143

11ª = 2079

en Mag. costo 90 rs. de vellon en 15 de Julio de

~~68-3-18065~~

~~73-3~~ 6 3.

Este libro es de los doblados en la libreria de S. Luis el Real. y esta vendido con licencia de su mro y del convento.

F. Lucas de Mayor

Digitized by Google

FRAN. MARIÆ. II. VRBI. PRINCIPI. DICATI.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV.

Unà cum Scholijs antiquis.

À FEDERICO COMMANDINO VRBINATE

NVPER IN LATINVM conuersi, commentarijsque quibusdam illustrati.

PISAVRI, M D LXXII.

Cum Priuilegio Pont. Max.

IACOBVS Chriegher German.

GREGORII XIII. PONT. MAX.

PRIVILEGIVM.

MOTV PROPRIO &c. Cum, sicut accepimus, dilectus filius Federicus Commandinus Laicus Vrbinatensis nonnulla noua opera hactenus non impressa, videlicet Euclidis elementorum libros quindecim è greco nuper conuersos, & Aristarchi librum de magnitudinibus & distantijs Solis & Lunæ, necnon Pappi Alexandrini mathematicarum collectionũ libros sex. Heronis Alexandrini spiritalium librum. Euclidis opera reliqua. Theodosij de habitationibus librum, eiusdem de diebus & noctibus libros duos. Autolyci de ortu & occasu libros duos. eiusdem de sphæra, quæ mouetur, librum, & Archimedis opera omnia, ad publicam & communem omnium studiosorum vtilitatem imprimere seu imprimi facere intendat, dubitetq́ue ne eiusmodi opera postmodum ab alijs sine eius licentia imprimantur, quod in maximum suum tenderet præiudicium, Nos propterea eius indemnitati consulere uolentes, eidem Federico, ne prędicta opera omnia & singula uel quolibet ipsorum per ipsum Federicum, seu de eius ordine postquam per ordinarios locorum, & Inquisitores hęreticę prauitatis partium illarum examinata fuerint, imprimenda, per decem annos, post eorundem operum uel cuiuslibet ipsorum impressionem, à quocunque vel quibuscunque sine ipsius Federici licentia imprimi, aut ab ipsis uel alijs uendi, seu in eorum apothecis uel aliàs uenalia, præter quàm à dicto Federico, uel de eius ordine impressa, aut imprimenda teneri possint, concedimus & indulgemus. Inhibentes omnibus & singulis Christi fidelibus tam in Italia, quàm extra eam existentibus, præsertim bibliopolis & librorum impressoribus, sub excommunicationis latæ sententiæ, in terris uerò Sanctę Ro. Ecclesiæ mediate, uel immediate subiectis, etiam quingentorum ducatorum auri Cameræ Apostolicę applicandorum, & insuper ammissionis librorum pœnis toties ipso facto, & absque alia declaratione incurrendis, quoties contrauentum fuerit. ne intra decem annos prædictos ab impressione dictorum, uel cuiuslibet ipsorum respectiue computandos dicta opera, uel quodlibet ipsorum sine eiusdem Federici expressa licentia dictis decem annis durantibus

* imprimere

imprimere, seu ab ipsis, uel alijs præter, quam à dicto Federico impressa & imprimenda uendere, seu uenalia habere, uel proponere, uel ea, ut supra, habere audeant. Mandantes uniuersis uenerabilibus fratribus nostris Episcopis, Archiepiscopis, eorumq; ue Vicarijs in spiritualibus generalibus & in statu temporali Sanctæ Ro. Ecclesiæ etiam Legatis et Vicelegatis Sedis Apostolicæ, aut ipsius status Gubernatoribus, ut quoties pro ipsius Federici parte fuerint requisiti, vel eorum aliquis fuerit requisitus, eidem Federico efficacis defensionis præsidio adsistentes, præmissa ad omnem dicti Federici requisitionē contra inobedientes & rebelles per censuras Ecclesiasticas, etiam sæpius aggrauando, & per alia iuris remedia, auctoritate Apostolica exequantur, inuocato etiam ad hoc, si opus fuerit, auxilio brachij secularis. Et insuper quia difficile admodum esset præsentes ad quodlibet forum deferri, uolumus & Apostolica auctoritate decernimus ipsarum transumptis uel exemplis in ipsis operibus impressis plenam & eandem prorsus fidem ubique tam in iudicio, quàm extra haberi, quæ præsenti originali haberetur. Et cum absolutione à censuris ad effectum præsentium. et quod sola signatura sufficiat, præmissis omnibus constitutionibus & ordinationibus Apostolicis, ceterisq; ue in contrarium facientibus non obstantibus quibuscunque.

Placet V.

Datum Romæ apud Sanctum Marcum Non. Septembr. Anno primo.

ILLVSTRISSIMO ATQVE EXCELLENTISSIMO FRANCISCO MARIAE II VRBINATVM PRINCIPI.

CVM mihi in mentem venit Illustrissime Princeps quanta mathematicę facultatis olim apud veteres illos felicioris certe seculi, atque ingenij homines, & celebritas, & dignitas fuerit; non possum non vehementer dolere temporũ nostrorũ conditionem, qua nobilis disciplinę cultus, & splendor squalore immenso, ac tenebris penitus contabescit, dum vnusquisque detestanda auri cupiditatẽ quicquid certam in se lucri non habet occasionem, statim insolenter abijcit, temereque aspernatur. Exulat iam, publicisque ferè exclusum est gymnasiis nobile hoc, & pulcherrimum matheseos studium, quo nihil iucundius, ac magis domesticum vniuersa quondam habuit gręcia. Non est sanè quòd his temporibus vereare, ne triangulis, tetragonisque, aut circulis depictas porticus intueri, aut de huiusmodi rebus loquentes audire cogaris. Iacet omnino, iacet hoc disciplinę genus; et quod in delitijs olim habebatur, nunc quasi rude, & obscurũ passim reijcitur, vsq; adeo auaritia, cæcaq; diuitiarum libido apud nostrę ętatis homines increbuit. minuitur tamen in dies hic dolor meus, tum quòd ab externis magnę doctrinę uiris has artes amanter excitatas, scio diligentissime promoueri: tũ quòd aliquot imperio, ac dignitate florentes iã hęc studia benigne complecti, liberaliterq; fouere uideo: uerum enim illud esse quouis tempore homines sunt experti, qualia fuerint eorum, qui summę rerum pręsunt, eadem & reliquorũ fore studia. quam ob rem si non ad pristinum dignitatis fastigium, ad honestiorem certe gradũ eas breui peruenturas minime despero. idq; ea pręsertim ratione, quòd te Princeps Illustrissime, eximia mentis probitate, singulariq; ornatum prudentia, pręclaros omnes animi tui conatus ad compensanda literarum incommoda iam diu conuertisse lętus intueor. neque id iniuria profectò. nam vt illustria, & nunquam interitura memorię exempla tuę gentis omittam, Patrem habes incomparabilis iustitię, magnanimitatis, & prudentię Ducem, qui artes ingenuas benignitate fouet, auctoritate defendit, & premijs ornat. huic te similẽ, ac parem vt pręstes necesse est. Age vero quanti est illud ad confirmandã, augendamque indies per egregiam hanc voluntatem, quòd non solum literas diligis, verum etiam quo semper fuisti mentis acumine, tantos in illis progressus facis, ut omnes qui te noscunt, admiratione, ac gaudio afficiantur incredibili. Ut enim de me dicam, quoties summam ingenij tui præstantiam, atque solertiam in percipiendis Euclidis elementis magna cum voluptate sum admiratus? Hoc tu honestissimo, nec vnquam satis laudato bonarum artium studio inflammatus nuper vertendi, explanandiq'ue Euclidis onus mihi iniunxisti, quòd geometrarum omnium facile principem, tu Princeps optime iniquo patiebare animo, nec recte multis in locis conuersum, nec scite figuris ornatum fuisse. pręterea vero typographorum ita corruptum negligentia, vt non sine maxima studiosorum offensione legi, nedum intelligi posset. Ego vero prouinciam hanc tot difficultatibus impeditam alacri animo suscepi, tum vt optime tuę voluntatis mandato, quod semper obnixe studui, obtemperarem; tum etiam, vt pro ueteri meo instituto amatores huius disciplinæ quacunque liceret ratione iuuarem. haud enim multis abhinc annis medicinæ, cui me totum dederam, salutem plurimam dixi, vt his me tantum oblectarer studijs, & in eorum cognitione parum de alijs solicitus, conquiescerem; veterumq'ue præstantissima in hoc genere scripta, pro ingenij tenuitate à situ, ac tenebris uindicarem; & meis illustrata commentarijs in lucem, & omnium conspectum non sine aliqua studiosorum gratia proferrem. quod partim iam sumus assecuti, partim summis uigilijs diu, noctuq'ue contendimus. Archimedis enim, Ptolemæi, Apollonij, sereniq'ue excellentium virorum opera nonnulla superioribus annis conuersa à nobis, & explicata quàm accuratissime emisimus. Hoc autem tempore multum laboris, ac diligentiæ in Pappo, Herone, Theodosio, Autolyco, Aristarcho, & alijs, quorum magna pars nec græce, nec latinæ habetur, ponebamus, cum tuo iussu his depositis studium, operam, laborem, & curam denique omnem ad unum Euclidem conuertimus, ut rem à multis tentatam, Deo iuuante ad finem perduceremus. Nam ut pauca de hac re loquar, Orontius quidem Phinæus haud obscuri nominis auctor priores tantum sex libros nulla græci codicis ratione habita edidit. Iacobi uero Peletarij in eadē re labor eo etiā minus probatur, quòd Cāpani leditionem ex arabica conuersam lingua, magis, quàm grecam sequi uouerit. Alij autem peracuti sanè ingenij homines ἀναλύσεις geometricas in priores sex libros conscripserunt, cetera tamen non sunt prosecuti. At Candalla uir & generis nobilitate, & rerum cognitione insignis, licet omnes Elementorum libros, qui postulari à latinis uidebātur, latinos fecerit, locupletaueritq'ue, parum tamen (vt audio) eo nomine commenda-

tur,

tur, quod longius iter ab Euclide auerterit; & demonstrationes, quę in græcis codicibus habentur, uelut inelegantes, & mancas suis appositis reiecerit. An uero, quod ab omnibus requiri dicimus, nostra opera præstiterimus, aliorum erit iudicium. Illud quidem uere affirmare possumus, nullam à nobis nec impēsę, nec laboris, nec ualetudinis habitam fuisse rationem, ut hoc geometriæ columen, ac decus non solum expurgatum à mēdis, & figuris eleganter excultum haberent studiosi, uerum etiam summa fide conuersum, & scholijs antiquis, commentarijsq́ue quibusdam nostris illustratū. Hoc igitur qualecumq́ue est meę industriæ testimoniū, nunc tibi magnanime Princeps, cui plurimum debeo, & cupio omnia, dono, dicoq́ue, ut quibus possum officijs meam in te fidem, perpetuamq́ue obseruantiam, non modo nostrę ætatis hominibus declarem, sed ipsi etiā posteritati testatam literarum monumentis relinquam. & quod semper uehementissime conatus sum, uere persuadeam, neminem te habere, qui præstantem animi tui uirtutem, egregiamq́ue doctrinam memoria sempiterna apud omnes propagare magis studuerit, ac semper sit ueneratus. Vale, & nos, liberalesq́ue disciplinas, quod facis, tuere, & adiuua.

Federicus Commandinus.

QVOD plerique interpretum, atque eorum presertim, qui maxime laudantur, facere solent, vt antequàm euoluendi clarorum virorum monumenta, ac scripta, quę sibi pro reipublicæ literariæ commodo explicanda, exornandaq; sumpsere, initium faciant, quædam primo loco differant: idem & mihi huius tam præclari operis initio faciendum putaui. neque enim dubium est, quin rudis adhuc lectoris animus de re vniuersa à principio admonitus, minori postea cum labore, ac breuiori tempore conformetur ad vnũquodque intelligendum. Primum igitur non nulla summatim de hac tam nobili mathematicarum artium facultate dicemus; quæ nam subiecta illis materia sit, tum generatim, tum particulatim, quis ordo, ac dignitatis gradus, quae sit earundem diffinitio, quis ortus. Deinde vero miram ipsarum ad humanos vsus opportunitatem paucis ad modum enarrabimus. Post de Auctore, videlicet de Euclide ipso, de operis inscriptione, de scopo, ac de ipsius demõstrationibus, deq; eorum, quæ in his libris complexus est, dispositione, & methodo quedam minime inutilia attingemus. Denique summam vniuersæ στοιχειώσεως eo consilio adiungemus, vt non solum facilius quicquid de hoc genere præcipit Euclides intelligatur, verum etiam vt fidelius memoriæ mandatum custodiatur. Itaque philosophiam omnem, quæ in contemplatione versatur, præclarissimi philosophorum in tres partes distributam nobis ea ducti ratione tradiderunt, quòd rerum aliæ prorsus materiei quasi labe, ac cœno carentes solæ per se subsistunt, atque intelliguntur: aliæ vero diuersam penitus materiam ab his sortitæ, sic materiæ innituntur, vt nullo pacto absque illa possint consistere: aliæ denique medium inter has naturæ, ac dignitatis locum obtinent; tum quòd omni vacant materia, si accuratiori studio veram illarum conditionem inspexeris, tum quòd materia prædita quodam modo videantur, quia sine aliqua eius adiunctione ob ingenij nostri imbecillitatem cognosci nequeunt. Hinc triplex illud philosophiæ genus, Diuinum, quod quidem vt nomine, ita & re duo reliqua supra quàm dici potest, antecellit; Naturale, quod tertium est, ac postremas ordine, ac dignitate habet partes; & medium, quod mathematicum appellatur: quoniam solum vere disci, ac sciri potest, ob summam rei subiectæ constantiam, & certam demonstrandi rationem: Hoc quidem vt diuinis substantijs inferius est (quid enim tam eximium, vt cum illis comparetur?) ita naturalibus præstat, atque superius est; quæ materiæ funditus immersa, variam, & mutabilem eius sequuntur naturam. Hoc primum ab ijs inuentum est hominibus, qui ante orbis terrarum eluuiem cum feliciori fruerentur & cælo, & ingenio, sapientiam rerum cœlestium, admirabilemq; mundi ornatum animaduerterunt; ac duabus columnis erectis, quarum altera quidem lapidea, altera vero lateritia, quæ inuenerãt, diligentissime inscripserunt, ne aut aquarum inundatione, aut incendio, quorum alterum euenturum prædictione veterum nouerant, tantarum rerum notitia dilaberetur. quare nec primis illis temporibus, quæ tam inculta creduntur, nobile matheseos studiũ incultum iacuit. Hoc post terrarum eluuionem apud chaldæos summo præsertim Abrahami diuini propè hominis studio ornatum, & auctum viguit. Idem Aegyptij homines cum ob perpetuam cæli serenitatem, tum ob magnam locorum planitiem ad hoc genus scientiæ nati à Chaldæis acceptum summopere excoluerunt. Ab Ægyptijs ad græcos, quibus nec ingenij acumine, nec sciendi cupiditate quemque merito anteposueris, translatum est, Thaletis Milesij, Pytagoræ Samij, aliorumq; excellentium hominum industria, quos scientiæ amor & vasta maria trãsire, & longinquas peragrare regiones coegit, & præcipue Aegyptum, vbi, si græcis credimus, natæ & altæ sunt mathematicæ disciplinæ. quas postea & exercitatione, & scriptis illustrarunt Anaxagoras, Oenopides, Zenodotus, Brito, Antipho, Hippocrates, Theodorus, Plato, Theætetus, Archītas, Euclides, Aristarcus, Archimedes, alijq; innumerabiles, qui hac eximia, præstantiq; matheseos disciplina mortales propè cunctos in sui admirationem conuerterunt. Verum de his hactenus, neque enim historiam hic contexere propositum est. sed hæc pauca attigimus, vt antiquam huius studij nobilitatem obiter quasi digito ostenderemus. Nunc de materia & præcipuis Mathematicæ facultatis partibus

tibus, illarumq; ordine breuiter dicatur. Mathematicę omnes circa quantitatem versantur, atque illius præsidio quicquid moliuntur efficiunt. hinc facile est cognoscere, quot, & quæ sint huius disciplinę partes. Quis enim ignorat quantitatem aliam esse continuam, aliam vero discretam? & harum vtramque bifariam diuidi, quòd continua sit mutabilis, et immutabilis. discreta vero per se & ad aliquid, ita ut quadruplex quoque sit matheseos genus. scientia igitur, quæ magnitudines, et figuras continuas, non mobiles contemplatur, Geometrię sibi nomen vindicat. & est scientia quantitatis continuæ, atque immobilis positione. quæ vero mobilem, & continuam contemplatur quantitatem Astronomia dicitur. & est cognitio quantitatis continuæ semper mobilis, & eorum, quæ illius motu accidũt. Eodem modo quantitatem discretam Arithmetica obtinet, quæ numerum aut parem, aut imparem non ad alium comparando, sed per se considerat. estq; scientia discretę quantitatis, ac per se cognitæ. Musica circa mutuam sonorum uersatur habitudinem, ex quibus harmonia efficitur, ob discretam quidem, sed tamen alia ratione coniunctam quantitatem: & est discretæ quantitatis inuicem comparatæ atque ad aliquid cognitio. sed antequã ceteras matheseos species enumeremus, explicanda nobis est ratio, & modus aperiendus, quo mathematicis quantitatem & continuam, & discretam pro subiecto, eruditorum auctoritate substerni dicimus: neque enim de quoto, quod in sensilibus ipsis est, nec de quanto, quod circa corpora excogitatur, est absolute intelligendum; physici enim potius, quàm mathematici finibus continetur hęc contemplatio. Eorum igitur quæ naturali corpori insunt, nec ab eo separãtur, alia quidem nec re, nec cogitatione remoueri queunt, ut calor frigus, siccitas, quòd illa quà naturale est corpus, obtineat, alia vero etiam si re ipsa disiungi minime queant, animi tamen cogitatione fingimus abesse, eò quòd per accidens, non aũt per se, nec quatenus natura præditum est corpus, hęc habeat, qualia sunt rectũ, curuũ, inflexũ, ceteraq; id genus. Mathematicus igitur hoc pacto ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως circa quantitatem, formasq; à materia separabiles uersatur: & earum diffinitiones tradit, materiam non attingens. Quid est linea? μῆκος ἀπλατὲς, longitudo latitudinis expers. quid est triangulum? figura, quæ tribus rectis lineis continetur. & circulus figura, quæ ab vna comprehenditur linea. nulla hic materiæ mentio est, nullum eius vestigium ob allatam modo rationem. nemo tamen suspicetur mathematicas aliquo errore labi, quòd ita infirmo, ac debilis nitantur subiecto, quòd sola cogitatione conceptum possidetur. nam imaginatione quidem Geometra tamquam abaco vtitur, magnitudines diuidendo, interualla dimetiendo, & lineas describendo. hæc tamen omnia, non vt figmenta quędam, sed vti res quasdam, quę non nullam habent cum natura connexionem, nec mera somnia dici possunt, nec illarum imaginatione aliquo contaminantur mendacio mathematicæ disciplinæ. quæ vt subiectę materiei conditione à Diuinis distant, sic illas constanti, certaq; rationum demonstratione longe antecellunt. Sed recensemus iam reliquas mathematicæ species. Altera igitur facta diuisione dicimus mathematicam facultatẽ, aut in intellectilibus dũtaxat aut in sensilibus versari; intellectilia vtrique appellantes, quascumque inspectiones anima ipsa per se ipsam excitat, à materialibus sese vindicans formis. atque huius sanè generis duas principes, longeq; præstantes ponimus species, Arithmeticam & Geometriam. Eius vero generis, quod in sensilibus officium, atque opus exercet suum, sex fieri solent partes. Mechanica, Astrologia, Optica, Geodesia, Canonica, vel Musica, & supputatrix. Geometria rursus diuiditur in planorum, & solidorum contemplationem, quæ stereometria appellatur. si quidem circa puncta, & lineas peculiaris quædam non est tractatio, quoniam neq; figura in his vlla sine planis, vel solidis fieri posset. Geometria enim nihil aliud vbique agit, nisi vt plana, & solida vel constituat, vel iam constituta inter se comparet, aut diuidat. Arithmetica similiter diuiditur in numerorum linearium, & planorum, & solidorum contemplationem; etenim species numeri per se considerat ab vnitate procedentes, ortusq; planorum numerorum, tum similium, tum dissimilium; & ad tertiam vsque auctionem progressus. Geodesia, & supputatrix congruenter his non de intellectilibus numeris, vel figuris, sed de sensilibus tractant. non enim ad Geodesiam attinet cylindrum, vel conum metiri, sed aceruos, vt conos metitur, & puteos vt cylindros, neque id rectis lineis intellectilibus, sed sensilibus efficit, interdum quidem certioribus quodammodo, vt radijs solaribus, interdum vero crasioribus, vt spartis, & perpendiculo. neque supputator ipsas per se se numerorum passiones considerat, sed vt sunt in sensilibus inuoluti. Rursus Optica, & Canonica à Geometria, & Arithmetica ortum habent. nam Optica quidem radijs visorijs tamquam lineis vtitur & angulis, qui ex his constant. diuiditur autem in tres partes,

in

in Opticam, quę generis nomen obtinuit, catoptricam, & scenographicam. Optica reddit causas eorum, quæ aliter quàm sint, sese nobis offerunt, ob alios, atque alios rerum visarum situs, ac distantias. Catoptrica circa varias, multiplicesq; versatur reflexiones, & coniecturali cognitioni implicatur. Scenographrica ostendit, quo pacto ea, quæ apparent in imaginibus, non inconcinna videantur, vel deformia, iuxta distantias, atque altitudines eorum, quæ designantur. non igitur veram æqualitatem, & concinnitatem imitandam præcipit, sed eam, quæ aspectum nostrum concinne, & apposite feriat, ita vt cum circuli repręsentandi sint, interdum non circuli, sed ellipses describantur, & quadrata altera parte longiora fiant. Canonica, vel Musica apparentes harmoniarum considerat proportiones, regularũ sectiones adinueniẽs, et sensus vbique vtens adminiculo. Mechanica circa res sensiles, ac materiæ coniũctas versatur, dum aut bellica parat instrumenta, qualia Archimedes excogitauit, cum Marcellus Syracusas graui premeret obsidione: aut admirabilia quædam summo cum artificio construit spiritu, ponderibus, & spartis, qualia Ctesibius, Hero, & Archimedes non sine maximo stupore suorum temporum hominibus spectanda proposuerunt. Quis enim non admiretur, vt alia omittam vitreum illum Archimedis orbem? atque vel hac vna re mathematicas facultates, quæ talia præstare possunt, non summopere veneretur? Percurrit propriũ mentitus signifer annum, Et simulata nouo cynthia mense redit. ita ut eleganter exclamet Iuppiter apud Claudianum. Huccine mortalis progressa potentia curæ. Iam meus in fragili luditur artę labor. Quid quod aiũt Architam hac in re tantum potuisse, ut columbam ligneam in aere uolantẽ, quasi anima præditam, ac sese sustentantẽ fecerit. Astrologia de mundanis edisserit motibus, de cælestium corporum magnitudine figura, atque illuminandi ui, nec non de eorundem à nobis distantia. Huius partes sunt Gnomonica, Meteoroscopica, Dioptrica. Gnomonica circa horarum dimensionem per gnomonum positiones uersatur, de quibus Ptolemæus in libro, qui de Analemmate inscribitur, diffuse pertractat. Meteoroscopica eleuationum differentias, & distantias syderum exquirit, atque alia multa, & uaria, quę ad Astrologiam attinent theoremata docet. Dioptrica distantias solis, & lunæ, aliorumq; astrorum, per eiusmodi instrumenta inuestigat. Ceterum de his hactenus summatim dixisse satis sit. Sed quoniam plerique his præsertim temporibus sola utilitate ad optimarum artium studia excitantur, liberalesq; colunt disciplinas, uideamus obsecro, an mathematicæ nullius sint commodi ad iuuandos humanæ uitę usus, uti cęca quorundam turpissimi lucri cupiditas falsa iam prædicatione diuulgauit, ita ut qui hanc amplectuntur facultatem ab imperitis, uel alio studio occupatis hominibus palàm derideantur, tamquam in re inutili, atque uana oleum, & operem perdant. Agamus igitur pingui, quod aiunt, Minerua, quando nobis negocium est cum ijs, qui sola quæstus ratione persuaderi possunt, & inuramus hanc notam ingenuæ, ac nobili disciplinæ, ut lucrum, & diuitias pollicendo huiusmodi hominum sibi studia, & gratiam comparet. Negent isti primum, si possunt, mathematicas artes popularem utilitatem nullam habere, si mercatura cuius exercitatione tam multi distinentur ob magnam quæstus occasionem, sine arithmetica tractari potest. Experiantur deinde siquid dimetiri queunt absque Geodesiæ adiumento. sulcent maria, & longinquas petant regiones, nouum perquirant orbem nullo astrologiæ nauticæ fulti præsidio. Quid medicus? quantum uel unius Hipocratis iudicio debet Astronomiæ, cuius ductu syderum cursus & lunæ præsertim cognoscit. Vnde uniuersa dierum, quos criticos uocant, dependet ratio, quam diligenter cauendum est, ne grauiori aliqua curatione uexet ęgrotantem, dum luna, idq; præcipue morbi initio, à combustione, ut nunc loquuntur, ad oppositionis gradum proficiscitur? Quantum denique commodi, atque utilitatis affert Geometria, Arithmetica, & reliquæ omnes in publicos, & priuatos usus? cum nulla uel infimarum artium, ut finem consequatur, matheseos ope non egeat. quod singulas accuratius intuenti facile patet; & à nobis nullo negocio probaretur, nisi longam de re certa uitaremus disputationem. colore, umbra, situ, raritate, ac densitate mediorum, & refractione, quã uarios ornatus, admirabilesq; rerum figuras quotidie cernimus? & magna cum uoluptate spectando decipimur? sed errauimus, sola enim vtilitate cum illis agendum est. quare omissis opticis, & pictoribus mera afferantur commoda. Quó nam pacto igitur diffiteri possunt, quin mathematicæ ad uniuersam ciuitatum utilitatum mirabiliter ualeant, tum actionum tempora dimetiendo, tum uarias uniuersi reuolutiones demonstrãdo? Ars uero militaris, quę politices dextra manus est, qua ratione uolens, quæ numerosa est, paucissimam ostendere multitudinem, castra, aciesúe ad figuram circuli; ubi uero copias ostentare cupit, ad figuram quadranguli format, nisi unius Geometriæ auxilio? Quomodo aut hostiũ vrbes oppugnat, & capit, aut proprias tuetur, nisi

ipsius

ipsius Mechanices adiumento, qua admirabiles ad oppugnandum, aut resistendum fabricatur machinas, vti Archimedes aduersus Marcellum, qui (nam Ctesibios, Architas, Priscos, Eudoxos, Diogenetos missos facio) cum hanc adeo miram artem aliquando apud Hieronem prędicaret, Rex Geometram admiratus rogauit, vt tantæ fiduciæ periculum faceret. Quare Archimedes emptam è regijs nauibus vnam, & in siccum eductam, grauiusq́ oneratam solus machinis suis ad se pertraxit, non secus ac si in mari remis, ac uelis agitaretur. contra postea Alexandriam regis eiusdem nauim è littore in Mare deduxit, quod omnes siciliæ vires non potuerunt. Hac igitur arte qui instructi sunt, vrbis mœnia tueri, & hostium oppugnationes eludere queunt. & habuisset tanto impetu res cœpta fortunam (ait Liuius, cum de Marcello Syracusas oppugnante loquitur) nisi vnus homo Syracusis ea tempestate fuisset. Archimedes is erat, vnicus spectator cœli, Syderumq́, mirabilior tamen inuentor, ac machinator bellicorum tormentorum, operumq́, è quibus ea quae hostes ingenti mole agerent, ipse perleui momento ludificaret. libuit tam insigne illustris historici de Archimede testimonium afferre, vt huius exemplo, quantum vtilitatis, ac commodi sibi ac patriæ homines comparare possint, intelligant, si nobilem Matheseos facultatem diligenti cura, studioq́ excoluerint. ceterum dissimulare nequeo, me multo grauius perturbari quorundam philosophorũ, (vt sibi videntur) impudenti audacia (Cur enim grauius non ferã mathematicas ab ijs calumniari, quorũ esset munus eas colere, ac tueri, quàm ab hominibus, quos mala diuitiarũ cupiditas arctissimis deuinctos laqueis tenet) Sed aduersus hoc philosophorum genus nihil aliud dicã nũc, quòd sciã Aristippos istos, & Epicureos, vt vere, & eleganter eos nominat Petrus Ramus vir multę eruditionis, potius dolore quodã, studioq́ suam tegendi ignorantiam talia dicere, quàm quòd reuera putẽt matheseos cognitionem nihil vtilitatis, nihil adiumenti afferre ad omnes liberalium artium disciplinas, præsertimq́ ad Platonis Aristotelisq́ monumenta, quos hoc doctrinæ genere plurimũ delectatos fuisse planè constat. Qui enim hoc putent, cum multa quotidie necessaria imprimis, scituq́ pulcherrima apud hos inueniant, quę quoniam mathematico more tradita sunt, quasi scopulos quosdam euitare coguntur. Hinc Timæum non attingunt tãquã fabulosum, & nullius pretij librũ. Hinc septimum physicæ auscultationis librum, multaq́ alia Aristotelea suis discipulis, quòd, vt aiũt, inutilia sint, explanare grauantur. sed plura fortasse dicta sunt de hac re, quàm oportuit. nam veræ matheseos vtilitas, eximij fructus, incredibilesq́ voluptates in sola veritatis cognitione, ad quam nati sumus, positæ sunt. hac vna nos vere homines, uereq́ diuini luminis participes ostendimus. cetera terrenam & fragilem præseferunt conditionem. Age vero accedamus ad ea, quæ ad Geometram nostrum spectant. Et primum de ipso Euclide; deinde de inscriptione, et scopodicamus. postremo de illius demonstrationibus, quemadmodum à principio promiseramus. Liberemus igitur, multos ab eo errore, quo persuasi credunt Euclidem nostrum eundem esse & philosophum megarensem, & geometram, totamq́ hanc rem breuiter explanemus. Fuit senior Euclides ex Megaris oppido, quod isthmo adiacet, Parmenidis librorum in primis studiosus, àc megaricæ sectæ princeps, ad quem mortuo Socrate Plato ac plerique omnes socratici, triginta tyrannorum metu cõfugerũt. Hic dialogos sex conscripsit, quos enumerat Laertius. vsus est probationibus non ijs, quę per assumptiones, sed quę per conclusiones fiunt, ac magis dialecticę sunt. successorem habuit Eubulidem. Iunior autem Euclides qui ϛοιχειώτης ac geometra, dictus est, tempore Primi Ptolemæi floruit, academiam diligenter coluit, & quotidiana ferè Platonis discipulorum consuetudine egregie eruditus, Mathesim, quæ in Academia prҫeceptoris instituto tunc maxime vigebat, ita præclaro animi impetu est aggressus, vt progressus admirabiles, ac sempiterna æui memoria dignissimos in ea fecerit; constantiq́ omnium doctorum testimonio principem locum sibi vendicarit. nemo autem mihi ignotum esse arbitretur, Valerium Maximum scribere Platonem sacrę aræ conductores ad Euclidem, tamquam ad primarium mathematicum reiecisse. sed nos Heronem, & Proclum matheseos studio insignes sequimur, vel potius Eudemum ac Theophrastum ex peripateticis post præceptorem nobilissimos. hi namque hoc tradiderunt memoriæ in ijs libris, quos de historia geometrica conscriptos magno cum dolore, ac literatorum incommodo perijsse non ignoramus. Euclides igitur noster post Hippocratem, Leontem, Teudium, & Hermotimum, qui geometrica elementa, alius post aliũ conscripserant, opus hoc vere aureũ, summo cum labore, præstantiq́ mentis iudicio contexuit. Multa quidẽ inuenerant superiores illi homines excellenti quodã, ac propè diuino ingenij acumine: non pauca addiderant Theætetus atque Eudoxus, qui cum Platone versati sunt. Itaque Euclides dispersa

*dispersa collegit, collecta disposuit, & quæ pinguius, neg ligentiusq; demonstrata fuerant, ipse ad ab
solutas, ἀνελέκτουςq; demonstrationes redegit. magna profecto laus superiorũ, multo tamen ma-
ior Euclidis, qui indigesta eo composuit ordine, vt vel hac vna re perpetuam sibi apud sanę mentis
homines laudem compararit. inchoata ita absoluit, incerta ita firmissimis rationibus certissima ef-
fecit, vt nihil amplius propè in eo desideretur. Iam duo ferè annorum millia abierunt, ex quo Eu-
clides inter viuos cõnumeratus est. multos habuit aduersarios, qui inuidiæ potius morbo, quàm ve
ritatis amore illius scripta omni studio labefactare sunt conati; nullam tamẽ adhuc in illis φευδογ
ραφίαν, nullum errorem, nullum paralogismum seueri inquisitores deprehendere potuerunt. Cete
ra vero præstantissimi huius viri monumenta hęc habentur. Optica, Catoptrica, Musica, Data, phæ
nomena, scripsit etiam librum de diuisionibus, conicorum libros quattuor, porismatum tres, vt ex
Proclo, Pappoq; constat; qui quidem ad manus nostras non peruenerunt. Atque hæc sunt, quæ in-
uenire potuimus de Euclide nostro, cuius immortali beneficio Mathesis, quæ gręcũ mare ex Aegy
pto transgressa iam ducentos annos, ac paulo plures Græciam incoluerat, suam dignitatem, suosq;
honores non sine deorum voluntate est consecuta. Nunc quæ studiosorum mentes haud leuiter per-
turbat opinio de elementorum demonstrationibus, paucis referatur. quamuis enim hæc disceptatio
nullam futuro geometræ afferat vtilitatem, maxime tamen solicitos habet, nescio quo pacto huius
disciplinæ amatores; quippe quòd scire percupiant, cuinam tantum beneficij, atque adeo singulare
munus acceptum referant. Inter ceteros igitur, qui hac de re disputarunt, Ioannes Buteo, & Pe-
trus Ramus acerrimi iudicij homines in contrarias prorsus abiere sententias. hic enim in suo Ma-
theseos procemio non solum demonstrationes Theoni. (quod etiam alij dixerunt) ascribendas putat,
verum etiã ipsa elementa, tum quia ςοιχειώτης vltimus fuerit, nulliusq; propositionis inuentio in-
ter Euclidis laudes à Proclo referatur, tum etiam quia Theon ipse suas editiones in elementa no-
minatim laudarit in primo commentario super Ptolemæi magnam constructionem, ita vt elemen-
ta sibi eo iure vindicare possit Theon, quo antea Euclides. Idipsum ea quoq; probat ratione, quòd
Euclidis demonstrationes, quæ in Procli commentarijs leguntur, minime cum ijs conueniant, quas
in elementis habemus. Ille autem (de Buteone loquor) in suis annotationibus in Euclidem hoc diser
te negat; veteremq; prȩclarissimi hominis laudem tuetur; quoniam apud antiquos numquam sine
demõstratione theoremata proferãtur; vt quæ nullã, si nuda fuerint, habeant vtilitatẽ, ac dignita
tẽ; quodq; vero simile sit, verba illa ἐκ τῶν θεῶνος συνουσιῶν, ex quibus omnis effluxit disputãdi
occasio, ita possint intelligi, vt dicamus, Theonem conscripsisse quidem commentarios in elementa,
sed illos temporum calamitate perijsse, quemadmodum & quæ in eundem Pappus Alexandri-
nus scripserat, conseruato tamen titulo, qui postea Euclidi ipsi ncgligentur adiectus est. Nos autem
medium secuti credimus libros de elementis suis ornatos demonstrationibus ab Euclide nobis fuis-
se relictos. qui enim de hoc dubitare possumus, cum Proclus in commentarijs in X. propositionem,
post recitatam Apollonij pergæi demonstrationem hęc verba subiungat? πολλῷ δὴ οὖν κρείτ-
των ἡ τοῦ ςοιχειωτοῦ ἀπόδειξις hoc est lõge igitur melior est stichiotȩ (ita enim Euclidem appel
lat) demonstratio, & simplicior, magisq; ex principijs. vt autem hoc vere asserimus, ita illud meri
to concedemus, Theonem excellentis ingenij virum Euclidis demonstrationes fusius, planiusq; expli
catas in lucẽ protuisse: quod apud Proclum obseruari potest. Sic data nõ eo prorsus habentur mo
do, quo apud Pappum in septimo mathematicarum collectionum libro. nec optica, catoprica, quæ
nos vidimus Romę in vaticana bibliotheca. Quamobrem si hæc omnium consensu Euclidi concedi-
mus, etiam elementa concedenda sunt, præsertim cum verbis potius, quàm re ipsa Theon ab eo di-
screpet in demonstrandi ratione. sunt igitur illę quidem demonstrationes Euclidis, sed eo modo con
scriptæ, quo olim Theon Euclidem secutus suis discipulis explicauit. Non inutile autem, nec iniu-
cundum illud legentibus fore crediderim, si Platonis, Xenocratis, nec non Euclidis nostri insignes
huic disputationi sententias, tamquam coronidem addidero. poterunt enim Geometriæ candidatis
esse loco orationis copiosæ, atque elegantis. Plato igitur vt necessariam prorsus facultatis huius
cognitionem futuro philosopho palam ostenderet, verba hęc pro foribos gymnasij posuit. οὐδεὶς
ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. nemo rudis Geometrię huc pedem inferat. Xenocrates vero, qui post
præceptorem tertius in academia docuit, cuidam Mathematum, ac Geometrię ignaro gymna-
sium ingredienti, Abi, inquit, λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας. . ansas enim philosophiæ non
habes. Quid vero de nostro Geometra habemus dicere? Hic Ptolomeo Regi primo interroganti,
an alia*

in alia facilior, atque commodior esset, discendæ Geometriæ methodus, ac ratio. Nulla, inquit, ò Rex est via regia, quæ ducat ad Geometriam. Quàm constantem igitur animi diligentiam, alacremq; discendi voluntatem iuuenes ad hæc studia afferre oporteat, non solum Geometriæ, quæ per se nobilissima est, sed & totius philosophię caussa, nos tantorum virorum testimonijs declarasse sit satis. Dicamus iã de operis inscriptione, simulq; de Auctoris proposito. Nã quoties illa ab operis argumento desumpta est, explicatione vnius, & alterum fermè cognoscitur. Proclus meo quidem iudicio, videtur legisse Εὐκλείδου στοιχείωσις. qui vero ex Theonis sententia hoc opus nobis exortum reliquit. Εὐκλείδου στοιχείων βιβ. ιε. Idem tamen vtraque significat, siue illa sit Elementaris institutio, siue elementorum libri XV. Dixi autem non Theonem, quod multi credunt, sed illius familiarem quendam, virum planè eruditum, quicúque ille fuerit, Euclidem nobis, eo, quo nunc habetur, modo legendum cõcessisse, verborum illorum ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν permotus testimonio. nam & Ioannes cognomento Philoponus, quos in Aristotelem commentarios ipse composuit, se ex Hamonij Hermeæ colloquijs, ac disputationibus collegisse, ingenue prorsus grati animi exemplo professus est. Haud tamen negauerim Theonis auditorẽ, cum nomẽ suum suppresserit, voluisse nos totum hunc laboris, ac industriæ fructum Theoni dũtaxat acceptum referre. At enim quæret fortasse aliquis, nec iniuria profectò, cur Auctor hoc nomen elementum, aut elementare, quod de multis dicitur, solum protulerit. cum enim & de literarum principijs, & de rebus naturalibus, alijsq; dici soleat, adiungendum erat omnino, cuiusnam rei illa essent elementa, elementorumve institutio, vt à latinis postea factum est, qui Geometricorum addiderunt. Nos ita dubitanti, hoc ea omissum diceremus ratione, quia statim idipsum ex primis verbis de puncti notione cognoscitur, aut Hamonium secuti, qui Porphyrianam inscriptionem ab eadem culpa defendit, affirmaremus hanc inscriptionem κατ᾽ ἐξοχὴν, ac quandam Geometriæ excellentiam; & si ex nomine, quod multis commune est, factum sit, de Geometricis tantum elementis intelligi posse. sic Poetam dicentes de Homero, aut Virgilio intelligimus; frequens enim ac percelebre erat tunc Geometriæ studium. Elementa vero hic dicuntur de Theorematibus, quæ principij rationem habent. Theorematum enim (vt Proclus scribit) alia quidem elementa appellare consueuerunt, alia elementaria, alia vero extra horum vim determinantur. Elementa igitur dicuntur, quorum contemplatio ad aliorum pertinet scientiam, & ex quibus apparet solutio eorum, quæ in ipsis dubitare contingit. Vt enim vocis literatæ sunt principia prima, & simplicia, & indiuisibilia, quibus elementorum nomen imponimus: & omnis dictio, oratioq; ex his constat, sic & totius Geometriæ sunt quædam Theoremata principalia, & rationem habentia principij ad ea, quæ sequuntur, perq; omnia peruadentia, & multorum accidentium præbentia demonstrationes, quæ elementa appellant. Elementaria vero dicuntur, quæcumque ad plura pertinent & simplicẽ quandam suauitatem habent, non tamen eam, quæ est elementorum; propterea quòd eorum contemplatio non sit communis omni scientiæ. Quæcunque demum cognitionem non habent ad plura pertinentem, neque scitum aliquod, aut elegans demonstrant, hæc extra elementarium vim cadunt. Rursus elementum dupliciter dicitur, vt ait Menæchmus. illud enim, quod cõfirmat, eius quod confirmatur elementum est, vt primum secundi apud Euclidem, & quartũ quinti; sic & alia multa inter sese elementa esse dicuntur, quippe cum alterum ex altero confirmetur. nam ex eo, quòd extrinsecorum rectilineorum anguli quattuor rectis sunt æquales, intrinsecorum rectis æqualium multitudo, & contra ex hoc illud ostenditur. estq; huiusmodi elementum lemmati assimile. Aliter prę terea dicitur elementum, in quod, cum sit magis simplex, compositum resoluitur. Ita vero non omne rursus elementum dicetur, sed quę principalissima sunt eorum, quæ in rei effectæ ratione sunt cõstituta, quemadmodum Petitiones, & Dignitates Theorematum sunt elementa. iuxta hoc elementi significatum & ab Euclide elementa constructa sunt, alia quidem illius Geometrię, quę circa plana versatur; alia vero eius, quæ circa solida. sic & in Arithmeticis, & in Astronomicis elementares institutiones multi conscripserũt. Propositũ igitur fuit Euclidi in his libris tradere elemẽta ad vniuersã Geometriã necessaria, hoc est principalissima, simplicissimaq;, ac primis principijs maxime affinia theoremata, sine quibus reliqua huius sciẽtię partes cõprehẽdi nõ pñt. Euclides.n. ipse in alijs libris Aristarchus, Archimedes, Apollonius, Theodosius, Autolycus, Menelaus, Ptolemæus, Pappus, Serenus, et reliqui ad eorum demonstrationes his tamquam notissimis vbique vtuntur. Quod vero ad dispositionẽ, ac methodum Geometricorũ sermonũ attinet, sciendum est (vt inquit

Proclus) Geometriam, quemadmodum, & alias scientias certa quędam, & definita principia habere, ex quibus ea, quę sequuntur, demonstrat. quare necesse est seorsum quidem de principijs, seorsum vero de ijs, quæ à principijs fluunt pertractare. & principiorum nullam reddere rationem, quæ autem principia consequuntur, rationibus confirmare. nulla enim scientia sua demonstrat principia, verum circa ea per sese sibi fidem facit, cum magis euidentia sint, quàm quæ ex ipsis deriuātur: & illa quidem per sese, hæc vero deinceps per illa cognoscit. Ita & naturalis philosophus à determinato principio rationes producit, motum esse ponens; ita & medicus, & aliarum scientiarum, atq; artium peritus. Quòd si quis principia cum ijs, quæ à principijs fluunt, in idem commisceat, is totam perturbat cognitionem: eaq; conglutinat, quæ nullo pacto inter se conueniunt. Primum igitur principia, deinde ea, quę consequuntur, sunt distinguenda. quod sanè Euclides in vnoquoque suorum librorum obseruauit; quippe qui ante omnem tractationem communia huius scientię prīcipia exponit: et ipsa in suppositiones, seu diffinitiones, postulata, et axiomata diuidit. differūt nāque hæc omnia inter se, nec idem est axioma, & postulatum, & suppositio, vt Aristoteles asserit. Cum enim is, qui audit propositionem aliquam, statim sine doctore vt veram admittit, eique certessimam fidem adhibet, hoc Axioma appellatur, vt quæ eidem æqualia, & inter se æqualia sunt. Cum vero audiens dicente aliquo, eius, quod dicitur, notionem non habuerit, quæ per se se fidem faciat; verum tamen supponit, & eo vtenti assentitur, ea suppositio est, verbi gratia, circulum eiusmodi esse figuram, communi quadam notione non percepimus, sed audientes absque vlla demonstratione approbamus. Cum autem rursus & ignotum sit addiscenti, quod dicitur, & tamen eo assentiente assumatur, tunc id postulatum appellamus, vt omnes rectos angulos æquales esse. Quæ autē à principijs enascūtur, ea sunt vel Problemata, vel Theoremata. Problema illud est, in quo quippiam, cum primum non sit proponitur inueniendum, ac construendum. Theorema autē in quo quippiam in constituta iam figura ita esse uel non esse demonstratur. In hac igitur elementari institutione Euclidem quis non summopere admiretur propter ordinem, & electionem eorum, quæ per elementa distribuit, theorematū, atque problematū? non enim oīa assumpsit, quæ poterat dicere, sed ea dumtaxat, quæ elementari tradere potuit ordine. adhuc autem varios syllogismorū modos vsurpauit, alios quidem à causis fidem accipientes, alios vero à signis profectos, omnes necessarios & certos, atque ad scientiam accōmodatos. omnes præterea dialecticas vias, ac rationes; diuidentem in formarum inuentionibus; diffinientem in essentialibus rationibus; demonstrā tem vero in progressibus, qui à principijs ad quæsita fiunt. denique resoluentem in ijs, qui à quæsitis ad principia fiunt regressibus. Quin etiam varias conuersionum species tum simplicium, tum compositarum in hac tractatione intueri licet. & quę tota totis conuerti possint, quæ ve tota partibus, & contra, & que vt partes partibus. Postremo admirabilem omnium dispositionem, antecedentiūq; & consequentiū ordinē, ac cohærentiā, vt nihil prorsus addi, aut detrahi posse videatur.

Axioma. – Supposito – Postulatum. Problema – Theorema.

In primo igitur libro tractat de rectilineis figuris, videlicet de triangulis, ac parallelogrammis. Et primum triangulorum ortus, proprietatesq; tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera; ipsa inter se se comparans. Deinde parallelarum proprietates interijciens ad parallelogramma transit, eorumq; ortum declarat, & symptomata, quę in ipsis sunt, demonstrat. postea triangulorum, parallelogrammorumq; communicationem ostendit, & quo nam pacto parallelogrammum fiat ęquale triangulo. Denique de ijs, quę in triāgulis rectangulis à lateribus describuntur, quadratis, quam habeat proportionem quòd à subtendente rectum angulum describitur ad ea, quæ comprehendetibus ipsum fiunt.

In secundo libro parallelogrammum rectangulum, & gnomon definitur. deinde parallelogrammorum rectangulorum, & quadratorum, quę ex rectarum linearum sectionibus fiunt, proportiones declarantur. postea de quadratis, quæ à lateribus obtusiangulorum, & acutiangulorum triangulorum describuntur, quam habeant proportionem, quæ à subtendentibus obtusum & acutum angulum fiunt ad ea, quę à comprehendentibus describuntur. Denique qua ratione dato rectilineo æquale quadratum constituatur.

In tertio libro agitur de ijs, quæ circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis, itemq; de angulis, qui ad circulorum centra, vel ad circumferentias consistunt.

In quarto libro de figurarum planarum inscriptionibus & circumscriptionibus.

In quinto de Analogijs.

In

In sexto de proportionibus figurarum inter sese, de figuris similibus, & reciprocis. de rectis lineis proportionalibus, de parallelorum applicationibus ad rectas lineas, quę vel deficiant parallelogrammis similibus, vel excedant. quomodo recta linea terminata extrema, ac media ratione secetur, de proportionibus circumferentiarum & angulorum, itemq; sectorũ in circulis æqualibus.

Septimus, Octauus, & Nonus ad Arithmeticam pertinent.

In septimo agitur de numeris primis, & compositis; & quo pacto numerorum non primorum maxima communis mensura inueniatur. de numerorum parte, et partibus. de numeris multiplicibus, de proportionalibus, & quæcumque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem ferè & de numeris particulatim hic demonstrantur.

In octauo de numeris deinceps proportionalibus, de numeris planis, de quadratis, de cubis, & solidis. de similibus planis, & similibus solidis.

In nono item de similibus planis, de cubis, & solidis, & de numeris deinceps proportionalibus siue ab vnitate, siue simpliciter, de numeris primis, de numeris paribus, de imparibus, de pariter paribus, de pariter imparibus, de pariter paribus & pariter imparibus. de numeris perfectis.

In decimo de commensurabilibus, & incommensurabilibus magnitudinibus, itẽq; de rationalibus & irrationalibus.

Vndecimus, duodecimus, & reliqui ad stereometriam spectant, hoc est ad solidorum corporum contemplationem.

Et in vndecimo quidem primum agitur de rectis lineis quatenus ad solida corpora referũtur, videlicet quando sint in vno plano, quando rectæ, seu perpendiculares ad planum, quando parallelę, quomodo à puncto in sublimi dato ad planum perpendiculares ducantur. Deinde vero de planis simul desserit, tũ de solidis angulis, postremo de solidis parallelepipedis, & nõnulla de prismatibus.

In duodecimo de pyramidibus, et prismatibus; postea de conis et cylindris, demum de sphęris.

In tertiodecimo de constitutione quinque figurarum mundanarum, quas corpora regularia appellãt; videlicet tetraedri vel pyramidis; hexaedri vel cubi; octaedri, dodecaedri, et icosaedri, ad quorum euidentiam præmittit nonnulla de ijs, quæ accidunt rectæ lineæ extrema, ac media ratione sectæ, de pentagono æquilatero, de hexagoni, & decagoni lateribus, & de triangulo ęquilatero.

In quartodecimo de dodecaedri, & icosaedri in eadem sphera descriptorum comparatione.

In quintodecimo & vltimo de inscriptione quinque figurarum iam dictarum, & de earundẽ lateribus, & angulis.

F I N I S.

** a

INDEX EORVM, QVAE IN HIS LIBRIS
demonstrantur præter ea, quę Euclidis sunt.

IN PRIMO LIBRO.

IN SECVNDO LIBRO.

IN TERTIO LIBRO.

Spacium

IN SEXTO LIBRO.

IN SEPTIMO LIBRO.

Si

Datis

sis

IN VNDECIMO LIBRO.

IN DVODECIMO LIBRO.

Prismata

IN TERTIODECIMO LIBRO.

Latus

IN QVARTODECIMO LIBRO.

IN QVINTODECIMO LIBRO.

FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER PRIMVS

CVM COMMENTARIIS FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS.

DIFFINITIONES.

I.

PVNCTVM EST, cuius nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

F. C. COMMENTARIVS.

Euclides per negationem partium significauit nobis punctum, quod est principium totius propositę contemplationis. cum enim principia aliam rationem habeant ab ijs, quorum sunt principia, & eorum negationes illorum quodammodo naturam ostendant; non immerito negantes sermones principijs ipsis conuenire comperti sunt: quod etiam asserit Proclus auctoritate Parmenidis. Pythagorici vero per proportionem, & translationem quandam, punctum diffinierunt esse vnitatem positionem habentem: punctum enim positionem habet, vnitas non habet. Aristoteles in quarto diuinę phylosophię libro. vbique, inquit, ipsum vnum aut forma, aut quantitate indiuisibile. eorum autem, quae quantitate, & vt quantitas est, diuidi non possunt, id quidem, quod penitus est tale, & sine positione, dicitur vnitas; quod vero penitus est tale, positionemq; habet, dicitur punctũ; & id quod vno modo diuidi potest, linea nuncupatur; & id quod duabus ex partibus, superficies: quod vero omni ex parte, & trinam dimensionẽ habet, dicitur corpus.

Punctum secundum Pythagoricos est unitas positionem habens.

II.

Linea vero est longitudo latitudinis expers.

F. C. COMMENTARIVS.

Post punctum linea secundum obtinet locum: namque vt punctum ad lineam, ita linea ad superficiem, de qua mox dicetur, rationem habet principij. punctum quidem ipsum, vt magnitudinum omnium principium per solam negationem, lineam vero partim per affirmationem, partim per negationem significauit cum dixit, longitudinem esse latitudinis expertem. fuerunt qui lineam aliter diffinirent: alij enim σημείου ῥύσιν hoc est puncti fluxum dixerunt; alij ut Aristoteles τὸ μέγεθος μοναχῇ διαιρετὸν ἢ ἐφ' ἓν διαιρετὸν hoc est magnitudinem, quae vno modo diuidi potest, nempe secundum longitudinem. lineae autem notionem habemus, vt Apollonius inquit, cum longitudines tantum vel viarum, vel parietum dimetiri volumus; non enim tunc latitudinem, & crassitudinem adiungimus, sed vnicam duntaxat dimensionem consideramus; quemadmodum & cum agros metimur, superficiem respicimus; cum autem puteos, solidum: omnes enim dimensiones simul colligentes dicimus tantum esse spacium putei secundum longitudinem, latitudinem, & crassitudinem. sensum vero ipsius lineae habebimus, si disiunctiones locorum illuminatorum ab vmbrosis inspexerimus, tum in luna, tum in terra; hoc enim medium iuxta latitudinem, dimensionem non habet, sed iuxta longitudinem, quae vnà cum lumine, & vmbra producitur,

Punctũ magnitudinum omniũ principium.

Lineae notio.

Superficiei notio. Solidi.

Lineae sensus unde habeatur.

Lineæ simplices. Mixtæ.

ducitur. linearum aliae simplices, aliae mixtae. simplices sunt recta, & circularis, quamquam recta simplicior sit, reliquae vero omnes mixtae, quales sunt coni sectiones, helices, conchoides, cissoides, & aliae.

III.

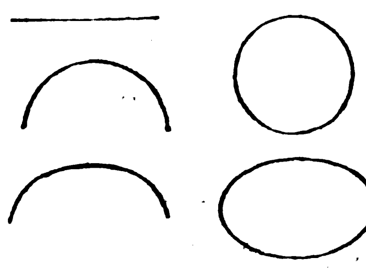
Lineæ fines sunt puncta.

F. C. COMMENTARIVS.

Linea tribus modis utitur Euclides

Circularis linea per se nullos habet fines.

Ellipsis.



Cum linea tribus modis vtatur Euclides, vel enim terminata, & finita ex vtraque parte, vel infinita, vel ex altera quidem parte finita, ex altera vero infinita; hoc loco de ea, quae vtrinque finita est, sermo habetur; cuius fines dicit esse duo puncta. Circularis autem linea per se nullos habet fines; sed si aliquod in ea punctum accipiatur, idem erit & principium, & finis, diuersa tamen ratione. quod diximus de circulari linea, idem & de ellipsi dici potest, quae ipsa in se ipsam vergit sicuti circulus: si autem sumatur portio circularis lineae, seu ellipsis, eius non aliter, quàm rectae lineae fines erunt duo puncta. Eodem modo & de alijs curuis lineis intelligendum est.

IIII.

Recta linea est, quæ ex æquali suis interijcitur punctis.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc est recta linea est, quae aequalem continet distantiam, eam scilicet, quae inter sua interijcitur puncta. quantum enim alterum punctorum ab altero distat, tanta est magnitudo rectae lineae ab ijs terminatae. atque hoc est ex aequali suis interijci punctis. si autem in circumferentia circuli, aut alia quauis linea duo puncta sumantur; eius portio, quae interijcitur, longe maior erit, quàm sit dictorum punctorum distantia. ad hunc quidem modũ rectae lineae diffinitionem exponere mihi videtur Proclus.

Plato q. rectã lineam diffiniat.

Plato autem rectam lineã diffinit esse eam ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ, hoc est cuius media extremis obsistunt. illud .n. ijs, quę in recta linea sunt, necessario contingit; ijs vero, quae in circulari, aut alia quapiam linea, non item. Vnde & astrologi dicunt solem deficere, cum in eadem recta linea constituitur ipse, lunaq́; et oculus noster: obsistit enim ei tunc luna media existens.

Archimedis diffinitio rectæ lineæ.

At Archimedes, vt Proclus auctor est, dixit rectam lineam esse breuissimam omnium, quae eosdem habent fines. quae quidem diffinitio recepta est in Campani editione. linea, inquit, recta est ab vno puncto ad alium breuissima extensio in extremitates suas eos recipiens.

V.

Superficies est id, quod longitudinem, et latitudinem tantum habet.

F. C. COMMENTARIVS.

Superficiei variæ diffinitiones.

Superficiei cognitio & sensus.

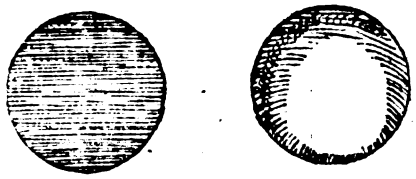
Superficiem dixit longitudinem, & latitudinem tantum habere, propterea quòd crassitudinis expers sit. alij corporis terminum ipsam esse diffinierunt; alij magnitudinem binis distantem interuallis. superficiei vero cognitionem nos habere dicunt, quando agros dimetimur, & eorum terminos iuxta longitudinem, ac latitudinem distinguimus. sensum vero quendam capere, quando vmbras aspicimus, cum enim ipsae crassitudinis sint expertes, quòd partes terrae interiores penetrare non possunt; latitudinem, & longitudinem tantum habent. superficierum aliae simplices sunt, aliae *aliæ mixtæ. simplices sunt plana, & sphærica, reliquæ vero mixtæ, vt Cylindrica, conica, & quæ à coni sectionibus ortum habent, videlicet conoidum, & sphæroidum figurarum, & aliæ.* Superficies simplices & Mixtæ.

VI.

Superficiei fines sunt lineæ.

F. C. COMMENTARIVS.

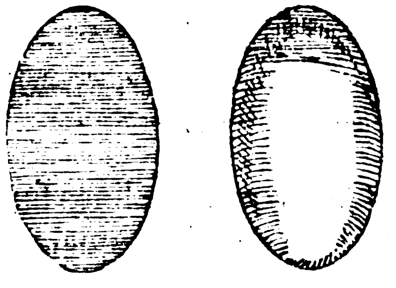
Quemadmodum non omnis lineae fines sunt puncta, ita non omnis superficiei fines sunt lineae; superficies enim sphærae, vel sphæroidis per se nullos habet huiusmodi fines, nisi planis abscindatur, nam tunc fines habet lineas ipsas, quæ ex sectione oriuntur. superficiei autem circuli, & eius, quæ ellipsi continetur, finis est linea vna, videlicet circumferentia, & ellipsis. quòd si secentur tunc pro finibus lineas habebunt.



Superficies Sphæræ, & Sphæroidis. Superficies circuli, & ellipsi cōtēta.

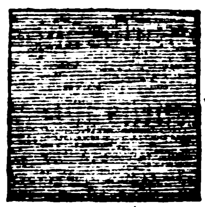
VII.

Plana superficies est quæ ex æquali suis interijcitur lineis.



F. C. COMMENTARIVS.

Antiquiores philosophi (vt testatur Proclus,) τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸ ἐπίπεδον hoc est superficiem, & planum pro vno, eodemq́; accipiebant. At Euclides, & qui eum secuti sunt, genus quidem superficiem faciunt, eius vero speciem planum, vel planam superficiem, quemadmodum lineæ speciem rectam lineam. & idcirco planum diffiniunt ex quadam ad rectam lineam proportione. vt enim recta linea est, qua ex æquali suis interijcitur punctis, vel cuius media extremis obsistunt, vel breuissima omnium, quæ eosdem habent fines, ita planam superficiem dixerunt esse eam, quæ ex æquali suis interijcitur lineis, vel cuius media extremis obsistunt, vel breuissimam omnium superficierum eosdem fines habentium, & omnino quæcunque sunt rectæ lineæ diffinitiones, omnes ad planam superficiem commodissime transferri possunt. Quòd cum multæ sint superficierum species, Euclides planam tantum diffinuit, atque in hac figuras, & earum affectiones contemplatur.



Superficiē, & planū Antiqui pro eodem accipiebant.

Planæ superficiei uariæ diffinitiones

Euclides superficiē planam tātum diffiniuit.

VIII.

Planus angulus est duabus lineis in plano se se contingentibus, & non in directum iacentibus, alterius ad alteram inclinatio.

IX.

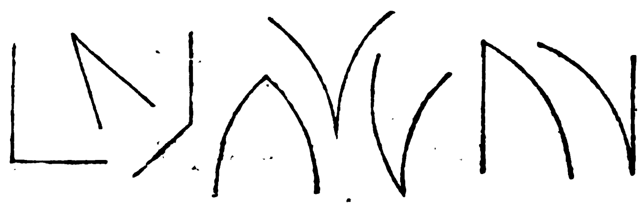
Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

F. C. COMMENTARIVS.

Angulum alij quidem in prædicamento eorum quæ sunt ad aliquid ponentes, inclinationem esse dixerunt, vel linearum, vel planorum, quæ ad se inuicem inclinata sunt. alij in qualitate ipsum comprehendentes, vt rectum, & inflexum, talem quandam affectionem dixerunt esse superficiei, vel solidi. alij autem ad quantitatem referentes vel superficiem, vel solidum esse asseuera-[illegible] inquiunt, is, qui in superficie est angulus linea; qui in solidis superficie. quod *autem his diuiditur nihil aliud est, nisi magnitudo; & hęc non linearis, namque lineam punctum diuidit. quare relinquitur, vt sit superficies, vel solidum. Quid igitur in tanta controuersia dicendum? aut quid eorum dicemus esse angulum? Respondet Proclus angulum nihil esse eorum per se se, sed ex concursu omnium constitui. contingere autem hoc non solum angulo, sed & ipsi triangulo, quod quidem particeps est quantitatis; & idcirco ęquale dicitur, & inęquale, vt pote materię rationem habens. particeps quoque est qualitatis eius, quę ad figuram pertinet, quoniam & similia dicuntur triangula, & inęqualia. Ita igitur angulus quoque omnino quidem indiget quantitate, indiget autem & qualitate, per quam veluti propriam habet formam, & existentię figuram. indiget denique & determinantium ipsum linearum, vel planorum comprehendentium habitudine. atque ex his omnibus angulus constat. non tamen est vnum aliquod eorum. & est quidem diuisibilis, & ęqualitatem, & inęqualitatem suscipere potest, iuxta eam, quę in ipso est, quantitatem.*

Angulorũ diuisio.

Angulorum alij quidem in superficiebus, alij vero in solidis consistunt: & eorum qui in superficiebus alij in simplicibus, alij in mixtis. Eorum qui in planis fiunt alij simplicibus lineis comprehenduntur, alij mixtis, alij vtrisque. omnes autem qui rectis comprehenduntur lineis rectilinei appellantur.



X.

Cum vero recta linea super rectam lineam insistens eos, qui deinceps sunt angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterque ęqualium angulorum: et quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.

X I.

Obtusus angulus est, qui maior est recto.

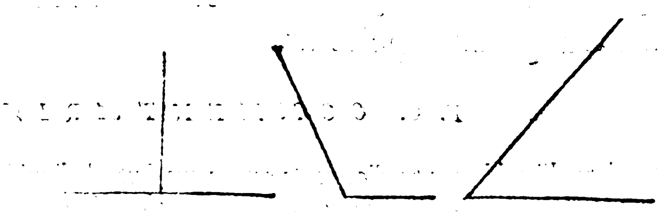
X I I.

Acutus autem, qui recto est minor.

F. C. COMMENTARIVS.

In diffinitione anguli obtusi, & acuti genus subintelligi oportet, est enim vterque ipsorum rectilineus; hic quidem minor recto, ille autem maior. Sed non simpliciter quicumque minor est recto, is est acutus; neque quicumque maior recto est obtusus. nam qui gręce κερατοειδὴς dicitur, hoc est cornicularis, qui continetur recta linea circulum contingente, & circumferentia ipsa, non tantum recto, sed etiam omni acuto est minor, acutus autem non est. & semicirculi angulus omni recto est minor, sed tamen non est acutus. quorum quidem causa est, quod sunt mixti, & non rectilinei. & eorum, qui lineis circularibus, aut alioqui curuis continentur multi recto maiores apparent, non tamen sunt obtusi. Cum igitur rectum angulum diffinire proposuisset Euclides rectā assumpsit lineam super aliam rectam insistentem; & angulos, qui ex vtraque parte sunt, quos angulos deinceps appellat, inter se aequales facientem. Obtusum autem, & acutum diffiniens non item assumpsit rectam lineam ad alterutram

Angulus cornicularis. Semicirculi angulus.



Anguli deinceps qui sīt.

partem

partem inclinatam, sed per comparationem ad rectum explicauit. ipse enim etiam non rectorum mensura est, quemadmodum & inęqualium ęqualitas. lineę vero ad alterutram partem inclinatę infinitę sunt, & non vna tantum, vt perpendicularis. Illud autem meminisse oportet Euclidem hoc loco de ijs sermonem habere, quę in eodem plano consistunt. quare neque perpendicularem omnem diffiniuit, neque omnem angulum. solida enim perpendicularis non ad vnam tantum rectam lineam angulos rectos facit, sed ad omnes, quę ipsam tangunt, in subiecto existentes plano, de qua in vndecimo libro agetur.

Angulus rectus est non rectarũ mẽsura, quemadmodum inæqualium æqualitas.

XIII.

Terminus est, qui alicuius est finis.

F. C. COMMENTARIUS.

Terminum non ad omnem magnitudinem referri oportet, vt scribit Proclus, lineę namque terminus est, & finis, sed ad spacia, quę sunt in superficiebus, & ad solida. nunc enim terminum vocat ambitum, qui spacium vnumquodque determinat; & huiusmodi terminum, finem esse dicit, non vt punctum dicitur lineę finis, sed vt includit, & seiungit ab ijs, quę circumposita sunt. est autem hoc nomen priscę illi geometrię proprium, per quam agros metiebantur, & eorum terminos distinctos seruabant, ex qua huius scientię cognitionem assecuti sunt. huiusmodi igitur ambitum exteriorem terminum vocans Euclides iure, & merito ipsum finem determinauit spaciorum. per hunc enim vnumquodque contentorum pręfinitur, veluti in circulo, circumferentia quidem terminus est, & finis; ipsum vero planum aliquod spacium est, & similiter in triangulo tria latera, & in quadrilatero quattuor latera termini sunt, & fines; spacium vero, quod his lateribus continetur.

Terminus, & finis.

XIIII.

Figura est, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

F. C. COMMENTARIUS.

Figurarum aliae planae, aliae solidę. planarum figurarum circulus quidem, & ellipsis, solidarum sphęra, & sphęroides vnico termino, alię pluribus terminis continentur.

Figurarum aliæ planæ, aliæ solidæ.

XV.

Circulus est figura plana vna linea contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab vno puncto intra figuram existente omnes rectæ lineæ pertinentes sunt ęquales.

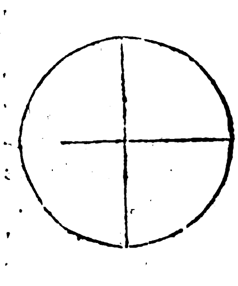
XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

F. C. COMMENTARIUS.

Circulus planarum figurarum prima est, simplicitate quidem solidis pręstans; vnitatis vero ad planas rationem habens.

Figura] *loco generis*. Plana] *ad differentiam figurarum solidarum*. Vna linea contenta] *vt differat ab ijs, quę pluribus lateribus continentur*. quæ circumferentia appellatur] *per hoc differt ab ellipsi, quę & ipsa vna linea continetur, sed eam ellipsim vocant. liceat enim mihi nunc spacium ellipsi contentum etiam ellipsim appellare.* Ad quam] *ab ellipsis autem centro non plures, quàm quattuor rectę lineę ęquales ad ambitum duci possunt.* ab vno puncto] *ex infinitis punctis, quę intra figuram sunt, vnum dumtaxat hoc pręstare potest*. intra figuram existente] *est etiam punctum extra figurę planum, à quo omnes rectę lineę ad circumferentiam ductę sunt ęquales, quod non centrum, sed circuli polus in sphęricis appellatur.*



Ellipsis.

Circuli polus.

Diameter

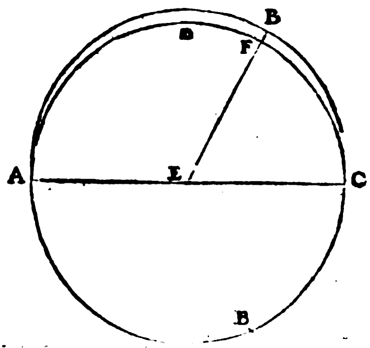
XVII.

Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem et bifariam circulum secat.

F. C. COMMENTARIVS.

Diametri parallelogrammorum.

Diameter circuli] *sunt enim parallelogrammorum quoque diametri, sed hę interdum duę γώνιοι hoc est diagonij appellantur. sunt & diametri ellipsis, quarum duę axes dicuntur. pręterea etiam sphęrę diametri sunt, quę axes nuncupantur. circuli igitur propria est diameter.* recta quadam linea per centrum ducta] *possunt namque in circulo duci infinitae rectae lineę, quę per centrum non transeunt.* & ex vtraque parte à circumferentia circuli terminata.] *rectę lineę etiam per centrum ductę, quę vel citra, vel vltra circumferentiam terminantur, diametri non sunt.* quæ & bifariam circulum secat.] *sit enim circulus A B C D, cuius diameter A C: et stante diametro intelligatur circumferētia A B C eleuari, ac superponi circumferentię A D C. Dico circumferentiam A B C ipsi A D C congruere. si enim non congruit, vel cadet extra, vel intra, vel partim extra, partim intra. cadat primum extra si fieri potest: & ex centro circuli, quod sit E, ducatur E B secans circumferentiam A D C in F. quoniam igitur rectę lineę à centro ad circumferentiam ductę inter se sunt ęquales, erit recta linea E B ęqualis ipsi E F, hoc est totum parti quod fieri non potest. quare circumferentia A B C extra ipsam A D C non cadet. similiter demonstrabimus neque eam cadere intra, neque partim extra partim intra. in ipsam igitur cadat necesse est: & circumferentia A B C congruet ipsi A D C. Quòd si circumferentia circumferentię congruit, & superficies contenta recta linea A C, & circumferentia A B C congruet superficiei, quę eadem A C, & circumferentia A D C continetur. ex quibus sequitur per octauam communem notionem & circumferentiam circumferentię, & superficiem superficiei ęqualem esse. diameter igitur A C circulum A B C D bifariam secat. quod oportebat demonstrare.*



XVIII.

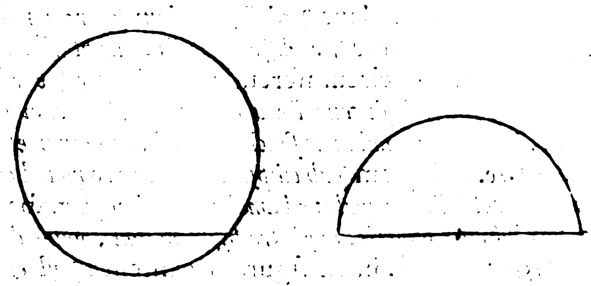
Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipsa circuli circumferentia intercipitur.

XIX.

Portio circuli est figura, quę recta linea, & circuli circumferentia continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex circuli quidem diffinitione centri naturam inuenit, ab omnibus alijs punctis quę in circulo sunt differentem; à centro autem diametrum diffiniuit, & ab omnibus alijs rectis lineis, quę intra circulum describuntur, seiunxit. nunc autem à diametro quid nam sit semicirculus tradit, cum dicat ipsum contineri duobus terminis, ijsq; semper differentibus, videlicet recta linea, & circumferentia: & rectam



& rectam lineam non esse quamlibet, sed circuli diametrum, si quidem & minor portio circuli, & maior continetur recta linea, & circumferentia; quae tamen semicirculi non sunt, quoniam circuli diuisio non est facta per centrum. omnes autem huiusmodi figurae biformes sunt, & ex dissimilibus constant. figurae enim contentae duobus terminis, vel duabus circumferentijs continentur, vt lunularis, vel recta linea, & circumferentia, vt iam dictae, vel duabus lineis mixtis, vt si duae ellipses se inuicem secent, figuram continebunt, quae inter ipsas interijcitur, vel mixta & recta, vt ellipsis dimidium. itaque semicirculus duabus quidem lineis dissimilibus, sed tamen simplicibus, atque ad se se applicatis continetur. antequam igitur triadicas figuras diffiniat, iure merito post circulum ad biformes accessit, quoniam duae rectae lineae spacium concludere nunquam possunt; recta autem linea & circumferentia possunt. & duae circumferentiae similiter vel angulum facientes, vt in lunulari, vel figuram angulis expertem, vt si duos intelligas circulos idem centrum habentes. quod enim medium interijcitur spacium duabus circumferentijs continetur interiori, & exteriori, & nullus fit angulus, cum se inuicem non secent, vt in lunulari, & vtrinque conuexa figura. At vero centrum semicirculi idem esse, quod & circuli centrum, manifeste constat. diameter enim centrum in se habens complet semicirculum. Illud autem notatione dignum solam hanc figuram ex planis in ambitu centrum habere. vnde colligitur centri tres esse locos, vel enim intra figuram, vt in circulo & ellipsi, vel in ambitu vt in semicirculo, vel extra, vt in vna sectionum conicarum, videlicet in hyperbola. Centrũ tres habet locos.

XX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

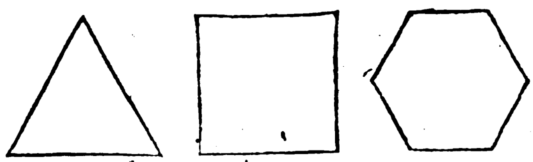
XXII.

Quadrilateræ, quæ quattuor.

XXIII.

Multilateræ vero, quæ pluribus, quàm quattuor rectis lineis comprehenduntur.

F. C. COMMENTARIVS.

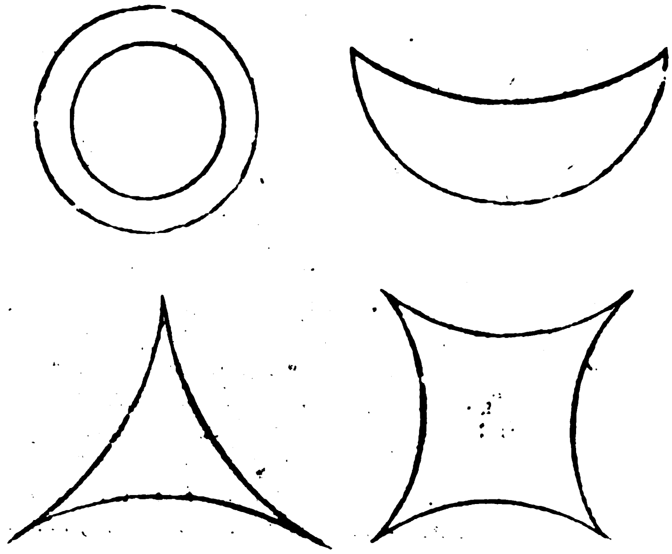


Post circulum, semicirculum, & circuli portiones, transit ad figuras rectilineas, quae quidẽ ordinatim per numeros in infinitum procedunt, initium ducentes à ternario, quoniam duae rectae lineae spacium concludere non possunt, vti dictum est. Meminit autem trilaterarum, & quadrilaterarum duntaxat figurarum, vtpote quae magis elementares sunt; in primo enim libro de triangulis, & parallelogrammis agit, reliquas communi nomine multilateras appellans. Porrò figurarum planarum aliae simplicibus continentur lineis, aliae mixtis, aliae vtrisque. & earũ, quae simplicibus, aliae quidem similibus specie continentur, vt rectilinea, aliae specie dissimilibus, vt semicirculi, & circulorum portiones. earum insuper, quae specie similibus aliae circulari cõprehenduntur linea, aliae recta. At earũ quae circulari, aliae duabus, aliae pluribus continentur & vna quidem circulus ipse, quae vero duabus, aliae angulorum expertes. Figurarum planarum diuisio.

sunt,

Corona

sunt, vt corona, quae concentricis circulis terminatur, alię angulares ut meniscus. earum quae pluribus, quàm duabus continentur, processus est in infinitum: tribus namque, & quattuor, et quae deinceps sunt circumferentijs quędam figurae comprehendũtur. si enim tres circuli se se contingant, spacium concludũt trilaterum, quod tribus circumferẽtijs terminatur, si vero quattuor, quattuor circumferentijs, & deinceps similiter. postremo earum, quae rectis lineis, aliae quidem tribus, aliae quattuor, aliae pluribus continentur.



XXIIII.

Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Isosceles, siue æquicrure, quod duo tantũ æqualia latera habet.

XXVI.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Adhæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.

XXVIII.

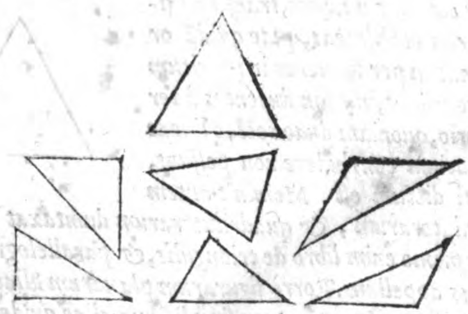
Obtusiangulum est, quod obtusum habet angulum.

XXIX.

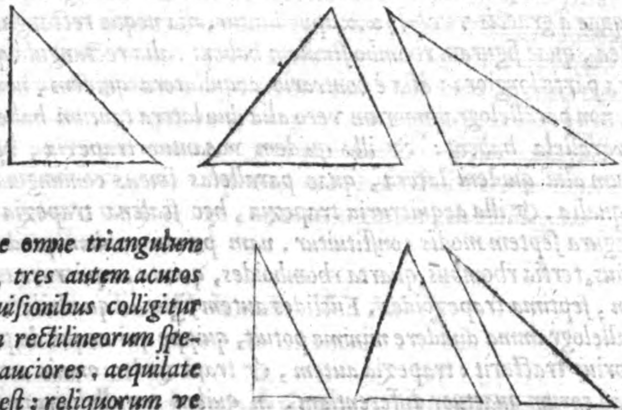
Acutiangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

F. C. COMMENTARIVS.

Triangulorum diuisio interdum quidem à lateribus, interdum vero ab angulis ortum habet: & pręcedit ea, quae à lateribus tamquam nota, sequitur autem ea quae ab angulis tamquam propria, quoniam & tres ipsi anguli, videlicet rectus, obtusus, & acutus solis rectilineis figuris conueniunt: aequalitas verò laterum, & inequalitas inuenitur etiam in ijs, quae rectilineae non sunt. dicit igitur triangulorũ alia esse aequilatera, alia acquicruria, alia scalena, vel enim omnia latera aequalia sunt, vel omnia inęqualia, vel duo tantũ aequalia.



Rursus triangulorum alia rectangula, alia obtusiangula, alia acutiangula, & rectangulum quidem diffinit, quod vnum angulum rectum habet, quemadmodum obtusiangulum, quod vnum habet



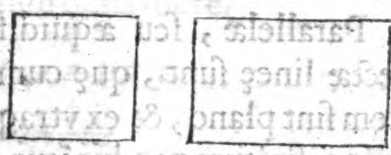
habet obtusum, fieri enim non potest, vt triangulum plures vno, vel rectos, vel obtusos angulos habeat; acutiangulum vero, quod omnes habet acutos; non enim satis est vnicum acutum habere, omnia si quidem triangula hoc modo acutiangula essent, namque omne triangulum duos habeat acutos necesse est, tres autem acutos acutiangulum solum. ex his diuisionibus colligitur septem tantum esse triangulorum rectilineorum species, & neque plures, neque pauciores, aequilaterum enim acutiangulum tantum est: reliquorum vero vnumquodque est triplex; nam aequicrure vel rectangulum est, vel obtusiangulum, vel acutiangulum: & similiter scalenum vel rectangulum, vel obtusiangulum, vel acutiangulum.

Septem triãgulorum rectilineorum species.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum est quod & æquilaterum est, & rectangulum.

XXXI.

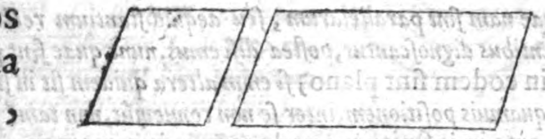


Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem, æquilatera vero non est.

XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

XXXIII.



Rhomboides, quæ & opposita latera, & oppositos angulos inter se ęquales habet, neque ęquilatera est, neque rectangula.

XXXIIII.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

F. C. COMMENTARIVS.

Quadrilaterarum figurarũ aliae aequilaterae sunt, aliae non aequilaterae: rursus aliae rectangulae; aliae non rectangulae. quae igitur aequilaterae, & rectangulae sunt quadrata appellantur. quae vero rectangulae & non aequilaterae, altera parte longiores: & quae aequilaterae, & non rectangulae, rhombi. & postremo quae neque aequilaterae, neque rectangulae latera habent, & angulos, qui è regione sunt inter se aequales, rhomboides vocantur. alij in hunc modum diuidunt. Quadrilaterarum figurarum aliae parallelogramma sunt, quae la-

Quadrilaterarum figurarum diuisio.

Quadratũ.

Altera parte longius.

Rhombus.

Rhomboides.

Quadrata. τετράγωνα

Rhomboidea.

Rhombus.

Trapezia.

Trapezoidea.

Trapezia aequicruria, & Scalena.

tera ex opposito parellela habent, non parallelogramma vero, quae latera parallela non habent. parallelogrammorum autem alia quidem & rectangula, & aequilatera sunt vt quadrata, quae à graecis τετράγωνα appellantur, alia neque rectangula, neque aequilatera, vt rhombo idea, quae figuram rhombo similem habent. alia rectangula quidem, sed non aequilatera, vt altera parte longiora; alia è contrario aequilatera quidem, non autem rectangula, vt rhombus, non parallelogrammorum vero alia duo latera tantum habent parallela, alia nulla prorsus parallela habent: & illa quidem vocantur trapezia, hec vero trapezoidea. Trapeziorum alia quidem latera, quae parallelas lineas coniungunt, aequalia habent, alia vero inaequalia. & illa aequicruria trapezia, hec scalena trapezia appellantur. quadrilatera igitur figura septem modis constituitur. nam prima quidem quadratum est; secunda altera parte longius, tertia rhombus, quarta rhomboides, quinta aequicrure trapezium, sexta scalenum trapezium, septima trapezoides. Euclides autem figuras quadrilateras in parallelogramma, & non parallelogramma diuidere minime potuit, quippe qui neque de parallelis, neque de parallelogrãmo prius tractarit: trapezia autem, & trapezoidea omnia communi nomine appellauit trapezia ad eorum quattuor differentiam, in quibus parallelogrammorum inest proprietas, nempe ex opposito latera & angulos habere aequales; quod ipse in rhomboide tantum posuit, ne solis negationibus ipsum diffiniret, cum dixit, neque aequilaterum, neque rectangulum; in quibus eum proprijs caremus rationibus, communibus vti necessarium est. videtur autem rhombus dimotum esse quadratum, & rhomboides dimotum altera parte longius, propterea quòd iuxta latera quidem hec ab illis non differunt, sed iuxta angulorum duntaxat obtusitates, & acumina, cum illa rectangula sint.

In quibus proprijs rõnibus caremus, cõmunibus utendum.

XXXV.

Parallelæ, seu æquidistantes rectæ lineę sunt, quę cum in eodem sint plano, & ex vtraque parte in infinitum producãtur, in neutram partem inter se conueniunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Quae nam sint parallelarum, seu aequidistantium rectarum linearum elementa, & quibus accidentibus dignoscantur, postea discemus. nunc quae sint parellelae his verbis diffinit. Quæ cum in eodem sint plano] *si enim altera quidem sit in subiecto plano, altera autem in sublimi iuxta quamuis positionem, inter se non conueniũt, non tamẽ propterea parallelae sunt.* Et ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter se conueniunt] *nam rectae lineae non parallelae, si aliquatenus producantur, non conuenient; in infinitum autem produci, & non conuenire, parallelas designat, neque hoc simpliciter, sed ex vtraque parte, in infinitum produci, & non conuenire. fieri namque potest, vt non parallelae etiam ex vna quidẽ parte in infinitum producantur, ex altera vero minime. annuentes enim in hac parte, in altera plurimum distant. caussa autem hec est, quoniam duae rectae lineae spacium aliquod comprehẽdere non possunt, quòd si ex vtraque parte annuant hoc non continget. & Euclides quidem rectas lineas parallelas in hunc modum diffinit. Possidonius vero parallelae, inquit, sunt, quae neque annuũt, neque abnuunt in vno plano, sed aequales habent omnes perpendiculares, quae à punctis alterius ad alteram ducuntur; quęcunque vero minores faciunt perpendiculares, inter se conueniunt. perpendicularis enim, & spaciorum altitudines, & linearum interualla determinare potest. quamobrem cum perpendiculares sint aequales, & rectarum linearum interualla aequalia erunt: cum vero minores, & interuallum minuitur, & conueniunt inter se ad eas partes, in quibus perpendiculares sunt minores. Pitho geometra parallelas rectas lineas explicans non contentus ijs, quae scripsit Euclides, eas aptissime exemplo declarauit. dixit enim rectas lineas parallelas esse, quales in parietibus, vel pauimento columnarum vmbras à lampade è regione ardente, vel lucerna factas videmus, quod quomodo intelligendum sit vide apud Serenum*

Posidonius parallelas aliter diffinit.

Perpendicularis spaciorum altitudines et linearũ interualla determinat.

remum in fine libri de sectione Cylindri. Post diffinitiones sequuntur postulata, deinde exiomata, seu communes notiones. postulata autem & axiomata, vt refert Proclus ex Gemino il, lud habent commune, vt non indigeant demonstratione aliqua, aut geometrica fide, sed sumatur tamquam nota, & principia fiant eorum, quae sequuntur. at differunt axiomata à postulatis eodem prorsus modo, quo theoremata à problematibus. vt enim in theorematibus quidem id, quod subiecta consequitur, perspicere & cognoscere proponimus; in problematibus vero excogitare aliquid, & facere iubemur: ita & in axiomatibus ea sumuntur, per quae sese manifesta sunt, nostrisq; insitis notionibus sunt in promptu; in postulatis vero ea sumere quaerimus, quae facilia, parabiliaq; sunt, & in quibus sumendis cogitatio non defatigatur, queq; nulla neque varietate, neque constructione indigent.

Axiomata a postulatis differunt eodẽ modo, quo theoremata a problematibus.

POSTVLATA.

I

Postuletur à quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere.

II.

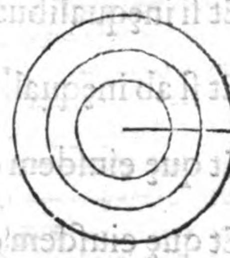
Rectam lineam terminatam in continuum; & directum producere.

III.

Quouis centro, & interuallo circulum describere.

F. C. COMMENTARIVS.

Tria hec & ob facilitatem, & quod aliquod comparare nobis imperant in postulatis necessario collocanda sunt, ex Gemini sententia. nam illud quidem, A quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere, sequitur eam diffinitionem, quae tradit lineam esse puncti fluxum, & rectam lineam aequabilem, & non decliuem fluxum. si igitur intelligamus punctum aequabili, & breuissimo motu ferri in alterum punctum incidemus, & primum postulatum factum erit, nihil vtique varium intelligentibus nobis. si vero recta linea puncto terminata, similiter intelligamus eius terminum breuissimo, & aequabili motu ferri, secundum postulatum facili, simpliciq; aggressione comparatum erit. Quòd si rursus terminatam rectam lineam manere quidem ex altera parte, ex altera autem moueri circa manens punctum intelligamus, tertium fiet postulatum; centrum namque erit punctum manens, interuallum vero recta linea; & quanta ea fuerit, tantum erit interuallum à centro ad omnes circumferentiae partes.



IIII.

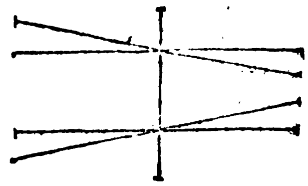
Omnes angulos rectos inter se æquales esse.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc quamquam vt manifestum, & nulla indigens demonstratione à nobis concedatur, postulatum tamen non est ex sententia Gemini, sed axioma. accidens enim quoddam per se rectis angulis dicit, nihil simplici notione facere iubens. si cui vero non satis constet rectos angulos omnes inter se aequales esse, is petat demonstrationem à Proclo, quam affert in commentarijs. Pappus recte animaduertit huius conuersum non etiam verum esse, nempe angulum recto aequalem omnino esse rectum, nisi rectilineus sit; potest enim curuilineus quoque angulus recto aequalis ostendi.

V.

Et si in duas rectas lineas recta linea incidēs interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectas lineas illas in infinitum productas, inter se conuenire ex ea parte, in qua sūt anguli duobus rectis minores.



F. C. COMMENTARIVS.

Hoc à postulatis penitus reijciendum censet Proclus, cum theorema sit, quod multas habet & dubitationes, quas Ptolemeus in quodam libro soluere sibi proposuit. multis vero & diffinitionibus, & theorematibus in demonstratione indiget, cuius conuersum Euclides etiam tanquam theorema ostendit. sed de hoc inferius suo loco agetur.

AXIOMATA, SEV COMMVNES NOTIONES.

I.

Quę eidem ęqualia, et inter se sunt ęqualia.

II.

Et si ęqualibus ęqualia adijciantur tota sunt ęqualia.

III.

Et si ab ęqualibus ęqualia auferantur, reliqua sunt ęqualia.

IIII.

Et si inęqualibus ęqualia adijciantur, tota sunt inęqualia.

V.

Et si ab inęqualibus ęqualia auferātur, reliqua sunt inęqualia.

VI.

A Et quę eiusdem dupla, inter se sunt ęqualia.

VII.

Et quę eiusdem dimidia inter se sunt ęqualia:

VIII.

B Et quę sibi ipsis congruunt, inter se sunt ęqualia.

IX.

Totum est sua parte maius.

X.

C Duę rectæ lineæ spacium non comprehendunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Axiomata mathematicis scientijs communia.

Axiomata ferè omnia mathematicis scientijs communia sunt; neque solum in magnitudinibus, sed & in numeris, & motibus, & temporibus vera esse deprehenduntur. aequale enim & inequale, totum & pars, maius, & minus, quantitatibus continuis, & discretis communia sunt. contemplatio igitur quae circa tempora, & quae circa motus, & quae circa numeros, & quae circa magnitudines versatur, his omnibus tanquam manifestis indiget. communibus autem existentibus vnusquisque vtitur secundum propriam materiam, quoad ipsa requirit: & alius quidem ut in magnitudinibus, alius ut in numeris, alius uero ut in temporibus ipsis utitur, & hoc modo propriae in unaquaque sciētia cōclusiones fiunt, licet axiomata cōmunia fuerint.

Et

Et quæ eiusdem dupla inter se sunt æqualia. A

Hoc ex illo sequitur, Si aequalibus aequalia adijciantur tota aequalia esse, nam quae dimidio sunt aequalia, cum ipsum dimidium assumpserint eiusdem dupla fiunt, & inter se aequalia ob aequale additamentum; & hac ratione non solum dupla, sed & tripla & eiusdem etiam multiplicia omnia aequalia apparebunt.

Et quæ sibi ipsis congruunt inter se sunt æqualia] *hoc geometriae proprium est.* B

Duæ rectæ lineę spacium non comprehendunt] *Hoc non admodum manifestum videtur. quare in editione Campani inter petitiones locum obtinuit.* C

His axiomatibus nonnulla alia adijcienda censuit Pappus, vt videre licet apud Proclum. Cum autē omnis scientia duplex sit. alia quidem circa immediatas propositiones versatur, alia vero circa ea quę ex illis demonstrantur, comparanturq́; & omnino circa ea, quae principia consequuntur, suam perficit tractationem. hęc rursus in geometricis rationibus se ipsam in problematum per actionem, & in theorematum inuentionem dispertiuit; problemata quidem appellans ea, in quibus, quae non sunt quodammodo comparare proponit, in apertumq́; proferre; & machinari: theoremata vero, in quibus id, quod inest, vel non inest perspicere, cognoscereq́; ac demonstrare instituit. & illa quidem ortus, & positiones, & applicationes, & descriptiones, & circumscriptiones, & bipartitiones, atque alia huiusmodi constituere iubent; hęc vero symptomata, & quae subiectis geometriae per se insunt, persuadere, demonstrationibusq́; firmare contendunt. Omne autem problema, & omne theorema perfectum, expletumq́; suis partibus, hęc omnia in se ipso habere debet, Propositionem, Expositionem, Determinationem, Constructionem, Demonstrationem; & Conclusionem. harum autem Propositio dicit quo dato quid quęsitum sit, perfecta enim propositio ex vtrisque constat. Expositio ipsum per se datum assumens pręparat quęstioni. Determinatio seorsum quęsitum quodnam sit explicat. Constructio ea, quae dato desunt ad quęsiti uenationem adijcit. Demonstratio perite ex concessis quod propositum est colligit. Conclusio rursus ad propositionem regreditur confirmans id, quod ostensum est. & omnes quidem problematum, & theorematum partes tot sunt. maxime autem necessariae, & quae in omnibus insunt Propositio, Demonstratio, & Conclusio: oportet enim ante cognoscere quęsitum, perq́; media ostendere. & quod ostensum est concludere. Harum autem trium, vt aliqua desit, fieri non potest. at reliquae sępe assumuntur, sępe vero, cum nullam afferant vtilitatem, omittuntur. Determinatio enim, & Expositio non sunt in illo problemate. Aequicrure triangulum constituere, quod habeat vtrumque eorum, qui ad basim sunt, angulorum duplum reliqui. Constructio autem in compluribus theorematibus non est, cum satis sit expositio absque alia additione, vt ex datis propositum ostendatur. Quando igitur deficere expositionem dicimus? cum in propositione nullum fuerit datum. quamquam enim propositio diuidatur in datum & quęsitū, non tamen hoc semper fit, sed aliquando solum dicit quęsitum, quod cognoscere, vel comparare oportet, vt in iam dicto problemate. non enim ante dicit, quo dato oporteat aequicrure triangulum constituere, habens vtrumque aequalium angulorum duplum reliqui, sed tantum quod oportet illud comparare. & fit quidem etiam hoc loco ex ante cognitis propositi sumptio. etenim quid aequicrure, & quid aequale, vel duplum sit cognoscimus. hoc autem omni dianoeticae disciplinae proprium esse dicit Aristoteles. nihil tamen nobis subijcitur, quemadmodum in alijs problematibus, vt quando dicit, Datam rectam lineam terminatam bifariam secare. hic enim recta linea data est, iubemur autem ipsam bifariam diuidere. seorsum igitur ponitur datum, & seorsum quęsitum. Cum autem propositio vtrumque habuerit, tum & determinatio inuenitur, & expositio; sed cum deficit datum, & hae deficiant necesse est. expositio etenim est dati, & determinatio, quae propositioni eadem erit. nam quid aliud dicas determinans in iam dicto problemate, nisi quod aequicrure triangulum inuenire oportet? hoc autem erat propositio. si igitur propositio non habeat datum, & quęsitum, expositio quidem tacetur, quod non sit datum; determinatio vero pretermittitur, ne eadem fiat, quae propositio. multa autem alia inueniās huiusmodi problemata, presertim in arithmeticis, & in decimo libro, vt inuenire duas rectas lineas potentia commensurabiles, quae medium comprehendant, & omnia, quae eiusmodi sunt. Animaduertendum tamen Archimedem quidem sępe, vt in libro de quadratura parabolae; Pappum vero fere semper propositionem ipsam omittere, contentos ex positione, ac determinatione, loco propositionis. Datum autem omne, vno horum modorum datur vel positione, vel proportione, vel magnitudine; vel specie: punctum enim dumtaxat positione datur; linea vero, & alia

Omne problema, & omne theorema perfectū sex habet partes.

Propositio, demonstratio & cōclusio maxime necessariæ.

Cōstructio deest, cum expositio satis sit.

Archimedes & Pappus aliquādo propositionem omittunt.

Species.

aliis omnibus. nam cum dicimus datum angulum rectilineum bifariam secare, speciem anguli, quae data est, significamus, nempe rectilineam, vt ne quæramus eisdem methodis etiam curuilineum angulum bifariam secare.

Magnitudine.

Cum vero dicimus, Datis duabus rectis lineis inæqualibus à maiori aequalē minori abscindere, magnitudine datae sunt. maius enim, & minus, terminatum, & infinitum ad magnitudinem referuntur.

Proportione.

At cum dicimus, Si quattuor magnitudines proportionales sint, & permutando proportionales erunt, datur eadem proportio in quattuor magnitudinibus, & cum dicimus. Ad datum punctum oportet datae lineae aequalem rectam lineam ponere, punctum positione datur.

Cum positio uaria sit, & constructio uariabitur.

quare cum positio varia esse possit, & constructio variabitur; datur enim punctum vel extra rectam lineam, vel in recta linea, & in extremitate, vel inter ipsius terminos. itaque cum datum quadrupliciter sumatur, & expositio quadrupliciter fit, & quandoque duos etiam, & tres modos complectitur.

Demonstratio perfecta.

demonstratio vero interdum quidem quae demonstrationis propria sunt habere inuenietur, ex diffinitionibus medijs quęsitum ostendens; hęc enim demonstrationis perfectio est: interdum uero ex certis notis arguens; quod diligenter attendere oportet,

Geometricæ rationes necessitatē habent ob subiectam materiam.

ubique enim geometricae rationes necessitatem habent ob subiectam materiam, non ubique uero demonstrantibus methodis perficiuntur.

Cōclusio duplex.

denique conclusio duplex esse solet, particularis, & uniuersalis. nam cum in dato conclusionem fecerimus, ne uideamur particularia proposuisse, ad uniuersalem transimus conclusionem. Verum cum hęc ita determinata sint, de ijs quae ipsis adnectuntur, breuiter differemus, nempe quid sit lemma, quid casus, quid corollarium, quid instantia, quid deductio.

Lemma.

lemma uel sumptio proprie in geometricis est propositio fide indigens. cū enim uel in constructione, uel in demonstratione aliquod sumimus eorum, quae ostensa non sunt, sed ratione indigent, tunc id quod sumptum est, veluti per se ambiguum inquisitione dignum esse arbitrati, lemma ipsum appellamus, à postulato, & axiomate differens quatenus demonstrari potest, cum illa absque demonstratione ad aliorum fidem faciendam per se sumantur.

Casus.

Casus autem differentes constructionis modos, & positionis mutationem indicat, nimirum transpositis punctis, uel lineis, uel planis, uel solidis, & omnino ipsius uarietas circa descriptionem uersatur; ac propterea dicitur casus, quòd sit constructionis transpositio.

Corollariū.

Corollarium uero dicitur quidem & de quibusdam problematibus, qualia sunt corollaria Euclidi ascripta sed proprie dicitur corollarium, quando ex demonstratis aliquod aliud theorema apparet, quod à nobis propositum non est; & corollarium ob id uocant, quòd sit tanquam lucrum quoddam accedens pręter demonstrationis propositum.

Instantia.

Instantia uero totum orationis impedit cursum, uel constructioni, uel demonstrationi occurens, quam tamen non oportet ut ueram admittere, sed remouere, & ostendere falsam esse.

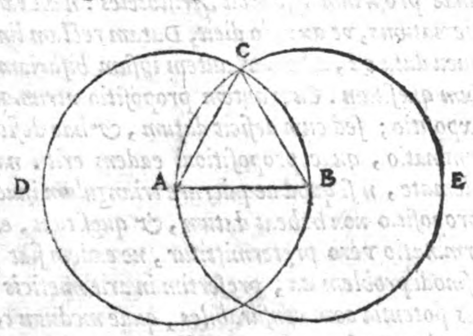
Deductio.

Cubi duplicatio.

Deductio autem est transitus ab alio problemate, uel theoremate ad aliud, quo cognito, uel comparato etiam illud, quod propositum est, apparet, ut cum quęreretur cubi duplicatio transtulerunt quęsitum in aliud, quod hoc consequitur, uidelicet in duarum mediarum inuentionem. & deinceps quęsierunt quo nam pacto datis duabus rectis lineis duae mediae proportionales inueniantur.

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

In data recta linea terminata, triangulū æquilaterū constituere.



Sit data recta linea terminata A B. oportet in ipsa A B triangulum æquilaterum constituere. centro quidem A interuallo autem A B circulus describatur B C D. & rursus centro B, interualloq; B A describatur circulus A C E, & à puncto C, in quo circuli se inuicem secant ad A B ducantur rectæ lineæ C A C B. Quoniam igitur A centrum est circuli C B D, erit A C ipsi A B æqualis. rursus quoniā B circuli C A E est centrum, erit B C æqualis B A. ostensa est autem et C A æqualis A B. vtraque igitur ipsarum C A C B ipsi A B est æqualis. quæ autem eidē sunt æqualia, et inter se æqualia sunt. ergo C A ipsi C B est æqualis. tres igitur C A A B B C inter

ter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est A B C, & constitutum est in data recta linea terminata A B, quod fecisse oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ea omnia, quae ante dicta sunt, in hoc primo problemate contemplari licet. nam problema esse manifesto apparet: imponit enim nobis trianguli aequilateri ortum machinari, & propositio ex dato; & quæsito constat. datur enim recta linea terminata, queritur autem quo pacto in ipsa triangulum aequilaterum constituatur, & precedit quidem datum, sequitur autem quęsitum, vt coniunctum etiam texere possis, si est recta linea terminata, fieri potest vt in ipsa constituatur triangulum aequilaterum. neque enim non recta existente triangulum constituetur, quod ex rectis lineis constat, neque non terminata; angulus enim fieri non potest, nisi ad vnum punctum, infinitae autem extremum punctum non est, post propositionem sequitur expositio. Sit data recta linea terminata A B] *& uides expositionem datum solum explicare, non etiam quęsitum adiungere, post quam determinatio* [oportet in data recta linea triangulum æquilaterũ constituere] *determinatio autem quoddammodo attentionis est causa, attentiores enim ad demonstrationem nos reddit quęsitum pronunciando, quemadmodum expositio dociliores efficit, datum ante oculos ponendo. post determinationem constructio sequitur* [centro quidem altero rectæ lineæ termino, interuallo autem reliquo circulus describatur, rursusq; centro quidem reliquo, interuallo autem eo, quod prius centrum erat, describatur circulus, et à communi sectionis circulorum puncto ad lineæ terminos rectæ lineæ ducantur] *& vides me ad constructionem vti postulatis, videlicet à quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere, & quouis centro & interuallo circulum describere. vniuerse enim postulata constructionibus, axiomata vero demonstrationibus vtilitatem afferunt. deinde sequitur demonstratio, quae ex circuli diffinitione, & illo axiomate. Quae eidem aequalia, & inter se sunt aequalia, concludit tres rectas lineas C A A B B C inter se esse aequales. vnde colligitur triangulum A B C aequilaterum esse, atque hęc est prima conclusio, quae expositionem consequitur; post hanc est ipsa vniuersalis,* [In data igitur recta linea triangulum æquilaterum constitutum est.] *siue enim duplam eius, quae nunc exposita est, feceris datam, siue triplam, siue aliam quamlibet maiorem, vel minorem; aedem constructiones, & demonstrationes congruent. his apposuit particulam* [quod fecisse oportebat] *ostendens conclusionem problematicam esse; etenim in theorematibus apponit* [quod ostendisse oportebat] *namq; illa factionem alicuius, hęc demonstrationem, & inuentionem denuntiant. In vno igitur hoc primo problemate omnia examinare volumus, ac perspicua facere, oportet autem illos, qui hęc legent, in reliquis eadem querere, & quę nam eorum assumantur, quęnamue omittantur, & id, quod datum est, quotupliciter detur: & ex quibus principijs vel constructiones, vel demonstrationes pendeant; horum enim perspicax contemplatio non paruam exercitationem, geometricarumq; rationum meditationem affert. sed fortasse non inutile erit reliqua etiam triangula constituere. & primum aequicrure. Sit igitur A B, in qua oportet aequicrure triangulum constituere. & describantur circuli, vt in aequilatero, producaturq; A B ex vtraque parte ad C D puncta, aequalis igitur est C B ipsi A D, quare centro quidem B, interuallo autem C B circulus C E describatur, & rursus centro A, & interuallo D A describatur circulus D E, & à puncto E, in quo se se circuli secant ad A B puncta ducantur E A E B. quoniam igitur E A aequalis est ipsi A D, & E B ipsi B C; aequalis autem A D ipsi B C; erit & E A ipsi E B aequalis. sed & maiores sunt quàm A B. aequicrure igitur triangulum est A B E, quod fecisse oportebat. At propositum sit scalenum constituere triangulum in data recta linea A B, & describantur circuli centris, interuallisq;, vt in superioribus, & sumatur in circumferentia circuli, A centrum habentis, punctum F, & ducta A F producatur ad G, & G B iungatur.*

Propositio, quæ ex dato & quæsito constat.

Expositio.

Determinatio.

Cõstructio.

Postulata cõstructionib⁹ utilia.

Demonstratio.

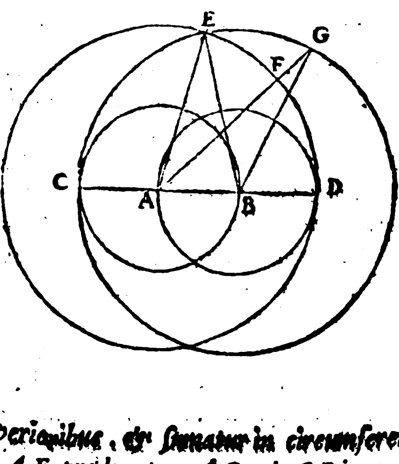
Conclusio prima, & particularis.

Cõclusio uniuersalis.

Quod fecisse oportebat.

Quod ostendisse oportebat.

Aequicruris trianguli cõstitutio.



Scaleni trianguli constitutio.

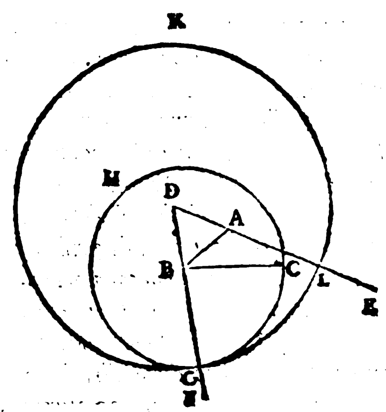
quoniam

quoniam igitur A cētrum est circuli D E, erit A F ipsi A D aequalis. maior igitur est A G quàm A D, hoc est quàm G B. centrum enim est ipsum B circuli C E. ergo G B est aequalis B C, ac propterea G B quàm B A maior. at G A maior quàm G B. tres igitur C B B A A G inęquales sunt. quare scalenum triangulum est. tria igitur triangula sunt constituta, sed hęc diuulgata sunt. Illud vero in his pulchrum inuenitur. Triangulum scilicet aequilaterum vndequaque aequale existens vnico modo constitui, Aequicrure autem in duobus tantum lateribus aequalitatem habens, constitui dupliciter; data namque recta linea, vel ambabus aequalibus minor est, vt nos posuimus, vel maior: scalenum vero vndique inęquale existens tripliciter constitui. vel enim data recta linea maxima est, vel minima trium, vel altera quidem maior, altera vero minor. & licet in vnaquaque harum positionum vel protendenti, vel contrahenti se exercere. nobis autem quae sunt exposita sufficiant. At si vniuerse contemplabimur dicemus, problematum alia quidem simpliciter, alia vero multipliciter, & alia infinite constitui, & ea, quae simpliciter constituuntur (vt inquit amphinomus) ordinata appellantur, & quae constituuntur multipliciter, media, quae vero finite, inordinata vocantur. Vide reliqua apud Proclum, fortasse enim hęc satis superq;.

Aequilaterū triangulum unico modo cōstituitur. Aequicrure dupliciter. Scalenum tripliciter. Problemata ordinata. Media. Inordinata.

PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

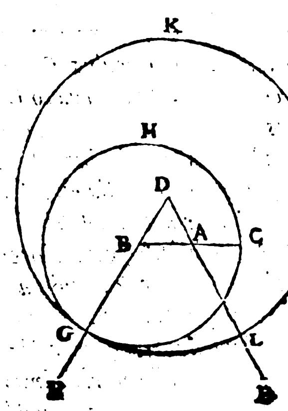
Ad datum punctū datæ rectæ lineę ęqualē rectam lineā ponere.



Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. oportet ad A punctum ipsi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. ducatur à puncto A ad B recta linea A B: et in ipsa constituatur triangulum ęquilaterum D A B, producanturq; in directum ipsis D A D B rectæ lineæ A E B F. et centro quidem B, interuallo autem B C circulus C G H describatur. rursusq; centro D, et interuallo D G describatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum B cētrum est C G H circuli, erit B C ipsi B G æqualis. & rursus quoniam D centrum est circuli G K L, erit D L æqualis D G: quarum D A est æqualis D B. reliqua igitur A L reliquę B G est æqualis. ostensa autē est B C æqualis B G. quare vtraque ipsarum A L B C est æqualis ipsi B G. quæ autem eidem æqualia sunt, et inter se sunt æqualia. ergo & A L est æqualis B C. ad datum igitur punctū A datę rectę lineę B C ęqualis posita est A L. quod facere oportebat.

Postul. 1. Prima huius. Postul. 2. 3. Diffin. 15. Com. no. 3. Com. no. 1.

F. C. COMMENTARIVS.



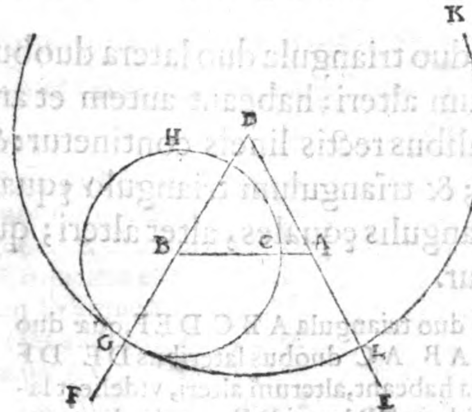
Problematum, & theorematum alia quidem sine casu sunt, alia vero multos habent casus. quęcunque igitur eandem vim habent per plures descriptiones peruadentem, & positiones permutantia eandem demonstrationis rationem seruant, hęc casum habere dicuntur. quęcunque vero iuxta vnam duntaxat positionem, vnamq; constructionem procedunt, ea sunt sine casu. simpliciter enim casus circa constructionem tum theorematum, tum problematum consideratur. secundum igitur problema multos habet casus. datur autem in ipso punctum quidem positione, eo enim tantum modo dari potest; linea vero specie, & magnitudine datur. quęritur autem rectae lineae aequalem rectam lineam ponere ad datum punctum, vbicunque situm fuerit. & constat omnino punctum illud in eo-

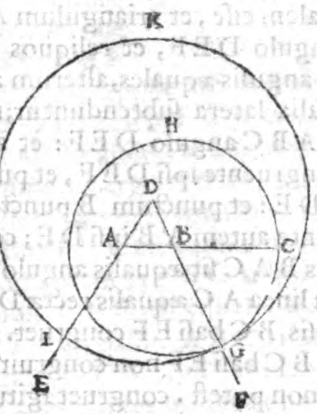
Problematum, & theorematum, alia sunt sine casu, alia multos habent casus.

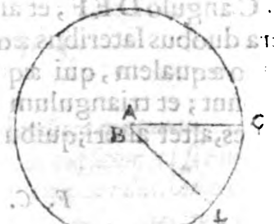
Secundū problema multos habet casus.

dem

dem esse plano, in quo & recta linea, non autem in sublimi. omnibus si quidem planorum problematibus, & theorematibus vnum subijci planum existimare oportet. at vero huius problematis casus fieri iuxta puncti dati differentem positionem manifestum est. aut enim punctum extra rectam lineam ponitur, aut in ipsa. & siquidem in ipsa, vel in altero eius termino, vel intra terminos. si vero extra rectam lineam, vel à lateribus ponitur, ita vt ab eo ad terminum rectae lineae ducta angulum faciat; vel in directum ipsi siue à fronte, siue à tergo, ita vt producta linea ad dictum punctum pertineat. Euclides autem punctum datum extra rectam lineam sumpsit, atque à lateribus. si enim in ipsa, frustra duceretur à puncto A ad B recta linea, quippe quae iam ducta esset. at si in recta linea B C punctum sumatur inter B C, vel in directum ipsi, producta nimirum B C ad A, similiter in ipsa B A constituetur triangulum aequilaterum D A B: latera autem eodem protendentur modo, & demonstratio eadem erit. Quòd si loco trianguli aequilateri, aequicruri vti libeat, nihilo minus eadem sequentur. Aequicruri triãgulo pro æquilatero uti licet. *denique si punctum datum fuerit in altero rectae lineae termino, non opus erit neque triangulo, neque altero circulo, sed sola descriptio vnius circuli satis erit. centro enim dicto termino, in quo est punctum datum, interuallo autem reliquo, si circulus describatur, quot quot ab eo ad circumferentiam rectae lineae ductae fuerint, problema efficient.*







RPOBLEMA III.

PROPOSITIO III.

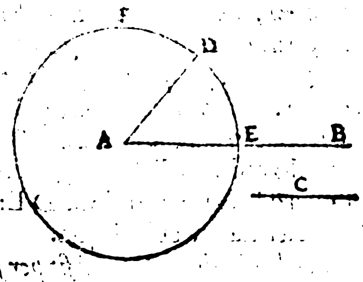
Duabus datis rectis lineis inæqualibus à maiori minori æqualem abscindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B C; quarum maior sit A B. oportet à maiori A B minori C æqualem rectam lineam abscindere. ponatur ad A punctum ipsi C æqualis recta linea A D: & centro quidem A, interuallo autem A D circulus describatur D E F. et quoniam A centrũ est D E F circuli, erit A E ipsi A D æqualis. sed & C est æqualis AD. vtraque igitur ipsarum AE C ipsi AD æqualis erit. Quare & A E ipsi C est æqualis. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus A B C à maiori A B minori C æqualis abscissa est A E. quod fecisse oportebat.

Ex antecedente.

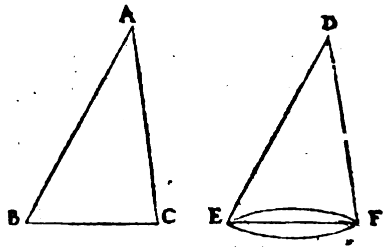
post. 3.

Com. no. 1.



THEOREMA. I. PROPOSITIO. IIII.

A Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo ęquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur.



Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera A B A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B lateri D E æquale, latus vero A C ipsi D F; et angulum B A C angulo E D F æqualem. Dico & basim B C basi E F æqualem esse, et triangulum A B C æquale triangulo D E F, et reliquos angulos reliquis angulis æquales, alterum alteri; quibus æqualia latera subtenduntur; nempe angulum A B C angulo D E F: et angulum A C B angulo D F E. triangulo enim A B

B C congruente ipsi D E F, et puncto quidem A posito in D, recta vero linea A B in ipsa D E: et punctum B puncto E congruet; quòd A B ipsi D E sit æqualis. congruente autem A B ipsi D E; congruet & A C recta linea rectæ lineæ D F, cum angulus B A C sit æqualis angulo E D F. quare et C congruet ipsi F: est enim rursus recta linea A C æqualis rectæ D F. sed et punctum B congruebat puncto E. ergo et basis B C basi E F congruet. nã si puncto quidẽ B congruẽte ipsi E, C vero ipsi F; basis B C basi E F non congruit; duæ rectæ lineæ spacium comprehendent: quòd fieri non potest. congruet igitur B C basis basi E F, & ipsi æqualis erit. quare et totum A B C triangulum congruet toti triangulo D E F, et ipsi erit æquale; et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et ipsis æquales erunt. videlicet angulus A B C angulo D E F, et angulus A C B angulo D F E. si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem et angulũ angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; et triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur: quod ostẽdere oportebat.

Com. no. 10

F. C. COMMENTARIVS.

A Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant alterum alteri] *in hac propositione duo sunt, quę dantur, videlicet duorum laterum ęqualitas, & ęqualitas eorum angulorum, qui ęqualibus lateribus continentur. quae quidem proportione dari manifestum est. quęruntur autem tria, aequalitas basium, aequalitas triangulorum, & aequalitas reliquorum angulorum. sed quoniam fieri potest vt duo quidem latera duobus lateribus sint aequalia, theorema autem verum non sit, quòd non alterum alteri est aequale, sed vtraque simul: propterea addidit, aequalia esse latera non simpliciter, sed alterum alteri.*

B Triangulo enim A B C congruente ipsi D E F, et puncto quidem A posito in D, recta vero linea A B in ipsa D E: et punctum B puncto E congruet, quòd A B ipsi D E sit æqualis, et reliqua.

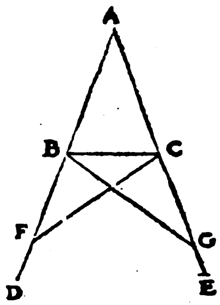
Hic demonstrationis modus, qui fit per superpositionem figurarum preterquam quod approbatur à Proclo mathematicarum scientiarum peritissimo, est etiam maximo vsui mathematicis. Archimedes enim eum vsurpat non solum in planis figuris, vt in libro de centro grauitatis planorum, sed etiam in solidis, vt in libro de conoidibus, & sphęroidibus.

Demonstratio per superpositionẽ figurarũ mathematicis usitata.

THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO. V.

Aequicrurium triangulorum qui ad basim anguli inter se sunt æquales: & productis æqualibus rectis lineis anguli qui sunt sub basi inter se æquales erunt.



Sit æquicrure triangulum A B C; habens A B latus lateri A C æquale, et producantur indirectum ipsis A B A C rectæ lineæ B D C E. Dico angulum quidem A B C angulo A C B; angulum vero C B D angulo B C E æqualem esse. sumatur enim in linea B D, quod vis punctum F: atque à maiori A E minori A F æqualis auferatur A G: iunganturq; F C, G B. *5. Huius.* Quoniam igitur A F quidem est ęqualis A G; A B vero ipsi A C; duæ F A A C, duabus G A A B ęquales sunt, altera alteri; et angulum F A G communem continent. basis igitur F C basi G B est ęqualis; et triangulum A F C ęquale triangulo A G B; et reliqui anguli reliquis angulis ęquales erunt, alter alteri; quibus ęqualia latera subtenduntur: Videlicet angulus quidem A C F ęqualis angulo A B G; angulus vero A F C; angulo A G B. *Ex præcedente.* Et quoniam tota A F, toti A G est æqualis; quarum A B est ęqualis A C; erit et reliqua B F reliquę C G ęqualis. ostensa est autem F C ęqualis G B. *Axioma. 3.* duę igitur B F, F C duabus C G G B ęquales sunt, altera alteri; et angulus B F C ęqualis angulo C G B: estq; basis ipsorum B C communis. ergo et triangulum B F C triangulo C G B ęquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, alter alteri; quibus ęqualia latera subtenduntur. *Ex præcedente.* angulus igitur F B C est ęqualis angulo G C B: et angulus B C F angulo C B G. Itaque quoniam totus A B G angulus toti angulo A C F ęqualis ostensus est, quorum angulus C B G est ęqualis ipsi B C F: erit reliquus A B C reliquo A C B æqualis: et sunt ad basim A B C trianguli: *Axioma. 3.* ostensus autem est & F B C angulus æqualis angulo G C B; qui sunt sub basi. æquicrurium igitur triangulorum, qui ad basim anguli inter se sunt æquales; et productis æqualibus rectis lineis anguli, qui sunt sub basi inter se æquales erunt. quod ostendisse oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Theorematum alia simplicia sunt, alia composita. dico autem simplicia quęcunque iuxta positiones, & conclusiones indiuidua sunt, vnum habentia datum, et vnum quęsitum. vt si Euclides ita dixisset. omne triangulum aequicrure aequales habet, qui ad basim sunt, angulos. composita verò sunt, quae ex pluribus constantia, vel positiones habēt compositas, vel conclusiones, vel etiam vtrasque. compositorum autem alia sunt complexa, alia incomplexa. incomplexa sunt quęcunque in simplicia theoremata diuidi non possunt, cuiusmodi est quartum theorema; in eo enim & datum componitur, & quęsitum, sed datum in simplicia diuidi minime potest, vt plura fiant theoremata: non enim si triangula aequales habeant angulos, vel eum duntaxat, qui est ad verticem, reliqua contingunt. complexa vero sunt quęcunque in simplicia diuiduntur, vt illud theorema, Triangula, & parallelogramma quae eandem habent altitudinem inter se sunt, vt bases. fieri enim potest, vt diuidentes ita dicamus. Triangula quae eandem habent altitudinem inter se sunt, vt bases; & in parallelogrammis similiter. Omnium autem compositorum alia quidem iuxta conclusionem componuntur, ab eadem positione ortum habentia; alia vero iuxta positiones, & eandem omnibus conclusionem inferunt; & alia iuxta conclusiones, & positiones componuntur. Itaque iuxta conclusionem compositio est in quarto theoremate. in eo enim tria sunt quae concluduntur, videlicet bases aequales esse, & triangula aequalia, & reliquos angulos reliquis angulis aequales; quibus aequalia latera subtenduntur. iuxta positiones compositio inuenitur in theoremate, quod triangulis, & parallelogrammis, eandem habentibus altitudinem commune est. iuxta vtrasque autem

Theoremata simplicia, Theoremata cōposita. Composit. Theo. aliæ cōplexa, alia incomplexa. Complexa theoremata. Theorema compositū iuxta conclusionem. Theo. cōpo. iuxta positiones.

 in illo.

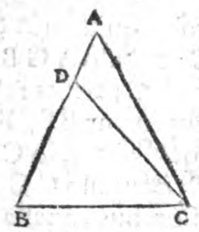
in illo. Diametri circulorum & ellipsium tum spacia, tum lineas spacia continentes bifariam diuidunt. Rursus complexorum theorematum alia vniuersalia sunt, alia ex particularibus vniuersale concludunt. omnino autem has compositiones geometrae ob breuitatem, ac resolutiones excogitarunt. multa enim cum incomposita sint, non resoluuntur: composita vero solum commoditates prebent ad resolutionem, quae in principia tendit. his igitur consideratis apparet quintum theorema compositum esse, tum iuxta datum, tum iuxta quesitum, & vtrumque eorum, quae componuntur perfectum est ac verum. quamobrem resolutio quoque vera est in vtroque. siue enim qui ad basim anguli, siue productis aequalibus rectis lineis anguli sub basi aequales sint, aequicrure triangulum erit. Huius theorematis inuentor fuit Thales, vt refert Proclus. is enim primus dicitur animaduertisse omnis aequicruris angulos qui ad basim esse aequales, ac more antiquorum aequales similes appellasse.

Complexorum Theorematũ alia, uniuersalia, alia ex particularibus uniuersale cõcludunt.

Thales quinti Theorematis inuẽtor.

THEOREMA III. PROPO. VI.

Si trianguli duo anguli inter se sint æquales, et æquales angulos subtendentia latera inter se ęqualia erunt.



Sit triangulum A B C, habens angulum A B C angulo A C B æqualem. Dico et A B latus lateri A C æquale esse; si enim inæqualis est A B ipsi A C; altera ipsarum est maior. sit maior A B; atque à maiori A B minori A C æqualis auferatur D B; et D C iungatur. Quoniam igitur D B est æqualis ipsi A C; communis autem B C: erunt duæ D B B C duabus A C C B æquales, altera alteri; et angulus D B C æqualis angulo A C B. basis igitur D C basi A B est æqualis; et triangulum D B C æquale triangulo A C B, minus maiori; quod est absurdum. non igitur inæqualis est A B ipsi A C. ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter se sint æquales, et æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt: quod demonstrasse oportuit.

3. huius.

4. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Presens theorema duo hec in primis ostendit, theorematum scilicet conuersionem, & deductionem ad id, quod fieri non potest. conuertitur enim precedenti theoremati, & per deductionem ad id, quod fieri non potest, demonstratur. conuersio autem apud Geometras proprie dicitur, quando conclusiones, & positiones vicissim in theorematibus transmutantur, & quod prioris est conclusio, in posteriori positio fit: & contra positio tanquam conclusio infertur. vt in illo, Aequicrurium triangulorum, qui ad basim anguli ęquales sint. positio quidem est aequicrure triãgulum: conclusio autem triangulorum, qui ad basim sunt, aequalitas. Et quorum anguli qui ad basim aequales; ea aequicruria sunt, vt in hoc theoremate, in quo positio quidem est, angulorum, qui ab basim, aequalitas; conclusio autem aequalitas laterum, quae aequalibus angulis subtenduntur. est etiam alia conuersio iuxta quandam duntaxat compositorum transmutationẽ. Si enim sit theorema compositum à pluribus positionibus incipiens, & in conclusionem desinens, sumentes conclusionem, & vnam ex positionibus, vel etiam plures; conclusionem faciunt aliquã reliquarum positionum. & hoc modo quarto theoremati octauum conuertitur. In illo enim ponuntur quidem duo latera aequalia; & angulus angulo aequalis, qui aequalibus lateribus continetur: cõcluditur aũt basim basi aequalẽ esse. At in octauo ponuntur duo latera aequalia; basisq́; basi aequalis: & concluditur angulum, qui aequalibus lateribus continetur, aequalem esse. Cum igitur duae sint conuersiones, ea quae proprie sic dicitur, vniformis est, & determinata; altera vero varia, & non in vno, sed in multis conuertens ob multitudinem positionum, quae in compositis theorematibus sunt. Theorematum vero, quae conuertuntur, alia precedentia vocare consueuerunt; alia conuersa. Cum enim genus quoddam ponentes, aliquod de ipso symptoma demõstrãt, hoc precedens appellatur: & cum è contrario positionem quidem faciunt symptoma; conclusionẽ vero genus, cui illud accidit, conuersum vocatur. vt omne triangulum aequicrure angulos qui

Hoc theorema præcedẽti cõuertitur.

Conuersio apud Geometras quæ proprie dicatur.

Conuersio alia.

Quarto octauum conuertitur.

Theorematũ, q̃ cõuertũtur, alia p̃cedentia sũt alia cõuersa.

ad

ad basim sunt, aequales habet. hoc precedens est. Omne triangulum duos angulos aequales habēs, latera quoque aequales angulos subtendentia habet aequalia, & est aequicrure. hoc cōuersum est. & hęc de cōuersionibus geometricis dicta sufficiant. deductiones vero id, quod fieri non pōt, in euidens absurdum desinunt, & cuius opposità omnes fatentur. accidit autem ipsarū alias desinere in ea, quae cōmunibus notionibus, vel postulatis, vel positionibus opponūtur; alias in ea, quae prius demonstratis contradicunt. Nam sextum hoc theorema, quod accidit fieri non posse ostendit, cum destruat communem notionem illam: Omne totum est maius sua parte. octauum vero desinit quidem in id, quod fieri non potest; non tamen destruit communem notionem, sed id quod per septimum theorema ostensum est. quod enim septimum fieri posse negauit, hoc illud affirmans consequi ostendit ijs, qui quęsitum non concedunt. omnis autem deductio ad id, quod fieri non potest, sumens quod cum quęsito pugnat, & hoc ponens progreditur, donec euidenti absurdo occurat, perq; illud positionem destruens, cōfirmat id quod à principio quęrebatur. omnino enim scire oportet mathematicas probationes omnes vel à principijs esse, vel ad principia: vt etiā inquit Porphyrius. & quae à principijs sunt, itidem duplices esse. aut enim ex cōmunibus notionibus, & sola euidentia per se fidem faciente emanant; aut ex ijs, quae ante ostensa fuere. Quae vero ad principia aut principia ponunt, aut destruunt. quae principia ponunt resolutiones vocantur; atque his opponuntur compositiones. fieri enim potest, vt à principijs illis ad quęsitum ordinate procedamus, & hoc nihil aliud est, nisi compositio: quae vero principia destruunt, deductiones ad id, quod fieri non potest nuncupantur. aliquid enim eorum, quae concessa, manifestaq; sunt destruere huius ipsius viae munus est: atque est hac syllogismus quidam, sed non idem, qui in resolutione. Nam in deductionibus ad id, quod fieri non potest iuxta secundum hypotheticarum ratiocinationum modum complexio est. vt si triangulorum aequales angulos habentium latera aequales illos angulos subtendentia aequalia non sint; totum parti est aequale. atqui hoc fieri non potest. triangulorum igitur duos angulos aequales habentium latera quoque aequales angulos subtendentia aequalia erunt. Vtitur autem Euclides conuersione quidem in propositione ipsa; vtpote qui conclusionem quinti theorematis, vt datum accipiens, positionem illius adiunxit, vt quęsitum; deductione autem ad id, quod fieri non potest in constructione, & demonstratione vtitur. hęc ex Proclo.

Deductiones ad id, qd fieri non potest in euidens absurdū desinunt.

Mathematicæ probationes uel a prīcipijs sūt uel ad principia.

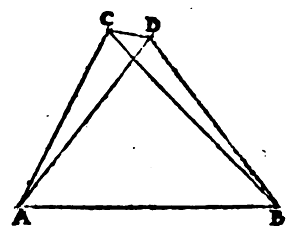
Resolutiões.

Compositiones.

Deductiones ad id, q̄ fieri non potest.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO VII.

In eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non constituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.



Si enim fieri potest, in eadem recta linea A B duabus eisdem rectis lineis A C C B aliæ duæ rectæ lineæ A D D B æquales, altera alteri constituantur ad aliud, atque aliud punctum C, D; ad easdem partes vt ad C D, eosdem habentes terminos A B, quos primæ rectæ lineæ; ita vt C A quidem sit ęqualis D A, eundem, quem ipsa terminum, habens A; C B vero sit æqualis D B, eundem habens B terminum: & C D iungatur. Itaque quoniam A C est æqualis A D; erit et angulus A C D angulo A D C æqualis. maior igitur est A D C angulus angulo D C B. quare angulus C D B angulo D C B multo maior erit. Rursus quoniam C B est æqualis D B; et angulus C D B æqualis erit angulo D C B: ostensus autem est ipso multo maior; quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri constituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primę rectæ lineæ, terminos habentes; quod ostendisse oportebat. 5. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc Theorema rarum quiddam habet; quod haud frequenter propositionibus, quae scientiam pariunt

Propositiones theorematum geometricorũ, arithmeticorũq; ut plurimũ affirmationes sunt.

Theorematis uarij casus.

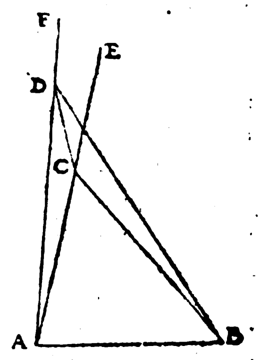
pariunt euenire consueuit. per negationem enim, & non per affirmationem formari haud quaquam ipsarum proprium est, cum propositiones geometricorum, arithmeticorumq́; theorematum magna ex parte affirmationes sint. Caussa autem est (vt inquit Aristoteles) quod vniuersale affirmans scientijs maxime conuenit, tanquam magis idoneum, & non indigens negatione. at vniuersale negans etiam affirmatione indiget. ex negantibus enim tantum neque demonstratio, neque ratiocinatio aliqua constat: ac propterea demonstrantes scientiae plurima affirmantia ostendunt: raro autem negantibus conclusionibus utuntur. hęc Proclus. Theorema uero multos habet casus. Nam punctum D vel cadit extra lineas A C C B, vel intra, vel in ipsis. & siquidem extra, hoc duobus modis fit; aut enim altera linearum A C C B secat alteram ipsarum A D D B, aut neutra neutram secat. cadat primum extra, secetq́; A D ipsam C B, ut apparet in prima figura, & iũgatur C D. cui quidem constructioni Euclidis demonstratio congruit. Sed cum ea breuis, & quodammodo obscura quibusdam visa sit, planius, & apertius sic explicabitur. Itaque quoniam A C est aequalis ipsi A D, erit angulus A C D angulo A D C aequalis. angulus autem A C D maior est angulo D C B; quippe quòd totum maius sit sua parte. angulus igitur A D C angulo D C B est maior. Sed C D B angulus eadem ratione maior est angulo A D C. Quare angulus C D B angulo D C B multo maior sit necesse est. Rursus quoniam B C est aequalis B D; erit & angulus C D B aequalis angulo D C B. atqui ostensus est multo maior; quod fieri non potest. similiter demonstrabitur idem sequi absurdum si recta linea B D secet ipsam A C. cadat deinde punctum D extra lineas A C C B, ita vt neutra neutram secet; & producantur rectae linae A C A D in puncta E F. Quoniam igitur A C est aequalis A D, angulus A C D ad basim angulo A D C aequalis erit; & productis A C A D, erit angulus F D C sub basi aequalis angulo D C E. Rursus cum B C sit aequalis ipsi B D, angulus B C D angulo B D C est aequalis. sed F D C angulus maior est angulo C D B. quare & D C E ipso D C B est maior, pars scilicet toto; quod fieri non potest. Non aliter demonstrabimus sequi absurdum, si punctum D intra dictas lineas cadere ponatur. denique in ipsis cadere non posse manifesto constat. totum enim parti esset aequale. Videtur autem hoc, ut inquit Proclus, lemma esse octaui Theorematis: siquidem ad illius demonstrationem confert, & neque simpliciter elementum est, neque elementare: non enim ad plura suam extendit vtilitatem. rarissimum igitur ipsius vsum apud geometram inuenimus.

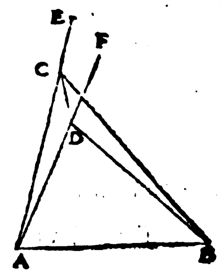
5. huius.

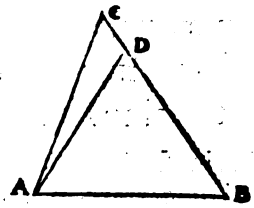
9 com. not.

5. huius.

Theorema hoc sequentis lemma esse uidetur.



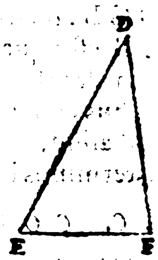


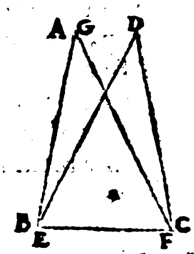


THEOREMA V. PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterũ alteri; habeant autem, et basim basi ęqualẽ: angulũ quoque, qui ęqualibus lateribus continetur angulo ęqualẽ habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant alterum alteri; vt sit A B quidẽ æquale D E; A C uero ipsi D F: habeant autem et basim B C basi E F æqua-





lem. Dico

lem. Dico angulum quoque B A C angulo E D F ęqualem esse. Triangulo enim A B C congruente ipsi D E F triangulo; et puncto quidem B posito in E; recta vero linea B C in E F: congruet, et C punctum puncto F, quoniam B C ipsi E F est ęqualis. Itaque congruente B C ipsi E F; congruent et B A A C ipsis E D D F. si enim basis quidem B C basi E F congruit; latera autem B A A C lateribus E D D F non congruunt, sed permutantur; vt E G G F: constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineę ęquales, altera alteri; ad aliud atque aliud punctum; ad easdem partes; eosdem habentes terminos. non constituuntur autem; vt demonstratum est. non igitur, si basis B C congruit basi E F, non congruent et B A A C latera lateribus E D D F. congruent igitur. Quare et angulus B A C angulo E D F congruet, et ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et basim basi æqualem: angulum quoque ęqualibus lateribus contentum angulo ęqualem habebunt; quod demonstrare oportebat.

In antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.

Octauum Theorema quarti conuersum est, vt supra diximus, non tamen iuxta propriam conuersionem, non enim totam illius positionem, conclusionem, totamq́; conclusionem positionem facit. Sed aliquam quidem ex positionibus, aliquam vero ex conclusionibus quarti theorematis contentis, vnum quid eorum, quae in illo data fuerunt, ostendit.

Octauum Theorema quarti conuersum est.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO IX.

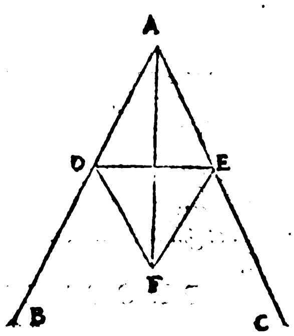
Datum angulum rectilineum bifariam secare.

A

Sit datus angulus rectilineus B A C. Itaque oportet ipsum bifariā secare. Sumatur in linea A B quodvis punctum D; & à linea A C ipsi A D æqualis auferatur A E; iunctaq́; D E constituatur in ea triangulum æquilaterum D E F; & A F iungatur. Dico angulum B A C à recta linea A F bifariam secari. Quoniam enim A D est æqualis A E; communis autem A F: duæ D A A F duabus E A A F æquales sunt, altera alteri; & basis D F æqualis basi E F. angulus igitur D A F angulo E A F est æqualis. Quare datus angulus rectilineus B A C à recta linea A F bifariam sectus est: quod facere oportebat.

3. huius.
B
1. huius.

Ex antecedente.



F. C. COMMENTARIVS.

A

Datum angulum rectilineum bifariam secare] *Angulus hoc loco specie datur, quippe qui rectilineus sit, & non quilibet. namque angulum omnē bifariam secare ex elementari institutione non licet; quandoquidem ambiguum etiam est, num omnis angulus bifariam secari possit. Sectionis autem ratio non ab re distincta fuit: in quamlibet enim proportionem secare pręsentem constructionem trāsgreditur. verbi gratia in tres, vel quattuor, vel quinque partes aequales. nam rectum quidem angulum trifariam secare possumus, paucis eorum, quae posterius tradentur, vtentes: acutū vero minime, nisi ad alias lineas, quae mixtae sunt, transcendamus. Datum enim angulum rectilineum trifariam secare docuit Nicomedes ex conchoidibus. alij vero ex alijs lineis mixtis idem fecerunt, nimirū ijs, quae à gręcis* τετραγωνίζουσαι *dicuntur, nos quadrātes appellare possumus. alij ex lineis conicis, vt Pappus tradit in quarto libro collectionum mathematicarum. alij denique ex lineis spiralibus, de quibus Archimedes, incitati in datam proportionem datum angulum rectilineum secuerunt. Quorum contemplationes cum difficiles sint, pręsertim ijs, qui instituuntur, in pręsentia omittemus.*

Omnem angulum bifariam secar ex elementari institutione non licet.
Rectum angulum trifariam secare possumus, acutū uero minime, nisi ad lineas mixtas transcendamus.

Iunctaq́; D E constituetur in ea triangulum æquilaterum D E F.

B

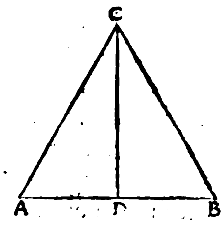
Idem

Loco æquilateri trianguli æquicrure constitui potest.

Idem etiam sequetur si loco aequilateri tum in hoc, tum in sequentibus aequicrure triangulum constituamus, & demonstratio eadem erit.

PROBLEMA V. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.



1. huius. Ex antecedente.

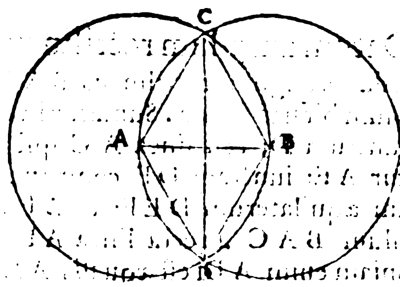
Sit data recta linea terminata A B. oportet ipsam A B bifariam secare. constituatur in ea triangulum æquilaterum A B C; & secetur A C B angulus bifariam recta linea C D. Dico A B rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim A C est æqualis C B; communis autem C D; duæ A C C D duabus B C C D æquales sunt; altera alteri: et angulus A C D æqualis angulo B C D. basis igitur A D basi B D est æqualis. et ob id recta linea terminata A B bifariam secta est in puncto D: quod facere oportebat.

4. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc etiam Theorema est, quod rectam lineam terminatam ponit. Si quidem ex vtraque parte infinitam terminare non possumus. Infinitae vero ex altera parte tantum, vbicumque punctum accipiatur, in partes inequales fit sectio. etenim quae in eisdem partibus est, in quibus recta linea infinita existit, reliqua finita existente necessario est maior. relinquitur igitur, vt ex vtraque parte finita accipiatur, quae bifariam secari debet. Apollonius vero Pergeus rectam lineam terminatam bifariam secat in hunc modum. Sit, inquit, recta linea terminata A B, quam bifariam secare debemus. & centro quidem A, interuallo autem A B circulus describatur: & rursus centro B, & interuallo B A describatur alius circulus; & ducatur C D communes circulorum sectiones coniungens, quae rectam lineam A B bifariam secabit. Iungantur enim A C C B, quae inter se aequales sunt, cum vtraque ipsi A B sit aequalis. communis autem C D; & D A est aequalis D B ob eandem caussam. angulus igitur A C D est aequalis angulo B C D. quare A B per quartum bifariam secta est.

Rectã lineã terminatam quõ Apollonius bifariã secat.



PROBLEMA VI. PROPOSITIO XI.

Datæ rectæ lineę à pũcto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

2. huius. 1.

Sit data recta linea A B, et datum in ipsa pũctum C. oportet à puncto C ipsi A B ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in A C quoduis punctum D; ipsiq; C D æqualis ponatur C E, et in D E constituatur triangulũ ęquilaterum F D E, et E F iungatur. Dico datæ rectę lineę A B à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse F C. Quoniam enim D C est æqualis C E, et F C communis; erunt duæ D C C F duabus E C C F æquales, altera alteri: et basis D F est æqualis basi F E. angulus igitur D C F angulo E C F est æqualis: et sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos qui deinceps sunt, angulos æquales inter se fecerit: rectus est vterque ęqualium angulorum. ergo vterque ipsorum D C F F C E est

8. huius.

Diffi. 10.

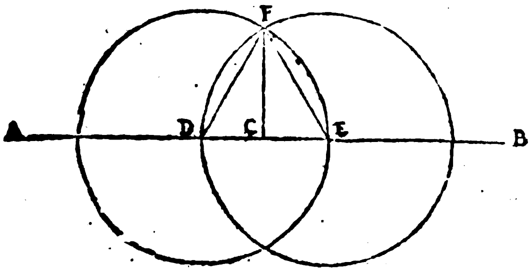
est rectus. datæ igitur rectæ lineę A B à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est F C recta linea. quod fecisse oportuit.

F. C. COMMENTARIVS.

Datæ rectæ lineę à puncto in ipsa dato.] *linea specie datur; punctum vero positione: quod vel in medio erit rectae linae, vel in altera eius extremitate. Euclides in medio rectae linae sumpsit. Quòd si in extremitate altera sumatur, vel ipsam producentes, reliqua eodem modo construemus; vel aliter propositum assequemur. Appollonius autem rectam lineam ad rectos angulos ducit hoc pacto. Sit data quidem recta linea A B, datum vero in ea punctum C, & in linea A C sumpto quouis puncto D, ab ipsa C B auferatur C E aequalis ipsi C D: & centro quidem D, interuallo autem D E circulus describatur. Rursusq́, centro E, & interuallo E D alius circulus describatur: & à puncto F, in quo circuli se inuicem secant, ducatur F C. Dico eam ad rectos angulos esse. si enim iungãtur F D, F E aequales inter se erunt. sed & D C C E aequales; & cõmunis F C. Quare ex octauo anguli qui ad C etiam inter se aequales sint necesse est. Si vero punctum in extremitate rectae lineae sumatur, ita faciendum censet Proclus. Sit recta linea A B, datumq́, punctum A, & sumatur in A B quod vis punctum C, à quo ipsi A B, quemadmodum nos docuit, ad rectos angulos ducatur C E: & ab ea ipsi A C aequalis abscindatur C D. angulus vero qui est ad C per rectam lineam C F bifariam secetur: atque à puncto D ipsi E C ad rectos angulos ducta occurat rectae lineae C F in F puncto; & F A iungatur. Dico angulum, qui ad A rectum esse. Quoniam enim D C est aequalis C A, communis autem C F, & angulos aequales continent, quòd angulus ad C bifariam sectus est: erit & D F ipsi F A aequalis, & omnia similiter per quartum theorema omnibus aequalia. quare & angulus ad A aequalis est angulo ad D. angulus igitur ad A rectus erit; quod facere oportebat.*

* Problematis casus.

Quo Apollonius rectam lineam ad rectos angulos ducit.



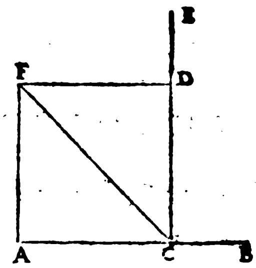
3. huius.

Postul. 3.

Quando punctum in extremitate lineæ sumitur quo faciendum sit.

3. huius.

9. huius.

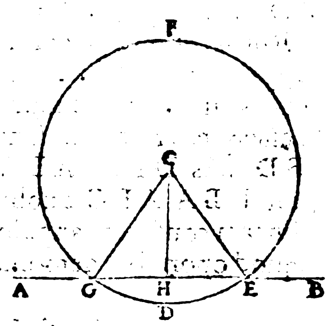


4. huius.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XII.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato pũcto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita A B, datum vero punctum C, quod in ea non est. oportet super datam rectam lineam infinitam A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius A B rectæ lineę quod vis punctum D: et centro quidem C, interuallo autem C D circulus describatur E F G: et E G in H bifariam secetur: iunganturq́; C G C H C E. Dico super datam rectam lineam infinitam A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem C H ductam esse. Quoniam enim æqualis est G H ipsi H E, communis autem H C, duę G H H C, duabus E H H C æquales sunt, altera alteri; & basis C G est ęqualis basi C E.



Postul. 3.

10. huius.

D angulus

8.huius. angulus igitur CHG angulo EHC est ęqualis; & sunt deinceps. cum autem recta linea super rectam lineam insistens eos, qui deinceps sunt angulos, ęquales inter se fecerit; rectus est vterque ęqualium angulorum; et quę insistit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui insistit. ergo super datam rectam lineam infinitam AB à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularis ducta est CH. quod facere oportebat.

Diffi.10.

F. C. COMMENTARIVS.

Oenopides hoc problema inuenit.

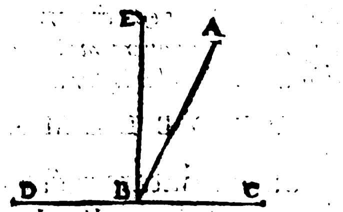
Hoc problema, vt refert Proclus, Oenopides primus indagauit, vtile ipsum ad astrologiam existimans. perpendicularem vero antiquorum more, gnomonem appellat, quoniam & gnomon horizonti ad angulos rectos est. quae autem ad angulos rectos, eadem est perpendicularis, habitudine tantum ab ea differens, cum subiecto eadem sit, quemadmodum et gnomon. Rursus perpendicularis duplex est, alia plana, alia solida. quando enim punctum, à quo perpendicularis recta linea ducitur in subiecto plano sit, plana appellatur: quando autem punctum sit sublime, atque extra subiectum planum, solida. & plana quidem ad rectam lineam ducitur, solida vero ad planum. Quare necessarium est illam non ad vnam rectam lineam angulos rectos facere, sed ad omnes, quae in subiecto existentes plano ipsam contingunt. In hoc igitur problemate Euclides perpendicularem planam ducere proponit, quippe cum ad rectam lineam ducatur: & quatenus in vno plano omnia consistant, sermo procedat. At in linea quae est ad angulos rectos quoniam punctum in ipsa sumptum est, nulla erit infinitatis necessitas: datam vero rectam lineam infinitam ponit, cum punctum, à quo perpendicularis duci debet, extra ipsam statuatur. si enim non esset infinita, poterat ita punctum sumi; vt extra quidem rectam lineam esset; indirectum autem ipsi, adeo vt protracta recta linea in ipsum incideret, & non fieret problema. Adde, quod nisi esset infinita, possemus etiam punctum ita sumere, vt si duceretur perpendicularis, non in ipsam, sed extra ipsam necessario caderet. His igitur de causis recta linea, ad quam perpendicularis ducẽda est, infinita ponitur.

Perpendiculare antiqui gnomonem appellarunt.

Perpendicularis plana, & solida.

THEOREMA VI. PROPOSITIO XIII.

✻ Cum recta linea super rectam cõsistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis ęquales efficiet.



