] quadratis ex E Z, Z H sunt æqualia: ergo & quadratum ex B Γ æquale est quadrato ex Z H: & idcirco reliquum quadratum ex A B reliquo ex E Z æquale erit: est igitur A B æqualis ipsi E Z, & B Γ ipsi Z H. sed & bases sunt æquales: ergo triangulum A B Γ æquale est triangulo E Z H, quod est absurdum; erat enim triangulum A B Γ minus: igitur A B ad B Γ rationem non habet eandem quam E Z ad Z H.

Sed rursus, si fieri potest, A B ad B Γ minorem rationem habeat quam E Z ad Z H; habebit igitur E Z ad Z H majorem rationem quam A B ad B Γ: quare triangulum E Z H minus erit triangulo A B Γ, ex proxime [ad 19. huj.] demonstratis, quod est absurdum; ponebatur enim majus: ergo A B ad B Γ minorem rationem non habet quam E Z ad Z H. demonstratum autem est neque eandem habere; restat igitur ut A B ad B Γ majorem habeat rationem quam E Z ad Z H.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Τὸν δοθέντα κῶνον σκαληνὸν τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδῳ ποιοῦντι ἐν κώνῳ τρίγωνον ἰσοσκελές.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος σκαληνὸς, οὗ ἄξων μὲν ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ ΓΕΔ κύκλος· καὶ δέον ἔστω τεμεῖν αὐτὸν ὡς ἐπιτέτακται. τετμήσθω πρῶτον διὰ τοῦ ἄξονος τῷ ΑΓΔ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθὰς ὄντι τῷ ΓΕΔ κύκλῳ, καὶ ἤχθω ἡ ΑΗ κάθετος, ἥτις πίπτει ἐπὶ τὴν ΓΔ βάσιν τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, καὶ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἡ ΕΖ, καὶ διὰ τῆς ΕΖ καὶ τῆς Α κορυφῆς ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον ποιοῦν τὸ ΑΕΖ τρίγωνον· λέγω ὅτι τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστιν.



Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ τὴν ΕΖ πρὸς ὀρθὰς τέμνουσα δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ ΕΗ τῇ ΖΗ. καὶ κοινὴ ἡ ΑΗ, καὶ ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΗΕ, ΑΗΖ γωνιῶν· καὶ ἡ ΕΑ ἄρα τῇ ΑΖ ἴση ἐστίν· ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ ΑΕΖ τρίγωνον. ἐκ δὴ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι πάντα τὰ συνιστάμενα τρίγωνα, τὰς βάσεις ἔχοντα πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ, ἰσοσκελῆ ἐστιν.

Ἔτι δεικτέον ὅτι ἐὰν τὰ γινόμενα τρίγωνα τὰς βάσεις μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχῃ τῇ ΓΔ, οὐκ ἔσται ἰσοσκελῆ.

Ὑποκείσθω γὰρ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἡ ΕΖ μὴ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ· αἱ ΕΗ, ΖΗ ἄρα ἄνισοί εἰσι. κοινὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐταῖς· καὶ αἱ ἄρα ΕΑ, ΑΖ ἄνισοί εἰσι· τὸ ΕΑΖ ἄρα τρίγωνον οὐκ ἔστιν ἰσοσκελές.

Prop. XXI. *Probl.*

Datum conum scalenum plano per verticem ita secare, ut in cono triangulum æquicrure fiat.

Sit datus conus scalenus, cujus axis A B, & basis Γ E Δ circulus: oporteatque eum modo jam dicto secare. secetur primo [per 14.huj.] per axem plano A Γ Δ ad rectos angulos ipsi circulo Γ E Δ, & ducatur perpendicularis A H, quæ cadet in rectam Γ Δ trianguli A Γ Δ basim; ipsi vero Γ Δ ad rectos angulos agatur E Z in circuli plano; perque E Z & verticem A planum ducatur, quod faciat triangulum A E Z: dico triangulum A E Z æquicrure esse.

Jungantur enim E H, Z H. & quoniam Γ Δ ipsam E Z secans ad rectos angulos [per 3.3.] bifariam secat; erit E H æqualis ipsi H Z. communis autem est A H, & uterque angulorum A H E, A H Z rectus: ergo E A est æqualis ipsi A Z, & idcirco triangulum A E Z est æquicrure. unde constat omnia triangula, quæ bases habent ad rectos angulos ipsi Γ Δ, æquicrura esse.

Demonstrandum etiam est ea triangula, quæ bases habent non ad rectos angulos ipsi Γ Δ, non esse æquicrura.

Ponatur enim E Z, in eadem figura, non esse ad rectos angulos ipsi Γ Δ: & erunt E H, Z H inæquales. communis autem est A H & ad ipsas perpendicularis: ergo E A, A Z inæquales sunt, & triangulum E A Z non est æquicrure.

Prop. XXII. *Theor.*

Triangulorum, quæ in cono ſcaleno per axem ſecto fiunt, maximum eſt æquicrure; & minimum, quod eſt ad rectos angulos baſi coni: reliquorum vero maximo propinquius majus eſt eo quod plus diſtat ab eodem.

IN cono enim ſcaleno triangula per axem A B conſtituantur, æquicrure quidem A Γ Δ, rectum vero ad baſis planum A E Z: dico triangulorum omnium quæ per axem tranſeunt, A Γ Δ maximum eſſe, & A E Z minimum.

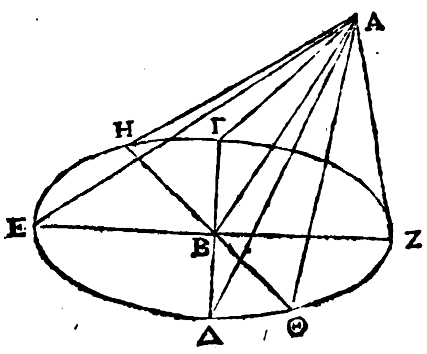
Sit enim aliud triangulum per axem A H Θ. & quoniam conus ſcalenus eſt, vergat axis A B ad partes Z; ergo [per 15. huj.] recta A E maxima eſt omnium quæ à puncto A ad baſis circumferentiam ducuntur, & A Z minima: adeoque E A major eſt quam A H, & Z A minor quam A Θ. itaque cum duo triangula A E Z, A H Θ baſes E Z, H Θ æquales habeant, & eandem rectam A B quæ à vertice ad punctum baſim bifariam ſecans ducitur, habeatque E A ad A Z majorem rationem quam H A ad A Θ: erit [per 19. huj.] A E Z triangulum minus triangulo A H Θ. ſimili modo demonſtrabitur minus eſſe omnibus aliis triangulis per axem: ergo A E Z minimum eſt omnium triangulorum quæ per axem tranſeunt. rurſus in triangulis A H Θ, A Γ Δ, & baſes æquales ſunt, & eadem eſt quæ ducitur à vertice ad punctum baſim bifariam ſecans; habetque H A ad A Θ majorem rationem quam Γ A ad A Δ, ſunt enim Γ A, A Δ æquales: ergo triangulum H A Θ [per 19. huj.] minus eſt triangulo Γ A Δ. ſimiliter demonſtrabitur omnia triangula per axem ducta triangulo Γ A Δ minora eſſe; triangulum igitur A Γ Δ maximum eſt omnium triangulorum quæ per axem tranſeunt, ſicut A E Z minimum. quod erat demonſtrandum. eodem modo demonſtrabitur maximo propinquius majus eſſe eo quod plus diſtat.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϐ'.

Ἐν κώνῳ σκαληνῷ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος συνισταμένων τριγώνων μέγιστον μὲν ἔσται τὸ ἰσοσκελές, ἐλάχιστον δὲ τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ κώνου· τῶν δὲ λοιπῶν τὸ τοῦ μεγίστου ἔγγιον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπώτερον.

ΕΝ γὰρ κώνῳ σκαληνῷ διὰ τοῦ A B ἄξονος ἔστω τρίγωνα, ἰσοσκελὲς μὲν τὸ Α Γ Δ, ὀρθὸν δὲ πρὸς τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον τὸ Α Ε Ζ· λέγω ὅτι πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων μέγιστον μέν ἐστι τὸ Α Γ Δ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Α Ε Ζ.

Ἔστω γὰρ διὰ τοῦ ἄξονος ἠγμένον ἄλλο τρίγωνον τὸ Α Η Θ. καὶ ἐπεὶ σκαληνός ὁ κῶνος, κεκλείσθω ὁ Α Β ἄξων ἐπὶ τὰ τοῦ Ζ μέρη· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ Α Ε πλευρὰ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἀγομένων εὐθειῶν, ἐλαχίστη δὲ ἡ Α Ζ· ἡ μὲν ἄρα Ε Α τῆς Α Η μείζων ἐστιν, ἡ δὲ Ζ Α τῆς Α Θ ἐλάττων. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ Α Ε Ζ, Α Η Θ ἴσας ἔχει βάσεις τὰς Ε Ζ, Η Θ, καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως τὴν αὐτὴν τὴν Α Β, καὶ μείζονα λόγον ἔχει ἡ Ε Α πρὸς Α Ζ ἤπερ ἡ Η Α πρὸς Α Θ· ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ Α Ε Ζ τοῦ Α Η Θ. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι καὶ πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων· ἐλάχιστον ἄρα τὸ Α Ε Ζ πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων. πάλιν ἐπεὶ τῶν Α Η Θ, Α Γ Δ τριγώνων αἵ τε βάσεις ἴσαι, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἡ αὐτή, καὶ ἔχει ἡ Η Α πρὸς Α Θ μείζονα λόγον ἤπερ ἡ Γ Α πρὸς Α Δ, ἴσαι γὰρ αἱ Γ Α, Α Δ· τὸ Η Α Θ ἄρα τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι τοῦ Γ Α Δ τριγώνου. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα τοῦ Γ Α Δ ἐλάττονά ἐστι· μέγιστον ἄρα πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὸ Α Γ Δ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Α Ε Ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι καὶ τὸ τοῦ μεγίστου ἔγγιον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπώτερον.



Prop. XXIII. *Probl.*

In dato cono ſcaleno à vertice ad circumferentiam baſis rectam ducere, ad quam maxima rationem datam habeat: oportet autem datam rationem eſſe majoris ad minus, & minorem eſſe ea quam habet maxima rectarum in cono ductarum ad minimam.

SIT conus datus baſim habens B Θ Γ circulum, cujus diameter B Γ, verticem vero punctum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐν τῷ δοθέντι κώνῳ σκαληνῷ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως εὐθεῖαν ἀγαγεῖν, πρὸς ἣν ἡ μεγίστη λόγον ἕξει δοθέντα· δεῖ δὲ τὸν δοθέντα λόγον μείζονος μὲν εἶναι πρὸς ἐλάττονα, ἐλάττονα δὲ εἶναι οὗ ὃν ἔχει ἡ μεγίστη τῶν ἐν τῷ κώνῳ πρὸς τὴν ἐλαχίστην.

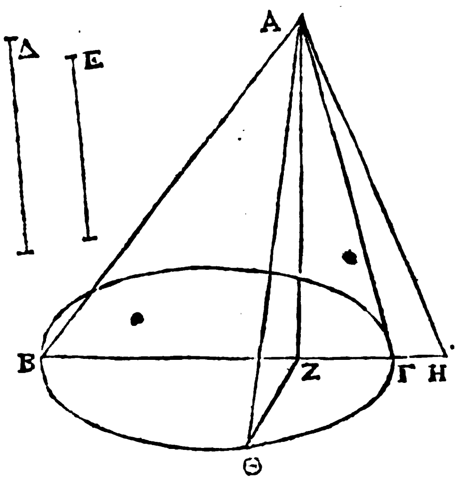
ΔΕΔΟΣΘΩ κῶνος, οὗ βάσις ὁ Β Θ Γ κύκλος καὶ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ Β Γ, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον,

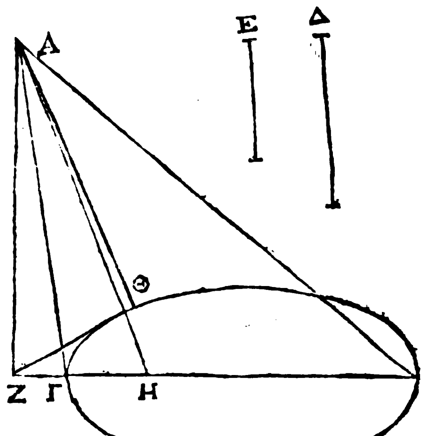
σημεῖον, πρὸς ὀρθὰς δὲ τῷ ΒΓ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΒΑ τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου εὐθειῶν, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ. ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν, πρὸς ἣν ἡ ΒΑ λόγον ἕξει ὃν ἔχει ἡ Δ εὐθεῖα μείζων οὖσα πρὸς τὴν Ε ἐλάττονα. ἐχέτω γὰρ ἡ Δ πρὸς Ε λόγον ἐλάττονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ.

Κατήχθω ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΖΗ, καὶ ὡς ἡ Δ πρὸς Ε οὕτως ἐχέτω ἡ ΒΑ πρὸς ἄλλην τινά, ἐχέτω δὲ πρὸς τὴν ΑΗ, ἥτις ἐνηρμόσθω ὑπὸ τὴν ΑΖΗ γωνίαν· ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς ΑΗ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς ΑΓ· μείζων ἄρα ἡ ΗΑ τῆς ΑΓ καὶ ἡ ΗΖ τῆς ΖΓ. ἐπεὶ οὖν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς

A, & triangulum per axem ABΓ ad rectos angulos ipsi BΓ circulo: ergo BA rectarum quæ à vertice coni ducuntur maxima est; & AΓ minima. itaque oporteat à puncto A ad circumferentiam circuli ducere rectam, ad quam ipsa BA rationem habeat eandem quam habet recta linea Δ major ad E minorem. habeat autem Δ ad E minorem rationem quam BA ad AΓ.

Ducatur à puncto A ad BΓ perpendicularis AZ, producaturque BZH, & ut Δ ad E ita sit BA ad aliam quampiam AH, quæ coaptetur sub angulo AZH: ergo BA ad AH minorem rationem habet quam AB ad AΓ; & propterea HA major est quam AΓ, & HZ major quam ZΓ. quoniam igitur ut quadratum ex Δ ad quadratum ex E ita quadratum ex BA ad quadratum ex





ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ, μεῖζον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ τοῦ ἀπὸ τῆς Ε· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ, τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΖΑ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΖ τοῦ ἀπὸ ΖΗ μεῖζον, καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΗ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΗ ἐλάττων· ἡ ἄρα ΖΗ τῆς μὲν ΖΓ μείζων ἐστί, τῆς δὲ ΖΒ ἐλάττων. ἐνηρμόσθω τοίνυν τῷ κύκλῳ τῇ ΖΗ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΘΖ τῇ ΖΗ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΖΑ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἑκατέρᾳ αὐτῶν· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΘΑ τῇ ΑΗ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Δ πρὸς Ε οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΘ, ἡ δὲ Δ πρὸς Ε ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστί· καὶ ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς ΑΘ ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστίν· ἡ ΑΘ ἄρα διῆκται, πρὸς ἣν ἡ ΒΑ λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

AH, quadratum autem ex Δ majus est quadrato ex E: quare quadratum ex BA quadrato ex AH majus; hoc est quadrata ex BZ, ZA simul majora sunt quadratis ex AZ, ZH simul. commune auferatur quadratum ex AZ; ergo reliquum quadratum ex BZ majus est quadrato ex ZH: & ideo erit BZ ipsa ZH major. erat autem ΓZ minor quam ZH: quare ZH major est quam ZΓ, & minor quam ZB. coaptetur igitur in circulo recta ZΘ ipsi ZH æqualis, & jungatur AΘ: itaque quoniam ΘZ ipsi ZH est æqualis, communis autem ZA, & utrique ipsarum ad rectos angulos: erit basis ΘA æqualis basi AH. sed ut Δ ad E ita est BA ad AH, hoc est BA ad AΘ; estque Δ ad E in data ratione: ergo & BA ad AΘ in data ratione erit: ducta igitur est AΘ, ad quam ipsa BA rationem habet datam. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Τριγώνου δοθέντος σκαληνοῦ, καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένης εὐθείας, ἄλλο μεῖζον τρίγωνον συστήσασθαι, ὥστε ἴσην μὲν ἔχειν τὴν βάσιν καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως τῇ τοῦ δοθέντος τριγώνου, λόγον δὲ ἔχειν πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον ὃν εὐθεῖά τις μείζων πρὸς ἐλάττονα· δεῖ δὲ τὰς τοιαύτας εὐθείας λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλας μὴ μείζονα τοῦ

Prop. XXIV. *Probl.*

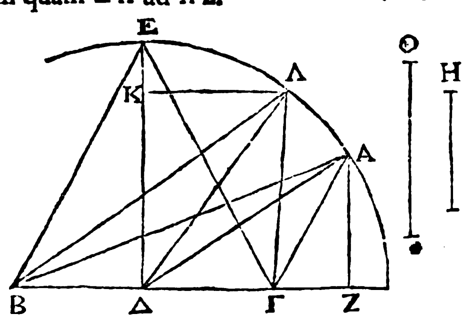
Dato triangulo scaleno, datâque eâ quæ à vertice ducta basim ejus bifariam secat; super eandem basim, ac eâdem à vertice ad bisectionem basis distantiâ, aliud majus triangulum construere, quod ad datum triangulum datam habeat rationem majoris ad minus: oportet autem rationem illam datam non majorem esse eâ

quam habet ducta de vertice ad bisectionem basis dati trianguli ad cathetum de vertice ejusdem ad basim demissam.

ὃν ἔχει ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ δοθέντος τριγώνου ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένη πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν πίπτουσαν κάθετον.

SIT datum triangulum scalenum ΑΒΓ, cujus latus ΑΒ majus sit latere ΑΓ, & basis ΒΓ bifariam in Δ secetur, ducaturque ΑΔ; sit autem ΕΔ perpendicularis ad ΒΓ, & æqualis ipsi ΔΑ; & sit ΑΖ ad eandem ΒΓ perpendicularis: oporteatque aliud triangulum construere triangulo ΑΒΓ majus, quod habeat ductam à vertice ad punctum basim bifariam secans utrique ipsarum ΔΕ, ΔΑ æqualem, quodque ad triangulum ΑΒΓ rationem eandem habeat quam Θ major ad Η minorem. habeat autem Θ ad Η non majorem rationem quam ΔΑ ad ΑΖ.

Itaque centro Δ & intervallo ΔΑ circulus ΕΑ describatur, qui per Ε transibit. & quoniam ratio Θ ad Η, non major est ratione ΔΑ vel ΔΕ ad ΑΖ; erit vel eadem, vel minor. sit primum eadem, & jungantur ΕΒ, ΕΓ. quoniam est ut Θ ad Η ita ΕΔ ad ΑΖ, & ut ΕΔ ad ΑΖ ita rectangulum sub ΕΔ, ΒΓ ad rectangulum sub ΑΖ, ΒΓ; [ergo ut Θ ad Η ita rectangulum sub ΕΔ, ΒΓ ad rectangulum sub ΑΖ, ΒΓ.] rectanguli autem sub ΕΔ, ΒΓ dimidium est triangulum ΕΒΓ, & rectanguli sub ΑΖ, ΒΓ dimidium est triangulum ΑΒΓ: triangulum igitur ΒΕΓ ad triangulum ΒΑΓ eam rationem habet quam Θ ad Η, hoc est datam.



Habeat deinde Θ ad Η minorem rationem quam habet ΕΔ ad ΑΖ; & fiat ut Θ ad Η ita ΚΔ ad ΑΖ, perque Κ ducatur ΚΛ ipsi ΓΔ parallela, & jungantur ΛΒ, ΛΓ. quoniam itaque ut Θ est ad Η ita ΚΔ ad ΑΖ; ut autem ΚΔ ad ΑΖ ita ΒΛΓ triangulum ad triangulum ΒΑΓ: triangulum igitur ΒΛΓ ad triangulum ΒΑΓ datam habet rationem, videlicet quam habet Θ ad Η; estque ΛΔ ipsi ΔΑ æqualis. quod erat faciendum.

ΕΣΤΩ τρίγωνον δοθὲν τὸ ΑΒΓ σκαληνὸν, μείζονα ἔχον τὴν ΑΒ τῆς ΑΓ, ἡ δὲ ΒΓ βάσις τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ διήχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἡ μὲν ΕΔ πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῇ ΒΓ ἴση οὖσα τῇ ΔΑ, ἡ δὲ ΑΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ· καὶ δέον ἔστω ἄλλο τρίγωνον μεῖζον τοῦ ΑΒΓ συστήσασθαι, τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἴσην ἔχον ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΔΑ, καὶ προσέτι λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒΓ ὃν ἡ Θ πρὸς Η μείζων πρὸς ἐλάττονα. ἐχέτω δὲ ἡ Θ πρὸς Η λόγον μὴ μείζονα ἤπερ ἡ ΔΑ πρὸς ΑΖ.

Κέντρῳ τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΑ, γεγράφθω κύκλος· ἥξει δὴ καὶ διὰ τοῦ Ε, ἔστω δὲ ὅδε ὁ ΕΑ. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς Θ πρὸς Η λόγος οὐ μείζων ἐστὶ τοῦ τῆς ΔΑ ἤτοι τῆς ΔΕ πρὸς ΑΖ, ἤτοι ὁ αὐτός ἐστιν ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ὁ αὐτὸς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Θ πρὸς τὴν Η οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΑΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΑΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΒΓ, ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ ΕΔ, ΒΓ ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ ΑΖ, ΒΓ ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· καὶ τὸ ΒΕΓ ἄρα πρὸς τὸ ΒΑΓ λόγον ἔχει ὃν ἡ Θ πρὸς Η, τουτέστι τὸν ἐπιταχθέντα.

Ἀλλὰ δὲ ἐχέτω ἡ Θ πρὸς τὴν Η ἐλάττονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΑΖ, γενέσθω δὲ ὡς ἡ Θ πρὸς Η οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΑΖ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΒ, ΛΓ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Θ πρὸς τὴν Η οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΑΖ, ὡς δὲ ἡ ΚΔ πρὸς ΑΖ οὕτως τὸ ΒΛΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΓ τρίγωνον· τὸ ἄρα ΒΛΓ πρὸς τὸ ΒΑΓ τὸν ἐπιταχθέντα ἔχει λόγον τὸν τῆς Θ πρὸς Η, ἔχει δὲ καὶ τὴν ΛΔ ἴσην τῇ ΔΑ. ὃ προστέτακται ποιῆσαι.

PROP. XXV. *Probl.*

Datum conum scalenum secare per axem plano faciente in eo triangulum, ad minimum triangulorum per axem ductorum rationem datam habens: oportet autem datam rationem esse majoris ad minus, neque majorem eâ quam maximum triangulorum per axem habet ad minimum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε΄.

Τὸν δοθέντα κῶνον σκαληνὸν τεμεῖν διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ, ὃ τὸν δοθέντα λόγον ἕξει πρὸς τὸ ἐλάχιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων· δεῖ δὲ δοθέντα λόγον, μείζονος ὄντα πρὸς ἔλαττον, μὴ μείζονα εἶναι τοῦ ὃν ἔχει τὸ μέγιστον τρίγωνον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ἐλάχιστον.

SIT datus conus scalenus, cujus axis ΑΒ, basis circulus circa Β centrum, minimum vero triangulorum per axem ΑΓΔ: & opor-

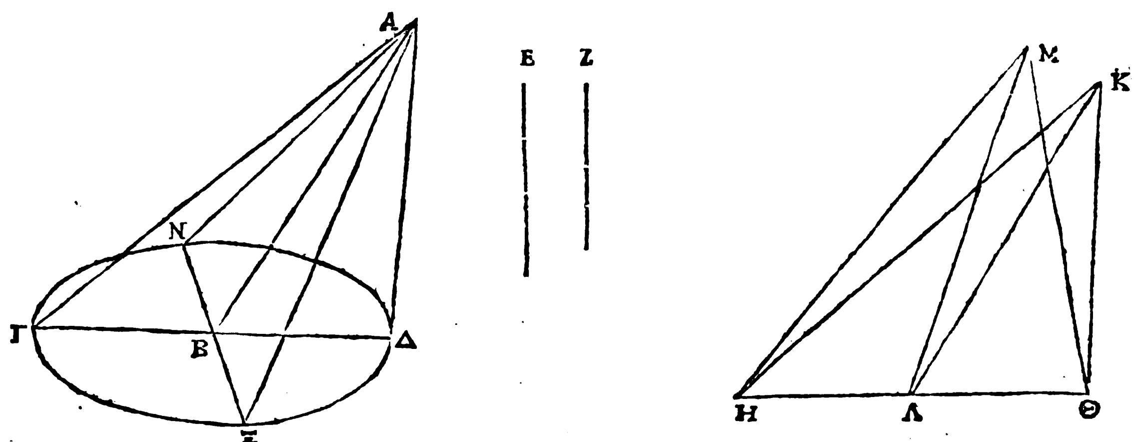
ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κῶνος σκαληνὸς, οὗ ὁ ἄξων ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τὸ δὲ ἐλάχιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὸ ΑΓΔ· καὶ δέον ἔστω

ἔστω διὰ τοῦ ΑΒ ἄξονος ἀγαγεῖν ἐπίπεδον ποιοῦν τρίγωνον, ὃ λόγον ἕξει πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, ὃν ἔχει ἡ Ε εὐθεῖα μείζων οὖσα πρὸς τὴν Ζ, μὴ μείζονα δὲ ἤπερ τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον τὸ ΑΓΔ. εἰ μὲν οὖν ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ λόγον ἔχει ὃν τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον, διὰ τοῦ Β πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ ἀγαγόντες εὐθεῖαν ἐν τῷ κύκλῳ, καὶ διὰ τῆς ἀχθείσης καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβάλλοντες ἐπίπεδον, ἕξομεν τρίγωνον ἰσοσκελές, ὃ μέγιστόν ἐστι τῶν διὰ τοῦ ἄξονος, (ταῦτα γὰρ ἐδείχθη) καὶ ἕξει πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον τὸν τῆς Ε πρὸς τὴν Ζ, τουτέστι τὸν ἐπιταχθέντα.

Ἐχέτω δὲ νῦν ἡ Ε πρὸς Ζ ἐλάττονα λόγον ἤπερ τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον πρὸς τὸ ἐλάχιστον, καὶ κείσθω ἐκτὸς εὐθεῖα ἡ ΗΘ ἴση οὖσα τῇ ΓΔ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον, ὅμοιον ὂν τῷ ΑΓΔ, ὥστε καὶ τὴν ΚΗ τῇ ΑΓ ἴσην εἶναι, καὶ πάντα πᾶσιν, καὶ ἐπὶ τῆς ΗΘ συνεστάτω τρίγωνον, ἴσην ἔχον τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν

teat eum plano per axem AB ducto ita secare, ut faciat triangulum, quod ad triangulum ΑΓΔ rationem quidem habeat eandem quam recta quædam E major ad Z minorem, non autem majorem ea quam maximum triangulorum per axem habet ad minimum ΑΓΔ. si igitur E ad Z rationem habeat eandem quam maximum triangulorum per axem ad minimum, ducentes per B rectam lineam in circulo ad rectos angulos ipsi ΓΔ, & secundum eam & axem planum producentes, habebimus triangulum illud æquicrure, quod maximum est omnium per axem transeuntium, ut [per 22. huj.] demonstratum fuit; habebitque ad triangulum ΑΓΔ rationem eandem quam E ad Z, videlicet datam.

Sed habeat nunc E ad Z rationem minorem quam maximum triangulorum per axem ad minimum; & describatur seorsum recta linea ΗΘ æqualis ipsi ΓΔ, & super eam triangulum ΚΗΘ triangulo ΑΓΔ simile, ita ut KH sit æqualis ipsi ΑΓ, & aliæ aliis itidem æquales; præterea super rectam ΗΘ construatur [per præcedens] triangulum, habens eam quæ à vertice ad punctum ba-

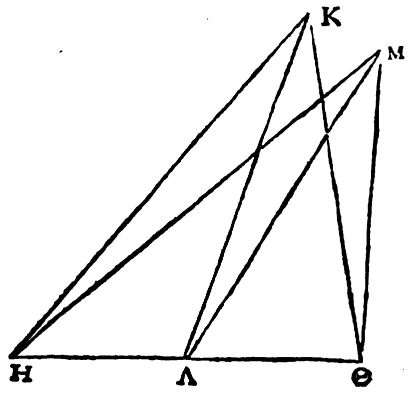


τῆς βάσεως τῇ ΚΛ, καὶ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΚΗΘ ὃν ἡ Ε πρὸς Ζ. τὸ δὲ συνιστάμενον τρίγωνον τὴν κορυφὴν ἕξει ἐπὶ τὰ τοῦ Η μέρη, ὡς δειχθήσεται. ἔστω δὲ τὸ ΜΗΘ, ὥστε τὴν ΜΗ πλευρὰν τῆς ΜΘ μείζονα εἶναι. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΛ τῇ ΛΚ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΛΗ, μείζων δὲ ἡ ὑπὸ ΚΛΗ γωνία τῆς ὑπὸ ΜΛΗ· μείζων ἄρα ἡ ΚΗ τῆς ΜΗ. ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΓΑ ἴση· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΚΘ, τουτέστιν ἡ ΑΔ, τῆς ΜΘ ἐλάττων ἐστίν, ἡ δὲ ΜΘ τῆς ΜΗ ἐλάττων· ἡ ἄρα ΑΔ τῆς ΜΗ ἐστιν ἐλάττων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΗ τῆς μὲν μεγίστης τῶν ἐν τῷ κώνῳ τῆς ΑΓ ἐλάττων ἐστί, τῆς δὲ ἐλαχίστης τῆς ΔΑ μείζων· δυνατὸν ἄρα εὐθεῖαν ἴσην τῇ ΜΗ ἀπὸ τῆς Α κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγαγεῖν, ὡς ἤδη μεμαθήκαμεν. ἤχθω δὴ καὶ ἔστω ἡ ΑΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΒΞ, καὶ ἡ ΑΞ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ μὲν ΑΝ τῇ ΜΗ, ἡ δὲ ΝΒ τῇ ΗΛ, ἡ δὲ ΒΑ τῇ ΛΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΝΒ τρίγωνον τῷ ΜΗΛ ἴσον ἐστί, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΛΗ ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΞ ἄρα τῇ ὑπὸ ΜΛΘ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΛΜ, ἡ δὲ ΒΞ τῇ ΛΘ, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΞ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΜΛΘ· ἴση ἄρα ἡ ΑΞ τῇ ΜΘ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΑΝ τῇ ΜΗ, καὶ ἡ ΝΞ βάσις τῇ ΗΘ·

sim bifariam secans ducitur ipsi ΚΛ æqualem; habensque ad triangulum ΚΗΘ rationem eandem quam E ad Z. erit autem constructi trianguli vertex ad partes H, ut mox demonstrabitur. sit autem illud triangulum ΜΗΘ, ita ut latus MH sit majus ipso ΜΘ. quoniam igitur ΜΛ est æqualis ipsi ΛΚ, & ΛΗ communis, angulus autem ΚΛΗ major angulo ΜΛΗ; erit KH major ipsa MH. & est KH æqualis ipsi ΓΑ: ergo ΓΑ quam MH major erit. rursus quoniam ΚΘ, hoc est ΑΔ, minor est quam ΜΘ, itemque ΜΘ minor quam MH; erit ΑΔ ipsa MH minor. itaque cum MH sit minor quam ΑΓ maxima earum quæ in cono ducuntur, & major quam ΔΑ earundem minima; fieri potest ut à vertice A ad basis circumferentiam ducatur recta æqualis ipsi MH, quemadmodum antea [ad 23. hujus] didicimus. ducatur ergo & sit AN, junganturque ΝΒΞ, ΑΞ. & quoniam AN est æqualis ipsi MH, & NB ipsi ΗΛ, & BA ipsi ΛΜ; erit totum ANB triangulum triangulo ΜΗΛ æquale, angulusque ABN æqualis angulo ΜΛΗ: quare & ΑΒΞ angulus ipsi ΜΛΘ æqualis. rursus quoniam AB est æqualis ipsi ΛΜ, & ΒΞ ipsi ΛΘ, angulusque ΑΒΞ angulo ΜΛΘ: erit & ΑΞ æqualis ipsi ΜΘ. sed AN æqualis erat ipsi MH, & basis ΝΞ basi ΗΘ: triangulum igitur

tur ΑΝΞ est æquale triangulo ΗΜΘ. sed triangulum ΗΜΘ ad triangulum ΗΚΘ, hoc est ad ipsum ΓΑΔ, eandem habet rationem quam Ε ad Ζ: ergo & triangulum ΑΝΞ ad triangulum ΑΓΔ rationem habet eandem quam Ε ad Ζ: factum est igitur ΑΝΞ triangulum per axem, quemadmodum proponebatur.