Recta enim linea quædam AB super rectam CD consistens angulos faciat CBA ABD. Dico CBA ABD angulos; vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales. si enim CBA est æqualis ipsi ABD, duo recti sunt; sin minus, ducatur à puncto B ipsi CD ad rectos angulos BE. anguli igitur CBE EBD sunt duo recti. Et quoniam CBE, duobus CBA ABE est æqualis, communis apponatur EBD. ergo anguli CBE EBD tribus angulis CBA ABE EBD sunt ęquales. Rursus quoniam DBA angulus est ęqualis duobus DBE EBA, communis apponatur ABC. anguli igitur DBA ABC tribus DBE EBA ABC ęquales sunt. At ostensum est angulos quoque CBE EBD, eisdem tribus ęquales esse: quę vero eidem sunt ęqualia, et inter se æqualia sunt. ergo et anguli CBE EBD ipsis DBA ABC sunt ęquales. suntq; CBE EBD duo recti. anguli igitur DBA ABC duobus rectis ęquales erunt. ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis ęquales efficiet. quod oportebat demonstrare.

diffi.10.

per. 11.

Axioma. 1.

F. C. COMMENTARIVS.

✻ Cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit.] *Animaduertendum est, vt inquit Proclus, Euclidem in hac propositione maximam diligentiam adhibuisse. non*

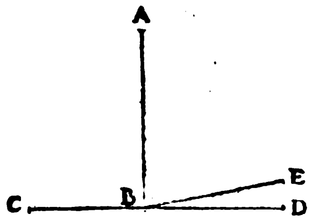
enim

enim simpliciter dixit. Omnis recta linea super rectã lineã consistẽs, vel duos rectos facit, vel duobus rectis aequales, sed si angulos fecerit. quid enim si in rectae lineae extremitate cõsistens vnum efficit angulum? acciditne quandoque hunc duobus rectis aequalem esse? hoc certe fieri non potest. Omnis si quidem rectilineus angulus duobus rectis est minor, quemadmodum omnis solidus minor est quattuor rectis. Quòd si angulum, qui maxime obtusus esse videatur, accipias, hunc quoque augebis, tanquam eum qui duorum rectorum mensuram adhuc non recipit. Oportet igitur rectam lineam sic consistere, vt angulos efficiat.

Omnis angulus rectilineus duobus rectis est minor.

THEOREMA VII. PROPO. XIIII.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duę rectę lineæ non ad easdem partes positę, angulos qui deinceps sunt, duobus rectis ęquales fecerint; ipsę rectæ lineæ indirectum sibi inuicem erunt.



Ad aliquam enim rectam lineam A B, atque ad punctum in ea B, duę rectę lineę B C B D non ad easdem partes positę angulos, qui deinceps sunt, A B C A B D duobus rectis ęquales faciant. Dico B D ipsi CB indirectũ esse. si enim B D non est in directũ ipsi C B, sit ipsi C B in directum B E. Quoniã igitur recta linea A B super rectam C B E consistit; anguli A B C A B E duobus rectis sunt ęquales. Sed et anguli A B C A B D sunt ęquales duobus rectis. anguli igitur C B A A B E ipsis C B A A B D ęquales erunt. cõis auferatur A B C. ergo reliquus A B E reliquo A B D est ęqualis, minor maiori, quod fieri non põt. non igitur B E est indirectũ ipsi B C. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, pręter B D. ergo C B ipsi B D indirectum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duę rectę lineę non ad easdem partes positę angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis ęquales fecerint, ipsę rectę lineę indirectum sibi inuicem erunt. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

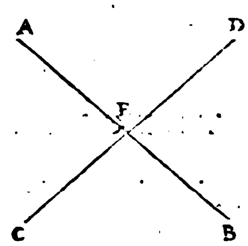
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc Theorema pręcedentis conuersum est, & per deductionem ad id, quod fieri non potest, ostẽditur. sic enim conuersa theorematum ostendi debent, vt inquit Proclus.

Conuersa theoremata per deductionẽ ad id, qđ fieri nõ põt, ostenduntur.

THEOREMA. VIII. PROPOSITIO. XV.

Si duę rectę lineæ se inuicem secuerint, angulos qui ad verticẽ sunt, inter se ęquales efficient.



Duæ enim rectæ lineæ A B C D se inuicem secent in puncto E. Dico angulum quidem A E C angulo D E B; angulum vero C E B angulo AED æqualem esse. Quoniam enim recta linea A E super rectã CD consistens angulos facit C E A A E D; erunt hi duobus rectis æquales. Rursus quoniam recta linea D C super rectam A B cõsistens facit angulos A E D D E B; erunt AED DEB anguli æquales duobus rectis. Ostensum autẽ est angulos quoque C E A A E D duobus rectis esse æquales. anguli igitur C E A A E D angulis A E D D E B æquales sunt. communis auferatur A E D. ergo reliquus C E A reliquo B E D est

13. huius.

3. com. not.

 ęqualis.

æqualis. Simili ratione, & anguli C E B D E A æquales ostendentur. Si igitur duę rectæ lineæ se inuicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM.

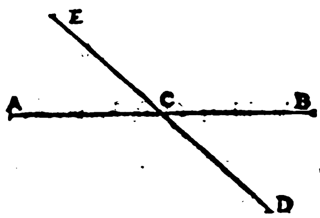
* Ex hoc manifeste constat rectas lineas quot quot se inuicem secant, facere angulos ad sectionem quattuor rectis ęquales.

F. C. COMMENTARIVS.

Anguli deinceps. Anguli ad uerticem. *Anguli qui deinceps sunt ab angulis, qui ad verticem, differunt; horum enim ortus ex duarum rectarum sectione fit; illorũ uero ex altera tãtũ ab altera secta. Nã si recta linea ipsa insecta manẽs, alteramq́, suo extremo secãs, duos angulos fecerit; hos deinceps angulos vocamus. Si uero duae rectae lineae, se inuicẽ secuerint, anguli ad uerticẽ efficiuntur, sic dicti, quòd vertices in eodẽ* Angulorum uertices. *puncto coniunctos habeant. Vertices autem ipsorum sunt puncta, ad quae plana duae contrahuntur, angulos efficiunt. Itaque hoc theorema ostendit duabus rectis lineis se inuicem secantibus, an-* Theorema a Thalete inuentũ. *gulos ad verticem aequales esse: inuentum quidem à Thalete primo, vt inquit Eudemus, ab Euclide vero demonstratum; in quo deest constructio, vtpote minus necessaria: demonstratio enim expositione contenta constructione aliqua non indiget.*

* Ex hoc manifestum est.] *Corollarium est quod ex pręcedenti demõstratione apparet. coroll-* Corollaria quæ nã sint in elementari institutione. *laria enim in elementari institutione sunt, vt inquit Proclus, quae simul cum aliorum demonstrationibus apparent, ipsa vero non pręcipue quęruntur: veluti id quod in pręsentia propositum est, nam quęrebatur quidem si duabus rectis lineis se inuicem secantibus, anguli ad verticem ęquales essent. dum autem hoc ostenditur, simul etiam ostẽsum est, quattuor qui fiunt, angulos, quattuor rectis aequales esse. Corollarium igitur est theorema, quod ex alterius problematis, uel theorematis demonstratione ex improuiso emergit. nam ueluti casu quodam in corollaria incidere uidemur, neque enim proponentibus nobis, neque etiam quęrentibus obuiam se se offerunt. Corollariorum* Corollaria geometrica, et arithmet. *uero alia geometrica sunt, alia aritbmetica, & rursus alia problematibus consequentia sunt, alia theorematibus; & alia directis ostensionibus, alia deductionibus ad id, quod fieri non potest, ostẽduntur. Huius autem theorematis conuersum à Proclo ita demonstratur.*

Huius theorematis conuersũ a Proclo demonstratur. Si ad aliquam rectam lineam duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ angulos ad uerticem æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ indirectũ sibi inuicem erunt.



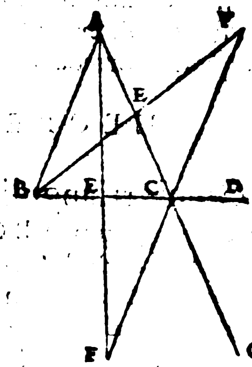
Sit enim recta linea quędam A B, & in ipsa quod vis punctum C; & ad C duae rectae lineae C D C E non ad easdẽ partes sumptae, quae angulos A C D B C E aequales faciant. Dico ipsas C D C E in directum sibi ipsis esse. Quoniam enim recta linea C D super rectam lineã A B insistit, duos angulos duobus rectis efficit aequa- 13. huius. *les; videlicet D C A D C B. Sed angulus D C A angulo B C E est aequalis. anguli igitur D C B B C E duobus rectis aequales sunt. Itaque quoniam ad aliquam rectam lineam B C duae rectae lineae consequenter C D C E non ad easdem partes sumptae, angulos deinceps duobus rectis aequales effi-* 14. huius. *ciunt: indirectum sibi inuicem erunt.*

THEOREMA IX. PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore, & opposito est maior.

Sit

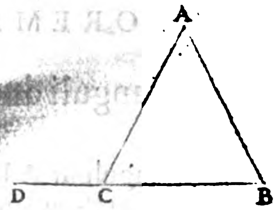
Sit triangulum A B C, et vnum ipsius latus B C ad D productum. Dico exteriorem angulum A C D vtroque interiore, et opposito, videlicet C B A et B A C maiorem esse. Secetur enim A C bifariam in E, et iuncta B E producatur ad F; ponaturq; ipsi B E ęqualis E F. iungatur pręterea F C, et ducta A C ad G producatur. Quoniam igitur A E quidem est ęqualis EC, B E vero ipsi EF, duę A E E B duabus C E E F ęquales sunt, altera alteri: et angulus A E B angulo F E C est ęqualis, ad verticem enim sunt. basis igitur A B ęqualis est basi F C; et A B E triangulum triangulo F E C, et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, alter alteri, quibus ęqualia latera subtenduntur. ergo angulus B A E est ęqualis angulo E C F. Sed E C D angulus maior est ipso E C F. maior igitur est angulus A C D angulo B A E. Similiter recta linea B C bifariam secta, ostendetur etiã B C G angulus, hoc est A C D angulo A B C maior. Omnis igitur trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore et opposito maior est. quod oportebat demonstrare. 4.huius.



THEOREMA X. PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocumque sumpti.

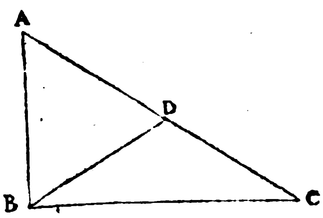
Sit triangulum A B C. Dico ipsius A B C triãguli duos angulos quomodocumque sumptos duobus rectis minores esse. producatur enim B C ad D. et quoniam trianguli A B C exterior angulus A C D maior est interiore, et opposito A B C: communis apponatur A C B. anguli igitur A C D A C B angulis A B C B C A maiores sunt. Sed A C D A C B sunt ęquales duobus rectis. ergo A B C B C A duobus rectis sunt minores. Similiter demõstrabimus angulos quoque B A C A C B, itemq; C A B A B C duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt; quomodocumque sumpti. quod demonstrare oportebat. 13.huius.



F. C. COMMENTARIVS.

Nunc quidem, vt inquit Proclus, indeterminate ostenditur, trianguli duos quoslibet angulos duobus rectis minores esse, in sequentibus vero determinabitur etiam quanto sint minores, nempe reliquo trianguli angulo: tres enim ipsius anguli duobus rectis aequales sunt. quare duo tanto minores sunt duobus rectis, quantus est reliquus trianguli angulus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XVIII.



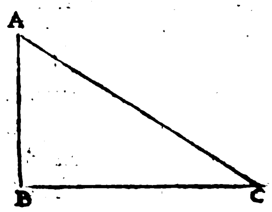
Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

Sit triangulum A B C habens latus A C latere A B maius. Dico et A B C angulum angulo B C A maiorem esse. Quoniam enim A C maior est, quàm A B, ponatur ipsi A B aequalis A D; et B D iungatur. Et quoniam trianguli B D C exterior angulus est A D B, erit is maior interiore, et opposito 16.huius.

5.huius. posito D C B. Sed A D B æqualis est ipsi A B D, quòd et latus A B lateri A D sit æquale. maior igitur est et A B D angulus angulo A C B. quare A B C ipso A C B multo maior erit. Omnis igitur trianguli maius latus maiorem angulum subtendit: quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XIX.

Omnis trianguli maiorem angulum maius latus subtendit.



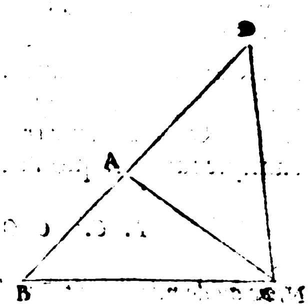
Sit triangulum A B C maiorem habens A B C angulum angulo B C A. Dico et latus A C latere A B maius esse. Si enim non est maius, vel A C est æquale ipsi A B, vel ipso minus. æquale igitur non est, nam et angulus A B C angulo A C B æqualis esset. non est autem. non igitur A C ipsi A B est æquale. Sed neque minus. esset enim et angulus A B C angulo A C B minor. atqui non est. non igitur A C minus est ipso A B. ostēsum autem est neque æquale esse. ergo A C ipso A B est maius. Omnis igitur trianguli maiorem angulum maius latus subtendit. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc præcedentis theorematis conuersum est, quare & per deductionem ad id, quod fieri non potest, demonstratur.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocumque sumpta.



Sit enim triangulum A B C. Dico ipsius A B C trianguli duo latera reliquo maiora esse, quomodocūque sumpta: videlicet latera quidem B A A C maiora latere B C; latera verò A B B C maiora latere A C: et latera B C C A maiora ipso A B. producatur enim B A ad punctum D; ponaturq; ipsi C A æqualis A D; et D C iungatur. Quoniam igitur D A est

5.huius. æqualis A C, erit et angulus A D C angulo A C D æqualis. Sed B C D angulus maior est angulo A C D. angulus igitur B C D angulo A D C est maior. Et quoniam triangulum est D C B, habens B C D angu-

Ex antecedente. lum maiorem angulo B D C: maiorem autem angulum maius latus subtendit: erit latus D B latere B C maius. Sed D B est æquale ipsis B A A C. quare latera B A A C ipso B C maiora sūt. Similiter ostendemus et latera quidem A B B C maiora esse latere C A: latera vero B C C A ipso A B maiora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocumque sumpta. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

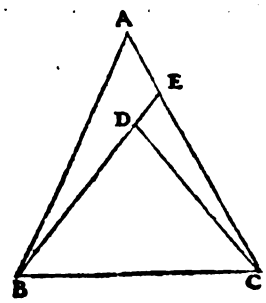
Hoc theorema Epicurei impugnarūt tamquam. Asino manifestum.

Præsens theorema, vt scribit Proclus, Epicurei impugnare consueuerunt, tum Asino ipsum manifestum esse dicentes, tum nulla egere probatione. Asino autem manifestum esse, ostendunt ex eo, quòd herba in altero laterū extremo posita, Asinus pabulū expetens, vnū latus peragrat, & non duo. Aduersus hec dicendum. Theorema sensu quidem manifestum esse, non autem & scientiam gignente ratione. multis enim rebus hoc accidit. exempli gratia ignis calefacit. hoc quoque sensui indubitatum

dubitatum est, sed quo nam pacto calefaciat, conuincere scientiae officium est. Sic igitur duo trianguli latera reliquo esse maiora, sensui manifestum, quo aūt hoc fiat dicere ad sciētiā pertinet. Alij aliter hoc theorema demonstrarunt, recta linea minime producta; vt videre licet apud Proclū.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XXI.

Si à terminis vnius lateris trianguli duę rectæ lineæ intra constituantur, hę reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.



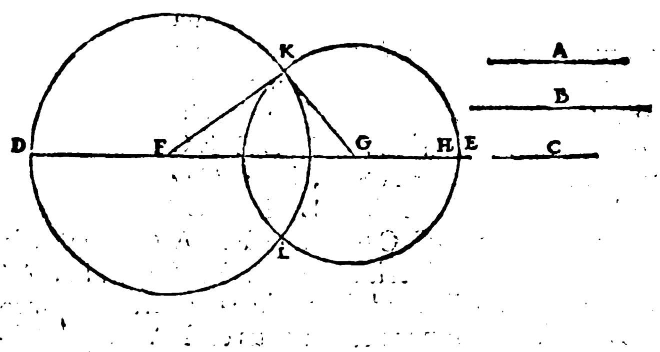
Trianguli enim A B C in vno latere B C à terminis B C duæ rectæ lineæ intra constituantur B D D C. Dico B D D C reliquis duobus trianguli lateribus B A A C minores quidem esse, maiorem vero continere angulum B D C angulo B A C. producatur enim B D ad E. Et quoniam omnis triāguli duo latera reliquo sunt maiora, erunt trianguli A B E duo latera B A A E maiora latere B E. communis apponatur E C. ergo B A A C ipsis B E E C maiora sunt. Rursus quoniam C E D triāguli duo latera C E E D sunt maiora latere C D, communis apponatur D B. quare C E E B ipsis C D D B sunt maiora. Sed ostensum est B A A C maiora esse B E E C. multo igitur B A A C ipsis B D D C maiora sunt. Rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore, et opposito est maior: erit trianguli C D E exterior angulus B D C maior ipso C E D. Eadem ratione et trianguli A B E exterior angulus C E B ipso B A C est maior. Sed angulus B D C ostensus est maior angulo C E B. multo igitur B D C angulus angulo B A C maior erit. Quare si à terminis vnius lateris trianguli duæ rectę lineæ intra constituantur, hę reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedē te.

16. huius.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXII.

Ex tribus rectis lineis, quę tribus rectis lineis datis ęquales sint, triangulum constituere. oportet autem duas reliqua maiores esse, quomodocumque sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocumque sumpta. *



Sint tres datæ rectę lineæ A B C, quarum duæ reliqua maiores sint, quomodocūque sumptæ, vt scilicet A B quidem sint maiores quàm C, A C vero maiores quàm B, et præterea B C maiores quàm A. Itaq; oportet ex rectis lineis ęqualibus ipsis A B C triāgulū cōstituere. exponatur aliqua recta linea D E, terminata quidem ad D, infinita vero ad E; et ponatur ipsi quidem A æqualis D F, ipsi vero B æqualis F G, et ipsi C æqualis G H: et

centro

3. postul. centro F, interuallo autem F D circulus describatur D K L. Rursusq; centro G, et interuallo G H alius circulus K L H describatur, et iungantur K F, K G. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A B C triangulum K F G constitutum esse. Quoniam enim punctum F centrum est D K L circuli; erit F D æqualis F K. Sed F D est æqualis A. ergo et F K ipsi A est æqualis. Rursus quoniam punctum G centrum est circuli L K H, erit G H æqualis G K. Sed G K est æqualis C. ergo et G H ipsi C æqualis erit. est autem et F G æqualis B. tres igitur rectæ lineæ K F F G G K tribus A B C æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis K F F G G K, quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis A B C, triangulum constitutum est K F G. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Problematũ alia indeterminata, alia terminata.

Determinatio duplex.

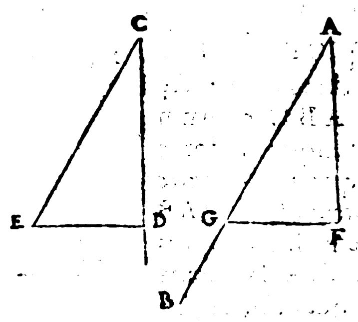
Præsens problema determinatum est. problematum enim quemadmodum & theorematum alia quidem indeterminata sunt, alia vero determinata. Si enim hoc modo simpliciter dixerimus, ex tribus rectis lineis, quae tribus datis rectis lineis aequales sint, triangulum constituere, problema indeterminatum erit, & fieri non poterit. Si autem addiderimus, quarum duae reliqua sint maiores, quomodocunque sumptae, determinatum erit, & fieri poterit. determinatio enim duplex est, altera quidem pars problematis, vel theorematis, quae post expositionem ponitur, significans quid sit illud, quod quęritur; altera uero, quae propositionem vniuersalem esse prohibet, explicans quando, & qua ratione, & quot modis id quod propositum est fieri possit, vt hoc loco, [oportet autem duas reliqua maiores esse, quomodocumque sumptas. quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocumque sumpta] *& in sexto libro*] Ad datam rectam lineam dato rectilineo ęquale parallelogrãmum applicare, deficiens figura parallelogramma, quę similis sit alteri datæ. oportet autem datum rectilineum, cui ęquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, et eo, quod à dimidia, et eo, cui oportet simile deficere.] *Quemadmodum autem theorematum iuxta verum, & falsum diuisio fit, ita & problematum iuxta id, quod fieri, & quod non fieri potest. Proclus in commentarijs citat Euclidis verba, quae à verbis huiusce demonstrationis discrepant, vt luce clarius sit Euclidis demonstrationes aliquibus in locis à Theone immutatas esse, & eas, quas nunc habemus Theonis esse, non Euclidis.*

Theorematum diuisio iuxta uerum & falsum.

Problematũ diuisio iuxta id, quod fieri, & qd non fieri potest.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO XXIII.

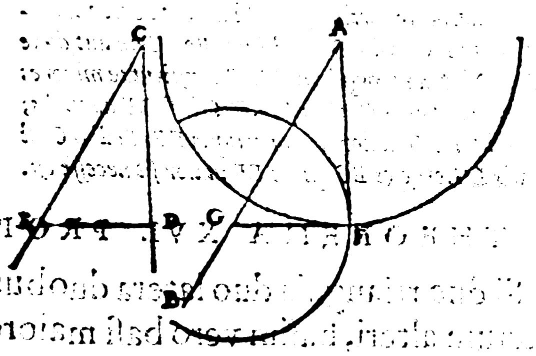
Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo ęqualem angulum rectilineum constituere.



Sit data quidem recta linea A B, datum vero in ipsa punctum A; et datus angulus rectilineus D C E. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, et ad datum in ea punctum A dato angulo rectilineo D C E, æqualem angulum rectilineum constituere. Sumãtur in vtraque ipsarum C D C E quęuis puncta D E, iungaturq; D E, et ex tribus rectis lineis, quæ ęquales sint tribus C D D E E C triangulum constituatur A F G, ita ut C D sit ęqualis A F, et C E ipsi A G, et D E ipsi F G. Itaque quoniam duę D C C E duabus F A A G ęquales sunt, altera alteri; et basis D E est æqualis basi F G: erit et angulus D C E angulo F A G æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, et ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo D C E æqualis angulus rectilineus constitutus est F A G. quod facere oportebat.

8. huius.

F. C.

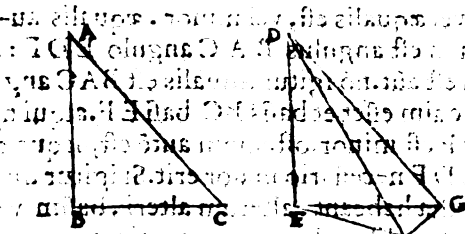


Et ex tribus rectis lineis, quę aequales sint tribus CD DE EC triangulum constituatur AFG.] *A recta linea A B abscindatur A G aequalis ipsi C E: & centro quidem A, interuallo autem ipsi C D aequali describatur circulus: & rursus centro G & interuallo aequali ipsi E D alius circulus describatur, vt circuli se inuicem in puncto F secent: & iungantur A F F G. Dico iam factum esse, quod proponebatur, & demonstratio eadem erit: Hoc autem problema ab Oenopide inuentum esse tradit Eudemus.*

* 3. Huius.
3. Postul.
Hoc theorema ab Oenopide inuentum est.

THEOREMA. XV. PROPOSITIO. XXIIII.

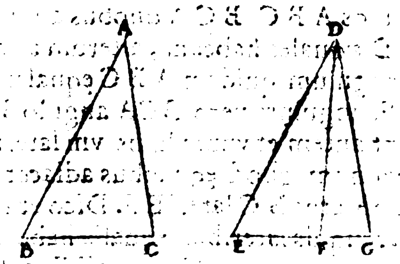
Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et basim basi maiorem habebunt.



Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera AB AC duobus lateribus D E DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B æquale lateri D E, latus vero A C æquale D F: & angulus B A C angulo E D F sit maior. Dico et basim B C basi E F maiorem esse. Quoniam enim angulus B A C maior est angulo E D F, constituatur ad rectam lineam D E, et ad punctū in ea D, angulo B A C ęqualis angulus E D G, ponaturq; alterutri ipsarum A C D F æqualis D G, et G E F G iungantur. Itaque quoniam A B quidem est æqualis D E, A C vero ipsi D G: duæ B A A C duabus E D D G æquales sunt, altera alteri; et angulus B A C est æqualis angulo E D G, ergo basis B C basi E G est æqualis. Rursus quoniam æqualis est D G ipsi D F; et angulus D F G angulo D G F: erit D F G angulus angulo E G F maior. multo igitur maior est E F G angulus ipso E G F. Et quoniam triangulum est E F G, angulum E F G maiorem habens angulo E G F; maiori autem angulo maius latus subtenditur; erit et latus E G latere E F maius. Sed E G latus est æquale lateri B C. ergo et B C ipso E F maius erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribns æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem augulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: et basim basi maiorem habebunt. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente. *
4. huius.
5. huius.
19. huius.

F. C. COMMENTARIUS.



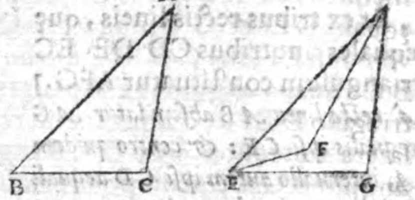
Hoc theorema quarto oppositum est, illud enim angulos qui sunt ad vertices triangulorū equales ponit, hoc inęquales; illud bases aequales, hoc inęquales esse demonstrat.

Et GE FG iungantur] *recta linea EG, vel cadit supra EF, vel in ipsam, vel infra ipsam. Euclides vt supra cadentē accepit. Quòd si in ipsam cadat, vt in secunda figura, idē ostendetur. Sunt enim duę B A A C duabus ED DG aequales: & cū aequales contineant angulos, & basis B C basi E G aequalis erit. Sed E G*

Hoc theorema quarto oppositum. *
4. Huius.

est maior, quàm E F, vt totum est maius, quàm ipsius pars. ergo & BC quàm EF est maior. Cadat postremo infra ipsam. ut in tertia figura. Similiter demonstrabimus basim B C basi EG aequalem esse. Cum aũt duae E F F D intra triangulum E D G constitutae minores sint, quàm duae E G GD; sitq́; D G ipsi DF aequalis; erit reliqua EG maior, quàm reliqua EF. Sed B C est ęqualis EG. ergo et BC quàm EF maior sit necesse est.

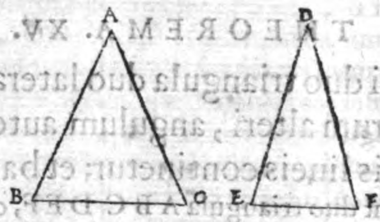
21.huius.



THEOREMA XVI. PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi maiorem; & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt.

Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera A B A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus A B æquale lateri D E, et latus A C lateri D F: basis autem B C basi E F sit maior. Dico et angulum B A C angulo E D F maiorem esse. si enim non est maior, vel æqualis est, vel minor. æqualis autẽ non est angulus B A C angulo E D F: esset enim et basis B C basi E F ęqualis. non est aũt. nõ igitur æqualis est BAC angulus angulo E D F. sed neque minor. minor enim esset et basis BC basi E F. atqui nõ est. non igitur angulus B A C angulo E D F est minor. ostensum autẽ est, neque esse ęqualem. ergo angulus B A C angulo E D F necessario maior erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi maiorem; et angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt. quod demonstrare oportebat.



4.huius.

Ex antecedenti.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema octauo quidem oppositum est, pręcedentis vero conuersum, quod alij aliter demonstrarunt, vt tradit Proclus.

Hoc theorema octauo oppositũ est, et præcedentis conuersum.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis ęquales habeãt, alterum alteri, vnumq́; latus vni lateri ęquale, vel quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula A B C D E F, quæ duos angulos A B C B C A duobus angulis D E F E F D æquales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem A B C ęqualem angulo DEF; angulum vero B C A angulo E F D. habeant autem et vnum latus vni lateri æquale, et primum quod ęqualibus adiacet angulis; nempe latus B C lateri E F. Dico et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterũ alteri, latus scilicet AB lateri DE; et latus AC

ipsi D F, et reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F æqualem. Si enim inęqualis est A B ipsi D E, vna ipsarum maior est. Sit maior A B, ponaturq; G B ęqualis D E; et G C iungatur. Quoniam igitur B G quidem est ęqualis D E, B C vero ipsi E F, duę G B B C duabus D E E F ęquales sunt, altera alteri: et angulus G B C æqualis angulo D E F. basis igitur G C basi D F est æqualis: et G B C triangulũ triãgulo D E F, et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, alter alteri, quibus ęqualia latera subtẽdũtur. ergo G C B angulus est ęqualis angulo D F E. Sed angulus D F E angulo B C A ęqualis ponitur. quare et B C G angulus angulo B C A est æqualis, minor maiori, quod fieri nõ põt. non igitur inæqualis est A B ipsi D E. ergo ęqualis erit. est autem et B C æqualis E F. Itaque duę A B B C duabus D E E F æquales sunt, altera alteri, et angulus A B C æqualis angulo D E F. basis igitur A C basi D F, et reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F est ęqualis. Sed rursus sint latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur ęqualia, vt A B ipsi D E. Dico rursus et reliqua latera reliquis lateribus ęqualia esse; A C quidem ipsi D F, B C vero ipsi E F: et adhuc reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F ęqualem. Si enim inæqualis est B C ipsi E F, vna ipsarum maior est. Sit maior B C, si fieri potest; ponaturq; B H ęqualis E F, et A H iungatur. Quoniam igitur B H quidem est æqualis E F, A B vero ipsi D E; duæ A B B H duabus D E E F æquales sunt, altera alteri, et angulos æquales continent. ergo basis A H basi D F est ęqualis: et A B H triangulum triangulo D E F, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ęqualis igitur est angulus B H A angulo E F D. Sed E F D est æqualis angulo B C A. ergo et B H A angulus angulo B C A est æqualis. Trianguli igitur A H C exterior angulus B H A ęqualis est interiori, et opposito B C A, quod fieri non potest. quare non inęqualis est B C ipsi E F. ęqualis igitur. est autem et A B æqualis D E. duæ igitur A B B C duabus D E E F æquales sunt, altera alteri: angulosq; æquales continent. quare basis A C æqualis est basi D F, et A B C triangulum æquale triangulo D E F, et reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F est æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, vnumq; latus vni lateri æquale, vel quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni ęqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. quod oportebat demonstrare.

Margin notes: 4. huius. — 4. huius. — 4. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema ad Thaletem refertur, vt Proclus ex Eudemo tradit. De triangulorum quidem ortu, & aequalitate, vel inęqualitate quęcumque in elementari institutione dici poterant, ex superioribus didicimus. De quadrilateris deinceps Euclides agit; pręcipue vero de parallelogrammis: simul cum horum contemplatione de trapezijs differens. diuiditur enim quadrilaterum, vt superius dictum est in parallelogrammum, & trapezium: rursusq; parallelogrammum in alias species: & trapezium similiter. Verum quoniam parallelogrammum quidem ob ęqualitatis participationem ordinatum est: trapezium vero neque eundem, neque similem seruat ordinem: non immerito pręcipue quidem de parallelogrammis sermonem habet; simul vero cum his trapezium contemplatur. ex parallelorum enim sectione ortus trapeziorum apparebit, vt procedentibus nobis fiet manifestum. Sed quoniam rursus fieri non potest, vt de parallelogrammorum, vel constructione, vel aequalitate aliquid dicatur absque parallelarum consideratione; vt enim ex ipso quoque nomine apparet parallelogrammum est, quod à parallelis rectis lineis è regione positis describitur: necessario à parallelis doctrinae initium facit. paulum vero progressus ab his ad parallelogrammorum tractationem accedit, vno vsus theoremate medio inter harum, illorumq; institutionem elementarem, quod quidem videtur symptoma quoddam, quod parallelis inest, contemplari: primum autem ortum parallelogrammorum tradit. tale enim est. [Rectæ lineæ, quæ æquales, et parallelas ad easdem partes coniungunt, et ipsæ æquales, et parallelæ sunt.]*nam in hoc consideratur quidem symptoma quoddam aequalibus, ac parallelis; ex coniunctione autem apparet parallelogrammum, quod latera aequalia, et parallela è regione posita habet. Parallelarum*

Margin notes: Hoc theorema ad Thaletem refertur. — Parallelogrãmum ordinatum est, trapeziũ uero minime. — Parallelogrãmum est quod a parallelis describitur. — Parallelogrãmorum ortus.

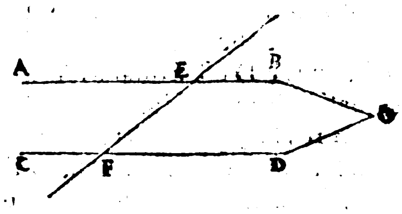
Parallelis tria per se in sunt.

igitur sermonem necessario preassumptum esse, ex his constat. Tria autem assumere oportet, quae parallelis per se insunt, ipsasq; explicant: & cum ipsis conuertuntur. neque solum tria simul, sed & vnum quodque seorsum ab alijs sumptum. quorum vnum hoc est. recta linea parallelas secante, alternos angulos inter se aequales esse: aliud, recta linea parallelas secante angulos interiores duobus rectis esse aequales. reliquum vero, recta linea parallelas secante, angulum exteriorem interiori; & opposito aequalem esse. horum autem symptomatum vnumquodque demonstratum parallelas esse rectas lineas affirmare potest. Hoc modo & alij mathematici de lineis disserere consueuerunt, vniuscuiusque speciei symptoma tradentes. Apollonius enim in qualibet conicarum linearum, quid symptoma sit ostendit: & Nicomedes in conchoidibus, & Hippias in quadrantibus. & Perseus in spiricis. nam post earum ortum, quod ipsis per se, & quatenus ipsum inest, assumptum, constitutam nobis formam ab omnibus alijs distinguit. Eodem igitur modo, & elementorum institutor parallelarum symptomata primum inuestigat. Hec ex Proclo.

Apollonius de conicis lineis aget. Nicomedes de cōchoid. Hippias de quadrātibus Perseus de spiricis.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXVII.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

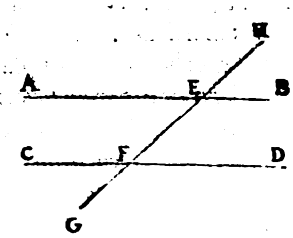


In duas enim rectas lineas A B C D, recta linea E F incidens alternos angulos A E F E F D æquales inter se faciat. Dico rectam lineam A B ipsi C D parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ A B C D, vel ad partes B D conuenient, vel ad partes A C. producantur, conueniantq; ad partes B D in pūcto G. Itaque G E F trianguli exterior angulus A E F maior est interiore et opposito E F G. Sed et æqualis. quod fieri nō pōt. non igitur A B C D productę ad partes B D conuenient. Similiter demonstrabitur neque conuenire ad partes A C. quę vero in neutras partes conueniunt, parallelę inter se sunt. parallela igitur est A B ipsi C D. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se ęquales fecerit, parallelę inter se erunt rectę lineæ. quod ostendere oportebat.

16. huius.

diffi. 35.

F. C. COMMENTARIVS.



Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos] *Alternos angulos appellat eos, qui neque ad easdem partes, neque deinceps sunt, sed ab incidente linea distinguuntur, cum vtrique intra parallelas existant. differunt autem quòd alter sursum alter deorsum ponatur. Vt exempli gratia, rectis lineis A B, & C D existentibus, incidenteq; in ipsas recta linea E F, angulos A E F D F E; itemq; angulos C F E B E F alternos esse dicit. vt pote alterno, commutatoue ordine iuxta positionem se habentes. Illud autem sciendum est, cum talis sit rectarum linearum situs, omnia symptomata ex diuisione sex fieri, quorum tria tantum Geometra accepit, tria vero omisit. vel enim ad easdem partes angulos sumemus, vel non ad easdem: & si ad easdem, vel vtrosque intra rectas lineas, quas parallelas ostendit, vel vtrosque extra, vel vnum quidem intra, alterum verò extra. Si vero non ad easdem partes, similiter vel vtrosque intra, vel extra, vel vnum intra, & alterum extra. Sint enim rursus rectae lineae A B C D, in quas incidat recta linea E F: & ad H G puncta producatur. Si igitur ad easdē partes angulos accipias, vel vtrosq; intra pones, vt B E F, & E F D, vel ipsos, A E F, & E F C, vel vtrosq; extra, vt H E B D F G, vel H E A C F G, vel vnum quidem intra, alterum vero extra, vt H E B E F D, vel G F D F E B; vel H E A E F C, vel G F C A E F,*

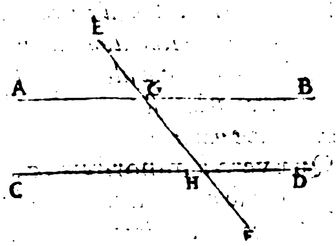
quadrupliciter

quadrupliciter enim hi accipiuntur. Si vero non ad easdem partes, vel vtrosque intra, vt A E F E F D, vel C F E F E B: vel vtrosque extra, vt A E H D F G, vel H E B C F G, vel vnum quidem intra, alterum vero extra; atque hoc rursus quadrupliciter, vel enim A E H E F D, vel H E B E F D, vel G F C F E B, vel G F D F E A. Cum igitur anguli sex modis sumatur, Euclides tres solas sumptiones elegit, vnam quidem ex iis angulis, qui non ad easdem sunt partes, et qui intra tantum sumũtur; quos alternos appellauit; duas vero ex iis, qui ad easdem partes vel vtrique intra sumuntur, quos duobus rectis aequales esse dicit: vel vnus quidem extra, alter vero intra sumitur, quos dicit inter se aequales esse. Tres vero reliquas omisit, vt pote quos eadem omnino consequãtur. Sint enim ad easdem partes vtrique extra anguli H E B D F G. Dico hos duobus rectis aequales esse. angulus enim D F E angulo H E B, & angulus B E F angulo D F G est aequalis. Si autem anguli B E F E F D duobus rectis sunt aequales, anguli etiam D F G H E B duobus rectis aequales erunt. Sint rursus non ad easdem partes anguli A E H E F D, quorum alter sit extra, alter intra; ipsi quoque duobus rectis sunt aequales. Quoniam enim angulus A E H aequalis est angulo B E F, anguli vero B E F E F D duobus rectis aaquales sunt; erunt & anguli A E H E F D duobus rectis aequales. Sint postremo non ad easdem partes vtrique extra anguli A E H D F G. Dico eos etiam inter se aequales esse. Nam cum angulus A E H aequalis sit angulo B E F, & angulus D F G angulo E F C, sintq́, anguli B E F E F C alterni inter se aequales: anguli etiam A E H D F G inter se aequales sint necesse est.

Cum anguli sex modis sumantur. Euclides tres solas sumptiones elegit, reliquas omisit.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulũ interiori, et opposito, et ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, et ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erũt inter se rectæ lineæ.



In duas enim rectas lineas A B C D recta linea E F incidens exteriorem angulum E G B interiori et opposito G H D æqualem faciat; vel interiores, et ad easdem partes B G H G H D, duobus rectis ęquales. Dico rectam lineam A B rectę C D parallelam esse. Quoniam enim E G B angulus ęqualis est angulo G H D, angulus autem E G B angulo A G H, erit et angulus A G H angulo G H D ęqualis: et sunt alterni. parallela igitur est A B ipsi C D. Rursus quoniam anguli B G H G H D duobus rectis sunt æquales, et sunt A G H B G H ęquales duobus rectis: erunt anguli A G H B G H angulis B G H G H D æquales. communis auferatur B G H. reliquus igitur A G H est ęqualis reliquo G H D: et sunt alterni. ergo A B ipsi C D parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori et opposito, et ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, et ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectę linee. quod demonstrare oportebat.

15. huius.

Ex antecedente. 13. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema à Ptolemęo aliter demonstratur, vt tradit Proclus.

Theorema à Ptolemæo aliter demõstratur.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter se æquales, et exteriorem interiori et opposito, et ad easdem

easdem partes æqualem, et interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas AB CD recta linea incidat E F. Dico alternos angulos AGH GHD inter se æquales efficere, et exteriorẽ EGB interiori et opposito, et ad easdẽ partes GHD æqualẽ: et interiores et ad easdem partes BGH GHD duobus rectis æquales. Si enim inæqualis est AGH ipsi GHD, vnus ipsorum maior est. Sit maior AGH. et quoniam AGH angulus maior est angulo GHD; communis apponatur BGH. anguli igitur AGH BGH angulis BGH

13. huius. GHD maiores sunt. Sed anguli AGH BGH sunt æquales duobus rectis. ergo B

Post. 5. * GH GHD anguli sunt duobus rectis minores. Quæ vero à minoribus, quàm sint duo recti in infinitum producuntur rectæ lineæ inter se conueniunt. ergo rectæ lineæ AB CD in infinitum productæ conuenient inter se. atqui non conueniunt, cum parallelę ponantur. non igitur inæqualis est AGH angulus angulo GHD.

15. huius. quare necessario est ęqualis. angulus autem AGH ęqualis est angulo EGB. ergo et EGB ipsi GHD ęqualis erit. communis apponatur BGH. anguli igitur EGB BGH sunt ęquales angulis BGH GHD. Sed EGB BGH ęquales sunt duobus rectis. ergo et BGH GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter se æquales, et exteriorẽ interiori et opposito, et ad easdem partes æqualem; et interiores et ad easdem partes duobus rectis ęquales efficiet. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema, vt inquit Proclus, vtrisque pręcedentibus conuertitur. quod enim in vtroque illorum est quęsitum, positionem facit; & quae in illis data sunt, demonstrare proponit: atque hęc conuersorũ differentia silentio pręterenda non est. nam omne quod conuertitur, aut vnum vni conuertitur, vt quinto sextum, aut pluribus vnum, vt pręcedentibus, quod nunc proponitur: aut plura vni, vt paulo post manifestum erit.

* Quæ vero à minoribus, quàm sint duo recti in infinitum producuntur rectæ lineę inter se conueniunt] *Postulatum quintum est, quod tamen cum euidens non sit, & demõstratione indigere videatur, Proclus ita demõstrandum censuit, duobus pręmissis, nimirum axiomate quopiam, quo etiam Aristoteles vsus est, & lemmate.*

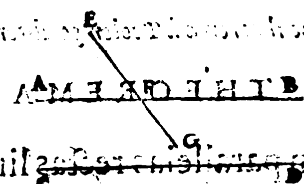
AXIOMA.

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes in infinitum producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedit.

LEMMA.

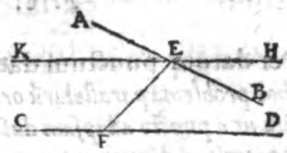
Si alteram parallelarum secuerit recta quædam linea; reliquam quoque secabit.

Sint parallelae AB CD; secetq; ipsam AB recta linea EFG. Dico EFG reliquam quoque CD secare. Quoniam enim duae rectae lineae sunt, quae ab vno puncto F in infinitum producuntur, BF FG; omni finita magnitudine maiorem habebunt distantiam. quare & maiorem ea magnitudine, quae tanta est, quantum est interuallum inter parallelas interiectum. cum igitur harum linearum distantia maior fuerit, quàm distantia parallelarum, recta linea FG secabit ipsam CD. Quare si alteram parallelarum se-



cherit quędam recta linea, reliquam quoque secabit.

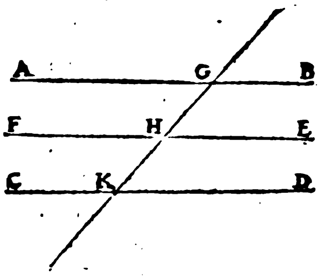
Hoc ante demonstrato consequenter propositum demonstrabitur. Sint enim duae rectae lineae A B C D, & in ipsas incidat recta linea E F, angulos B E F D F E duobus rectis minores efficiens. Dico rectas lineas inter se conuenire ad eas partes, in quibus sunt anguli duobus rectis minores. Cum enim anguli B E F D F E duobus rectis minores sint, sit excessui duorum rectorum aequalis H E B angulus, & H E ad K producatur. Itaque quoniam in rectas lineas H K C D recta linea E F incidit, interioresq; angulos H E F D F E duobus rectis efficit aequales; rectae lineae H K C D parallelae erunt. & A B secat ipsam H K. ergo reliquam quoque C D secabit per antecedens lemma. conuenient igitur inter se rectae linae A B C D ad eas partes, in quibus sunt anguli duobus rectis minores, quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXX.

Quę eidem rectę lineæ sunt parallelę, & inter se parallelæ erunt. *

Sit vtraque ipsarum A B C D ipsi E F parallela. Dico et A B ipsi C D parallelam esse. Incidat enim in ipsas recta linea G K. Et quoniam in parallelas rectas lineas A B E F, recta linea G K incidit, angulus A G H angulo G H F est æqualis. Rursus quoniam in parallelas rectas lineas E F C D, recta linea incidit G K, ęqualis est G H F angulus angulo G K D. ostensus autem est & angulus A G K angulo G H F æqualis. ergo et A G K ipsi G K D æqualis erit. et sunt alterni. parallela igitur est A B ipsi C D. ergo quæ eidem rectæ lineę sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt, quod oportebat demonstrare.



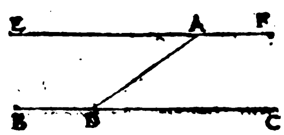
F. C. COMMENTARIVS.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, et inter se parallelæ erunt] *Contingit autem hoc, vt inquit Proclus, non in omnibus respectibus verum esse. non enim quę eiusdem dupla, & inter se dupla sunt, nec quae eiusdem sesquialtera, inter se sunt sesquialtera, sed in illis solis locum habere videtur, quęcunque vnivoce conuertuntur, ut in ęqualitate, in similitudine, in identitate, & in parallela positione. Quae enim parallelae parallela, & ipsa parallela est, quemadmodum, & quod aequali aequale, & ipsum est aequale; & quod simili simile, & ipsum simile. parallelarum enim ad se se respectus similitudo positionis est.* *

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXXI.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. *

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. oportet per A punctum ipsi B C rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in B C quod uis punctum D, & iungatur A D: constituaturq; ad rectam lineam D A, & ad punctum in ipsa A, angulo A D C æqualis angulus D A E: & in directum ipsi E A recta linea A F producatur. Quoniã igitur in duas rectas lineas B C E F recta linea A D incidens alternos angulos E A D A D C inter se æquales efficit, E F ipsi B C parallela erit. Per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ B C parallela ducta est recta linea E A F, quod facere oportebat.



23. Huius.

27. Huius.

F. C.

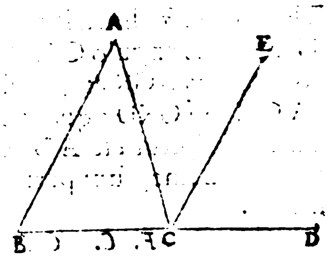
F. C. COMMENTARIVS.

* Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.] *Videtur hoc problema parallelarũ ortũ tradere. At datum punctũ extra rectam lineam sumere oportet, ita ut à puncto ad ipsam ducta recta linea angulum faciat, alioqui nulla alia prӕter iam dictã, duci poterit. differunt autem per datum punctum, & à dato puncto rectam lineam ducere. Quando enim punctum rectae lineae, quae ducitur, principium est; ab ipso fit deductio, vt in illo problemate,* [super datam rectam lineam infinitam à puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere] *Quando autem punctum in recta linea est, per ipsum deductio fieri dicitur, vt nunc in parallelis.* [per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelã rectam lineam ducere;] *& quemadmodum non licet ab eodem puncto super datam rectam lineam duas perpendiculares, vel plures ducere, ita neque per idem punctum datae rectae lineae duas, uel plures parallelas ducere. parallelae enim in dicto puncto inter se conuenirent. quod est absurdum.*

Per datum punctum, & à dato pũcto lineã ducere.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus duobus interioribus, et oppositis est æqualis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.



Sit triangulum A B C: et vnum ipsius latus B C in D producatur. Dico angulum exteriorem A C D duobus interioribus et oppositis CAB ABC æqualem esse; et trianguli tres interiores angulos ABC BCA CAB duobus rectis esse æquales. Ducatur enim per punctũ C ipsi A B rectæ lineę parallela C E. Et quoniam AB ipsi C E parallela est, et in ipsas incidit A C, alterni anguli B A C A C E inter se ęquales sunt. Rursus quoniã AB parallela est CE, et in ipsas incidit recta linea BD, exterior angulus E C D interiori et opposito A B C est æqualis. Ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo B A C. Quare totus A C D exterior angulus æqualis est duobus interioribus et oppositis BAC ABC. communis apponatur A C B. anguli igitur A C D A C B tribus A B C B C A C A B ęquales sunt. Sed anguli A C D A C B sunt ęquales duobus rectis. Ergo et A C B C B A C A B duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus & oppositis est ęqualis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis ęquales sunt, quod demonstrare oportebat.

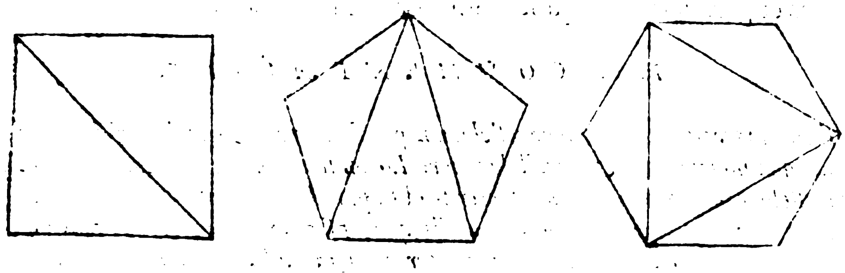
Ex antecedente.

29. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Quantum deficiebat in sextodecimo, & septimodecimo theoremate, tantum in hoc addit, vt notat Proclus. non solum enim ex hoc discimus, trianguli exteriorem angulum vtroque interiore & opposito maiorem esse, sed & quanto maiorem. nam cum vtrisque sit aequalis, maior quàm alteruter reliquo est. nec trianguli duos quoslibet angulos duobus rectis minores esse solum ex hoc cognoscimus, sed quanto etiam minores: reliquo enim trium. illa igitur quodam modo magis indefinita fuerunt theoremata, hoc vero scientiae terminum vtrisque attulit. eius theorematis, triangulum scilicet interiores angulos duobus rectis aequales habere, inuentionem ad Pythagoricos refert Eudemus, quod ipsi aliter demonstrarunt, vt Proclus tradit. qui etiam huius theorematis duo ostendit conuersa, ex quibus apparere potest, quomodo vni duo conuertantur. Cum igitur ex hoc constet, trianguli tres interiores angulos duobus rectis esse aequales, aperta est nobis via, per quã ceterarum quoque figurarum rectilinearum angulos inueniemus, quot rectis aequales sint. vt puta *ta quadrilaterae, quinquelaterae, & aliarum, quae sequuntur. Itaque primo sciendum est omnem rectilineam figuram in triangula resolui; omnium si quidem constitutionis principium est triangulum. vnaquęque autem in triangula binario pauciora, quàm sint propria latera, resoluitur, vt si*

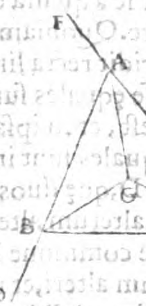
Omnis recti linea figura in triangula binario pauciora quam sit propria latera resoluitur.



quattuor latera habeat, in duo resoluitur triangula; si quinque in tria, si sex in quattuor, & similiter reliquae. Quòd cum omnis trianguli tres interiores anguli duobus rectis sint aequales, numerus triangulorum, ex quibus vnaquęque figura constat, duplicatus multitudinem prębebit rectorum, quibus ea aequales angulos habet. Quapropter omnis quadrilatera figura ex duobus triangulis constans angulos habet quattuor rectis aequales. & omnis quinquelatera habet angulos aequales sex rectis, & deinceps eodem modo. Sed & illud sciendum est, [omnem rectilineam figuram vnoquoque ex eius lateribus semel producto, angulos qui extra constituũtur, quattuor rectis æquales habere] *quod nos hoc modo demonstrabimus.*

Omnis recti linea figura angulos qui extra constituũtur quattuor rectis æquales habet.

Sit triangulum A B C, et producantur latera A B B C C A ad puncta D E F. Dico angulos C B D B A E A C E, qui extra constituuntur, quattuor rectis æquales esse.

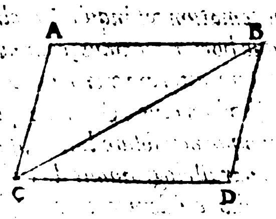


Sumatur enim intra triangulum, quod vis punctum G, & iungãtur G A G B G C. erunt triangulorum A G B B G C C G A omnes anguli sex rectis aequales; Sed & anguli C B A C B D B A C B A F A C B A C E sunt aequales sex rectis. Ergo dictorum triangulorum anguli angulis C B A C B D B A C B A F A C B A C E aequales sunt. communes auferantur C B A B A C A C B. reliqui igitur, qui sunt ad G sunt aequales angulis extra figuram constitutis. anguli autem ad G quattuor rectis sunt aequales. ergo & anguli, qui extra figuram constituuntur, videlicet C B D B A F A C E quattuor rectis aequales erunt. quod demonstrare oportebat. eodẽ modo demonstrabimus in reliquis figuris, angulos qui extra ipsas constituuntur, quattuor rectis esse aequales. Corol. 15.

THEOREMA. XXIII. PROPOSITIO. XXXIII.

Quę æquales, et parallelas ad easdem partes coniungunt rectę lineę, et ipsæ æquales, et parallelæ sunt.

Sint ęquales et parallelę A B C D: et ipsas coniungant ad easdem partes rectę lineę A C B D. Dico A C B D æquales, et parallelas esse. iungatur enim B C. & quoniam A B parallela est C D, et in ipsas incidit B C, alterni anguli A B C B C D æquales sunt. Rursus quoniam A B est æqualis C D, communis autẽ B C, duæ A B B C duabus B C C D sunt ęquales; et angulus A B C ęqualis angulo B C D. basis igitur A C basi B D est ęqualis, triangulumq; A B C trian 29. huius. 4. huius.



gulo B C D: et reliqui anguli reliquis angulis æquales erũt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus A C B angulo C B D est ęqualis. Et quoniam in duas rectas lineas A C B D recta linea B C incidens, alternos angulos A C B C B D ęquales inter se efficit, parallela est A C ipsi B D. ostensa autem est et ipsi ęqualis. Quæ igitur ęquales et parallelas ad easdem partes coniungunt rectæ lineæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt. quod oportebat demonstrare.

27. huius.

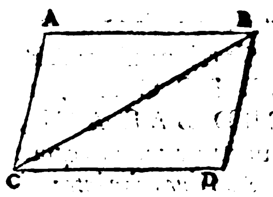
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema veluti confinium parallelarum, parallelogrammorumq́, considerationis esse dicebamus. aequalium namque & parallelarum rectarum linearum symptoma quoddam dicere videtur, parallelogrammorumq́ ortum latenter tradit. parallelogrammum enim fit ex aequalibus, & parallelis, quae initio ductae sunt, & ex ijs, quae ipsas coniungunt rectis lineis: quae etiam aequales & parallelae ostenduntur. Qua propter quod statim sequitur, veluti constituto iam parellelogrammo, quae per se insunt eiusmodi spacijs, contemplatur. Quanta autem diligentia in hac propositione adhibita sit, accurate & diligenter notauit Proclus.

Parallelogrã mum quomodo fiat.

THEOREMA. XXIIII. PROPO. XXXIIII.

Parallelogrammorum spaciorum latera, quæ ex opposito, et anguli, inter se ęqualia sunt; et diameter ea bifariam secat.



Sit parallelogrammum A C D B, cuius diameter B C. Dico A C D B parallelogrammi latera, quæ ex opposito, et angulos inter se æqualia esse; et diametrum B C ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est A B ipsi C D, et in ipsas incidit recta linea B C; anguli alterni A B C B C D inter se ęquales sunt. Rursus quoniam A C ipsi B D parallela est, et in ipsas incidit B C; alterni anguli A C B C B D ęquales sunt inter se. duo igitur triangula sunt A B C C B D, quę duos angulos A B C B C A duobus angulis B C D C B D æquales habent, alterum alteri: et vnum latus vni lateri æquale, quod est ad ęquales angulos, vtrique commune B C. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. ęquale igitur est latus quidem A B lateri C D; latus vero A C ipsi B D; et angulus B A C angulo B D C ęqualis. Et quoniam angulus A B C est ęqualis angulo B C D; et angulus C B D angulo A C B; erit totus angulus A B D æqualis toti A C D. ostensus autem est, et angulus B A C angulo B D C ęqualis. parallelogrammorũ igitur spaciorum latera, quę ex opposito, et anguli, inter se ęqualia sunt. Dico etiam diametrum ea bifariam secare. Quoniam enim æqualis est A B ipsi C D, communis autem B C, duæ A B B C duabus D C C B ęquales sunt, altera alteri, et angulus A B C æqualis est angulo B C D. basis igitur A C basi D B ęqualis. quare et triangulum A B C triangulo B C D æquale erit. ergo diameter B C parallelogramum A C D B bifariam secat. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Theorematum, vt inquit Proclus, alia vniuersalia sunt, alia non vniuersalia. quomodo autem vtrunque horum dicamus, commemorabimus, cum quęsitum partiemur, quod vnam partem habet vniuersalem, alteram vero non vniuersalem. quamuis enim omne theorema vniuersale quidam esse fortasse videretur, & omne, quod ab Euclide ostenditur huiusmodi esse (quemadmodum in pręsentia quoque non solum latera, quae ex opposito sunt, & angulos aequales habere vniuerse de omnibus parallelogrammis dici videtur, verum etiam diametrum vnumquodque bifariam secare) attamen alia quidem vniuerse ostendi dicimus, alia uero non vniuerse. aliter enim vniuersale appellari consueuit, quod de omnibus verum dicit, de quibus prędicatur; aliter autem quod omnia comprehendit.

Theoremata alia uniuersalia, alia non uniuersalia.

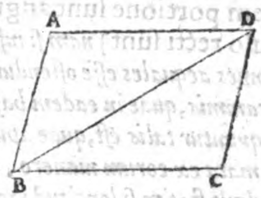
Vniuersale duobus modis appellari consueuit.

comprehendit, quibus idem symptoma inest. vniuersale siquidem est, & quod omne aequicrure tres angulos duobus rectis aequales habet, quoniam de omnibus aequicruribus verum est; vniuersale autem, & quod omne triangulum habet tres angulos duobus rectis aequales, quoniam omnia comprehendit, quibus hoc per se inest. Quocirca primum quoque hoc de triangulo ostendi dicimus, tres angulos duobus rectis aequales habere. Itaque iuxta hanc significationem alia quidem vniuersalia theorematum dicentes, alia vero non vniuersalia, pręsens theorema dicimus vnum quidem quęsitorum vniuersale habere: alterum vero non vniuersale. nam hoc quidem latera, quae ex opposito sunt, & angulos aequales habere vniuersale est. solis enim parallelogrammis inest. hoc vero, diametrum bifariam spacium secare, non vniuersale, quoniam non omnia comprehendit, in quibus symptoma hoc inspicitur. etenim circulis, & ellipsibus hoc etiam inest. & videntur primae quidem rerum huiuscemodi notiones esse magis particulares, progressae autem totum comprehendere. Cum enim antiqui contemplati fuissent, diametrum bifariam secare circulum, ellipsim, & parallelogrammum, commune in his postea contemplati fuere. Hallucinatur autem, inquit Aristoteles, quidā nō vniuersale tamquā vniuersale ostendens, eò quod commune est innominatū, cui primum symptoma inest. nam quid commune sit numeris, & magnitudinibus, & motibus, & sonis, quibus omnibus inest permutata proportio, dicere non licet. quid pręterea cōmune sit circulo, ellipsi, & parallelogrammo, difficile est exprimere, nā vna quidem figura rectilinea est, altera circularis, altera vero mixta. Quapropter vniuersale eū ostēdere opinamur, qui demonstrat, omne parallelogrāmū à diametro bifariā secari, eo quòd commune simul nō cernimus, propter quod hoc verum est. Hoc igitur in parallelogrammis etiam huiuscemodi vniuersale non est propter iam dictam caussam. illud vero est, omne parallelogrammum latera, quae ex opposito sunt & angulos habere aequalia. Etenim si aliqua figura posita fuerit, quae ex opposito sunt latera, & angulos aequalia habere, parallelogrammum hęc esse ostendetur. hęc Proclus. Huius autem theorematis conuersum, quatenus ad primam partem attinet, tale est.

Tres angulos duobus rectis æquales habere primū de triangulo ostenditur.

Diametrum bifariam secare spaciū, inest non solum parallelogrāmo sed circulis, et ellipsibus.

Omne quadrilaterum, quod latera ex opposito, et angulos æqualia habet, parallelogrammum est.

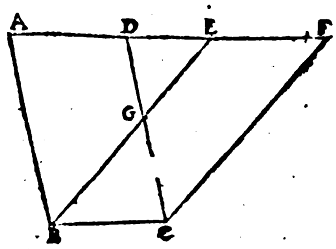


Sit quadrilaterum A B C D, habens latus quidem A B aequale lateri D C; latus vero A D lateri B C; angulumq́; A B C angulo A D C aequalem; & angulum B A D angulo B C D. Dico quadrilaterum A B C D parallelogrammum esse. Ducatur diameter B D. Et quoniam A B est aequalis D C, & A D ipsi B C, duae D A A B duabus B C C D aequales sunt, angulosq́; aequales cōtinēt, & basis B D vtrique cōis. triangulū igitur A B D triāgulo C D B aequale erit, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, videlicet angulus A B D angulo C D B, & angulus A D B angulo C B D, qui sunt alterni. ergo A B parallela est in ipsi D C & A D ipsi B C, ideoq́; A B C D parallelogrammum est. quod demonstrare oportebat. 27.huius.

Conuersum vero vt ad secundam partem huiusmodi erit [omne quadrilaterum, quod ab vtrisque diametris bifariam secatur, parallelogrammum est. *quod nos Paulo post demonstrabimus.*

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXXV.

Parallelogramma in eadem basi, et in eisdem paralellis constituta, inter se æqualia sunt.



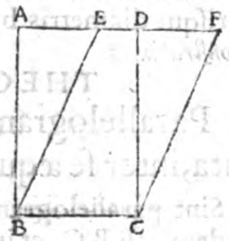
Sint parallelogramma A B C D E B C F in eadem basi B C, et in eisdem parallelis A F B C constituta. Dico A B C D parallelogrammū parallelogrammo E B C F æquale esse. Quoniā enim parallelogrammum est A B C D, æqualis est A D ipsi B C. Eadem quoque ratione, et E F est ęqualis B C. Quare et A D ipsi E F ęqualis erit: et communis D E. tota igitur A E toti D F est æqualis. est autem et A B æqualis D C. ergo duę E A A B duabus F D DC ęquales sunt, altera alteri, et angulus F D C ęqualis angulo E A B, exterior interiori. basis igitur E B basi F C est æqualis, et E A B 4.huius.

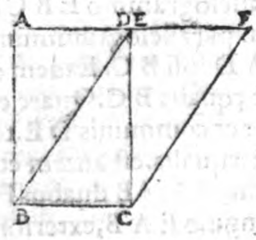
triangulum ęquale triangulo FDC. commune auferatur D G E. reliquum igitur trapezium A B G D reliquo trapezio E G C F est ęquale. commune apponatur G B C triangulum. ergo totum parallelogrammum A B C D toti parallelogrammo E B C F ęquale erit. parallelogramma igitur in eadem basi; et in eisdem parallelis cõstituta inter se æqualia sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Quemadmodum theorematum, vt inquit Proclus, alia quidem vniuersalia, alia vero particularia esse dicebamus, & quemadmodum hęc diuidentes subiungebamus, alia esse simplicia, alia composita, & quid vnumquodque horum esset ostendebamus, ita sanè iuxta aliã distinctionem, alia quidem localia esse dicimus, alia vero non localia. Voco autem localia, quibuscumque idem symptoma in toto quodam loco accidit. locum uero lineae, vel superficiei situm, qui vnum, idemq́; symptoma efficiat. localium enim alia in lineis constituuntur, alia in superficiebus. Et quoniam linearum aliae sunt planae, aliae solidae. & planae quidem, quarum simplex est in plano intelligentia, ut ipsius rectae: solidae uero quarum ortus ex quadam solidae figurae sectione apparet. ut Cylindicae helicis, canonicarumque linearum, dicerem utique eorum etiam, quae in lineis constituuntur, localium theorematum, alia quidem planum habere locum, alia uero solidum. Pręsens igitur theorema & locale est, & in lineis locale, & planum. totum enim spacium, quod inter parallelas interijcitur, locus est parallelogrammorum, quae in eadem basi constituntur. quae sanè aequalia quoque inter se Euclides ostendit. eorum uero localium theorematum, quae solida uocantur, tale sit exemplum, [parallelogramma, quæ in asymptotis, et hyperbola describuntur æqualia sunt.] *nam hyperbolen solidam esse lineam, manifestum est, quòd sit una ex coni sectionibus. Cum autem in pręsentia de rectilineis sermo fit, localia plana in rectis lineis tradit; in tertio autem libro, cũ de circulis, eorumq́; symptomatibus pertractet, ea etiam, quae in circumferentijs constituuntur localium simul, & planorum theorematum docebit, tale siquidem in illis est, quod ait* [Qui in eadem portione sunt anguli inter se sunt ęquales] *nec non illud.* [Anguli qui in semicirculo recti sunt] *nam si infiniti quidẽ anguli in circũferentia constituti fuerint, eadẽ existẽte basi, omnes aequales esse ostenduntur. & illa quidem proportione respondent triangulis, & parallelogrammis, quae in eadem basi, & in eisdem sunt parallelis. Species igitur theorematum, quae mox sequuntur talis est, quae apud antiquos mathematicos localis nuncupatur. Sunt pręterea hęc theoremata ex eorum numero, quae admirabilia in mathematicis disciplinis appellantur. stupet enim uulgus statim si longitudo multiplicata spaciorum aequalitatem non destruit, eadem existẽte basi. quantum enim parallelas producimus, tantum parallelogrammorum quoque longitudines augentur. Sciendum autem est angulorum aequalitatem, & inequalitatem maximam uim habere ad augenda minuendaq́; spacia. quo enim magis angulos inequales efficimus, eò spacium magis diminuimus, si longitudo latitudoq́; eadem sit. Hoc theorema plures habet casus, uel igitur latus B E secat C D, uel non secat. & si non secat, uel E cadit inter A D uel in D. Euclides autem difficiliorem casum elegit, cum scilicet latus B E ipsum CD secat. si uero E cadit inter A D ita argumentabimur. Quoniam enim A D est aequalis E F, quòd utraque ipsi BC sit aequalis, communi ablata E D, erit reliqua A E aequalis reliquae D F. est autem D C aequalis A B. Itaque duae F D D C duabus E A A B aequales sunt, & angulos aequales continent. basis igitur F C basi E B est aequalis. & FDC triangulum triangulo E A B. addatur cõmune trapezium E B C D. erit totum A B C D parallelogrammum toti E B C F parallelogrammo aequale. Quòd si E cadat in D, similiter demonstrabimus triangulum F DC aequale triangulo D A B. quare addito utrique communi D B C triangulo, totum A B C D parallelogrammum toti parallelogrammo D B C F, hoc est E B C F aequale erit.*

Theoremata localia.
Locus lineæ, uel superficiei situs, qui idẽ symptoma efficit..
Linearum aliæ planæ aliæ solidæ.
Localium theorematũ alia planum habent locũ, alia solidũ. localia theoremata, quæ solida appellantur.
Hyperbole solida linea.
Localia plana in rectis lineis.
Localia plana in circumferentijs.
Theoremata quæ in matematicis admirabilia dicuntur.
Angulorum æqualitas, et inæqualitas maximam uim habent ad augenda minuendaq; spacia.
Theorematis casus.
4. huius.



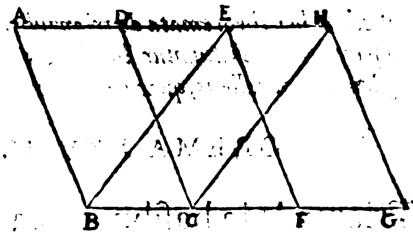


THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXVI.

Parallelogramma in ęqualibus basibus,

et

et in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

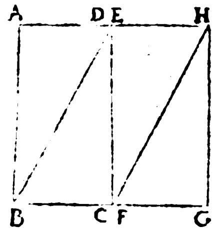


Sint parallelogramma ABCD EFGH in æqualibus basibus B C F G, et in eisdē parallelis AH BG constituta. Dico parallelogrammum A B C D parallelogrammo E F G H æquale esse. coniungantur enim BE CH. Et quoniam æqualis est BC ipsi FG, & FG ipsi EH; erit et BC ipsi EH æqualis. suntq; parallelæ, et ipsas cōiungunt BE CH. quæ autem æquales, et parallelas ad easdem partes coniungunt, æquales, et parallelæ sunt. Ergo E B, C H et æquales sunt, et parallelæ: quare E B CH parallelogrammum est, et æquale parallelogrammo ABCD; basim enim eandem habet B C, et in eisdem parallelis B C, A D constituitur. simili ratione, et EFGH parallelogrammum eidem parallelogrammo EBCH est æquale. ergo parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale erit. Parallelogramma igitur in æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia. quod oportebat demonstrare.

33.huius.

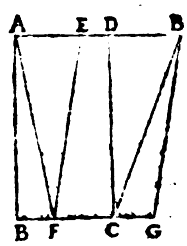
Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIUS.



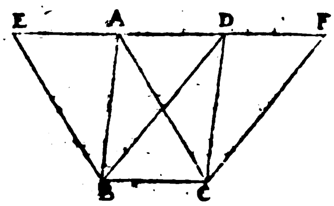
Præcedens theorema easdem bases accipiebat, hoc vero æquales. commune autem vtrisque est in eisdem esse parallelis. oportet igitur ipsa neque intra subiectas cadere parallelas, neque extra. parallelogramma enim in eisdem dicuntur esse parallelis, cum bases ipsorum, & quae his ex opposito sunt, latera eisdem parallelis aptantur. Casus huius theorematis plures sunt. Nam vel bases omnino seiunctae sunt, vel se se contingunt, uel aliquam partem habent communem, vtcunque se habeant latera, quae basibus opponuntur. & quamquam Proclus dicat Euclidem cum basim seiunctam accepisset, theorema demonstrasse, attamen demonstratio, quam habemus omnibus casibus congruere mihi videtur, vt etiam ex hoc loco colligi possit demonstrationes Euclidis à Theone in meliorem formam redactas esse.

Parallelogrāma in eisdē parallelis, quæ sint. Theorematis casus.



THEOREMA XXVII.
PROPOSITIO XXXVII.

Triangula in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.



Sint triangula ABC DBC in eadem basi BC, et in eisdem parallelis AD BC constituta. Dico ABC triangulum triangulo D B C æquale esse. producatur AD ex utraque parte in E F pūcta: et per B quidem ipsi CA parallela ducatur BE, per C vero ipsi BD parallela CF. parallelogrammū igitur est vtrūque ipsorū EBCA DBCF, et parallelogrammum E B C A est æquale parallelogrammo D B C F, etenim in eadem sunt basi BC, et eisdem parallelis BC EF, estq; parallelogrammi quidem EBCA dimidium ABC triangulum, cum diameter AB ipsum bifariam secet: parallelogrammi vero DBCF dimidium triangulum DBC; diameter enim DC ipsum bifariā secat. Quæ autem æqualium dimidia, inter se æqualia sunt. ergo triangulum A B C triangulo DBC est æquale. Triangula igitur in eadem basi, et in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. quod oportebat demonstrare.

31.huius.

35.huius.

34.huius.
7.com.no.

F. C.

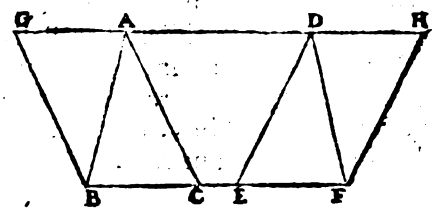
F. C. COMMENTARIVS.

Theoremata de triangulis localia, & in lineis localia & plana

Sunt etiam hec theoremata de triangulis, quae in eadem basi, vel in aequalibus basibus, & in eisdem parallelis constituuntur localia, & in lineis localia, & plana. dicuntur autem triangula in eisdem esse parallelis, quae cum bases habeant in vna parallelarum, in reliqua vertices figut.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula in basibus, ęqualibus et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt ęqualia.



Sint triangula ABC DEF in æqualibus basibus, B C E F, et in eisdem parallelis BF AD constituta. Dico ABC triangulum triangulo D E F æquale esse. producatur enim AD ex vtraq; parte in GH puncta: et per B quidem ipsi CA parallela ducatur B G: per F vero ducatur FH parallela ipsi DE. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum GBCA DEFH. atque est parallelogrammum GBCA ęquale parallelogrammo DEFH: in æqualibus enim sunt basibus BC EF, et in eisdem BF GH parallelis. parallelogrammi vero G B C A dimidium est ABC triangulum, nam diameter AB ipsum bifariam secat. et parallelogrammi DEFH dimidium est triangulum DEF, diameter enim D F ipsum secat bifariam. quę autem ęqualiũ dimidia, inter se æqualia sunt. ergo ABC triangulum triangulo DEF est ęquale. triangula igitur in ęqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. quod demonstrare oportebat.

31. huius. 35. huius. 34. huius. 7 com. not.

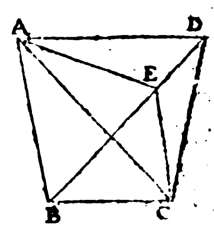
F. C. COMMENTARIVS.

Casus in hoc theoremate tot sunt, quot in xxvi. videtur autem Euclides quod in his quattuor theorematibus ostendit, vno illo theoremate comprehendisse, in principio sexti libri. [triangula: et parallelogramma, quę eandem habent altitudinem inter se sunt, ut bases.] *eadem enim altitudo nihil aliud est, nisi in eisdem esse parallelis. nã figurae oẽs quę in eisdẽ sunt parallelis, eandẽ altitudinẽ habent, & contra, altitudo siquidem est perpendicularis, quae ab altera parallelarũ ad reliquã pertinet. illic igitur per proportionem ostensum est, ita se se habere triangula, et parallelogramma, quae eandem altitudinem habent, hoc est quae in eisdẽ sint parallelis, vt bases: & aequalibus existen-tibus basibus aequalia esse spacia, & dupla duplis, & aliam proportionẽ habentibus, eandem habere & spatia inter se proportionem: in pręsentia uero, quoniam non decebat proportione uti, qui nondũ de ipsa docuerat, contentus fuit aequalitate sola, atque identitate.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXIX.

A

Triangula æqualia in eadem basi, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.



Sint æqualia triangula A B C D B C in easdem basi B C constituta, et ad easdem partes. Dico et in eisdem parallelis esse. Iungatur enim A D. Dico A D parallelam esse ipsi B C. Si enim non est parallela, ducatur per A punctum ipsi B C parallela recta linea A E, et E C iungatur. æquale igitur est A B C triangulum triangulo E B C, in eadem enim est basi BC, et in eisdem BC, AE parallelis. Sed A B C triangulũ triangulo D B C est ęquale. ergo et triangulum

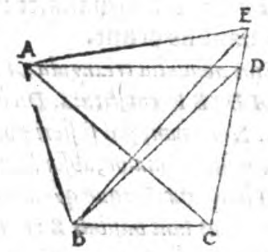
DBC

D B C æquale est ipsi E B C triangulo, maius minori, quod fieri non potest. non igitur A E ipsi B C parallela est. Similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam esse, præter ipsam A D. ergo A D ipsi B C est parallela. Triangula igitur æqualia in eadem basi, et ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema vigesimi septimi conuersum est, & quod sequitur est conuersum vigesimi octaui. nam, vt inquit Proclus, cum triplex sit theorematum conuersio, aut enim totum toti conuertitur, vt duodecimum theorema vndecimo; aut pars toti, vt tertium secũdo; aut pars parti, vt quintum primo. non enim totum in altero datum, quæsitum in altero est, nec quæsitum, datum, sed pars: talia videntur esse hæc quoque theoremata in triangulis. erat siquidem quæsitum in præcedentibus, triangula aequalia esse. hoc autem non solum in his datum est, quippe cum partem insuper sumpserit eius, quae in illis erat, positionis: hoc enim, in eadem basi esse, & in aequalibus basibus tum in his, tum in illis datum est, preterquam quòd in hisce positionibus quoddam adiecit, quod quidem nec quæsitum, nec datum in illis erat. particula enim illa, ad easdem partes, extrinsecus insuper fuit assumpta. conuersa vero vigesimi quinti, & vigesimi sexti in parallelogrammis consulto omisit, quod eadem sit in vtrisque demonstratio. Theorematũ conuersio triplex.

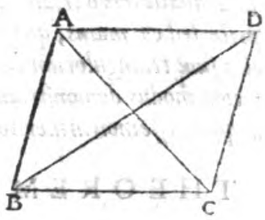
Et ad easdem partes.] *Quae his respondent, videlicet* καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη *in aliquibus græcis exẽplaribus, tum in hoc theoremate, tum in sequenti nõ legũtur, sed necessario addita sunt. fieri enim potest vt in eadem basi aequalia triangula sumantur, vnum quidẽ ad partes superiores, aliud vero ad inferiores, quae tamen non sunt in eisdem parallelis, & quandoque non eadem altitudine.* A



Maius minori quod fieri non pōt.] *Idẽ absurdũ sequetur, si recta linea A E sumatur extra ipsam A D, vt notat Proclus. Ex his, quae hoc loco demonstrata sunt, patebit cõuersũ secũdę partis vigesimi quarti theorematis, quod erat huiusmodi.* B

Omne quadrilaterum, quod ab utrisque diametris bifariam secatur, parallelogrammum est.

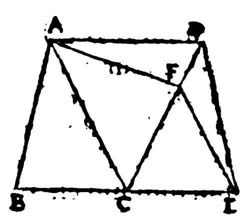
Sit quadrilaterum A B C D, cuius diametri A C B D ipsum bifariam secent. Dico A B C D parallelogrammum esse. Quoniam enim triangula A B C D B C eiusdem sunt dimidia, inter se aequalia sunt: & eandem habent basim B C. quare in eisdem sunt parallelis. parallela igitur est A D ipsi B C. similiter cum triangulum A B C aequale sit triangulo A B D, & sint in eadem basi A B, demonstrabitur rectam lineam D C ipsi A B parallelam esse. Ergo A B C D parallelogrammum erit. quod oportebat demonstrare.



THEOREMA XXX. PROPOSITIO XL.

Triangula æqualia in basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula A B C C D E in æqualibus basibus B C C E constituta. Dico etiam in eisdem esse parallelis. cõiungatur enim AD. Dico A D ipsi B E parallellam esse. Nam si non est, ducatur per A ipsi B E parallela A F, et F E iungatur. triangulum igitur A B C triangulo F C E est æquale, cum in æqualibus basibus, et in eisdem parallelis B E A F constituantur. Sed triangulũ A B C æquale est triangulo D C E. 38.huius.



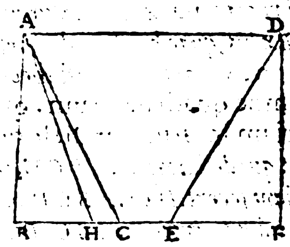
ergo

ergo et triangulum D C E triangulo F C E ęquale erit, maius minori, quod fieri nõ potest. non igitur A F ipsi B E est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, prǽter A D. ergo A D ipsi B E parallela erit. Aequalia igitur triangula in basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Cum tria sint in iam dictis propositionibus, videlicet in aequalibus, vel eisdem basibus esse, in eisdem parallelis, & aequalia esse triangula, & parallelogramma; nos duo semper contexentes, vnum vero relinquentes varie conuertemus. aut enim bases easdem, vel aequales ponemus, in eisdemq; parallelis triangula, & parallelogramma, & quattuor faciemus theoremata: aut aequalia ipsa suscipiemus, & bases easdem, vel aequeles, & faciemus alia quattuor; quorum duo quidem omisit Euclides, nimirum ea, quae sunt in parallelogrammis; reliqua vero duo ostendit, videlicet ea, quae in triangulis sunt: aut etiam cum aequalia sumpserimus, & in eisdẽ parallelis, reliquum ostendemus, vel in eisdem basibus esse, vel in aequalibus, & faciemus alia quattuor, quae etiam Euclides omisit. in his namque eadem est demonstratio, nisi quòd duo ex his quattuor per se vera non sunt. non enim aequalia parallelogramma, vel triangula, & quae in eisdem sunt parallelis, necessario in eadem basi sunt. Sed totum hoc in hisce positionibus verum est, vel in eisdem esse basibus, vel in ęqualibus; alterum autem, non omnino sumptas positiones consequitur. Quapropter cũ decem sint omnia theoremata, sex quidem geometra conscripsit, quattuor vero omisit, ne rursus eadem ratione frustra laboret, cum eadem sit demõstratio. ostẽdetur enim in triangulis hoc modo.

Triangula æqualia, et in eisdem parallelis constituta, vel in eisdem, vel in æqualibus basibus erunt.

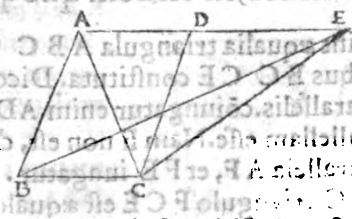


Sint aequalia triangula A B C D E F in eisdem parallelis A D B F constituta. Dico in aequalibus quoque basibus esse. Non enim, sed si fieri potest, sint bases B C E F inequales, & sit B C maior, abscindaturq; B H aequalis ipsi E F; &

38.huius. *A H iungatur. Itaque quoniam triangula A B H D E F in aequalibus sunt basibus B H E F, & in eisdem parallelis, inter se aequalia sunt. Sed & ipsa A B C D E F triangula posita sunt aequalia. ergo triangulum A B C triangulo A B H est aequale; sed & maius, quod fieri non potest. Non igitur inequales sunt triangulorum A D C D E F bases. Idem demonstrabitur, & in parallelogrammis. Quare cum modus demonstrandi idem sit, & id, quod fieri non potest, idem, totum, scilicet suae parti aequale esse: non in merito ab Euclide prętermissum fuit. hęc ex Proclo.*

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum, et triangulum eandem basim habeant, in eisdemq; sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.



Parallelogrammum enim A B C D, et triãgulum E B C, basim habeant eandem B C, et in eisdem sint parallelis B C A E. Dico parallelogrammum A B C D trianguli E B C duplum esse. Iũgatur enim A C. triangulum igi-

37.huius. tur A B D triangulo E B C est æquale; namque in eadem basi B C, et in eisdem B C A E

34.huius. parallelis constituitur. Sed A B C D parallelogrammum duplum est trianguli A B C, cum diameter A C ipsum bifariam fecet. Quare et ipsius E B C trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, et triangulum

gulum eandem basim habeant, et in eisdem sint perallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Huius theorematis duo sunt casus, vel enim triangulum verticem habet intra parallelogrammum, vel extra. Sed in vtrisque demonstratio eadem est. Quòd si bases aequales sint, eodem modo ostendemus, parallelogrammi diametrum ducentes. nam cum triangula in basibus aequalibus constituta inter se aequalia sint, parallelogrammum, quod alterius est duplum, reliqui quoque duplum erit. Sed duo eius conuersa similiter demonstrabuntur, quorum vnum est.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; basim, aut æquales habuerint, et fuerint ad easdem partes: in eisdem etiam parallelis erunt.

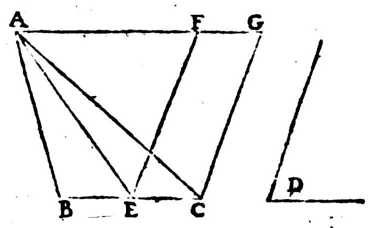
Si enim non ita sit, totũ parti erit aequale, eademq; ratio vigebit. necesse enim est, aut intra parallelas trianguli verticem cadere, aut extra: vtro autem modo se se habuerit, idem sequetur absurdum, parallela ipsi basi per trianguli verticem ducta. alterum vero est.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, in eisdemq; ambo fuerint parallelis; aut in vna eademq; basi, aut in æqualibus erunt.

Si enim in basibus inaequalibus sint; cum aequales sumpserimus, totum parti aequale erit. In hoc igitur commune absurdum omnia hęc theoremata desinunt. Quare elementorum institutor nobis reliquit eam, quae in his est, veritatem inuestigare, cum in simplicioribus ipse, & principalioribus contemplationem contraxerit. ex Proclo.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo ęquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.



Sit datum triangulum A B C, datus autem rectilineus angulus D. Itaq; oportet, dato triangulo ABC ęquale parallelogrãmum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali. secetur B C bifariam in E, et iuncta A E ad rectam lineam E C, atque ad pũctum in ea E, constituatur angulus C E F ęqualis ipsi D: et per A quidẽ ipsi E C parallela ducatur A G; per C vero ipsi F E ducatur parallela C G. parallelogrãmum igitur est F E C G. Et quoniam B E est ęqualis E C, erit et A B E triangulum triangulo A E C ęquale; in ęqualibus enim sunt basibus B E E C, et in eisdem B C A G parallelis. Ergo triangulum A B C trianguli A E C est duplum. est autem et parallelogrammum F E C G duplum trianguli A E C; basim enim eandem habet, et in eisdẽ est parallelis. ęquale igitur est F E C G parallelogrammum triangulo A B C, habetq; C E F angulum ęqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo A B C æquale parallelogrammum F E C G constitutum est, in angulo C E F, qui angulo D est æqualis. quod quidem facere oportebat.

23. huius. 31. huius. 38. huius. 34 huius.

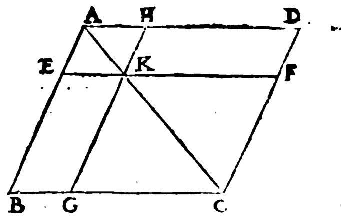
THEOREMA XXXII. ROPOSITIO XLIII.

Omnis parallelogrammi spacij eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum supplementa inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum A B C D, cuius diameter A C: et circa ipsam A C parallelogramma quidem sint E H F G, quæ vero supplementa dicuntur B K K D. Dico B K suplementum supplemento K D æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est A B C D, et eius diameter A C, ęquale est A B C triangulum triangulo 34. huius.

G ADC.

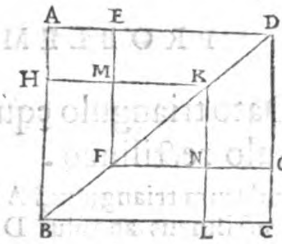
A D C. Rursus quoniam E K H A parallelogrammum est, cuius diameter A K, triangulum A E K triangulo A H K æquale erit. Eadem ratione, et triangulum K G C triangulo K F C est æquale. Cum igitur triangulum quidem A E K ęquale sit triangulo A H K: triangulum vero K G C ipsi K F C; erit triangulum A E K vnà cum triangulo K G C ęquale triangulo A H K vna cum H F C triangulo. est autem et totum triãgulum A B E æquale toti A D E. reliquum igitur B G supplementum reliquo supplemento K D est ęquale. Ergo omnis parallelogrammi spacii eorum, quę circa diametrum sunt, parallelogrãmorum suppleméta inter se æqualia sunt. quod oportebat demonstrarę.



F. C. COMMENTARIVS.

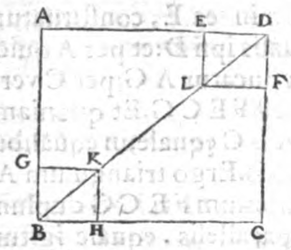
Huius theorematis tres sunt casus. vel enim parallelogramma, quae circa eandem consistunt diametrum, se se in puncto contingunt, vel se se secant, vel quadam diametri parte à se disiunguntur. In omnibus autem eadem congruit demonstratio, quamquam non semper quadrilatera sint supplementa. Euclides sumpsit ea parallelogramma, quae proprie circa diametrum consistere dicuntur, videlicet quae se se in puncto contingunt, in quo casu supplementa B K K D quadrilatera sunt, vt apparet in prima figura. Sit rursus parallelogrammum A B C D, cuius diameter B D, & circa B D parallelogromma sint E F G D H B L K, quae se se in punctis M N secent. Dico quadrilatera A H M E N L C G inter se aequalia esse. Quoniam enim triangulum quidem A B D est aaquale triangulo D B C; triangulum vero E F D triãgulo D F G; erit reliquum quadrilaterum A B F E ęquale reliquo quadrilatero C B F G. Rursus quoniam triangulũ H B K est aequale triangulo K B L, triangulumq; M F K triãgulo K F N; erit reliquum quadrilaterum H B F M aequale reliquo L B F N. erat autem & totum A B F E aequale toti C B F G. reliquum igitur A H M E quadrilaterum reliquo quadrilatero N L C G aequale sit necesse est; & hęc quidem quadrilatera sunt, quae supplementa dicuutur.

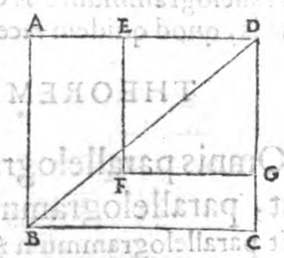
34. huius.



Sit denique parallelogrammum A B C D, & eius diameter B D, circa quam parallelogramma E L F D G B H K, quae à se inuicem disiunguntur parte ipsius diametri K L. Et quoniam triangulum A B D est aequale triangulo D B C, & triangula E L D G B K aequalia sunt triangulis D L F K B H; erit reliquum quinquelaterum A G K L E aequale reliquo H K L F C. atque hęc quidem parallelogrammorum supplementa sunt. At nomen supplementorum à re ipsa sumptũ est, quatenus hęc quoque pręter duo parallelogramma, quae sunt circa diametrum, totum parallelogrammum complent. Illa autem parallelogramma circa eãdem diametrum sunt, quęcumque partem totius diametri pro sua etiam diametro habent. Sed cum totius parallelogrammi diameter aliquod ex lateribus internũ parallelogrammi secat, tunc parallelogrãmum hoc toti parallelogrammo circa eandem diametrum non est, vt in parallelogrammo A B C D diameter BD secat E F latus ipsius E F G D parallelogrammi. quare E F G D parallelogrammum non est circa eandem diametrum.

Supplementorũ nomen a re ipsa sũptum.





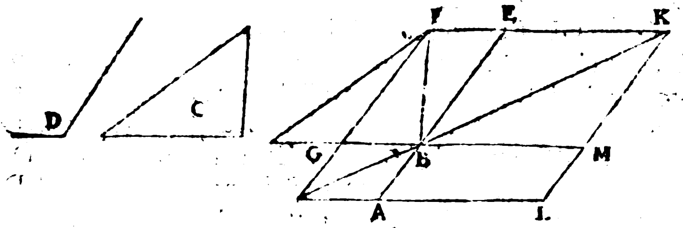
THEO-

PROBLEMA.XII. ROPOSITIO. XLIIII.

Ad datam rectam lineam dato triangulo ęquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea A B; datum vero triangulum C, et datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, dato triangulo C aequale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D ęquali. constituatur triangulo C aequale parallelogrammum B E F G, in angulo E B G, qui est ęqualis D. et ponatur B E in directum ipsi A B, producaturq; F G ad H: et per A alterutri ipsarum B G E F parallela ducatur A H, et H B iūgatur. Quoniā igitur in parallelas A H E F recta linea HF incidit, anguli AHF HFE duobus rectis aequales sunt. quare BHG GFE duobus rectis sunt minores. Quae vero à minoribus, quàm sint duo recti, in infinitum producuntur, cōueniunt inter se. Ergo H B F E productae conuenient, producantur, et cōueniant in K: perq; K alterutri ipsarum E A F H parallela ducatur K L, et A H G B ad L M puncta producantur. parallelogrammum igitur est H L K F, cuius diameter H K, et circa H K parallelogramma quidem sunt A G M E; ea vero, quae supplementa dicuntur L B B F: ergo L B ipsi B F est aequale. Sed et B F aequale est triangulo C. quare et L B triāgulo C ęquale erit. Et quoniā G B E angulus ęqualis est angulo A B M, sed et aequalis angulo D; erit et angulus A B M angulo D aequalis. Ad datam igitur rectam lineam A B, dato triangulo C ęquale parallelogrammum constitutum est L B, in angulo A B M, qui est aequalis angulo D. quod facere oportebat.

42.huius. 31.huius. 29.huius. 5.postul. 31.huius. Ex antecedēte. 15.huius.



F. C. COMMENTARIVS.

Antiqua hęc sunt, vt ait Eudemus, & pythagoreorum inuenta, applicatio spaciorum, excessus, & defectus. cum enim proposita recta linea, datum spacium toti rectae lineae coaptaueris, tunc spacium illud applicari dicunt; cum vero spacij longitudinem ipsa recta linea maiorem feceris, tunc excedere; cum autem minorem, ita vt spacio descripto aliqua rectae lineae pars extra sit, tunc deficere. & hoc modo Euclides in sexto libro, tum excessus, tum defectus mentionem facit. in pręsentia vero applicatione indiguit ad datam rectam lineam dato triangulo aequale parallelogrammum applicare uolens, vt non solum parallelogrammi dato triangulo aequalis constitutionem habeamus, sed etiam ad terminatam rectam lineam, applicationem. ex Proclo.

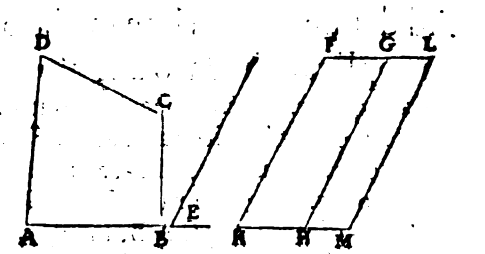
PROBLEMA XIII. PROPOSITIO XLV.

Rectilineo dato ęquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum ABCD: datus vero angulus rectilineus E. Itaque oportet rectilineo ABCD aequale parallelogrammum constituere in angulo ipsi E aequali. coniungatur enim DB, et constituatur triangulo ADB aequale parallelogrammum FH; in angulo HKF, qui est aequalis angulo E. deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC aequale parallelogrammum GM, in angulo GHM, qui angulo E est aequalis. Et quoniam angulus E aequalis est vtrique ipsorum HKF GHM; erit et HKF angulo GHM aequalis. communis apponatur KHG. anguli igitur FKH

42.huius. Ex antecedēte.

29. huius. KHG angulis KHG GHM æquales sunt. Sed FKH KHG sunt æquales duobus rectis. ergo et KHG GHM duobus rectis æquales erunt; Itaque ad aliquam rectam lineam GH, et ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad easdem partes positę angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt.



14 huius. in directum igitur est KH ipsi HM. Et quoniam in parallelas KM FG

29. huius. recta linea HG incidit, alterni anguli MHG HGF æquales sunt. communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL angulis HGF HGL sunt æquales. at anguli MHG HGL ęquales sunt duobus rectis. quare et anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt. In directum igitur

34. huius. est FG ipsi GL. Et quoniam KF ipsi HG et ęqualis est, et parallela; sed et HG ipsi

30. huius. ML; erit KF ipsi ML et æqualis, et parallela: ipsasq; coniungunt rectæ lineæ KM FL.

33. huius. ergo et KM FL æquales et parallelæ sunt. parallelogrammum igitur est KFLM. Quòd cum triangulum quidem ABD æquale sit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est KFLM in angulo FKM, qui est ęqualis angulo E dato. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Duobus problematibus, in quibus & constitutionem inuenit, & applicationem aequalium dato triangulo parallelogrammorum, hoc vniuersalius est. siue enim triangulum, siue quadratum, siue omnino quadrilaterum, siue aliquod aliud multilaterum datum fuerit, per hoc problema aequale ipsi parallelogrammum constituemus. Omne enim rectilineum, vt prius diximus, per se in triangula resoluitur, & methodum inueniendae triangulorum multitudinis tradidimus. resoluentes igitur datum rectilineum in triangula, & vni quidem ipsorum aequale parallelogrammum constituentes, reliquis uero ad datam rectam lineam aequalia applicantes parallelogramma, nempe ad illam, ad quam prima applicatio facta est; habebimus ex his parallelogrammum aequale rectilineo, quod ex illis triangulis constat; et factum iam erit, quod proponebatur. Hęc Proclus.

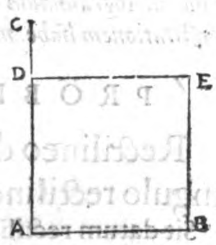
COROLLARIVM.

Ex iam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO XLVI.

A data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB. oportet ab ipsa AB quadratũ describere. Ducatur rectę lineę AB à pũcto in ea dato A ad rectos angulos AC: & ipsi AB æqualis ponatur AD; perq; punctum D ducatur DE ipsi AB parallela: et per B ipsi AD parallela ducatur BE. parallelogrammum igitur est ADEB. et AB quidem est æqualis DE, AD vero ipsi BE. Sed et BA ipsi AD est æqualis. quattuor igitur BA, AD DE EB inter se ęquales sunt, ideoq; æquilaterum est ADEB parallelogrammum. Dico etiam rectangulum esse. Quoniam enim in parallelas AB DE recta linea incidit AD, anguli BAD ADE duobus rectis sunt æquales. rectus



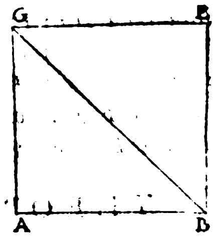
29. huius. autem est BAD. ergo et ADE rectus erit. parallelogrammorum vero spaciorum,

34. huius. quæ ex opposito sunt latera, et anguli inter se ęqualia sunt. rectus igitur est vterque oppositorum ABE BED angulorum: et ob id rectangulum est ADEB. ostensum autem est, et æquilaterum esse. quadratum igitur sit necesse est. atque est à recta linea AB descriptum. quod ipsum facere oportebat.

F. C.

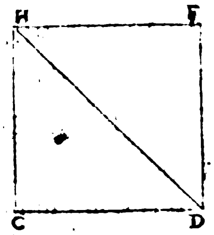
Hoc problemate indigemus potissimum in sequentis theorematis constructionem. Videtur autem Euclides duorum in rectilineis optimorum ortus tradere voluisse. nimirum trianguli ęquilateri, & quadrati, quoniam ad constitutionem quoque mundanarum figurarum, & pręcipue earum quattuor, quarum & ortus est & resolutio, hisce rectangulis opus est. nam icosaedrum quidem, & octaedrum, & pyramis ex aequilateris triangulis constant; cubus vero ex quadratis. Proclus hoc loco duo theoremata demonstrat, quibus mathematici tamquam demonstratis passim vtuntur, nempe hęc.

Quadrata ab ęqualibus rectis lineis descripta, etiam inter se aequalia sunt.



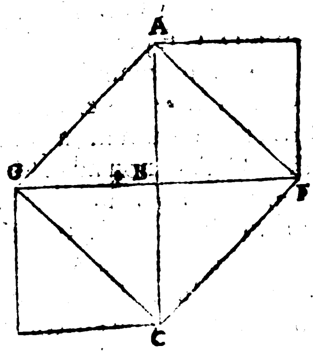
Sint enim aequales rectae lineae AB CD, & ab ipsa quidem AB describatur ABEG quadratum; ab ipsa vero CD quadratum CDFH. Dico hęc quadrata inter se aequalia esse. Quoniam enim rectae linae AB CD aequales sunt, erunt & ipsae AG CH aequales, angulosq; aequales continent. ergo & basis GB est aequalis basi HD, & triangulum ABG aequale triangulo CDH, & ipsorum dupla sunt aequalia. quadratum igitur ABEG quadrato CDFH aequale erit. Sed & huius ipsius conuersum. 4.huius.

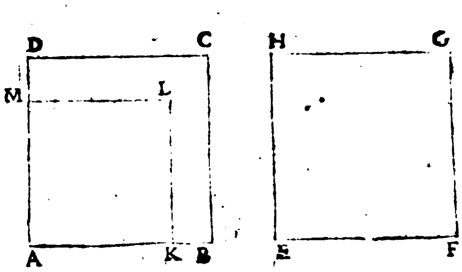
Quadrata ęqualia ab ęqualibus rectis lineis descripta sũt.



Sint enim quadrata aequalia AF CG: & ponatur ita, vt latus AB sit in directum ipsi BC. Cum igitur anguli recti sint, recta quoque linea FB rectae BG in directum erit. iungantur FC CG GA AF rectae linae. Et quoniam AF quadratum est aequale quadrato CG, & AFB triangulum aequale erit triangulo CBG. commune apponatur BCF triangulum: totum igitur triangulum ACF toti CFG est aequale; ideoq; parallela est AG ipsi FC. Rursus quoniam angulus AFG est aequalis angulo CGB, cum vterque sit dimidia pars recti; erit AF ipsi CG parallela. aequalis igitur est recta linea AF rectae linae CG, parallelogrammi siquidem latera ex opposito iacentia sunt. Itaque quoniam duo sunt triangula ABF BCG, quae alternos angulos aequales habent; quippe quòd AF CG parallelae sint, & latus vnum AF est aequale lateri CG; erit & latus AB lateri BC, & latus BF lateri BG aequale. Ostensum igitur est latera etiam à quibus descripta sunt AF CG quadrata inter se aequalia esse, cum illa aequalia sint. possumus etiam aliter propositum demonstrare per deductionem ad id, quod fieri non potest in hunc modum. Sint aequalia quadrata ABCD EFGH. Dico rectas lineas AB EF à quibus ea describuntur inter se aequales esse. Si enim AB EF aequales non sint, altera earum est maior, sit maior AB, & abscindatur AK, quae ipsi EF sit aequalis, & ex AK quadratum AKLM describatur. Quoniam igitur AK est aequalis EF, erit & quadratũ AKLM, ex ante demõstratis, aequale quadrato EFGH; sed et quadratum ABCD aequale erit eidem EFGH quadrato. ergo quadratum ABCD quadrato AKLM est aequale, totum parti, quod fieri non potest. non igitur aequalibus existentibus quadratis ABCD EFGH rectae lineae AB EF à, quibus ea describũtur, inęquales sunt. ergo inter se aequales sint necesse est.

39.huius.
28.huius.
34.huius.



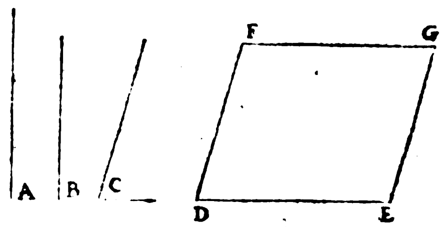


Non

Non inutile autem erit ad parallelogrammorum etiam constitutionem problema, quod sequitur.

Ex duabus rectis lineis, quæ duabus datis æquales sint, et in dato angulo rectilineo parallelogrammum constituere.

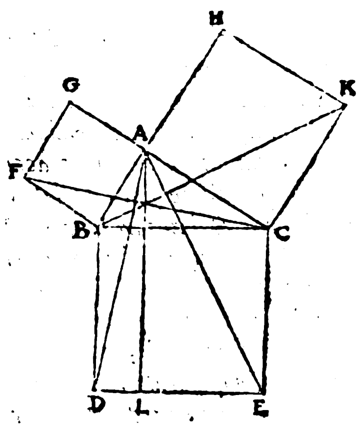
Sint datae quidem rectae lineae A B, datus autem angulus rectilineus C. oportet ex duabus rectis lineis, quae ipsis A B aequales sint, & in angulo ipsi C aequali, parallelogrammum constituere. exponatur recta linea D E,
23. huius. *quae ipsi A sit aequalis. Itaque ad datam rectam lineam D E, & ad datum in ea punctum D, dato angulo rectilineo C aequalis angulus constituatur F D E: ita vt FD sit aequalis ipsi B rectae linae datae. postea per F ducatur F G parallela ipsi D E, & per E ducatur parallela ipsi D F, quae cum F G in puncto G conueniat. parallelogrammum igitur est F D E G, ex rectis lineis D E D F constitutum, quae datis rectis lineis A B sint aequales, & angulum continent F D E dato angulo C aequalem. quod facere oportuit.*



THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens B A C angulum. Dico quadratum descriptum à recta B C æquale esse quadratis, quæ ab ipsis B A A C describuntur. Describatur enim à B C quidem quadratum B D E C, ab ipsis vero B A A C quadrata G B H C, perq; A alterutri ipsarum B D C E parallela ducatur A L; et A D F C iungãtur. quoniam igitur vterque angulorum B A C B A G rectus est, ad aliquam rectam lineam B A, et ad datum in ea punctum A duę rectæ lineæ A C A G non ad easdem partes positę, angulos qui deinceps sunt duobus rectis ęquales efficiunt. in directum igitur est C A ipsi A G. eadem
14. huius. ratione, et A B ipsi A H est in directum. Et quoniam angulus D B C est ęqualis angulo F B A, rectus enim vterque est, communis apponatur A B C. totus igitur D B A angulus toti F B C est æqualis. Quòd cum duæ A B B D duabus F B B C ęquales sint, altera alteri, et angulus D B A æqualis angulo F B C; erit
4. huius. et basis A D basi F C æqualis, et A B D triangulum triangulo F B C ęquale. estq;
41. huius. trianguli quidem A B D duplum B L parallelogrammum; basim enim eandem habent B D, et in eisdem B D A L sunt parallelis: trianguli vero F B C duplum est G B quadratum. rursus enim basim habent eandem F B, et in eisdem sunt parallelis F B G C. Quæ autem ęqualium dupla inter se æqualia sunt. ergo æquale est parallelogrammum B L ipsi G B quadrato. Similiter iunctis A E B K, ostendetur etiam C L parallelogrammum æquale quadrato H C. totum igitur D B E C quadratum duobus quadratis G B H C est æquale. et describitur quidem D B E C quadratum à recta linea B C, quadrata vero G B H C ab ipsis B A A C. quadratum igitur B E, à latere BC descriptum ęquale est quadratis, quæ describuntur à lateribus B A A C. ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur à latere rectum angulum



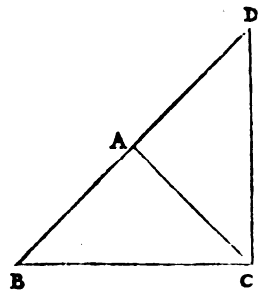
gulum subtendente æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema ad pythagoram referunt, dicuntq; eum cum illud inuenisset, bouem immolasse. Quod autem ab Euclide in sexto libro conscribitur multo vniuersalius est. ostendit enim in rectangulis triangulis figuram, quae fit à latere rectum angulum subtendente aequalem esse figuris, quae à lateribus rectum angulum continentibus, priori illi similes, & similiter positae, describuntur.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XLVIII.

Si quadratum, quod describitur ab vno laterum trianguli ęquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.



Trianguli enim A B C, quod ab vno latere B C describitur quadratum æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus B A A C describuntur. Dico angulum B A C rectum esse. Ducatur enim à puncto A ipsi A C ad rectos angulos A D; ponaturq; A D ipsi B A æqualis, & D C iungatur. Quoniam igitur D A est ęqualis A B, erit et quadratum, quod describitur ex D A, ęquale quadrato, quod ex A B. cōmune apponatur quadratum, quod ex A C. ergo quadrata, quæ ex D A A C æqualia sunt quadratis, quæ ex B A A C describuntur. Sed quadratis quidem, quæ ex D A A C, æquale est, quod ex D C quadratum; rectus enim angulus est D A C; quadratis vero, quæ ex B A A C ęquale ponitur quadratum, quod ex B C. quadratum igitur, quod ex DC æquale est ei, quod ex B C quadrato. ergo et latus D C lateri C B est æquale. Et quoniam D A est æqualis A B, communis autem A C, duæ D A A C duabus B A A C æquales sunt; et basis D C est æqualis basi C B. angulus igitur D A C angulo B A C est ęqualis. rectus autem est D A C. ergo et B A C rectus erit. Si igitur quadratum, quod describitur ab vno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. quod oportebat demonstrare.

11. huius.

8. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Conuertitur hoc theorema pręcedenti, & totum toti conuertitur. si enim triangulum rectangulum fuerit, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum ęquale est quadratis, quae à reliquis trianguli lateribus describuntur. & si quod ab hoc eis, quae à reliquis aequale fuerit, triangulum rectangulum erit, quippe quòd eum. qui reliquis continetur angulum rectum habeat.

LIBRI PRIMI FINIS.

EVCLI-

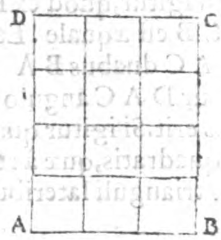
EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER SECVNDVS CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS Federici Commandini Vrbinatis.

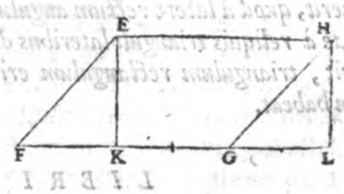
DIFFINITIO. I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur duabus rectis lineis, quæ rectum angulum constituunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Quid sit parallelogrammum rectangulum dictum est superius. dicitur autem contineri duabus rectis lineis, quae sunt circa rectum angulum, quoniam ex ductu alterius in alteram prouenit eius rectanguli area, quod non contingit in alijs parallelogrammis, quae rectangula non sunt. Sit enim parallelogrammum rectangulum A B C D: & sit, exempligratia, latus quidem A B pedum trium, latus vero B C quattuor erit totius rectanguli area pedum duodecim quadratorum. At in alijs parallelogrammis area nota efficitur ex area rectangulorum, quae eadem sunt altitudine, & bases, vel easdem, vel aequales habent. Sit parallelogrammum non rectangulum E F G H, cuius basis F G sit pedum quattuor, ducta vero à puncto E ad F G perpendicularis E K sit duorum pedum. producatur K G ad L, ita vt K L sit ipsi F G aequalis, & iungatur H L. erit E K L H parallelogrammum rectangulum. Quare parallelogramma E F G H E K L H cum aequales habeant bases F G K L, sintq; eadem altitudine, hoc est in eisdem parallelis, inter se aequalia sunt: sed parallelogrammi E K L H area est pedum octo. ergo & area parallelogrammi E F G H totidem pedum sit necesse est. Verum parallelogrammi rectanguli aream prouenire ex ductu laterum, quae circa rectum angulum sunt, in presentia ponatur, quo ad ita esse manifesto apparebit. Demonstratur autem hoc à Ioanne Regiomontano in principio primi libri de triangulis, & à nobis in cōmentarijs in librum Archimedis de dimensione circuli.





DIFFINITIO II.

Omnis parallelogrammi spacij vnum quodque eorum, quæ circa diametrum ipsius sunt, parallelogrammorum, cum duobus supplementis gnomon vocetur.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

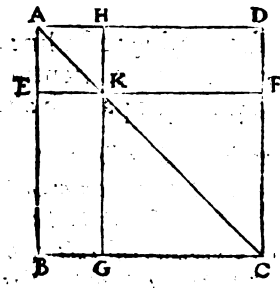
Sciendum est gnomonem breuitatis caussa à geometris inuentum fuisse. nomen vero ex accidente impositum est; ab ipso enim forma cognoscitur, vel totius spacij, vel reliqui, cum vel circumponitur, vel aufertur. & in horoscopijs eius officium dumtaxat est præsentes horas notas efficere. supplementa autem dicit, non vt quæ parallelogramma non sint, sed vt non similia toti, complentia vero totius ad ipsum similitudinem.

Gnomon a Geometris breuitatis caussa inuentus.

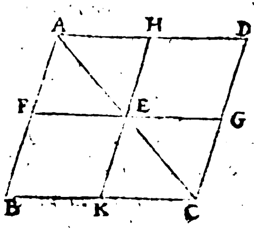
Gnomonis officium in horoscopiis.

Supplementa.

F. C. COMMENTARIVS.



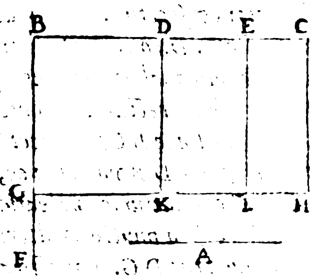
Quae parallelogramma dicantur proprie circa diametrum consistere, superius dictum est, ut quae se inuicem in puncto contingunt. Sit parallelogrammum ABCD, cuius diameter AC, parallelogramma vero circa diametrum sint AEKH, KGCF: & supplementa BK KD. Itaque duo supplementa vnà cum alterutro parallelogrammorum, quae sunt circa diametrum, gnomon appellatur. & si parallelogrammo quidem GF circumponatur gnomon, reddit totum parallelogrãmum AC simile ipsi GF. Si vero à parallelogrammo AC auferatur gnomõ BFH reliquũ est parallelogrãmũ EH simile toti. Quamobrẽ ab Aristotele dictum est, quadratũ circũposito gnomone creuit quidem, alteratum vero nihil factum est.



Illud autem, quod in scholio additur supplementa non esse similia toti, non omnino verum est. fieri enim potest ut quandoque etiam sint similia. Sit parallelogrammum ABCD circa diametrum AC, & secetur AC bifariam in E, perq; E ducatur FG alterutri ipsarum AD BC parallela, & per idem punctum E ducatur HK parallela alterutri ipsarum AB DC. erunt supplementa BE ED similia quidem toti, ipsis vero FH KG parallelogrammis, & similia & aequalia, quod ex ijs, quae in sequentibus tradentur, facile demonstrare possumus.

THEOREMA I. PROPO. I.

Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis, quæ recta linea insecta, et singulis partibus continentur.



Sint duæ rectæ lineæ A BC; et secta sit BC vtcumque in punctis D E. Dico rectangulum rectis lineis A BC contentum æquale esse rectangulo, quod continetur A BD, et rectangulo, quod A DE, et ei, quod A EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos angulos BF: atque ipsi A ponatur æqualis BG: et per G quidem ipsi BC parallela ducatur GH; per D E C. vero ducantur DK EL CH parallelæ ipsi BG. rectangulum igitur BH est æquale rectangulis BK DL EH. atque est BH quidem, quod A BC continetur; etenim continetur GB BC. et BG ipsi A est æqualis; rectangulum

15.primi.

3.primi.

31.primi.

ergo et triangulum D C E triangulo F C E æquale erit, maius minori, quod fieri nõ potest. non igitur A F ipsi B E est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter A D. ergo A D ipsi B E parallela erit. Aequalia igitur triangula in basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Cum tria sint in iam dictis propositionibus, videlicet in aequalibus, vel eisdem basibus esse, in eisdem parallelis, & aequalia esse triangula, & parallelogramma; nos duo semper contexentes, vnum vero relinquentes varie conuertemus. aut enim bases easdem, vel aequales ponemus, in eisdemq; parallelis triangula, & parallelogramma, & quattuor faciemus theoremata: aut aequalia ipsa suscipiemus, & bases easdem, vel aequeles; & faciemus alia quattuor; quorum duo quidem omisit Euclides, nimirum ea, quae sunt in parallelogrammis; reliqua vero duo ostendit, videlicet ea, quae in triangulis sunt: aut etiam cum aequalia sumpserimus, & in eisdẽ parallelis, reliquum ostendemus, vel in eisdem basibus esse, vel in aequalibus, & faciemus alia quattuor, quae etiam Euclides omisit. in his namque eadem est demonstratio, nisi quòd duo ex his quattuor per se vera non sunt. non enim aequalia parallelogramma, vel triangula, & quae in eisdem sunt parallelis, necessario in eadem basi sunt. Sed totum hoc in hisce positionibus verum est, vel in eisdem esse basibus, vel in æqualibus; alterum autem, non omnino sumptas positiones consequitur. Quapropter cũ decem sint omnia theoremata, sex quidem geometra conscripsit, quattuor vero omisit, ne rursus eadem ratione frustra laboret, cum eadem sit demõstratio. ostẽdetur enim in triangulis hoc modo.

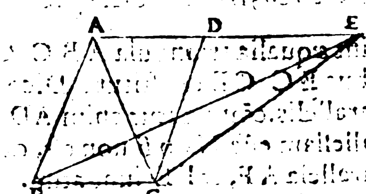
Triangula æqualia, et in eisdem parallelis constituta, vel in eisdem, vel in æqualibus basibus erunt.

Sint aequalia triangula A B C D E F in eisdem parallelis A D B F constituta. Dico in aequalibus quoque basibus esse. Non enim, sed si fieri potest, sint bases B C E F inequales, & sit B C maior, abscindaturq; BH aequalis ipsi E F; & A H iungatur. Itaque quoniam triangula A B H D E F in aequalibus sunt basibus B H E F, & in eisdem parallelis, inter se aequalia sunt. Sed & ipsa A B C D E F triangula posita sunt aequalia. ergo triangulum A B C triangulo A B H est aequale; sed & maius, quod fieri non potest. Non igitur inequales sunt triangulorum A D C D E F bases. Idem demonstrabitur, & in parallelogrammis. Quare cum modus demonstrandi idem sit, & id, quod fieri non potest, idem, totum, scilicet suae parti aequale esse: non inmerito ab Euclide pretermissum fuit. hęc ex Proclo.

38.huius.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum, et triangulum eandem basim habeant, in eisdemq; sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.



Parallelogrammum enim A B C D, et triangulum E B C, basim habeant eandem B C, et in eisdem sint parallelis B C A E. Dico parallelogrammum A B C D trianguli E B C duplum esse. Iũgatur enim A C. triangulum igitur A B D triangulo E B C est æquale; namque in eadem basi B C, et in eisdem B C A E parallelis constituitur. Sed A B C D parallelogrammum duplum est trianguli A B C, cum diameter A C ipsum bifariam secet. Quare et ipsius E B C trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, et triangulum

37.huius.

34.huius.

gulum eandem basim habeant, et in eisdem sint perallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Huius theorematis duo sunt casus, vel enim triangulum verticem habet intra parallelogrammum, vel extra. Sed in vtrisque demonstratio eadem est. Quòd si bases aequales sint, eodem modo ostendemus, parallelogrammi diametrum ducentes, nam cum triangula in basibus aequalibus constituta inter se aequalia sint, parallelogrammum, quod alterius est duplum, reliqui quoque duplum erit. Sed duo eius conuersa similiter demonstrabuntur, quorum vnum est.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; basim, aut æquales habuerint, et fuerint ad easdem partes: in eisdem etiam parallelis erunt.

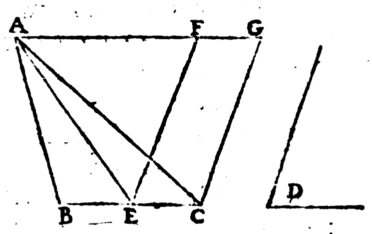
Si enim non ita sit, totũ parti erit aequale, eademq; ratio vigebit. necesse enim est, aut intra parallelas trianguli verticem cadere, aut extra: vtro autem modo sese habuerit, idem sequetur absurdum, parallela ipsi basi per trianguli verticem ducta. alterum vero est.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, in eisdemq; ambo fuerint parallelis; aut in vna eademq; basi, aut in æqualibns erunt.

Si enim in basibus inaequalibus sint; cum aequales sumpserimus, totum parti aequale erit. In hoc igitur commune absurdum omnia hęc theoremata desinunt. Quare elementorum institutor nobis reliquit eam, quae in his est, veritatem inuestigare, cum in simplicioribus ipse, & principalioribus contemplationem contraxerit. ex Proclo.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo ęquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.



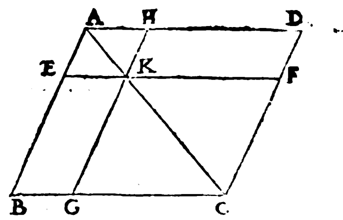
Sit datum triangulum A B C, datus autem rectilineus angulus D. Itaq; oportet, dato triangulo ABC ęquale parallelogrãmum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali. secetur B C bifariam in E, et iuncta A E ad rectam lineam E C, atque ad pũctum in ea E, constituatur angulus C E F ęqualis ipsi D: et per A quidẽ ipsi E C parallela ducatur A G; per C vero ipsi F E ducatur parallela C G. parallelogrãmum igitur est F E C G. Et quoniam B E est ęqualis E C, erit et A B E triangulum triangulo A E C ęquale; in ęqualibus enim sunt basibus B E E C, et in eisdem B C A G parallelis. Ergo triangulum A B C trianguli A E C est duplum. est autem et parallelogrammum F E C G duplum trianguli A E C; basim enim eandem habet, et in eisdẽ est parallelis. ęquale igitur est F E C G parallelogrammum triangulo A B C, habetq; C E F angulum ęqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo A B C æquale parallelogrammum F E C G constitutum est, in angulo C E F, qui angulo D est æqualis. quod quidem facere oportebat.

23. huius. 31. huius. 38. huius. 34 huius.

THEOREMA XXXII. ROPOSITIO XLIII.

Omnis parallelogrammi spacij eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum supplementa inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum A B C D, cuius diameter A C: et circa ipsam A C parallelogramma quidem sint E H F G, quæ vero supplementa dicuntur B K K D. Dico B K suplementum supplemento K D æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est A B C D, et eius diameter A C, ęquale est A B C triangulum triangulo 34. huius.

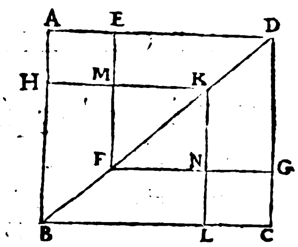


A D C. Rursus quoniam E K H A parallelogrammum est, cuius diameter A K, triangulum A E K triangulo A H K æquale erit. Eadem ratione, et triangulum K G C triangulo K F C est æquale. Cum igitur triangulum quidem A E K ęquale sit triangulo A H K: triangulum vero K G C ipsi K F C; erit triangulum A E K vnà cum triangulo K G C ęquale triangulo A H K vna cum H F C triangulo. est autem et totum triãgulum A B E æquale toti A D E. reliquum igitur B G supplementum reliquo supplemento K D est ęquale. Ergo omnis parallelogrammi spacii eorum, quę circa diametrum sunt, parallelogrãmorum suppleméta inter se æqualia sunt. quod oportebat demonstrare.

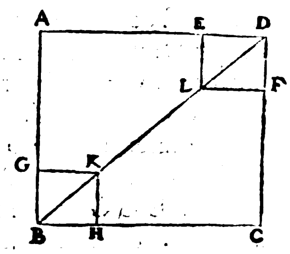
F. C. COMMENTARIVS.

Huius theorematis tres sunt casus. vel enim parallelogramma, quae circa eandem consistunt diametrum, se se in puncto contingunt, vel se se secant, vel quadam diametri parte à se disiunguntur. In omnibus autem eadem congruit demonstratio, quamquam non semper quadrilatera sint supplementa. Euclides sumpsit ea parallelogramma, quae proprie circa diametrum consistere dicuntur, videlicet quae se se in puncto contingunt, in quo casu supplementa B K K D quadrilatera sunt, vt apparet in prima figura. Sit rursus parallelogrammum A B C D, cuius diameter B D, & circa B D parallelogramma sint E F G D H B L K, quae se se in punctis M N secent. Dico quadrilatera A H M E N L C G inter se aequalia esse. Quoniam enim triangulum quidem A B D est aaquale triangulo D B C; triangulum vero E F D triãgulo D F G; erit reliquum quadrilaterum A B F E ęquale reliquo quadrilatero C B F G. Rursus quoniam triangulũ H B K est aequale triangulo K B L, triangulumq́; M F K triãgulo K F N; erit reliquum quadrilaterum H B F M aequale reliquo L B F N. erat autem & totum A B F E aequale toti C B F G. reliquum igitur A H M E quadrilaterum reliquo quadrilatero N L C G aequale sit necesse est; & hęc quidem quadrilatera sunt, quae supplementa dicuntur.

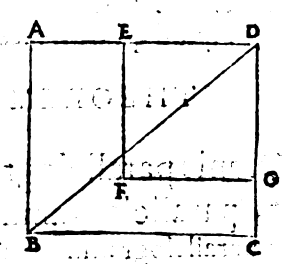
34. huius.



Sit denique parallelogrammum A B C D, & eius diameter B D, circa quam parallelogramma E L F D G B H K, quae à se inuicem disiunguntur parte ipsius diametri K L. Et quoniam triangulum A B D est aequale triangulo D B C, & triangula E L D G B K aequalia sunt triangulis D L F K B H; erit reliquum quinquelaterum A G K L E aequale reliquo H K L F C. atque hęc quidem parallelogrammorum supplementa sunt. At nomen supplementorum à re ipsa sumptũ est, quatenus hęc quoque pręter duo parallelogramma, quae sunt circa diametrum, totum parallelogrammum complent. Illa autem parallelogramma circa eãdem diametrum sunt, quęcumque partem totius diametri pro sua etiam diametro habent. Sed cum totius parallelogrammi diameter aliquod ex lateribus interni parallelogrammi secat, tunc parallelogrãmum hoc toti parallelogrammo circa eandem diametrum non est, vt in parallelogrammo A B C D diameter BD secat E F latus ipsius E F G D parallelogrammi. quare E F G D parallelogrammum non est circa eandem diametrum.



Supplementorũ nomen a re ipsa sũptum.



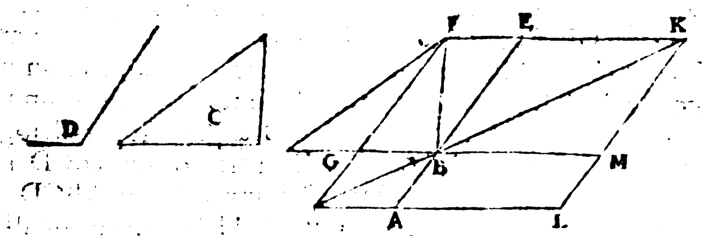
THEO-

PROBLEMA. XII. ROPOSITIO. XLIIII.

Ad datam rectam lineam dato triangulo ęquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea A B; datum vero triangulum C, et datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D ęquali. constituatur triangulo C æquale parallelogrammum B E F G, in angulo E B G, qui est ęqualis D. et ponatur B E in directum ipsi A B, producaturq; F G ad H: et per A alterutri ipsarum B G E F parallela ducatur A H, et H B iūgatur. Quoniā igitur in parallelas A H E F recta linea HF incidit, anguli AHF HFE duobus rectis æquales sunt. quare BHG GFE duobus rectis sunt minores. Quæ vero à minoribus, quàm sint duo recti, in infinitum producuntur, cōueniunt inter se. Ergo H B F E producta conuenient, producantur, et cōueniant in K: perq; K alterutri ipsarum E A F H parallela ducatur K L, et A H G B ad L M puncta producantur. parallelogrammum igitur est H L K F, cuius diameter H K, et circa H K parallelogramma quidem sunt A G M E; ea vero, quæ supplementa dicuntur L B B F: ergo L B ipsi B F est æquale. Sed et B F æquale est triangulo C. quare et L B triāgulo C ęquale erit. Et quoniā G B E angulus ęqualis est angulo A B M, sed et æqualis angulo D; erit et angulus A B M angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, dato triangulo C ęquale parallelogrammum constitutum est L B, in angulo A B M, qui est æqualis angulo D. quod facere oportebat.

42. huius. 31. huius. 29. huius. 5. postul. 31. huius. Ex antecedente. 15. huius.



F. C. COMMENTARIVS.

Antiqua hęc sunt, vt ait Eudemus, & pythagoreorum inuenta, applicatio spaciorum, excessus, & defectus. cum enim proposita recta linea, datum spacium toti rectae lineae coaptaueris, tunc spacium illud applicari dicunt; cum vero spacij longitudinem ipsa recta linea maiorem feceris, tunc excedere; cum autem minorem, ita vt spacio descripto aliqua rectae lineae pars extra sit, tunc deficere. & hoc modo Euclides in sexto libro, tum excessus, tum defectus mentionem facit. in pręsentia vero applicatione indiguit ad datam rectam lineam dato triangulo aequale parallelogrammum applicare uolens, vt non solum parallelogrammi dato triangulo aequalis constitutionem habeamus, sed etiam ad terminatam rectam lineam, applicationem. ex Proclo.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO XLV.

Rectilineo dato ęquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum ABCD: datus vero angulus rectilineus E. Itaque oportet rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constituere in angulo ipsi E æquali. coniungatur enim DB, et constituatur triangulo ADB æquale parallelogrammum FH; in angulo HKF, qui est æqualis angulo E. deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale parallelogrammum GM, in angulo GHM, qui angulo E est æqualis. Et quoniam angulus E æqualis est vtrique ipsorum HKF GHM; erit et HKF angulo GHM æqualis. communis apponatur KHG. anguli igitur FKH

42. huius. Ex antecedente.

29. huius. KHG angulis KHG GHM æquales sunt. Sed FKH KHG sunt æquales duobus rectis. ergo et KHG GHM duobus rectis æquales erunt; Itaque ad aliquam rectam lineam GH, et ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt. in directum igitur est KH ipsi HM. Et quoniam in parallelas KM FG recta linea HG incidit, alterni anguli MHG HGF æquales sunt. communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL angulis HGF HGL sunt æquales. at anguli MHG HGL æquales sunt duobus rectis. quare et anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt. In directum igitur est FG ipsi GL. Et quoniam KF ipsi HG et æqualis est, et parallela; sed et HG ipsi ML; erit KF ipsi ML et æqualis, et parallela: ipsasq; coniungunt rectæ lineæ KM FL. ergo et KM FL æquales et parallelæ sunt. parallelogrammum igitur est KFLM. Quòd cum triangulum quidem ABD æquale sit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est KFLM in angulo FKM, qui est æqualis angulo E dato. quod facere oportebat.

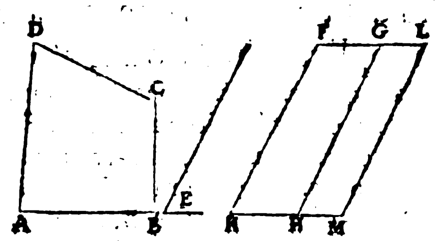
14 huius.

29. huius.

34. huius.

30. huius.

33. huius.



F. C. COMMENTARIVS.

Duobus problematibus, in quibus & constitutionem inuenit, & applicationem aequalium dato triangulo parallelogrammorum, hoc uniuersalius est. siue enim triangulum, siue quadratum, siue omnino quadrilaterum, siue aliquod aliud multilaterum datum fuerit, per hoc problema aequale ipsi parallelogrammum constituemus. Omne enim rectilineum, vt prius diximus, per se in triangula resoluitur, & methodum inueniendae triangulorum multitudinis tradidimus. resoluentes igitur datum rectilineum in triangula, & vni quidem ipsorum aequale parallelogrammum constituentes, reliquis uero ad datam rectam lineam aequalia applicantes parallelogrāma, nempe ad illam, ad quam prima applicatio facta est; habebimus ex his parallelogrammum aequale rectilineo, quod ex illis triangulis constat; et factum iam erit, quod proponebatur. Hęc Proclus.

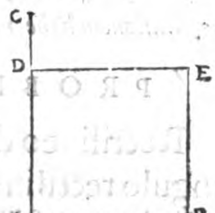
COROLLARIVM.

Ex iam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO XLVI.

A data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB. oportet ab ipsa AB quadratū describere. Ducatur rectę lineę AB à pūcto in ea dato A ad rectos angulos AC: & ipsi AB æqualis ponatur AD; perq; punctum D ducatur DE ipsi AB parallela: et per B ipsi AD parallela ducatur BE. parallelogrammum igitur est ADEB. et AB quidem est æqualis DE, AD vero ipsi BE. Sed et BA ipsi AD est æqualis. quattuor igitur BA, AD DE EB inter se ęquales sunt, ideoq; æquilaterum est ADEB parallelogrammum. Dico etiam rectāgulum esse. Quoniam enim in parallelas AB DE recta linea incidit AD, anguli BAD ADE duobus rectis sunt æquales. rectus autem est BAD. ergo et ADE rectus erit. parallelogrammorum vero spaciorum, quæ ex opposito sunt latera, et anguli inter se ęqualia sunt. rectus igitur est vterque oppositorum ABE BED angulorum: et ob id rectangulum est ADEB. ostensum autem est, et æquilaterum esse. quadratum igitur sit necesse est. atque est à recta linea AB descriptum. quod ipsum facere oportebat.



29. huius.

34. huius.

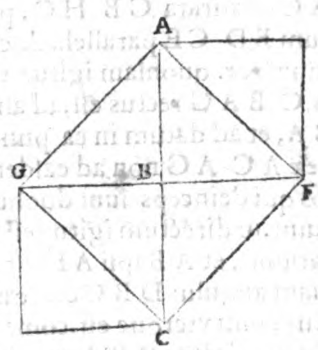
Hoc problemate indigemus potissimum in sequentis theorematis constructionem. Videtur autem Euclides duorum in rectilineis optimorum ortus tradere voluisse. nimirum trianguli ęquilateri, & quadrati, quoniam ad constitutionem quoque mundanarum figurarum, & pręcipue earum quattuor, quarum & ortus est & resolutio, hisce rectangulis opus est. nam icosaedrum quidem, & octaedrum, & pyramis ex aequilateris triangulis constant; cubus vero ex quadratis. Proclus hoc loco duo theoremata demonstrat, quibus mathematici tamquam demonstratis passim vtuntur, nempe hęc.

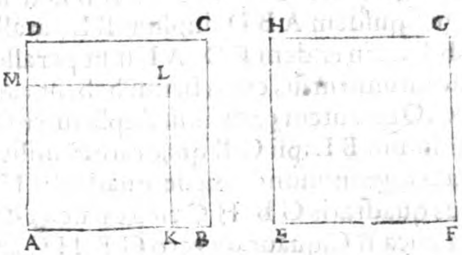
Quadrata ab ęqualibus rectis lineis descripta, etiam inter se aequalia sunt.

Sint enim aequales rectae lineae AB CD, & ab ipsa quidem AB describatur ABEG quadratum; ab ipsa vero CD quadratum CDFH. Dico hęc quadrata inter se aequalia esse. Quoniam enim rectae linae AB CD aequales sunt, erunt & ipsae AG CH aequales, angulosq; aequales continent. ergo & basis GB est aequalis basi HD, & triangulum ABG aequale triangulo CDH, 4.huius. *& ipsorum dupla sunt aequalia. quadratum igitur ABEG quadrato CDFH aequale erit. Sed & huius ipsius conuersum.*

Quadrata ęqualia ab ęqualibus rectis lineis descripta sũt.

Sint enim quadrata aequalia AF CG: & ponatur ita, vt latus AB sit in directum ipsi BC. Cum igitur anguli recti sint, recta quoque linea FB rectae BG in directum erit. iungantur FC CG GA AF rectae linae. Et quoniam AF quadratum est aequale quadrato CG, & AFB triangulum aequale erit triangulo CBG. commune apponatur BCF triangulum: totum igitur triangulum ACF toti CFG est aequale; ideoq; parallela est AG ipsi FC. 39.huius. *Rursus quoniam angulus AFG est aequalis angulo CGB, cum vterque sit dimidia pars recti; erit AF ipsi CG parallela.* 28.huius. *aequalis igitur est recta linea AF rectae linae CG, parallelogrammi siquidem latera ex opposito iacentia sunt.* 34.huius. *Itaque quoniam duo sunt triangula ABF BCG, quae alternos angulos aequales habent, quippe quòd AF CG parallelae sint, & latus vnum AF est aequale lateri CG; erit & latus AB lateri BC, & latus BF lateri BG aequale. Ostensum igitur est latera etiam à quibus descripta sunt AF CG quadrata inter se aequalia esse, cum illa aequalia sint. possumus etiam aliter propositum demonstrare per deductionem ad id, quod fieri non potest in hunc modum. Sint aequalia quadrata ABCD EFGH. Dico rectas lineas AB EF à quibus ea describuntur inter se aequales esse. Si enim AB EF aequales non sint, altera earum est maior, sit maior AB, & abscindatur AK, quae ipsi EF sit aequalis, & ex AK quadratum AKLM describatur. Quoniam igitur AK est aequalis EF, erit & quadratũ AKLM, ex ante demõstratis, aequale quadrato EFGH; sed et quadratum ABCD aequale erit eidem EFGH quadrato. ergo quadratum ABCD quadrato AKLM est aequale, totum parti, quod fieri non potest. non igitur aequalibus existentibus quadratis ABCD EFGH rectae lineae AB EF à, quibus ea describũtur, inequales sunt. ergo inter se aequales sint necesse est.*



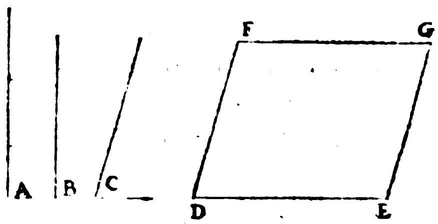


Non inutile autem erit ad parallelogrammorum etiam constitutionem problema, quod sequitur.

Ex duabus rectis lineis, quæ duabus datis æquales sint, et in dato angulo rectilineo parallelogrammum constituere.

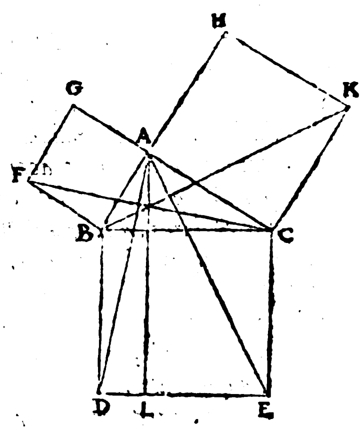
Sint datae quidem rectae lineae A B, datus autem angulus rectilineus C. oportet ex duabus rectis lineis, quae ipsis A B aequales sint, & in angulo ipsi C aequali, parallelogrammum constituere. exponatur recta linea D E, quae ipsi A sit aequalis. Itaque ad datam rectam lineam D E, & ad datum in ea punctum D, dato angulo rectilineo C aequalis angulus constituatur F D E: ita vt FD sit aequalis ipsi B rectae linae datae. postea per F ducatur F G parallela ipsi D E, & per E ducatur parallela ipsi D F, quae cum F G in puncto G conueniat. parallelogrammum igitur est F D E G, ex rectis lineis D E D F constitutum, quae datis rectis lineis A B sunt aequales, & angulum continent F D E dato angulo C aequalem. quod facere oportuit.

13. huius.



THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.



Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens B A C angulum. Dico quadratum descriptum à recta B C æquale esse quadratis, quæ ab ipsis B A A C describuntur. Describatur enim à B C quidem quadratum B D E C, ab ipsis vero B A A C quadrata G B H C, perq; A alterutri ipsarum B D C E parallela ducatur A L; et A D F C iungãtur. quoniam igitur vterque angulorum B A C B A G rectus est, ad aliquam rectam lineam B A, et ad datum in ea punctum A duę rectæ lineæ A C A G non ad easdem partes positę, angulos qui deinceps sunt duobus rectis ęquales efficiunt. in directum igitur est C A ipsi A G. eadem ratione, et A B ipsi A H est in directum. Et quoniam angulus D B C est ęqualis angulo F B A, rectus enim vterque est, communis apponatur A B C. totus igitur D B A angulus toti F B C est æqualis. Quòd cum duæ A B B D duabus F B B C ęquales sint, altera alteri, et angulus D B A æqualis angulo F B C; erit et basis A D basi F C æqualis, et A B D triangulum triangulo F B C ęquale. estq; trianguli quidem A B D duplum B L parallelogrammum; basim enim eandem habent B D, et in eisdem B D A L sunt parallelis: trianguli vero F B C duplum est G B quadratum. rursus enim basim habent eandem F B, et in eisdem sunt parallelis F B G C. Quæ autem ęqualium dupla inter se æqualia sunt. ergo æquale est parallelogrammum B L ipsi G B quadrato. Similiter iunctis A E B K, ostendetur etiam C L parallelogrammum æquale quadrato H C. totum igitur D B E C quadratum duobus quadratis G B H C est æquale. et describitur quidem D B E C quadratum à recta linea B C, quadrata vero G B H C ab ipsis B A A C. quadratum igitur B E, à latere BC descriptum ęquale est quadratis, quæ describuntur à lateribus B A A C. ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur à latere rectum angulum

31. | 46. | 14. huius. | 4. huius. | 41. huius.

gulum

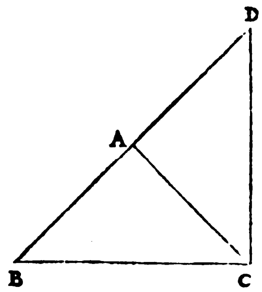
gulum ſubtendente æquale eſt quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema ad pythagoram referunt, dicuntq; eum cum illud inueniſſet, bouem immolaſſe. Quod autem ab Euclide in ſexto libro conſcribitur multo vniuerſalius eſt. oſtendit enim in rectangulis triangulis figuram, quae fit à latere rectum angulum ſubtendente aequalem eſſe figuris, quae à lateribus rectum angulum continentibus, priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitae, deſcribuntur.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XLVIII.

Si quadratum, quod deſcribitur ab vno laterum trianguli ęquale ſit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.



Trianguli enim A B C, quod ab vno latere B C deſcribitur quadratum æquale ſit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus B A A C deſcribuntur. Dico angulum B A C rectum eſſe. Ducatur enim à puncto A ipſi A C ad rectos angulos A D; ponaturq; A D ipſi B A æqualis, & D C iungatur. Quoniam igitur D A eſt ęqualis A B, erit et quadratum, quod deſcribitur ex D A, ęquale quadrato, quod ex A B. cõmune apponatur quadratum, quod ex A C. ergo quadrata, quæ ex D A A C æqualia ſunt quadratis, quæ ex B A A C deſcribuntur. Sed quadratis quidem, quæ ex D A A C, æquale eſt, quod ex D C quadratum; rectus enim angulus eſt D A C; quadratis vero, quæ ex B A A C ęquale ponitur quadratum, quod ex B C. quadratum igitur, quod ex DC æquale eſt ei, quod ex B C quadrato. ergo et latus D C lateri C B eſt æquale. Et quoniam D A eſt æqualis A B, communis autem A C, duæ D A A C duabus B A A C æquales ſunt; et baſis D C eſt æqualis baſi C B. angulus igitur D A C angulo B A C eſt ęqualis. rectus autem eſt D A C. ergo et B A C rectus erit. Si igitur quadratum, quod deſcribitur ab vno laterum trianguli, æquale ſit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. quod oportebat demonſtrare.

11. huius. 8. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Conuertitur hoc theorema pręcedenti, & totum toti conuertitur. ſi enim triangulum rectangulum fuerit, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur quadratum ęquale eſt quadratis, quae à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur. & ſi quod ab hoc eis, quae à reliquis aequale fuerit, triangulum rectangulum erit, quippe quòd eum. qui reliquis continetur angulum rectum habeat.

LIBRI PRIMI FINIS.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER SECVNDVS

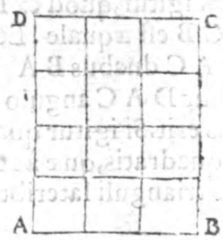
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS *Federici Commandini Vrbinatis*.

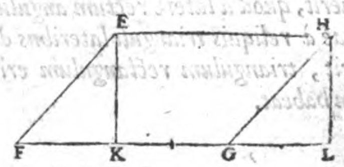
DIFFINITIO. I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur duabus rectis lineis, quæ rectum angulum constituunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Quid sit parallelogrammum rectangulum dictum est superius. dicitur autem contineri duabus rectis lineis, quae sunt circa rectum angulum, quoniam ex ductu alterius in alteram prouenit eius rectanguli area, quod non contingit in alijs parallelogrammis, quae rectangula non sunt. Sit enim parallelogrammum rectangulum A B C D: & sit, exempligratia, latus quidem A B pedum trium, latus vero B C quattuor erit totius rectanguli area pedum duodecim quadratorum. At in alijs parallelogrammis area nota efficitur ex area rectangulorum, quae eadem sunt altitudine, & bases, vel easdem, vel aequales habent. Sit parallelogrammum non rectangulum E F G H, cuius basis F G sit pedum quattuor, ducta vero à puncto E ad F G perpendicularis E K sit duorum pedum. producatur K G ad L, ita vt K L sit ipsi F G aequalis, & iungatur H L. erit E K L H parallelogrammum rectangulum. Quare parallelogramma E F G H E K L H cum aequales habeant bases F G K L, sintq; eadem altitudine, hoc est in eisdem parallelis, inter se aequalia sunt: sed parallelogrammi E K L H area est pedum octo. ergo & area parallelogrammi E F G H totidem pedum sit necesse est. Verum parallelogrammi rectanguli aream prouenire ex ductu laterum, quae circa rectum angulum sunt, in presentia ponatur, quo ad ita esse manifesto apparebit. Demonstratur autem hoc à Ioanne Regiomontano in principio primi libri de triangulis, & à nobis in cōmentarijs in librum Archimedis de dimensione circuli.





DIFFINITIO II.

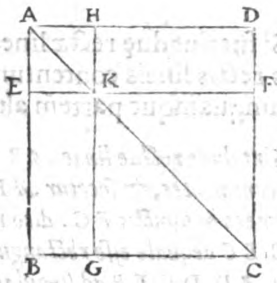
Omnis parallelogrammi ſpacij vnum quodque eorum, quæ circa diametrum ipſius ſunt, parallelogrammorum, cum duobus ſupplementis gnomon vocetur.

SCHOLIVM.

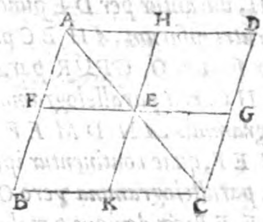
SCHOLIVM.

Sciendum est gnomonem breuitatis caussa à geometris inuentum fuisse. nomen vero ex accidente impositum est; ab ipso enim forma cognoscitur, vel totius spacij, vel reliqui, cum vel circumponitur, vel aufertur. & in horoscopijs eius officium dumtaxat est præsentes horas notas efficere. supplementa autem dicit, non vt quæ parallelogramma non sint, sed vt non similia toti, complentia vero totius ad ipsum similitudinem. Gnomon a Geometris breuitatis caussa inuentus. Gnomonis officium in horoscopiis. Supplementa.

F. C. COMMENTARIVS.

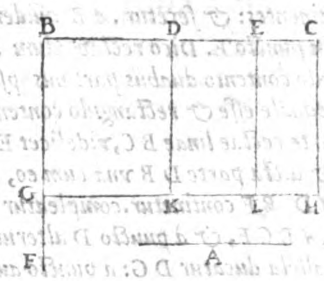


Quae parallelogramma dicantur proprie circa diametrum consistere, superius dictum est, ut quae se inuicem in puncto contingunt. Sit parallelogrammum ABCD, cuius diameter AC, parallelogramma vero circa diametrum sint AEKH, KGCF: & supplementa BK KD. Itaque duo supplementa vnà cum alterutro parallelogrammorum, quae sunt circa diametrum, gnomon appellatur. & si parallelogrammo quidem GF circumponatur gnomon, reddit totum parallelogrãmum AC simile ipsi GF. Si vero à parallelogrammo AC auferatur gnomõ BFH reliquũ est parallelogrãmũ EH simile toti. Quamobrẽ ab Aristotele dictum est, quadratũ circũposito gnomone creuit quidem, alteratum vero nihil factum est. Illud autem, quod in scholio additur supplementa non esse similia toti, non omnino verum est. fieri enim potest ut quandoque etiam sint similia. Sit parallelogrammum ABCD circa diametrum AC, & secetur AC bifariam in E, perq; E ducatur FG alterutri ipsarum AD BC parallela, & per idem punctum E ducatur HK parallela alterutri ipsarum AB DC. erunt supplementa BE ED similia quidem toti, ipsis vero FH KG parallelogrammis, & similia & aequalia, quod ex ijs, quae in sequentibus tradentur, facile demonstrare possumus.



THEOREMA I. PROPO. I.

Si sint duæ rectæ lineę, altera autem ipsarum secta fuerit in quot cumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis, quæ recta linea insecta, et singulis partibus continentur.



Sint duæ rectæ lineæ A BC; et secta sit BC vt cumque in punctis D E. Dico rectangulum rectis lineis A BC contentum æquale esse rectangulo;, quod continetur A BD, et rectangulo, quod A DE, et ei, quod A EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos angulos BF: atque ipsi A ponatur ęqualis BG: et per G quidem ipsi BC parallela ducatur GH; per DEC vero ducantur DK EL CH parallelæ ipsi BG. rectangulum igitur BH est æquale rectangulis BK DL EH: atque est BH quidem, quod A BC continetur; etenim continetur GB BC: et BG ipsi A est æqualis; rectangulum 15.primi. 3.primi. 31.primi.

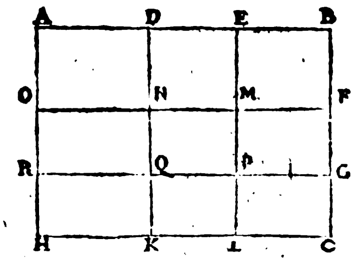
autē B K eſt quod continetur ipſis A BD; continetur enim GB BD, quarū GB eſt æqualis A:et rectangulum D L eſt quod continetur A DE,quoniam D K,hoc eſt B G ipſi A eſt ęqualis:et ſimiliter rectangulum E H eſt quod A E C continetur.ergo rectangulum contentum A B C eſt æquale rectanguloq; contento A BD, et contento A D E,et adhuc contento A E C. Si igitur ſint duę rectæ lineę,altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt æquale eis,quę recta linea inſecta,et ſingulis partibus continentur.quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & non nulla his ſimilia demonſtrare libuit, quae tum ad alia, tum ad ea, quae in decimo libro traduntur, vtilia erunt.

THEOREMA PRIMVM.

Si fuerint duę rectæ lineæ,quæ ſecentur in quotcumque partes;rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt æquale rectangulis, quæ vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata continentur.

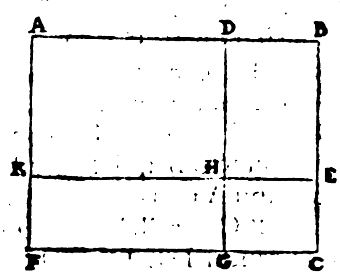


Sint duae rectae linae A B B C rectum angulum A B C continentes, & ſecetur A B quidem in punctis DE, E C vero in punctis F G. dico rectangulum contentum A B B C aequale eſſe rectangulis, quae ſingulis ipſarum A D D E E B ad ſingulas B F F G G C applicatis continentur. completo enim parallelogrammo A B CH, ducantur per D E puncta rectae linae D K EL, alterutri ipſarum A H B C parallelae; & per F G ducātur F M N O G P Q R parallelae alterutri ipſarum A B H C. erit parallelogrammum A C aequale parallelogrammis A N D M E F O Q N P M G R K Q L P C; & ſunt parallelogramma A N D M E F, quae continentur ipſa B F, & ſingulis partibus rectae linae A B, videlicet A D D E E B: parallelogramma vero O Q N P M G ſunt, quae continentur F G, & ſingulis partibus A D D E E B: & denique parallelogramma R K Q L P C, quae contīnētur G C, & ſingulis partibus eiuſdem rectae linae A B. Si igitur fuerint duae rectae linae, quae ſecentur in quotcunque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt aequale rectangulis, quae vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata continentur. quod oportebat demonſtrare.

31. primi.

THEOREMA II.

Si fuerint duę rectæ lineæ, quæ vtcumque ſecentur; rectangulum totis contentū vnà cum eo, quod continetur duabus partibus ipſarum eſt ęquale rectangulis, quæ continentur totis,et dictis partibus vnà cum eo,quod reliquis partibus continetur.



Sint duae rectae linae A B B C, rectum angulum A B C continentes: & ſecetur A B quidem in puncto D; B C vero in puncto E. Dico rectangulum A B C vnà cum rectangulo contento duabus partibus ipſarum, videlicet D B E C aequale eſſe & rectangulo contento tota A B, & dicta parte rectae linae B C, videlicet E C, & contento tota B C, & dicta parte D B vnà cum eo, quod reliquis partibus A D B E continetur. compleatur enim parallelogrāmum A B C F, & à puncto D alterutri ipſarum B C A F parallela ducatur D G: à puncto autem E ducatur E H K parallela alterutri ipſarum A B F C. itaque conſtat rectangulum A B C aequale eſſe rectangulis A E K C. addatur vtrinque commune rectangulum H C, quod continetur duabus partibus

31. primi.

DB

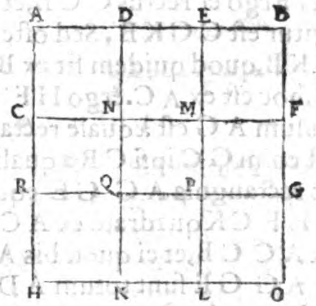
D B E C. Rectangulum igitur A B C vnà cum rectangulo H C est aequale tribus rectangulis A E K C, & H C. quorum rectangulum quidem K C est quod continetur tota A B, hoc est K E, & parte E C: rectangulum vero D E vna cum rectangulo H C est quod continetur tota B C, & parte D B: & reliquum A H est quod continetur reliquis partibus A D B E, hoc est A D D H. ergo rectangulum A B C vnà cum rectangulo H C est aequale & rectangulo contento tota A B, & E C, & contento tota B C, & D B vnà cum eo, quod reliquis partibus A D B E continetur. Si igitur duae rectae lineae vtcumque secentur et reliqua, quod oportebat demonstrare. Eodem modo demonstrabitur & in alijs partibus.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si recta linea secta fuerit vtcumque; rectangula quæ tota, et singulis partibus cōtinētur æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato.

Recta enim linea A B secta sit vtcumque in pūcto C. Dico rectangulum, quod A B B C continetur, vnà cum contento B A A C ęquale esse quadrato, quod fit ex A D. Describatur enim ex A B quadratū ADEB, et per C ducatur alterutri ipsarum A D B E parallela C F. æquale igitur est A E rectāgulis A F C E. atque est A E quidem quadratum, quod ex A B; A F vero rectangulum cōtentum B A A C; etenim D A A C continetur, quarum A D ipsi A B est ęqualis: et rectangulum C E continetur AB BC, cum B E sit ęqualis AB. ergo rectangulum B A C vnà cum rectangulo A B C æquale est quadrato ex A B. Si igitur recta linea vtcumque secta fuerit, rectangula, quę tota, et singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato. quod demonstrare oportebat. 46.primi. 31.huius.

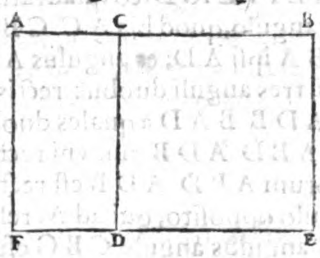
F. C. COMMENTARIVS.



Similiter vt superius demonstrabitur, si recta linea secetur in quotcumque partes, quadratum totius lineae aequale esse rectangulis, quae singulis partibus ad singulas applicatis continentur.

THEOREMA. III. PROPOSITO. III.

Si recta linea vtcumque secta fuerit; rectangulum tota, et vna eius parte contentum ęquale est et rectangulo, quod partibus continetur, et ei quod à prædicta parte fit quadrato.



Recta enim linea A B secta sit vtcumque in puncto C. Dico A B C rectangulum ęquale esse rectangulo A C B vnà cum quadrato, quod fit ex B C. Describatur enim ex B C quadratū C D E B; producaturq; E D in F; et per A alterutri ipsarum C D B E parallela ducatur A F. ęquale vtique erit rectangulū A E ipsis A D C E: et est AE quidem rectāgulum contentum A B B C; etenim A B B E continetur, quarum B E est æqualis B C: rectangulum vero A D est quod continetur A C C B, cum D C ipsi 46.primi. 31.primi.

ipsi C B sit ęqualis: et D B est quadratum, quod fit ex B C. ergo rectangulum A B C est ęquale rectangulo A C B vnà cum quadrato quod ex B C. Si igitur recta linea vtcumque secta fuerit; rectangulum tota, et vna eius parte contentum æquale est rectangulo, quod partibus continetur, et ei, quod à prædicta parte fit quadrato.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea secta fuerit vtcumque, quadratum quod fit à tota ęquale erit, et quadratis, quę à partibus fiunt, et ei, quod bis partibus continetur rectangulo.

Recta enim linea A B secta sit vtcumque in C. Dico quadratum, quod fit ex A B æquale esse, et quadratis ex A C C B, et ei rectangulo quod bis A C C B continetur. Describatur enim ex A B
46.primi. quadratum A D E B, iungaturq; B D, et per C
31.primi. quidem alterutri ipsarum A D B E parallela ducatur C G F; per G vero alterutri ipsarum A B D E ducatur parallela H K. Et quoniam C F est parallela ipsi A D, et in ipsas incidit B D: erit exte-
29.primi. rior angulus B G C interiori et opposito A D B æqualis: angulus autem A D B est ęqualis angulo
5.primi. A B D, quod et latus B A æquale est lateri A D. quare C G B angulus angulo G B C est æqualis:
6.primi. ac propterea latus B C lateri C G æquale. Sed et latus C B æquale est lateri G K, et
34.primi. C G ipsi B K. ergo et G K est æquale K B, et C G K B æquilaterum est. dico insuper etiam rectangulum esse. quoniam enim C H est parallela ipsi B K, et in ipsas incidit
29.primi. C B; anguli K B C G C B duobus rectis sunt æquales. rectus autem est K B C angu-
34.primi. lus. Ergo et rectus G C B, et anguli oppositi C G K G K B recti erunt. rectangulũ igitur est C G K B. Sed ostensum fuit et æquilaterum esse. quadratum igitur est C G K B, quod quidem fit ex B C. eadem ratione et H F est quadratum, quod fit ex H G. hoc est ex A C. ergo H F C K ex ipsis A C C B quadrata sunt. et quoniam rectã-
43.primi. gulum A G est æquale rectangulo G E, atque est A G quod A C C B continetur, est enim G C ipsi C B æqualis: erit et G E æquale ei, quod continetur A C C B. quare rectangula A G G E ęqualia sunt ei quod bis A C C B continetur. Sunt autem et H F C K quadrata ex A C C B. quattuor igitur H F C K A G G E et quadratis ex A C C B, et ei quod bis A C C B continetur rectangulo sunt æqualia. Sed H F C K A G G E sunt totum A D E B quadratum, quod fit ex A B. quadratum igitur ex A B æquale est, et quadratis ex A C C B, et ei quod bis A C C B continetur rectangulo. quare si recta linea vtcumque secta fuerit; quadratum quod fit à tota æquale erit et quadratis, quę à partibus fiunt, et ei rectangulo, quod bis partibus continetur, atque illud est, quod demonstrare oportebat.

ALITER. Dico quadratum ex A B æquale esse, & quadratis ex A C C B. et ei rectangulo, quod bis A C C B continetur. quoniam enim in eadem figura æqualis
5.primi. est B A ipsi A D; et angulus A B D angulo A D B æqualis erit: et cum omnis trian-
32.primi gulι tres anguli duobus rectis sint æquales; erunt trianguli A B D tres anguli A B D A D B B A D æquales duobus rectis. rectus autem est angulus B A D. ergo reliqui A B D A D B sunt vni recto æquales, et sunt ęquales inter se se. vterque igitur ipsorum A B D A D B est recti dimidius. Sed rectus est B C G, æqualis namque est
29.primi. angulo opposito, qui ad A. reliquus igitur C G B dimidius est recti: ac propterea C
6.primi. G B angulus angulo C B G est ęqualis; et latus B C æquale lateri C G. Sed C B est æqualis G K, et C G ipsi B K. æquilaterum igitur est C K; et cum habeat rectum angulum C B K, etiam est quadratum; quod quidem fit ex C B. eadem ratione et H F

quadratum

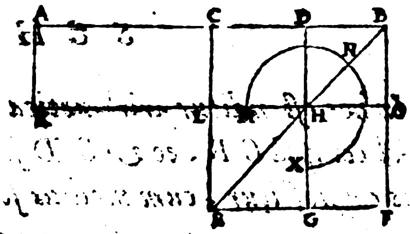
quadratum est, et æquale quadrato quod ex A C. quadrata igitur sunt C K H F, et quadratis ex A C C B æqualia. Rursus quoniam rectangulum A G est æquale ipsi G E, atque est A G id quod A C C B continetur, est enim C G ipsi C B æqualis: erit et G E æquale contento A C C B. quare A G G E æqualia sunt ei, quod bis A C C B continetur. Sunt autem et C K H F æqualia quadratis ex A C C B. ergo C K H F A G G E æqualia sunt et quadratis ex A C C B, et ei quod bis A C C B cõtinetur. Sed C K H F et A G, G E sunt totum A E, quod fit ex A B quadratum. quadratum igitur ex A B æquale est, quadratisq; ex A C C B, et ei quod bis A C C B continetur rectangulo. quod ostendere oportebat. 34.primi. 43.primi.

COROLLARIUM.

Ex hoc perspicue constat in quadratis spacijs parallelogramma, quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contentum vnà cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interijcitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato.



Recta enim linea quædam A B secta sit in partes æquales ad punctum C, et in partes inæquales ad D. Dico rectangulum contentum A D D B vnà cum quadrato quod fit ex C D æquale esse ei quod ex C B quadrato. Describatur enim ex B C quadratum C E F B: iungaturq; B E, et per D quidem alterutri ipsarũ C E B F parallela ducatur D H G; per H vero ducatur K L O parallela alterutri ipsarum C B E F: et rursus per A ducatur alterutri C L B O parallela A K. Et quoniã C H supplementum æquale est supplemento H F, commune apponatur D O. totum igitur C O toti D F est æquale. sed C O est æquale A L, quoniam et A C ipsi C B. ergo et A L æquale est D E, commune apponatur C H. totum igitur A H ipsis F D D L æquale erit. Sed A H quidẽ est quod A D D B continetur, etenim D H ipsi D B est æqualis: F D D L vero est gnomon M N X. gnomon igitur M N X æqualis est ei, quod A D D B continetur. commune apponatur L G, æquale scilicet quadrato quod ex C D. ergo M N X gnomon, et L G æqualia sunt rectangulo, quod continetur A D D B, et ei, quod fit ex C D quadrato. Sed M N X gnomon, et L G sunt totum quadratum C E F B, quod quidem fit ex C B. ergo rectangulum A D B vnà cum quadrato quod ex C D æquale est ei, quod ex C B quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contẽtum vnà cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interiicitur, æquale est ei, quod à dimidia fit quadrato. quod demonstrare oportebat. 46.primi. 31.primi. 43.primi. 36.primi.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

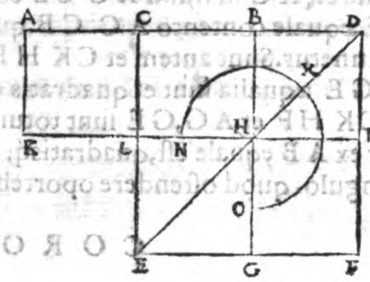
Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in rectum adijciatur quædam recta linea; rectangulum tota cum adiecta, et adiecta cõtentũ, vnà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab ea, quæ quę ex dimidia, et adiecta cōstat tāquā ab vna linea deſcribitur.

Recta enim linea quędam A B ſecetur bifariam in puncto C, adiiciaturq; ipſi in rectum B D. Dico rectangulum A D B vnà cū quadrato ex B C æquale eſſe ei, quod fit ex C D quadrato. Deſcribatur enim ex C D quadratum C E F D, et iungatur D E; perq; B alterutri ipſarum C E D F parallela ducatur B H G: et per H ducatur K L M parallela alterutri ipſarum A D E F: et adhuc per A alterutri C L D M parallela A K. Itaque quoniā A C eſt æqualis C B, erit et rectangulum A L rectangulo C H æquale. ſed C H æquale eſt H F. ergo et A L ipſi H F æquale erit. commune apponatur C M. totum igitur AM gnomoni N X O eſt ęquale: atq; eſt A M, quod A D D B cōtinetur, etenim DM eſt ęqualis DB. ergo et gnomon NXO ęqualis eſt rectāgulo ADB. rurſus commune apponatur L G, æquale ſcilicet quadrato, quod ex C B. rectangulum igitur A D B vnà cum quadrato quod ex B C ęquale eſt gnomoni N X O, et ipſi L G. Sed gnomon N X O, et L G totum ſunt C E F D quadratum; quod quidem fit ex C D. ergo rectangulum A D B vnà cum quadrato ex B C æquale eſt ei, quod fit ex C D quadrato. Si igitur recta linea ſecetur bifariam, adiiciaturq; ipſi in rectum quædam recta linea; rectangulum tota cum adiecta, et adiecta contentum vnà cum quadrato dimidiæ æquale eſt quadrato, quod ab ea, quę ex dimidia, et adiecta conſtat, tamquàm ab vna linea deſcribitur. quod oportebat demonſtrare.

46. primi.

31 primi.

36. primi.
43. primi.



SCHOLIVM.

In hoc oſtenditur arithmetica anologia. quo enim A D ſuperat D C, videlicet ipſa C B, eo & C D ſuperat D B. quod per numeros manifeſtius cognoſcitur, cum medius ſemper æqualiter & excedatur, & excedat. Theorema autem eſt. Quadratum quod fit ab exceſſu vnà cum eo, quod extremis continetur, quadrato medij æquale eſſe.

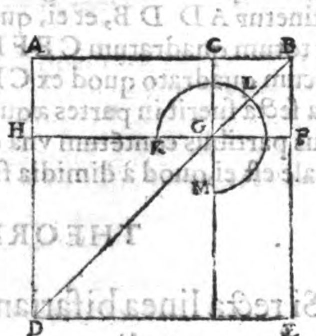
THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si recta linea vtcumque ſecta fuerit, quæ à tota, et vna parte fiunt vtraque quadrata ęqualia ſunt, et rectangulo, quod bis tota, ac dicta parte continetur, et ei, quòd à reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quædam A B ſecta ſit vtcumque in pūcto C. Dico quadrata ex A B B C ęqualia eſſe et rectangulo, quod bis A B B C continetur, et ei quod fit ex A C quadrato. Deſcribatur enim ex A B quadratum A D E B, et figura conſtruatur. itaque quoniam A G rectangulū æquale eſt rectangulo G E. commune apponatur C F. quare totum A F toti C E eſt æquale. rectangula igitur A F C E dupla ſunt rectanguli A F. Sed A F C E ſunt K L M gnomon, et quadratum C F. ergo K L M gnomon, et quadratū C F dupla erūt rectanguli A F. eſt autem id quod bis A B B C continetur duplum ipſius A F; etenim B F eſt

46. primi.

43. primi.



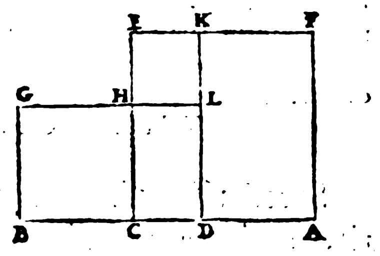
æqualis

æqualis BC. gnomon igitur KLM, et quadratum CF æqualia sunt ei, quod bis AB BC continetur. commune apponatur DG, quod est ex AC quadratum. Ergo gnomon KLM, et quadrata BG GD æqualia sunt ei, quod bis AB BC continetur, et quadrato ex AC. at gnomon KLM, et quadrata BG GD totum sunt AD EB, et CF; quæ sunt ex AB BC quadrata. quadrata igitur ex AB BC æqualia sunt rectágulo, quod bis AB BC cótinetur vnà cum eo, quod fit ex AC quadrato. ergo si recta linea vtcumque secta fuerit; quæ à tota, et vna parte fiunt vtraque quadrata æqualia sunt rectanguloq́; quod bis tota, ac dicta parte continetur, et ei, quod à reliqua parte fit, quadrato; quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Non alienum esse videtur hoc loco apponere theorema, quod etiam in commentarijs in Apollonij pergei conica demonstrauimus: eo enim ad sequentia vtemur.

Si recta linea in partes inęquales secetur; earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur vnà cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

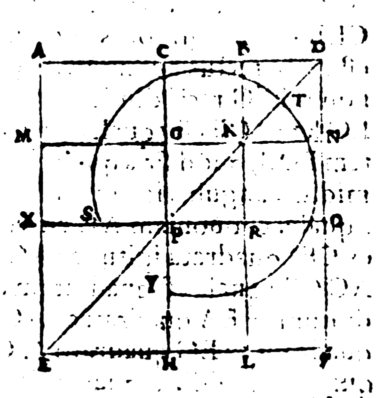


Secetur recta linea AB in partes inęquales in C ita vt AC maior sit quàm CB; & ipsi CB aequalis ponatur AD. Dico quadrata ex AC CB aequalia esse rectangulo, quod bis ACB continetur vnà cum quadrato rectae lineae DC, qua scilicet AC ipsam CB superat. constituantur enim ex AC CB quadrata ACEF CBGH: & per D ducta linea DK, ipsi CE parallela, producatur GH, vt secet DK in L. Itaque quoniam AD est aequalis CB, addita vtrique communi DC; erit DB ipsi AC aequalis. Sed GL est aequalis BD, & CE aequalis AC. ergo & GL ipsi CE aequalis erit. est autem & CH aequalis HG. reliqua igitur EH reliqua HL est aequalis: ideoq́; KH est quadratum, quod à linea KE, hoc est DC describitur. rectangula vero AK DG sunt quae continentur lineis AC CB; etenim AD est aequalis BC, & DB ipsi AC. quadrata igitur ex AC CB aequalia sunt rectangulo, quod bis AC CB continetur vnà cum ipsius DC quadrato. Si igitur recta linea in partes inęquales secetur; earum partium quadrata aequalia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur vnà cum quadrato eius lineae, qua maior pars superat minorem. quod demonstrare oportebat.

46.primi.
31.primi.
34.primi.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si recta linea vtcumque secta fuerit; et quod quater tota, et vna parte continetur rectangulum vnà cum quadrato reliquę partis ęquale est quadrato, quod ex tota, et dicta parte tamquam ex vna linea describitur.



Recta enim linea AB secta sit utcumque in C. Dico rectangulum quater AB BC contétum vnà cum quadrato quod ex AC æquale esse quadrato, quod ex AB BC, tamquam ex vna linea describitur. Producatur enim recta linea AB in D; et ipsi CB ponatur æqualis BD; describaturq́; ex AD quadratum AEFD; et dupla figura construatur. Quoniam igitur CB est æqualis BD, atque est CB ipsi GK ęqualis; BD vero ipsi KN: erit et GK ęqualis KN. eadem ratione et PR ipsi RO est æqualis. et quoniam CB est ęqualis BD, et GK ipsi KN; erit rectangulum quidem

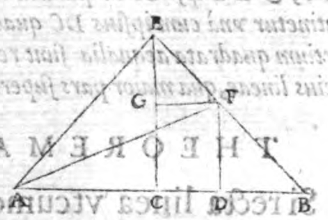
34.primi.
36.primi.

43.primi, quidem CK rectangulo KD; rectágulũ vero GR ipsi RN equale. Sed CK est æquale RN, suppleméta enim sunt parallelogrãmi CO. ergo et KD æquale est GR, et quattuor rectãgula DK KC GR RN inter se æqualia; ideoq; quadrupla sunt rectãguli CK. Rursus quoniã CB est equalis BD, et BD quidé ipsi BK, hoc est ipsi CG æqualis; CB vero ipsi GK, hoc est GP: erit et CG æqualis GP. est autem et PR ipsi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulo MP, et rectangulum PL ipsi RF æquale erit.
43.primi. Sed MP est æquale PL; supplementa enim sunt ML parallelogrammi. quare et AG ipsi RF est æquale. quattuor igitur AG MP PL RF inter se æqualia sunt, ac propterea ipsius AG quadrupla. Ostensum autem est et quattuor CK KD GR RN quadrupla esse CK. quare octo continentia gnomonem STY ipsius AK quadrupla sunt. et quoniam AK est quod AB BC continetur; etenim BK est æqualis BC; erit contentum quater AB BC ipsius AK quadruplum. At demonstratus est gnomon STY quadruplus AK. quod igitur quater AB BC continetur equale est gnomoni STY. commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC est æquale. ergo quod quater AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC equale est ipsi STY gnomoni, et quadrato XH. Sed STY gnomon, et YH totum sunt AEFD quadratum, quod describitur ex AD. rectangulum igitur quater AB BC contentum vnà cum quadrato ex AC æquale est ei, quod ex AD, hoc est ex AB BC tamquam ex vna linea describitur, quadrato. ergo si recta linea vtcumque secta fuerit; quod quater tota, et vna parte continetur rectangulum, vnà cum quadrato reliquę partis æquale est quadrato, quod ex tota, et dicta parte tamquam ex vna linea describitur. quod ostendendum fuerat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si recta linea in partes ęquales, et in partes inęquales secta fuerit, quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt et quadrati dimidiæ, et quadrati linea eius, quę inter sectiones interijcitur.

Recta enim linea quędam AB secta sit in partes ęquales ad C, et in partes inęquales ad D. Dico quadrata ex AD DB, quadratorum ex AC CD dupla esse. Ducatur enim à puncto C ipsi
11.primi. AB ad rectos angulos CE, et vtrique ipsarum AC CB equalis ponatur, iunganturq; EA EB.
31.primi, ac per D quidem ipsi CE parallela ducatur DF; per F vero ipsi AB paralle la FG, et AF iungatur.
5.primi. itaque quoniam AC est ęqualis CE; erit et
32.primi, angulus EAC angulo AEC ęqualis. Et cum rectus sit angulus ad C, reliqui AEC, EAC vni recto ęquales erunt. et sunt æquales inter sese. vterque igitur ipsorum AEC EAC recti est dimidius, eadem ratione et recti dimidius est vterque ipsorum CEB EBC. ergo totus angulus AEB rectus est. et quoniam angulus GEF dimidius
29.primi, est recti, rectus autem EGF; ęqualis enim est interiori, et opposito ECB; erit et re-
6.primi, liquus EFG recti dimidius: æqualis igitur est GEF angulus ipsi EFG. quare et latus EG lateri GF est ęquale. rursus quoniam angulus ad B dimidius est recti, rectus autem FDB, quòd sit æqualis interiori, et opposito ECB: reliquus BFD recti erit dimidius. angulus igitur ad B æqualis est angulo DFB; ideoq; latus DF lateri DB æquale. et quoniam AC est æqualis CE, erit et ex AC quadratum æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla sunt quadrati ex AC. quadratis autem ex
41.primi, AC CE ęquale est quadratum ex EA, siquidem rectus est angulus ACE. ergo quadratum ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam EG æqualis est GF; et quadratũ ex EG quadrato ex GF est æquale. quadrata igitur ex EG GF dupla sunt quadrati ex GF. at quadratis ex EG GF æquale est quod ex EF quadratum. Ergo



quadratum

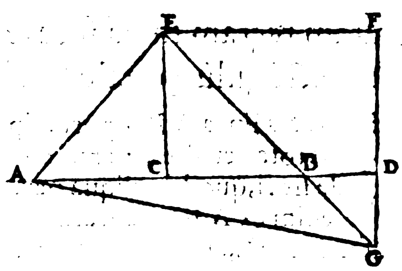
quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. ęqualis autem est GF ipsi CD. quadratum igitur ex EF duplum est quadrati ex CD. Sed et quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla sunt quadratorũ ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale est ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus est. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD est duplum. Sed quadrato ex AF ęqualia sunt ex AD DF quadrata. rectus enim est angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla sunt quadratorum ex AC CD. est autem DF ipsi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, et in partes inęquales secta fuerit, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata dupla sunt, et quadrati dimidię, et quadrati lineæ eius, quæ inter sectiones interiicitur. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Possumus etiam illud aliter demonstrare hoc modo. Iisdem enim positis quoniam recta linea AB secatur in partes aequales ad punctum C, et in partes inęquales ad D; erit DB recta linea, qua AC ipsam CD superat. Ergo ex iis, quę demonstrauimus ad septimam huius, quadrata ex AC CD aequalia sunt, & rectangulo, quod bis AC CD continetur, & ipsius DB quadrato: ideoq; quadrata ex AC CD unà cum rectangulo, quod bis AC CD continetur, & quadrato ipsius DB, dupla sunt quadratorũ ex AC CD. Sed quadratum ex AD est aequale quadratis ex AC CD, & rectangulo bis AC CD contento. 4. huius. *quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD sunt dupla. quod oportebat demonstrare.*

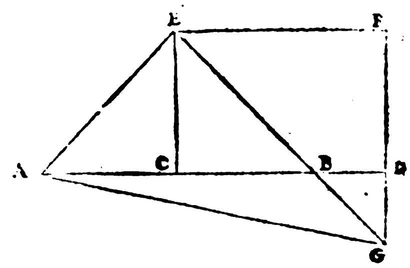
THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si recta linea secetur bifariam, et ipsi in rectum quædam recta linea adijciatur; quæ à tota cum adiecta, et adiecta fiunt vtraque quadrata dupla sunt, et quadrati dimidię, et quadrati, quod ab ea quæ ex dimidia, et adiecta constat, tamquam ab vna linea describitur.



Recta enim linea AB secetur bifariam in C, et ipsi in rectum adiiciatur quędam recta linea BD. Dico quadrata ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla esse. ducatur enim à puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE, et vtrique ipsarum AC CB æqualis ponatur; iunganturq; AE EB: et per E quidem ipsi AD parallela ducatur EF; per D vero ducatur DF parallela ipsi CE. et quoniã in parallelas EC FD recta quædam linea EF incidit, anguli CEF EFD ęquales sunt duobus rectis. anguli igitur FEB EFD duobus rectis sunt minores. quæ autem à minoribus, quàm sint duo recti in infinitum producuntur, conueniunt inter se se. Ergo EB FD productæ ad partes BD conuenient; producantur, et conueniant in puncto G, et AG iungatur. itaque quoniam AC est æqualis CE, et angulus AEC angulo EAC æqualis erit: atque est rectus qui ad C. vterque igitur ipsorum EAC AEC est recti dimidius. eadem ratione et recti dimidius est vterque CEB EBC. ergo AEB est rectus. et quoniam EBC est dimidius recti; erit et recti dimidius DBG; cum sit aduerticem. Sed et BDG rectus est; etenim est æqualis ipsi DCE alterno. reliquus igitur DGB dimidius est recti, et ob id ipsi DBG ęqualis. ergo et latus BD ęquale lateri DG. rursus quoniam EGF est dimidius recti, rectus autem, qui ad F, est

11. primi.
31. primi.
29. primi.
Ex demonstratis ad 29. primi.
5. primi.
15. primi.
29. primi.



enim angulo opposito qui ad C ęqualis; erit et reliquus FEG recti dimidius, et æqualis ipsi E GF. quare et latus GF lateri EF est ęquale. et cũ EC sit ęqualis CA; et quadratũ ex EC ęquale est ei, quod ex CA, quadrato. ergo quadrata ex EC CA dupla sũt quadrati ex C A. quadratis aũt ex EC CA ęquale est quadratũ ex E A. quadratũ igitur ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniã GF est ęqualis F E, æquale est et ex G F quadratũ quadrato ex F E. quadrata igitur ex GF FE quadrati ex EF sũt dupla. at quadratis ex GF FE æquale est, quod ex EG quadratũ. ergo quadratũ ex E G duplum est quadrati ex E F. æqualis aũt est EF ipsi CD. quadratũ igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. Sed ostensum est quadratũ ex EA duplum quadrati ex AC. ergo ex AE EG quadrata quadratorũ ex AC C D sũt dupla. quadratis vero ex AE EG æquale est quod ex A G quadratum. quadratum igitur ex A G duplũ est quadratorũ ex AC CD. at quadrato ex A G æqualia sunt ex A D D G quadrata. ergo quadrata ex A D DG sunt dupla quadratorum ex AC CD. Sed D G est æqualis DB. quadrata igitur ex AD DB quadratorũ ex A C C D sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, et ipsi in rectũ quædam recta linea adiiciatur; quę à tota cũ adiecta, et adiecta fiunt vtraque quadrata dupla sunt, et quadrati dimidię, et quadrati, quod ab ea, quæ ex dimidia, et adiecta constat tamquam ab vna linea describitur. quod ostendere oportebat.

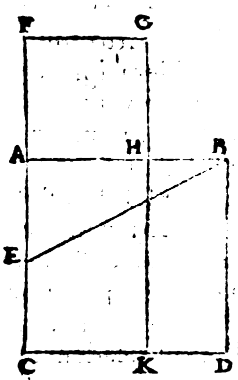
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc quoque aliter demonstrabimus.

Quoniam enim recta linea A B secatur bifariam in C, & ipsi adijcitur B D, erit B D linea, qua DC ipsam C A superat. quare ex demõstratis ad septimã huius quadrata ex A C C D aequalia sunt rectangulo, quod bis continetur A C C D, & quadrato ipsius B D. ergo quadrata ex A C C D vnà cum rectangulo, quod bis A C C D cõtinetur, & ipsius B D quadrato dupla sunt quadratorum ex A C C D. at quadratum ex A D est aequale quadratis ex A C C D, & rectangulo bis A C C D contento. quadrata igitur ex A D D B quadratorum ex A C C D dupla erunt, quod demonstrare oportuit.

PROBLEMA I. PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineã secare, ita vt quod tota, et altera parte cõtinetur rectãgulũ ęquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.



Sit data recta linea A B. oportet ipsam A B ita secare, vt quod tota, et altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Describatur enim ex A B quadratum A B C D: seceturq; A C bifariam in E, et B E iungatur: deinde producta C A in F, ponatur ipsi B E ęqualis E F: describaturq; ex A E quadratum F G H A: et G H ad K producatur. Dico A B sectam esse in H, ita vt A B H rectangulum æquale sit quadrato ex A H. Quoniam enim recta linea A C bifariam secatur in E, adiiciturq; ipsi in rectum A F; rectãgulum C F A vnà cum quadrato ex A E ęquale erit quadrato ex E F. Sed E F est æqualis E B. rectangulum igitur C F A vnà cum quadrato ex A E æquale est ei, quod fit ex E B, quadrato. quadrato autem ex E B æqualia sunt quadrata ex B A A E etenim angulus ad A rectus est. ergo rectangulum C F A vnà cum quadrato ex A E æquale est quadratis ex B A A E, commune auferatur, quod ex A E quadratum. reliquum igitur rectangulum

6. huius.
47. primi.

lum

lum C F A æquale est quadrato ex A B. est autem CFA quidem rectangulum F K. siquidem A F est æqualis F G: quadratum autem ex A B est ipsum A D. rectangulum igitur F K æquale est quadrato A D. commune auferatur A K. ergo reliquum F H reliquo H D est æquale. atque est H D rectangulum A B H, cum A B sit æqualis B D, et F H est quadratum ex A H. rectangulum igitur A B H quadrato ex A H æquale erit. quare data recta linea A B secta est in H, ita vt A B H rectangulum quadrato ex A H sit æquale. quod facere oportebat.

SCHOLIVM.

Ex hoc constat geometricam esse analogiam. quoniam enim A B secta est in H, & quod A B B H continetur quadrato A H est æquale. hoc autem soli geometricæ accidit medietati. Hanc in sequentibus extrema, ac media ratione secari dicit. nunc autem, quoniam de proportione nihil traditum est, non dicit extrema, ac media ratione secari.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XII.

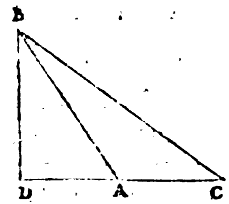
In obtusiangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum maius est quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quę sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractũ perpendicularis cadit, et linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusiangulum triangulum A B C. obtusum angulum habens B A C: et ducatur à puncto B ad C A protractam perpendicularis B D. Dico, quadratum ex B C maius esse, quàm quadrata ex B A A C, rectãgulo, quod bis C A A D continetur. Quoniam enim recta linea C D secta est vtcumque in puncto A, erit quadratum ex C D ęquale, et quadratis ex C A A D, et ei quod bis C A A D continetur rectangulo. commune apponatur ex D B quadratum. quadrata igitur ex C D D B æqualia sunt et quadratis ex C A A D D B, et rectangulo, quod bis C A A D continetur. Sed quadratis ex C D D B ęquale est quadratum ex C B. rectus enim est angulus ad D, cum sit B D perpendicularis. quadratis vero ex A D, D B ęquale est quadratum ex A B. quadratum igitur ex C B æquale est et quadratis ex C A A B, et rectangulo bis C A A D contento. Ergo quadratum ex C B maius est, quàm quadrata ex C A A B, rectangulo quod bis C A AD continetur. In obtusiangulis igitur triangulis, quadratum, quod à latere obtusum angulum subtendente fit, maius est quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quę sunt circa obtusum angulum, ad quod protractum perpendicularis cadit, et linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum. quod demonstrare oportebat.

12. primi.

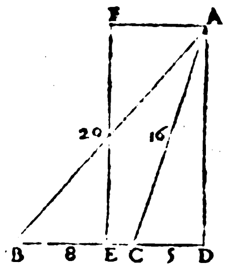
4. huius.

47. primi.



F. C. COMMENTARIVS.

Ex iis, quæ in hoc theoremate demõstrata sunt possumus cuiuslibet trianguli; obtusum angulum habentis aream dimetiri.

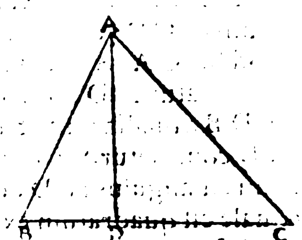


Sit triangulum obtusiangulum A B C, habens angulum A C B obtusum; sitq́; latus AB exempli gratia pedum viginti, B C octo, & C A sexdecim: & à puncto A ad B C protractam ducatur perpendicularis A D. Primum igitur quanta sit linea C D, quae adiungitur lateri, in quod perpendicularis cadit, hoc modo comperiemus. Quadrata vtrorumq́; laterum A C C B, quae sunt circa obtusum angulum simul sumpta à quadrato lateris A B, quod obtuso angulo subtenditur, detrahemus; & quod reliquum fuerit, diuidemus per duplum lateris BC. ex hac enim diuisione prouenit linea, quam quęrimus. est autem quadratum lateris A C 256, & quadratum ipsius B C 64, quae simul sumpta faciunt 320. demptis igitur 320 à 400, quod est quadratum lateris A B, relinquuntur 80, atque his diuisis per 16, videlicet per duplum ipsius B C prodibunt 5, & tot pedum erit linea C D. Itaque quoniam triangulum A C D rectangulum est, quadratum lateris A C aequale erit quadratis, quae fiunt ex C D D A. quare dempto quadrato lineae C D, quod est 25 à quadrato ipsius A C 256, reliquum erit quadratum perpendicularis A D, quod est 231, cuius latus AD est 15 $\frac{1}{5}$ proximè. Quomodo autem numeri non quadrati propinquum latus inueniatur, docuimus in nostris commentariis in librum Archimedis de circuli dimensione. Vt igitur trianguli A B C aream habeamus, secetur B D bifariam in puncto E, & ab eo ducatur E F ipsi D A parallela; rursusq́; à puncto A ducatur parallela ipsi D B, & conueniens cum E F in F puncto. Erit parallelogrammum rectangulum A D E F aequale triangulo A B D: vtrumque enim dimidium est parallelogrammi, cuius basis est B D, & altitudo eadem A D. Ergo ducta E D, quae est 6 $\frac{1}{2}$ in AD 15 $\frac{1}{5}$ prouenient area rectanguli A D E F, & ob id etiam A B D trianguli 98 $\frac{4}{5}$ pedum quadratorum. Eadem ratione inuenietur area trianguli A C D esse eius modi pedum 38. Quare demptis 38 à 98 $\frac{4}{5}$ relinquentur 60 $\frac{4}{5}$ proximè, pro area trianguli A B C, quam nobis inquirendam proposuimus.

47. primi.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XIII.

In acutiangulis triangulis, quod à latere acutum angulum subtendente fit quadratum minus est, quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpẽdicularis cadit, et linea à perpẽdiculari intus assumpta ad angulũ acutũ.



12. primi. 7. huius. 47. primi.

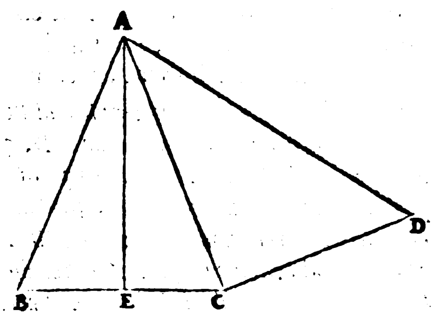
Sit acutiangulum triangulum A B C acutum habens angulum ad B: et ducatur à puncto A ad B C perpendicularis A D. Dico quadratum, quod fit ex A C minus esse, quàm quadrata, quę ex C B B A, rectangulo, quod bis C B B D continetur. Quoniam enim recta linea C B secta est vtcumque in D, erũt quadrata ex C B C D æqualia, et rectangulo quod bis C B B D continetur, et quadrato ex D C. commune apponatur quod ex A D quadratum. quadrata igitur ex C B B D D A æqualia sunt, et rectangulo bis C B B D contento. et quadratis ex A D D C. Sed quadratis ex B D D A æquale est quod ex A B quadratum; rectus enim angulus est qui ad D. quadratis vero ex A D D C ęquale est quadratum ex A C. quadrata igitur ex C B B A sunt æqualia quadrato ex A C, et ei quod bis C B B D continetur, rectangulo. quare solum quadratum ex A C minus est quàm quadrata ex C B B A rectangulo, quod bis C B B D continetur. In acutiangulis igitur triangulis quadratum, quod à latere acutum angulum subtẽdẽte fit, minus est quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quę sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutũ. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM

SCHOLIVM.

Quoniam in diffinitionibus dixit Acutiangulum triangulum esse, quod tres acutos angulos habet, sciendum est hoc loco non ita dicere, sed triangula omnia appellare acutiangula, propterea quod omnia angulum habent acutum, & quamquam non omnes acutos, vnum tamen habent. propositio igitur huiusmodi est. Omnis trianguli latus, quod acutum subtendit angulum, minus potest, quàm latera acutum angulum continentia, rectangulo contento bis vno laterum, & reliqua quae sequuntur. Itaque si rectangulũ sit triangulum ex lateribus acutum angulum continentibus accipiemus illud, quod recto angulo subtenditur, vt in ipsum perpendicularis cadat. & similiter faciemus, si obtusiangulum sit. Conuersum vero theorematis est hoc.

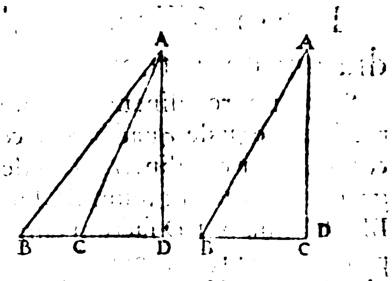
Sit quadratũ ex AB minus quàm quadrata ex BC CA, eo, quod bis BC CE cõtinetur, et reliqua deinceps; atque à pũcto C ipsi CA ad rectos angulos ducatur CD, quæ ipsi CB sit ęqualis. ergo quadrata ex BC CA ęqualia sunt quadratis ex DC CA. Sed quadratis ex BC CA minus est quadratum ex AB. ergo & quadratis ex DC CA minus erit. quadratis autem ex DC CA æquale est quadratum ex DA. 47.primi. quadratum igitur ex DA quadrato ex AB maius, et ipsa DA maior, quàm AB. Itaque quoniam duæ DC CA duabus BC CA æquales sunt, et basis DA maior basi AB, erit et angulus DCA angulo ACB maior. 25.primi. rectus autem est DCA. ergo ACB acutus erit. quod oportebat demonstrare.



F. C. COMMENTARIVS.

Hoc non solum in triangulis acutiangulis verum est, sed etiam in obtusiangulis, & rectangulis, quę duos angulos necessariò habent acutos. Quare dicemus presens theorema tres habere casus, vel enim ducta perpendiculari AD, punctum D cadit inter BC, vel extra, vel in ipsum C, ita vt AD sit eadem, quae AC. Euclidis demonstratio congruit primo casui in triangulis, quae acutiangula dicuntur; in alijs autem si modo perpendicularis cadat in latus, quod angulo recto, vel obtuso subtenditur. At si cadat in alterum latus eorum, quae acutis angulis subtenduntur, nihilominus idem sequetur, vt demonstrabimus.

Sit obtusiangulum triangulum ABC, obtusum habens ACB angulum, et ducatur à puncto A ad BC protractam perpendicularis AD. Dico quadratum, quod fit ex AC, acutum angulum ABC subtendente minus esse. quàm quadrata, quæ ex AB BC fiunt, rectangulo, quod bis CB BD continetur.

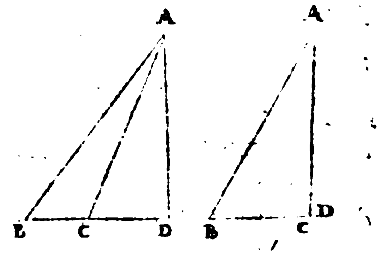


Quoniam enim ABD triangulum rectangulum est, quadratum, quod fit ex AB aequale est quadratis, quę ex BD DA. commune addatur quadratũ ex BC. ergo quadrata ex AB BC aequalia sunt quadratis ex BD DA BC. Sed quadrato ex BD

aequalia

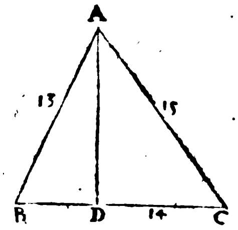
aequalia sunt quadrata ex BC CD vnà cum rectangulo, quod bis BC CD continetur. quadratis autem ex CD DA quadratum ex AC est aequale. Quadrata igitur ex AB BC aequalia sunt quadrato ex AC, & duplo quadrati, quod ex BC vnà cum rectangulo, quod bis BC CD continetur. sed quadrato ex BC, et rectangulo, quod BC CD continetur aequale est rectangulum CBD, ac 3.huius. *propterea duplo quadrati ex BC, & rectangulo, quod bis continetur BC CD aequale est rectangulum, quod bis CB BD continetur. ergo quadrata ex AB BC aequalia sunt, quadrato ex AC vnà cum rectangulo, quod bis continetur CB BD. Quadratum igitur ex AC minus est, quàm quadrata ex AB BC, rectangulo, quod bis CB BD continetur.*

Sit triangulum rectangulum ABC rectum angulum habens ACB. Dico quadratum lateris AC, quod acutum angulum ABC subtendit minus esse, quàm quadrata ex AB BC, rectangulo, quod bis CB BD continetur.



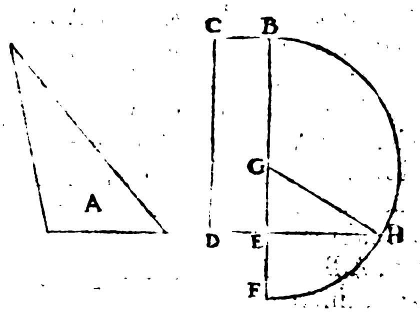
Quoniam enim triangulum rectangulum est, erit perpendicularis AD eadem, quae latus trianguli AC, & punctum D idem, quod C. quadratum vero, quod fit ex AB aequale quadratis ex BC CA. commune addatur quadratum ex BC. Ergo quadrata ex AB BC ęqualia sunt quadrato ex AC, & duplo quadrati eius, quod fit ex BC. hoc est rectangulo, quod bis cōtinetur CB BD. Quadratū igitur ex AC minus est quàm quadrata ex AB BC rectangulo, quod bis CB BD continetur. quod demonstrare oportebat.

Ex proxime demonstratis licebit cuiusque trianguli, siue acutianguli, siue rectanguli, siue obtusianguli quod nota latera habeat, aream inuenire.



Sit triangulum ABC habens angulos ad BC acutos, & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD, quae inter BC necessario cadet. Sit autem latus AB pedum 13, BC 14, & CA 15. Itaque primum quadratum lateris AC, quod angulo acuto B subtenditur, à quadratis reliquorum laterum AB BC simul iunctis auferemus, & quod reliquitur, diuidemus per duplum lateris BC, in quod perpendicularis cadit; & prouenìet recta linea BD, quae à perpendiculari intus assumitur ad angulum acutum. Deinde à quadrato lateris AB, quod subtenditur angulo ADB recto, auferemus quadratum ipsius BD, et eius, quod prouenerit quadrati latus erit perpendicularis AD magnitudo, ex qua denique totius ABC trianguli area nota efficietur. Quadratum igitur lateris AC est 225. quadratum vero ipsius AB 169, & quadratum BC 196, quae duo simul iuncta faciunt 365. ergo sublatis 225 à 365 relinquentur 140: atque bis per 28 diuisis prouenient 5: ac propterea BD erit pedum quinque. Rursus si à quadrato lateris AB, hoc est à 169 auferatur quadratum BD, quod est 25, relinquētur 144, cuius quadrati latus est 12. ergo perpendicularis AD duodecim pedum erit. Itaque ductis 12 in basis BC dimidium, videlicet in 7 producentur 88, et totidem pedum quadratorum erit area triāguli ABC, quam à principio quęrebamus.

PROBLEMA II. ROPOSITIO XIIII.



Dato rectilineo ęquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A. oportet ipsi A rectilineo ęquale quadratum constituere. constituatur rectilineo A ęquale parallelo- 45.primi. grammum rectangulum BCDE. Si igitur BE est æqualis ED factum iam erit, quod proponebatur, etenim rectilineo A æquale quadratum cōstitutum est BD: sin minus, vna ipsarum BE ED maior est: sit BE maior; et producatur ad F, ponaturq; ipsi ED ęqualis EF. deinde secta FB bifariā in G, centro

centro quidem G, interuallo autem vna ipsarum GB GF semicirculus describatur BHF; producaturq; DE in H, et GH iũgatur. quoniã igitur recta linea BF secta est in partes equales ad G, et inæquales ad E; erit rectangulum BEF vnà cum quadrato, quod fit ex EG æquale quadrato ex GF. est autem GF æqualis GH. rectangulum igitur BEF vnà cum quadrato ex GE æquale est quadrato ex GH. Sed quadrato ex GH equalia sunt ex HE EG quadrata. ergo rectangulum BEF vnà cum quadrato ex EG æquale est quadratis ex HE EG. commune auferatur ex EG quadratum. reliquum igitur rectangulum BEF est æquale quadrato ex EH. Sed rectãgulum BEF est ipsum BD parallelogrammum, quoniam EF est æqualis ED. ergo BD parallelogrammũ quadrato ex EH est equale. parallelogramnium autem BD est equale rectilineo A. rectilineum igitur A quadrato ex EH descripto æquale erit. quare dato rectilineo A æquale quadratum constitutum est, quod videlicet ex ipsa EH describitur. quod facere oportebat. 5. huius

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc problemate multo vniuersalius est, quod in sexto libro demonstratur, nempe. Dato rectilineo simile, et alteri dato æquale idem constituere.

LIBRI SECVNDI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER TERTIVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS *Federici Commandini Vrbinatis.*

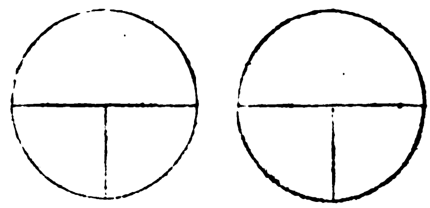
SCHOLIVM.

Propositum Euclidi est hoc loco tractare de ijs, quæ circulis accidunt cum ad rectas lineas, & ad angulos comparantur.

DIFFINITIONES.

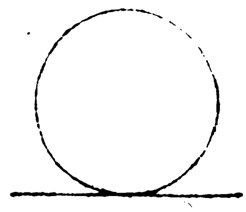
I.

AEQVALES circuli sunt, quorum dia metri sunt æquales, vel quorum quæ ex centris sunt æquales.



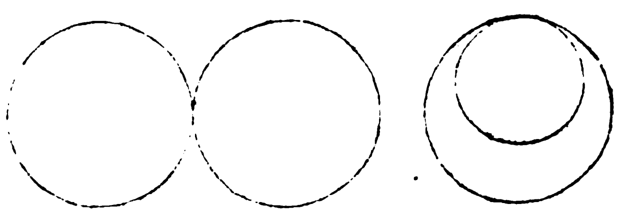
II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, et producta ipsum non secat.



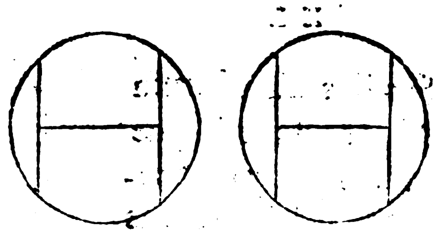
III.

Circuli contingere se se dicũtur, qui contingentes se ipsos non secant.



IIII.

In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpēdiculares ductę sūt ęquales.

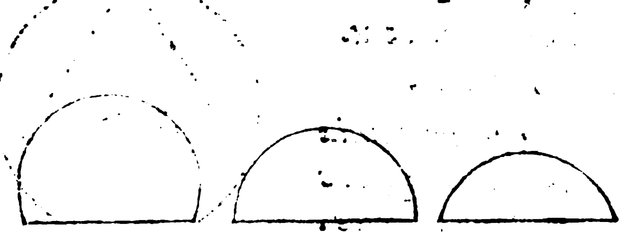


V.

Magis autem distare à centro dicitur ea, ad quam maior perpendicularis cadit.

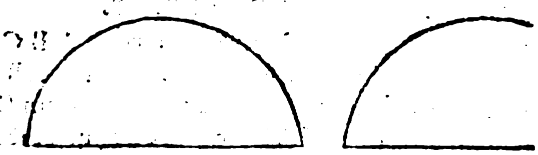
VI.

Portio circuli est figura, quę recta linea, et circuli circumferētia continetur.



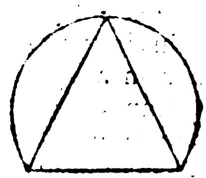
VII.

Portionis autē angulus est, qui recta linea, et circuli circūferentia cōprehēditur.



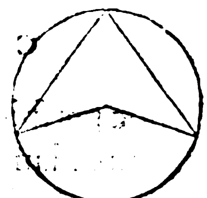
VIII.

In portione angulus est, quando in circūferentia portionis sumatur aliquod punctum, atque ab ipso ad terminos lineæ eius, quæ basis est portionis, rectę lineæ ducantur, angulus vero ductis lineis sit cōtentus.



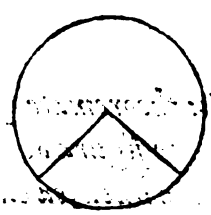
IX.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ assumunt circumferentiam, in illa consistere angulus dicitur.



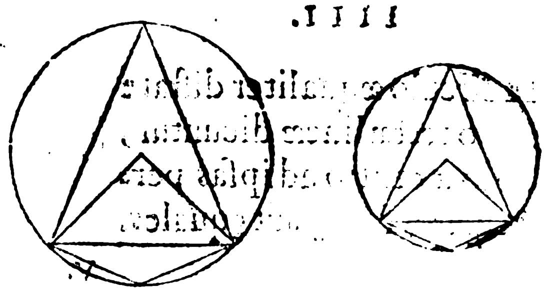
X.

Sector circuli est, quando angulus ad centrum constiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, et circumferentia ab ipsis assumpta.



XI.

Similes circulorum portiones sunt, quæ angulos suscipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales consistunt.

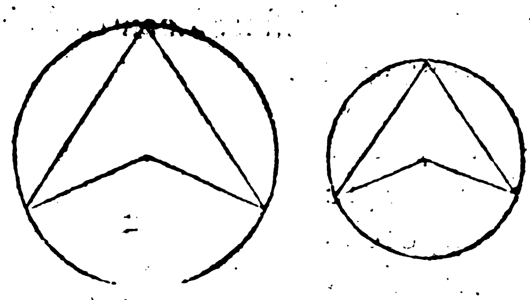


XII.

AFED. COMMAN.

ADDITA.

Similes circumferentiæ circulorum sunt, in quibus anguli consistunt æquales.



PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

Dati circuli centrum inuenire.

Sit datus circulus A B C. oportet circuli A B C centrum inuenire. ducatur in ipso quędam recta linea AB vtcūque,
10. primi. et in puncto D bifariam secetur. à puncto autem D ipsi A B
11. primi. ad rectos angulos ducta DC in E producatur; et secetur CE bifariam in F. Dico punctum F circuli A B C centrum esse. Non enim, sed si fieri potest, sit G, et GA GD GB iungantur. itaque quoniam AD est æqualis DB, communis autem DG, erunt duæ AD DG duabus GD DB ęquales, altera al
Diffi. 15 pri. teri: et basis G A ęqualis est basi G B. sunt enim ex centro
8. primi. G. angulus igitur ADG angulo GDB est ęqualis. Cum au
diffi. 10. pri. tem recta linea super rectam lineam insistens angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est vterque æqualium angulorum. ergo angulus GDB est rectus. Sed et rectus F D B. ęqualis igitur est angulus FDB angulo G D B, maior minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli ABC centrum. Similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F. ergo F centrum est circuli ABC. quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc perspicuum est, si in circulo quędam recta linea rectam lineam quandam bifariam, et ad angulos rectos secet, in secantę circuli centrum inesse.

SCHOLIVM.

Conuersum diffinitiones circuli. *Ex theoremate ostenditur conuersum diffinitionis circuli. Si enim in ambitum figuræ ab aliquo puncto eorum, quæ sunt intra, incidant æquales rectæ lineæ, ea circulus est.*

Non enim, sed si fieri potest, sit rectilineum, et sit aliquod ipsius latus, in quod incidant duæ rectæ lineæ ipsum determinantes. erit igitur æquicrure triangulum: atque eius basi bifariam secta, si ducatur recta linea rectos angulos faciet, et vtroque latere trianguli minor erit. quod est absurdum, ponũtur enim omnes rectæ lineæ, quæ incidũt, æquales esse.

ALIVD.

Quemadmodum in primo libro figurarum elementarium triangulorum dico, eam, quæ maxime elementaris est, triangulum videlicet æquilaterum in factionẽ initio proposuit, ob constructiones earum, quæ deinceps sunt, demonstrationum, ita & hoc loco centrum inuenire proponit. hoc enim circuli ipsius ortus caussa est. Triangulum æquilaterum figura maxime elementaris est. Cẽtrum, circuli ipsius ortus caussa est.

ALIVD.

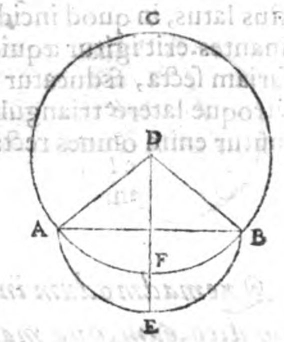
Omnis quidem circulus habet proprium centrum natura determinatum; quatenus vero ad nos pertinet, non omnis, sed is tantum, cuius ortum videmus. In prioribus igitur theorematibus, tamquam factis iam circulis, etiam centra manifesta sunt. at in his cum quæratur substantia, centrum etiam quæritur: quod quidem substantiam circuli complet. hoc autem primum, vt inquiunt, inter problemata, et theoremata mediũ est. Quatenus enim quærere, etiam aliquo modo facere proponit; quatenus vero non in factionem, sed in inuentionem, ob id proponit contemplari. Itaque mihi videtur formatam habens propositionem theorema esse, vt si de quarto quis dixerit. Duorum triangulorum, quorum duo latera æqualia sunt, & anguli, inuenire si bases sint æquales. quemadmodum enim illic symptoma quoddam inquirit, quod duorum triangulorum naturæ inest, ita & hoc loco, quod inest naturæ circuli. At si problematis proprium, & contrarium propositioni suscipit, multo magis quod propositum est problematis denominationem effugiet. Cẽtrum substantiam circuli cõplet. Inter problemata, ac theoremata medium.

THEOREMA I. PROPOSITIO II.

Si in circumferentia circuli, duo quęuis puncta sumantur, quæ ipsa coniungit recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus ABC, et in circumferentia ipsius sumantur duo quęuis puncta AB. Dico rectam lineam, quæ à puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. non enim, sed si fieri potest, cadat extra, vt AEB, et sumpto circuli ABC centro, quod sit D, iungantur DA DB, et producatur DF in E. Quoniam igitur DA est æqualis DB; erit et angulus DAE angulo DBE æqualis. et quoniam trianguli DAE vnũ Ex antecedente. 5. primi.

16 primi. latus AEB protéditur, angulus DEB angulo DAE maior erit. angulus autem DAE ęqualis est angulo DBE.
18. primi. ergo DEB angulus angulo DBE est maior. Sed maiori angulo maius latus ſubtéditur. maior igitur est DB ipſa DE. est aũt DB æqualis DF. Ergo DF est maior DE, minor maiore, quod fieri nõ poteſt. non igitur à pũcto A ad B ducta recta linea extra circulũ cadet. Similiter oſtẽdemus neque in ipſam cadere circũferentiã. Ergo extra cadat neceſſe eſt. Si igitur in circũferentiã circuli duo quęuis pũcta ſumãtur, quæ ipſa cõiũgit recta linea intra circulũ cadet. quod oportebat demõſtrare.



F. C. COMMENTARIVS.

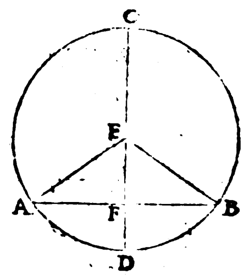
Similiter oſtendemus neque in ipſam cadere circumferentiam.

16. primi. 18. primi. *Si enim in ipſam circumferentiam caderet, eadem ratione ſequeretur angulum DFB maiorem eſſe angulo DAF, hoc eſt angulo DBF, ac propterea latus DB latere DF maius eſſet. ſed & aequale, quod fieri non poteſt. non igitur in ipſam circumferentiam cadet.*

THEOREMA II. PROPOSITIO III.

Si in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductã per cẽtrũ bifariã ſecet, et ad angulos rectos ipſam ſecabit. quòd ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, et bifariam ſecabit.

Sit circulus ABC, et in ipſo recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam ſecet in puncto F. Dico et ad angulos rectos ipſam ſecare. Sumatur enim circuli ABC centrum, quod ſit
1. huius. E, et EA EB iungantur. quoniam igitur AF eſt æqualis FB, communis autem FE, duæ duabus æquales ſunt, et baſis EA baſi EB eſt ęqualis. ergo et angulus AFE angulo BFE æqualis erit. Cum autem recta linea ſuper rectam inſiſtens angu-
Diffi. 10. primi. los, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterque æqualium angulorum. vterque igitur AFE BFE eſt rectus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineã AB non ductam per centrum bifariam ſecans, et ad angulos rectos ipſam ſecabit. Sed CD ſecet AB ad rectos angulos. Dico et bifariam ipſam ſecare, hoc eſt AF ipſi FB ęqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, quoniam EA, quæ ex centro eſt ęqualis E
5 primi. B, et angulus EAF angulo EBF æqualis erit. eſt autem et AFE rectus æqualis recto BFE. duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duobus angulis æquales habẽt, vnumq; latus vni lateri æquale EF, commune ſcilicet vtriſque, quod vni angulorũ
26. primi. æqualium ſubtenditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus ęqualia habebunt. atque erit AF ipſi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam ſecet, et ad angulos rectos ipſam ſecabit. quòd ſi ipſam ſecet ad rectos angulos, et bifariam ſecabit. quod oportebat demonſtrare.

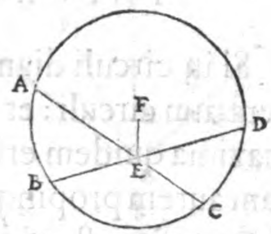


THEOREMA. III. PROPOSITO. IIII.

Si in circulo duę rectæ lineæ ſe inuicem ſecent non ductę per centrum, ſe ſe bifariam non ſecabunt.

Sit circulus ABCD; et in ipſo duæ rectæ lineæ AC BD ſe inuicem ſecent in puncto E, non ductę per centrum. Dico eas ſe ſe bifariam nõ ſecare. Si enim fieri poteſt, ſecent

secent se se bifariam, ita vt AE sit æqualis EC, et BE ipsi ED: sumaturq; centrum ABCD circuli, quod sit F; et EF iungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrũ ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, et ad rectos angulos ipsam secabit. quare rectus est FEA angulus. rursus quoniã recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per cẽtrum bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam secabit. rectus igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus et FEA. ergo FEA angulus ipsi FEB ęqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur AC BD se se bifariam secant. quare si in circulo duæ rectę lineæ se inuicem secent, non ductę per centrum, se se bifariam non secabunt. quod ostendere oportebat.



1. huius.

Ex antecedente.

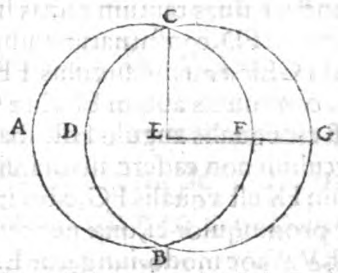
SCHOLIUM.

Si rectæ lineæ per centrum transirent, quærendum vtique non esset, an bifariam se inuicem secent. ipsorum enim centrum bipartita sectio est. similiter & si altera per centrum transeunte, altera non sit per centrum. nam quæ per centrum transit bifariam non secatur.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO V.

Si duo circuli se inuicem secent, non erit ipsorum idem centrũ.

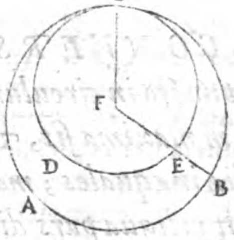
Duo enim circuli se inuicem secent ABC CDG in punctis BC. Dico ipsorum idem cẽtrum nõ esse. Si enim fieri potest, sit centrum E, iũgaturq; EC, et EFG vtcumque ducatur. Et quoniam E cẽtrum est circuli ABC, erit CE ipsi EF ęqualis. rursus quoniam E centrum est CDG circuli, ęqualis est CE ipsi EG. Sed ostensa est CE ęqualis EF. ergo EF ipsi EG ęqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC CDG. quare si duo circuli se inuicem secent, non erit ipsorum idem centrum. quod ostendendum fuit.



THEOREMA V. PROPOSITIO. VI.

Si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

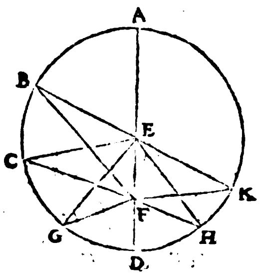
Duo enim circuli ABC CDE contingat se se intra in puncto C. Dico ipsorum non esse idem centrum. si enim fieri potest, sit F, iũgaturq; FC, et FEB vtcumque ducatur. quoniam igitur F centrum est circuli ABC, ęqualis est CF ipsi FB. rursus quoniam F centrum est circuli CDE, erit CF æqualis FE. ostensa autem est CF æqualis FB. ergo et FE ipsi FB est æqualis, minor maiori; quod fieri non potest. non igitur F punctum centrum est circulorum ABC CDE. quare si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idẽ centrum non erit. quod demonstrare oportebat.



THEO-

THEOREMA VI. PROPOSITIO VII.

Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli; et ab eo in circulum cadant quędam rectæ lineæ: maxima quidem erit, in qua centrum, minima vero reliqua: aliarum autem propinquior ei, quę per centrum transit, semper remotiore maior est. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad vtrasque partes minimę.

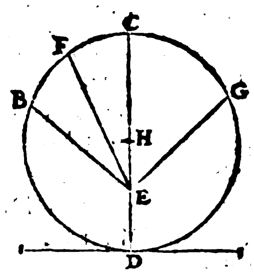


Sit circulus ABCD, cuius diameter AD: et in ipsa AD sumatur aliquod punctum F, quod non sit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: et à puncto F in circulum ABCD cadant quędam rectę lineę FB FC FG. Dico FA maximam esse, et FD minimam: aliarum vero FB quidē maiorem quàm FC, et FC maiorem quàm FG. Iungātur
20.primi. enim BE CE GE. Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora; erunt BE EF maiores quàm BF, est aūt AE æqualis EB. Ergo BE EF ipsi AF sūt æquales. maior igitur est AF quàm FB. rursus quoniā BE est ęqualis EC, communis autem FE, duę BE EF duabus CE EF
24.primi. æquales sunt. Sed BEF angulus maior est angulo CEF. basis igitur BF basi FC est maior. eadem ratione et CF maior est quàm FG. rursus quoniam GF FE maiores sunt quàm EG, æqualis autem GE ipsi ED; erunt GF FE maiores quam ED. communis auferatur EF. ergo reliqua GF maior est quàm reliqua FD. maxima igitur est FA, et FD minima: maior vero BF quàm FC, et CF quàm FG maior. dico et à puncto F duas tantum rectas lineas cadere in circulum ABCD ad vtrasque partes
23.primi. minimæ FD. constituatur enim ad lineam EF, atque ad datum in ea punctum E angulo GEF æqualis angulus FEH: et FH iungatur. quoniā igitur GE est æqualis EH, communis autem EF, duæ GE EF duabus HE EF æquales sunt: et angulus G
4.primi. E F est æqualis angulo HEF. basis igitur FG basi FH æqualis erit. dico à puncto F in circulum non cadere aliam ipsi FG ęqualem. Si enim fieri potest, cadat FK. et quoniam FK est æqualis FG, estq; ipsi FG æqualis FH; erit et FK ipsi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum transit, æqualis remotiori, quod fieri non potest. Vel hoc modo. iungatur EK. et quoniam GE ipsi EK est ęqualis, communis autem FE, et basis GF ęqualis basi FK; erit et angulus GEF ęqualis angulo KEF. Sed angulus GEF angulo HEF est æqualis. angulus igitur HEF ipsi KEF æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. quare à puncto F in circulum non cadet alia recta linea æqualis ipsi GF. ergo vna tantum cadet. Si igitur in circuli diamtero aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, et reliqua quę sequuntur. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM.

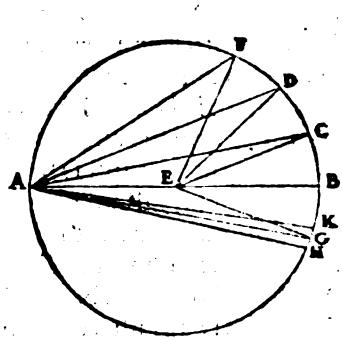
CONVERSVM. Si intra circulum punctum sumatur, atque à puncto in circulum cadant quotcumque rectæ lineæ, quarum vna quidem maxima sit, vna vero minima, & reliquarum aliæ sint æquales, aliæ inæquales; maxima quidem per centrum transibit, minima verò erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem sunt centro propinquiores, æquales autem ab eo æqualiter distant.

Per



Per punctum enim E, quod est intra circulum maxima quidem sit EC, minima vero ED; et FE quàm EB maior. Dico CE per centrum transire, et DE ipsi esse in directum; EF vero centro propinquiorem esse, quàm EB. Si enim CE non transit per centrum, sed alia quædam à puncto E in circulum cadēs, illa maxima erit per septimum theorema. est autem et EC maxima, quod fieri non potest. diameter igitur est CE, et ipsi in directum ED. Dico EF centro H propinquiorem esse, quàm EB. Si enim non est propinquior, vel remotior est, vel æqualiter distat: et siquidem remotior, maior erit BE, quàm EF, quod fieri non potest. non enim ponitur ita esse. Quòd si æqualiter distant, ęquales sunt. sed neque hoc ponitur. propinquior igitur est FE ipsi H, quàm EB, et GE ipsi EB est æqualis. Ergo à centro H æqualiter distant, inæqualiter enim distantes inęquales sunt, per septimum theorema. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.



Illud quoque verum est, quod nos demonstrauimus in commentario in propositionem octauam libri Archimedis de lineis spiralibus.

Si in circumferentia circuli aliquod sumatur punctum, ab eoq; in circulum ducantur rectæ lineę; quæ per centrum transit, omnium erit maxima, aliarum verò quæ transeunti per cētrum propinquiores sunt, remotioribus erunt maiores; duę autem tantum ęquales sunt ad vtrasque partes maximæ.

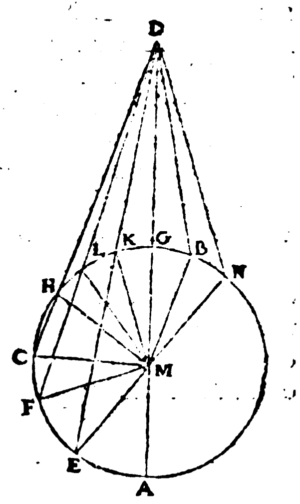
THEOREMA VII. PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quędam rectę lineæ, quarum vna per centrum transeat, alię vero vtcumque: earum quidem, quæ in concauam circumferentiam cadunt, maxima est, quę per centrum transit; aliarum autem propinquior ei, quę per centrum, semper remotiore maior est. at earum, quæ in curuam circumferentiam cadunt minima est, quæ inter punctum, et diametrum interijcitur; aliarum vero quæ propinquior minimæ semper remotiore est minor, duæ autem tantum ęquales à puncto in circulum cadunt ad vtrasque partes minimæ.

Sit circulus ABC, et extra circulum sumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectę lineæ quędam DA DE, DF DC: sitq; DA per cētrum. Dico earum quidem quæ in concauam AEFC circumferentiam cadunt, maximam esse DA, quæ per centrum transit; et minimam, quæ inter punctum D, et diametrum AG interiicitur, videlicet DG: maiorem autem DE, quàm DF, et DF maiorē quàm DC, earum vero, quæ in curuam circumferentiam HLKG cadunt, quæ propinquior minimę DG semper remotiore esse minorem, hoc est DK minorem, quàm DL, et DL minorem quàm DH. Sumatur enim centrum circuli ABC, quod sit M, et iungantur ME MF MC MK ML MH, et quoniam AM est æqualis ME, commu-

nis

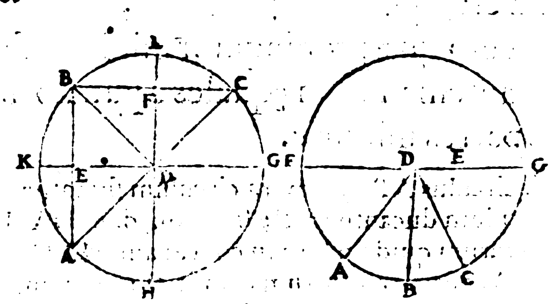
nis apponatur MD. Ergo AD est æqualis ipsis EM MD.
20.primi. Sed EM MD sunt maiores quàm ED. Ergo et AD quàm ED est maior. rursus quoniam æqualis est ME ipsi MF, cōmunis apponatur MD. erūt EM MD ipsis MF MD ęquales; et angulus EMD maior est angulo FMD. basis igitur
24 primi. ED basi FD maior erit. Similiter demonstrabimus et FD maiorē esse quàm CD. ergo maxima est DA; maior aūt DE quàm DF, et DF quàm DC maior. pręterea quoniam MK KD sūt maiores quā MD, et MG est ęqualis MK; erit reliqua KD quàm reliqua GD maior. quare GD minor quàm KD, et idcirco GD minima est. et quoniam trianguli MLD in vno latere MD, duæ rectę lineæ MK KD in-
21. primi. tra constituuntur, erunt MK KD minores ipsis ML LD, quarum MK est æqualis ML. reliqua igitur DK minor est quàm reliqua DL. Similiter ostendemus et DL quam DK minorē esse. Ergo DG minima est. minor vero DK quàm DL, et DL minor quàm DH. dico ēt duas tantum æquales à puncto D in circulum cadere ad vtrasque minimæ



23.primi. partes. constituatur ad rectam lineam MD, ad datumq; in ea punctum M angulo K MD ęqualis angulus DMB, et DB iungatur. itaque quoniam MK est æqualis MB, cō-
4.primi. munis autem MD, duæ KM MD duabus BM MD æquales sunt, altera alteri. et angulus KMD æqualis augulo BMD. basis igitur DK basi DB est ęqualis. dico à puncto D nullam aliam ipsi DB æqualem in circulum cadere. si enim fieri potest, cadat DN. et quoniam DK est æqualis DN, et DK ipsi DB est ęqualis; erit et DB æqualis DN, propinquior scilicet minimæ ęqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est, vel et aliter. iungatur MN. et quoniam æqualis est KM ipsi MN, communis autē MD; et basis DK basi DN ęqualis erit, et propterea angulus KMD ęqualis angulo D MN. Sed KMD angulus est æqualis angulo BMD. angulus igitur BMD angulo NM D æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. quare, non plures quàm duæ rectæ lineæ à puncto D in circulum ABC ad vtrasque partes minimæ GD cadent. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, et reliqua deinceps. quod ostendere oportebat.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duę rectæ lineæ æquales; punctū quod sumitur, circuli centrum erit.



Sit circulus ABC, et intra ipsum sumatur punctum D, à quo in circulum cadant plures, quàm duæ rectę lineæ æquales, videlicet DA DB DC. Dico punctum D circuli ABC centrum esse. Iungantur enim AB BC, secenturq; bifariam in punctis EF: et iunctæ ED DF ad puncta GK HL producantur. quoniam igitur AE est ęqualis EB, communis autem ED, erunt duæ AE ED duabus BE ED ęquales; et ba-
8.primi. sis DA est æqualis basi DB. angulus igitur AED angulo BED ęqualis erit, et idcir-
13 primi. co vterque angulorū AED BED est rectus. Ergo GK bifariam secans AB, et ad angulos rectos secat. et quoniam si in circulo quādā recta linea, rectam lineam quandam

dam bifariã,et ad angulos rectos secet,in secante est circuli centrum;erit in GK centrum circuli ABC. Eadẽ ratione et in HL centrum est ABC circuli,et nullum aliud commune habent rectæ lineę GH HL,nisi punctum D.Ergo D circuli ABC est centrum. Si igitur intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ ęquales; punctum, quod sumitur circuli centrum erit. Corol.1.huius.

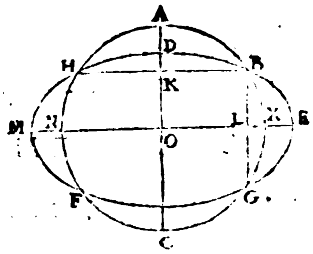
ALITER.

Sumatur enim intra circulum A B C punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum A B C cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales DA DB DC. Dico punctum D, quod sumitur, circuli ABC esse centrum. non enim, sed si fieri potest, sit E, et iũcta DE in FG producatur. ergo FG diameter est ABC circuli. itaque quoniam in FG diametro circuli ABC sumptum est aliquod punctum D, quod non est centrum circuli; maxima quidem erit D G, maior autem D C quàm D B, et D B quàm D A maior. Sed et ęquales, quod fieri non potest. non igitur E centrum est circuli ABC. Similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse præter ipsum D. ergo D circuli ABC centrum erit. quod oportebat demonstrare. 7.huius.

THEOREMA IX. PROPO. X.

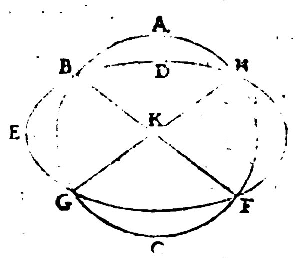
Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest, circulus ABC circulum DEF secet in pluribus punctis, quàm duobus, videlicet in B G H F: et iunctæ BG BH bifariam secentur in KL. atque à punctis KL ipsis BG BH ad rectos angulos ductæ KC LM in puncta AE producantur. quoniã igitur in circulo ABC quędam recta linea AC rectam lineam quandam BH bifariam et ad angulos rectos secat, in ipsa AC circuli ABC erit centrum. rursus quoniam in eodẽ circulo ABC quædam recta linea NX rectam lineam quãdam BG bifariam secat, et ad rectos angulos; in ipsa N X centrum erit circuli. ostensum autem est et in ipsa A C centrum esse, et in nullo alio puncto conueniunt inter se rectæ lineę A C NX, præterquàm in O. ergo O circuli ABC est centrum. Similiter ostendemus punctum O centrum esse circuli DEF. ergo duorum circulorum se se secantium A B C DEF. idem erit centrum O. quod fieri non potest. non igitur circulus circulum secat in pluribus punctis, quàm duobus. Corol.1.huius. 5.huius.



ALITER.

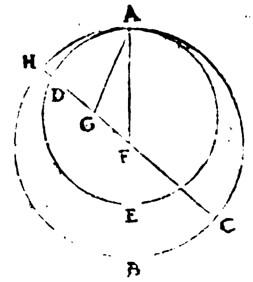
Circulus enim ABC rursus circulum DEF secet in pluribus punctis, quàm duobus; nempe in B G F H, et circuli A B C centrum sumatur, quod sit K; et KB KG KF iungãtur. qm igitur intra circulũ DEF sumptum est aliquod punctum K, à quo in circulum DEF incidant plures, quàm duæ rectæ lineæ KB KG KF; erit punctum K circuli D E F centrum. est autem et circuli ABC centrum K. duorũ igitur circulorum, qui se se secant, idem erit K centrum, quod fieri non potest. quare circulus circulum in pluribus, quàm duobus pũctis non secat, quod oportebat demonstrare.



THEOREMA X. PROPOSITIO. XI.

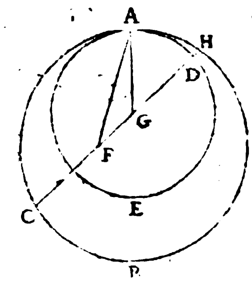
Si duo circuli se se intus contingant, et sumantur centra ipsorum; recta linea ipsorum centra coniungens, et producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli ABC ADE se se intus contingant in puncto A, et sumatur circuli quidem ABC cētrum, quod sit F, circuli vero ADE centrum G. Dico rectam lineam à puncto G ad F ductam, si producatur in punctum A cadere. Non enim, sed si fieri potest, cadat vt F G D H. et



20.primi. AF AG iungantur. Itaque quoniā AG GF maiores sunt, quàm F A, hoc est quàm F H, communis auferatur F G. reliqua igitur AG maior est, quàm reliqua GH. Sed AG est æqualis GD. ergo GD ipsa GH est maior, minor maiore, quod fieri non potest. Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra cōtactum A cadet. quare in ipsum cadat necesse est. Si igitur duo circuli se se intus contingant; recta linea ipsorum centra coniungens, si producatur in contactum circulorum cadet. quod oportebat demonstrare.

ALITER.



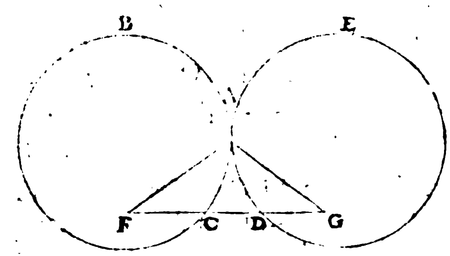
Sed cadat vt GFC, et producatur in directum CF G ad punctum H: iunganturq; AG AF. Quoniam igi-

20.primi. tur AG GF maiores sunt quàm AF, et AF est ęqualis FC, hoc est ipsi FH, communis auferatur FG. reliqua igitur AG reliqua GH est maior: hoc est DG maior ipsa GH, minor maiore, quod fieri non potest. Similiter et si extra circulum paruum sit centrum maioris circuli, idem sequi absurdum ostendemus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XII.

Si duo circuli se se extra contingant, recta linea ipsorū centra coniungens per contactum transibit.

Duo enim circuli ABC ADE se se extra contingant in puncto A; et sumatur circuli quidem ABC centrum, quod sit F: circuli vero ADE cētrum G. Dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A transire. Non enim sed si fieri potest, cadat, vt FCDG: et FA AG iungantur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC, erit AF æqualis FC. Rursus quoniam G centrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD æqualis. ostensa est autem et AF ęqualis FC. sunt igitur FA A



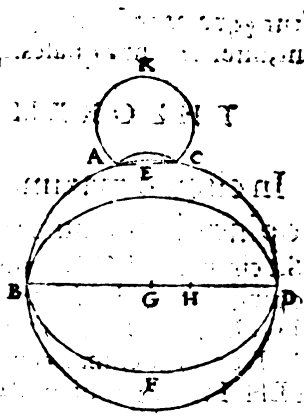
20.primi. G ipsis FC DG ęquales. ergo tota FG maior est, quàm FA AG. Sed et minor, quod fieri non potest. Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea per contactum A nō transibit. quare per ipsum transeat necesse est. Si igitur duo circuli se se extra cōtingant, recta linea ipsorum centra coniungens per contactum transibit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

Circulus circulum non contingit in pluribus pūctis, quàm vno, siue intus, siue extra contingat.

Si

Si enim fieri potest, circulus ABDC circulum EBFD contingat primum intus in pluribus punctis, quàm vno, videlicet in BD: et sumatur circuli quidē ABDC centrum G; circuli vero EBFD centrum H: ergo recta linea, quę à puncto G ad H ducitur, in puncta BD cadet. cadat vt BGHD. et quoniam G centrum est circuli ABDE, erit BG ipsi GD æqualis. maior igitur est BG, quàm HD: et BH quàm HD multo maior. Rursus quoniam H centrum est EBFD circuli, æqualis est BH ipsi HD. atqui ostensa est ipsa multo maior, quod fieri non potest. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quàm vno. Dico etiam neque extra contingere. Si enim fieri potest, circulus ACK circulum ABDC extra cōtingat in pluribus pūctis, quàm vno, videlicet in AC, et AC iungatur. Itaque quoniam in circumferentia vtrorumque circulorum ABDC ACK sumpta sunt duo quæuis puncta A C; recta linea, quę ipsa coniungit intra vtrumque ipsorum cadet. Sed intra circulum quidem ABDC cadit, extra circulum vero ACK, quod est absurdum. non igitur circulus circulū extra cōtingit in pluribus punctis, quàm vno. ostensum autem est neque intus contingere. circulus igitur circulū non contingit in pluribus punctis, quàm vno, siue intus, siue extra contingat. quod oportebat demonstrare.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIIII.

In circulo ęquales rectæ lineæ ęqualiter à centro distant, et quę ęqualiter à centro distant; inter se sunt æquales.

Sit circulus ABDC, et in ipso æquales rectæ lineæ AB CD. Dico eas à centro æqualiter distare. Sumatur enim circuli ABDC centrum, quod sit E, et ab ipso ad AB CD perpendiculares ducantur EF EG, et AE EC iungantur. Quoniam igitur recta linea quędam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam per centrum ad rectos angulos secat; et bifariam ipsam secabit. quare AF est æqualis FB, ideoq; AB ipsius AF dupla. Eadem ratione et CD dupla est CG. atque est AB ipsi CD æqualis. æqualis igitur et AF ipsi CG. Et quoniam AE est æqualis EC, erit et quadratum ex AE quadrato ex EC æquale. Sed quadrato quidem ex AE ęqualia sunt ex AF FE quadrata, rectus enim angulus est ad F: quadrato autem ex EC æqualia sunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G sit rectus. Quadrata igitur ex AF FE æqualia sunt quadratis ex CG GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG est ęquale, etenim ęqualis est AF ipsi CG. reliquum igitur, quod fit ex FE quadratum æquale est reliquo, quod ex EG; ac propterea FE ipsi EG est æqualis. in circulo autem æqualiter distare à centro rectę lineę dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ ęquales sunt. ergo AB CD à centro æqualiter distant. Sed AB CD æqualiter distant à centro, hoc est æqualis sit FE ipsi EG. Dico AB ipsi CD æqualem esse. Iisdem enim cōstructis, similiter ostendemus AB duplam esse ipsius AF, et CD duplā ipsius CG. Et quoniā æqualis est AE ipsi EC; erit et ex AE quadratū quadrato ex EC æquale. Sed quadrato quidē ex AE æqualia sunt quadrata ex EF FA: quadrato aūt ex EC æqualia quadrata ex EG GC. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC æqualia sunt: quorum quadratū ex EG, ęquale est quadrato ex EF; est enim EG ipsi EF ęqualis reliquum igitur ex AF quadratū ęquale est reliquo ex CG. ergo AF ipsi CG est æqualis; atque est AB ipsius AF dupla, et CD dupla ipsius CG. quare AB ipsi CD æqualis erit. In circulo

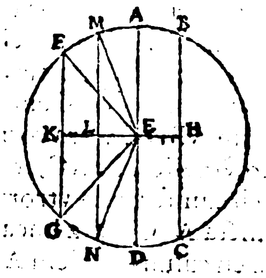
3.huius.

47.primi.

igitur ęquales rectæ lineę æqualiter à centro distant, et quę æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XV.

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore maior est.



Sit circulus ABCD, cuius diameter AD; centrum E; et propinquior quidem diametro AD sit BC; remotior vero FG. Dico AD maximam esse, et BC maiorem quàm FG. Ducantur enim à centro ad BC FG perpendiculares EH EK. Et quoniam BC propinquior est ei, quæ per centrum transit, remotior autem FG; erit EK, quàm EH maior. ponatur ipsi EH æqualis EL, et per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM in N producatur, et iungantur EM EN EF EG. Quoniam igitur EH est æqualis EL, erit et BC ipsi MN ęqualis. Rursus quoniam æqualis est AE ipsi EM, et DE ipsi EN, erit et AD ipsis ME EN æqualis. Sed ME EN maiores sunt, quàm MN. ergo et AD maior est quàm MN. at MN est æqualis BC. est igitur AD quàm BC maior. Quòd cũ duæ EM EN duabus FE EG ęquales sint, angulusq; MEN maior angulo FEG, et basis MN basi FG maior erit. ostensa autem est MN æqualis BC. ergo et BC quàm FG est maior. Maxima igitur est AD diameter, et BC maior, quàm FG. Quare in circulo maxima est diameter, aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit remotiore est maior. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

24. primi.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVI.

Quę diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: et in locum qui inter rectam lineam, et circumferentiam interijcitur altera recta linea non cadet: et semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

Sit circulus ABC circa centrum D, et diametrum AB. Dico rectam lineam, quæ à puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. non enim, sed si fieri potest, cadat intus, vt AC, et DC iungatur. Itaque quoniam æqualis est DA ipsi DC, erit et angulus DAC angulo ACD ęqualis. rectus autem est DAC. ergo et ACD est rectus; ac propterea anguli DAC ACD duobus rectis ęquales sunt. quod fieri non potest. Non igitur à puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. Similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere. extra igitur cadat necesse est. cadat vt AE. Dico in locum, qui inter rectam lineam AE, et circumferentiam CHA interiicitur, alteram rectam lineam non cadere. Si enim fieri potest, cadat vt FA, et à puncto D ad FA perpendicularis ducatur DG. Et quoniã rectus est angulus AGD, minor autem recto DAG, erit AD quàm DG maior. æqualis autem est DA ipsi DH. maior igitur est DH ipsa DG, minor maiore, quod fieri non potest. Non igitur in locum, qui inter rectam lineam, et circumferentiam interiicitur, altera recta linea cadet. Dico præterea angulum semicirculi, qui recta linea

5. primi.

32. primi.

19. primi.

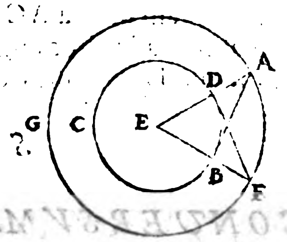
linea BA, et circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo maiorem esse; reliquum vero contentum circumferentia CHA, et recta linea AE omni angulo acuto rectilineo esse minorem. Si enim est aliquis angulus rectilineus maior quidem contento recta linea BA, et CHA circumferentia, minor autem contento CHA circumferentia, et recta linea AE, in locum, qui inter circumferentiam CHA, et rectam lineam AE interiicitur, cadet aliqua recta linea, quæ faciet angulum maiorem quidem contento recta linea BA, et CHA circumferentia, qui scilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia CHA, et AE recta linea. non cadit autem. non igitur erit angulus acutus, qui rectis lineis continetur, maior angulo contento recta linea BA, et CHA circumferentia, neque minor contento circumferentia CHA, et AE recta linea.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, rectam lineam, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere: et rectam lineam contingere circulum in vno tantum puncto, quoniã quæ occurrit in duobus pũctis intra ipsũ cadit, vt ostẽsum est.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XVII.

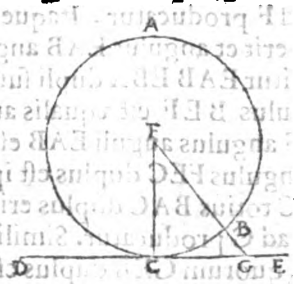
A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.



Sit datum quidem punctum A; datus autem circulus BCD. oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. Sumatur enim centrum circuli E; et iuncta AE, centro quidem E, interuallo autem EA circulus AFG describatur: et à puncto D ipsi EA ad rectos angulos ducatur DF: iunganturq; EBF AB. Dico à puncto A ductam esse AB, quæ circulum BCD contingit. Quoniam enim E centrum est circulorum BCD AFG, erit EA æqualis EF, et ED ipsi EB. Duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, et angulum communem continent, qui est ad E. ergo basis DF basi AB est æqualis; triangulumq; DEF æquale triangulo EBA, et reliqui anguli reliquis angulis. æqualis igitur est angulus EBA angulo EDF. et EDF rectus est. quare et rectus EBA: atque est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulũ contingit. ergo AB contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB, quæ circulum BCD contingit. quod facere oportebat. 4. primi. Ex antecedente.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.



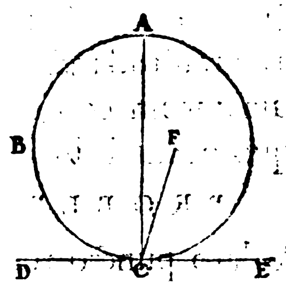
Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: et circuli ABC centrũ sumatur F, à quo ad C ducatur FC. Dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse. Si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis FG. Quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus; ac propterea FGC angulus maior angulo FCG. maiorem autem 12. primi. 19. primi.

angulum

angulum maius latus subtendit. maior igitur est FC, quàm FG. æqualis autem FC ipsi FB. ergo FB ipsa FC est maior, minor maiore, quod fieri non potest. non igitur FG est perpendicularis ad DE. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse prꝫter ipsam FC. ergo FC ad DE est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli centrum erit.



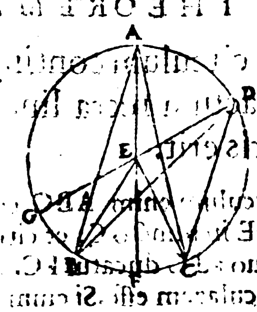
Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in C, et à puncto C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA. Dico in ipsa AC circuli centrũ esse. Non enim, sed si fieri potest, sit F centrum; et iungatur CF. Quoniam igitur circulum ABC cõtingit quędam recta linea DE, et à centro ad contactum ducta est FC: erit FC ad ipsam DE perpendicularis. rectus igitur angulus est FCE. est autẽ et ACE rectus. ergo FCE angulus est æqualis angulo ACE, minor maiori, quod fieri non potest. Non igitur F centrum est ABC circuli. Similiter ostendemus neque aliud aliquod esse, præterquàm in ipsa AC. Quare si circulum contingat quædam recta linea, à cõtactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea extra circulum ducatur; producta ad eas partes, in quibus est circulus in circuli centrum cadet.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

In circulo angulus, qui ad centrum duplus est eius, qui ad circumferentiam, quando circumferẽtiam eandem pro basi habeat.

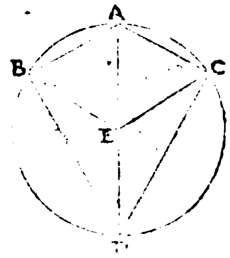


Sit circulus ABC, ad cuius centrum quidem angulus sit BEC, ad circumferentiam vero BAC, et eandẽ circumferentiam BC pro basi habeant. Dico BEC angulum anguli BAC duplum esse. Iungatur enim AE et ad F producatur. Itaque quoniam EA est æqualis EB, erit et angulus EAB angulo EBA æqualis. anguli igitur EAB EBA dupli sunt ipsius anguli EAB. Sed angulus BEF est æqualis angulis EAB EBA. ergo BEF angulus anguli EAB est duplus. Eadem ratione et angulus FEC duplus est ipsius EAC. totus igitur BEC totius BAC duplus erit. Rursus inflectatur, et sit alter angulus BDC, et iuncta DE ad G producatur. Similiter ostendemus angulum GEC anguli EDC duplum esse; quorum GEB duplus est ipsius EDB. ergo reliquus BEC reliqui BDC est duplus

5. primi.
32. primi.

plus. In circulo igitur angulus, qui ad centrum duplus est eius, qui ad circumferẽtiam, quando circumferentiã eandẽ pro basi habeant. quod oportebat demõstrare.

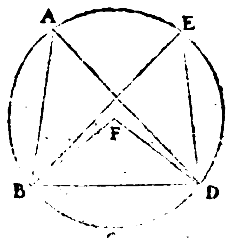
F. C. COMMENTARIVS.



Illud quoque verum est, spacium quod est ad cẽtrum duplum esse anguli, qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro basi habuerint.

Sit enim circulus ABC, cuius cẽtrum E. Dico spacium BEC quod est ad centrum duplum esse anguli BAC. iuncta enim AE, & ad D producta, iunctisq; BD DC, similiter demonstrabitur angulus BED anguli BAE duplus, et angulus CED duplus anguli CAE, totum igitur spacium BEC quod est ad centrum, anguli BAC qui ad circumferentiã duplum erit. quod oportebat demonstrare.

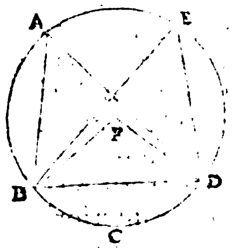
THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.



In circulo qui in eadem portione sunt anguli inter se æquales sunt.

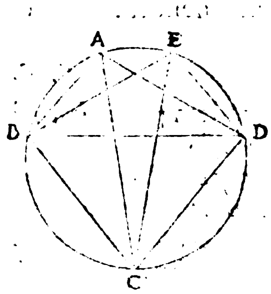
Sit circulus ABCDE, & in eadem portione BAED anguli sint BAD BED. Dico eos inter se ęquales esse. Sumatur enim circuli ABCDE centrum quod sit F: iunganturq; BF FD. & quoniam angulus quidẽ BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiã, & circumferentiam eandem pro basi habent BCD; erit BFD angulus anguli BAD duplus. Eadem ratione angulus BFD duplus est etiam anguli BED. ergo angulus BAD angulo BED ęqualis erit. In circulo igitur qui in eadẽ portione sunt anguli, inter se æquales sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.



Euclidis demonstratio congruit in maiore tantum circuli portione, nisi fortasse spacium quodcũque ad cẽtrum pro angulo accipiatur, ex ijs quę nos proxime demonstrauimus. possumus autem & hoc modo demonstrare.

Sint in portione BAED circuli ABCDE, anguli BAD, & BED. Dico eos inter se ęquales esse. Sit enim primum BAED maior portio, vt in antecedenti figura sumaturq; circuli centrum quod sit F: & BF FD iungantur. quoniam igitur angulus BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, & eandem basim habent, nempe circumferentiam BCD; erit angulus BFD anguli BAD duplus: & eadem ratione duplus quoque anguli BED. angulus igitur BAD angulo BED aequalis erit. Sit deinde BAED portio minor: & iungantur BC AC EC DC. Itaque quoniam ex ijs, quae proxime demonstrauimus, angulus BAC est aequalis angulo BEC, itemq; angulus CAD angulo CED; erit et totus angulus BAD toti BED aequalis. Ex antecedente.

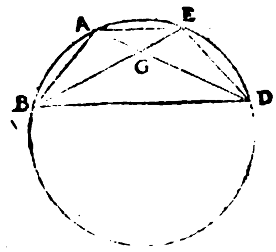


ALITER.

Iungatur AE. erit angulus ABE aequalis angulo ADE. angulus autem AGB ad verticem angulo EGD est aequalis. ergo & reliquus angulus BAD reliquo BED aequalis erit. In circulo Ex demonstratis. 15. primi.

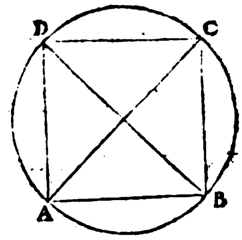
igitur

igitur, qui in eadem portione sunt anguli, inter se aequales sunt. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XX. PROPO. XXII.

Quadrilaterorum, quę in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis ęquales sunt.

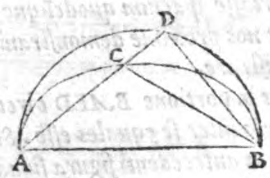


Sit circulus ABCD, et in ipso quadrilaterum ABCD. Dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Iungantur AC BD. Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales, erunt trianguli ABC tres anguli CAB ABC BCA æquales duobus rectis. Sed angulus CAB est ęqualis angulo BDC, in eadem enim sunt portione BADC, et angulus ACB æqualis ipsi ADB, quòd sint in eadem ADCB portione. totus igitur angulus ADC angulis BAC ACB est æqualis. communis apponatur ABC angulus duobus angulis, qui sunt ad A et C, et seorsum vni angulo, qui est ad D; erunt anguli ABC BAC ACB angulis ABC ADC æquales. Sed ABC BAC ACB sunt æquales duobus rectis. ergo et anguli ABC ADC duobus rectis ęquales erunt. Similiter ostendemus angulos quoque BAD DCB duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur, quę in circulis describũtur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. quod oportebat demonstrare.

32. primi.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

* In eadem recta linea duæ circulorum portiones similes et inæquales ex eadem parte non constituentur.

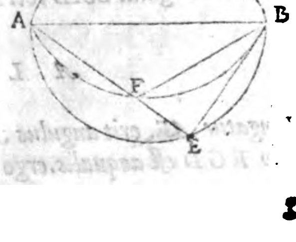


Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB duæ circulorum portiones similes, et inęquales constituantur ex eadem parte ACB ADB; ducaturq; ACD, et CB BD iungantur. Itaque quoniam portio ACB similis est portioni ADB, similes autem circulorum portiones sunt, quæ angulos suscipiunt æquales; erit ACB angulus ęqualis angulo ADB, exterior interiori, quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea, duę circulorum portiones similes, et inæquales ex eadem parte constituentur. quod demonstrare oportebat.

Diffi. 11.

F. C. COMMENTARIVS.

* Ex eadem parte. ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

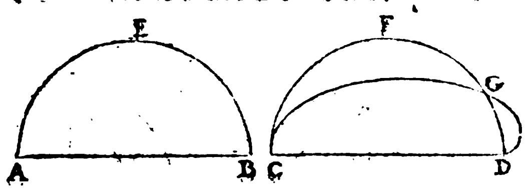


In uetusto codice hęc non leguntur, quamquam ad demonstrationem necessaria sint, tamen neutra ex parte similes, & inęquales circulorum portiones constitui possunt in eadem recta linea. Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB constituatur ex altera parte portio AEB similis, & inęqualis portioni ACB. Intelligatur autem ex eadem parte portio AFB similis & aequalis ipsi ACB; & ducta AFE, iunctisq; FB BE, similiter demonstrabitur angulus AFB aequalis angulo

gulo AEB, exterior interiori, quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea similes & inaequales circulorum portiones constituentur. quod demonstrandum fuerat.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIIII.

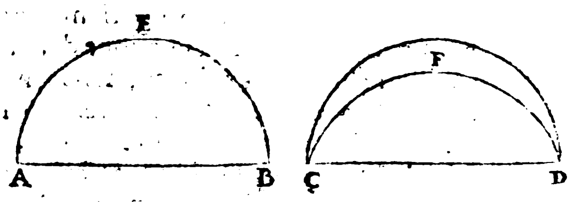
In æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones inter se æquales sunt.



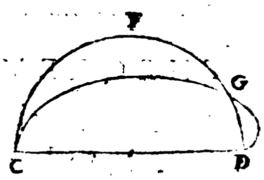
Sint enim in ęqualibus rectis lineis AB CD similes circulorum portiones AEB CFD. Dico portionem AEB portioni CFD æqualem esse. congruente enim AEB portione portioni CFD, et posito puncto quidem A in C, recta vero linea AB in CD; congruet et B punctum puncto D, propterea quòd AB ipsi CD sit æqualis. congruente autem recta linea AB rectæ CD, congruet et AEB portio portioni CFD. Si.n. AB congruet ipsi CD, portio autē AEB portioni CFD non congruet, sed permutabitur, vt CGD; circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. etenim circulus CGD circulum CFD secat in pluribus pūctis, quàm duobus, videlicet in punctis CGD, quod rursus fieri non potest. Non igitur congruente recta linea AB rectę CD, non congruet et ACB portio portioni CFD. quare congruet et ipsi æqualis erit. In ęqualibus igitur rectis lineis similes circulorū portiones inter se æquales sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Si enim AB congruet ipsi CD; portio autem AEB portioni CFD non congruet, sed permutabitur, vt CGD, et reliqua.

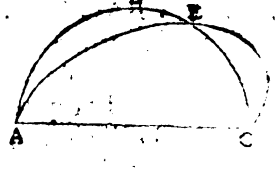


Si enim AB recta linea ipsi CD congruente, portio AEB portioni CFD non congruet, circumferentia eius vel extra ipsam AEB cadit, vel intra, vel partim extra partim intra. cadat primum extra, vel intra. ergo in eadem recta linea duae circulorum portiones similes & inaequales ex eadem parte constituentur, quod fieri non posse in antecedēte demonstratum est. cadat deinde partim extra, partim intra, vt CGD. circulus igitur circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. quod itidem fieri nō potest, ex decima huius. Euclides autem primum casum velut nimis perspicuum omisisse videtur.



Sed & cuiusque prędictorum cōuersum etiam verum est, quod ita demonstrari potest.

In eadem recta linea, vel in æqualibus rectis lineis æquales circulorum portiones similes sunt.

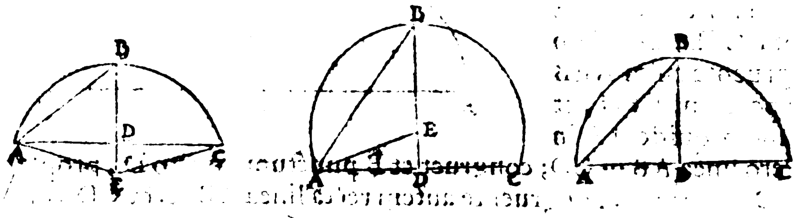


Si enim fieri potest, sint primum in eadem recta linea AC portiones ABC AEC aequales, sed tamen dissimiles: necesse erit circumferentiam AEC neque congruere circumferentiae ABC, alioqui & aequales essent & similes: neque extra, vel intra ipsam cadere. aequales enim non essent. quare relinquitur vt partim intra, partim ex-

tra cadat, quod si ita sit, circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis secabit. quod fieri non potest, Similiter demonstrabitur neque ex altera parte, neque in aequalibus rectis lineis constitui posse aequales & dissimiles circulorum portiones; nempe altera portione alteri aptata; vt superius dictum est. In eadem igitur recta linea vel in aequalibus rectis lineis aequales circulorũ portiones similes sunt. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XXV.

Circuli portione data describere circulum, cuius ea portio est.



Sit data circuli portio ABC. itaque oportet portionis ABC describere circulũ, cuius est portio. Secetur AC bifariam in D: et à puncto D ipsi AC ad rectos angulos ducatur DB; et AB iungatur. vel igitur angulus ABD maior est angulo BAD, vel minor, vel ipsi æqualis. Sit primum maior et ad rectam lineam BA, atque ad datum in ea punctum A constituatur angulus BAE æqualis angulo ABD; et DB ad E producatur, iungaturq; EC. Quoniam igitur angulus ABE est ęqualis angulo BAE, erit et BE recta linea ipsi EA æqualis. et quoniam AD est æqualis DC, communis autẽ DE, duæ AD DE duabus CD DE æquales sunt altera alteri; et angulus ADE æqualis angulo CDE, rectus. n. vterque est. ergo et basis AE basi EC est ęqualis. Sed ostensa est AE æqualis EB. quare et BE ipsi EC est æqualis, ac propterea tres rectæ lineę AE EB EC inter se ęquales sunt. centro igitur E, interuallo autem vna ipsarum AE EB EC circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, et circulus descriptus erit. Quare circuli portione data descriptus est circulus, cuius ea portio est. Sed et illud constat, portionem ABC semicirculo minorem esse; propterea quòd centrum ipsius extra cadit. Similiter et si angulus ABD sit ęqualis angulo BAD, facta AD æquali vtrique ipsarum BD DC, erunt tres rectæ lineę AD DB DC inter se æquales, atque erit D circuli descripti centrum, et portio ABC semicirculus. Si vero angulus ABD minor sit angulo BAD, constituetur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD æqualis angulus intra portionem ABC. erit centrum in ipsa DB, atque erit ABC portio semicirculo maior. Circuli igitur portione data descriptus est circulus, cuius portio est. quod facere oportebat.

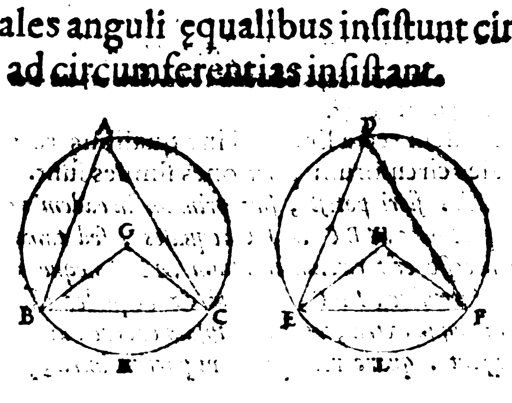
23. primi,

6. primi,

4. primi

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis æquales anguli ęqualibus insistunt circũferentijs, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.



Sint ęquales circuli ABC DEF, & in ipsis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circũferentias vero BAC EDF. Dico BKC circumferentiam circumferentię ELF æqualem esse. Iungantur enim BC EF. Et quoniã æquales sunt ABC DEF circuli, erũt et quæ ex cẽtris æquales. duæ igitur

BG GC duabus FH, HF ęquales sunt: & angulus ad G æqualis angulo ad H. Ergo et basis BC basi EF est ęqualis. Rursus quoniã æqualis est angulus ad A angulo ad D, portio BAC similis erit portioni EDF. et sunt in æqualibus rectis lineis BC EF. quę autem in æqualibus rectis lineis similes sunt circulorum portiones inter se æquales sunt. portio igitur BAC portioni EDF est æqualis. Sed et totus ABC circulus ęqualis est toti DEF. ergo et reliqua circumferentia BKC reliquę ELF æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistunt circũferentiis, siue ad centra siue ad circumferentias insistãt. quod oportebat demonstrare.

4. primi. Diffi. 11. 24. huius.

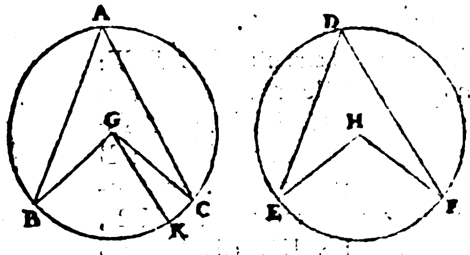
F. C. COMMENTARIVS.

Similiter demonstrabitur in eisdem circulis, & propositio magis vniuersalis erit hoc modo.

In eisdem vel æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO. XXVII.

In æqualibus circulis anguli, qui ęqualibus insistunt circumferentijs inter se æquales sunt; siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.



In æqualibus enim circulis ABC DEF, ęqualibus circumferentiis BC EF insistant anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. Dico angulum BGC angulo EHF, et angulum BAC angulo EDF æqualem esse. Si quidem igitur angulus BGC æqualis sit angulo EHF, manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF esse ęqualem. Sin minus, vnus ipsorum est maior. sit maior BGC, et constituatur ad rectam lineam BG, et ad punctum in ipsa G angulo EHF æqualis angulus BGK. æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint. Ergo circumferentia BK æqualis est circumferentię EF. Sed circumferentia EF ęqualis est ipsi BC. ergo et BK ipsi BC est ęqualis, minor maiori, quod fieri non põt. Non igitur inæqualis est angulus BGC angulo EHF. ergo est æqualis. atque est anguli quidem BGC dimidius angulus qui ad A; anguli vero EHF dimidius qui ad D. angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In ęqualibus igitur circulis anguli, qui ęqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt siue ad centra, siue ad circumferentias insistant. quod oportebat demonstrare.

23. primi. Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.

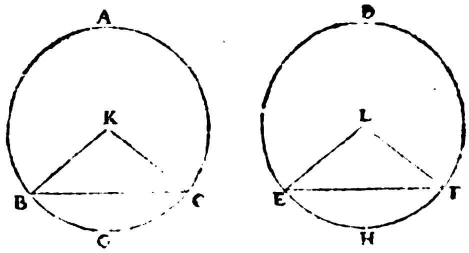
Eadem demonstratio erit, si anguli aequalibus circumferentijs eiusdem circuli insistant, vt propositio magis vniuersalis fiat, hoc pacto.

In eisdem vel ęqualibus circulis anguli, qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVIII.

In ęqualibus circulis ęquales rectę lineę circumferentias ęquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

Sint ęquales circuli ABC DEF; et in ipsis æquales rectę lineę BC EF, quæ circumferentias quidem BAC EDF maiores auferant, circumferentias vero BGC EHF mi nores. Dico circumferentiam BA C maiorem maiori circumferentiæ EDF, et minorem circumferen tiam BGC minori EHF æqualem

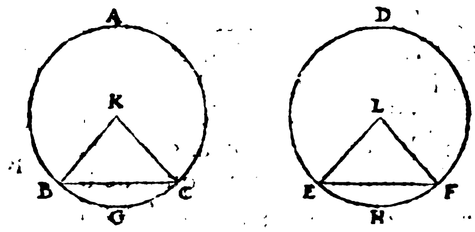


1.huius. esse. Sumātur enim centra circulorum K L, iunganturq; BK KC EL LF. Et quo-
Diffi.1. niam circuli ęquales sunt, erunt et quæ ex centris ęquales. duæ igitur BK KC sunt
8.primi. ęquales duabus EL LF: et basis BC æqualis est basi EF. Ergo angulus BKC angulo
26.huius. ELF est æqualis: æquales autem anguli ęqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint. quare cirumferentia BGC æqualis est circumferentiæ EHF. Sed et totus ABC circulus toti DEF est ęqualis. reliqua igitur circumferentia BAC reli que EDF ęqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, ęquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.

Sint æquales circuli ABC DEF: et in ipsis æquales assumantur circūferentiæ BGC EHF: et BC EF iungantur. Dico rectam lineam B
1 huius. C rectæ EF ęqualem esse. Sumantur enim centra circulorum K L, et iungantur BK KC EL LF. quo niam igitur circumferentia BGC



26.huius. est ęqualis circumferentiæ EHF, erit et angulus BKC angulo ELF ęqualis. Et quo-
Diffi.1. niam circuli ABC DEF sunt æquales, et quæ ex centris ęquales erunt. duę igitur B
4.primi. K KC sunt æquales duabus EL LF; et ęquales angulos continent. quare basis BC basi EF est ęqualis. In ęqualibus igitur circulis æquales circumferentias ęquales rectæ lineę subtendunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Non aliter etiam in duabus antecedentibus cum demonstrationes eędem sint, propositiones magis vniuersales fieri poterunt, in hunc modum.

In eisdem vel æqualibus circulis ęquales rectæ lineæ circumferentias ęquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem verò minori.

In eisdem vel ęqualibus circulis æquales circumferentias æquales rectę lineę subtendunt.

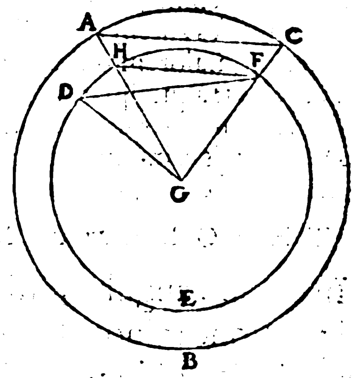
Sed & harum quoddammodo conuersas, atque alias his non dissimiles demonstrare hoc loco non inutile arbitrati sumus.

PROPOSITIO I.

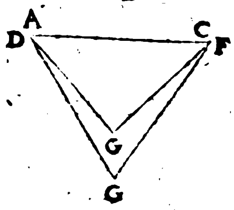
Si æquales rectæ lineæ æquales, et similes circumferentias auferant, circuli ęqua les erunt, quorum illæ sunt circumferentiæ.

Si enim

Si enim fieri potest, sint circuli inęquales, & in maiori circulo ABC, circa idem centrum G aequalis minori describatur DEF: & iũgãtur AG GC DG GF, ita vt punctum F cadat in recta linea GC: & AG secet circulum DEF in H. Quoniam igitur rectae lineae AC DF aequales sunt, erit angulus AGC minor angulo DGF; quod deinceps demonstrabitur. quare circumferentia HF minor erit circumferentia DF. Sed circumferentia HF similis est circumferentiae AC, ex 12 diffinitione huius. in ipsis enim idem angulus AGC consistit. ergo circumferentia DF circumferentiae AC non est similis. atqui similis ponebatur. quod est absurdum. non igitur circuli in aequales sunt. ergo aequales esse necessarium est. At vero angulum AGC minorem esse angulo DGF, ita demonstrabimus.



Intelligatur triangulum AGC seorsum, & trianguli DGF punctum D in A statuatur; & punctum F in C. sunt enim AC DF inter se aequales. cadet triangulum DGF intra triangulum AGC. quare ex 21 primi libri angulus AGC minor est angulo DGF. quod demonstrare oportebat.



PROPOSITIO II.

In circulis inęqualibus ęquales rectę lineę dissimiles circumferentias auferunt.

Hoc autem ex ijs, quae nos proxime demonstrauimus perspicue apparet. aequales enim rectae lineae AC DF dissimiles auferunt circumferentias.

PROPOSITIO III.

In circulis inæqualibus similes circumferentias inæquales rectæ lineæ subtẽdũt.

Et hoc similiter apparet ex ante demonstratis. repetatur enim eadem figura, & iungatur HF. Itaque quoniam triangulum DGF duo latera DG GF aequalia habet duobus lateribus HG GF trianguli HGF, & angulum DGF maiorem angulo HGF, erit basis DF basi HF maior. Sed recta linea AC est aequalis ipsi DF. ergo AC HF inęquales sunt, & similes circumferentias subtendũt. quod oportebat demonstrare.

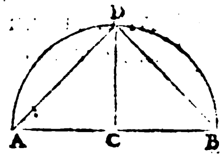
PROPOSITIO IIII.

Similes et inęquales circumferentias inæquales rectę lineę subtendunt.

Si enim rectae lineae aequales sint, & circuli item aequales, erunt circumferentiae, quas subtendunt, & aequales & similes. Si vero circuli sint inęquales, circumferentiae dissimiles erunt: quod non ponitur. Similes igitur & inęquales circumferentias, inęquales rectae lineae subtendunt. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO XV.

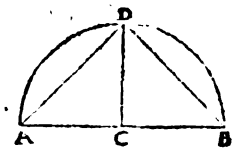
Datam circumferentiam bifariam secare.



Sit data circumferentia ADB. oportet ADB circumferentiam bifariam secare. Iungatur AB, & in C bifariam secetur: à puncto autem C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD, & iungantur AD DB. Quoniam igitur AC est æqualis CB, communis autem CD, duæ AC CD duabus 10. primi.

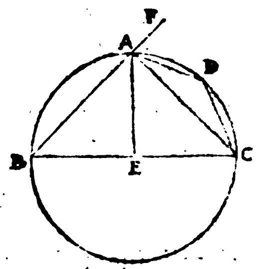
BC,

B C CD æquales sunt: et angulus ACD æqualis angulo
4.primi. BCD, rectus enim vterque est: ergo basis AD basi DB est
28.huius. ęqualis. ęquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori. et est vtraque ipsarum AD DB circumferentiarum semicirculo minor. quare circumferentia AD circumferentiæ D B ęqualis erit. data igitur circumferentia bifariam secta est. quod facere oportebat.



THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXI.

In circulo angulus, qui in semicirculo rectus est, qui vero in maiori portione minor est recto, & qui in minori maior recto; & insuper maioris quidem portionis angulus recto maior est, minoris vero portionis angulus recto minor.



Sit circulus A B C D cuius diameter B C, centrum autem E; et iungantur BA AC AD DC. Dico angulum quidem, qui est in semicirculo BAC rectum esse; qui vero in portione ABC maiore semicirculo, videlicet angulum ABC minorem esse recto, et qui in portione ADC minore semicirculo, hoc est angulū ADC recto maiorem. iungatur A E, et B A ad F producatur. Itaque quoniam BE est æqualis EA, erit et angulus EAB, angulo EBA æqualis. Rursus quoniam AE
5.primi. est ęqualis EC, et angulus ACE angulo CAE ęqualis erit. totus igitur angulus BAC est æqualis duobus ABC ACB angulis. est autem et
32.primi. angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC ACB æqualis. angulus igitur
13.primi. BAC est ęqualis angulo FAC. ac propterea vterque ipsorum rectus. Quare in semi
17.primi. circulo BAC angulus BAC rectus est. et quoniam trianguli ABC duo anguli ABC BAC duobus rectis sunt minores, rectus autem BAC, erit ABC angulus recto minor, atque est in portione ABC maiore semicirculo. Quod cum in circulo quadri
22.huius. laterum sit ABCD, quadrilaterorum vero, qui in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis sint ęquales: erunt ABC ADC anguli æquales duobus rectis. et angulus ABC minor est recto. reliquus igitur A D C recto maior erit, atque est in portione ADC minore semicirculo. Dico prẹterea maioris portionis angulum, qui continetur ABC circumferentia et recta linea A C recto maiorem esse; angulū vero minoris portionis contentum circumferentia A D C, et recta linea A C recto minorem. quod quidem perspicue apparet. Quoniam enim angulus, qui rectis lineis BA AC continetur rectus est, erit et contentus A BC circumferentia, et recta linea AC recto maior. Rursus quoniam angulus contentus rectis lineis CA AF rectus est, erit qui continetur recta linea C A, et A D C circumferentia minor recto. In circulo igitur angulus qui in semicirculo rectus est, qui vero in maiori portione minor est recto, et qui in minori maior recto. et insuper maioris quidem portionis angulus recto maior est: minoris vero recto minor. quod demonstrare oportebat.

ALITER demōstrabitur angulū BAC rectū esse. Quoniā enim angulus AEC duplus est anguli BAE, etenim duobus interioribus, et oppositis est æqualis: est autem et AEB duplus ipsius EAC: anguli AEB AEC anguli BAC dupli erunt. Sed et AEB AEC anguli duobus rectis sunt æquales. ergo angulus BAC rectus est. quod demonstrare oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si triāguli vnus angulus sit ęqualis duobus

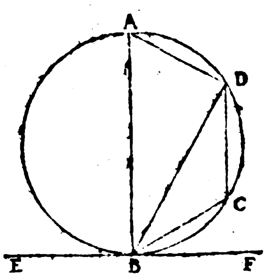
bus, eum rectum esse; propterea quòd & qui deinceps est, ijsdem est ęqualis. quando autem anguli deinceps sunt ęquales, necessario recti sunt.

SCHOLIVM.

Si semicirculi omnes ob similitudinem aequales angulos suscipiunt, nempe rectos, maiores autem portiones suscipiunt rectis minores; perspicuum est cum similes sint aequales suscipere angulos. quo enim maiores sunt semicirculis, eo rectum angulū diminuunt: similiter et minores semicirculis rectum proportione augent. Ergo similes portiones aequales suscipiant angulos necesse est. portionum autem anguli, quòd heterogenei sint, respectu rectilineorum, sunt enim mixti, cum illis non comparantur determinata magnitudine, nisi maioritate tantum, vt sic dicam, & minoritate. Quamobrem contingit maiore portione ad minorem procedente per medium circulum, angulum ipsius maiorem simpliciter recto ad minorem procedere, & non per rectum. rectus enim magnitudo determinata est. Videbitur autem hoc admirabile esse, nam quae in contraria transmutantur, per media transire consueuerunt. Sed et in alijs inuenire licet hoc modo opposita absque medio. etenim quae circulum comprehendit linea, cum conuexa sit, et caua, recta non est.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXII.

Si circulum contingat quædam recta lineā, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt ijs, qui in alternis circuli portionibus consistunt.



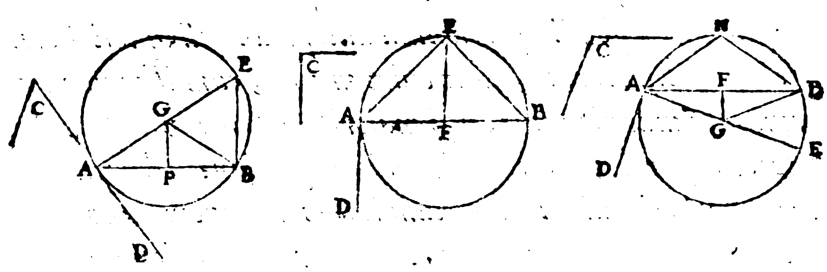
Circulum enim ABCD contingat quędam recta linea EF in B, et à puncto B ad circulum ABCD ducatur recta linea BD ipsum vtcumque secans. Dico angulos, quos BD, cum EF contingente facit, ęquales esse iis, qui in alternis circuli portionibus consistunt, hoc est angulum FBD esse æqualem angulo, qui cōstituitur in DAB portione, videlicet ipsi DAB; angulum vero EBD ęqualem angulo DCB, qui in portione DCB constituitur. Ducatur enim à puncto B ipsi EF ad rectos angulos BA: et in circumferentia BD sumatur quod vis punctum C: iunganturq; AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quędam recta linea EF in puncto B: et à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA: erit in ipsa BA centrum ABCD circuli, quare BA eiusdē circuli diameter est, et angulus ADB in semicirculo est rectus. reliqui igitur anguli BAD ABD vni recto ęquales sunt. Sed et ABF est rectus. ergo angulus ABF æqualis est angulis BAD ABD. communis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei, qui in alterna circuli portione consistit, videlicet angulo BAD est ęqualis. Et quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, et anguli eius oppositi æquales

11.primi.
19.huius.
Ex antecedente.
32.primi.

22.huius. ti æquales sunt duobus rectis; erunt DBF DBE anguli angulis BAD BCD æquales. quorum BAD ostensus est æqualis ipsi DBF. ergo reliquus DBE ei, qui in alterna circuli portione DCB constituitur, videlicet ipsi DCB æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli, quos facit ad contingentem, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus consistunt. quod oportebat demonstrare.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXXIII.

In data recta linea describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.



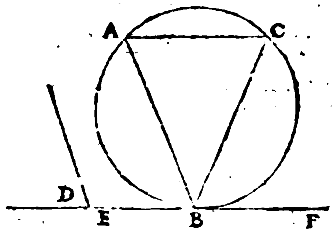
Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus, qui ad C. itaque oportet in data recta linea AB describere portionẽ circuli, quæ suscipiat angulum æqualem angulo, qui est ad C. vel igitur angulus ad C acutus est, vel rectus, vel obtusus. Sit primum acutus, vt in prima figura, et ad rectam lineam AB, et ad punctum in ea datum A, constituatur angulus BAD angulo qui est ad C æqualis. acutus igitur angulus est BAD, et à puncto A ipsi AD ad rectos angulos ducatur AE; secetur autẽ AB bifariam in F; atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipsi AB: et GB iungatur. Quoniam igitur AF est æqualis FB, communis autem FG, duę AF FG duabus BF FG æquales sunt: et angulus AFG ęqualis angulo GFB. ergo basis AG basi GB est æqualis. Itaque centro G, interuallo autem AG circulus descriptus transibit etiam per B. describatur et sit ABE, iungaturq; EB. Quoniam igitur ab extremitatę diametri AE, et à puncto A ipsi AE ad rectos angulos ducta est AD; ipsa AD circulum continget. et quoniam circulum ABE contingit quædam recta linea AD, et à contactu, qui est ad A in circulum ABE ducta est recta linea AB: erit angulus DAB ęqualis angulo, qui in alterna circuli portione constituitur, videlicet ipsi AEB. Sed angulus DAB angulo, qui ad C est æqualis. ergo et angulus ad C angulo AEB æqualis erit. In data igitur recta linea AB portio circuli descripta est AEB, suscipiens angulum AEB dato angulo, qui ad C æqualem. Sit deinde angulus, qui ad C rectus. et oporteat rursus in recta linea AB describere circuli portionem, quę susci piat angulum æqualem recto angulo, qui est ad C. constituatur enim rursus angulo recto, qui ad C ęqualis angulus BAD, vt in secũda figura, seceturq; AB bifariã in F, et centro F, interuallo autem alterutra ipsarum AF FB circulus describatur AEB. ergo AD recta linea circulum ABE contingit, propterea quòd rectus est qui ad A angulus, et angulus BAD æqualis angulo, qui est in portione AEB: rectus enim et ipse est, in semicirculo consistẽs. sed BAD æqualis est ei qui ad C. Ergo et qui in portione AEB ei, qui ad C est æqualis. descripta igitur est rursus in AB recta linea, portio circuli AEB, suscipiens angulum angulo recto, qui ad C ęqualem. Denique sit angulus ad C obtusus, et ad rectam lineam AB, et ad punctum A constituatur ipsi æqualis angulus BAD, vt fit in tertia figura, et ipsi AD rectę lineae ad rectos angulos ducatur AE: seceturq; rursus AB bifariam in F. ipsi vero AB ducatur ad rectos angulos FG, et GB iungatur. Et quoniam AF est ęqualis FB, communis autem FG. duę AF FG duabus BF FG ęquales sunt, et angulus AFG angulo BFG ęqualis.

Margin notes: 23.primi. 11.primi. 10.primi. 4.primi. Corol.16.huius. Ex antecedente. 23.primi. Corol.16.huius.

lis.basis igitur AG est æqualis basi GB. Quare centro G, interuallo autem AG circulus descriptus etiam per B transibit. transeat vt AEB. Et quoniam diametro AE ab extremitate ad rectos angulos ducta est AD, ipsa AD circulum AEB continget: et à contactu, qui ad A ducta est AB: quare angulus BAD ei, qui in alterna circuli portione AHB cõstituitur est ęqualis. Sed BAD angulus æqualis est angulo, qui ad C. angulus igitur, qui in portione AHB angulo, qui ad C æqualis erit. Ergo in data recta linea AB descripta est AHB circuli portio, suscipiens angulum æqualẽ ei, qui est ad C. quod facere oportebat. 4.primi. Corol.16.huius.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXXIIII.

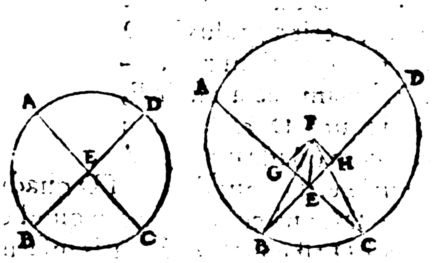
A dato circulo portionem abscindere, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.



Sit datus circulus ABC: datus autem angulus rectilineus, qui ad D. oportet à circulo ABC portionem abscindere, quę suscipiat angulum angulo qui ad D æqualem. Ducatur recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens: et ad rectam lineam BF, et ad punctum in ea B cõstituatur angulus FBC angulo qui est ad D æqualis. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B puncto, et à cõtactu B ducta est BC, erit angulus FBC ęqualis ei, qui in alterna circuli portione cõstituitur. Sed FBC angulus angulo qui ad D est æqualis. ergo et angulus, qui in portione BAC angulo qui ad D æqualis erit. A dato igitur circulo ABC abscissa est portio quædam BAC suscipiens angulum dato angulo rectilineo, qui est ad D, æqualem. quod facere oportebat. 17.huius. 23.primi.

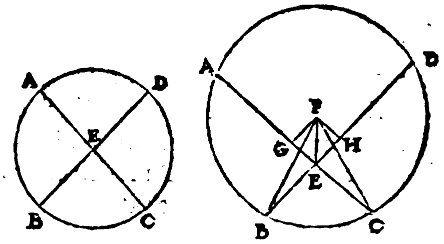
THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent, rectangulum portionibus vnius contentum ęquale est ei, quod alterius portionibus continetur.



In circulo enim ABCD duæ rectę lineæ AC BD se se mutuo in puncto E secent. Dico rectangulum contentum AE EC ęquale esse ei, quod DE EB continetur. Si igitur AC BD per centrum transeant, ita vt E sit centrum ABCD circuli; manifestum est æqualibus existentibus AE EC DE EB, et rectangulum contentum AE EC ęquale esse ei, quod DE EB continetur. Itaque AC DB non transeant per centrum; et sumatur centrum circuli ABCD quod sit F: et ab F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH: iunganturq; FB FC FE. Quoniam igitur recta quędam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit. quare AG ipsi GC est æqualis. Et quoniam recta linea AC secta est in partes æquales in puncto G, et in partes inęquales in E, erit rectangulum AE EC contentum vnà cum ipsius EG quadrato, ęquale quadrato ex GC. commune addatur ex GF quadratum. ergo rectãgulum AEC vnà cum iis, quæ ex EG GF quadratis æquale est quadratis ex CG GF. Sed quadratis quidem ex EG 3.huius. 5.secundi.

47.primi. GF æquale est quadratũ ex FE: quadratis vero ex CG GF æquale quod ex FC quadratum. rectãngulum igitur AEC vnà cũ quadrato ex FE æquale est quadrato ex FC. est autem CF æqualis F B. Ergo rectangulum AEC vnà cum quadrato ex EF æquale est ei, quod ex FB quadrato. Eadẽ ratione et rectangulum DEB vnà cũ quadrato ex FE æquale est quadrato

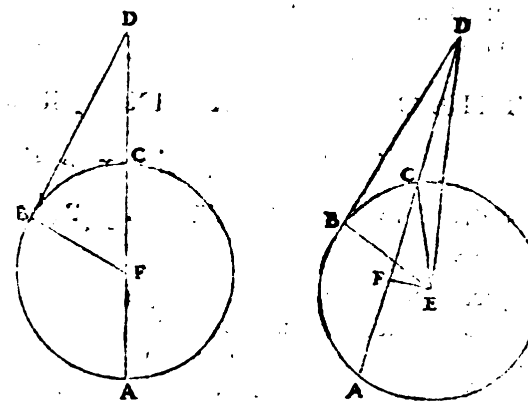


ex FB. ostensum autẽ est et rectãgulum AEC vnà cum quadrato ex FE æquale ei, quod ex FB quadrato. ergo rectãgulum AEC vnà cum quadrato ex FE æquale est rectangulo DEB vnà cum quadrato ex FE. commune auferatur quod ex FE quadratum. reliquum igitur rectãgulum AEC reliquo DEB rectãgulo æquale erit. Quare si in circulo duę rectę lineę se se mutuo secẽt, rectangulũ portionibus vnius cõtentũ ęquale est ei, quod alterius portionibus continetur, id quod demõstrare oportebat.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO. XXXVI.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, et ab eo in circulum cadant duæ rectę lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero contingat; rectangulum, quod tota secante, et exterius assumpta inter punctum, et curuam circumferentiam continetur, æquale erit ei, quod à contingente fit quadrato.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, et ab eo ad dictum circulum cadãt duæ rectę lineæ DCA DB: et DCA quidem circulum ABC secet; DB vero contingat. Dico rectãgulum ADC quadrato, quod fit ex DB æquale esse. Vel igitur DCA per centrum transit, vel non. transeat primum per centrum circuli ABC, quod sit F: et
18.huius. FB iungatur. erit angulus FBD rectus. Itaque quoniam recta linea AC bifariam secta est in F, et ipsi adiicitur CD; rectangulũ ADC vnà cum quadrato, quod



6.secundi. ex FC æquale erit ei, quod fit ex FD quadrato. æqualis autem est CF ipsi FB. ergo rectangulũ ADC vnà cum quadrato quod ex FB æquale est quadrato ex FD. Sed quadrarum ex FD est ęquale quadratis ipsarum FB BD; rectus enim angulus est FBD. rectãgulum igitur ADC vnà cum quadrato ex FB ęquale est ipsarum FB BD quadratis. commune auferatur quadratũ, quod ex FB. ergo reliquum ADC rectangulum quadrato quod fit à contingente DB ęquale erit. Sed DCA non transeat per centrum ABC circuli: sumaturq; centrũ E, et ab ipso E ad AC perpendicularis agatur EF: et iungantur EB EC ED. rectus igitur est EFD angulus. Et quoniam recta linea quædam EF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductam per
3.huius. centrum ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit. quare AF ipsi FC est æqualis. Rursus quoniam recta linea AC bifariam secta est in F, atque ipsi adiicitur
6.secundi. CD, erit rectangulum ADC vnà cum quadrato ex FC æquale quadrato, quod ex FD. commune apponatur quod ex FE quadratum. rectangulum igitur ADC vnà

cum

cum quadratis ex CF FE est ęquale quadratis ex DF FE. sed quadratis quidem ex DF FE æquale est, quod ex DE quadrato; etenim rectus est angulus EFD: quadratis vero ex CF FE æquale est quadratum ex CE. ergo rectangulum ADC vnà cũ quadrato, quod ex CE est ęquale quadrato ex ED. æqualis autem est CE ipsi EB. rectangulum igitur ADC vnà cum quadrato ex EB ęquale est ei, quod ex ED quadrato. sed quadrato ex ED æqualia sunt quadrata ex EB BD; si quidem rectus est angulus EBD. ergo rectangulum ADC vnà cũ quadrato ex EB æquale est eis, quæ ex EB BD quadratis. commune auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur ADC rectangulum quadrato, quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, et quę deinceps sunt, quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

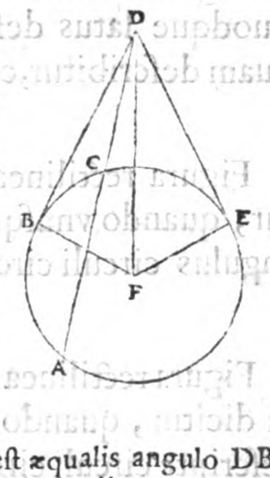
Ex proxime demonstratis duo corollaria sequuntur, vt et adnotauit Campanus. nempe hęc.

Si à pũcto extra circulum sumpto ducatur in circulum quotcumque rectę lineę, ipsum secantes; rectangula quæ totis, et earum portionibus extrinsecis cõtinentur, inter se æqualia sunt; quod singula quadrato lineæ contingentis sint æqualia.

A puncto extra circulum sumpto ductę duæ rectæ lineæ circulum contingentes inter se æquales sunt. etenim vtriusque ipsarum quadrata sunt ęqualia rectangulo, quod recta linea ab eodem puncto ducta, quę circulum secet, et eius portione extrinseca continetur. ergo et ipsæ lineę æquales sint necesse est. neque vero plures quàm duæ esse possunt, quod ex demonstratis in octauo huius perspicue apparet.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XXXVII.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duę rectę lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero incidat; sit autem quod tota secante, et exterius assumpta inter punctum, et curuam circumferentiam continetur, ęquale ei, quod ab incidente fit quadrato: incidens linea circulum continget.



Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA DB; et DCA quidem circulum secet, DB vero incidat, sitq; rectangulum ADC ęquale quadrato, quod fit ex DB. Dico ipsam DB circulum ABC contingere. Ducatur enim recta linea DE contingens circulum ABC, et sumatur circuli ABC centrum quod sit F, iunganturq; FE FB FD. ergo angulus FED rectus est. Et quoniam DE circulum ABC contingit, secat autem DCA, rectangulum ADC æquale erit quadrato quod ex DE. sed rectangulum ADC ponitur æquale quadrato quod ex DB. quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit, ac propterea linea DE ipsi DB æqualis. est autem et FE ęqualis FB. duę igitur DE EF duabus DB BF æquales sunt; et basis ipsarum communis FD. angulus igitur DEF est æqualis angulo DBF. rectus autem DEF. ergo et DBF est rectus; atque est FB producta diameter. quę vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur circulum contingit. ergo DB circulum ABC contingat necesse est. Similiter demonstrabitur et si centrum sit in ipsa AC. Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, et reliqua, quod demonstrare oportebat. 18. huius. 8. primi.

TERTII LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER QVARTVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.

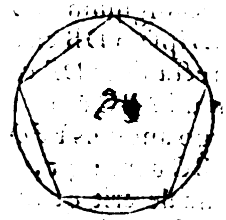
FIGVRA rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quãdo vnusquisque figuræ descriptæ angulus vnũquodque latus eius, in qua describitur, contingit.

II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur quando vnumquodque latus descriptę vnumquemque angulum eius, circa quam describitur, contingit.

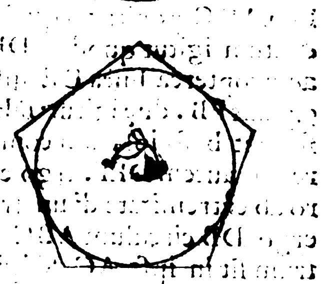
III.

Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando vnusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.



IIII.

Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando vnumquodque latus descriptę circuli circumferentiã cõtingit.



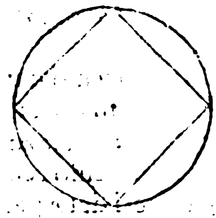
V.

Circulus similiter in figura rectilinea describi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquodque latus eius, in qua describitur, contingit.

Circulus

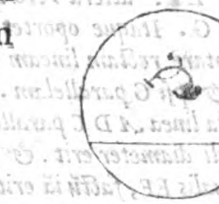
VI.

Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquemque angulum eius, circa quam describitur, contingit.



VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando eius extrema ad circuli circumferentiam se applicant.

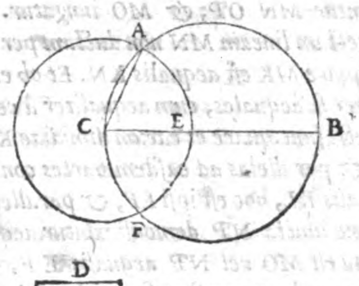


PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

In dato circulo datæ rectę lineæ, quæ diametro eius maior nō sit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus A B C, data autem recta linea non maior circuli diametro D. oportet in circulo ABC rectę lineę D ęqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC diameter BC. Si quidem igitur BC sit ęqualis ipsi D, factum iam erit, quod proponebatur. etenim in circulo A B C aptata est A C rectæ lineæ D ęqualis. Sin minus, maior est BC quàm D, ponaturq; ipsi D æqualis CE: et centro quidem C interuallo autem CE circulus describatur A E F: et CA iungatur. Itaque quoniam punctum C centrum est AEF circuli; erit CA ipsi CE æqualis. Sed D est æqualis CE. ergo et D ipsi AC æqualis erit. In dato igitur circulo ABC datæ rectę lineæ D, non maiori circuli diametro, æqualis aptata est AC. quod facere oportebat.



SCHOLIVM.

Cum varia sit circumscriptionum, et inscriptionum contemplatio, Euclides non multum admodum progressus est. nam perueniens ad hexagonum, & postremo quindecagoni angulos tradens, qui ad astrorum sciētiam magis pertinent, finem dicendi fecit. Primum autem theorema lemma quoddam est, pentagoni constitutioni inseruiens: & quacumque in hoc ordinantur, in illa præordinari oportebat. Sed quoniam simpliciorem habet constructionem, quàm trianguli constitutio, iure merito ante alia theoremata positum est. Sciendum autem si quidem data recta linea diametro sit æqualis, vno tantum modo, vel etiam absque vlla experientia fieri problema; Si vero minor, duobus modis. ab eodem namque puncto vt C ad AF ducta rectæ lineæ inter se æquales sunt.

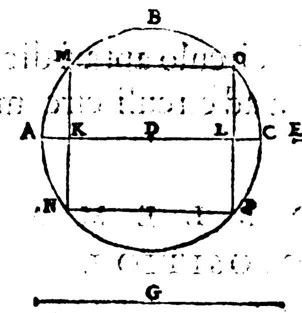
Problema

Problema hoc est ex eorum numero, quae determinata appellantur. posset enim & hoc modo explicari.

In dato circulo datæ rectę lineæ ęqualem rectam lineam aptare. oportet autem datam rectam lineam diametro circuli non esse maiorem.

Licet etiam problema aliud absoluere huiusmodi.

In dato circulo rectam lineam rectę lineæ datę, quę diametro maior non sit, ęqualem, et alteri datæ parallelam aptare.

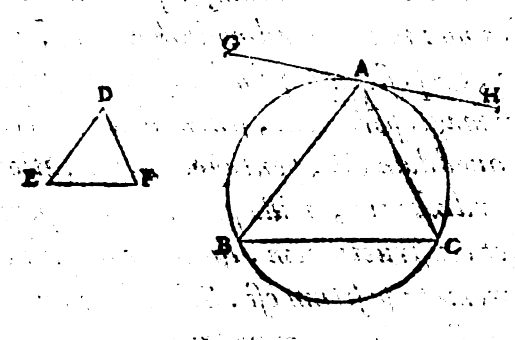


Sit datus circulus ABC, cuius centrum D, & recta linea non maior diametro circuli EF: altera vero recta linea sit, in qua G. Itaque oportet in circulo ABC aptare rectam lineam aequalem ipsi EF, & ipsi G parallelam. Ducatur per D recta linea ADC parallela ipsi G, 31.primi. *quae circuli diameter erit. & si quidem AC sit ęqualis EF, factū iā erit quod proponebatur: si vero AC sit maior, quàm EF, secetur EF bifariam in H: & ipsi HE aequalis abscindatur à semidiametro circuli DA, quae sit DK.* 11.primi. *ipsi vero HF aequalis fiat DL; perq; pūcta KL ipsi AC ad rectos angulos ducantur MN OP; & MO iungatur.* 3.tertij. *Quoniam igitur recta linea quędam AC per centrum ducta rectam lineam MN non ductam per centrum ad rectos angulos secat; & bifariam ipsam secabit.* 14.tertij. 28.primi. *quare MK est aequalis KN. Et ob eandem caussam OL est aequalis LP. sunt autem MN OP inter se aequales, cum aequaliter à centro distēt: & sunt parallelae; anguli enim MKL OLK recti sunt.* 33.primi. *quare et earum dimidiae KM LO & aequales erunt, & parallelae. At quae aequales, & parallelas ad easdem partes coniungunt, & ipsae aequales, et parallelae sunt. ergo MO est aequalis KL, hoc est ipsi EF, & parallela ipsi G;* 30 primi. *sunt enim vtręque ipsi KL parallelae. Eadem ratione iuncta NP demonstrabitur aequalis eidē EF, & parallela ipsi G. In circulo igitur ABC aptata est MO vel NP aequalis EF, & ipsi G parallela. quod facere oportebat.*

Ex quibus constat si quidem AC sit aequalis rectæ lineæ datę, vno dumtaxat modo problema absolui; si vero sit maior, duobus modis, vt in antecedēti dictum est.

PROBLEMA II. PROPOSITIO. II.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.



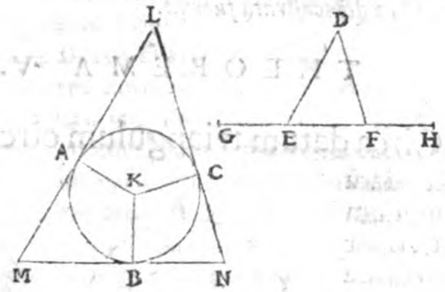
Sit datus circulus ABC, datum autem triangulū DEF. oportet in ABC circulo describere triangulū triangulo DEF ęquiangulum. 17.tertij. Ducatur recta linea GAH contingens circulum ABC in puncto A: et ad rectam lineam AH, et ad punctum in ea A angulo DEF ęqualis angulus constituatur HAC. 23.primi. rursus ad rectam lineam AG, et ad punctum in ipsa A angulo DFE ęqualis cōstituatur angulus GAB; et BC iungatur. Quoniā igitur circulū ABC contingit quædā recta HAC; à contactu aūt in circulū ducta est AC; erit HAC angulus ęqualis ei, qui in alterna circuli portione cōsistit, videlicet ipsi ABC. 32 primi. Sed HAC angulus ęqualis est angulo DEF. ergo et angulus ABC angulo

angulo DEF est æqualis. Eadem ratione et angulus ACB est æqualis angulo DFE. reliquus igitur B A C angulus reliquo E D F æqualis erit. Ergo triangulum A B C triangulo DEF est ęquiangulum. et descriptum est in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulũ triangulũ descriptũ est. quod facere oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO III.

Circa datum circulum triangulo dato ęquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus A B C: datum autem triangulum DEF. oportet circa circulum ABC describere triãgulum triãgulo D E F æquiangulum. protrahatur ex vtraque parte EF ad puncta H G: et sumatur circuli ABC centrum K: et recta linea KB vt cumque ducatur: constituaturq; ad rectam lineam KB, et ad punctum in ea K angulo quidem DEG æqualis angulus BKA; angulo aũt DFH æqualis angulus BKC. et per ABC puncta ducantur rectæ lineę L A M M B N N C L circulum A B C, contingentes. Quoniam igitur circulũ A B C contingunt LM MN NL, in punctis A B C, à centro autem K ad ABC puncta ducuntur KA KB K C; erunt anguli ad puncta ABC recti. Et quoniam quadrilateri A M B K anguli quattuor quattuor rectis æquales sunt; etenim in duo triangula diuiditur; quorum anguli KAM KBM sunt recti; erunt reliqui AKB AMB duobus rectis æquales. Sunt autem et DEG DEF ęquales duobus rectis. anguli igitur AKB AMB angulis DEG DEF æquales sunt; quorum AKB ipsi DEG est æqualis. ergo reliquus AMB reliquo DEF ęqualis erit. Similiter demonstrabitur angulus L N B ipsi DFE æqualis. ergo et reliquus MLN est æqualis reliquo E D F. æquiangulum igitur est L M N triangulum triangulo D E F, et descriptum est circa circulum A B C. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum descriptum est. quod facere oportebat.



23. primi.
17. tertij.
18. tertij.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO IIII.

In dato triangulo circulum describere.

Sit datum triangulum ABC. oportet in triangulo ABC circulum describere. secentur anguli ABC BCA bifariam rectis lineis BD CD, quæ conueniant inter se in D puncto; et à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares ducantur DE DF DG. Et quoniam angulus A B D est æqualis angulo CBD: est autem et rectus BED recto BFD ęqualis: erunt duo triangula EBD D B F, duos angulos duobus angulis æquales habentia, et vnum latus vni lateri ęquale, et vtrique commune B D, quod scilicet vni æqualium angulorum subtẽditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: atque erit DE ęqualis D F. et eadem ratione D G ęqualis D F. ergo et D E ipsi D G est ęqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter se æquales sunt; quare centro D interuallo autem vna ipsarum DE DF DG circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; et rectas lineas AB BC CA cõtinget; propterea quòd recti sunt ad EFG anguli. si enim ipsas secet, quæ ab extremitate diametri

9. primi.
12. primi.
26. primi.