Quod si quis dicat triangulum majus triangulo ΗΚΘ, super ipsam ΗΘ descriptum, ad partes Θ verticem habere, absurdum sequetur. sit enim ita, si fieri potest. & quoniam æquales sunt ΚΛ, ΜΛ, communis autem ΛΗ, atque ΜΛΗ angulus major est angulo ΚΛΗ: igitur ΜΗ major est quam ΚΗ. eadem ratione demonstrabitur ΚΘ major quam ΘΜ. & cum ΜΗ sit major quam ΗΚ, & ΜΘ minor quam ΘΚ; habebit ΜΗ ad ΗΚ majorem rationem quam ΜΘ ad ΘΚ, permutandoque ΗΜ ad ΜΘ majorem quam ΗΚ ad ΚΘ: triangulum igitur ΗΜΘ [per 19. huj.] triangulo ΗΚΘ est minus, quod fieri non potest; (supponebatur enim majus) quare triangulum ΗΜΘ non ad partes Θ, sed ad eas ad quas est Η, verticem habebit.



τὸ ἄρα ΑΝΞ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΗΜΘ. ἀλλὰ τὸ ΗΜΘ πρὸς τὸ ΗΚΘ, τουτέστι πρὸς τὸ ΓΑΔ, λόγον ἔχει τὸν τῆς Ε πρὸς τὴν Ζ· καὶ τὸ ΑΝΞ ἄρα πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει ὃν ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ· ἦκται ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος τὸ ΑΝΞ τρίγωνον, ὡς ἐπιτέτακται.

Εἰ δέ τις λέγοι ὅτι τὸ συνιστάμενον ἐπὶ τῆς ΗΘ τρίγωνον, μεῖζον ὑπάρχον τοῦ ΗΚΘ, ἐπὶ τὰ τοῦ Θ μέρη τὴν κορυφὴν ἕξει, συμβήσεται ἀδύνατον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, οὕτως. ἐπεὶ οὖν ἴσαι αἱ ΚΛ, ΜΛ, κοινὴ δὲ ἡ ΛΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΜΛΗ γωνία μείζων τῆς ὑπὸ ΚΛΗ· μείζων ἄρα ἡ ΜΗ τῆς ΚΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΚΘ τῆς ΘΜ μείζων. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΜΗ τῆς ΗΚ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ΜΘ τῆς ΘΚ ἐλάττων· ἡ ἄρα ΜΗ πρὸς ΗΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΜΘ πρὸς ΘΚ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἡ ΗΜ πρὸς ΜΘ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ· ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΜΘ τοῦ ΗΚΘ, ὅπερ ἀδύνατον· (ὑπέκειτο γὰρ μεῖζον) οὐκ ἄρα ἐπὶ τὰ Θ μέρη τὴν κορυφὴν ἔχει τὸ τρίγωνον· ἐπὶ τὰ τοῦ Η ἄρα μέρη ἕξει.

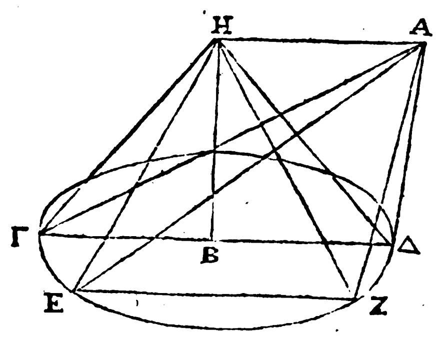
Prop. XXVI. *Theor.*

Si conus scalenus plano per axem secetur ad rectos angulos ipsi basi, & ea quæ à vertice facti trianguli ad basim perpendicularis ducitur non minor sit basis semidiametro: erit triangulum, quod ad rectos angulos est basi, majus quolibet alio extra axem in cono constituto, basimque habente basi dicti trianguli parallelam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τοῦ δὲ γινομένου τριγώνου ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος μὴ ἐλάττων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τρίγωνον μέγιστον ἔσται πάντων τῶν ἐκτὸς τοῦ ἄξονος ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων, καὶ παραλλήλους βάσεις ἐχόντων τῇ τοῦ πρὸς ὀρθὰς τριγώνου.

Conus enim, cujus vertex Α, basis autem circulus circa Β centrum, secetur plano per axem quod faciat ΑΓΔ triangulum, ad rectos angulos basi coni; quæ vero à puncto Α ad ΓΔ perpendicularis ducitur non sit minor semidiametro basis: dico triangulum ΑΓΔ maximum esse è triangulis in cono constitutis ac bases habentibus ipsi ΓΔ parallelas.



Ducatur enim in circulo recta ΕΖ parallela ipsi ΓΔ, super quam triangulum ΑΕΖ describatur; in plano autem trianguli ΑΓΔ, & ad rectos angulos ipsi ΓΔ, erigatur ΒΗ, & ducatur ΑΗ eidem ΓΔ parallela: erit igitur ΒΗ æqualis ei quæ à puncto Α ad ΓΔ perpendicularis cadit. itaque junctis ΗΓ, ΗΔ, ΗΕ, ΗΖ, concipiatur conus cujus vertex Η, axis ΗΒ, & basis circulus circa

Κῶνος γάρ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τετμήσθω διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος μὴ ἐλάττων ἔστω τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων, βάσεις ἐχόντων παραλλήλους τῇ ΓΔ.

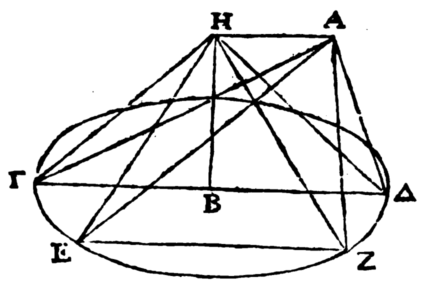
Διήχθω γὰρ ἐν τῷ κύκλῳ παράλληλος τῇ ΓΔ ἡ ΕΖ, ἐφ' ἧς τὸ ΑΕΖ τρίγωνον, ἐν δὲ τῷ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω τῇ ΓΔ ἡ ΒΗ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΗ· ἡ ΒΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΔ καθέτῳ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΓ, ΗΔ, ΗΕ, ΗΖ· νοηθήσεται δὴ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Η, ἄξων δὲ ἡ ΗΒ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον

Β κέντρον κύκλος, ἐν ᾧ τρίγωνα, διὰ μὲν τοῦ ἄξονος τὸ Η Γ Δ, ἐκτὸς δὲ τοῦ ἄξονος τὸ Η Ε Ζ. ἐπεὶ οὖν ἡ Β Η οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, διὰ τὰ προδεδειγμένα ἄρα τὸ Η Γ Δ μεῖζόν ἐστι τοῦ Η Ε Ζ, καὶ πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ τριγώνων βάσεις ἐχόντων παραλλήλους τῇ Γ Δ. ἀλλὰ τὸ μὲν Η Γ Δ τῷ Α Γ Δ ἴσον ἐστὶν (ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις) τὸ δὲ Η Ε Ζ τῷ Α Ε Ζ ἴσον· τὸ ἄρα Α Γ Δ τοῦ Α Ε Ζ μεῖζόν ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι καὶ πάντων τῶν παραλλήλους βάσεις ἐχόντων τῇ Γ Δ· τὸ Α Γ Δ ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν παραλλήλους βάσεις ἐχόντων τῇ Γ Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

B centrum deſcriptus; atque in eo intelligantur triangula per axem quidem Η Γ Δ, extra axem vero Η Ε Ζ. quoniam igitur Β Η non est minor ſemidiametro baſis; triangulum Η Γ Δ, ex jam demonſtratis [ad 5. huj.] majus erit triangulo Η Ε Ζ, majuſque omnibus triangulis in cono conſtitutis, baſeſque habentibus ipſi Γ Δ parallelas. ſed triangulum Η Γ Δ æquale eſt triangulo Α Γ Δ, (quod ſit ſuper eandem baſim & inter eaſdem parallelas) triangulumque Η Ε Ζ æquale eſt triangulo Α Ε Ζ: ergo triangulum Α Γ Δ triangulo Α Ε Ζ eſt majus. ſimiliter etiam majus demonſtrabitur quibuſvis aliis quæ baſes habent parallelas ipſi Γ Δ: triangulum igitur Α Γ Δ omnium ejuſmodi triangulorum maximum eſt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

Ἐὰν ᾖ ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν Γ Δ ἐλάττων ἢ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ Α Γ Δ οὐκ ἔσται μέγιστον τῶν τὰς παραλλήλους τῇ Γ Δ βάσεις ἐχόντων τριγώνων. ἡ δὲ αὐτὴ δεῖξις καὶ καταγραφή.



Ἐπεὶ γὰρ ἡ Η Β ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ ἄρα Η Γ Δ οὐκ ἔσται μέγιστον τῶν παραλλήλους αὐτῷ βάσεις ἐχόντων. ἐδείχθη γὰρ καὶ μείζονα αὐτοῦ συνιστάμενα, καὶ ἐλάττονα, καὶ ἴσα. εἰ μὲν οὖν ἔλαττον τὸ Η Γ Δ τοῦ Η Ε Ζ, ἔλαττον ἔσται καὶ τὸ Α Γ Δ τοῦ Α Ε Ζ· εἰ δὲ μεῖζον τὸ Η Γ Δ τοῦ Η Ε Ζ, μεῖζον καὶ τὸ Α Γ Δ τοῦ Α Ε Ζ· εἰ δὲ ἴσον καὶ ἴσον ὁμοίως.

Prop. XXVII. *Theor.*

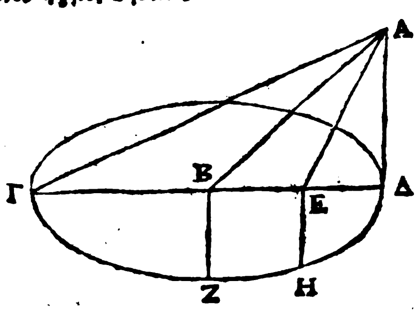
At ſi perpendicularis à puncto Α ad Γ Δ ducta minor fuerit ſemidiametro baſis; triangulum Α Γ Δ non erit maximum omnium baſes ipſi Γ Δ parallelas habentium. demonſtratio autem & figura eadem eſt.

Quoniam enim Η Β minor eſt ſemidiametro baſis; triangulum Η Γ Δ non erit maximum omnium quæ baſes habent ipſi parallelas; ſi quidem uti demonſtravimus, [ad 10. huj.] & eo majora triangula, & minora, & æqualia conſtitui poſſunt. quod ſi triangulum Η Γ Δ minus ſit triangulo Η Ε Ζ, & Α Γ Δ triangulum triangulo Α Ε Ζ minus erit; & ſi majus, majus; & ſi æquale ſimiliter æquale erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη΄.

Ἐὰν ἐν σκαληνῷ κώνῳ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις, ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστῇ, ὁ δὲ ἄξων τοῦ κώνου μὴ ἐλάττων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μέγιστον ἔσται πάντων τῶν ἰσοσκελῶν τῶν συνισταμένων ἐφ᾽ ὃ μέρος προσνεύει ὁ ἄξων.

Ἔστω κῶνος, οὗ ἄξων μὲν ὁ Α Β, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ τριγώνου διὰ τοῦ ἄξονος ἠγμένου βάσις ἔστω ἡ Γ Β Δ, καὶ ἡ ὑπὸ Α Β Δ γωνία ἐλάττων ἔστω ὀρθῆς, ὥστε τὴν Α Β ἐπὶ τὰ Δ μέρη προσνεύειν, καὶ ἔστω ἡ Α Β μὴ ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τὸ διὰ τῆς Α Β ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστι τῶν γινομένων ἰσοσκελῶν τριγώνων, τῶν μεταξὺ τῶν Β, Δ σημείων τὰς βάσεις ἐχόντων.



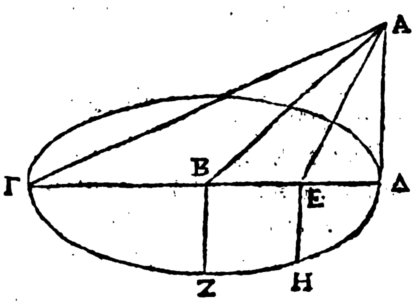
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς Β Δ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε, καὶ τῇ Γ Δ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ αἱ Β Ζ, Ε Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Α Ε· ἡ δὴ Β Α τῆς Α Ε ἤτοι ἐλάττων

Prop. XXVIII. *Theor.*

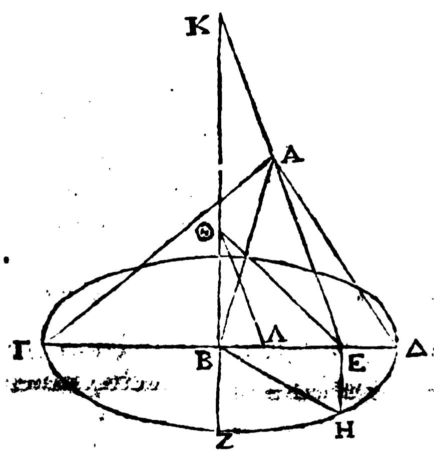
Si in cono ſcaleno planis per verticem ſecto, ſuper baſes parallelas triangula æquicrura fiant, ſitque axis coni non minor ſemidiametro baſis: triangulum æquicrure per axem tranſiens majus erit quovis æquicruri ad eam partem ad quam axis inclinat conſtituti.

Sit conus cujus axis Α Β, baſis circulus circa Β centrum, baſis vero trianguli per axem conſtituti ad rectos angulos ipſi circulo ſit Γ Β Δ; & angulus Α Β Δ minor ſit angulo recto, ita ut Α Β ad partes Δ inclinet; ſitque Α Β non minor ſemidiametro baſis: dico triangulum æquicrure per Α Β tranſiens majus eſſe æquicruribus omnibus inter puncta Β, Δ baſes habentibus.

Sumatur enim utcunque in recta Β Δ punctum Ε, & ipſi Γ Δ ad rectos angulos ducantur in circulo Β Ζ, Ε Η, & jungatur Α Ε. itaque Β Α vel minor est quam A E, vel non minor. ponatur primum B A non minor quam A E. igitur quoniam B A non minor est quam A E, & E H est minor quam B Z; ergo A B ad A E majorem rationem habet quam E H ad B Z: & idcirco [per 1. huj.] A B Z rectangulum majus est rectangulo A E H. sed rectangulo A B Z æquale est triangulum basim habens duplam ipsius B Z & altitudinem A B, hoc est triangulum æquicrure per axem; rectangulo autem A E H est æquale triangulum cujus basis dupla est E H & altitudo A E: ergo triangulum æquicrure per axem majus est æquicruri per A E constituto. similiter quoque triangulum per axem triangulis omnibus, quæ inter puncta B, Δ bases habent, majus esse demonstrabitur.



Sed jam sit B A minor quam A E. & quoniam angulus A B E minor est recto, ducatur in plano trianguli A B E recta B Θ perpendicularis ipsi Γ Δ, ipsique E H sit æqualis, & jungantur Θ E, B H. cum igitur angulus A B E angulo A E B sit major, erit angulus A E B minor recto. rectus autem est Θ B E: ergo rectæ Θ B, A E productæ inter se convenient. conveniant ad punctum K: & per Θ ducatur Θ Λ ipsi K E parallela. itaque quoniam Θ B est æqualis ipsi E H, communis autem B E, & angulos æquales continent, videlicet rectos; erit B H ipsi Θ E æqualis. rursus quoniam rectus est angulus Θ B Λ, recta Θ E major erit quam Θ Λ; adeoque B Θ ad Θ E minorem rationem habebit quam eadem B Θ ad Θ Λ. ut autem B Θ ad Θ Λ ita B K ad K E; quare B Θ ad Θ E minorem habet rationem quam B K ad K E. sed B K ad K E habet minorem quam B A ad A E, ut in 29^no^ theoremate ostendetur; igitur B Θ ad Θ E multo minorem habebit rationem quam B A ad A E: ergo B A ad A E majorem rationem habet quam B Θ ad Θ E, hoc est quam E H ad H B sive ad B Z. quoniam vero B A ad A E majorem habet rationem quam E H ad B Z, erit rectangulum A B Z majus rectangulo A E H. sed rectangulo A B Z æquale est triangulum æquicrure per axem, & rectangulo A E H æquale est triangulum æquicrure per A E, cujus basis sit dupla ipsius E H: majus igitur est triangulum æquicrure per axem triangulo æquicruri per A E transeunte. eadem ratione demonstrabitur majus aliis omnibus, quorum bases inter puncta B, Δ habentur. quod erat demonstrandum.



ἐστιν, ἢ οὐκ ἔστιν ἐλάττων. ὑποκείσθω δὲ μὴ εἶναι ἐλάττων ἡ B A τῆς A E. ἐπεὶ οὖν ἡ B A τῆς A E οὐκ ἐλάττων, ἐλάττων δὲ ἡ E H τῆς B Z· ἡ A B ἄρα πρὸς A E μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ E H πρὸς B Z· τὸ ἄρα ὑπὸ A B, B Z μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ A E, E H. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ A B, B Z ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ βάσιν ἔχον τὴν διπλῆν τῆς B Z, ὕψος δὲ τὴν A B, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελές, τῷ δὲ ὑπὸ A E, E H ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὴν διπλῆν τῆς E H, ὕψος δὲ τὴν A E· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μεῖζόν ἐστι τοῦ διὰ τῆς A E ἰσοσκελοῦς. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι καὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν B, Δ τὰς βάσεις ἐχόντων μέγιστόν ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ B A τῆς A E ἐλάττων. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ A B E γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἤχθω ἐν τῷ τοῦ A B E τριγώνου ἐπιπέδῳ τῇ Γ Δ πρὸς ὀρθὰς ἡ B Θ, ἴση οὖσα τῇ E H, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Θ E, B H. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ A B E γωνία τῆς ὑπὸ A E B μείζων ἐστίν, ἡ ἄρα ὑπὸ A E B ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ Θ B E· αἱ ἄρα Θ B, A E εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ K, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ τῇ K E παράλληλος ἡ Θ Λ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ Θ B τῇ E H, κοινὴ δὲ ἡ B E, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ὀρθαὶ γάρ· ἴση ἄρα καὶ ἡ B H τῇ Θ E. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ Θ B Λ, μείζων ἄρα ἡ Θ E τῆς Θ Λ· ἡ B Θ ἄρα πρὸς Θ E ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ B Θ πρὸς Θ Λ. ἀλλ' ὡς ἡ B Θ πρὸς Θ Λ οὕτως ἡ B K πρὸς K E· ἡ ἄρα B Θ πρὸς Θ E ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ B K πρὸς K E. ἡ δὲ B K πρὸς K E ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ B A πρὸς A E, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς δείκνυται· πολλῷ ἄρα ἡ B Θ πρὸς Θ E ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ B A πρὸς A E· ἡ ἄρα B A πρὸς A E μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ B Θ πρὸς Θ E, τουτέστιν ἤπερ ἡ E H πρὸς H B, τουτέστι πρὸς B Z. ἐπεὶ οὖν ἡ B A πρὸς A E μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ E H πρὸς B Z, τὸ ἄρα ὑπὸ A B, B Z μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ A E, E H. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ A B, B Z ἴσον ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελές, τῷ δὲ ὑπὸ A E, E H ἴσον ἐστὶ τὸ διὰ τῆς A E καὶ τῆς διπλῆς τῆς E H ἰσοσκελές· μεῖζον ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τῆς A E ἰσοσκελοῦς. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι καὶ τῶν ὧν αἱ βάσεις μεταξὺ τῶν B, Δ σημείων. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

Prop. XXIX. *Theor.*

Si in triangulo orthogonio ab angulo recto ad hypotenusam recta quædam

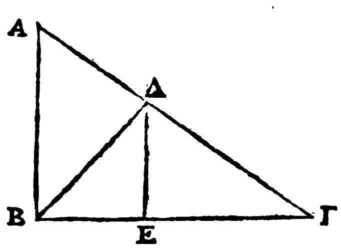
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἀχθῇ τις εὐθεῖα· ἡ ἀχθεῖσα

ἀχθεῖσα πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ μιᾶς τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ λοιπὴ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.

ducatur; habebit ducta ad eam hypotenusæ partem, quæ inter ipsam & alteram continentium angulum rectum interjicitur, majorem rationem quam reliqua rectum angulum continentium ad totam hypotenusam.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τὸ Β γωνίαν, ἀφ᾽ ἧς ἐπὶ τὴν ΑΓ βάσιν ἤχθω ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ.



Ἤχθω διὰ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΑΒ ἡ ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ὀρθαί εἰσι αἱ πρὸς τὸ Ε γωνίαι, μείζων ἄρα ἡ ΒΔ τῆς ΔΕ· ἡ ἄρα ΒΔ πρὸς ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΓ. ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ· ἡ ΒΔ ἄρα πρὸς ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ· ὥστε φανερὸν ὅτι καὶ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ. ὃ ἐχρησιμεύεν ἡμῖν εἰς τὸ πρὸ τούτου.

SIT triangulum ABΓ rectum habens angulum ad B, à quo ad basim AΓ ducatur recta aliqua BΔ: dico BΔ ad ΔΓ majorem rationem habere quam BA ad AΓ.

Ducatur enim per Δ recta ΔE ipsi AB parallela. & quoniam recti anguli sunt ad E, major erit BΔ quam ΔE: ergo BΔ ad ΔΓ majorem habet rationem quam EΔ ad ΔΓ. sed ut EΔ ad ΔΓ, ita BA ad AΓ: majorem igitur rationem habebit BΔ ad ΔΓ quam BA ad AΓ; ac proinde BA ad AΓ minorem habet rationem quam BΔ ad ΔΓ. id quod ad antecedens usurpavimus.

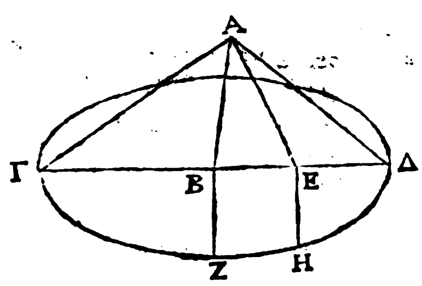
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ΄.

Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τισὶν, ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστῇ, ἐφ᾽ ὃ μέρος προσνεύει ὁ ἄξων, τῶν δὲ γινομένων ἰσοσκελῶν ἓν ὅτιοῦν ἴσον ᾖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ· ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου κάθετος μείζων ἔσται τοῦ ἄξονος.

Prop. XXX. *Theor.*

Si, cono scaleno planis per verticem secto, super bases parallelas æquicrura triangula habeantur, ad eam partem ad quam axis inclinat, & dictorum triangulorum unum aliquod æquale sit triangulo æquicruri per axem: recta linea, quæ à vertice ad basim trianguli perpendicularis ducitur, ipso axe major erit.

Ἔστω σκαληνὸς κῶνος, οὗ κορυφὴ τὸ Α, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ προσνεύων ἐπὶ τὰ τοῦ Δ μέρη, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου βάσις ἔστω ἡ ΓΒΔ, καὶ ἤχθωσαν τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ΒΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ ὑποκείσθω τὸ διὰ τῶν ΑΕ, ΕΗ ἰσοσκελὲς ἴσον εἶναι τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΖ, τουτέστι τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ· λέγω ὅτι ἡ ΑΕ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΒ.



Ἐπεὶ τὸ διὰ τῶν ΑΕ, ΕΗ ἰσοσκελὲς ἴσον ἐστὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΖ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ· ὡς ἄρα ἡ ΒΖ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΖ τῆς ΕΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΑ τῆς ΑΒ.

SIT conus scalenus cujus vertex A, axis AB ad partes Δ inclinans, & basis circulus circa centrum B; basis autem trianguli per axem ad rectos angulos circulo sit ΓBΔ, & ad ipsam ΓΔ perpendiculares BZ, EH in circulo ducantur, junganturque AE; & ponatur triangulum æquicrure per AE, EH transiens æquale esse triangulo per AB, BZ, hoc est triangulo æquicruri per axem: dico AE majorem esse ipsa AB.

Quoniam enim triangulum æquicrure per AE, EH æquale est triangulo per AB, BZ; erit rectangulum AEH æquale rectangulo ABZ: ut igitur [per 14. 6.] BZ ad EH ita EA ad AB. sed BZ est major quam EH; ergo & EA quam AB major erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα΄.

Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τισὶν, ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσο-

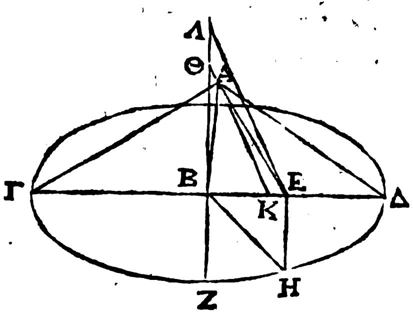
Prop. XXXI. *Theor.*

Si, cono scaleno per verticem planis secto, super bases parallelas æqui-crura

crura triangula constituantur, ad eam partem ad quam axis inclinat, & dictorum triangulorum unum aliquod æquale sit triangulo æquicruri per axem: axis coni semidiametro basis minor erit.

Sit conus scalenus cujus vertex A, axis AB ad partes Δ inclinans, & basis circulus circa B centrum; basis vero trianguli per axem ad rectos angulos circulo sit ΓBΔ, & ad ipsam ΓΔ perpendiculares in circulo ducantur BZ, EH, jungaturque AE; & ponatur triangulo per AB & duplam ipsius BZ transeunti, hoc est triangulo æquicruri per axem, æquale triangulum æquicrure per AE & duplam ipsius EH ductum: dico axem AB semidiametro basis minorem esse.

Quoniam enim angulus ABE minor est recto, ducatur in plano trianguli ABE recta BΘ ad rectos angulos ipsi ΓΔ. & quoniam EA major est quam AB, uti in antecedente demonstratum est, angulus BEA minor erit recto. rectus autem est ΘBE: ergo ΘB, EA productæ inter se convenient. conveniant in Θ. cum igitur triangulum æquicrure per axem sit æquale rectangulo ABZ, triangulum vero æquicrure per AE & duplam ipsius EH æquale sit rectangulo AEH; & sint triangula æquicrura inter se æqualia; erit rectangulum ABZ rectangulo AEH æquale: adeoque ut BA ad AE ita HE ad ZB, hoc est ad HB. sed BA ad AE majorem habet rationem quam BΘ ad ΘB, per vigesimam



nonam hujus: ergo ut BA ad AB ita BΘ ad minorem quam ΘE, ad majorem vero quam ΘB. sit ut BA ad AB ita BΘ ad ΘK; & coaptetur ΘK sub angulo ΘBE; & per E ducatur EΛ parallela ipsi KΘ, conveniensque cum BΘ in Λ. itaque quoniam BA est ad AE sicut BΘ ad ΘK, hoc est BΛ ad ΛE; ut autem BA ad AE ita EH ad HB; erit ut BΛ ad ΛE ita EH ad HB. quoniam igitur duo triangula ΛBE, HEB unum angulum uni angulo æqualem habent, nempe rectum; circa alios autem angulos qui ad Λ, H latera habent proportionalia; & reliquorum angulorum uterque est acutus; ergo [per 7. 6.] triangula ΛBE, HEB inter se similia sunt, & erit ut ΛB ad BE ita HE ad EB: quare ΛB ipsi HE est æqualis. minor autem est EH semidiametro basis; quare & BΛ semidiametro basis minor erit. & quoniam [per 21. 1.] utræque BΛ, ΛB simul majores sunt utrisque EA, AB simul; atque est ut EΛ ad ΛB ita EA ad AB: componendo igitur ut utræque EΛ, ΛB simul ad BΛ ita utræque EA, AB simul ad BA, permutandoque. sed majores sunt utræque EΛ, ΛB utrisque EA, AB: quare & ΛB major erit quam BA. ostensa

σκελῆ τρίγωνα συστῇ, ἐφ' ὃ μέρος προσνεύει ὁ ἄξων, τῶν δὲ γινομένων ἰσοσκελῶν ἓν ὁποιονοῦν ἴσον ᾖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ· ὁ ἄξων τοῦ κώνου ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

ΕΣΤΩ κῶνος σκαληνὸς, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A, ἄξων δὲ ὁ AB νεύων ἐπὶ τὰ τοῦ Δ μέρη, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ B κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ἀγομένου τριγώνου βάσις ἔστω ἡ ΓBΔ, τῇ δὲ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ αἱ BZ, EH, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AE, καὶ ὑποκείσθω τῷ διὰ τῆς AB καὶ τῆς διπλῆς τῆς BZ ἀγομένῳ τριγώνῳ, τουτέστι τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ, τὸ διὰ τῆς EA καὶ τῆς διπλῆς τῆς EH ἀγόμενον ἰσοσκελὲς ἴσον εἶναι· λέγω ὅτι ὁ BA ἄξων ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου.

Ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ABE γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἤχθω ἐν τῷ τοῦ ABE ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ BΘ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἡ EA τῆς AB, διὰ τὸ πρὸ τούτου· ἡ ἄρα ὑπὸ BEA γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΘBE· αἱ ἄρα ΘB, EA εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ AB, BZ, τὸ δὲ διὰ τῆς AE καὶ τῆς διπλῆς τῆς EH ἰσοσκελὲς ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ AE, EH, καὶ ἔστιν ἴσα ἀλλήλοις τὰ ἰσοσκελῆ· καὶ τὸ ὑπὸ AB, BZ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ AE, EH· ὡς ἄρα ἡ BA πρὸς AE οὕτως ἡ HE πρὸς ZB, τουτέστι πρὸς HB. ἐπεὶ οὖν ἡ BA πρὸς AE μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ BΘ πρὸς ΘE, διὰ τὸ κθʹ. θεώρημα· ὡς ἄρα ἡ BA πρὸς AE οὕτως ἡ BΘ πρὸς ἐλάττονα μέν τινα τῆς ΘE, μείζονα δὲ τῆς ΘB. ἔστω δὴ ὡς ἡ BA πρὸς AE οὕτως ἡ BΘ πρὸς ΘK, καὶ ἐνηρμόσθω ἡ ΘK ὑπὸ τὴν ΘBE γωνίαν, καὶ διὰ τοῦ E παρὰ τὴν KΘ ἤχθω ἡ EΛ συμπίπτουσα τῇ BΘ κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ BA πρὸς AE οὕτως ἡ BΘ πρὸς ΘK, τουτέστιν ἡ BΛ πρὸς ΛE, ἦν δὲ ὡς ἡ BA πρὸς AE οὕτως ἡ EH πρὸς HB· καὶ ὡς ἄρα ἡ BΛ πρὸς ΛE οὕτως ἡ EH πρὸς HB. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΛBE, HEB μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσον ἔχει, (ὀρθογώνια γάρ) περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς Λ, H τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, καὶ τῶν λοιπῶν γωνιῶν ἑκατέρα ὀξεῖα· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ΛBE, HEB τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΛB πρὸς BE οὕτως HE πρὸς EB· ἴση ἄρα ἡ ΛB τῇ HE. ἐλάττων δὲ ἡ EH τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ἐλάττων ἄρα ἡ ΛB τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ἡ EΛ, ΛB συναμφοτέρου τῆς EA, AB μείζων ἐστὶ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ EΛ πρὸς ΛB οὕτως ἡ EA πρὸς AB· καὶ συνθέντι ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ EΛ, ΛB πρὸς BΛ οὕτως συναμφότερος ἡ EA, AB πρὸς BA, καὶ ἐναλλάξ. μείζων δὲ συναμφότερος ἡ EΛ, ΛB συναμφοτέρου τῆς EA, AB· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛB τῆς BA. ἐδείχθη [illegible] δὲ ἡ ΑΒ ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· πολλῷ ἄρα ἡ ΒΑ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

est autem AB minor [illegible]: quare & BA semidiametro basis multo [illegible] erit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϐ'.

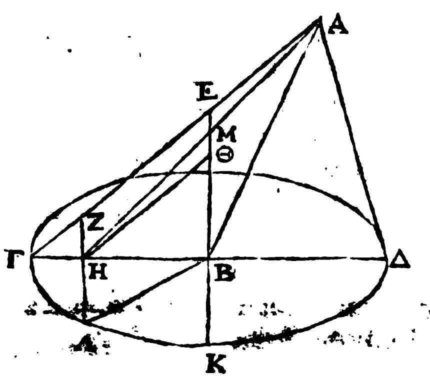
Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τισὶν, ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστῇ, ἀφ' οὗ μέρους ἀπονεύει ὁ ἄξων· τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν συστάντων ἰσοσκελῶν οὐκ ἔσται πάντων ἐλάχιστον.

Prop. XXXII. *Theor.*

Si, cono scaleno planis per verticem secto, super bases parallelas triangula æquicrura constituantur, ad eam partem à qua axis declinat: triangulum æquicrure per axem transiens non erit omnium ejusmodi æquicrurum triangulorum minimum.

ΕΣΤΩ κῶνος σκαληνὸς, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, τοῦ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ ΓΒΔ διάμετρος, ἐλάττων δὲ ἔστω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ὀρθῆς· λέγω ὅτι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν συνισταμένων ἰσοσκελῶν, τὰς βάσεις ἐχόντων μεταξὺ τῶν Γ, Β σημείων, οὐ πάντων ἐλάχιστόν ἐστιν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω τῇ ΓΔ ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΕ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἡ ΕΖ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ παρὰ τὴν ΕΒ ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΜΗ, καὶ παρὰ τὴν ΖΕ ἤχθω ἡ ΗΘ· παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ ΖΘ, ἴση γάρ ἡ ΖΕ τῇ ΗΘ· ἡ ἄρα ΗΘ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἴση. ἤχθωσαν δὴ πάλιν ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΚΒ, ΗΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν δύο ὀρθογώνια τὰ ΘΗΒ, ΛΒΗ ἴσας ἔχει γωνίας τὰς ὀρθὰς, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, καὶ τὰ λοιπὰ τῆς περιστάσεως· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΒΛ πρὸς ΛΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ΗΜ πρὸς ΜΒ, ἡ δὲ ΗΜ πρὸς ΜΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ· ἡ ἄρα ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. ἀλλ' ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΒΛ, τουτέστιν ἡ ΒΚ, πρὸς ΛΗ· ἡ ἄρα ΒΚ πρὸς ΛΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΚ μεῖζόν ἐστι τῷ ὑπὸ ΑΗ, ΗΛ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μεῖζόν ἐστι τοῦ διὰ τῆς ΑΗ ἰσοσκελοῦς, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ διπλῆ τῆς ΛΗ. οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς ἐλάχιστόν ἐστι πάντων τῶν μεταξὺ τῶν Β, Γ σημείων τὰς βάσεις ἐχόντων ἰσοσκελῶν.



SIT conus scalenus cujus vertex A, axis AB, [basis circulus circa B centrum] plani vero per axem ad rectos angulos circulo ducti & ipsius circuli communis sectio sit diameter ΓΒΔ; sitque ΑΒΔ angulus recto minor: dico triangulum æquicrure per axem transiens non esse minus omni triangulo æquicruri inter puncta Γ, B basin habente.

Jungatur enim AΓ; & in triangulo ABΓ ad rectos angulos ipsi ΓΔ ducatur BE. quoniam itaque ΓE major est semidiametro basis ΓB, capiatur EZ æqualis semidiametro, & ducatur ZH ipsi EB parallela; jungaturque AMH, & ducatur HΘ parallela ipsi ZE: ZΘ itaque parallelogrammum est, propterea quod ZE ipsi HΘ est æqualis; est igitur HΘ æqualis semidiametro basis. denique in circuli plano ducantur KB, HΛ ad rectos angulos ipsi ΓΔ, & jungatur BΛ. quoniam igitur duo triangula orthogonia ΘHB, ΛBH æquales habent rectos angulos, & circa alios angulos latera proportionalia, & reliquorum uterque est acutus; erunt [per 7. 6.] ea triangula inter se similia: & ideo ut HΘ ad ΘB ita BΛ [illegible] habet autem HΘ ad ΘB [per [illegible]] majorem rationem quam HM ad MB; & HM ad MB item majorem quam HA ad AB: ergo HΘ ad ΘB majorem rationem habebit quam HA ad AB. sed ut HΘ ad ΘB, ita BΛ sive BK ad ΛH: quapropter BK ad ΛH majorem habet rationem quam HA ad AB: rectangulum igitur ABK [per 1. huj.] majus est rectangulo AHΛ, hoc est triangulum æquicrure per axem majus triangulo æquicruri per AH, cujus basis est ipsius ΛH dupla: quare triangulum æquicrure per axem non minus est omni ejusmodi triangulo inter puncta B, Γ basin habente.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως δύο τρίγωνα συστῇ, καὶ τοῦ μὲν ἑτέρου ἡ πλευρὰ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει, τοῦ δὲ ἑτέρου πρὸς ἀμβλείαν, τὸ δὲ τοῦ ἀμβλυγω-

Prop. XXXIII. *Theor.*

Si super eandem basin duo triangula constituantur, & unius quidem latus sit ad rectos angulos basi, alterius vero ad angulos obtusos, sitque

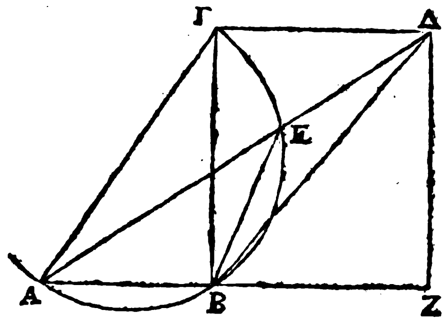
 amblygonii

amblygonii trianguli altitudo non minor altitudine orthogonii: angulus qui ad orthogonii verticem angulo qui ad verticem amblygonii major erit.

νίου ὕψος μὴ ἔλαττον ᾖ τοῦ ὀρθογωνίου ὕψους· ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία τοῦ ὀρθογωνίου μείζων ἔσται τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ ἀμβλυγωνίου.

Constituantur super basin ΑΒ triangula ΑΓΒ, ΑΔΒ, angulusque ΑΒΓ sit rectus, & ΑΒΔ obtusus; recta vero, quæ à puncto Δ ad ΑΒ basim perpendicularis ducitur, videlicet ΔΖ, non minor sit perpendiculari ΓΒ: dico angulum ΑΓΒ angulo ΑΔΒ majorem esse.

Quoniam enim parallelæ sunt ΒΓ, ΔΖ, & ad rectos angulos ipsi ΑΒΖ, non minor autem ΔΖ quam ΓΒ; erit ΑΓΔ angulus non minor recto: quare [per 19. 1.] ΑΔ major erit quam ΑΓ. & cum triangulum ΑΒΓ orthogonium sit, in semicirculo continetur [per 31. 3.] cujus diameter est ΑΓ: ergo descriptus circa ipsam semicirculus rectam ΑΔ secabit. secet in Ε, & jungatur ΕΒ: erit igitur angulus ΑΕΒ [per 21. 3.] æqualis angulo ΑΓΒ. sed angulus ΑΕΒ [per 16. 1.] est major ipso ΑΔΒ: ergo ΑΓΒ angulus angulo ΑΔΒ major erit.



Συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΑΒ τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ τρίγωνα, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ ἔστω ὀρθή, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΔ ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Δ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΔΖ μὴ ἐλάττων ἔστω τῆς ΓΒ καθέτου· λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ γωνίας.

Ἐπεὶ παράλληλοι μέν αἱ ΒΓ, ΔΖ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒΖ, οὐκ ἐλάττων δὲ ἡ ΔΖ τῆς ΓΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ γωνία οὐκ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒΓ ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἐν ἡμικυκλίῳ ἄρα ἐστὶν οὗ διάμετρος ἡ ΑΓ· περιγραφὲν ἄρα τὸ ἡμικύκλιον τεμεῖ τὴν ΑΔ. τεμνέτω δὴ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΒ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ.

Prop. XXXIV. *Theor.*

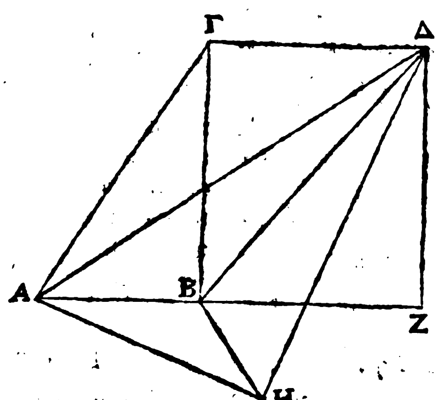
Iisdem positis, si trianguli orthogonii angulus ad verticem non major sit eo qui continetur sub recta vertices triangulorum conjungente & latere amblygonii quod obtusum angulum cum basi efficit: ea quæ in triangulo orthogonio subtendit angulum rectum ad eam quæ est ad rectos angulos basi minorem habet rationem quā quæ subtendit angulum obtusum in amblygonio ad eam quæ cum basi facit angulum obtusum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδʹ.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν τοῦ ὀρθογωνίου ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία μὴ μείζων ᾖ τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων ἐπιζευγνυούσης καὶ τῆς πρὸς ἀμβλεῖαν τῇ βάσει· ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρὰ πρὸς τὴν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τοῦ ἀμβλυγωνίου ἡ τὴν ἀμβλεῖαν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ἀμβλεῖαν τῇ βάσει.

Describantur triangula, & sit ΑΓΒ angulus non major angulo ΓΔΒ: dico ΑΓ ad ΓΒ minorem habere rationem quam ΑΔ ad ΔΒ.

Quoniam enim angulus ΑΓΒ major est angulo ΑΔΒ (ut [in anteced.] ostensum fuit) & angulus ΓΑΒ major angulo ΔΑΒ, constituatur ipsi quidem angulo ΑΓΒ æqualis angulus ΑΔΗ, angulo autem ΓΑΒ æqualis ΔΑΗ: erunt itaque triangula ΑΓΒ, ΑΔΗ æquiangula & similia: quare ut ΔΑ ad ΑΓ ita ΗΑ ad ΑΒ; & continent æquales angulos: junctâ igitur ΒΗ, triangulum ΔΑΓ [per 6. 6.] triangulo ΗΑΒ simile erit, & angulus ΑΓΔ angulo ΑΒΗ æqualis. quo-



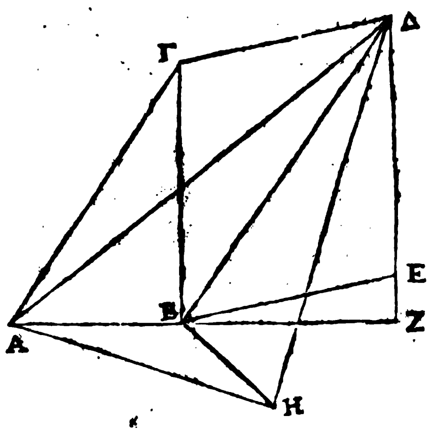
Καταγεγράφθω τὰ αὐτὰ τρίγωνα, καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ μὴ μείζων τῆς ὑπὸ ΓΔΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ.

Ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ, ὡς ἐδείχθη, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΑΒ τῆς ὑπὸ ΔΑΒ, συνεστάτω τῇ μὲν ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΑΒ ἡ ὑπὸ ΔΑΗ· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΓΒ, ΑΔΗ τρίγωνα καὶ ὅμοια· ὡς ἄρα ἡ ΔΑ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα τὸ ΔΑΓ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ, ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΗ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΗ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν

οὖν ἡ ΔΖ τῆς ΓΒ οὐκ ἔστιν ἐλάττων, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἢ μείζων. ἔστω πρότερον ἴση· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ΓΖ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΓΒ μετὰ τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΔΒΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ, τουτέστι τῆς ὑπὸ ΔΒΖ, οὐ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΓΒ μετὰ τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΑΓΒ οὐ μείζονές εἰσι δυεῖν ὀρθῶν, ὅ ἐστιν αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΔ οὐ μείζονές εἰσι δυεῖν ὀρθῶν. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΗ, ΓΒΔ οὐ μείζονές εἰσι δυεῖν ὀρθῶν. προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθή· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΗ, ΑΒΔ οὐ μείζονές εἰσι τριῶν ὀρθῶν· λοιπὴ ἄρα εἰς τέσσαρας ὀρθὰς ἡ ὑπὸ ΔΒΗ οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ μιᾶς ὀρθῆς· μείζων ἄρα ἡ ΔΗ τῆς ΔΒ· ἡ ἄρα ΑΔ πρὸς ΔΗ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ· καὶ ἡ ἄρα ΑΓ πρὸς ΓΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ ΔΖ τῆς ΓΒ μείζων· ἀμβλεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΒ. ἤχθω τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΒΕ. καὶ κατὰ τὰ αὐτά, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΓΒ μετὰ τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ, τουτέστι τῆς ὑπὸ ΓΔΒ, οὐ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΔ, τουτέστιν αἱ ὑπὸ ΑΒΗ, ΓΒΔ, οὐ μείζονές εἰσι δυεῖν ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΗ οὐ μείζονές εἰσι τριῶν ὀρθῶν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΒΗ οὐκ ἐλάττων ὀρθῆς ἐστι· μείζων ἄρα ἡ ΗΔ τῆς ΔΒ· ἡ ΑΔ ἄρα πρὸς ΔΗ, τουτέστιν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

niam igitur ΔΖ non est minor ipsa ΓΒ, vel æqualis erit vel major. sit primum æqualis: ergo ΓΖ parallelogrammum est rectangulum; & propterea angulus ΔΓΒ una cum angulis ΓΒΔ, ΔΒΖ [per 32. 1.] est æqualis duobus rectis. sed [ex hypothesi] angulo ΓΔΒ, hoc est ΔΒΖ, non major est angulus ΑΓΒ: ergo angulus ΔΓΒ una cum angulis ΓΒΔ, ΑΓΒ, videlicet anguli ΑΓΔ, ΓΒΔ, non sunt duobus rectis majores. angulo autem ΑΓΔ æqualis est angulus ΑΒΗ: anguli igitur ΑΒΗ, ΓΒΔ non sunt majores duobus rectis. apponatur angulus ΑΒΓ rectus; quare anguli ΑΒΗ, ΑΒΔ non sunt majores tribus rectis: & idcirco angulus ΔΒΗ, reliquus ex quatuor rectis, non erit recto minor: major igitur ΔΗ quam ΔΒ; adeoque ΑΔ ad ΔΗ minorem habet rationem quam ΑΔ ad ΔΒ. sed ut ΑΔ ad ΔΗ ita ΑΓ ad ΓΒ; ergo ΑΓ ad ΓΒ minorem rationem habebit quam ΑΔ ad ΔΒ.



Sed sit ΔΖ major quam ΓΒ: ergo ΔΓΒ angulus est obtusus. itaque ducatur ΒΕ ipsi ΓΔ parallela. & quoniam angulus ΔΓΒ una cum angulis ΓΒΔ, ΔΒΕ est æqualis duobus rectis; angulo autem ΔΒΕ, hoc est ΓΔΒ, non major est angulus ΑΓΒ: erunt, eadem ratione qua supra, anguli ΑΓΔ, ΓΒΔ, hoc est ΑΒΗ, ΓΒΔ, non majores duobus rectis; adeoque ΑΒΔ, ΑΒΗ non sunt majores tribus rectis; proinde ΔΒΗ non est recto minor: ΗΔ igitur major est quam ΔΒ, & idcirco ΑΔ ad ΔΗ, hoc est ΑΓ ad ΓΒ, minorem habet rationem quam ΑΔ ad ΔΒ. quod erat demonstrandum.

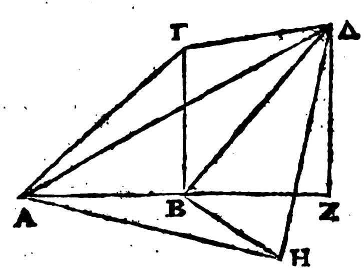
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων τῶν ἄλλων, ἐὰν ἡ τοῦ ὀρθογωνίου ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ τοῦ ἀμβλυγωνίου ἡ τὴν ἀμβλεῖαν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ἀμβλεῖαν τῇ βάσει· ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ ὀρθογωνίου γωνία μείζων ἔσται τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων ἐπιζευγνυούσης καὶ τῆς πρὸς ἀμβλεῖαν τῇ βάσει.

Prop. XXXV. *Theor.*

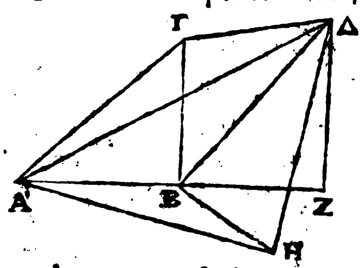
Cæteris manentibus, si in triangulo orthogonio, quæ subtenditur angulo recto ad eam quæ est ad rectos angulos basi majorem rationem habeat, quam quæ subtenditur angulo obtuso in amblygonio ad eam quæ est ad angulum obtusum: angulus ad verticem orthogonii major est angulo sub rectâ vertices triangulorum jungente & eâ quæ cum basi est ad angulum obtusum.

Κείσθω ἡ αὐτὴ καταγραφή, τῶν αὐτῶν κατεσκευασμένων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ· καὶ ἡ ἄρα ΑΔ πρὸς ΔΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΗΔ τῆς ΔΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΗΒ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς μιᾶς· λοι-



Ponatur eadem figura, iisdem constructis. quoniam itaque ΑΓ ad ΓΒ majorem rationem habet quam ΑΔ ad ΔΒ; ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ΑΔ ad ΔΗ; habebit ΑΔ ad ΔΗ majorem rationem quam ΑΔ ad ΔΒ; & ob id minor erit ΗΔ quam ΔΒ: angulus igitur ΔΒΗ minor erit recto: quare reliqui ΑΒΔ, ΑΒΗ tribus

bus rectis sunt majores. sed angulus ABH æqualis est angulo ΑΓΔ: ergo anguli ΑΓΔ, ΑΒΔ majores sunt tribus rectis. auferatur angulus rectus ΑΒΓ, & erunt anguli ΑΓΔ, ΓΒΔ duobus rectis majores. quoniam igitur angulus ΒΓΔ una cum angulis ΑΓΒ, ΓΒΔ est major duobus rectis; una vero cum ipsis ΓΔΒ, ΓΒΔ est duobus rectis æqualis: sequitur angulum ΑΓΒ angulo ΓΔΒ majorem esse.



τεσσάρων ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΗ μείζονές εἰσι τριῶν ὀρθῶν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΑΒΗ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΒΔ μείζονές εἰσι τριῶν ὀρθῶν. ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθή· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΔ δυεῖν ὀρθῶν μείζονές εἰσι. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ μετὰ μὲν τῶν ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ δυεῖν ὀρθῶν εἰσι μείζους, μετὰ δὲ τῶν ὑπὸ ΓΔΒ, ΓΒΔ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ.

Prop. XXXVI. *Theor.*

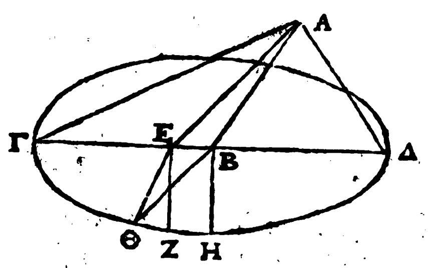
Si, cono scaleno per verticem planis secto, super bases parallelas triangula æquicrura constituantur, ad eam partem à qua axis declinat: triangulum æquicrure per axem transiens omnium ejusmodi triangulorum neque maximum, neque minimum erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Εὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις ποσὶν, ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστῇ, ἀφ' οὗ μέρους ἀποκλίνει ὁ ἄξων· τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων ἰσοσκελῶν οὔτε μέγιστον ἔσται πάντων, οὔτε ἐλάχιστον.

SIT conus, cujus axis AB, & basis circulus circa B centrum; plani vero per axem ad rectos angulos circulo, & ipsius circuli communis sectio sit ΓΒΔ; sitque angulus ΑΒΔ recto minor: dico triangulum æquicrure per axem triangulorum omnium æquicrurum, quæ bases habent inter puncta, Γ, B, neque maximum esse, neque minimum.

Vel enim axis est minor basis semidiametro, vel major, vel ipsi æqualis. sit primum minor. & quoniam AB minor est semidiametro basis, aptetur AE æqualis semidiametro; perque puncta B & E ducantur in circulo EZ, BH ad rectos angulos ipsi ΓΔ: & angulo AEB æqualis fiat angulus ΕΒΘ, & jungatur ΘE. quoniam igitur utraque AE, ΒΘ æqualis est semidiametro, communis autem BE, & continent æquales angulos; reliqua quoque [per 6. 6.] erunt æqualia & triangula inter se similia; quapropter ut EA ad AB ita ΒΘ ad ΘE. & quoniam [per 7. 3.] ZE major est quam ΒΘ, æquales autem BH, ΒΘ; habebit ΒΘ ad ΘE majorem rationem quam BH ad ZE. sed ut ΒΘ ad ΘE ita EA ad AB: quapropter EA ad AB majorem rationem habet quam BH ad EZ; & idcirco [per 1. huj.] rectangulum AEZ majus est rectangulo ABH, hoc est triangulum æquicrure per AE, cujus basis est dupla ipsius EZ, majus est triangulo æquicruri per axem: triangulum igitur æquicrure per axem non est omnium ejusmodi triangulorum maximum. sed ostensum est universim, in trigesimâ secundâ hujus, non minimum esse; quare neque maximum omnium, neque minimum est.



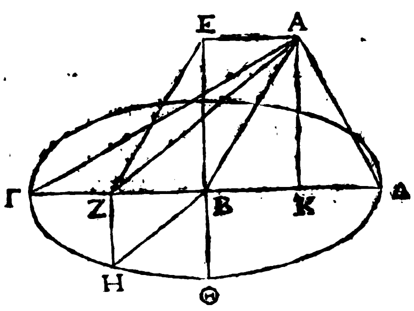
ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ ἄξων ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς γωνίας τῷ κύκλῳ ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ ΓΒΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ἔστω ὀρθῆς· λέγω ὅτι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν συνισταμένων ἰσοσκελῶν, τὰς βάσεις ἐχόντων μεταξὺ τῶν Γ, Β σημείων, οὔτε μέγιστόν ἐστι πάντων, οὔτε ἐλάχιστον.

Ὁ δὲ ἄξων ἤτοι ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἢ ἴσος αὐτῇ, ἢ μείζων. ἔστω πρῶτον ἐλάττων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἐνηρμόσθω ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τῶν Β καὶ Ε σημείων τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ΕΖ, ΒΗ, καὶ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση συνεστάτω ἡ ΕΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΕ. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΒΘ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, κοινὴ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας· καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τοῖς λοιποῖς ἴσα· ὅμοια ἄρα τὰ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ. ἐπεὶ δὲ μείζων ἡ ΖΕ τῆς ΕΘ, ἴσαι δὲ αἱ ΒΗ, ΒΘ· ἡ ἄρα ΒΘ πρὸς ΘΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΗ πρὸς ΖΕ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ· ἡ ἄρα ΕΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΗ πρὸς ΕΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΕ, ΕΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΗ, τουτέστι τὸ διὰ τῆς ΑΕ ἰσοσκελὲς, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ διπλῆ τῆς ΕΖ, τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς μεῖζόν ἐστι· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς οὐ πάντων μέγιστόν ἐστι τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων τριγώνων. ἐδείχθη δὲ (ἐν τῷ τριακοστῷ δευτέρῳ) καθόλου, ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων, οὔτε ἐλάχιστον.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ΄.

Αλλα δὴ ἔστω ὁ ΑΒ ἄξων ἴσος τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία, ἐλάττων οὔσα ὀρθῆς, ἤτοι ἐλάττων ἐστὶν ἡμισείας ὀρθῆς ἢ οὔ. ἔστω πρότερον οὐκ ἐλάττων ἡμισείας, καὶ διὰ τοῦ Α, ἐν τῷ ὀρθῷ πρὸς τὸν κύκλον ἐπιπέδῳ, παράλληλος ἤχθω τῇ ΓΒ ἡ ΑΕ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, τῇ δὲ ΑΒ παράλληλος ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ, ἐν δὲ τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΒΘ,



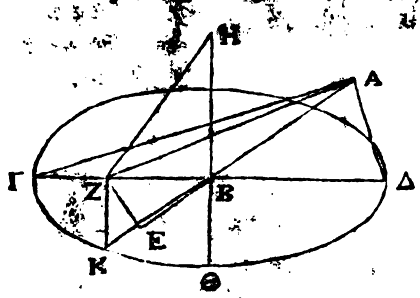
ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ οὐκ ἐλάττων ἐστὶν ἡμισείας ὀρθῆς, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα οὐκ ἐλάττων ἐστὶν ἡμισείας· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΒΑ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΖΕΒ, οὐ μείζων ἐστὶν ἡμισείας ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΑΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΖΕΒ, ΖΑΒ ἐπὶ μιᾶς βάσεως συνέστηκε, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἀγομένη, ὡς ἡ ΑΚ, οὐκ ἔστιν ἐλάττων τῆς ΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΕΒ τοῦ ὀρθογωνίου γωνία οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΑΒ· ἡ ἄρα ΖΕ πρὸς ΕΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ, διὰ τὸ τριακοστὸν τέταρτον θεώρημα. ὡς δὲ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἡ ΒΗ, τουτέστιν ἡ ΒΘ, πρὸς ΖΗ· (ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΖΗ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου) καὶ ἡ ΒΘ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΘ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΖΗ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς ἔλαττόν ἐστι τοῦ διὰ τῆς ΑΖ ἰσοσκελοῦς· οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων ἰσοσκελῶν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ἡμισείας ὀρθῆς, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ κείσθω ἡ ΒΕ ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐν τῷ ὀρθῷ πρὸς τὸν κύκλον ἐπιπέδῳ (ἐν ᾧ καὶ ἡ ΑΕ) τῇ ΑΕ πρὸς [illegible] ἤχθω ἡ ΕΖ, [illegible] ὀρθὰς ἡ ΒΗ, καὶ ὑποτεινέτω [illegible] ὑπὸ [illegible] ἡ ΖΗ εὐθεῖα, ἴση συντεθεῖσα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, [illegible] ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΖΒΕ, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς ἡμισείας, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ε· ἡ ἄρα ΒΕ τῆς ΕΖ μείζων. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΖΕ, ΕΒ, ὧν μεῖζον τὸ ἀπὸ ΕΒ τοῦ ἀπὸ ΖΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΒ ἔλαττόν ἐστι ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΒΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΗ μεῖζον ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΖΒ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΒΗ ἔλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΒ ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΑ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΑΒ, ΒΖ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ, ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ἀπὸ ΑΒ καὶ τῷ ἀπὸ ΒΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΑ μεῖζον ἢ διπλάσιόν ἐστι

PROP. XXXVII. Theor.