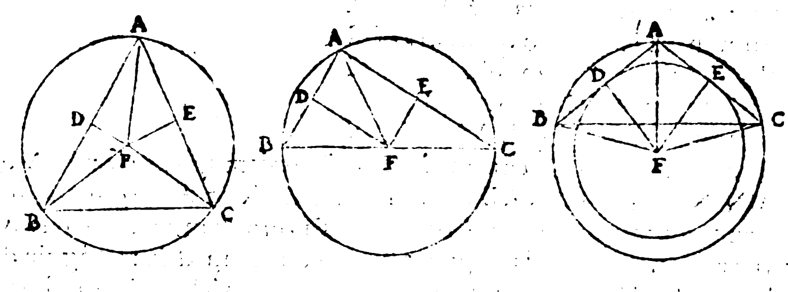
16.tertij. metri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulũ cadet. quòd est absurdũ. nõ igitur cẽtro D, interuallo aũt vna ipsarum DE DF DG circulus descriptus secabit rectas lineas AB BC CA. quare ipsas cõtinget; atque erit circulus descriptus in triãgulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG descriptus est. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Quęsitum est à nonnullis, quomodo in triangulo quadratum describi possit, quamquam fortasse improprie in eo dicatur describi. Fuerunt qui in triangulo aequilatero tantum peoblema absoluerunt. Nos autem vniuerse in omnibus absoluere aggrediemur, postea quàm nonnulla in quinto, ac sexto libro demonstrata fuerint.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum circulum describere.



Sit datũ triangulum ABC. oportet circa datum triangulũ ABC circulũ describere. secentur AB AC bifariã

10.primi.

11.primi. in D E punctis: et à punctis D E ipsis AB AC ad rectos angulos ducantur DF EF; quæ quidem vel intra triangulum ABC conuenient, vel in recta linea BC, vel extra ipsam. Conueniant primum intra triangulum in puncto F: et BF FC FA iungantur. Quoniam igitur AD est æqualis DB, communis autem, et ad rectos angu-

4.primi. los DF; erit basis AF basi FB ęqualis. Similiter ostendetur et CF ęqualis FA. ergo et BF est æqualis FC. tres igitur FA FB FC inter se æquales sunt. quare centro F, interuallo autem vna ipsarum FA FB FC circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atque erit circulus descriptus circa triangulum ABC. et describatur vt ABC. Sed DF EF conueniant in recta linea BC, in puncto F, vt habet in secunda figura, & AF iungatur. Similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. Postremo DF EF conueniant extra triangulum ABC rursus in F puncto, vt in tertia figura: et iungantur AF FB FC. Et quoniam rursus AD est æqualis DB, communis autem, et ad rectos angulos DF; basis AF basi FB æqualis erit. Similiter demonstrabimus et CF ipsi FA ęqualem esse. quare et BF est æqualis FC. Rursus igitur centro F, interuallo autem vna ipsarum FA FB FC circulus descriptus et per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum ABC descriptus. et describatur vt ABC. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. quod facere oportebat.

Et manifestum est, quando centrum circuli intra triangulum cadit, angulum BAC existentem in portione semicirculo maiore minorem esse recto. quando autem centrum circuli cadit in recta linea BC, angulum BAC, quòd sit in semicirculo, rectum esse. & quãdo extra BC, quòd sit in portione minore semicirculo, recto esse maiorem. Quare et quando datus angulus minor sit recto, DF EF intra triangulum conuenient: quãdo autem rectus in ipsa BC,

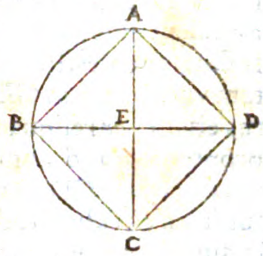
et

& quando maior recto, extra BC. quod oſtendere oportebat.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO. VI.

In dato circulo quadratum deſcribere.

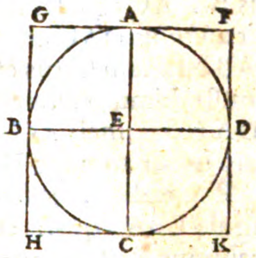
Sit datus circulus ABCD. oportet in ABCD circulo quadratum deſcribere. Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter ſe AC BD: et AB BC CD DA iungantur. Quoniam igitur BE eſt ęqualis ED, etenim centrum eſt E, communis autem et ad rectos angulos EA; erit baſis BA ęqualis baſi AD. Et eadem ratione vtraque ipſarum BC CD vtrique BA AD ęqualis. æquilaterum igitur eſt ABCD quadrilaterum. Dico et rectangulum eſſe. Quoniam enim recta linea BD diameter eſt ABCD circuli, erit BAD ſemicirculus. quare angulus BAD rectus eſt. et eadem ratione vnuſquiſque ipſorum ABC BCD CDA eſt rectus. 31.tertij. rectangulum igitur eſt ABCD quadrilaterum. oſtenſum autem eſt, et æquilaterum eſſe. ergo quadratum neceſſario erit, et deſcriptum eſt in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD deſcriptum eſt. quod facere oportebat.



PROBLEMA VII. PROPOSITIO VII.

Circa datum circulum quadratnm deſcribere.

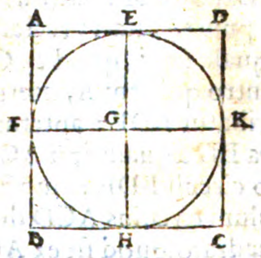
Sit datus circulus ABCD. oportet circa ABCD circulū quadratū deſcribere. ducantur circuli ABCD duę diametri AC BD ad rectos inter ſe angulos, et per pūcta ABCD ducātur circulū ABCD cōtingentes FG GH HK KF. 17.tertij. Quoniā igitur FG contingit circulū ABCD, à centro aūt E ad cōtactū qui eſt ad A ducitur EA; erūt anguli ad A recti. 18.tertij. Eadē ratione et anguli ad puncta B C D recti ſunt. Et quoniam angulus AEB rectus eſt, eſt autem et rectus EBG; erit GH ipſi AC parallela. 28.primi. Eadē ratione et AC parallela eſt FK. Similiter demonſtrabimus et vtramque ipſarum GF HK ipſi BED parallelam eſſe. quare et GF eſt parallela HK. parallelogramma igitur ſunt GK GC AK FB BK, ac propterea GF quidem eſt æqualis HK, GH vero ipſi FK. 34.primi. Et quoniam AC æqualis eſt BD: Sed AC quidem vtrique ipſarum GH FK eſt æqualis; BD vero æqualis vtrique GF HK. et utraque GH FK vtrique GF HK æqualis erit. Aequilaterum igitur eſt FGHK quadrilaterum. Dico et rectangulum eſſe. Quoniam enim parallelogrammum eſt GBEA, atque eſt rectus AEB angulus, et ipſe AGB rectus erit. Similiter demonſtrabimus angulos etiā qui ad puncta HKF rectos eſſe. rectangulum igitur eſt quadrilaterum FGHK; demonſtratum autem eſt et æquilaterum. Ergo quadratum ſit neceſſe eſt. et deſcriptū eſt circa circulū ABCD. Circa datum igitur circulum quadratum deſcriptum eſt. quod facere oportebat.



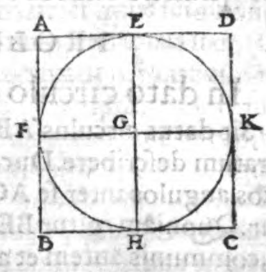
PROBLEMA VIII. PROPOSITO VIII.

In dato quadrato circulum deſcribere.

Sit datum quadratum ABCD. oportet in quadrato ABCD circulū deſcribere. Secetur vtraque ipſarū AB AD bifariam in punctis F E. 10.primi. et per E quidem alterutri ipſarum AB CD parallela ducatur EH: per F vero ducatur FK parallela alterutri AD BC. 31.primi. parallelogrammum



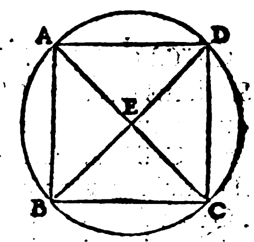
igitur est vnũquodque ipsorum AK KB AH HD A
34.primi. G GC BG GD : et latera ipsorum quę ex opposito sunt ęqualia. Et quoniam DA est æqualis AB; et ipsius quidẽ AD dimidia est AE; ipsius vero AB dimidia AF; erit AE ipsi AF ęqualis. quare et opposita latera ęqualia sunt. ergo FG est æqualis GE. Similiter demonstrabimus et vtramque ipsarum GH HK vtrique FG GE æqualem esse. quattuor igitur GE GF GH GK inter se sunt ęquales. Itaque centro quidem G, interuallo autem vna ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; et rectas lineas AB BC CD DA continget, propterea quòd anguli ad E F H K recti sunt. Si enim circulus secabit rectas lineas AB BC CD DA, quę ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet. quod est absurdum. non igitur centro quidem G, interual
16.tertij. lo autem vnà ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus rectas lineas AB BC CD DA secabit. quare ipsas necessario continget: atque erit descriptus in quadrato AB CD. In dato igitur quadrato circulus descriptus est. quod facere oportebat.



PROBLEMA IX. PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum circulum describere.

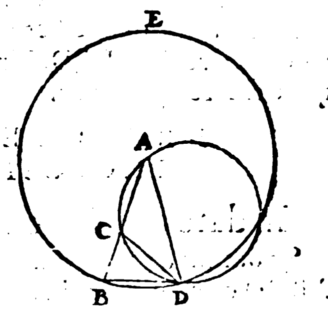
Sit datum quadratum ABCD. oportet circa ABCD quadratum circulum describere. Iungãtur enim AC BD, quę se inuicem in puncto E secent. Et quoniam DA est æqualis AB, communis autem AC; duæ DA AC duabus BA AC ęquales sunt; et basis DC æqualis basi CB; erit angulus DAC angulo BAC æqualis. angulus igitur DAB bifariam sectus est recta linea AC. Similiter demonstrabimus vnumquemque angulorum ABC BCD CDA rectis lineis AC DB bifariam sectum esse. Quoniam igitur angulus DAB angulo ABC est æqualis. atque est anguli quidem DAB dimidius angulus EAB, anguli vero ABC dimidius EBA; et EAB angulus angulo EBA æqualis erit. quare et latus EA lateri EB est ęquale. Similiter demonstrabimus, et vtramque rectarum linearum EC ED vtrique EA EB æqualem esse. ergo quattuor rectæ lineæ EA EB EC ED inter se sunt æquales. centro igitur E, interuallo autem vna ipsarum EA EB EC ED circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit. atque erit descriptus circa ABCD quadratum. describatur vt AB CD. circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. quod facere oportebat.



PROBLEMA X. PROPOSITIO X.

Aequicrure triangulum cõstituere, habens vtrumque angulorum, qui sunt ad basim duplum reliqui.

Exponatur recta quędam linea AB, et secetur in
11.secundi. C puncto, ita vt rectangulum contentum AB BC æquale sit ei, quod ex CA describitur quadrato: et centro quidem A, interuallo autem AB circulus de
1.huius. scribatur BDE: apteturq; in BDE circulo recta linea BD æqualis ipsi AC, quæ non sit maior diametro circuli BDE: et iunctis DA DC, circa ADC triãgulum circulus ACD describatur. Itaque quoniam rectangulum ABC æquale est quadrato, quod sit ex AC; æqualis autem est AC ipsi BD, erit ABC rectangulum quadrato

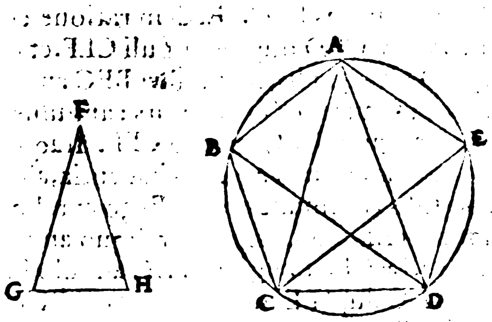


quadrato quod ex BD æquale. Et quoniam extra circulum ACD sumptum est aliquod punctum B: et à puncto B in circulum ACD cadunt duę rectæ lineæ BCA BD, quarum altera quidem secat, altera vero incidit, atque est rectangulũ ABC æquale quadrato, quod ex BD; recta linea BD circulum ACD continget. Quoniam igitur BD contingit, et à contactu, qui ad D ducta est DC; erit BDC angulus æqualis ei, qui in alterna circuli portione constituitur, videlicet angulo DAC. Quòd cum angulus BDC æqualis sit ipsi DAC, communis apponatur CDA. totus igitur BDA est æqualis duobus angulis CDA DAC. Sed ipsis CDA DAC exterior angulus BCD est ęqualis. ergo et BDA ęqualis est ipsi BCD. sed BDA angulus est æqualis angulo CBD, quoniam et latus AD lateri AB est ęquale. ergo et DBA ipsi BCD æqualis erit. Tres igitur anguli BDA DBA BCD inter se æquales sunt. Et quoniam angulus DBC æqualis est angulo BCD, et latus BD lateri DC est ęquale. Sed BD ponitur æqualis ipsi CA. ergo et AC est æqualis CD. quare et angulus CDA æqualis est angulo DAC. anguli igitur CDA DAC ipsius anguli DAC dupli sunt. est autẽ et BCD angulus angulis CDA DAC æqualis. ergo et BCD duplus est ipsius DAC. Sed BCD est æqualis vtrique ipsorũ BDA DBA. quare et vterque BDA DBA ipsius DAB est duplus. Aequicrure igitur triãgulum constitutum est ADB, habens vtrumque eorum angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui. quod facere oportebat.

Vlt. tertij.
32. tertij.
32. primi.
6. primi.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO XI.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

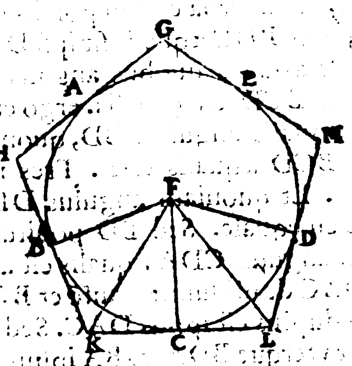


Sit datus circulus ABCDE. oportet in ABCDE circulo pentagonũ æquilaterum, et ęquiangulum describere. Exponatur triangulum æquicrure FGH, habens vtrumque eorũ qui sunt ad G H angulorum duplũ anguli qui est ad F: et describatur in circulo ABCDE triangulo FGH æquiangulum triangulum ACD, ita vt angulo quidem, qui est ad F æqualis sit angulus CAD: vtrique vero ipsorum, qui ad GH sit æqualis vterque ACD CDA. et vterque igitur ACD CDA anguli CAD est duplus. Secetur vterque ipsorum ACD CDA bifariam rectis lineis CE DB: et AB BC CD DE EA iũgatur. Quoniã igitur vterque ipsorũ ACD CDA duplus est ipsius CAD, et secti sunt bifariã rectis lineis CE DB; quinque anguli DAC ACE ECD CDB BDA inter se sunt æquales. æquales autẽ anguli in æqualibus circumferentiis insistunt. quinque igitur circumferentię AB BC CD DE EA ęquales sunt inter se. Sed ęquales circũferẽtias æquales rectę lineę subtendunt. ergo et quinque rectę lineę AB BC CD DE EA inter se æquales sunt. æquilaterum igitur est ABCDE pentagonum. Dico et æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia AB æqualis est circumferentiæ DE, communis apponatur BCD. tota igitur ABCDE circumferentia toti circumferentię EDCB est æqualis, et in circumferentia quidẽ ABCD insistit angulus AED, in circũferẽtia vero EDCB insistit BAE. Ergo et BAE angulus est ęqualis angulo AED. Eadem ratione, et vnusquisque angulorum ABC BCD CDE vnicuique ipsorum BAE AED est æqualis. ęquiangulum igitur est ABCDE pentagonũ: ostensum autem est et ęquilaterũ esse. Quare in dato circulo pentagonum ęquilaterum, et æquiangulum descriptum est. quod facere oportebat.

Ex antecedente.
2. huius.
9. primi.
26. tertij.
29. tertij.

PROBELMA XII. PROPOSITIO. XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, et ęquiangulum describere.



Sit datus circulus ABCDE. oportet circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum, et æquiangulum describere. Intelligantur pentagoni in circulo descripti angulorum puncta ABCDE, ita vt circumferentiæ AB BC CD DE EA sint ęquales; et per puncta ABCDE ducantur circulum contingentes GH HK KL LM MG. et sumpto circuli ABCDE centro F iungantur FB FK FC FL FD. quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in puncto C, et à centro F ad contactum, qui est ad C ducta est FC: erit FC ad ipsam KL perpendicularis. rectus igitur est vterque angulorum qui sunt ad C. Eadem ratione et anguli qui ad puncta B D recti sunt. et quoniam rectus angulus est FCK, quadratum quod fit ex FK ęquale est quadratis quæ ex FC CK. Et ob eandem caussam quadratis ex FB, BK ęquale est quod ex FK quadratũ. Quadrata igitur ex FC CK quadratis ex FB BK æqualia sunt: quorum quod ex FC ei quod ex FB est ęquale. Ergo reliquũ quod ex CK reliquo quod ex BK æquale erit, æqualis igitur est BK ipsi CK. Et quoniã FB est æqualis FC, communis autem FK, duæ BF FK duabus CF FK ęquales sunt: et basis BK est ęqualis basi KC; erit angulus quidem BFK angulo KFC æqualis; angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur est angulus BFC anguli KFC, et angulus BKC duplus ipsius FKC. Eadem ratione et angulus CFD anguli CFL est duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF. et quoniam circumferentia BC circumferentię CD est æqualis, et angulus BFC angulo CFD ęqualis erit. atque est angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero DFC duplus ipsius LFC. æqualis igitur est angulus KFC angulo CFL. Itaque duo triangula sũt FKC FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterũ alteri, et vnum latus vni lateri æquale, quod ipsis commune est FC. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur linea KC est æqualis rectæ CL, et angulus FKC angulo FLC. Et quoniã KC est æqualis CL, erit KL ipsius KC dupla. Eadem ratione et HK ipsius BK dupla ostendetur. Rursus quoniam BK ostensa est ęqualis ipsi KC: atque est KL quidem dupla KC, HK vero ipsius BK dupla erit HK ipsi KL æqualis. Similiter et vnaquęque ipsarum GH HM ML ostendetur æqualis vtrique HK KL. Aequilaterum igitur est GHKLM pentagonum. Dico etiam ęquiangulum esse. Quoniam enim angulus FKC est æqualis angulo FLC: et ostensus est ipsius quidem FKC duplus angulus HKL; ipsius vero FLC duplus KLM: erit et HKL angulus angulo KLM æqualis. Simili ratione ostendetur et vnusquisque ipsorum KHG HGM GML vtrique HKL KLM æqualis. Quinque igitur anguli GHK HKL KLM LMG MGH inter se ęquales sunt. ergo ęquiangulum est GHKLM pentagonũ. ostensum autem est etiam æquilaterum esse: et descriptum est circa ABCDE circulum. quod facere oportebat.

Ex antecedente.

17. tertij.

18. tertij.

8. primi.

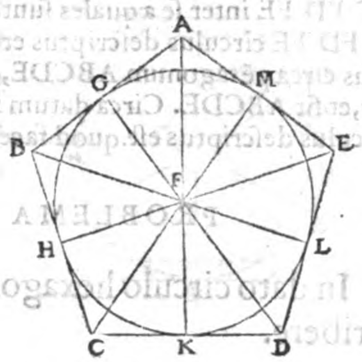
17. tertij.

26. primi.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

In dato pentagono, quod æquilaterum, et ęquiangulum sit, circulum describere.

Sit



Sit datum pentagonum ęquilaterum, et ęquiangulum ABCDE. oportet in ABCDE pentagono circulum describere. secetur uterque angulorum BCD CDE bifariam rectis lineis CF DF; et à puncto F, in quo conueniunt inter se CF DF, ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC est ęqualis CD, communis autem CF, duæ BC CF duabus DC CF ęquales sunt, et angulus BCF est æqualis angulo DCF. basis igitur BF basi FD est æqualis, et BFC triangulum ęquale triãgulo DCF, et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, quibus ęqualia latera subtenduntur. angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. Et quoniam angulus CDE anguli CDF est duplus, et angulus quidem CDE angulo ABC, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit et CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo FBC ęqualis. angulus igitur ABC bifariã sectus est recta linea BF. Similiter demonstrabitur et vnumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam sectum esse. Itaque à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur perpendiculares FG FH FK FL FM. Et quoniam angulus HCF est ęqualis angulo KCF; est autem et rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, et vnum latus vni lateri ęquale, commune scilicet vtrisque FC, quod vni ęqualium angulorum subtenditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK ęqualis. Similiter ostẽdetur et vnaquæque ipsarum FL FM FG æqualis vtrique FH FK. quinque igitur rectæ lineę FG FH FK FL FM inter se æquales sunt. quare centro F, interuallo autem vna ipsarum FG FH FK FL FM circulus descriptus, etiam per reliqua transibit pũcta, et rectas lineas AB BC CD DE EA cõtinget, propterea quòd anguli ad G H K L M recti sunt. Si enim non continget, sed ipsas secabit, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod absurdũ esse ostensum est. non igitur centro F, et interuallo vno ipsorum punctorum G H KLM circulus descriptus rectas lineas AB BC CD DE EA secabit. quare ipsas cõtingat necesse est. describatur vt GHKLM. In dato igitur pentagono quod est ęquilaterum, et ęquiangulum, circulus descriptus est. quod facere oportebat.

9.primi. 4.primi. 26.primi. 16.tertij.

PROBLEMA. XIIII. PROPOSITIO. XIIII.

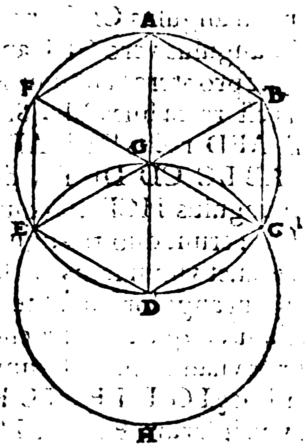
Circa datum pentagonum, quod ęquilaterum, et ęquiangulum sit, circulum describere.

Sit datum pentagonum æquilaterum et æquiangulum ABCDE. oportet circa pentagonum ABCDE circulum describere, secetur vterque ipsorum BCD CDE angulorum bifariam rectis lineis CF FD: et à puncto F, in quo conueniunt rectæ lineæ ad puncta BAE ducantur FB FA FE. Similiter vt in antecedenti demonstrabitur vnumquemque angulorum CBA BAE AED rectis lineis BF FA FE bifariam sectum esse. Et quoniam angulus BCD angulo CDE est ęqualis: atque est anguli quidem BCD dimidius angulus FCD, anguli vero CDE dimidius CDF; erit et FCD angulus æqualis angulo FDC. quare et latus CF lateri FD est ęquale. Similiter demõstrabitur et vna quæque ipsarum FB FA FE ęqualis vnicuique FC FD. quinque igitur rectę lineæ FA FB FC FD

FC FD FE inter se æquales sunt. ergo centro F, et interuallo vna ipsarũ FA EB FC FD FE circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta: atque erit descriptus circa pẽtagonum ABCDE, quod æquilaterum est, et æquiangulum. describatur, et sit ABCDE. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum et ęquiangulum circulus descriptus est. quod facere oportebat.

PROBLEMA XV. PROPOSITIO. XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & ęquiangulum describere.



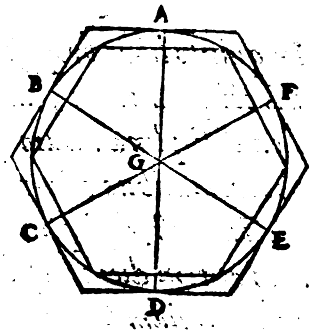
Sit datus circulus ABCDEF. oportet in circulo ABCDEF hexagonum ęquilaterum, et æquiangulum describere. Ducatur circuli ABCDEF diameter AD, sumaturq; centrum circuli G; et centro quidem D, interuallo autem DG circulus describatur EGCH, iunctæq; EG CG ad puncta B F producantur, et iungantur AB BC CD DE EF FA. Dico hexagonum ABCDEF æquilaterum, et æquiangulum esse. Quoniam enim G punctum centrum est ABCDEF circuli, erit GE ipsi GD æqualis. Rursus quoniam D cẽtrum est circuli EGCH, erit DE ęqualis DG. Sed GE ipsi GD æqualis ostensa est. ergo GE ipsi ED est æqualis. æquilaterum igitur est EGD
5.primi. triãgulum, ideoq; tres ipsius anguli EGD GDE DEG inter se æquales sunt, quoniam ęquicruriũ trian-
32.primi. gulorum anguli ad basim inter se sunt æquales: et sunt trianguli tres anguli ęquales duobus rectis. angulus igitur EGD duorum re-
13.primi. ctorum tertia pars est. Similiter ostendetur et DGE duorum rectorum tertia. Et quoniam recta linea CG super rectam EB insistens angulos qui deinceps sunt EGC CGB duobus rectis æquales efficit; erit et reliquus CGB tertia duorum rectorum. anguli igitur EGD DGC CGB inter se sunt ęquales. ergo et qui ipsis ad ver-
26.tertij. ticem sunt anguli BGA AGF FGE æquales sunt angulis EGD DGC CGB. quare sex anguli EGD DGC CGB BGA AGF FGE inter se æquales sunt. sed æqua-
29.tertij. les anguli ęqualibus circumferentiis insistunt. Sex igitur circumferentiæ AB BC CD DE EF FA inter se sunt ęquales. æquales autem circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. ergo et sex rectæ lineę inter se æquales sint necesse est, ac propterea æquilaterum est ABCDEF hexagonum. Dico et æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia AF circumferentię ED est ęqualis, communis apponatur circumferentia ABCD. tota igitur FABCD circumferentia ęqualis est toti circumferentiæ EDCBA. et circumferentiæ quidem FABCD angulus FED insistit; circumferentiæ vero EDCBA insistit angulus AFE. angulus igitur AFE angulo DEF est æqualis. Similiter ostẽdetur et reliqui anguli hexagoni ABCDEF sigillatim æquales vtrique ipsorum AFE FED. ergo æquiangulum est ABCDEF hexagonũ. ostensum autem est et æquilaterum esse: et descriptum est in circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, et ęquiangulum descriptum est. quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est hexagoni latus ei, quę est ex centro circuli æquale esse. Et si per puncta ABCDEF contingentes circulum

ducamus

ducamus, circa circulũ describetur hexagonum ęquilaterum et ęquiangulum cõsequenter ijs, quæ in pentagono dicta sunt, & præterea similiter in dato hexagono circulum describemus, et circumscribemus. quod facere oportebat.

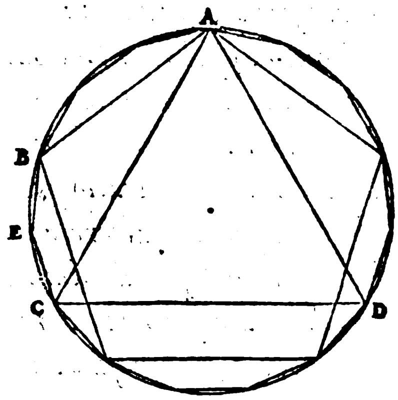


PROBLEMA XVI.

PROPOSITIO. XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, et æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet in ABCD circulo quindecagonum æquilaterum et ęquiangulum describere. Describatur in circulo ABCD trianguli quidẽ æquilateri in ipso descripti latus AC; pentagoni vero æquilateri latus AB. Quarũ igitur partium est ABCD circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABCD tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia vero AB, quæ quinta est circuli; erit triũ. ergo reliqua BC est duarum. secetur BC bifariã in puncto E. quare vtraque ipsarum BE EC circumferentiarum, quintadecima pars est ABCD circuli. Si igitur iungentes BE EC æquales ipsis in continuum rectas lineas in circulo ABCD aptabimus, in ipso quindecagonum æquilaterum, et ęquiangulum descriptum erit. quod facere oportebat.



Similiter autem iis, quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli diuisiones contingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum ęquilaterum, et ęquiangulum. Et insuper in dato quindecagono æquilatero, et ęquiangulo circulum describemus, et circumscribemus.

QVARTI LIBRI FINIS.

SCHOLIVM.

In quinto libro propositum est de analogijs tractare; hic enim liber communis est geometriæ, arithmeticæ, musicæ, & omni simpliciter mathematicæ disciplinæ: nam quæ in ipso demonstrantur non solum geometricis theorematibus congruunt, sed & omnibus, quæ ad mathematicas, ut dictum est, disciplinas referuntur. propositum igitur huiusmodi est. librum autem dicunt esse Eudoxi cuiusdam, qui Platonis magister fuit. Itaque quoniam propositum est de analogijs tractare, analogia vero est proportionum quarundam habitudo; necesse est prius cognoscere, quænam sint hæ proportiones. simplicium enim cognitio cognitionem compositorum præcedere debet. si igitur quædam inter se comparētur, verbi gratia duæ magnitudines, ipsæ quidem termini vocantur, & alterius ad alteram transitus, distantia: comparatio autem habitudo, quam antiqui proportionem appellarunt. at huius proportionis cum alia proportione iuxta similitudinem quandam comparatio vel habitudo analogia nuncupatur. non enim ut magnitudo comparatur, sed ut proportio cum proportione. hæc autem comparatio proportio proportionis dicitur; ut si sint duæ rectæ lineæ, quarum altera ad reliquam duplam proportionem habeat, quadratum illius, quæ duplam habet proportionem, ad quadratum reliquæ quadruplam proportionem habebit eius, quam maior recta linea habet ad minorem; nam quæ longitudine sunt dupla potentia quadrupla sunt. quadratorum igitur proportio cum sit quadrupla, dupla erit proportionis rectarum linearum, quæ est dupla: vocatur autem hæc proportionis proportio, quæ quidem sub quantitate est; etenim proportio est duplex, alia in æstimatione, alia in quantitate. & eius quidem, quæ in æstimatione nulla species est, quæ ad præsentem contemplationem utilis sit; eius vero, quæ in quantitate species sunt quinque, alia enim est multiplex ut sex trium, alia superparticularis ut quattuor trium, & alia superpartiens, ut quinque trium, & hæ quidem simplices sunt, quarum adhuc simplicior est multiplex, aliæ uero duæ ex harum compositione nascuntur, videlicet multiplex superparticularis, ut est septem triū, & multiplex superpartiens, ut octo trium. sub proportionales vero sunt minores maiorum, ut sub multiplex, subparticularis, & similiter reliqua. sciendum autem est hunc librum in duas partes diuidi. & prima quidem pars simpliciorum doctrinam continet, videlicet multiplicium. secunda vero vniuerse de omnibus agit proportionibus. oportet enim in omni re, ut dictum est, simplicium cognitionem præcedere. quemadmodum aūt liber ipse, ita & diffinitiones diuiduntur; primę enim sunt de partibus, et multiplicibus, deinde sequuntur vniuersaliores de oībus proportionibus.

Analogia. Simplicium cognitio cognitionē cōpositorū præcedere debet. Termini. Comparatio est habitudo, quā antiqui proportionem appellarunt. Analogia. Proportio proportionis. Proportionis in quantitate species sūt quinque. Quintus liber in duas partes diuiditur.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER QVINTVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, quando minor maiorem metitur.

SCHOLIVM.

Pars, vt multi arbitrantur, est minor eo, quod est eiusdẽ speciei, vt 3 est pars 5. apud geometram vero est, quæ metitur maius, quando reliquum æquale sit ei, quod metitur: quando autem non sit æquale, non est pars, vt 3. 5; reliquuntur enim 2, quæ non sunt æqualia 3. quare 3 non sunt pars 5, sed partes, videlicet tres quintæ $\frac{3}{5}$.

F. C. COMMENTARIVS.

Pars etiam apud geometram sumitur pro ea, quae simpliciter minor est maiore eiusdem speciei: vt cum dicitur, omne totum est maius sua parte. ergo pars quatenus multiplici opponitur, erit ea, quae metitur maius, videlicet ipsum multiplex, quae alio nomine submultiplex, & a nonnullis pars aliquota appellatur; quatenus vero opponitur toti nulla est necessitas, vt totum metiatur.

I I.

Multiplex est maior minoris, quando maiorem minor metitur.

I I I.

Proportio est duarum magnitudinum eiusdem generis, quatenus ad quantitatem pertinet, mutua quædam habitudo.

SCHOLIVM.

Proportionem *dicit, vt significet habitudinem.* duarum magnitu-

P dinum

dinum] *vt separet ab aliјs speciebus quantitatis*. eiusdem generis] *vt nequis lineam cum superficie comparet. hæc enim inter se proportionem nullam habent*. quatenus ad quantitatem pertinet] *vt separet ab infinitis magnitudinibus; quantitas enim continua est terminus continui nō infiniti, & quantitas discreta est discreti non infiniti. sed discretum nō est magnitudo, multitudo enim est*. quædā habitudo] *quòd quinque sint habitudinum species vt dictum iam fuit.*

F. C. COMMENTARIVS.

Quatenus ad quantitatem pertinet] *videtur hoc potius dictum sit, vt intelligatur proportio, quae in quantitate, non item ea, quae in aestimatione consistit.*

IIII.

Portionem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ se inuicem superare possunt.

SCHOLIVM.

In numeris quidem omnis proportio rationalem habet quantitatem, in magnitudinibus autem est quædam proportio, quæ numero exprimi non potest; sunt enim quædam, quorum dumtaxat cognoscitur excessus, quo alterū superat alterū; quantitas aūt excessus cognosci nequit. hæc igitur proportionem habere dicuntur, nempe excessus, non adhuc eam, quam numerus habet ad numerum, hoc est rationalem; ac propterea in diffinitione proportionis magnitudinum apposuit, quatenus ad quātitatem pertinet, *videlicet continuam, non omnino autem quatenus ad quantitatem discretam, & rationalem. vniuersalius igitur diffiniens, quæ nam sint proportionem habentia dixit*, quæ multiplicatę se inuicem superare possunt: *hoc enim & rationalibus, & irrationalibus congruit, velut diameter quadrati, vt in rationalibus quidem proportionem habet ad latus, vt in excessu vero proportionem habet, quam maius ad minus, & potest latus multiplicatum aliquando diametrum superare.*

F. C. COMMENTARIVS.

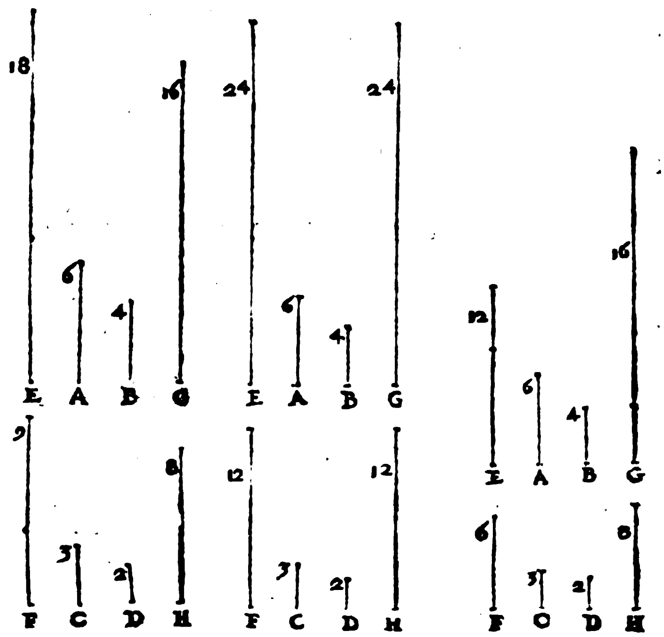
Hoc idcirco dictum videtur, vt infinitae magnitudines à proportionibus excludantur. finita enim magnitudo quamtumlibet multiplicata tantum abest, vt infinitam magnitudinem exuperet, vt ne aequare quidem possit vnquam.

V.

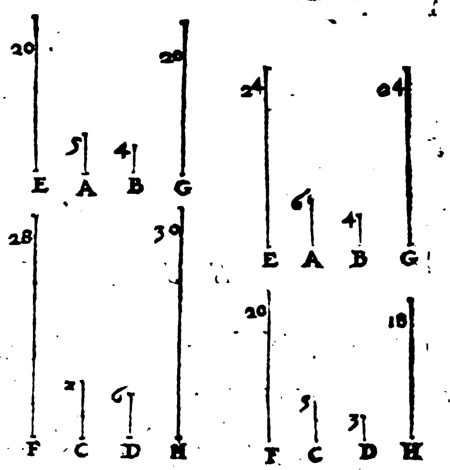
In eadem proportione magnitudines esse dicuntur prima ad secundam, & tertia ad quartam, quando primæ, et tertiæ æquemultiplices,

tiplices, secundæ, et quartę æque multiplices iuxta quamuis multiplicationem vtraque vtramque vel vnà superant, vel vnà ęquales sunt, vel vnà deficiunt inter se comparatæ.

F. C. COMMENTARIVS.



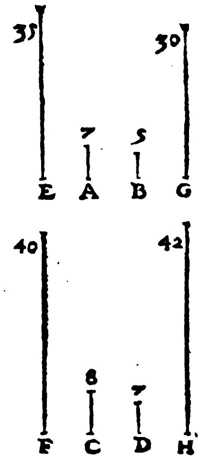
Sit prima magnitudo A, secunda B, tertia C, & quarta D: sumanturq́ primae, ac tertiae, videlicet ipsarum A C aeque multiplices E F, vt sit E aeque multiplex A, atque F ipsius C. rursus sumantur ipsarum B D, secundae scilicet, & quartae aeque multiplices GH; & siquidem maiori existente E quàm G, etiam F sit maior quàm H, vel si E aequali existente ipsi G, sit F aequalis H. vel si minori existente, sit minor iuxta quamuis multiplicationē, tunc dicetur A ad B eandem habere proportionem, quam C ad D. excessum autem, ac defectum simpliciter intelligere oportet, non secundum proportionem, vt voluit Campanus; alioqui idem per idem explicaretur, quod est absurdum. Propositis igitur quattuor magnitudinibus commensurabilibus, si velimus statim dignoscere, an eandem proportionem habeant, multiplices ita aptabimus, vt multiplex primae multiplici secundae fiat aequalis; & si quidem multiplex tertiae sit aequalis multiplici quartae, tunc prima ad secundam eandem proportionem habere deprehendetur, quam tertia ad quartam. Si vero multiplex tertiae sit minor multiplici quartę, prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam. quòd si multiplex tertiae sit maior multiplici quartae, habebit prima ad secundam minorem proportionem, quàm tertia ad quartam.



VI.

Magnitudines, quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

VII.

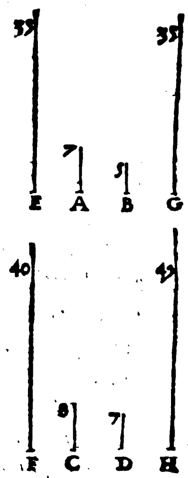


Quando autem æque multiplicium multiplex quidem primæ superauerit multiplicem secundę, multiplex vero tertiæ non superauerit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam maiorem proportionem habere dicitur, quàm tertia ad quartam.

F. C. COMMENTARIVS.

Maneant eadem, quae supra: & sumptis ipsarum AC aeque multiplicibus EF; itemq; ipsarum BD aeque multiplicibus GH, si quidem E superet G, F vero non superet H, vel si E sit aequalis ipsi G, & F minor, quàm H, tunc A ad B maiorem proportionē habere dicitur, quàm C ad D.

VIII.



Analogia est proportionum similitudo.

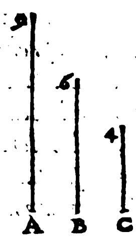
IX.

Analogia vero in tribus minimis terminis consistit.

X.

Quando tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad secundam.

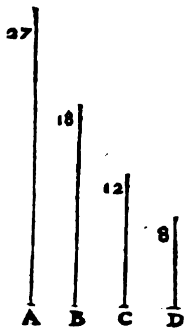
SCHOLIVM.



Non dicit duas proportiones vnius duplas esse, quod etiam est verum; sed proportionem, quae ex duabus constat, esse duplam, vt 8. 4. 2, & rursus 9 3 1. proportio igitur, quæ ex duabus constat dupla est. magnitudo autem in duplis quidem magnitudinibus quadrupla est, in triplis vero nonupla, & in quadruplis sexdecupla. demonstrabitur enim deinceps, quę longitudine sunt duplę, potentia quadrupla esse: & quę longitudine tripla, potentia nonupla. quadratorum igitur proportio cum quadrupla sit, dupla est proportionis laterum, quę est dupla, etenim dupli duplus quadruplus est.

X I.

Quando autem quattuor magnitudines ſint proportionales, prima ad quartam triplam habere proportionem dicetur eius, quam habet ad ſecundam: & ſemper deinceps vna plus, quo ad analogia proceſſerit.



F. C. COMMENTARIVS.

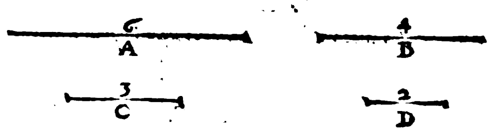
Decima, & vndecima diffinitio terminos requirunt neceſſario inæquales, & primum ipſorũ maiorem. nam ſi aequales ſint eadem eſt primi ad ſecundum, & ad tertium proportio. Si vero primus ſit minor, non poteſt primus ad tertium duplam proportionem habere proprie eius, quam habet ad ſecundum, cum primi ad ſecundum maior ſit proportio, quàm ad tertium ex 8. *huius.*

X I I.

Homologæ, vel ſimilis rationis magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

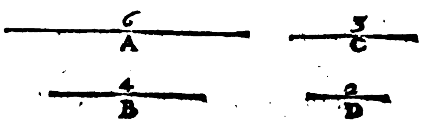
X I I I.

Permutata ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, et conſequentis ad conſequentem.



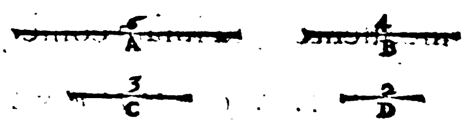
F. C. COMMENTARIVS.

Sit A ad B, vt C ad D. erit permutando A ad C, vt B ad D. hoc autem ita eſſe demonſtrabitur in 16 *propoſitione huius libri.*



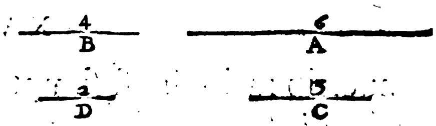
X I I I I.

Conuerſa ratio eſt ſumptio conſequentis, vt antecedentis ad antecedentem, vt ad conſequentem.



F. C. COMMENTARIVS.

Sit rurſus A ad B, vt C ad D. erit conuertendo B ad A, vt D ad C. quod demonſtratur in corollario quartae huius.



Compoſitio

XV.

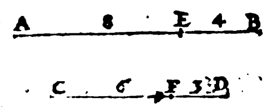
Compositio rationis est sumptio antecedentis vnà cum consequente tamquam vnius ad ipsam consequentem.

SCHOLIVM.

Iuniores hanc proportionem apposuerunt. neque enim compositio magnitudinum eadem est, quę compositio proportionum. hic autem antecedens vnà cum consequente sumptum totam magnitudinem efficit, quę ex magnitudinibus componitur: atque hęc est magnitudinum compositio. compositio enim proportionum aliam proportionẽ efficit, vt ipse deinceps dicet. proportio, inquit ex proportionibus componi dicitur, cum proportionum quantitates inter se multiplicatę aliquam efficiunt proportionem. ipse autem, vt in antiquioribus libris inuenitur, compositionem hanc συνθέντι, hoc est componenti, vel componendo appellat; etenim in rationalibus non aliter dicit, quàm componendo; similiter autem & diuisio, vna enim proportio diuiditur. at diuisio de qua hoc loco sermo fit, magnitudinum est, excessus namque antecedentium ab antecedentibus dissecatur. ipse vero etiam in hoc dicit διελόντι videlicet diuidenti, vel diuidendo. & similiter quę hoc loco appellatur conuersio rationis ipse ἀναστρέψαντι dicit, conuertitur enim ad antecedentia.

F. C. COMMENTARIVS.

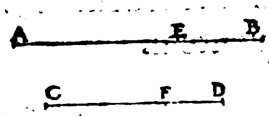
Compositio rationis est proportio, quae oritur ex compositione terminorum ipsius proportionis, videlicet ex compositione antecedentis cum consequente, cum totum consequenti comparatur, quamquam improprie à iunioribus compositio proportionis, vel rationis appellata sit; compositio enim proportionis longe alia est, vt in precedenti scholio adnotatur. sit AE ad EB, vt CF ad FD. erit componendo AB ad BE, vt CD ad DF. illud vero in 18 huius demonstratur.



XVI.

Diuisio rationis est sumptio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

F. C. COMMENTARIVS.



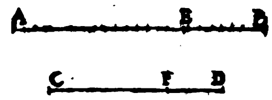
Sit AB ad BE, vt CD ad DF. erit diuidendo AE ad EB, vt CF ad FD. quod in 17. huius demonstrabitur.

XVII.

Conuersio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.

Sit

F. C. COMMENTARIUS.

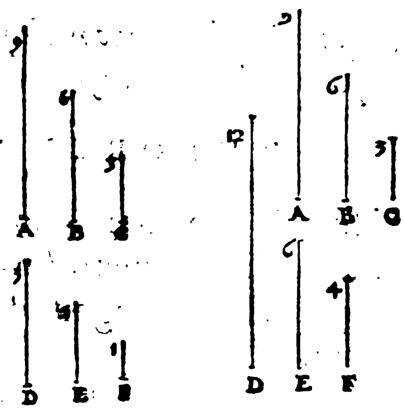


Sit AB ad BE, vt CD ad DF. erit per conuersionem rationis BA ad AE, vt DC ad CF. hoc autem constat ex corollario 19 huius.

XVIII.

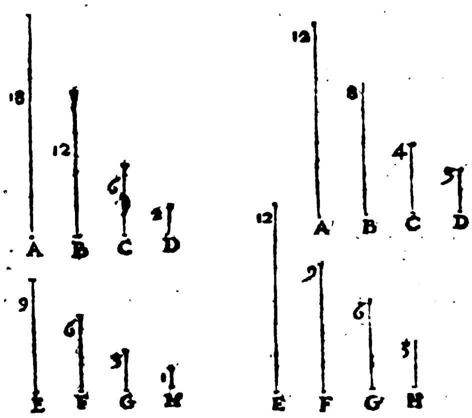
Aequa ratio, siue ex ęquali est, cum plures magnitudines extiterint, et alię ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, et in eadem proportione, fueritq; vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ita in secūdis magnitudinibus prima ad vltimam: vel aliter est sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

F. C. COMMENTARIUS.



Hoc autem & in ordinata analogia fit, & in perturbata. in ordinata quidem hoc modo. sint tres magnitudines ABC, & aliae ipsis numero aequales DEF, sitq; vt A ad B, ita D ad E; & vt B ad C, ita D ad F. erit ex aequali vt A ad C, ita D ad F. quod demonstrabitur in 22 huius.

In perturbata vero hoc pacto. sint rursus tres magnitudines ABC, itemq; aliae tres DEF, & sit vt A ad B, ita E ad F, vt autem B ad C, ita D ad E. erit ex aequali vt A ad C, ita D ad F. hoc autem in 23 huius ostendetur. Idem sequitur etiam si plures sint, quàm tres magnitudines. sint enim quattuor magnitudines ABCD, & aliae ipsis numero aequales EFGH, & in ordinata quidem analogia vt A ad B, ita sit E ad F, vt autem B ad C, ita F ad G, & vt C ad D, ita G ad H. erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H. In perturbata vero, sit vt A ad B, ita F ad G, vtq; B ad C, ita sit G ad H, & vt C ad D, ita E ad F. erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H. & similiter continget in alijs magnitudinibus quotquot illae fuerint.



XIX.

Ordinata analogia est quādo fuerit vt antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; vt autem consequens ad aliā quāpiam, ita consequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero analogia est, quando tribus existentibus magnitudinibus

gnitudinibus, & alij ipsis numero æqualibus; fuerit vt in primis magnitudinibus antecędens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem. vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam; ita in secundis alia quępiam ad antecedentem.

F. C. COMMENTARIVS.

Harum exempla superius posita sunt, sed preter diffinitiones sunt etiam communes quędam notiones, quae in hoc libro sumuntur nempe hae.

I.

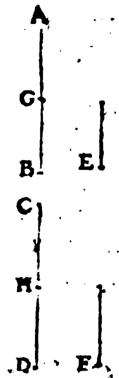
Eiusdem siue ęqualium aeque multiplices inter se aequales sunt.

II.

Quarum eadem aeque multiplex est, vel quarum aequales sunt aeque multiplices & ipsa inter se sunt aequales.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero singulę singularum æque multiplices; quotuplex est vna magnitudo vnius, totuplices erunt & omnes omnium.

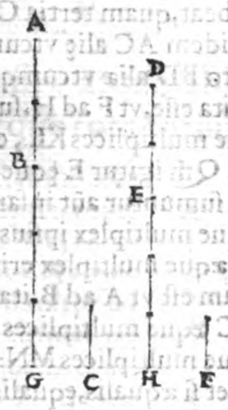


Sint quotcumque magnitudines AB CD quotcumque magnitudinum EF æqualium numero, singulæ singularum ęque multiplices. Dico quotuplex est AB ipsius E, totuplices esse & AB CD ipsarum E F. Quoniam enim AB ęque multiplex est ipsius E, et CD ipsius F, quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi E, tot erūt et in CD æquales ipsi F. diuidatur AB quidem in partes ipsi E ęquales, quæ sint AG GB: CD vero diuidatur in partes ęquales ipsi F, videlicet CH HD. erit igitur multitudo partium CH HD æqualis multitudini ipsarum AG GB. et quoniam AG est æqualis E, et CH æqualis F; erunt et AG CH æquales ipsis E F. eadem ratione quoniam GB est æqualis E, et HD ipsi F, erūt et GB HD æquales ipsis EF. quot igitur sunt in AB æquales ipsi E, tot sunt et in AB CD æquales ipsis E F. ergo quotuplex est AB ipsius E, totuplices erunt et AB CD ipsarum E F. si igitur fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero singulę singularum ęque multiplices; quotuplex est vna magnitudo vnius, totuplices erunt et omnes omnium. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ; fuerit autem et quinta secundæ ęque multiplex, ac sexta quartæ: erit etiam composita prima, et quinta secundę æque multiplex, ac tertia, et sexta quartæ.

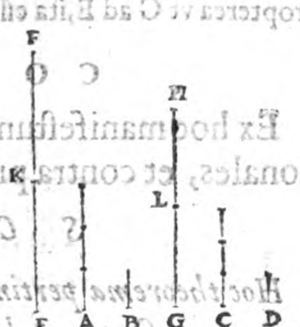
Prima enim AB secundæ C æque multiplex sit, ac tertia DE quartæ F. sit autem et quinta BG secundæ C æque multiplex, ac sexta EH quartæ F. Dico et compositam primam, et quintam AG secundæ C æque multiplicem esse, ac tertiam et sextã DH quartæ F. Quoniam enim AB æque multiplex est C, ac DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales C, tot erunt et in DE æquales F. eadem ratione et quot sunt in BG æquales C, tot et in EH erunt æquales F. quot igitur sunt in tota AG æquales C, tot erunt et in tota DH æquales F. ergo quotuplex est AG ipsius C, totuplex est et DH ipsius F. et composita igitur prima et quinta AG secundæ C æque multiplex erit, ac tertia et sexta DH quartæ F: quare si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ: fuerit autem et quinta secundæ æque multiplex, ac sexta quartæ: erit composita quoque prima et quinta æque multiplex secundæ, ac tertia, et sexta quartæ. quod oportebat demonstrare.



THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si prima secundę ęque multiplex fuerit, ac tertia quartę; sumantur aũt ęque multiplices primæ, & tertiæ: erit & ex ęquali sumptarum vtraque vtriusque ęque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Prima enim A secundæ B æque multiplex sit, ac tertia C quartę D: et sumantur ipsarum AC æque multiplices EF GH. Dico EF æque multiplicem esse ipsius B, ac GH ipsius D. Quoniã enim EF ęque multiplex est ipsius A, ac GH ipsius C; quot magnitudines sunt in EF æquales A, tot erunt et in GH æquales C. Diuidatur EF quidem in magnitudines ipsi A æquales EK KF; GH vero diuidatur in magnitudines ęquales C, videlicet GL LH. erit igitur ipsarum EK KF multitudo ęqualis multitudini ipsarum GL LH. et quoniam æque multiplex est A ipsius B, ac C ipsius D; æqualis autem EK ipsi A, et GL ipsi C; erit EK æque multiplex ipsius B, ac GL ipsius D. eadem ratione ęque multiplex erit KF ipsius B, et LH ipsius D. quoniam igitur prima EK secundæ B æque multiplex est, ac tertia GL quartæ D; est autem et quinta KF secundæ B ęque multiplex, ac sexta LH quartę D: erit et composita prima et quinta EF secundæ B ęque multiplex, ac tertia, et sexta GH quartæ D. Si igitur prima secũdæ æque fuerit multiplex, ac tertia quartæ; sumantur autem primæ, et tertiæ æque multiplices: erit et ex æquali sumptarum vtraque vtriusque ęque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ. quod ostendisse oportuit. Ex antecedente.



THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

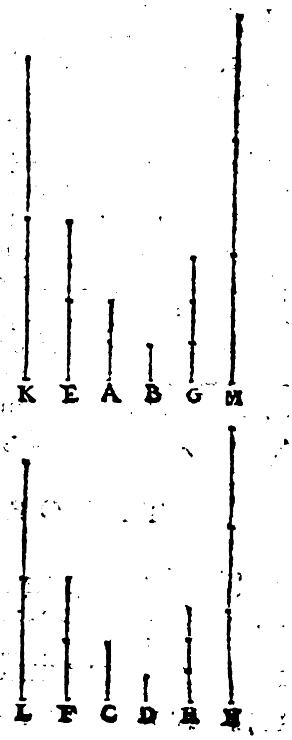
Si prima ad secundã eandem hẽt proportionem, quam tertia ad quartam, & æque multiplices primę, & tertię ad ęque multiplices secundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatę.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D: et sumantur ipsarũ quidem AC alię vtcumque ęque multiplices E F; ipsarũ vero BD aliæ vtcumque æque multiplices GH. Dico E ad G ita esse, vt F ad H. sumantur enim rursus ipsarum EF æque multiplices KL, et ipsarum GH æque multiplices M N. Qm̃ igitur E ęque multiplex est ipsius A, atq; F ipsius C; sumuntur aũt ipsarum EF ęque multiplices KL: erit K æque multiplex ipsius A, atque L ipsius C. Eadem ratione M æque multiplex erit ipsius B, atque N ipsius D. et quoniam est vt A ad B. ita C ad D. sumptæ autem sunt ipsarũ AC æque multiplices KL; et ipsarum BD aliç vtcumque ęque multiplices MN: si K superat M, superabit et L ipsam N; et si æqualis, ęqualis; et si minor, minor. suntq; KL quidem ipsarum EF æquę multiplices; MN vero ipsarum G H aliæ vtcumque ęque multiplices. vt igitur E ad G, ita erit F ad H. quare si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, et æque multiplices primæ ac tertiæ ad ęque multiplices secundę, ac quartæ iuxta quamuis multiplicationem eandem proportionem habebunt inter se comparatæ. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

Per conuersam quintæ diffinitionis.

5. diffinit.



Quoniam igitur demonstratum est si K superat M, et L ipsam N superare; et si ęqualis, ęqualem esse, et si minor, minorem: constat etiam si M superat K, et N superare ipsam L; et si ęqualis, ęqualem esse; et si minor, minorem; ac propterea vt G ad E, ita esse H ad F.

5. diffinit.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est si quattuor magnitudines sint proportionales, et contra proportionales esse.

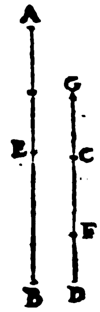
SCHOLIVM.

Hoc theorema pertinet ad demonstrationem diffinitionis magnitudinum, quæ sunt in eadem proportione, vt est quando æque multiplices primæ, & tertiæ, videlicet antecedentium, æque multiplices secundæ & quartæ, hoc est consequentium, vel vnà superant, vel vnà æquales sunt, vel vnà deficiunt; hic enim demonstrat & ipsas eandem inter se proportionem habere, reticuit autem hoc in principio; neque enim fieri poterat, vt diceretur illas in eadem proportione esse, quorum multiplicia sunt in eadem proportione, quando nos idipsum quæreremus, quænam essent in eadem proportione. cum igitur dixisset in principio eas simul superare, vel simul æquales esse, vel simul deficere; hic ostendit & in eadem esse proportione, si inter se comparentur, vt appareat diffinitio earum, quæ sunt in eadẽ proportione, quando scilicet æque multiplices primæ, & tertię ad secũdæ, & quartę æque multiplices eandẽ proportionem habeant. ostendit aũt ipsas in eadẽ proportione per hoc, & per conuersionẽ

THEO-

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex fit, atque ablata ablatę; et reliqua reliquę ęque multiplex erit, atque tota totius.



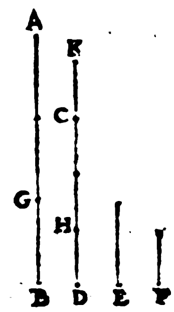
Magnitudo enim AB magnitudinis CD ęque multiplex fit, atque ablata AE ablatę CF. Dico et reliquam EB reliquæ FD æque multiplicem esse, atque totam AB totius CD. quotuplex enim est AE ipsius CF, totuplex fiat et EB ipsius CG. et quoniam AE æque multiplex est CF, atque EB ipsius CG; erit AE ęque multiplex CF, et AB ipsius GF. ponitur autem ęque multiplex AE ipsius CF, et AB ipsius CD. æque multiplex igitur est AB vtriusque GF CD; ac propterea CF ipsi CD est æqualis. communis auferatur CF. reliqua igitur GC ęqualis est reliquę DF. Itaque quoniam AE æque multiplex est CF, et EB ipsius CG, estq; CG ęqualis DF; erit AE æque multiplex CF, et EB ipsius FD. æque multiplex autē ponitur AE ipsius CF, et AB ipsius CD. ergo EB est ęque multiplex FD, et AB ipsius CD. et reliqua igitur EB reliquę FD æque multiplex est, atq; tota AB totius CD. quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex fit, atque ablata ablatæ; et reliqua reliquę ęque erit multiplex, atque tota totius. quod oportebat demonstrare.

1.huius.

1.Com. not.

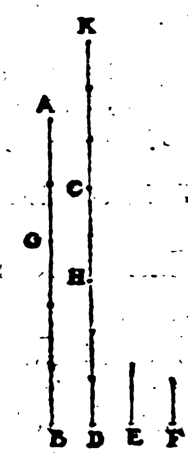
THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Si duę magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices fint, et ablatæ quędam fint earumdem æque multiplices; erunt et reliquæ uel eisdem æquales, vel ipsarum ęque multiplices.



Duæ enim magnitudines AB CD duarum magnitudinum EF ęque multiplices fint, et ablatæ AG CH earumdem fint æque multiplices. Dico et reliquas GB HD vel ipsis EF æquales esse, vel ipsarum æque multiplices. fit enim primum GB ęqualis E. Dico et HD ipsi F esse æqualem. ponatur ipsi F æqualis CK. et quoniam AG æque multiplex est E, et CH ipsius F; estq; GB quidem ęqualis E; CK vero æqualis F: erit AB ęque multiplex E, et KH ipsius F. ęque autem multiplex ponitur AB ipsius E, et CD ipsius F. ergo KH ęque multiplex est F, et CD ipsius F. quoniam igitur vtraque ipsarum KH CD est ęque multiplex F, erit KH æqualis CD. communis auferatur CH. ergo reliqua KC reliquę HD est ęqualis. Sed KC est ęqualis F. et HD igitur ipsi F est æqualis; ideoq; GB ipsi E, et HD ipsi F æqualis erit. Similiter demonstrabimus si GB multiplex fuerit ipsius E, et HD ipsius F ęque multiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices fint, et ablatę quædam fint earumdem æque multiplices, erunt et reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices. quod demonstrare oportebat.

1.huius.



1.Com. not.

SCHOLIVM.

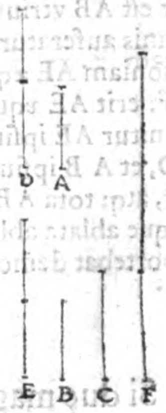
Non propositum est ostendere si à multiplici multiplex auferatur reli-

quum, vel equale esse, vel multiplex; hoc enim manifestum est: sed duabus magnitudinibus ad duas magnitudines ita se habentibus, vt dictum est, si reliqua prioris sit multiplex, & reliquam alterius multiplicem esse; & si equalis sit, esse equalem, veluti si quadrupla existente tripla auferatur, reliqua equalis erit, & in altera eodem modo.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Aequales ad eãdẽ, eãdẽ habẽt proportionẽ, & eadẽ ad æquales.

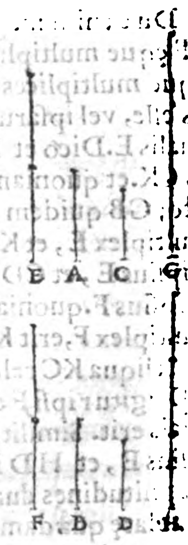
Sint æquales magnitudines A B, alia autem quæuis magnitudo C. Dico vtramque ipsarum A B ad C eandem proportionem habere: et C ad vtramque A B similiter eandem habere proportionem. sumantur enim ipsarum A B æque multiplices DE, et ipsius C alia vtcumque multiplex F. Quoniam igitur æque multiplex est D ipsius A, et E ipsius B, estq; A ipsi B æqualis; (1. Com.not.) erit et D æqualis E; alia autem vtcumque est F. ergo si D superat F, et E ipsam F superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. et sunt DE quidem ipsarum A B æqui multiplices: F vero alia vtcumque multiplex ipsius C. (5. diffi.) erit igitur vt A ad C, ita B ad C. dico insuper C ad vtramque ipsarum A B eandem habere proportionem. iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E æqualem esse, aliam vero quandam F. si igitur F superat D, ipsam quoque E superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. atque est F quidẽ ipsius C multiplex; DE vero alię vtcũque ęque multiplices ipsarum A B. (5. diffi.) ergo vt C ad A, ita erit C ad B. ęquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, et eadem ad æquales. quod ostendere oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

Eodem modo demonstrabimus, et æquales magnitudines ad alias inter se æquales eandem habere proportionem.

Sint enim magnitudines aequales A B; sintq; aliae magnitudines inter se aequales C D. dico A ad C eandem habere proportionem, quam B ad D. sumantur ipsarum A B aeque multiplices E F; & ipsarum C D aliae vtcumque aeque multiplices GH. Itaq; quoniam aeque multiplex est E ipsius A, & F ipsius B; est autem A aequalis B: (1. Com.not.) erit & E ipsi F aequalis. rursus quoniam aeque multiplex est G ipsius C, & H ipsius D; estq; C ipsi D aequalis; & G ipsi H aequalis erit. Si igitur E superat G, & F ipsam H superabit; et si aequalis, aequalis; & si minor, minor. (5. diffi.) ergo A ad C eandem proportionẽ habet, quam B ad D. quod oportebat demonstrare.



THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Inæqualium magnitudinum maior ad eandem maiorem habet proportionem, quàm minor: et eadem ad minorẽ maiorem proportionẽ habet, quàm ad maiorẽ.

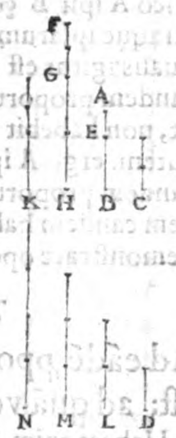
Sint inęquales magnitudines AB C: et sit AB maior; alia vero vtcumque D. dico AB ad D maiorẽ habere proportionem, quàm C ad D: et D ad C maiorem habere, quàm ad AB. quoniam enim AB maior est, quàm C, ponatur ipsi C ęqualis BE. (4. diffin.) Itaque minor ipsarum AE EB multiplicata maior aliquando erit, quàm D. Sit primum

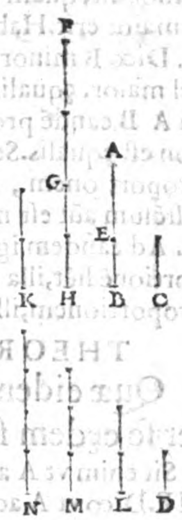
mum AE minor, quàm EB: et multiplicetur AE, quo ad fiat maior, quàm D: sitq; ipsius multiplex FG, quæ ipsa D sit maior: quotuplex autem est FG ipsius AE, totuplex fiat et GH ipsius EB, et K ipsius C. sumaturq; ipsius D dupla quidem L, tripla vero M, et deinceps vna plus, quo ad ea, quæ sumitur, multiplex fiat ipsius D, et primo maior, quàm K. sumatur, sitq; N ipsius D quadrupla, et primo maior quàm K. quoniam igitur K primo minor est, quàm N, non erit K minor, quàm M. et cum ęque multiplex sit FG ipsius AE, et GH ipsius EB; erit et FG ęque multiplex AE, et FH ipsius AB. 1.huius. æque autem multiplex est FG ipsius AE, et K ipsius C. ergo FH æque multiplex est AB, et K ipsius C; ac propterea FH K ipsarũ AB C ęque multiplices erũt. rursus quoniã GH æque multiplex est EB, et K ipsius C; estq; EB æqualis C: erit et GH ipsi K æqualis. Sed K non est minor, quàm M. non igitur GH minor est, quàm M. maior autem FG quàm D. ergo tota FH vtrisque DM maior erit. Sed vtræque DM sunt ęquales N; est enim M tripla ipsius D, et vtręque M D ipsius D quadruplæ. est autem et N quadrupla D. vtręque igitur M D ipsi N ęquales sunt. sed FH maior est, quàm MD. quare FH superat N, K vero ipsam N non superat. et sunt FH K æque multiplices ipsarum AB C: et N ipsius D alia vtcũque multiplex. ergo AB ad D maiorem proportionem habet, quàm C ad D. dico præterea et D ad C maiorem habere proportionẽ, quàm D ad AB. iisdem enim constructis similiter ostendemus N superare K, ipsam vero FH non superare: atque est N multiplex ipsius D; et FH K aliæ vtcumque ipsarum AB C æque multiplices. ergo D ad C maiorem proportionẽ habet, quàm D ad AB. Sed sit AE maior, quàm EB. erit minor EB multiplicata aliquando maior, quàm D. multiplicetur, et sit GH multiplex quidẽ ipsius EB, maior vero, quã D. et quotuplex est GH ipsius EB, totuplex fiat et FG ipsius AE, et K ipsius C. simili rõne ostendemus FH K ipsarũ AB C æq; multiplices esse. sumatur deinde N multiplex D, primo aũt maior, quàm FG. ergo rursus FG nõ est minor, quàm M; maior autem FG, quàm D. tota igitur FH superat DM, hoc est N; et K ipsam N non superat: quoniam FG maior existens, quàm GH, hoc est quàm K, non superat N. et similiter vt in iis, quæ superius dicta sũt, demõstrationẽ absoluemus. Inæqualiũ igitur magnitudinum maior ad eandẽ maiorem habet proportionẽ, quàm minor: et eadem ad minorẽ maiorem proportionẽ habet, quàm ad maiorẽ. quod ostẽdere oportebat.

1.huius.

1.com.not.

7.diffin.





SCHOLIVM.

Ergo AB ad D maiorem proportionem habet, quàm C ad D.] *quattuor sunt magnitudines, prima quidem AB, secunda D, tertia autem C, et quarta D. bis enim sumitur D, & vt secunda & vt quarta. atque est primae quidem AB multiplex FH: secundae vero D multiplex N, & tertiae C multiplex K. est igitur FH maior, quam N; quae quidem N multiplex est secundae D: K vero multiplex tertiae C, minor est, quam N, quae est multiplex quartae D. Itaque quoniã multiplex primae maior est multiplici secundae, multiplex autem tertiae non maior multiplici quartae; habebit AB ad D maiorem proportionem, quam C ad eandem D, per eam diffinitionem, quae dicit, quando aeque multiplicium multiplex quidem primae superauerit multiplicem secundae, multiplex autem tertiae non superauerit multiplicem quartae, tunc prima ad secundam maiorem proportionem habere dicetur, quàm tertia ad quartam.*

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

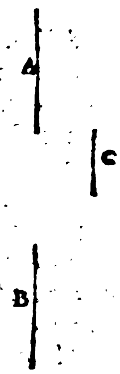
Quæ ad eandẽ, eandẽ proportionẽ habent, inter se ęquales sunt; et ad quas eadẽ, eadẽ hẽt proportionẽ, ipsæ inter se sunt æquales.

Habeat

Habeat enim vtraque ipsarum A B ad C eandem proportioné. Dico A ipsi B ęqualem esse. nam si non esset ęqualis, non haberet vtraque ipsarum A B ad C eãdem proportionem. habet autem. æqualis igitur est A ipsi B. Habeat rursus C ad vtramque ipsarum AB eandem proportionem. Dico A æqualem esse ipsi B. nisi enim ita sit, non habebit C ad vtramque A B eandem proportionem, habet autem. ergo A ipsi B necessario est æqualis. quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter se sunt: et ad quas eadem eandem habet proportionem, ipsæ inter se sunt æquales. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

Ex antecedente.



THEOREMA. X. PROPOSITIO. X.

Ad eãdé pportioné habétiũ quę maioré pportioné hét, illa maior est; ad quã vero eadé maioré habet proportionem, illa minor est.

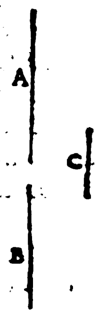
Habeat enim A ad C maiorem proportionem, quàm B ad C. Dico A, quàm B maiorem esse. si enim non est maior, vel æqualis ęst, vel minor. ęqualis autem non est A ipsi B, vtraque enim ipsarum AB ad C eãdem haberet proportionem. atqui eandem non habet. non igitur A ipsi B est ęqualis. Sed neque minor est A quàm B; haberet enim A ad C minorem proportionem, quàm B. atqui non habet minorem. non igitur A minor est, quàm B. ostensum autem est neque esse æqualé. ergo A quàm B maior erit. Habeat rursus C ad B maiorem proportionem, quàm C ad A. Dico B minorem esse, quàm A. si enim non est minor, vel æqualis est, vel maior. ęqualis vtique non est B ipsi A; etenim C ad vtramque ipsarũ A B eandẽ proportionem haberet. non habet autem. ergo A ipsi B non est ęqualis. Sed neque maior est B, quàm A; haberet enim C ad B minorem proportionem, quàm ad A. atqui non habet. non igitur B quàm A est maior. Ostẽsum aũt est neque ęqualẽ esse. ergo B minor erit, quàm A. Ad eandem igitur proportioné habétiũ, quæ maioré proportioné hét, illa maior est: et ad quam eadem maioré habet proportionem, illa minor est. quod oportebat demonstrare.

7. huius.

8. huius.

7. huius.

8. huius.



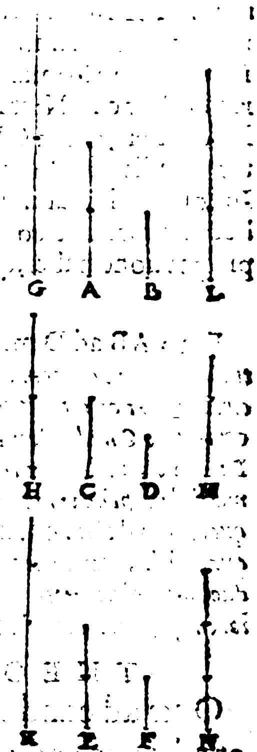
THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Quæ eidem eędem sunt proportiones, et inter se eędem sunt.

Sit enim vt A ad B, ita C ad D: vt autem C ad D, ita E ad F. Dico vt A ad B, ita esse E ad F. sumantur enim ipsarum quidem A C E æque multiplices G H K; ipsarum vero B D F alię vtcumque æque multiplices L M N. Quoniam igitur est vt A ad B, ita C ad D, et sumptæ sunt ipsarum A C ęque multiplices G H, et ipsarum BD aliæ vtcumque æque multiplices LM; si G superat L, et H ipsam M superabit; et si æqualis, ęqualis; et si minor, minor. rursus quoniam est vt C ad D, ita E ad F, et sumptę sunt ipsarũ CE ęque multiplices HK; ipsarũ vero DF aliæ vtcũque ęque multiplices MN, si H superat M, et K ipsam N superabit; et si ęqualis, æqualis; et si minor, minor. sed si H superat M, et G superabit L; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. quare si G superat L, et K ipsã N superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. et sunt GK quidem ipsarum AE æque multiplices; L N vero ipsarum B F aliæ vtcumque ęque multiplices. ergo vt A ad B, ita erit E ad F. quæ igitur eidem eædem sunt proportiones, et inter se eædem sunt. quod ostendisse oportuit.

Ex cõuersa 5. diffi.

5. diffin.



THEO-

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

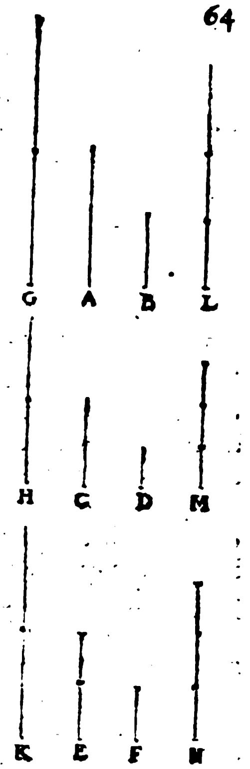
Si quotcũque magnitudines proportionales fuerint, vt vna antecedẽtiũ ad vnã cõsequẽtiũ, ita erũt antecedẽtes oẽs ad omnes cõsequẽtes.

Sint quotcũque magnitudines proportionales AB CD EF: et vt A ad B, ita sit C ad D, et E ad F. Dico vt A ad B. ita esse ACE ad BDF. sumantur enim ipsarum A C E ęque multiplices GHK; et ipsarũ BDF aliæ vtcumque æque multiplices LMN. Quoniam igitur vt A ad B, ita est C ad D, et E ad F: et sumptę sunt ipsarum quidem ACE æque multiplices GHK, ipsarum vero BDF aliæ vtcumque ęque multiplices LMN; si G superat L, et H ipsam M superabit, et K ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. quare et si G superat L, superabunt et GHK ipsas LMN; et si ęqualis, ęquales; et si minor, minores. suntq; G, et GHK ipsarũ A, et ACE æque multiplices: quoniã si fuerint quotcũque magnitudines quotcũque magnitudinũ æqualiũ numero, singulæ singularũ æque multiplices; quotuplex est vna magnitudo vnius, totuplices erũt et oẽs omniũ. eadẽ ratione et L et LMN ipsarum B, et BDF sunt æque multiplices. est igitur vt A ad B, ita ACE ad BDF. quare si quotcumque magnitudines proportionales fuerint, vt vna antecedentiũ ad vnã consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. quod demonstrare oportebat.

Per conuersam. 5. diffi.

1. huius.

5. diffi.



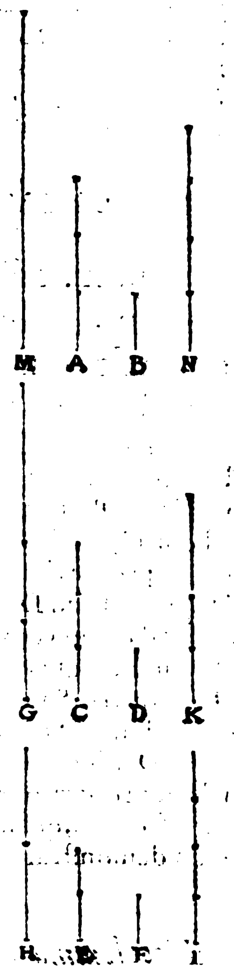
THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem proportionẽ habeat, quàm quinta ad sextã: et primã ad secundã maiorẽ habebit proportionẽ, quàm quinta ad sextã.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D; tertia autem C ad quartã D maiorem habeat proportionem, quàm quinta E ad sextã F. Dico et primam A ad secundam B maiorem proportionẽ habere, quàm quintam E ad sextam F. Quoniam enim C ad D maiorem proportionem habet, quàm E ad F, sunt quędã ipsarum CE æque multiplices, et ipsarum DF aliæ vtcumque æque multiplices: et multiplex quidem C superat multiplicẽ D; multiplex vero E non superat multiplicem F. Sumantur, et sint ipsarum CE æquemultiplices GH, et ipsarum DF aliæ vtcumque æquemultiplices KL, ita vt G quidem superet K; H vero ipsam L non superet: et quotuplex est G ipsius C, totuplex sit et M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totuplex sit et N ipsius B. et quoniam est vt A ad B, ita C ad D, et sumptæ sunt ipsarum AC æquemultiplices MG, et ipsarum BD aliæ vtcumque æque multiplices NK: si M superat N, et G ipsam K superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor Sed G superat K, ergo et M ipsam N superabit. H vero non.

Per conuersam. 7. diffi.

Per cõuersã 5. diffi.



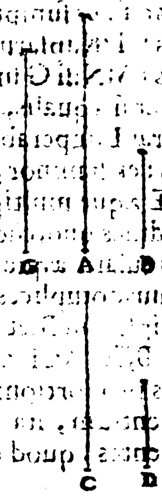
superat L. suntq; MH ipsarum AE æque multiplices; et NL ipsarum B F aliæ vtcum que æque multiplices. ergo A ad B maiorem proportionem habebit, quàm E ad F. si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem proportionē habeat, quàm quinta ad sextam: et prima ad secundam maiorem habebit proportionem, quàm quinta ad sextam. quod ostendere oportebat.

7. diffi.

F. C. COMMENTARIVS.

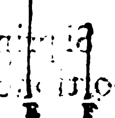
Eodem modo demonstrabitur si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem proportionem habeat, quàm quinta ad sextam: et primam ad secundam minorem proportionem habere, quàm quintam ad sextam.

Quòd si prima ad secundam maiorem habeat proportionē, quàm tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem habeat, quàm quinta ad sextam: et prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm quinta ad sextam.



Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D; & C ad D maiorem habeat, quàm E ad F. dico A ad B maiorem habere proportionem, quàm E ad F. fiat enim vt C ad D, ita G ad B; erit G minor, quàm A. & quoniam G ad B eandem proportionem habet, quàm C ad D; & C ad D maiorem habet proportionem, quam E ad F; habebit & G ad B maiorem proportionem, quàm E ad F. quare A ad B multo maiorem proportionem habebit, quàm E ad F. & similiter demonstrabitur si prima ad secundam minorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; tertia vero ad quartam habeat minorem, quàm quinta ad sextam: & primam ad secundam minorem habere proportionem, quàm quintam ad sextam.

8. huius.



THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XIIII.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; prima autem maior sit, quàm tertia; & secunda quàm quarta maior erit; & si æqualis, æqualis; et minor, minor.

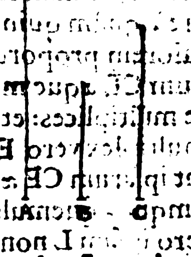
Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D; maior autem sit A quàm C. dico et B quàm D maiorem esse. quoniam enim A maior est quā C, et alia vtcūque magnitudo B; habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. sed vt A ad B, ita C ad D. ergo et C ad D maiorem habebit proportionem, quàm C ad B. ad quam vero eadem maiorem proportionem habet, illa minor est. quare D est minor, quàm B: ac propterea B quā D maior erit. Similiter demonstrabimus et si A æqualis sit ipsi C; et B ipsi D esse æqualem: et si A sit minor, quàm C; et B quàm D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; prima autem maior sit, quàm tertia: & secunda, quàm quarta maior erit; & si æqualis, æqualis; et si minor, minor. quod demonstrare oportebat.

8. huius.

Ex antecedente.

10. huius.

A
B



SCHOLIVM.

Hoc lemma est sextidecimi theorematis, quemadmodum vigesimum

mum est lemma vigesimi secundi, & vigesimum primum vigesimi tertij.

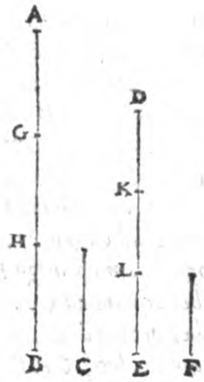
F. C. COMMENTARIVS.

Similiter demonstrabimus et si A æqualis sit ipsi C, et B ipsi D esse ęqualem] A
Quoniam enim A est aequalis C, habebit A ad B eandem proportionem, quam C ad B. vt autem A ad B, ita C ad D. ergo & C ad D eandem habebit, quam C ad B. ad quas autem eadem eandem 11.huius.
habet proportionem ipsae aequales sunt. ergo B ipsi C est aequalis. 9.huius.

Et si A sit minor, quàm C, et B quàm D minorem esse,] *nam cum A minor sit, quàm C;* 8.huius.
habebit A ad B minorem proportionem quàm C ad B. sed vt A ad B, ita C ad D. quare ex antecedente & C ad D minorem habebit proportionem, quàm C ad B; ac propterea C ad B maiorem habebit, quam C ad D. ergo B quàm D minor erit. B 10.huius.

TEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Partes eodem modo multiplicium inter se cõparatę eandem habent proportionem.



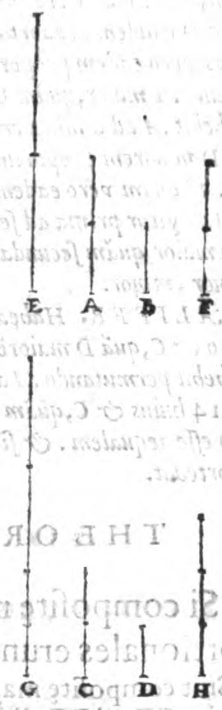
Sit enim AB æque multiplex C, et DE ipsius F. Dico vt C ad F, ita esse AB ad DE; Quoniam enim ęque multiplex est AB ipsius C, et DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi C, totidem erunt et in DE æquales F. diuidatur AB in magnitudines ipsi C ęquales, quæ sint AG GH HB. et DE diuidatur in magnitudines ęquales F, videlicet in DK KL LE. erit igitur ipsarum AG GH HB multitudo ęqualis multitudini DK KL LE. et quoniam æquales sunt AG GH HB, suntq; DK KL LE inter se æquales; vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, et HB ad LE. atque erit vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur vt AG ad DK, ita AB ad DE. Sed AG ipsi C est æqualis, et DK ipsi F. ergo vt C ad F, ita erit AB ad DE. partes igitur eodem modo multiplicium inter se comparatæ eandem habent proportionem. quod ostendendum fuit.

* 11.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

* Vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, et HB ad LE.] *Ex ea, quam nos ad septimam huius, addidimus.*

THEOREMA. XVI. PROPOSITIO XVI.



Si quattuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt.

Sint quattuor magnitudines proportionales ABCD, sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico et permutatas proportionales esse, videlicet vt A ad C, ita esse B ad D. sumantur enim ipsarũ quidem AB æque multiplices EF; ipsarum vero CD aliæ vtcumque æque multiplices GH. et quoniam æque multiplex est E ipsius A, et F ipsius B; partes autem eodem modo multiplicium inter se comparatæ eadem habent proportionem: erit vt A ad B, ita E ad F: vt autem A ad B, ita C ad D. ergo & vt C ad D, ita E ad F. rursus quoniam GH sunt ipsarum CD æque multiplices; partes autem eodem modo multiplicium

Ex antecedente. 11.huius.

R eandem

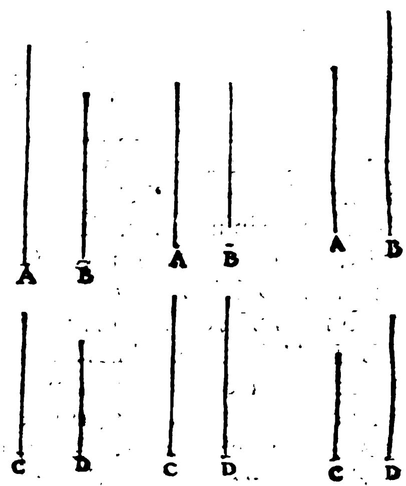
eandem proportionem habent inter se comparatæ, erit vt C ad D, ita G ad H. sed
14.huius. vt C ad D, ita E ad F. ergo et vt E ad F, ita G ad H. Quòd si quattuor magnitudines proportionales sint, prima autem maior sit, quàm tertia; et secunda quàm quarta maior erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Si igitur E superat G, et F ipsam H superabit, et si ęqualis, æqualis; et si minor, minor; suntq; EF ipsarũ AB æque mul
5.diffi. tiplices, et CH ipsarũ CD aliæ vtcumque ęque multiplices. ergo vt A ad C, ita erit B ad D. Si igitur quattuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatę proportionales erunt. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quae demonstrata sunt, illud quoque demonstrabitur.

Si prima ad secundam eandem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; sitq; prima maior, quàm secunda: et tertia, quàm quarta maior erit; et si æqualis, ęqualis; et si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem habeat proportionem, quam tertia C ad quartam D: & sit A maior, quàm B. Dico & C quàm D maiorem esse. Quoniam enim A ad B eandem proportionem habet, quam C ad D; habebit permutando ex antecedente A ad C eandem proportionem, quam B ad D. Rursus quoniam A maior est quam B, alia vero vtcũque est C; habebit A ad C maiorem proportionem,
8.huius. *quàm B ad C. Sed vt A ad C, ita est B ad D, quod demonstratum est. ergo B ad D maiorem proportionem*
10.huius. *habet, quàm ad C. Ad quam vero eadem maiorem habet proportionẽ, illa minor est. quare D minor est, quàm C; ideoq; C maior, quàm D. Sit deinde A aequalis ipsi B. dico & C ipsi D aequalem esse. nam cum A*
7.huius. *& B sint aequales. habebit A ad C proportionem eãdem, quam B ad C. vt autem A ad C, ita B ad D. ergo B ad D eandem proportionem habet, quam ad C. Ad*
9.huius. *quas vero eadem proportionem eãdem habet, illae aequales sunt. ergo C ipsi D est aequalis. Sit postremo A minor, quàm B. Dico & C, quàm D minorem esse. quoniam enim A minor est quàm B,*
8.huius. *habebit A ad C minorem proportionem, quàm B ad C. Sed vt A ad C, ita B ad D. habebit igitur B ad D minorem proportionem, quàm ad C. ideoq; B ad C maiorem proportionem habebit, quàm ad*
10.huius. *D. Ad quam vero eadem maiorem habebit proportionem, illa minor est. ergo C quàm D minor erit. si igitur prima ad secundam eandem proportioaem habeat, quam tertia ad quartam: sitq; prima maior, quàm secunda, & tertia, quàm quarta maior erit; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor.*

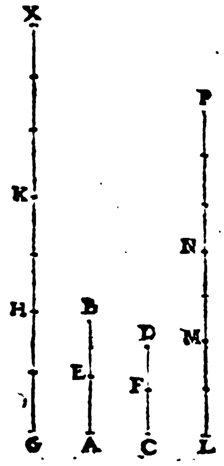


ALITER. Habeat A ad B eandem proportionem, quam C ad D: sitq; A maior, quàm B. Dico & C, quã D maiorẽ esse. Quoniã enim A ad B eandem proportionem habet quam C ad D; habebit permutando A ad C eandem proportionem, quam B ad D, sed A maior est quàm B. ergo ex 14 huius & C, quàm D. maior erit. Eodem modo demonstrabimus si A sit aequalis B, & C ipsi D esse aequalem. & si A sit minor, quàm B; & C quàm D minorem esse. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XVII.

Si compositę magnitudines sint proportionales, et diuisæ proportionales erunt.

Sint compositę magnitudines proportionales AB, BE, CD, DF: sitq; vt AB ad BE, ita CD ad DF. dico etiam diuisas proportionales esse, videlicet vt AE ad EB, ita esse CF ad FD. sumantur enim ipsarum quidem AE EB CF FD æque multiplices GH HK LM MN, ipsarum vero EB FD aliæ vtcumque æque multiplices KX NP. et quoniã æque multiplex est GH ipsius AE, et HK ipsius EB; erit GH ipsius AE æque multiplex, et GK ipsius AB. æque autem multiplex est GH ipsius AE, et LM ipsius CF. ergo GK æque multiplex est AB, et LM ipsius CF. rursus quoniam æque multiplex est LM ipsius CF, et MN ipsius FD; erit LM æque multiplex CF, et LN ipsius CD. Sed æque multiplex erat LM ipsius CF, & GK ipsius AB. æq; igitur multiplex est GK ipsius AB, et LN ipsius CD. quare GK LN ipsarum AB CD æque multiplices erunt. rursus quoniam æque multiplex est HK ipsius EB, et MN ipsius FD; est autem et KX ipsius EB æque multiplex, & NP ipsius FD: & composita HX ipsius EB æque multiplex est, et MP ipsius FD. quòd cùm sit vt AB ad BE, ita CD ad DF, et sumptæ sint ipsarum quidem AB CD æque multiplices GK LN, ipsarum vero EB FD aliæ vtcumque æque multiplices HX MP; si GK superat HX, & LN superabit MP; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. superet igitur GK ipsam HX, communiq; ablata HK, et GH ipsam KX superabit. sed si GK superat HX, & LN superat MP. itaque superet LN ipsam MP, cõmuniq; MN ablata, & LM superabit NP. quare si GH superat KX, & LM ipsam NP superabit. Similiter demonstrabimus & si GH sit æqualis KX, & LM ipsi NP esse æqualem, & si minor, minorem. sunt autem GH LM ipsarum AE CF ęque multiplices, & ipsarum EB FD aliæ vtcumque ęque multiplices KX NP. ergo vt AE ad EB, ita erit CF ad FD. Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, & diuisæ proportionales erunt. quod demonstrare oportebat.

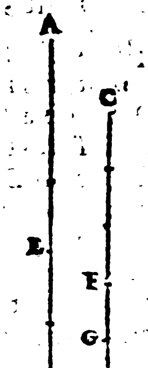


1. huius. 11. huius. 1. huius. 11. huius. 2. huius. ex conuersa. 5. diffi. 5. diffi.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

Sint diuisę magnitudines proportionales AE EB CF FD: & vt AE ad EB, ita CF ad FD. Dico etiam cõpositas proportionales esse, videlicet vt AB ad BE, ita esse CD ad DF. Si enim non est vt AB ad BE, ita CD ad DF; erit vt AB ad BE, ita CD vel ad minorem, quàm DF, vel ad maiorẽ. sit primũ ad minorẽ, nẽpe ad DG. & q̃m est vt AB ad BE, ita CD ad DG, cõpositę magnitudines sunt proportionales. ergo et diuisæ proportionales erũt. est igitur vt AE ad EB, ita CG ad GD. ponitur aũt & vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare & vt CG ad GD, ita CF ad FD. at CG prima maior est, quã tertia CF. ergo & secũda DG, quàm quarta DF maior erit. sed & minor, quod fieri non potest. non igitur est vt AB ad BE, ita CD ad DG. similiter ostendemus neque esse ad maiorem, quàm DF. ad ipsam igitur DF sit necesse est. quare si diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositę proportionales erunt. quod oportebat demonstrare.



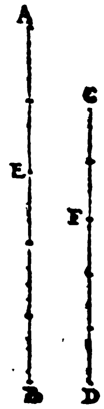
Ex antecedente. 11. huius. 14. huius.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

Si fuerit vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit, vt tota ad totam.

Sit enim vt tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. Dico et reliquã

EB ad reliquam FD ita esse, vt totam AB ad totam CD. quoniã enim
16.huius. est vt tota AB ad totam CD, ita AE ad CF; & permutando erit vt B
A ad AE, ita DC ad CF. et quoniam compositæ magnitudines sunt
17.huius. proportionales, & diuisæ proportionales erunt. vt igitur BE ad EA,
ita DF ad FC, rursusq; permutando vt BE ad DF, ita EA ad FC. sed
11.huius. vt AE ad CF, ita posita est AB ad CD. et reliqua igitur EB erit ad reliquam FD, vt tota AB ad totam CD. quare si fuerit vt tota ad totã, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam, erit vt tota ad totam. quod demonstrare oportebat.



Et quoniam ostensum est vt AB ad CD, ita esse EB ad FD, erit permutando vt AB ad BE, ita CD ad DF. ergo compositæ magnitudines proportionales sunt. ostẽsum autem est vt BA ad AE, ita DC ad CF, quod est per conuersionem rationis.

COROLLARIVM.

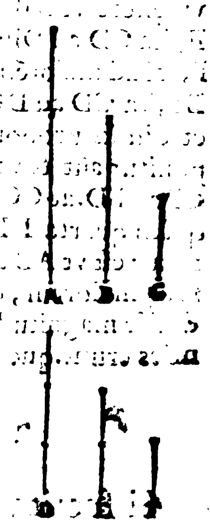
Ex hoc igitur perspicuum est si compositæ magnitudines sint proportionales; & per cõuersionem rationis proportionales esse.

Factę autem sunt proportiones et in æque multiplicibus, et in analogijs. nam si prima secundæ æque multiplex sit, atque tertia quartę; erit et vt prima ad secundã, ita tertia ad quartam. sed non item ex contrario cõuertitur. Si enim sit vt prima ad secundam, ita tertia ad quartam; nõ omnino erit prima quidem secundę ęque multiplex, tertia vero quartæ, velut in sesquialteris, vel in sesquitertijs proportionibus, vel alijs eiusmodi. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA. XX. PROPOSITIO. XX.

Si sint tres magnitudines, et alię ipsis numero æquales, quæ binę sumantur, et in eadem proportione; ex æquali autem prima maior sit, quàm tertia: et quarta quàm sexta maior erit; & si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, et aliæ ipsis numerò æquales D E F binæ sumptę, et in eadem proportione, sitq; vt A ad B, ita D ad E; et vt B ad C, ita E ad F; ex ęquali autem maior sit A, quã C. Dico et D quàm F maiorem esse; et si æqualis, ęqualem; et si minorem, minorem. Quoniam enim A maior est, quàm C, alia vero vt-
8.huius. cumque B, et maior ad eandem maiorem habet proportionem,
A quàm minor: habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt A ad B, ita D ad E: et conuertendo vt C ad B, ita F ad E. ergo et D ad E maiorem habet proportionem, quàm F ad
10.huius. E. Ad eandem vero proportionem habentium quæ maiorem
B habet proportionem, illa maior est. maior igitur est D quàm F. similiter ostendemus et si A sit æqualis C, et D ipsi F ęqualem esse; et si minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, et aliæ ipsis numero ęquales, quæ binę sumantur, et in eadem proportione; ex æquali autem prima maior sit, quàm tertia: et quarta quàm sexta maior erit; et si ęqualis, ęqualis; et si minor, minor. quod ostendere oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

A Habebit A ad B maiorem proportionẽ, quàm C ad B. sed vt A ad B, ita D ad E]

Ex his sequitur per decimamtertiam huius D ad E maiorem proportionem habere, quàm C ad B. vt autem C ad B; ita F ad E. quare per eandem D ad E maiorem habet proportionem, quàm F ad E.

Similiter ostendemus et si A sit æqualis C, et D ipsi F æqualem esse; et si minor, minorem.

Si enim A sit aequalis C, habebit A ad B proportionem eandem, quam C ad B. Sed vt A ad B, ita D ad E, & vt C ad B, ita F ad E. quare D ad E eandem proportionem habebit, quam F ad E. quae vero ad eandẽ, eandem habent proportionem, inter se aequales sunt. ergo D ipsi F est aequalis. Quòd si A ponatur minor quàm C, habebit A ad B proportionem minorem, quàm C ad B. vt autem A ad B, ita D ad E. ergo D ad E minorem proportionem habet, quàm C ad B. Sed vt C ad B, ita F ad E. habebit igitur D ad E minorẽ proportionẽ, quàm F ad E; ac propterea D quàm F, minor erit.

B

7.huius.

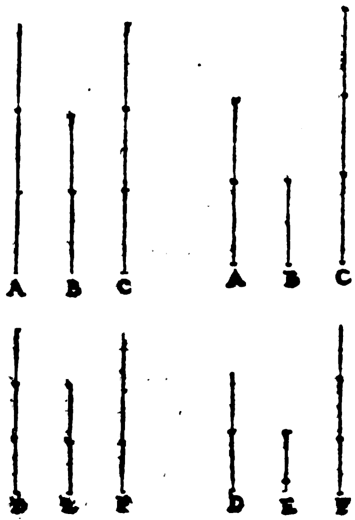
11.huius.

9.huius.

8.huius.

13.huius.

10.huius.



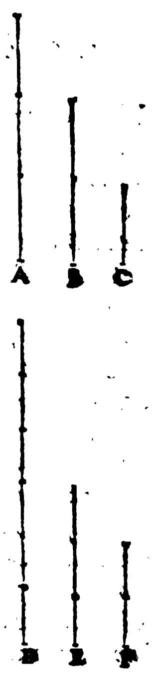
THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quę binę sumantur, et in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, et ex æquali prima maior sit quàm tertia: et quarta quàm sexta maior erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines proportionales ABC, et alię ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ, et in eadem proportione. sit autem perturbata earum analogia, videlicet vt A quidem ad B, ita E ad F; vt vero B ad C, ita D ad E; et ex ęquali A maior sit, quàm C. Dico et D quàm F maiorem esse; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem. Quoniam enim maior est A, quàm C, alia vero B; habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt A ad B, ita E ad F, et conuertendo vt C ad B, ita E ad D. quare et E ad F maiorem habebit proportionem, quàm E ad D. ad quam vero eadem maiorem proportionem habet, illa minor est. minor igitur est F, quàm D; ac propterea D quàm F maior erit. Similiter ostendemus et si A sit æqualis C, et D ipsi F esse æqualem; et si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur, et in eadem proportione; sit autem perturbata earũ analogia, et ex ęquali prima maior sit, quàm tertia: et quarta quàm sexta maior erit; et si ęqualis, æqualis; et si minor, minor. quod demonstrare oportebat.

8.huius.

10.huius.

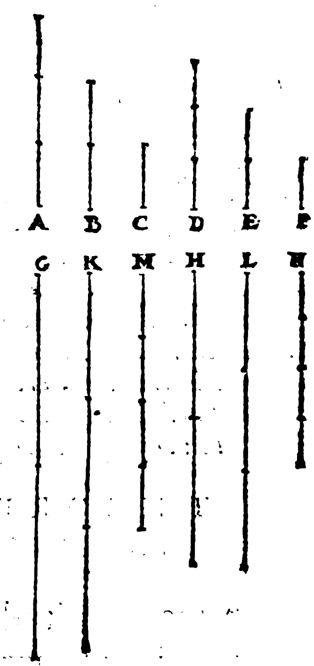


THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

Si sint quotcunque magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione; et ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint quotcumque magnitudines A B C, et aliæ ipsis numero æquales DEF binę sumptæ in eadem proportione, sitq; ut A quidem ad B, ita D ad E; ut autem B ad C, ita E ad F. Dico et ex æquali in eadem proportione esse vt A ad C, ita D ad F. sumantur enim ipsarum quidem A D æque multiplices G H; ipsarum vero BE alię vtcumque æque multiplices KL, et ipsarum CF aliæ vtcumque æque multiplices MN. Quoniā igitur est vt A ad B, ita D ad E, et sumptę sunt ipsarum AD ęque multiplices G H, et ipsarum BE alię vtcumque æque multiplices K L; erit vt G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit vt K ad M, ita L ad N. et cū sint tres magnitudines GKM, et alię ipsis numero ęquales H L N, binæ sumptæ, et in eadem proportione; ex æquali si G superat M, et H ipsā N superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor; suntq; GH ipsarū AD æq; multiplices, et MN ipsarum CF aliæ utcumque æque multiplices. vt igitur A ad C, ita erit D ad F. quare si sint quotcumque magnitudines, et aliæ ipsis numero ęquales, quæ binę sumantur, in eadem proportione; et ex ęquali in eadem proportione ęrunt. quod demonstrare oportebat.

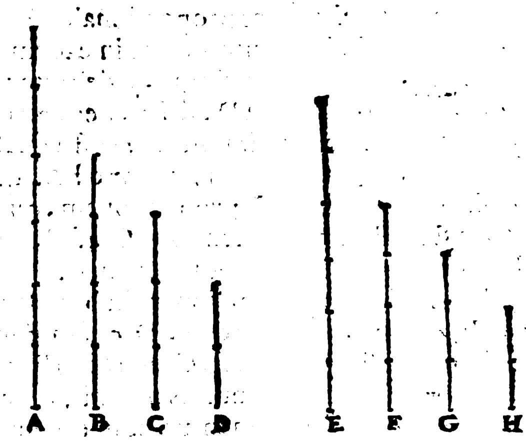
4. huius. 20. huius. 5. diffi.



F. C. COMMENTARIVS.

Idem demonstrabitur etiam si plures sint, quàm tres magnitudines.

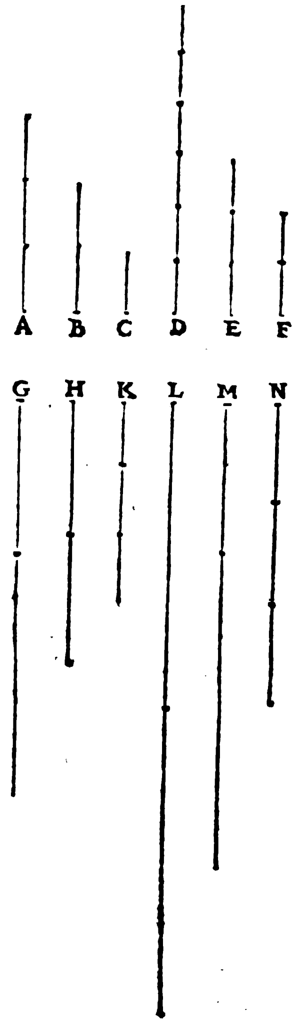
Sint enim quattuor magnitudines ABCD, & aliae ipsis numero ęquales EFGH binae sumptae in eadem proportione, sitq; vt A ad B, ita E ad F, ut aūt B ad C, ita F ad G, et vt C ad D, ita G ad H. Dico ex aequali ut A ad D, ita esse E ad H. Quoniam enim est vt A ad B, ita E ad F, et vt B ad C, ita F ad G; & ex aequali per ea, quae proxime ostensa sunt, vt A ad C, ita erit F ad G, estq; vt C ad D, ita G ad H. Quare cum rursus tres magnitudines sint ACD, et aliae ipsis numero aequales EGH binae sumptae in eadem proportione; erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H, quod demonstrare oportebat. & eodē modo demonstrabitur in alijs eiusmodi magnitudinibus quotquot fuerint, non solum in ordinata analogia, sed et in perturbata, semper enim ad tres magnitudines eiusdem ordinis similiter reducentur.



THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione, sit autem perturbata earum analogia; et ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint tres magnitudines A B C, et alię ipsis
numero æquales binæ sumptæ in eadem propor-
tione D E F; sit autem perturbata earum analo-
gia, et sit vt A ad B, ita E ad F, & vt B ad C, ita D
ad E. Dico vt A ad C, ita esse D ad F. sumantur ip
sarum quidem A B D ęque multiplices GHK; A
ipsarum vero CEF alię vtcumque ęque multipli-
ces L M N. & quoniam GH æque multiplices
sunt ipsarum A B, partes autem eodem modo
multiplicium eãdem habent proportionem; erit 15.huius.
vt A ad B; ita G ad H. & simili ratione vt E ad F,
ita M ad N. atque est vt A ad B, ita E ad F. vt igi-
tur G ad H, ita M ad N. rursus quoniam est vt B 11.huius.
ad C, ita D ad E, & sumptę sunt ipsarũ B D ęque
multiplices H K; ipsarum vero C E aliæ vtcum-
que æque multiplices L M: erit vt H ad L, ita K B
ad M. ostensum autem est et vt G ad H, ita esse M 4.huius.
ad N. Quoniam igitur tres magnitudines propor
tionales sunt G H L, & aliæ ipsis numero ęqua-
les K M N binę sumptæ in eadem proportione,
estq; ipsarum perturbata analogia; ex æquali si G 21.huius.
superat L, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æ-
qualis; & si minor, minor. sunt autem GK ipsarũ
A D æque multiplices: & LN ęque multiplices
ipsarum CF. vt igitur A ad C, ita erit D ad F. qua 5.diffi.
re si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipsis nume
ro æquales, quæ binę sumantur in eadem propor
tione, sit aũt perturbata earum analogia; & ex æ-
quali in eadem proportione erunt. quod demon
strare oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

Dico vt A ad C, ita esse D ad F] *in greco codice impresso hęc desiderantur.* λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ, οὕτω τὸ δ πρὸς τὸ ζ A

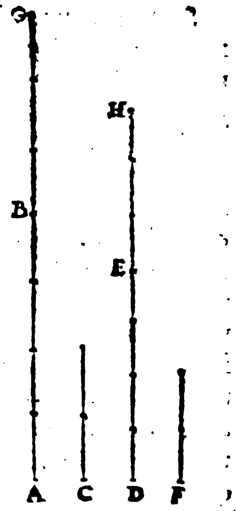
Erit vt H ad L, ita K ad M. ostensum autem est vt G ad H, ita esse M ad N] *hoc loco in gręco codice impesso, & in zamberti versione multa inseruntur superuacanea, quae à nobis consulto omissa sunt.* B

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO. XXIIII.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima & quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia, & sexta ad quartam.

Prima enim AB ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia DE ad quartam F. habeat autem & quinta BG ad secundam C proportionem eandem, quam sexta EH ad quartam F. dico & compositam primam, & quintam AG ad secundam C eandem proportionem habere, quam tertiam, & quintam DH ad quar
tam

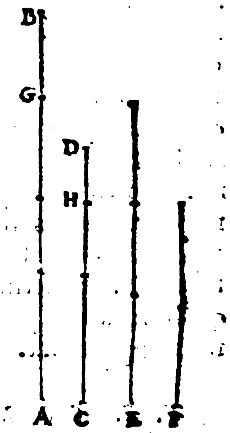
tam F. quoniam enim est vt BG ad C, ita EH ad F; erit conuertendo vt C ad BG, ita F ad EH. & quoniam vt AB ad C, ita est
22.huius. DE ad F, vt autem C ad BG, ita F ad EH; erit ex ęquali vt AB ad BG, ita DE ad EH. quòd cum diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. vt igitur AG
A. ad GB, ita est DH ad HE. sed & vt GB ad C, ita EH ad F. ergo ex æquali vt AG ad C, ita erit DH ad F. si igitur prima ad secũdam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima & quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia & sexta ad quartam. quod ostendere oportebat.



THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXV.

Si quattuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum, & minima duabus reliquis maiores erunt.

Sint quattuor magnitudines proportionales AB CD E F; & sit vt AB ad CD, ita E ad F. sit autem maxima ipsarum AB & F minima. Dico AB F ipsis CD E maiores esse. ponatur enim ipsi quidem E ęqualis AG, ipsi vero F ęqualis CH. Quoniam igitur est vt AB ad CD, ita E ad F; estq; AG æqualis E, & CH ęqualis F; erit vt AB ad DC, ita AG ad CH. & quoniam vt tota AB
19.huius. ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH; & reliqua GB ad reliquam HD erit vt tota AB ad CD totam. maior autem est AB, quàm CD. ergo & GB, quàm HD maior. quòd cum AG sit ęqualis ipsi E, & CH ipsi F; erunt AG F ipsis CH E æquales. si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo GB HD inæqualibus existentibus, quippe cum GB sit maior, si ipsi quidem GB addantur AG F, ipsi verò HD addantur CH E, fient AB F ipsis CD E necessario maiores. Si igitur quattuor
A magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima duabus reliquis maiores erunt. quod demonstrare oportebat.

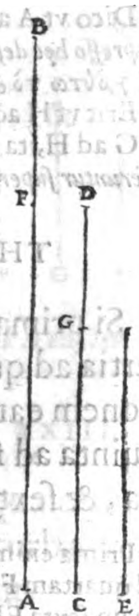


F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quae proxime demonstrata sunt, possumus etiam illud theorema demonstrare.

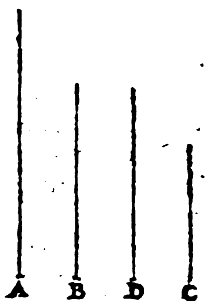
Sit tres magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima quàm dupla reliquæ maiores erunt.

Sint tres magnitudines proportionales AB CD E, quarum maxima AB, sitq; vt AB ad CD, ita CD ad E. Dico AB E maiores esse, quàm duplam ipsius CD. ponatur AF aequalis ipsi CD, & CG ipsi E. Quoniam igitur vt AB ad CD, ita CD ad E; erit vt AB ad CD, ita AF ad CG, videlicet vt tota ad to-
19.huius. *tam, & ablata ad ablatam. quare & reliqua FB ad reliquam GD est, vt AB ad CD. sed AB ponitur maior, quàm CD. ergo & FB, quàm GD est maior. aequalis autem est AF ipsi CD, & CG ipsi E. Sunt igitur AF E ipsis CD CG aequales. quòd si inęqualibus aequalia addantur, tota inaequalia erunt. itaque additis AF E ipsi FB, quę maior est, quàm GD, & additis CD CG ipsis GD, fient AB E maxima scilicet, & minima maiores, quàm dupla CD. Si igitur tres magnitudines fuerint proportionales maxima ipsarum & minima, quàm dupla reliquae maiores erunt. quod demonstrare oportebat.*



Aliter.

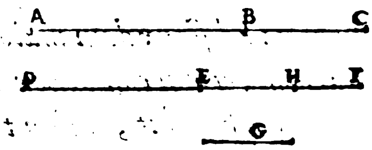
Aliter. Sint tres magnitudines proportionales ABC, & ipsi B ponatur aequalis D. Itaque quoniam est vt A ad B, ita B ad C, erit & vt A ad B, ita D ad C. sunt igitur quattuor magnitudines proportionales ABDC. quare ex iam demonstratis AC maiores erunt, quàm B D, hoc est quàm ipsius AB dupla.



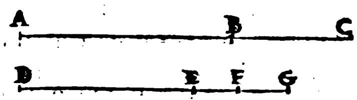
Hec Euclides de proportionibus scripta reliquit. Sed quoniam Archimedes, Apolloniusq́; & alij posteriores nonnullis theorematibus, quae ad huiusmodi tractationem pertinent, tamquam demonstratis vtuntur; optimum fore iudicauimus, si ex collectionibus mathematicis Pappi ea in hunc locum transferremus, immutato tamen ordine, & quibusdam additis, detractisue, prout res ipsa exigere videbatur.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXVI.

Si prima ad secundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; & conuertendo secunda ad primam minorem proportionẽ habebit, quàm quarta ad tertiam.



Habeat AB ad BC maiorem proportionẽ, quàm DE ad EF. Dico CB ad BA minorem proportionem habere, quàm FE ad ED. vt enim AB ad BC, ita sit DE ad aliam aliquã, vt ad G. ergo DE ad G maiorem habebit proportionem, quàm DE ad EF: ac propterea G minor erit, quàm EF. ponatur ipsi G aequalis EH. Quoniam igitur est vt AB ad BC, ita DE ad EH; erit conuertendo vt CB ad BA, ita HE ad ED. sed HE ad ED minorem proportionem habet, quàm FE ad ED. ergo & CB ad BA minorem habebit proportionem, quàm FE ad ED. quod demonstrare oportebat. 8. huius. 8. huius.



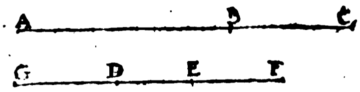
Similiter autem & si AB ad BC minorem proportionem habeat, quàm DE ad EF; demonstrabimus conuertendo CB ad BA maiorem habere proportionem, quàm FE ad ED. sed vt AB ad BC, ita sit DE ad aliam, vt ad EG, quae maior erit, quàm EF. quare conuertendo vt CB ad BA, ita GE ad ED. at GE ad ED maiorem habet proportionem, quàm FE ad ED. ergo CB ad BA maiorem proportionem habebit, quàm FE ad ED. 8. huius.

COROLLARIUM.

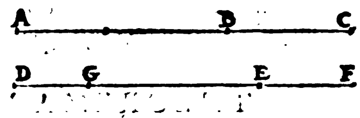
Ex his constat, si AB ad BC maiorem proportionem habeat, quàm DE ad EF, & FE ad ED maiorem habere proportionem, quàm CB ad BA. & si AB ad BC minorem habeat proportionem, quàm DE ad EF, & FE ad ED minorem proportionem habere, quàm CB ad BA.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; & permutando prima ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm secunda ad quartam.



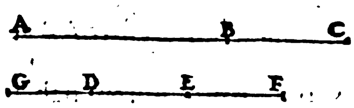
Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico AB ad DE maiorem proportionem habere, quàm BC ad EF. vt enim AB ad BC, ita alia quædam GE
8.huius. sit ad EF. manifestum est eam maiorem esse,
8.huius. quàm DE. quare permutãdo vt AB ad GE, ita est BC ad EF. habet autem AB ad DE maiorem proportionem, quàm AB ad GE, hoc est quàm BC ad EF. ergo AB ad DE maiorem proportionem habebit, quàm BC ad EF. quod oportebat demonstrare.



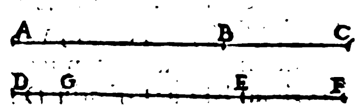
Eadem ratione & si AB ad BC minorem habeat proportionem, quàm DE ad EF; sequetur permutando AB ad DE minorem proportionem habere, quàm BC ad EF. erit enim vt AB ad BC, ita alia quędam GE ad EF, quę minor sit, quam DE. Sed AB ad DE minorẽ habet proportionem, quàm AB ad GE, videlicet quàm BC ad EF. habebit igitur AB ad DE minorem, proportionem, quàm BC ad EF.

THEOREMA. XXVIII. PROPOSITIO. XXVIII.

Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; etiam componendo prima & secunda ad secundam maiorẽ proportionem habebit, quàm tertia & quarta ad quartam.



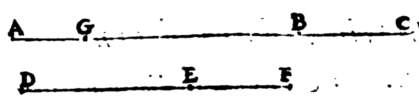
Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico AC ad CB maiorem habere proportionem, quàm DF ad
8.huius. FE, vt enim AB ad BC, ita sit alia quędam GE ad EF. erit GE maior, quàm DE. quoniã
18.huius. igitur est vt AB ad BC, ita GE ad EF; erit componẽdo vt AC ad CB, ita GF ad FE.
8.huius. Sed GF ad FE maiorem proportionem habet, quàm DF ad FE. ergo & AC ad CB
13 huius. maiorem habebit proportionem, quàm DF ad FE. quod demonstrare oportebat.



Quòd si AB ad BC minorem proportionem habeat, quàm DE ad EF; habebit etiam componẽdo AC ad CB minorem proportionem, quàm DF ad FE. rursus enim quoniam
8.huius. AB ad BC minorem proportionem habet, quàm DE ad EF, si vt AB ad BC, ita sit alia quædam ad EF, velut GE, erit ea minor quàm DE; & vt AC ad CB, ita erit GF ad FE. Sed GF ad FE minorem habet proportionem, quàm DF ad FE. ergo & AC ad CB minorem proportionem habebit quàm DF ad FE.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO. XXIX.

Si prima & secunda ad secundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia, & quarta ad quartam; & diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam.

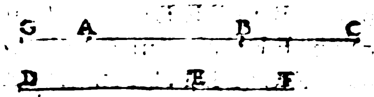


Habeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. Dico AB ad BC maiorem proportionem habere, quàm DE ad EF. vt enim DF, ad FE, ita sit alia quę
8 huius. dam GC ad CB. erit vtique GC minor,

quàm

quàm AC: & diuidendo GB ad BC, vt DE ad EF. at AB ad BC maiorem proportionem habet, quàm GB ad BC. ergo & AB ad BC maiorem habebit proportionem, quàm DE ad EF. 17.huius. 13.huius.

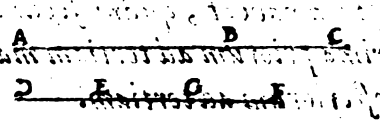
Si vero AC ad CB minorem habeat proportionem, quàm DF ad FE; & diuidendo AB ad BC minorem proportionem habebit, quàm DE ad EF. si enim rursus fit vt DF ad FE, ita alia quędam GC ad CB; erit GC quàm AC maior: atque erit diuidendo GB ad BC, vt DE ad EF. habet autem AB ad BC minorem proportionem, quàm GB ad BC. ergo & minorem proportionem habebit, quàm DE ad EF. 8.huius. et 17.huius.



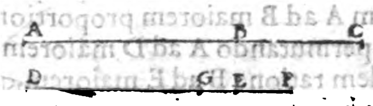
THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Si prima & secunda ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia & quarta ad quartam; per conuersionem rationis prima & secunda ad primam minorem habebit proportionem, quàm tertia & quarta ad tertiam.

Habeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. Dico CA ad AB minorem habere proportionem, quàm FD ad DE. fit enim vt AC ad CB, ita DF ad aliam quã dam, erit vtique ad minorem, quàm FE, velut ad FG. quare per conuersionem rationis vt CA ad AB, ita erit FD ad DG. sed FD ad DG minorem proportionem habet, quàm FD ad DE. ergo & CA ad AB minorem habebit proportionem, quàm FD ad DE. Corol.19.huius.



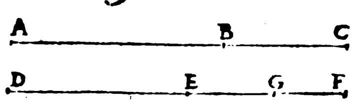
Similiter autem & si AC ad CB minorem proportionem habeat, quam DF ad FE; habebit per conuersionem rationis CA ad AB maiorem proportionem, quàm FD ad DE. erit enim vt AC ad CB, ita DF ad maiorem quàm FE. reliqua vero manifesta erunt.



THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

Si prima ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm secunda ad quartam, etiam prima ad tertiam habebit maiorem proportionem, quàm prima & secunda ad tertiam & quartam.

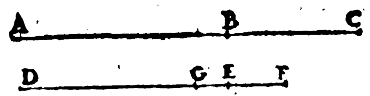
Habeat AB ad DE maiorem proportionem, quàm BC ad EF. Dico & AB ad DE maiorem proportionẽ habere, quàm AC ad DF. Sit enim vt AB ad DE, ita BC ad aliam. erit igitur ad minorem, quàm EF, velut ad EG. tota igitur AC ad totam DG est, vt AB ad DE. Sed AC ad DG maiorem proportionem habet, quàm ad DF. ergo AB ad DE maiorem habebit proportionem, quàm AC ad DF. et manifestum est totam AC ad totam DF minorem proportionem habere, quàm AB ad DE. & si minor sit proportio partis, totius maior erit. 12.huius. 8.huius.



THEOREMA XXXII. PROPOSITIO. XXXII.

Si tota ad totam maiorem habeat proportionem, quàm ablata ad abla *tam, & reliqua ad reliquam maiorem proportionem habebit, quàm tota ad totam.*

Habeat AC ad DF maiorem proportionẽ, quàm AB ad DE. Dico & reliquam BC ad reliquam EF maiorem proportionem habere, quàm AC ad DF. Sit enim vt AC ad DF, ita AB ad DG. ergo et reliqua BC ad reliquam GF est vt AC ad DF. Sed BC ad EF maiorem proportionem habet, quàm ad FG. ergo et BC ad EF maiorem habebit proportionem, quàm AC ad DF.



19. huius.

Si uero AC ad DF minorem proportionem habeat, quàm AB ad DE, et reliqua BC ad reliquam EF minorem proportionem habebit, quàm AC ad DF, quod eodem, quo supra, modo ostendetur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

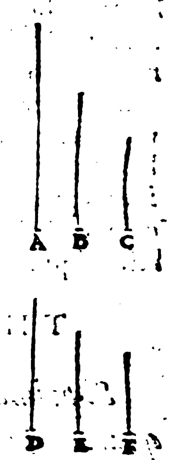
Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, habeatque prima priorum ad secundam maiorem proportionem, quàm prima posteriorum ad secundam; secunda vero priorum ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm secunda posteriorum ad tertiam: etiam ex æquali prima priorum ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm prima posteriorum ad tertiam.

Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm D ad E, & B ad C maiorem proportionem habeat, quàm E ad. F. Dico ex æquali A ad C maiorem habere proportionem, quàm D ad F. Quoniã enim A ad B maiorem proportionem habet, quàm D ad E; habebit permutando A ad D maiorem proportionem, quàm B ad E, et eadem ratione B ad E maiorem, quàm C ad F. ergo A ad D maiorem habet proportionem, quàm C ad F. et rursus permutando A ad C maiorẽ habebit, quàm D ad F. quod oportebat demõstrare.

27. huius.

Ex demonstratis ad 13. huius.

27. huius.



Quòd si prima priorum ad secundam minorem habeat proportionem, quàm prima posteriorum ad secundam; secũda vero priorum ad tertiam minorem proportionem habeat, quàm secũda posteriorum ad tertiam: similiter demõstrabitur etiam ex æquali primam priorum ad tertiam minorem proportionem habere, quàm primam posteriorum ad tertiam.

QVINTI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER SEXTVS

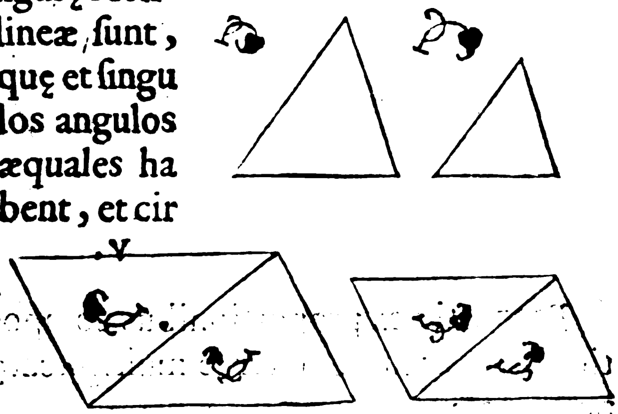
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

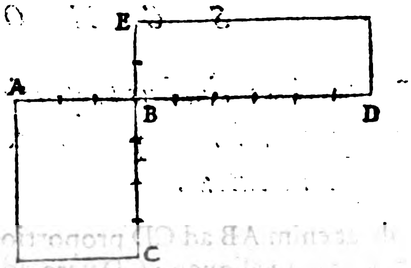
I.

SIMILES figurę rectilineæ sunt, quę et singulos angulos æquales habent, et circa equales angulos latera proportionalia.



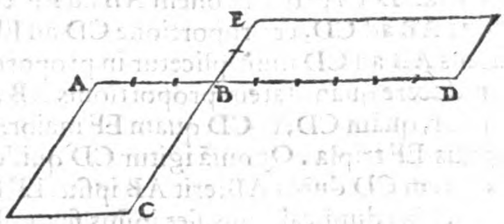
II.

Reciprocę figuræ sunt, quã do in vtraque figura antecedẽtes, et consequentes rationes fuerint.



F. C. COMMENTARIVS.

Per antecedentes, & consequentes rationes intellige antecedentes, & consequentes proportionis terminos: vt si sint duo rectangula ABC DBE, sitq́; vt AB ad BD, ita EB ad BC; dicentur hae figurae reciprocae, seu ex contraria parte sibi ipsis respondentes: quoniã in altera quidem est terminus antecedens primae proportionis, videlicet AB, et consequens secundae BC; in altera vero est consequens primae BD & antecedens secundae EB. sunt autem dictae figurae etiam inter se aequales, ut deinceps ostendetur.



III.

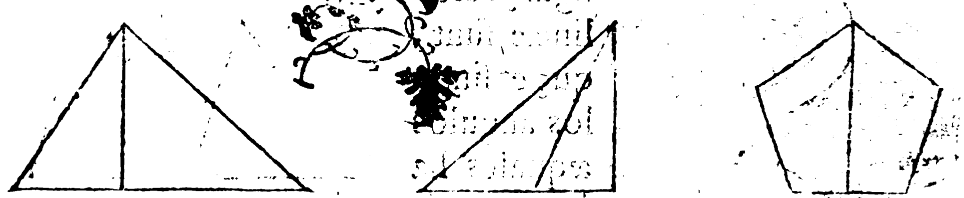
Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, quando fit vt tota ad maiorem portionem, ita maior portio ad minorem.

F. C. COMMENTARIVS.

Extrema ac media ratione secari recta linea idcirco dicitur, quòd secetur in duas partes, quæ proportionis termini sunt, videlicet extremus et medius, nam tota primi termini locum obtinet. Sit enim recta linea AC ita diuisa in puncto B, erit AC primus terminus, AB medius, et BC extremus.

IIII.

Altitudo cuiusque figuræ est linea perpendicularis, quæ à vertice ad basim ducitur.



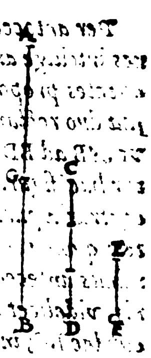
V.

Proportio ex proportionibus componi dicitur, quādo proportionum quantitates inter se multiplicatę, aliquam efficiunt proportionem.

SCHOLIVM.

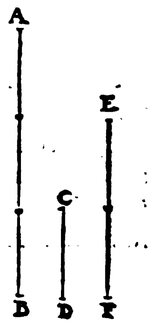
Proportio ex duabus proportionibus, vel ex pluribus componi dicitur, quando proportionum quantitates multiplicatæ faciunt aliquam proportionis quantitatem.

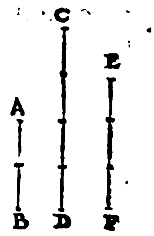
Habeat enim AB ad CD proportionem datam, vt duplam, vel triplam, vel aliam aliquam: CD vero ad EF similiter datam proportionem habeat. Dico proportionem AB ad EF compositam esse ex proportione AB ad CD, et proportione CD ad EF; vel si quantitas proportionis AB ad CD multiplicetur in proportionis CD ad EF quantitatem, facere quantitatem proportionis AB ad EF. Sit enim primū AB maior, quàm CD, et CD quàm EF maior: Sitq; AB dupla CD, et CD ipsius EF tripla. Quoniā igitur CD quidem ipsius EF tripla est, ipsius autem CD dupla AB; erit AB ipsius EF sextupla: quoniā si triplum alicuius duplicabimus, fiet ipsius sextuplum. hoc enim proprie est compositio. vel hoc modo. Quoniam AB ipsius CD est dupla, diuidatur AB in partes æquales ipsi CD, quæ sint AG GB. et quoniam CD est tripla EF, ęqualis autē AG ipsi CD; erit AG ipsius EF



tripla.

tripla. ideoq; tota AB ipsius EF sextupla est. quare proportio AB ad EF coniungitur per medium terminũ CD; composita ex proportione AB ad CD, & proportione CD ad EF. Similiter autem & si CD sit vtrisque AB EF minor, idẽ concludetur. Sit enim rursus AB quidem tripla ipsius CD, CD vero ipsius EF dimidia. & quoniam CD dimidia est ipsius EF, & ipsius CD tripla AB; erit AB sesquialtera ipsius EF. si enim dimidium alicuius triplicabimus, habebit ipsum semel, & eius dimidium. Et quoniã AB ipsius CD est tripla, CD vero dimidia EF; quarum partium ipsi CD æqualium AB est trium, earum est EF duarum. ergo AB sesquialtera est ipsius EF. proportio igitur AB ad EF connectitur per CD medium terminum, cõposita ex proportione AB ad CD, & proportione CD ad EF. Sed rursus sit CD vtrisque AB EF maior: & sit AB quidem ipsius CD dimidia, CD vero sesquitertia ipsius EF. Quoniã igitur quarum partium est AB duarum, earum CD est quattuor: quarum autem CD est quattuor, earum EF est trium: & quarum AB duarum, earumdem EF trium. Ergo proportio AB ad EF rursus connectitur per CD medium terminum; quę est duorum ad tria. Similiter et in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, si à composita proportione vnus quiuis componentium auferatur, vno simplicium eiecto, reliquos componentium assumi.



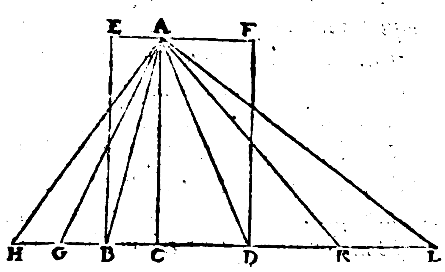


FED. COMMANDINVS.

Lege Eutocium in commentarijs in quartam propositionem secundi libri Archimedis de sphęra & Cylindro, & in commentarijs in vndecimam propositionem primi libri conicorum Apollonij.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Triangula & parallelogramma, quę eandem habent altitudinem, inter se sunt, vt bases.



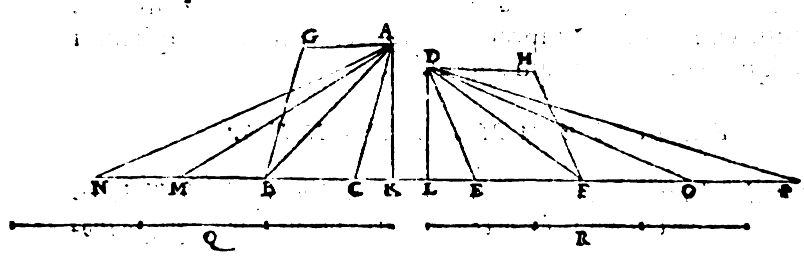
Sint triangula quidẽ ABC ACD; parallelogramma vero EC CF, quæ eandem habeant altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. Dico vt basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD; & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. producatur enim BD ex vtraque parte ad puncta H L, & ipsi quidum BC basi æquales quotcumque ponantur BG GH, ipsi vero basi CD ponãtur quotcũq; æquales DK KL, & AG AH AK AL iũgãtur. 38.huius.
Quoniam igitur CB BG GH inter se æquales sunt; erunt & triãgula AHG AGB ABC inter se ęqualia. ergo quotuplex est basis HC ipsius BC basis, totuplex est AHC triangulum trianguli ABC. Eadem ratione quotuplex est LC basis, ipsius basis CD, totuplex est & triangulum ALC ipsius ACD trianguli: et si æqualis est HC basis basi CL, & triangulum AHC triangulo ALC est æquale: & si basis HC basim CL superat, & triangulum AHC superabit triangulum ALC: & si minor, minus. Quattuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC CD, & duobus triangulis ABC ACD, sumpta sunt ęquemultiplicia, basis quidem BC, & ABC trianguli, videlicet basis HC, & AHC triãgulum: basis vero CD, & trianguli ACD, alia vtcunque æque multiplicia, nempe CL basis, & ALC triangulum: atque ostensum

sum est si HC basis basim CL superat, & triangulũ AHC superare triangulũ AL C; 5.diffi. quinti.
& si ęqualis, ęquale; & si minor, minus. est igitur vt BC basis ad basim CD, ita triangulũ ABC ad ACD triãgulũ. Et quoniam triãguli ABC duplũ est parallelogrãmũ EC, 41.primi.
& triãguli ACD parallelogrammũ FC duplum; partes autem eodem modo multiplicium eandem inter se proportionem habent: erit vt ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est, vt basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD; vt autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum: erit vt BC basis ad basim CD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quare triangula & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt, vt bases. quod demonstrare oportebat. 15.quinti. 11 quinti.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & theorema illud verum est, quod demonstrare hoc loco non putaui esse alienum.

Triangula & parallelogramma in æqualibus basibus constituta, eandem inter se proportionem habent, quam eorum altitudines.



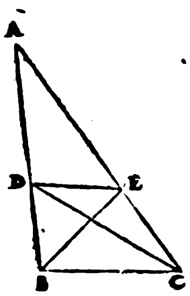
Sint duo triangula ABC DEF, & duo parallelogramma CG EH, quae aequales bases habeat BC EF: trianguli autem ABC, & parallelogrammi CG altitudo sit AK: & trianguli DEF, & parallelogrammi EH altitudo DL. Dico vt AK ad DL, ita esse & triangulum ABC ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG ad EH parallelogrammum. producantur BC EF, & ponantur basi BC aequales quotcumque BM MN: & basi EF aequales quotcumque FO OP, iunganturq; AM AN DO DP: quot vero magnitudines sunt in CN aequales basi CB, tota sumantur in linea Q aequales ipsi AK altitudini; & quot sunt in EP aequales basi EF, tot sumantur in linea R aequales altitudini DL. Itaque quoniam triangula ANM AMB ABC sunt in aequalibus basibus constituta, & aequali altitudine; etiam inter se aequalia erunt. & eadem ratione triangula DEF DFO DOP erunt inter se aequalia. Quotuplex igitur est linea Q ipsius AK, totuplex est triãgulum ANC trianguli ABC: & quotuplex est linea R ipsius DL, totuplex est triangulum DPE trianguli DEF: & si Q sit aequalis R, & triangulum ANC triangulo DPE aequale erit, ex premissa; erit namque altitudo AK, cuius tripla est Q aequalis altitudini DL, cuius ipsa R est tripla: si vero Q sit maior, quàm R, & triangulum ANC maius erit, quàm triangulum DPE; et si minor, minus. triangulorum enim aequales bases habentium, quae maiori sunt altitudine, etiam maiora sunt, alioqui sequeretur totum parti aequale esse. Cum igitur quattuor sint magnitudines, videlicet duae altitudines AK DL, & duo triangula ABC DEF: & sumpta sint aeque multiplicia, altitudinis quidem AK, & trianguli ABC; altitudinis vero DL, & trianguli DEF; alia vtcumque multiplicia: & ostensum sit si linea Q superat R, & triangulum ANC superare triangulum DPE, & si aequalis, aequale; & si minor, minus: erit vt altitudo HA ad altitudinẽ DL, ita triangulũ ABC ad triangulum DEF. Sed trianguli ABC duplum est CG parallelogrammum, & trianguli DEF duplum parallelogrammum EH; partes autem eodem modo multiplicium eandem habent proportionem: erit parallelogrammum CG ad parallelogrammum EH, vt ABC triangulum ad triangulum DEF. Sed ostensum est vt altitudo AK ad altitudinem DL, ita esse triangulum ABC ad triangulum DEF. Vt igitur AK ad DL, ita est paralelogrammum CG ad EH parallelogrammum. Quare triangula, & parallelogramma in aequalibus basibus constituta eandem inter se proportionem habent, quam eorum altitudines. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente. 5.dif. quinti. 41.primi. 15.quinti.

THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si vni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones coniungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit.

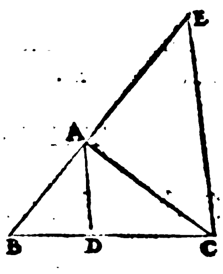


Trianguli enim ABC vni laterum BC parallela ducatur DE. Dico vt BD ad DA, ita esse CE ad EA. Iungantur enim BE CD. triangulum igitur BDE triangulo CDE est æquale; in eadem enim sunt basi DE, & in eisdem DE BC parallelis: aliud autem triangulum est ADE: sed æqualia ad idem eandem habẽt proportionem. ergo vt triangulum BDE ad triãgulum ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. Vt autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est BD ad DA. nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt vti bases. & ob eandem caussam vt CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. & vt igitur BD ad DA, ita est CE ad EA. Sed trianguli ABC latera AB AC proportionaliter secta sint, & vt BD ad DA, ita sit CE ad EA: & iungatur DE. Dico DE ipsi BC parallelam esse. ijsdem enim constructis, quoniam est vt BD ad DA, ita CE ad EA; vt autẽ BD ad DA, ita est BDE triangulum ad triangulũ ADE; et vt CE ad EA, ita CDE triangulum ad triangulum ADE: erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triangulum ADE. Quòd cum vtrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum triangulo CDE æquale; & sunt in eadem basi DE. æqualia autem triangula, & in eadem basi constituta, etiã in eisdem sunt parallelis. ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur vni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius triãguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones coniũgit recta linea reliquo triãguli lateri parallela erit. quod oportebat demonstrare.

37. primi. 7. quinti. Ex antecedente. 11. quinti. 11. quinti. 9. quinti. 40. primi.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea, secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.



Sit triangulum ABC, & secetur angulus BAC bifariam recta linea AD. Dico vt BD ad DC, ita esse BA ad AC. ducatur enim per C ipsi DA parallela CE, & producta BA conueniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædã AC, erit ACE angulus angulo CAD æqualis. Sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. ergo & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. Rursus quoniam in parallelas AD EC recta linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis est interiori AEC. ostensus aũt est & angulus ACE angulo BAD æqualis. ergo & ACE ipsi AEC

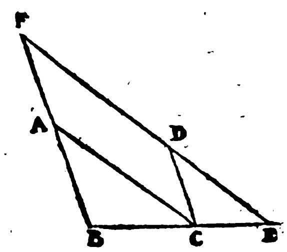
9. primi. 31. primi. 29. primi.

T æqualis

6.primi. ęqualis erit:ac propterea latus AE æquale lateri AC.Et quoniam vni laterum trian
Ex antecedente. guli BCE,videlicet ipsi EC parallela ducta est AD; erit vt BD ad DC, ita BA ad A
7.quinti. E: æqualis aũt est AE ipsi AC. est igitur vt BD a d DC,ita BA ad AC. Sed sit vt BD ad DC,ita BA ad AC:& AD iungatur. Dico angulũ BAC bifariã sectũ esse recta li
Ex antecedente. nea AD.ijsdem enim constructis quoniam est vt BD ad DC, ita BA ad AC; Sed & vt BD ad DC,ita BA ad AE,etenim vni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD:erit & vt BA ad AC,ita BA ad AE. ergo AC est ęqualis AE,
9.quinti. 29.primi. ac propterea & angulus AEC angulo ECA ęqualis. Sed angulus quidem AEC est ęqualis angulo exteriori BAD; angulus vero ACE æqualis alterno CAD.quare & BAD angulus ipsi CAD ęqualis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD.Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea,etiam basim secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & si basis partes eãdem proportionem habeant,quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea trianguli angulum bifariam secabit.quod oportebat demonstrare.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

Aequiangulorum triangulorum latera,quæ circum æquales angulos,proportionalia sunt: et homologa siue eiusdẽ rationis sunt latera,quę æqualibus angulis subtenduntur.



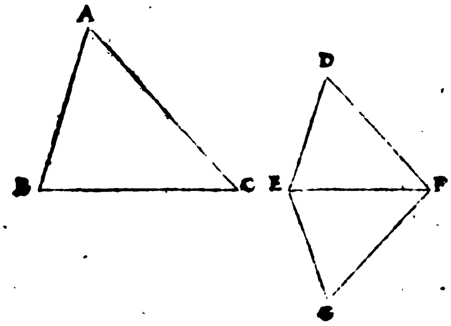
Sint ęquiangula triangula ABC DCE, quæ angulũ quidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC ęqualem habeant:et pręterea angulũ BAC angulo CDE. Dico triangulorum ABC DCE proportionalia esse latera, quæ sunt circa ęquales angulos, et homologa,siue eiusdem rationis latera esse, quæ æqualibus angulis subtenduntur. Ponatur enim BC in directum ipsi CE. Et quoniam anguli ABC ACB duobus
17.primi. rectis minores sunt:ęqualis aũt est angulus ACB angulo DEC;erunt ABC DEC anguli duobus rectis minores. quare BA ED productæ inter se conuenient, producantur, et conueniant in puncto F. et quoniam angulus
28.primi. DCE est æqualis angulo ABC; erit BF ipsi DC parallela. Rursus quoniam æqualis est angulus ACB angulo DEC, parallela erit AC ipsi FE. parallelogrammum igi
34.primi. 2.huius. tur est FACD; ac propterea FA quidem ipsi CD, AC vero ipsi FD est ęqualis.Et quoniam vni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE parallela ducta est AC; erit
7.quinti. vt BA ad AF, ita BC ad CE. æqualis autem est AF ipsi CD. Vt igitur BA ad CD, ita BC ad CE: et permutando vt AB ad BC, ita DC ad CE. Rursus quoniam CD
2.huius. parallela est BF, erit vt BC ad CE, ita FD ad DE. Sed DF est ęqualis AC. ergo vt BC ad CE, ita AC ad ED. permutando igitur vt BC ad CA, ita CE ad ED.Itaque quoniam ostensum est, vt AB ad BC, ita DC ad CE, ut autem BC ad CA, ita CE ad ED; erit ex æquali vt BA ad AC, ita CD ad DE. æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera, quę circum ęquales angulos: et homologa, siue eiusdem rationis latera sunt, quę æqualibus angulis subtenduntur. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.

Sint

Sint duo triangula ABC DEF, quæ latera proportionalia habeant, sitq; ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF; vt autem BC ad CA, ita EF ad FD: et adhuc vt BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triãgulum ABC triangulo DEF æquiangulũ esse, et æquales habere angulos, quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD; et præterea angulum BAC angulo EDF. constituatur enim ad rectam lineam EF, et ad puncta in ipsa EF, angulo quidem ABC æqualis angulus FEG; angulo autem BCA angulus EFG. quare reliquus BAC angulus reliquo EGF est æqualis. Ideoq; æquiangulum est triangulum ABC triangulo EGF. triãgulorum igitur ABC EGF proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, et homologa latera sunt, quę æqualibus angulis subtenduntur. ergo vt AB ad BC, ita GE ad EF. Sed vt AB ad BC, ita DE ad EF. Vt igitur DE ad EF, ita GE ad EF. Quòd cum vtraque ipsarum DE EG ad EF eandem proportionem habeat, erit DE ipsi EG æqualis. Eadem ratione et DF æqualis FG. Itaque quoniam DE est æqualis EG, cõmunis autem EF; duæ DE EF duabus GE EF æquales sunt, et basis DF basi FG æqualis. angulus igitur DEF est æqualis angulo GEF, et DEF triangulum æquale triangulo GEF, et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, quibus ęqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFE est ęqualis angulo GFE, angulus vero EDF æqualis angulo EGF Et quoniam angulus FED est ęqualis angulo GEF, et angulus GEF angulo ABC; erit et angulus ABC angulo FED æqualis. Eadem ratione et angulus ACB æqualis est angulo DFE: et adhuc angulus ad A angulo ad D: ergo ABC triãgulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et ęquales habebũt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. quod oportebat demonstrare.

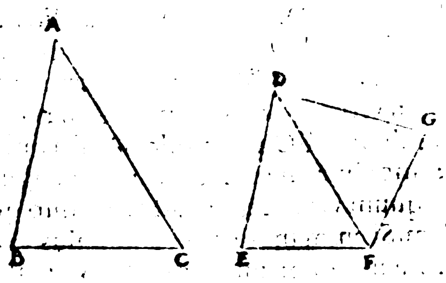


23. primi. Ex antecedente. 11. quinti. 9. quinti. 8. primi.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

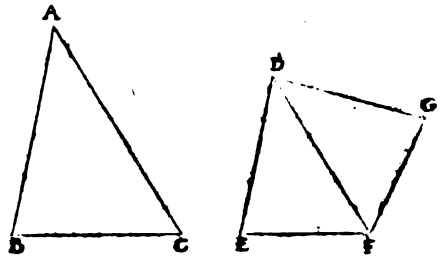
Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, et ęquales habebunt angulos, quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF vnum angulum BAC vni angulo EDF æqualẽ habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, sitq; ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, et angulum quidem ABC habere æqualem angulo DEF; angulum uero ACB angulo DFE. constituatur enim ad rectã lineam DF, et ad puncta in ipsa DF, alterutri angulorum BAC EDF æqualis angulus FDG: angulo autem ACB æqualis DFG. reliquus igitur qui ad B reliquo qui ad G est æqualis. ergo triangulum ABC triangulo DGF æquiangulum est, ac propterea vt BA ad AC, ita est GD ad DF. ponitur autem & vt BA ad AC, ita ED ad DF. Vt igitur ED ad DF, ita GD ad DF. quare ED ęqualis est ipsi DG; & communis DF; ergo duę ED DF duabus GD DF



23. primi. 4. huius. 11. quinti. 9. quinti.

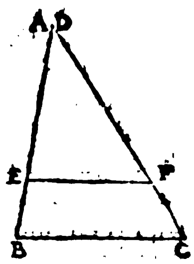
æquales sunt: & angulus EDF angulo G
4.primi. DF est ęqualis. basis igitur EF est ęqualis basi FG: triangulumq; DEF ęquale triangulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFG est æqualis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. sed angulus DFG ęqualis est angulo ACB. & angulus igitur ACB angulo DFE



est æqualis. ponitur autem & BAC angulus ęqualis angulo EDF. ergo & reliquus qui ad B æqualis reliquo qui ad E. ęquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF. Quare si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa ęquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

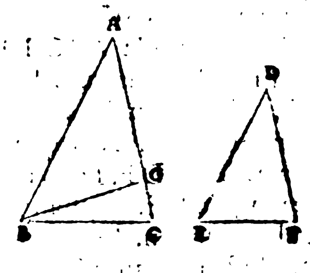
Sunt qui hoc etiam aliter demonstrēt. Nam imposito latere DE lateri AB, cadet DF in AC, quoniam angulus ad punctum D angulo ad A est aequalis. Vel igitur DE est aequale ipsi AB, vel inæquale.
4.primi. *& si quidem aequale, erit & DF aequale AC. ergo & basis EF basi BC, & reliqui anguli reliquis angulis aequales. Si vero DE sit inęquale ipsi AB, sit vtrumuis ipsorum maius; verbi caussa AB. tunc vt BA ad AC, sic ED ad DF. ergo permutando vt BA ad AE; sic CA ad AF: & diuidendo vt BE ad EA, sic CF ad FA. quare latus EF*
2.huius.
29.primi. *parallelum est lateri BC, & idcirco angulus AEF angulo ABC, & angulus AFE angulo ACB est aequalis. quod ostensum oportuit.*



THEOREMA. VII. PROPOSITIO VII.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proporrionalia, & reliquorum vtrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula; & ęquales habebunt angulos, circa quos latera sunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC DEF, vnum angulū vni angulo æqualem habentia, videlicet angulū BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos ABC DEF latera proportionalia, vt sit DE ad EF, sicut AB ad BC: & reliquornm qui ad CF. primum vtrumque simul minorem recto. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse; angulumque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F ęqualem. Si enim inæqualis est angulus ABC angu

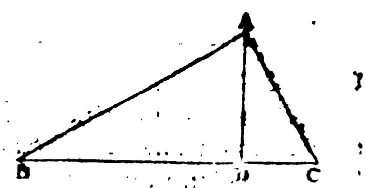


23.primi. lo DEF, vnus ipsorum maior erit. Sit maior ABC: & constituatur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa B angulo DEF æqualis angulus ABG. Et quoniam angulus quidem A est æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF: erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis. æquiangulum igitur est ABG triangulum triangulo D
4.huius. EF. quare vt AB ad BG, sic DE ad EF: vtq; DE ad EF, sic ponitur AB ad BC. & vt igitur AB ad BC, sic AB ad BG. Quod cum AB ad vtramque BC BG eandem habeat

beat proportionem, erit BC ipsi BG æqualis; ac propterea angulus ad C est æqualis angulo BGC. minor aût recto ponitur angulus, qui ad C. ergo & BGC minor est recto, & ob id qui ei deinceps est AGB maior recto. atque ostensus est angulus AGB æqualis angulo, qui ad F. angulus igitur qui ad F recto maior est. atqui ponitur minor recto. quod est absurdū. nō igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF. ergo ipsi est æqualis. est autē & angulus ad A æqualis ei, qui ad D. quare & reliquus qui ad C æqualis reliquo qui ad F. æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. Sed rursus ponatur vterque angulorum, qui ad C F non minor recto. Dico rursus & sic triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse. iisdem enim constructis similiter demonstrabimus BC æqualem ipsi BG, angulumq; ad C angulo BGC æqualem. sed angulus qui ad C non est minor recto. nō minor igitur recto est BGC. quare trianguli BGC duo anguli non sunt duobus rectis minores. quod fieri nō potest. nō igitur rursus inæqualis est ABC angulus angulo DEF. ergo æqualis necessario erit. est autē & qui ad A æqualis ei, qui ad D. reliquus igitur qui ad C reliquo qui ad F est æqualis. ac propterea triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum est. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum vtrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera. quod oportebat demonstrare. 9. quinti. 5. primi. 13. primi. 17. primi.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula & toti & inter se similia sunt.



Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC: et à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula ABD ADC toti triangulo ABC, et inter se similia esse. Quoniam enim angulus BAC est æqualis angulo ADB, rectus enim vterque est: et angulus qui ad B communis duobus triangulis ABC ABD: erit reliquus ACB reliquo BAD æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD. quare vt BC, quæ subtendit angulum rectum trianguli ABC, ad BA subtendentem angulum rectum trianguli ABD, sic ipsa AB subtendens angulum qui ad C trianguli ABC, ad BD subtendentem angulū æqualem angulo, qui ad C, videlicet BAD ipsius ABD trianguli: et adhuc AC ad AD subtendentem angulum qui ad B, communem duobus triangulis. ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum est; et circa æquales angulos latera habet proportionalia. Simile igitur est triangulum ABC triangulo ABD. Eadem ratione demonstrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse. Quare vtrumque ipsorum ABD ADC toti ABC triangulo est simile. Dico insuper triangula ABD ADC etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus BDA rectus, est æqualis recto ADC. Sed et BAD ostensus est æqualis ei, qui ad C; erit reliquus qui ad B reliquo DAC æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC. ergo vt BD trianguli ABD subtendens BAD angulum ad DA trianguli ADC subtendentem angulum, qui ad C, æqualem angulo BAD, sic ipsa AD trianguli ABD subtendens angulum, qui ad B, ad DC subtendentem angulum DAC ei, qui ad B, æqualem: et adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC. Simile igitur est ABD triangulum triangulo ADC. Quare si in triangulo rectāgulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, et toti, et inter se, similia sunt. quod oportebat demonstrare. 4. huius. 1. diffi. huius

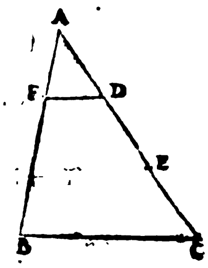
CORO-

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; ductam basis partium mediam proportionalem esse: et adhuc basis et vniuscuiusque partium, latus quod ad partem, medium esse proportionale. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA I. PROPOSITIO IX.

A data recta linea imperatam partem abscindere.

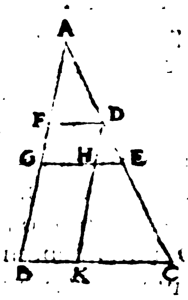


Sit data recta linea AB. oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia: et ducatur à puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipsa A B angulum quemlibet contineat; sumaturq; in A C quod vis punctum D, et ipsi AD ęquales ponantur DE EC. deinde iungatur BC; et per D ipsi BC parallela ducatur DF. Itaque quoniā vni laterum triāguli A B C, videlicet ipsi B C parallela ducta est F D; erit vt CD ad DA, ita BF ad FA; dupla autem est CD ipsius DA. ergo et BF ipsius FA dupla erit. tripla igitur est BA ipsius AF. Quare à data recta linea A B imperata tertia pars A F abscissa est. quod facere oportebat.

2. huius.

PROBLEMA II. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam insectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.



Sit data quidem recta linea insecta A B, secta vero A C. oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectæ similiter secare. Sit secta AC in punctis D E, & ponantur ita, ut angulū quemvis contineant, iunctaq; BC per puncta quidem DE ipsi BC parallelæ ducātur DF EG: per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur est vtrumque ipsorum F H HB: ac propterea DH quidem est æqualis FG, HK vero ipsi GB. Et quoniam vni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC parallela ducta est HE; erit vt CE ad ED, ita KH ad KD. ęqualis autem est KH quidē ipsi BG, HD vero ipsi GF. est igitur vt CE ad ED, ita BG ad GF. Rursus quoniam vni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG parallela ducta est F D, vt ED ad DA, ita erit GF ad FA. Sed ostensum est ut CE ad ED, ita esse BG ad GF. vt igitur CE ad ED, ita est BG ad GF: & vt ED ad DA, ita G F ad FA. Ergo data recta linea insecta AB datę rectæ lineę sectæ AC similiter secta est. quod facere oportebat.

34 primi.

2. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

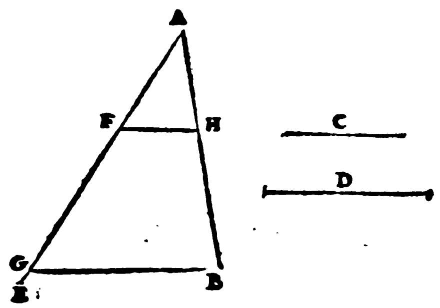
Huicnon dissimile est, quod docuit Pappus in septimo libro mathematicarum collectionum.

Datam rectam lineam in datam proportionem secare.

Sit data quidem recta linea AB: data autem proportio quam habet C ad D: & oporteat secare AB in proportionem C ad D. Inclinetur ad AB in quouis angulo recta linea AE: & ipsi quidem C æqualis abscindatur AE, ipsi vero D æqualis FG: &

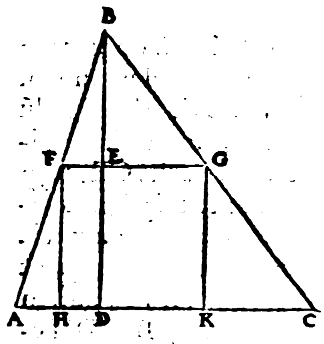
iuncta

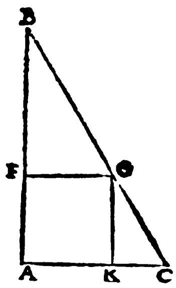
iuncta BG ducatur FH ei parallela. Quoniã igitur vt AH ad HB, ita est AF ad FG: est aũt AF ęqualis C, & FG ipsi D: erit vt AH ad HB, ita C ad D. Ergo AB secta est ad punctum H in proportionem C ad D. quod facere oportebat. 2.huius.



Ex ijs, quæ tum in quinto libro tum hoc loco tradita sunt, licebit problema absoluere, quod ad quartam propositionẽ quarti libri nos facturos recepimus.

In dato triãgulo quadratũ describere.





Sit datum triangulum ABC, in quo oporteat quadratum describere. vel igitur datũ triangulum acutiangulum est, vel rectangulum, vel obtusiangulum. Sit primũ acutiangulum, atque à puncto B ad AC perpendicularis ducatur BD: & ex premissa diuidatur BD in puncto E, ita vt DE ad EB eandẽ proportionem habeat, quam AC ad BD. deinde per E ducatur FG ipsi AC parallela, & à punctis F G ducantur FH GK parallelae ipsi BD. Quoniam igitur in triangulo ABD ducta est FE ipsi AD parallela. erit angulus BEF angulo BDA aequalis; & angulus BFE aequalis angulo BAD: atque est angulus FBE vtrique communis. ergo FBE triangulum triangulo ABD aequiangulum est. Similiter demonstrabimus triangulum EBG aequiangulum ipsi DBC. Vt igitur AD ad DB, ita est FE ad EB, & vt BD ad DC, ita BE ad EG. quare ex aequali vt AD ad DC, ita FE ad EG: & componendo vt AC ad CD, ita FG ad GE; conuertendoq; vt DC ad CA, ita EG ad GF. Sed ut BD ad DC, ita est BE ad EG. ergo ex aequali, vt BD ad AC, ita BE ad FG. Itaque cũ sit vt AC ad BD, ita DE ad EB, erit rursus ex aequali vt AC ad se ipsam, ita DE, hoc est HF ad FG. ergo HF ipsi FG est aequalis; ac propterea omnes HF FG GK KH inter se aequales sunt. Et quoniam FH est parallela ipsi BD: estq; angulus BDA rectus; & ipse KHF rectus erit. eadem ratione cum FG sit parallela AC, erit & HFG angulus rectus. Ergo & ipsis oppositi FGK GKH recti sint necesse est. quadratum igitur est ipsum FGKH: & descriptum est in triangulo ABC. Non aliter in triangulo rectangulo, vel obtusiangulo quadratum describemus, ab angulo recto, vel obtuso ad latus oppositum perpendicularem ducentes. Quòd si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita vt duo quadrati latera duobus lateribus trianguli nitantur; vt in subiecta figura, vtemur altera perpendiculari, quae est trianguli latus, videlicet BA, & similiter diuidetur AB in F, ita vt AF ad FB eandem proportionem habeat, quã CA ad AB; ducaturq; FG parallela ipsi AC, & GK parallela BA. Et quoniam in triangulo BAC ducta est FG ipsi AC parallela; similiter demonstrabimus triangulum BFG triangulo BAC aequiangulum esse. quare vt BA ad AC, ita BF ad FG. est autem vt CA ad AB, ita AF ad FB. ex aequali igitur, vt CA ad se ipsam, ita AF ad FG; ideoq; AF FG inter se aequales sunt. Et ex ijs, quae proxime diximus, sequetur AFGK quadratum esse, quod descriptum est in triangulo ABC, atque illud est, quod fecisse oportuit.

29.primi. 4.huius. 22.quinti. 18.quinti. 4 quinti. 34 primi. 29.primi. 34.primi. 2.huius. 4.huius.

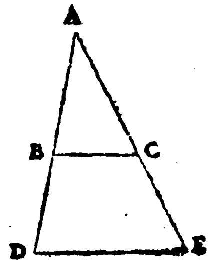
PROBLEMA III. PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB AC, & ponantur ita, vt angulum quem uis contineant. oportet ipsarum AB AC tertiam proportionalem inuenire. producantur

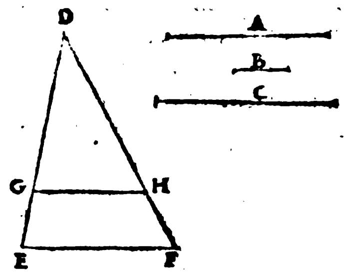
enim

enim AB AC ad psicta DE: ponaturq; ipsi AC æqualis BD: & iuncta BC, ducatur per D ipsi BC parallela DE. Quoniam igitur uni laterum trianguli ADE, uidelicet ipsi DE parallela ducta est BC, erit vt AB ad BD, ita AC ad CE. æqualis autem est BD ipsi AC. vt igitur BA ad AC, ita est AC ad CE. Quare datis rectis lineis AB AC tertia proportionalis inuēta est CE. quod facere oportebat.



PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.

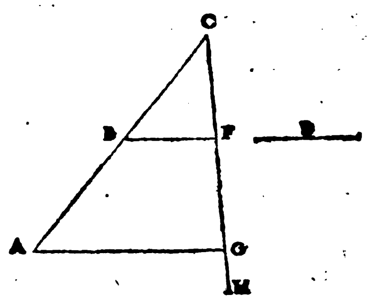


Sint datæ tres rectæ lineæ A B C. oportet ipsarum A B C quartam proportionalem inuenire. Exponātur duæ rectæ lineę DE DF angulū quemuis EDF continentes: & ponatur ipsi quidem A ęqualis DG, ipsi vero B ęqualis GE, & ipsi C æqualis DH: iunctaq; GH per E ipsi parallela ducatur EF. Itaque quoniam vni laterum triāguli DEF, nimirum ipsi EF parallela ducta est
2.huius. GH, erit vt DC ad GE, ita DH ad HF. est autem DG ipsi A aequalis; GE vero ęqualis B: & DH ęqualis C. Vt igitur A ad B, ita G ad HF. Quare datis tribus rectis lineis A B C quarta proportionalis inuēta est HF. quod facere oportebat.

FED. COMMANDINVS EX PAPPO.

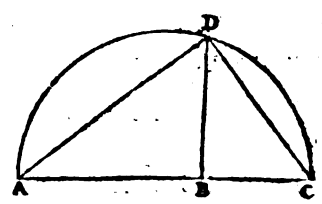
Tribus datis rectis lineis AB BC & D, Inuenire vt AB ad BC, ita aliam quandam ad ipsam D.

Rursus inclinetur recta linea CH in quouis angulo & abscindatur CF aequalis D: iunctaque BF, ipsi parallela ducatur AG. ergo rursus vt AB ad BC, ita erit GF ad FC, hoc est ad D. Inuēta igitur est FG. quod facere oportebat.



PROBLEMA. V. PROPOSITIO. XIII.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem inuenire.

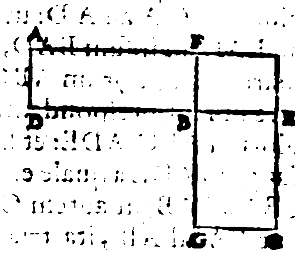


Sint datæ duæ rectæ lineæ AB BC, oportet ipsarum AB BC mediam proportionalem inuenire. ponantur in directum, & in ipsa AC describatur semicirculus ADC, ducaturq; à puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD, & AD DC iungātur. Quo-
31.tertij. niam igitur in semicirculo est angulus ADC, is rectus est. & quoniam in triangulo rectangulo ADC ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta
Cor.8.huius est DB, erit DB basis partium AB BC media proportionalis. Duabus igitur datis rectis lineis AB BC media proportionalis inuenta est DB. quod facere oportebat.

THEO-

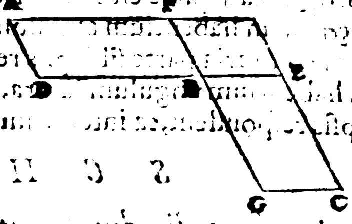
THEOREMA. IX. PROPOSITIO. XIIII.

Aequalium et vnum vni ęqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent: et quorum parallelogrammorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æqua les angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; ea inter se sunt æqualia.



Sint æqualia parallelogrãma AB BC, æquales habentia angulos ad B, et ponantur in directum DB BE. ergo et indirectum erunt FB BG. Dico parallelogrammorum AB BC latera, quæ sunt circum ęquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondere: hoc est ut DB ad BE, ita esse GB ad BF. compleatur enim parallelogrammum FE. et quoniam parallelogrãmũ AB æquale est parallelogrãmo BC, aliud autem aliquod est FE parallelogrammum; erit vt AB ad FE, ita BC ad FE. Sed vt AB quidem ad FE, ita est DB ad BE; vt autem BC ad FE, ita GB ad BF. et ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF. ergo parallelogrammorum AB BC latera, quę circum ęquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. Sed ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera, quæ circũ æquales angulos; sitq; vt DB ad BE, ita GB ad BF. Dico parallelogrãmum AB parallelogrãmo BC æquale esse. Quoniam enim est vt DB ad BE, ita GB ad BF, ut autem DB ad BE, ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE; et ut GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit et vt AB ad FE, ita BC ad FE. ęquale igitur est AB parallelogrammum parallelogrammo BC. ergo ęqualium et vnum vni ęqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quę circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent: et quorum parallelogrammorum vnum vni ęqualem habentium angulum latera, quæ circum ęquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; ea inter se sunt æqualia. quod oportebat demonstrare.

7. quinti. 1. huius. 11. quinti.



1. huius. 11. quinti. 9. quinti.

F. C. COMMENTARIVS.

Ergo & indirectum erunt FB BG.] *Sunt enim anguli FBD FBE aequales duobus rectis; sed angulus EBG ponitur aequalis angulo FBD. anguli igitur FBE, EBG duobus rectis sunt ęquales, ac propterea rectae lineę FB BG in directum sibi ipsis erunt.* 14. primi.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XV.

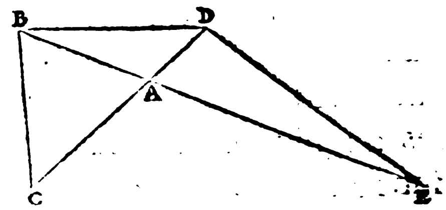
Aequalium, et vnum vni ęqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum ęquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent: et quorum triangulorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quę circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt ęqualia.

Sint triangula ABC ADE vnum angulum vni angulo ęqualem habentia, angulum

lum scilicet BAC angulo DAE. Dico triangulorum ABC ADE latera, quę circum ęquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondere, hoc est vt CA ad AD, ita esse EA ad A B. ponantur enim ita vt in di-

14. primi. rectum sit CA ipsi AD. ergo et EA ipsi AB in directum erit; et iungatur B D. Quoniã igitur triangulum A B C æquale est trian-

7. quinti. lo ADE, aliud autẽ est ABD; erit vt CAB triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum ADE ad triangulum B A D. Sed vt triangulum quidem CAB ad BAD trian-



1. huius. gulum, ita C A ad A D: ut autem triangu-

11. quinti. lum EAD ad ipsum BAD, ita E A ad A B. et ut igitur CA ad AD, ita EA ad AB. Quare triangulorum ABC ADE latera, quæ circum ęquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. Sed ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera triã gulorum ABC ADE: et sit vt CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangulum ABC triangulo ADE æquale esse. Iuncta enim rursus BD, quoniam vt C A ad A D, ita

1. huius. est EA ad AB; ut autem C A ad A D, ita ABC triangulum ad triangulum B A D;

11. quinti. et ut EA ad AB, ita triangulum EAD ad BAD triangulum: erit ut ABC triangulum ad triangulum B AD, ita triangulum EAD ad BAD triãgulum. Vtrumque igitur triangulorum ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionẽ;

9. quinti. ac propterea æquale est ABC triangulum triangulo ADE. æqualium igitur et vnũ vni ęqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum ęquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent: et quorum triangulorum vnũ vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt ęqualia. quod demonstrare oportebat.

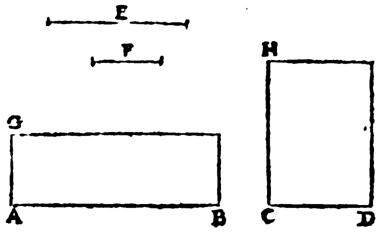
SCHOLIUM.

Aequiangulis dumtaxat triangulis contingit proportionalia latera habere, non etiam latera ex contraria parte sibi ipsis proportione respondentia. Aequalibus autem, et æquiangulis latera quoque ex cõtraria parte respondentia habere contingit; ęqualia enim sunt & latera: æqualitatis autem proportio ad se ipsam conuertitur, hoc est ex antecedente sumpto & consequente eadem est, & differens. At æqualibus quidem, & vnum angulum ęqualem habentibus contingit solum latera habere ex cõtraria parte respondentia, non tamen omnia, sed quæ circum æquales angulos consistunt. Quare alia quidem solum proportionalia habent latera, alia vero & proportionalia, & ex contraria parte respondentia. & sunt prima quidem ęquiangula & non æqualia: secunda vero æqualia, & vnum angulum habentia æqualem, non tamen æquiangula: reliqua autem & æqualia & æquiangula sunt.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XVI.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum ęquale est ei rectangulo, quod medijs continetur: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs cõtinetur, quattuor rectę lineæ proportionales erũt.

Sint



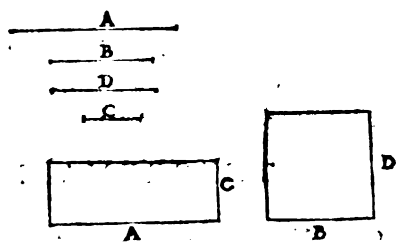
Sint quattuor rectæ lineæ proportionales AB CD E F, sitque vt AB ad CD, ita E ad F. Dico rectangulum contentum rectis lineis AB F æquale esse ei, quod ipsis CD E continetur. Ducantur enim à punctis A C ipsis AB CD ad rectos angulos AG CH: ponaturq; ipsi quidem F æqualis AG: ipsi vero E æqualis CH: & compleantur BG DH parallelogramma. Quoniam igitur est vt AB ad CD, ita E ad F; est autem E æqualis CH, & F ipsi AG: erit vt AC ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG DH latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia. ergo parallelogrammum BG æquale est parallelogrammo DH. atque est parallelogrammum quidem BG, quod rectis lineis AB F continetur; est enim AG æqualis F: parallelogramũ vero DH quod cõtinetur ipsis CD E; cum CH ipsi E sit æqualis. rectangulum igitur contentum AB F est æquale ei, quod ipsis CD E continetur. Sed rectangulum contentum AB F sit æquale ei, quod CD E continetur. Dico quattuor rectas lineas proportionales esse, videlicet vt AB ad CD, ita E ad F. ijsdem enim constructis quoniam rectangulum contentum AB F est æquale ei, quod CD E continetur: atque est contentum quidem AB F rectangulum BG; etenim AG est æqualis F: contentum vero CD E est rectangulum DH, quod CH ipsi E sit æqualis: erit parallelogrammum BG æquale parallelogrammo DH: & sunt æquiangula. æqualium autem, & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quare vt AB ad CD, ita CH ad AG: æqualis autem est CH ipsi E, & AG ipsi F. Vt igitur AB ad CD, ita E ad F. Ergo si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulũ extremis contentum æquale est ei, quod medijs continetur: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs continetur, quattuor rectæ lineæ proportionales erunt. quod oportebat demonstrare.

14.huius.

14.huius.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei, quod à media fit, quadrato: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato; tres rectæ lineæ proportionales erunt.



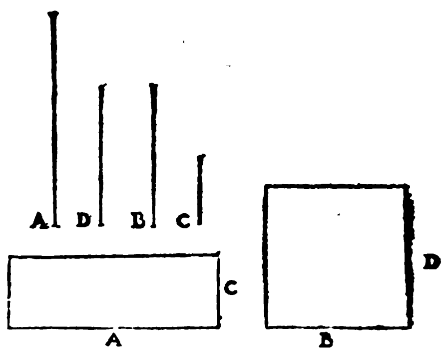
Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C: & sit vt A ad B, ita B ad C. Dico rectã gulum cõtentũ A C æquale esse ei, quod à media B fit, quadrato. ponatur ipsi B æqualis D. Et quoniam vt A ad B, ita B ad C, æqualis autem B ipsi D; erit vt A ad B, ita D ad C. Si autem quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint rectangulum extremis cõtentum est æquale ei, quod medijs continetur. ergo rectangulum AC contentum est æquale ei, quod continetur BD. Sed rectangulum contentum BD est æquale quadrato, quod fit ex ipsa B; etenim B est æqualis D. rectangulum igitur contentum AC est æquale ei, quod ex B fit, quadrato. Sed rectangulum contentum AC æquale sit quadrato, quod fit ex B. Dico vt A ad B, ita esse B ad C. ijsdem enim constructis

7.quinti.
Ex antecedente.

 quoniam

quoniam rectangulum contentum A C æquale est quadrato, quod fit ex B; at quadratum, quod fit ex B est rectangulum, quod ipsis BD continetur, est enim B ęqualis ipsi D: erit rectangulum contentum A C æquale ei, quod BD continetur. Si autem rectãgulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs cõtinetur, quattuor rectæ lineæ proportionales erunt. est igitur vt A ad B, ita C ad D. ęqualis autem B ipsi D. ergo vt A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineę proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum est æquale ei, quod à media fit, quadrato: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato, tres rectæ lineę proportionales erunt. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.



PROBLEMA VI. PROPOSITIO. XVIII.

A data recta linea dato rectilineo simile, & similiter positum rectilineum describere.

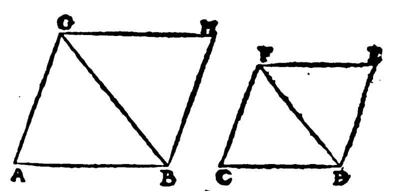
Sit data recta linea AB; datum autem rectilineũ CE. oportet à recta linea AB rectilineo CE simile, & similiter positũ rectilineũ describere. Iungatur DF, & ad rectam lineã AB, & ad pũcta in ipsa AB, angulo quidẽ C ęqualis angulus constituatur GAB; angulo autem CDF angulus ABG. reliquus igitur CFD angulus reliquo ACB est æqualis. ergo æquiangulum est FCD triangulum triangulo GAB; ac propterea vt FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. Rursus cõstituatur ad rectã lineam BG, & ad puncta in ipsa BG angulo quidem DFE æqualis angulus BGH; angulo autem FDE æqualis GBH. ergo reliquus qui ad E reliquo qui ad H est æqualis. æquiangulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH. quare vt FD ad GB, ita FE ad GH, & ED ad HB. ostensum autem est & vt FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. & vt igitur FC ad AG, ita CD ad AB; & FE ad GH, & adhuc ED ad HB. itaque quoniam angulus quidem CFD est æqualis angulo AGB; angulus autem DFE angulo BGH: erit totus CFE angulus toti AGH æqualis. Eadem ratione & CDE est æqualis ipsi ABH: & præterea angulus quidem ad C angulo ad A ęqualis, angulus vero ad E angulo ad H. ęquiangulum igitur est AH ipsi CE, & latera circum æquales ipsi angulos habet proportionalia. Ergo rectilineum AH rectilineo CE simile erit. A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE simile & similiter positum rectilineum AH descriptũ est. quod facere oportebat.

14. primi.

4. huius.

4 huius.
11. quinti.

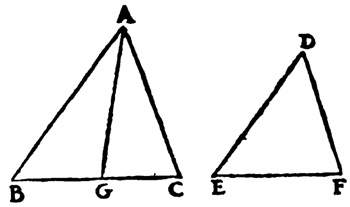
Diffi. 1. huius.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIX.

Similia triangula inter se sunt in dupla proportione laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æqualẽ angulo ad E: & sit vt AB ad BC, ita DE ad EF; ita vt latus BC homologũ sit lateri F. Dico ABC triãgulum ad triangulum DEF duplam proportionem habere eius, quam habet BC ad EF.



EF. Sumatur enim ipsarum BC EF tertia proportionalis BG, vt sit, sicut BC ad EF, ita EF ad BG: & iũgatur GA. Quoniã igitur vt AB ad BC, ita est DE ad EF; erit permutando vt AB ad DE, ita BC ad EF. Sed vt BC ad EF, ita EF ad BG. & vt igitur AB ad DE, ita EF ad BG. quare triangulorum ABG DEF latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quorum autem triangulorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se ęqualia sunt. æquale igitur est ABG triangulum triangulo DEF. Et quoniam est vt BC ad EF, ita EF ad BG; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplam proportionem habet eius, quam habet ab secundam: habebit BC ad BG duplam proportionem eius, quam habet BC ad EF. Vt autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. est autem ABG triangulum triangulo DEF ęquale. & triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad EF. Quare similia triangula inter se in dupla sunt proportione laterum homologorum. quod ostendere oportebat.

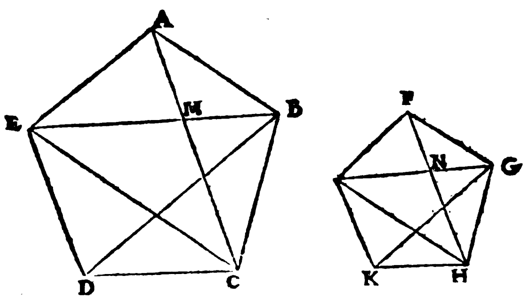
11. huius.
11. quinti.
15. huius.
Diffinit. 10. quinti.
1. huius.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si tres rectę lineę proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod fit à prima ad triangulum, quod à secunda simile, & similiter descriptum: quoniam ostensum est vt CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulũ ABG, hoc est ad triangulũ DEF. quod ostendere oportebat.

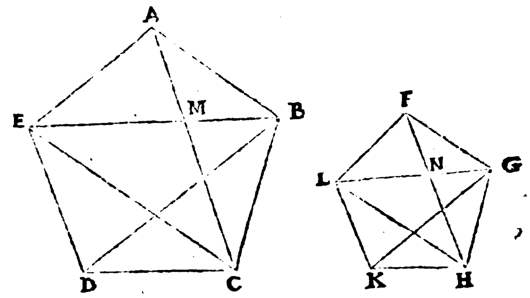
THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XX.

Similia polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: & polygonum ad polygonum duplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.



Sint similia polygona ABCDE FGHKL, & sit AB homologum ipsi FG. Dico polygona ABCDE FGHKL in similia triangula diuidi, & numero æqualia, & homologa totis: & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplam proportionem habere eius, quam habet AB ad FG. Iungantur BE EC GL LH. & quoniam simile est ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL est æqualis: atque est vt BA ad AE, ita GF ad FL. Quoniam igitur duo triangula sunt ABE FGL vnum angulum vni angulo æqualem habentia; circum æquales autem angulos latera proportionalia: erit triangulum ABE triangulo FGL æquiãgulum. ergo & simile. angulus igitur ABE ęqualis est angulo FGL. est autem & totus ABC angulus

6. huius.



gulus æqualis toti FGH, propter similitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH est æqualis. Et quoniam ob similitudinem triangulorum ABE FGL, est vt EB ad BA, ita LG ad GF. Sed & propter similitudinem polygonorum, vt AB ad BC, ita est FG ad GH; erit ex æquali vt EB ad BC, ita LG ad GH. & circum æquales angulos EBC LGH latera sunt proportionalia. ęquiangulum igitur est EBC triangulũ triangulo LGH. quare & simile. Eadem ratione & ECD triangulum simile est triangulo LHK. Similia igitur polygona ABCDE FGHKL in similia triãgula diuiduntur, & numero æqualia. Dico & homologa totis, hoc est vt proportionalia sint triangula, & anteecedentia quidem esse ABE EBC ECD, consequentia aũt ipsorum FGL LGH LHK & ABCDE polygonũ ad polygonũ FGHKL duplã proportionẽ habere eius, quã latus homologum habet ad homologum latus; hoc est AB ad FG. Iungantur enim AC FH. Et quoniam propter similitudinem polygonorum angulus ABC est ęqua-
6.huius. lis angulo FGH; atque est vt AB ad BC, ita FG ad GH: erit triangulum ABC triangulo FGH ęquiangulum. æqualis igitur est angulus quidem BAC angulo GFH, angulus vero BCA angulo GHF. prętcrea qm̃ ęqualis est BAM angulus angulo GFN, ostensus autem est & ABM angulus æqualis angulo FGN; erit & reliquus AMB reliquo FNG æqualis. ergo ęquiangulum est ABM triangulum triangulo FGN. Similiter ostendemus & triangulum BMC triangulo GNH æquiangulum esse. Vt igitur AM ad MB, ita est FN ad NG, & vt BM ad MC, ita GN ad NH. quare & ex *æquali* vt
1.huius. AM ad MC, ita FN ad NH. Sed vt AM ad MC, ita ABM triãgulũ ad triãgulũ MBC, & triãgulũ AME ad ipsũ EMC; inter se enim sunt vt bases. & vt vnũ antecedẽtiũ ad vnũ
12.quinti. consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequẽtia. Vt igitur AMB triãgulum ad triangulum BMC, ita triangulum ABE ad ipsum CBE. Sed vt AMB ad B
1.huius. MC, ita AM ad MC. & vt igitur AM ad MC, ita ABE triãgulũ ad triangulũ EBC. Eadẽ ratione & vt FN ad NH, ita FGL triãgulũ ad triãgulũ GLH. atq; est vt AM ad MC, ita FN ad NH. ergo & vt triãgulũ ABE ad triãgulũ BEC, ita triangulum FGL ad GHL triangulum: & permutando vt ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triãgulum EBC ad triangulum GHL. Similiter ostendemus iunctis BD GK, & vt BEC triangulum ad triangulum LGH, ita esse triangulum ECD ad triangulum LHK. Et qm̃ est vt ABE triãgulũ ad triãgulũ FGL, ita triãgulũ EBC ad triãgulũ LGH, & ad huc triangulum ECD ad ipsum LHK: erit & vt vnum antecedentium ad vnum con
12.quinti. sequentium, sic omnia antecedentia ad omnia consequentia, ergo vt triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. Sed ABE triangulum ad triangulum FGL duplam proportionem habet eius, quam latus
Ex antecedente. homologum AB habet ad homologum latus FG; similia enim triangula in dupla sunt proportione laterum homologorum. ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplam proportionem habet eius, quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia: & homologa totis, et polygonum ad polygonum duplam habet proportionem eius, quam habet latus homologum ad homologum latus. quod oportebat demonstrare.

Eodem modo & in similibus quadrilateris ostendetur ea esse in dupla proportione laterum homologorum. ostensum autem est & in triangulis.

COROLLARIVM PRIMVM.

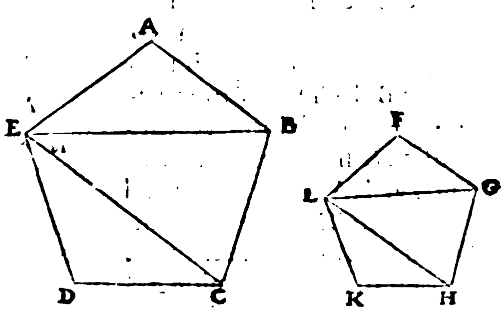
Ergo vniuersę similes rectilineę figurę inter se sunt in dupla propor-

proportione homologorum laterum. & si ipsarum A B FG tertiam proportionalem sumamus, quę sit X; habebit AB ad X duplam proportionem eius, quam habet AB ad FG. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplam proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG. atque ostensum est hoc in triangulis.

COROLLARIVM SECVNDVM.

Vniuerse igitur manifestum est, si tres rectę lineę proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita esse figuram, quæ fit à prima ad eam, quæ à secunda, similem & similiter descriptam. quod ostendere oportebat.

Ostẽdemus etiam aliter & expeditius homologa esse triãgula.



Exponãtur enim rursus polygona ABCDE FGHKL, & iũgãtur BE EC GL LH. Dico vt ABE triãgulũ ad triãgulũ FGL, ita esse triãgulũ EBC ad triãgulũ LGH; & triãgulũ CDE ad ipsum HKL. Qm̃ enim simile est ABE triãgulũ triãgulo FGL; habebit ABE triangulũ ad triangulũ FGL duplã proportionẽ eius, quam habet BE ad GL. Eadẽ ratione & triãgulũ BEC ad GLH triangulum duplam proportionem habet eius, quam BE ad GL. est igitur vt ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulũ. Rursus quoniam simile est triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplam proportionem eius, quam recta linea CE habet ad rectam HL. Eadem ratione, & ECD triangulum ad triangulum LHK duplam proportionem habet eius, quam CE ad HL. est igitur vt triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. ostensum autem est & vt EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. ergo & vt triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum, & triangulum ECD ad ipsum LHK. & vt igitur vnum antecedentium ad vnum consequentium, sic omnia antecedentia ad omnia consequentia, & reliqua vt in priori demonstratione. quod ipsum demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

11. quinti.

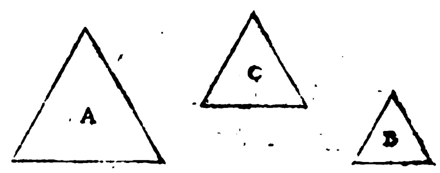
12. quinti.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

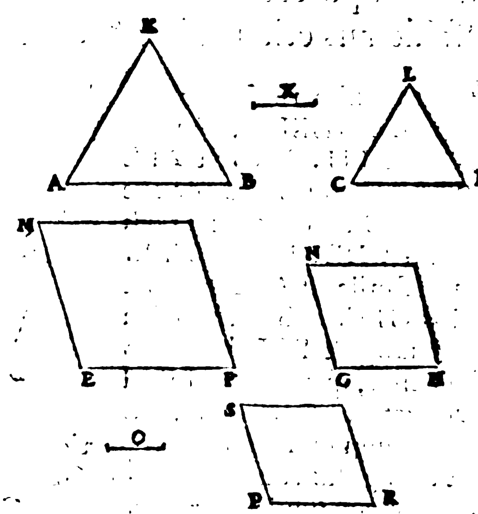
Sit enim vtrumque rectilineorum A B simile rectilineo C. Dico & rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, & ipsi æquiangulum erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. Rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, ęquiangulum ipsi erit, & circum

cum æquales angulos latera pruportionalia habebit. Vtrumque igitur rectilineorum A B ipsi C æquiangulum est, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. Quare & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraq; circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XXII.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



Sint quattuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH; & vt AB ad CD, ita sit EF ad GH. describanturq; ab ipsis quidem AB CD similia & similiter posita rectilinea KAB LCD: ab ipsis verò EF GH describantur rectilinea similia, & similiter posita MF NH. Dico vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineũ MF ad ipsum NH rectilineũ. Sumatur enim ipsarum quidẽ AB CD tertia proportionalis X; ipsarum vero EF GH tertia proportionalis O. Et quoniam est vt AB ad CD, ita EF ad GH: vt autem C D ad X, ita GH ad O; erit ex æquali vt AB ad X, ita EF ad O. Sed vt AB quidem ad X, ita est rectilineum KAB ad LCD rectilineum: vt autem EF ad O, ita rectilineum MF ad rectilineum NH. Vt igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita est rectilineum MF ad NH rectilineum. Sed sit vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineũ MF ad rectilineũ NH. Dico vt AB ad CD, ita esse EF ad GH. fiat enim vt AB ad CD, ita EF ad PR. & describatur ab ipsa PR alterutri rectilineorum MF NH simile & similiter positum rectilineum SR. Quoniam igitur est vt AB ad CD, ita EF ad PR: & descripta sunt ab ipsis quidem AB CD similia & similiter posita KA B LCD rectilinea, ab ipsis vero EF PR similia & similiter posita rectilinea MF SR; erit vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad RS rectilineum. ponitur autem & vt rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. ergo vt rectilineũ MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineum SR. Quod cum rectilineum MF ad vtrumque ipsorum NH SR eandem habeat proportionem, erit rectilineum NH ipsi SR æquale. est autem ipsi simile, & similiter positum. Ergo GH est æqualis PR. Et quoniam vt AB ad CD, ita est EF ad PR, æqualis autem PR ipsi GH; erit vt AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quattuor rectę lineę proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia erunt. & si rectilinea, quæ ab ipsis

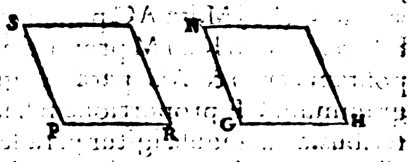
Marginal notes: 18. huius. — 11. huius. — Coro. 20. huius. — 11. quinti. — 11. huius. — 9. quinti.

ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineę proportionales erunt. quod oportebat demonstrare.

LEMMA.

At vero si rectilinea æqualia & similia sint, homologa ipsorũ latera inter se ęqualia esse, hoc modo demonstrabimus.

Sint æqualia & similia rectilinea NH SR; & sit vt HG ad GN, ita RP ad PS. Dico RP ipsi HG esse ęqualem. Si enim inæquales sint, vna ipsarum maior erit. Sit RP maior, quàm HG. Et quoniam est vt RP ad PS, ita HG ad GN; & permutando erit vt RP ad HG, ita PS ad GN: maior autem est PR, quàm HG. ergo & PS quàm GN maior erit. quare & rectilineum RS rectilineo HN est maius. Sed & æquale, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est PR ipsi GH. ergo æqualis sit necesse est. quod oportebat demonstrare.

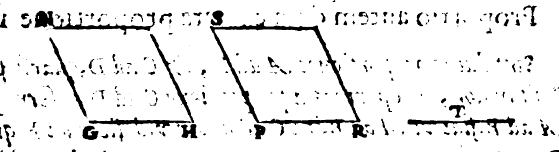


F. C. COMMENTARIVS.

Ergo GH est æqualis PR] *Demonstrat hoc antecedens lemma ratione ducente ad id, quod fieri non potest. Sed tamen licet etiam recta demonstratione vti, in hunc modum.* *

LEMMA.

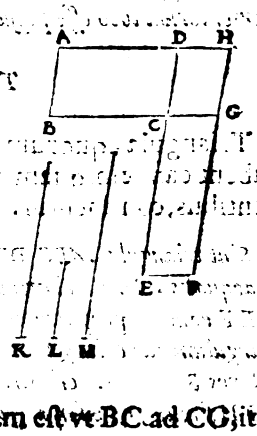
Sint æqualia & similia rectilinea NH SR: sitq; latus GH homologum ipsi PR: Dico GH ipsi PR æquale esse. *11. huius.*
Fiat enim vt GH ad PR, ita PR ad aliã quae sit T, erit GH ad T, vt rectilineũ NH ad rectilineũ SR. ergo GH est aequalis ipsi T. Sed cũ tres rectae lineae GH, PR, T sint proportionales, erit rectangulũ contentum GH, T, hoc est quadratum GH aequale quadrato PR; ac propterea recta linea GH ipsi PR est aequalis, quod oportebat demonstrare. *Corol. 20 huius.* *17. huius.*



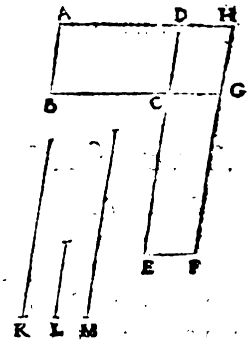
THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXIII.

Aequiangula parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam.

Sint æquiangula parallelogramma AC CF æqualem habentia BCD angulum angulo ECG. Dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compositam ex lateribus, videlicet compositam ex proportione, quam habet BC ad CG, & ex proportione quã DC habet ad CE. ponatur enim vt BC sit in directum ipsi CG. ergo & DC ipsi CE in directum erit: & compleatur DG parallelogrammum: exponaturq; recta linea quędã K: & fiat vt BC quidẽ ad CG, ita K ad L, vt autem DC ad CE, ita L ad M. proportiones igitur ipsius K ad L: & L ad M eędem sunt, quę proportiones laterum, videlicet BC ad CG, & DC ad CE. Sed proportio K ad M composita est ex proportione K ad L, & proportione L ad M. quare & K ad M proportionem habet ex lateribus compositam. Et quoniam est vt BC ad CG, ita *14. primi.* *12 huius.* *1. huius.*



AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; sed 11.quinti. vt BC ad CG, ita K ad L: erit & vt K ad L, ita parallelogrã mum AC ad CH parallelogrammum. Rursus quoniam est ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad paralel logrammum CF: vt autem DC ad CE, ita L ad M, & vt 11.quinti. L ad M, ita erit parallelogrammum CH ad CF parallelogrãmũ. Itaque cũ ostensum sit, vt K quidẽ ad L, ita AC parallelogrãmũ ad parallelogrãmũ CH: vt aũt L ad M, ita parallelogrammũ CH ad CF parallelogrammum; erit ex æquali vt K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipsum CF. habet autem K ad M proportionem ex lateribus compositam. ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compositam ex lateribus. æquiangula igitur parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. quod oportebat demonstrare.



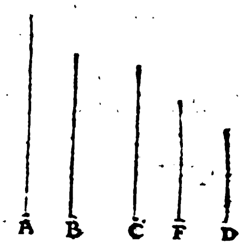
F. C. COMMENTARIVS.

COROLLARIVM. Ex iam demõstratis colligitur triangula, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habere ex lateribus compositam; sunt enim ea parallelogrammorum æquiangulorum dimidia.

Colligitur præterea quo modo ex duabus datis proportionibus, vel etiam pluribus proportio componatur, ex proportionibus enim BC ad CG, & DC ad CE proportio composita est K ad M. Quòd si ex tribus componenda sit proportio, rursus ex ea, quę ex duabus constat, & ex tertia aliam eodem modo componemus, quę quidem ex tribus composita erit, & ita deinceps in alijs.

Proportio autem data ex data proportione maiori hoc modo auferetur.

Sint datae proportiones A ad B, & C ad D, quarũ proportio C ad D sit maior, & oporteat à proportione C ad D auferre proportionem 12. huius. *A ad B. fiat vt A ad B, ita C ad aliam videlicet ad F, quae inter C & D media statuatur. Dico proportionem A ad B iam ablatã esse à proportione C ad D, & proportionem, quę relinquitur esse eam, quam habet F ad D. Quoniam enim proportio C ad D componitur ex proportione C ad F, & proportione F ad D, si auferatur vna dictarum proportionum, videlicet C ad F, quae est A ad B, relinquetur proportio F ad D. atque illud est. quod facere oportebat.*

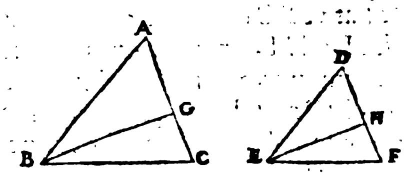


Quomodo autem in numeris proportiones, & componantur & auferantur ex iam dictis facile constare potest, & ex ijs, quae tradit Purbachius, vel Regiomontanus in epitomate magnae constructionis Ptolemęi propositione XVIII. primi libri. Sed placuit hoc loco apponere theoremata nonnulla à nobis elaborata, quae ab his non multum abhorrent: & elementorum loco esse possunt.

THEOREMA I.

Triangula, quorum vnus angulus vni angulo est æqualis, inter se proportionem habent eandem, quam rectangula, quæ lateribus ęqualem angulum comprehendentibus, continentur.

Sint triangula ABC DEF, sitq; angulus A angulo D aequalis. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF eandem proportionem habere, quam BAC rectangulum ad rectangulum EDF. Ducantur perpendiculares BG EH. erit triangulum BAG triangulo EDH simile; est enim angulus ad A aequalis angulo



ad D,

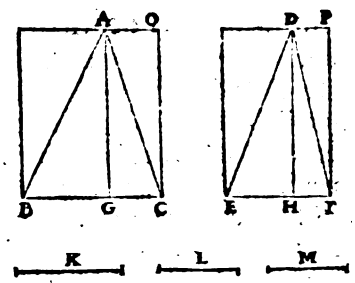
ad D, & angulus BGA rectus aequalis recto EHD. ergo & reliquus reliquo aequalis. Vt igitur GB ad BA, ita HE ad ED. Sed vt GB ad BA, ita rectangulum quod fit ex BG & AC ad rectangulum BAC, cum habeant eandem altitudinem, videlicet rectam lineam AC. & similiter vt HE ad ED, ita rectangulum ex EH, & DF ad rectangulum EDF. rectangulum igitur ex BG & AC ad rectangulum BAC est vt rectangulum ex EH, & DF ad rectangulum EDF; & permutando rectangulum ex BG & AC ad rectangulum ex EH & DF, vt BAC rectangulum ad rectangulum EDF. Sed rectanguli ex BG & AC dimidium est ABC triangulum ex 41 primi; habent enim eandem basim AC, & altitudinem eandem BG: & rectanguli ex EH & DF dimidium triangulum DEF. triangulum igitur ABC ad triangulum DEF eandem proportionem habet, quam rectangulum BAC ad rectangulum EDF. Quare triangula quorum vnus angulus vni angulo est aequalis inter se proportionem habent eandem, quam rectangula, quae lateribus aequalem angulum comprehendentibus continentur. quod demonstrare oportebat.

4. huius. 1. huius. 11. quinti. 15. quinti.

COROLLARIVM.

Ex hoc sequitur parallelogramma etiam ęquiangula inter se proportionem habere eandem, quam rectangula, quæ ipsorum lateribus continentur, cum sint eiusmodi triangulorum dupla. 15. quinti.

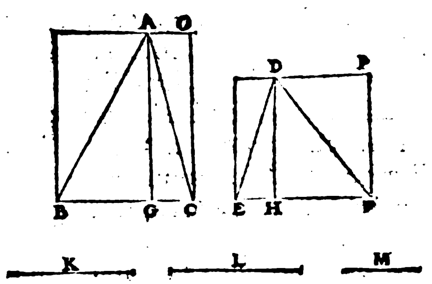
THEOREMA II.



Triangula et parallelogramma inter se proportionem habent compositā ex proportione basium, et proportione altitudinum.

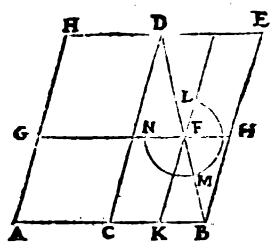
Sint triangula ABC DEF: & ducantur perpendiculares AG DH. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF proportionem habere compositam ex proportione basis BC ad basim EF; & ex proportione altitudinis AG ad DH altitudinem. Vel igitur AG est aequalis DH, vel inęqualis, & rursus vel BC est aequalis EF vel inęqualis. Sit primum AG aequalis DH, & BC inęqualis ipsi EF, fiatq; vt BC ad EF, ita recta linea quędam K ad L: & vt AG ad DH, ita L ad M. Itaque triangulum ABC ad triangulum DEF est, vt basis BC ad EF basim ex prima huius, hoc est vt K ad L. & cum DH sit aequalis AG, erit M ipsi L aequalis: triangulumq; ABC ad ipsum DEF, vt K ad M: proportio autem K ad M composita est ex proportione K ad L, & proportione L ad M, hoc est ex proportione basis BC ad basim EF, & proportione altitudinis AG ad altitudinem DH. Eodem modo demonstrabitur, si basis BC sit aequalis basi EF, cum inęquales sint altitudines AG DH: erunt enim KL inter se aequales, & ex ijs, quae demonstrauimus ad primam huius, triangulum ABC ad triangulum DEF proportionem habebit eandem, quam L ad M, hoc est quam K ad M. triangulum igitur ABC ad triangulum DEF proportionem habet compositam ex proportione K ad L, hoc est basis BC ad basim EF. & ex proportione L ad M, hoc est altitudinis AG ad DH altitudinem. Quod si bases BC EF aequales sint, itemq; altitudines aequales AG DH, nihilominus idem sequetur, nam KLM inter se aequales erunt, & triangulū ad triangulū proportionem habebit compositam ex proportione K ad L. & L ad M. hoc est ex proportione basium & proportione altitudinū. Deniq; si bases BC EF inaequales sint, & similiter inęquales altitudinęs AG DH. Ponatur AG minor, quàm

11. huius. 7. quinti.

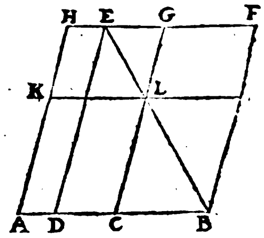


THEOREMA XX. PROPOSITIO XXVII.

Omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus et similiter positis ei quæ à dimidia describitur; maximũ est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.



A Sit recta linea A B; seceturq; bifariam in C; et ad A B rectam lineam applicetur parallelogrammũ A D deficiens figura parallelogramma D B, simili & similiter posita ei, quæ a dimidia ipsius A B descripta est, hoc est à C B. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus, et similiter positis ipsi DB, maximum esse AD. applicetur enim ad re
B ctam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma FB simili et similiter posita ipsi DB. Dico AD parallelogrã
Ex antecedente. mum parallelogrammo A F maius esse. Quoniam enim simile est parallelogrammum DB parallelogrammo FB, circa eãdem diametrum sunt. Ducatur eorum dia
43.primi. 36.primi. meter DB, et describatur figura. Quoniam igitur CF est æquale ipsi FE, commune apponatur FB. totum igitur CH toti KE est ęquale. Sed C H est æquale C G, quoniam et recta linea AC ipsi CB. ergo et GC ipsi EK æquale erit. commune apponatur CF. totum igitur AF est æquale gnomoni LMN, quare et DB hoc est AD parallelogrammum, parallelogrammo AF est maius. omnium igitur parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrãmis similibus, et similiter positis ei, quæ à dimidia describitur; maximum est, quod ad dimidiam est applicatum. quod demonstrare oportebat.



C ALITER. Sit enim rursus AB secta bifariã in pũcto C, et applicatum sit A L. deficiens figura L B. et rursus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrãmum AE deficiens figura E B simili, et similiter posita ei, quæ à dimidia AB describitur, videlicet ipsi LB. Dico parallelogrammum AL, quod ad dimidiã est applicatum maius esse parallelogrammo AE. Quoniam enim simile est
36.primi. EB ipsi L B, circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum
43.primi. diameter EB, et describatur figura. Et quoniã LF ęquale est L H, etenim FG ipsi GH est æqualis: erit LF ipso EK maius. est aũt L F æquale DL. maius igitur est et D L ipso E K. commune apponatur KD. ergo totum A L toto A E est maius. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

A **Et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum ad deficiens figura parallelogramma.]**

Describatur à recta linea CB parallelogrammum quodcumque libuerit D B, et totum parallelogrammum ABE compleatur. erit ad rectam lineam AB applicatum parallelogrammum A D deficiens figura parallelogramma DB; simili & similiter posita ei, quae à dimidia ipsius A B descripta est.

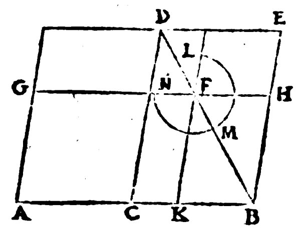
B Applicetur enim ad rectam lineam A B parallelogrammum A F deficiens figura parallelogramma FB, simili et similiter posita ipsi DB.

Sumatur in recta linea A B inter C B quodvis punctum K, & ab ipsa KB describatur parallelogrammum simile & similiter positum ipsi DB parallelogrammo, quod sit K B H F, et HF ad G producatur

producatur. erit rursus ad rectam lineam A B applicatum parallelogrammum A F deficiens figura parallelogramma FB, simili & similiter posita ipsi DB.

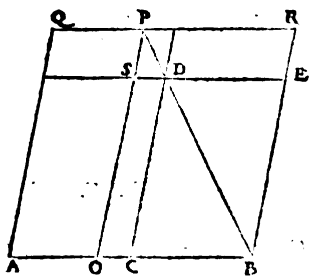
C

Sit enim rursus ab secta bifariam in puncto C. Nō *videtur hęc alia demonstratio, sed alius casus. quare theorema fortasse in hunc modū aptius, et manifestius explicabitur.*



Sit recta linea AB, seceturq; bifariam in C, et ab ipsa CB describatur parallelogrammum vtcumque DB, et totum parallelogrammum A B E compleatur. Iam ad rectam lineam AB applicatum erit parallelogrammum AD, deficiens figura parallelogramma DB simili & similiter posita ei, quę descripta est à dimidia ipsius A B, hoc est à CB. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam A B applicatorum, & deficientium figuris similibus et similiter positis ipsi DB, maximum esse AD. Iugatur enim DB parallelogrammi DB diameter. erit recta linea ad quam alia parallelogramma applicanda sunt, vel maior quàm dimidia ipsius AC vel minor. Sumatur primo maior, & sit A K; atque à puncto K ipsi BE parallela ducatur K F, quae diametro D B in F occurrat; & per F ducatur G F H parallela ipsi AB & figura compleatur. erit ad AB applicatum aliud parallelogrammum AF deficiens figura parallelogramma FB, simili & similiter posita ipsi D B; quippe quae circa eandem diametrum consistat. Dico igitur AD maius esse quàm AF. Quoniam enim suplementum CF est aequale ipsi FE; communi apposito FB, erit totum CH toti KE aequale. at CH est aequale GC, quoniam & AC ipsi CB. ergo & GC aequale est KE. apponatur vtrique commune CF. totum igitur AF gnomoni LMN est aequale. quare & DB parallelogrammum, hoc est AD maius erit quàm A F. 43.primi.

Sumatur deinde A O minor, quàm dimidia AC, & per O ipsi BE parallela ducatur O P, quae cum diametro B D producta conueniat in P. denique per P ducatur QPR parallela ipsi AB, & secunda figura compleatur. Erit rursus ad AB applicatum aliud parallelogrammum A P deficiēs figura parallelogramma PB ipsi D B simili & similiter posita. Dico rursus AD quàm AP maius esse. Quoniam enim parallelogrāmum D R est aequale parallelogrammo D Q, erit DR maius quàm SQ. Sed OD est aequale D R. ergo et OD ipso S Q est maius. commune apponatur AS. totum igitur AD, quàm totum A P maius erit. Quare omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris similibus, & reliqua, quae sequuntur. quod oportebat demonstrare. 36.primi. 43.primi.

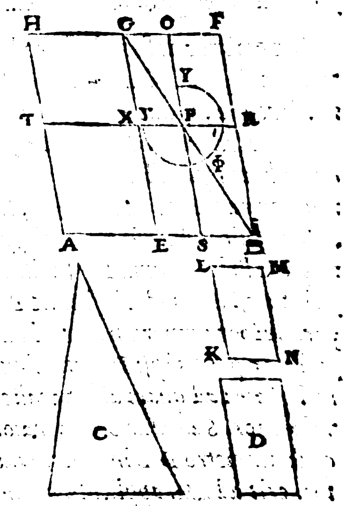


PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXVIII.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo ęquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datę. oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, et eo quod à dimidia, et eo, cui oportet simile deficere.

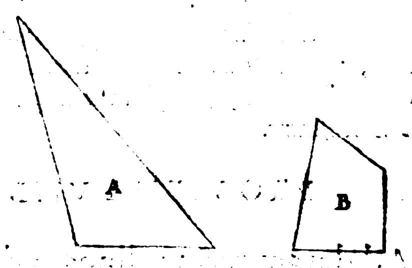
Sit data quidem recta linea A B: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, sit C, non maius existens eo, quod ad dimidiam applicatum est, similibus existētibus defectibus: cui autem oportet simile deficere sit D. oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C ęquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit ipsi D. Secetur AB bifariam in E, & ab ipsa EB describatur simile, & similiter positum ipsi D; quod sit EBFG, & compleatur AG parallelogrammum. Itaque AG vel ęquale est ipsi 18.huius.

est ipsi C, vel eo maius, ob determinationem. & si quidem AG sit ęquale C, factum iam erit, quod proponebatur: etenim ad rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma GB, ipsi D simili. Si autem non est ęquale, erit H E maius quàm C; atque est H E æquale G B. ergo & G B quàm C est maius. quo autem G B superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile & similiter positum
25.huius. idem constituatur KLMN. Sed D est simile GB. quare & KM ipsi G B simile erit. Sit igitur recta linea quidem KL homologa ipsi GE, LM vero ipsi GF. & quoniã æquale est GB ipsis C KM, erit GB ipso KM maius. maior igitur est recta linea G E ipsa K L; et GF ipsa LM. ponatur GX æqualis KL, & G O æqualis LM, & compleatur X G O P parallelogrammum. ęquale igitur est & simile GP ipsi KM. Sed KM simi-
21.huius. le est GB. ergo & GP ipsi GB est simile. circa eandẽ
26.huius. igitur est diametrũ GP ipsi GB. Sit ipsorum diameter GPB, & figura describatur. Itaque qm̃ GB est æquale ipsis C KM, quorũ GP est
43.primi. æquale KM, erit reliquus ϒφτ gnomon æqualis reliquo C. Et qm̃ OR est æquale XS,
36.primi. commune apponatur PB. totum igitur OB toti XB est ęquale. Sed XB est æquale T E, quoniam & latus AE lateri EB. quare & TE ipsi OB ęquale. cõmune apponatur XS. ergo totum TS est æquale toti gnomoni ϒφτ. At ϒφτ gnomon ipsi C ostensus est ęqualis. & TS igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogrãma PB ipsi D simili, quoniã & PB simile est ipsi GP. quod facere oportebat.

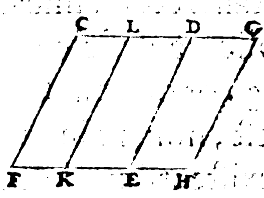


F. C. COMMENTARIVS.

✱ Quo autem GB superat C, ei excessui ęquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem constituatur] *Vt autem excessus, quo alterum rectilineum alterum superat, facile inueniatur libuit, sequens problema apponere.*



Duorum rectilineorũ inæqualiũ excessum, quo maius superat minus, inuenire.



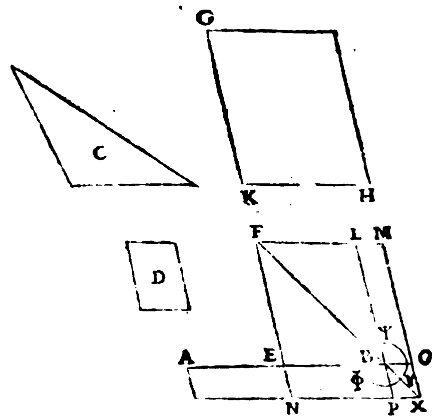
Sint duo rectilinea inęqualia A B, quorum maius sit A. oportet inuenire excessum, quo re-
54.primi. *ctilineum A ipsum B superat. Dato enim recti lineo A in quouis angulo aequale parallelogrãmum constituatur CDEF: & ad rectam lineam DE in angulo aequali ipsi DCF, applicetur parallelogrammum DGHE aequale rectilineo B.*
14.primi. *erit recta linea DG in directum ipsi CD, & EH in directum FE. est igitur vt parallelogrammum FD ad parallelogrammum DH, hoc est vt rectilineum A ad rectilineum B, ita recta linea FE ad EH. atq; est rectilineum A rectilineo B maius. maior igitur est recta linea FE ipsa EH. Itaq; à recta linea FE abscindatur EK ipsi EH aequalis, & à puncto K alterutri ipsarum FC ED parallela ducatur KL. erit parallelogrammum KD parallelogrammo DH aequale, & ob id parallelogrammum FL est excessus, quo parallelogrammum FD superat parallelogrammum DH, hoc est quo rectilineum A ipsum B rectilineum superat. Duorum igitur rectilineorum inęqualium A B excessus inuentus est. quod fecisse oportuit.*

PRO-

PROBLEMA IX. PROPOSITIO. XXIX.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo ęquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datę.

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum cui oportet æquale ad ipsam AB applicare, sit C; cui autem oportet simile excedere D. Itaq; oportet ad AB rectam lineam dato rectilineo C ęquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogrãma simili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipsi D simile, & similiter positum parallelogrammum describatur BF. & vtrisque quidem BF. C ęquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem constituatur GH. Si mile igitur est GH ipsi FB. sitq; KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE. Et quoniam parallelogrammum GH maius est ipso FB, erit recta linea KH maior quàm FL, & KG maior quàm FE. producantur FL FE: & ipsi quidẽ KH æqualis sit FLM; ipsi vero KG æqualis FEN: & compleatur MN parallelogrammum. ergo MN æquale est & simile ipsi GH. Sed GH est simile EL. & MN igitur ipsi EL simile erit; ac propterea circa eandem diametrum est EL ipsi MN. Ducatur ipsorum diameter FX, & figura describatur. Itaque quoniam GH ipsis EL C est ęquale, sed GH èst æquale MN; erit & MN ęquale ipsis EL C. commune auferatur EL. reliquus igitur ϒϒΦ gnomon ipsi C est æqualis. Et quoniam AE est æqualis EB, ęquale erit & AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc est ipsi LO. commune apponatur EX. totum igitur AX æquale est gnomoni ΦϒΥ. Sed ΦϒΥ gnomon est æqualis C. ergo & AX ipsi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C ęquale parallelogrammum applicatum est AX, excedens figura parallelogrãma PO ipsi D simili; quoniã & ipsi EL simile est OP. quod fecisse oportebat.

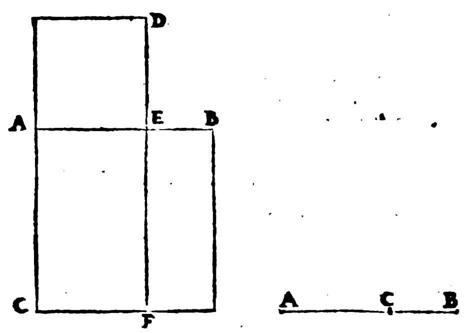


18. huius. 25. huius. 21. huius. 26. huius. 24. huius.

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXX.

Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione secare.

Sit data recta linea terminata AB. oportet ipsam AB extrema, ac media ratione secare. Describatur enim ex A B quadratum BC, & ad AC ipsi BC æquale parallelogrammum applicetur CD, excedens figura AD ipsi BC simili. quadratum autem est BC. ergo & AD, quadratum erit. Et quoniã BC est ęquale CD; commune auferatur CE. reliquum igitur BF reliquo AD est æquale. est autem & ipsi ęquiãgulũ. ergo ipsorum BF AD latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. vt igitur FE ad ED, ita est AE ad EB. est autem FE æqualis AC, hoc est ipsi AB, & ED ipsi AE. quare vt BA ad AE, ita AE ad EB: Sed AB maior



46. primi. Ex antecedente. 14. huius. 34. primi.

Y est

14. quinti. est quàm AE. ergo AE quàm EB est maior. Recta igitur linea AB extrema, ac media ratione secta est in E, & maior ipsius portio est AE. quod facere oportebat.

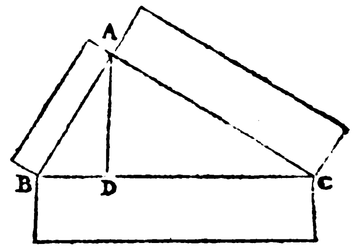
ALITER. Sit data recta linea AB. oportet ipsã AB extrema ac media rõne secare. Secetur enim AB in C, ita vt rectangulum, quod continetur AB BC æquale sit quadrato ex AC. Quoniam igitur rectangulum ABC æquale est quadrato ex AC, erit vt BA ad AC, ita AC ad CB. ergo AB recta linea extrema ac media ratione secta est. quod facere oportebat.

11. secundi,

17. huius,

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXXI.

In rectangulis triangulis figura, quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis, quę à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis.



Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figuram, quę fit ex BC æqualem esse eis, quæ ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. Ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo rectãgulo ABC ab angulo recto, qui est ad A ad BC basim perpendicularis ducta est AD; erunt triãgula ABD ADC, quæ sunt ad perpendicularẽ similia toti ABC, & inter se se. Et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit vt CB ad BA, ita AB ad BD. Quòd cũ tres rectæ lineę proportionalas sint, vt prima ad tertiam, ita erit figura, quæ fit ex prima ad eam, quę ex secunda, similem, & similiter descriptam. Vt igitur CB ad BD, ita figura, quę fit ex CB ad eam, quæ ex BA, similem, et similiter descriptam. Eadem ratione et vt BC ad CD, ita figura, quæ fit ex BC ad eam, quę ex CA. quare et vt BC ad ipsas BD DC, ita figura, quæ ex BC ad eas, quæ ex BA AC, similes, & similiter descriptas. æqualis autem BC ipsis BD DC. ergo figura, quę fit ex BC æqualis est eis, quę ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. In rectangulis igitur triangulis, figura, quæ fit à latere rectum angulnm subtendente, æqualis est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis, quod ostendere oportebat.

8. huius,

Coro. 20. huius.

A

ALITER. Quoniam similes figuræ sunt in dupla proportione laterum homologorum; figura, quæ fit ex BC ad eam, quæ ex BA duplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad BA. habet autem & quadratum ex BC ad quadratum ex BA duplam proportionem eius, quam BC ad BA. ergo & vt figura, quæ ex BC ad eam, quę ex BA, ita quadratum ex BC ad quadratum ex BA. Eadem ratione & vt figura, quæ ex BC ad eam, quæ ex CA, ita quadratum, quod ex BC ad illud, quod ex CA quadratum. & vt igitur figura quæ ex BC ad eas, quæ ex BA AC, ita quod ex BC quadratum ad quadrata, quę ex BA AC. quadratum autem, quod ex BC æquale est eis, quæ ex BA AC quadratis. ergo & figura, quæ fit ex BC est æqualis eis, quę ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. quod ostẽdere oportebat.

20. huius,

11. quinti,

47. primi,

F. C. COMMENTARIVS.

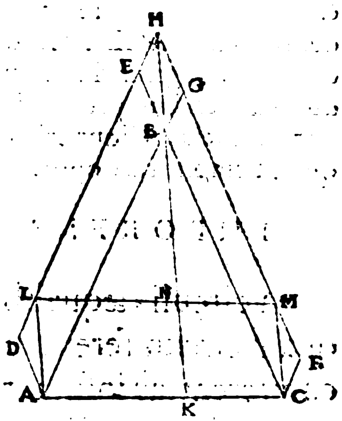
A Quare & vt BC ad ipsas BD DC, ita figura, quę ex fit BC ad eas, quæ ex BA AC similes, & similiter descriptas.] *Quoniã enim est vt CB ad BD, ita figura, quae fit à CB ad eam, quae à BA similem, & similiter descriptam; erit & conuertendo vt DB ad BC, ita figura, quae fit à BA ad eam, quae à BC similem & similiter descriptam. præterea cum sit vt BC ad CD, ita figura, quae fit à BC ad eam, quae à CA: & conuertendo vt DC ad CB, ita erit figura, quae fit ab AC ad eam, quae à CB. Sit igitur figura, quae fit à BA magnitudo prima; figura, quae à BC magnitudo secunda; recta linea DB magnitudo tertia, & recta BC quarta; figura vero, quae fit ab AC*

AC magnitudo quinta & recta linea DC sexta. Itaque prima magnitudo ad secundam, est vt tertia ad quartam; quinta vero ad secundam, vt sexta ad quartam. ergo ex vigesimaquarta quinti libri composita prima & quinta ad secundam erit, vt composita tertia & sexta ad quartam, hoc est figurae quae fiunt à BA AC ad eam, quae à BC erunt vt rectae lineae BD DC ad rectam BC & rursus conuertendo figura, quae fit à BC ad eas, quae à BA AC erit, vt recta linea BC ad rectas BD DC.

Et vt igitur figura, quę à BC ad eas, quę à BA AC, ita quod ex BC quadratum ad quadrata, quæ ex BA AC. B

Hoc similiter concludemus, vt proxime dictum est, ex vigesima quarta quinti. erit enim figura, quae fit à BA magnitudo prima; figura, quae à BC secunda; quadratum ex BA tertia; & quadratum ex BC quarta; figura vero, quae fit ab AC quinta; & quadratum ex AC sexta. Hoc theoremate multo vniuersalius est illud, quod à Pappo demonstratur in quarto libro mathematicarum collectionum.

Si sit triangulum ABC, & ab ipsis AB BC describantur quæuis parallelogramma ABED BCFG; & lineæ DE FG producantur ad H, iungatur'que HB: fient parallelogramma ABED BCFG æqualia parallelogrammo contento AC HB, in angulo, qui vtrisque BAC DHB sit æqualis.

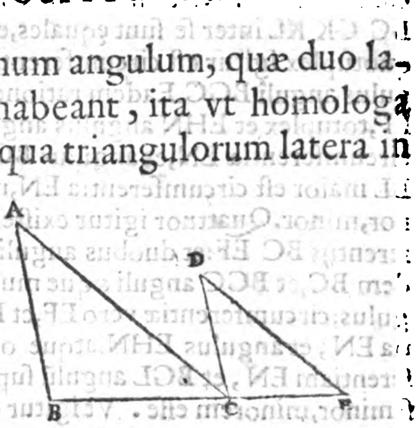


Producatur enim HB ad K, & per A C ipsi KH parallelæ ducantur AL CM; & LM iungatur. Itaque quoniam parallelogrammum est ALHB; erunt AL BH æquales, & parallelæ. Similiter æquales & parallelę MC HB. ergo & LA MC æquales & parallelæ sint necesse est; & propterea LM AC. parallelogrammum igitur est ALMC in angulo LAC, hoc est in angulo æquali vtrisque BAC DHB. est enim angulus DHB ipsi LAB æqualis. Et quoniam DABE parallelogrammum ęquale est parallelogrammo LABH, etenim in eadem basi AB, & in eisdem parallelis AB DH consistit: parallelogrammum autem LABH parallelogrammo LAKN est ęquale, cum sit in eadem basi LA, & in eisdem parallelis LA HK: erit parallelogrammũ ADEB ęquale parallelogrammo LAKN. et ob eadem caussam parallelogrammum BGFC parallelogrammo KNMC. parallelogramma igitur DABE BGFC parallelogrammo LACM æqualia sunt, hoc est ei, quod AC HB continetur, in angulo LAC, qui est æqualis vtrisque BAC BHL. Atque hoc multo vniuersalius est, quàm quod in triangulo rectangulo de quadratis in elementis demonstratur.

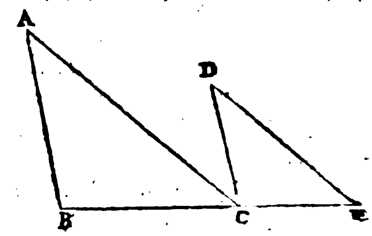
34. primi. 30. primi. 33. primi. 34. primi. 35. primi.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula componantur ad vnum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.



Sint duo triangula ABC DCE, quę duo latera BA AC duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, vt sit sicut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem sit AB ipsi DC, et AC ipsi DE. Dico BC ipsi CE in directũ esse. Quoniam enim AB parallela est DC, et in ipsas incidit recta linea AC; erunt anguli 29. primi.



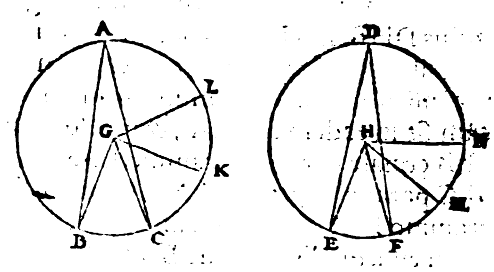
alterni BAC ACD æquales inter se se. Eadē ratione et angulus CDE æqualis est angulo ACD. Quare et BAC ipsi CDE est ęqualis. Et quoniam duo triāgula sunt ABC DCE, vnū angulū, qui ad A, vni angulo qui ad D æqualem habentia, circum ęquales autem angulos latera proportionalia, quòd sit vt BA ad AC, ita CD ad DE; erit triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum. ergo ABC angulus est æqualis angulo DCE. ostensus autem est et angulus ACD ęqualis angulo BAC. totus igitur ACE duobus ABC BAC est æqualis. communis apponatur ACB. ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales sunt. Sed BAC ACB CBA anguli duobus rectis sunt ęquales. et anguli igitur ACE ACB duobus rectis æquales erunt. Itaque ad quandam rectam lineam AC, et ad punctum in ipsa C duæ rectæ lineæ BC CE non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipsi CE in directum erit. Si igitur duo triangula componantur ad vnum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipsorum etiam sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. quod demonstrare oportebat.

6. huius.

4. primi.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXXIII.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant. Adhuc autem & sectores, quippe qui ad centra sunt constituti.



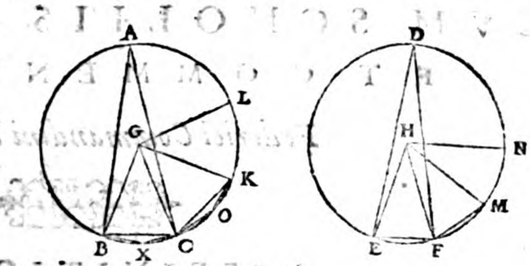
Sint ęquales circuli ABC DEF; et ad centra quidem ipsorum GH sint anguli BGC EHF, ad circumferentias vero anguli BAC EDF. Dico vt circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita esse et BGC angulum ad angulum EHF, et angulum BAC ad angulum EDF: et adhuc sectorē BGC ad EHF sectorem. Ponantur enim circumferentię quidem BC ęquales quotcumque deinceps CK KL; circumferentię vero EF, rursus ęquales quotcumque FM MN: et iungantur GK GL HM HN. quoniam igitur circumferentiæ BC CK KL inter se sunt ęquales, et anguli BGC CGK KGL inter se æquales erūt. quotuplex igitur est circumferentia BL circumfrentiæ BC, totuplex est et BGL angulus anguli BGC. Eadem ratione et quotuplex est circūferentia NE circūferentię EF, totuplex et EHN angulus anguli EHF. Si igitur æqualis est BL circumferentia circumferentiæ EN, et angulus BGL angulo EHN erit æqualis; et si circumferentia BL maior est circumferentia EN, maior erit et BGL angulus angulo EHN: et si minor, minor. Quattuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circūferentijs BC EF: et duobus angulis BGC EHF, sumpta sunt circumferentiæ quidem BC, et BGC anguli æque multiplicia, videlicet circumferentia BL, et BGL angulus; circumferentiæ vero EF, et EHF anguli æque multiplicia, nempe circūferētia EN, et angulus EHN. atque ostensum est si circumferētia BL superat circumferentiam EN, et BGL angulū superare angulum EHN, et si æqualis, ęqualem, et si minor, minorem esse. Vt igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita

27. tertij.

Diffi. 5 quinti.

angulus

angulus BGC ad angulum EHF. Sed vt BGC angulus ad angulum EHF, ita angulus BAC ad EDF angulum. vterque enim vtriusque est duplus. et vt igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita et angulus BGC ad angulum EHF, et angulus BAC ad EDF angulum. Quare in circulis ęqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistũt, siue ad centra, siue ad circumferentiam insistant. Dico insuper, et vt BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita esse sectorem GBC ad HFE sectorem. Iũgantur enim BC CK, et sumptis in circumferentijs BC CK: punctis X O, iungantur et BX XC CO OK. Itaque quoniam duæ BG GC duabus CG GK æquales sunt, et angulos ęquales continẽt; erit et basis BC basi CK æqualis. æquale igitur est et GBC triãgulum triangulo GCK. Et quoniam circumferentia BC circumferentiæ CK est æqualis, et reliqua circumferentia, quæ complet totum circulum ABC æqualis est reliquæ, quæ eundem circulum complet. quare et angulus BXC angulo COK est ęqualis. similis igitur est BXC portio portioni COK: et sunt in ęqualibus rectis lineis BC CK: quę autem in æqualibus rectis lineis similes circulorũ portiones, et inter se ęquales sunt. ergo portio BXC est æqualis portioni COK. est autem et BGC triangulum triangulo CGK æquale. et totus igitur sector BGC toti sectori CGK æqualis erit. Eadem ratione et GKL sector vtrique ipsorum GKC GCB est æqualis. Tres igitur sectores BGC CGK KGL æquales sunt inter se. Similiter et sectores HEF HFM HMN inter se sunt æquales. quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex est et GBL sector sectoris GBC. Eadem ratione et quotuplex est circumferentia NE circũferentiæ EF, totuplex est et HEN sector sectoris HEF. quare si circumferentia BL circumferentię EN est ęqualis, et sector BGL ęqualis est sectori EHN. et si circumferentiæ BL superat circumferentiã EN, superat et BGL sector sectorem EHN, et si minor minor. Quattuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC EF circumferentijs, duobus uero sectoribus GBC EHF, sumpta sunt æque multiplicia, circumferentiæ quidem BC et GBC sectoris circumferentia BL et GBL sector. circumferentię vero EF, et sectoris HEF æquemultiplicia circumferentia EN, et HEN sector. atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN, et sectorem BGL superare sectorem EHN. et si æqualis ęqualem esse; et si minor, minorem. est igitur vt BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector GBC ad HEF sectorem. quod ostendere oportebat.



15. quinti.
20. tertij.
4. primi.
27. tertij.
11. dif. tertij.
24. tertij.
5. diffi. quinti.

COROLLARIVM.

Perspicuum etiam est; et vt sector ad sectorem, ita esse angulum ad angulum. 11. quinti.

SEXTI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER SEPTIMVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.

VNITAS est, qua vnumquodque eorũ, quæ sunt vnum dicitur.

II.

Numerus autem ex vnitatibus constans multitudo.

III.

Pars est numerus numeri, minor maioris, quando maiorem metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Pars ea nomen inuenit à numero, per quem minor maiorem metitur. Si enim minor bis metitur maiorem, dicetur pars dimidia, si ter dicetur tertia, si quater quarta. & ita in alijs.

IIII.

Partes autem, quando non metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Partes nomen trahunt ab ijs numeris, per quos communis duorum numerorum mensura vtrumque ipsorum metitur. nam si communis eorum mensura minorem numerum bis metiatur, & maiorem ter, dicentur hae partes duae tertiae; si vero minorem ter metiatur, & maiorem quater, dicentur tres quartae. Quòd si maiorem quinquies metiatur, dicentur tres quintae. & ita in reliquis. Recentiores numerum, per quem communis mensura minorem metitur, numerantem, uel numeratorem appellant, vtpote qui partium multitudinem definiat: numerum vero, per quem communis mensura maiorem metitur, denominantem, seu denominatorem dicunt, vt qui his partibus nomen imponat.

V.

Multiplex est maior minoris, quando minor eum metitur.

F. C.

Multiplex autem nomen habet ab eo numero, per quem minor eum metitur. Si enim minor bis metiatur maiorem, dicetur maior minoris duplus; si ter, triplus; si quater, quadruplas, & eodem modo in alijs.

VI.

Par numerus est, qui bifariam diuiditur.

VII.

Impar vero, qui bifariam non diuiditur: vel qui à pari numero vnitate differt.

VIII.

Pariter par numerus est, quem par numerus per parem numerum metitur.

SCHOLIVM.

Si huic diffinitioni addamus tantum, vt pariter par numerus dicatur is, quem par numerus tantum per parem numerum metitur; faciemus pythagoreorum pariter parem, qui ad vnitatem vsque bifariam diuiditur; vt octo par numerus metitur per parem tantum. duodecim vero Euclidi est pariter par, quem & par numerus metitur per parem numerum; bis enim sex sunt duodecim; & impar numerus per parem metitur. nam si quattuor ter sumantur duodecim fient. Pariter vero imparem dicit, quem par numerus metitur per imparem numerum; vt decem, quem binarius per quinarium metitur. At περισσάρτιος, *hoc est impariter par est duodecim: etenim ternarius per quaternarium metitur. & simpliciter quod perfectum nomen est in compositione, per illud dicimus numerũ metiri alium numerum. Itaque sciendum est* περισσάρτιον, *hoc est impariter parem à pythagoreis sic dictum, plures diuisiones suscipere, quæ in partes æquales fiunt, nõ tamẽ ad vnitatẽ vsq; diuisionẽ procedere. Nouit autem hunc & in ipse Euclides, cuius mentionem facit in nono libro, pulchre ipsum neque pariter parem, neque pariter imparem dicens, per negationem duorum extremorum significauit, quemadmodum in contrarijs mediatis, media, quibus nomina imposita non sunt, per negationem extremorum explicamus. Huius autem mentionem facit Euclides in 34 noni libri.*

IX.

Pariter vero impar est, quem par numerus per numerum imparem metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex diffinitione octaua, & nona, & ex ijs, quae in nono libro traduntur, apparet Euclidem pariter parem numerũ appellare eũ, quẽ par numerus per numerum parem metitur, siue sit ex numeris à binario duplatis, siue non: & pariter imparem appellare eum, quem par numerus per numerum imparem metitur, siue dimidium habeat imparem, siue parem. numeros enim à binario duplatos ipse pariter pares tantum appellat, & eos, qui dimidium imparem habent vocat pariter impares tantum. eos vero, qui neque à binario duplati sunt, neque dimidium habent imparem, & pariter pares, & pariter impares dicit. At Nicomacho, Boetioq; paris numeri species tres sunt; Vna quae dicitur pariter par, alia quae pariter impar, & tertia, quae impariter par. Pariter par numerus est, qui põt in duo paria diuidi, eiusq; pars in alia duo paria, & rursus partis pars in alia duo paria; & hoc semper, quoad diuisio partium ad vnitatem perueniat, vt 64. Pariter impar numerus est, qui quoniam par est, in partes quidem aequales diuiditur, partes vero eius mox indiuisibiles sunt, vt 6. 10. 14. 18. 22. Impariter par numerus est, qui inter duos iam dictos quodammodo medius est, diuiditur enim in partes aequales, eiusq; pars rursus diuiditur in alias partes aequales, & interdum partes partium in alias aequales diuidi possunt; sed diuisio ad vnitatem vsque non perducitur. Qui igitur bis est pariter par, Euclides pariter parem tantum vocat; qui vero bis pariter impar est, Euclides pariter imparem tantum. & qui bis impariter par Euclides & pariter parem, & impariter parem appellat. Quare illud, quod in extrema parte antecedentis scholij additur, verum non videtur, nisi fortasse intelligamus eum, qui pariter par est, & pariter impar eo modo, quo sumit Euclides, neque pariter parem esse tantum, neque pariter imparem tantum.

X.

Impariter vero impar numerus est, quẽ impar numerus per numerum imparem metitur.

X I.

Primus numerus est, quem vnitas sola metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Primum numerum nullus metitur numerus, prçterquàm quòd ipse se ipsum metitur.

X II.

Primi inter se numeri sunt, quos sola vnitas communis mensura metitur.

X I I I.

Compositus numerus est, quem numerus aliquis metitur.

X I I I I.

Compositi inter se numeri sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

X V.

Numerus numerũ multiplicare dicitur, quando quot vnitates sunt in ipso, toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

Quando

XVI.

Quando duo numeri se se multiplicantes aliquem fecerint. qui factus est planus appellatur: latera vero ipsius sunt numeri se se multiplicantes.

XVII.

Quando autem tres numeri se se multiplicantes aliquem fecerint, factus solidus appellatur: latera vero ipsius se se multiplicantes numeri.

XVIII.

Quadratus numerus est, qui æqualiter est æqualis, vel qui duobus æqualibus numeris continetur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter est æqualis æqualiter, vel qui tribus æqualibus numeris continetur.

XX.

Numeri proportionales sunt, quando primus secũdi, & tertius quarti ęque multiplex fuerit, vel eadem pars, vel eædem partes.

F. C. COMMENTARIVS.

Vel igitur primus est maior secundo, vel minor. & si quidem maior, vel eum minor metitur, vel non metitur. & si metitur erit primus secundi aeque multiplex, atque tertius quarti: si vero non metitur, quae partes est secundus primi, eędem partes erit & quartus tertij. vel etiam hoc modo. si primus est maior secundo, quae pars, vel partes est secundus primi, eadem pars, vel partes erit & quartus tertij. sed si primus sit minor, quae pars, vel quae partes est primus secundi, eadem pars, vel eędem partes erit & tertius quarti. Ponit autem nunc minorem numerum maioris partem esse, vel partes, quod postea in quarto theoremate huius demonstratione confirmat.

XXI.

Similes plani, & solidi numeri sunt, qui latera habent proportionalia.

XXII.

Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est ęqualis.

F. C. COMMENTARIVS.

Numerus autem qui suis ipsius partibus minor est abundans appellatur, qui vero maior, diminutos. His diffinitionibus nos aliam addidimus. sed & petitiones quasdam, & communes notiones apponere libuit, quibus Euclides in his libris uti usus est.

Z Cum

XXIII.

Cum fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus ad tertium duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad secundum: & primus ad quartum triplam, & eodem modo in aliis.

PETITIONES.

1 *Cuilibet numero quotlibet sumi posse aequales, vel multiplices.*

2 *Quolibet numero sumi posse maiorem.*

3 *Numerus infinite augetur, sed non infinite diminuitur.*

COMMVNES NOTIONES.

1 *Quicumque eiusdem, vel ęqualium aeque multiplices fuerint, & ipsi inter se sunt aequales.*

2 *Quorum idem numerus aeque multiplex fuerit, vel quorũ ęque multiplices fuerint aequales, & ipsi inter se aequales sunt.*

3 *Quicumque eiusdem numeri, vel aequalium eadem pars, vel eadem partes fuerint, & ipsi inter se sunt aequales.*

4 *Quorum idem, vel aequales numeri eadem pars, vel eędem partes fuerint, inter se sunt aequales.*

5 *Omnis numeri pars est vnitas ab eo denominata, binarij enim numeri vnitas pars est ab ipso binario denominata, quae dimidia dicitur, ternarij vero vnitas est pars, quae à ternario denominata tertia dicitur, quaternarij quarta, & ita in aliis.*

6 *Vnitas omnem numerum metitur per vnitates, quę in ipso sunt.*

7 *Omnis numerus se ipsum metitur.*

8 *Si numerus metiatur numerum, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quę sunt in metiente, vnitates.*

9 *Quicumque numerus alium metitur, multiplicans eum, vel multiplicatus ab eo, per quem metitur, illum ipsum producit.*

10 *Si numerus numerum alium multiplicans aliquem produxerit, multiplicans quidem productum metitur per vnitates, quae sunt in multiplicato; multiplicatus vero metitur eundem per vnitates, quae sunt in multiplicante.*

11 *Quicumque numerus metitur duos, vel plures, metietur quoque eũ, qui ex illis componitur.*

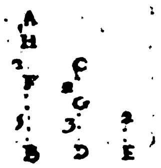
12 *Quicumque numerus metitur aliquem, metietur quoque eum, quem ille ipse metitur.*

13 *Quicũque numerus metitur totũ & ablatum, etiã reliquũ metietur.*

THEO-

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si duobus numeris inæqualibus expositis, detracto semper minore de maiore, reliquus minime metiatur præcedentem, quo ad assũpta fuerit vnitas; numeri à principio positi primi inter se erũt.

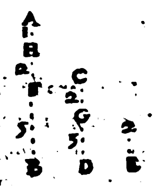


Duobus enim inæqualibus numeris expositis AB CD, detracto semper minore de maiore reliquus minime metiatur præcedentẽ. quoad assumpta fuerit vnitas. Dico numeros AB CD inter se primos esse, hoc est ipsos AB CD vnitatẽ solã metiri. Si enim AB CD nõ sint primi inter se, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitq; E: & CD quidem ipsum AB metiens relinquat se ipso minorẽ F A, AF vero metiens DC relinquat se ipso minorem GC; & GC metiẽs FH vnitatẽ HA relinquat. quoniam igitur numerus E ipsum CD metitur, CD vero metitur BF; & E ipsum BF metitur; metitur aũt & totũ BA. ergo & reliquũ AF metietur. Sed AF metitur DG. quare & E ipsum DG metietur. metitur autem & totum DC. ergo & reliquum metietur CG. at CG metitur FH. & E igitur ipsum FH metietur. sed & metitur totum FA; & reliquam igitur vnitatem AH metietur, numerus existens. quod fieri non potest, non igitur ipsos AB CD metietur aliquis numerus. ergo AB CD primi inter se sunt. quod oportebat demonstrare. Per 12. cõem notionem. 13. com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Huius conuersam hoc modo demonstrabimus.

Expositis duobus numeris inter se primis, si de maiori semper minor detrahatur, non cessabit huiusmodi detractio antequam ad vnitatem deuentum fuerit.



Sint enim numeri inter se primi AB CD; & si fieri potest iisdem manentibus, & detracto sẽper minore de maiore deuentũ sit ad numerũ HA, qui præcedẽtẽ GC metiatur. Si igitur HA metitur GC & ipsũ FH metietur. metitur aũt & se ipsũ, ergo & FA metietur; ac propterea ipsũ DG. sed & metiebatur GC, quare & totũ DC metietur, atq; ob id ipsum BF metitur. metitur aũt & FA, vt ostensum est. ergo & totũ BA metietur. Itaque quoniã HA numerus duos numeros AB CD metitur, erunt AB, CD inter se compositi. Sed & inter se primi ponuntur. quod fieri non potest. nõ igitur expositis duobus numeris inter se primis, si de maiori semper minor detrahatur, cessabit detractio, antequam ad vnitatem deuentum fuerit, quod oportebat demonstrare. Sed & illud constat. 12. com. not. 11. com. not. Diffin. 14.

Expositis duobus numeris inter se compositis, si de maiori semper detrahatur minor, detractio ad vnitatem vsque non perueniet.

Si enim ad vnitatem perueniat, erunt hi inter se primi, sed & compositi. quod est absurdum. 1. huius.

Ex iam demonstratis problema quoque illud perspicue apparere potest.

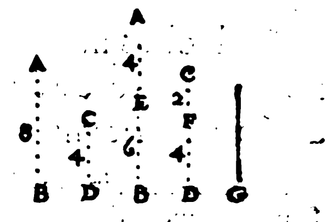
Duobus numeris expositis comperire an inter se primi sint, an compositi.

Facta namque detractione, vt dictum est, si deuenitur ad vnitatem vsque, dicemus eos inter se primos esse, sin minus, compositos.

PROBLEMA I. PROPOSITIO II.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram inuenire.

Sint dati duo numeri non primi inter se AB CD; quorũ minor sit CD. oportet ipsorum AB CD maximam communem mensuram inuenire. Si igitur CD metitur AB cum etiam se ipsum metiatur, erit CD ipsorum AB CD communis mensura. & perspicuum est eam maximam esse. nullus enim maior CD ipsum CD metietur.



si vero CD non metitur AB, ipsorum AB CD detra-
cto semper minore de maiore, relinquetur aliquis nume-
rus, qui metietur præcedentem. vnitas quidem non relin-
Ex antecedente. quetur; essent enim AB CD primi inter se. quod nõ po-
test. & CD quidem ipsum AB metiens relinquat se ip-
so minorem AE; AE vero metiens CD relinquat se ipso
minorem CF: & CF ipsum AE metiatur. Itaque quoniã
12. com. not. CF ipsum AE metitur, AE vero ipsum DF; & CF ipsum
11. com. not. DF metietur. sed & metitur se ipsum. & totũ igitur me-
tietur CD. At CD ipsum BE metitur. ergo & CF meti-
tur BE. metitur autem & EA. & totum igitur AB metietur. sed & metitur CD. ergo
CF ipsos AB CD metitur; ac propterea CF ipsorum AB CD est communis mẽsura.
dico etiam maximam esse. Si enim non est maxima, ipsos AB CD metietur aliquis
numerus maior ipso CF. metiatur, sitq; G. & quoniam G ipsum CD metitur; CD ve
ro ipsum BE: & G ipsum BE metitur. metitur autem & totum BA. & reliquum igi-
tur AE metietur. Sed AE metitur DF. ergo & G ipsum DF metitur. metitur autem
& totum DC. quare & reliquum CF metietur, maior minorem. quod fieri non po-
test. non igitur ipsos AB CD numeros numerus aliquis metietur, maior ipso CF. er
go CF ipsorum AB CD maxima erit communis mensura. Duobus igitur numeris
datis non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenta est. quod fa-
cere oportebat.

COROLLARIVM.

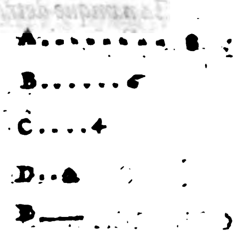
Ex hoc manifestum est, si numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem mensuram metiri.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc corollarium apparet ex postrema parte demonstrationis. sit enim duorum numerorum AB CD communis mensura CF: & sit numerus aliquis G, qui ipsos AB CD metiatur. Dico etiam maximam eorum communem mensuram CF metiri. Quoniam enim G ipsum CD metitur: CD ve-
12. com. not. *ro metitur BE: et G ipsum BE metitur. sed & metitur totum BA. ergo & reliquum AE metie-*
13. com. not. *tur: metitur autem AE ipsum DF. ergo G ipsum DF metitur. Sed & metitur totum DC. Quare & reliquum CF, maximam scilicet eorum communem mensuram metietur: quod demonstrare oportebat.*

PROBLEMA II. PROPOSITIO III.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam ipsorũ cõmunem mensuram inuenire.



Sint dati tres numeri non primi inter se ABC. oportet ip-
sorum ABC maximam communem mensuram inuenire. Su-
matur enim duorum AB maxima cõmunis mẽsura D. itaque
D vel ipsum C metitur, vel non metitur. metiatur primũ. me
titur autem et ipsos A B. ergo D numeros A B C metitur: et
ob id ipsorum est communis mensura. dico et maximam esse.
si enim D non est ipsorum A B C maxima communis mensu-
ra, metietur eos aliquis numerus maior ipso D. metiatur, et
sit E. quoniam igitur E metitur numeros A B C, et ipsos AB
metietur; et ipsorũ AB maximam communẽ mẽsuram, quæ est D. ergo E ipsum D
metitur, maior minorem. quod fieri non põt. non igitur ABC numeros numerus
aliquis maior ipso D metietur. ergo D ipsorum ABC maxima est cõis mensura.

Non metiatur autẽ D ipsum C. Dico primum numeros D C non esse primos inter se. Quoniam enim ABC non sunt inter se primi, metietur eos aliquis numerus. et qui metitur ipsos ABC, & ipsos AB metietur, et ipsorum AB maximam communem mensurã, videlicet D. metitur autem et ipsum C. ergo ipsos DC numerus aliquis metietur; ideoq; DC non sunt inter se primi. Sumatur ipsorum maxima communis mensura E. et quoniam E ipsum D metitur, et D metitur ipsos AB; et E ipsos AB metitur. metitur autẽ et C. ergo et ipsos ABC metietur; eritq; E ipsorum ABC communis mensura. Dico et maximam esse. si enim E non est ipsorum ABC maxima communis mensura, metietur ABC numeros numerus aliquis maior ipso E. metiatur, sitq; F. et quoniam F metitur numeros ABC, et ipsos AB, et ipsorum AB maximam communem mensuram metietur, videlicet ipsum D. ergo F ipsum D metitur. metitur autem et ipsum C. quare F et ipsos DC, et ipsorum DC maximam communem mensuram metietur, videlicet ipsum E. ergo F ipsum E metitur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur ABC numeros numerus aliquis maior ipso E metietur. ergo ipsorum ABC maxima est communis mẽsura. Tribus igitur numeris datis non primis inter se, eorum maxima communis mensura inuẽta est. quod facere oportebat.

A 18
B 12
C .... 4 — Ex corol. antecel.
D ......
E .. 2
F

COROLLARIVM.

A Ex his manifestum est, si numerus numeros tres metiatur, et ipsorum maximam communem mensuram metiri.

B Eodem modo et pluribus numeris datis maximã communem mensuram inueniemus.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ex his manifestum est &c.] *Sequitur hoc, quemadmodum in antecedente demonstrauimus.*

B Eodem modo &c.] *Sed & illud constat, si numerus plures numeros metiatur, & communem eorum mensuram metiri.*

THEOREMA II. PROPOSITIO IIII.

Omnis numerus omnis numeri, minor maioris, vel pars est, vel partes.

Sint duo numeri A BC, quorum BC sit minor. Dico BC ipsius A vel partem esse, vel partes. Numeri enim A BC vel primi sunt inter se, vel non. sint prius inter se primi, & diuiso BC in vnitates, quæ in ipso sunt, erit vnaquæque vnitas earum, quæ in BC, pars aliqua ipsius A. ergo BC ipsius A partes est. sed non sint A BC inter se primi. itaque BC vel ipsum A metitur, vel non. et siquidem metitur, erit BC pars ipsius A. sin minus, sumatur ipsorum A BC maxima communis mensura D; et diuidatur BC in numeros ipsi D æquales BE EF FC. Quoniã igitur D numerum A metitur, erit D pars ipsius A. æqualis autem est D vnicuique ipsorum BE EF FC, ergo et vnusquisque ipsorum BE EF FC pars est ipsius A: ac propterea BC ipsius A partes est.

A 8
B .... 5 C
A 8
B ... 4 C
A 8
B . 2 E . 2 F . 2 C
D . 2

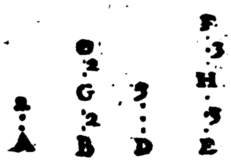
Omnis

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor maioris, vel pars est, vel partes. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA III. PROPOSITIO. V.

Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et vterque vtriusque eadem pars erit, quæ vnus vnius.

Numerus A numeri BC pars sit: et alter D alterius EF eadem pars, quæ est A ipsius BC. Dico et vtrumque AD vtriusque BC EF eādem partem esse, quæ est A ipsius BC. Quoniam enim quæ pars est A ipsius BC, eadem est et D ipsius EF; quot numeri sunt in BC æquales ipsi A, tot erūt et in EF numeri æquales ipsi D. Diuidatur BC quidem in numeros æquales ipsi A, videlicet in BG, GC; EF vero diuidatur in numeros ipsi D æquales, hoc est EH HF, erit vtique æqualis multitudo numerorū BG GC multitudini ipsorum EH HF, & quoniam æqualis est BG ipsi A, & EH ipsi D, erunt BG EH ipsis A D æquales. Et eadem ratione cum GC sit æqualis ipsi A, & HF ipsi D; & GC HF ipsis A D æquales erunt. quot igitur numeri sunt in BC, æquales ipsi A, tot sunt & in BC EF æquales ipsis A D. ergo quotuplex est BC ipsius A, totuplex erit et vterque BC EF vtriusque A D. quæ igitur pars est A ipsius BC, eadem pars erit et vterque A D vtriusque BC EF. quod demonstrare oportebat.

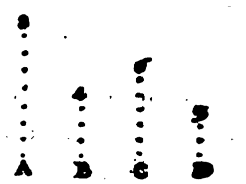


F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc autem licet illud etiam demonstrare.

I Si numerus numeri multiplex fuerit, et alter alterius æque multiplex; et vterque vtriusque æque multiplex erit, atque vnus vnius.

Sit enim A numerus numeri B multiplex, et alter C alterius D aeque multiplex. Dico vtrumque AC vtriusque BD aeque multiplicem esse, atque A ipsius B. quoniam enim A ipsius B multiplex est, & C ipsius D aeque multiplex; erit B ipsius A pars aliqua, & D ipsius C eadem pars. quare ex ijs, quae proxime tradita sunt & vterque BD vtriusque AC eadem pars erit; quae est B ipsius A. Vterque igitur AC vtriusque BD aeque multiplex est, atque A ipsius B. quod demonstrare oportebat.

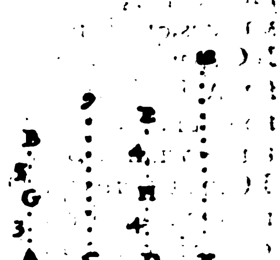


Sed quod de duobus dicitur; possumus etiam ad quotcunque numeros amplificare. VI

Si fuerint quotcumque numeri quotcumque numerorum æqualium multitudine, singuli singulorum æque multiplices; quotuplex est vnus vnius, totuplices erunt & omnes omnium; *quod eodem modo demonstrabimus. Hoc autem respondebit ei, quod in prima propositione quinti libri de omnibus magnitudinibus demonstratur.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. VI.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eędem partes; & vterque vtriusque eædem partes erit, quę vnus vnius.



Numerus enim AB numeri C partes sit, & alter DE alterius F eędem partes, quæ AB ipsius C. Dico & vtrumque AB DE vtriusque C F easdē partes esse, quæ AB ipsius C. quoniam enim quę partes est AB ipsius C, eædem est DE ipsius F; quot partes sunt in AB ipsius C, tot erunt & in DE

partes

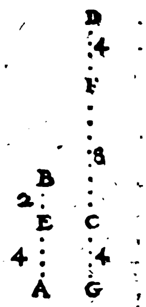
partes ipsius F. Diuidatur AB quidem in partes ipsius C, videlicet AC GB; DE vero diuidatur in partes ipsius F, hoc est DH HE. erit ipsorum AG GB multitudo æqualis multitudini ipsorũ DH HE. & qm̃ quæ pars est AG ipsius C, eadem est pars & DH ipsius F: quę pars est AG ipsius C, eadem pars erit & vterque AG DH vtriusque C F. Simili ratione & quæ pars est GB ipsius C, eadem pars erit & vterque GB HE vtriusque C F. Quę igitur partes est AB ipsius C, eędem partes est & vterque AB DE vtriusque C F. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter & hanc, & antecedentem possumus ad quotcumque numeros transferre; ut Si quotcumque numeri minores ad totidem alios maiores referantur, sintq; singuli singulorum vel eadem pars, vel eædem partes; quę pars, vel partes est vnus vnius, eadem pars, vel eædem partes erunt & omnes omnium.

THEOREMA V. PROPOSITIO. VII.

Si numerus numeri pars fuerit, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.



Numerus enim AB numeri CD pars sit, quæ ablatus AE ablati CF. Dico & reliquum EB reliqui FD eandem partem esse, quę est totus AB totius CD. quæ enim pars est AE ipsius CF, eadem pars sit & EB ipsius CG. ergo quæ pars est AE ipsius CF, eadem pars est & AB ipsius GF. quæ autẽ pars est AE ipsius CF, eadem pars ponitur & AB ipsius CD. quæ igitur pars est AB ipsius GF, eadem est & AB ipsius CD. quare AB vtriusque GF CD eadem est pars. æqualis igitur est GF ipsi CD. communis auferatur CF. ergo reliquus GC reliquo FD est æqualis. & quoniam quæ pars est AE ipsius CF, eadem est & EB ipsius GC. æqualis autem est GC ipsi FD: quę pars est AE ipsius CF, eadem erit & EB ipsius FD. sed quæ pars est AE ipsius CF, eadem est & AB ipsius CD. ergo quæ pars est EB ipsius FD, eadem est & AB ipsius CD. & reliquus igitur EB reliqui FD eadem pars erit, quæ totus AB totius CD. quod demonstrare oportebat.

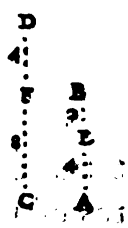
5. huius.

4. com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex his autem illud quoque demonstrare licebit.

Si numerus numeri æque multiplex fuerit, atque ablatus ablati, & reliquus reliqui ęque multiplex erit, atque totus totius.



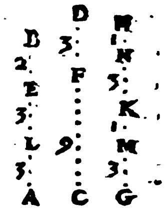
Iisdem enim, quae supra, manentibus. sit numerus CD aeque multiplex numeri AB, atque ablatus CF ablati AE. Dico & reliquum FD reliqui EB aeque multiplicem esse, atque totũ CD totius AB. quoniam enim CD ipsius AB aeque multiplex est, atque ablatus CF ablati AE; erit AB ipsius CD eadem pars, quae est AE ipsius CF. ergo ex iam demonstratis & reliquus EB reliqui FD eadem pars est, quae totus AB totius CD. reliquus igitur FD reliqui EB aequemultiplex erit, atque totus CD totius AB. quod demonstrandum fuerat.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VIII.

Si numerus numeri partes fuerit, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eædem partes erit, quę totus totius.

Numerus enim AB numeri CD partes sit, quę ablatus AE ablati CF. Dico & reliquum EB reliqui FD easdem partes esse, quæ totus AB totius CD. ponatur enim

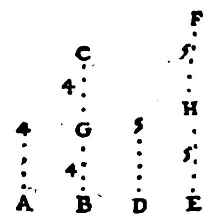
ipsi



ipsi A B ęqualis GH. quæ igitur partes est GH ipsius CD, eędē est & AE ipsius CF. Diuidatur GH quidē in partes ipsius CD, videlicet G K KH: AE vero diuidatur in partes ipsius CF, videlicet AL LE. erit igitur ipsarū GK KH multitudo æqualis multitudini ipsarum AL LE. Et quoniā quæ pars est GK ipsius CD, eadem est & AL ipsius CF: maior aūt CD, quā CF. ergo & GK, quā AL est maior. ponatur ipsi AL ęqualis GM. quę igitur pars est GK ipsius CD, eadem est et GM
7.huius. ipsius CF. quare et reliquus MK reliqui FD eadē pars est, quę totus GK totius CD. Rursus quoniā quæ pars KH ipsius CD, eadē est et EL ipsius CF; maior autem CD, quàm CF: erit & KH quàm EL maior. ponatur ipsi EL ęqualis KN. quę igitur pars est KH ipsius CD, eadē est & KN ipsius CF. ergo & reliquus NH reliqui FD eadē pars est, quæ totus KH totius CD. ostēsum autem est & reliquum MK reliqui FD eandem partem esse; quæ totus GK totius DC. & vterque igitur MK NH ipsius DF eædem partes est, quę totus HG totius DC. æqualis autem vterque quidem MK NH ipsi EB; HG vero ipsi BA. & reliquus igitur EB reliqui FD eædem partes est, quæ totus AB totius CD. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA. VII. PROPOSITIO IX.

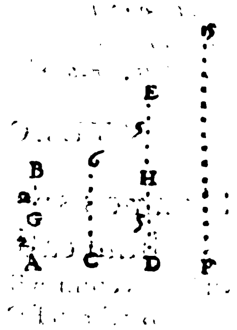
Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; & permutando quæ pars est, vel partes primus tertij, eadē erit pars, vel eædem partes & secundus quarti.



Numerus enim A numeri BC pars sit, & alter D alterius EF eadem pars, quę A ipsius BC. minor autem sit A, quàm D. Dico & permutādo quę pars est A ipsius D, vel partes, eādem partem esse & BC ipsius EF, vel easdem partes. Quoniam enim quę pars est A ipsius BC, eadem est & D ipsius EF; quot numeri sunt in BC ęquales ipsi A, tot sunt et in EF æquales ipsi D. diuidatur BC quidem in numeros ipsi A æquales, videlicet in BG GC: EF vero diuidatur in numeros ipsi D ęquales, EH HF. erit ipsorū BG GC multitudo æqualis multitudini ipsorum EH HF. et quoniam numeri BG GC inter se sunt ęquales; sunt autem et ęquales EH HF; atque est ipsorum BG GC multitudo æqualis multitudini ipsorum EH HF: quæ pars est BG ipsius EH, vel partes, eadem pars erit et GC ipsius HF, vel eædem partes. ergo quæ pars est BG ipsius EH, vel partes,
5.huius. eadem pars erit et vterque BC vtriusque EF, vel eædem partes. æqualis autem est
6.huius. BG ipsi A, et EH ipsi D. quæ igitur pars est A ipsius D, vel partes, eadem pars erit et BC ipsius EF, vel eædm partes. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO X.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes; & permutando quę partes est primus tertij, vel pars, eędem partes erit & secundus quarti, vel eadem pars.



Numerus enim AB numeri C partes sit, et alter DE alterius F eędem partes: sit autem AB minor, quàm DE. Dico et permutando quæ partes est AB ipsius DE, vel pars, easdem partes esse et C ipsius F, vel eandem partem. quoniam enim quæ partes est AB ipsius C, eædem partes est et DE ipsius F; quot sunt in AB partes ipsius C, tot erunt et

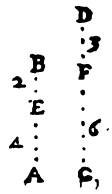
in

in DE partes ipsius F. diuidatur AB quidem in partes ipsius C, videlicet AG GB: DE vero diuidatur in partes ipsius F, hoc est DH HE. erit vtique ipsarum AG GB multitudo multitudini ipsarum DH HE æqualis. et quoniam quæ pars est AG ipsius C, eadem est pars et DH ipsius F. et permutando quæ pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars erit et C ipsius F, vel eędẽ partes. simili ratione et quæ pars est GB ipsius HE, vel partes, eadem pars erit et C ipsius F, vel eadem partes. ergo quę pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars erit et AB ipsius DE, vel eædem partes. sed quæ pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars est et C ipsius F, uel eędem partes. Et quæ igitur partes est AB ipsius DE, vel pars, eædem partes est et C ipsius F, vel eadem pars. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO XI.

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

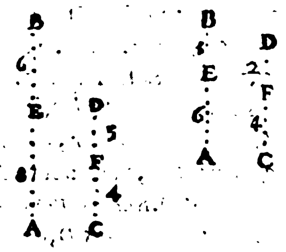
Sit vt totus AB ad totum CD, ita ablatus AE ad ablatum CF. Dico et reliquum EB ad reliquum FD ita esse, vt totus AB ad totum CD. Quoniam enim est vt AB ad CD, ita AE ad CF, quæ pars est AB ipsius CD, vel partes, eadẽ pars erit et AE ipsius CF, vel eædem partes, ergo et reliquus EB reliqui FD eadem pars erit, vel eædem partes, quę AB ipsius CD. est igitur ut EB ad FD, ita AB ad CD. quod demonstrare oportebat.



Diffi. 20.
7.8. huius.
Per couersã. Diffi. 20.

F. C. COMMENTARIVS.

Precedens demonstratio congruit, cum AB fuerit minor, quàm CD. sed si AB maior sit, quàm CD, nihilominus idem demonstrabitur. nam vel CD metitur ipsum AB, vel non metitur. & si quidẽ metitur, quoniam est vt AB ad CD, ita AE ad CF; erit AB ipsius CD aeque multiplex, atque AE ipsius CF. quare ex ijs, quae nos demõstrauimus ad septimã huius; & reliquus EB reliqui FB reliqui FD aeque multiplex est, atq; totus AB totius CD. reliquus igitur EB ad reliquum FD, erit vt totus AB ad totum CD. si vero CD non metitur ipsum AB, rursus quoniam vt AB ad CD, ita est AE ad CF, quae partes est CD ipsius AB, eędem partes erit CF ipsius AE. ergo & reliquus FD reliqui EB eędem partes est, quae totus CD totius AB. reliquus igitur EB ad reliquum FD ita erit, vt totus AB ad totum CD. quod oportebat demonstrare.

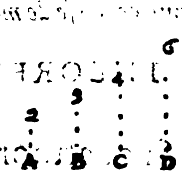


Diffi. 20.
Per couersã. Diffi. 20.
D. ffi. 20.
8. huius.
Per couersã. Diffi. 20.

THEOREMA X. PROPOSITIO XII.

Si quotcumque numeri proportionales fuerint, vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcumque numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico vt A ad B, ita esse AC ad BD. Quoniam enim est vt A ad B, ita C ad D, quæ pars est A ipsius B, uel partes, eadem pars erit et C ipsius D, vel partes. et uterque igitur AC vtriusque BD eadem pars est, uel partes, quæ A ipsius B. ergo ut A ad B, ita est AC ad BD. quod demonstrare oportebat.

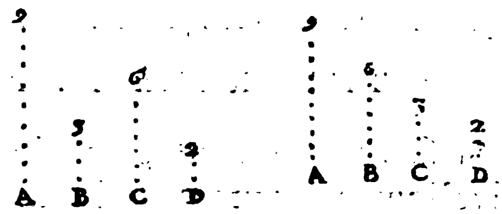


Diffi. 20.
5.6. huius.
Per conuers. Diffi. 20.

SCHOLIVM.

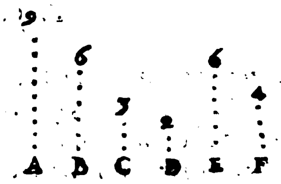
Hoc quinto, & sexto vniuersalius est. quae enim illic seorsum in parte, & partibus, eadem hoc loco vnà demonstrantur.

F. C. COMMENTARIVS.

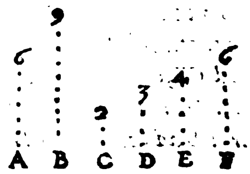


Et hęc demonstratio congruit tantum, cum antecedentes numeri minores fuerint consequentibus. quòd si maiores sint, rursus vel B metitur ipsum A, vel non metitur. si metitur, ita dicemus. Quoniam est vt A ad B, ita C ad D, aeque multiplex erit A ipsius B, atque C ipsius D. ergo ex ijs, quae demonstrauimus ad quintam huius, & vterque A C vtriusq;
Conuer. 10. diffi. *BD aeque multiplex est, atque A ipsius B. Vt igitur A ad B, ita erit vterq; A C ad vtrumq; B D.*
Quòd si B non metitur ipsum A, ita argumentabimur. quoniam est vt A ad B, ita C ad D, quae
6. huius. *partes est B ipsius A, eędem partes erit D ipsius C. ergo & vterq; A C vtriusque B D eędem par-*
Conuer. 10. diffi. *tes est, quae A ipsius B. quare vt A ad B, ita erit A C ad B D.*
Idem demonstrabimus etiam si plures sint numeri proportionales, hoc, quod sequitur, pręmisso.

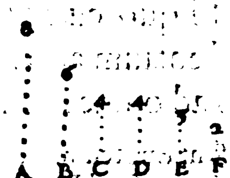
Quæ eidem eædem sunt numerorum proportiones, et inter se eædem erunt.



Sit vt A ad B, ita C ad D: vt autem C ad D, ita E ad F. Dico vt A ad B, ita esse E ad F. Si enim numerus A sit maior, quàm B, quoniam est vt A ad B, ita C ad D, quae pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars erit, vel partes D ipsius C. Rursus quoniam vt C ad D, ita est E ad F, quae pars est, vel partes D ipsius C, eadem pars, vel partes erit F ipsius E. quae igitur pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars erit, vel partes F
Conuer. 10. diffi. *ipsius E. ergo vt A ad B, ita est E ad F.*



Si vero A sit minor, quàm B, quoniam vt A ad B, ita est C ad D, quae pars est, vel partes A ipsius B, eadem pars, vel partes erit C ipsius D. Rursus quoniam vt C ad D, ita E ad F, quae pars, vel partes est C ipsius D, eadem pars, vel partes erit E ipsius F. ergo quae pars, vel partes est A ipsius B, eadem est pars, vel par-
Conuer. 10. diffi. *tes E ipsius F. vt igitur A ad B, ita E ad F. quod demonstrandum proposuimus.*



Hoc demõstrato sint numeri proportionales A B C, D E F; sitq; vt A ad D, ita B ad E, & C ad F. Eadẽ ratione demonstrabimus vt A ad D, ita esse A B ad D E. Et quoniam vt A ad D, ita est C ad F, erit ex ijs, quae nos proxime demõstrauimus, vt A B ad D E, ita C ad F. nõ aliter ostendemus vt A B ad D E, ita esse A B C ad D E F. vt igitur A ad D, ita erit A B C ad D E F. et eodẽ modo in alijs, quotquot numeri proportionales fuerint. Hoc autem respondet ei, quod in 12 quinti vniuerse de magnitudinibus demonstratur.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

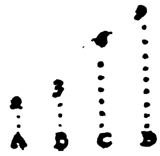
Si quattuor numeri proportionales fuerint, & permutando proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico et per-

et permutãdo proportionales esse, videlicet vt A ad C, ita esse B ad D. quoniã enim est vt A ad B, ita C ad D, quę pars est A ipsius B, vel partes, eadẽ pars erit et C ipsius D, vel eædem partes. permutãdo igitur quæ pars est A ipsius C, vel partes, eadẽ pars est & B ipsius D, uel partes. ergo vt A ad C, ita est B ad D. quod demonstrare oportebat.

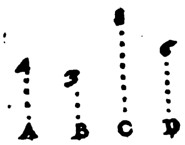
Diffi. 10.

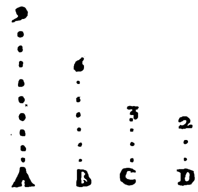
9. 10. huius.



F. C. COMMENTARIVS.

Hęc demonstratio congruit, vbi antecedentes numeri minores sint consequentibus, sitq; A minor, quàm C. si vero sint maiores, & A maior sit quã B, & minor quàm C, ita dicemus. Quoniam est vt A ad B, ita C ad D; quae pars est, vel partes B ipsius A, eadem pars, vel partes erit D ipsius C. ergo permutando quae pars est, vel partes B ipsius D, eadem pars, vel partes erit A ipsius C. vt igitur A ad C, ita est B ad D.



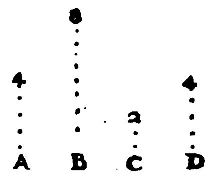


Diffi. 20.

9. 10. huius.

Cõu dif. 20.

Quòd si A sit maior, quàm B, et maior, quàm C, ita argumẽtabimur. Quoniã vt A ad B, ita C ad D, quae pars, uel partes est D ipsius C, eadẽ pars, vel partes erit B ipsius A. ergo permutãdo quę pars, vel partes est D ipsius B, eadem pars, vel partes erit C ipsius A. est igitur vt A ad C, ita B ad D. Denique si A sit minor, quàm B, & maior, quàm C. hoc modo. Quoniam vt A ad B, ita C ad D, quae pars, vel partes est C ipsius D, eadem pars, vel partes est A ipsius B. permutando igitur quae pars est, vel partes C ipsius A, eadem pars, vel partes est D ipsius B. ergo vt A ad C, ita erit B ad D.

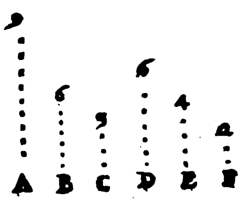


9. 10. huius.
Cõu. dif. 20.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Si fuerint quotcumque numeri, et alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, et in eadem proportione; etiam ex ęquali in eadem proportione erunt.

Sint enim quotcumque numeri ABC, & alij ipsis multitudine ęquales, qui bini sumantur, & in eadem proportione DEF; sitq; vt A ad B, ita D ad E; vt autem B ad C, ita E ad F. Dico etiam ex ęquali vt A ad C, ita esse D ad F. Quoniam enim est vt A ad B, ita D ad E; erit permutãdo vt A ad D, ita B ad E. Rursus quoniam est vt B ad C, ita E ad F; permutando vt B ad E, ita erit C ad F. vt autem B ad E, ita erat A ad D. & vt igitur A ad D, ita C ad F. ergo permutando vt A ad C, ita D ad F. quod oportebat demonstrare.

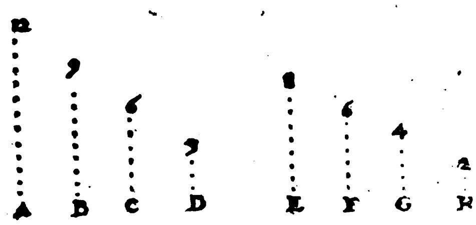


Ex antecedente.

Ex demonstratis ad 12 huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd si plures, quàm tres numeri proportionales fuerint ABCD EFGH; sitq; ut A ad B, ita E ad F: vt autem B ad C, ita F ad G; et vt C ad D, ita G ad H: similiter demonstrabimus ut A ad C, ita esse E ad G. et quoniã est vt C ad



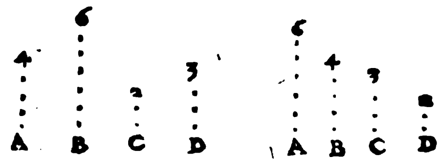
A a 2 D, ita

D, ita G ad H, rurſus demonſtrabimus vt A ad D, ita E ad H. & eodem modò in alijs.
Sed quoniam Euclides conuerſam rationem, compoſitam, & diuiſam, conuerſionemq́; rationis in numeris omiſit; nos eas, ne quid deſideretur, hoc loco apponere curauimus.

PROPOSITIO I.

Si quattuor numeri proportionales ſint, & conuertendo proportionales erunt.

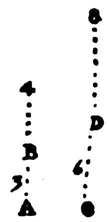
Sint quattuor numeri proportionales ABCD; ſitq́; ut A ad B, ita C ad D. Dico vt B ad A, ita eſſe D ad C. Si enim A ſit minor, quàm B, quo-
Diffi.20. *niam eſt vt A ad B, ita C ad D, quae pars uel partes eſt A ipſius B, eadẽ pars, vel eędẽ partes*
Cõu.dif.20. *erit C ipſius D. ergo ut B ad A, ita eſt D ad C.*
Si uero A ſit maior, quàm B, rurſus quoniam vt A ad B, ita C ad D, quę pars, vel partes eſt B ipſius A, eadem pars, uel partes erit D ipſius C. Vt igitur B ad A, ita eſt D ad C.



PROPOSITIO II.

Si quattuor numeri proportionales ſint, & componendo proportionales erunt.

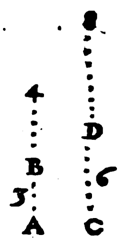
Sint quattuor numeri proportionales A B C D; & ſit vt A ad B, ita C ad D. Dico ut A B ad B, ita eſſe C D ad D. nam cum ſit ut A ad B, ita C ad D; & permutando vt A ad C, ita erit B ad D. quare ex duodecima huius vt A B ad C D, ita eſt B ad D. Rurſus igitur permutando ut AB ad B, ita CD ad D.



PROPOSITIO III.

Si quattuor numeri proportionales ſint, & diuidendo proportionales erunt.

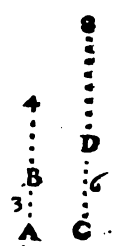
Sint quattuor numeri proportionales AB B CD D; ſitq́; vt numerus AB, qui ex duobus numeris conſtat ad numerum B, ita C D ex duobus C D conſtans ad ipſum D. Dico vt A ad B, ita eſſe C ad D. Quoniam enim eſt vt AB ad B, ita
13.huius. *CD ad D, erit permutando vt A B ad C D, ita B ad D. ſi autem fuerit ut totus*
11.huius. *ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. ergo A ad C eſt vt AB ad CD. ſed ut AB ad C D, ita erat B ad D. Ex eo igitur, quod demonſtrauimus ad 12 huius, vt A ad C, ita erit B ad D: & rurſus permutando ut A ad B, ita C ad D.*



PROPOSITIO IIII.

Si quattuor numeri proportionales ſint, et per conuerſionem rationis proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales AB B CD D; ſitq́; vt A B ad B, ita CD ad D. Dico ut AB ad A, ita eſſe CD ad C. Quoniam enim eſt ut AB ad B, ita
13.huius. *CD ad D, erit permutando vt A B ad C D, ita B ad D. quòd cum ſit vt totus ad*
11.huius. *totum, ita ablatus ad ablatum, erit & reliquus A ad reliquum C, vt A B ad CD: & rurſus permutando, conuertendoq́; ut AB ad A, ita CD ad C.*
Sed & quod Euclides de magnitudinibus demonſtrauit in vigeſima quarta quinti libri, nos de numeris demonſtrabimus in hunc modum.

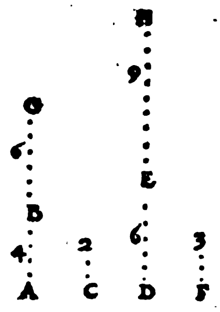


PROPOSITIO V.

Si primus ad ſecundum eandem habeat proportionem, quam tertius ad quartum; habeat autem et quintus ad ſecundum proportionem eandem, quam ſextus ad quartum; et compoſitus primus et quintus ad ſecundum eandem proportionem

nem habebit, quam tertius et sextus ad quartum.

Primus enim numerus A B ad secundum C proportionem habeat eandem, quam tertius DE ad quartum F: habeatq; quintus B G ad secundum C eandem proportionem, quam sextus E H ad quartum F. Dico primum & quintum A G ad secundum C eandem proportionē habere, quam tertius, & sextus DH ad quartum F. Quoniam enim est vt BG ad C, ita EH ad F; erit conuertendo vt C ad BG, ita F ad E H. et quoniam vt A B ad C, ita DE ad F: vt autem C ad BG, ita F ad EH; erit ex aequali vt AB ad BG, ita DE ad EH. quare componendo ut AG ad GB, ita erit DH ad H E. Sed vt G B ad C, ita est EH ad F. rursus igitur ex aequali vt AG ad C, ita est DH ad F.

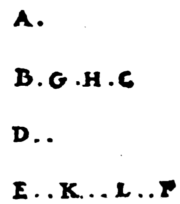


1. Additarū.
14. huius.
2. Additarū.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XV.

Si vnitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem; et permutando unitas tertium numerum æqualiter metietur, atque secundus quartum.

Vnitas enim A numerum aliquem BC metiatur, alter autem numerus D æqualiter metiatur alium aliquem EF. Dico & permutando A vnitatem æqualiter metiri numerum D, atque BC ipsum EF. Quoniam enim A vnitas æqualiter metitur numerum BC, atque D ipsum EF; quot vnitates sunt in BC, tot sunt et in EF numeri ęquales ipsi D. diuidatur BC quidem in vnitates, quæ in ipso sunt, videlicet BG GH HC: EF vero diuidatur in numeros ipsi D æquales EK KL LF. erit igitur ipsorum BG GH HC multitudo ęqualis multitudini ipsorum EK KL LF. & quoniā BG GH HC vnitates inter se ęquales sunt: suntq; numeri EK KL LF inter se æquales, & vnitatum BG GH HC multitudo æqualis multitudini numerorum EK KL LF: erit vt BG vnitas ad numerum EK, ita GH vnitas ad numerum KL, & vnitas HC ad LF numerum; & vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes cōsequentes. est igitur vt BG ad numerum E K, ita BC ad EF. æqualis autem est BG vnitas vnitati A: et EK numerus numero D. quare ut A vnitas ad numerum D, ita est BC ad EF. ęqualiter igitur A unitas numerum D metitur, atque BC ipsum EF. quod demonstrare oportebat.

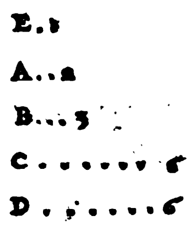


11. huius.
Diff. 20.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XVI.

Si duo numeri se se multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipsis inter se ęquales erunt.

Sint duo numeri A B, & A quidem ipsum B multiplicans faciat C; B vero multiplicans A faciat D. Dico C ipsi D ęqualem esse. Quoniam enim A ipsum B multiplicans fecit C, metietur B ipsum C per vnitates, quæ sunt in A. metitur autem & E vnitas numerum A per vnitates, quę in ipso sunt. æqualiter igitur E vnitas numerum A metitur, atq; B ipsum C. quare permutando vnitas E numerum B ęqualiter metitur, atq; A ipsum C. Rursus quoniam B ipsum A multiplicans fecit D; A metietur ipsum D per vnitates, quæ sunt in B. metitur autem & E unitas numerum B per unitates, quæ in ipso sunt. ergo E unitas numerum B æqualiter metitur, atque A ipsum D. sed E unitas numerū B æqualiter



10. com. not.
6. com. not.
Ex antecedente.

B æqualiter metitur, atque A ipsum C. Cum igitur A vtrũque ipsorum C D æqualiter metiatur, erit C ipsi D æqualis. quod demonstrare oportebat. 4. com. not.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos, facti ex ipsis eandem proportionem habebunt, quam multiplicati.

Numerus enim A duos numeros B C multiplicans faciat ipsos D E. Dico ut B ad C, ita esse D ad E. quoniam enim A ipsum B multiplicans fecit D, metietur B ipsum D per unitates, quæ sunt in A. metitur autem et F unitas numerum A per vnitates, quæ in ipso sunt. æqualiter igitur F unitas numerum A metitur, atque B ipsum D. ergo ut F unitas ad numerum A, ita est B ad D. eadem ratione et ut F unitas ad numerum A, ita C ad E. & ut igitur B ad D, ita C ad E; & permutando ut B ad C, ita D ad E. quod demõstrare oportebat.

10. com. not. — 6. com. not. — Conuers. 20. Diff.

F . 1
A . . 2
B . . . 3
C 4
D 6
E 8

F. C. COMMENTARIVS.

Idem sequetur etiam si numerus aliquis plures quàm duos numeros multiplicans fecerit totidem alios, facti namque eandem, quam multiplicati, proportionem habebunt.

Numerus enim A tres numeros BCD multiplicans faciat ipsos EFG. Dico vt B ad C, ita esse E ad F; & vt C ad D, ita F ad G. Similiter enim, vt supra, demonstrabimus, vt H vnitas ad numerum A, ita esse B ad E, & C ad F, & D ad G. erit igitur vt B ad E, ita C ad F, & D ad G. itaque quoniam est vt B ad E, ita C ad F, erit permutando vt B ad C, ita E ad F. Rursus quoniam vt C ad F, ita D ad G, & permutando erit vt C ad D, ita F ad G. vt igitur B ad C, ita est E ad F: & vt C ad D, ita F ad G. quod oportebat demonstrare.

H . 1
A . . 2
B . . . 3
C 4
D 5
E 6
F 8
G 10

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipsis eandem proportionem habebunt, quam multiplicantes.

Duo enim numeri A B numerum aliquem C multiplicantes faciant ipsos D E. Dico vt A ad B, ita esse D ad E. Quoniam enim A ipsum C multiplicans fecit D, & C multiplicans A ipsum D fecit. Eadem ratione & C ipsum B multiplicans fecit E. Itaque numerus C duos numeros A B multiplicans ipsos D E fecit. est igitur ut A ad B, ita D ad E. quod demonstrare oportebat.

16. huius. — Ex antecedente.

A . . . 3
B 4
C . . 2
D 6
E 8

F. C. COMMENTARIVS.

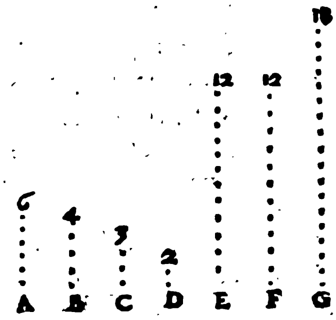
Quòd si plures quàm duo numeri aliquem multiplicantes fecerint totidem alios, facti similiter eandem, quam multiplicantes, proportionem habebunt. quod eodem modo demonstrabimus.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XIX.

Si quattuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, & quarto

quarto fit numerus æqualis erit ei, qui fit ex secundo, & tertio. & si numerus, qui fit ex primo, & quarto ęqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio, quattuor numeri proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D: & A quidē ipsū D multiplicans faciat E: B vero multiplicans C faciat F. Dico E ipsi F ęqualem esse. multiplicās enim A ipsum C faciat G. & quoniam A ipsum quidem C multiplicans fecit G; ipsum uero D multiplicans E fecit: numerus A duos numeros CD multiplicans fecit ipsos G E. est igitur ut C ad D, ita G ad E. Vt autem C ad D, ita A ad B. quare & ut ad B, ita G ad E. Rursus quoniam A ipsum C multiplicans G fecit; sed & B ipsum C multiplicās fecit F: duo numeri A B numerum aliquem C multiplicantes fecerunt ipsos G F. vt igitur A ad B, ita est G ad F. Sed & vt A ad B, ita G ad E. ergo & ut G ad E, ita est G ad F. quòd cum G ad utrumque ipsorum E F eādem proportionem habeat, erit E ipsi F æqualis. Sed sit E ęqualis ipsi F. Dico ut A ad B, ita esse C ad D. ijsdem enim constructis, quoniam A ipsos C D multiplicans fecit G E, erit ut C ad D, ita G ad E. est autem E ipsi F ęqualis. ut igitur G ad E, ita G ad F. sed ut G ad E, ita C ad D. ergo & ut C ad D, ita G ad F. ut autem G ad F, ita A ad B: & ut igitur A ad B, ita C ad D. quod demonstrare oportebat.



17. huius.

Ex antecedente.

A

17. huius.

B C

F. C. COMMENTARIVS.

A Quòd cum G ad utrumque ipsorum E F eandem proportionem habeat, erit E ipsi F æqualis] *Hoc patet ex vigesima diffinitione. Si enim G sit maior, quàm E, vel F; erit vterque ipsorum E F vel eadem pars, vel eędem partes ipsius G. si vero G; sit minor, erit G vel eadem pars, vel eędem partes vtriusque ipsorum E F. quare E F inter se aequales sint necesse est.* 3.4. co. not.

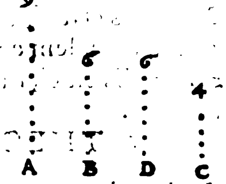
B Est autem E ipsi F æqualis. ut igitur G ad E, ita G ad F.] *Per conuersam vigesimae diffinitionis. nam siue vterque ipsorum E F eadem pars, vel eędem partes sit ipsius G, siue G eadem pars sit, vel eędem partes vtriusque ipsorum E F, erit vt G ad E, ita G ad F.*

C Vt autem G ad F, ita A ad B.] *cum enim duo numeri A B ipsum C multiplicantes faciant G F, vt A ad B, ita erit G ad F.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei, qui fit à medio. Si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei, qui à medio; tres numeri proportionales erunt.

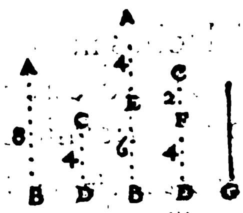
Sint tres numeri proportionales ABC; sitq; ut A ad B, ita B ad C. Dico numerum, qui fit ex AC. æqualem esse ei, qui fit ex B. ponatur enim ipsi B æqualis D. est igitur ut A ad B, ita D ad C. ergo qui fit ex AC æqualis est ei, qui ex BD. qui autem fit ex BD est æqualis ei, qui fit ex B; ęqualis etenim est B ipsi D. qui igitur fit ex AC ipsi B est æqualis. Sed qui fit ex AC æqualis sit ei, qui ex B. Dico ut A ad B, ita esse B ad C. Quoniam enim qui ex AC fit ęqualis est ei, qui fit ex B; qui autem fit ex B est æqualis ei, qui ex BD: erit ut A ad B, ita D ad C. sed B ipsi D est ęqualis. ut igitur A ad B, ita est B ad C. quod demonstrare oportebat.



Ex antecedente.

Ex antecedente.

THEO-



ſi verc CD non metitur AB, ipſorum AB CD detra-
cto ſemper minore de maiore, relinquetur aliquis nume
rus, qui metietur præcedentem. vnitas quidem non relin
Ex antecedente. quetur; eſſent enim AB CD primi inter ſe. quod nõ po-
nitur. & CD quidem ipſum AB metiens relinquat ſe ip-
ſo minorem AE; AE vero metiens CD relinquat ſe ipſo
minorem CF: & CF ipſum AE metiatur. Itaque quoniã
12.com.not. CF ipſum AE metitur, AE vero ipſum DF; & CF ipſum
11.com.not. DF metietur. ſed & metitur ſe ipſum. & totũ igitur me-
tietur CD. At CD ipſum BE metitur. ergo & CF meti-
tur BE. metitur autem & EA. & totum igitur AB metietur. ſed & metitur CD. ergo
CF ipſos AB CD metitur; ac propterea CF ipſorum AB CD eſt cõmunis mẽſura.
dico etiam maximam eſſe. Si enim non eſt maxima, ipſos AB CD metietur aliquis
numerus maior ipſo CF. metiatur, ſitq; G. & quoniam G ipſum CD metitur; CD ve
ro ipſum BE; & G ipſum BE metitur. metitur autem & totum BA. & reliquum igi-
tur AE metietur. Sed AE metitur DF. ergo & G ipſum DF metitur. metitur autem
& totum DC. quare & reliquum CF metietur, maior minorem. quod fieri non po-
teſt. non igitur ipſos AB CD numeros numerus aliquis metietur, maior ipſo CF. er
go CF ipſorum AB CD maxima erit communis menſura. Duobus igitur numeris
datis non primis inter ſe, maxima eorum communis menſura inuenta eſt. quod fa-
cere oportebat.

COROLLARIVM.

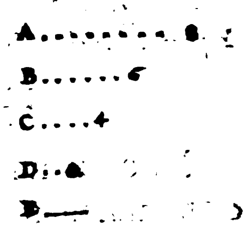
Ex hoc manifeſtum eſt, ſi numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem menſuram metiri.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc corollarium apparet ex poſtrema parte demonſtrationis. ſit enim duorum numerorum AB CD communis menſura CF: & ſit numerus aliquis G, qui ipſos AB CD metiatur. Dico etiam maximam eorum communem menſuram CF metiri. Quoniam enim G ipſum CD metitur: CD ve-
12.com.not. *ro metitur BE: et G ipſum BE metitur. ſed & metitur totum BA. ergo & reliquum AE metie-*
13.com.not. *tur: metitur autem AE ipſum DF. ergo G ipſum DF metitur: Sed & metitur totum DC. Quare & reliquum CF, maximam ſcilicet eorum communem menſuram metietur: quod demonſtrare oportebat.*

PROBLEMA II. PROPOSITIO III.

Tribus numeris datis non primis inter ſe, maximam ipſorũ cõmunem menſuram inuenire.



Sint dati tres numeri non primi inter ſe ABC. oportet ipſorum ABC maximam communem menſuram inuenire. Sumatur enim duorum AB maxima cõmunis mẽſura D. itaque D vel ipſum C metitur, vel non metitur. metiatur primũ: metitur autem et ipſos AB. ergo D numeros ABC metitur: et ob id ipſorum eſt communis menſura. dico et maximam eſſe. ſi enim D non eſt ipſorum ABC maxima communis menſura, metietur eos aliquis numerus maior ipſo D. metiatur, et ſit E. quoniam igitur E metitur numeros ABC, et ipſos AB metietur, et ipſorũ AB maximam communẽ mẽſuram, quæ eſt D. ergo E ipſum D metitur, maior minorem. quod fieri non põt. non igitur ABC numeros numerus aliquis maior ipſo D metietur. ergo D ipſorum ABC maxima eſt cõis menſura.

Non

Non metiatur autẽ D ipsum C. Dico primum numeros D C non esse primos inter se. Quoniam enim ABC non sunt inter se primi, metietur eos aliquis numerus. et qui metitur ipsos ABC, & ipsos AB metietur, et ipsorum AB maximam communem mensurã, videlicet D. metitur autem et ipsum C. ergo ipsos DC numerus aliquis metietur; ideoq; DC non sunt inter se primi. Sumatur ipsorum maxima communis mensura E. et quoniam E ipsum D metitur, et D metitur ipsos AB; et E ipsos AB metitur. metitur autẽ et C. ergo et ipsos ABC metietur; eritq; E ipsorum ABC communis mensura. Dico et maximam esse. si enim E non est ipsorum ABC maxima communis mensura, metietur ABC numeros numerus aliquis maior ipso E. metiatur, sitq; F. et quoniam F metitur numeros ABC, et ipsos AB, et ipsorum AB maximam communem mensuram metietur, videlicet ipsum D. ergo F ipsum D metitur. metitur autem et ipsum C. quare F et ipsos DC, et ipsorum DC maximam communem mensuram metietur, videlicet ipsum E. ergo F ipsum E metitur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur ABC numeros numerus aliquis maior ipso E metietur. ergo ipsorum ABC maxima est communis mẽsura. Tribus igitur numeris datis non primis inter se, eorum maxima communis mensura inuẽta est. quod facere oportebat.

A 18
B 12
C 4
D 6
E . . 2
F

Ex corol. antecedentis.

COROLLARIVM.

Ex his manifestum est, si numerus numeros tres metiatur, et ipsorum maximam communem mensuram metiri. A

Eodem modo et pluribus numeris datis maximã communem mensuram inueniemus. B

F. C. COMMENTARIVS.

Ex his manifestum est &c.] *Sequitur hoc, quemadmodum in antecedente demonstrauimus.* A

Eodem modo &c.] *Sed & illud constat, si numerus plures numeros metiatur, & communem eorum mensuram metiri.* B

THEOREMA II. PROPOSITIO IIII.

Omnis numerus omnis numeri minor maioris, vel pars est, vel partes.

Sint duo numeri A BC, quorum BC sit minor. Dico BC ipsius A vel partem esse, vel partes. Numeri enim A BC vel primi sunt inter se, vel non. sint prius inter se primi, & diuiso BC in vnitates, quæ in ipso sunt, erit vnaquæque vnitas earum, quæ in BC, pars aliqua ipsius A. ergo BC ipsius A partes est. sed non sint A BC inter se primi. Itaque BC vel ipsum A metitur, vel non. et siquidem metitur, erit BC pars ipsius A. sin minus, sumatur ipsorum A BC maxima communis mensura D; et diuidatur BC in numeros ipsi D æquales BE EF FC. Quoniã igitur D numerum A metitur, erit D pars ipsius A. æqualis autem est D vnicuique ipsorum BE EF FC. ergo et vnusquisque ipsorum BE EF FC pars est ipsius A: ac propterea BC ipsius A partes est.

A 8
B . . . 3C
A 8
B . . . 4C
A 8
B . 2E . 2F . 2C
D . 2

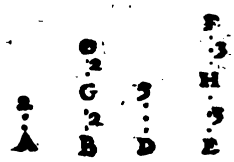
Omnis

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor maioris, vel pars est, vel partes. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA III. PROPOSITIO. V.

Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et vterque vtriusque eadem pars erit, quæ vnus vnius.

Numerus A numeri BC pars sit: et alter D alterius EF eadem pars, quæ est A ipsius BC. Dico et vtrumque AD vtriusque BC EF eãdem partem esse, quæ est A ipsius BC. Quoniam enim quæ pars est A ipsius BC, eadem est et D ipsius EF; quot numeri sunt in BC æquales ipsi A, tot erũt et in EF numeri æquales ipsi D. Diuidatur BC quidem in numeros æquales ipsi A, videlicet in BG, GC; EF vero diuidatur in numeros ipsi D æquales, hoc est EH HF, erit vtique æqualis multitudo numerorũ BG GC multitudini ipsorum EH HF, & quoniam æqualis est BG ipsi A, & EH ipsi D, erunt BG EH ipsis A D æquales. Et eadem ratione cum GC sit æqualis ipsi A, & HF ipsi D; & GC HF ipsis A D æquales erunt. quot igitur numeri sunt in BC, æquales ipsi A, tot sunt & in BC EF æquales ipsis A D. ergo quotuplex est BC ipsius A, totuplex erit et vterque BC EF vtriusque A D. quæ igitur pars est A ipsius BC, eadem pars erit et vterque A D vtriusque BC EF. quod demonstrare oportebat.

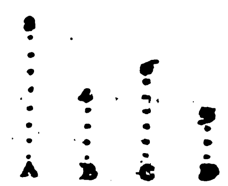


F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc autem licet illud etiam demonstrare.

Si numerus numeri multiplex fuerit, et alter alterius æque multiplex; et vterque vtriusque æque multiplex erit, atque vnus vnius.

Sit enim A numerus numeri B multiplex, et alter C alterius D æque multiplex. Dico vtrumque AC vtriusque BD aeque multiplicem esse, atque A ipsius B. quoniam enim A ipsius B multiplex est, & C ipsius D aeque multiplex; erit B ipsius A pars aliqua, & D ipsius C eadem pars. quare ex ijs, quae proxime tradita sunt & vterque BD vtriusque AC eadem pars erit, quae est B ipsius A. Vterque igitur AC vtriusque BD aeque multiplex est, atque A ipsius B. quod demonstrare oportebat.



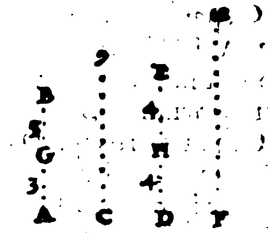
Sed quod de duobus dicitur, possumus etiam ad quotcumque numeros amplificare. vt

Si fuerint quotcumque numeri quotcumque numerorum æqualium multitudine, singuli singulorum æque multiplices, quotuplex est vnus vnius, totuplices erunt & omnes omnium [*quod eodem modo demonstrabimus. Hoc autem respondebit ei, quod in prima propositione quinti libri de omnibus magnitudinibus demonstratur.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. VI.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eędem partes; & vterque vtriusque eædem partes erit, quę vnus vnius.

Numerus enim AB numeri C partes sit, & alter DE alterius F eędem partes, quæ AB ipsius C. Dico & vtrumque AB DE vtriusque C F easdẽ partes esse, quæ AB ipsius C. quoniam enim quę partes est AB ipsius C, eædem est DE ipsius F, quot partes sunt in AB ipsius C, tot erunt & in DE



partes

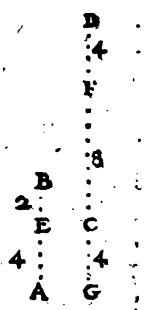
partes ipsius F. Diuidatur AB quidem in partes ipsius C, videlicet AC GB; DE vero diuidatur in partes ipsius F, hoc est DH HE. erit ipsorum AG GB multitudo ęqualis multitudini ipsorũ DH HE. & qm̃ quæ pars ęst AG ipsius C, eadem est pars & DH ipsius F: quę pars est AG ipsius C, eadem pars erit & vterque AG DH vtriusque C F. Simili ratione & quæ pars est GB ipsius C, eadem pars erit & vterque GB HE vtriusque C F. Quę igitur partes est AB ipsius C, eędem partes est & vterque AB DE vtriusque C F. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter & hanc, & antecedentem possumus ad quotcumque numeros transferre; ut Si quotcumque numeri minores ad totidem alios maiores referantur, sintq; singuli singulorum vel eadem pars, vel eædem partes; quę pars, vel partes est vnus vnius, eadem pars, vel eædem partes erunt & omnes omnium.

THEOREMA V. PROPOSITIO. VII.

Si numerus numeri pars fuerit, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.



Numerus enim AB numeri CD pars sit, quæ ablatus AE ablati CF. Dico & reliquum EB reliqui FD eandem partem esse, quę est totus AB totius CD. quæ enim pars est AE ipsius CF, eadem pars sit & EB ipsius CG. ergo quæ pars est AE ipsius CF, eadem pars est & AB ipsius GF. quæ autẽ pars est AE ipsius CF, eadem pars ponitur & AB ipsius CD. quæ igitur pars est AB ipsius GF, eadem est & AB ipsius CD. quare AB vtriusque GF CD eadem est pars. ęqualis igitur est GF ipsi CD. communis auferatur CF. ergo reliquus GC reliquo FD est æqualis. & quoniam quæ pars est AE ipsius CF, eadem est & EB ipsius GC. æqualis autem est GC ipsi FD: quę pars est AE ipsius CF, eadem erit & EB ipsius FD. sed quæ pars est AE ipsius CF, eadem est & AB ipsius CD. ergo quæ pars est EB ipsius FD, eadem est & AB ipsius CD. & reliquus igitur EB reliqui FD eadem pars erit, quæ totus AB totius CD. quod demonstrare oportebat.

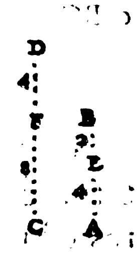
5. huius.

4. com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex his autem illud quoque demonstrare licebit.

Si numerus numeri æque multiplex fuerit, atque ablatus ablati, & reliquus reliqui ęque multiplex erit, atque totus totius.

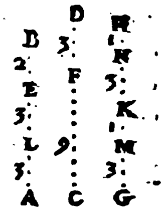


Iisdem enim, quae supra, manentibus. sit numerus CD aeque multiplex numeri AB, atque ablatus CF ablati AE. Dico & reliquum FD reliqui EB aeque multiplicem esse, atque totũ CD totius AB. quoniam enim CD ipsius AB aeque multiplex est, atque ablatus CF ablati AE; erit AB ipsius CD eadem pars, quae est AE ipsius CF. ergo ex iam demonstratis & reliquus EB reliqui FD eadem pars est, quae totus AB totius CD. reliquus igitur FD reliqui EB aequemultiplex erit, atque totus CD totius AB. quod demonstrandum fuerat.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VIII.

Si numerus numeri partes fuerit, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eædem partes erit, quę totus totius.

Numerus enim AB numeri CD partes sit, quę ablatus AE ablati CF. Dico & reliquum EB reliqui FD easdem partes esse, quæ totus AB totius CD. ponatur enim ipsi

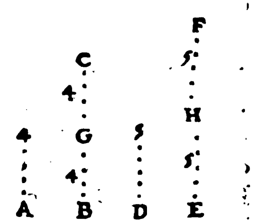


ipsi A B ęqualis GH. quæ igitur partes est GH ipsius CD, eędē est & AE ipsius CF. Diuidatur GH quidē in partes ipsius CD, videlicet G K KH: AE vero diuidatur in partes ipsius CF, videlicet AL LE. erit igitur ipsarū GK KH multitudo æqualis multitudini ipsarum AL LE. Et quoniā quæ pars est GK ipsius GD, eadem est & AL ipsius C F: maior aūt CD, quā CF. ergo & GK, quā AL est maior. ponatur ipsi AL ęqualis GM. quę igitur pars est GK ipsius CD, eadem est et GM

7.huius. ipsius CF· quare et reliquus MK reliqui FD eadē pars est, quę totus GK totius CD. Rursus quoniā quæ pars KH ipsius CD, eadē est et E L ipsius CF; maior autem CD, quàm CF: erit & KH quàm EL maior. ponatur ipsi EL ęqualis KN. quę igitur pars est KH ipsius CD, eadē est & KN ipsius CF. ergo & reliquus NH reliqui FD eadē pars est, quæ totus KH totius CD. ostēsum autem est & reliquum MK reliqui FD eandem partem esse; quæ totus GK totius DC. & vterque igitur MK NH ipsius DF eædem partes est, quę totus HG totius DC. æqualis autem vterque quidem MK NH ipsi EB; HG vero ipsi BA. & reliquus igitur EB reliqui FD eædem partes est, quæ totus AB totius CD. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA. VII. PROPOSITIO IX.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; & permutando quæ pars est, vel partes primus tertij, eadē erit pars, vel eædem partes & secundus quarti.