SED sit axis AB semidiametro æqualis; angulus autem ABΔ recto minor, vel minor est semirecto, vel non. sit primum non minor semirecto, & per A in plano ad circulum recto ducatur AE ipsi ΓB parallela, & eidem ad rectos angulos recta BE, sitque EZ parallela ipsi AB; jungaturque ZA: in circulo autem ducantur BΘ, ZH ad rectos angulos ipsi ΓΔ, & jungatur BH. Quoniam igitur angulus ABΔ non est minor semirecto, neque [per 27. 1.] BAE semirecto minor erit: ergo EBA, hoc est ZEB, non est major semirecto, & ideo ZEB angulus non major est angulo EAB: itaque duo triangula ZEB, ZAB super eandem basin constituta sunt, & perpendicularis à puncto A ad ΓΔ ducta, videlicet AK, non est minor ipsa EB. angulus autem ZEB orthogonii trianguli non major est angulo EAB; quare, ex trigesimo quarto theoremate, ZE ad EB minorem habet rationem quam ZA ad AB: sed ut ZE ad EB ita BH, hoc est BΘ, ad ZH; (æqualis enim est BE ipsi ZH, & EZ basis semidiametro) ergo BΘ ad ZH minorem habet rationem quam ZA ad AB: & propterea [per 1. huj.] rectangulum ABΘ minus est rectangulo AZH, hoc est triangulum æquicrure per axem minus triangulo æquicruri per AZ. igitur triangulum æquicrure per axem omnium ejusmodi triangulorum maximum non erit.

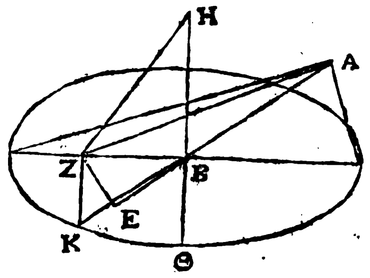
Sit deinde angulus ABΔ minor medietate recti; & producatur AB usque ad E, ita ut BE sit æqualis dimidio semidiametri; in plano autem ad circulum recto, in quo est AE, ducatur EZ ad ipsam AE perpendicularis, & BH perpendicularis ad ΓΔ [illegible] ZH æqualis [illegible]. Quoniam igitur angulus ABΔ, hoc est ZBE, minor est [illegible] rectus autem qui ad E, erit BE major quam EZ: & quoniam



quadratum ex ZB æquale est quadratis ex ZE, EB, quorum quidem quadratum ex EB majus est quadrato ex ZE: quadratum igitur ex ZB minus est quam duplum quadrati ex BE; & propterea quadratum ex ZH majus quam duplum quadrati ex ZB: quadratum igitur ex ZH minus erit quam duplum reliqui quadrati ex BH. & quoniam EB dimidia est semidiametri; quod bis continetur sub AB, BE æquale est quadrato ex BA. sed [per 12.2.] quadratum ex ZA est æquale quadratis ex AB, BZ una cum duplo rectanguli ABE; duplum vero rectanguli ABE æquale est quadrato ex AB: quadratum igitur ex ZA duplo quadrati ex AB & quadrato ex BZ æquale erit: ergo quadratum ex ZA majus est quam duplum quadrati

quadrati ex AB. demonstratum autem est quadratum ex ZH minus esse quam duplum quadrati ex HB; quadratum igitur ex ZH ad quadratum ex HB minorem rationem habet quam quadratum ex ZA ad quadratum ex AB: ergo & ZH ad HB minorem habet rationem quam ZA ad AB. quod si rursus in circulo ducantur ZK, BΘ ad rectos angulos ipsi ΓΔ, & jungatur BK; habebit BΘ ad ZK minorem rationem quam ZA ad AB: triangulum igitur æquicrure per axem minus est triangulo æquicruri per AZ ducto: quare triangulum æquicrure per axem non erit omnium triangulorum, de quibus dictum est, maximum: ostensum autem est non esse minimum, adeoque neque maximum neque minimum est.

τοῦ ἀπὸ ΑΒ. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ ΖΗ ἔλαττον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΗΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ· ὥστε καὶ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ. ἐὰν οὖν πάλιν ἐν τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῶσιν αἱ ΖΚ, ΒΘ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ ΒΚ, ἡ ΒΘ πρὸς ΖΚ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς ἔλαττόν ἐστι τοῦ διὰ τῆς ΑΖ· οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων ἰσοσκελῶν. ἐδείχθη δὲ οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστιν, οὔτε ἐλάχιστον.

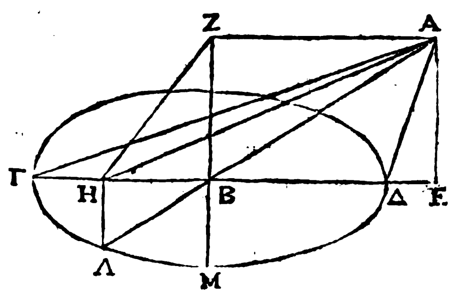


PROP. XXXVIII. *Theor.*

DENIQUE sit axis AB semidiametro major, & in plano ad circulum recto ducatur AE ad ΓΔ perpendicularis, quæ vel minor erit semidiametro, vel non minor. sit primum minor; perque A ducatur AZ ipsi ΓΔ parallela; & per B recta BZ parallela ipsi AE; & constituatur angulus BZH non major angulo ZAB, jungaturque HA. rursus ex jam demonstratis [ad 34. huj.] ZH ad ZB minorem rationem habebit quam HA ad AB. itaque quoniam ZB æqualis ipsi AE est minor semidiametro, & ZH major quam ZB; erit ZH vel major semidiametro, vel minor, vel æqualis. sit primum æqualis; si igitur in circulo ducantur HΛ, BM ad ipsam ΓΔ perpendiculares, ut superius factum est; & jungatur BΛ: per ea quæ sæpius demonstrata sunt, habebit HA ad AB majorem rationem quam BM ad HΛ: quare triangulum æquicrure per AH, HΛ majus est triangulo æquicruri per axem.

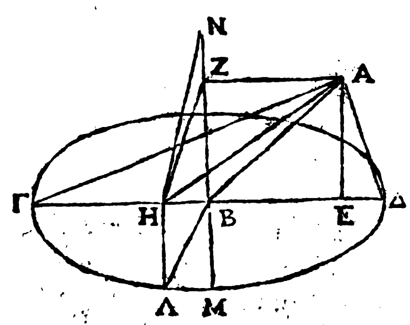
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη΄.

ΕΣΤΩ δὲ νῦν ὁ ΑΒ ἄξων μείζων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐν τῷ ὀρθῷ πρὸς τὸν κύκλον ἐπιπέδῳ ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἡ ΑΕ, ἡ δὲ ΑΕ ἤτοι ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἐλάττων, καὶ διὰ τοῦ Α παρὰ τὴν ΓΔ ἤχθω ἡ ΑΖ, διὰ δὲ τοῦ Β παρὰ τὴν ΑΕ ἡ ΒΖ, καὶ συνεστάτω ἡ ὑπὸ ΒΖΗ μὴ μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ ΖΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ. πάλιν ἄρα, διὰ τὰ δειχθέντα, ἡ ΖΗ πρὸς ΖΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΒ, ἴση οὖσα τῇ ΑΕ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, μείζων δὲ ἡ ΖΗ τῆς ΖΒ· ἡ ἄρα ΖΗ ἤτοι μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἐλάττων, ἢ ἴση. ἔστω πρῶτον ἴση. ἐὰν οὖν πάλιν κατὰ τὸ εἰωθὸς ἐν τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἀγάγωμεν τὰς ΗΛ, ΜΒ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΒΛ· διὰ τὰ δειχθέντα πολλάκις, ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ΒΜ πρὸς ΗΛ· ὥστε καὶ τὸ διὰ τῶν ΑΗ, ΗΛ ἰσοσκελὲς μεῖζον ἔσται τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς.



Si vero ZH sit minor semidiametro, fiat HN semidiametro æqualis. & quoniam HA ad AB majorem rationem habet quam HZ ad ZB; HZ vero ad ZB majorem habet quam HN ad NB: habebit HA ad AB majorem rationem quam HN ad NB, hoc est quam BM ad HΛ; adeoque triangulum æquicrure per AH, HΛ triangulo æquicruri per axem majus erit.

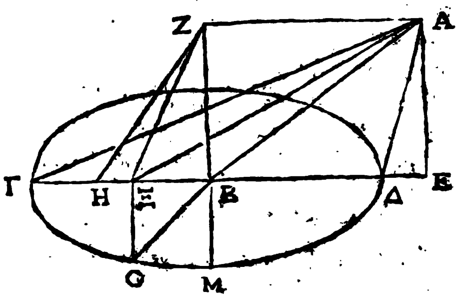
Εἰ δὲ ἡ ΖΗ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἡ ΗΝ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ, ἡ δὲ ΗΖ πρὸς ΖΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΝ πρὸς ΝΒ· καὶ ἡ ἄρα ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΝ πρὸς ΝΒ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΜ πρὸς ΗΛ. καὶ οὕτως τὸ διὰ τῶν ΑΗ, ΗΛ ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς μεῖζον ἔσται.



At si ZH sit semidiametro major, ducatur ZΞ ipsi æqualis. quoniam igitur ΞZB angulus

Εἰ δὴ ἡ ΖΗ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, διήχθω ἡ ΖΞ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΞΖΒ οὐ μείζων

μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ Z A B· ἐπιζευχθεῖσα ἄρα ἡ Ξ A πρὸς A B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ξ Z πρὸς Z B. ὡς δὲ ἡ Ξ Z πρὸς Z B οὕτως ἡ B M πρὸς Ξ O· ἡ ἄρα Ξ A πρὸς A B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ M B πρὸς Ξ O· τὸ ἄρα διὰ τῶν A Ξ, Ξ O ἰσοσκελὲς μεῖζόν ἐστι τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς· οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς πάντων μέγιστόν ἐστι τῶν εἰρημένων ἰσοσκελῶν. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων, οὔτε ἐλάχιστον.



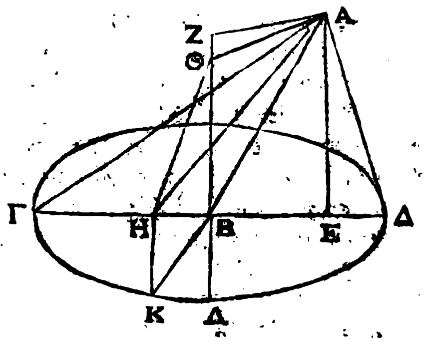
non est major angulo Z A B, juncta Ξ A ad A B majorem rationem habebit quam Ξ Z ad Z B. ut autem Ξ Z ad Z B ita B M ad Ξ O: ergo Ξ A ad A B majorem rationem habebit quam M B ad Ξ O: & propterea triangulum æquicrure per A Ξ, Ξ O majus est triangulo æquicruri per axem. ostensum autem est [ad tricesimam secundam hujus] non minimum esse: quare neque est omnium maximum neque minimum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

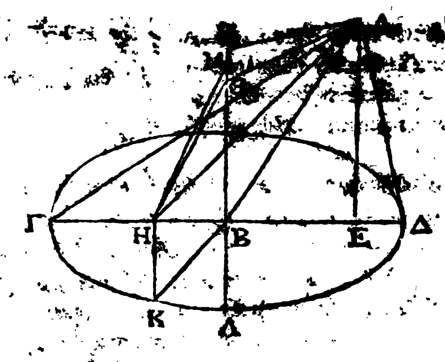
Ἔστω δὴ ἡ A E κάθετος μὴ ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ Z B ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ A Z, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ A Θ, καὶ συνεστάτω ἡ ὑπὸ B Θ H μὴ μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ Θ A B, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ H A. ἕξει δὴ πάλιν, διὰ τὰ δειχθέντα, ἡ H Θ πρὸς Θ B ἐλάττονα λόγον ἤπερ ἡ H A πρὸς A B. καὶ ἐπεὶ ἡ Θ B ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, μείζων δὲ ἡ Θ H τῆς Θ B· ἡ Θ H ἄρα ἤτοι ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἐλάσσων, ἢ μείζων. ἔστω πρῶτον ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ τῇ Γ Δ πρὸς ὀρθὰς αἱ H K, B Λ. ἐπεὶ οὖν ἡ H A πρὸς A B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ H Θ πρὸς Θ B, ὡς δὲ ἡ H Θ πρὸς Θ B οὕτως ἡ B Λ πρὸς H K· ἡ ἄρα H A πρὸς A B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ B Λ πρὸς H K· μεῖζον ἄρα τὸ διὰ τῆς A H τρίγωνον ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς.

Prop. XXXIX. *Theor.*

Sit perpendicularis A E jam non minor semidiametro, & Z B semidiametro æqualis, jungaturque A Z, & ducatur utcunque recta A Θ: constituatur autem B Θ H angulus non major angulo Θ A B, & jungatur H A. habebit rursus, ex iis quæ [ad 34. huj.] demonstrata sunt, H Θ ad Θ B minorem rationem quam H A ad A B. & quoniam Θ B minor est semidiametro, major autem Θ H quam Θ B; erit Θ H vel æqualis semidiametro, vel minor, vel major. sit primum æqualis; & ducantur in circulo H K, B Λ ad rectos angulos ipsi Γ Δ. cum igitur H A ad A B majorem habeat rationem quam H Θ ad Θ B, & ut H Θ ad Θ B ita B Λ ad H K; H A ad A B majorem rationem habebit quam B Λ ad H K: ergo triangulum æquicrure per A H triangulo æquicruri per axem majus erit.

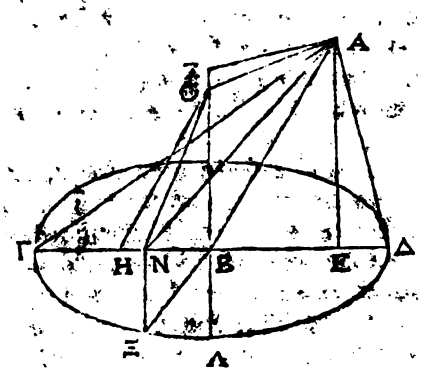


Εἰ δὲ ἡ Θ H ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ H M. ἐπεὶ οὖν ἡ H A πρὸς A B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ H Θ πρὸς Θ B, ἡ δὲ H Θ πρὸς Θ B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ H M πρὸς M B, τουτέστιν ἡ B Λ πρὸς H K· ἡ ἄρα H A πρὸς A B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ B Λ πρὸς H K· μεῖζον ἄρα τὸ διὰ τῆς A H τρίγωνον ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς.



Si vero Θ H sit minor semidiametro, sit semidiametro æqualis H M. itaque quoniam H A ad A B majorem habet rationem quam H Θ ad Θ B, & H Θ ad Θ B item majorem quam H M ad M B, hoc est B Λ ad H K: habebit H A ad A B majorem rationem quam B Λ ad H K: quare majus erit triangulum æquicrure per A H triangulo per axem æquicruri.

Εἰ δὲ ἡ μείζων ἡ H Θ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἡ Θ N ἐνηρμοσμένη ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ N A, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ πάλιν πρὸς ὀρθὰς τῇ Γ Δ αἱ B Λ, N Ξ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ N Θ B οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ Θ A B, ἡ ἄρα N Θ πρὸς Θ B ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ N A πρὸς A B. ὡς δὲ ἡ N Θ πρὸς Θ B οὕτως ἡ B A



Quod si H Θ major sit semidiametro, aptetur Θ N semidiametro æqualis; jungaturque N A: & in circulo rursus ipsi Γ B ad rectos angulos ducantur B Λ, N Ξ. quoniam igitur N Θ B angulus non est major angulo Θ A B, N Θ ad Θ B minorem habet rationem quam N A ad A B. ut autem N Θ ad Θ B ita B Λ ad ad N Ξ: quare B Λ ad N Ξ minorem habebit rationem quam N A ad A B: majus igitur est triangulum æquicrure per A N triangulo æquicruri per axem: hinc sequitur triangulum æquicrure per axem dictorum triangulorum æquicrurum non esse maximum. sed demonstratum est generaliter non minimum esse: ergo nec maximum, neque minimum erit. quod erat demonstrandum.

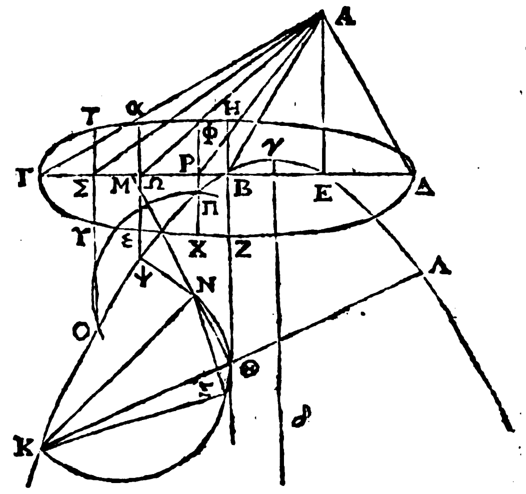
πρὸς N Ξ· ἡ ἄρα B Λ πρὸς N Ξ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ N A πρὸς A B· μεῖζον ἄρα τὸ διὰ τῆς A N ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς οὐ πάντων μέγιστόν ἐστι τῶν εἰρημένων ἰσοσκελῶν. ἐδείχθη δὲ καθόλου ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων, οὔτε ἐλάχιστον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SCHOLION.

SERENUS noster, quo pacto secandus sit conus rectus datus per verticem, ut triangulum dato triangulo æquale à sectione generetur, in octavâ quidem hujus rite ostendit; itidemque quodnam fuerit maximum triangulum in cono recto secandum prop. XII. demonstrat. Hîc autem locus erat idem in conis scalenis præstandi, illi tamen satis fuisse comperimus, triangulum æquicrure per Axem ex æquicruribus neque maximum neque minimum demonstrasse; majora nempe fieri triangula ad partes à quibus declinat Axis, minora vero ad eas ad quas inclinat. Solidum autem est problema, si quod aliud, in Cono scaleno dato triangulum æquicrure trianguloque dato æquale secare plano per verticem transeunte: nec absque locis solidis ejusdem problematis limites sive διορισμοὶ exhiberi possunt. Unde forsan *Sereno* visum fuit rem intactam potius prætermittere, quam multis & intricatis ambagibus, ad problemata solida more Veterum enucleanda necessariis, immisceri. Nequid autem hac ex parte deesset, nos ex hodiernâ Geometriâ desumptas tam problematis effectionem Geometricam quam ejusdem determinationem tradimus.

SIT igitur conus scalenus datus, cujus vertex A, basis circulus circa centrum B, axis vero A B, ac triangulum per axem circulo basis rectum sit A Γ Δ: & oporteat conum plano per verticem transeunte ita secare, ut faciat in superficie ejus triangulum æquicrure æquale triangulo dato; vel, quod idem est, quod datam habeat rationem ad triangulum æquicrure per axem, puta ut d ad a.

Puta factum, sitque triangulum æquicrure quæsitum, quod basim habeat rectam T Σ T ad rectos angulos ipsi Γ Δ, cathetum vero A Σ; ac demittatur ad basim coni normalis A E, quæ quidem cadet super diametrum Γ Δ. Jam pro quæsitâ B Σ scribatur z, datus vero Axis sit a, semidiameter basis coni B Γ vel B Δ sit b, B E autem intercepta inter centrum & normalem sit c: sitque area trianguli dati, sive rectangulum sub A Σ, Σ T, æqualis ipsi bd.



His positis [per 47. 1.] $bb - zz$ æquale erit quadrato ex Σ T, & quadratum ex A Σ [per 12. 2.] æquale erit quadratis ex A B, B Σ una cum duplo rectangulo Σ B E, hoc est ipsis $aa + zz + 2cz$: quibus in se ductis, fiet quadratum trianguli dati T A T (si ita loqui liceat) sive $bbdd$, his quantitatibus æquale $bbaa + bbzz + 2cbbz - aazz - z^4 - 2cz^3$: ac ordinatâ æquatione, $z^4 + 2cz^3 \begin{matrix} -bb \\ +aa \end{matrix} zz - 2bbcz$ æqualia erunt differentiæ ipsarum $bbdd$ & $bbaa$, sive rectangulo sub summâ & differentiâ dati trianguli bd & ipsius ba trianguli æquicruris per axem. Unde, per ea quæ ante viginti plus minus annos jam tum inventa prodidi, talis emergit problematis Compositio.

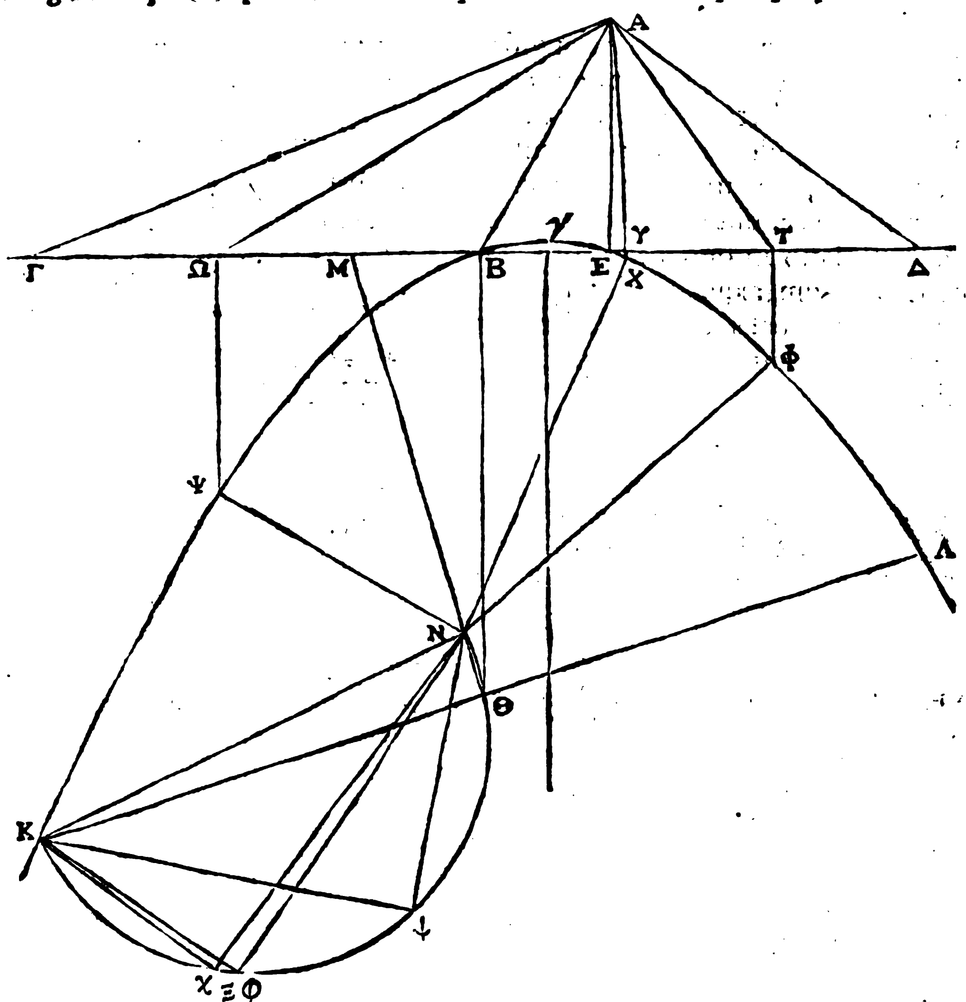
Ad centrum basis B, super diametrum Γ Δ, erigatur normalis B Θ ipsi Γ B æqualis; ac ponatur B M æqualis ipsi B E, & jungatur Θ M; cui ad angulos rectos ducatur K Θ Λ, ac fiant K Θ, Θ Λ ipsi Θ M æquales. Dein diametro B Θ, atque ordinatim applicatis K Θ, Θ Λ, describatur Parabola K B Λ. Fiat etiam ut duplum quadrati ex Γ B ad quadratum ex A E ita Θ M ad Θ N; ac jungatur K N, super quam describatur semicirculus K Θ N. Atque hactenus hæc omnia cuivis triangulo æquilateri in dato cono secando inserviunt. Capiatur jam K Ξ ad A B in ratione d ad a, sive quam habet triangulum secandum ad æquicrure per Axem; ac coaptetur in semicirculo K Θ N recta K Ξ. Denique centro N, radio N Ξ, describatur arcus circuli occurrens Parabolæ in punctis O, Π; à quibus Parabolæ diametro parallelæ ducantur O Σ, Π P, occurrentes ipsi Γ Δ in punctis Σ, P: ac jungantur A P, A Σ. Dico triangula æquicrura T A T, Φ A X per A Σ, A P ducta æqualia esse triangulo proposito, nempe rectangulo contento sub K Ξ & Γ B.

Demissâ autem de puncto N in Curvam Parabolæ normali N Ψ, ac ductâ Ψ Ω parallelâ Axi Parabolæ; si jungatur A Ω, erit triangulum æquicrure per A Ω transiens, sive triangulum α A ε maximum omnium æquicrurum in dato Cono secandorum: atque huic utrinque propiora majora erunt remotioribus. Quod si triangulum propositum majus fuerit triangulo illo per A Ω transeunte, problema impossibile erit, ac circulus Parabolam non attinget: hoc vero si minus fuerit, duo semper inveniri possunt triangula rem præstantia, ab utraque parte puncti Ω. Atque hic obiter observandum est, Parabolam modo dicto descriptam transire per punctum E, ita ut Axis γ δ ipsam B E secet bifariam; latusque rectum Axis æquale esse basis semidiametro Γ B vel B Θ.

Hæc

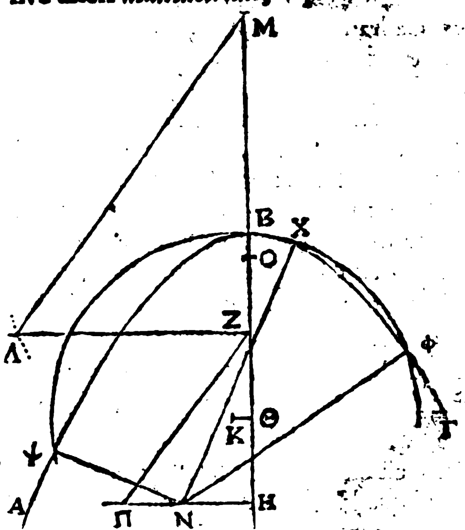
Hæc autem universim omni Cono accidunt. Verum sub certis conditionibus triangulum aliud maximum, atque insuper minimum, inter puncta B, Δ reperientur; cadentibus scilicet tribus normalibus de centro N in Curvam Parabolicam, ut N Ψ, N X, N Φ: ac si radius circuli N Ξ, modo jam dicto inventus, major fuerit quam N Φ, minor vero quam N X (quæ per 72. V^{ti}. Conicorum major est quam N Φ) quatuor diversa triangula æquicrura in dato Cono secari possunt, eidem proposito triangulo æqualia; hoc est rectangulo sub Γ B & K Ξ: quorum unum quidem basin habebit inter Υ, Δ, & alium inter Υ, T; reliquorum vero alterum inter Υ & Ω, alterum inter Ω & Γ.

Ductis autem Ψ Ω, X Υ, Φ T ipsi Γ Δ ad angulos rectos, junctisque A Ω, A Υ, A T, erit, per jam ostensa, triangulum æquicrure per A Ω omnium æquicrurum maximum; quodque per A Υ ducitur, non



simpliciter minimum erit: sed quod minus sit iis quæ ab utroque latere eidem adjacent, ita ut inter Ω & T ipsi Υ propiora remotioribus sint minora. Triangulum vero æquicrure per T majus erit quovis triangulo æquicruri inter Υ & Δ basim habente. Aptatis autem in semicirculo K Θ N rectis ipsis N Ψ, N X, N Φ æqualibus, ut N ψ, N χ, N φ: erit rectangulum sub semidiametro basis coni Γ B, & K ψ æquale triangulo *maximo* æquicruri per A Ω; quod sub Γ B & K χ æquale erit *minimo* per A Υ ducto; quod vero sub Γ B & K φ æquicruri per A T ducto, sive alteri *maximorum*, æquabitur.

Restat jam ut ostendamus quomodo de puncto dato cathetus demitti possit in Curvam Parabolæ; & quo limite dignoscatur utrum tres catheti vel una tantum fuerit. Ac primum quidem docet *Apollonius* in V^{to}. Conicorum prop. 62. ope Hyperbolæ: sed nostro instituto majus conveniet idem per circulum præstare. Sit igitur Parabolæ A B Γ Axis B H, ac sit punctum N à quo cathetos demittere oporteat ad Curvam Parabolicam. Ducatur N H Axi normalis, ac fiat B Z æqualis dimidio lateris recti Axis, & bisecetur Z H in Θ, & erigatur normalis K Θ quartæ parti ipsius N H æqualis: dein circulus centro K radio K B descriptus occurret Parabolæ ad ea Curvæ puncta in quæ cadunt normales; puta ad Ψ, X, Φ, vel ad solum Ψ, uti diximus. Ipsius autem N H magnitudo, ut tres sint hujusmodi intersectiones, ex 51. V^{ti}. Conicorum limites habet, idque constructione satis facili. Aliter autem hoc modo determinabitur. Producatur H B ad M, ita ut Z M æqualis sit $\frac{27}{16}$ lateris recti Parabolæ; ac erectâ super Axem normali Z Λ, bisecetur H M in O, ac circulus centro O radio O H descriptus occurret



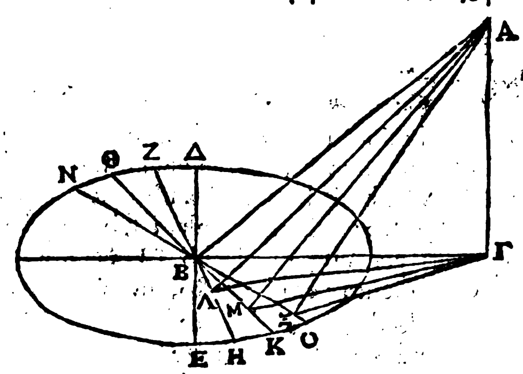
curret ipsi Z Λ in puncto Λ. jungatur M Λ, cui parallela ducatur recta Z Π, occurrens ipsi N H in puncto Π. Dico si punctum N Axi propius est quam Π; tres Catheti in Curvam demitti possunt; si remotius, non nisi unum.