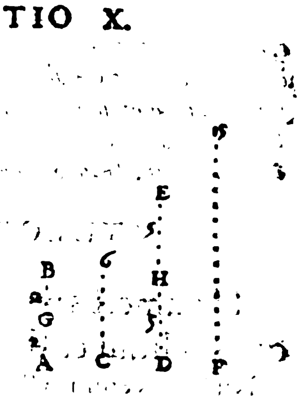
Numerus enim A numeri BC pars sit, & alter D alterius EF eadem pars, quę A ipsius BC. minor autem sit A, quàm D. Dico & permutādo quę pars est A ipsius D, vel partes, eādem partem esse & BC ipsius EF, vel easdem partes. Quoniam enim quę pars est A ipsius BC, eadem est & D ipsius EF; quot numeri sunt in BC ęquales ipsi A, tot sunt et in E F æquales ipsi D. diuidatur BC quidem in numeros ipsi A æquales, videlicet in BG GC: EF vero diuidatur in numeros ipsi D ęquales, EH HF. erit ipsorū BG GC multitudo qualis multitudini ipsorum EH HF. et quoniam numeri BG GC inter se sunt ęquales; sunt autem et ęquales EH HF; atque est ipsorum BG GC multitudo æqualis multitudini ipsorum EH HF: quæ pars est BG ipsius EH, vel partes, eadem pars erit et GC ipsius HF, vel eædem partes. ergo quæ pars est BG ipsius EH, vel partes,

5.huius. eadem pars erit et vterque BC vtriusque EF, vel eædem partes. æqualis autem est

6.huius. BG ipsi A, et EH ipsi D. quæ igitur pars est A ipsius D, vel partes, eadem pars erit et BC ipsius EF, vel eædm partes. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO X.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes; & permutando quę partes est primus tertij, vel pars, eędem partes erit & secundus quarti, vel eadem pars.

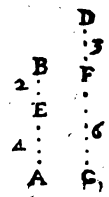


Numerus enim A B numeri C partes sit, et alter DE alterius F eędem partes: sit autem AB minor, quàm DE. Dico et permutando quæ partes est AB ipsius DE, vel pars, easdem partes esse et C ipsius F, vel eandem partem. quoniam enim quæ partes est AB ipsius C, eædem partes est et DE ipsius F; quot sunt in AB partes ipsius C, tot erunt et in DE partes ipsius F. diuidatur. AB quidem in partes ipsius C, videlicet AG GB: DE vero diuidatur in partes ipsius F, hoc est DH HE. erit vtique ipsarum AG GB multitudo multitudini ipsarum DH HE æqualis. et quoniam quæ pars est AG ipsius C, eadem est pars et DH ipsius F. et permutando quæ pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars erit et C ipsius F, vel eędē partes. simili ratione et quæ pars est GB ipsius HE, vel partes, eadem pars erit et C ipsius F, vel eadem partes. ergo quę pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars erit et AB ipsius DE, vel eædem partes. sed quæ pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars est et C ipsius F, uel eędem partes. Et quæ igitur partes est AB ipsius DE, vel pars, cædem partes est et C ipsius F, vel eadem pars. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO XI.

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

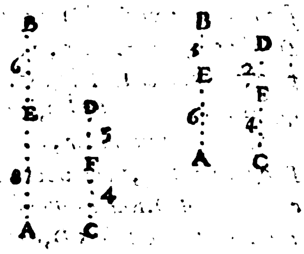
Sit vt totus AB ad totum CD, ita ablatus AE ad ablatum CF. Dico et reliquum EB ad reliquum FD ita esse, vt totus AB ad totum CD. Quoniam enim est vt AB ad CD, ita AE ad CF, quæ pars est AB ipsius CD, vel partes, eadē pars erit et AE ipsius CF, vel eædem partes. ergo et reliquus EB reliqui FD eadem pars erit, vel eædem partes, quę AB ipsius CD. est igitur ut EB ad FD, ita AB ad CD. quod demonstrare oportebat.



Diffi. 20.
7.8. huius.
Per cōuersā.
Diffi. 20.

F. C. COMMENTARIVS.

Precedens demonstratio congruit, cum AB fuerit minor, quàm CD. sed si AB maior sit, quàm CD, nihilominus idem demonstrabitur. nam vel CD metitur ipsum AB, vel non metitur. & si quidē metitur, quoniam est vt AB ad CD, ita AE ad CF; erit AB ipsius CD aeque multiplex, atque AE ipsius CF. quare ex ijs, quae nos demōstrauimus ad septimā huius; & reliquus EB reliqui FB reliqui FD aeque multiplex est, atq; totus AB totius CD. reliquus igitur EB ad reliquum FD, erit vt totus AB ad totum CD. si vero CD non metitur ipsum AB, rursus quoniam vt AB ad CD, ita est AE ad CF, quae partes est CD ipsius AB, eędem partes erit CF ipsius AE. ergo & reliquus FD reliqui EB eędem partes est, quae totus CD totius AB. reliquus igitur EB ad reliquum FD ita erit, vt totus AB ad totum CD. quod oportebat demonstrare.

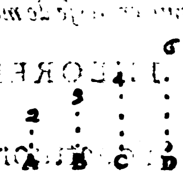


Difi. 20.
Per cōuersā.
Difi. 20.
D. ffi. 20.
8. huius.
Per cōuersā.
Diffi. 20.

THEOREMA X. PROPOSITIO XII.

Si quotcumque numeri proportionales fuerint, vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcumque numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico vt A ad B ita esse AC ad BD. Quoniam enim est vt A ad B, ita C ad D, quæ pars est A ipsius B, uel partes, eadem pars erit et C ipsius D, vel partes. et uterque igitur AC vtriusque BD eadem pars est, uel partes, quæ A ipsius B. ergo ut A ad B, ita est AC ad BD. quod demonstrare oportebat.

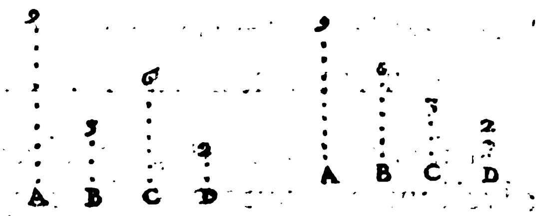


Diffi. 20.
5.6. huius.
Per conuers.
Diffi. 20.

SCHOLIVM.

Hoc quinto, & sexto vniuersalius est. quae enim illic seorsum in parte, & partibus, eadem hoc loco vnà demonstrantur.

F. C. COMMENTARIVS.



Et hęc demonstratio congruit tantum, cum antecedentes numeri minores fuerint consequentibus. quòd si maiores sint, rursus vel B metitur ipsum A, vel non metitur. si metitur, ita dicemus. Quoniam est vt A ad B, ita C ad D, aeque multiplex erit A ipsius B, atque C ipsius D. ergo ex ijs, quae demonstrauimus ad quintam huius, & vterque A C vtriusq; BD aeque multiplex est, atque A ipsius B. Vt igitur A ad B, ita erit vterq; A C ad vtrumq; B D.

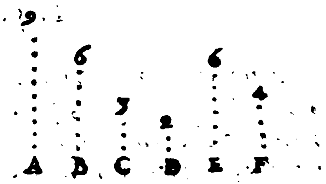
Conuer. 10. diffi.

Quòd si B non metitur ipsum A, ita argumentabimur. quoniam est vt A ad B, ita C ad D, quae partes est B ipsius A, eędem partes erit D ipsius C. ergo & uterq; A C vtriusque B D eędem partes est, quae A ipsius B. quare vt A ad B, ita erit A C ad B D.

6. huius. Conuer. 10. diffi.

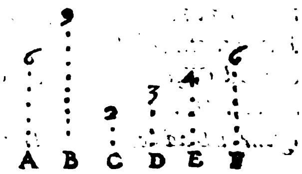
Idem demonstrabimus etiam si plures sint numeri proportionales, hoc, quod sequitur, premisso.

Quæ eidem eædem sunt numerorum proportiones, et inter se eædem erunt.



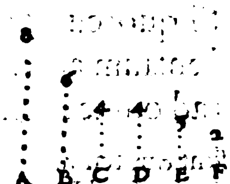
Sit vt A ad B, ita C ad D: vt autem C ad D, ita E ad F. Dico vt A ad B, ita esse E ad F. Si enim numerus A sit maior, quàm B, quoniam est vt A ad B, ita C ad D, quae pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars erit, vel partes D ipsius C. Rursus quoniam vt C ad D, ita est E ad F, quae pars est, vel partes D ipsius C, eadem pars, vel partes erit F ipsius E. quae igitur pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars erit, vel partes F ipsius E. ergo vt A ad B, ita est E ad F.

Conuer. 20. diffi.



Si vero A sit minor, quàm B, quoniam vt A ad B, ita est C ad D, quae pars est, vel partes A ipsius B, eadem pars, vel partes erit C ipsius D. Rursus quoniam vt C ad D, ita E ad F, quae pars, vel partes est C ipsius D, eadem pars, vel partes erit E ipsius F. ergo quae pars, vel partes est A ipsius B, eadem est pars, vel partes E ipsius F. vt igitur A ad B, ita E ad F. quod demonstrandum proposuimus.

Conuer. 20. diffi.



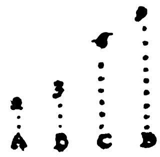
Hoc demõstrato sint numeri proportionales A B C, D E F; sitq; vt A ad D, ita B ad E, & C ad F. Eadẽ ratione demonstrabimus vt A ad D, ita esse A B ad D E. Et quoniam vt A ad D, ita est C ad F, erit ex ijs, quae nos proxime demõstrauimus, vt A B ad D E, ita C ad F. nõ aliter ostendemus vt A B ad D E, ita esse A B C ad D E F. vt igitur A ad D, ita erũt A B C ad D E F. et eodẽ modo in alijs, quotquot numeri proportionales fuerint. Hoc autem respondet ei, quod in 12 quinti vniuerse de magnitudinibus demonstratur.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

Si quattuor numeri proportionales fuerint, & permutando proportionales erunt.

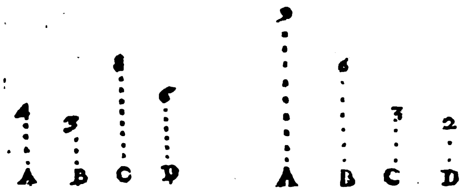
Sint quattuor numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico et per-

et permutãdo proportionales esse, videlicet vt A ad C, ita esse B ad D. quoniã enim est vt A ad B, ita C ad D, quę pars est A ipsius B, vel partes, eadẽ pars erit et C ipsius D, vel eædem partes. permutãdo igitur quæ pars est A ipsius C, vel partes, eadẽ pars est & B ipsius D, uel partes. ergo vt A ad C, ita est B ad D. quod demonstrare oportebat. Diffi.10. 9.10. huius.

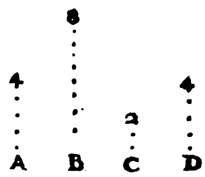


F. C. COMMENTARIVS.

Hęc demonstratio congruit, vbi antecedentes numeri minores sint consequentibus, sitq́; A minor, quàm C. si vero sint maiores, & A maior sit quã B, & minor quàm C, ita dicemus. Quoniam est vt A ad B, ita C ad D; quae pars est, vel partes B ipsius A, eadem pars, vel partes erit D ipsius C. ergo permutando quae pars est, vel partes B ipsius D, eadem pars, vel partes erit A ipsius C. vt igitur A ad C, ita est B ad D. Diffi.10. 9.10. huius. Cõu dif.10.



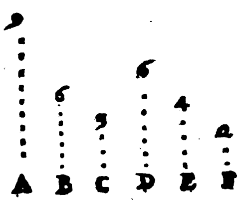
Quòd si A sit maior, quàm B, et maior, quàm C, ita argumẽtabimur. Quoniã vt A ad B, ita C ad D, quae pars, uel partes est D ipsius C, eadẽ pars, vel partes erit B ipsius A. ergo permutãdo quę pars, vel partes est D ipsius B, eadem pars, vel partes erit C ipsius A. est igitur vt A ad C, ita B ad D. Denique si A sit minor, quàm B, & maior, quàm C. hoc modo. Quoniam vt A ad B, ita C ad D, quae pars, vel partes est C ipsius D, eadem pars, vel partes est A ipsius B. permutando igitur quae pars est, vel partes C ipsius A, eadem pars, vel partes est D ipsius B. ergo vt A ad C, ita erit B ad D. 9.10. huius. Cõu. dif.10.



THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

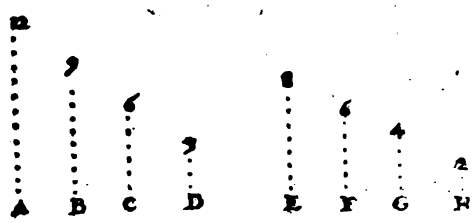
Si fuerint quotcumque numeri, et alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, et in eadem proportione; etiam ex ęquali in eadem proportione erunt.

Sint enim quotcumque numeri ABC, & alij ipsis multitudine ęquales, qui bini sumantur, & in eadem proportione DEF; sitq́; vt A ad B, ita D ad E; vt autem B ad C, ita E ad F. Dico etiam ex ęquali vt A ad C, ita esse D ad F. Quoniam enim est vt A ad B, ita D ad E; erit permutãdo vt A ad D, ita B ad E. Rursus quoniam est vt B ad C, ita E ad F; permutando vt B ad E, ita erit C ad F. vt autem B ad E, ita erat A ad D. & vt igitur A ad D, ita C ad F. ergo permutando vt A ad C, ita D ad F. quod oportebat demonstrare. Ex antecedente. Ex demonstratis ad 12 huius.



F. C. COMMENTARIVS.

Quòd si plures, quàm tres numeri proportionales fuerint ABCD EFGH; sitq́; ut A ad B, ita E ad F: vt autem B ad C, ita F ad G; et vt C ad D, ita G ad H: similiter demonstrabimus ut A ad C, ita esse E ad G. et quoniã est vt C ad D, ita



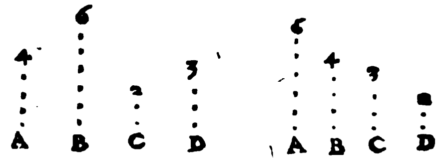
A a 2 D, ita

D, ita G ad H, rursus demonstrabimus vt A ad D, ita E ad H. & eodem modo in alijs.
Sed quoniam Euclides conuersam rationem, compositam, & diuisam, conuersionemq́; rationis in numeris omisit; nos eas, ne quid desideretur, hoc loco apponere curauimus.

PROPOSITIO I.

Si quattuor numeri proportionales sint, & conuertendo proportionales erunt.

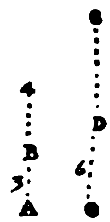
Sint quattuor numeri proportionales ABCD; sitq́; ut A ad B, ita C ad D. Dico vt B ad A, ita esse D ad C. Si enim A sit minor, quàm B, quo-
Diffi.20. *niam est vt A ad B, ita C ad D, quae pars uel partes est A ipsius B, eadẽ pars, vel eędẽ partes*
Cõu.dif.20. *erit C ipsius D. ergo ut B ad A, ita est D ad C.*
Si uero A sit maior, quàm B, rursus quoniam vt A ad B, ita C ad D, quę pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars, uel partes erit D ipsius C. Vt igitur B ad A, ita est D ad C.



PROPOSITIO II.

Si quattuor numeri proportionales sint, & componendo proportionales erunt.

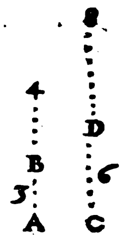
Sint quattuor numeri proportionales A B C D; & sit vt A ad B, ita C ad D. Dico ut A B ad B, ita esse C D ad D. nam cum sit ut A ad B, ita C ad D; & permutando vt A ad C, ita erit B ad D. quare ex duodecima huius vt A B ad C D, ita est B ad D. Rursus igitur permutando ut AB ad B, ita CD ad D.



PROPOSITIO III.

Si quattuor numeri proportionales sint, & diuidendo proportionales erunt.

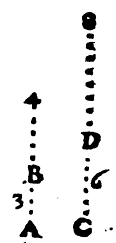
Sint quattuor numeri proportionales AB B CD D; sitq́; vt numerus AB, qui ex duobus numeris constat ad numerum B, ita C D ex duobus C D constans ad ipsum D. Dico vt A ad B, ita esse C ad D. Quoniam enim est vt AB ad B, ita
13.huius. *CD ad D, erit permutando vt A B ad C D, ita B ad D. si autem fuerit ut totus*
11.huius. *ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. ergo A ad C est vt AB ad CD. sed ut AB ad C D, ita erat B ad D. Ex eo igitur, quod demonstrauimus ad 12 huius, vt A ad C, ita erit B ad D: & rursus permutando ut A ad B, ita C ad D.*



PROPOSITIO IIII.

Si quattuor numeri proportionales sint, et per conuersionem rationis proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales AB B CD D; sitq́; vt A B ad B, ita CD ad D. Dico ut AB ad A, ita esse CD ad C. Quoniam enim est ut AB ad B, ita
13.huius. *CD ad D, erit permutando vt A B ad C D, ita B ad D. quòd cum sit vt totus ad*
11.huius. *totum, ita ablatus ad ablatum, erit & reliquus A ad reliquum C, vt A B ad CD: & rursus permutando, conuertendoq́; ut AB ad A, ita CD ad C.*
Sed & quod Euclides de magnitudinibus demonstrauit in vigesima quarta quinti libri, nos de numeris demonstrabimus in hunc modum.

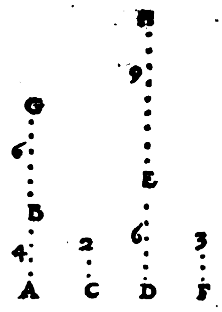


PROPOSITIO V.

Si primus ad secundum eandem habeat proportionem, quam tertius ad quartum; habeat autem et quintus ad secundum proportionem eandem, quam sextus ad quartum; et compositus primus et quintus ad secundum eandem proportionem

nem habebit, quam tertius et sextus ad quartum.

Primus enim numerus A B ad secundum C proportionem habeat eandem, quam tertius DE ad quartum F: habeatq; quintus B G ad secundum C eandem proportionem, quam sextus E H ad quartum F. Dico primum & quintum A G ad secundum C eandem proportionẽ habere, quam tertius, & sextus DH ad quartum F. Quoniam enim est vt BG ad C, ita EH ad F; erit conuertendo vt C ad BG, ita F ad E H. 1. Additarũ. *et quoniam vt A B ad C, ita DE ad F: vt autem C ad BG, ita F ad EH; erit ex aequali vt AB ad BG, ita DE ad EH. quare componendo ut AG ad GB, ita erit DH ad H E.* 14. huius. *Sed vt G B ad C, ita est EH ad F. rursus igitur ex aequali vt AG ad C, ita est DH ad F.* 2. Additarũ.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO XV.

Si vnitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem; et permutando unitas tertium numerum æqualiter metietur, atque secundus quartum.

Vnitas enim A numerum aliquem BC metiatur, alter autem numerus D æqualiter metiatur alium aliquem EF. Dico & permutando A vnitatem æqualiter metiri numerum D, atque BC ipsum EF. Quoniam enim A vnitas æqualiter metitur numerum BC, atque D ipsum EF; quot vnitates sunt in BC, tot sunt et in EF numeri ęquales ipsi D. diuidatur BC quidem in vnitates, quæ in ipso sunt, videlicet BG GH HC: EF vero diuidatur in numeros ipsi D æquales EK KL LF. erit igitur ipsorum BG GH HC multitudo ęqualis multitudini ipsorum EK KL LF. & quoniã BG GH HC vnitates inter se ęquales sunt: suntq; numeri EK KL LF inter se æquales, & vnitatum BG GH HC multitudo æqualis multitudini numerorum EK KL LF: erit vt BG vnitas ad numerum EK, ita GH vnitas ad numerum KL, & vnitas HC ad LF numerum; & vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes cõsequentes. 12. huius. est igitur vt BG ad numerum E K, ita BC ad EF. æqualis autem est BG vnitas vnitati A: et EK numerus numero D. quare ut A vnitas ad numerum D, ita est BC ad EF. ęqualiter Diffi. 20. igitur A unitas numerum D metitur, atque BC ipsum EF. quod demonstrare oportebat.

A.
B.G.H.C
D..
E..K...L..F

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XVI.

Si duo numeri se se multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipsis inter se ęquales erunt.

Sint duo numeri A B, & A quidem ipsum B multiplicans faciat C; B vero multiplicans A faciat D. Dico C ipsi D ęqualem esse. Quoniam enim A ipsum B multiplicans fecit C, metietur B ipsum C per vnitates, quæ sunt in A. 16. com. not. metitur autem & E vnitas numerum A per vnitates, quę in ipso sunt. 6. com. not. æqualiter igitur E vnitas numerum A metitur, atq; B ipsum C. quare permutando vnitas E numerum B ęqualiter metitur, atq; Ex antecedente. A ipsum C. Rursus quoniam B ipsum A multiplicans fecit D; A metietur ipsum D per vnitates, quæ sunt in B. metitur autem & E unitas numerum B per unitates, quæ in ipso sunt. ergo E unitas numerum B æqualiter metitur, atque A ipsum D. sed E unitas numerũ

E.1
A..2
B...3
C......6
D......6

B æqualiter

B æqualiter metitur, atque A ipsum C. Cum igitur A vtrūque ipsorum C D æqua-
4.com.not. liter metiatur, erit C ipsi D æqualis. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos, facti ex ipsis eandem proportionem habebunt, quam multiplicati.

Numerus enim A duos numeros B C multiplicans faciat ipsos D E. Dico ut B ad C, ita esse D ad E. quoniam enim A ipsum B mul- F.1
10.com.not. tiplicans fecit D, metietur B ipsum D per unitates, quæ sunt in A. A..2
6.com.not. metitur autem et F unitas numerum A per vnitates, quæ in ipso
sunt. æqualiter igitur F unitas numerum A metitur, atque B ipsum B...3
Conuers.20. Diffi. D. ergo ut F unitas ad numerum A, ita est B ad D. eadem ratione C....4
et ut F unitas ad numerum A, ita C ad E. & ut igitur B ad D, ita C D......6
ad E; & permutando ut B ad C, ita D ad E. quod demōstrare opor- E........8
tebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Idem sequetur etiam si numerus aliquis plures quàm duos numeros multiplicans fecerit totidem alios, facti namque eandem, quam multiplicati, proportionem habebunt.

Numerus enim A tres numeros BCD multiplicans faciat ipsos EFG. Dico vt B ad C, ita esse E ad F; & vt C ad D, ita F ad G. Similiter enim, vt supra, demonstrabimus, vt H vnitas ad numerum A, ita esse B ad E, & C ad F, & D ad G. erit igitur vt B ad E, ita C ad F, & D ad G. itaque quoniam est vt B ad E, ita C ad F, erit permutando vt B ad C, ita E ad F. Rursus quoniam vt C ad F, ita D ad G, & permutando erit vt C ad D, ita F ad G. vt igitur B ad C, ita est E ad F: & vt C ad D, ita F ad G. quod oportebat demonstrare.

H.1
A..2
B...3
C....4
D.....5
E......6
F........8
G..........10

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipsis eandem proportionem habebunt, quam multiplicantes.

Duo enim numeri A B numerum aliquem C multiplicantes faciant ipsos D E. Dico vt A ad B, ita esse D ad E. Quoniam enim A A...3
16.huius. ipsum C multiplicans fecit D, & C multiplicans A ipsum D fecit. Ea- B....4
dem ratione & C ipsum B multiplicans fecit E. Itaque numerus C C..2
Ex antecedente. duos numeros A B multiplicans ipsos D E fecit. est igitur ut A ad D......6
B, ita D ad E. quod demonstrare oportebat. E........8

F. C. COMMENTARIVS.

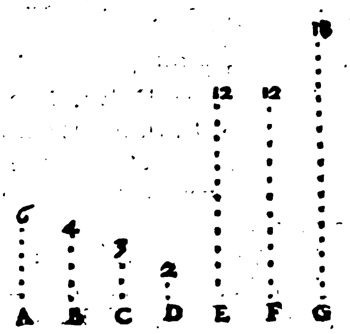
Quòd si plures quàm duo numeri aliquem multiplicantes fecerint totidem alios, facti similiter eandem, quam multiplicantes, proportionem habebunt. quod eodem modo demonstrabimus.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XIX.

Si quattuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, & quarto

quarto fit numerus æqualis erit ei, qui fit ex secundo, & tertio. & si numerus, qui fit ex primo, & quarto ęqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio, quattuor numeri proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D: & A quidē ipsū D multiplicans faciat E: B vero multiplicans C faciat F. Dico E ipsi F ęqualem esse. multiplicās enim A ipsum C faciat G. & quoniam A ipsum quidem C multiplicans fecit G; ipsum uero D multiplicans E fecit: numerus A duos numeros CD multiplicans fecit ipsos G E. est igitur ut C ad D, ita G ad E. Vt autem C ad D, ita A ad B. quare & ut ad B, ita G ad E. Rursus quoniam A ipsum C multiplicans G fecit; sed & B ipsum C multiplicās fecit F: duo numeri A B numerum aliquem C multiplicantes fecerunt ipsos G F. vt igitur A ad B, ita est G ad F. Sed & vt A ad B, ita G ad E. ergo & ut G ad E, ita est G ad F. quòd cum G ad utrumque ipsorum E F eādem proportionem habeat, erit E ipsi F æqualis. Sed sit E ęqualis ipsi F. Dico ut A ad B, ita esse C ad D. ijsdem enim constructis, quoniam A ipsos C D multiplicans fecit G E, erit ut C ad D, ita G ad E. est autem E ipsi F ęqualis. ut igitur G ad E, ita G ad F. sed ut G ad E, ita C ad D. ergo & ut C ad D, ita G ad F. ut autem G ad F, ita A ad B: & ut igitur A ad B, ita C ad D. quod demonstrare oportebat.



17. huius. Ex antecedente. A 17. huius. B C

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd cum G ad utrumque ipsorum E F eandem proportionem habeat, erit E ipsi F æqualis] *Hoc patet ex vigesima diffinitione. Si enim G sit maior, quàm E, vel F; erit vterque ipsorum E F vel eadem pars, vel eędem partes ipsius G si vero G; sit minor, erit G vel eadem pars, vel eędem partes vtriusque ipsorum E F. quare E F inter se aequales sint necesse est.* A 3.4. co. not.

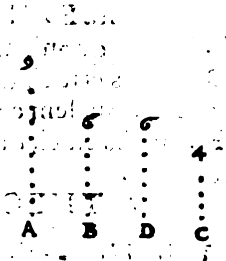
Est autem E ipsi F æqualis. ut igitur G ad E, ita G ad F.] *Per conuersam vigesimae diffinitionis. nam siue vterque ipsorum E F eadem pars, vel eędem partes sit ipsius G, siue G eadem pars sit, vel eędem partes vtriusque ipsorum E F, erit vt G ad E, ita G ad F.* B

Vt autem G ad F, ita A ad B.] *cum enim duo numeri A B ipsum C multiplicantes faciant G F, vt A ad B, ita erit G ad F.* C

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei, qui fit à medio. Si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei, qui à medio; tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales ABC; sitq; ut A ad B, ita B ad C. Dico numerum, qui fit ex AC æqualem esse ei, qui fit ex B. ponatur enim ipsi B æqualis D. est igitur ut A ad B, ita D ad C. ergo qui fit ex AC æqualis est ei, qui ex B D. qui autem fit ex BD est æqualis ei, qui fit ex B; ęqualis etenim est B ipsi D. qui igitur fit ex AC ipsi B est æqualis. Sed qui fit ex AC æqualis sit ei, qui ex B. Dico ut A ad B, ita esse B ad C. Quoniam enim qui ex AC fit ęqualis est ei, qui fit ex B; qui autem fit ex B est æqualis ei, qui ex BD: erit ut A ad B, ita D ad C. sed B ipsi D est ęqualis. ut igitur A ad B, ita est B ad C. quod demonstrare oportebat.



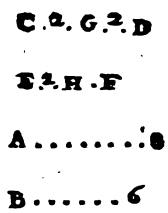
Ex antecedente. Ex antecedente.

THEO-

THEOREMA XIX. PROPOSITIO. XXI.

Minimi numeri eandem, quam ipsi proportionem habentium, eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem.

Sint enim minimi numeri eandem, quam A B, proportionem habentium CD EF. Dico CD æqualiter metiri ipsum A, atque EF ipsum B. numerus enim CD ipsius A non est partes. Si
10. diff. enim fieri potest, sit CD partes ipsius A. ergo EF ipsius B eædem partes erit, quæ CD ipsius A. quot igitur in CD partes sunt ipsius A, tot erunt & in EF partes ipsius B. Diuidatur CD quidem in ipsius A partes CG GD: EF vero diuidatur in partes ipsius B, EH HF. erit igitur ipsarum CG GD multitudo æqualis multitudini ipsarum EH HF. & quoniam CG GD æquales inter se sunt; sunt autem & EH HF inter se ęquales, atque est ipsarum CG GD multitudo * multitudini ipsarum EH HF ęqualis: erit ut CG ad EH, ita GD ad HF. erit igitur & ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad om
11. huius. nes consequentes. quare ut CG ad EH, ita est CD ad EF; ac propterea CG EH in eadē sunt proportione, in qua CD EF, minores ipsis existentes. quod fieri non potest: ponuntur enim CD EF minimi numeri eandem, quam ipsi proportionem habentium. non igitur CD ipsius A partes est. ergo est pars. et EF ipsius B pars eadem est quę CD ipsius A. ęqualiter igitur CD ipsum A, atque EF ipsum B metitur. quod oportebat demonstrare.



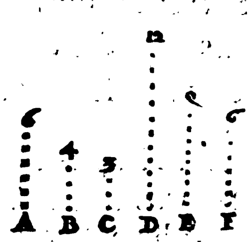
F. C. COMMENTARIVS.

* Erit vt CG ad EH, ita GD ad HF.] *Per conuersam vigesimae diffinitionis. nam cum CG GD inter se aequales sint, itemq; aequales inter se EH HF, si CG sit minor, quam EH, quae pars, uel partes est CG ipsius EH, eadem pars, vel partes erit GD ipsius HF. si vero sit maior, quae pars, vel partes EH ipsius CG, eadem erit pars, vel partes HF ipsius GD. ergo vt CG ad EH, ita GD ad HF.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si sint tres numeri, & alij ipsis multitudine ęquales, qui bini sumantur, et in eadem proportione; sit autem perturbata eorum analogia: etiam ex ęquali in eadem proportione erunt.

Sint tres numeri A B C, et alij ipsis multitudine ęquales qui bini sumantur, et in eadem proportione D E F; sitq; perturbata eorum analogia: et ut A quidem ad B, ita sit E ad F; vt autem B ad C, ita D ad E. Dico etiam ex æquali vt A ad C, ita esse D ad F. Quoniam enim est
19. huius. ut A ad B, ita E ad F; qui fit ex AF æqualis erit ei, qui ex BE. Rursus quoniam est vt B ad C, ita D ad E; qui fit ex CD ęqualis erit ei, qui ex BE. ostensum autem est et qui
19. huius. fit ex AF æqualem esse ei, qui ex BE. ergo et qui fit ex AF æqualis est ei, qui fit ex CD. vt igitur A ad C, ita D ad F. quod demonstrare oportebat.

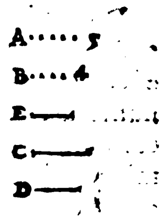


THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIII.

Primi inter se numeri minimi sunt eorum, qui eadem, quam ipsi proportionem habent.

Sunt

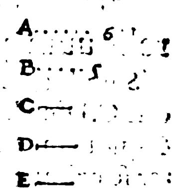
Sint primi inter se numeri A B. Dico eos minimos esse eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent. si enim non ita sit, erunt aliqui numeri minores ipsis A B, qui eandẽ, quam A B proportionem habebunt. sint C D. Quoniam igitur minimi numeri eandem, quam ipsi proportionem habentium eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens cõsequentem; numerus C ipsum A ęqualiter metietur, atque D ipsum B. quoties autem C metitur ipsum A, tot vnitates sint in E. ergo et D ipsum B metitur per vnitates, quę sunt in E. 21.huius. et quoniam C metitur ipsum A per vnitates quę sunt in E, numerus E ipsum A per vnitates, quæ sunt in C, metietur. 8.com.not. et eadem ratione E metietur B per vnitates, quæ sunt in D. ergo E ipsos A B metitur, primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis A B, qui eandẽ habeant proportionem. ergo A B minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi proportionem habent. quod oportebat demonstrare.



THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIIII.

Minimi numeri eorum, qui eandem, quam ipsi proportionem habent, primi inter se sunt.

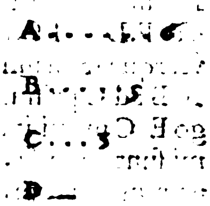
Sint minimi numeri eorum qui eandem, quam ipsi proportionẽ habent A B. Dico A B primos inter se esse. si enim nõ sunt A B inter se primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur; sitq; C. et quoties C ipsum quidem A metitur, tot vnitates sint in D. quoties vero C metitur ipsum B, tot vnitates sint in E. et quoniam C ipsum A metitur per vnitates, quę sunt in D, multiplicans C ipsum D fecit A. Eadem ratione et C multiplicans E ipsum B fecit. com. not. Itaque cum numerus C duos numeros DE multiplicans faciat A B, erit ut D ad E, ita A ad B. 17.huius. ergo DE in eadem sunt proportione, in qua AB, minores ipsis existentes. quod fieri non potest. non igitur A B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A B primi inter se sunt. quod oportebat demonstrare.



THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui vnum ipsorum metitur numerus ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se A B, et aliquis numerus C ipsum A metiatur. Dico et B C inter se primos esse. Si enim B C nõ sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitq; D. et quoniam D ipsum C metitur, et C ipsum A; et D ipsum A metietur. metitur autem et ipsum B. ergo D numeros AB metitur primos inter se existentes. quod fieri nõn potest. non igitur B C numeros numerus aliquis metietur. ideoq; B C inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.



THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVI.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, et qui fit ex ipsis ad eum primus erit.

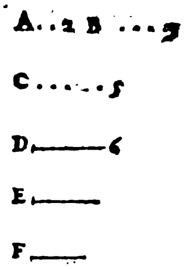
Duo enim numeri A B ad aliquem numerũ C primi sint: et A ipsum B multiplicans faciat D. Dico CD inter se primos esse. si enim C D non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur; sitq; E. et quoniã C A primi inter se sunt, et ipsum C metitur aliquis numerus E; erunt E A inter se primi. quoties autem E ipsum D metitur, tot vnitates sint in F. quare et F metitur ipsum D per vnitates, quæ sunt in E. ergo E ipsum F multiplicans fecit D. sed et A multiplicas B ipsum D fecit. qui igitur fit ex E F est æqualis ei, qui ex A B. si uero qui fit ex extremis æqualis fuerit ei, qui ex medijs, quattuor numeri proportionales erunt. est igitur ut E ad A, ita B ad F. sunt autem A E inter se primi, et qui primi etiam minimi sunt. minimi vero eãdẽ, quam ipsi, proportionem habentium, eos, qui eandem habẽt proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem. ergo E ipsum B metitur. metitur autẽ et ipsum C. quare E ipsos B C metitur, primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur C D numeros numerus aliquis metietur; ac propterea C D inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.

8. com. not.
9. com. not.

19. huius.

23. huius.
21. huius.

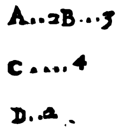


THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui fit ab vno ipsorum ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri inter se primi AB; & A se ipsum multiplicans faciat C. Dico B C inter se primos esse. ponatur enim ipsi A ęqualis D & quoniam AB sunt primi inter se, æqualis autem A ipsi D; & DB inter se primi erunt, vterque igitur ipsorum A D ad B primus est. ergo & qui ex AD fit primus erit ad B. sed qui fit ex AD est numerus C. quare C B inter se primi sunt. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

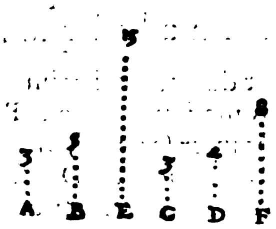


THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVIII.

Si duo numeri ad duos numeros vterque ad vtrumque primi fuerint, & qui fiunt ex ipsis inter se primi erunt.

Duo enim numeri A B ad duos uumeros C D vterque ad vtrumque primi sint: & A quidem ipsum B multiplicans faciat E: C vero multiplicans D faciat F. Dico EF inter se primos esse. Quouiam enim vterque ipsorum A B ad C primus est, & qui fit ex A B ad C primus erit. qui autem fit ex A B est E. ergo E C primi inter se sunt. Eadẽ ratione & E D primi sunt inter se. vterque igitur ipsorum C D ad E primus est: ac propterea qui fit ex C D primus erit ad E qui uero ex CD fit est numerus F. ergo E F primi inter se erunt. quod demonstrare oportebat.

26. huius.



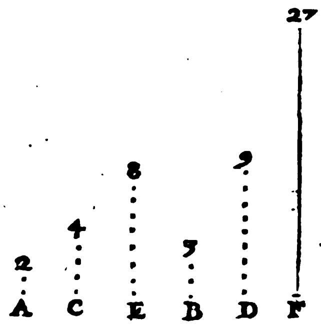
THEOREMA XXVII. PROPOSITIO. XXIX.

Si duo numeri primi inter se fuerint, & vterque seipsum multiplicans faciat aliquos: facti ex ipsis primi erunt inter se. & si numeri à principio positi eos, qui facti sunt, multiplicantes aliquos

faciant

faciant, & ipsi inter se primi erunt: & semper circa extremos hoc continget.

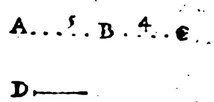
Sint duo numeri inter se primi A B: & A se ipsum quidem multiplicans faciat C, multiplicans vero C faciat E: & B se ipsū multiplicās D faciat; multiplicans autem D faciat ipsum F. Dico C D, & E F inter se primos esse. Quoniam enim A B primi inter se sunt; & A se ipsum multiplicans fecit C; erunt C B primi inter se. & quoniam C B inter se primi sunt, & B se ipsum multiplicans fecit D; erūt C D inter se primi. Rursus quoniam A B primi sunt inter se, & B se ipsum multiplicans D fecit; A D inter se primi erunt. Cum igitur duo numeri A C ad duos numeros B D vterque ad vtrumque primi sint, & qui ex A C fit ad eum, qui fit ex B D primus erit. sed qui fit ex AC est numerus E, qui vero ex BD fit est F. ergo E F primi inter se sunt. quod oportebat demonstrare. 27.huius. Ex antecedente.



THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XXX.

Si duo numeri primi inter se fuerint, & vterque simul ad vtrūque ipsorum primus erit. quòd si vterque simul ad vnum aliquem ipsorum sit primus, & numeri à principio positi inter se primi erunt.

Componantur enim duo numeri inter se primi AB BC. Dico & vtrumque simul, videlicet A C ad vtrumque ipsorum AB BC primum esse. Si enim non sint CA AB inter se primi, metietur eos numerus aliquis. metiatur, & sit D. Quoniam igitur D metitur ipsos CA AB; & reliquum BC metietur. metitur autem & BA. ergo D ipsos AB BC metitur, primos inter se existentes; quod fieri non potest. non igitur CA AB numeros numerus aliquis metietur; ac propterea AB AC inter se primi sunt. ergo CA ad vtrumque ipsorum est primus. Sint rursus CA AB primi inter se. Dico & ipsos AB BC inter se primos esse. Si enim AB BC non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitq; D. & quoniam D metitur vtrumque ipsorum AB BC, & totum CA metietur; metitur autem & AB. ergo D ipsos CA AB metitur, primos inter se existentes; quod fieri non potest. non igitur ipsos AB BC numeros numerus aliquis metietur. ideoq; AB BC inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare. 23.com. not. A 11.com. not. B



F. C. COMMENTARIVS.

Ergo CA ad vtrumque ipsorum est primus] *eodem enim modo demonstrabitur & A C B inter se primos esse.* A

Ideoq; AB BC inter se primi sunt] *idem etiam sequetur si AC CB inter se primi sint. quod eodem modo demonstrabimus.* B

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXI.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

Sit primus numerus A, qui numerum B non metiatur. Dico B A inter se primos

 esse

esse, si enim non sint B A inter se primi, metietur eos aliquis nu-
A merus. metiatur, et sit C. ergo C non est vnitas. et quoniam C ip A . . . 5 B 8
sum B metitur, A vero non metitur ipsum B; non erit C idem
B qui A. et quoniam C ipsos B A metitur, et metietur ipsum A pri C —
mum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest.
non igitur ipsos B A numeros numerus aliquis metietur. quare A B inter se primi sunt. quod demonstrare oportebat.

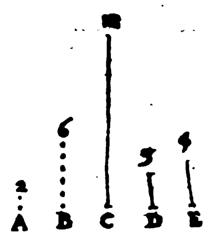
F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo C non est vnitas] *si enim eos vnitas sola metiretur, primi essent inter se. quod non ponitur.*

B Et quoniam C ipsos B A metitur, et metietur ipsum A primum existentem, cum
7. com. not. non sit idem, qui A. quod fieri non potest] *omnis enim numerus se ipsum metitur.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXII.

Si duo numeri se se multiplicantes aliquem faciat, eum vero, qui ex ipsis fit, metiatur aliquis numerus primus; & vnum ipsorum, qui à principio positi sunt, metietur.



Duo enim numeri A B se inuicem multiplicantes faciat C, ipsum uero C metiatur aliquis numerus primus, qui sit D. Dico D vnũ ipsorum A B metiri. ipsum enim A non me
Ex antecedente. tiatur; atque est D numerus primus. ergo A D primi inter se sunt. et quoties D ipsum C metitur, tot unitates sint in E. Quoniam igitur D metitur ipsum C per eas, quæ sunt in
Com. not. 9. E unitates; numerus D ipsum E multiplicans fecit C. sed et A multiplicans B ipsum C fecit. ergo qui fit ex D E æqua-
19. huius. lis est ei, qui ex A B. est igitur ut D ad A, ita B ad E. et sunt
23. huius. A D primi inter se, primi vero et minimi. sed minimi eos,
21. huius. qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem. ergo D ipsum B metitur. similiter demonstrabimus, si D non metiatur B ipsum A metiri. quare D metitur vnum ipsorum A B. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XXXIII.

Omnem numerum compositum primus aliquis numerus metitur.

Sit compositus numerus A. Dico primum aliquem numerum
Diffi. 13. ipsum A metiri. Quoniam enim compositus numerus est A, me- A 8
tietur ipsum aliquis numerus. metiatur; et sit B. & si quidem pri
mus est B, manifestum est, quod quæritur. si vero compositus, ip- B . . . 4
sum aliquis numerus metietur. metiatur; sitq; C. Et quoniam C C . . 2
metitur ipsum B, B uero ipsum A; & C ipsum A metitur. & si qui-
12. co. not. dem primus est C, manifestum est quod quæritur. Si vero compositus eum aliquis numerus metitur. & hac consideratione facta, relinquetur tandem aliquis numerus primus, qui præcedentem & ipsum A metietur. si enim nõ relinquitur primus,
3. postul. metientur ipsum A infiniti numeri, quornm alter altero est minor. quod in numeris fieri non potest. ergo relinquetur aliquis, qui et præcedentem metietur et ipsum A. omnem igitur numerum compositum primus aliquis numerus metitur, quod demonstrare oportebat.

ALITER

A.........9
B...3
C..

ALITER. Sit compositus numerus A. Dico primum aliquem numerum ipsum A metiri. Quoniam enim A compositus est, metietur ipsum aliquis numerus. & sit B minimus eorum, qui ipsum A metiuntur. Dico B primum esse. si enim non sit primus, compositus erit. ergo eum aliquis numerus metietur. metiatur; sitq; C. erit C minor, quàm B. & quoniam C ipsum B metitur, sed & B ipsum A; & C ipsum A metietur, minor existens ipso B, qui est minimus omnium, qui metiuntur. quod est absurdũ. non igitur B compositus numerus est. ergo est primus. quod demonstrandũ fuit.

THEOREMA. XXXII. PROPOSITIO XXXIIII.

Omnis numerus vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur.

A...3
A......6
...3

Sit numerus A. Dico A vel primum esse, vel primum aliquem numerum ipsum A metiri. si quidem igitur primus est A, manifestum est quod quæritur. si vero compositus ipsum aliquis primus numerus metietur. Omnis igitur numerus vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur. quod demonstrare oportebat. Ex antecedente.

PROBLEMA III. PROPOSITIO. XXXV.

Numeris quotcumque datis inuenire minimos eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habeant.

A......6
B........8
C..........10
D..2
E...3
F ——4
G ——5
H
K
L
M

Sint dati quotcũque numeri A B C. oportet inuenire minimos eorum, qui eandem, quam ipsi A B C, proportionem habeãt. vel igitur A B C primi inter se sunt, vel non. si quidem primi, et minimi erunt eandem, quã ipsi proportionem habentium. si vero non primi, sumatur ipsorum A B C maxima communis mensura D, et quoties D vnumquemque ipsorum A B C metitur, tot vnitates sint in vnoquoque horum E F G. et vnusquisque igitur ipsorum E F G vnumquemque ipsorum A B C metitur per eas, quæ sunt in D vnitates. ergo E F G ipsos A B C equaliter metiuntur, ac propterea E F G in eadem sunt proportione, in qua ipsi A B C. Dico eos etiã minimos esse. si enim E F G non sint minimi, eandem, quam ipsi A B C, proportionem habentium, erunt aliqui ipsis E F G minores in eadem proportione, in qua A B C. sint H K L, æqualiter igitur H metitur ipsum A, ac vterque ipsorum K L vtrũque BC metitur. quoties autem H metitur ipsum A, tot vnitates sint in M. et vterque igitur K L vtrumque BC metitur per eas, quæ sunt in M vnitates. et quoniã H ipsum A metitur per vnitates, quæ sunt in M, et M ipsum A per vnitates, quæ sunt in H metietur. Eadem ratione et M vtrumque ipsorũ BC metietur per vnitates, quę sunt in vtroque K L. ergo M ipsos A B C metitur. Rursus quoniam H ipsum A metitur per vnitates, quæ sunt in M; H ipsum M multiplicans fecit A. Eadem ratione et E multiplicans D ipsum A fecit. ergo qui ex E D fit ei, qui fit ex HM est æqualis. vt igitur E ad H, ita M ad D maior autem est E, quàm H. ergo et M quàm D est maior, et ipsos ABC metitur. quod fieri nõ potest. ponitur enim D ipsorum A B C maxima communis mensura. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis E F G, in eadem proportione, in qua A B C. ergo E F G minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi A B C proportionẽ habent. quod oportebat demonstrare.

23. huius.
2. huius.
18. huius.
21. huius.
8. com. not.
9. com. not.
19. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam sępe vsu venit, vt duo minimi numeri in data proportione inueuiendi sint, libuit hoc loco sequens problema adnectere.

Numeris quotcũque datis deinceps proportionalibus, inuenire duos minimos, qui eandem, quam ipsi, proportionem habeant.

Sint dati quotcumque numeri deinceps proportionales ABC. oportet inuenire duos minimos numeros, qui eandem, quam ipsi A B C proportionem habeant. Itaque vel A B primi sunt inter se, vel non primi: et si quidem primi, & minimi erunt eorum, qui eandem proportionem habent; sin minus, sumatur ipsorum AB maxima communis mensura D: & quoties D metitur A, tot vnitates sint in E; quoties vero idem metitur B, tot vnitates sint in F. ergo & E F ipsos A B aequaliter metiuntur: ideoq; E F in eadem sunt proportione, in qua ipsi A B. Dico E F etiam minimos esse. si enim non sint minimi, erunt aliqui numeri minores ipsis E F, qui eandem, quam A B proportionem habeant. sint GH. ergo G aequaliter metitur A, atque H ipsum B. & quoties G metitur A, tot vnitates sint in K. quare & H metietur B per eas, quae sunt in K vnitates. & ob id K metietur A per vnitates, quae sunt in G, metieturq; B per vnitates, quae sunt in H. ergo K ipsos A B metitur. & quoniam G ipsum A metitur per eas, quae sunt in K vnitates, G multiplicans K fecit A. Rursus quoniam E metitur A per vnitates, quae sunt in D; & E multiplicans D fecit A. qui igitur fit ex E D est aequalis ei, qui ex GK; ac propterea vt E ad G, ita erit K ad D. est autem E maior, quàm C. ergo & K maior quàm D, & ipsos A B metitur. quod fieri non potest. erat enim D ipsorum AB maxima communis mensura. non igitur sunt aliqui numeri minores ipsis E F, qui eandem, quam ipsi A B proportionem habeant. & quoniam vt A ad B, ita est B ab C, erunt E F minimi numeri in eadem proportione, in qua A B C. Inuenti igitur sunt minimi numeri E F, qui eandem, quam ipsi ABC proportionem habeant. quod facere oportebat.

23. huius. — 2. huius. — 18. huius. — 21. huius. — 8. com. not. — 19. huius.

A....4
B......6
C.........9
D..2
E..2
F...3
G
H
K

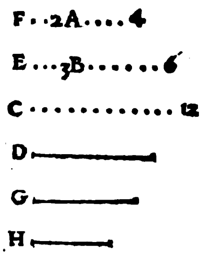
PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XXXVI.

Duobus numeris datis, inuenire quem minimum numerum metiantur.

Sint dati duo numeri A B. oportet inuenire quem minimum numerum metiantur. numeri enim A B uel primi inter se sunt, vel non. sint primum A B inter se
16. huius. primi: & A ipsum B multiplicãs faciat C. ergo & B multiplicans A ipsum C fecit. ac propterea numeri A B ipsum C metiuntur. Dico etiam C minimum esse. si enim non ita sit, metientur A B numerum aliquem minorẽ, quàm C. metiantur ipsum D; & quoties A ipsum D metitur, tot vnitates sint in E; quoties autem B metitur D, tot unitates sint in F. ergo A quidem ipsum E multiplicans fecit D; B uero multiplicans F ipsum D fecit. quare
19. huius. numerus, qui ex AE fit est ęqualis ei, qui fit ex BF. vt igitur A ad B, ita est F ad E,
23. huius. & sunt A B primi. primi autem & minimi, sed minimi eos, qui eandem habent pro
21. huius. portionem æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. ergo B ipsum E metitur, & consequens consequentem. & quoniam A numeros B E multipli
18. huius. cans fecit C D, erit vt B ad E, ita C ad D. metitur autem B ipsum E. ergo & C ipsum D metitur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur A B metiuntur aliquem numerum minorem ipso C, quando A B primi inter se fuerint. ergo A B ipsum C minimum existentem metiuntur. Sed non sint A B primi inter se: & sumãtur
19. huius. minimi numeri eandem, quam A B proportionem habentium, qui sint F E. æqualis igitur est, qui ex A E fit ei, qui ex BF. & A ipsum E multiplicãs faciat C. ergo & B multi-

A...3 B....4
C............12
D
E
F

multiplicans F ipsum C fecit. quare A B ipsum C metiūtur.
Dico & minimum esse. nisi enim ita sit, metientur A B
aliquem numerum minorem, quam C. metiantur ipsum D.
& quoties A ipsum D metitur, tot vnitates sint in G. quoties
autem B metitur D, tot vnitates sint in H. ergo A quidem 9. com. not.
ipsum G multiplicans fecit D; B vero multiplicans H ipsū
D fecit. qui igitur ex A G fit est æqualis ei, qui fit ex B H. vt
igitur A ad B, ita H ad G. sed vt A ad B, ita F ad E. ergo & vt 19. huius.
F ad E, ita H ad G: & sunt F E minimi; minimi vero eos, qui 21. huius.
eandem habent proportionem æqualiter metiuntur, maior
maiorem, & minor minorem. quare E ipsum G metitur. & quoniam A numeros
E G multiplicans ipsos C D fecit, vt E ad G, ita erit C ad D. Sed E metitur ipsum 18. huius.
G. ergo & C ipsum D metitur, maior minorem. quod fieri nō potest. non igitur me
tiuntur A B aliquem numerum minorem, quàm C. ergo A B ipsum C minimum
existentem metientur. quod demonstrare oportebat.



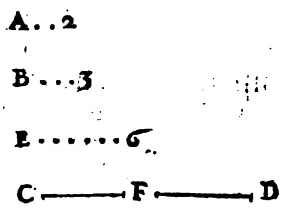
SCHOLIVM.

Minimum dicit, quo minorem duo numeri metiri non possunt. vt est 15 eo enim minorem duo numeri 3, & 5 non metiuntur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXVII.

Si duo numeri metiantur numerum aliquem, & minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

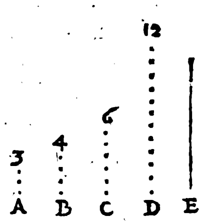
Duo enim numeri A B numerum aliquem C D
metiantur, minimum autem ipsum E. Dico & E ipsum
C D metiri. si enim E non metitur C D E, metiens F
D relinquat se ipso minorem CF. & quoniam A B ip-
sum E metiuntur, E vero ipsum DF: & A B metientur 12. com. not.
D F. sed & metiuntur totum CD. ergo & reliquum C
F minorem ipso E metientur. quod fieri non potest. 13. com. not.
non igitur E ipsum CD non metitur. quare ipsum me-
tiatur necesse est. quod demonstrare oportebat.



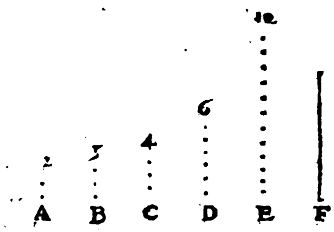
PROBLEMA V. PROPOSITIO XXXVIII.

Tribus numeris datis inuenire quem minimum numerum metiantur.

Sint dati numeri A B C. oportet inuenire quem mini-
mum metiantur numerum. sumatur enim D, quem mini-
mum duo A B metiuntur. itaque C vel metitur D, vel non
metitur. metiatur primum. sed & A B metiuntur ipsum
D. ergo A B C ipsum D metientur. Dico & minimum. si
enim non, metientur A B C quendam numerum mino-
rem ipso D, metiantur E. Quoniam igitur A B C metiun-
tur ipsum E, & A B ipsum E metiuntur. ergo & minimus, Ex antecedente.
quem metiuntur A B ipsum E metietur. minimus autem,
quem metiuntur A B, est D. quare D metitur ipsum E, maior minorem. quod fieri
non potest. non igitur A B C metiuntur aliquem numerum ipso D minorem. er-
go A B C minimum D metiuntur. non metiatur autem C ipsum D: & sumatur mi 36. huius.
nimus



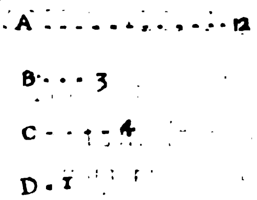
nimus numerus E, quē C D metiuntur. Itaque qm̄ A B metiuntur ipsum D, D vero ipsum E; & A B ipsū E; metientur. metitur aūt & C ipsum E. ergo A B C ipsum E metiuntur. (12.co.not.) Dico & minimum. si enim non, metientur A B C numerum minorem ipso E. metiantur F. & quoniam A B C metiuntur F, & A B ipsum F metientur. ergo & minimus, quem A B metiuntur, metietur ipsum F: (Ex antecedente.) minimus autem, quem A B metiuntur, est D. quare D ipsum F metitur, & metitur C ipsum F. ergo D C ipsum F metientur; ac propterea minimus, quem metiuntur D C, metietur & F. sed minimus, quem metiuntur D C, est E ergo E ipsum F metitur, maior minorē. quod fieri non potest. non igitur A B C metiuntur aliquē numerum minorem ipso E. ergo numerum E minimum existentem ipsi A B C metiuntur. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO. XXXIX.

Si numerum numerus aliquis metiatur, mensus partem habebit à metiente denominatam.

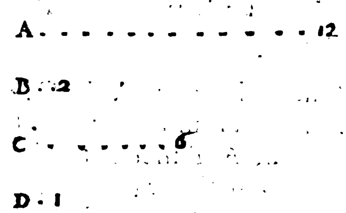
Numerum enim A numerus aliquis B metiatur. Dico A partem habere ab ipso B denominatam. quoties enim B ipsum A metitur, tot vnitates sint in C. Quoniam igitur B metitur ipsum A per eas, quę sunt in C, vnitates; metitur autem & D unitas ipsorum C per vnitates, quæ in ipso sunt: & D vnitas ipsum C numerum æqualiter metietur, atque B ipsum A. quare permutando unitas D ipsum B numerum ęqualiter metietur, atque C ipsum A. (15.huius.) quæ igitur pars est unitas D ipsius B numeri, eadem est pars & C ipsius A. sed unitas D ipsius B numeri pars est ab eo denominata. (5.com.not.) ergo & C ipsius A pars est denominata ab ipso B. quare A partem habet C ab ipso B denominatam. quod ostendere oportebat.



THEOREMA XXXV. PROPOSITIO. XL.

Si numerus partem quamcumque habeat, eum numerus à parte denominatus metietur.

Numerus enim A partem habeat quamcumque B; & ab ipso B denominatus sit numerus C. Dico C ipsum A metiri. Quoniam enim B ipsius A pars est denominata ab ipso C. (5.com.not.) est autem & D vnitas ipsius C numeri pars ab eo denominata. quæ igitur pars est vnitas D ipsius C numeri, eadem pars est & B ipsius A. ergo vnitas D æqualiter metitur ipsum B numerum, atque B ipsum A. & permutando unitas D ipsum B numerum (15.huius.) æqualiter metitur, atque C ipsum A. ergo C ipsum A metitur. quod oportebat demonstrare.



PROBLEMA. VI. PROPOSITIO XLI.

Numerum inuenire, qui minimus existens datas partes habeat.

Sint

Sint datæ partes A B C. oportet numerum inuenire, qui cum minimus sit, habeat partes A B C. sint ab ipsis A B C partibus denominati numeri D E F. & sumatur minimus numerus G, quem ipsi D E F metiuntur. Quoniam igitur D E F metiuntur ipsum G, habebit G partes ab ipsis D E F denominatas: partes autem denominatæ ab ipsis D E F sunt A B C. ergo G partes A B C habet. Dico & minimum esse. si enim G non existens minimus partes habet A B C, erit numerus aliquis minor ipso G, qui easdem partes habeat. sit H. Quoniam igitur H partes habet A B C, eum metientur numeri ab ipsis A B C partibus denominati; sunt autem hi numeri D E F. ergo D E F ipsum H metietur; atque est H minor ipso G. quod fieri non potest. non igitur erit aliquis numerus minor ipso H, qui partes A B C habeat. quod oportuit demonstrare. 38.huius. 39.huius.

A $\frac{1}{2}$ D . . 2

B $\frac{1}{3}$ E . . . 3

C $\frac{1}{4}$ F 4

G 12

H ———

SEPTIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER OCTAVVS

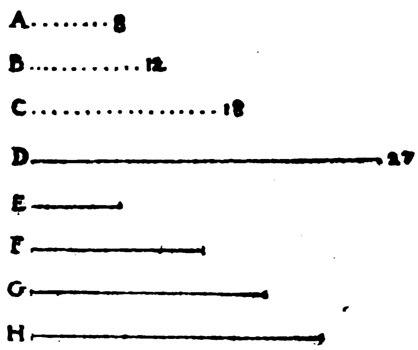
CVM COMMENTARIIS,

Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO. I.

SI sint quotcumque numeri deinceps proportionales, quorum extremi sint inter se primi; minimi erunt omnium qui eandem, quam ipsi proportionem habent.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D, quorũ extremi A D primi inter se sint. Dico A B C D minimos esse omnium, qui eandem, quam ipsi proportionem habent. si enim non, sint minores ipsis A B C D numeri E F G H, & in eadem proportione. Et quoniam A B C D sunt in eadem proportione, in qua E F G H; atque est ipsorũ A B C D multitudo æqualis
14. septimi. multitudini ipsorum E F G H: erit ex æquali ut A ad D, ita E ad H: et sunt A D
21. septimi. primi; primi autem, & minimi numeri æqualiter metiuntur eos, qui eandem proportionem habent, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo A ipsum E metitur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur E F G H minores ipsis A B C D existentes in eadẽ sunt, in qua ipsi proportione; ac propterea A B C D minimi sunt omnium, qui eandẽ, quam ipsi proportionem habent. quod demonstrare oportebat.



PROBLEMA I. PROPOSITIO. II.

Numeros inuenire deinceps proportionales minimos, quotcumque quis imperauerit in data proportione.

Sit data proportio in minimis numeris, quam habet A ad B. oportet numeros inuenire deinceps proportionales minimos quotcumque quis imperauerit in proportione A ad B. imperentur quattuor: et A se ipsum multiplicans faciat C, multiplicans vero B faciat D, et B se ipsum multiplicans faciat E; & adhuc A multiplicans C D E ipsos F G H faciat, B vero multiplicans E faciat K. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit C, multiplicãs vero B ipsum D fecit; numerus A duos nu-
17. septimi. meros A B multiplicans fecit C D. est igitur ut A ad B, ita C ad D. rursus quoniam

Nam A ipsum B multiplicans fecit D, & B seipsū multiplicans fecit E; vterque ipsorum A B multiplicans B vtrumque ipsorum D E fecit. vt igitur A ad B, ita D ad E. sed vt A ad B, ita C ad D. ergo & vt C ad D, ita D ad E. Et quoniam A numeros C D multiplicans ipsos F G fecit, ut C ad D, ita erit F ad G. vt autem C ad D, ita erat A ad B. & ut igitur A ad B, ita F ad G. rursus quoniam A numeros D E multiplicans fecit G H, erit vt D ad E, ita G ad H. sed vt D ad E; ita A ad B. ergo & vt A ad B, ita G ad H. quòd cum A B ipsum E multiplicantes faciant H K; erit vt A ad B, ita H ad K. ostensum autem est & ut A ad B, ita esse & F ad G, et G ad H. ergo & ut F ad G, ita G ad H, & H ad K. numeri igitur C D E, & F G H K proportionales sunt in proportione, quā habet A ad B. Dico ét minimos esse. Quoniam enim A B minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent; minimi vero, & primi sunt inter se: erunt ipsi A B inter se primi. et vterque quidem ipsorum A B seipsum multiplicans vtrumque C E fecit; vterque vero C E multiplicans fecit vtrumque F K. ergo C E, & F K primi inter se sunt. si autem sint quotcumque numeri deinceps proportionales, & eorum extremi sint inter se primi; minimi erunt omnium eandem, quam ipsi proportionem habentium. ergo C D E, & F G H K minimi sunt omnium, qui eandem quam A B proportionē habēt, quod oportebat demonstrare.

A..2
B...3
C....4
D......6
E.........9
F........8
G............12
H.................18
K——————————27

18. septimi.

18. septimi.

13. septimi.

29. septimi.

Ex antecedente.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est si tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint, eandem, quam ipsi proportionem habentium; extremos eorū quadratos esse: si vero quattuor esse cubos.

A........8
B............12
C.....................18
D——————————27

THEOREMA II.
PROPOSITIO. III.

Si sint quotcūque numeri deinceps proportionales, minimi omniū, qui eādem, quam ipsi, proportionem habent; eorum extremi primi inter se erunt.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D minimi omnium qui eandem, quā ipsi, proportionem habent. Dico eorum extremos A D inter se primos esse. sumātur enim duo numeri minimi in proportione ipsorum A B C D, qui sint E F, tres vero G H K, & semper deinceps vno plures, quo ad assumpta multitudo æqualis fuerit multitudini ipsorum A B C D. sumantur, & sint L M N X. extremi igitur ipsorum L X primi inter se

E..2
F...3
G....4
H......6
K.........9
L........8
M.............12
N...................18
O——————————27

Ex antecedente.

29. septimi.

ter se sunt. Quouiam enim EF primi sunt, & vterque ipsorum se ipsum multiplicans vtrumque GK fecit; vtrumque vero GK multiplicans fecit vtrumque LX: erunt & GK, & LX primi. & quoniam ABCD minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent; sunt autem & LMNX minimi in eadẽ proportione, in qua ABCD; estq; ipsorum ABCD multitudo æqualis multitudini ipsorum LMNX: erit vnusquisque ipsorum ABCD vnicuique ipsorum LMNX æqualis. Ergo A quidem est æqualis L, B vero ipsi M, C ipsi N, & D ipsi X. quod cum LX primi sint inter se, & L ipsi A æqualis, & X ipsi D; & AD inter se primi erũt. quod oportebat demõstrare.

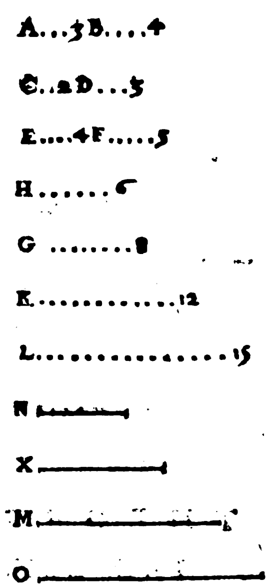
F. C. COMMENTARIVS.

* Sumatur enim duo minimi numeri in proportione ipsorum ABCD] *ex eo, quod ad 35 huius addidimus.*

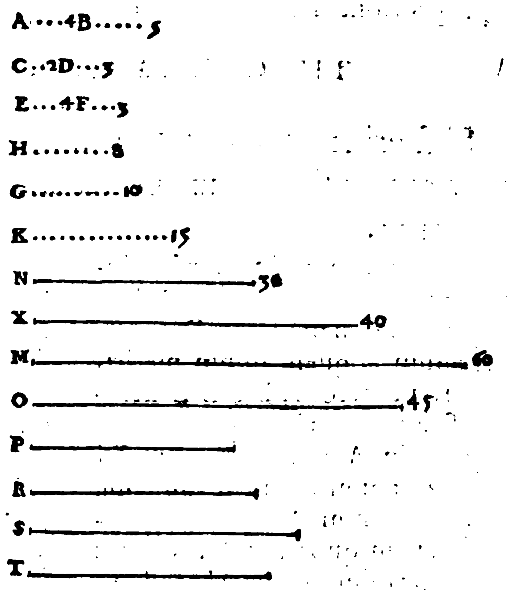
PROBLEMA II. PROPOSITIO. IIII.

Proportionibus datis quotcumque in minimis numeris, numeros inuenire deinceps minimos in datis proportionibus.

Sint datæ proportiones in minimis numeris, videlicet proportio A ad B, & proportio C ad D, & E ad F. oportet numeros inuenire deinceps minimos in proportione A ad B, & in proportione C ad D; & adhuc in proportione E ad F. Sumatur enim minimus numerus, (34. septimi.) quem BC metiuntur; sitq; G. & quoties B metitur G, toties A ipsum H metiatur; quoties vero C ipsum G metitur, toties & D metiatur K. itaque E ipsum K vel metitur, vel non metitur. metiatur primum. & quoties E metitur K, toties F ipsum L metiatur. & quoniam A æqualiter metitur H, atque B ipsum G; erit vt A ad B, ita H ad (17. septimi.) G. Eadem ratione & vt C ad D, ita G ad K; & adhuc vt E ad F, ita K ad L. ergo HGKL deinceps proportionales sunt in proportione A ad B, & in proportione C ad D, & adhuc in proportione E ad F. Dico etiam minimos esse. Si enim non sint HGKL deinceps minimi in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F; erunt aliqui numeri minores ipsis HGKL deinceps minimi in eisdem proportionibus. sint N X M O. & quoniam est vt A ad B, ita N ad X; & sunt A B minimi; minimi autem eos, qui (21. septimi.) eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem, hoc est antecedens antecedẽtem, & consequẽs consequentem: metietur B ipsum X. Eadem ratione & C ipsum X metietur. quare (A) B C metiuntur X, ac propterea minimus, quem metiuntur B C, ipsum X metietur. (37. septimi.) minimus autem, quem metiuntur B C, est G. ergo G metietur X, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis H G K L deinceps minimi in proportione A ad B, C ad D, & E ad F. Sed non metiatur E ipsum K; & sumatur minimus numerus, quem ipsi E K metiuntur, (36. septimi.) sitq; M. quoties autem K metitur M, toties & vterque ipsorum HG vtrumque N X metiatur: & quoties E metitur M, toties & F metiatur O. Quoniam igitur H ipsũ (7. septimi.) N æqualiter metitur, atque G ipsum X; erit vt H ad G, ita N ad X. vt autem H ad G, ita A ad B. & vt igitur A ad B, ita N ad X. Eadem ratione & vt C ad D, ita X ad M, rursus quoniã E ipsum M æqualiter metitur, atque F ipsum O; erit vt E ad F, ita M ad O. quare NXMO deinceps proportionales sunt in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F. Dico minimos quoque esse. Si enim non sint NXMO deinceps minimi in



in proportionibus A ab B, C ad D, & E ad F, erunt aliqui numeri minores ipsis N X M O deinceps minimi in eisdem proportionibus. sint P R S T. & cum sit vt P ad R, ita A ad B; sintq; A B minimi; minimi vero eos, qui eãdẽ habẽt proportionẽ, æqualiter metiũtur, antecedẽs antecedẽtẽ, & cõsequẽs cõsequẽtẽ. numerus B ipsũ R metietur. 21. septimi.
Eadem ratione & C metietur ipsũ R. ergo B C ipsum R metiuntur: & ob id minimus, quem metiũtur B C, ipsum R metietur. minimus aũt, quẽ metiũtur B C, est G. ergo G metitur ipsum R. atque est vt G ad R, ita K ad S. quare & K ipsum S metitur: metitur autem & E ipsum S; ideoq; E K ipsum S metiuntur. & minimus igitur, quem metiuntur E K, metietur ipsum S. Sed minimus, quem metiũtur E K, est M. ergo M ipsum S metietur, maior minorem. quòd fieri non potest. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis N X M O deinceps minimi in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F. ergo N X M O deinceps minimi sunt in eisdem proportionibus. quod demonstrare oportebat. B 37. septimi. C



F. C. COMMENTARIVS.

Eadem ratione & C ipsum X metitur.] *Quoniam enim est vt C ad D, ita X ad M; & sunt C D minimi; minimi verò eos, qui eandem habent proportionem, aequaliter metiuntur: numerus C ipsum X metietur.* A

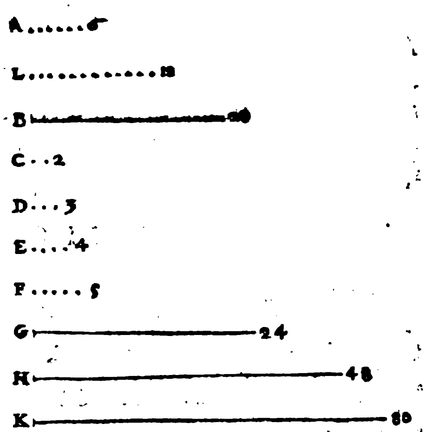
Eadem ratione & C metietur ipsum R] *est enim vt C ad D, ita R ad S: suntq; C D minimi. ergo ob iam dictam caussam C ipsum R metietur.* B

Atque ut G ad R, ita K ad S] *est enim vt G ad K, ita R ad S. quare permutando vt G ad R, ita K ad S.* C

THEOREMA III. PROPOSITIO V.

Plani numeri inter se proportionẽ habẽt ex lateribus cõpositã.

Sint plani numeri A B, et ipsius quidem A latera sint C D numeri; ipsius vero B latera sint E F. Dico A ad B proportionẽ habere ex lateribus cõpositã. proportionibus enim datis, videlicet quã hẽt C ad E, & quã D ad F, sumãtur numeri deinceps minimi G H K in proportionibus C ad E, & D ad F, sitq; vt C ad E ita G ad H: vt aũt D ad F, ita H ad K. ergo G H K inter se proportiones habẽt laterũ. Sed proportio G ad K composita est ex proportione G ad H, et proportione H ad K. quare G ad K proportionem habet ex lateribus compositam. Dico igitur vt A ad B, ita esse G ad K; numerus enim D ipsum E multiplicans faciat L. & quoniam D multiplicans C ipsum A fecit; multiplicans vero E fecit L: erit vt C ad Ex antecedente.



E, ita

E, ita A ad L, ut autem C ad E, ita G ad H: ergo & vt G ad H, ita A ad L. rursus quoniam E ipsum quidem D multiplicans fecit L, multiplicans vero F ipsum B fecit; vt D ad F, ita erit L ad B. sed vt D ad F, ita est H ad K. & ut igitur H ad K, ita L ad B. Ostensum autem est & vt G ad H, ita A ad L: quare ex æquali ut G ad K, ita A ad B. Sed G ad K proportionem habet compositam ex lateribus. ergo & A ad B proportionem habebit ex lateribus compositam. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO VI.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius aliquis ullum metietur.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D E, & A ipsum B non metiatur. Dico neque alium aliquem ullum metiri. At vero numeros A B C D E deinceps sese nó metiri, perspicuum est; neque enim A ipsum B metitur. Dico neque alium aliquem vllum metiri. Dico enim A non metiri ipsum C. nam quot sunt A B C, tot sumantur minimi numeri eandem, quam ipsi A B C proportionem habentes. & sint F G H. Quoniam igitur F G H in eadem sunt proportione, in qua A B C, atque est ipsorum A B C multitudo æqualis multitudini ipsorum F G H; erit ex æquali vt A ad C, ita F ad H. & quoniam est vt A ad B, ita F ad G, non metitur autem A ipsum B; neque F ipsum G metietur. non igitur F vnitas est; vnitas enim omnem numerum metitur. & sunt F H primi inter se. ergo neque F metitur ipsum H. atque est vt F ad H, ita A ad C. neq; igitur A ipsum C metietur. similiter demonstrabimus neque alium aliquem vllum metiri. quod demonstrare oportebat.

A 16
B ——— 24
C ——— 36
D ——— 54
E ——— 81
F . . . 4
G 6
H 9

1. huius

THEOREMA V. PROPOSITIO VII.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum; & secundum metietur.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales ABCD; & A ipsum D metiatur. Dico A ipsum quoque B metiri. si enim A non metitur ipsum B, neque alius aliquis vllum metietur. quod est absurdũ. ponitur enim A ipsum D metiri. metitur autem A ipsum D. ergo & A ipsum B metietur. quod demonstrasse oportuit.

A . . 2
B 4
C 8
D 16

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VIII.

Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter alius eandem, quam ipsi, proportionem habentes, cadent.

Inter

Inter duos enim numeros A B cadant numeri C D deinceps proportionales; & fiat vt A ad B, ita E ad F. Dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter A B, totidem & inter E F deinceps proportionales cadere. quot enim numeri sunt A C D B, totidem sumantur minimi numeri eandem, quam ipsi A C D B proportionem habentium G H K L. ergo extremi ipsorum G L primi inter se sunt. & quoniam A C D B ad ipsos G H K L in eadem sunt proportione; atque est ipsorum A C D B multitudo æqualis multitudini ipsorum G H K L; erit ex æquali vt A ad B, ita G ad L. vt autem A ad B, ita E ad F. & vt igitur G ad L, ita E ad F; & sunt G L primi. sed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem proportionem habent, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. ergo G æqualiter metitur ipsum E, atque L ipsum F. quoties autem G metitur ipsum E, toties & vterque ipsorum H K vtrumque M N metiatur. numeri igitur G H K L ipsos E M N F æqualiter metiuntur. ideoq; G H K L in eadem sunt proportione, in qua ipsi E M N F. at G H K L similiter in eadem sunt proportione, in qua A C D B. ergo A C D B in eadem proportione erunt, in qua E M N F. Sed A C D B sunt deinceps proportionales. ergo & E M N F deinceps proportionales erunt. quot igitur deinceps proportionales cadunt inter A B, totidē deinceps proportionales & inter E F cadent. quod demonstrare oportebat.

A . . 2
C 4
D 8
B . . . . 16 — 35. septimi.
G . 1
H . . 2 — 3. huius.
K 4
L . . . . 8 — 14. septimi.
E . . . 3
M . . . . . . 6 — 13. septimi.
N . . . . 12 — 21. septimi.
F 24

18. septimi.

THEOREMA VII. PROPOSITIO IX.

Si duo numeri inter se primi fuerint, & inter ipsos numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipsos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps proportionales cadent.

Sint duo numeri inter se primi A B; & inter ipsos deinceps proportionales cadant C D; exponaturq; vnitas E. Dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter ipsos A B, totidem & inter vtrumque ipsorum A B, & vnitatem E numeros deinceps proportionales cadere. sumantur enim duo quidem numeri minimi F G in eadem proportione, in qua sunt A C D B; tres vero H K L, & semper deinceps vno plures, quo ad fiat ipsorum multitudo æqualis multitudini ipsorum A C D B. sumantur, & sint M N X O. itaque manifestum est F se ipsum quidem multiplicantem fecisse H, multiplicantem vero H fecisse M: & G se ipsum quidē multiplicantem fecisse L; multiplicantem vero L fecisse O. & quoniam M N X O minimi sunt qui eãdem, quam ipsi F G proportionem habent; sunt autem & A C D B minimi eandem, quam F G proportionem habentium; atque est ipsorum M N X O multitudo æqualis multitudini ipsorum A C D B: erit vnusquisque ipsorum M N X O vnicuique ipsorum A C D B æqualis. æqualis igitur est M ipsi A, & O ipsi B. & quoniã F se ipsum multiplicans fecit H, metitur F ipsum H per vnitates, quæ sunt in F. — 10. com. not.

A 8
M 8
H . . . 4 — A
C . . . . 12 F . . 2
N . . . . 12 — 2. huius.
K 6
D . . . . 18 G . . . 3
X 18
L 9
O ———————— 27
B ———————— 27

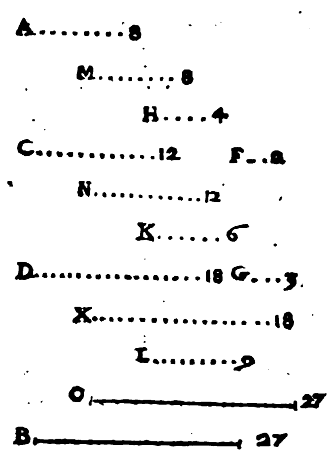
metitur

6.com. not. metitur autem & E vnitas numerum F per vnitates, quæ in ipso sunt. ergo E vnitas numerum F æqualiter metitur, atque F ipsum H. est igitur vt E vnitas ad numerum F, ita F ad H. rursus quoniam F multiplicans H fecit M, metitur H ipsum M per vnitates, quæ sunt in F; metitur autem & E vnitas numerum F per vnitates, quę in ipso sunt. æqualiter igitur E vnitas numerum F metitur, atque H ipsum M. ergo vt E unitas ad numerum F, ita H ad M. ostensum est autem & ut E unitas ad numerum F, ita esse F ad H. & ut igitur E unitas ad numerum F, ita F ad H, & H ad M. sed M est ęqualis ipsi A. quare vt E unitas ad numerum F, ita F ad H, & H ad M. Eadem ratione & ut E unitas ad numerum G, ita G ad L, & L ad B. quot igitur numeri deinceps proportionales cadunt inter A B, totidem & inter utrumque ipsorum A B, & vnitatem E numeri deinceps proportionales cadent. quod oportebat demonstrare.

Conuers. 20 diffi.

Conuer. 20 diffi.

B



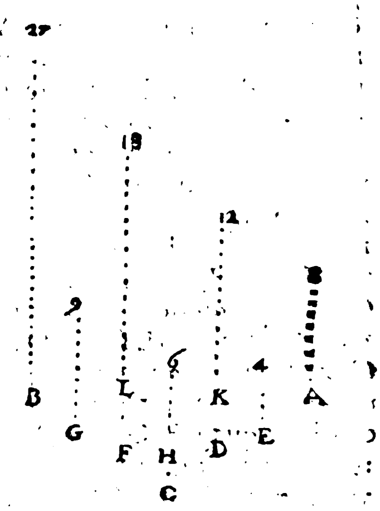
F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim duo minimi numeri F G in eadem proportione, in qua sunt A C D B] *ex problemate, quod nos ad 35 septimi conscripsimus.*

B Eadem ratione, & vt E unitas ad numerum G, ita G ad L, et L ad B] *quoniam enim G se ipsum multiplicans fecit L, metitur G ipsum L per vnitates, quae sunt in ipso G: metitur autem & E vnitas ipsum G per vnitates, quae in ipso sunt. ergo E vnitas aequaliter metitur numerum G, atque G ipsum L. quare vt E vnitas ad numerum G, ita G ad L. rursus quoniam G multiplicans L fecit O, numerus L ipsum O metietur per vnitates, quae sunt in G. sed E vnitas metitur ipsum G per vnitates, quae in ipso sunt. aequaliter igitur E vnitas metitur G, atque L ipsum O. ergo vt E vnitas ad G, ita est L ad O. vt autem E vnitas ad G, ita erat G ad L. vt igitur E vnitas ad G, ita G ad L, & L ad O, hoc est ad B, qui ipsi O est aequalis. quod oportebat demonstrare.*

THEOREMA VIII. PROPOSITIO X.

A Si inter duos numeros, & vnitatem deinceps proportionales numeri ceciderint, quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem cadunt numeri deinceps proportionales; totidem & inter ipsos numeri deinceps proportionales cadent.



Inter duos enim numeros A B, & vnitatem C numeri deinceps proportionales cadant D E, & FG. Dico quot inter vtrumque ipsorum A B, & vnitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter ipsos A B numeros deinceps proportionales cadere. numerus enim D ipsum F multiplicans faciat H: vterque autem ipsorum D F ipsum H multiplicans faciat vtrumque K L. & quoniam est ut C vnitas ad numerum D, ita D ad E, vnitas C ipsum D numerum

20. diffi.

rum æqualiter metietur, atque D ipsum E. Sed unitas C numerum D metitur per vnitates, quæ sunt in D. ergo & numerus D ipsum E per vnitates, quæ sunt in D metitur: ac propterea numerus D seipsum multiplicans fecit E. rursus quoniam vt vnitas C ad D numerum, ita est E ad A; vnitas C ipsum D numerum æqualiter metitur, atque E ipsum A. sed vnitas C ipsum D numerum metitur per vnitates, quæ sunt in D. quare et E ipsum A per unitates, quæ sunt in D metietur: ideoq; D ipsũ E multiplicans fecit A. Eadem ratione & F se ipsum multiplicans fecit G, multiplicans vero G ipsum B fecit. et quoniam D se ipsum multiplicans fecit E, multiplicans vero F fecit H; erit vt D ad F, ita E ad H. & ob eandem caussam ut D ad F, ita H ad G. vt igitur E ad H, ita H ad G. rursus quoniam D vtrumque ipsorum E H multiplicans fecit vtrumque A K, erit ut E ad H, ita A ad K. sed vt E ad H, ita D ad F. & ut igitur D ad F, ita A ad K. Rursus quoniam vterque D F ipsum H multiplicans vtrumque K L fecit, vt D ad F, ita est K ad L. vt autem D ad F, ita erat A ad K. & ut igitur A ad K, ita K ad L. præterea cum F vtrumque H G multiplicans vtrumque L B faciat, erit vt H ad G, ita L ad B. sed vt H ad G, ita D ab F. ergo & vt D ad F, ita L ad B. ostensum autem est & vt D ad F, ita & A ad K, & K ad L, & L ad B. quare A K L B numeri deinceps proportionales sunt. quot igitur inter vtrũque ipsorum A B, & vnitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter A B numeri deinceps proportionales cadent. quod demõstrare oportebat.

6. com. not.
9. com. not.
20. diffi.
9. com. not.
17. septimi.
17. septimi.
18. septimi.
17. septimi.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. XI.

Inter duos numeros quadratos vnus medius proportionalis cadit: et quadratus ad quadratum duplam proportionẽ habet eius, quam latus habet latus.

A....4
C..2
E......6
D...3
B.........9

Sint quadrati numeri A B; et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico inter ipsos A B vnum medium proportionalem cadere, et A ad B duplam proportionem habere eius, quam habet C ad D. numerus enim C multiplicans D faciat E. et quoniam A numerus quadratus est, cuius latus C; numerus C seipsum multiplicans fecit A. eadem ratione et D se ipsum multiplicans fecit B. Quoniam igitur C utrumque ipsorum C D multiplicans vtrumque A E fecit, vt C ad D, ita erit A ad E. Rursus quoniam C multiplicans D ipsum E fecit, et D se ipsum multiplicans fecit B, duo numeri C D vnum, & eundem numerum D multiplicantes ipsos E B fecerunt. est igitur vt C ad D, ita E ad B. sed ut C ad D, ita erat A ad E. ergo et vt A ad E, ita E ad B. inter numeros igitur A B vnus medius proportionalis E cadit. Dico et A ad B duplam habere proportionem eius, quam habet C ad D. Quoniam enim tres numeri proportionales sunt A E B, habebit A ad B duplam proportionem eius, quã habet A ad E. vt autem A ad E, ita C ad D. ergo A ad B duplam proportionem habet eius, quam C latus habet ad latus D. quod oportebat demonstrare.

18. diffin.
17. septimi.
18. septimi.
Diffi. 13.

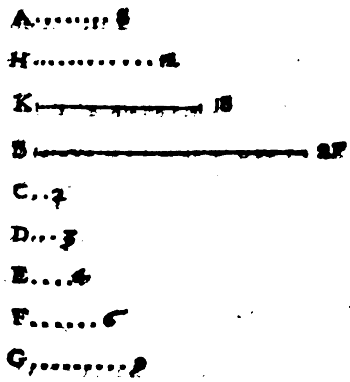
THEOREMA X. PROPOSITIO. XII.

Inter duos numeros cubos duo medij proportionales cadunt, et cubus ad cubum triplam habet proportionem eius, quam latus habet ad latus.

A
B

Sint numeri cubi A B; & ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico inter ipsos A B duos medios proportionales cadere; et numerum A ad B triplam habere proportionem eius, quam C habet ad D. numerus enim C se ipsum multiplicans faciat E, multiplicans vero D ipsum F faciat, et D se ipsum multiplicans fa-

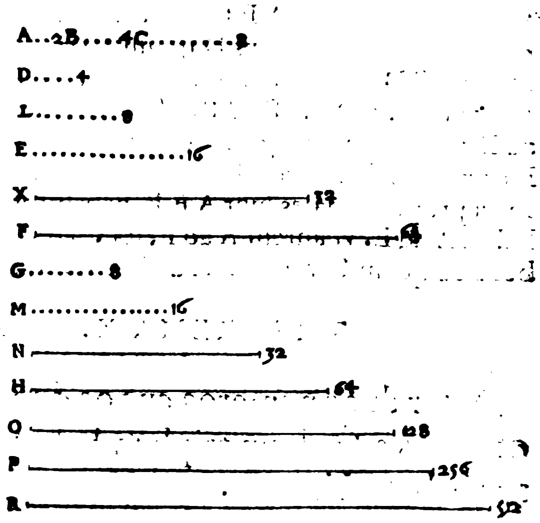
ciat G: et vterq; ipsorum C D multiplicãs F vtrumque H K faciat. Quoniam igitur cubus est A, & eius latus C, numerus C se ipsum multiplicans fecit E; multiplicans vero E ipsum A fecit. similiter & D se ipsum multiplicans fecit G; multiplicans vero G fecit ipsum B. & quoniam C vtrũque ipsorum C D mul-
17. septimi. tiplicans vtrumque E F fecit, vt C ad D, ita est E ad F. eadem ratione & ut C ad D, ita F ad G. Rursus quoniam C vtrumque ipsorum E F multiplicans fecit vtrumque A H, erit vt E ad F, ita A ad H. ut autem E ad F, ita C ad D. et vt igitur C ad D, ita A ad H. Rursus quoniam vterque ipsorum
18. septimi. C D multiplicans F vtrumque H K fecit, vt C ad D, ita erit H ad K. rursus quoniam D vtrumque F G multiplicans fecit vtrumque K B, erit vt F ad G, ita K ad B. ut autem F ad G, ita C ad D. & ut igitur C ad D, ita K ad B. ostensum autem est vt C ad D, ita esse A ad H, & H ad K. ergo vt A ad H, ita H ad K, & K ad B: ac propterea inter ipsos A B duo H K medij proportionales cadunt. Dico & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet C ad D. Quoniam enim quattuor numeri
11. diffin. proportionales sunt A H K B, habebit A ad B triplam proportionem eius, quã habet A ad H. vt autem A ad H, ita C ad D. ergo A ad B triplam habet proportionem eius, quam C habet ad D. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales, & vnusquisque se ipsum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipsis proportionales erunt. et si positi à principio numeri factos multiplicantes alios faciant, et ipsi proportionales erunt. et semper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcumque numeri proportionales A B C; sitq; ut A ad B, ita B ad C. & ipsi A B C se ipsos multlplicantes faciant D E F: ipsos uero D E F multidlicantes faciant G H K. Dico nnmeros DEF & G H K deinceps proportionales esse. numerus enim A ipsum B multiplicans faciat L; vterque autem ipsorum A B multiplicans L faciat vtrumque M N. et rursus B quidem multiplicans C ipsum X faciat; vterque vero ipsorum B C multiplicans X faciat vtrumque O P.
A similiter ijs, quę dicta sunt, ostendemus DLE, & G M N H deinceps proportionales esse in proportione, quæ
B est A ad B: & adhuc E X F, & H O P K deinceps esse proportionales in proportione B ad C. atque est vt A ad B, ita B ad C. ergo & D L E in eadem sunt proportione, in qua E X F: & præterea G M N H in eadem proportione, in qua H O P K. atq; ipsorum quidem D L E



multitudo

multitudo multitudini ipsorum EXF æqualis. multitudo autē ipsorum GMNH æqualis multitudini ipsorum HOPK. ex æquali igitur vt D ad E, ita E ad F. vt au- 14. septimi.
tem G ad H, ita H ad K. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter ijs, quæ dicta sunt, ostendemus D L E, & GMNH deinceps proportionales esse in proportione, quæ est A ad B] *quoniam enim A duos numeros A B multiplicās fecit D L, erit vt A ad B, ita D ad L. rursus quoniam B duos numeros A B multiplicans ipsos L E fecit; vt A ad B, ita erit L ad E. sed vt A ad B, ita est D ad L. vt igitur A ad B, ita est & D ad L, & L ad E. quare sequitur D L E deinceps proportionales esse in eadem proportione, in qua est A ad B. & quoniam A duos numeros D L multiplicans fecit ipsos G M, erit vt D ad L, hoc est vt A ad B, ita G ad M. rursus quoniam duo numeri A B multiplicantes L ipsos M N fecerunt, vt A ad B, ita erit M ad N. Præterea cū B duos numeros L E multiplicans faciat NH, erit vt L ad E, videlicet vt A ad B, ita N ad H. Sed vt A ad B, ita erat & G ad M, & M ad N. vt igitur G ad M, ita M ad N, & N ad H. ergo C M N H deinceps proportionales sunt in eadē proportione, in qua est A ad B.* A 17. septimi. 18. septimi.

Et adhuc E X F, & H O P K deinceps esse proportionales in proportione B ad C] *hoc eodem, quo supra, modo ostendemus. numerus enim B duos numeros B C multiplicans fecit ipsos N X, & numerus C duos numeros BC multiplicans ipsos XF fecit. ergo vt B ad C, ita est & E ad X, & X ad F. Præterea B duos numeros EX multiplicans fecit H O: & duo numeri BC multiplicantes X fecerunt ipsos O P. rursus C duos numeros XF multiplicans ipsos P K fecit. quare vt E ad X, hoc est vt C ad B, ita H ad O: & rursus vt C ad B, ita O ad P. præterea vt X ad F, hoc est vt B ad C, ita est P ad K. vt igitur B ad C, ita H ad O, & O ad P, & P ad K. ex quibus constat E X F, & HOPK deinceps proportionales esse in ea proportione, in qua est B ad C.* B C

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum, & latus latus metietur; & si latus metiatur latus, & quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A B, quorum latera C D, & A ipsum B metiatur. Dico & latus C ipsum D metiri. numerus enim C multiplicans D ipsum E faciat. ergo A E B deinceps proportionales sunt in proportione, quæ est C ad D. Quoniam igitur A E B deinceps sunt proportionales, metiturq; A ipsum B; & A ipsum E metietur. atque est vt A ad E, ita C ad D. ergo & C metitur ipsum D. sed C metiatur ipsum D. Dico & A ipsum B metiri. Ijsdem enim constructis similiter ostendemus A E B deinceps proportionales esse in proportione C ad D. & quoniam est vt C ad D, ita A ad E. metitur autem C ipsum D. & A ipsum E metietur. & sunt A E B deinceps proportionales, metitur igitur & A ipsum B, si igitur numerus quadratus. & reliqua. quod oportebat demonstrare. Ex demostratis in huius. 7. huius. *

A....4
E........8
B................16
C..2
D....4

F. C. COMMENTARIVS.

Metitur igitur & A ipsum B] *quoniam enim A E B deinceps proportionales sunt; metiturq; A ipsum E; & E ipsum B metietur. quare A ipsum B metiatur necesse est ex duodecima communi notione.* * 20. diff.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XV.

Si numerus cubus metiatur cubum numerum, & latus latus me tietur: & si latus metiatur latus, & cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B metiatur: & ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico C ipsum D metiri. numerus enim C se ipsum multiplicans faciat E, & multiplicãs D faciat F: D vero se ipsum multiplicãs faciat G, & vterque ipsorum C D multiplicans F vtrumque H K faciat. manifestum est E F G, & A H K B deinceps proportionales esse in proportione, quę est C ad D. & quoniã A H K B deinceps proportionales sunt, metiturq; A ipsum B; & A ipsum H metietur. est aũt vt A ad H, ita C ad D. ergo C ipsũ D metietur. sed C metiatur D. Dico & A ipsum B metiri. ijsdẽ enim cõstructis similiter ostẽdemus A H K B deinceps proportionales esse in proportione C ad D. & quoniã C ipsum D metitur, estq; vt C ad D, ita A ad H; & A metitur ipsum H. quare & ipsum B metietur. quod demonstrare oportebat.

A (margin) 7.huius. B (margin)

A 8
H 16
K ———————— 32
B ———————————————— 64
C .. 2
D 4
E 4
F 8
G 16

F. C. COMMENTARIVS.

A Manifestum est E F G, & A H K B deinceps proportionales esse in proportione, quæ est C ad D] *hoc similiter vt in 13 demonstrabimus.*

B Et A metitur ipsum H. quare & ipsum B metietur] *quoniam enim est vt A ad H, ita H ad K; metiturq; A ipsum H; & H metietur ipsum K. quare & A ipsum K metietur. rursus quoniam vt A ad H, ita est K ad B, & K ipsum B metietur. ergo & A ipsum B metiatur necesse est.* (20.diffi. 12.com.not.)

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XVI.

Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur: & si latus non metiatur latus, neque quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A B, quorum latera C D. & A non metiatur ipsum B. Dico neque C ipsum D metiri. si enim metitur C ipsum D, & A ipsum B metietur. nõ metitur autem A ipsum B. non igitur C ipsum D metietur. sed C non metiatur D. Dico neque A ipsum B metiri. Si enim A metitur ipsum B, & C ipsum D metietur: atqui C nõ metitur D; neque igitur A ipsum B metietur. quod demonstrare oportebat. (14.huius.)

A 9
B 16
C ... 3
D 4

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVII.

Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur. & si latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B non metiatur: & ipsius quidẽ A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico C ipsum D nõ metiri.

A 8
B 27
C .. 2
D ... 3

si enim

ſi enim C metitur ipſum D, & A ipſum B metietur. atqui non metitur A ipſum B. non igitur C ipſum D metietur. Sed non metiatur C ipſum D. Dico neque A ipſum B metiri. ſi enim A ipſum B metitur, & C metietur ipſum D. non metitur autem C ipſum D. neque igitur A ipſum B metietur. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Inter duos ſimiles planos numeros vnus medius proportionalis cadit: & planus ad planum duplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

A...... 6
G............12
B......................24
C..2
D...3
E....4
F......6

Sint duo numeri plani inter ſe ſimiles A B; & ipſius quidem A latera ſint C D; ipſius vero B latera E F. & quoniam ſimiles plani ſunt, qui latera habent proportionalia; erit ut C ad D, ita E ad F. Dico inter ipſos A B vnum medium proportionalem cadere: & A ad B duplam proportionem habere eius, quam latus homologum C habet ad homologum latus E, vel D ad F. quoniam enim eſt vt C ad D, ita E ad F; & permutando vt C ad E, ita erit D ad F. & quoniam planus numerus eſt A, cuius latera CD, numerus D ipſum C multiplicans fecit A. Eadem ratione, & E multiplicans F ipſum B fecit. numerus autem D ipſum E multiplicans faciat G. & cum D ipſum quidem C multiplicans faciat A; multiplicans vero E faciat G, erit vt C ad E, ita A ad G. ſed vt C ad E, ita D ad F. & vt igitur D ad F, ita A ad G. rurſus quoniam E ipſum D multiplicans fecit G, multiplicans vero F ipſum B fecit, vt D ad F, ita erit G ad B. oſtenſum eſt aūt & vt D ad F, ita eſſe A ad G. & vt igitur A ad G, ita G ad B. ergo A G B deinceps proportionales ſunt; ac propterea inter A B vnus medius proportionalis cadit. Dico & A ad B duplam proportionem habere eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt quam C ad E, vel D ad F. Quoniam enim A G B deinceps proportionales ſunt, A ad B duplam proportionem habebit eius, quam habet ad G. atque eſt vt A ad G, ita C ad E, & D ad F. ergo & A ad B duplam proportionem habet eius, quam C habet ad E, vel D ad F. quod oportebat demōſtrare.

21. diffi.

17. ſeptimi.

Diffi. 5.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

A........ 8
N............ 12
X................ 18
B........................ 27
C..2
D..2
E..2
F...3
G...3
H...3
K....4
M...... 6
L......... 9

Inter duos ſimiles ſolidos numeros duo medij proportionales cadunt; & ſolidus ad ſolidum triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri ſolidi inter ſe ſimiles A B, & ipſius quidem A latera ſint C D E; ipſius uero B latera F G H, & quoniam ſimiles ſolidi ſunt, qui latera habent proportionalia, erit vt C ad D, ita F ad G. vt autem D ad E, ita G ad H. Dico inter ipſos A B duos medios proportionales cadere, & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet C ad F, & D ad G, & adhuc D ad H. numerus enim C ipſum D multiplicans faciat K, F uero multiplicans G ipſum L faciat. & quoniam C D in eadem ſunt proportione, in qua F G: & ex ipſis C D

21. diffi.

fit

.fit K; ex ipsis vero F G fit L, erunt K L similes plani
Ex antecedente. numeri.quare inter ipsos vnus medius proportionalis cadit .sit is numerus M.ergo M fit ex D F,vt in precedenti theoremate . est igitur vt K ad M, ita M ad L. & quoniam D ipsum C multiplicans fecit K,multipli-
17.septimi. cans vero F.fecit M;erit vt C ad F , ita K ad M.sed vt K ad M,ita M ad L . ergo K M L deinceps proportionales sunt in proportione C ad F . & quoniã vt C ad D, ita F ad G,erit permutando vt C ad F,ita D ad G.rursus quoniam vt D ad E, ita G ad H,& permutãdo erit vt D ad G , ita E ad H . ergo K M L deinceps proportionales sunt in proportione C ad F , & D ad G , & E ad H.vterque autem ipsorum E H multiplicans M faciat vtrumq; N X.& quoniam solidus est A,latera autem ipsius C D E,numerus E eum,qui fit ex C D multiplicans fecit A:qui vero fit ex C D est K. ergo E multiplicans K ipsum A fecit . Eadem ratione & H multi-
A plicans L,qui fit ex F G , fecit ipsum B. & quoniam E ipsum K multiplicans fecit A.sed & multiplicans M fecit N;erit vt K ad M,ita A ad N. vt autem K ad M, ita C ad F,& D ad G,& adhuc E ad H.ergo vt C ad F, & D ad G,& E ad H,ita A ad N . rursus quoniam vterque ipsorum E H multiplicans M fecit vtrumque N X,erit vt E ad H,ita N ad X.sed vt E ad H, ita C ad F , & D ad
B G.est igitur vt C ad F,& D ad G,& E ad H,ita & A ad N,& N ad X.rursus quoniam H multiplicans M fecit ipsum X;sed & multiplicans L fecit B : erit vt M ad L , ita X ad B.sed vt M ad L,ita C ad F,& D ad G,& E ad H.& vt igitur C ad F,& D ad G,& E ad H,ita non solum X ad B,sed & A ad N, & N ad X.ergo A N X B deinceps proportionales sunt in dictis laterum proportionibus. Dico & A ad B triplam proportionem habere eius , quam habet latus homologum ad homologum latus, hoc est quam habet numerus C ad F,vel D ad G,& E ad H.Quoniam enim quattuor nume-
Diffi.24. ri proportionales sunt A N X B,habebit A ad B triplam proportionem eius , quam habet A ad N.sed vt A ad N,ita ostensus est & C ad F,& D ad G, & E ad H . ergo A ad B triplam habet proportionem eius,quam latus homologum habet ad homologum latus , hoc est quã C habet ad F,& D ad G,& E ad H. quod demonstrare oportebat.

A 8
N 12
X 18
B 27
C .. 2
D .. 2
E .. 2
F ... 3
G ... 3
H ... 3
K 4
M 6
L 9

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam E ipsum K multiplicans fecit A] *est enim K,qui fit ex C D, & E multiplicans eum,qui fit ex C D ipsum A fecit.*

B Rursus quoniam H multiplicans M fecit ipsum X , sed & multiplicans L fecit B] *est enim L,qui fit ex F G,& H eum,qui fit ex F G multiplicans ipsum B fecit.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XX.

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat, numeri similes plani erũt.

Inter duos enim numeros A B vnus medius proportionalis cadat C . Dico numeros A B similes planos esse.
A Sumantur enim minimi numeri D E,eandem , quam ipsi A C B proportionem habentium . est igitur vt D ad E, ita A ad C.vt autem A ad C,ita C ad B.ergo & vt D ad E
20.diffi. ita C ad B . æqualiter igitur D ipsum A metitur , atque E ipsum C.ergo quoties D metitur A,tot vnitates sint in

A 8
C 12
B 18
D ... 4
E 6
F . 2
G .. 3

F pro-

F; propterea q; F multiplicans D ipsum A fecit; multiplicans vero E fecit C. quare A planus numerus est, cuius latera D F. rursus qm̃ D E minimi numeri sunt, eandẽ quã C B proportionẽ habẽtiũ; æqualiter D ipsum C metitur, & E ipsum B. quoties aũt E ipsũ B metitur, tot vnitates sint in G. ergo E ipsũ B metitur per eas, quæ sunt in G vnitates. quare G ipsum E multiplicãs fecit B: ideoq; B numerus planus est, cuius latera E G. ergo numeri A B sunt plani. Dico & similes esse. Quoniam enim uterque ipsorum F G multiplicans E vtrumque C B fecit, ut F ad G, ita erit C ad B. ut aũt C ad B. ita D ad E. & ut igitur D ad E, ita F ad G. quare A B similes plani sunt; cum ipsorum latera sint proportionalia. id quod demonstrare oportebat.

9. com. not. — 21. septimi. — 9. com. not. — 18. septimi. — B

F. C. COMMENTARIVS.

Sumantur enim minimi numeri DE, eandem, quam ipsi A C B proportionem habentium] *ex eo, quod additum est ad 35 septimi.* A

Quare A B similes plani sunt, cum ipsorum latera sint proportionalia] *quoniam enim est vt D ad E, ita F ad G, erit permutando vt D ad F, ita E ad G. & sunt D F latera ipsius A, & E G latera ipsius B. cum igitur plani A B latera habeant proportionalia, similes inter se erunt.* B

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant, numeri similes solidi erunt.

Inter duos enim numeros A D duo medij proportionales cadant C D. Dico ipsos A B similes solidos esse. sumantur enim minimi numeri tres, eandem quã A C D B proportionẽ habentiũ, qui sint EFG. extremi igitur ipsorum E G primi inter se sunt. & quoniam inter EG unus medius proportionalis cecidit F, erunt numeri E G similes plani. sint ipsius quidem E latera H K; ipsius uero G latera L M. manifestum est ex antecedente E F G deinceps proportionales esse in proportione H ad L, & in proportione K ad M. & quoniam E F G minimi sunt, eandem, quam ACD proportionem habentium, erit ex æquali ut E ad G, ita A ad D: & sunt E G primi, sed primi & minimi. minimi uero eos, qui eandem habent proportionem æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorẽ, hoc est antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo E ipsum A æqualiter metitur, atque G ipsum D. quoties autem E metitur A, tot unitates sint in N. ergo N ipsum E multiplicãs fecit A. sed E fit ex H K: ac propterea N eum, qui fit ex H K multiplicãs ipsum A fecit. solidus igitur est A, cuius latera H K N. Rursus quoniam E F G minimi sunt, eandem quam ipsi C D B proportionem habentium, E ipsum C æqualiter metitur, atque G ipsum B. & quoties G metitur B, tot unitates sint in X: ergo G ipsum B metitur per eas, quę sunt in X unitatis; ideoq; X multiplicans G ipsum B fecit. at G fit ex L M. ergo X eum, qui fit ex L M multiplicans fecit B; multiplicans vero E ipsum C fecit. solidus igitur est B, & eius latera L M X. quare A B solidi sunt. Dico etiam similes esse. quoniam enim N X multiplicantes E ipsos A C fecerunt, ut N ad X, ita erit A ad C, hoc est E ad F. sed vt E ad F, ita H ad L, & K ad M. & vt igitur H ad L, ita K ad M, & N ad X. sunt autem C

A 8
C 12
D 18
B 27
E ... 4
F 6
G 9
H .. 2
K .. 2
N .. 2
L .. 3
M .. 3
X ... 3

A — 3. huius. — Ex antecedenti. — B — 23 septimi. — 21. septimi. — 9. com. not.

HKN

HKN latera ipsius A, & L M X latera ipsius B. ergo A B similes solidi erunt. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim minimi numeri tres eandem, quam ACDB proportionem habentium] *inueniantur primum duo minimi numeri eandem quam A C D B proportionem habentium ex ijs, quae nos ad 35 septimi tradidimus: deinde ex 2. huius inueniantur tres minimi numeri, qui eandem proportionem habeant; vel ex 35 septimi sumantur tres minimi numeri eandem, quam ACD proportionem habentium.*

B Manifestum est ex antecedente E F G deinceps proportionales esse in proportione H ad L, & in proportione K ad M] *quoniam enim E G similes plani sunt, ipsorum latera eandem habent proportionem. est igitur vt H ad K, ita L ad M: & permutando vt H ad L, ita K ad M. & K multiplicans L faciat F. itaque quoniam K ipsum H multiplicans fecit E; multiplicans vero L ipsum F fecit, vt H ad L, ita erit E ad F. rursus quoniam L ipsum K multiplicans fecit F, multiplicans vero M ipsum G fecit, vt K ad M, ita est F ad G. ostensum est autem vt H ad L, ita esse K ad M. ergo & vt E ad F, ita F ad G: ac propterea E F G deinceps proportionales sunt in proportione H ad L, & in proportione K ad M.*

17. septimi.

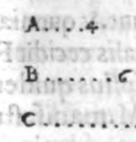
C Quoniam enim NX multiplicantes E ipsos A C fecerunt, ut N ad X, ita erit A ad C] *etenim E ipsum C aequaliter metitur, atque G ipsum B, vt ostensum est. quoties autem G metitur B, tot vnitates sunt in X. ergo X multiplicans E ipsum C fecit.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit quadratus, & tertius quadratus erit.

Sint tres numeri deinceps proportionales A B C; sitq; primus A quadratus. Dico & tertium C quadratum esse. Quoniam enim inter A C unus medius proportionalis cadit B, erunt A C similes plani. sed A est quadratus, ergo & C quadratus erit. quod oportebat demonstrare.

20. huius.

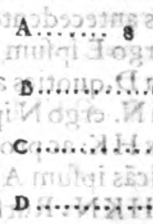


THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

Si quattuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit cubus, & quartus cubus erit.

Sint quattuor numeri deinceps proportionales A B C D, & A sit cubus. Dico & D cubum esse. Quoniam enim inter A D duo medij proportionales cadunt B C, erunt A D similes solidi. est autem A cubus; ergo et D cubus erit. quod demonstrare oportebat.

21. huius.



THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIIII.

Si duo numeri inter se proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit.

Duo enim numeri A B inter se proportionem habeant, quam numerus quadratus C ad quadratum numerum D: sitq; A quadratus. Dico & B quadratum esse.

quoniam

quoniam enim CD quadrati sunt, erunt C D similes plani; ideoq; inter ipsos CD vnus medius proportionalis cadit. est autem vt C ad D, ita A ad B. quare etiam inter A B cadit vnus medius proportionalis. estq; A quadratus. ergo & B quadratus erit.

18. huius.
8. huius.
22. huius.

A....4
......6
B.........9
C..............16
.......................24
D..................................36

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri inter se proportionem habeant, quam numerus cubus ad cubum numerum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit.

Duo enim numeri A B inter se proportionem habeant, quam cubus numerus C ad numerũ cubum D; sitq; A cubus. Dico & B cubum esse. Quoniam enim CD cubi sunt, erunt CD similes solidi. idcircoq; inter ipsos duo medij proportionales cadent: quot autem inter C D cadunt medij proportionales, totidem cadent & inter eos, qui eandem, quam ipsi proportionem habent. ergo inter A B duo medij cadent proportionales. cadant E F. quoniam igitur quattuor numeri A E F B deinceps proportionales sunt, estq; A cubus; & B cubus erit. quod oportebat demonstrare.

19. huius.
8 huius.
23. huius.

A........8
E............12
F..................18
B —————— 27
C —————— 64
—————— 96
—————— 144
D —————— 216

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVI.

Similes plani numeri inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Sint similes plani numeri A B. Dico A ad B proportionem habere, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Quoniam enim A B similes plani sunt, inter eos vnus medius cadit proportionalis. cadat, sitq; C: & sumantur minimi numeri, eandem, quam A B C proportionẽ habentiũ D E F. ergo ipsorum extremi D F quadrati sunt. & quoniam est vt D ad F, ita A ad B; et sunt DF quadrati: habebit A ad B proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. quod demonstrare oportebat.

18. huius.
35. septimi.
Cor. 2. huius.

A......6
C............12
B........................24
D.1
E..2
F....4

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & huius conuersum verum est. quod hoc modo demonstrabimus.

Plani numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, inter se similes sunt.

Sint plani numeri A B, qui proportionem habeant, quã quadratus numerus C ad quadratum numerum D. Dico eos inter se similes esse. Quoniam enim CD quadrati sunt, erunt similes plani. 18. huius. *quare inter eos cadit vnus medius proportionalis:* 8. huius. *atque est vt C ad D, ita A ad B. ergo & inter ipsos A B vnus medius proportionalis cadit.* 20. huius. *numeri igitur AB similes plani sunt. quod demonstrare oportebat.*

A...... 6
B........................ 24
C. 1
D.... 4

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

Similes solidi numeri inter se proportionem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Sint similes solidi numeri A B. Dico A ad B proportionem habere, quam numerus cubus ad cubum numerum. Quoniã enim A B similes solidi sunt, inter ipsos duo medij cadent proportionales. (19. huius.) cadãt C D; & sumantur minimi numeri, qui eãdem, quam A C D B proportionem habeant, ipsis multitudine æquales EFCH. (35. septimi.) ergo eorum extremi EH cubi sunt. (Corol. 2. huius.) atque est vt E ad H, ita A ad B. habet igitur A ad B proportionem, quam numerus cubus ad cubum numerum. quod demonstrare oportebat.

A................ 16
C........................ 24
D.................................... 36
B.. 54
E........ 8
F............ 12
G.................. 18
H........................... 27

F. C. COMMENTARIVS.

Huius etiam conuersum verum est. quod ita demonstratur.

Solidum numeri, qui proportionem habent, quam numerus cubus ad numerum cubum, inter se similes sunt.

Sint solidi numeri A B proportionem habentes, quam numerus cubus C ad numerum cubum D. Dico eos inter se similes esse. Quoniã enim C D cubi sunt, erũt similes solidi; (19. huius.) *ac propterea inter eos cadut duo medij proportionales.* (8. huius.) *est autem vt C ad D, ita A ad B. quare etiam inter ipsos A B duo medij proportionales cadent.* (21 huius.) *similes igitur solidi sunt numeri A B. quod demonstrare oportebat.*

A................ 16
B.. 54
C........ 8
D........................... 27

OCTAVI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER NONVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI DVO similes plani numeri se se multiplicantes aliquem fecerint, factus quadratus erit.

Sint duo similes plani numeri A B, & A ipsum B multiplicans faciat C. Dico C quadratum esse. numerus enim A se ipsum multiplicans faciat D. ergo D quadratus est. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipsum C fecit; vt A ad B, ita erit D ad C. 17. septimi. Et quoniam A B similes plani sunt, inter ipsos vnus medius proportionalis 18. octaui. cadet. si autem inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipsos cadunt, totidem cadent & inter eos, qui eandem habent proportionem. 8. octaui. quare & inter D C vnus medius proportionalis cadit. atque est D quadratus. ergo & C quadratus erit. 22. octaui. quod oportebat demonstrare.

A....4
E......6
B........9
D...............16
F————————24
C——————————36

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duo numeri se multiplicantes quadratum numerum efficiant, similes plani erunt.

Duo enim numeri A B se se multiplicantes quadratum numerum C efficiant. Dico A B similes planos esse. numerus enim A se ipsum multiplicans faciat D. ergo D quadratus est. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipsum C fecit; vt A ad B, ita erit D ad C. 17. septimi & quoniam D quadratus est, sed & C; erũt D C similes plani. quare 18. octaui.

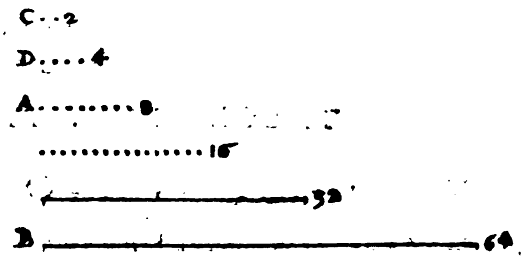
A...3
.....6
B.............12
D.........9
————————18
C——————————36

8.octaui. Inter ipsos vnus medius proportionalis cadit; atque est vt D ad C, ita A ad B. ergo & inter A B cadet vnus medius proportionalis. si autem inter duos numeros vnus
10. octaui. medius proportionalis cadat, erunt similes plani. ergo A B similes plani sunt. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si cubus numerus se ipsum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

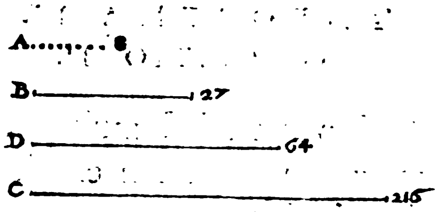
Cubus enim numerus A se ipsum multiplicans faciat B. Dico B cubum esse. sumatur enim ipsius A latus C, & C se ipsum multiplicans faciat D. manifestũ est C multiplicantem D facere ipsum A. & quoniam C se ipsum multiplicans fecit
10.com.not. D, metitur C ipsum D per vnitates, quæ in ipso sunt. sed & vnitas
6.com.not. metitur C per eas, quę in ipso sunt vnitates. est igitur vt vnitas ad C,
Conuer. 20. diffi. ita C ad D. rursus quoniam C multiplicans D ipsum A fecit, metitur D ipsum A per unitates, quæ sunt in C. metitur autem & vnitas ipsum C per vnitates, quæ in ipso sunt. ergo vt unitas ad C, ita D ad A. sed vt vnitas ad C, ita C ad D. vt igitur vnitas ad C, ita C ad D, & D ad A: ideoq; inter vnitatem, & numerum A duo medij deinceps proportionales cadunt CD. rursus quoniã A se ipsum multiplicans fecit B & A ipsum B metitur per vnitates, quæ in ipso sunt. metitur autem & vnitas ipsum A per vnitates, quæ sunt in ipso. est igitur vt vnitas ad A, ita A ad B. sed inter vnitatem, & A cadunt duo medij proportio-
8.octaui. nales. ergo & inter A & B duo medij proportionales cadent. quòd si inter duos nu-
23. octaui. meros cadant duo medij proportionales, primus autem sit cubus, & quartus cubus erit. atque est A cubus, ergo & B cubus erit. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si numerus cubus cubum numerum multiplicãs faciat aliquẽ, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A cubum numerum B multiplicans ipsum C faciat. Dico C cubum esse. numerus enim A se ipsum
Ex antecedente. multiplicans faciat D. ergo D cubus est. &
quoniam A se ipsum multiplicans fecit D;
17. septimi. multiplicans vero B ipsum C fecit, vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam A B cubi sunt, erunt similes solidi; ac propterea in-
8.octaui. ter ipsos cadent duo medij proportionales. quare & inter D C duo medij propor-
23. octaui. tionales cadent. estq; D cubus. ergo & C cubus erit.

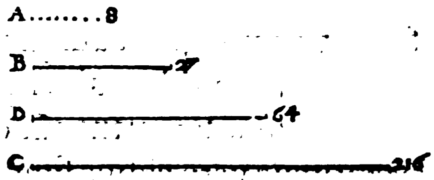


THEOREMA. V. PROPOSITIO V.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat cubum, & multiplicatus cubus erit.

Cubus

Cubus enim A numerũ aliquem B multiplicans faciat cubum C. Dico B cubum esse. numerus enim A se ipsum multiplicãs faciat D. ergo D cubus est. & quoniam A se ipsum quidem multiplicans fecit D; multiplicans vero B ipsum C fecit, vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam D C cubi sunt, similes sunt solidi; ac propterea inter ipsos cadunt duo medij proportionales: atque est vt D ad C, ita A ad B. ergo & inter A B duo medij proportionales cadent estq; A cubus. Ergo & B cubus erit. quod oportebat demonstrare.



Ex antecedente.
17. septimi.
8. octaui.
23. octaui.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex duobus precedentibus & illa sequuntur.

Si cubus numerus numerum non cubum multiplicans faciat aliquem, factus nõ erit cubus.

Si enim factus sit cubus, & multiplicatus cubus erit, ex antecedente. quod non ponitur.

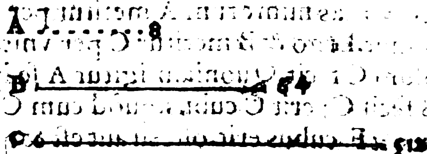
Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat numerum non cubum & multiplicatus non erit cubus.

Si enim multiplicatus fuerit cubus, & factus cubus erit, ex 4. huius. quod non ponitur.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, & ipse cubus erit.

Numerus enim A se ipsum multiplicãs cubum B faciat. Dico & A cubum esse. numerus enim A multiplicans B faciat C. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit B. multiplicans vero B ipsum C fecit, erit C cubus. & quoniam A se ipsum quidem multiplicans fecit B; multiplicãs uero B fecit C, vt A ad B, ita erit B ad C. quod cum B C cubi sint, similes solidi erunt: ideoq; inter ipsos cadent duo medij proportionales. & est ut B ad C, ita A ad B. quare & inter A B duo medij proportionales cadunt. atque est B cubus, ergo & A cubus. ergo & A cubus erit. quod oportebat demonstrare.

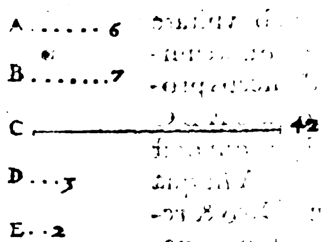


Diffi. 19.
17. septimi.
19. octaui:
23. octaui.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicãs, quempiam faciat, factus solidus erit.

Cõpositus enim numerus A numerum aliquem B multiplicans ipsum C faciat. Dico C solidũ esse. Quoniã enim A cõpositus est, eũ numerus aliquis metietur. metiatur D. & quoties D ipsum A metitur, tot unitates sint in E. ergo E multiplicans D fecit A. & quoniam A ipsum B multiplicans fecit C; estq; A, qui fit ex D E; numerus, qui fit ex D E, ipsum B multiplicans fecit C. ergo B multiplicans eum, qui fit ex D E, ipsum C fecit. ac propterea C solidus est, cuius latera D E. quod oportebat demonstrare.



13. diff.
9. com. not.
16. septimi
Diffi. 17.

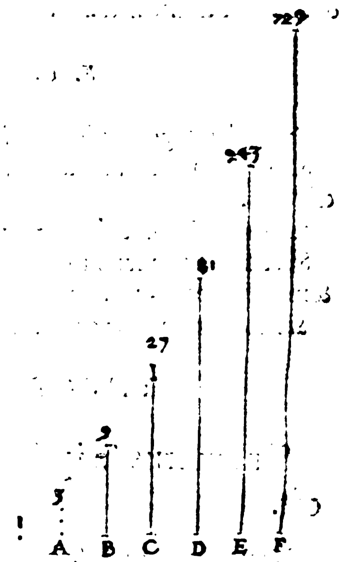
THEO-

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: quartus aũt est cubus, & duos intermittẽtes omnes: septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

Sint ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D E F. Dico tertium quidẽ ab vnitate B quadratum esse, & vnum intermittentes omnes: quartum autem C cubum, & duos intemittentes omnes; septimum vero F cubum simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes. Quoniam enim vt vnitas ad A, ita A ad B, vnitas æqualiter metitur numerum A, atque A ipsum B. sed vnitas metitur A per vnitates, quæ in ipso sunt. Ergo & A ipsum B, per vnitates, quę sunt in A metitur. quare A se ipsum multiplicans fecit B. quadratus igitur est B, & quoniam B C D deinceps proportionales sunt; estq; B quadratus; & D quadratus erit. Eadem ratione erit & F quadratus. similiter demonstrabimus & vnum intermittentes omnes quadratos esse. Dico & quartum ab vnitate videlicet C esse cubum, & duos intermittentes omnes. Quoniam enim est vt vnitas ad A, ita B ad C; vnitas numerum A æqualiter metitur, atque B ipsum C. sed vnitas numerum A metitur per vnitates, quę in A sunt. Ergo & B metitur C per vnitates, quę sunt in A; & ob id A multiplicans B ipsum C fecit. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit B; multiplicans vero B fecit C; erit C cubus. quòd cum C D E F deinceps proportionales sint; sitq; C cubus; & F cubus erit. ostẽsũ aũt est & quadratũ esse. septimus igitur ab vnitate F, & cubus est, & quadratus. Similiter quoque demonstrabimus quinque intermittentes omnes & cubos, & quadratos esse. quod demonstrare oportebat.

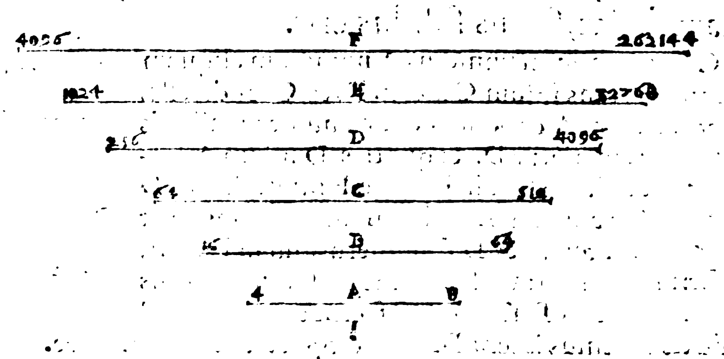
Diffin. 20. 6. com. not. 22. octaui. 20. diffin. 6. com. not. 9. com. not. 19. diffi. 23. octaui.



THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem sit quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem sit cubus, & reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab vnitate numeri quotcumque deinceps proportionales A B C D E F, & qui post vnitatem A sit quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos esse: tertiũ quidem ab vnitate



B esse

B esse quadratum,& vnum intermittentes omnes,demonstratum iam est.sed & reliqui omnes quadrati erunt. Quoniam enim A B C deinceps sunt proportionales; estq; A quadratus: & C quadratus erit. rursus quoniam B C D deinceps proportionales sunt; est autem B quadratus: & D quadratus erit.similiter ostendemus & reliquos omnes quadratos esse.sit autem A cubus.Dico & reliquos cubos esse.quartum quidem ab vnitate C esse cubum, & duos intermittentes omnes, iam demonstratum est.sed & reliqui omnes cubi erunt. Quoniam enim est vt vnitas ad A, ita A ad B,vnitas numerum A æqualiter metitur,atque A ipsum B. sed vnitas metitur numerum A per vnitates,quæ sunt in ipso. quare & A numerum B metitur per vnitates,quæ in ipso sunt.ergo A seipsum multiplicans fecit B,atque est A cubus.si autem cubus numerus se ipsum multiplicans fecerit aliquem,factus cubus erit. Ergo B est cubus.& quoniam quattuor numeri A B C D deinceps proportionales sunt, estq; A cubus;& D cubus erit. Eadem ratione & E est cubus,& similiter reliqui omnes cubi sunt.quod demonstrare oportebat.

Marginal notes: A (beside "proportionales sunt"); 20.diffin. (beside "A ad B"); 2 huius. (beside "tem cubus numerus"); B (beside "estq; A cubus").

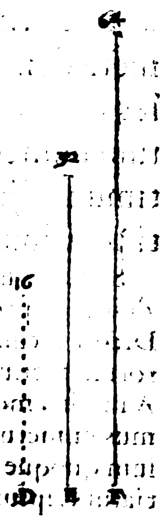
F. C. COMMENTARIVS.

Rursus quoniam B C D deinceps proportionales sunt,est autem B quadratus; et D quadratus erit] *videntur hæc superuacanea esse, cum superius demonstratum sit tertium ab vnitate quadratum esse, & vnum intermittentes omnes.* A

Eadem ratione & E est cubus] *quattuor enim numeri B C D E deinceps proportionales sunt; atque est B cubus. ergo & E cubus sit necesse est.* A 23.octaui.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero post unitatem non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate,& vnum intermittentes omnes. At si qui post vnitatem non sit cubus; neque alius vllus cubus erit,præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes oés.



Sint ab vnitate deinceps proportionales numeri A B C D E F, & qui post vnitatem A non sit quadratus. Dico neque alium vllum quadratum esse,preter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. si enim fieri potest, sit C quadratus;est autem & quadratus B. ergo B C inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerũ: atque est vt B ad C, ita A ad B. habent igitur A B inter se proportionem eam,quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ideoq; AB similes plani sunt. & est B quadratus. ergo & A quadratus erit: quod non ponitur. non igitur C quadratus erit. similiter ostendemus neque alium ullum quadratum esse,preter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. sed non sit A cubus. Dico neque alium vllum cubum esse, preter quartũ ab vnitate, & duos intermittentes omnes. si enim fieri potest, sit D cubus.est autem & cubus C; quartus enim est ab vnitate. & vt C ad D, ita est B ad C.ergo & B ad C proportionem habet, quam cubus ad cubum; ac propterea B C similes solidi sunt. atque est C cubus. ergo & B cubus erit. & quoniam est vt unitas ad numerum A, ita A ad B; unitas autem numerum A metitur per unitates,quæ sunt in ipso: & A metietur B per vnitates, quæ in ipso

Marginal notes: 26.octaui. A (beside "ad quadratum numerum" / "sunt. & est B quadratus"); 27.octaui. B (beside "cubum; ac propterea" / "erit. & quoniam").

sunt.

sunt. quare A se ipsum multiplicans cubum B fecit. si autē numerus se ipsum mul-
6.huius. tiplicans cubum faciat, & ipse cubus erit. cubus igitur est A. quod non ponitur. er
go neque D est cubus. similiter demonstrabimus neque alium vllū cubū esse, præ
ter quartū ab vnitate, & duos intermittentes omnes. quod demōstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

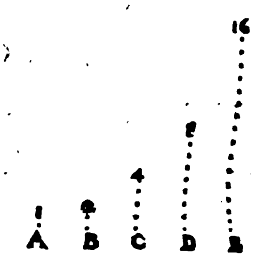
A Ideoq; A B similes plani sunt. & est B quadratus; ergo & A quadratus erit] *quo-*
18 octaui. *niam enim A B similes plani sunt, inter eos vnus medius proportionalis cadit. sunt igitur tres nu-*
22 octaui. *meri deinceps proportionales; estq́ primus quadratus. ergo & tertius quadratus erit.*
B Ac propterea B C similes solidi sunt; atque est C cubus; ergo & B cubus erit] *quo-*
19.octaui. *niam enim similes solidi sunt, inter eos cadent duo medij proportionales; & quattuor numeri dein-*
23 octaui. *ceps proportionales erunt. Quòd cum primus sit cubus, & quartus cubus sit necesse est.*

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Si ab vnitate quotcūque numeri deinceps proportionales fuerint, minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui sunt in numeris proportionalibus.

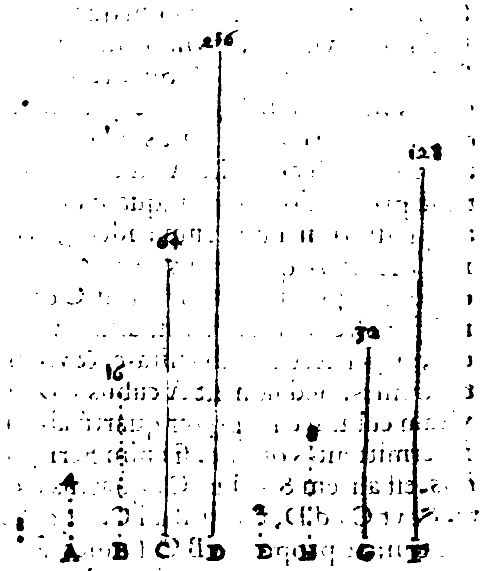
Sint ab vnitate A quotcumque numeri deinceps proportionales B C D E. Dico horum B C D E minorem numerum B maiorem E metiri per aliquem ipsorum C D. Quōniam enim est vt A vnitas ad B, ita D ad E; A vnitas numērū B æqualiter metitur, atque D ipsum E. quare permutādo A vnitas numerum æqualiter D metitur, atque B ipsum E. sed A vnitas metitur D per eas, quę sunt in ipso D vnitates. ergo & B metitur E per vnitates, quæ sunt in D. minor igitur B maiorem E metitur per aliquem eorū, qui sunt in numeris proportionalibus. quod demonstrare oportebat.

25. septimi.



THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Si ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales fuerint, quicumque primorum numerorum metiuntur ultimum, ijdē & eum, qui vnitati proximus est, metientur.



Sint ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales A B C D. Dico quicumque primorum numerorum metiuntur D, eosdem & ipsū A metiri. metiatur enim aliquis primus numerus E ipsum D. Dico E ipsum quoque A metiri. Non enim metiatur E ipsum A, atq; E est primus. omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem nō metitur, primus est. ergo E A numeri inter se primi sunt. et quoniam E metitur ipsum D, metiatur per vnitates, quę

31.septimi. 9. com. not.

sunt

sunt in F. ergo E multiplicans F ipsũ D fecit. Rursus quoniam A metitur ipsum D per eas, quæ sunt in C vnitates, A multiplicans C ipsum D fecit. Sed & E multiplicans F fecit D. qui igitur fit ex A C ei, qui fit ex E F est æqualis. ergo vt A ad E, ita F ad C. suntq; A E primi: primi aũt, & minimi; minimi vero eos, qui eandẽ habẽt proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur E ipsum C. metiatur per G. ergo E ipsum G multiplicans fecit C. sed ex antecedente & A multiplicans B ipsum C fecit. qui igitur fit ex A B æqualis est ei, qui ex E G. ergo vt A ad E, ita G ad B. & sunt A E primi. sed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. quare & E ipsum B metitur. metiatur per H. multiplicans igitur E ipsum H fecit B. sed & A se ipsum multiplicans fecit B. ergo qui fit ex H E est æqualis ei, qui fit ab ipso A. est igitur vt E ad A, ita A ad H. suntq; A E primi: sed primi, & minimi; minimi vero æqualiter metiũtur eos, qui eandem, quam ipsi proportionem habent, maior maiorem, & minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo E metitur ipsum A. sed & non metitur. quod fieri non potest. non igitur A E sunt inter se primi. ergo compositi erunt. compositos vero primus aliquis numerus metitur. quare ipsos A E metietur aliquis numerus primus. & quoniam E primus ponitur: primum autem non metitur alius numerus prȩter se ipsum. metitur igitur E ipsos A E: ideoq; E ipsum A metitur. metitur autem & ipsum D. ergo E ipsos A D metietur. similiter demonstrabimus quicumque primorum numerorum metiuntur ipsum D, eosdem & ipsum A metiri. quod demonstrare oportebat.

19.com.not. A 19. septimi. 23. septimi. 21. septimi. B 19. septimi. 23. septimi. 21. septimi. 20. septimi. 14. diffi.

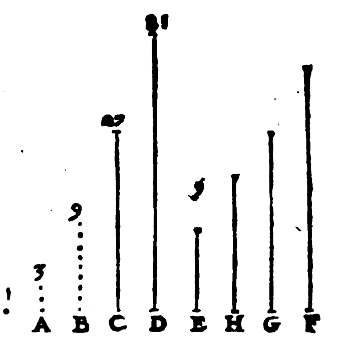
F. C. COMMENTARIVS.

A Rursus quoniam A metitur ipsum D per eas, quæ sunt in C vnitates] *hoc enim in antecedente demonstratum fuit.*

B Sed ex antecedente & A multiplicans B ipsum C fecit] *quoniam enim, vt in antecedente demonstratum est, A metitur ipsum C per B; & A multiplicans B fecit C.*

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero post vnitatem primus sit: maximum nullus alius metietur prȩter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

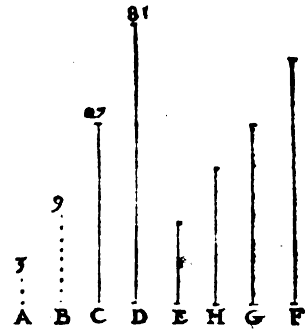


Sint quotcũque numeri ab vnitate deinceps proportionales A B C D, & qui post vnitatem, videlicet A sit primus. Dico maximum D nullum alium numerum metiri, præter ipsos A B C. si enim fieri potest, metiatur E ipsum D, & non sit E idem, qui aliquis ipsorum A B C; manifestum est E primum non esse. Si enim primus sit, & metiatur D, ipsum quoque A metietur primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. non igitur E primus est. ergo compositus: omnem autem compositum numerum primus aliquis numerus metitur. Dico nullum alium primum metiri ipsum E præterquam A. si enim alius metitur E, & E metitur D, & ille ipsum D metietur. quare & ipsum A primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. ergo A ipsum E metitur. & quoniam E metitur D, metiatur ipsum per F. non erit F idem, qui aliquis ipsorum A B C. si enim est idem, meti turq; ipsum D per E; & vnus ipsorũ A B C ipsum D per E metietur. sed vnus ipso

Ex antecedente. 13. diffi. 12. com. not. Ex antecedente. 11 huius.

rum A B C metitur D per aliquem ipsorũ A B C. quare & E idem erit, qui vnus ipsorũ A B C. quod non ponitur. non igitur F est idem, qui vnus ipsorum A B C. similiter ostendemus A metiri ipsum F, rursus ostendentes non esse F primum numerũ. si enim est primus, & metitur ipsum D, ipsum quoque A metietur, primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. non igitur F primus est. ergo cõpositus, & eum aliquis primus metietur. Dico nullum alium metiri ipsum F præterquàm A. si enim alius metitur F, & F metitur D; & ille ipsum D metietur. quare & ipsum A, primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. ergo A ipsum F metitur. Et quoniam E metitur D per F, & E multiplicans F ipsum D fecit. Sed & A multiplicans C fecit D. qui igitur fit ex A C est æqualis ei, qui ex EF. ergo vt A ad E, ita est F ad C. sed A metitur E. quare & F ipsum C metietur. metiatur per G. similiter demonstrabimus G non esse eundem, qui vnus ipsorum A B, & A ipsum G metiri. & quoniam F ipsum C metitur per G, multiplicãs F ipsum G fecit C. sed & A multiplicans B ipsum C fecit. ergo qui fit ex A B ei, qui ex F G est ęqualis. vt igitur A ad F, ita est G ad B. metitur autem A ipsum F. ergo & G ipsum B metietur. metiatur per H. similiter demonstrabimus H non esse eundẽ, qui A. & quoniam G ipsum B per H metitur, G multiplicans H ipsum B fecit. sed & A se ipsum multiplicans fecit B. qui igitur fit ex HG est æqualis quadrato, qui ex A. ergo ut H ad A, ita A ad G. metitur autẽ A ipsum G. quare & H ipsum A metietur, primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod est absurdum. non igitur aliquis alius metietur ipsum D maximum, præter ipsos A B C. quod demonstrandum fuerat.

Ex antecedenti. 19. septimi. 20. septimi.

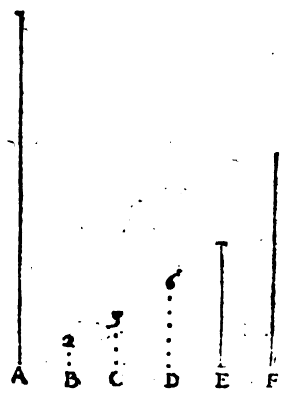


THEOREMA. XIIII. PROPOSITIO XIIII.

Si minimum numerum primi numeri metiantur, nullus alius numerus metietur ipsum, præter eos, qui à principio metiebantur.

Minimum enim numerum A primi numeri B C D metiantur. Dico nullum alium primum numerũ metiri ipsum A, præter ipsos B C D. si enim fieri potest, metiatur E ipsum A; & non sit E idem, qui aliquis ipsorum B C D. & quoniã E metitur A, ipsum per F metiatur. ergo E multiplicans F ipsum A fecit. Et metiuntur A primi numeri B C D. si autem duo numeri se se multiplicantes aliquem faciant, & factum ex ipsis metiatur aliquis primus numerus; & vnum eorum, qui à principio positi sunt, metietur. ergo B C D metientur vnum ipsorum E F. ipsum quidem E non metientur; etenim E primus est; & nõ idem qui aliquis ipsorum B C D. ergo ipsum F metientur, qui est minor, quàm A. quod fieri nõ potest. ponitur enim A minimus eorum, quos B C D metiantur. non igitur ipsum A metietur aliquis primus numerus, præter ipsos B C D, quod demonstrare oportebat.

32. septimi.



THEOREMA XV. PROPOSITIO. XV.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi eorũ qui

qui eandem, quam ipsi proportionem habeant; duo quilibet cõpositi ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri deinceps proportionales minimi eorum, qui eãdem, quam ipsi proportionem habent A B C. Dico duos quoslibet compositos ad reliquũ primos esse, videlicet A B ad C, & B C ad A, & A C ad B. sumantur enim duo minimi numeri qui eandem, quam ipsi A B C proportionem habeant D E EF. manifestum est D E se ipsum quidem multiplicantem facere A; multiplicantem vero E F facere B; & E F se ipsum multiplicantem facere C. & quoniam DE EF minimi sunt, primi erũt inter se. si autem duo numeri primi inter se fuerint, & vterque simul ad vtrumque primus erit. ergo D F ad vtrumque ipsorum D E E F primus est. Sed & D E ad E F est primus. quare D F D E ad E F primi sunt: ac propterea qui fit ex F D D E primus est ad E F. si autem duo numeri primi inter se fuerint, qui fit ex vno ipsorum ad reliquum primus erit. ergo qui fit ex F D D E ad eum, qui fit ex E F est primus. sed qui ex F D D E est qui fit ex DE vnà cum eo, qui ex D E E F. qui igitur ex D E vnà cum eo, qui ex D E E F primus est ad eum, qui ex E F. Sed qui fit ex D E est A; qui vero ex D E E F est B, & qui ex E F est C. ergo A B compositi ad ipsum C primi sunt. similiter ostendemus & B C ad A esse primos. Dico & A C ad B primos esse. Quoniam enim D F ad vtrumque ipsorum D E E F est primus, & qui fit ex D F ad eum, qui ex D E E F primus erit. Sed ei, qui fit ex D F æquales sunt qui ex D E, & E F fiunt vnà cum eo, qui bis fit ex D E E F. qui igitur ex D E, & E F fiunt vnà cum eo, qui bis ex D E E F primi sunt ad eum, qui ex D E E F. ergo & diuidendo qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui semel fit ex DE EF primi sunt ad eum, qui ex D E EF. & rursus diuidendo qui fiunt ex D E, & EF ad eum, qui fit ex D E E F primi sunt. Sed qui fit ex D E est A; qui vero ex D E E F est B; & qui ex E F est C. ergo A C cõpositi ad ipsum B primi erunt. quod demonstrare oportebat.

A....4 B......6
C........9
B......6 C........9
A....4
C........9 A....4
B......6
D..E...F

A 2. octaui. 24. septimi. 30. septimi. 26. septimi. 27. septimi. B C D E F

F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim duo minimi numeri eandem, quam ipsi A B C proportionem habentium] *ex ijs, quae demonstrauimus ad 35 septimi.*

B Sed qui ex F D D E est qui fit ex D E vnà cum eo, qui ex D E E F] *Hoc in lineis demonstratur ab Euclide in secundo libro, propositione tertia. sed quoniam numeri propria habent principia, Barlaam monachus non solum hoc ex illis demonstrauit, sed & quęcumque in secundo libro tradita sunt, quae nos vtpote non aliena hoc loco apponenda censuimus. demonstrat autem hoc theoremate tertio.*

C Quoniam enim D F ad vtrumque ipsorum D E E F est primus, & qui fit ex D F ad eum, qui ex DE EF primus erit] *nam cum D F ad vtrumque ipsorum DE E F sit primus, erit DF primus ad eum, qui ex D E E F ex 26 septimi. quare ex 27 eiusdem & qui fit ex D F ad eum, qui ex D E E F est primus.*

D Sed ei, qui fit ex D F ęquales sunt qui ex D E, & E F] *hoc in lineis demonstratur in secundo libro propositione 4. sed in numeris Barlaam demonstrauit theoremate quarto.*

E Ergo & diuidendo qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui semel fit ex D E E F primi sunt ad eum, qui fit ex DE EF.] *si enim non sunt primi, compositi erunt. quare eos aliquis numerus communis mensura metietur. cum igitur is numerus metiatur vtrumque & compositum ex illis metietur, videlicet qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui bis fit ex DE EF. sed & metitur eum, qui fit ex DE EF. ergo qui fiunt ex DE, & EF vnà cum eo, qui bis fit ex D E E F non sunt primi ad eum, qui ex DE EF. atqui primi sunt. quod est absurdum. non igitur sunt compositi. ergo qui fiunt ex DE, & EF vnà cum eo, qui semel fit ex DE EF primi sunt ad eum, qui fit ex D E EF.* 11. com. not.

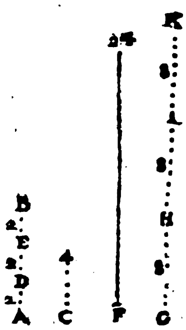
F Et rursus diuidendo qui fiunt ex DE, & EF ad eum, qui fit ex DE, EF primi sunt]

Si enim non sint primi, eodem, quo supra, modo ostendemus eos, qui fiunt ex D E, & E F vna cum eo, qui fit ex DE EF non esse primos ad eum, qui ex DE EF, quod est absurdum: sunt enim primi, vt demonstratum iam fuit. ergo qui fiunt ex DE & EF ad eum, qui ex DE EF primi sint necesse est.

Barlaam Monachi arithmetica demonstratio eorum, quę Euclides libro secundo in lineis demonstrauit.

THEOREMA I.

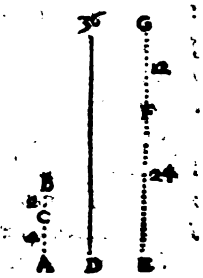
Si duobus numeris propositis eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propositis æqualis erit numeris planis, qui ex numero indiuiso, & singulis partibus numeri diuisi fiunt.



Sint duo numeri AB C; & diuidatur AB in quotlibet numeros AD DE EB. Dico numerum planum, qui fit ex C AB numeris planis, qui fiunt ex C AD, & C DE, & C EB aequalem esse. sit enim numerus planus F, qui fit ex C AB: GH vero, qui fit ex C AD: & HI, qui fit ex C DE: & IK, qui ex C EB. Quoniam igitur AB multiplicans C ipsum F fecit, C
10.com.not. *metitur F per eas, quae sunt in AB vnitates. Eadem ratione C metitur GH per vnitates, quae sunt in AD: & metitur HI per vnitates, quae in DE: & IK per vnitates, quae in EB. ergo C metitur totum GK per vnitates, quae sunt in AB. metiebatur autem & ipsum F per eas, quae sunt in AB vnitates. vterque igitur ipsorum F GK aeque multiplex est*
1. com. not. *numeri C. qui vero eiusdem sunt aeque multiplices, inter se aequales sūt. ergo F ipsi GK est aequalis: atque est F quidem numerus planus, qui fit ex C AB: GK vero compositus ex numeris planis, qui fiunt ex C, & singulis ipsorū AD DE EB. qui igitur fit ex C AB numerus planus aequalis est planis numeris, qui ex C, & singulis ipsorum AD DE EB fiunt. quare & si duobus numeris propositis eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propositis aequalis erit numeris, qui ex numero indiuiso, & singulis partibus numeri diuisi fiunt. quod oportebat demonstrare.*

THEOREMA II.

Si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui fiunt ex toto, & vtraque parte, inter se cōpositi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

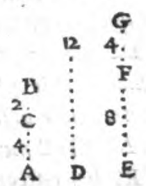


Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico duos numeros planos, qui fiunt ex BA AC, & AB BC inter se compositos, quadrato, qui fit ex AB, aequales esse. numerus enim AB se ipsum multiplicans faciat D: AC vero multiplicans AB faciat EF: & CB eundem AB multiplicans fa-
10.com.not. *ciat FG. quoniam igitur AC multiplicans AB ipsum EF fecit, AB metitur EF per eas, quae sunt in AC vnitates. Rursus quoniam CB ipsum AB multiplicans fecit FG, AB metitur FG per vnitates, quae sunt in CB. metiebatur autem & EF per vnitates, quae in AC. ergo AB totum EG per vnitates, quae in se ipso sunt metitur. rursus quoniam AB se ipsum multiplicans fecit D, metitur AB ipsum quoque D per vnitates, quae in seipso sunt. ergo AB vtrumque ipsorum D, EG metitur per eas, quae in seipso sunt vni-*
1. com. no. *tates. quotuplex igitur est D ipsius AB, totuplex erit & EG ipsius AB. qui vero eiusdem numeri sunt aeque multiplices inter se aequales sunt. ergo D ipsi EG est aequalis. atque est D quidem numerus quadratus, qui fit ex AB, EG vero numerus compositus ex duobus planis, qui fiunt ex AB BC, & BA AC. quadratus igitur numerus ex AB est aequalis numero composito ex duobus planis, qui ex AB BC, & BA AC fiunt. quare si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui fiunt ex toto, & utraque parte inter se compositi aequales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur. atque illud est. quod oportebat demonstrare.*

THEO-

THEOREMA III.

Si numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & vna parte fit æqualis est plano, qui fit ex partibus vnà cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur.



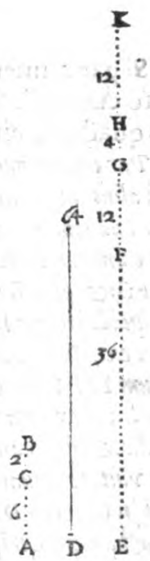
Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico planum numerum, qui fit ex AB BC plano, qui ex AC CB vnà cum quadrato, qui fit à CB aequalem esse. numerus enim A B multiplicans B C ipsum D faciat. A C vero multiplicans CB faciat EF: & CB se ipsum multiplicans faciat FG. itaq; quoniam AB ipsum BC multiplicans fecit D, metitur BC ipsum D per vnitates, quae sunt in AB. rursus quoniam AC multiplicans CB fecit EF, CB metitur EF per eas, quae sunt in AC vnitates. rursus quoniam CB seipsum multiplicans fecit FG, CB metitur FG per vnitates, quae in se ipso sunt: metiebatur autem & EF per vnitates, quae sunt in AC. totum igitur EG metitur CB per eas, quae sunt in AB vnitates: metiebatur autem & ipsum D per vnitates, quae in AB. ergo CB vtrumque D, EG aequaliter metitur: ij vero, quos idem numerus aequaliter metitur, inter se aequales sunt. quare D est aequalis ipsi FG. atque est D quidem planus numerus, qui fit ex AB BC: E G vero, qui ex AC CB vnà cum quadrato, qui à CB. ergo planus numerus, qui fit ex AB BC est aequalis ei, qui ex AC CB, & quadrato, qui à CB. si igitur numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & una parte fit aequalis est plano, qui fit ex partibus vnà cum eo quadrato, qui à prędicta parte efficitur. quod oportebat demonstrare.

10.com.not.

4.com. not.

THEOREMA IIII.

Si numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus ęqualis est quadratis, qui à partibus fiũt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano.



Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico quadratum, qui fit ex AB quadratis, qui ex AC CB, & numero plano, qui bis ex AC CB fit, aequalem esse. sit enim D quadratus numerus, qui fit ex AB: EF vero quadratus, qui ex A C, & G H quadratus, qui ex C B: numerus autem planus, qui fit ex AC CB uterque ipsorum FG HK. quoniam igitur AC se ipsum multiplicans fecit EF, metitur AC numerum EF per vnitates, quae in se ipso sũt. rursus quoniam BC multiplicans CA fecit FG, metitur CA ipsum FG per vnitates, quae sunt in B C. metiebatur autem & E F per vnitates, quae in ipso sunt. ergo AC totum EG per vnitates, quae sunt in AB metitur. quare AB multiplicans AC ipsum EG fecit: ideoq; EG est numerus planus, qui fit ex BA A C. similiter ostendemus & G K numerum planum esse, qui fit ex AB BC. atque est D numerus quadratus, qui ex A B efficitur. si autem numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus aequalis est duobus numeris planis, qui fiunt ex toto, & vtraque parte. ergo D ipsi E K est aequalis. sed EK constat ex quadratis, qui ex AC CB fiunt, & eo, qui bis ex AC CB numero plano. atque est D quadratus ex AB. quadratus igitur ex AB est aequalis quadratis, qui ex AC CB, & ei, qui bis ex AC, CB fit, numero plano. Ergo si numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus aequalis est quadratis, qui ex partibus fiunt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano. quod demonstrare oportebat.