Horum omnium demonstrationem, cum in nimiam excresceret molem, totamque fere solidam Geometriam postularet, in præsentia omittendam censeo. Ex iis tamen quæ in quinto Conicorum habentur, & quæ in *Philosoph. Transact. Num.* 188 & 190, tradidimus, non multo opere comprobari poterunt.

Prop. XL. *Theor.*

In omni cono scaleno, cum triangula per axem possint esse infinita: rectæ omnes, quæ à vertice coni ad bases dictorum triangulorum perpendiculares ducuntur, in unius circuli circumferentiam cadunt; qui quidem est in eodem plano in quo basis coni, & circa diametrum æqualem interjectæ inter centrum basis & perpendicularem à vertice coni ad dictum planum demissam.

SIT conus scalenus, cujus vertex punctum A, basis circulus circa centrum B, & axis A B; à puncto autem A ad basis planum perpendicularis sit A Γ, & jungatur Γ B, cui per punctum B ad rectos angulos ducatur Δ E in eodem plano; & ducantur utcunque rectæ Z H, K Θ: erunt itaque Δ E, Z H, Θ K bases triangulorum per axem transeuntium. itaque à puncto A ad ipsas Δ E, Z H, Θ K perpendiculares ducantur A B, A Λ, A M. axem vero A B perpendicularem esse ad Δ E, & perpendiculares A Λ, A M ad partes B H, B K cadere, deinceps ostendetur. dico puncta B, Λ, M in unius circuli circumferentia esse, cujus diameter est recta B Γ.



Jungantur enim Γ Λ, Γ M. & quoniam A Λ perpendicularis est ad Z H; erit angulus Z Λ A rectus. rursus quoniam A Γ ad basis planum est perpendicularis, anguli A Γ B, A Γ Λ, A Γ M recti erunt: quare cum quadratum ex A B æquale sit quadratis ex B Λ, Λ A, & quadratum ex Λ A quadratis ex Λ Γ, Γ A æquale; erit quadratum ex A B æquale tribus quadratis ex B Λ, Λ Γ, Γ A. idem autem est æquale quadratis ex B Γ, Γ A: quadrata igitur ex B Γ, Γ A quadratis ex B Λ, Λ Γ, Γ A æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex Γ A; erit reliquum quadratum ex B Γ æquale quadratis ex B Λ, Λ Γ: est igitur [per 48. 1.] angulus B Λ Γ in basis plano rectus. rursus quoniam quadratum ex A B æquale est quadratis ex B M, M A, & quadratum ex M A æquale quadratis ex M Γ, Γ A; erit quadratum ex A B æquale quadratis ex B M, M Γ, Γ A. sed & æquale est quadratis ex B Γ, Γ A: ergo, sublato communi quadrato ex Γ A, erit quadratum ex B Γ quadratis ex B M, M Γ æquale: rectus igitur angulus

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Παντὸς κώνου σκαληνοῦ δυνάμει ἀπείρων ὄντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων· αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰς βάσεις τῶν τριγώνων ἀγόμεναι κάθετοι πᾶσαι ἐφ' ἑνὸς κύκλου περιφέρειαν πίπτουσιν, ὄντος τε ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, καὶ περὶ διάμετρον τὴν ἐν τῷ εἰρημένῳ ἐπιπέδῳ ἀπολαμβανομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τοῦ τε κέντρου τῆς βάσεως καὶ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καθέτου.

ΕΣΤΩ κῶνος σκαληνὸς, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, καὶ ἄξων ὁ Α Β, ἀπὸ δὲ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ἡ Α Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ Β, τῇ δὲ Γ Β ἀπὸ τοῦ Β πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἡ Δ Ε, τυχοῦσαι δὲ αἱ Ζ Η, Κ Θ· γίνονται δὴ αἱ Δ Ε, Ζ Η, Θ Κ, βάσεις τριγώνων διὰ τοῦ ἄξονος ἠγμένων. ἤχθωσαν μὲν οὖν κάθετοι ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὰς Δ Ε, Ζ Η, Θ Κ εὐθείας αἱ Α Β, Α Λ, Α Μ. ὅτι γὰρ ὁ μὲν Α Β ἄξων πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ Δ Ε, αἱ δὲ Α Λ, Α Μ κάθετοι ἐπὶ τὰ Β Η, Β Κ μέρη πίπτουσιν, ἑξῆς δειχθήσεται. λέγω δὴ ὅτι τὰ Β καὶ Λ καὶ Μ σημεῖα ἐφ' ἑνὸς κύκλου περιφερείας ἐστὶν, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ Β Γ εὐθεῖα.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ Γ Λ, Γ Μ. ἐπεὶ οὖν ἡ Α Λ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν Ζ Η, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ Ζ Λ Α γωνία. πάλιν ἐπεὶ ἡ Α Γ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, ὀρθαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ Α Γ Β, Α Γ Λ, Α Γ Μ γωνίαι· ὥστε ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς Α Β τοῖς ἀπὸ τῶν Β Λ, Λ Α ἴσον, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς Λ Α τοῖς ἀπὸ Λ Γ, Γ Α ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Α Β τοῖς ἀπὸ Β Λ, Λ Γ, Γ Α ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τοῖς ἀπὸ Β Γ, Γ Α ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς Β Α· τὰ ἄρα ἀπὸ τῆς Β Γ, Γ Α τοῖς ἀπὸ Β Λ, Λ Γ, Γ Α ἴσα ἐστί. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ Γ Α· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ Β Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Β Λ, Λ Γ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ Β Λ Γ ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς Α Β ἴσον τοῖς ἀπὸ Β Μ, Μ Α, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς Μ Α ἴσον τοῖς ἀπὸ Μ Γ, Γ Α· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Α Β ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ Β Μ, Μ Γ, Γ Α. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Α Β ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν Β Γ, Γ Α, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς Γ Α· τὸ ἄρα ἀπὸ Β Γ ἴσον τοῖς ἀπὸ Β Μ, Μ Γ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ

Β Μ Γ

ΒΜΓ γωνία ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ· τὰ ἄρα Β,Λ,Μ,Γ σημεῖα ἐπὶ περιφερείας ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. ὁμοίως οὖν κἂν ὁσασοῦν ἀγάγωμεν, ὃν εἰρήκαμεν τρόπον, ὥσπερ τὴν ΝΟΞ, τὸ αὐτὸ συμβαῖνον δειχθήσεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅτι δὲ ὁ μὲν ΑΒ ἄξων πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΔΕ, αἱ δὲ ΑΛ, ΑΜ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΒΗ, ΒΚ μέρη πίπτουσιν, οὕτω δεικτέον.

Ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΑΔ, ΑΕ, ἔσται τὸ ΔΑΕ τρίγωνον ἰσοσκελές· καὶ διὰ τοῦτο ἡ διὰ τῆς διχοτομίας τῆς βάσεως καὶ τῆς Α κορυφῆς ἀγομένη πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ ΔΕ. ἐπεζεύχθωσαν δὴ καὶ αἱ ΓΖ, ΓΗ, ΑΖ, ΑΗ. ἐπεὶ οὖν ἀμβλεῖα μὲν ἡ ὑπὸ ΖΒΓ γωνία, ὀξεῖα δὲ ἡ ὑπὸ ΓΒΗ· μείζων ἄρα ἡ ΖΓ τῆς ΓΗ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΗ μεῖζον· καὶ κοινοῦ ἄρα προστεθέντος τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τὸ ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῶν ΗΓ, ΓΑ μεῖζόν ἐστι, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΑ τοῦ ἀπὸ ΑΗ μεῖζόν ἐστι· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΑ τῆς ΑΗ. ἐπεὶ οὖν αἱ μὲν ΖΒ, ΒΗ ἴσαι, κοινὴ δὲ ἡ ΒΑ, μείζων δὲ ἡ ΖΑ τῆς ΑΗ· ἡ μὲν ἄρα ὑπὸ ΖΒΑ γωνία ἀμβλεῖά ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ ὀξεῖα· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ ἐπὶ τὰ ΒΗ μέρη πίπτει. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

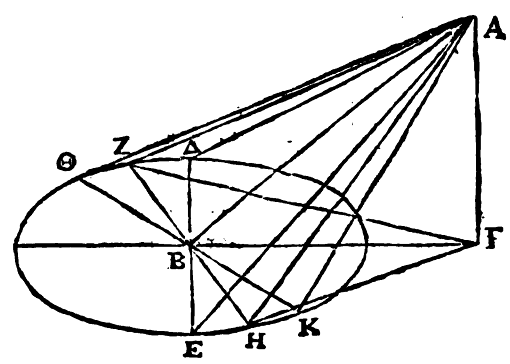
Πόρισμα.

Ὥστε φανερὸν ὅτι αἱ προειρημέναι κάθετοι, ἀπὸ μετεώρου τοῦ Α σημείου ἐπὶ κύκλου περιφέρειαν πίπτουσαι, κατ' ἐπιφανείας οἰσθήσονται κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ ὑπὸ τῶν πτώσεων τῶν καθέτων γραφόμενος κύκλος, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ ἐξ ἀρχῆς κώνῳ.

est & ΒΜΓ in basis plano; quare puncta Β,Λ,Μ,Γ sunt in circumferentia circuli, cujus diameter est ΒΓ. similiter & ductis aliis quibuscunque rectis, ut ΝΟΞ, idem evenire demonstrabimus. quod erat demonstrandum.

Axem vero ΑΒ perpendicularem esse ad ipsam ΔΕ, & perpendiculares ΑΛ, ΑΜ cadere ad partes ΒΗ, ΒΚ, hoc modo ostendemus.

Junctis enim ΑΔ, ΑΕ, erit ΔΑΕ triangulum æquicrure; & ideo recta, quæ à vertice Α ad punctum quo bisecatur basis ducitur, perpendicularis erit ad ΔΕ. jungantur ΓΖ, ΓΗ, ΑΖ, ΑΗ. & quoniam angulus ΖΒΓ obtusus est, acutus autem ΓΒΗ; erit recta ΖΓ major quam ΓΗ, & quadratum ex ΖΓ majus quadrato ex ΓΗ: ergo, communi apposito quadrato ex ΑΓ, quadrata ex ΖΓ, ΓΑ quadratis ex ΗΓ, ΓΑ majora sunt, hoc est quadratum ex ΖΑ majus quadrato ex ΑΗ: major igitur est ΖΑ quam ΑΗ. sunt autem ΖΒ, ΒΗ inter se æquales, & communis est ΒΑ; ac ΖΑ major quam ΑΗ: ergo angulus ΖΒΑ obtusus est, & ΑΒΗ acutus. ducta igitur à puncto Α ad ΖΗ perpendicularis ad partes ΒΗ cadit. eodem modo & in aliis demonstrabitur.



Corollarium.

Quare constat dictas perpendiculares, à puncto sublimi ad circuli circumferentiam cadentes, in coni superficie ferri; cujus quidem basis est circulus à casu perpendicularium descriptus, & vertex idem qui est primi coni vertex.

SCHOLION.

Hinc manifestum est quod, eodem modo quo in Scholio præcedente fecimus in Cono Scaleno triangulum æquicrure triangulo dato æquale, etiam secari possit triangulum Scalenum dato æquale, cujus basis parallela sit datæ cuilibet diametro basis Coni, puta ipsi ΘΚ. Concipiatur enim alius Conus cujus vertex Α, Axis ΑΜ, ac basis circulus, priori æqualis & in eodem plano, circa centrum Μ, in quod cadit normalis à Vertice Α ad ΘΚ demissa, ita ut planum trianguli ΑΜΓ rectum sit super basis planum. In hoc inquam Cono triangula æquicrura ubique æqualia erunt Scalenis, eodem plano per verticem transeunte in priori Cono sectis; modo communis planorum basis & trianguli sectio parallela sit diametro ΘΚ: quemadmodum ad 26^{am} & 27^{am} hujus ostensum est in triangulis bases ipsi ΒΓ parallelas habentibus; easdem enim habent tam bases quam altitudines.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐν κώνῳ σκαληνῷ, δοθέντος τινὸς τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων, ὃ μήτε μέγιστόν ἐστι μήτε ἐλάχιστον· εὑρεῖν ἕτερον τρίγωνον διὰ τοῦ ἄξονος, ὃ μετὰ τοῦ δοθέντος ἴσον ἔσται συναμφοτέρῳ τῷ μεγίστῳ καὶ τῷ ἐλαχίστῳ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος.

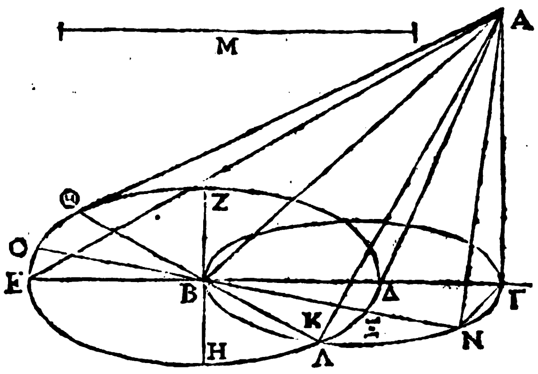
Ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος,

Prop. XLI. *Probl.*

In cono scaleno, dato aliquo triangulo per axem, quod neque maximum sit neque minimum: invenire aliud triangulum per axem, quod una cum dato utrisque maximo & minimo per axem sit æquale.

Sit conus scalenus, cujus vertex punctum Α, basis circulus circa centrum Β, axis autem ΑΒ, A B, & A Γ ad basis planum perpendicularis; ducaturque per Γ & centrum B recta Γ Δ B E, cui ad rectos angulos sit Z B H: triangulorum igitur per axem transeuntium maximum quidem erit illud, cujus basis Z H & A B altitudo, ut sæpius demonstratum est: minimum vero, cujus basis E Δ & altitudo A Γ. sit datum triangulum per axem quod basim habeat Θ K, altitudinemque A Λ: & oporteat aliud triangulum per axem invenire, quod una cum eo, cujus basis Θ K & altitudo A Λ, utrisque maximo & minimo sit æquale.

Itaque quoniam A Λ perpendicularis est ad basim Θ K, erit punctum Λ in circumferentia circuli, cujus diameter est B Γ, per proxime demonstrata. describatur circulus B Λ Γ, & quo rectæ B A, A Γ simul sumptæ superant A Λ, eidem sit æqualis M. quoniam igitur earum quæ à puncto A ad circumferentiam B Λ Γ ducuntur maxima quidem est A B, minima vero A Γ; erit A Λ minor quam A B, & major quam A Γ. sed A Λ una cum M est æqualis utrisque B A, A Γ simul, quarum A Λ est minor quam A B: ergo M quam A Γ major erit; & quadratum ex M majus quadrato ex A Γ. sint quadrato ex M æqualia quadrata ex A Γ, Γ N, & rectâ Γ N in circulo aptatâ, ducatur N Ξ B O, & jungatur N A: erit itaque angulus B N Γ in semicirculo rectus. quadratum autem ex A B æquale est quadratis ex B Γ, Γ A simul; & quadratum ex B Γ æquale quadratis ex B N, N Γ simul: quare quadratum ex A B quadratis ex B N, N Γ, Γ A æquale erit. è quibus, quadratis ex N Γ, Γ A æquale est quadratum ex N A: quadratum igitur ex A B est æquale quadratis ex B N, N A: & idcirco angulus B N A rectus est: quapropter A N est altitudo trianguli per axem, cujus basis O B Ξ. & quoniam quadratum ex M est æquale quadratis ex A Γ, Γ N, & quadratum ex A N eisdem quadratis æquale; erit recta M ipsi A N æqualis: quare utræque Λ A, A N æquales sunt utrisque B A, A Γ, & rectangulum contentum sub diametro & utrisque Λ A, A N æquale ei quod sub diametro & utrisque B A, A Γ continetur. sed rectangulum sub diametro & utrisque B A, A Γ duplum est trianguli maximi & minimi, quorum bases Z H, E Δ & altitudines B A, A Γ; rectangulum vero sub diametro & utrisque Λ A, A N duplum est triangulorum, quorum bases Θ K, O Ξ, & altitudines Λ A, A N: triangula igitur, quorum bases Θ K, O Ξ, & altitudines Λ A, A N, æqualia sunt triangulis maximo & minimo per axem. datum autem est triangulum cujus basis Θ K; ergo triangulum per axem cujus basis O Ξ inventum est, quod, una cum dato cujus basis Θ K, utrisque maximo & minimo æquale erit.



ἄξων δὲ ὁ A B, καὶ ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον κάθετος ἡ A Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ καὶ τοῦ B κέντρου ἤχθω ἡ Γ Δ B E εὐθεῖα, ἡ πρὸς ὀρθὰς τῇ Z B H· τῶν ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων μέγιστον μὲν ἔσται, ὡς ἐδείχθη πολλάκις, οὗ βάσις μὲν ἡ Z H, ὕψος δὲ ἡ A B, ἐλάχιστον δὲ, οὗ βάσις μὲν ἡ E Δ, ὕψος δὲ ἡ A Γ. ἔστω δὴ τὸ δοθὲν τρίγωνον διὰ τοῦ ἄξονος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ἡ Θ K, ὕψος δὲ ἡ A Λ· καὶ δέον ἔστω ἕτερον τρίγωνον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος εὑρεῖν, ὃ μετὰ τοῦ τριγώνου, οὗ βάσις μὲν ἡ Θ K, ὕψος δὲ ἡ A Λ, ἴσον ἔσται συναμφοτέρῳ τῷ μεγίστῳ καὶ τῷ ἐλαχίστῳ.

Ἐπεὶ ἡ A Λ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν Θ K βάσιν, τὸ ἄρα Λ σημεῖον ἐπὶ κύκλου περιφερείας ἐστὶν, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ B Γ, διὰ τὸ προδειχθέν. γεγράφθω δὴ ὁ B Λ Γ κύκλος, καὶ ᾧ μείζων ἐστὶ συναμφότερος ἡ B A, A Γ τῆς A Λ, τούτῳ ἴση ἔστω ἡ M. ἐπεὶ οὖν τῶν ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν B Λ Γ περιφέρειαν ἀγομένων εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἡ A B, ἐλαχίστη δὲ ἡ A Γ· ἡ ἄρα A Λ ἐλάττων μέν ἐστι τῆς A B, μείζων δὲ τῆς A Γ· ἀλλ᾽ ἡ Λ A μετὰ τῆς M ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ B A, A Γ, ὧν ἡ A Λ ἐλάττων τῆς A B· ἡ ἄρα M τῆς A Γ μείζων ἐστί· καὶ τὸ ἀπὸ M ἄρα τοῦ ἀπὸ A Γ μεῖζόν ἐστιν. ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς M ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν A Γ, Γ N, καὶ τῆς Γ N ἐναρμοσθείσης εἰς τὸν κύκλον, διήχθω ἡ N Ξ B O, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ N A· ἡ ἄρα ὑπὸ B N Γ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς A B ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ B Γ, Γ A, τὸ δὲ ἀπὸ B Γ ἴσον τοῖς ἀπὸ B N, N Γ· τὸ ἄρα ἀπὸ A B ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ B N, N Γ, Γ A, ὧν τοῖς ἀπὸ N Γ, Γ A τὸ ἀπὸ N A ἴσον ἐστί· τὸ ἄρα ἀπὸ A B τοῖς ἀπὸ B N, N A ἴσον ἐστί· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ B N A γωνία· ἡ A N ἄρα ὕψος ἐστὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ O B Ξ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς M ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ A Γ, Γ N, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς A N ἴσον τοῖς ἀπὸ A Γ, Γ N· ἴση ἄρα ἡ M τῇ A N· ὥστε καὶ συναμφότερος ἡ Λ A, A N συναμφοτέρῳ τῇ B A, A Γ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς Λ A, A N τῷ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς B A, A Γ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς B A, A Γ διπλάσιόν ἐστι τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου τριγώνου, ὧν αἱ βάσεις μὲν αἱ Z H, E Δ, ὕψη δὲ αἱ B A, A Γ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς Λ A, A N διπλάσιόν ἐστι τῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν αἱ Θ K, O Ξ, ὕψη δὲ αἱ Λ A, A N· τὰ ἄρα τρίγωνα, ὧν βάσεις μὲν αἱ Θ K, O Ξ, ὕψη δὲ αἱ Λ A, A N, ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἐλαχίστῳ καὶ τῷ μεγίστῳ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος. καὶ ἔστι τὸ δοθὲν τὸ ἐπὶ τῆς Θ K· εὕρηται ἄρα τρίγωνον διὰ τοῦ ἄξονος τὸ ἐπὶ τῆς O Ξ, ὃ μετὰ τοῦ δοθέντος τοῦ ἐπὶ τῆς Θ K ἴσον ἐστὶ τῷ τε μεγίστῳ καὶ τῷ ἐλαχίστῳ.

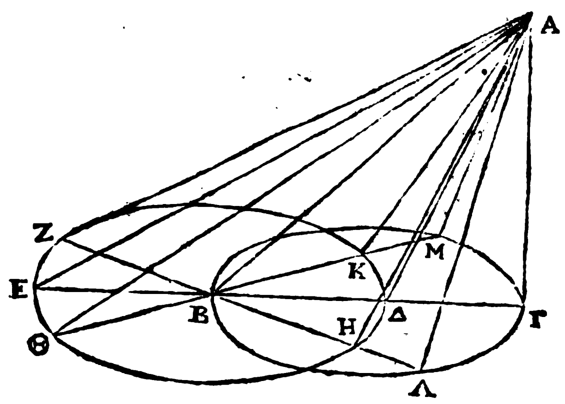
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν δύο τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων αἱ βάσεις ἴσας περιφερείας ἀπολαμβάνωσι πρὸς τῇ διὰ τῆς καθέτου διαμέτρῳ· τὰ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσται. καλείσθω δὲ ὁμοταγῆ.

Ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, καὶ ἄξων ὁ ΑΒ, κάθετος δὲ ἐπὶ τὴν βάσιν ἡ ΑΓ, ἡ δὲ διὰ τοῦ Γ σημείου τῆς καθέτου διάμετρος ἡ ΓΔΒΕ· διήχθωσαν δὲ αἱ ΖΒΗ, ΘΒΚ ἴσας περιφερείας ἀπολαμβάνουσαι πρὸς τῷ Δ τὰς ΚΔ, ΔΗ· λέγω ὅτι τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα, ὧν βάσεις εἰσὶν αἱ ΖΗ, ΘΚ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Γεγράφθω περὶ τὴν ΒΓ διάμετρον κύκλος ὁ ΒΛΓΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΑΜ· κάθετοι ἄρα εἰσίν, ἡ μὲν ΑΛ ἐπὶ τὴν ΖΗ, ἡ δὲ ΑΜ ἐπὶ τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΛ ἴση ἐστίν, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΜΒ εὐθεῖα τῇ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΜ, ΜΒ, ἀλλὰ καὶ τοῖς ἀπὸ ΑΛ, ΛΒ· καὶ τὰ ἀπὸ ΑΜ, ΜΒ ἄρα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΛ, ΛΒ ἴσα ἐστίν, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΒ τῷ ἀπὸ ΒΛ ἴσον ἐστί· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΑ τῷ ἀπὸ ΑΛ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΛΑ τῇ ΑΜ. καί εἰσιν ὕψη τῶν τριγώνων, ὧν βάσεις εἰσὶν αἱ ΖΗ, ΘΚ· ἴσα ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν ΖΗ, ΘΚ βάσεων τρίγωνα διὰ τοῦ ἄξονος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Prop. XLII. *Theor.*

Si duorum triangulorum per axem bases abscindant æquales circumferentias, apud diametrum quæ per lineam perpendicularem ducitur: triangula inter se æqualia erunt. Vocentur autem *Triangula coordinata.*

SIT conus, cujus vertex punctum A, basis circulus circa centrum B, & axis AB; perpendicularis autem ad basim AΓ; & per Γ punctum, quo cadit perpendicularis, diameter sit ΓΔBE; ducanturque ZBH, ΘBK, quæ utrinque à puncto Δ æquales circumferentias KΔ, ΔH abscindant: dico triangula per axem, quorum bases sunt ZH, ΘK, inter se æqualia esse.

Describatur enim circa BΓ diametrum circulus BΛΓM, & jungantur AΛ, AM, quæ perpendiculares erunt, AΛ quidem ipsi ZH; AM vero ipsi ΘK. & quoniam angulus ΓBM æqualis est angulo ΓBΛ, recta MB ipsi BΛ æqualis erit. sed quadratum ex AB quadratis ex AM, MB est æquale, itemque æquale est quadratis ex AΛ, AB: ergo quadrata ex AM, MB æqualia sunt quadratis ex AΛ, ΛB; quorum quadratum ex MB est æquale quadrato ex BΛ: reliquum igitur quadratum ex MA æquale est quadrato ex AΛ; atque ipsa AΛ æqualis ipsi AM, quæ quidem sunt triangulorum altitudines, quorum bases ZH, ΘK: ergo triangula per axem super bases ZH, ΘK constituta inter se æqualia erunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὰ ὁμοταγῆ ἴσα τε καὶ ὅμοια ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω γὰρ, ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς, τὰ ΖΑΗ, ΘΑΚ τρίγωνα ὁμοταγῆ· λέγω ὅτι ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν ἀλλήλοις. ὅτι μὲν οὖν ἴσα ἐστὶν ἤδη δέδεικται· ὅτι δὲ ὅμοια νῦν δεικτέον.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ, ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων, ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν ἦκται τῆς βάσεως, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῖς ἀπὸ ΑΜ, ΜΒ, ἀλλὰ καὶ τοῖς ἀπὸ ΑΛ, ΛΒ ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ ΑΜ τῷ ἀπὸ ΑΛ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΒ τῷ ἀπὸ ΒΛ, καὶ ἡ ΜΒ εὐθεῖα τῇ ΒΛ ἴση· ὥστε καὶ ὅλη ἡ ΜΘ τῇ ΛΖ. ἴση δὲ καὶ ἡ ΜΑ τῇ ΛΑ· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα ἴσα ἐστί, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΖ τῷ ἀπὸ ΑΘ, καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΑΘ ἴση. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΑΚ τῇ ΑΗ δείκνυται ἴση. ἀλλὰ καὶ αἱ ΖΗ, ΘΚ βάσεις ἴσαι· τὰ ἄρα ΖΑΗ, ΘΑΚ τρίγωνα ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν ἀλλήλοις. δῆλον δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτῷ.

Prop. XLIII. *Theor.*

E triangulis per axem, quæ coordinata sunt & æqualia & similia erunt inter se.

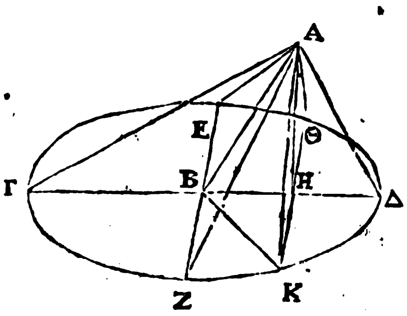
SINT triangula coordinata, ut in antecedenti figura, ZAH, ΘAK: dico & æqualia & similia inter se esse. æqualia enim jam ostensa sunt; similia esse nunc demonstrandum.

Quoniam AB, in utroque triangulorum, ducta est à vertice ad punctum quod basim bifariam dividit, & quadratum ex AB quadratis ex AM, MB est æquale; itemque æquale est quadratis ex AΛ, ΛB, quorum quadratum ex AM æquale est quadrato ex AΛ: erit reliquum quadratum ex MB quadrato ex BΛ æquale, & recta MB ipsi BΛ æqualis: quare & tota MΘ toti ΛZ. est autem MA æqualis ipsi ΛA: ergo & quæ ex ipsis fiunt quadrata inter se sunt æqualia, hoc est quadratum ex AZ æquale quadrato ex AΘ: & propterea erit AZ ipsi AΘ æqualis. similiter etiam AK ipsi AH æqualis demonstrabitur. sed & bases ZH, ΘK sunt æquales: triangula igitur ZAH, ΘAK & æqualia & similia inter se erunt. manifestum autem est & hujus theorematis conversum.

Prop. XLIV. *Theor.*

Si coni scaleni axis æqualis sit basis semidiametro: erit ut maximum triangulorum per axem transeuntium ad minimum, ita minimum ad æquicrure quod est ad rectos angulos basi.

SIT conus scalenus, cujus vertex punctum A, & axis recta A B semidiametro basis æqualis; basis vero sit circulus circa centrum B; & è triangulis per axem, ad rectos quidem angulos basi sit Γ A Δ, æquicrure autem E A Z: erit igitur E A Z maximum omnium quæ per axem transeunt, & Γ A Δ minimum ex iis, per prius demonstrata. ducatur à puncto A ad basim perpendicularis A H, quæ in diametrum Γ Δ cadet, & sit Θ H K ad rectos angulos ipsi Γ Δ; ducaturque planum faciens triangulum æquicrure Θ A K, quod ad basim rectum erit: dico ut triangulum E A Z, maximum scilicet eorum quæ per axem ducuntur, ad Γ A Δ minimum eorundem, ita Γ A Δ ad æquicrure triangulum Θ A K.