10.com.not.

9.com.not.

Ex 2.huius.

THEOREMA V.

Si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur, autem & in numeros inęquales; qui ex inæqualibus partibus fit numerus planus vnà cum quadrato numeri interiecti ęqualis est ei, qui ex dimidio fit quadrato.

Sit par numerus AB: & bifariam in AC CB diuidatur: diuidaturq; in partes inęquales AD DB. Dico quadratum ex C B numero plano, qui

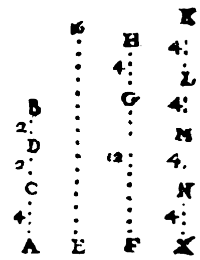
fit ex

fit ex AD DB vnà cum quadrato, qui ex C D aequalem esse. sit enim E quadratus ex CB: numerus vero planus FG, qui fit ex AD DB. & ex DC quadratus sit GH. itaq; quoniam numerus B C diuiditur in duos numeros BD DC, erit quadratus ex B C, hoc est E aequalis quadratis ex BD DC vnà cum eo, qui bis fit ex BD DC numero plano. sit igitur ex B D quidem quadratus K L, ex D C vero quadratus N X: & planus ex BD DC uterque ipsorum LM MN: totus igitur KX ipsi E est aequalis. et quoniam BD se ipsum multiplicans fecit KL, metitur BD ipsum KL per vnitates, quae in se ipso sunt. rursus quoniam C D ipsum D B multiplicās fecit L M; D B metitur L M per vnitates, quae sunt in CD. metiebatur autem KL per eas, quae in se ipso sunt vnitates. ergo D B totum K M metitur per vnitates, quę sunt in C B. aequalis autem est C B ipsi C A. quare D B metitur K M per vnitates, quae sunt in C A. rursus quoniam CD multiplicans DB fecit MN, DB metitur MN per eas, quae sunt in CD vnitates. metiebatur autem & KM per vnitates, quae sunt in AC. ergo DB totum KN per vnitates, quae sunt in AD, metitur. sed & DB metitur FG per vnitates, quae sunt in AD: ponitur enim F G, qui fit ex AD DB. aequalis igitur est F G ipsi KN. qui enim sunt eiusdem aeque multiplices inter se aequales sunt. est autem et GH aequalis NX, cum vterque quadratus ex CD ponatur. totus igitur KX toti FH est aequalis; estq; ipsi E aequalis KX. Ergo FH ipsi E aequalis erit. atque est F H quidem numerus planus ex A D D B vnà cum quadrato, qui fit ex D C. E vero est qui fit ex C B quadratus. numerus igitur planus, qui fit ex AD DB vnà cum quadrato ex DC aequalis est ei, qui fit ex CB quadrato. ergo si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur autem & in numeros inequales; qui ex inequalibus partibus fit numerus planus vnà cum quadrato numeri interiecti aequalis est ei, qui ex dimidio fit quadrato. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.

10. com. not.

1. com. not.



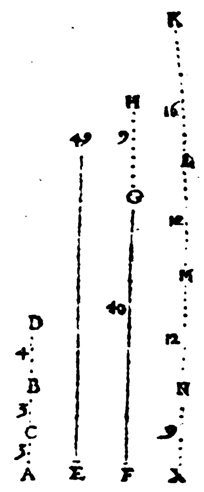
THEOREMA VI.

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipsi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus vnà cum quadrato dimidij est aequalis quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto constat.

Par enim numerus AB diuidatur bifariam in numeros A C C B: & ipsi alius numerus BD adijciatur. Dico numerum planum qui fit ex AD DB vnà cum quadrato ex CB aequalem esse ei, qui fit ex CD quadrato. Sit enim E quadratus ex CD: numerus autem planus, qui fit ex AD DB sit FG: & ex CB quadratus GH. & quoniam quadratus ex CD est aequalis quadratis ex DB BC vnà cū eo, qui bis fit ex DB BC; sit quadratus quidem ex BD numerus KL: planus vero numerus ex DB BC sit vterque ipsorum LM MN: & ex BC quadratus NX. totus igitur KX est aequalis quadrato ex CD: est aūt E, qui fit ex CD quadratus. ergo KX ipsi E est aequalis. & quoniam BD se ipsum multiplicans fecit K L, B D metitur KL per vnitates, quae in se ipso sunt. metitur autem & LM per vnitates, quę sunt in CB. ergo DB metitur totum KM per eas, quae sunt in CD vnitates. est autem CB ipsi CA aequalis, vt ponitur. quare DB totum KN metitur per vnitates, quae sunt in AD. sed DB metitur quoque ipsum F G per vnitates, quae sunt in AD; ponitur enim FG, qui fit ex AD DB. ergo FG ipsi KN est aequalis. est autem & HG aequalis NX. vterque enim est quadratus, qui fit ex CB. totus igitur FH est aequalis toti KX. sed KX ostensus est aequalis ipsi E, ergo & FH ipsi E est aequalis. atque est FH quidem planus numerus, qui fit ex AD DB vnà cum quadrato, qui ex CB; E vero est quadratus, qui fit ex CD. qui igitur fit ex AD DB vnà cum quadrato, qui ex CB est aequalis ei, qui fit ex C D quadrato. Ergo si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipsi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus vnà cum quadrato dimidij est aequalis quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto constat. quod oportebat demonstrare.

4. antecedentium.

10. com. not.



THEOREMA VII.

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnius partis ęqualis est numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vnà cum reliquæ partis quadrato.

Numerus enim A B diuidatur in numeros A C C B. Dico quadratos, qui fiunt ex B A A C aequales esse numero plano, qui bis fit ex B A A C vnà cum ipsius B C quadrato. Quoniam enim quadratus, qui ex A B, est aequalis quadratis, qui ex BC CA, & ei, qui bis fit ex BC CA numero plano. communis apponatur quadratus ex AC. quadratus igitur ex BA vnà cum quadrato ex AC est aequalis duobus quadratis, qui ex A C, & quadrato ex C B vnà cum eo, qui bis fit ex BC CA plano. et quoniam qui semel fit ex BA AC est aequalis ei, qui semel fit ex BC CA vnà cum ipsius CA quadrato; qui bis fit ex BA AC aequalis erit ei, qui bis fit ex BC CA vnà cum duobus quadratis ipsius CA. communis apponatur quadratus, qui ex BC. Duo igitur quadrati ex AC, & quadratus vnus ex CB vnà cum eo, qui bis fit ex BC CA aequales sunt ei, qui bis fit ex BA AC vnà cum ipsius CB quadrato. quadratus igitur ex AB vnà cum quadrato ex AC aequalis est ei, qui bis fit ex BA AC vnà cum quadrato reliquae partis CB. ergo si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnius partis aequalis est numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vnà cum reliquae partis quadrato. quod oportebat demonstrare.

B 3 C 5 A

4. antecedentium.

3. antecedentium.

THEOREMA VIII.

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto & vna parte fit numerus planus vnà cum quadrato reliquæ partis ęqualis est quadrato, qui à toto, & dicta parte, tamquam ab vno efficitur.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico numerum planũ, qui quater fit ex AB BC vnà cum quadrato ipsius AC aequalẽ esse ei, qui ex AB BC tamquam ex vno fit quadrato. ponatur enim ipsi B C aequalis BD. & quoniam quadratus ex AD aequalis est quadratis, qui ex AB BD, & ei, qui bis fit ex AB BD numero plano. atque est B D aequalis B C. ergo qui fit ex A D quadratus aequalis est quadratis, qui ex AB BC, & ei, qui bis fit ex AB BC numero plano. sed quadrati, qui ex AB BC aequales sunt numero plano, qui bis fit ex AB BC vnà cum ipsius AC quadrato. est igitur qui fit ex AD quadratus aequalis ei, qui quater fit ex AB BC, & quadrato ex A C. atque est quadratus ex AD, qui ex AB, & BC, tamquam ex vno efficitur: etenim BD ipsi BC est aequalis. ergo quadratus, qui ex AB BC fit tamquam ex vno est aequalis ei, qui quater fit ex AB BC, & ipsius AC quadrato. si igitur numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto, & vna parte fit numerus planus vnà cum quadrato reliquę partis aequalis est quadrato, qui à toto, & dicta parte tamquam ab vno efficitur. quod demonstrare oportebat.

D 2 B 2 C 6 A

Ex antecedente.

THEOREMA IX.

Si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur autem & in numeros inæquales, quadrati, qui ab inæqualibus numeris fiunt, dupli sunt eius quadrati, qui fit à dimidio, vnà cum quadrato numeri inter ipsos interiecti.

Par enim numerus A B bifariam diuidatur in numeros AC CB: diuidatur etiam in numeros inęquales AD DB. Dico quadratos, qui fiunt ex AD DB quadratorum, qui ex AC CD duplos esse. Quoniam enim par numerus AB in numeros aequales diuiditur AC CB: & in numeros inaequales AD DB: qui fit ex AD DB vnà cũ quadrato ex CD aequalis est ei, qui fit ex AC quadrato. qui igitur bis fit ex AD DB vnà cùm duobus ex CD quadratis duplus est eius quadrati, qui fit ex AC. Quoniam igitur AB bifariam diuiditur in numeros AC CB, quadratus, qui fit ex AB quadruplus erit eius, qui ex AC quadrati. & quoniam qui bis fit ex AD DB vnà cum duobus quadratis ex CD duplus est quadrati, qui ex AC. si autem sint duo numeri, quorum alter eiusdem quadruplus sit, alter vero duplus, qui quadruplus est dupli est du-

B 2 D 3 C 5 A

5. antecedentium.

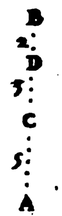
plus,

plus; erit quadratus ex AB duplus eius, qui bis fit ex AD DB vnà cũ duobus qui ex CD quadratis. qui igitur bis fit ex AD DB minor est, quàm dimidius quadrati ex AB, duplo quadrati ex CD. rursus quoniam qui bis fit ex AD DB vnà cum numero composito ex quadratis AD DB aequalis est ei, qui fit ex AB quadrato: erit compositus ex AD DB quadratis maior, quàm dimidius quadrati ex AB, duplo quadrati ex CD. atque est quadratus ex AB quadrati ex AC quadruplus. compositus igitur ex quadratis AD DB maior est, quàm duplus quadrati ex AC, duplo quadrati ex DC. ergo duplus est quadratorum, qui ex AC CD fiunt. si igitur par numerus bifariam diuidatur, diuidatur autem & in numeros inaequales; quadrati, qui ab inaequalibus numeris fiunt, dupli sunt eius quadrati, qui fit à dimidio vnà cum quadrato numeri inter ipsos interiecti. quod demonstrare oportebat.

4. antecedentium.

F. C. COMMENTARIVS.

Precedens demonstratio obscuriuscula est, quare apertius hoc modo explicabitur. Quoniam enim numerus AD diuiditur in numeros AC CD, erit ex quarta huius quadratus, qui fit ex AD, aequalis quadratis ex AC CD vnà cum numero plano, qui bis fit ex AC CD. & cum numerus CB fit aequalis ipsi AC, quadratus ex AD aequalis erit quadratis ex BC CD vnà cum eo, qui bis fit ex BC CD. addatur communis quadratus ex DB. quadrati igitur ex AD DB aequales sunt quadratis ex BC CD DB vnà cum eo, qui bis fit ex BC CD. sed quadrati ex BC CD ex 7. antecedentium sunt aequales ei, qui bis fit ex BC CD vnà cum quadrato DB. ergo quadrati ex AD DB aequales sunt duplis quadratorum ex BC CD, hoc est duplis quadratorum ex AC CD: ac propterea quadrati, ex AD DB quadratorum ex AC CD dupli erunt. quod demonstrare oportebat.



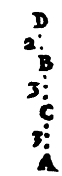
THEOREMA X.

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipsi alter numerus; qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtrique quadrati dupli sunt quadrati ex dimidio, & quadrati, qui ex dimidio, & adiecto, tamquam ex vno efficitur.

Sit enim par numerus AB, & in numeros AC CB bifariam diuidatur, adijciaturq; ipsi alter numerus BD. Dico quadratos ex AD DB quadratorum ex AC CD duplos esse. Quoniam enim numerus AD diuiditur in numeros AB BD, erunt quadrati ex AD DB aequales numero plano, qui bis fit ex AD DB vnà cum quadrato ex AB. quadratus autem ex AB est aequalis quattuor quadratis, qui fiunt ex AC CB; est enim AC ipsi CB aequalis. quadrati igitur ex AD DB sũt aequales ei qui bis fit ex AD DB, & quattuor quadratis ex AC CB. & quoniam qui fit ex AD DB vnà cũ quadrato ex CB est aequalis quadrato ex CD: erit qui bis fit ex AD DB vnà cum duobus ex CB quadratis aequalis duobus quadratis, qui ex CD fiunt. ergo quadrati ex AD DB aequales sunt duobus quadratis ex CD, & duobus quadratis ex AC. dupli igitur sunt quadratorũ ex AC CD. atque est quadratus quidẽ ex AD, qui fit ex toto cũ adiecto; quadratus uero ex DB, qui fit ex adiecto, & quadratus ex CD, qui ex dimidio, & adiecto. quadratus igitur, qui fit ex toto cũ adiecto vnà cũ eo, qui ex adiecto, duplus est quadrati, qui fit ex dimidio vnà cũ quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto cõstat: quare si par numerus bifariã diuidatur, adijciaturq; ipsi alter numerus; qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtriq; quadrati dupli sunt quadrati ex dimidio, & quadrati, qui ex dimidio, & adiecto, tamquam ex vno efficitur. quod demonstrare oportebat.

7. antecedentium.

6. antecedentium.

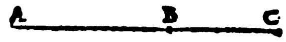


F. C. COMMENTARIVS.

Illud autem, quod vndecimę secundi libri respondet, nempe numerum ita diuidere, vt qui ex toto, & altera parte fit numerus planus, æqualis sit ei, qui à reliqua parte fit quadrato, nullo modo fieri poteſt.

Si enim fieri possit, diuidatur numerus AB in numeros AC CB. vt qui ex AB BC fit numerus

rus planus aequalis sit quadrato ex A C. qui igitur quater sit ex A B B C quadrati ex A C quadruplus est. ergo qui quater fit ex A B B C vnà cum quadrato ex A C quintuplus est ipsius quadrati ex A C. sed qui quater fit ex A B B C vnà cum quadrato ex A C numerus quadratus est;

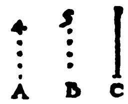


etenim aequalis est quadrato, qui à toto A B, et à parte B C tamquam ab vno efficitur ex octauo premissorum. est autem & qui fit A C quadratus. duo igitur quadrati numeri inter se proportionem habent, quam quinque ad vnum. quod fieri non potest. Ergo numerus non diuiditur ita, vt qui à toto, & altera parte fit numerus planus aequalis sit ei, qui à reliqua parte fit, quadrato. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVI.

Si duo numeri primi inter se fuerint, non erit vt primus ad secũdum, ita secundus ad alium vllum.

Duo enim numeri AB primi inter se sint. Dico non esse ut A ad B, ita B ad alium vllum. si enim fieri potest, sit vt A ad B, ita B ad C. & sunt AB primi, sed primi, & minimi, minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur A ipsum B, vt antecedens antecedentem. sed & ipse se ipsum metitur. ergo A metitur ipsos AB primos inter se existentes. quod est absurdum. non igitur est vt A ad B, ita B ad C. quod oportebat demonstrare.

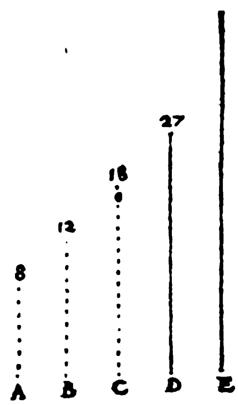


23. septimi.
21. septimi.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint, non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium vllum.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D, extremi autem ipsorum A D primi sint inter se. Dico non esse vt A ad B, ita D ad alium vllum. si enim fieri potest, sit vt A ad B, ita D ad E. quare permutando, vt A ad D, ita erit B ad E. & sunt A D primi; sed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur A ipsum B. atque est vt A ad B, ita B ad C. ergo & B metitur ipsum C; & ob id A quoque ipsum C metitur. & quoniam est vt B ad C, ita C ad D; metitur autem B ipsum C, & C: ipsum D metietur. Sed A metitur C. quare & ipsum D. metitur autem & se ipsum. Ergo A ipsos A D primos inter se existentes metitur. quod fieri non potest. non igitur erit vt A ad B, ita D ad alium vllum. quod demonstrare oportebat.

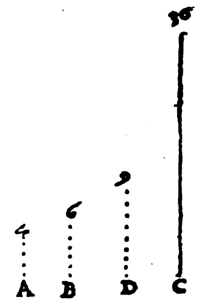


23. septimi.
21. septimi.
2. com. not.

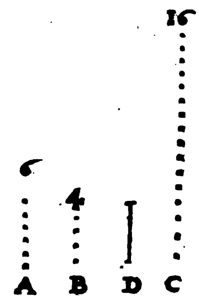
PROBLEMA I. PROPOSITIO. XVIII.

Duobus numeris datis considerare an tertius ipsis proportionalis inueniri possit.

Sint dati duo numeri A B; & oporteat considerare an possit tertius ipsis proportionalis inueniri. Itaque AB vel primi inter se sunt, vel non primi. si quidem primi, iam ostensum est, fieri non posse, vt tertius ipsis proportionalis inueniatur. Sed non sint A B inter se primi, & B se ipsum multiplicans faciat C. vel igitur A metitur C, vel non metitur. metiatur primum per D. ergo A multiplicans D ipsum C fecit. sed & B se ipsum multiplicans fecit C. qui igitur fit ex A D est ęqualis ei, qui ex B. ergo vt A ad B, ita B ad D; ac propterea ipsis A B tertius proportionalis D inuentus est.



Sed non metiatur A ipsum C. Dico fieri non posse, vt ipsis A B tertius proportionalis inueniatur. Si enim fieri potest, inuentus sit D. ergo qui fit ex A D aequalis est ei, qui fit ex B. sed qui fit ex B est C. qui igitur fit ex A D ipsi C est ęqualis. ergo A ipsum D multiplicans fecit C. & ob id A ipsum C per D metitur. sed & non metiri positum est, quod est absurdum. non igitur fieri potest, vt ipsis A B tertius inueniatur proportionalis, quando A ipsum C non metitur. quod demonstrare opottebat.

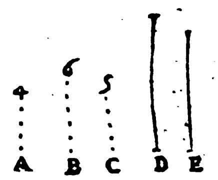


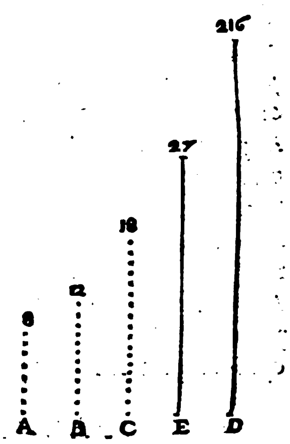
PROBLEMA II. PROPOSITIO XIX.

Tribus numeris datis considerare an quartus ipsis proportionalis inueniri possit.

Sint dati tres numeri A B C, & oporteat considerare an possit ipsis quartus proportionalis inueniri. ergo ipsi A B C vel deinceps sunt proportionales, & eorum extremi primi inter se sunt, vel non deinceps proportionales, & eorũ extremi sunt primi inter se, vel proportionales quidẽ deinceps, non autem extremi ipsorum inter se primi, uel neque proportionales deinceps, neque eorum extremi primi inter se sunt. si quidem igitur ABC deinceps sunt proportionales, & eorum extremi A C primi inter se, iam demonstratum est fieri non posse, vt quartus ipsis proportionalis inueniatur. si vero non sunt deinceps proportionales, & extremi ipsorum sunt primi. Dico quartum proportionalem inueniri non posse. si enim inueniri potest sit D. vt igitur A ad B, ita C ad D: & vt B ad C, ita sit D ad E. ergo ex ęquali vt A ad C, ita C ad E: sed sunt AC primi; primi autem, & minimi; minimi vero eos, qui eandem proportionem habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo A ipsum C metitur, antecedens antecedentem. metitur autem & se ipsum. quare A ipsos AC primos inter se existentes metitur. quod fieri non potest. ipsis igitur ABC non potest quartus proportionalis inueniri.

17. huius.
23. septimi.
21. septimi.

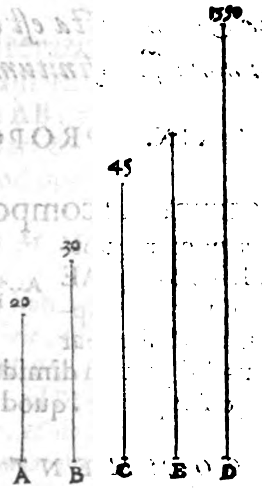


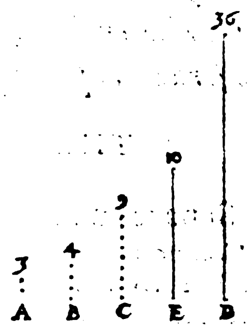


Rursus ABC proportionales quidem sint deinceps, nõ autem extremi eorum primi. Dico quartum proportionalem inueniri posse. multiplicans enim B ipsum C faciat D. itaque vel A metitur ipsum D, vel non metitur. metiatur primum per E. ergo A multiplicans E fecit D. sed & B multiplicãs C ipsum D fecit. qui igitur fit est AE est æqualis ei, qui ex BC; proptereaq; vt A ad B, ita est C ad E. ipsis igitur ABC quartus proportionalis E inuentus est.

9. com. not.
19. septimi.

Sed non metiatur A ipsum D. Dico fieri non posse, vt ipsis ABC inueniatur quartus proportionalis. si enim inueniri potest, inueniatur, sitq; E. ergo qui fit ex A E est æqualis ei, qui ex BC. sed qui fit ex BC est D. quare qui fit ex A E ipsi D est æqualis: & ob id A ipsum E multiplicans fecit D. metitur igitur A ipsum D per E. quare A ipsum D metitur. sed & nõ metitur. quod est absurdum. non igitur fieri potest, vt ipsis ABC inueniatur quartus proportionalis, quando A ipsum D non metitur. 19. septimi.





Sed non sint neque deinceps proportionales A B C, neque A C inter se primi, & B ipsum C multiplicans faciat D. similiter demonstrabimus, si A ipsum D metiatur, inueniri posse quartum proportionalem. sin minus, inueniri nõ posse. quod demonstrandum fuerat.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

Sint propositi primi numeri A B C. Dico ipsis A B C plures esse primos numeros. sumatur enim minimus, quem ipsi A B C metiantur; sitq; DE: & ipsi DE apponatur vnitas DF. ergo EF vel primus est, vel non. sit primum primus. Inuenti igitur sunt primi numeri ABC EF plures, quàm ipsi ABC. sed non sit EF primus. ergo eum primus aliquis metitur. metiatur G. Dico G nulli ipsorum ABC eundem esse. si enim G idem sit, qui vnus ipsorũ ABC; ipsi autem ABC metiuntur DE; & G ipsum DE metietur. metitur autem & EF. & reliquam igitur DF vnitatem metietur numerus existens. quod est absurdum. ergo G non est idem, qui unus ipsorum ABC, & ponitur primus. Inuenti igitur sunt primi numeri A B C G plures proposita multitudine primorum numerorum A B C. quod oportebat demonstrare. 13. com. not.

SCHOLIVM.

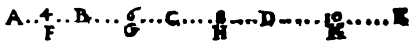
In hoc theoremate vult ostendere infinitos esse numeros primos; si enim omni proposita numerorum multitudine primi plures sint, infinitos esse primos manifestum est. si autem hoc, videtur obsistere philosophorum dogmati, qui asserunt prima determinata esse, & numero minora.

quid igitur dicemus? primos numeros non esse principium numerorum, sed vnitatem ipsam, quæ & contracta est & sola. quare & in numeris hoc seruatur, principium non esse infinitum, sed determinatum.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Si pares numeri quotcumque componantur, totus par erit.

Componantur enim pares numeri quotcumque AB BC CD DE. Dico totum AE parem esse. Quoniam enim vnusquisque ipsorum AB BC CD DE par est, habet par



* tem dimidiam. quare & totus AE partem dimidiam habebit. par autem numerus
6. diff. est, qui bifariam diuiditur. ergo AE par est. quod demonstrare oportebat.

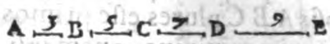
F. C. COMMENTARIVS.

* Quare & totus AE partem dimidiam habebit.] *Quoniam enim vnusquisque eorum habet dimidium, sit ipsius AB dimidia AF, & ipsius BC dimidia BG, & ipsius CD dimidia CH, denique ipsius DE dimidia DK. vt igitur AB ad eius dimi-*
12. septimi. *diam AF, ita & vnusquisque reliquorum ad eius dimidiam. quare vt AB ad AF, ita & omnes AE ad omnes AF BG CH DK. sed AF dimidia est ipsius AB. ergo & AF BG CH DK sunt dimidia totius AE. cum igitur AE dimidiam habeat bifariam diuidetur. ideoq; etiam par erit.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si impares numeri quotcumque componantur, multitudo autem ipsorum sit par; totus par erit.

Componantur enim impares numeri quotcumque multitudine pares AB BC CD DE. Dico totum AE parem esse. Quoniam enim vnusquisque ipsorum AB BC CD DE impar est, detracta ab vno quoque vnitate, erit vnusquisque reliquorum par.



Ex antecedente. quare & compositus ex ipsis par erit. est autem par & vnitatum multitudo. & totus igitur AE par est. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

Si impares numeri quotcumque componatur, & multitudo ipsorum sit impar, & totus impar erit.

Componantur enim numeri impares quotcumque, quorum multitudo sit impar AB BC CD. Dico & totum AD imparem esse. auferatur ab ipso CD vnitas DE. reliquus igitur AE par est. est autẽ

21. huius. & AC par. ergo & totus AE par erit. atque est DE vnitas. impar igitur AD. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

7. diff. Atque est DE vnitas. impar igitur est AD] *impar enim numerus est, qui à pari vnitate differt.*

THEO-

THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXIIII.

Si à pari numero par auferatur, & reliquus par erit.

A pari enim numero AB par auferatur BC. Dico & reliquum CA parem esse. Quoniam enim AB par est, habet partem dimidiam. Eadem ratione & BC. quare & reliquus AC partem habet dimidiam. par igitur est AC. quod oportebat demonstrare. A..6..C.4.B *

F. C. COMMENTARIUS.

Quare & reliquus AC partem habet dimidiam] *Sit ipsius AB dimidia BD, & ipsius CB dimidia BE, erit AB ad BD, vt CB ad BE. & permutando AB ad BC, vt DB ad BE. & diuidendo AC ad CB, vt DE ad EB. rursusq; permutando AC ad DE, vt CB ad BE. sed BE est dimidia ipsius CB. ergo & DE ipsius AC dimidia erit. cum igitur AC partē habeat dimidiam bifariā diuiditur, ac propterea par est. quod demonstrandū proponebatur.* * A..5.D!C.2.E.2.B

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si pari numero impar auferatur, & reliquus impar erit.

A pari enim numero AB impar BC auferatur. Dico & reliquum CA imparem esse. auferatur ab ipso BC vnitas CD. ergo DB par est. est autem par & AB. & reliquus igitur AD est par. atque est CD vnitas. ergo CA impar est. quod demõstrare oportebat. A..7....C!D.4.B

Ex antecedente.

THEOREMA. XXIIII. PROPOSITIO XXVI.

Si ab impari numero impar auferatur, & reliquus par erit.

Ab impari enim numero AB impar BC auferatur. Dico reliquum CA parem esse. Quoniam enim AB impar est, auferatur vnitas BD. reliquus igitur AD est par. Eadem ratione & CD est par. quare & reliquus AC par est. quod oportebat demonstrare. A.4.C..5..D!B

24.huius.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

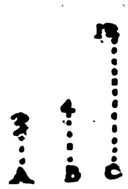
Ab impari enim numero AB par auferatur BC. Dico reliquum CA imparem esse. auferatur enim vnitas AD. ergo DB par est. est autem par & BC. & reliquus igitur CD est par. atque est DA vnitas. ergo CA impar est. quod oportebat demonstrare. A!D.4.C.4.B

24.huius.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXVIII.

Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.

Impar enim numerus A parem numerum B multiplicans faciat C. Dico C parem esse. Quoniam enim A multiplicans B ipsum C fecit, componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot vnitates sunt in A. atque est B par. ergo C ex paribus numeris componitur. si autem pares numeri quotcumque componantur totus par erit, ergo C est par. quod demonstrare oportebat.

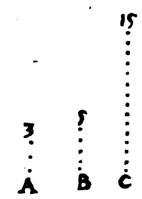


21.huius.

THEO-

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXIX.

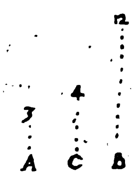
Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.



Impar enim numerus A numerum imparem B multiplicans faciat C. Dico C imparem esse. Quoniam enim A multiplicans B ipsum C fecit, componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot sunt in A vnitates. atque est vterque ipsorum A B impar. ergo C ex imparibus numeris componitur, quorum multitudo est impar. qui autem componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar,
23. huius. & ipse impar erit. ergo C est impar. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXX.

Si impar numerus parem numernm metiatur, & dimidium eius metietur.



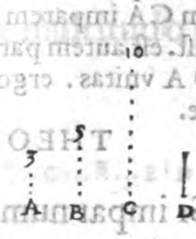
Impar enim numerus A parem numerum B metiatur. Dico & dimidium eius metiri. Quoniam enim A metitur B, metiatur ipsū per C. Dico C non esse imparem. nā si fieri potest, sit impar. & quo-
9. com. not niam A ipsum B metitur per C, A multiplicans ipsum C fecit B. ergo B componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo est impar; ac propterea impar est. quod est absurdum. par enim ponitur. non igitur C est impar. ergo par. quare A ipsum B pariter metitur. ✻ & ob id eius quoque dimidium metitur. quod oportebat demonstrare.

SCHOLIVM.

✻ Et ob id eius quoque dimidium metitur] *quoniam enim A ipsum B metitur per C, & C ipsum B per A metietur. habet autem vterque ipsorum C B partem dimidiam. quare vt C ad B, ita erit dimidium ad dimidium. sed C metitur ipsum B per A. ergo & ipsius C dimidium dimi-*
9. com. not. *dium ipsius B per A metietur; ideoq; A multiplicans ipsius C dimidium, dimidium ipsius B fecit.*
10. com. not. *quare A ipsius B dimidium per dimidium ipsius C metitur.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXI.

Si impar numerus ad aliquem numerum sit primus, & ad ipsius duplum primus erit.



Impar enim numerus A ad aliquem numerū B sit primus, & sit C ipsius B duplus. Dico A etiam ad C primū esse. si enim non sint A C primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur, sitq; D: ✻ & est A impar. impar igitur est & D. & quoniam D im-
Ex antecedente. par existens metitur ipsum C, atque est C par; & D ipsius C dimidium metietur. sed ipsius C dimidium est B. ergo D ipsum B metitur, metitur autem & ipsum A. quare D ipsos A B metitur, primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur A ad C primus non est. ergo A C inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.

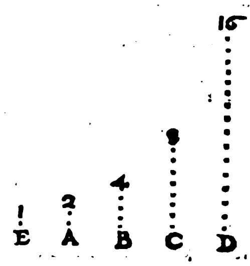
SCHOLIVM.

✻ Et est A impar. impar igitur est & D] *quoniam enim A impar est, metitur autem ipsum numerus D, vt positum est & D seipsum metitur, erit D impar. numeros enim impares impar numerus metitur.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXII.

Numerorum à binario duplatorum vnusquisque pariter par est tantum.

A binario enim A duplentur quotlibet numeri BCD. Dico BCD pariter pares esse tantum. at vero vnumquem ipsorum BCD pariter parem esse, manifesto constat. à binario namque duplatus est. Dico & tantum. exponatur enim vnitas E. Quoniã igitur ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales sunt, & post vnitatem A primus est; maximum ipsorum numerorum ABCD, videlicet D, nullus alius metietur præter ipsos ABC. atque est vnusquisque ipsorum ABC par. ergo D pariter par est tãtum. similiter demonstrabimus & vnumquemque ipsorũ ABC pariter parẽ esse tãtũ. quod demõstrare oportebat. 13.huius.



THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XXXIII.

Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar est tantum.

A..........10

Numerus enim A dimidium imparem habeat. Dico A pariter imparem esse tantum. at vero pariter imparem esse perspicuum est, dimidius enim ipsius impar existens ipsum pariter metitur. Dico & tantum. nam si A sit etiam pariter par, dimidius ipsius par erit; atque eum par numerus per parẽ numerũ metietur. ergo dimidium ipsius par numerus metitur, impar existens. quod est absurdum. quare A pariter impar est tantum.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXIIII.

Si par numerus neque sit à binario duplatus, neque dimidium imparem habeat; pariter par est, & pariter impar.

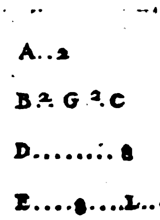
A........................24

Numerus enim A neque sit A binario duplatus, neque dimidium imparem habeat. Dico A & pariter parem, & pariter imparem esse. at vero A pariter esse parem, manifestum est; dimidium enim imparem non habet. Dico etiam pariter imparem esse. nam si A bifariã secemus, & dimidium ipsius bifariam, & hoc semper faciamus, tandem incidemus in aliquem imparem, qui ipsum A per numerum parem metietur. si enim non, incidemus in binarium, atque erit A à binario duplatus. quod non ponitur. quare A & pariter impar est. ostensum autem est & pariter esse parem. est igitur A & pariter par, & pariter impar. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXV.

Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales: auferantur autem à secundo, & ultimo æquales primo; erit vt secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

Sint



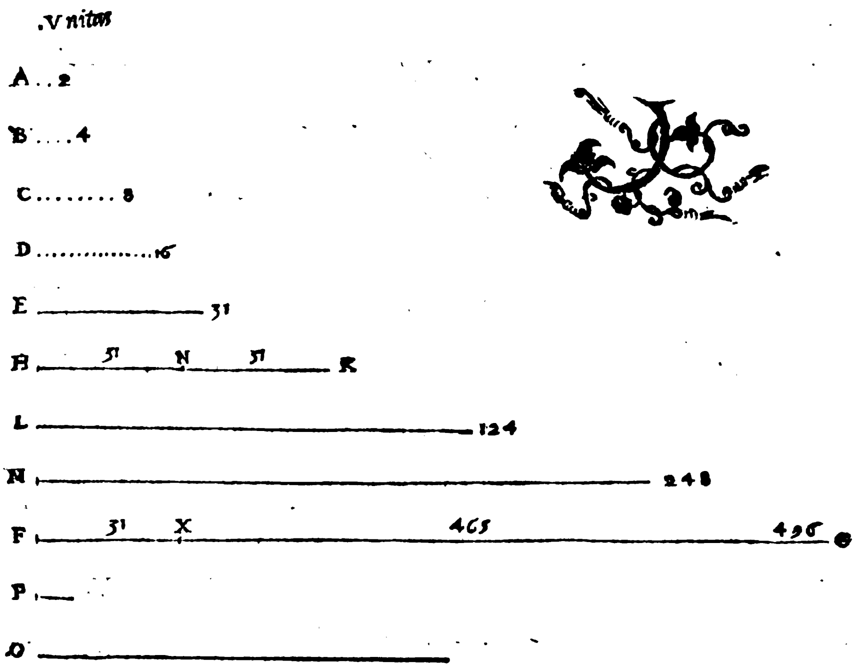
Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A BC D EF, incipientes à minimo A: & auferatur ab ipso BC; & ab EF æqualis ipsi A, videlicet GC FH. Dico vt BG ad A, ita esse EH ad A BC D; ponatur enim ipsi quidem B C æqualis F K; ipsi vero D æqualis FL. Quoniam igitur FK est æqualis ipsi BC, quorum FH est æqualis GC; erit reliquus HK reliquo GB æqualis. & quoniam est vt EF ad D, ita D ad BC, & BC ad A; æqualis autem est D ipsi FL, & BC ipsi FK, & A ipsi FH: erit vt EF ad FL ita LF ad FK, & KF ad FH. quare * diuidendo vt EL ad LF, ita LK ad KF, & KH ad HF, & vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes. est igitur vt KH ad HF, ita EL LK KH ad LF KF HF. atque est KH quidem æqualis BG, FH vero ipsi A, & LF KF HF æquales ipsis D BC A. ergo vt BG ad A, ita est EH ad D BC A. est igitur vt secundi excessus ad primum, ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

* Quare diuidendo vt EL ad LF] *ex ijs, quae nos ad 14 septimi demonstrauimus.*

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO. XXXVI.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales exponãtur in dupla analogia, quoad totus compositus primus fiat, & totus in vltimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.



Ab vnitate enim exponantur quotcumque numeri deinceps proportionales in dupla analogia, quoad totus compositus primus fiat A B C D: & toti æqualis sit E: & E ipsum D multiplicans faciat FG. Dico FG perfectum esse. quot enim sunt A B CD mul-

CD multitudine, tot sumantur ab ipso E in dupla analogia, qui sint E HK L M. ergo ex ęquali vt A ad D, ita erit E ad M: ac propterea qui fit ex E D est æqualis ei, qui ex A M. est autem qui ex E D ipse FG. quare FG est, qui fit ex A M. multiplicās igitur A ipsum M fecit FG. ergo M metitur FG per vnitates, quæ sunt in A. atque est A binarius. duplus igitur est FG ipsius M. sunt autem & M L HK E deinceps dupli inter se. ergo E HK L M FG deinceps proportionales sunt in dupla analogia. auferatur à secundo HK, & ab vltimo FG ipsi primo E æqualis vterque HN, FX. est igitur vt secundi numeri excessus ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes. quare vt NK ad E, ita XG ad M L HK E. atque est NK ipsi E ęqualis. ergo & XG est æqualis ipsis M L HK E. est aūt & FX æqualis ipsi E; atque E ipsis A B C D, & vnitati æqualis. totus igitur FG æqualis est & ipsis E HK L M, & ipsis A B C D, & vnitati; omnesq; ipsum FG metiuntur. Dico FG nullum alium metiri pręter ipsos A B C D E HK L M, & vnitatem. si enim fieri potest, metiatur aliquis numerus ipsū FG, qui sit O: sitq; O nulli ipsorū A B C D E HK L M idē. & quoties O ipsum FG metitur, tot vnitates sint in P. ergo P ipsum O multiplicans fecit FG. sed & E multiplicans D ipsum FG fecit. est igitur vt E ad P, ita O ad D. & quoniam ab vnitate deinceps proportionales sunt A B C D, et post vnitatem A primus est, non metietur D aliquis alius numerus, præter ipsos A B C: & ponitur O nulli ipsorum A B C idem. non igitur O ipsum D metietur. vt autem O ad D, ita E ad P. ergo neque E metietur ipsum P. atque est E primus. omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est. quare E P primi inter se sunt. sed primi & minimi; minimi vero eos, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequenté. atque est vt E ad P, ita O ad D. ergo E ęqualiter metitur ipsum O, atque P ipsum D. sed D nullus alius metitur pręter ipsos A B C. quare P idē est, qui vnus ipsorum A B C. sit idē, qui B. & quot sunt B C D multitudine, tot ab ipso E sumantur E HK L: suntq; E HK L in eadem proportione, in qua B C D. ex æquali igitur ut B ad D, ita est E ad L. ergo qui fit ex B L est ęqualis ei, qui ex D E. sed qui fit ex D E est æqualis ei, qui ex P O. qui igitur fit ex P O ei, qui ex B L æqualis erit. quare vt P ad B, ita est L ad O. estq; P idem qui B. ergo & L idem erit, qui O, quod fieri non potest, etenim O nulli ipsorum expositorum idem ponitur. non igitur ipsum FG metitur aliquis numerus præter ipsos A B C D E HK L M, & vnitaté. atque ostensus est FG æqualis ipsis A B C D E HK L M, et vnitati. perfectus autem numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis. ergo FG perfectus erit. quod oportebat demonstrare.

19. septimi. 10. com. not. 9. cōis. not. 19. septimi. 13. huius. 31. septimi. 23. septimi. 21. septimi. 19. septimi. 19. septimi.

NONI LIBRI FINIS.

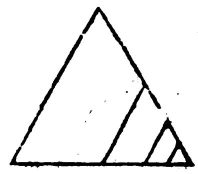
SCHOLIVM.

Propositum est Euclidi in decimo libro tractare de commensurabilibus & incommensurabilibus magnitudinibus, & de irrationalibus, & irrationalibus. non enim eadem sunt incommensurabilia, & irrationalia: quoniam illa quidem natura sunt; irrationalia vero & rationalia positione. si enim quadrati diametrum natura incommansurabilem facit, vt eius latus, hoc non facit temere, sed ex illius rationibus, quæ in ipsa sunt. quare neque irrationale est eorum, quæ natura sunt incommẽsurabilia, sed incommensurabile. etenim natura ipsa hoc facit iuxta omnem mensuram, quæ cum aliquo nihil commune habet. Primum igitur de commensurabilibus, & incommensurabilibus tractat, eorum naturã exquirens: postea vero de rationalibus, & irrationalibus, non tamen omnibus: quidam enim, velut obsistentes ipsa reprehendunt: sed de maxime simplicibus speciebus, quibus compositis infinitæ irrationales gignũtur. Earum nonnullas etiam Apollonius litteris mandauit. Ad scientiam autem attinet, caussas, principia, & simplicia considerare, non singularia, & infinita. Itaque exponit irrationalium simplices species tredecim, quæ tribus modis inuentę sunt, his enim aliæ simplices non inueniuntur. Horum modorum vnus est iuxta analogiam, per quem Euclides inuenit vnam speciem eorũ. alius iuxta compositionẽ, per quẽ sex species; tertius iuxta diuisionẽ, per quem reliquas sex inuenit. Venerũt autem initio ad inquisitionem symmetriæ, hoc est commensurabilitatis Pythagorei primi, ipsam ex numerorum cognitione inuenientes, cum vnitas sit omnium numerorum communis mensura, & in magnitudinibus communis mensura inueniri non possit. Huius caussa est, quòd omnis numerus, iuxta quaslibet sectiones diuisus relinquit particulam aliquam minimã, & quę sectionem non admittit. Omnis autem magnitudo in infinitũ diuisa non relinquit particulam, quæ propterea quòd minima sit, secari non possit. sed & illa in infinitum secta infinitas efficit particulas, quarũ singulę in infinitum secabuntur. & simpliciter magnitudo quatenus quidem diuiditur particeps est principij infiniti, quatenus vero ad totum attinet, termini est particeps. At numerus contra quatenus diuiditur termini, quatenus vero ad totum attinet. particeps est infiniti. Itaque quoniam oportet mensuras minores esse ijs, quæ mensurantur; mensuratur autem omnis numerus, necesse est omnium minimam esse mensuram. quare & magnitudinum, si omnes mensura communi mensurantur, necesse est eam minimam esse. Sed in numeris quidem est communis mensura, terminatur enim, qaemadmodum dictum est: in magnitudinibus vero

non

non item. non igitur communis quædam mensura est omnium magnitudinum. Cum hoc intelligerent pythagoræi, vt fieri potuit, in magnitudinibus mensuram inuenerunt. omnes enim, quas eadem mensura metitur, commensurabiles appellarunt; eas uero, quas non metitur eadẽ mensura, incõmensurabiles. & harum rursus, quascumque alia quæpiam cõmunis mensura metitur inter se cõmensurabiles; quascumque vero non metitur illis incõmensurabiles. & ita sumptis mensuris, omnes possunt esse commensurabiles: rationales aũt omnes, & omnes irrationales esse possunt, vt ad aliquid; propterea quòd commensurabile quidem & incommensurabile natura illis inest: rationale autem, & irrationale positione. Inueniuntur autẽ commensurabiles & incõmensurabiles tripliciter iuxta tres dimensiones, nimirum lineæ, superficies, & solida, vt Theon demonstrauit & alij non nulli. At vero magnitudinem in infinitum diuidi posse, hoc theoremate ostenderunt.

Sumentes enim triangulum æquilaterum, basim bifariam secant: & vni portioni æqualem abscindentes in altero latere, per pũctum diuisionis ad basis partes parallelam ducunt: & rursus æquilaterum constitutum est triangulum, cuius basim eodem modo secantes similiter faciunt, & nũquam desinunt ad trianguli verticẽ. si enim desinerent, sequeretur æquilateri trianguli duo latera reliquo æqualia esse, quod est absurdum.



Quod autem horum vtilis, nec superuacanea sit cognitio, vel ex veteri pythagoreorũ sermone colligi potest. fabulantur enim eũ, qui primus hanc irrationalium contemplationem in apertum tamquam ex adyto proferre est ausus, naufragio perijsse. idq; ea factum de caussa, quòd omne irrationale, atque informe vbique occultari velit. Aiunt præterea, si quis forte alicui horum occurrerit, atque illud publicarit, fore statim, vt in generationis, hoc est profundi locum deferatur, perpetuisq; illic obruatur fluctibus, tanta veneratione hi viri irrationalium hanc cognitionem sunt prosecuti.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER DECIMVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

II.

Incommensurabiles autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

III.

Rectę lineæ potentia commensurabiles sunt, cum ea, quæ ab ipsis fiunt, quadrata idem spacium metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Rectas lineas longitudine commensurabiles seorsum non diffiniuit, quòd in prima diffinitione magnitudinum commensurabilium comprehendantur; sunt enim rectę lineę longitudine commensurabiles, quas eadem mensura metitur.

IIII.

Incommensurabiles autem, cum quadratis, quę ab ipsis fiunt, nullum commune spacium esse contingit.

V.

His positis ostenditur, cuicumque rectę lineæ propositę rectas lineas multitudine infinitas, & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine & potentia; alias vero potentia solum, vocetur autem proposita recta linea, rationalis.

Et

VI.

Et huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia solum, rationales.

VII.

Incommensurabiles vero irrationales vocentur.

VIII.

Et quadratũ, quod à recta linea proposita fit, dicatur rationale.

IX.

Et huic commensurabilia quidem, rationalia.

X.

Incommensurabilia vero, irrationalia dicantur.

XI.

Et rectæ lineę, quæ incommensurabilia possunt, vocentur irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsorum latera; si vero alia quæpiam rectilinea, quę ipsis æqualia quadrata describunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Sunt etiam quędam communes notiones, quibus Euclides in hoc libro utitur, nempe hę.

COMMVNES NOTIONES.

1 *Qualibet magnitudo multiplicata potest omnem propositam magnitudinem eiusdem generis superare.*

2 *Quacumque magnitudo metitur aliquam, metitur quoque eam, quã illa ipsa metitur.*

3 *Quacumque magnitudo metitur totam, & ablatam; etiam reliquam metietur.*

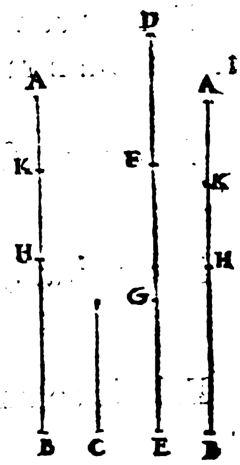
4 *Quęcumque magnitudo metitur duas, vel plures magnitudines, metitur quoque eam, quę ex ipsis componitur.*

THEOREMA I. PROPOSITIO. I.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à maiori auferatur maius, quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est rursus auferatur maius, quam dimidium; & hoc semper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine exposita minor erit.

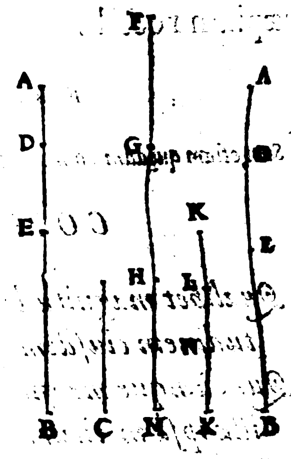
Sint

Sint duæ magnitudines inæquales AB, C, quarum maior AB. Dico si ab ipsa AB auferatur maius, quàm dimidium, & ab eo, quod reliquum est, rursus auferatur maius, quàm dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit. etenim C multiplicata fiet aliquando maior magnitudine AB. multiplicetur, & sit DE ipsius quidem C multiplex, maior autem, quàm AB, diuidaturq; DE in partes ipsi C æquales DF FG GE. & ab ipsa AB auferatur maius, quàm dimidium BH; ab ipsa vero AH rursus maius, quàm dimidium auferatur HK, atque hoc semper fiat, quoad diuisiones, quæ sunt in AB, multitudine æquales fiant diuisionibus, quę in DE: sint igitur diuisiones AK KH HB diuisionibus DF FG GE multitudine æquales. & quoniam maior est DE, quàm AB, & ablatum est ab ipsa quidem DE minus, quàm dimidium EG; ab ipsa vero AB maius, quàm dimidium BH; erit reliquum GD reliquo HA maius. rursus quoniam maior est GD, quàm HA, & ablatum est ab ipsa quidem GD dimidium GF; ab ipsa vero HA maius, quàm dimidium HK; reliquum FD reliquo AK maius erit. estq; FD æqualis ipsi C. ergo C quã AK est maior. minor igitur est AK, quàm C. Ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK exposita minori magnitudine C minor. quod demonstrare oportebat. 1. com. not.



* similiter autem demonstrabitur etiam si dimidia ablata fuerint.

ALITER. Exponatur duæ magnitudines inæquales AB C, sitq; C minor. & quoniam minor est C multiplicata erit aliquando magnitudine AB maior. fiat vt FM, diuidaturq; in partes ipsi C ęquales MH HG GF: & ab ipsa AB auferatur maius, quàm dimidium BE, & ab EA maius, quàm dimidium ED: atque hoc semper fiat, quoad diuisiones, quę sunt in FM, æquales fiant diuisionibus, quę in AB. fiant igitur vt BE ED DA. & ipsi DA vnaquæque ipsarum KL LN NX sit æqualis, atque hoc fiat, quoad diuisiones KX ęquales sint diuisionibus ipsius FM. & quoniam BE maior est, quàm dimidium ipsius AB, erit BE maior, quàm EA. multo igitur maior est BE, quàm DA. sed ipsi DA ęqualis est XN. ergo BE maior est, quàm XN. rursus quoniam ED maior est quàm dimidium EA, erit ED maior, quàm DA. sed ipsi DA est æqualis NL. quare ED, quàm NL est maior. tota igitur DB maior est, quàm XL. ipsi vero DA æqualis est LK. quare tota AB, quàm tota XK maior erit. sed & MF maior est, quàm BA. multo igitur MF, quàm XK est maior. & quoniam XN NL LK inter se æquales sunt; sunt autem & MH HG GF inter se æquales: atque est multitudo earum, quæ sunt in MF æqualis multitudini ipsarum, quæ in XK: erit vt KL ad FG, ita KX ad FM. maior autem est FM, quàm XK. ergo & GF quàm LK est maior. atque est FG ipsi C æqualis; & KL ęqualis ipsi AD. ergo C quàm AD maior erit. quod oportebat demonstrare. 12. quinti. 14. quinti.



SCHOLIVM.

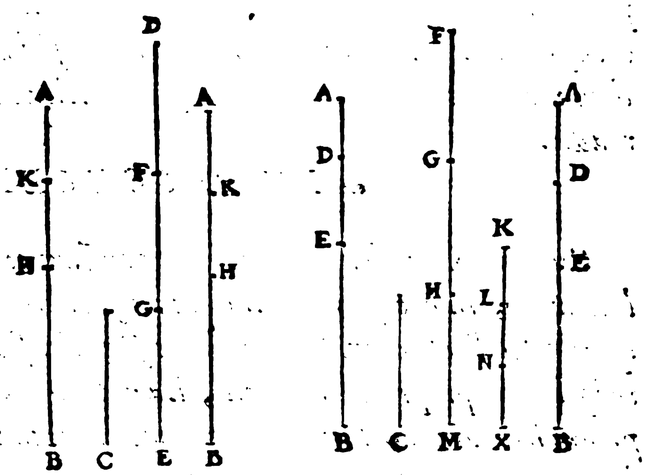
Ex hoc theoremate perspicuum fit in magnitudinibus asymetriam, hoc est incommensurabilitatem inesse. si enim exposita magnitudine minorem assumere licet, & rursus hac minorem, & semper minorem, In magnitudinibus asymetriam inesse.

magnitu-

magnitudines in infinitum secantur ; & non in minimam mensuram determinatam, vt in numeris est vnitas. si igitur non est determinata magnitudo minima, erunt quędam magnitudines incommensurabiles; quas communis aliqua magnitudo, cum indeterminata sit, non metietur.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter autem demonstrabitur, etiam si dimidia ablata fuerint] *auferatur enim ab ipsa AB dimidium BH: & ab ipsa AH dimidium HK: idq; semper fiat. quo ad diuisiones AB ęquales sint diuisionibus ipsius DE: & quoniam DE maior est quàm AB, & ab ipsa quidem DE ablatum est minus quàm dimidium: ab ipsa vero AB ablatam est dimidium; erit reliquum GD maius reliquo HA. rursus quoniam GD maior est quàm HA: & ab ipsa GD ablatum est dimidium GF; ab ipsa vero HA dimidium HK, reliquum FD reliquo KA maius erit: quae deinceps sunt similiter demonstrabuntur.*

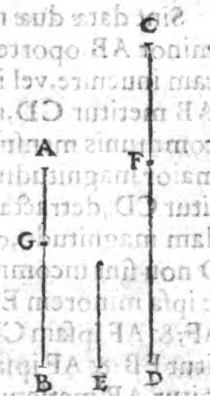


Sed in alia demonstratione. auferatur ab ipsa AB dimidium BE, & ab EA dimidium ED: atque hoc fiat, quoad diuisiones, quae sunt in FM aequales sint diuisionibus, quae in AB: sint autem BE ED DA. & ipsi DA aequalis sit vnaquęque ipsarum KL LN NX. & quoniam BE est aequalis ipsi EA, & EA maior quàm AD, erit BE quàm DA maior. sed ipsi DA est aequalis XN. ergo BE maior est quàm XN. rursus quoniam ED DA sunt aequales ipsis NL LK, tota AB quàm tota XK maior erit. reliqua vero similiter demonstrabuntur.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duabus magnitudinibus inęqualibus expositis detracta semper minore de maiore, reliqua minime pręcedentem metiatur magnitudines incommensurabiles erunt.

Duabus enim magnitudinibus inęqualibus expositis AB CD, quarum minor sit AB, & detracta semper minore de maiore, reliqua minime metiatur pręcedentem. Dico magnitudines AB CD incommensurabiles esse. si enim commensurabiles sint, eas magnitudo quędam metietur. metiatur, si fieri potest, sitq; E: & AB quidem metiens DF relinquat se ipsa minorem CF: CF vero metiens BG relinquat se ipsa minorem AG; & hoc semper fiat, quoad relinquatur quędam magnitudo, quę sit minor ipsa E. itaque fiat, & relinquatur AG ipsa E minor. Quoniã igitur E metitur AB, AB vero metitur DF; & E ipsam DF metitur. sed & metitur totã CD. ergo & reliquam CF metietur. at CF metitur BG. quare & E ipsam BG metitur. metitur autem



& totam

& totam AB. & reliquam igitur AG metietur, maior minorem, quod fieri non pot. non igitur magnitudines AB CD aliqua magnitudo metietur. ergo incommensurabiles erunt AB CD magnitudines. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, detracta semper minore de maiore, reliqua minime præcedentem metiatur, incommensurabiles magnitudines erunt. quod oportebat demonstrare.

SCHOLIVM.

Magnitudines quasdam longitudine esse incommensurabiles ex hoc theoremate docemur. etenim aliquas commensurabiles esse perspicue apparet. magnitudinum autem commensurabilium maximam communem mensuram inuenire, non cuius vis est, sed hominis eruditi: cuius quidem maxima communis mensuræ inuentionem in sequenti theoremate tradit.

ALIVD SCHOLIVM.

Cum in antecedenti theoremate caussam explicauerit incommensurabilitatis; in hoc signum incommensurabilium magnitudinum affert, quando scilicet incommensurabiles sunt. in sextodecimo autem theoremate ipsarum proprium exponit, ita vt & caussa, & signum, & proprium habeatur. At in commensurabilibus magnitudinibus caussam veluti manifestam prætermisit; exponit autem & signum, & proprium.

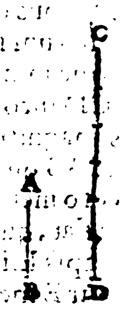
F. C. COMMENTARIVS.

* Et hoc semper fiat, quoad relinquatur quædã magnitudo, quæ sit minor ipsa E.] *quoniam enim AB quidem metiens DF relinquit se ipsa minorem CF; CF vero metiens BG relinquit se ipsa minorem AG; erit AG minor, quàm BG. ergo ex AB ablatum est maius, quàm dimidium ipsius, videlicet BG. & ita semper fiet. quòd cum ex AB semper auferatur maius, quàm dimidium, relinquetur tandem aliqua magnitudo, quæ ipsa E minor erit.*

Ex antecedente.

PROBLEMA I. PROPOSITIO III.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

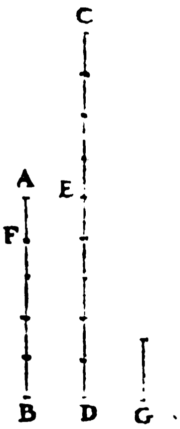


Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles AB CD, quarum minor AB. oportet ipsarum AB CD maximam communem mensuram inuenire. vel igitur AB metitur CD, vel non metitur. & si quidem AB metitur CD, metitur autem & se ipsam; erit AB ipsarum AB CD communis mensura. & perspicuũ est maximam esse; magnitudo enim maior magnitudine AB ipsam AB non metietur. si vero AB non metitur CD; detracta semper minore de maiore, relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ præcedentem metietur; propterea quod AB CD non sint incommensurabiles. & AB quidem metiens ED relinquat se ipsa minorem EC: EC vero metiens FB relinquat se ipsa minorem AF; & AF ipsam CE metiatur. Quoniam igitur AF metitur CE, sed CE metitur FB: & AF ipsam FB metitur: metitur autem & se ipsam. & totam igitur AB metietur. sed AB metitur DE. ergo AF ipsam DE metietur. metitur au-

1. com. not.
1. com. not.

tem

tem & CE. & totã igitur CD metietur. ergo AF ipsas AB CD metitur; ac propterea ipsarum est communis mensura. Dico & maximam esse. nisi enim ita sit, erit aliqua magnitudo maior ipsa AF, quę ipsas AB CD metietur. Itaque metiatur, & sit G. & quoniam G metitur AB, AB vero metitur ED; & G ipsam ED metitur. metitur autem & totam CD. ergo & reliquam CE metietur. sed CE metitur FB. quare G ipsam FB metitur. metitur autem & totam AB. & reliquam igitur metięrtur AF, maior minorem, quod fieri non potest. non igitur magnitudo quædam maior ipsa AF magnitudines AB CD metietur. ergo AF ipsarum AB CD maxima erit communis mensura. Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis AB CD maxima ipsarum communis mensura inuenta est AF. quod facere oportebat.



3. com: not.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipsarum communem mensuram metiri. *

SCHOLIVM.

Tamquam manifestum sit, esse magnitudines commensurabiles, aggreditur hoc theorema, & non illud prius ostendit, quemadmodum in ijs, quæ incommensurabiles sunt. constat enim magnitudines omnes alicuius multiplices, si comparentur cum ea, cuius sunt multiplices, commensurabiles esse.

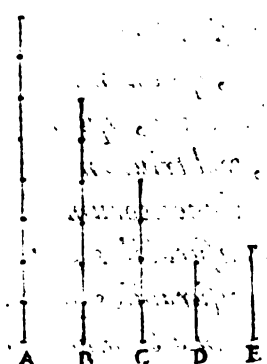
F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc manifestum est si magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipsarum communem mensuram metiri] *sequitur illud ex vltima parte demonstrationis, vt ad secundam propositionem septimi libri in numeris explicauimus.* *

PROBLEMA. II. PROPOSITIO IIII.

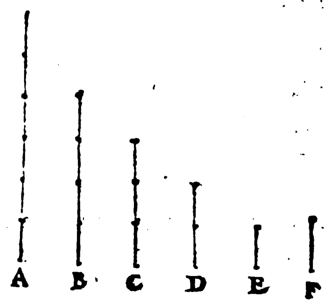
Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram inuenire.

Sint datæ tres magnitudines commensurabiles A B C. oportet ipsarum A B C maximam communẽ mensuram inuenire. sumatur enim duarum A B maxima cõis mensura, quę sit D. itaque D ipsam C vel metitur, vel nõ metitur. metiatur primũ. & quõ D ipsam C metitur, metitur autem & AB; & ipsas A B C metietur. Quare D ipsarum A B C communis est mensura: & manifestum est maximam esse. magnitudo enim maior magnitudine D ipsas A B C non metietur. nam si fieri potest, metiatur eas magnitu-



Ex antecedente.

Ii do maior



do maior ipsa D, quæ sit E. Quoniã igitur E magnitudines A B C metitur, & ipsas A B metietur, & ipsarum A B maximam communẽ mensuram D, maior minorẽ, quod fieri nõ potest. sed non metiatur D ipsam C. Dico primũ C D commensurabiles esse. Quoniã enim commensurabiles sunt A B C, metitur eas aliqua magnitudo, quę scilicet & ipsas A B metitur. ergo & ipsarum A B maximã communem mensurã D. metitur autem & ipsam C. quare dicta magnitudo ipsas C D metitur: ideoq; C D cõmensurabiles sunt. sumatur ipsarum maxima cõmunis mẽsura; & sit E. Quoniã igitur E metitur D, D vero metitur A B; & E ipsas A B metietur. metitur autem & C. ergo E ipsarum A B C communis est mensura. Dico & maximam esse. si enim fieri potest, sit aliqua magnitudo F maior ipsa E, quæ magnitudines A B C metiatur. & quoniam F metitur A B C, & ipsas A B metietur, & ipsarum A B maximam communem mensuram, quæ est D. ergo F metitur D. metitur autem & C. quare F ipsas C D metitur, & ipsarum C D maximam communem mensuram, hoc est E. ergo F ipsam E metietur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur magnitudo quædam maior ipsa E magnitudines A B C D metietur. ergo E ipsarum A B C maxima erit communis mensura, si D ipsam C non metiatur; si vero metiatur erit ipsa D. tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis maxima ipsarum communis mensura inuẽta est. quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc perspicue constat, si magnitudo tres metiatur magnitudines, & ipsarum maximam communem mensuram metiri. similiter & in pluribus magnitudinibus maxima communis mensura inuenietur, & corollarium procedet.

SCHOLIVM.

Quoniam incommensurabiles magnitudines consequitur proportionem non habere, quam numerus ad numerum, & eius conuersum: vult ostendere commensurabiles magnitudines consequi proportionem habere, quam numerus ad numerum, & contra. indiget autem ad hoc lemmate, quó nam modo commensurabilium magnitudinum duarum, vel trium maxima communis mensura inueniatur. sic & in primo arithmeticorum libro fecit. postquam enim ostendit qui nam sint incommensurabiles, quos primos appellat, propterea quòd non omnino incommensurabiles sunt, vt magnitudines; ostendere volens omnem numerum ad omnem numerum proportionem habere vel multiplicem, vel superparticularem, vel superpartientem, vel multiplicem super-

particularem

particularem, vel multiplicem superpartientem, quos ipse breuitatis causa ex minori nominauit, vel partem, vel partes. per partem intelligens submultiplicem, vel subsuperparticularē, vel submultiplicem superparticularem. per partes vero subsuperpartientem, vel submultiplicem superpartientem. hoc igitur volens ostendere eo indigebat, quo modo commensurabilium maxima cōmunis mensura inueniatur. quod etiam hoc loco obseruauit. Postea in quinto theoremate ostēdet cōmēsurabiles magnitudines inter se proportionem habere, quam numerus ad numerum. immo vero omnem commensurabilem magnitudinem omnis commensurabilis magnitudinis, minorem maioris, vel partem esse, vel partes: hoc enim est proportionem habere, quam numerus ad numerum; non tamen contra: latius enim patet numerus. quamobrem eo vsus est. Sciendum autem & ipsas demonstrationes, quæ ex arithmeticis petuntur, incommutabiles esse.

ALIVD.

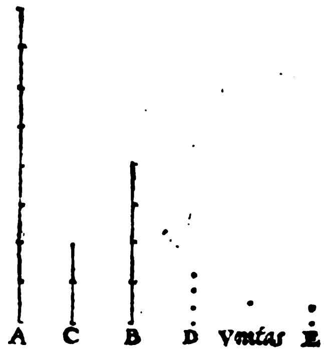
Postquam docuit, quæ sint magnitudines incommensurabiles, deinceps quid ipsas consequatur ostendet; & insuper quid consequatur commensurabiles in quinto, & sexto theoremate. & quoniam indigebat cō muni mensura earum, quæ sunt in symmetria, videlicet commensurabilium, hoc assumit in tertio, & quarto theoremate, quo pacto inueniendæ sint commensurabilium communes mensuræ. septimum autem theorema inquirit; quę consequantur incommensurabiles magnitudines non simpliciter, sed secundum speciem, vt incommensurabiles longitudine, vel potentia; nam de incommensurabilibus secundum priuationem nihil dixit; vt pote, quæ non sint ipsis vtiles ad tractationem de irrationalibus. In his tradit ortum earum, quę longitudine, & potentia commensurabiles sunt, & incommensurabiles: his enim indiget in nono theremaoe, & sequentibus, in quibus iuxta analogiam, & iuxta compositionem, & diuisionem commensurabilitas, & incommensurabilitas inquiritur vsque ad tertium decimum theorema.

THEOREMA III. PROPOSITIO. V.

Commensurabiles magnitudines inter se proportionem habent, quam numerus ad numerum.

Sint commensurabiles magnitudines A B. Dico magnitudinem A ad B proportionem habere, quam numerus ad numerum. Quoniam enim A B commensurabiles sunt, metietur ipsas aliqua magnitudo. metiatur, & sit C. & quoties C ipsam A metitur, tot vnitates sint in D; quoties autem C metitur B, tot vnitates sint in E.

quoniam igitur C ipsam A metitur per vnitates, quę sunt in D: metitur autem & vnitas D per vnitates, quæ in ipso sunt; vnitas æqualiter metietur numerum D, atque magnitudo C ipsam A. ergo vt C ad A, ita est vnitas ad D; & conuertendo vt A ad C, ita D ad vnitatem. Rursus quoniam C ipsam B metitur per vnitates, quæ sunt in E; metiturq́; vnitas numerum E per vnitates, quę in ipso sunt: vnitas numerum E ęqualiter metietur, atque C ipsam B. est igitur vt C ad B, ita vnitas ad E. ostensum autem est & vt A ad C, ita D esse ad vnitatē. quare ex ęquali vt A ad B, ita numerus D ad E numerum. commēsurabiles igitur magnitudines A B inter se proportionem habent, quam D numerus ad numerū E. quod oportebat demonstrare.



SCHOLIVM.

Hoc proprium est commensurabilium magnitudinum, minor maioris vel pars est, vel partes. si quidem igitur pars, vel proportionem habebit, quam vnitas ad numerum, vel quam numerus ad numerum; si vero partes proportionem habebit, quam numerus ad numerum. pars enim submultiplicem facit proportionem: partes vero vnam reliquarum subproportionalium. si igitur rectæ lineæ sint, & plana, quæ ab ipsis fiunt, & solida proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. si vero plana, & quæ ab ipsis solida, non item rectæ lineæ, nisi proportio numerorū sit quadrati ad quadratum. & si solida nō omnino quę ipsa præcedunt, nisi proportio sit cubi ad cubum. quòd si solida non habeant proportionem, quam numerus ad numerum, neque plana, neque rectæ lineæ habebunt: non enim sunt commensurabiles. In hoc autem theoremate & sequenti de commensurabilibus, & incommensurabilibus simpliciter differit; at in septimo de incommensurabilibus longitudine. ex quo manifestum est & de potentia incommensurabilibus. In octauo denique ortum tradit commensurabilium, & in commensurabilium longitudine & potentia.

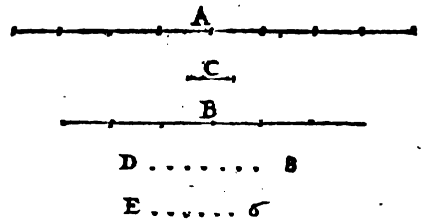
F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonstratis possumus illud quoque problema absoluere.

Propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus, quam inter se proportionem habeant in numeris inuenire.

Sint propositae magnitudines commensurabiles A B. quarum oporteat proportionem in numeris inuenire. inueniatur ex 3 huius maxima earum communis mensura, quae sit C. & quoties C metitur A, tot vnitates sint in D: quoties autem metitur ipsum B, tot vnitates sint in E. habebit igitur A ad B proportionē eā, quā habet numerus D ad E numerum. itaque si A B rectae lineae sint, & earum quadrata erunt cōmensurabilia, & inter se proportionem habebunt, quam numerus

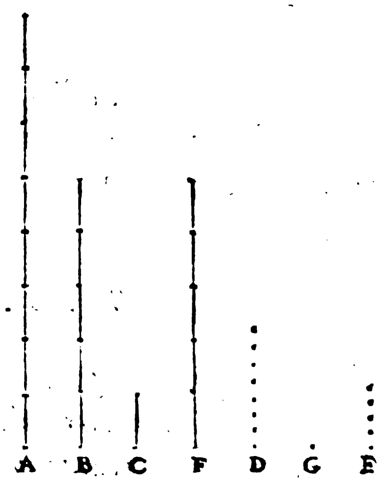
numerus quadratus ad quadratum numerum. si vero sint superficies, vel numeri D E sunt quadrati, vel non quadrati; & si non sunt quadrati, vel proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, vel non. & si quidem sunt quadrati, vel proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, rectae lineae, quae ipsas superficies, vel superficies ipsis aequales possunt, erunt longitudine commensurabiles. si vero numeri non habent proportionem, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum, erunt longitudine incommensurabiles, quamquam potentia commensurabiles sint. quae omnia in nona propositione huius libri demonstrabuntur.



THEOREMA IIII. PROPOSITIO. VI.

Si duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles magnitudines erunt.

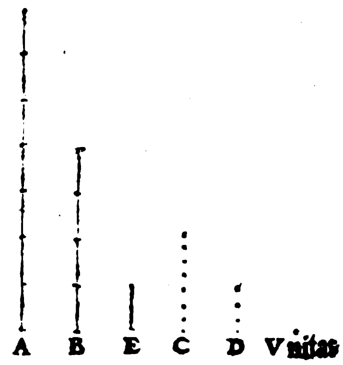
Duæ enim magnitudines A B inter se proportionem habeant, quam D numerus ad numerum E. Dico A B magnitudines cōmēsurabiles esse. quot enim vnitates sunt in D, in tot partes æquales diuidatur magnitudo A, & vni ipsarum æqualis sit C: quot autem vnitates sunt in E, ex tot magnitudinibus æqualibus ipsi C cōponatur magnitudo F. Quoniam igitur quot sunt in D vnitates, tot magnitudines sunt in A, ipsi C æquales; quæ pars est vnitas ipsius D, eadem pars erit & C ipsius A. vt igitur C ad A, ita est vnitas ad D. metitur autem vnitas ipsum D numerū. ergo & C ipsam A metietur. & quoniam est vt C ad A, ita vnitas ad D numerum, erit conuertendo vt A ad C, ita D numerus ad vnitatem. rursus quoniam quot vnitates sunt in E, tot sunt & in F magnitudines ipsi C ęquales; vt C ad F, ita erit vnitas ad E numerum. ostensum autem est & vt A ad C, ita D esse ad vnitatem. ergo ex æquali ut A ad F, ita est D ad E. sed ut D ad E, ita A ad B. & ut igitur A ad B, ita A ad F. quòd cum A ad utramque ipsarum B F eandem habeat proportionem, erit B ipsi F ęqualis. metitur 9.quinti.
autem C ipsam F. ergo & ipsam B metietur. sed & metitur A. quare C ipsas A B metitur. commensurabilis igitur est A ipsi B. Quare si duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles magnitudines erunt. quod oportebat demonstrare.



ALITER.

Duæ enim magnitudines A B inter se proportionem habeant, quam numerus C ad numerum D. Dico magnitudines commensurabiles esse. quot enim unitates sunt in C, in tot partes ęquales A diuidatur, & uni ipsarum ęqualis sit E. est igitur ut unitas ad C numerum, ita E ad A. est autem & ut C ad D, ita A ad B. ergo ex æquali

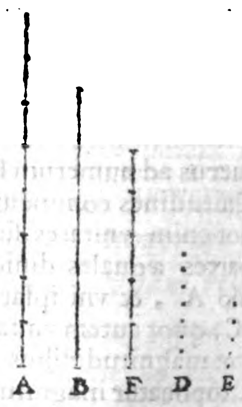
æquali ut unitas ad D numerum, ita E ad B. sed unitas metitur D. ergo & E ipsam B metitur. metitur autem & E ipsam A, quoniam & unitas metitur C. quare E utramque ipsarum A B metietur; ideoque A B commensurabiles sunt; atque est E communis ipsarum mensura.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si sint duo numeri, vt D E, & recta linea vt A, fieri posse, vt D numerus ad numerum E, ita rectam lineam A ad aliam rectam lineam. si autem ipsarum A F media proportionalis sumatur, ut B, erit vt A ad F, ita quod fit ex A ad id, quod ex B, hoc est vt prima ad tertiam, ita figura, quæ fit à prima ad eam, quæ à secunda similem, & similiter descriptam. sed vt A ad F, ita D numerus ad numerum E. factum igitur est & vt D numerus ad numerum E, ita quod fit ex recta linea A ad id, quod ex recta linea B.

Cor. 20. sexti



SCHOLIVM.

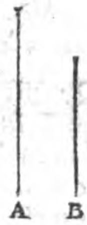
Si quadrata vel parallelogramma, vel quæcunque spacia proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines: quando autem proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & ipsæ commensurabiles sunt; & rectæ lineæ, quæ ipsas possunt, longitudine sunt commensurabiles. vel quando rectæ lineę inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, & ipsę commensurabiles sunt longitudine, & quæ ab ipsis fiunt quadrata, vel spacia quadratis ipsarum ęqualia proportionem habere coguntur, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ad plura igitur se extendunt potentia commensurabiles, quàm commensurabiles longitudine; & continentiores sunt, vt ex sequentibus theorematibus fiet manifestum.

THEOREMA V. PROPOSITIO. VII.

Incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

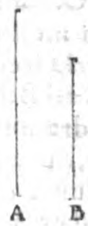
Sint

Sint incommensurabiles magnitudines A B. Dico A ad B proportionem non habere, quam numerus ad numerum. si enim A ad B proportionem habet, quam numerus ad nnmerum, commẽsurabilis erit A ipsi B. atqui non est commensurabilis. nõ igitur A ad B proportionem habet, quam numerus ad numerum. quare incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA VI. PROPOSITIO. VIII.

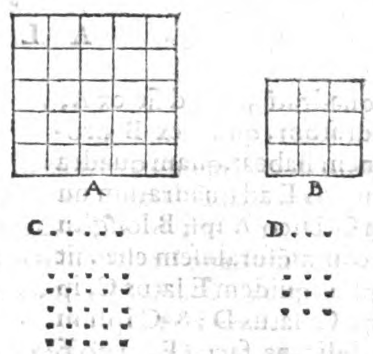
Si duæ magnitudines inter se proportionem non habeãt, quã numerus ad numerũ, incõmẽsurabiles erũt.



Duæ enim magnitudines A B inter se proportionem non habeãt quam numerus ad numerum. Dico magnitudines A B incommensurabiles esse. si enim commensurabilis est A ipsi B, proportionem habet, quam numerus ad numerum. atqui non habet. incommensurabiles igitur sunt A.B magnitudines. ergo si duę magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. IX.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. & quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine commensurabilia. quadrata vero, quæ à longitudine incommensurabilibus rectis lineis fiunt, inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

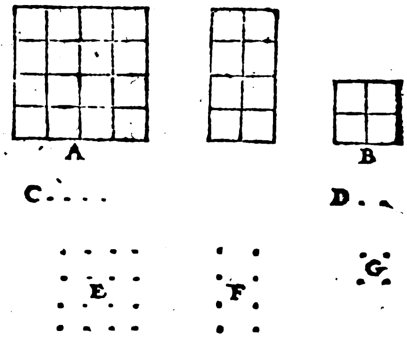


Sint rectæ lineæ A B longitudine cõmensurabiles. Dico quadratum quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, eam proportionem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quoniam enim A ipsi B longitudine est commensurabilis, habebit A ad B proportionem, quam numerus ad numerum. (5. huius.) habeat eam, quam numerus C ad numerũ D. Quoniam igitur est vt A ad B, ita C numerus ad numerum D; & proportionis quidem, quam habet A ad B, dupla est proportio quadrati, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B; similes enim figuræ in dupla sunt proportione homologorum laterum: (Coroll. 20. sexti.) proportionis vero, quã habet numerus C ad numerum D dupla est proportio quadrati ipsius C ad ipsius D quadratum; etenim duorũ numerorũ quadratorum vnus medius proportionalis est numerus, & quadratus ad quadratum duplam proportionem habet eius, (11. octaui.) quam latus habet ad latus: erit vt quadratum, quod fit ex A ad quadratum,

quod

quod ex B, ita quadratus numerus, qui fit ex C numero ad quadratum numerum qui ex D.

ALITER.



Quoniam enim cõmensurabilis est A ipsi B longitudine, proportionẽ hēt quã numerus ad numerũ. habeat quã C ad D. & C se ipsum quidẽ multiplicans faciat E, multiplicans vero D faciat F: & D se ipsum multiplicans faciat G. itaque quoniã C se ipsum quidem multiplicãs fecit E, multiplicãs vero D fecit F, erit vt C ad D, hoc est vt A ad B, ita E ad F. sed vt A ad B, ita quadratum, quod fit ex A ad rectãgulum, quod fit ex A B. est igitur vt quadratum, quod ex A ad rectangulũ, quod ex A B, ita E ad F. rursus quoniam D se ipsum multiplicans fecit G, vt C ad D, hoc est vt A ad B, ita erit F ad G. vt autem A ad B, ita rectangulũ, quod fit ex A B ad quadratũ, quod fit ex B. ergo vt rectangulum, quod ex A B ad quadratum, quod ex B, ita F ad G. sed vt quadratum, quod fit ex A ad rectangulum, quod ex A B, ita erat E ad F. ex æquali igitur ut quadratum ex A ad quadratum ex B, ita E ad G. est autem vterque ipsorum E G quadratus. & E quidem est à numero C; G uero ab ipso D. quadratum igitur, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Sed sit vt quadratum, quod fit ex A ad quadratũ, quod ex B, ita quadratus numerus, qui est à numero C ad quadratum numerum, qui à numero D. Dico A ipsi B longitudine commensurabilem esse. Quoniam enim est vt quadratum, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, ita quadratus numerus, qui est à numero C ad quadtatum numerum, qui à numero D. sed proportio quidem quadrati, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, dupla est proportionis, quã hēt A ad B: proportio vero quadrati numeri, qui est à numero C ad quadratũ numerũ, qui à numero D itidẽ dupla est proportionis, quã hēt C numerus ad numerum D. est igitur vt A ad B, ita C ad D. ergo A ad B proportionem habet, quam numerus C ad D numerum: ac propterea A ipsi B longitudine est commensurabilis. quod oportebat demonstrare.

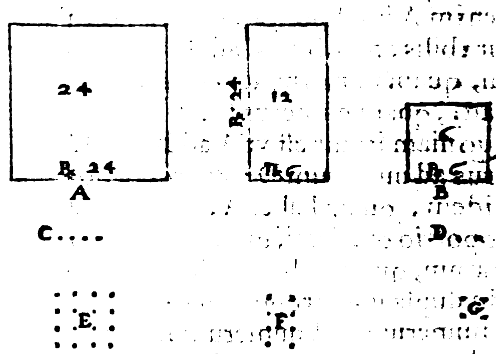
1. sexti.

1. sexti.

Coroll. 20. sexti. 11. octaui.

6. huius.

ALITER.



Sed quadratũ, quod fit ex A, ad quadratum, quod ex B proportionem habeat, quam quadratus numerus E ad quadratum numerum G. Dico A ipsi B longitudinem commẽsurabilem esse. sit enim ipsius quidem E latus C, ipsius vero G latus D; & C ipsum D multiplicans faciat F. ergo E F G deinceps proportionales sũt in proportione, quæ est C ad D. & quoniam quadratorum, quæ fiunt ex A B, medium proportionale est rectangulum, quod ex A B: numerorum vero quadratorum E G medium proportionale est F, erit vt quadratum

17. septimi.

17. septimi.

dratum,quod fit ex A,ad rectangulum,quod ex A B,ita E ad F. vt autem rectangulum ex A B ad quadratum ex B, ita F ad G: sed vt quadratum ex A ad rectangulũ ex A B, ita A ad B.ergo A B commensurabiles sunt; proportionem enim habent, quam numerus E ad numerum F,hoc est quam C ad D.vt enim C ad D,ita E ad F: 17.septimi.
nam C se ipsum quidem multiplicans fecit E,multiplicans autem D ipsum F fecit. est igitur vt C ad D,ita E ad F.

Sed incommensurabilis sit A ipsi B lõgitudine.Dico quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem nõ habere,

A 4 B 32

quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ.si enim quadratũ ex A ad quadratũ ex B proportionẽ habeat, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine.non est autem. non igitur quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.Rursus quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Dico A ipsi B longitudine incommensurabilem esse.si enim commensurabilis sit A ipsi B longitudine, habebit quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. atqui non habet. non igitur A ipsi B longitudine est commensurabilis. ergo quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & quę deinceps sunt.quod oportebat demonstrare.

COROLLARIVM.

Et manifestum est ex iam demonstratis rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. & quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

Quoniam enim quadrata,quæ fiunt à rectis lineis longitudine commensurabilibus proportionem habent, quam quadratus nnmerus ad quadratum numerum; C
quę vero proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilia sunt: erunt rectę lineę commensurabiles longitudine, non 6.huius.
solum longitudine,sed & potentia commensurabiles.

Rursus quoniam quæcunque quadrata inter se proportionem habent,quam quadratus numerus ad quadratum numerum,latera habent longitudine commensurabilia, vt ostensum est, quæ etiam potentia commensurabilia sunt, cum eorum quadrata proportionẽ habeãt,quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ:quęcunq; quadrata proportionẽ nõ habẽt, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ,sed simpliciter quã aliquis alius numerus ad aliũ numerũ,cõmẽsurabilia sunt,hoc est rectæ lineæ à quibus ipsa describũtur, cõmẽsurabiles sunt potẽtia,nõ aũt & longitudine. ergo rectæ lineæ longitudine quidem commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt: potentia vero commensurabiles non omnino & longitudine, nisi earum quadrata proportionem habeant,quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Dico & longitudine incommensurabiles non omnino & potentia incommensurabiles esse,Qm̃ potentia cõmensurabiles possunt proportionem non habere,quam numerus ad numerum, ideoq; cum potentia commensurabiles sint, longitudine sunt incommensurabiles. ergo non quæ longitudine incommensurabiles sunt, omnino & potentia:sed longitudine incommensurabiles existentes possunt

G sunt potentia & incommensurabiles, & commẽsurabiles esse. potentia vero in commensurabiles omnino & longitudine incommensurabiles sunt. si enim longitudine sint commensurabiles, & potentia commensurabiles erunt. atqui ponuntur in cõmensurabiles. quod est absurdum. potentia igitur in commensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles erunt.

SCHOLIUM.

Hoc theorema Theæteti est inuentum, cuius mentionem facit Plato in Theæteto. sed illic quidem particulatim magis exponitur, hic autem vniuersè. namq; illic quadrata, quæ à quadratis numeris mensurantur, commensurabilia etiam latera habere dicit. particularis autem est hæc propositio: neque enim omnia commensurabilia spacia, quorum & latera commensurabilia sunt, comprehendit; si quidem quadratorum spaciorum commensurabilium, videlicet 18 & 8 latera, & si non secundum mensuram numerorum inueniantur, aliter tamen commensurabilia sunt. at ipsa spacia à quadratis numeris minime mensurantur, quamquam etiam mensurari possint. merito igitur hoc loco non horum modum diffiniuit, sed quæ (vt inquit) proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & non frustra quadrati numeri mentio facta est. si enim tantum dixisset, quam numerus ad numerum, redundans esset diffinitio, quoniam quadrata, quæ inter se duplam proportionem habent, commensurabilia habere latera oporteret. non habent autem, est enim maioris latus ad latus minoris, vt quadrati diameter ad eius latus. si igitur ita dixisset, quam numerus ad numerum, redundaret diffinitio, comprehendens etiam ea, quæ latera commensurabilia non habent. Si vero dixisset, quæ à quadratis numeris mensurantur, diffinitio diminuta esset, non comprehendens ea, quę cum latera commensurabilia habeant, à quadratis numeris non mensurantur: & proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Quamobrem recte appositum est, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; comprehenduntur enim omnia spacia, quæ & si à quadratis numeris non mensurantur, tamen cum sint commensurabilia, latera quoque commensurabilia habent. nam 18 & 8 commensurabilibus existentibus, propterea quòd à lateribus commensurabilibus describuntur, inueniemus eorum latera, cum proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. vt enim 9 ad 4, ita 18 ad 8. Itaque sumentes latera ipsorum 9 & 4, æqualiter secabimus propositorum quadratorum latera: & habebimus commensurabilitatẽ. namque vt quadrata ad quadrata, ita sunt latera ad latera.

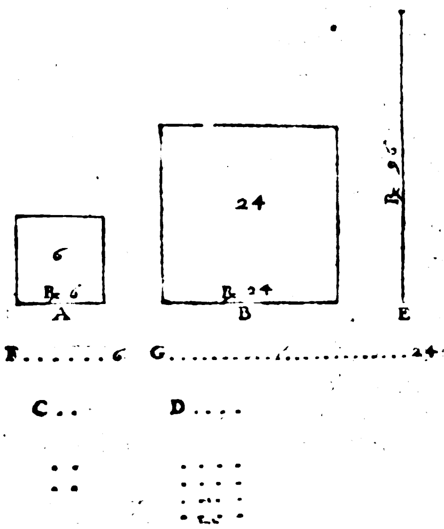
Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fuerint quadrata] *intellige rectas lineas longitudine commensurabiles inter se se, non expositae rationali: hoc enim non solum rationalibus contingit, sed & irrationalibus, vt deinceps apparebit.* A

Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine commensurabilia] *Per quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum non solum intelligenda sunt ea, quae totidem quadratas mensuras continent, quot vnitates sunt in numeris quadratis; sed et quae inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum. sint enim duo numeri plani similes F G, & recta linea A. sitq; F 6, & G, 24 & fiat ex corollario sextę propositionis huius, vt F ad G, ita A ad aliam lineam, quae sit E. & inter A E sumpta media proportionali B, erit vt prima ad tertiam, videlicet vt A ad E, ita quadratum, quod ex prima ad quadratum, quod ex secunda, hoc est ita quadratum, quod ex A ad quadratum, quod ex B. sed vt A ad E, ita erat numerus F ad numerum G. vt igitur numerus F ad G numerum, ita erit quadratum ex A ad quadratum ex B. ideoq; quadratum ex A continebit totidem mensuras quadratas, vt exempli gratia totidem pedes quadratos, quot vnitates sunt in F, videlicet sex, & quadratum ex B totidem pedes quadratos continebit, quot vnitates sunt in G, hoc est 24. & quoniam numeri plani similes F G inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; habebit etiam quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem eam, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum. habeat quam quadratus numerus, qui fit ex C ad quadratum numerum, qui fit ex D. similiter demonstrabitur eorum quadratorum latera A B, quamquam certo numero exprimi non possint, tamen inter se longitudine commensurabilia esse. & idcirco proportionem habere, quam numerus ad numerum. Iuniores eiusmodi latera radices quadratas, vel radices simpliciter appellãt; dicetur enim A radix 6, & B radix 24. atque est ℞ 6 ad ℞ 24, vt 1 ad 2. nam cum quadratum ex B quadruplum sit quadrati ex A, erit B ipsius A dupla. similes enim rectilineę figurae in dupla sunt proportione homologorum laterum.* B

Coroll. 20. sexti.

26. octaui.

Coroll. 20. sexti.



Quoniam enim quadrata, quæ fiunt à rectis lineis longitudine commensurabilibus] *Ostendit quomodo prima corollarij pars sequatur ex prima parte theorematis.* C

Rursus quoniam quæcunque quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum] *Rursus ostendit quomodo idem ex secunda parne theorematis sequatur.* D

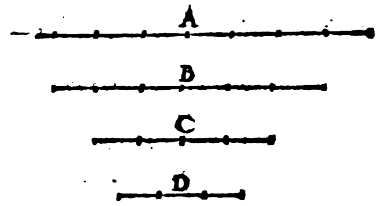
Quęcunque quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed simpliciter quam aliquis alius numerus ad alium numerum] *Hoc ad secundam partẽ Corollarij attinet, & sequitur ex vltima parte theorematis.* E

Dico & longitudine incommensurabiles] *Hoc pertinet ad tertiam partem corollarij, & ex tertia parte theorematis explicatur.* F

Potentia vero incommensurabiles omnino & longitudine incommensurabiles sunt] *Hęc est vltima corollarij pars, quae per deductionem ad id, quod fieri non potest ex prima parte theorematis demonstratur.* G

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. X.

Si quattuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartę commensurabilis erit. & si prima secundę fuerit incommensurabilis, & tertia quartæ incommensurabilis erit.



Sint quattuor magnitudines proportionales. A B C D, sitq; vt A ad B, ita C ad D, & sit A ipsi B commensurabilis. Dico & C ipsi D commensurabilem esse. Quoniam
5.huius. enim A commensurabilis est ipsi B, habebit A ad B proportionem, quam numerus ad numerum: atque est vt A ad B, ita C ad D. ergo & C ad D proportionem habet, quam numerus ad numerum. commensu-
6.huius. rabilis igitur est C ipsi D. sed A ipsi B sit incommensurabilis. dico & C ipsi D incō-
7.huius. mensurabilem esse. Quoniam enim incommensurabilis est A ipsi B, non habebit A ad B proportionē, quam numerus ad numerum. est aūt vt A ad B, ita C ad D. ergo neque C ad D proportionem habet, quam numerus ad numerum. si enim C ad D proportionem habeat, quā numerus ad numerum; & A ad B eam, quā numerus ad numerū proportionē habebit; atq; erit A ipsi B cōmēsurabilis. quod est absurdū; incōmēsurabilis enim ponitur. ergo C ad D proportionē nō hēt, quā numerus ad nu-
8.huius. rum; ideoq; C ipsi D est incommensurabilis. Si igitur quattuor magnitudides proportionales fuerint; prima vero secundæ fuerit commensurabilis, & tertia quartæ commensurabilis erit: & si prima secundæ fuerit incommensurabilis, & tertia quartæ incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.

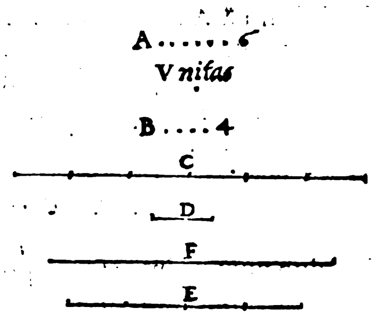
LEMMA I.

26.octaui. *Ostensum est in arithmeticis numeros planos similes inter se proportionem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: &*
A *si duo numeri inter se proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos similes planos esse. & manifestum est ex his, dissimiles planos numeros, hoc est non habentes latera inter se proportionalia proportionem non habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. si enim haberent, similes plani essent. quod non ponitur. ergo dissimiles plani inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.*

LEMMA II.

Duobus datis numeris, & recta linea, facere vt numerus ad numerum, ita quadratum rectę lineæ ad alterius rectæ lineæ quadratum.

Sint dati quidem duo numeri A B; & data recta linea C. oportet inuenire alteram rectam lineam, ita vt quadratum, quod fit ex C ad quadratum ex altera recta linea eam proportionem habeat, quam numerus primus ad secundum numerum. quot enim vnitates sunt in A, in tot partes ęquales diuidatur C recta linea, & uni vni ipsarum æqualis sit D. quot autem vnitates sunt in B, ex tot partibus ipsi D æqualibus cõponatur recta linea E. est igitur vt vnitas ad A, ita D ad C: & conuertendo vt A ad vnitatem, ita C ad D. est autem & vt vnitas ad B, ita D ad E. ergo ex æquali vt A ad B, ita recta linea C ad ipsam E. sumatur rectarum linearũ C E media proportionalis F. est igitur vt C ad E, ita quadratum, quod fit ex C ad id, quod ex F quadratum, nãque vt prima ad tertiam, ita quadratum, quod fit ex prima ad quadratum, quod ex secunda simile, & similiter descriptum. sed vt C ad E, ita est A ad B. & vt igitur A ad B, ita quadratum ex C ad quadratum ex F. quare C F sunt rectæ lineæ, quas quærebamus. etenim F inuenta est. Coroll. 20. sexti.



LEMMA III.

Duos numeros planos dissimiles inuenire, hoc est vt inter se proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Exponantur quattuor numeri A B C D, ita vt non sit sicut A ad C, ita B ad D, & fiat ex A B numerus E, & C D numerus F. perspicuum est E F numeros planos esse, planos autem dissimiles, quoniam latera proportionalia non sunt. quod facere oportebat.

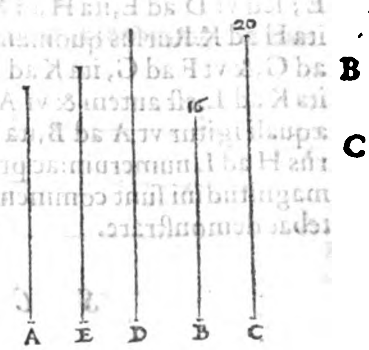
A.....5
B...3
C....4
D..2
E...............15
F........8

PROBLEMA III.

PROPOSITIO. XI.

Propositæ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

Sit proposita recta linea A. oportet ipsi A inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia. exponantur enim duo numeri B C inter se proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est dissimiles plani: & fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D: hoc enim ante traditum est. ergo quadratum ex A commensurabile est quadrato ex D. & quoniam B ad C proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum, neque quadratum ex A ad quadratũ ex D proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum. incommensurabilis igitur est A ipsi D longitudine. sumatur ipsarum A D media proportionalis E. est igitur vt A ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E. sed A ipsi D longitudine est in commensurabilis. ergo & quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit. incommensurabilis 9. huius. Coroll. 20. sexti. D



rabilis igitur est A ipsi E potentia. ergo propositæ rectæ lineæ rationali, a qua dicebamus mensuras sumi, vt ipsi A potentia quidem commensurabilis inuenta est D, hoc est rationalis potentia tantum commensurabilis, irrationalis vero E. irrationales enim vniuerse appellantur, quæ rationali & longitudine, & potentia incommensurabiles sunt.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et si duo numeri inter se proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos similes planos esse] *Hoc ab Euclide non demonstratur in arithmeticis, sed nos ad vigesimam sextam octaui libri demonstrauimus.*

B Exponantur enim duo numeri B C inter se proportionem non habentes, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est dissimiles plani] *Hoc in promptu est, sed tamen quomodo fiat in tertio Scholio antecedentium explicatur.*

C Et fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D, hoc enim ante traditũ est] *In corollario scilicet sexti theorematis. & quamquam hoc ex illo perspicue appareat, tamen secundum lemma, quod in grecis codicibus inuenitur hoc loco apponere non inutile iudicauimus.*

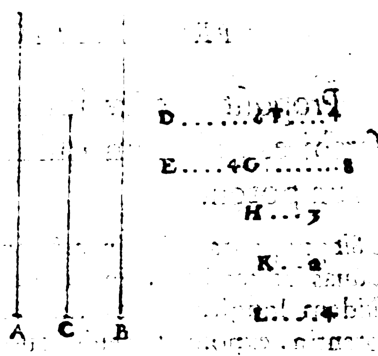
D Ergo & quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit] *ex antecedenti theoremate.*

THEOREMA IX. PROPOSITIO XII.

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt.

Vtraque enim ipsarum A B ipsi C sit commensurabilis. dico & A ipsi B commensurabilem esse. Quoniam enim A commensurabilis est ipsi C, habebit A ad C proportionem, quã numerus ad numerum. habeat quam numerus D ad ipsum E. Rursus quoniam commensurabilis est B ipsi C, habebit C ad B proportionem, quam numerus ad numerum. habeat quam F ad G. & proportionibus datis quibuscunque, videlicet quam habet D ad E, & quam habet F ad G, sumantur numeri deinceps proportionales in datis proportionibus H K L; sitq; vt D ad E, ita H ad K: vt autem F ad G, ita K ad L. Quoniam igitur est vt A ad C, ita D ad E; sed vt D ad E, ita H ad K: erit & vt A ad C, ita H ad K. Rursus quoniam est vt B ad C, ita F ad G, & vt F ad G, ita K ad L; erit & vt B ad C, ita K ad L. est autem & vt A ad C, ita H ad K. ex æquali igitur vt A ad B, ita H ad L. ergo A ad B proportionem habet quam numerus H ad L numerum: ac propterea A ipsi B est commensurabilis. Quæ igitur eidẽ magnitudini sunt commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt. quod oportebat demonstrare.

5. huius. 4. octaui. 11. quinti. 6. huius.



SCHOLIVM.

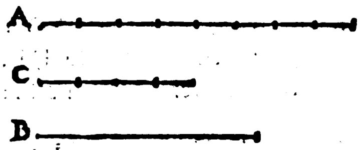
Hoc ab identitate non conuertitur. non enim quę inter se sunt commensurabiles, & eidem commensurabiles sunt; quemadmodum neque æquales inter se eidem sunt æquales, sed contra. nam contingit & incõ mensurabiles

mensurabiles esse eidem, & commensurabiles; quod sequens theorema, & eius conuersum ostendet.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XIII.

Si sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis; magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

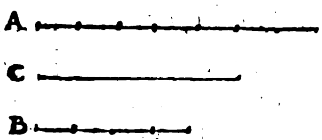
Sint enim duę magnitudines A B, alia autem sit C: & A quidem ipsi C commensurabilis sit; B vero eidem C incommensurabilis. Dico & A ipsi B incommensurabilem esse. si enim commensurabilis est A ipsi B, est autem & C commensurabilis ipsi A; erit & C ipsi B cõmensurabilis. quod non ponitur. Ex antecedente.



THEOREMA XI. PROPOSITIO. XIIII.

Si duę magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis, & reliqua eidem incommensurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commensurabiles A B; altera vero ipsarum A alicui magnitudini C sit incommensurabilis. Dico & reliquam B ipsi C incommensurabilem esse. si enim commensurabilis est B ipsi C, est autem & A commensurabilis ipsi B; & A ipsi C commensurabilis erit: sed & incommensurabilis. quod fieri non potest. non igitur commensurabilis est B ipsi C. ergo est incommensurabilis. si igitur duæ magnitudines cõmensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis; & reliqua eidem incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare. 12 huius.

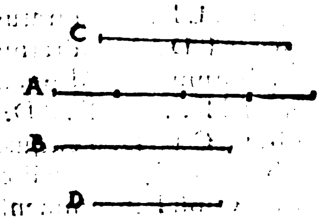


F. C. COMMENTARIVS.

Ex iis, quae proxime demonstrata sunt, licet illud etiam demonstrare.

Quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.

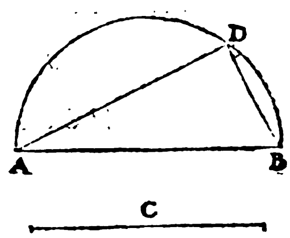
Sint duæ magnitudines incommẽsurabiles A B: sitq; C ipsi A commensurabilis: & D commensurabilis ipsi B. Dico C D inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A C commensurabiles sunt, atque est A ipsi B incommensurabilis; & C ipsi B incommensurabilis erit. Rursus quoniam B D commensurabiles sunt, est autem B incommensurabilis ipsi C; & D ipsi C incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare. Ex antecedente.



LEMMA

Duabus datis rectis lineis inæqualibus inuenire id, quo maior plus potest, quàm minor.

Sint



Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B C, quarum maior sit AB. oportet inuenire id, quo AB plus potest, quàm C. Describatur in recta linea AB semicirculus ADB, & in eo aptetur recta linea AD, ipsi C æqualis, & D B iungatur. perspicuum est angulum ADB rectum esse, & ipsam AB plus posse, quàm A D, hoc est quàm C, quantum est rectæ lineæ DB quadratum.

1.quarti.
31.tertij.
47.primi.

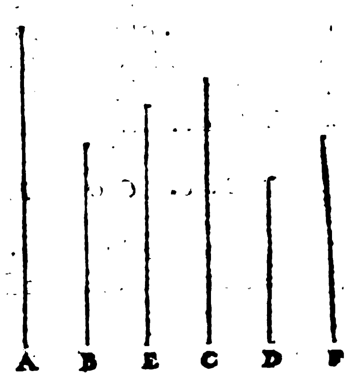
Similiter autem & datis duabus rectis lineis, quæ ipsas potest, hoc modo inuenietur,

Sint duæ datæ rectæ lineæ AD DB; & oporteat inuenire rectam lineam, quæ ipsas possit. exponantur enim AD DB, ita vt rectum angulum contineant ADB. & AB iungatur. rursus perspicuum est rectam lineam AB ipsas AD DB posse.

47.primi.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XV.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint; prima vero tãto plus possit, quàm secunda, quãtum est quadratum rectæ lineæ sibi cõmensurabilis longitudine: & tertia tãto plus poterit, quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si prima tanto plus possit, quàm secunda, quã tum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; & tertia, quàm quarta tanto plus poterit, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.



Sint quattuor rectæ lineæ proportionales A B C D, sitq; ut A ad B, ita C ad D; & A quidẽ plus possit, quàm B, quadrato, quod fit ex E; C vero plus possit, quàm D, quadrato ex F. Dico si A ipsi E sit commensurabilis, & C ipsi F cõmensurabilem esse. si uero A ipsi E sit incommensurabilis, & C ipsi F incommensurabilem esse. quoniam enim est vt A ad B, ita C ad D, erit vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratum ex C ad id, quod ex D quadratum. sed quadrato quidem, quod fit ex A æqualia sũt quadrata, quæ ex ipsis E B; quadrato autem ex C æqualia sunt quadrata ex F D. vt igitur quadrata, quæ ex E B ad quadratum ex B, ita quadrata, quæ ex F D ad quadratum ex D: & diuidẽdo vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F ad quadratũ ex D. quare vt E ad B, ita est F ad D: & conuertendo vt B ad E, ita D ad F. est autem & vt A ad B, ita C ad D. ex æquali igitur vt A ad E, ita est C ad F. ergo si A est commensurabilis ipsi E, & C ipsi F erit commensurabilis; si vero incommensurabilis est A ipsi E, & C ipsi F incommensurabilis erit. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales sint, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

22.sexti.
22.sexti.
19.huius.

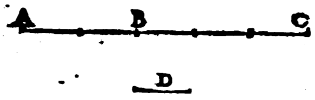
PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XVI.

Si duæ magnitudines commensurabiles componantur, & tota

magnitudo

magnitudo vtrique ipsarum cõmensurabilis erit. quòd si tota magnitudo uni ipsarum sit commensurabilis, & quę à principio magnitudines commensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines commensurabiles A B B C. Dico & totam magnitudinem A C vtrique ipsarum A B B C commensurabilem esse. Quoniam enim commensurabiles sunt A B B C, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, sitq; D. & quoniam D metitur ipsas A B B C, & totam A C metietur. metitur autem & A B B C. Ergo D magnitudines A B B C, & ipsam A C metitur. commensurabilis igitur est A C vtrique ipsarum A B B C. Sed A C vni ipsarum A B B C sit commensurabilis, videlicet ipsi A B. Dico & A B B C commensnrabiles esse. Quoniam enim commensurabiles sunt C A A B, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, & sit D. Itaque quoniam D metitur ipsas C A A B, & reliquam B C metietur. metitur autem & A B. ergo D ipsas A B B C metitur; ac propterea A B B C commensurabiles sunt. Si igitur duæ magnitudines commensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

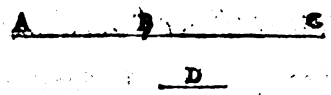


1. diff.
4. com. not.
3. com. not.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVII.

Si duæ magnitudines incommensurabiles componãtur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. quòd si tota magnitudo uni ipsarum sit incõmẽsurabilis, et quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles A B B C. Dico & totam magnitudinem A C vtrique ipsarum AB BC incommensurabilem esse. si enim non sunt incommensurabiles CA AB, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, sitq; D, si fieri potest. Quoniam igitur D metitur ipsas CA AB, & reliquam B C metietur. metitur autem & B A. ergo D ipsas A B B C metitur; ac propterea commensurabiles sunt AB BC. ponuntur autem & incommensurabiles. quod fieri non potest. non igitur ipsas C A AB metietur aliqua magnitudo. quare CA AB incommensurabiles sunt. similiter & AC CB incõmensurabiles esse demõstrabimus. ergo AC vtrique ipsarum AB BC est incõmenurabilis. sed AC vni ipsarũ AB, BC incõmensurabilis sit; & primũ ipsi A B. Dico & AB BC incõmẽsurabiles esse. si enim sunt cõmensurabiles, eas aliqua magnitudo metietur. metiatur, & sit D. qm̃ igitur D metitur ipsas AB BC, & totã AC metietur. metitur autem & AB. ergo D ipsas CA AB metitur: ideoq; C A A B commensurabiles sunt. ponuntur autem & incommensurabiles. quod fieri non potest. non igitur ipsas AB BC metietur aliqua magnitudo. quare AB BC incommẽsurabiles erũt. similiter demonstrabimus A C, & reliquæ B C esse incommensurabilem. Si igitur duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & reliqua. quod oportebat demonstrare.



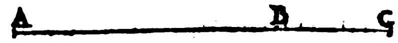
4. com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonstratis illud etiam constat.

Si tota magnitudo ex duabus magnitudinibus composita vni componentium sit incommensurabilis, & reliquæ incommensurabilis erit.

Sit enim tota magnitudo A C incommensurabilis magnitudini A B. Dico A C etiam reliquae B C incommensurabilem esse. Quoniā enim C A est incommensurabilis ipsi A B, erunt A B, B C incommensurabiles. & quoniam A B B C incommensurabiles sunt, & A C vtrique ipsarum incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.

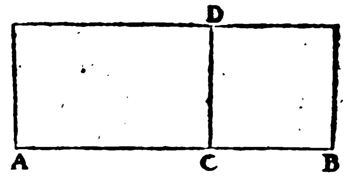


Ex demonstratis.

LEMMA. I.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiēs figura quadrata, parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod partibus recta linea ex applicatione factis continetur.

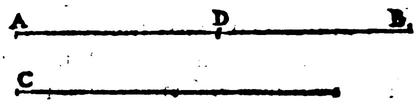
Ad aliquam enim rectam A B applicetur A D parallelogrammum, deficiēs figura quadrata D B. Dico parallelogrammum A D rectangulo A C B æquale esse; quod quidem per sese patet. quoniā enim quadratum est D B, erit D C ipsi C B æqualis, atque est parallelogrammum A D, quod A C C B continetur. si igitur ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, & reliqua. quod oportebat demonstrare.



LEMMA II.

Si duę rectæ lineæ inęquales sint, quarta autem pars quadrati, quod à minore fit, ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; quod applicatum est per bipartitam sectionem non transit.

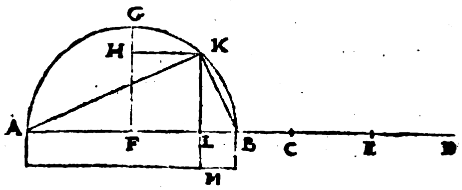
Si enim fieri potest, sint duæ rectæ lineę inęquales A B C: quarta autem pars quadrati, quod fit à minori C ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; quæ scilicet, fit à D B ipsius A B dimidia, erit ex præcedenti lemmate id, quod applicatum est æquale ei, quod partibus A D D B continetur, hoc est æquale quadrato ex D B. etenim A B bifariā in puncto D secatur. quod igitur quater fit à D B ęquale est quadruplo eius, quod applicatum est. sed quod quater fit à D B est ipsius A B quadratum; nam longitudine duplæ potentia quadruplę sunt: quadruplum vero eius, quod applicatur est quadratum ipsius C. ergo quadratum, quod fit ex A B est æquale quadrato ex C, hoc est quadratum maioris æquale quadrato minoris. quod fieri non potest. non igitur quarta pars quadrati, quod fit à C applicata ad A B per bipartitam sectionē trāsit.



LEMMA. III.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati minoris ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

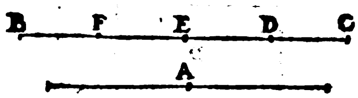
Sint datę duæ rectæ lineæ inæquales A B C D; sitq; maior A B. & oporteat facere quod propositum est. secetur C D bifariā in E. manifestum est quartam partem quadrati, quod fit à C D esse quadratum ex C E. & describatur in recta linea A B semicirculus; seceturq; A B bifariā in F: & à puncto F ipsi A B ad rectos angulos ducatur



ducatur F G. Quoniam igitur A B maior est, quàm C D, erit & ipsius A B dimidia maior, quàm dimidia ipsius C D, hoc est maior quàm C E. ponatur F H æqualis C E, & per H ipsi A B parallela ducatur HK, atque à puncto K ad A B perpẽ icula ri ducta K L. iungantur A K KB. rectangulum igitur est triangulum A K B, & ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est K L. ergo rectangulum A L B est æquale quadrato, quod fit ex K L. producatur K L, & ponatur ipsi LB æqualis L M, & figura compleatur. quadratum igitur, quod fit ex K L, hoc est quod ex F H est æquale parallelogrammo A M. sed quod fit ex F H est ęquale quadrato ex C E, hoc est quartæ parti quadrati ex C D: estq; A M deficiens figura quadrata. quod ipsum facere oportebat. 8 & 17. sexti.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XVIII.

Si duæ rectæ lineæ inæquales sint, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori ęquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tanto plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si maior tanto plus posit, quàm minor, quantum est quadratum rectę lineę sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori ęquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudiue commensurabiles ipsam diuidet.



Sint duæ rectę lineę inęquales A B C, quarum maior B C; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori A, hoc est ei, quod fit à dimidia ipsius A, ęquale parallelogrãmum ad B C applicetur, deficiens figura quadrata, & sit quod continetur BD DC, sitq; B D ipsi D C commensurabilis longitudine. Dico B C plus posse, quàm A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. secetur enim B C bifariam in puncto E, & ipsi D E æqualis ponatur E F. reliqua igitur D C est æqualis B F. & quoniam recta linea B C secatur in partes quidem æquales ad E pũctum, in partes vero inæquales ad punctum D; erit B D C rectangulum vnà cum quadrato ex E D æquale ei, quod fit ex E C quadrato, & eorum quadrupla. quod igitur quater B D D C continetur vnà cum quadrato, quod fit ex E D quater æquale est quadrato quod quater fit ex E C. Sed ei quidem, quod quater B D D C continetur ęquale est quadratum ex A: ei vero, quod quater fit ex D E æquale est quadratũ, quod ex D F, etenim D F ipsius D E est dupla: & ei quod quater fit ex EC ęquale est quadratum quod ex B C; rursus enim B C dupla est ipsius E C. ergo quadrata, quæ fiunt ex A D F ęqualia sunt ei, quod fit ex B C quadrato; ac propterea quadratum, quod fit ex B C maius est, quàm quadratũ, quod ex A, quadrato, quod ex D F. recta igitur linea B C tanto plus potest, quàm A, quantum est ipsius D F quadratum. ostendendum est & B C ipsi D F commensurabilem esse. Quoniam enim B D commensurabilis est ipsi D C longitudine, erit & BC ipsi CD longitudine commensurabilis. sed D C ipsis C D B F est commensurabilis longitudine. æqualis enim 5. secundi. 5. quinti. A B C

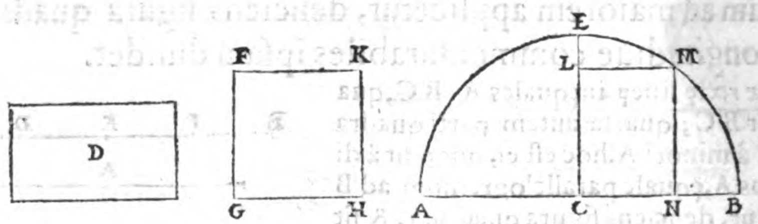
D lis enim est C D ipsi B F. quare & BG ipsis B F CD longitudine est commensurabi-
E lis,& reliquę igitur F D longitudine commensurabilis erit . ergo B C plus potest, quàm A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Sed BC plus possit quàm A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A æquale parallelogrammũ ad B C applicetur, deficiens figura quadrata; & sit quod continetur BD DC. ostendendum est B D ipsi D C lõgitudine commẽsurabilem esse. Iisdem enim constructis similiter demonstrabimus B C plus posse, quàm A, quadrato rectæ lineæ FD. sed B C plus potest, quàm A, qua
F drato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. ergo B C commensurabilis est ipsi F D longitudine. & reliquę igitur, vtrique scilicet B F D C longitudine est commensurabilis, sed vtraque B F D C ipsi D C commẽsurabilis est longitudine;
G etenim B F est ęqualis D C. ergo & B C ipsi C D longitudine est commensurabilis.
H ex quibus constat B D ipsi D C longitudine commensurabilem esse. Si igitur duę rectæ lineę inęquales sint, & reliqua. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori A, hoc est ei, quod fit à dimidia ipsius A æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficies figura quadrata] *ex antecedente lemmate. Hoc autem nihil aliud est, nisi rectam lineam maiorem, ita secare, vt rectnagulum ipsius portionibus contentum quartae parti quadrati minoris sit aequale. sed possumus illud idem vniuersalius explicare in hunc modum.*

Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulum, quod partibus cõtinetur, sit ęquale dato rectilineo. oportet autem datum rectilineũ minus esse quadrato, quòd à dimidia describitur.

Sit data recta linea A B, diuisa bifariam in C; datumq́, rectilineum D. & oporteat facere quod propositum est. Describatur in A B semicirculus A E B; & à puncto C ipsi A B ad rectos angu-
25. sexti. *los ducatur C E: deinde rectilineo D fiat aequale quadratum F G H K. erit eius latus F G minus*



ipsa A C, hoc est ipsa C E. quare à recta linea C E abscindatur C L, quae sit aequalis F G: & per L quidem ducatur L M parallela ipsi A B: per M vero ducatur M N parallela C E. Dico rectam lineam A B sectam esse in puncto N, vt oportebat, hoc est rectangulum A N B rectilineo D aequale esse. aequale etenim est quadrato ex M N. sed cum M N sit aequalis ipsi C L, hoc est ipsi FG, erit rectãgulũ ANB quadrato FGHK, hoc est rectilineo D ęquale. quod facere oportebat.

Similiter & datum numerum in duas partes ita diuidemus, vt qui ex ipsis producitur dato numero sit ęqualis. oportet autem datum numerum, cui ęqualis esse debet, quadrato dimidij minorem esse.

Sit datus numerus 20, quem oporteat ita diuidere, vt qui ex partibus producitur, sit aequalis dato numero 75. Accipiatur ipsius 20 medietas, quae est 10, & in se multiplicetur, faciet 100, à quo detrahemus datum numerum, videlicet 75, & relinquetur 25. huius igitur latus 5 additũ ipsi 10 constituit 15; & detractum ab eodem constituit 5. Dico 20 in has partes ita diuisum esse, vt oportebat, hoc est eum, qui ex ipsis producitur, aequalem esse dato numero 75. Quoniam enim 20 diuiditur in duas partes aequales, & in duas partes inequales, numerus planus, qui fit ex partibus inequalibus vnà cum quadrato numeri interiecti aequalis est ei, qui fit à dimidio quadrato, quod demonstratum est à Barlaam monacho in theoremate quinto eorum, quae nos ad 15 noni apposuimus

appoſuimus. ergo qui fit ex 15, & 5 vnà cũ quadrato ipſius 5 eſt aequalis quadrato dimidij, videlicet 100: & detracto communi quadrato 25, erit qui producitur ex 15, & 5 aequalis dato numero 75. quod facere oportebat.

Sed ei quidem, quod quater DB BC continetur ęquale eſt quadratum ex A] *Ponitur enim parallelogrammum rectãgulum D B C aequale quartae parti quadrati, quod fit ex A.* B

Erit & BC ipſi CD longitudine cõmẽſurabilis] *Ex prima parte ſextae decimae huius.* C

Quare BC ipſis BF CD longitudine eſt commenſurabilis] *Ex 12 huius.* D

Et reliqua igitur F D longitudine commenſurabilis erit] *Ex eo, quod nos ad 17. huius demonſtrauimus. ſumantur enim BF DC ſimul, ac ſi vna linea eſſet.* E

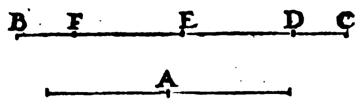
Et reliquę igitur, vtrique ſcilicet B F D C longitudine eſt commenſurabilis] *Ex eodem theoremate, quod ad 17 huius appoſuimus.* F

Ergo & BC ipſi DC longitudine eſt commenſurabilis.] *Ex 12 huius.* G

Ex quibus conſtat BD ipſi DC longitudine commenſurabilem eſſe] *Ex ſecunda parte ſextae decimae huius.* H

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XIX.

Si duæ rectę lineæ inæquales ſint, quartę autem parti quadrati, quòd fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat; maior tanto plus poterit, quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quòd ſi maior tanto plus poſſit, quàm minor, quantum eſt quadratum rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartę autem parti quadrati, quod fit à minori ęquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet.



Sint duæ rectæ lineæ inæquales A BC, quarum maior B C: quartæ autem parti quadrati, quòd fit à minori A, æquale parallelogrammum ad ipſam BC applicetur, deficiẽs figura quadrata; & ſit quod continetur B D D C; ſitq; BD ipſi DC longitudine incommenſurabilis. Dico B C plus poſſe, quàm A quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incommẽſurabilis. iiſdem enim, quę ſupra, conſtructis, ſimiliter oſtendemus ipſam BC plus poſſe, quàm A, quadrato rectę lineæ D F. oſtendendum igitur eſt B C ipſi D F longitudine incommenſurabilem eſſe. Quoniam enim incommenſurabilis eſt B D ipſi D C, erit & BC ipſi C D longitudine incommenſurabilis. 17. huius. ſed DC incommenſurabilis eſt vtriſque BF DC. ergo 14. huius. & BC ipſis BF DC longitudine eſt incommenſurabilis. ac propterea reliquę F D incommenſurabilis eſt longitudine; & BC plus poteſt; quàm A. quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incommẽſurabilis. Ex demonſtratis ad 17. huius. Sed BC rurſus plus poſſit, quàm A, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A æqualę parallelogrammum ad BC applicetur, deficiens figura quadrata; & ſit quod BD DC continetur. oſtendendum eſt BD ipſi DC longitudine incommenſurabilem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus BC plus poſſe quàm A, quadrato rectæ lineæ DF. ergo oſtendendum relinquitur BC plus poſſe, quàm A, quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. incommenſurabilis igitur eſt BC ipſi DF longitudine. Ex demonſtratis ad 17. huius. quare & reliquę, videlicet vtrique BF DC eſt incommenſurabilis. 14. huius. ſed vtraque BF DC commenſurabilis eſt longitudine ipſi DC. ergo & BC ipſi CD eſt incommenſurabilis longitudine; 17. huius. ac propterea diuidendo do BD ipsi DC longitudine incommensurabilis erit. Si igitur duę rectæ lineę inæquales sint,& reliqua, quod oportebat demonstrare.

SCHOLIVM.

Hactenus tractauit de commensurabilibus, & incommensurabilibus, nunc ad rationales & medias transit.

LEMMA. I.

Caroll.9.huius.

Quoniam demonstratum est longitudine commensurabiles omnino & potentia commensurabiles esse. potentia vero commensurabiles non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles: manifestum est, si expositæ rationali aliqua commensurabilis fuerit longitudine, illam rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia, longitudine enim commensurabiles omnino & potentia commensurabiles sunt. Si vero expositę rationali aliqua fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quòd si expositæ rationali rursus aliqua commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic rationalis potentia tantum commensurabilis.

PROCLI LEMMA. II.

Rationales vocat eas, quæ expositæ rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. sunt autem & aliæ rectæ lineæ, quæ longitudine quidem expositę rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur rationales, & commensurabiles inter se, quatenus rationales, sed commensurabiles inter se vel longitudine, & potentia, vel potentia solum. & si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ rationales longitudine commensurabiles, vt intelligatur etiam potentia commensurabiles esse: si vero potentia solum, inter se sunt commensurabiles, dicuntur ipsæ quoque rationales potentia solum commensurabiles.

At vero rationales commensurabiles esse ex his constat.

Rationales commensurabiles sunt. 12.huius.

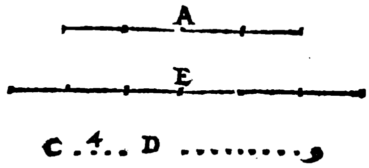
Quoniam enim rationales sunt, quæ expositę rationali sunt commensurabiles, quæ vero eidem commensurabiles etiam inter se commensurabiles sunt; sequitur rationales commensurabiles esse, quod demonstrare oportebat.

LEMMA III.

Inuenire duas rationales longitudine commensurabiles.

Exponatur

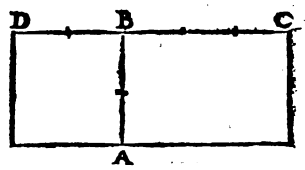
Exponatur rationalis A, & duo numeri C D vel quadrati, vel ſimpliciter proportionem habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & fiat vt C ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E: erunt per ea, quæ demonſtrata ſunt A E longitudine commenſurabiles. Ex corol. 8. huius. In 9. huius.



THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XX.

Quod rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis ſecundum aliquem prædictorum modorum continetur rectãgulum rationale eſt. A

Rationalibus enim longitudine commenſurabilibus rectis lineis A B B C contineatur rectangulum A C. Dico A C rationale eſſe. deſcribatur ex A B quadratum A D. ergo A D eſt rationale. B Et quoniam A B commenſurabilis eſt ipſi B C longitudine, atque eſt A B æqualis BD; erit DB ipſi BC longitudine commenſurabilis. eſt autem & vt DB ad BC, ita DA ad AC: 1. ſexti. & commenſurabilis eſt DB ipſi BC. ergo & DA ipſi AC commenſurabile erit. C eſtq; rationale DA. quare & AC eſt rationale. D quod igitur rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis cõtinetur rectangulum rationale eſt. quod demonſtrare oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

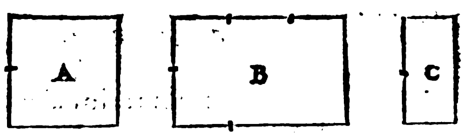
A Secundum aliquem prædictorum modorum] *Rectarum enim linearum AB BC vel vtræque ſunt expoſitae rationali longitudine commenſurabiles, vel vtræque eidem commenſurabiles potentia ſolum, ſed inter ſe commenſurabiles longitudine. quocunque autem modo ſe habeat, quod ex ipſis fit rectangulum rationale eſt, & eadem demonſtratio in omnibus congruit.*

B Ergo AD eſt rationale] *Ex diffinitione 9. ſiue enim longitudine ſint commenſurabiles expoſitae rationali, ſiue potentia ſolum, earum quadrata rationalia ſunt, quippe quae quadrato expoſitae rationalis ſint commenſurabilia.*

C Ergo & DA ipſi AC commenſurabilis erit] *Ex decima huius.*

D Eſtq; rationale DA. quare & AC eſt rationale] *rationali namque commenſurabile & ipſum rationale eſt. quod ita demonſtrabitur.*

Sit expoſitae rationalis quadratum A, & ipſi commenſurabile ſit ſpacium B. erit B rationale ex 9 diffinitione. ſit rurſus aliud ſpacium C ipſi B commenſurabile. Dico & C rationale eſſe. Quoniam enim ſpacia A C eidem ſpacio B ſunt commenſurabilia, & inter ſe commenſurabilia ſunt ex 12 huius. Quòd cum C ipſi A ſit commenſurabile, etiam rationale erit ex 9 diffinitione. quod demonſtrare oportebat.



Vt autem ea, quae hoc loco de rationalibus dicuntur, manifeſtiora ſint, & quaſi ante oculos ponantur, libuit nonnulla theoremata adiungere, quae ad ea etiam, quae ſequuntur, vtilia erunt.

THEOREMA I.

Quod duabus datis rectis lineis rationalibus continetur rectangulum datũ erit.

Duabus enim datis rectis lineis rationalibus AB AD contineatur rectangulum A C. Dico AC datum

datum esse. Exposita enim rationali E, vel vtraque AB AD ipsi E longitudine est commensurabilis, vel vtraque commensurabilis est potentia solum, vel altera quidem longitudine, altera potentia solum commensurabilis. & si quidem vtraque est commensurabilis longitudine, rectangulum, quod ipsis continetur datum erit ex ijs, quę Ioannes Regiomontanus in primo libro de triangulis propositione 16 demonstrauit; & ex ijs, quae nos demonstrauimus in commentarijs in 3 propositionē libri Archimedis de circuli dimensione. si vero vtraque expositae rationali potentia solum est commensurabilis, nihilominus rectangulum datum erit. fiant enim ex AB AD quadrata AF CG. & quoniam AB AD potentia sunt commensurabiles, earum quadrata commensurabilia erunt. ideoq; inter se proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. sit autem quadratum AF ad quadratum CG, vt numerus H ad numerum K; & H ipsum K multiplicans faciat M, cuius radix sit N. erunt igitur tres magnitudines H N K deinceps proportionales; rectangulum enim contentum H K est aequale quadrato ex N, hoc est ipsi M. & quoniam quadratum FA ad rectangulum AC est vt FB ad BC, hoc est vt AB ad BC; vt autem AB ad BG, hoc est ad BC, ita rectangulum AC ad CG quadratum: erunt & tres hę magnitudines deinceps proportionales. quādo autem tres magnitudines deinceps proportionales fuerint, prima ad tertiam duplam habebit proportionem eius, quam habet ad secundam. quadratum igitur AF ad quadratum CG duplam proportionem habet eius, quam habet ad rectangulum AC. sed quadratum AF ad quadratum CG est, vt numerus H ad ipsum K. & cum H ad K similiter duplam proportionem habeat eius, quam habet ad N, erit quadratum FA ad rectangulum AC, vt H ad N. sunt autem magnitudines H N datae; ideoq; data ipsarum proportio: & datum est quadratum FA. quare & rectangulum AC datum erit. Eadem ratione demonstrabimus rectangulum datum esse, si altera datarum linearum sit longitudine commensurabilis, altera vero potentia solum. quod demonstrare oportebat.

5.huius. 17.sexti. 1.sexti. 11.quinti. 10.diffi.quinti. 2. datorum Euclid. 2. Datorum Euclid.

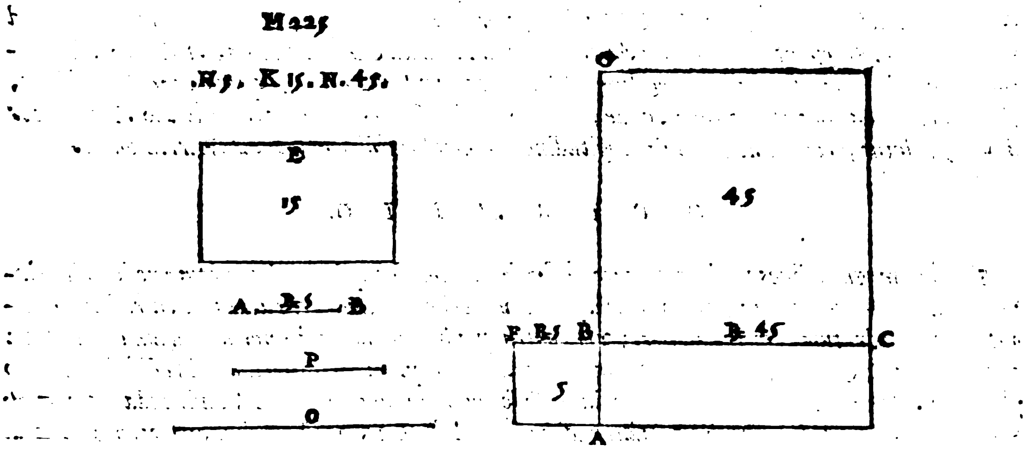
O P E R A T I O.

Si datae magnitudines numerorum radices fuerint, numeros ipsos inter se multiplicabimus; si vero earum altera numerus fuerit, altera numeri radix, quadratum numeri multiplicabimus per numerum, cuius altera est radix, & eius, qui producitur radicem dicemus esse rectangulum, quod duabus datis rectis lineis continetur. atque hęc nihil aliud est, nisi multiplicatio, quam dicunt, radicum quadratarū inter se se. vt si AB sit radix. 5, AD radix 3, multiplicabimus 5, per 3 fiet 15, cuius radix erit id, quod producitur ex ℞ 5, & ℞ 3 inter se ductis. si vero AB sit 2, AD ℞ 5, multiplicabimus quadratum ipsius 2 videlicet 4 per 5, & fiet 20, cuius radix erit productum, quod queritur.

T H E O R E M A II.

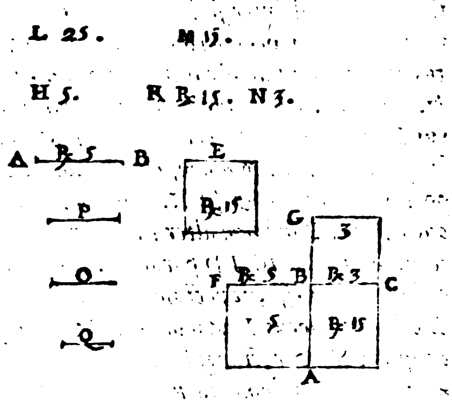
Si ad datam rectam lineam rationalem applicetur spacium datum, & latitudo, quam facit, data erit.

Sit data recta linea rationalis AB, & spacium datum E. Dico si ad rectam lineam AB spacium E applicetur, latitudinem, quam facit, datam esse. vel igitur recta linea AB expositae rationali commensurabilis est longitudine, vel potentia solum; vel spacium E rationale est, vel irrationale, quod medium appellatur. & si quidem recta linea AB longitudine est commensurabilis, & spacium E rationale, illud manifestum erit ex ijs, quae Regiomontanus demonstrauit in primo libro de triangulis propositione 17. & ex ijs, quae nos eodem in loco, de quo proxime dictum est, demonstrauimus. si vero AB est commensurabilis potentia solum, & spacium E siue rationale, siue irrationale, vel AB est longitudine commensurabilis, & spacium E irrationale, latitudo, quā facit, data erit. Sit primum recta linea AB potentia solum commensurabilis, & spacium E rationale. Quoniam igitur AB rationalis est, & spacium E rationale, erit quadratum ipsius AB spacio E commensu-



E commensurabile;ac propterea ad ipsum proportionem habebit, quam numerus ad numerum. habeat quam numerus H ad numerum K;fiatq́; ex corollario sextae propositionis huius libri vt H ad K,ita recta linea AB ad aliam rectam lineam O:& inter AB & O sumpta media proportionali P,erit vt numerus H ad numerum K,ita quadratum rectae lineae AB ad rectę lineae P quadratum.sed & quadratū rectae lineae AB ad spaciū E erat,vt numerus H ad numerū K.Cum igitur quadratum ex AB ad spacium E eādem proportionem habeat, quam ad quadratum ex ipsa P;erit quadratū ex P spacio E aequale. 9. quinti. Itaque ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammum rectangulum AC aequale quadrato ex P,hoc est aequale spacio E,latitudinem faciens BC. & ex AB BC describātur quadrata AF CG. numerus autem K se ipsum multiplicans faciat M, & M per K diuiso exeat N.erunt tres magnitudines HKN deinceps proportionales; rectangulū enim ipsis KN contentum est aequale quadrato ex K.Quoniam igitur quadratum FA ad rectangulum AC est vt rectangulum AC ad CG quadratum,quod superius ostensum est.quadratum autem FA ad rectangulum AC est,vt numerus H ad numerum K;erit & rectangulum AC ad quadratum CG,vt K ad N.sed datum est quadratum FA, & rectangulum AC; quod numeri K N sint dati.ergo & quadratum CG datum erit,& data ipsius radix BC,videlicet latitudo, quam fa- 2. datorum Euclid. cit spacium E ad rectam lineam AB applicatum.

Sit rursus recta linea AB potentia solum commensurabilis, & spacium E irrationale.ergo quadratum rectae lineae AB incommensurabile est spacio E.sit autem quadratum rectae lineae AB ad spaciū E,vt H ad K,hoc est ad radicē numeri M:& H se ipsum multiplicans faciat L. cum igitur LM quadrati sint,& eorum latera HK,habebit L ad M duplam proportionem eius, quam habet H ad K. itaque fiat vt L ad M,ita recta linea AB ad rectam lineam Q:& inter AB & Q sumatur media proportionalis O.habebit igitur AB ad Q duplam proportionem eius, quam habet ad O. atque est vt L ad M,ita AB ad Q.ergo vt H ad K,ita AB ad O. Rursus inter AB & O inueniatur media proportionalis P;erit vt AB ad O, ita quadratum ex AB ad



quadratum ex P.vt igitur H ad K,ita est quadratum ex AB ad quadratum ex P. sed erat vt H ad K,ita quadratum ex AB ad spacium E.Ergo quadratum ex AB ad quadracum ex P eandem habet proportionem, quam ad spacium E.ideoq́; quadratum ex P spacio E aequale erit. 9. quinti. Applicetur ad rectam lineam AB parallelogrammum rectangulum AC,aequale quadrato ex P, hoc est spacio E aequale,quod faciat latitudinem BC:deinde ex AB BC fiant AF CG quadrata; & rursus ipsarum H K magnitudinum inueniatur tertia proportionalis, nempe ducta K inter se se; & quod producitur diuiso per B,vt proxime dictum est.sit autem tertia proportionalis N.Eadem ra-

 tione

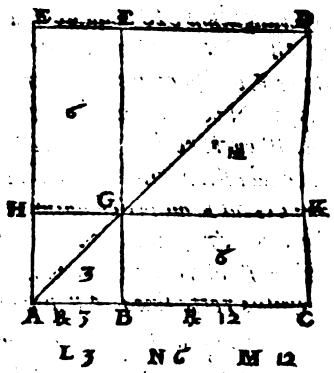
tione demonſtrabitur vt quadratum ex A B ad rectangulum AC, ita eſſe rectangulum AC ad C G quadratum. Quoniam igitur H K N deinceps proportionales ſunt, quadratum autem F A ad rectangulum AC eſt vt H ad K; erit & rectangulum AC ad CG quadratum, vt K ad N. ſed datum eſt quadratum AF, & rectangulum AC, cum dentur HK. ergo & quadratum CG dabitur, & eius radix BC, hoc eſt latitudo, quae fit ſpacio E ad rectam lineam AB applicato. Non aliter demonſtrabitur ſi recta linea AB ſit longitudine commenſurabilis, et ſpacium E irrationale.

OPERATIO.

Si datae magnitudines radices numerorũ fuerint, numerus, qui ſpacium notum reddit, diuidatur per alterum numerum; ſi vero altera fuerit numeri radix, numerus, cuius ea eſt radix, diuidatur per quadratum alterius numeri; vel contra quadratum numeri, per numerum cuius eſt radix, diuidatur; & eius, quod exibit, radix erit latitudo, quam facit ſpacium ad rectã lineam applicatum. eſt autem hęc diuiſio radicum inter ſe ſe, quam dicunt. vt ſi ℞ 15 diuidenda ſit per ℞ 5, diuidemus 15 per 5, & exibit 3, cuius radix eſt quod fit ℞ 15 per ℞ 5 diuiſa: ſi vero ℞ 20 diuidere velimus per 2, diuidemus 20 per quadratum ipſius 2, videlicet per 4, & exibit 5, cuius radix eſt id, quod quęritur.

THEOREMA III.

Quae ex duabus rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis componitur recta linea data erit.



Ex duabus enim datis rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis AB BC componatur recta linea AC. Dico AC datam eſſe. vel igitur datae rectae lineae expoſitae rationali longitudine commenſurabiles ſunt, vel commenſurabiles potentia ſolum, ſed inter ſe lõgitudine commenſurabiles. Et ſi quidem expoſitae rationali ſint commenſurabiles longitudine, quae ex ipſis componitur recta linea data erit, ex demonſtratis à Ioanne Regiomontano in primo libro de triangulis, propoſitione tertia, & ex iis, quae nos eodem in loco demonſtrauimus; ſi uero expoſitae rationali ſint commenſurabilis potentia ſolum, ſed inter ſe longitudine commenſurabiles, earum quadrata proportionem habebunt;
9.huius. quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Itaque habeat rectae lineae A B quadratum ad quadratum rectae lineae BC proportionem eam, quam numerus L ad numerum M. erũt numeri L M ſimiles plani. ſi enim quadrati ſint, rectae lineae AB AC
12.octaui. longitudine erunt commenſurabiles. quod non ponitur. ergo inter L & M cadet vnus medius proportionalis. cadat, & ſit N. deſcribaturq; ex recta linea AC quadratum ACDE; et iuncta AD ducatur per B quidem alterutri ipſarum AE ED parallela B G F: per G vero ducatur H G K alteruti ipſarum AC ED parallela. ſimiliter vt ſupra demonſtrabitur quadratum AG ad rectangulum GC ita eſſe, vt rectangulum GC ad GD quadratum. ſed quadratum AG ad quadratum GD eſt vt numerus L ad numerum M. ergo quadratum AG ad rectangulum GC eſt vt numerus L ad ipſum N; & rectangulum GC ad quadratum GD, vt N ad M. eſt autem rectangulum EG, quod eſt alterum ſupplementorum, aequale reliquo GC. Quadratum igitur AG ad gnomonem EKB eſt vt L ad M vnà cum duplo ipſius N: & conuertendo gnomon EKB ad quadratum AG, vt M vnà cum duplo ipſius N ad ipſum L. ergo componendo, rurſusq; conuertendo quadratum AG ad totum AD quadratum, vt L ad compoſitum ex L & M vnà cum duplo ipſius N. ſed compoſitum hoc eſt datum, quippe cum dati ſint numeri ipſum componentes. ergo et totum quadratum AD datum erit, et data eius radix, quae ex duabus datis rectis lineis conſtat. atque illud eſt, quod demonſtrandum proponebatur.

OPERATIO.

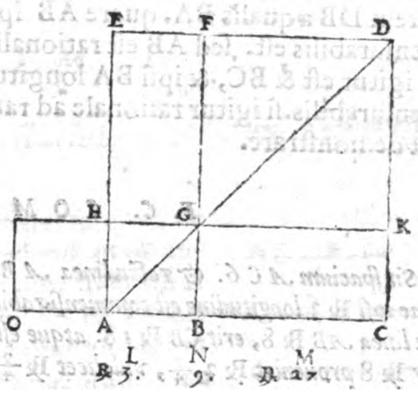
Numeros reſpondentes quadratis datarum linearum ſimul coaceruabimus vnà cum duplo lateris

lateris quadratum, qui ex eorum inter se multiplicatione producitur, hoc est vnà cum duplo numeri proportionalis, qui inter ipsos medius interijcitur; et huius compositi radix erit recta linea, quę ex duabus datis rectis lineis constat. atque hęc est radicum inter se additio, quam dicunt: vt si radix 3 addenda sit radici 12, primum iungemus 3 cum 12, deinde multiplicantes 12 per 3, eius, qui producitur, videlicet 36 latus, quod est 6 duplabimus: et omnibus simul coaceruatis fient 27, cuius radix est recta linea, quam quęrimus. Quemadmodum autem ex duabus rationalibus longitudine commensurabilibus, si inter se componantur, vna recta linea fit, sic ex duobus spacijs medijs commensurabilibus, si itidem inter se componantur vnum fiet medium. Quòd si duae rationales lõgitudine incommensurabiles inter se addendae sint, vt ℞ 3. ℞ 5, dicemus ℞ 3 vnà cum ℞ 5, vel ℞ 3 addita ℞ 5, vel vtemur hac voce plus, quod est in communi vsu, hoc modo ℞ 3 plus ℞ 5, et 3 plus ℞ 8, et ita fiet etiam si plures sint, quàm duae, vt 2 plus ℞ 3 plus ℞ 5. Quòd si duae sint, dicentur ex binis nominibus, seu binomia, vt Campanus, et recentiores. si vero tres dicentur ex tribus nominibus vel trinomia. et eodem modo in alijs.

THEOREMA IIII.

Duarum datarum rationalium, quæ inæquales sint, & longitudine commensurabiles, differentia data erit.

Sint duae datae rationales inequales, & longitudine commensurabiles rectae lineae AB AC, quarum differentia sit BC. Dico BC datam esse. si enim AB AC sint expositae rationali longitudine commensurabiles, earum differentia data erit ex demonstratis à Ioanne Regiomontano in libro primo de triangulis propositione 4, & ex ijs, quae à nobis eodem in loco demonstrata sunt. si vero expositae rationali commensurabiles sint potentia solum, sed inter se longitudine commensurabiles, earum quadrata inter se proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. 9. huius. *habeat igitur rectae lineae AB quadratum ad quadratum rectae lineae AC proportionem eam, quam numerus L ad numerum M. erunt numeri LM similes plani; ideoq; inter eos cadet vnus medius proportionalis.* 18. octaui. *cadat, sitq; N: & ex recta linea AC describatur quadratum ACDE, & figura compleatur, quemadmodum superius. producta vero CA vsque ad O, ita vt AO, sit aequalis AB, quadratum OH describatur, quod quidem quadrato rectae lineae AB, hoc est ipsi AG aequale erit. atque est quadratum quidem OH ad rectangulum HC, vt OA ad AC: rectangulum vero HC ad quadratũ CE, vt CK ad CD, hoc est vt OA ad AC. vt igitur quadratum OH ad rectangulum HC, ita est rectangulum HC ad CE quadratum. sed & numeri LNM deinceps proportionales sunt, & quadratum OH ad quadratum CE est vt L numerus ad numerum M. ergo quadratum OH ad rectangulum HC erit vt L ad N; & rectangulum HC ad quadratum CE, vt N ad M. quòd cum rectangulum EG sit aequale rectangulo GC, supplementa etenim sunt, addito vtrique aequali quadrato, erit rectangulum HC aequale rectangulo FH vnà cum quadrato HO. si igitur à duobus quadratis OH, AD auferatur duplum rectanguli HC, quod quidem rectis lineis CA AB continetur, reliquum erit quadratum FK; cuius latus GK rectae lineae BC est aequale: quod etiam in septima propositione secundi libri demonstratum est. & quoniam numeri LNM sunt dati, & quadrata OH CE data erunt, & rectangulum HC, atque eius duplum. ergo & quadratum FK, & eius latus BC dabitur. quod demonstrare oportebat.*



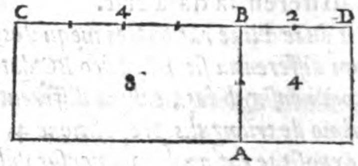
ADPERTIMENTO.

Numeros respondentes quadratis datarum linearum simul iungemus, & ab eo, qui factus est, auferemus duplum numeri, qui inter ipsos medius proportionalis interijcitur. relinquetur enim *quadratum, cuius radix erit recta linea, quam querimus. atque hęc est radicum quadratarum subtractio, quam dicunt. Vt si à radice 27 auferenda sit radix 3; iungemus 27 cum 3 fient 30, à quo auferemus duplum numeri medij proportionalis inter 3, et 27 qui est 9, videlice 18, & relinquentur 12, cuius radix est ea, quam quęrimus. eodem modo & spaciorum mediorum inęqualium, quae commensurabilia sint, differentia inuenietur. si uero ab aliqua rationali auferenda sit alia minor, quae ipsi longitudine sit incommensurabilis. vt si à ℞ 5 auferre velimus ℞ 3, dicemus ℞ 5 dēpta ℞ 3, vel vtemur hac voce minus, vt nunc solent, hoc modo ℞ 5 minus ℞ 3, & ℞ 6 minus ℞ 4, quas Euclides appellat apotomas, Campanus et recentiores residua, seu recisa.*

Si igitur recta linea AB sit ℞ 3, & recta BC ℞ 12, erit ex ante demonstratis in primo antecedentium theorematum, rectangulum AC ℞ 36, hoc est 6. & rursus si AB sit ℞ 8, & BC ℞ 18, erit AC rectangulum ℞ 144, hoc est 12.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXI.

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem efficit rationalem, & ei, ad quam applicatum est, lōgitudine cōmensurabilē.

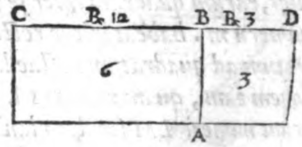


Rationale enim AC ad rationalem secūdum aliquem rursus dictorum modorū applicetur, latitudinem faciens BC. Dico BC rationalem esse, & ipsi ab longitudine commensurabilē. Describatur enim ex AB quadratum AD. ergo AD rationale est: sed & rationale est AC. ergo AD ipsi AC est commensurabile. atque est vt DA ad AC, ita DB ad BC. commensurabilis igitur est DB ipsi BC. est autem DB ęqualis BA. quare AB ipsi BC commensurabilis est. sed AB est rationalis. rationalis igitur est & BC, & ipsi BA longitudine commensurabilis. si igitur rationale ad rationalem applicetur; & reliqua. quod oportebat demonstrare.

45. primi.

Ex lēma: 2. ad 10. huius
10. huius.

6. diffi.

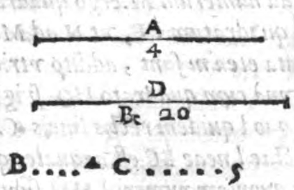


F. C. COMMENTARIVS.

Sit spacium AC 6. & recta linea AB ℞ 3. erit ex 2 theoremate premissorum CB ℞ 12, quae ipsi ℞ 3 longitudine est commensurabilis. est enim ipsius dupla. rursus sit AC 12, & recta linea AB ℞ 8, erit CB ℞ 18. atque est ℞ 18 ad ℞ 8, ut 3 ad 2. nam si ℞ 18 diuidatur per ℞ 8 proueniet ℞ 2 $\frac{1}{4}$, videlicet ℞ $\frac{9}{4}$, quae est $\frac{3}{2}$

LEMMA I.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles.



Exponatur rationalis A, & duo numeri BC non habētes proportionem, quam quadratus ad quadratum: & fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D. erunt igitur ex ijs, quę ostensa sunt AD potentia solū cōmensurabiles.

Corol. 6. huius.

LEMMA II.

Recta linea, quę potest irrationale spacium, irrationalis est.

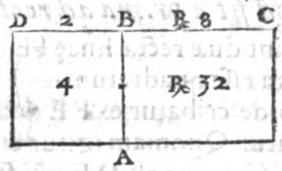
Posit

Ponsit enim recta linea A spacium irrationale, hoc est quadratum, quod fit ab A irrationali spacio sit æquale. Dico A irrationalem esse. si enim sit rationalis, erit quod ab ipsa fit quadratum rationale; sic enim in diffinitionibus ponitur. atqui rationale non est. ergo A irrationalis sit necesse est. quod demonstrare oportebat. Diffi. 8.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO. XXII.

Quod rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale est: & recta linea ipsum potens est irrationalis. vocetur autem media.

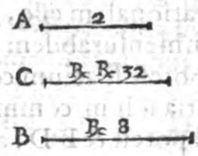
Rationalibus enim potentia solum commensurabilibus rectis lineis AB BC contineatur rectangulum AC. Dico rectam lineam, quæ ipsum potest, irrationalem esse. vocetur autem media, seu medialis. describatur enim ex AB quadratum AD. ergo AD rationale est. Et quoniam AB incommensurabilis est ipsi BC longitudine, potentia enim solum ponuntur commensurabiles, atque est AB æqualis BD. incommensurabilis igitur est DB ipsi BC longitudine. est autem vt DB ad BC, ita DA ad AC. ergo DA ipsi AC est incommensurabile. sed DA rationale est, irrationale igitur est AC. Quare & recta linea, quę ipsum AC potest, videlicet quę potest quadratum ipsi æquale est irrationalis. vocetur autem media; propterea quòd ipsius quadratum est æquale rectangulo, quod AB BC continetur, & ipsarum AB BC media sit proportionalis. quod demonstrare oportebat. Diffi. 10. Diffi. 11.