Quoniam enim triangulorum E A Z, Γ A Δ bases sunt æquales, diametri scilicet Γ Δ, E Z; altitudo autem trianguli E A Z est B A, & ipsius Γ A Δ altitudo A H: erit ut B A ad A H ita E A Z triangulum ad triangulum Γ A Δ. rursus quoniam triangulorum Γ A Δ, Θ A K eadem est altitudo A H; trianguli autem Γ A Δ basis est Γ Δ, hoc est E Z; & trianguli Θ A K basis Θ K: erit ut E Z ad Θ K ita triangulum Γ A Δ ad triangulum Θ A K. sed ut E Z ad Θ K ita earum dimidiæ, hoc est B K ad K H; & ut B K ad K H ita B A ad A H: (similia etenim sunt triangula orthogonia B H K, B H A) triangulum igitur Γ A Δ est ad triangulum Θ A K ut B A ad A H. erat autem & triangulum E A Z ad ipsum Γ A Δ ut B A ad A H; ergo ut E A Z triangulum ad triangulum Γ A Δ ita Γ A Δ ad triangulum Θ A K. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ΄.

Ἐὰν κώνου σκαληνοῦ ὁ ἄξων ἴσος ᾖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· ἔσται ὡς τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον οὕτως τὸ ἐλάχιστον πρὸς τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἰσοσκελές.

ΕΣΤΩ κῶνος σκαληνὸς, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A, ἄξων δὲ ἡ A B εὐθεῖα, ἴση οὖσα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ B κέντρον κύκλος, καὶ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὸ μὲν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἔστω τὸ Γ A Δ, τὸ δὲ ἰσοσκελὲς τὸ E A Z· μέγιστον μὲν ἄρα ἐστὶ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τὸ E A Z, ἐλάχιστον δὲ τὸ Γ A Δ, διὰ τὰ πρότερον δειχθέντα. ἤχθω οὖν ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος, πίπτει δὴ ἐπὶ τὴν Γ Δ διάμετρον. ἔστω οὖν ἡ A H, καὶ διήχθω ἡ Θ H K πρὸς ὀρθὰς τῇ Γ Δ, καὶ διεκβεβλήσθω τὸ ἐπίπεδον ποιοῦν τὸ Θ A K τρίγωνον, ἰσοσκελὲς ὂν καὶ ὀρθὸν πρὸς τὴν βάσιν· λέγω δὴ ὅτι ὡς τὸ E A Z μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς τὸ Γ A Δ ἐλάχιστον, οὕτω τὸ Γ A Δ πρὸς τὸ Θ A K ἰσοσκελές.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν E A Z, Γ A Δ τριγώνων αἱ μὲν βάσεις ἴσαι εἰσὶν αἱ Γ Δ, E Z διάμετροι, ὕψος δὲ τοῦ μὲν E A Z ἡ B A, τοῦ δὲ Γ A Δ ἡ A H· ὡς ἄρα ἡ B A πρὸς A H οὕτως τὸ E A Z τρίγωνον πρὸς τὸ Γ A Δ. πάλιν ἐπεὶ τῶν Γ A Δ καὶ Θ A K τριγώνων κοινὸν ὕψος ἐστὶν ἡ A H, βάσις δὲ τοῦ μὲν Γ A Δ ἡ Γ Δ, τουτέστι ἡ E Z, τοῦ δὲ Θ A K ἡ Θ K· ὡς ἄρα ἡ E Z πρὸς Θ K οὕτως τὸ Γ A Δ τρίγωνον πρὸς τὸ Θ A K. ἀλλ᾽ ὡς ἡ E Z πρὸς Θ K οὕτως αἱ ἡμίσειαι πρὸς ἀλλήλας, τουτέστιν ἡ B K πρὸς K H, ὡς δὲ ἡ B K πρὸς K H οὕτως ἡ B A πρὸς A H· (ὅμοια γὰρ τὰ B H K, B H A τρίγωνα ὀρθογώνια) καὶ τὸ ἄρα Γ A Δ τρίγωνον πρὸς τὸ Θ A K ἐστὶν ὡς ἡ B A πρὸς A H. ἦν δὲ καὶ τὸ E A Z πρὸς τὸ Γ A Δ ὡς ἡ B A πρὸς A H· ὡς ἄρα τὸ E A Z τρίγωνον πρὸς τὸ Γ A Δ, οὕτως τὸ Γ A Δ πρὸς τὸ Θ A K. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLV. *Theor.*

RURSUS sit ut triangulum E A Z ad Γ A Δ ita Γ A Δ ad Θ A K: dico axem B A semidiametro basis æqualem esse.

Quoniam enim ut triangulum E A Z ad Γ A Δ ita B A ad A H; & ut E A Z ad Γ A Δ ita Γ A Δ ad Θ A K erit ut Γ A Δ ad Θ A K ita B A ad A H. ut autem Γ A Δ ad Θ A K ita E Z ad Θ K, hoc est B K ad K H: ergo ut B A ad A H ita B K ad K H: quare triangula B A H, B K H sunt similia, communis autem B H, atque homologæ A B, B K: recta igitur A B ipsi B K, hoc est semidiametro basis, æqualis erit. quod ostendendum proponebatur.

Simul vero & ostensum est, ex utraque demonstratione, triangulum E A Z simile esse tri-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με΄.

ΠΑΛΙΝ ἔστω ὡς τὸ E A Z πρὸς τὸ Γ A Δ οὕτως τὸ Γ A Δ πρὸς τὸ Θ A K· λέγω ὅτι ἡ B A ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς τὸ E A Z πρὸς τὸ Γ A Δ οὕτως ἡ B A πρὸς A H, ὡς δὲ τὸ E A Z πρὸς τὸ Γ A Δ οὕτως τὸ Γ A Δ πρὸς τὸ Θ A K· καὶ τὸ ἄρα Γ A Δ πρὸς τὸ Θ A K ἐστὶν ὡς ἡ B A πρὸς A H. ὡς δὲ τὸ Γ A Δ πρὸς τὸ Θ A K οὕτως ἡ E Z πρὸς Θ K, τουτέστιν ἡ B K πρὸς K H· καὶ ὡς ἄρα ἡ B A πρὸς A H οὕτως ἡ B K πρὸς K H. ὅμοια ἄρα τὰ B A H, B K H τρίγωνα, καὶ κοινὴ ἡ B H, καὶ ὁμόλογοι αἱ A B, B K· ἴση ἄρα ἡ A B τῇ B K τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

Καὶ συναπεδείχθη, καθ᾽ ἑκατέραν τῶν δείξεων, ὅτι τὸ E A Z τρίγωνον τῷ Θ A K ὅμοιόν ἐστιν· ὡς

γὰρ

γὰρ ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ. καὶ ἔτι τὸ μὲν ΕΑΖ πρὸς τὸ ΘΑΚ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ· καὶ ἔστι τὸ ΓΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΘΑΚ ὡς ἡ ΓΔ, τουτέστιν ὡς ἡ ΕΖ, πρὸς ΘΚ· ὥστε τὸ ΕΑΖ πρὸς τὸ ΘΑΚ διπλασίονα λόγον ἔχει τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν ΕΖ, ΘΚ· ὅμοια ἄρα τὰ ΕΑΖ, ΘΑΚ.

angulo ΘΑΚ: etenim ΕΖ est ad ΘΚ sicut ΒΑ ad ΑΗ. habet quoque triangulum ΕΑΖ ad triangulum ΘΑΚ duplicatam rationem ejus quam triangulum ΓΑΔ ad triangulum ΘΑΚ: est autem triangulum ΓΑΔ ad triangulum ΘΑΚ ut ΓΔ, hoc est, ut ΕΖ ad ΘΚ: quare triangulum ΕΑΖ ad triangulum ΘΑΚ duplicatam rationem habebit laterum homologorum, nempe ipsarum ΕΖ,ΘΚ; & idcirco [ex conversa 19. 6.] triangula ΕΑΖ, ΘΑΚ inter se similia erunt.

Πόρισμα.

Ὥστε φανερὸν ὅτι ἐὰν κώνου σκαληνοῦ ὁ ἄξων ἴσος ᾖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἰσοσκελὲς ὅμοιον ἔσται τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ· καὶ ἀντιστρόφως, ὅτι ἐὰν τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἰσοσκελὲς ὅμοιον ᾖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ, ὁ ἄξων τοῦ κώνου ἴσος ἔσται τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως. καὶ τοῦτο γὰρ εὐκατανόητον ἐκ τῶν ἤδη δειχθέντων.

Corollarium.

Ex quibus perspicuum est, si coni scaleni axis æqualis sit basis semidiametro, triangulum æquicrure ad rectos angulos basi simile esse triangulo æquicruri per axem: & è contra, si triangulum æquicrure ad rectos angulos basi simile sit triangulo per axem æquicruri, coni axem semidiametro basis æqualem esse: id quod ex jam demonstratis facile intelligi potest.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛʹ.

Ἐὰν κύκλος κύκλον τέμνῃ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ γραφόμενος, ἀπὸ δὲ τῆς ἑτέρας αὐτῶν τομῆς διαχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὴν διὰ τοῦ κέντρου περιφέρειαν, καὶ προσεκβληθῶσιν ἐπὶ τὴν τοῦ ἑτέρου κύκλου περιφέρειαν· ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα, μεταξὺ τῆς τοῦ ἑτέρου κυρτῆς περιφερείας καὶ τῆς κοίλης τοῦ ἑτέρου, ἴση ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῆς διαχθείσης εὐθείας καὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου περιφερείας ἐπὶ τὴν ἑτέραν κοινὴν τομὴν τῶν κύκλων ἐπιζευγνυμένῃ.

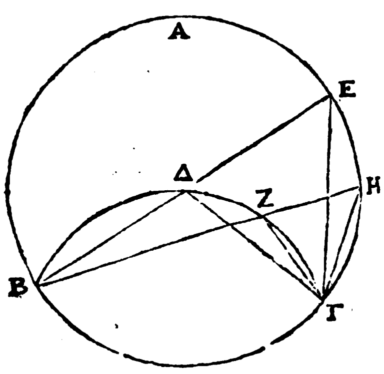
Prop. XLVI. *Theor.*

Si circulus circulum secet per centrum ipsius descriptus; & ab altera eorum interfectione ducantur rectæ quæ secent circumferentiam per centrum transeuntem, & deinde ad alterius circuli circumferentiam producantur: recta linea inter convexam alterius circuli circumferentiam & concavam prioris interjecta, æqualis erit ei quæ à communi sectione rectæ ductæ & circumferentiæ per centrum ad alteram communem circulorum intersectionem perducitur.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ, διὰ δὲ τοῦ Δ κέντρου γεγράφθω τις κύκλος ὁ ΒΔΓ, τέμνων τὸν ἐξ ἀρχῆς κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα, καὶ διήχθωσαν εὐθεῖαι διὰ μὲν τοῦ Δ ἡ ΒΔΕ, τυχοῦσα δὲ ἡ ΒΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΓ, ΖΓ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΖΓ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΓ, ΓΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΓ. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΓΖΗ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΓ τῇ ὑπὸ ΖΗΓ ἴση, διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβηκέναι· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἴση, καὶ ὅμοια τὰ τρίγωνα. ἰσοσκελὲς δὲ τὸ ΓΔΕ· ἰσοσκελὲς ἄρα καὶ τὸ ΓΖΗ· ἴση ἄρα ἡ ΗΖ τῇ ΖΓ. ὁμοίως δὲ, κἂν ἄλλαι διαχθῶσι, δειχθήσεται τὰ τῆς προτάσεως.

Sit circulus ΑΒΓ circa centrum Δ; & per Δ alius circulus ΒΔΓ describatur, secans priorem circulum in punctis Β, Γ; ducanturque rectæ lineæ, per Δ quidem ΒΔΕ, alia vero utcunque ΒΖΗ; & jungantur ΔΓ, ΖΓ: dico rectam ΖΗ ipsi ΖΓ æqualem esse.



Jungantur enim ΕΓ, ΓΗ. & quoniam angulus ΒΔΓ æqualis est angulo ΒΖΓ, erit reliquus ΕΔΓ reliquo ΓΖΗ æqualis. sed & æqualis est ΔΕΓ ipsi ΖΗΓ, quod in eadem circumferentia consistat: reliquus igitur est æqualis reliquo, & triangula inter se similia sunt. æquicrure autem est triangulum ΓΔΕ; ergo & æquicrure est ΓΖΗ, & recta ΗΖ ipsi ΖΓ æqualis. similiter & in aliis ductis idem demonstrabitur.

Πάλιν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ὑποκείσθω τῇ μὲν ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ, τῇ δὲ ΓΖ ἡ ΖΗ, τῆς ΒΔΓ περιφερείας κατὰ τὸ Δ δίχα τετμημένης· λέγω ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ ὁποτερῳοῦν τῷ ΔΒ, ΔΓ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ε καὶ Η σημείων. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ

Rursus in eadem figura ponatur ΔΕ ipsi ΓΔ æqualis, & ΖΗ æqualis ipsi ΓΖ, circumferentiâ ΒΔΓ bifariam in puncto Δ divisâ: dico circulum centro Δ & intervallo ΔΒ vel ΔΓ descriptum per puncta Ε, Η transire. quoniam enim angulus ΕΔΓ æqualis est angulo ΗΖΓ,

&

& sunt triangula ΒΔΓ, ΗΖΓ æquicrura: anguli ΒΕΓ, ΒΗΓ inter se æquales erunt; & propterea in eodem circulo continebuntur anguli ΒΕΓ, ΒΗΓ: circulus igitur, centro Δ & intervallo ΔΒ descriptus, per puncta Ε, Η transibit. quod erat demonstrandum.

ΗΖΓ, καὶ ἔστιν ἰσοσκελῆ τὰ ΕΔΓ, ΗΖΓ τρίγωνα· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ· ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα κύκλῳ αἱ ὑπὸ ΒΕΓ, ΒΗΓ γωνίαι· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Δ διαστήματι δὲ τῷ ΔΒ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ε, Η σημείων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLVII. *Theor.*

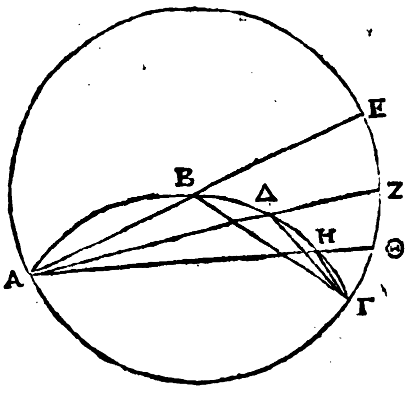
Si in portione circuli inflectantur rectæ lineæ: maxima quidem erit quæ ad punctum medium inflectitur; è reliquis vero semper ipsi propinquior remotiore major erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

Ἐὰν ἐν τμήματι κύκλου κλασθῶσιν εὐθεῖαι· μεγίστη μὲν ἔσται ἡ πρὸς τὴν διχοτομίαν τὴν κλάσιν ἔχουσα, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῇ πρὸς τῇ διχοτομίᾳ τῆς ἀπώτερόν ἐστι μείζων.

IN portione enim ΑΒΓ inflectantur rectæ lineæ; ΑΒ, ΒΓ quidem ita ut circumferentia ΑΒΓ bifariam in Β secetur; ΑΔ, ΔΓ vero & ΑΗ, ΗΓ utcunque: dico ΑΒ, ΒΓ simul maximas esse omnium quæ in portione ΑΒΓ inflectuntur; & ΑΔ, ΔΓ ipsis ΑΗ, ΗΓ majores esse.

Quoniam enim ΑΒ circumferentia circumferentiæ ΒΓ est æqualis; & recta ΑΒ æqualis erit ipsi ΒΓ. itaque centro Β, & intervallo ΒΑ vel ΒΓ, circulus ΑΕΖΘΓ describatur, & producantur ΑΒΕ, ΑΔΖ, ΑΗΘ: ergo, ex antecedenti theoremate, ΕΒ ipsi ΒΓ est æqualis, & ΖΔ æqualis ipsi ΔΓ, & ΘΗ ipsi ΗΓ. quoniam igitur ΑΕ diameter est circuli ΑΕΖ; erit ΑΕ omnium quæ in circulo ducuntur maxima; & ΑΖ major quam ΑΘ. sed ipsi ΑΕ æquales sunt ΑΒ, ΒΓ, & ipsi ΑΖ æquales ΑΔ, ΔΓ, & ipsi ΑΘ æquales ΑΗ, ΗΓ: ergo ΑΒΓ omnium maxima est, & ΑΔΓ major quam ΑΗΓ. & ita semper ea quæ propinquior est puncto medio circumferentiæ remotiore major erit. quod demonstrandum proponebatur.



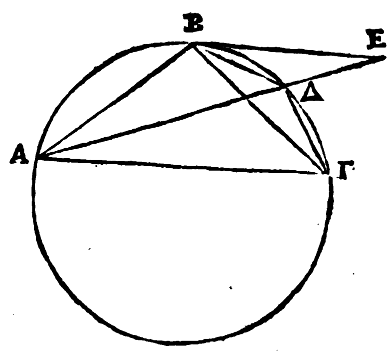
Ἐν γὰρ τῷ ΑΒΓ τμήματι κεκλάσθωσαν εὐθεῖαι, αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ, ὥστε τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Β, τυχοῦσαι δὲ αἱ ΑΔ, ΔΓ καὶ ΑΗ, ΗΓ· λέγω ὅτι συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ εὐθεῖα μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἐν τῷ τμήματι κλωμένων εὐθειῶν, μείζων δὲ ἡ ΑΔ, ΔΓ τῆς ΑΗ, ΗΓ.

Ἐπεὶ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ περιφερείᾳ ἴση ἐστί· ἡ ΑΒ ἄρα εὐθεῖα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση. κέντρῳ οὖν τῷ Β, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ οὖν τῶν ΒΑ, ΒΓ, γεγράφθω κύκλος ὁ ΑΕΖΓ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΑΒΕ, ΑΔΖ, ΑΗΘ· ἴση ἄρα καὶ (διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα) ἡ μὲν ΕΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΔ τῇ ΔΓ, καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΗΓ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΕ διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΕΖ κύκλου· μεγίστη μὲν ἄρα τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν ἡ ΑΕ, ἡ δὲ ΑΖ μείζων τῆς ΑΘ. ἀλλὰ τῇ μὲν ΑΕ ἴση συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ, τῇ δὲ ΑΖ ἡ ΑΔ, ΔΓ, καὶ τῇ ΑΘ ἡ ΑΗ, ΗΓ· καὶ τούτων ἄρα μεγίστη μὲν ἡ ΑΒΓ, μείζων δὲ ἡ ΑΔΓ τῆς ΑΗΓ. καὶ ὁμοίως ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῇ πρὸς τῇ διχοτομίᾳ τῆς ἀπώτερόν ἐστι μείζων. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

Aliter.

SIT circulus ΑΒΓ, & in portione ΑΒΓ inflectantur rectæ ΑΒ, ΒΓ, ita ut circumferentia ΑΒΓ bifariam in Β dividatur: dico rectam ex ΑΒ, ΒΓ compositam maximam esse ex iis quæ in eadem portione inflectuntur.

Inflectantur enim ΑΔ, ΔΓ, & producatur ΑΔ ad Ε, ita ut ΔΕ ipsi ΔΓ sit æqualis; junganturque ΒΔ, ΒΕ. quoniam igitur circumferentia ΑΒ æqualis est circumferentiæ ΒΓ; & in circumferentia quidem ΑΒ angulus ΒΔΑ, in circumferentia vero ΒΓ angulus ΒΑΓ consistit: erit angulus ΒΔΑ angulo ΒΑΓ æqualis. communis apponatur ΒΔΕ; ergo utrique anguli ΒΔΕ, ΒΔΑ utrisque ΒΔΕ, ΒΑΓ æquales sunt. & sunt ΒΔΕ, ΒΔΑ duobus rectis æquales: ergo & ΒΔΕ, ΒΑΓ



Ἄλλως.

ΕΣΤΩ κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ τμήματι κεκλάσθω ἡ ΑΒΓ εὐθεῖα, ὥστε τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Β· λέγω ὅτι συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ εὐθεῖα μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι κλωμένων εὐθειῶν.

Κεκλάσθω γὰρ ἡ ΑΔΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔΕ, καὶ κείσθω ἡ ΔΕ τῇ ΔΓ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΔ, ΒΕ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ περιφερείᾳ ἴση ἐστί, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ γωνία βέβηκεν, ἐπὶ δὲ τῆς ΒΓ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΔΕ· συναμφότερος ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΔΑ συναμφοτέρῳ τῇ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἔστι συναμφότερος ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΔΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση· καὶ συναμφότερος

ἄρα

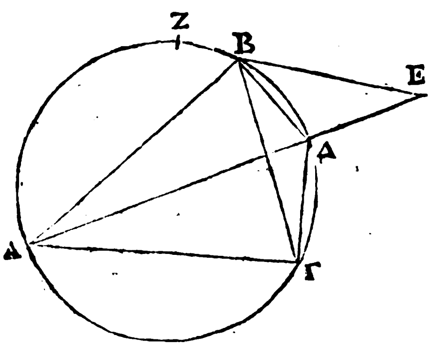
ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ συναμφότερος ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση· συναμφότερος ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ συναμφοτέρῳ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστί· κοινῆς ἄρα ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΕ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ ἴση ἐστί. ἐπεὶ οὖν ἴση μὲν ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΒΕ εὐθεῖαι μείζονές εἰσι τῆς ΑΕ, ἀλλὰ τῶν μὲν ΑΒ, ΒΕ συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ ἴση ἐστὶ, τῇ δὲ ΑΕ συναμφότερος ἡ ΑΔ, ΔΓ ἴση ἐστί· καὶ συναμφότερος ἄρα ἡ ΑΒΓ τῆς ΑΔΓ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὲ δείκνυται καὶ τῶν ἄλλων μείζων· συναμφότερος ἄρα ἡ ΑΒ, ΒΓ πασῶν τῶν ἐν τῷ τμήματι κλωμένων μεγίστη ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ διχοτομία πρὸς τῷ Ζ· λέγω ὅτι ἡ τῷ Ζ ἔγγιον ἡ ΑΒΓ συναμφότερος τῆς ἀπώτερον τῆς ΑΔ, ΔΓ μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΖΒ περιφέρεια τῆς ΒΔΓ περιφερείας μείζων ἐστὶ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζων. κοινῆς προστεθείσης τῆς ΒΔΕ, μείζονές εἰσι αἱ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΔΑ τῶν ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ ἐλάττονές εἰσι δυοῖν ὀρθῶν. εἰσὶ δὲ αἱ ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ τῶν ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ μείζονές εἰσι, καὶ κοινῆς ἀρθείσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΔΕ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΔΕ μείζων· καὶ ἡ ΓΒ ἄρα βάσις μείζων ἐστὶ τῆς ΒΕ βάσεως. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΒΕ εὐθεῖαι μείζονές εἰσι τῆς ΑΕ, τῶν δὲ ΑΒ, ΒΕ συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ μείζων ἐστί. συναμφότερος ἄρα ἡ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΕ, τουτέστι συναμφοτέρου τῆς ΑΔ, ΔΓ, μείζων.

æquales sunt duobus rectis. sunt autem anguli ΒΔΓ, ΒΑΓ simul sumpti æquales duobus rectis: utrique igitur ΒΔΕ, ΒΑΓ utrisque ΒΔΓ, ΒΑΓ æquales sunt; &, dempto communi ΒΑΓ, reliquus ΒΔΕ reliquo ΒΔΓ est æqualis. itaque quoniam ΓΔ est æqualis ipsi ΔΕ, & communis ΒΔ; suntque circa æquales angulos: basis ΓΒ basi ΒΕ æqualis erit. & quoniam ΑΒ, ΒΕ simul majores sunt ipsa ΑΕ; utrisque vero ΑΒ, ΒΕ simul sumptis æquales sunt ΑΒ, ΒΓ, & ipsi ΑΕ æquales sunt utræque ΑΔ, ΔΓ: erunt ΑΒ, ΒΓ simul sumptæ quam ΑΔ, ΔΓ majores. pari modo & aliis majores ostenduntur: ergo ΑΒ, ΒΓ simul sumptæ majores sunt quibuscunque aliis quæ in portione ΑΒΓ inflectuntur.

Sed sit punctum circumferentiæ medium ad Ζ: dico utrasque ΑΒ, ΒΓ, quæ puncto Ζ propinquiores sunt, ipsis ΑΔ, ΔΓ remotioribus majores esse.



Quoniam enim circumferentia ΑΖΒ major est quam circumferentia ΒΔΓ; angulus ΒΔΑ angulo ΒΑΓ est major. &, communi apposito ΒΔΕ, erunt ΒΔΕ, ΒΔΑ anguli majores angulis ΒΔΕ, ΒΑΓ: ergo ΒΔΕ, ΒΑΓ sunt duobus rectis minores. & sunt ΒΔΓ, ΒΑΓ æquales duobus rectis; anguli igitur ΒΔΓ, ΒΑΓ angulis ΒΔΕ, ΒΑΓ simul sumptis majores sunt; & dempto communi ΒΑΓ, reliquus ΒΔΓ major erit reliquo ΒΔΕ. quoniam igitur ΔΓ est æqualis ipsi ΔΕ, & communis ΔΒ, angulus autem ΒΔΓ major est angulo ΒΔΕ; erit basis ΓΒ basi ΒΕ major. & quoniam rectæ ΑΒ, ΒΕ simul sumptæ majores sunt quam ΑΕ, ipsis vero ΑΒ, ΒΕ simul majores sunt ΑΒ, ΒΓ simul sumptæ: igitur ΑΒ, ΒΓ simul majores sunt quam ΑΕ, hoc est quam ipsæ ΑΔ, ΔΓ simul sumptæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη΄.

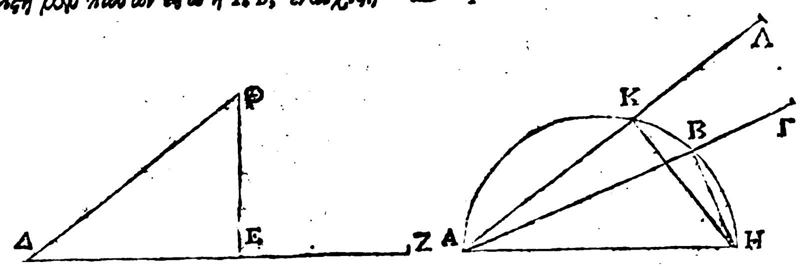
Ἐὰν τεσσάρων ἀνίσων εὐθειῶν τὸ ἀπὸ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης τὸ συναμφότερον τετράγωνον ἴσον ᾖ συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν λοιπῶν· ἡ συγκειμένη εὐθεῖα ἐκ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης ἐλάττων ἔσται τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν λοιπῶν.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, καὶ μεγίστη μὲν πασῶν ἔστω ἡ ΑΒ, ἐλαχίστη

Prop. XLVIII. *Theor.*

Si, quatuor rectis lineis inæqualibus existentibus, quadrata maximæ & minimæ æqualia sint quadratis reliquarum: recta composita ex maxima & minima minor erit ea quæ ex reliquis componitur.

Sint quatuor rectæ lineæ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, quarum maxima sit ΑΒ, & ΒΓ minima; ΔΕ

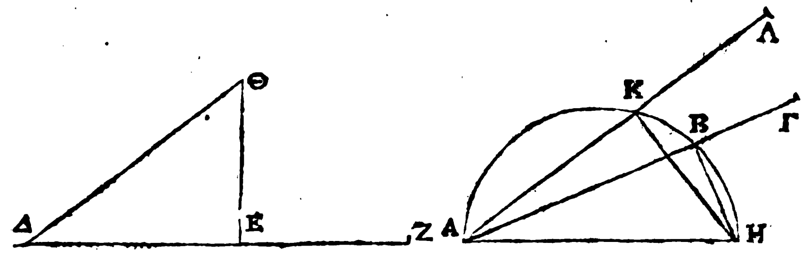


δὲ ἡ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΕ τῆς ΕΖ μὴ ἐλάττων ἔστω, ἔστω δὲ τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσα· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ ἐλάττων ἐστίν.

vero non sit minor quam ΕΖ; & sint quadrata ex ΑΒ, ΒΓ quadratis ex ΔΕ, ΕΖ æqualia: dico lineam ΑΓ minorem esse quam ΔΖ.

Ducantur enim ad rectos angulos BH, EΘ, & ponatur BH ipsi BΓ æqualis, & EΘ æqualis EZ; junctisque AH, ΔΘ, describatur semicirculus circa triangulum orthogonium ABH. & quoniam quadrata ex AB, BΓ, hoc est ex AB, BH, quadratis ex ΔE, EΘ sunt æqualia; erit quadratum ex AH æquale quadrato ex ΔΘ, & recta AH ipsi ΔΘ æqualis. est autem EΘ major quam BH: quare aptata in semicirculo recta æqualis ipsi EΘ angulum BHA secabit. itaque aptetur, & sit HK: & juncta AK producatur, ut sit KΛ æqualis ipsi KH. quoniam igitur quadrata ex AK, KH quadratis ex AB, BH æqualia sunt; quadrata autem ex AB, BH æqualia quadratis ex ΔE, EΘ: erunt quadrata ex AK, KH quadratis ex ΔE, EΘ æqualia, quorum quadratum ex KH est æquale quadrato ex BΘ: reliquum igitur quadratum ex AK reliquo ex ΔE æquale erit, & recta AK ipsi ΔE æqualis: ergo triangulum AKH est æquale & simile triangulo ΔEΘ, & recta AΛ æqualis ipsi ΔZ. itaque quoniam recta linea AK non est minor quam KH; neque circumferentia AK minor erit quam circumferentia KH: quare cum in circuli portione inflectantur rectæ AK, KH; AB, BH, sintque AK, KH vel ad punctum circumferentiæ medium, vel ipsi propinquiores: erunt, ex antecedenti theoremate, AK, KH majores quam AB, BH, hoc est AΛ sive ΔZ major erit quam AΓ: minor est igitur AΓ quam ΔZ. quod erat demonstrandum.

Ηχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ BH, EΘ, καὶ κείσθω ἴση ἡ μὲν BH τῇ BΓ, ἡ δὲ EΘ τῇ EZ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AH, ΔΘ, καὶ γεγράφθω περὶ τὸ ABH ὀρθογώνιον ἡμικύκλιον. ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ AB, BΓ, τουτέστι τὰ ἀπὸ AB, BH, τοῖς ἀπὸ ΔE, EΘ ἴσα ἐστί· καὶ τὸ ἀπὸ AH ἄρα τῷ ἀπὸ ΔΘ ἐστὶν ἴσον, καὶ ἡ AH τῇ ΔΘ. καὶ ἐπεὶ ἡ EΘ τῆς BH μείζων ἐστίν· ἡ ἄρα τῇ EΘ ἴση, ἐναρμοζομένη τῷ ἡμικυκλίῳ, τεμεῖ τὴν ὑπὸ BHA γωνίαν. ἐνηρμόσθω ἡ HK ἴση οὖσα τῇ ΘE, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AK, καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω ἴση ἡ KΛ τῇ KH. ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ AK, KH τοῖς ἀπὸ AB, BH ἴσα ἐστὶ, τὰ δὲ ἀπὸ AB, BH τοῖς ἀπὸ ΔE, EΘ ἴσα ἐστί· τὰ ἄρα ἀπὸ AK, KH τοῖς ἀπὸ ΔE, EΘ ἴσα ἐστὶν, ὧν τὸ ἀπὸ KH τῷ ἀπὸ EΘ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ AK τῷ ἀπὸ ΔE ἴσον ἐστὶ, καὶ ἡ AK τῇ ΔE· τὸ ἄρα AKH τρίγωνον ἴσον καὶ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΔEΘ, καὶ ἡ AΛ τῇ ΔZ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἡ AK εὐθεῖα τῆς KH οὐκ ἔστιν ἐλάττων, οὐδ' ἡ AK ἄρα περιφέρεια τῆς KH περιφερείας ἐλάττων ἐστί. καὶ, διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα, ἐπεὶ ἐν τμήματι κύκλου κεκλασμέναι εἰσὶν αἱ AKH, ABH εὐθεῖαι, καὶ ἔστιν ἡ AKH ἤτοι πρὸς τῇ διχοτομίᾳ, ἢ ἔγγιον τῆς διχοτομίας· μείζων ἄρα συναμφότερος ἡ AK, KH συναμφοτέρου τῆς AB, BH, τουτέστιν ἡ AΛ τῆς AΓ, τουτέστιν ἡ ΔZ τῆς AΓ· ἐλάττων ἄρα ἡ AΓ τῆς ΔZ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Prop. XLIX. Theor.

Si duæ rectæ lineæ inæquales dividantur, ita ut quadrata partium minoris æqualia sint quadratis partium majoris: earum omnium maxima quidem erit major minoris pars, minor vero minima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Εὰν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι διῃρημέναι ὦσι, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν τοῦ ἐλάττονος τμημάτων τετράγωνα ἴσα ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν τοῦ μείζονος τμημάτων τετραγώνοις· τῶν τεσσάρων τμημάτων μέγιστον μὲν ἔσται τὸ τοῦ ἐλάττονος μεῖζον τμῆμα, ἐλάχιστον δὲ τὸ ἔλαττον.

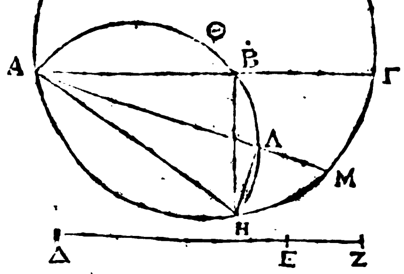
Sint rectæ lineæ ABΓ, ΔEZ in B, E punctis ita divisæ, ut ΔE sit major quam EZ, & AB non minor quam BΓ; sitque AΓ major quam ΔZ; quadrata vero ex AB, BΓ quadratis ex ΔE, EZ sint æqualia: dico harum rectarum AB, BΓ, ΔE, EZ maximam esse ΔE, & EZ minimam.

Ducatur enim ipsi AΓ ad rectos angulos BH, æqualis ipsi BΓ, & jungatur AH; circa triangulum vero orthogonium ABH describatur semicirculus. quoniam igitur recta AB non est minor quam BH, neque AB circumferentia circumferentiâ BH minor erit; & idcirco circumferentiæ ABH punctum medium vel erit ad B, vel in circumferen-

Εστωσαν εὐθεῖαι δύο ἄνισοι αἱ ABΓ, ΔEZ διῃρημέναι κατὰ τὰ B καὶ E σημεῖα, ὥστε τὴν μὲν ΔE τῆς EZ μείζονα εἶναι, τὴν δὲ AB τῆς BΓ μὴ εἶναι ἐλάσσονα, καὶ μείζων μὲν ἔστω ἡ AΓ τῆς ΔZ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετράγωνα τοῖς ἀπὸ τῶν ΔE, EZ τετραγώνοις ἴσα· λέγω ὅτι τῶν AB, BΓ, ΔE, EZ εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΔE, ἐλαχίστη δὲ ἡ EZ.

Ηχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ AΓ ἡ BH ἴση οὖσα τῇ BΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AH, καὶ περὶ τὸ ABH ὀρθογώνιον γεγράφθω ἡμικύκλιον. ἐπεὶ οὖν ἡ AB εὐθεῖα τῆς BH οὐκ ἔστιν ἐλάττων, καὶ ἡ AB περιφέρεια τῆς BH οὐκ ἔστιν ἐλάττων· ἡ ἄρα τῆς ABH περιφερείας διχοτομία ἤτοι κατὰ τὸ B ἔσται, ἢ ἐπὶ τῆς AB περιφερείας,

περιφερείας, οἷον κατὰ τὸ Θ· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῇ διχοτομίᾳ, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ οὖν τῶν ΑΘ, ΘΗ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Γ, ὡς προεδείχθη. γεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω ὁ ΑΚΓΗ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ ΔΕ, ΕΖ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΗ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΑΗ. ἐλάττων δὲ ἡ ΔΖ τῆς ΑΓ· δυνατὸν ἄρα μεταξὺ τῶν ΑΓ, ΑΗ εὐθειῶν ἐναρμόσαι τῷ ΑΚΓΗ κύκλῳ εὐθεῖαν ἴσην τῇ ΔΖ. ἐνηρμόσθω ἡ ΑΛΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΗ· ἴση ἄρα, διὰ τὰ προδεδειγμένα, ἡ ΛΜ τῇ ΛΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΑΛ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΑΒ οὐκ ἐλάσσων τῆς ΒΗ· ἡ ἄρα ΑΛ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΒΗ. ἡ δὲ ΛΗ ἐλάττων ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΒΗ· τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΗ, ΑΛ, ΛΗ μεγίστη μὲν ἡ ΑΛ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΛΗ. ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΛΗ, τουτέστιν ἡ ΛΜ, τῇ ΕΖ, ὡς ἐδείξαμεν· τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἡ ΔΕ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΕΖ. ὃ προέκειτο δεῖξαι.



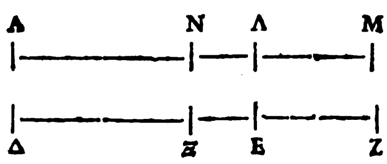
tia ΑΒ, ut ad Θ: itaque puncto medio circumferentiæ ΑΒΗ tanquam centro, & intervallo ΑΘ vel ΘΗ, circulus descriptus etiam per punctum Γ transibit, ut supra [per 46. huj.] demonstratum est. describatur circulus ille, & sit ΑΚΓΗ. & quoniam quadratum ex ΔΖ majus est quadratis ex ΔΕ, ΕΖ, & quadrata ex ΔΕ, ΕΖ quadrato ex ΑΗ sunt æqualia; erit quadratum ex ΔΖ majus quadrato ex ΑΗ; & recta ΔΖ quam ΑΗ major. minor autem est ΔΖ quam ΑΓ; ergo inter ipsas ΑΓ, ΑΗ aptari poterit in circulo ΑΚΓΗ recta ipsi ΔΖ æqualis. aptetur, sitque ΑΛΜ, & jungatur ΛΗ: erit igitur, per jam demonstrata, ΛΜ æqualis ipsi ΛΗ. sed ΑΛ est major quam ΑΒ; & ΑΒ non minor quam ΒΗ: ergo ΑΛ alterutrâ ipsarum ΑΒ, ΒΗ major erit. & ΛΗ [per 47. huj.] alterutra ipsarum ΑΒ, ΒΗ minor: rectarum igitur ΑΒ, ΒΗ, ΑΛ, ΛΗ maxima est ΑΛ, & minima ΛΗ. sed ΒΗ est æqualis ipsi ΒΓ, & ΑΛ ipsi ΔΕ, & ΛΗ, hoc est ΛΜ, ipsi ΕΖ; uti ostendimus: ergo rectarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ maxima est ΔΕ, & ΕΖ minima. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἴσαι διῃρημέναι ὦσιν, οὕτως ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἑκατέρας τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς λοιπῆς ἴσον εἶναι· καὶ τὰ τμήματα τοῖς τμήμασιν ἴσα ἔσται, ἑκάτερον ἑκατέρῳ.

ΕΣΤΩΣΑΝ εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις αἱ ΑΛΜ, ΔΕΖ, διῃρημέναι κατὰ τὰ Λ καὶ Ε σημεῖα, ὥστε τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΛΜ ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΑΛ τῇ ΔΕ.

Ἐπεὶ ἴση ἡ ΑΜ τῇ ΔΖ, καὶ αἱ ἡμίσειαι ἄρα ἴσαι εἰσίν· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΜ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΔΖ ἴσον ἐστίν. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΜ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ, καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΛΜ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας· καὶ ΔΖ ἄρα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ε, ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΜ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΔΖ. εἰ δὲ μή, τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ν, Ξ σημεῖα· ἴση ἄρα ἡ ΝΜ εὐθεῖα τῇ ΞΖ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΝΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΞΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΛΜ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΞΕ, ὧν τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΛΜ τῷ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσον ἐστί· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΝΛ τῷ ἀπὸ τοῦ ΞΕ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΝΛ τῇ ΞΕ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΞΖ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΛΜ τῇ ΕΖ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΛ τῇ ΔΕ ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Prop. L. *Theor.*

Si duæ rectæ æquales ita dividantur, ut rectangulum contentum sub partibus unius æquale sit ei quod sub alterius partibus continetur: erunt unius partes partibus alterius æquales.

SINT rectæ lineæ inter se æquales ΑΛΜ, ΔΕΖ in punctis Λ, Ε ita divisæ, ut rectangulum ΑΛΜ rectangulo ΔΕΖ sit æquale: dico rectam ΑΛ ipsi ΔΕ æqualem esse.

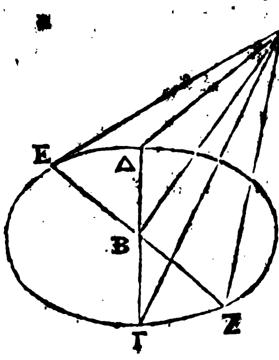
Quoniam enim ΑΜ est æqualis ipsi ΔΖ; & earum dimidiæ æquales erunt: ergo & quadratum dimidiæ ΑΜ est æquale quadrato dimidiæ ΔΖ. itaque si ΑΜ bifariam divisa fuerit in Λ, rectangulum ΑΛΜ est dimidiæ quadratum; adeoque ΔΖ bifariam dividitur in Ε, quoniam rectangulum ΔΕΖ æquale est quadrato dimidiæ ipsius ΑΜ, hoc est dimidiæ ipsius ΔΖ. Sin minus, dividantur bifariam in punctis Ν, Ξ: æqualis igitur est ΝΜ ipsi ΞΖ: & propterea quadratum ex ΝΜ quadrato ex ΞΖ æquale, hoc est [per 5. 2.] rectangulum ΑΛΜ una cum quadrato ex ΝΛ æquale rectangulo ΔΕΖ una cum quadrato ex ΞΕ; è quibus rectangulum ΑΛΜ æquale est rectangulo ΔΕΖ: ergo reliquum quadratum ex ΝΛ æquale est quadrato ex ΞΕ; ac propterea ΝΛ ipsi ΞΕ æqualis. est autem & ΝΜ æqualis ipsi ΞΖ; reliqua igitur ΛΜ ipsi ΕΖ, & ΑΛ ipsi ΔΕ æqualis erit. Q. E. D.

PROP. LI. *Theor.*

Si conus scalenus per axem secetur: eorum quæ fiunt triangulorum quod majus est majorem perimetrum habet; quodque majorem habet perimetrum illud majus est triangulum.

SECETUR conus scalenus per axem A B, & sectiones fiant A Γ Δ, A E Z triangula, quorum majus sit A Γ Δ, ita ut E A quidem sit major quam A Z, Γ A vero non minor quam A Δ: dico A Γ Δ perimetrum perimetro A E Z minorem esse.

Quoniam enim æquales sunt Γ Δ, E Z bases, communis autem ducta est B A à vertice ad punctum quo bisecantur bases, & triangulum A E Z minus est triangulo A Γ Δ; habebit E A ad A Z majorem rationem quam Γ A ad A Δ, ut in vigesimo theoremate demonstratum est: ergo E A maxima est è quatuor lineis,& A Z minima. id quod [ad 17. & 18.huj.] ostensum est. & quoniam quadrata è maxima & minima, hoc est quadrata ex E A, A Z simul, quadratis ex Γ A, A Δ simul sunt æqualia; erunt utræque E A, A Z simul [per præcedens 48^vum^ theorema) minores utrisque Γ A, A Δ. apponantur E Z, Γ Δ: tota igitur A E Z perimeter totâ perimetro A Γ Δ est minor: ergo majoris trianguli perimeter major erit.



Ex quibus perspicuum est, in conis scalenis maximi quidem trianguli per axem facti, hoc est æquicruris, perimetrum esse maximam; minimi vero, hoc est ejus quod ad rectos angulos insistit basi coni, perimetrum minimam esse; è reliquis vero semper triangulum quod majus est majorem perimetrum habere quam quod minus.

Rursus ponatur trianguli Γ A Δ perimeter major perimetro E A Z: dico triangulum A Γ Δ triangulo E A Z majus esse.

Quoniam enim A Γ Δ perimeter major est perimetro E A Z, æqualis autem Γ Δ ipsi E Z; erunt reliquæ Γ A, A Δ reliquis EA, A Z majores. sed quadrata ex Γ A, A Δ æqualia sunt quadratis ex E A, A Z: ergo quatuor rectarum Γ A, A Δ, E A, A Z maxima quidem est E A, minima vero A Z: (quæ omnia ante [per 49.huj.] demonstrata sunt) quare E A ad A Z majorem habet rationem quam Δ A ad A Γ. itaque quoniam duo triangula Γ A Δ, E A Z bases æquales habent, eandemque habent illam quæ à vertice ad punctum basim bifariam secans ducitur, alterius autem majus latus ad minus majorem rationem habet quam alterius majus latus ad minus, vel æquale ad æquale; triangulum igitur E A Z minus erit: triangulum igitur Γ A Δ majus est triangulo E A Z, ut in decima nona hujus demonstratum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ναʹ.

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ἄξονος τμηθῇ· τῶν γινομένων τριγώνων τὸ μεῖζον μείζονα περίμετρον ἔχει, καὶ οὗ τριγώνου μείζων ἡ περίμετρος καὶ αὐτὸ μεῖζόν ἐστι.

ΤΕΤΜΗΣΘΩ κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ Α Β ἄξονος, καὶ γινέσθω ἐκ τῆς τομῆς τὰ Α Γ Δ, Α Ε Ζ τρίγωνα, μεῖζον δὲ τὸ Α Γ Δ, ὥστε τὴν μὲν Ε Α τῆς Α Ζ μείζονα εἶναι, τὴν δὲ Γ Α τῆς Α Δ μὴ ἐλάττονα· λέγω ὅτι ἡ Α Γ Δ περίμετρος τῆς Α Ε Ζ περιμέτρου μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσαι μὲν αἱ Γ Δ, Ε Ζ βάσεις, κοινὴ δὲ ἦκται ἡ Β Α ἐπὶ τὴν διχοτομίαν αὐτῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς, καί ἐστι τὸ Α Ε Ζ τοῦ Α Γ Δ ἔλαττον· ἡ ἄρα Ε Α πρὸς Α Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ Α πρὸς Α Δ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ κʹ. θεωρήματι· ἡ μὲν ἄρα Ε Α μεγίστη ἐστὶ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν, ἡ δὲ Α Ζ ἐλαχίστη. ταῦτα γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ ιζʹ. καὶ ιηʹ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης, τουτέστι τὰ ἀπὸ Ε Α, Α Ζ, τοῖς ἀπὸ Γ Α, Α Δ ἴσα ἐστί· συναμφότερος ἄρα ἡ Ε Α, Α Ζ εὐθεῖα συναμφοτέρου τῆς Γ Α, Α Δ ἐλάττων ἐστὶ, διὰ τὸ μηʹ. θεώρημα τούτου. προσκείσθωσαν αἱ Ε Ζ, Γ Δ· ὅλη ἄρα ἡ Α Ε Ζ περίμετρος ὅλης τῆς Α Γ Δ περιμέτρου ἐλάττων ἐστί· μείζων ἄρα ἡ τοῦ μείζονος περίμετρος.

Καὶ γέγονε φανερὸν ὅτι, ἐν τοῖς σκαληνοῖς κώνοις, τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων μεγίστη μὲν ἡ τοῦ μεγίστου περίμετρος, τουτέστι τοῦ ἰσοσκελοῦς· ἐλαχίστη δὲ ἡ τοῦ ἐλαχίστου, τουτέστι τοῦ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ κώνου· τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ τὸ μεῖζον μείζονα περίμετρον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον.

Πάλιν ὑποκείσθω ἡ τοῦ Γ Α Δ τριγώνου περίμετρος μείζων εἶναι τῆς τοῦ Ε Α Ζ· λέγω δὴ ὅτι τὸ Α Γ Δ τρίγωνον τοῦ Ε Α Ζ μεῖζόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ Α Γ Δ περίμετρος τῆς Ε Α Ζ περιμέτρου μείζων ἐστὶ, ἴση δὲ ἡ Γ Δ τῇ Ε Ζ· λοιπὴ ἄρα συναμφότερος ἡ Γ Α, Α Δ συναμφοτέρου τῆς Ε Α, Α Ζ μείζων ἐστί. καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ Γ Α, Α Δ τοῖς ἀπὸ Ε Α, Α Ζ ἴσα· τῶν ἄρα Γ Α, Α Δ, Ε Α, Α Ζ εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστι ἡ Ε Α, ἐλαχίστη δὲ ἡ Α Ζ· ταῦτα γὰρ ἅπαντα προδέδεικται· ἡ Ε Α ἄρα πρὸς τὴν Α Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Δ Α πρὸς Α Γ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ Γ Α Δ, Ε Α Ζ βάσεις ἴσας ἔχει, ἔχει δὲ καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένην τὴν αὐτὴν, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τοῦ ἑτέρου μείζων πρὸς τὴν ἐλάττονα, καὶ τὰ λοιπά· τὸ ἄρα Ε Α Ζ τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι· μεῖζον ἄρα τὸ Γ Α Δ τρίγωνον τοῦ Ε Α Ζ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ θεωρήματι ιθʹ. τούτου βιβλίου.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ′.

Τῶν ἴσων μὲν καὶ ὀρθῶν κώνων, ἀνομοίων δὲ, ἀντιπέπονθε τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ταῖς ἑαυτῶν βάσεσιν.

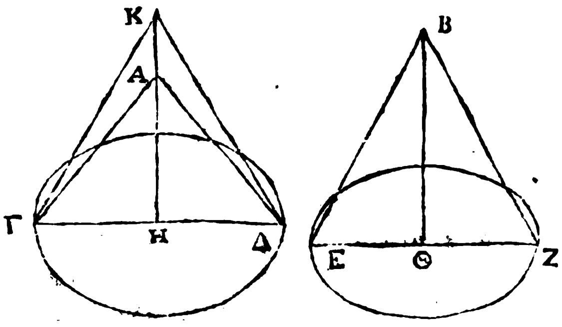
ΕΣΤΩΣΑΝ κῶνοι ὀρθοὶ καὶ ἴσοι, ἀνόμοιοι δὲ, ὧν κορυφαὶ μὲν τὰ Α, Β σημεῖα, ἄξονες δὲ οἱ ΑΗ, ΒΘ, τὰ δὲ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ, βάσεις δὲ τῶν κώνων οἱ περὶ τὰς ΓΔ, ΕΖ διαμέτρους κύκλοι· λέγω ὅτι ὡς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσοι εἰσὶν οἱ κῶνοι, ὡς ἄρα ὁ περὶ τὸ Η κέντρον κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὸ Θ κύκλον οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΑΗ· ὁ δὲ περὶ τὸ Η κέντρον κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὸ Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔστω τῶν ΘΒ ΑΗ μέση ἀνάλογον ἡ ΚΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΚΔ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἥτε ΒΘ πρὸς τὴν ΚΗ, καὶ ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΚΗ, τὸ ΒΕΖ ἄρα τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΓΔ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΑ, ὡς δὲ ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΑ οὕτως τὸ ΚΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως τὸ ΚΓΔ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΒΕΖ τρίγωνον, πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν. ἀντιπέπονθεν ἄρα τὰ ἐκκείμενα τρίγωνα ταῖς ἑαυτῶν βάσεσιν.

Prop. LII. *Theor.*

Triangula per axes æqualium & rectorum conorum, dissimilium vero, reciproce proportionalia sunt suis basibus.

Sint recti coni æquales, sed dissimiles, quorum vertices Α, Β puncta, axes ΑΗ, ΒΘ; & triangula per axes ΑΓΔ, ΒΕΖ; bases autem circuli circa diametros ΓΔ, ΕΖ: dico ut triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ ita esse basim ΕΖ ad basim ΓΔ.



Quoniam enim coni sunt æquales, erit [per 15.12.] ut circulus circa centrum Η ad circulum circa Θ ita axis ΒΘ ad axem ΑΗ; circulus autem circa Η [per 2.12.] ad circulum circa Θ duplicatam rationem habet ejus quam habet ΓΔ ad ΕΖ. sit inter ΘΒ & ΑΗ media proportionalis ΚΗ; & jungantur ΚΓ, ΚΔ. erit igitur ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΒΘ ad ΚΗ, & ita ΚΗ ad ΗΑ. quoniam igitur ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΒΘ ad ΚΗ, erit triangulum ΒΕΖ triangulo ΚΓΔ æquale. & quoniam ut ΓΔ ad ΕΖ ita est ΚΗ ad ΗΑ; ut autem ΚΗ ad ΗΑ ita ΚΓΔ triangulum ad triangulum ΑΓΔ; erit igitur ut ΓΔ ad ΕΖ ita triangulum ΚΓΔ, hoc est ΒΕΖ, ad triangulum ΑΓΔ: ergo ut ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΒΕΖ ita basis ΕΖ ad ΓΔ basim. triangula igitur exposita suis basibus reciproce sunt proportionalia.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ′.

Ὧν κώνων ὀρθῶν ἀντιπέπονθε τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ταῖς ἑαυτῶν βάσεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις.

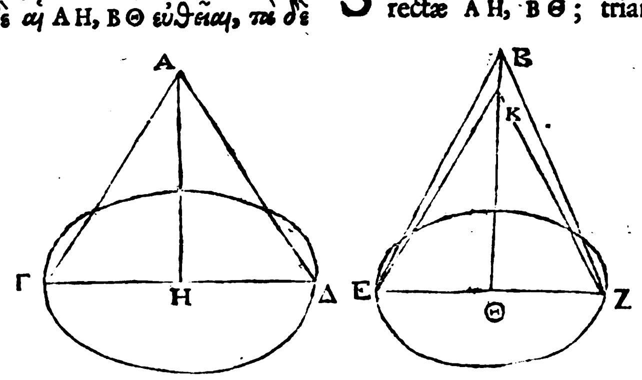
ΕΣΤΩΣΑΝ κώνων ὀρθῶν κορυφαὶ μὲν τὰ Α, Β σημεῖα, ἄξονες δὲ αἱ ΑΗ, ΒΘ εὐθεῖαι, τὰ δὲ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ· λέγω ὅτι ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις οἱ κῶνοι.

Γενέσθω ὡς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ οὕτως τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ΒΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ΚΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ.

Prop. LIII. *Theor.*

Coni recti, quorum triangula per axes reciproce proportionalia sunt suis basibus, sunt inter se æquales.

Sint conorum vertices quidem Α, Β, axes rectæ ΑΗ, ΒΘ; triangula vero per axes ΑΓΔ, ΒΕΖ; & sit ut ΓΔ ad ΕΖ ita triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΑΓΔ: dico conos inter se æquales esse.

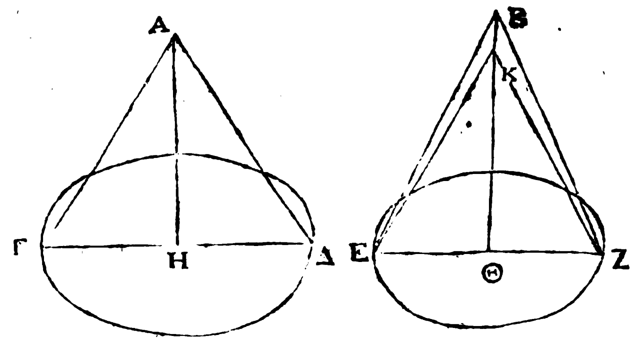


Fiat enim ut ΒΕΖ triangulum ad triangulum ΑΓΔ ita ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ; ergo triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΕΖ duplicatam habet rationem ejus quam habet triangulum ΑΓΔ ad ipsum ΚΕΖ.

* Propositio hæc, ut & reliquæ omnes hujus Libri, multo facilius demonstratur ex eo quod ratio Coni ad Conum componitur, ex ratione triangulorum per Axes & ratione diametrorum basium. Sit enim unius Coni altitudo *a* & basis diameter *b*, alterius vero altitudo *α* & diameter basis *β*. Manifestum est triangula per Axes esse inter se ut *ab* ad *αβ*; bases autem ut *bb* ad *ββ*; Conos vero ipsos ut *abb* ad *αββ*. Hinc si ponatur *abb* ipsi *αββ* æquale; erit ἀνάλογον [per 16.6.] ut *ab* ad *αβ* ita *β* ad *b*. quod erat demonstrandum.

quoniam igitur ut Γ Δ ad E Z ita B E Z triangulum ad triangulum A Γ Δ; ut autem triangulum B E Z ad ipsum A Γ Δ ita A Γ Δ ad triangulum K E Z; erit igitur ut Γ Δ ad E Z ita A Γ Δ triangulum ad triangulum K E Z: quare cum triangula A Γ Δ, K E Z inter se sint sicut bases [ex convers. 1.6.] sub eadem erunt altitudine: ergo A H ipsi K Θ est æqualis. habet autem circulus H ad circulum Θ duplicatam rationem ejus quam habet Γ Δ diameter ad diametrum E Z; & ut Γ Δ ad E Z ita triangulum A Γ Δ ad triangulum E K Z: ergo circulus H ad circulum Θ duplicatam rationem habet ejus quam Γ A Δ triangulum ad triangulum E K Z. habebat autem & triangulum E B Z ad triangulum E K Z duplicatam rationem ejus quam habet Γ A Δ triangulum ad triangulum E K Z: ergo ut circulus H ad circulum Θ ita E B Z triangulum ad triangulum E K Z, hoc est recta B Θ ad ipsam Θ K, est autem Θ K ipsi A H æqualis: igitur ut circulus H ad circulum Θ ita recta B Θ ad A H. & sunt B Θ, A H axes conorum qui reciproce sunt proportionales suis basibus videlicet circulis H, Θ: ergo coni A H Γ Δ, B Θ E Z [per 15.12.] inter se æquales sunt. *

ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν E Z οὕτως τὸ B E Z τρίγωνον πρὸς τὸ A Γ Δ, ὡς δὲ τὸ B E Z πρὸς τὸ A Γ Δ οὕτως τὸ A Γ Δ πρὸς τὸ K E Z· ὡς ἄρα ἡ Γ Δ πρὸς τὴν E Z οὕτως τὸ A Γ Δ τρίγωνον πρὸς τὸ K E Z· ὥστε ἐπεὶ τὰ A Γ Δ, K E Z τρίγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστι ὡς αἱ βάσεις, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ἄρα ὕψος ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ A H τῇ K Θ. καὶ ἐπεὶ ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ Δ διάμετρος πρὸς τὴν E Z, ὡς δὲ ἡ Γ Δ διάμετρος πρὸς τὴν E Z οὕτως τὸ A Γ Δ τρίγωνον πρὸς τὸ E K Z· ὁ ἄρα H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ A Δ τρίγωνον πρὸς τὸ E K Z. εἶχε δὲ καὶ τὸ E B Z πρὸς τὸ E K Z διπλασίονα λόγον ἤπερ τὸ Γ A Δ πρὸς τὸ E K Z· ὡς ἄρα ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον οὕτως τὸ E B Z τρίγωνον πρὸς τὸ E K Z, τουτέστιν ἡ B Θ εὐθεῖα πρὸς τὴν Θ K. καὶ ἔστιν ἡ Θ K τῇ A H ἴση· ὡς ἄρα ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον οὕτως ἡ B Θ εὐθεῖα πρὸς τὴν A H. καί εἰσιν αἱ B Θ, A H ἄξονες τῶν κώνων, καὶ ἀντιπεπόνθασι ταῖς βάσεσιν, τουτέστι τοῖς H, Θ κύκλοις· οἱ ἄρα A H Γ Δ, B Θ E Z κῶνοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν.



Prop. LIV. *Theor.*

Si in duobus conis rectis basis unius ad basim alterius duplicatam rationem habeat ejus quam habet conus ad conum; triangula per axes inter se æqualia erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

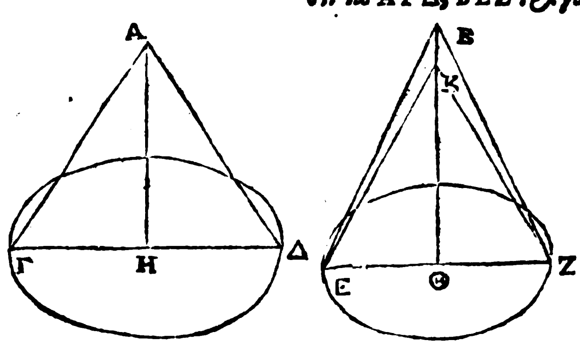
Ἐὰν δύο κώνων ὀρθῶν ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν διπλασίονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσται.

Sint coni recti, quorum vertices puncta A, B; bases circuli circa centra H, Θ, & triangula per axes A Γ Δ, B E Z: habeat autem circulus H ad circulum Θ duplicatam rationem ejus quam A H Γ Δ conus ad conum B Θ E Z: dico triangula A Γ Δ, B E Z inter se æqualia esse.

Sit enim ut A H Γ Δ conus ad B Θ E Z ita B Θ E Z ad conum K Θ E Z. & quoniam circulus H ad circulum Θ duplicatam rationem habet ejus quam A H Γ Δ conus ad conum B Θ E Z; conus autem A H Γ Δ ad conum K Θ E Z rationem duplicatam habet ejus quam A H Γ Δ conus ad conum B Θ E Z: erit igitur ut circulus H ad circulum Θ ita conus A H Γ Δ ad conum K Θ E Z. quare cum A H Γ Δ, K Θ E Z coni inter se sint sicut bases, ejusdem erunt altitudinis, è conversa undecimæ duodecimi elementorum: unde A H ipsi

ΕΣΤΩΣΑΝ κῶνοι ὀρθοί, ὧν κορυφαὶ μὲν τὰ A, B σημεῖα, βάσεις δὲ οἱ περὶ τὰ H, Θ κέντρα κύκλοι, τὰ δὲ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ A Γ Δ, B E Z. ἐχέτω δὲ ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ διπλασίονα λόγον ἤπερ ὁ A H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν B Θ E Z· λέγω ὅτι τὰ A Γ Δ, B E Z τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ὡς ὁ A H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν B Θ E Z οὕτως ὁ B Θ E Z πρὸς τὸν K Θ E Z. καὶ ἐπεὶ ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ A H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν B Θ E Z κῶνον· ἀλλὰ καὶ ὁ A H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν K Θ E Z κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ A H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν B Θ E Z· ὡς ἄρα ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον οὕτως ὁ A H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν K Θ E Z κῶνον. ὥστε ἐπεὶ οἱ A H Γ Δ, K Θ E Z κῶνοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἰσοϋψεῖς ἄρα εἰσί, διὰ τὸ ἀντίστροφον



* Si *ab* sit ad *αβ* sicut *β* ad *b*, erit [per 16.6.] *abb* ipsi *αββ* æquale, hoc est Conus Cono.

τοῦ

τοῦ ια'. θεωρήματος τοῦ ιβ'. τῶν στοιχείων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον, τουτέστιν ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἔχει δὲ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΚ, τουτέστι πρὸς ΑΗ· ἴσα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

ΚΘ est æqualis. quoniam igitur circulus Η ad circulum Θ duplicatam rationem habet ejus quam ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ, hoc est quam habet conus ΒΘΕΖ ad conum ΚΘΕΖ, hoc est [per 14. 12.] quam ΒΘ ad ΘΚ; habet autem circulus Η ad circulum Θ duplicatam rationem ejus quam ΓΔ ad ΕΖ: erit itaque ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΒΘ ad ΘΚ, hoc est ad ΑΗ: triangula igitur ΑΓΔ, ΒΕΖ inter se æqualia erunt. quod erat demonstrandum.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε'.

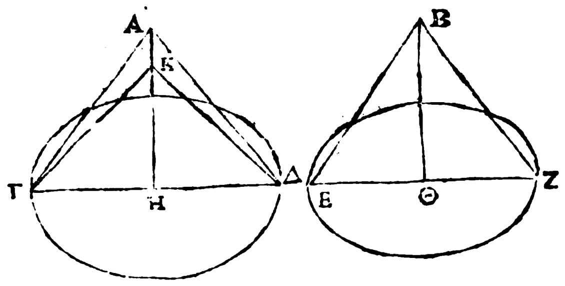
Καὶ ἐὰν τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ᾖ, ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον.

Prop. LV. *Theor.*

Si triangula per axes inter se æqualia sint; basis ad basim duplicatam rationem habebit ejus quam conus ad conum.

Καταγεγράφθωσαν πάλιν οἱ προκείμενοι κῶνοι, καὶ ὑποκείσθω τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. δεικτέον δὴ ὅτι ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον.

Ἔστω γὰρ ὡς ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ. ἐπεὶ οὖν τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ, ἔχει δὲ καὶ ἡ ΒΘ πρὸς ΗΚ διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ· ὡς ἄρα ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ· ὁ ἄρα ΚΗΓΔ κῶνος τῷ ΒΘΕΖ κώνῳ ἴσος ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΚ, ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ, τουτέστι πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον. ἀλλ᾽ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ· ὁ ἄρα Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, τουτέστιν ἡ βάσις τοῦ ΑΗΓΔ κώνου πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΒΘΕΖ κώνου, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Describantur rursus prædicti coni, & ponantur triangula ΑΓΔ, ΒΕΖ inter se æqualia. demonstrandum est circulum Η ad circulum Θ duplicatam rationem habere ejus quam conus ΑΗΓΔ habet ad conum ΒΘΕΖ.

Fiat enim ut recta ΒΘ ad ipsam ΑΗ ita ΑΗ ad ΗΚ. quoniam igitur triangula ΑΓΔ, ΒΕΖ sunt æqualia, erit ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΒΘ ad ΑΗ, hoc est ΑΗ ad ΗΚ. Et quoniam circulus Η ad circulum Θ duplicatam habet rationem ejus quam ΓΔ ad ΕΖ, hoc est quam ΒΘ ad ΑΗ; habetque ΒΘ ad ΗΚ duplicatam rationem ejus quam ΒΘ ad ΑΗ: erit ut circulus Η ad circulum Θ ita ΒΘ ad ΚΗ; conus igitur ΚΗΓΔ [per 15.12.] cono ΒΘΕΖ est æqualis. ut autem ΓΔ ad ΕΖ ita est ΑΗ ad ΗΚ; & ut ΑΗ ad ΗΚ ita [per 14.12.] ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΗΓΔ, hoc est ad conum ΒΘΕΖ: ergo ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ. sed circulus Η ad circulum Θ duplicatam habet rationem ejus quam ΓΔ ad ΕΖ: circulus igitur Η ad circulum Θ, hoc est basis coni ΑΗΓΔ ad basim coni ΒΘΕΖ, duplicatam rationem habet ejus quam habet conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ. quod erat demonstrandum. †

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛ'.

Οἱ ἰσοϋψεῖς κῶνοι ὀρθοὶ διπλασίονα λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ἤπερ τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα.

Prop. LVI. *Theor.*

Recti coni æquealti duplicatam inter se rationem habent ejus quam habent triangula per axes.

Καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ἔστω ὁ ΑΗ ἄξων τῷ ΒΘ ἴσος· λέγω ὅτι ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς

Describantur iidem coni, & sit axis ΑΗ æqualis ipsi ΒΘ: dico conum ΑΗΓΔ ad

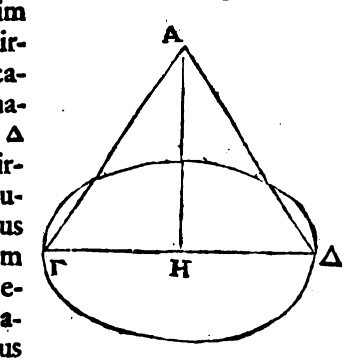
* Si bb ad $\beta\beta$ duplicatam habeat rationem Coni ad Conum, sive ipsius abb ad $\alpha\beta\beta$, erit b ad β sicut abb ad $\alpha\beta\beta$; adeoque ab ipsi $\alpha\beta$ æquale erit.

† Si ab sit æquale ipsi $\alpha\beta$, erit abb ad $\alpha\beta\beta$ sicut b ad β: unde bb erit ad $\beta\beta$ (quæ sunt ut bases Conorum) in duplicata ratione ipsorum Conorum, sive ejus quam habet abb ad $\alpha\beta\beta$.

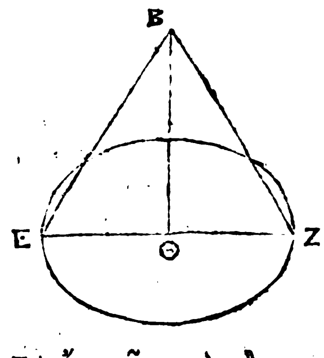
conum

conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem habere ejus quam triangulum ΑΓΔ habet ad triangulum ΒΕΖ.

Quoniam enim circulus Η ad circulum Θ duplicatam rationem habet ejus quam ΓΔ ad ΕΖ; & ut circulus Η ad circulum Θ ita conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ: (sunt enim æque-alti) habebit igitur conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem ejus quam habet ΓΔ ad ΕΖ; hoc est quam ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΒΕΖ. quod erat demonstrandum.*



τὸν ΒΘΕΖ κώνου διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ.



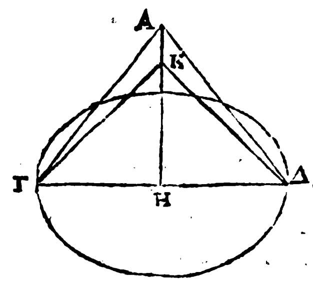
Ἐπεὶ γὰρ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον· ἰσοϋψεῖς γάρ· καὶ ὁ ΑΗΓΔ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LVII. *Theor.*

Si recti coni inter sese duplicatam rationem habeant ejus quam habent triangula per axes: ipsi æque-alti erunt.

Describantur coni, & ponatur ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam habere rationem ejus quam triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ: dico ΑΗ ipsi ΒΘ æqualem esse.

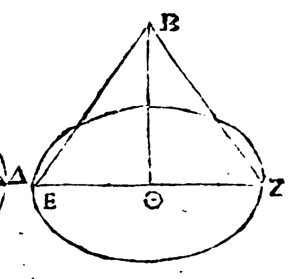
Ponatur enim triangulo ΒΕΖ æquale triangulum ΚΓΔ. & quoniam ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ; est autem triangulum ΒΕΖ æquale triangulo ΚΓΔ: habebit igitur ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem ejus quam triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΓΔ, hoc est quam ΑΗ ad ΗΚ, hoc est quam conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΗΓΔ: ergo ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΗΓΔ ita ΚΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ. quoniam igitur conorum ΚΗΓΔ, ΒΘΕΖ triangula per axem ΚΓΔ, ΒΕΖ æqualia sunt, basis coni Η ad basim Θ duplicatam rationem habebit ejus quam conus ΚΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ, ut in quinquagesima quinta hujus demonstratum est. sed ut conus ΚΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΗΓΔ, & ita recta ΑΗ ad ΗΚ: circulus igitur Η ad circulum Θ duplicatam rationem habet ejus quam ΑΗ ad ΗΚ. sed & duplicatam habet rationem ejus quam diameter ΓΔ ad diametrum ΕΖ: ergo ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΑΗ ad ΗΚ. itaque quoniam triangulum ΚΓΔ triangulo ΒΕΖ est æquale, erit [per 16. 6.] ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΒΘ ad ΚΗ. [ostensum est autem ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΑΗ ad ΗΚ;] quare ut ΒΘ ad ΚΗ ita ΑΗ ad ΗΚ: æqualis igitur est ΑΗ ipsi ΒΘ. quod erat demonstrandum.†



ΠΡΟΤΑΣΙΣ νζ'.

Ἐὰν ὀρθοὶ κῶνοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχωσιν ἤπερ τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα· ἰσοϋψεῖς ἔσονται οἱ κῶνοι.

Καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ὑποκείσθω ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχειν ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον· λέγω ὅτι ἡ ΑΗ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΘ.



Κείσθω τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ ἴσον τὸ ΚΓΔ τρίγωνον. ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ, ἴσον δὲ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τῷ ΚΓΔ τριγώνῳ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ τρίγωνον, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ, τουτέστιν ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον οὕτως ὁ ΚΗΓΔ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ. καὶ ἐπεὶ τῶν ΚΗΓΔ, ΒΘΕΖ κώνων τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΚΓΔ, ΒΕΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἡ ἄρα Η βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Θ βάσιν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΚΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ νε'. πρὸ τούτου θεωρήματι. ὡς δὲ ὁ ΚΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ, καὶ ἡ ΑΗ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΗΚ· ὁ ἄρα Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΚ. ἔχει δὲ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον οὗ ὃν ἔχει ἡ ΓΔ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ. ἐπεὶ δὲ τὸ ΚΓΔ τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, κατ' ἀντιπεπόνθασιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ. ὡς ἄρα ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ.

* Si *a* fuerit ipsi *α* æqualis, erit *abb* ad *αββ* sicut *aabb* ad *ααββ*, hoc est in duplicata ratione ejus quam habet *ab* ad *αβ* sive *aβ*.

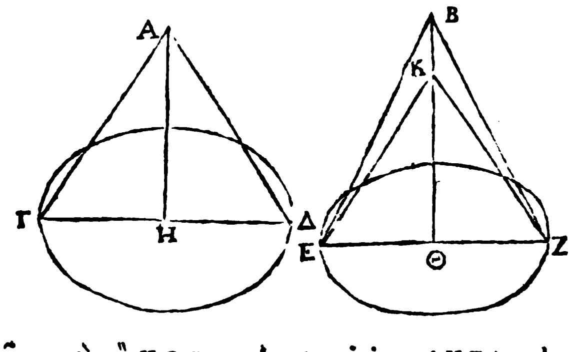
† Si *abb* sit ad *αββ* sicut *aabb* ad *ααββ*, erit *a* ad *α* sicut *aa* ad *αα*, ac proinde *a* ipsi *α* æqualis.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νη'.

Τῶν ἀντιπεπονθότων κώνων ὀρθῶν τοῖς ἄξοσι τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

ΚΑταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ἔστω ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΒΘ ἄξων πρὸς τὸν ΑΗ· λέγω ὅτι τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Ἔστω τῷ ΑΗΓΔ κώνῳ ἰσοϋψὴς ὁ ΚΘΕΖ κῶνος. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΑΗ, ἴση δέ ἡ ΑΗ τῇ ΘΚ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΚ, τουτέστιν ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον. ἀλλ' ὡς ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον οὕτως τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἔχει δὲ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ ἰσοϋψῆ κῶνον διπλασίονα λόγον οὗ ὃν ἔχει τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ ἑνὸς θεωρήματι· ὡς ἄρα τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ ἴσον ἐστί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

Καὶ ἐὰν τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ᾖ· ἀντιπεπόνθασιν οἱ κῶνοι τοῖς ἄξοσιν.

ΥΠΟΚΕΙΣΘΩ γὰρ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ ἴσον εἶναι· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον οὕτως ὁ ΒΘ ἄξων πρὸς τὸν ΑΗ.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς καὶ κατασκευῆς, ἐπεὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ ἴσον ἐστίν· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ οὕτως τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἐπεὶ δὴ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ ἰσοϋψῆ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς δὲ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ οὕτως τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, τουτέστιν ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, τουτέστιν ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΚ. ἀλλ' ἡ ΘΚ τῇ ΑΗ ἴση ἐστίν· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΒΘ ἄξων πρὸς τὸν ΑΗ ἄξονα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. LVIII. *Theor.*

Si recti coni reciproce proportionales ſint ſuis axibus; triangula per axes inter ſe æqualia erunt.

DEſcribantur coni, & ſit ut ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ ita axis ΒΘ ad ΑΗ axem: dico triangula ΑΓΔ, ΒΕΖ inter ſe æqualia eſſe.

Sit enim cono ΑΗΓΔ conus ΚΘΕΖ æque-altus. & quoniam ut ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ ita recta ΒΘ ad ΑΗ, æqualis autem eſt ΑΗ ipſi ΘΚ; erit itaque ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ ſicut ΒΘ ad ΘΚ, hoc eſt ut ΒΘΕΖ conus ad conum ΚΘΕΖ: conus igitur ΑΗΓΔ ad conum ΚΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam habet conus ΒΘΕΖ ad conum ΚΘΕΖ. ſed ut conus ΒΘΕΖ ad conum ΚΘΕΖ ita triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΕΖ; ergo conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam ΒΕΖ triangulum ad triangulum ΚΕΖ. habet autem conus ΑΗΓΔ ad conum æque-altum ΚΘΕΖ duplicatam rationem ejus quam habet ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ, ut demonſtratum eſt in quinquageſima ſexta hujus: quare ut ΒΕΖ triangulum ad triangulum ΚΕΖ ita triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ: triangulum igitur ΑΓΔ triangulo ΒΕΖ eſt æquale. quod erat demonſtrandum. *

PROP. LIX. *Theor.*

Si triangula per axes inter ſe æqualia ſint; erunt coni ſuis axibus reciproce proportionales.

PONATUR ΑΓΔ triangulum triangulo ΒΕΖ æquale: dico ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita eſſe axem ΒΘ ad axem ΑΗ.

In eadem enim figura & conſtructione, quoniam triangulum ΑΓΔ æquale eſt triangulo ΒΕΖ; erit ut ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ ita triangulum ΒΕΖ ad ΚΒΖ triangulum. ſed conus ΑΗΓΔ ad conum æque-altum ΚΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ; & ut triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ ita triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΕΖ: conus igitur ΑΗΓΔ ad conum ΚΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam habet triangulum ΒΕΖ ad ipſum ΚΕΖ, hoc eſt quam conus ΒΘΕΖ ad conum ΚΘΕΖ: ergo ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita conus ΒΘΕΖ ad ΚΘΕΖ, hoc eſt ita ΒΘ ad ΘΚ. eſt autem ΘΚ ipſi ΑΗ æqualis; igitur ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita ΒΘ axis ad axem ΑΗ. quod erat demonſtrandum. †

* Si abb ſit ad $\alpha\beta\beta$ ſicut α ad a, erit [per 16. 6.] $aabb$ ipſi $\alpha\alpha\beta\beta$ æquale, unde patet ab ipſi $\alpha\beta$ æquale eſſe.

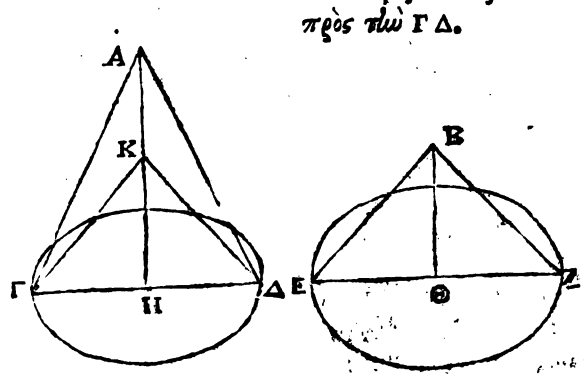
† Si ab ipſi $\alpha\beta$ æquale ſit, erit & $aabb$ ipſi $\alpha\alpha\beta\beta$ æquale, adeoque ἀνάλογον abb erit ad $\alpha\beta\beta$, ſive conus ad conum, ſicut α ad a, hoc eſt reciproce ut axes.

Prop. LX. *Theor.*

Si coni recti suis basibus reciproce proportionales sint; triangula per axes inter se triplicatam rationem habebunt ejus quam habent triangulorum bases inter se reciproce.

Describantur coni; & sit ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita basis Θ ad basim Η: dico ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem habere ejus quam habet ΒΖ ad ΓΔ.

Ponatur enim ipsi ΒΘ æqualis ΚΗ; erunt itaque coni æque-alti ΚΗΓΔ, ΒΘΕΖ inter sese ut eorum bases. quoniam igitur ut ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ ita Θ basis ad basim Η; & ut basis Θ ad basim Η ita conus ΒΘΕΖ ad conum ΚΗΓΔ; erit ut ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ ita ΒΘΕΖ ad ipsum ΚΗΓΔ conum: quare conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΗΓΔ duplicatam rationem habet ejus quam conus ΒΘΕΖ ad conum ΚΗΓΔ. sed ut conus ΑΗΓΔ ad ΚΗΓΔ ita ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΓΔ: triangulum igitur ΑΓΔ ad ipsum ΚΓΔ duplicatam rationem habet ejus quam ΒΘΕΖ conus ad conum æque-altum ΚΗΓΔ. conus autem ΒΘΕΖ ad ipsum ΚΗΓΔ duplicatam rationem habet ejus quam triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΓΔ, per quinquagesimam sextam huj. ergo triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΓΔ quadruplicatam rationem habet ejus quam habet ΒΕΖ triangulum ad triangulum ΚΓΔ; & propterea triangulum ΑΓΔ ad ipsum ΒΕΖ triplicatam rationem [illegible] ejus quam triangulum ΒΕΖ habet ad triangulum ΚΓΔ. sed ut triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΓΔ ita ΕΖ ad ΓΔ: triangulum igitur ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem habebit ejus quam habet ΕΖ ad ΓΔ. * quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξ'.

Τῶν ἀντιπεπονθότων ὀρθῶν κώνων ταῖς βάσεσι τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα πρὸς ἄλληλα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ αἱ βάσεις τῶν τριγώνων πρὸς ἄλληλα ἀντιπεπονθότως.

Καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ἔστω ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η βάσιν· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ.

Κείσθω τῇ ΒΘ ἴση ἡ ΚΗ· οἱ ἄρα ΚΗΓΔ, ΒΘΕΖ ἰσοϋψεῖς κῶνοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἐπεὶ οὖν ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η βάσιν, ἀλλ' ὡς ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η βάσιν οὕτως ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ· ὁ ΑΗΓΔ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ. ἀλλ' ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ΑΓΔ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον. ἀλλ' ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ τετραπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ· καὶ τὸ ἄρα ΑΓΔ [illegible] ΒΕΖ [illegible] λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ. ὡς δὲ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LXI. *Theor.*

Si conorum rectorum triangula per axem inter se triplicatam rationem habeant ejus quam habent eorum bases inter se reciproce; hi coni suis basibus reciproce proportionales sunt.

In eadem figura & constructione habeat ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem ejus quam basis trianguli ΕΖ ad basim ΓΔ: dico ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita esse circulum Θ basim coni ΒΘΕΖ ad circulum Η basim coni ΑΗΓΔ.

Quoniam enim ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΕΖ ad ΓΔ; ut autem ΕΖ ad ΓΔ ita ΒΕΖ tri-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξα'.

Καὶ ὧν κώνων ὀρθῶν τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τριπλασίονα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ἤπερ αἱ τῶν τριγώνων βάσεις πρὸς ἄλληλα ἀντιπεπονθότως· οὗτοι ταῖς βάσεσιν ἀντιπεπόνθασιν.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς καὶ κατασκευῆς, ἐχέτω τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ βάσις τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν· λέγω δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ἡ Θ βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Η βάσιν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν [illegible] ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΒΕΖ [illegible]

* Si abb sit ad $\alpha\beta\beta$ sicut β [illegible] 16.6.] $\alpha b 4$ ipsi $\alpha\beta 4$ æquale, ac proinde [illegible] $b 3$ ad $b 3$.

πρὸς

πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΓΔ τετραπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ. ὡς δὲ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΓΔ οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον τετραπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ. ἔχει δὲ ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ ἰσοϋψῆ κῶνον διπλασίονα λόγον ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ. ὡς γὰρ ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ οὕτως ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η βάσιν· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξϐ'.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς πρὸς κῶνον ὀρθὸν διπλασίονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν· τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ τοῦ τριγώνου βάσις πρὸς τὴν βάσιν.

Καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ὑποκείσθω ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχειν ἤπερ ἡ Η βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Θ βάσιν· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ βάσις τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν ΕΖ.

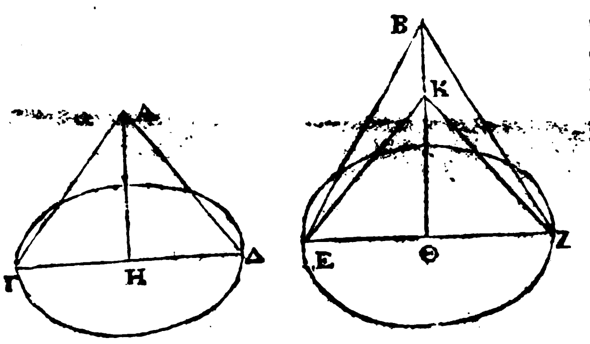
Ἔστω τῇ ΑΗ ἡ ΘΚ ἴση· οἱ ἄρα ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ κῶνοι, ἰσοϋψεῖς ὄντες, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Η βάσις πρὸς τὴν Θ βάσιν, ὡς γὰρ ἡ Η βάσις πρὸς τὴν Θ οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ οὕτως ὁ ΚΘΕΖ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ. καὶ ἐπεὶ ἰσοϋψεῖς εἰσιν οἱ ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ κῶνοι, ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς ἐδείχθη. ὡς γὰρ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ οὕτως ὁ ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον, καὶ τὸ ΚΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ· τὸ ἄρα ΚΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ

angulum ad triangulum æque-altum, ΚΓΔ: habebit igitur triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem ejus quam triangulum ΒΕΖ ad ipsum ΚΓΔ: ergo triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΓΔ quadruplicatam rationem habebit ejus quam triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΓΔ. ut autem triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΓΔ ita ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΗΓΔ: conus igitur ΑΗΓΔ ad conum ΚΗΓΔ quadruplicatam rationem habet ejus quam triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΓΔ. sed conus ΒΘΕΖ ad conum æque-altum ΚΗΓΔ duplicatam rationem habet ejus quam triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΓΔ: ergo conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΗΓΔ duplicatam habebit rationem ejus quam ΒΘΕΖ conus ad conum ΚΗΓΔ: quare ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita ΒΘΕΖ conus ad conum ΚΗΓΔ. sed ut ΒΘΕΖ conus ad conum ΚΗΓΔ ita basis Θ ad basim Η: igitur ut ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ ita basis Θ ad Η basim. Q. E. D. *

Prop. LXII. *Theor.*

Si rectus conus ad conum rectum duplicatam rationem habeat ejus quam basis ad basim; triangulum per axem ad triangulum per axem triplicatam rationem habebit ejus quam habet trianguli basis ad basim.

Describantur coni, & ponatur ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem habere ejus quam habet basis coni Η ad basim Θ: dico triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam habere rationem ejus quam ΓΔ basis trianguli ad basim ΕΖ.



Sit ipsi ΑΗ æqualis ΘΚ, & erunt coni æque-alti ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ inter sese sicut bases. quoniam igitur ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam habet basis Η ad basim Θ; ut autem basis Η ad Θ ita ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΘΕΖ: habebit ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem ejus quam ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΘΕΖ: ergo ut ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΘΕΖ ita ΚΘΕΖ ad ΒΘΕΖ conum. & quoniam coni ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ æque-alti sunt; habebit ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΘΕΖ duplicatam rationem ejus quam triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ, id quod [ad 56. huj.] demonstratum est. ut autem ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΘΕΖ ita est conus ΚΘΕΖ ad ΒΘΕΖ conum, & ita ΚΕΖ triangulum ad triangulum ΒΕΖ: ergo ΚΕΖ triangulum ad triangulum ΒΕΖ duplicatam rationem habet ejus

* Si vero ab sit ad $\alpha\beta$ sicut β^3 ad b^3; erit, ut prius, ab^4 ipsi $\alpha\beta^4$ æquale, adeoque ἀνάλογον abb erit ad $\alpha\beta\beta$ sicut $\beta\beta$ ad bb, hoc est conus ad conum sicut basis ad basim reciproce.

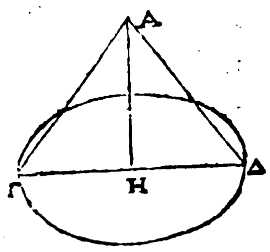
quam

quam triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ: ac propterea triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam habebit rationem ejus quam ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ. sed ut triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ ita basis ΓΔ ad ΕΖ basim, sunt enim triangula æque-alta: triangulum igitur ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΓΔ basis ad basim ΕΖ. quod erat demonstrandum.*

Prop. LXIII. *Theor.*

Si triangulum per axem ad triangulum per axem triplicatam rationem habeat ejus quam trianguli basis ad basim; conus ad conum duplicatam rationem habebit ejus quam habet basis coni ad basim.

IN eadem enim figura, triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem habeat quam basis ΓΔ ad ΕΖ basim; & rursus ponatur ipsi ΑΗ æqualis ΘΚ.



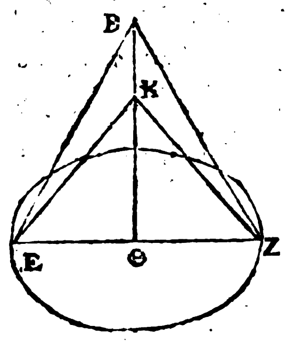
Quoniam igitur triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΓΔ ad ΕΖ; ut autem ΓΔ ad ΕΖ ita ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ: habebit ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem ejus quam triangulum ΑΓΔ ad ipsum ΚΕΖ: ergo ΚΕΖ triangulum ad triangulum ΒΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ. sed ut triangulum ΚΕΖ ad triangulum ΒΕΖ ita conus ΚΘΕΖ ad conum ΒΘΕΖ: conus igitur ΚΘΕΖ ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem habebit ejus quam ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ. habet autem & ΑΗΓΔ conus ad conum æque-altum ΚΘΕΖ duplicatam rationem ejus quam ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ: ergo ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΘΕΖ ita ΚΘΕΖ ad conum ΒΘΕΖ: & idcirco ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΘΕΖ, hoc est quam basis Η ad Θ basim. quod erat demonstrandum. †

ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ. ὡς δὲ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ οὕτως ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖ· ἰσοϋψῆ γάρ ἐστι τὰ τρίγωνα· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξγ΄.

Καὶ ἐὰν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ τοῦ τριγώνου βάσις πρὸς τὴν βάσιν· ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν βάσιν.

ΕΠΙ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ κείσθω πάλιν τῇ ΑΗ ἴση ἡ ΘΚ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΚΕΖ πρὸς τὸ ΒΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΚΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ οὕτως ὁ ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ· ὁ ἄρα ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἔχει δὲ καὶ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον ἰσοϋψῆ διπλασίονα λόγον ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ οὕτως ὁ ΚΘΕΖ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον, τουτέστιν ἤπερ ἡ Η βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Θ βάσιν.

* Si abb fuerit ad $\alpha\beta\beta$ sicut b^4 ad β^4; erit ab ad $\alpha\beta$ sicut b^3 ad β^3; itemque a ad α sicut bb ad $\beta\beta$: unde patet Conorum bases (hoc in casu) suis altitudinibus directe esse proportionales.

† Si ab sit ad $\alpha\beta$ sicut b^3 ad β^3; erit abb ad $\alpha\beta\beta$ sicut b^4 ad β^4, hoc est, Coni erunt inter se in duplicata ratione basis ad basim.

FINIS.