SCHOLIVM. I.

Media est irrationalis, quæ potest spacium contentum rationalibus potentia solum commensurabilibus.

Rationalibus enim potentia solum commensurabilibus rectis lineis A B spacium contineatur. ostendendum est huiusmodi spacium irrationale esse. sumatur enim ipsarum A B media proportionalis C. ergo quod fit ex AB est æquale quadrato ex C; ac propterea C potest rectangulum, quod ipsis AB continetur. est igitur vt A ad B, ita quadratum ex A ad id, quod ex C quadratum. nam vt prima ad tertiam, ita quadratum, quod fit ex prima ad quadratum ex secunda, quod demonstratum est in corollario 20 sexti elementorum. incommensurabilis autem est A ipsi B longitudine. ergo & quadratum ex A quadrato ex C est incommensurabile. sed quadratū ex A rationale est. irrationale igitur est quadratum ex C, hoc est rectāgulum, quod rectis lineis A B continetur. ergo C est irrationalis. media autem idcirco vocatur, quòd irrationalis existens ipsarum A B media est proportionalis. Diffi. 11.



SCHOLIVM. II.

Ex hoc theoremate colligitur mediam, quæ vna est irrationalium, in geometrica analogia considerari: media enim est proportionalis iuxta geometricam analogiam inter rationales potentia solum commensurabiles.

&

& recta linea ipsũ potẽs est media. si enim quod extremis cõtinetur ęquale est quadrato, quod fit à media, tres rectę lineæ proportionales sunt. 17.sexti.

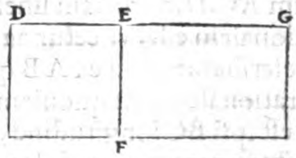
F. C. COMMENTARIVS.

Sciendum est spacium illud irrationale, quod potest media linea, medium appellari.

Sit recta linea AB 2; & recta BC ℞ 8. erit rectangulum AC ℞ 32, quod irrationale est, & medium dicetur. recta autem linea ipsum potens est ℞ ℞ 32, quę media appellatur.

LEMMA.

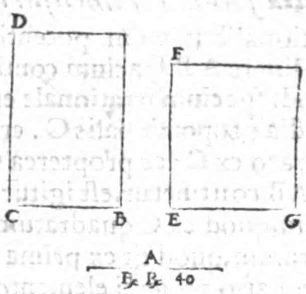
Si sint duæ rectę lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima ad rectangulum, quod duabus rectis lineis continetur.



Sint duæ rectæ lineę FE EG. Dico vt FE ad EG, ita esse quadratum ex FE ad FEG rectangulum. describatur ex FE quadratum DF, & GF cõpleatur. 1.sexti. Quoniam igitur est vt FE ad EG, ita DF ad FG; atque est DF quidem quadratum ex FE; FG vero, quod DE EG continetur, hoc est rectangulum FEG: erit vt FE ad EG, ita quadratum ex FE ad FEG rectangulum. similiter autem & vt rectangulum GEF ad quadratum ex EF, hoc est vt GF ad FD, ita est GE ad EF.

THEOREMA XX. PROPOSITIO. XXIII.

Quod fit à media ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommeusurabilem.



Sit media quidem A, rationalis autem CB, & ad CB ei, quod fit ex A æquale spacium applicetur BD, latitudinem faciens CD. 45.primi. Dico CD rationalem esse, & ipsi BC longitudine incommensurabilem. Quoniam enim media est A, potest spacium contentum rationalibus potentia solum commensurabilibus. Ex antecedenti. posſit GF: sed potest & BD. æquale igitur est BD ipsi GF. atque est ęquiangulum. ęqualium autem, & æquiangulorum parallelogramorũ latera, quæ sunt circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. 14.sexti. ergo vt BC ad EG, ita est EF ad CD. est igitur & vt quadratum ex BC ad quadratum ex EG, ita quadratum ex EF ad id, quod ex CD quadratum. 22.sexti. sed quadratum ex BC commensurabile est quadrato ex EG: vtraque enim ipsarum est rationalis. 1.pars 10.huius. commensurabile igitur est & quadratum ex EF quadrato ex CD. est autem quadratum ex EF rationale. ergo & rationale est quadratum ex CD; ac propterea recta linea CD est rationalis. itaq; quoniam FE incommensurabilis est ipsi EG longitudine; potentia enim solum cõmensurabiles sunt; vt autem FE ad EG, ita quadratum ex EF ad FEG rectangulũ: Ex antecedente lemmate. erit quadratum ex EF incommensurabile rectangulo FEG. sed quadrato quidem ex EF commensurabile est quadratum ex CD; rationales enim sunt potentia, vt ostẽsum est. ergo quadratum ex CD rectangulo FEG est incommensurabile. rectangulo autem FEG commensurabile est, quod DC CB continetur; sunt enim quadrato

ex A

ex A æqualia. incommensurabile igitur est, & quadratum ex CD rectangulo DCB. 19. huius.
sed vt quadratum ex CD ad DCB rectangulum, ita est DC ad CB. ergo DC ipsi CB incommensurabilis est longitudine. & ob id DC est rationalis, & ipsi C B longitudine incommensurabilis. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Rationales enim sunt potentia] *hoc est potentia commensurabiles: rationales enim commensurabiles sunt, vt in Scholio ante vigesimam huius demonstratur, & quamquam hę voces longitudine, & potentia magna ex parte referantur ad commensurabilitatem, & incommensurabilitatem, tamen aliquando etiam ad rationalitatem referri ex hoc loco perspicuum est. quod nonnulli negarunt.* *

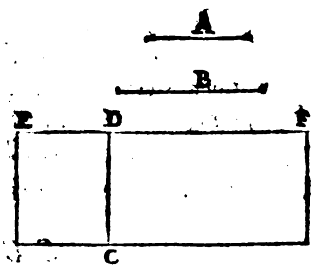
Sit quadratum ex A ℞ 40, CB vero sit 2. si igitur ad CB applicetur ℞ 40, latitudinem faciet ℞ 10. rursus si CB sit ℞ 5. & ad ipsam applicetur ℞ 40, erit latitudo, quam facit ℞ 8 ex 2. theoremate premissorum.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIIII.

Mediæ commensurabilis, media est.

Sit media A, & ipsi A commensurabilis sit B. Dico & B mediam esse. Exponatur enim rationalis CD, & quadrato quidem ex A æquale ad CD applicetur spacium rectangulum CE, latitudinem efficiens ED. rationalis igitur est ED, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. quadrato autem ex B æquale ad CD applicetur spacium rectangulum CF, latitudinem efficiens D F. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato quidem ex A æquale est rectangulum EC; quadrato autem ex B æquale CF. commensurabile igitur est rectangulum EC rectangulo CF. atque est vt EC ad CF, ita ED ad DF. ergo ED ipsi DF longitudine est commensurabilis. est autem ED rationalis, & incommensurabilis ipsi DC longitudine. Ergo & DF rationalis est, & ipsi DC longitudine incommensurabilis. rationales igitur sunt CD DF potentia solum commensurabiles. quod autem rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale est; & recta linea ipsum potens est irrationalis: vocatur autem media. ergo recta linea, quę potest rectangulum C D F est media. sed B potest rectangulum CDF. quare B media erit.

45. primi. Ex antecedente. cor. 9. huius 13. huius. 22. huius.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est spacium medio spacio commensurabile, medium esse. possunt enim ipsa rectæ lineæ, quæ sunt potentia commensurabiles, quarum altera media est. ergo & reliqua media erit. quemadmodum autem & in rationalibus dictum est, ita & in medijs dicemus, rectam lineam mediæ longitudine commensurabilem dici mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia; vniuerse enim quę longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. si vero mediæ commensurabilis quædam recta linea fuerit potentia, si- *

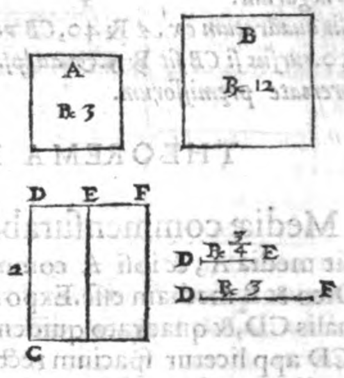
quidem

quidem etiam longitudine, dicuntur & sic mediæ & longitudine, & potentia commensurabiles. si autem potentia solum, dicuntur mediæ potentia solum commensurabiles.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc manifestum est spacium medio spacio commensurabile medium esse.

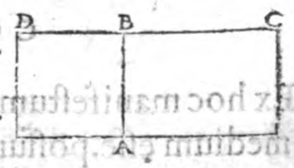
Sit spacium medium A, & ipsi commensurabile sit alterum spacium B. Dico B medium esse. Exponatur enim rationalis CD, & ad ipsam applicetur spacium rectangulum CE spacio A aequale, quod latitudinem faciat ED. erit ED rationalis, & ipsi CD longitudine (23. huius.) *incommensurabilis. Rursus ad eādem CD applicetur aliud spacium rectangulum CF, aequale spacio B, latidinemq; faciens DF. Quoniam igitur spacium A est cō mensurabile spacio B; estq; spacio quidem A aequale rectangulum CE; spacio autem B aequale rectangulū CF: rectangulum CE rectangulo CF commensurabile erit. Vt autem EC ad CF, ita est ED ad DF: ergo & ED ipsi DF longitudine est commensurabilis. sed ED rationalis est, & ipsi CD incommensurabilis longitudine. ergo & DF rationalis, & ipsi CD longitudine est incō mensurabilis. sunt igitur CD DF rationales, & potentia solum commensurabiles. ergo rectangulum CF, quod ipsis continetur, irrationale est, & medium: ac propterea spacium B ipsi aequale, medium sit necesse est. quod oportebat demonstrare.* (22. huius.)



SCHOLIVM.

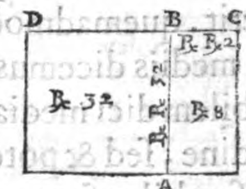
Media duplex est, videlicet potens quod rationalibus potentia solum commensurabilibus continetur, & quæ media est commensurabilis. postquam autem ostendisset mediam esse, quę potest id quod rationalibus potentia solum commensurabilibus continetur, indigebat hoc theoremate ad ea, quę sequuntur. oportet enim primum ostendere aliquas esse commensurabiles medias, deinde inquirere quale spacium illud sit, quod ipsis comprehenditur.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXV.



Quod medijs longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulū medium est.

Medijs enim longirudine commensurabilibus rectis lineis AB BC contineatur rectangulum AC. Dico AC medium esse. describatur enim ex AB quadratum AD. ergo AD medium est. & quoniam commensurabilis est AB ipsi BC longitudine, æqualis autem AB ipsi BD; erit DB ipsi BC longitudine commensurabilis. quare & DA commensurabile est ipsi AC. sed AD est medium. ergo & AC medium erit. quod demonstrare oportebat. (Ex antecedē te corol.)



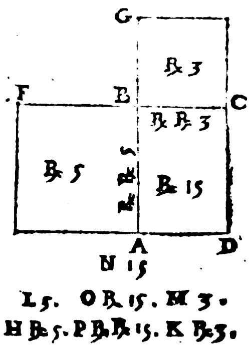
F. C. COMMENTARIVS.

Quae de rationalibus supra demonstrata sunt, eadem & de medijs demonstrabuntur.

THEOREMA I.

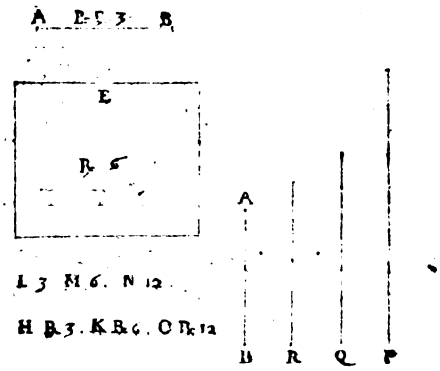
Quod datis duabus medijs, vel media & rationali cõtinetur rectãgulũ datũ erit.

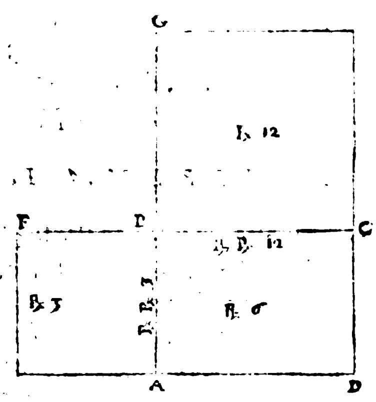
Datis enim duabus medijs, vel data media, & rationali AB AD contineatur rectangulum AC. Dico AC datum esse. sint primum AB AD mediae, & fiant ex ipsis quadrata AF CG. erunt ea irrationalia, quae media appellantur. habeant autem inter se proportionem, quam H ad K. & H quidem se ipsam multiplicans faciat L, K vero se ipsam multiplicans faciat M, & L multiplicans M ipsum N faciat, cuius N radix sit O; & rursus ipsius O sit radix P. Quoniam igitur tres magnitudines LOM deinceps sunt proportionales, suntq; earũ radices HPK, & HPK deinceps proportionales erũt. Sed quadratum FA ad rectangulum AC est vt rectãgulum AC ad CG quadratum. quod superius demonstratum est. quadratum autem FA ad quadratum CG est, vt H ad K. ergo & quadratum FA ad rectangulum AC erit, vt H ad P. et sunt HP datę, et datum FA quadratum. rectangulum igitur AC datum sit necesse est. sed sit AB media, et AD rationalis, vel contra AB rationalis, & AD media; et ex ipsis rursus fiant quadrata AF CG, quorum alterum medium erit, alterum rationale. et ijsdem constructis similiter demonstrabitur rectangulum AC datum esse. quod demonstrare oportebat. 2. Datorum Euclid.



OPERATIO.

Numeros ad quadratos quadratorum redactos inter se multiplicabimus, & eius qui producitur radix radicis erit rectãgulum, quod datis rectis lineis continetur. atque hec est multiplicatio radicum radicum inter se, quam dicunt. Vt si AB sit ℞ ℞ 5 AD ℞ ℞ 3, multiplicabimus 5 per 3. fient 15, & ℞ ℞ 15 erit id, quod ex datis rectis lineis inter se ductis producitur. si vero AB sit ℞ ℞ 5, AD 2, quadratũ quadrati ipsius 2, videlicet 16 per 5 multiplicabimus, fient 80, & ℞ ℞ 80 erit ea, quae ex eorũ multiplicatione oritur. deniq; si AB sit ℞ 2, & AD ℞ ℞ 5, multiplicabimus quadratum ipsius 2, hoc est 4 per 5, & producti accipiemus radicẽ radicis, erit ℞ ℞ 20 ea, quam inquirimus.





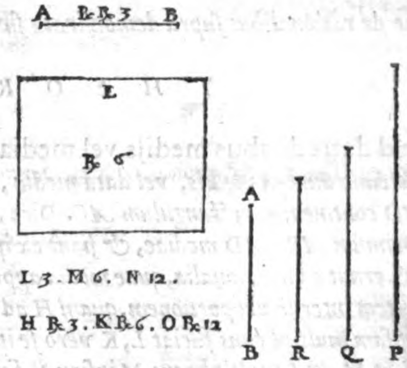
THEOREMA II.

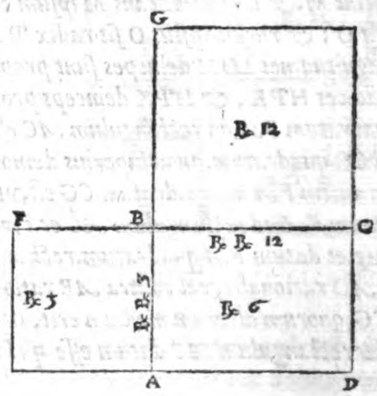
Si ad datum mediam applicetur spacium datum, latitudo, quam facit, data erit.

Sit data media AB, et spacium datum E, quod ad ipsam AB applicatum latitudinem faciat BC. Dico BC datam esse. vel igitur spacium E rationale est, vel irrationale, quod *medium appellatur. sit primum irrationale, ac medium, habeatq́ quadratum ipsius AB ad spacium E proportionem eam, quã habet H ad K; et H quidem se ipsum multiplicans faciat L: K vero se ipsum multiplicans faciat M, habebit L ad M duplam proportionem eius, quam habet latus ad latus, hoc est H ad K. Itaque fiat vt L ad M, ita recta linea AB ad aliam rectam P: et inter AB, et P sumpta media proportionali, Q, habebit AB ad P duplam proportionem eius, quam habet ad Q. ergo AB ad Q ita erit, vt H ad K. rursus inter AB et Q sumatur media proportionalis R. quare vt AB ad Q, ita erit quadratum ex AB ad quadratum ex R. quadratum igitur ex AB ad quadratum ex R est vt H ad K. sed vt H ad K, ita erat quadratum ex AB ad spacium E. ergo quadratum ex R spacio E est aequale. applicetur ad rectam lineam AB parallelogrammum rectãgulum AC, aequale quadrato ex R, quod et spacio E aequale erit. et ex AB AD fiant AF, CG quadrata; numerorum autem LM inueniatur tertius proportionalis N, cuius radix sit O. Quoniam igitur numeri LMN deinceps sunt proportionales, et H K O deinceps proportionales erũt. atque est vt quadratum FA ad rectangulum AC, ita rectangulum AC ad CG quadratum. quare similiter ac superius demonstrabitur rectangulum AC ad quadratum CG ita esse, vt K ad O. ergo et quadratũ CG, et eius radix BC data erit, videlicet latitudo, quam quęrimus. non alia ratione demonstrabimus, si spacium E rationale fuerit, latitudinem BC datam esse. quod oportebat demonstrare.*

9. quinti.

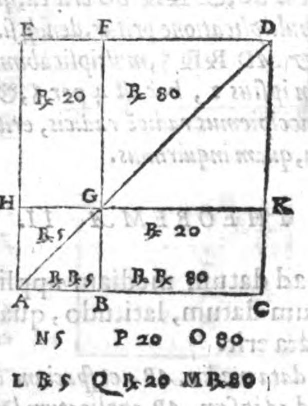
2. Dator. Euclid.





O P E R A T I O.

Numeris ad quadratos quadratorum redactis, numerum à quo spacium denominatur, diuidemus per alterum numerum; et eius, qui exibit, radix radicis erit latitudo, quam facit spacium ad rectam lineam applicatum; et hęc est radicum inter se diuisio, quam dicunt, vt si diuidenda sit ℞ 6 per ℞℞ 3, multiplicabimus 6 in se ipsum, fient 36, et diuidemus 36 per 3, exibunt 12, et ℞℞ 12 erit, quae ex earum diuisione oritur. si vero diuidere oporteat 3 per ℞℞ 3, reducemus 3 ad quadratum quadrati, et fient 81, diuisisq́ 81 per 3 exibunt 27, cuius radicis radix est ea, quam quęrimus.



T H E O R E M A III.

Quæ ex duabus datis medijs lõgitudine cõmẽsurabilibus cõponitur recta linea, data erit.

Ex duabus enim datis medijs longitudine commensurabilibus AB BC componatur recta linea AC. Dico AC datam esse. sit quadratum rectae lineae AB ad quadratũ ipsius BC, vt L ad M, et L quidem se ipsum multiplicans faciat N; M vero se ipsum multiplicans faciat O. et quoniam A B B C longitudine commensurabiles

sint,

sint, earum quadrata L M, & rursus quadratorum quadrata N O inter se proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo inter ipsos N O cadet vnus medius proportionalis numeris. cadat, sitq; P, cuius radix Q. & ex AC descripto quadrato A C D E, & reliqua figura completa, quemadmodum superius, similiter demonstrabitur quadratum AG ad rectangulum GC esse, vt L ad Q; & rectangulum GE ad quadratum GD, vt Q ad M; & denique quadratum AG ad totum AD quadratum, vt L ad compositum ex L, & M vnà cum duplo ipsius Q. quòd cum dati sint L Q M, & compositum ex ipsis dabitur. ergo & AD quadratum, & eius radix AC data erit. quod oportebat demonstrare. 9 huius.

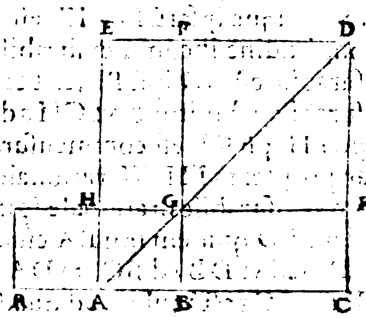
OPERATIO.

Magnitudines respondentes quadratis rectarum linearum simul coaceruabimus vnà cum duplo mediae proportionalis, & huius compositi radix erit recta linea, quae ex duabus datis constat; atque hęc est ℞ ℞ inter se additio, quam vocant, vt si ℞ ℞ 5 addenda sit ℞ ℞ 80, iungemus ex ante demonstratis ℞ 5 cum ℞ 80, & cum duplo ℞ 20, quae faciunt ℞ 405, cuius radix, videlicet ℞ ℞ 405 est recta linea, quae ex earum additione producitur. Quod si duae, vel plures mediae longitudine incommensurabiles sibi ipsis addendae sint, vel etiam rationales, & mediae vtemur eadem voce plus, vt in rationalibus dictum est, hoc modo ℞ ℞ 5 plus ℞ ℞ 3, vel ℞ ℞ 2 plus ℞ ℞ 3, plus ℞ ℞ 5, vel ℞ 2 plus ℞ ℞ 6, vel 3 plus ℞ 5 plus ℞ ℞ 6. & sic in alijs.

THEOREMA IIII.

Duarum datarum mediarum, quæ inæquales sint, & longitudine commensurabiles, differentia data erit.

Sint duae datae mediae inequales, & longitudine commensurabiles AB AC, quarum differentia sit BC. Dico BC datam esse. sit quadratum rectae lineae AB ad quadratum ipsius AC, vt L ad M. & sit rursus ipsius L quadratum N, & ipsius M quadratum sit O. habebunt N O inter se proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quare inter eos cadet vnus medius proportionalis. cadat, & sit P, cuius radix Q. & ex AB AC descriptis quadratis RH AD, & figura completa, quemadmodum superius, similiter demonstrabimus quadratum RH ad rectangulum HC esse, vt L ad Q; & rectangulum HC ad quadratum CE, vt Q ad M. & preterea duo quadrata RH AD aequalia esse duplo rectanguli HC & quadrato FK. ergo si ab ipsis L N auferatur duplum ipsius Q, reliquum erit id, quod quadrato FK respondet. datae autem sunt L Q M magnitudines. ergo & quadratum FK, atque eius radix BC dabitur. quod demonstrare oportebat.



N 5. P 45. O 405.

L ℞ 5. Q ℞ 45. M ℞ 405.

A ℞ ℞ 5 B. A ℞ ℞ 405 C.

OPERATIO.

Magnitudines respondentes quadratis rectarum linearum simul iungemus, et ab ea, quae facta est, auferemus duplam mediae proportionalis, quae inter ipsas interijcitur: relinquetur enim quadratum, cuius radix erit differentia, quam quęrimus; atque hęc est ℞ ℞ subtractio, quam appellant. vt si à ℞ ℞ 405 auferenda sit ℞ ℞ 5, iungemus ex ante demonstratis ℞ 5 cum ℞ 405, fient ℞ 500, à qua auferemus duplum ℞ 45, hoc est ℞ 180, relinquetur ℞ 80, ergo BC erit ℞ ℞ 80. At si ab aliqua media auferenda sit alia minor, quae longitudine sit ipsi incommensurabilis, vel à media rationalis, vel contra à rationali media, vtemur eadem voce minus, vt in rationalibus

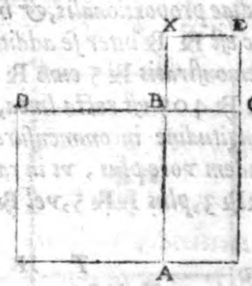
Nn 2 libus

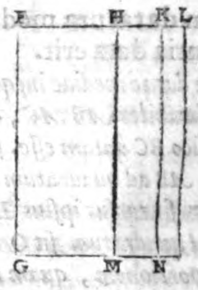
libus dictũ est hoc modo ℞ ℞ 5 minus ℞ ℞ 3, vel ℞ ℞ 12 minus ℞ 3, vel ℞ ℞ 20 minus 2, vel ℞ 6 minus ℞ ℞ 30, vel 3 minus ℞ ℞ 40. et ita in reliquis.

Itaque si mediae lõgitudine cõmẽsurabiles sint AB BC videlicet ℞ ℞ 32, et ℞ ℞ 2. erit ex primo antecedentium rectangulum quod ipsis continetur ℞ ℞ 64, hoc est ℞ 8; sunt enim ℞ ℞ 32 et ℞ ℞ 2 longitudine commensurabiles, videlicet vt 2 ad 1. nam si ℞ ℞ 32 diuidatur per ℞ ℞ 2 prouenit ℞ ℞ 16, hoc est 2.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO. XXVI.

Quod medijs potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale est, vel medium.





Medijs enim potentia solum commensurabilibus rectis lineis A B BC contineatur rectangulũ A C. Dico AC vel rationale esse, vel medium. describantur enim ex AB BC quadrata AD BE. vtrumque
21.huius. 45.primi. igitur ipsorum A D BE medium est. exponatur rationalis FG, & ipsi quidem AD æquale ad FG applicetur parallelogrammum rectangulum GH, latitudinem faciens FH; ipsi vero AC æquale ad HM applicetur rectangulum M K, latitudinem faciens HK; & insuper ipsi BE æquale similiter ad KN applicetur
14.primi. NL, latitudinẽ faciens KL. In recta igitur linea sunt FH HK KL. Quoniam igitur medium est vtrũque ipsorum AD BE; atque est AD quidem æquale ipsi GH, BE vero ipsi NL, erit & vtrumque ipsorum G H NL medium, & ad rationalẽ FG applicata sunt.
23.huius. ergo & vtraque ipsarũ FH KL est rationalis, & ipsi FG longitudine incommensurabilis. & quoniam cõmensurabile est AD ipsi BE, erit & GH ipsi NL com
1.sexti. 10.huius. mensurabile. est igitur & vt GH ad NL, ita FH ad K L. ergo FH ipsi K L est commensurabilis longitudine; ac propterea FH KL rationales sunt longitudine commensurabiles. rationale igitur est rectangulum, quod FH KL continetur. et quoniam BD quidem ipsi BA est æqualis; XB uero ipsi BC, erit vt DB ad BC, ita A
1.sexti. Conuertendo. B ad BX: sed vt DB ad BC, ita DA quadratum ad rectangulum A C: vt autem A B ad BX, ita AC rectãgulum ad quadratum CX. est igitur vt XC ad CA, ita CA ad A D: æquale autem est AD ipsi GH, & AC ipsi MK, & CX ipsi NL. quare vt GH ad M K, ita MK ad NL. & vt igitur FH ad HK, ita HK ad KL: ideoq; quod FH KL conti-
17.sexti. netur est æquale quadrato, quod fit ex HK. est autem quod continetur FH KL rationale. ergo & rationale est quadratum ex HK; ac propterea recta linea HK rationalis. & si quidem HK commensurabilis est ipsi HM, hoc est ipsi FG longitudine,
20.huius. 21.huius. erit rectangulũ NH rationale; si vero HK est incõmensurabilis ipsi FG lõgitudine, KH HM rationales erunt potentia solum commensurabiles: & ob id rectangulum HN medium erit. ergo HN vel rationale est, vel medium. sed HN est æquale ipsi A C. quare AC vel rationale, vel medium est. quod igitur medijs potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum vel rationale est, vel mediũ. quod oportebat demonstrare.

SCHOLIVM.

Admiratione dignum est triadis vel ternarij vim, ac facultatem ita potentem esse, vt etiam irrationalium potestatem definiat, & ad illorum vsque extrema permeet. preterea & illud mirum est vnamquãque

irrationalitatis

irrationalitatis speciem ab aliqua madietate omnino determinari vel Geometrica, vel Arithmetica, vel Musica. porrò anima ipsa proxime accedens ad magnitudinum contemplationem pro ea, quam in se habet, rationis facultate videtur & omnia determinare, quæ in magnitudinibus determinata non sunt, & ipsam analogiæ infinitatem his tribus vinculis cohercere. Sciendum & illud est, nomen commune mediæ in ea, quæ magis est particularis, natura positum esse. nam & quæ potest spacium contentum rationalibus longitudine commensurabilibus, media omnino est rationalium illarum; & quæ potest spacium rationali, & irrationali contentum. attamen neutram harum appellat mediam, sed quę potest ante dictum spacium. Illud quoque animaduertendum est, Euclidem vbique potentias denominatiue à potentibus appellare; rationales quidem à rationali, medium autem à media, & contemplationem, quæ circa medias versatur, similem facere rationalibus. etenim has vel longitudine, vel potentia solum commensurabiles, quemadmodum illas esse dicit. & spacium quidem, quod medijs longitudine commensurabilibus continetur, medium esse, quemadmodum illic spacium rationalibus contentum rationale. spacium vero contentum medijs potentia solum cōmensurabilibus quandoque rationale, quandoque medium; & quod rationalibus potentia solum commensurabilibus continetur, medium esse. quare medium quidem tripliciter, rationale vero dupliciter contingit. & videtur ea, quę inter medias longitudine commensurabiles proportionalis interijcitur, & quæ inter rationales potentia solum commensurabiles omnino media esse; quæ vero inter medias potentia solum commensurabiles interdum quidem rationalis, interdum vero media. ideoq; & incommensurabilis potentia interdum rationalis, interdum media est. duę enim mediæ potentia commensurabiles esse possunt, quemadmodum & duę rationales potentia commensurabiles. existimandum igitur est analogiam caussam esse ortus contentorum spaciorum: vt potequæ inter extrema; hoc est vel inter duas rationales mediam, vel inter duas medias rationalem constituit; & totum nexum quandoque similem facit extremis, quandoque ipsis dissimilem interijcit.

Media.

Potentias denominatiue a potētibus appellat Euclides.

Contēplatio quæ circa medias similis est ei, quæ circa rōnales uersatur.

Medium tripliciter, rationale uero dupliciter continget.

F. C. COMMENTARIVS.

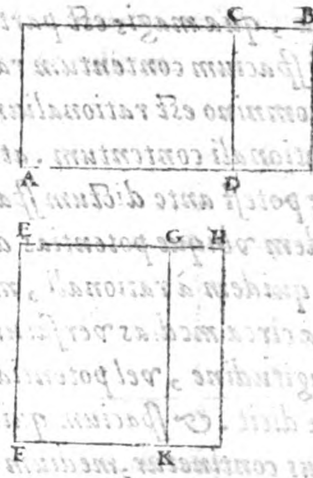
Sint mediae potentia solum commensurabiles AB BC, & sit AB ℞℞ 54, *& BC* ℞℞ 24, *erit rectangulum ipsis contentum* ℞℞ 1296, *videlicet 6, quod est rationale. Rursus sint mediae potentia solum commensurabiles* ℞℞ 128, *&* ℞℞ 22, *rectangulum, quod ipsis continetur, erit* ℞℞ 9216, *videlicet* ℞ 96, *quod est medium. At vero* ℞℞ 54, *&* ℞℞ 24: *itemq;* ℞℞ 128, *&* ℞℞ 72 *esse potentia solum commēsurabiles patet tum ex 28, & 29, huius, tum ex eo, quòd si* ℞℞ 54 *per* ℞℞ 24 *diuidatur, prouenict* ℞℞ $\frac{9}{4}$, *hoc est* ℞ $\frac{3}{2}$. *erit igitur* ℞℞ 54 *ad* ℞℞

24, *vt*

24, vt ℞ 3 ad ℞ 2. Rursus si ℞℞ 128 diuidatur per ℞℞ 72, prouenient ℞℞ $\frac{4}{3}$. quare ℞℞ 128 ad ℞℞ 72 erit vt ℞ 4 ad ℞ 3.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVII.

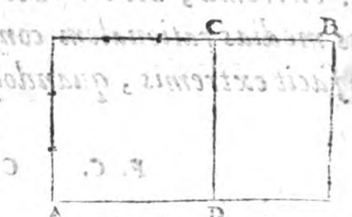
Medium non superat medium rationali.



Si enim fieri potest, medium A B superet medium A C rationali D B. & exponatur rationalis EF, atque ipsi quidem AB æquale ad EF applicetur parallelogrammum rectangulum FH, latitudinem faciens EH: ipsi vero AC æquale auferatur FG. reliquum igitur BD reliquo KH est æquale. rationale autẽ est BD. ergo & KH rationale. quoniam igitur medium est vtrumque ipsorum A B, AC; estq; AB ęquale FH, & AC æquale F G: erit & vtrumque ipsorum F H FG medium: & ad rationalem E F applicata sunt. rationalis igitur est (23.huius.) vtraque earum HE EG, & ipsi EF longitudine incommensurabilis. & quoniam rationale est D B, et ipsi KH æquale; & KH rationale erit. est autem ad EF applicatum. rationalis igitur est GH, & ipsi (21.huius.) EF commensurabilis longitudine. sed & EG est rationalis, & ipsi EF longitudine incommensurabilis. ergo EG incommensurabilis est ipsi GH longitudine. atque est vt EG ad GH, ita quadratum ex E G ad rectangulum, quod E G, (Coro. 23. huius.) GH continetur. incommensurabile igitur est quadratum ex E G rectangulo EGH. (10.huius.) sed quadrato quidem ex EG commensurabilia sunt ex EG, GH quadrata. vtraque (6.huius.) enim sunt rationalia. rectangulo autem E G H commensurabile est quod bis EG (14.huius.) GH continetur; est enim ipsius duplum. ergo quadrata ex EG, G H incommensurabilia sunt ei, quod bis EG, GH continetur. & vtraque igitur, videlicet quadra- (4. secundi.) ta ex EG GH, & quod bis continetur EG GH, hoc est quadratum ex EH, incom- (17.huius.) mensurabilia sunt quadratis ex EG GH. sunt autẽ rationalia, quę ex EG GH quadrata. irrationale igitur est quadratum ex E H: ac propterea E H est irrationalis, sed & rationalis. quod fieri non potest. non igitur medium superat medium rationali. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Rationale autem non superare rationale nisi rationali, hoc modo demonstrabitur.

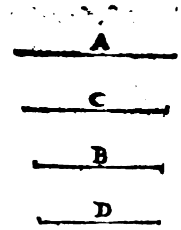


Sint parallelogramma rectangula AB AC rationalia. Dico DB, quo parallelogrammum AB ipsum AC superat, rationale esse. quoniam enim AB AC sunt rationalia, & inter se commensurabilia sunt. atque est tota magnitudo A B ex magnitudinibus A C DB composita vni ipsarum (16.huius.) A C commensurabilis. ergo & reliquae D B commensurabilis erit. sed A B est rationale. quare & D B rationale sit necesse est. quod nos ad 25 huius demonstrauimus.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO. XXVIII.

Medias inuenire potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant.

Exponantur



Exponatur duæ rationales potentia solum commensurabiles A B; & sumatur ipsarum A B media proportionalis C: fiatq; vt A ad B, ita C ad D. quoniã igitur A B rationales sunt, potentia solum commensurabiles, erit quod ipsis A B continetur rectãgulum, hoc est quadratum ex C medium. ergo recta linea C media est. & quoniam ut A ad B, ita est C ad D; suntq; A B potentia solũ commensurabiles: & C D potentia solum commensurabiles erunt. est autem recta linea C media. media igitur est & D. quare C D mediæ sunt potentia solum cõmensurabiles. Dico etiam ipsas rationale continere. quoniam enim est vt A ad B, ita C ad D, erit permutando vt A ad C, ita B ad D. sed vt A ad C, ita C ad B. ergo & vt C ad B, ita B ad D. quod igitur ipsis C D continetur quadrato ex B est æquale. rationale autem est quadratum ex B. ergo & quod continetur C D rationale erit. Inuentæ igitur sunt mediæ potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent. atque illud est. quod facere oportebat.

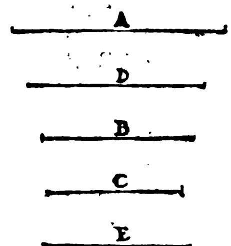
11. sexti. * 22. huius. 20. huius. 24. huius. 17. sexti.

F. C. COMMENTARIVS.

Fiatq; ut A ad B, ita C ad D] *Sit A 3, & B ℞ 6, erit rectangulum, quod ipsis continetur ℞ 54, & recta linea C inter ipsas A B media proportionalis, quae ipsum potest ℞ ℞ 54. itaque fiat ut A ad B, hoc est ut ℞ ℞ 81 ad ℞ ℞ 36, ita C videlicet ℞ ℞ 54 ad aliam, quae sit D, hoc modo. multiplicetur 54 per 36, fiet 1944. ergo ℞ ℞ 1944 est rectangulum, quod continetur ℞ ℞ 36, & ℞ ℞ 54 ex primo antecedentium, quod quidem applicatum ad ℞ ℞ 81 latitudinem faciet ℞ ℞ 24 ex secundo eorundem. quare rectangulum contentũ ℞ ℞ 81, & ℞ ℞ 24 est aequale ei, quod continetur ℞ ℞ 36, & ℞ ℞ 54 est igitur ut ℞ ℞ 81 ad ℞ ℞ 36, ita ℞ ℞ 54 ad ℞ ℞ 24.* *
16. sexti.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXIX.

Medias inuenire potentia solum commensurabiles, quæ medium contineant.



Exponantur tres rationales potentia solum cõmensurabiles A B C, sumaturq; ipsarum A B media proportionalis D: & fiat vt B ad C, ita D ad E. Quoniam igitur A B rationales sunt, potẽtia solum commensurabiles, erit quod A B continetur rectãgulum, hoc est quadratnm ex D medium. ergo D media est. & quoniam B C sunt rationales potentia solum commensurabiles, atque est vt B ad C, ita D ad E; rectę lineæ D E potẽtia solum commensurabiles erunt. est autem D media. ergo & E media est; ac propterea D E medię sunt potẽtia solum commensurabiles. Dico ipsas etiam medium continere. Quoniam enim est vt B ad C, ita D ad E, erit permutando vt B ad D, ita C ad E. vt autem B ad D, ita est D ad A. ergo & vt D ad A, ita C ad E. quod igitur A C continetur rectangulum est æquale contento D E. est autem quod continetur A C medium. ergo & quod continetur D E medium erit. Inuentę igitur sunt mediæ potentia solum commensurabiles, quæ medium continent, vt facere oportebat.

* 22. huius. 10. huius. 24 huius. 16. sexti. 22. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

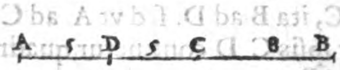
Et fiat vt B ad C, ita D ad E] *Sit A 4, B ℞ 8, et C ℞ 6, erit rectangulum, quod A B continetur* *

tinetur ℞ 128, & recta linea D inter ipsas A B media proportionalis ℞ ℞ 128. fiat igitur vt B ad C, hoc est vt ℞℞ 64 ad ℞℞ 36, ita D videlicet ℞℞ 128 ad aliam, quae sit E. eodem modo, quo supra, multiplicetur 128 per 36, fit 4608, & 4608 diuidatur per 64; exeunt 72. ergo ℞℞ 72 erit quarta proportionalis A, quam querebamus.

LEMMA I.

Inuenire duos numeros quadratos, ita vt qui ex ipsis cōponitur etiā quadratus sit.

Exponantur duo numeri AB BC, qui vel
A pares sint, vel impares. & quoniam siue à par par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; erit AC numerus par. secetur AC bifariam in D. sint autem AB BC uel similes plani, vel quadrati, qui & ipsi similes plani sunt. ergo qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex CD est ęqualis ei, qui fit ex BD quadrato. atque est quadratus, qui fit ex



B ni, vel quadrati, qui & ipsi similes plani sunt. ergo qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex C D est ęqualis ei, qui fit ex BD quadrato. atque est quadratus, qui fit ex
C AB BC; ostensum enim est si duo similes plani se se multiplicantes aliquem faciāt, factum quadratum esse. Inuenti igitur sunt duo quadrati numeri, videlicet qui fit ex AB BC, & qui fit ex CD, qui quidem inter se compositi quadratum numerum faciunt, nempe eum, qui fit ex BD. quod ipsum facere oportebat.

COROLLARIVM.

Et manifestum est rursus inuentos esse duos numeros quadratos, & qui fit ex BD, & qui ex CD, ita vt ipsorum excessus, videlicet qui
D *fit ex AB BC, sit quadratus; quando AB BC similes plani sint. Quādo autem non sint similes plani, inuenti sunt duo quadrati & qui fit ex BD, & qui ex CD, quorū excessus, qui ex AB BC nō est quadratus.*

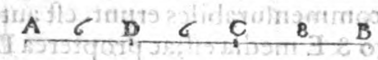
F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam siue à pari par auferatur, siue ab impari impar reliquus par est] *ex 24, & 26 noni libri.*

B Ergo qui fit ex AB BC vnà cū quadrato ex CD est æqualis ei, qui fit ex BD quadrato] *Hoc demonstratur à Barlaam Monacho in theoremate 6 eorum, quae nos ad 15 noni libri apposuimus.*

C Ostensum est enim si duo similes plani se se multiplicantes aliquem faciant, factum planum esse] *in prima propositione noni libri.*

D Quando autem non sint similes plani, inuenti sunt] *Sint enim duo numeri AB BC, qui non sint similes plani, & AC bifariam secetur in D. rursus qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex CD est aequalis ei, qui ex BD ex 6 Barlaam Monachi iam dicto. sed qui fit ex AB BD non est quadratus. si enim quadratus sit, erunt numeri AB BD similes plani. quod non ponitur. quadrati igitur numeri sunt, qui fiunt ex BD, & DC, quorum excessus, qui fit ex AB BC non est quadratus.*



LEMMA II.

Inuenire duos quadratos numeros, ita vt qui ex ipsis componitur non sit quadratus.

Sit enim qui ex A
B BC quadratus, vt
dictum est, & par nu
merus C A ; sece-

turq; CA bifariam in D. perspicuũ est quadratum ex AB BG vnà cum quadrato A
ex CD ęqualem esse ei, qui fit ex BD quadrato. auferatur vnitas DE. ergo quadra-
tus ex AB BC vnà cum quadrato ex CE minor est quadrato ex BD. Dico igitur
quadratum ex AB BC vnà cum quadrato ex CF, quadratum non esse. si enim est
quadratus vel æqualis est quadrato ex BE, vel eo minor, nõ autem maior, vt ne vni- B
tas secetur; neuè qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CD, qui est ęqualis quadra-
to ex BD ęqualis sit quadrato ex AB BC vnà cum quadrato ex CE. sit primum, si
fieri potest, qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis quadrato ex BE; & sit
GA duplus ipsius DE vnitatis. Quoniam igitur totus AC totius CD est duplus,
quorum AG est duplus DE, erit & reliquus CG ipsius GE duplus. ergo GC in pũ- C
cto E bifariam secatur; ac propterea qui ex GB BC vnà cum quadrato ex CE ęqua
lis est ei, qui fit ex BE quadrato. sed & qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æ-
qualis ponitur quadrato ex BE. ergo qui ex GB BC vnà cum quadrato ex CE est
æqualis ei, qui ex AB BC unà cum quadrato ex CE; & communi detracto quadra- D
to ex CE concludetur AB ipsi GB æqualis. quod est absurdum. non igitur qui ex A
B BC vnà cum quadrato ex CE æqualis est quadrato ex BE. Dico neque quadrato
ex BE minorẽ esse. si enim fieri potest, sit quadrato ex BF æqualis, & ipsius DF du-
plus ponatur HA. concludetur rursus HC duplus CF, ita ut & HC in F bifariam di E
uidatur; ac propterea qui ex HB BC unà cum quadrato ex CF æqualis sit quadra-
to ex BF. ponitur autem & qui ex AB BC unà cum quadrato ex CE æqualis qua-
drato ex FB. ergo sequitur qui ex AB BC uuà cum quadrato ex CE æqualem esse
ei, qui ex HB BC unà cum quadrato ex CF. quod est absurdum. non igitur qui ex F
A B B C unà cum quadrato ex C E est æqualis minori, quàm sit quadratus ex B E.
ostensum est autem neque ipsi quadrato ex BE, neque maiori eo æqualem esse. er-
go qui fit ex AB BC unà cum quadrato ex CE non est quadratus. & cum fieri pos-
sit, ut idem pluribus modis ostendatur, unus qui proxime dictus est nobis sufficiat,
ne longam tractationem longius producamus.

F. C. COMMENTARIVS.

Perspicuum est quadratum ex A B B C unà cum quadrato ex C D æqualem esse A
ei, qui fit ex BD quadrato] *Ex 6. Barlaam Monachi.*

Non autem maior ut ne unitas secetur] *si enim fieri potest sit maior, vel igitur eius la-* B
tus est BD, vel minus quàm BD. & si quidem BD, erit totum parti aequale. quod fieri non potest.
si vero minus quàm BD, cum sit maius quàm BE, vnitas secabitur. quod itidem fieri non potest.

Erit & reliquus CG ipsius GE duplus] *Ex 7 vel 11 septimi libri.* C

Et communi detracto quadrato ex CE concludetur AB ipsi G B ęqualis] *Relin-* D
quetur enim qui ex AB BC aequalis ei, qui ex GB BC. sed qui ex AB BC ad eum, qui ex GB BC
est vt AB ad BG, ex 17 septimi. ergo AB ipsi BG est aequalis. quod est absurdum.

Concludetur rursus HC duplus CF.] *Quoniam enim AC ipsius CD est duplus, quorum* E
AH ponitur duplus ipsius DF, erit & reliquus HC reliqui CF duplus.

Quod est absurdum] *Est enim qui ex AB BC maior eo, qui ex HB BC, quòd AB sit ma-* F
ior quàm BH. & similiter quadratus ex CE maior quadrato ex CF; quoniam AC quàm CF est
maior.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXX.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita
vt maior plus posſit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longi
tudine commensurabilis.

Ex corolla. primi lem. antecedentium. Exponatur enim quædam rationalis AB, & duo quadrati numeri CD DE, ita vt ipsorum excessus CE non sit quadratus. Describatur autẽ in recta linea AB semicirculus AF B: fiatq; vt DC ad CE, ita ex AB quadratum ad quadratum ex AF; & FB iungatur. Quoniam igitur est, vt quadratum ex BA ad quadratum ex AF, ita DC ad CE; habebit quadratum ex BA ad quadratum ex AF proportionem eam, quã numerus DC ad CE numerum. ergo quadratum ex BA quadrato ex AF est commensurabile. sed rationale est quadratum ex AB. ergo & quadratum ex AF rationale erit; ac propterea recta linea AF est rationalis. & quoniam DC ad CE proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex B A ad quadratum ex A F proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est recta linea BA ipsi AF longitudine. ergo AB AF rationales sunt potentia solum commensurabiles. Quòd cum sit vt DC ad CE, ita quadratum ex BA ad quadratum ex AF, erit per conuersionem rationis vt CD ad DE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF. sed CD ad DE proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex AB ad quadratũ ex BF proportionẽ habebit, quã quadratus numerus ad quadratũnumerũ; & ob id recta linea AB ipsi BF longitudine est commensurabilis. atque est quadratum ex AB æquale quadratis ex AF FB. ergo AB plus potest, quàm A F quadrato rectæ lineę B F sibi commensurabilis longitudine. Inuentæ igitur sunt duæ rationales potentia solum commensurabiles BA AF, ita vt maior BA plus possit, quàm minor AF, quadrato ipsius FB, sibi longitudine commensurabilis. quod facere oportebat.

Per Corol. 6. huius.

6. huius.

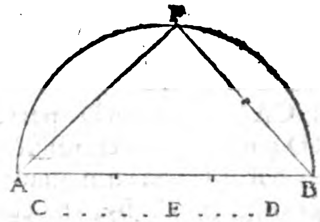
diffi. 9. huius

9. huius.

Ex 47. primi, uel ex coroll. ante 15. huius.

9. huius.

47. primi.



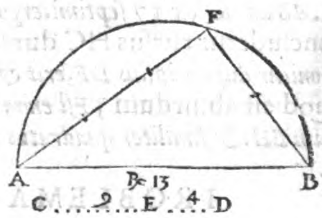
SCHOLIVM.

Ex hoc loco inuentionem aggreditur reliquarum irrationalium, ac primum earum, quę per compositionem fiunt; præmittit autem theoremata hęc, vtpote ex quibus eiusmodi irrationalium natura appareat.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXXI.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita ut maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Exponatur rationalis A B, & duo numeri quadrati CE ED, ita vt qui ex ipsis componitur nõ sit quadratus. atque in recta linea AB semicirculus AFB describatur: & fiat vt DC ad CE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex AF: & iuncta FB, similiter ostendemus, vt in antecedente, BA AF rationales esse potentia solum commensurabiles. Et quoniam est vt DC ad C E, ita quadratum ex B A ad id quod ex AF quadratum; erit per conuersionem rationis vt CD ad DE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF. sed C D ad D E proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. nõ igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BF proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum

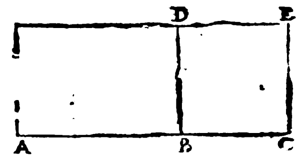


merum. ergo A B ipſi B F longitudine eſt incommenſurabilis. & B A plus poteſt, quàm AF quadrato rectæ lineæ BF ſibi incommenſurabilis longitudine. quare AB BF rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & AB plus poteſt, quàm AF quadrato rectæ lineæ FB ſibi longitudine incommenſurabilis.

LEMMA.

Si ſint duę rectę lineæ in proportione aliqua, erit vt recta linea ad rectam lineam, ita rectangulum duabus rectis lineis contentum ad quadratum minoris.

Sint duæ rectæ lineæ AB BC in proportione aliqua. Dico vt AB ad B C, ita eſſe rectangulum ex AB BC ad quadratū ex B C. deſcribatur enim ex BC quadratum BDEC, & compleatur AD parallelogrammū. manifeſtum eſt ut AB ad BC, ita eſſe A D parallelogrammum ad parallelogrammum B E. atque eſt A D quidem, quod AB B C continetur; eſt enim B C ipſi B D æqualis. B E vero eſt quadratum ex B C. vt igitur A B ad B C, ita rectangulum ex AB BC ad id, quod ex BC quadratum. quod demonſtrare oportebat. 1.sexti

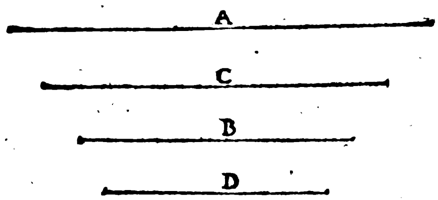


PROBLEMA VIII. PROPOSITIO. XXXII.

Inuenire duas medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale contineant, ita ut maior plus poſſit, quàm minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

30.huius

Exponantur enim duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles A B, ita vt A maior plus poſſit, quàm B minor, quadrato rectę lineę ſibi lōgitudine commenſurabilis. & ſit rectangulo ex AB æquale quadratum, quod fit à recta linea C. medium autem eſt quòd ex AB. ergo & quadratum ex C medium erit, & ipſa C media. at quadrato quod fit ex B ęquale ſit rectāgulum ex CD. rationale autem quod ex B. ergo & rectangulum ex CD eſt rationale. & quoniam eſt vt A ad B, ita rectangulum ex AB ad id, quod ex B quadratum; ſed rectangulo quidem ex A B æquale eſt quadratum ex C; quadrato autem ex B ęquale rectangulum ex CD: erit vt A ad B, ita quadratum ex C ad id, quod ex CD rectangulum. Sed vt quadratum ex C ad rectangulum ex CD, ita recta linea C ad ipſam D. vt igitur A ad B, ita C ad D. commenſurabilis autem eſt A ipſi B potentia ſolum. ergo & C ipſi D potentia ſolū eſt commenſurabilis. atque eſt C media. media igitur & D. & quoniam eſt vt A ad B, ita C ad D, & A plus poteſt, quàm B quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis lōgitudine; & C plus poterit, quàm D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Inuentę igitur ſunt duæ medię potentia ſolum cōmenſurabiles C D, quæ rationale continent, & C plus poteſt quàm D quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. ſimiliter autem oſtendetur inueniri poſſe duas medias potentia ſolum commenſurabiles, & continentes rationale, ita ut maior plus poſſit, quàm minor quadrato rectę lineę ſibi incommenſurabilis longitudine, quādo A plus poſſit, quàm B quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incommenſurabilis.



22.huius

Ex antecedēti lemmate.

1.sexti

10.huius.

24.huius.

15.huius.

*

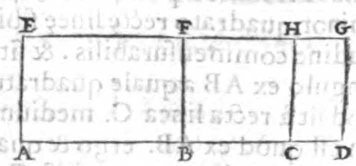
F. C. COMMENTARIVS.

Similiter autem ostendetur inueniri posse duas medias potentia solum commẽsurabiles] *Maneant eadem quae supra, & A plus possit, quàm B quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. similiter vt ante demonstrabitur, rectam lineam D mediam esse. Et quoniam vt A ad B, ita C ad D, & A plus potest, quàm B quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine, & C plus poterit, quàm D quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine. ergo rursus inuentae sunt duae mediae potentia solum commensurabiles C D, rationale continentes, & C plus potest quàm D quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis.*

Sit A 8, B ℞ 28. erit rectangulũ, quod ipsis cõtinetur ℞ 1792, & recta linea C ℞℞ 1792, quae media est. fiat vt 8 ad ℞ 28, ita ℞℞ 1792 ad aliam, quae sit D. erit ea ℞℞ 343. ergo ℞℞ 1792 & ℞℞ 343 duae mediae sunt, potentia solum commensurabiles, quae rationale continent, videlicet 28. & maior plus potest, quàm minor quadrato rectae lineae sibi longitudine cõmensurabilis. nam si à quadrato maioris auferatur quadratum minoris, hoc est si à ℞ 1792 auferatur ℞ 343, relinquetur ℞ 567. & sunt duae mediae ℞℞ 1792 ℞℞ 567 inter se longitudine commensurabiles, videlicet vt 4 ad 3. si enim ℞℞ 1792 diuidatur per ℞℞ 567, prouenit ℞℞ 3 $\frac{13}{81}$, quae est 1 $\frac{1}{3}$, hoc est $\frac{4}{3}$: Rursus sit A 8. B ℞ 20, erit rectangulum ipsis contentum ℞ 1280, & recta linea C ℞℞ 1280. fiat ut 8 ad ℞ 20, ita ℞℞ 1280 ad aliam, quae sit D. erit ea ℞℞ 125. sunt igitur RR 1280, & RR 125 duae mediae, quae rationale continent, videlicet 20, & maior plus potest, quàm minor quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. sed sit A 3 B ℞ 6, rectangulum ipsis contentum erit R 54, & recta linea C ℞℞ 54. Rursus fiat ut 3 ad ℞ 6, ita RR 54 ad aliã, erit ea RR 24. quare RR 54, & RR 24 sunt duae mediae potentia solum commensurabiles, quae rationale continent, uidelicet 6; & maior plus potest, quàm minor quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis.

LEMMA

Si fuerint tres rectæ lineę in proportione aliqua, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum contentum prima, & media ad id, quod media, & tertia continetur.

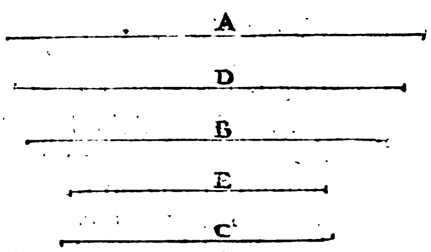


Sint tres rectę lineæ in proportione aliqua AB BC CD. Dico vt AB ad CD, ita esse rectangulum contentũ AB BC ad id quod BC CD continetur. Ducatur enim à pũcto A ipsi AB ad rectos angulos AE; ponaturq; AE ipsi BC æqualis; & per E quidem ipsi AD parallela ducatur EG; per BCD vero ducantur BF CH DG parallelæ ipsi AE. quoniam igitur est vt AB ad BC, ita AF parallelogrammum ad parallelogrammum BH; ut autem BC ad CD, ita parallelogrammum BH ad ipsum CG: erit ex ęquali vt AB ad CD, ita AF parallelogrammum ad parallelogrammum CG. & est parallelogrãmum quidem AF, quod AB BC continetur; namque AE est ęqualis BC; parallelogrammum vero CG est, quod continetur BC CD; etenim BC ipsi CH est ęqualis. Si igitur fuerint tres rectæ lineæ in proportione aliqua, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum, quod continetur prima & media ad rectangulum media & tertia cõtentum. quod oportebat demonstrare.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO. XXXIII.

Inuenire duas medias potentia solum commensurabiles, quæ medium contineant, ita ut maior plus possit, quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponantur



Exponantur tres rationales A B C, potentia solum commensurabiles, ita vt A plus possit, quàm C quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine: & sit rectangulo ex ipsis A B ęquale quadratum, quod fit ex D. medium autem est rect angulum ex AB. ergo & quadratũ ex D medium erit; & recta linea D media. rect angulo autem ex BC æquale sit rectangulum ex DE. Quoniam igitur est vt rectangulum ex AB ad rectangulum ex BC, ita recta linea A ad ipsam C; sed rectangulo quidem ex A B æquale est quod fit ex D quadratum; rectangulo autem ex B C ęquale rectangulum ex DE: erit vt A ad C, ita quadratum ex D ad id, quod ex D E rectangulum. sed ut quadratum ex D ad rectangulum ex DE, ita D ad E. & ut igitur A ad C, ita D ad E. commensurabilis autem est A ipsi C potentia solum. ergo & D ipsi E potentia solum est cõmensurabilis. atque est D media. media igitur & E. itaque q̃m est vt A ad C, ita D ad E; & A plus potest, quàm C quadrato rectę lineę sibi lõgitudine commensurabilis: & D plus poterit, quàm E quadrato rectę lineę sibi cõmensurabilis longitudine. Dico pręterea rectangulum ex DE medium esse. Quoniam enim rectangulo ex B C ęquale est, quod ex D E rectangulum; medium aũt est quod ex B C. ergo & quod ex D E medium erit. Inuentę igitur sunt duę medię potentia solum commensurabiles DE, quæ medium continẽt, ita vt maior plus possit, quàm minor quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis. Rursus similiter inuenientur duæ mediæ potentia solum commensurabiles. & medium continentes, ita vt maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; quando scilicet A plus possit, quàm C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. quod facère oportebat.

22. huius. Ex anteced. lemmate. Lem. 23. huius. 24. huius. 15. huius. 22. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

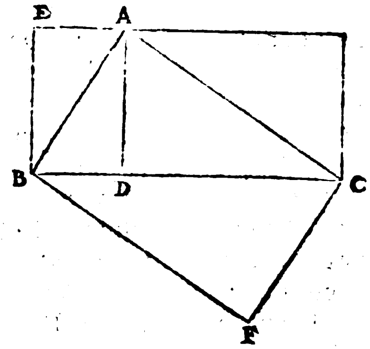
Sit A 8 B ℞ 48, C ℞ 28, rectangulũ quod ipsis AB cõtinetur, erit ℞, 3072. & recta linea D ℞℞ 3072, quae est media. fiat vt A ad C, ita D ad aliã, quae sit E. erit E ℞℞ 588. ergo ℞℞ 3072, & ℞℞ 588 duae mediae sunt potentia solũ commensurabiles, quae medium continent, & maior plus potest, quàm minor quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis. si enim à quadrato maioris auferatur quadratum minoris, hoc est si à ℞ 3072 auferatur ℞ 588, reliqua erit ℞ 972. suntq; ℞℞ 3072, & ℞℞ 972 duae mediae longitudine inter se commensurabiles, vt 4 ad 3. nã si ℞℞ 3072 diuidatur per ℞℞ 972, exibit ℞℞ $3\frac{13}{81}$ quae est $1\frac{1}{3}$ hoc est $\frac{4}{3}$. rursus sit A 8, B ℞ 48, C ℞ 20, erit D cadẽ, quę supra, videlicet ℞℞ 3072. fiat vt A ad C, ita D ad aliam, quae sit E. erit E ℞℞ 300. sunt igitur ℞℞ 3072, & ℞℞ 300 duae mediae potentia solum commensurabiles, quae medium continent, & maior plus potest, quàm minor quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. sed sit A ℞ 6, B ℞ 3, C ℞ 2, erit D ℞℞ 18. fiatq; vt A ad C, ita ℞℞ 18 ad aliã, quae sit E, erit E ℞℞ 2. ergo ℞℞ 18, & ℞℞ 2 sunt duae mediae potentia solum commensurabiles, & medium continentes, quarum maior plus potest, quã minor, quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine.

LEMMA I.

Sit triangulum orthogonium ABC, rectum habens angulum B A C, & ducatur AD perpendicularis. Dico rectangulum quidem contentum CB BD ęquale esse quadrato, quod fit ex BA; cõtentum vero BC CD æquale quadrato ex CA; & contentum B D D C æquale quadrato ex

DA

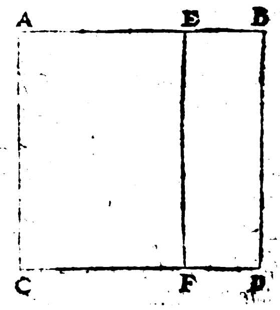
DA: & denique contentum BC AD rectangulo, quod BA, AC continetur, æquale esse.



Quoniam enim in triangulo orthogonio ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est AD, triãgula ABD ADC similia sunt, & toti
8.sexti. triangulo ABC, & inter se se. et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit vt C
4.sexti. B ad BA, ita AB ad BD. ergo rectangulũ, quod CB BD continetur quadrato ex AB est æquale.
17.sexti. Eadem ratione et rectangulum contentum BC CD æquale est quadrato ex AC, rursus quoniã in triangulo orthogonio ab angulo recto ad basim perpendicularis ducitur, ducta basis partiũ
8.sexti. media proportionalis est. quare ut BD ad DA, ita AD ad DC; ac propterea rectãgulum, quod BD DC continetur est æquale quadrato ex AD. Dico & rectangulum contentum BC AD ei, quod BA AC continetur, æquale esse. Quoniam enim, vt diximus, triangulum ABC triangulo ACD est simile, vt BC ad CA, ita erit BA ad AD. si autem
4.sexti. quattuor rectę lineę proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum est
16.sexti. ęquale ei, quod medijs continetur. ergo rectangulum contentum BC AD contento BA AC æquale erit. Dico prætera si describamus parallelogrammum rectangulum EC, & ipsum AF compleamus, rectangulum EC ipsi AF æquale esse. vtrũque enim ipsorum duplum est triãguli ABC. atque est rectangulũ quidem EC id, quod BC AD continetur; rectangulum vero AF quod continetur BA AC. At rectãgulum, quod cõtinetur BC AD rectangulo BA AC contento est æquale.

LEMMA II.

Si recta linea in partes inæquales secetur, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum contentum tota, et maiori parte ad rectangulũ, quod tota, & minori continetur.

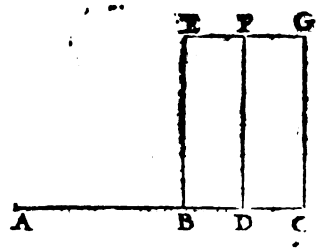


Recta enim quædam linea AB secetur in partes inæquales ad E. Dico vt AE ad EB, ita esse rectangulum contentum BA AC ad id, quod AB BE continetur. describatur enim ex AB quadratum ACDB; & per E quidem alterutri ipsarum AC DB parallela ducatur EF. perspicuum est vt AE ad EB, ita esse AF parallelogrãmum ad parallelogrammum FB. atque est AF quidẽ parallelogrammum quod BA AE continetur; etenim CA ipsi AB est æqualis: parallelogrammum vero FB est quod continetur AB BE; æqualis enim est DB ipsi BA. vt igitur AE ad EB, ita rectangulum contentum BA AE ad id, quod AB BE cõtinetur. quod oportebat demonstrare.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ipsarum in partes æquales secetur, rectangulum contentum duabus rectis lineis duplum est eius, quod maiori, & dimidia minoris continetur.

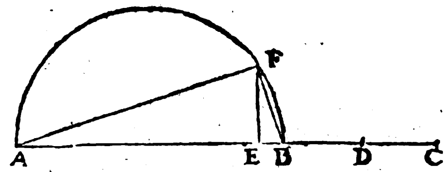
Sint



Sint duæ rectæ lineæ inæquales AB BC, quarum maior AB: & secetur BC bifariam in puncto D. Dico rectangulum contentum AB BC duplum esse eius, quod AB BD continetur. ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos angulos BE; ponaturq; BE ipsi BA æqualis, & figura describatur. Quoniam igitur est vt BD ad DC, ita parallelogrammum BF ad DC parallelogrãmum; erit componendo vt BC ad CD, ita parallelogrammum BG ad ipsum GD. est autem BC dupla ipsius CD. ergo & parallelogrammum BG parallelogrammi GD est duplum. atque est BG quidem, quod AB BC continetur; etenim AB est æqualis BE: DG vero est quod continetur AB BD: nam BD ipsi DC, & AB ipsi DF est æqualis. quod oportebat demonstrare. 1. sexti.

PROBLEMA X. PROPOSITIO. XXXIIII.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipsis continetur, medium.



Exponantur duæ rationales potentia solum commensurabiles AB BC, ita vt maior AB plus possit, quã minor BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & secta BC, bifariam in D, quadrato, quod fit ab alterutra ipsarum BD DC æquale parallelogrammum ad rectam lineã AB applicetur, deficiens figura quadrata: & sit quod continetur AE EB. describatur in recta linea AB semicirculus AFB; ducaturq; ipsi AB ad rectos angulos EF, & AF FB iungantur. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ AB BC inæquales sunt, & AB plus potest, quàm BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori BC, hoc est quadrato dimidiæ ipsius æquale parallelogrammum applicatum est ad AB, deficiens figura quadrata, quod quidem AE EB continetur: erit AE ipsi EB incommensurabilis. atque est vt AE ad EB, ita BAE rectangulum ad rectangulum ABE. rectangulum autem BAE quadrato ex AF est æquale; & rectangulum ABE æquale quadrato ex BF. quadratũ igitur ex AF incommensurabile est quadrato ex FB: ideoq; rectæ lineæ AF FB potentia sunt incommensurabiles. & quoniam AB rationalis est, & quadratum, quod fit ex AB erit rationale. ergo & rationale compositum ex quadratis ipsarum AF FB. rursus quoniam rectangulum AEB est æquale quadrato ex EF: ponitur autem rectangulum AEB quadrato etiam ex BD æquale. ergo FE est æqualis BD; ac propterea BC ipsius EF est dupla. rectangulũ igitur ABC duplum est rectãguli, quod AB EF continetur. sed rectangulum ABC est medium. ergo & medium quod continetur AB EF. est autem quod AB EF continetur æquale contento AF FB. contentum igitur AF FB medium est. sed & ostensum est rationale, quod componitur ex ipsarum AF FB quadratis. Inuentæ igitur sunt duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles AF FB, quæ faciant compositũ quidem ex ipsarum quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipsis continetur, medium. quod facere oportebat.

31. huius. Per lemma ante 19. huius uel per 28. sexti. 19. huius: Per 2. lemma ex antecedentibus. Per 1. lemma Per 9. diffi. Per 3. lemma 22. huius. Cor. 24. huius. Per 1. lemma

SCHOLIVM.

At vero ex duobus spacijs irrationalibus inter se compositis totum fieri rationale, ex hoc cognoscemus.

Exponatur

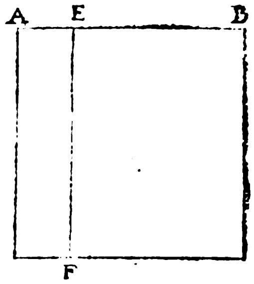
Exponatur rationalis AB,& duo numeri CD non habentes proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum:fiatq; vt C ad D,ita quadratum ex AB ad id quod ex BE quadratum: & descripto quadrato ex AB per E ducatur alterutri laterum parallela EF. Quoniam igitur est vt C ad D,ita quadratum ex AB ad quadratum ex BE; & C ad D proportionem non habet,quam quadratus numerus ad quadratum numerum:erit AB ipsi BE longitudine incommensurabilis. ergo & BA reliquę AE incommensurabilis est longitudine. vt autē AB est ad vtramque ipsarum AE EB, ita quadratum ex AB ad vtrumque parallelogrammorū. quadratum igitur ipsis parallelogrammis incommensurabile erit. sed quadratum est rationale. irrationalia igitur sunt parallelogramma, quæ rationalis sunt partes,& ipsum rationale cōplēt.

Corol.10.huius.

9.huius.

Ex demonstratis ad 17 huius.

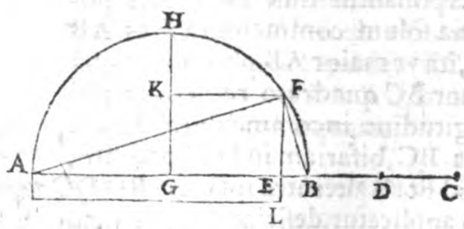
1.sexti.



C . . 5 . . D . . . 3

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB 8, BC ℞ 20. erit BD, vel DC ℞ 5: & quadrato ipsius BD, quod est 5 aequale parallelogrammum ad AB applicetur, deficiens figure quadrata. illud autem facile assequemur, si quę tradita sunt in lemmate ante 18. huius repetantur. Itaque in recta linea AB descripto semicirculo AFB; & secta AB bifariam in G, ipsi ad rectos angulos ducatur GH; ponaturq; GK ęqualis BD. est enim GH maior, quàm BD. nam cum AB sit maior, quàm BC, erit etiam ipsius AB dimidia maior, quàm dimidia BC. deinde per K ipsi AB parallela ducatur KF: atque à puncto F agatur FE ad AB perpendicularis, quae protendatur in L, ita vt EL sit aequalis EB; & parallelogrammum AL compleatur. erit igitur parallelogrammum AL illud, quod AE EB continetur, & aequale quadrato ipsius FE, hoc est quadrato BD. quare ad rectam lineam AB applicatum est parallelogrammum AL quadrato ipsius BD aequale, & deficiens figura quadrata. & quoniam recta linea AB secatur in partes aequales ad G, & in partes inęquales ad E, erit rectangulum contentum AE EB vnà cum quadrato ipsius GE aequale quadrato dimidiae AB, hoc est ipsius AG: quadratum autem AG est 16, & rectangulum AEB 5; est enim FE ℞ 5, & eius quadratum 5, quod quidem rectangulo AEB est aequale. reliquum igitur quadratum ipsius GE est 11, & recta linea GE ℞ 11. ergo AE constans ex AG GE est 4 vnà cum ℞ 11, vel 4 plus ℞ 11. & EB 4 dempta ℞ 11, vel 4 minus ℞ 11. vt autē sciamus, quae sint AF FB, necesse erit prius inuenire quadrata ipsarum AE EB. quare non inutile visum est theoremata nonnulla hic apponere, attinentia ad eas, quae ex binis, vel pluribus nominibus constant, & ad apotomas.

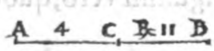


5.secundi.

THEOREMA. I.

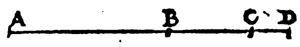
Data recta linea, quæ sit ex binis, vel pluribus nominibus, & quadratum eius datum erit.

Sit AB ex binis nominibus AC CB: sitq; AC 4, CB ℞ 11. Dico quadratum eius datum esse. Quoniam enim AB vtcumque secatur in puncto C, erit ex quarta propositione secundi libri, quadratum totius aequale quadratis partium, & rectangulo, quod bis dictis partibus continetur. itaque quadratum AC est 16, & quadratum CB 11. rectangulum vero contentum AC CB est ℞ 176, cuius duplum ℞ 704. ergo quadratum AB est 27 plus ℞ 704.



Sit

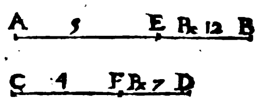
Sit AD ex tribus nominibus AB BC CD: sitq́, AB 6, BC R 10, *& CD* R 3. *Dico et quadratum ipsius dari. nā cum AD secetur in duobus punctis B C, erit quadratum totius aequale rectangulis, quae singulis partibus ad singulas applicatis cōtinentur, ex ijs, quae à nobis demōstrata sunt ad secundā propositionē secūdi libri. quadratum igitur AB est* 36, *& rectangulū contentū AB BC est* R 360; *contentum vero AB CD est* R 108. *& rursus contentum AB BC est* R 360, *& quadratum BC est* 10. *preterea rectangulum, quod continetur BC CD est* R 30, *& quod rursus continetur AB CD* R 108; *& quod continetur BC CD* R 30. *& denique quadratū CD est* 3. *sed duplum* R 360 *est* R 1440, *& duplum* R 108 *est* R 432; *duplum vero* R 30 *est* R 120. *quare summa totius erit* 49 *plus* R 1440 *plus* R 432 *plus* R 120, *quod est ipsius AD quadratum. Et eodem modo in alijs faciemus quotcumque nomina habeant.*



THEOREMA II.

Datis duabus rectis lineis, quæ ex binis, vel pluribus nominibus constent, & rectangulum ipsis contentum datum erit.

Sint rectae lineæ AB CD; constetq́, AB ex binis nominibus AE EB; & sit AE 5, *EB* R 12; *CD vero constet ex CF FD, & sit CF* 4 *FD* R 7. *Dico rectangulum, quod ipsis continetur, datum esse. Quoniam enim duae rectae lineae AB CD vtcumque secantur in punctis E F, rectangulum ipsis cōtētū est aequale rectāgulis, quae vnaquaq; parte vnius ad vnāquāq; partē alterius applicata, continentur, ex ijsquae nos demōstrauimus ad primā propositionē secūdi libri theoremate primo. rectāgulū igitur contentū* 4 *&* 5 *est* 20, *& contētū* 4, *&* R 12 *est* R 192. *quod autcōtinetur* R 7, *&* 5 *est* R 175, *& quod continetur* R 7, *&* R 12 *est* R 84. *totius ergo summa est* 20 *plus* R 292 *plus* R 175 *plus* R 84. *quod est rectangulum ipsis AB CD contentum. non aliter inuenietur rectangulum contentum duabus rectis lineis, quae ex pluribus nominibus constent.*



THEOREMA III.

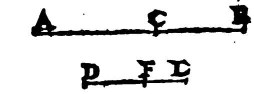
Datę apotomes quadratum datum erit.

Sit apotome AC, & recta linea ipsi congruens sit CB; sitq́, tota AB 4, *BC* R 11. *erit AC* 4 *minus* R 11. *Dico & quadratum ipsius datum esse. vt autem hoc inueniamus, non vtemur quarta propositione secundi libri, vt ante, sed septima eiusdem. non enim* 4, *&* R 11 *sunt partes dictae lineae, sed* 4 *est tota linea, et* R 11; *est pars, quae ab ea aufertur. Itaque quoniam AB secatur vtcumque in puncto C, erit quadratum totius AB vnà cum quadrato vnius partis BC aequale ei, quod bis continetur tota AB, et BC vnà cum alterius partis AC quadrato. est igitur quadratum ipsius AB* 16, *et quadratum BC* 11; *rectangulum autem, quod tota AB, et BC continetur est* R 176, *cuius duplum* R 704. *ergo* R 704 *vnà cum quadrato ex AC est aequale* 27; *ac propterea quadratum ex AC est* 27 *minus* R 704. *qui vero ex quarta propositione secundi id quadratum sibi inueniendum proponunt, coguntur dicere si minus per minus multiplicetur produci plus. quod verum non esse primus animaduertit Hieronymus Cardanus non solum mathematicus, sed et Philosophus, ac medicus prestantissimus, vt apparet in libro de regula aliza, quem nuper edidit. Verū quoniam ex eorum operatione error non sequitur, hoc ipsis condonandum est.*

THEOREMA IIII.

Datis duabus rectis lineis earum, quas apotomas appellamus, & rectangulum, quod ipsis continetur, datum erit.

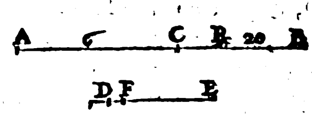
Sint duae apotomae datae AC DF: et ipsi quidem AC cōgruat CB; ipsi vero DF congruat FE: sitq́, tota AB 8, *BC* R 12: *et sit DE* 4, *EF* R 3. *erit AC* 8 *minus* R 12, *et DF* 4 *minus* R 3. *Dico* *et rectāgulum, quod ipsis continetur, datum esse. Quoniam enim duę rectae lineae AB DE vtcumque secantur in punctis C F, erit rectangulū, quod continetur totis AB DE vnà cum rectāgulo contento partibus CB FE aequale rectangulo contento tota AB, et parte FE vnà cum contento tota DE, et parte CB, et eo, quod reliquis partibus A C DF continetur, ex ijs, quae demonstrata sunt à nobis ad primā propositionem secundi libri theoremate secundo. itaque rectangulum contentum AB DE est 32, & contentum CB FE est ℞ 36, hoc est 6; rectangulum vero, quod continetur AB FE est ℞ 192, et quod continetur DE CB est ℞ 192, quae duae radices inter se iunctae faciunt ℞ 768. quare 38 est aequalis ℞ 768 vnà cum eo, quod AC DF continetur. ex quibus sequitur rectangulum contentum AC DF esse 38 minus ℞ 768. at recentiores ad hoc inueniendum vtuntur 1 theoremate; et ob id asserunt si minus per minus multiplicetur produci plus, sed non recte, cum vtendum sit theoremate secundo; neque enim 8, et ℞ 12 sunt partes vnius rectae lineae; immo vero 8 est tota linea, et eius pars ℞ 12, et similiter dicendū de 4 minus ℞ 3. ex ipsorum tamen operatione nullus sequitur error.*



THEOREMA V.

Data recta linea, quæ sit ex binis, vel pluribus nominibus, & data apotoma, rectāgulum, quod ipsis continetur, datum erit.

Sit data quidem recta linea AB, quae constet ex binis nominibus AC CB, vt sit AC 6; CB ℞ 20. data autem apotome sit DF, et ipsi congruens FE, vt tota DE sit 4, et EF ℞ 12. erit DF 4 minus ℞ 12. Dico rectāgulū, quod ipsis AB DF cōtinetur datum esse. Quoniam enim duae rectae lineae AB DE vtcumque secantur in punctis CF, erit ex secundo theoremate iam dicto rectangulum, quod ipsis AB DE continetur, aequale rectangulis, quae fiunt vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata; videlicet rectangulo contento DF AC, et contento DF CB: et preterea rectangulo, quod continetur FE AC, et quod continetur FE CB. rectangulum autem contentum DE AC vnà cum contento DE CB est aequale rectangulo quod totis AB DE continetur, ex prima secundi libri. Itaque rectangulum contentum DE AC est 24, et contentum DE CB est ℞ 320. rectangulū vero, quod cōtinetur FE AC est ℞ 432, et quod continetur FE CB ℞ 240. ergo rectangula, quae continētur DF AC, et DF CB, hoc est rectangulum contentum DF AB est 24 plus ℞ 320, minus ℞ 432, et minus ℞ 240. Eodem modo procedemus, si rectae lineae AB DE ex pluribus nominibus constent.



Ex quibus apparet si plus per minus, vel minus per plus multiplicetur, produci minus.

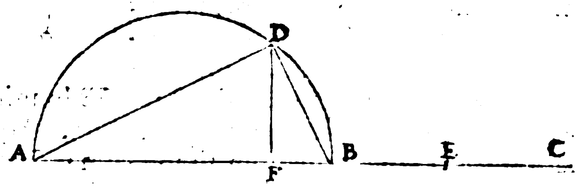
His ita demonstratis constat, quadratum ipsius AE esse 27 plus ℞ 704, et quadratum EB esse 27 minus ℞ 704. quare addito vtrique communi quadrato ex EF, quod est 5, erit quadratum ex AF 32 plus ℞ 704, et quadratum ex FB 32 minus ℞ 704, rectaq; linea AF radix huius summae 32 plus ℞ 704, quam radicem vniuersalem appellant, et ita notant, videlicet ℞ V. 32 plus ℞ 704: et similiter BF ℞ V. 32 minus ℞ 704, quarum quidem quadrata inter se iuncta videlicet 32 plus ℞ 704, et 32 minus ℞ 704 faciunt 64, quod est ipsius AB quadratum. preterea quoniam rectangulum, quod continetur rectis lineis AF FB est aequale contēto ipsis AB EF, vt demonstratum iam fuit in primo lemmate; contentumq; autem AB EF est ℞ 320: erit etiam rectangulum, quod his lineis ℞ V. 32 plus ℞ 704, et ℞ V. 32 minus ℞ 704 continetur ℞ 320. Hoc autem ita esse ex earum quoque inter se multiplicatione manifesto apparere potest. dispositis enim his radicibus uidelicet ℞ V. 32 plus ℞ 704, et ℞ V. 32 minus ℞ 704, ut quid ex earum multiplicatione proueniat cognoscamus, operandum est, quemadmodum in simplicibus radicibus; nimirū multiplicādo earū quadrata inter se, et eius, quod producitur radix erit id, quod queritur. cū aūt quadrata utriusq; cōstēt ex duabus partibus, erit rectāgulū, quod totis cōtinetur, ac si lineę essent, ęquale rectāgulis, quę fiūt singulis partibus unius ad singulas alterius applicatis, ut demonstratū est. si igitur 32 in se multiplicentur fiunt 1024; rursus si 32, hoc est ℞ 1024 multiplicet ℞ 704 fit ℞ 720896. et ita si 32 multiplicet minus R 704 fit minus R 720896. postremo simul tiplicetur ℞ 704 per minus ℞ 704 fiunt minus 704. totū igitur ex his compositū est 1024 plus

R 720896

℞ 720896 minus ℞ 720896 minus ℞ 704, hoc est 1024 minus 704. itaq; detractis 704 de 1024 relinquetur 320, & eius radix erit id quod quæritur. ergo si multiplicemus ℞ V. 32 plus ℞ 704 per ℞ V. 32 minus ℞ 704 producetur ℞ 320. Quatenus vero ad scholiũ pertinet, sit AB 10 & numeri CD 5. 3. & fiat vt 5 ad 3. ita quadratũ ex AB, hoc est 100 ad quadratũ ex BE, erit ad 60. ergo ipsa BE est ℞ 60, & AE 10 minus ℞ 60. rectãgulum autem BF est ℞ 6000, & rectangulum AF 100 minus ℞ 6000.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO. XXXV.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectãgulum vero quod ipsis continetur rationale.



Exponantur duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quæ rationale contineant, ita vt AB plus possit quàm BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incõmensurabilis. & in ipsa AB describatur semicirculus DB: sectaq; BC bifariam in E, applicetur ad AB parallelogrammum æquale quadrato ipsius BE, deficiens figura quadrata; & sit quod continetur AF FB. incommensurabilis igitur est AF ipsi FB longitudine. à puncto autem F ipsi AB ad rectos angulos ducatur FD; & AD DB iungantur. itaque quoniam AE est incommensurabilis FB; erit & BAF rectangulum rectangulo ABF incommensurabile. est autem rectangulũ quidem BAF quadrato ipsius AD æquale; rectangulum vero ABF æquale quadrato ipsius DB incommensurabile igitur est quadratum AD ipsius DB quadrato; ac propterea rectæ lineæ ad AD DB potentia sunt incommensurabiles. & quoniam medium est quadratum ipsius AB, erit & compositum ex quadratis ipsarum AD DB medium. quòd cum dupla sit BC ipsius DF, & rectangulum ABC rectanguli ex AB DF duplum erit. quare & commensurabile. rationale autem est rectangulum ABC, ita enim ponitur. ergo & rectangulum ex AB FD est rationale. sed rectangulo ex AB FD æquale est rectangulum ADB quare & ipsum ADB rectangulum rationale erit. Inuentæ igitur sunt duæ rectæ lineæ potentia incommẽsurabiles AD DB, quæ faciant compositũ quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum uero, quod ipsis continetur rationale.

2. huius.
Lemma ad 19. huius.
19. huius.
Lemma 1.
Lemma. 1.
Lemma. 3.
Lemma 1. ante 34. huius.

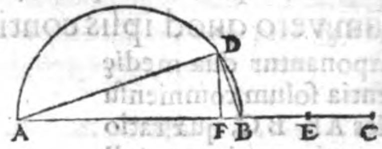
F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB ℞℞ 54, BC ℞℞ 24. & diuisa ℞℞ 24 bifariam, erit eius dimidia BE ℞℞ 1 $\frac{1}{2}$. applicetur ad AB parallelogrammum aequale quadrato ipsius BE, hoc est aequale ℞ 1 $\frac{1}{2}$, deficiens figura quadrata. quod similiter, atque supra fiet. diuisa enim rursus AB. hoc est ℞℞ 54 bifariam, erit eius dimidia ℞℞ 3 $\frac{3}{8}$. & si ab ipsius quadrato, videlicet à ℞ 3 $\frac{3}{8}$ auferatur ℞ 1 $\frac{1}{2}$, reliqua erit ℞ $\frac{3}{8}$. ergo recta linea AF est RR 3 $\frac{3}{8}$ *plus* RR $\frac{3}{8}$, *& FB* RR 3 $\frac{3}{8}$. *minus* RR $\frac{3}{8}$. *quadratũ aũt ipsius AF eodẽ modo inuenietur esse* R 6 *plus* R 4 $\frac{1}{2}$. *& quadratũ ex FB* R 6 *minus* R 4 $\frac{1}{2}$, *quibus addito cõi quadrato ipsius FD, videlicet* R 1 $\frac{1}{2}$, *erit quadratum ex AD ℞ 13 $\frac{1}{2}$ plus* R 4 $\frac{1}{2}$, *& quadratum ex DB* R 13 $\frac{1}{2}$ *minus* R 4 $\frac{1}{2}$. *ideoq; recta linea AD ℞ V* R 13 $\frac{1}{2}$ *plus* R 4 $\frac{1}{2}$, *& DB* R V. R 13 $\frac{1}{2}$ *minus* R 4 $\frac{1}{2}$, *quarũ quadrata simul iuncta faciunt* R 54, *videlicet rectae lineae AB quadratum. quod est medium. At rectangulum, quod AD DB continetur est aequale contento AB DF. contentum vero AB DF, hoc est* RR 54, *&* RR 1 $\frac{1}{2}$ *est* RR 81, *hoc est 3. ergo quod continetur AD DB est 3. sed et idem aliter constat multiplicando* R V. R 13 $\frac{1}{2}$ *plus* R 4 $\frac{1}{2}$ *plus* R V R 13 $\frac{1}{2}$ *minus* R 4 $\frac{1}{2}$; *fit enim* R 9, *quae est 3. sunt igitur hę rectae lineae potentia incommensurabiles, & faciunt compositum ex earum quadratis medium; rectangulum vero, quod ipsis continetur, rationale, vt oportebat.*

PROBLEMA XII. PROPOSITIO. XXXVI.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis medium, & rectāgulum, quod ipsis continetur, medium, incommensurabileq́ue composito ex ipsarum quadratis.

Exponantur duæ medię potentia solū
33 huius. commensurabiles AB BC, quæ medium
contineant, ita vt AB plus possit, quàm BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommēsurabilis. & in AB semicirculus ADB describatur, & reliqua fiant, queadmodū in ijs, quæ superius dicta sunt.



Quoniam igitur AF incommensurabilis est ipsi FB longitudine, erit & AD ipsi DB potentia incommensurabilis. & quoniam medium est quod fit ex A B, & compositum ex quadratis AD DB est medium. Quòd cum rectangulū AFB ęquale sit quadrato alterutrius ipsarū BE DF, erit DF ęqualis BE; ac propterea BC ipsius FD dupla. rectangulum igitur ABC duplū est eius, quod AB FD continetur. medium autem
Corol. 24 huius. est rectangulum ABC. ergo & quod continetur AB FD est mediū, atque est ęquale
1. lemma ad 34. huius. contento AD DB. quare & ipsum medium erit. & quoniam incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine; commensurabilis autem CB ipsi BE: erit & AB ipsi BE lōgitudine incommensurabilis. ergo & quadratum ex AB incommensurabile est re-
13. huius. ctangulo ABE. sed quadrato quidem ex AB ęqualia sunt quę ex AD DB quadrata: rectangulo autem ABE est æquale rectangulum contentum AB FD, hoc est rectangulum ADB. compositum igitur ex quadratis ipsarum AD DB rectangulo ADB est incommensurabile. ergo inuentæ sunt duę rectæ lineæ potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium: & rectangulum, quod ipsis continetur, medium, & adhuc composito ex ipsarum quadratis incommensurabile.

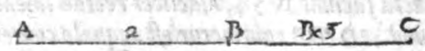
F. C. COMMMENTARIVS.

Sit recta linea AB ℞℞ 18, & BC ℞℞ 2. diuidaturq́; BC bifariam in E, erit BE ℞℞ $\frac{1}{8}$. et si ad AB applicetur parallelogrammum aequale quadrato ipsius BE, hoc est ℞ $\frac{1}{8}$, deficiens figura quadrata, erit recta linea AF ℞℞ 1 $\frac{1}{8}$ plus ℞℞ $\frac{1}{2}$ & FB ℞℞ 1 $\frac{1}{8}$ minus ℞℞ $\frac{1}{2}$: quadratum autem ipsius AF ℞ 3 $\frac{1}{8}$ plus ℞ 3, & quadratum FB ℞ 3 $\frac{1}{8}$ minus ℞ 3. & addito utrique quadrato ipsius BE, erit quadratum ex AD ℞ 4 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 3. & quadratum ex D B ℞ 4 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 3, ergo recta linea AD est ℞ V. ℞ 4 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 3, & DB ℞ V ℞ 4 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 3, quarū quadrata simul iuncta faciunt ℞ 18, quantum est quadratum ex AB. rectangulum vero ipsis contentum est ℞ 1 $\frac{1}{2}$. quod est medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXVII.

Si duæ rationales potentia solum commensurabiles componantur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis nominibus,

Componantur enim duæ rationales potentia solum commensurabiles A B BC. Dico AC irrationalem esse. Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine, potētia enim solū



commensu-

commensurabiles sunt; & vt AB ad BC, ita rectāgulum ABC ad id, quod fit ex BC 1.sexti.
quadratum: erit rectangulum ABC quadrato ex BC incommensurabile. Sed recta 10.huius.
gulo quidem ABC commensurabile est id, quod bis AB BC continetur: quadrato 6.huius.
autem ex BC commensurabilia sunt quadrata ex AB BC. quod igitur bis AB BC 13.huius.
continetur incommensurabile est quadratis ex AB BC. & componendo quod bis
AB BC continetur vnà cum quadratis ex AB BC, hoc est quadratum ex AC incō- 4.secundi.
mensurabile est composito ex ipsarum AB BC quadratis. rationale autem est com
positum ex quadratis AB BC. ergo quadratum ex AC irrationale est: & ob id re- 10.diffi.
cta linea AC est irrationalis, vocetur autem ex binis nominibus. 11.diffi.

SCHOLIVM.

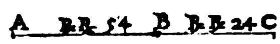
Quæ inter has rationales media est proportionalis, ea media est, neutra autem harum, neque vtraque est media, sed quæ ex ipsis constat ex binis nominibus appellatur. vtrarumque igitur irrationalium sunt procreatrices, iuxta tamen differentes procreationis modos.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB 2, & BC ℞ 3. erit AC 2 plus ℞ 3. & eius quadratum 7 plus ℞ 48. est enim quadratum ipsius AC 4, & quadratum BC 3. rectangulum vero, quod AB BC continetur ℞ 12, cuius duplum est ℞ 48.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXXVIII.

Si duæ mediæ potentia solum commensurabiles componantur quæ rationale contineant, tota irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs prima.



Componantur enim duę mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quę rationale contineāt. A
dico totam AC irrationalem esse. Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine, & qua B
drata ex AB BC incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis AB BC continetur. ergo componendo quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod est ipsius AC quadratum incommensurabile est rectangulo ABC. sed C
ABC rectangulum rationale ponitur. ergo quadratum ex AC irrationale est, & recta linea AC irrationalis. vocetur autem ex binis medijs prima.

F. C. COMMENTARIVS.

Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quæ rationale contineant] *Quomodo hę inueniantur docuit in 28 huius. sit autem AB ℞℞ 54, BC ℞℞ 24, erit tota AC ℞℞ 54 plus ℞℞ 24.* A

Et quadrata ex AB BC incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis AB BC continetur] *Hoc eodem modo, quo supra, sequitur ex 13 huius bis repetita.* B

Quod est ipsius AC quadratum] *Ex 4 secundi.* C

Ergo quadratum ex AC irrationale est, & recta linea AC irrationalis] *Ex 10 & 11 diffinitione huius.* D

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXIX.

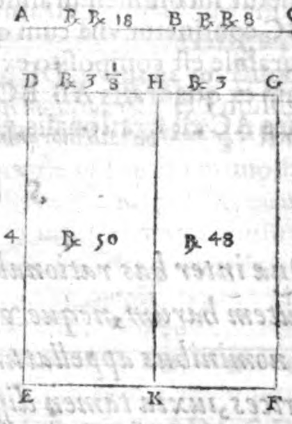
Si duę medię potentia solum commensurabiles componantur.

quæ medium

quæ medium contineant, tota irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs secunda.

A Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles, AB BC, quæ medium
B contineant. Dico AC irrationalem esse. exponatur rationalis DE: & quadrato ex AC æquale parallelogrammum rectangulum DF ad ipsam DE applicetur, quod latitudinē faciat DG.
C itaque quoniam quadratum ex AC æquale est quadratis ex AB BC, & rectangulo, quod bis
D AB BC continetur. applicetur ad ipsam DE quadratis ex AB BC æquale parallelogrammū
E rectangulum EH. reliquum igitur FH æquale est ei, quod bis AB BC continetur. & quoniam media est utraque ipsarum AB BC, erūt & qua
F drata ex AB BC media. medium autem ponitur & quod bis continetur AB BC. atque est quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum EH. rectangulo autem bis AB BC contento ęquale est ipsum HF. me
G dium igitur est vtrumque ipsorum EH HF: & ad rationalē applicantur. ergo vtraque recta linea DH HG est rationalis, & ipsi DE longitudine incommensurabilis.
H & quoniam incommensurabilis est AB ipsi BC lōgitudine; atque est vt AB ad BC,
K ita quadratum ex AB ad ABC rectangulum: erit quadrato ex AB rectangulum
L ABC incommensurabile. sed quadrato quidem ex AB commensurabile est compositum ex quadratis ipsarum AB BC: rectangulo autem ABC est commensurabile,
M quòd bis AB BC continetur. ergo compositum ex quadratis AB BC incommensurabile erit ei, quod bis continetur AB BC. sed quadratis ex AB BC æquale est parallelogrammum EH: & rectangulo, quod bis AB BC continetur æquale HF pa
N rallelogrammum. quare EH ipsi HF est incommensurabile; & ob id recta linea DH ipsi HG incommensurabilis longitudine. ostensæ autem sunt rationales. ergo DH
O HG rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DG est irratio
P nalis; rationalis autem DE; & quod rationali, & irrationali continetur rectangulū
Q irrationale est. spacium igitur DF est irrationale, & quę ipsum potest irrationalis. potest autem ipsum DF recta linea AC. ergo AC irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs secunda.

4. secundi



SCHOLIVM.

Vocauit illam ex binis medijs secundam, quoniam medium est non rationale, quod ipsis AB BC continetur; medium enim rationali posterius est. At vero quod rationali, & irrationali continetur irrationale esse perspicue constat.

21 huius. Nam si rationale sit, & ad rationalem applicetur, erit latitudo, quam facit, rationalis; sed & irrationalis. quod est absurdum. illud igitur quod rationali, & irrationali continetur est irrationale. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

A Componantur enim duæ medię potentia solum commensurabiles AB BC, quę medium contineant] *Quomodo autem hę inueniantur docet in 29 huius. sit AB* RR 18, *et BC* RR 8, *erit AC* RR 18 *plus* RR 8, *cuius quadratum* R 50 *plus* R 48.

B Exponatur rationalis DE, & quadrato ex AC æquale parallelogrammum rectangulum

gulum DF ad ipsam DE applicetur, quod latitudinem faciat DG] *Sit rationalis DE 4, ad quam si applicetur illud medium* R 50, *latitudinem faciet* R 3 $\frac{1}{8}$, *quae sit DH: et si ad eadem applicetur* R 48, *faciet latitudinem* R 3, *quae sit HG. ergo tota latitudo DG erit* R 3 $\frac{1}{8}$ *plus* R 3.

Itaque quoniam quadratum ex AC æquale est quadratis] *Ex quarta secundi, vel 4. Barlaam monachi.* C

Applicetur ad ipsum DE quadratis ex AB BC æquale parallelogrammum rectangulum EH] *Quadratum ipsius AB est* R 18, *et quadratum BC* R 8, *quae inter se iunctę faciunt* R 50. *ergo parallelogrammum EH est* R 50, *et recta linea DH* R 3 $\frac{1}{8}$. D

Reliquum igitur FH est æquale ei, quod bis AB BC continetur] *Hoc est* R 48, *et recta linea HG* R 3, *vt dictum est.* E

Medium autem ponitur & quod bis AB BC continetur] *Medium ponitur, quod AB BC continetur. et quoniam illud, quod bis AB BC continetur est ei commensurabile, videlicet duplum ex 6. huius, et ipsum medium erit, ex corollario 24. huius.* F

Ergo vtraque recta linea DH HG est rationalis, & ipsi DE longitudine incommensurabilis] *Ex 23. huius.* G

Atque est vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad ABC rectangulum] *Ex lemmate ad 23 huius apposito, vel ex 1. sexti.* H

Erit quadrato ex AB rectangulum ABC incommensurabile] *Ex 10. huius.* K

Sed quadrato quidem ex AB commensurabile est compositum ex quadratis ipsarum AB BC] *Ponuntur enim AB BC potentia commensurabiles. ergo & earum quadrata commensurabilia erunt, et compositum ex ipsis commensurabile vtrique quadrato ex 16. huius.* L

Ergo compositum ex quadratis AB BC incommensurabile erit ei, quod bis continetur AB BC] *Ex 14. huius.* M

Et ob id recta linea DH ipsi HG incommensurabilis longitudine] *Ex 1. sexti, et 10. huius.* N

Ac propterea DG est irrationalis] *Ex 37. huius.* O

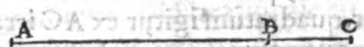
Et quod rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale est] *Quomodo hoc sequatur in antecedenti scholio dictum fuit.* P

Et quę ipsum potest irrationalis] *Ex 11. diffinitione.* Q

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XL.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componatur, quæ faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem ipsis continetur medium: tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem maior.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles AB BC, facientes ea, quæ proposita sunt. Dico AC irrationalem esse. Quoniam enim id, quod AB BC continetur, medium est; & quod bis continetur AB BC medium erit. compositum autem ex ipsarum AB BC quadratis est rationale. ergo quod bis AB BC continetur incommensurabile est composito ex quadratis ipsarum AB BC. & ob id quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod est quadratum ex AC, incommensurabile est quadratis ex AB BC. rationale autem est compositum ex quadratis AB BC. ergo & quadratum ex AC irrationale erit; ac propterea recta linea AC est irrationalis. vocetur autem maior. A B C



SCHOLIVM.

Vocauit autem ipsam maiorem, propterea quòd rationalia ex AB

BC maiora

BC maiora sint medio, quod bis AB BC continetur: oporteatque à rationalium proprietate nomen imponere. At vero quæ fiunt ex AB BC maiora esse eo, quod bis AB BC continetur, sic ostendemus.

Manifestum igitur est AB BC inter se inæquales esse. si enim sint æquales, & quæ fiunt ex AB BC æqualia erunt ei, quod bis AB BC continetur, & rectangulum ABC rationale erit. quod nõ ponitur. Inæquales igitur sunt AB BC. ponatur maior AB, & ipsi BC æqualis BD. ergo quadrata ex AB BD æqualia sunt ei, quod bis AB BD cõtinetur vnà cum quadrato ex DA. æqualis autem est DB ipsi BC. quadrata igitur ex AB BC æqualia sunt ei, quod bis AB BC continetur, vnà cum quadrato ex AD. ideoq; quadrata ex AB BC maiora sunt, quàm id, quod bis AB BC continetur, quadrato ipsius DA.

7.secundi

F. C. COMMENTARIVS.

Componantur enim duę rectę lineæ potentia incommensurabiles AB BC, facientes ea, quæ proposita sunt] *Inueniuntur autẽ hae ex 34 huius. sit AB* R *V.34 plus* R 704; *et BC* R *V.32 minus* R 704. *erit tota AC* R *V.32 plus* R 704 *plus* R *V.32 minus* R 704.

Et quod bis AB BC continetur medium erit] *Ex corollario 24 huius.*

Et ob id quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod est quadratum ex AC incommensurabile est quadratis ex AB BC] *Ex 17 huius.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XLI.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis continetur, rationale; tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem rationale, ac medium potens.

Componantur enim duę rectæ lineę potentia incommẽsurabiles AB BC, facientes ea, quæ proposita sunt. Dico AC irrationalem esse. Quoniam enim cõpositum ex ipsarum AB BC quadratis medium est; quod autem bis AB BC cõtinetur rationale: erit compositum ex ipsarum AB BC quadratis incommensurabile ei, quod bis AB BC continetur. quare componẽdo quadratum ex AC est incommensurabile ei, quod bis continetur AB BC. est autem rationale, quod bis AB BC continetur. quadratum igitur ex AC irrationale est; ideoq; recta lineã AC est irrationalis. vocetur autem rationale, ac medium potens.

SCHOLIVM.

Rationale autem, ac medium potentem ipsam idcirco appellauit, quòd possit bina spacia, vnum quidem rationale, alterum vero medium. & quoniam rationale pręcedit irrationale, ipsius rationalis prius mentionem fecit.

F. C. COMMENTARIVS.

Componãtur enim duæ rectę lineæ potentia incommensurabiles AB BC, facientes ea quæ proposita sunt] *Hae autem inueniuntur ex 35 huius. sit AB* R *V.* R 13 $\frac{1}{2}$ *plus*

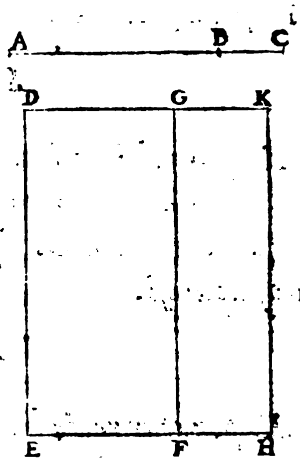
℞ 4 $\frac{1}{2}$, BC ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ *minus* ℞ 4 $\frac{1}{2}$, *vt tota AC sit* ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ *plus* ℞ 4 $\frac{1}{2}$ *plus* ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ *minus* ℞ 4 $\frac{1}{2}$.

Quod autem bis AB BC continetur rationale] *Sequitur hoc ex corollario 24 huius. ponitur enim eius dimidium rationale, videlicet quod AB BC continetur.* B

Quare componendo quadratum ex AC est incommensurabile ei, quod bis continetur AB BC] *Quoniam enim compositum ex ipsarum AB BC quadratis incommensurabile est ei, quod bis AB BC continetur, erit ex 17. huius compositum ex quadratis AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, hoc est quadratum ex AC incommensurabile ei, quod bis continetur AB BC.* C 4. secundi.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO. XLII.

Si duæ rectę lineę potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis medium, & quod ipsis cõtinetur medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum, tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem bina media potens.



Componantur enim duæ rectæ lineę potẽtia incõmensurabiles AB BC, quę faciant compositum quidẽ ex ipsarum AB BC quadratis medium; quod autem ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. Dico AC irrationalẽ esse. Exponatur enim rationalis DE, & ad ipsam applicetur parallelogrammum rectangulum DF, æquale quadratis ipsarum AB BC: & parallelogrammum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur. totum igitur DH quadrato ipsius AC est ęquale. & quoniam medium est compositum ex quadratis ipsarum AB BC, & æquale parallelogrammo DF; erit ipsum quoque DF medium; & ad rationalem DE applicatũ est. rationalis igitur est DG, & ipsi DE lõgitudine incommensurabilis. ob eandem causam & GK est rationalis, & incommensurabilis longitudine ipsi FG, hoc est ipsi DE. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum AB BC incommensurabile est ei, quod bis AB BC continetur; erit & parallelogrammum DF ipsi GH incommensurabile. ergo & recta linea DG incommensurabilis est ipsi GK; & sunt rationales. quarę DG GK rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DK est irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur. rationalis autem DE. ergo parallelogrammum DH irrationale est, & ipsum potens irrationalis. sed ipsum DH potest recta linea AC. quare AC irrationalis est, vocetur autem bina media potens.

A (margin) B C D E F G

SCHOLIVM.

Vocauit ipsam bina media potẽtem, propterea quod potest bina spatia media, videlicet compositum ex ipsarum AB BC quadratis; & illud, quod bis AB BC continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Componantur. n. duæ rectę lineę potentia incõmensurabiles AB BC, quæ faciãt compo- A compositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis medium,quod autem ipsis cõtinetur medium] *Qua vero ratione hae inueniri possint, tradit in 36. huius. Sit AB* ℞ *V.* ℞ 4 $\frac{1}{2}$ *plus* ℞ 3, *& BC* ℞ *V.* ℞ 4 $\frac{1}{2}$ *minus* ℞ 3. *erunt earum quadrata simul iuncta* R 18, *& rectangulum ipsis contentum* R 1 $\frac{1}{2}$, *cuius duplum est* R 6.

B Exponatur enim rationalis DE, & ad ipsam applicetur parallelogrammum rectangulum DF ęquale quadratis ipsarum AB BC: & parallelogrammum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur] *Sit rationalis DE 3, ad quam si applicetur parallelogrãmum DF, aequale composito ex ipsarum AB BC quadratis, videlicet* R 18, *latitudinem faciet* R 2, *quae sit DG: & si ad eandem applicetur parallelogrammum GH aequale ei, quod bis AB BC continetur, videlicet* R 6, *latitudinẽ faciet* R $\frac{2}{3}$, *quae sit GK. tota igitur latitudo DK erit* R 2 *plus* R $\frac{2}{3}$, *quae est irrationalis ex binis nominibus appellata: & totum parallelogrammum DH erit aequale quadrato ipsius AC, ex 4 secundi.*

C Rationalis igitur est DG ipsi DE longitudine incommensurabilis] *Ex 23 huius.*

D Ergo & recta linea DG incommensurabilis est ipsi GK] *Ex 10 huius, est enim vt DF ad GH, ita DG ad GK, ex 1. sexti.*

E Ac propterea DK est irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur.] *Ex 37 huius.*

F Ergo parallelogrammum DH irrationale est] *Nam quod rationali, & irrationali continetur est irrationale, vt in scholio 39. huius demonstratum fuit.*

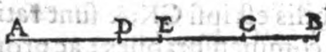
G Et ipsum potens irrationalis] *Ex 11. diffinitione.*

SCHOLIVM.

At vero dictas irrationales vno tantum modo diuidi in rectas li- . , ex quibus componuntur, & quę propositas species constituunt, mox demonstrabimus, si prius lemma quoddam exposuerimus, quod huiusmodi est.

LEMMA.

Exponatur recta linea AB, & secetur tota in partes inæquales ad vtrumque punctorum CD: ponatur autem AC quàm DB maior. Dico quadrata ipsarum AC CB quadratis AD DB maiora esse.



Secetur enim AB bifariam in E, & quoniam maior est AC, quàm DB, communis auferatur DC. reliqua igitur AD maior erit, quàm reliqua CB est autem AE ipsi EB ęqualis. ergo DE. quàm EC est minor: & puncta CD non ęqualiter distant à bipartita sectione. & quoniam rectangulum ACB vnà cum quadrato rectę lineæ CE est ęquale quadrato ipsius EB; sed & rectangulum ADB vnà cum quadrato rectæ lineę DE est æquale ipsius EB quadrato: erit rectangulum ACB vnà cum quadrato ipsius EC æquale rectangulo ADB vnà cum quadrato ipsius DE. Quorum quadratum ipsius DE est minus quadrato EC. & reliquum igitur rectangulum ACB minus est rectangulo ADB. quare & quod bis AC CB continetur minus est eo, quod bis continetur AD DB. sed compositum ex quadratis rectarum linearum AC CB vnà cum eo, quod bis AC CB continetur, est ęquale composito ex quadratis ipsarum AD DB vnà cum eo, quod bis continetur AD DB. est enim vtrumque eorum quadrato ipsius AB ęquale. & reliquum igitur compositum ex quadratis AC CB maius erit composito ex quadratis AD DB. quod demonstrare oportebat.

5. secundi.

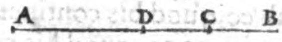
4. secundi

ALITER

ALITER.

Exponatur quædam recta linea AB, diuisa in partes quidem æquales ad punctum D, in partes vero inæquales ad C. Dico quadrata ex A C CB maiora esse quadratis ex AB DB.

Quoniã enim quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC, quod demonstratum est in nono theoremate secundi libri elementorum; & sunt quadrata quidem ex AD DB dupla quadrati ex AD; propterea quòd AB in D bifariam secatur; quod autem bis fit ex DC duplum est quadrati ex DC: erunt quadrata ex AC CB æqualia quadratis ex AD DB vnà cum eo, quod bis fit ex DC. quadrata igitur ex AC CB maiora sunt quàm quadrata ex AD DB, eo, quod bis fit ex DC. Nõ secetur autem AB bifariam, sed vtcunque in punctis CD, ita vt AD sit maior, quàm CB. similiter demonstrabitur quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB maiora esse. Quoniam enim recta linea AB vtcũque secatur in C, quadratum ex AB est æquale quadratis ex AC CB vnà cum eo, quod bis continetur AC CB. Eadem ratione & quadratũ ex AB est æquale quadratis ex AD DB vnà cũ eo, quod bis AD DB continetur. quorũ quod bis continetur AD DB maius est eo quod bis AC CB continetur. est enim rectangulum ADB rectangulo ACB maius. ergo quæ relinquuntur quadrata ex AD DB quadratis ex AC CB minora sunt. quod demonstrare oportebat.



4 secundi.

Ex proxime demõstratis.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam dictis perspicue apparet excessum, quo compositum ex quadratis rectarum linearum AC CB superat compositum ex quadratis ipsarum AD DB, æqualẽ, vel potius eundem esse excessui, quo rectangulum bis contentum AD DB superat rectangulum, quod bis AC CB continetur.

Fiat enim ex AB quadratum AFGB; & ad ipsam AF applicetur parallelogrammum FH æquale composito ex quadratis AC CB. erit reliquum parallelogrammum HG aequale rectangulo bis contento AC CB. Rursus ad eandem AF applicetur parallelogrammum FK aequale composito ex quadratis AD DB. reliquum igitur parallelogrammum KG est aequale ei, quod bis AD DB continetur. Itaque quoniam parallelogrammum quidem FH est aequale composito ex quadratis AC CB; parallelogrammum vero FK est aequale composito ex quadratis AD DB: erit parallelogrammum LH excessus, quo alterum alterum superat. Sed idem LH est excessus, quo rectangulum bis contentum AD DB superat id, quod bis AC CB continetur. constat igitur verum esse, quod nos demonstrandum proposuimus.

4 secundi.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XLIII.

Quæ ex binis nominibus ad unum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis nominibus AB diuisa in nomina ad punctum C. ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles. Dico AB ad aliud punctũ non diuidi in duas rationales potentia solum commensurabiles. si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt AD DB rationales sint potẽtia solũ cõmẽsurabiles. Itaq; manifestũ est AC non esse eandem, quæ DB. si enim fieri potest, sit eadem. erit igitur & AD ea- A B C

dem, quæ CB : atque erit vt AC ad CB, ita BD
ad DA : & AB in D similiter diuisa erit, atque in
D punƈto C. quod non ponitur. ergo AC non est ea-
E dē, quę DB. simili ratione & punƈta CD non ęquali
F ter distant à bipartita seƈtione. quo igitur differunt quadrata reƈtarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis, hoc differt & quod bis AD DB continetur ab eo, quod bis continetur AC CB: quoniam & quadrata reƈtarum linearū AC CB vnà cum eo, quod bis continetur AC CB; & quadrata ipsarum AD DB vnà cū
G eo, quod bis AD DB continetur, æqualia sunt quadrato ipsius AB. sed quadrata AC CB à quadratis AD DB differunt rationali; etenim rationalia vtraque sunt. ergo & quod bis AD DB continetur à contento bis AC CB rationali differt, cum ip-
H sa media sint. atqui medium non superat medium rationali. nō igitur quæ ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punƈtum diuiditur. quare ad vnum dumtaxat diuiditur in nomina. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles] *Ex 37 huius.*

B Itaque manifestum est AC non esse eandem, quæ DB] *Hoc est AC non esse aequalem ipsi DB; sumitur enim hoc loco idem pro aequali.*

C Erit igitur & AD eadem, quæ CB] *Si enim AC sit aequalis ipsi DB, dempta BC vtrique communi, erit reliqua AD reliquae CB ęqualis.*

D Quod non ponitur] *Ponitur enim reƈta linea AB in punƈto D aliter diuisa, atque in ipso C.*

Simili ratione & punƈta CD non æqualiter distant à bipartita seƈtione] *Nā si AD CB inter se ęquales non sint, neque punƈta CD aequaliter distabunt ab eo punƈto, quod reƈtam lineam AD bifariam diuidit.*

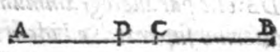
F Quo igitur differunt quadrata reƈtarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis, hoc differt & quod bis AD DB continetur ab eo, quod bis cōtinetur AC CB] *Quomodo hoc sequatur in antecedenti scholio diƈtum est.*

G Sed quadrata AC CB à quadratis AD DB differunt rationali, etenim rationalia vtraque sunt] *Nam rationale non superat rationale, nisi rationali. quod nos demonstrauimus ad 27 huius.*

H Atqui medium non superat medium rationali] *Ex 27 huius.*

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO. XLIIII.

Quę ex binis medijs prima ad vnum dumtaxat punƈtum diuiditur in nomina.



Sit ex binis medijs prima AB diuisa in punƈto C, ita vt AC CB medię sint potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineāt. Dico AB in alio punƈto non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur etiam in D, ita vt AD DB sint medię potentia solum cōmensurabiles, quæ rationale contineant. Quoniam igitur quo differt reƈtangulum contentum bis AD DB ab eo, quod bis AB CB continetur, hoc differunt etiam quadrata reƈtarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis; rationali autem differt contentum AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur, utraque enim sunt rationalia: sequitur vt etiam quadrata ipsarum AC CB rationali differant à quadratis AD DB, quæ vtraque media sunt. illud autem fieri non potest. non igitur quæ ex binis medijs prima in alio, atque alio punƈto diuiditur in nomina. quare in vno dumtaxat diuidatur necesse est.

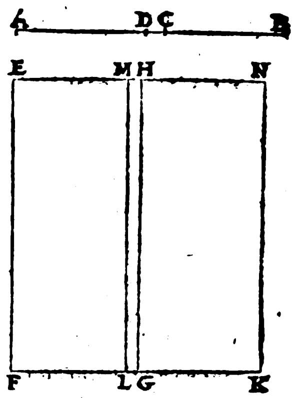
Ex demonstratis ad 21 huius.

27. huius.

THEO-

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO. XLV.

Quæ ex binis medijs secunda ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.



Sit ex binis medijs secūda AB diuisa in C, ita vt AC CB mediæ sint potentia solum commensurabiles, quę medium contineant. manifestum est punctum C non esse in bipartita sectione, quoniam nō sunt longitudine commensurabiles. Dico ipsam A B in alio puncto non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt AC non sit eadem, quæ DB. sed maior A C positione. A
Itaque constat quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB maiora esse, vt supra ostendimus; & AD DB medias esse potentia solum commensurabiles, quæ medium contineant. Exponatur rationalis EF: & quadrato quidem ex AB æquale parallelogrammum EK ad ipsam EF applicetur; quadratis vero ex AC CB æquale auferatur EG. reliquum igitur HK æquale est ei, quod bis AC CB continetur. rursus quadratis ex AD DB, quæ minora sunt quadratis ex AC CB, ut ostensum est, æquale parallelogrammum auferatur EL. ergo reliquum MK est æquale ei, quod bis cōtinetur AD DB. et quoniam media sunt quæ ex AC CB quadrata, erit EG medium, & ad rationalem EF applicatum est. quare EH rationalis est, & ipsi EF longitudine incommensurabilis. Eadem ratione & HN est rationalis, & ipsi EF incommensurabilis lōgitudine. Quòd cum AC CB mediæ sint potentia solum commensurabiles, erit AC ipsi C B incommensurabilis longitudine. ut autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad id, quod AC CB continetur. quadratum igitur ex A C incommensurabile est ei, quod continetur AC CB. sed quadrato quidem ex AC commensurabilia sunt quadrata ex A C C B, etenim AC CB potentia sunt commensurabiles; ei uero, quod continetur AC CB, commēsurabile est illud, quod bis AC CB continetur. ergo et quadrata ex AC CB incommensurabilia sunt ei, quod bis AC CB continetur: quadratis autē ex AC CB æquale est parallelogrammum EG, & ei, quod bis continetur AC CB est æquale HK. ergo EG ipsi HK est incommensurabile; & ob id recta linea EH ipsi HN incommensurabilis longitudine; suntq; rationales. ergo EH HN rationales sunt potentia solum commensurabiles. si autem duæ rationales potentia solum commensurabiles componantur, tota irrationalis est, quę ex binis nominibus appellatur. quare EN ex binis nominibus est diuisa in puncto H. eadem ratione & EM MN ostendentur rationales potentia solum cōmensurabiles, & erit EN ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuisa, uidelicet ad H, & ad M, & non est EH eadem, quæ MN: quoniam quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB sunt maiora; quadrata autē ex AD DB maiora sunt eo, quod bis AD DB continetur. ergo quadrata ex AC CB, hoc est parallelogrammum EG multò maius est eo, quod bis continetur AD DB, hoc est parallelogrammo MK. quare & EH, quàm MN est maior. non igitur E H eadem est, quę MN. quod demonstrare oportebat.

Margin letters: B, C, D, E, F, G, H, K

F. C. COMMENTARIUS.

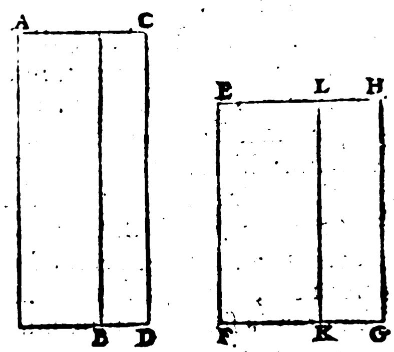
Sed maior AC positione] *Hoc est ponatur nunc AC maior, quam DB.* A
Vt supra ostendimus] *In lemmate, quod positum est ante 43. huius.* B
Reliquum igitur HK æquale est ei, quod bis AC CB cōtinetur.] *Ex 4. secundi libri.* C
Et quoniam media sunt, quæ ex AC CB quadrata, erit EG medium.] *Rectae enim li* D

neae

neae AC CB ponuntur mediae potentia solum commensurabiles. quare & media erunt ipsarum quadrata, atque inter se commensurabilia; & si componantur vnum fiet medium, quemadmodu ex duabus rationalibus, si longitudine commensurabiles sint, vna fit rationalis.

At vero spacium ex medijs compositum irrationale esse, sic demonstrabimus.]

Componantur duo media spacia AB BC. Dico totum AD esse irrationale. sit enim rationale, si fieri potest, exponaturq; rationalis quędam recta linea EF; & ad ipsam applicetur parallelogrammum EG ipsi AD aequale, latitudinẽ faciens EH: à parallelogrammo autem EG auferatur EK aequale ipsi AB, quod latitudinem faciat EL. reliquum igitur LG reliquo BC est ęquale. & quoniam medium est vtrumque ipsorum AB BC; atque est EK quidem ipsi AB aequale; LG vero ipsi BC: erit & vtrunque ipsorum EK LG medium; & ad rationalem EF applicata sint. rationalis igitur est vtraque ipsarum EL LH, & ipsi EF incommensurabilis longitudine. Rursus quoniam AD rationale ponitur, estq; ipsi EG aequale, & applicatur ad rationalem EF; recta linea EH rationali: erit, & ipsi EF longitudine commensurabilis. est autem EL eidem EF incommensurabilis longitudine. ergo EH ipsi EL longitudine incommensurabilis erit. sed vt EH ad EL, ita & quadratum ex EH ad rectangulum, quod HE EL continetur. quadratum autem ex EH commensurabile est quadratis ex HE EL; vtrumque enim ipsorum est rationale. & rectangulum contentum HE EL est commensurabile ei, quod bis HE EL continetur. ergo ex his, quae ad 14. huius demonstrauimus, quadrata ex HE EL incommensurabilia sunt ei, quod bis continetur HE EL. sed quadratis ex HE EL aequale est id, quod bis HE EL continetur vnà cum quadrato ipsius LH, ex 7 secundi libri. si autem magnitudo ex duabus magnitudinibus composita vni componentium sit incommensurabilis, & reliquae incommensurabilis erit. quod à nobis demonstratum est ad 17. huius. quadrata igitur ex HE EL incommensurabilia sunt quadrato ex LH. rationalia autem sunt quadrata ex HE EL. ergo quadratum ex LH irrationale est: & ob id recta linea LH est irrationalis; sed & rationalis, vt demonstratum fuit; quod fieri non potest. non igitur spacium AD est rationale. quare irrationale sit necesse est. quod demonstrare oportebat.



23. huius

21. huius

13. huius

E Quare EH rationalis est, & ipsi EF longitudine incommensurabilis.] Ex 23 huius.

F Ergo EC ipsi HK est incommensurabile] Ex demonstratis ad 14 huius.

G Tota irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur] Ex 37. huius.

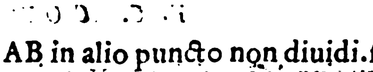
H Et erit EA ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuisa, videlicet ad H, & ad M] Quod fieri non posse in 43 huius demonstratum est. non igitur quae ex binis medijs secunda ad aliud, atque aliud punctum diuiditur in nomina. ergo ad vnum dumtaxat diuidi necessarium est.

K Et non est EH eadem, quæ MN] Ostendit EH ipsi MN non esse aequalem.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XLVI.

Maior ad idem dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit maior AB diuisa in C, ita ut AC CB potentia incommensurabiles sint, facientes compositum quidem ex ipsarum AC CB quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipsis continetur, mediũ. Dico AB in alio puncto non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt AD DB potentia incõmensurabiles sint, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem ipsis continetur, medium. & quoniam quo differunt quadrata ex AC CB à quadratis ex AD DB, hoc differt & id, quod bis continetur AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur,



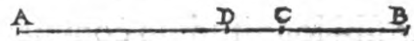
sed

sed quadrata ex AC CB superant quadrata ex AD DB rationali; etenim utraque rationalia sunt. ergo quod bis cõtinetur AD BD rationali superat id, quod bis AC CB cõtinetur, cũ media sint. quod est absurdũ. nõ igitur maior ad aliud, atq; aliud punctum diuiditur. ergo ad idem dumtaxat diuidatur necesse est. Ex demonstratis ad 27 huius. Ex 27. huius.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XLVII.

Rationale, ac medium potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit rationale, ac medium potens AB, diuisa in C; ita vt AC CB potentia incõmensurabiles sint; faciantq; compositũ quidem ex ipsarum AC CB quadratis

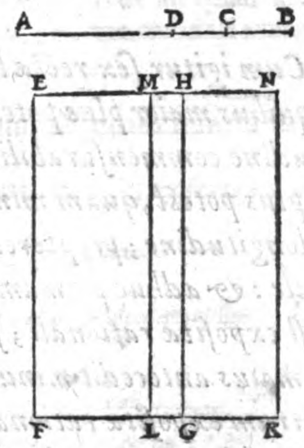


medium; quod autem ipsis continetur, rationale. Dico AB in alio puncto non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt etiam AD DB potentia incommensurabiles sint, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium: quod autem ipsis continetur, rationale. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis contentum AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur, hoc differunt & quadrata ex AC CB à quadratis ex AD DB. rectangulum autem bis contentum AD DB rationali superat id, quod bis AC CB continetur. ergo & quadrata ex AC CB superant quadrata ex AD DB rationali, cum media sint. quod est absurdum. non igitur rationale, ac mediũ potens diuiditur ad aliud, atque aliud punctum. quare ad vnum dumtaxat punctum diuidetur.

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XLVIII.

Bina media potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit bina media potens AB, diuisa in C, ita vt AC CB potentia incommensurabiles sint, facientes etiam compositum ex ipsarum AC CB quadratis medium; & quod ipsis continetur, medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum AC CB. Dico AB ad aliud punctum non diuidi, ita vt faciat quæ proposita sunt. Si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt rursus AC non sit eadem, quæ DB, sed sit AC positione maior; exponaturq; rationalis EF, & ad ipsam quadratis quidẽ ex AC CB ęquale parallelogrammum EG applicetur; rectangulo autem bis contento AC CB æquale applicetur HK. totum igitur EK est æquale ei, quod fit ex AB, quadrato. Rursus ad EF applicetur parallelogrammũ EL, æquale quadratis ex AD DB. ergo reliquum, quod bis AD DB continetur, reliquo MK est æquale. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum AC CB medium ponitur, erit & parallelogrammum EG medium: & ad rationalem EF applicatum est. rationalis igitur est HE, & ipsi EF longitudine incommensurabilis. Eadem ratione & HN est rationalis, ipsiq; EF incommensurabilis longitudine. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur, erit & parallelogrammũ EG ipsi HK incommensurabile. ergo & recta linea EH est incommensurabilis rectę HN. & sunt rationales. quare EH HN rationales sunt potentia solum commensurabiles



4. secundi.

23. huius.

biles. & ob id EN ex binis nominibus est diuisa in puncto H. similiter ostendemus ipsam EN in puncto quoque M diuidi: & non est H eadem, quæ MN. ergo quæ ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiditur; quod est absurdum. non igitur bina media potens diuiditur ad aliud, atque aliud punctum. quare ad vnum dumtaxat punctum diuidetur.

Ex 43. huius.

DIFFINITIONES SECVNDAE.

1 Exposita rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus posit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, siquidem maius nomen expositæ rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.

2 Si vero minus nomen expositæ rationali longitudine sit commensurabile, dicatur ex binis nominibus secunda.

3 Quòd si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4 Rursus si maius nomen plus posit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi lõgitudine incommensurabilis, siquidem maius nomen expositæ rationali sit commensurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.

5 Si vero minus, dicatur quinta.

6 Quòd si neutrum, dicatur sexta.

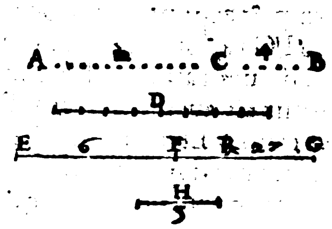
SCHOLIVM.

Cum igitur sex rectæ lineę ita sumantur, primas ordine facit tres, in quibus maior plus potest, quàm minor, quadrato rectę lineæ sibi longitudine commensurabilis; secundas uero tres reliquas, in quibus maior plus potest, quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile antecedit incommensurabile: & adhuc primam quidem, in qua maius nomen commensurabile est expositæ rationali; secundam, in qua minus nomen, quoniam rursus maius antecedit minus, cum ipsum contineat; tertiam vero, in qua neutrum expositæ rationali est commensurabile; & in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans, secundam quintam, & tertiam sextam.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XLIX.

Inuenire ex binis nominibus primam.

A Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis, videlicet AB ad ipsum quidem BC proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum;



numerum; ad ipsum vero CA proportionem non habeat, quā quadratus numerus ad quadratum numerum. & exponatur quędam rationalis D; & ipsi D longitudine commensurabilis sit EF. ergo EF est rationalis. fiat autẽ vt BA numerus ad numerum AC, ita ipsius EF quadratum ad quadratū FG. Sed BA ad AC proportionem habet, quam numerus ad numerum. ergo & quadratum ipsius EF ad quadratū FG proportionē habebit, quā numerus ad numerū. cōmensurabile igitur est quadratū ex EF quadrato ex FG; atq; est EF rationalis. ergo & rationalis FG. & quia BA ad AC proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum neque quadratum ex EF ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo EF ipsi FG incommensurabilis est longitudine. & ob id EF FG rationales sunt potentia solum cōmensurabiles. ex binis igitur nominibus est EG. Dico & primam esse. Quoniā enim est vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad id quod ex FG quadratum. maior autem est BA, quàm AC. ergo & quadratum ex EF quadrato ex FG est maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG H. Quoniam igitur est vt BA ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG, erit per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex H. sed AB ad BC proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & quadratum igitur ex EF ad quadratum ex H proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quare EF ipsi H longitudine est commēsurabilis. ideoq; EF plus potest, quàm FG quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. sunt autem EF FG rationales, & EF ipsi D longitudine est commensurabilis. ergo EG ex binis nominibus est prima.

D E F G H K L

F. C. COMMENTARIVS.

A Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis videlicet AB ad ipsum quidem BC proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; ad ipsum vero CA proportionem non habeat] *Inuenientur autem hi ex corollario primi lemmatis ante 30 huius.*

B Ergo EF est rationalis] *Ex 6 diffinitione.*

C Fiat autem vt BA numerus ad numerum AC, ita ipsius EF quadratum ad quadratum FG] *Ex corollario 6 huius.*

D Commensurabile igitur est quadratum ex EF quadrato ex FG] *Ex sexta huius.*

E Ergo & rationalis FG] *Ex 6 diffinitione.*

F Ergo EF ipsi FG incommensurabilis est longitudine] *Ex 9 huius.*

G Ex binis igitur nominibus est EG] *Ex 37 huius.*

H Sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG H] *Inuenietur quadratum ipsius H ex lēmate ante 15 huius.*

K Quare EF ipsi H longitudine est commensurabilis] *Ex 9 huius.*

L Ergo EG ex binis nominibus est prima] *Ex prima secundarum diffinitionum.*

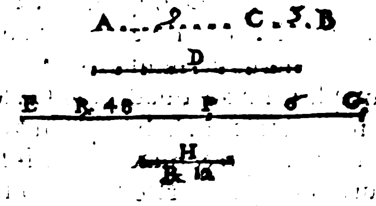
Sit AC numerus 12, CB 4, & EF 6. fiatq; vt 16 ad 12, ita 36 ad aliū. erit ad 27, ergo 6 plus 27 est ex binis nominibus prima.

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO L.

Inuenire ex binis nominibus secundam.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis AB ad ipsum BC quidem proportionem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerū: ad AC vero proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum

numerum: & exponatur rationalis D: & sit FG ipsi D longitudine commensurabi-
6.diffi. lis. ergo FG rationalis est. fiatq; vt CA numerus ad numerum AB, ita quadratum
Corol. 6. huius. ex GF ad quadratum ex FE. commensura-
6. huius. bile igitur est quadratum ex GF quadrato
6. diffi. ex FE. ergo & EF est rationalis. & quoniã CA numerus ad ipsum AB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex GF ad quadratum ex FE proportionẽ habebit, quàm numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igi-
9. huius. tur est GF ipsi FE longitudine. quare EF FG rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea ex binis nominibus est EG. Ostendendum est & secundam esse. Quoniam enim conuertendo est vt BA numerus ad numerũ AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG: maior autẽ est BA, quàm AC. ergo & quadratum ex EF quadrato ex FG est maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H. est igitur per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex H. sed AB ad BC proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex EF ad quadratum ex H proportionẽ
9. huius. habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & ob id EF ipsi H longitudine est commensurabilis. quare EF plus potest, quàm FG quadrato rectæ lineę sibi commensurabiles longitudine. suntq; rationales EF FG potentia solum cõmensurabiles: & FG minus nomen longitudine commensurabile est ipsi D exposi-
2. diffi. secundarum. tæ rationali. ergo EG ex binis nominibus est secunda.



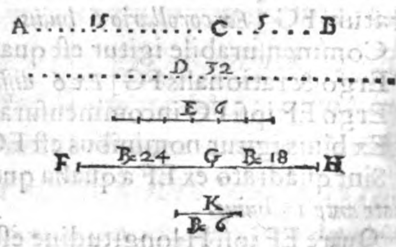
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 9 CB 3. & FG 6. fiat autem vt 9 ad 12, ita 36 ad aliũ erit ad 48. quare ℞ 48 plus 6 est ex binis nominibus secunda.

PROBLEMA XV. PROPOSITIO LI.

Inuenire ex binis nominibus tertiam.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis AB ad BC quidem proportionem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ad AC vero proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Exponatur etiam alius numerus D non quadratus, qui ad vtrumque ipsorum BA AC proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. denique exponatur rationalis quędam recta linea E;
Corol. 6. huius. fiatq; vt D ad AB, ita quadratum ex E ad
6. huius. quadratum ex FG. quadratum igitur ex E quadrato ex FG est commensurabile. ra-
Diffi. 6. tionalis autem est E. ergo & FG est rationalis. & quoniam D ad AB proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex E ad quadratum ex FG proportionem habebit, quã quadratus numerus ad qua
9. huius. dratum numerum. incommensurabilis igitur est E ipsi FG longitudine. Rursus fiat vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH. er-
6. huius. go quadratum ex FG quadrato ex GH est commensurabile. rationalis autem est FG. quare & GH est rationalis. & quoniam BA ad AC proportionem non habet, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex FG ad quadratum



tum

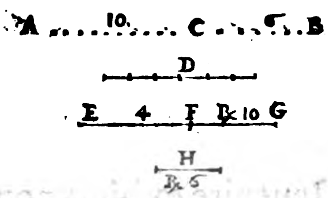
tum ex GH proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine. quare FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles. ideoq; FH ex binis nominibus est. 9.huius.
Dico & tertiam esse. Quõ enim est vt D numerus ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG; vt autem BA ad AC, ita quod fit ex FG quadratum ad quadratum ex GH: erit ex æquali vt D ad AC, ita quadratum ex E ad quadratum ex GH. sed D ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo E ipsi GH incommensurabilis est longitudine. Et quoniam vt BA ad AC, ita quadratum ex FG ad id, quod ex GH quadratum; erit quadratum ex FG maius quadrato ex GH. sint quadrato ex FG æqualia quadrata ex GH, K. per conuersionem igitur rationis est vt AB ad BC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K. sed AB ad BC proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratũ numerum. ergo & quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est FG ipsi K longitudine: & ob id FG plus potest, quam GH, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. suntq; FG GH, rationales potentia solum commensurabiles: & neutra ipsarum commensurabilis est ipsi E longitudine. ergo FH ex binis nominibus est tertia. 9.huius. 9.huius. 3 diffi. secundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit numerus AC 15, CB 5; & D 30, rationalis autẽ E sit 6, fiatq; vt 30 ad 20, ita 36 ad aliũ. erit ad 24. rursus fiat vt 20 ad 15, ita 24 ad alium, hoc est ad 18. ergo ℞ 24 plus ℞ 18 est ex binis nominibus tertia.

PROBLEMA XVI. PROPOSITIO. LII.

Inuenire ex binis nominibus quartam.



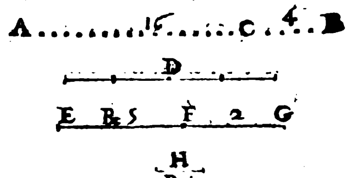
Exponantur duo numeri AC CB, ita vt AB ad vtrũque ipsorum proportionem non habeat, quã numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturq; rationalis D: & ipsi D commensurabilis sit EF longitudine. ergo EF est rationalis. fiat autem vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG. commensurabile igitur est quadratum ex EF quadrato ex FG: ideoq; recta linea FG est rationalis. Et quoniam BA ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, erit EF ipsi FG longitudine incommensurabilis. ergo EF FG rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id EG ex binis nominibus est. Dico eam & quartam esse. Quoniam enim est vt BA ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG; maior autem est BA, quàm AC: erit quadratum ex EF quadrato ex FC maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H. per conuersionem igitur rationis est vt AB numerus ad numerum BC, ita quadratum ex EF ad id, quod fit ex H quadratum. sed AB ad BC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo EF ipsi H longitudine est incommensurabilis; ac propterea EF plus potest, quàm FG quadrato rectę lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntq; EF FG rationales potentia solum commensurabiles: & EF ipsi D commensurabilis est longitudine. ergo EG ex binis nominibus est quarta. diffi. 6. 6. huius. 9.huius. 37.huius. 9.huius. 4.diffi. secundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC numerus 10, CB 6. rationalis autem D sit 6, & EF 4; fiatq; ut 16 ad 10, ita 16 ad alium, nempe ad 10. erit 4 plus ℞ 10 ex binis nominibus quarta.

PROBLEMA XVII. PROPOSITIO. LIII.

Inuenire ex binis nominibus quintam.



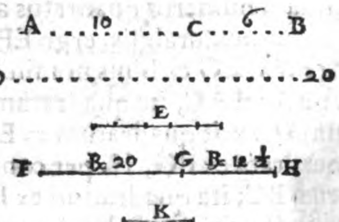
Exponantur duo numeri A C C B, ita vt AB ad vtrumque ipsorum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. exponaturq; recta linea quædam rationalis D; & ipsi D longitudine commensurabilis sit FG. ergo FG est rationalis: & fiat vt C A (6. diffi.) ad AB, ita quadratum ex GF ad id, quod fit ex FE quadratum. rationalis igitur est FE. Et quoniam CA numerus ad AB proportionem nõ habet, quàm numerus quadratus ad quadratũ numerum; neque quadratum ex G F ad quadratum ex FE proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo EF (37 huius.) FG rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id EG ex binis nominibus est. itaque dico & quintam esse. Quoniam enim est vt CA ad AB, ita quadratũ ex GF ad quadratum ex FE; erit conuertendo vt BA ad AC, ita quadratum ex E F ad quadratum ex FG. ergo quadratum ex EF quadrato ex FG est maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H. per cõuersionem igitur rationis est vt AB numerus ad numerum BC, ita quadratum ex EF ad id, quod ex H quadratum. sed AB ad BC proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo neque quadratum ex EF ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ac propterea E F ipsi H longitudine est incommẽsurabilis. quare EF plus potest, quàm FG, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntq; EF FG rationales potentia solum commensurabiles: & FG minus nomen expositę rationali D commensurabilis est longitudine. (5. diffi. secundarum.) ergo EG ex binis nominibus est quinta.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 16, CB 4, & FG 2; fiatq; vt 16 ad 20, ita 4 ad alium, videlicet ad 5. erit R 5 plus 2 ex binis nominibus quinta.

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIO LIIII.

Inuenire ex binis nominibus sextam.



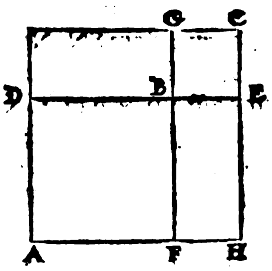
Exponantur duo numeri AC CB, ita vt AB ad vtrumque ipsorum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. sit etiam alius numerus D non quadratus, qui ad vtrumque ipsorum BA AC proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: & exponatur rationalis quędã recta linea E: fiatq; vt D ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG. commẽsurabilis igitur est E ipsi F G potentia, atque est E rationalis. quare & rationalis est F G. Et quoniam D ad AB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo E ipsi F G longitudine est incommensurabilis. (9. huius.) itaque rursus fiat ut BA ad AC, sic quadratum ex FG ad quadratum ex GH. quadratum igitur ex FG quadrato ex GH est commensurabile. rationale autem est quadratum ex FG. ergo & quadratum ex GH est rationale: (9. diffi.) ob idq; recta linea GH est rationalis. Et quoniam BA ad AC proportionẽ nõ habet,

bet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex FG
ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad qua-
dratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine: & ideo 9. huius.
FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles. quare ex binis nomini- 37. huius.
bus est FH. ostēdendum est & sextā esse. Quoniam enim vt D ad AB, ita est quadra
tū ex E ad quadratū ex FG; est aūt & vt BA ad AC, ita quadratū ex FG ad quadra
tū ex GH: erit ex æquali vt D ad AC, ita quadratū ex E ad quadratū ex GH. sed D
ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum nume-
rum. ergo neque quadratum ex E ad quadratum ex GH proportionem habebit,
quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est 9. huius.
E ipsi GH longitudine. ostensum autem est & ipsi FG incommēsurabilem esse. qua
re utraque ipsarum FG GH ipsi E longitudine est incommensurabilis. & quoniam
est vt BA ad AC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit quadratū ex FG
quadrato ex GH maius. sint quadrato ex FG ęqualia quadrata ex GH, K. ergo per
conuersionem rationis vt AB ad BC, ita est quadratum ex FG ad quadratum ex K.
Sed AB ad BC proportionem non habet, quā numerus quadratus ad quadratum
numerum. neque igitur quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem ha-
bebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea FG ipsi K
longitudine est incommensurabilis. ergo FG plus potest, quàm GH quadrato re-
ctæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: suntq; FG GH rationales potentia
solum commensurabiles: & neutra ipsarum longitudine commensurabilis est expo
sitę rationali E. quare FH ex binis nominibus est sexta. 6. diffi. secundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 10, CB 6 & D 20. rationalis autem E sit 5, & fiat vt 20 ad 16, ita 25 ad alium, nempe ad 20. rursus fiat vt 16 ad 10, ita 20 ad aliū, erit ad 12 $\frac{1}{2}$. ergo ℞ 20 plus ℞ 12 $\frac{1}{2}$ est ex binis nominibus sexta.

LEMMA



Sint duo quadrata AB BC: & ponantur ita, vt DB sit in directum ipsi BE. ergo & FB ipsi BG in directum erit; & compleatur AC parallelogrammum. Dico AC quadratum esse: & quadratorum AB BC rectangulum DG medium esse proportionale; itemq; ipsorum AC CB medium proportionale esse DC.

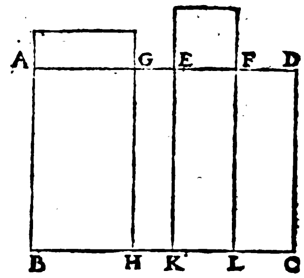
Quoniam enim DB quidem est æqualis BF, EB vero ipsi BG; erit tota DE
toti FG æqualis. sed DE æqualis est vtrique ipsarum AK HC. ergo & vtraque AH 34. primi.
KC vtrique AK HC est ęqualis. ęquilaterū igitur est AC parallelogrāmum. est au-
tem & rectangulum. ergo quadratum est AC. Et quoniam est vt FB ad BG, ita DB
ad BE: vt autem FB ad BG, ita AB ad DG: & vt DB ad BE, ita DG ad BC. vt igi-
tur AB ad DG, ita est DG ad BC: ideoq; ipsorum AB BC medium proportionale
est DG. Dico præterea ipsorum AC CB medium proportionale esse DC. nam cū
sit vt AD ad DK, ita KC ad GC: est enim vtraque vtrique æqualis: & componendo
erit vt AK ad KD, ita KC ad CG. sed vt AK ad KD, ita AC ad CD; & vt KC ad CG, 1. sexti.
ita DC ad CB. & vt igitur AC ad CD, ita est DC ad CB. ac propterea ipsorum AC
CB medium proportionale est CD. quod ostendendum proponebatur.

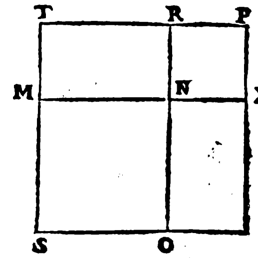
THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO LV.

Si spacium cōtineatur rationali, & ex binis nominibus prima,
recta

recta linea spacium potens irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

Spaciũ enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineam, quę potest spacium AC irrationalem esse, quę ex binis nominibus appellatur. Quoniã enim AD est ex binis nominibus prima, diuidatur in nomina ad punctum E: & sit AE maius nomen. manifestum est AE ED rationales esse potentia solũ commensurabiles, & AE plus posse, quàm ED quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: & præterea AE expositæ rationali AB longitudine commensurabilem esse. Secetur ED bifariam in F. Quoniam igitur AE plus potest, quàm ED quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, si quartę parti quadrati, quod fit à minori, hoc est quadrato ex EF æquale parallelogrammũ ad maiorem AE applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commensurabiles ipsam diuidet. A itaque applicetur, & sit AGE. ergo AG ipsi GE B longitudine est commensurabilis. Deinde per pũcta G E F alterutri ipsarum AB DC parallelæ ducantur GH EK FL: & parallelogrammo quidem AH æquale quadratum constituatur SN; parallelogrammo autem GK æquale quadratum NP: & ponatur ita, vt MN sit in directum ipsi NX. ergo RN ipsi NO in directum erit: & parallelogrammum SP compleatur. quadratum igitur est SP. & quoniam rectangulum AGE est æquale quadrato ex EF, erit vt AG ad EF, ita FE ad EG. quare & vt AH ad EL, ita est C EL ad KG: ac propterea parallelogrammorum AH KG mediũ proportionale est EL. Sed parallelogrammo AH ęquale est quadratum SN, & parallelogrammo GK æquale quadratum NP. ergo quadratorum SN NP medium proportionale est EL. sed & eorumdem SN NP medium proportionale est & MR. æquale igitur est MR ipsi EL. sed MR est æquale OX, & EL ipsi FC. ergo totũ EC ipsis MR OX est æquale. sunt autem & AH GK ęqualia ipsis SN NP. totũ igitur AC est æquale toti SP, hoc est quadrato ex MX; ideoq; ipsa MX potest parallelogrammum AC. Dico MX D ex binis nominibus esse. quoniam enim AG commensurabilis est ipsi GE, erit AE utrique ipsarum AG GE commensurabilis; ponitur autem & AE commensurabi E lis ipsi AB longitudine. ergo & AG GE ipsi AB commensurabiles; sunt; atque est F AB rationalis. rationalis igitur & vtraque ipsarũ AG GE: & ob id rationale vtrũq; G ipsorum AH GK: & AH ipsi GK est commensurabile. sed AH est ęquale ipsi SN, & GH ipsi NP. ergo & quadrata SN NP, videlicet quæ fiunt ex MN NX rationalia H sunt, & commensurabilia. Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine, & AE quidem est commensurabilis ipsi AG; DE vero ipsi EF: erit & AG ipsi K L EF longitudine incommensurabilis. ergo & AH est incommensurabile ipsi EL. sed AH est æquale SN, & EL ipsi MR. quare SN est incommensurabile ipsi MR: vt au- M tem SN ad MR, ita ON ad NR. incommensurabilis igitur est ON ipsi NR: est autẽ N ON ęqualis MN, & NR ipsi NX. ergo MN ipsi NX est incommẽsurabilis. atque est quadratum ex MN commensurabile quadrato ex NX: & vtrumque rationale. quare MN NX rationales sunt potentia solum commensurabiles: ideoq; MX ex binis nominibus est, & potest parallelogrammum AC. quod demonstrare oportebat.





1. Secundarũ diffin.

14. secundi.

Ex antecedẽti lemmate.

1. sexti.

43. Primi.

37. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

A In partes commensurabiles ipsam diuidet] *Ex 2 parte 18 huius.*

Itaque

Itaque applicetur, & sit AGE] *Ex 3 lemmate ante 18 huius.* B
Erit vt AG ad EF, ita FE ad EG] *Ex 14 sexti.* C
Erit AE vtrique ipsarum AG GE commensurabilis] *Ex 16 huius.* D
Ergo & AG GE ipsi AB commensurabiles sunt] *Ex 12 huius.* E
Et ob id rationale vtrumque ipsorum AH GK] *Ex 20 huius.* F
Et AH ipsi GK est commensurabile] *Est enim ex 1 sexti vt AG ad GE, ita AH parallelogrammum ad parallelogrammum GK. ergo ex 10 huius parallelogrammum AH ipsi GK est commensurabile.* G
Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine] *Ponitur enim AD esse ex binis nominibus prima, quae constat ex duabus rationalibus potentia solum commensurabilibus.* H
Erit & AG ipsi EF longitudine incommensurabilis] *Ex ijs, quae ad 14 huius demonstrauimus.* K
Ergo & AH est incommensurabile ipsi EL] *Nam vt AG ad EF, ita & AH parallelogrammum ad ipsum EL. quare ex 10 huius propositum concludetur.* L
Incommensurabilis igitur est ON ipsi NR] *Ex 10 huius, vt dictum iam est.* M
Atque est quadratum ex MN commensurabile quadrato ex NX, & vtrumque rationale.] *Hoc enim supra demonstratum est.* N

Sit AB 5, & AD 4 plus ℞ 12. erit EF, vel FD ℞ 3. & si ad rectam lineam AE applicetur parallelogrammum aequale quadrato ipsius EF, deficiens figura quadrata, erit ex demonstratis ad 18 huius AG 3, GE 1. quare parallelogrammū AH est 15, GK 5, & EL vel FC ℞ 75: ideoq; totum AC parallelogrammum erit 20 plus ℞ 300. Huiusmodi vero spacia iuniores etiam binomialia, seu ex binis nominibus appellant, quorum latera quadrata, vel radices ex ijs, quae tradita sunt, facile inuenire licebit in hunc modum.

Binomialis spacij latus quadratum, vel radicem inuenire.

Sit binomiale spacium 20 plus ℞ 300, cuius oporteat latus quadratum inuenire. diuidatur maius nomen, videlicet 20 in duas partes, ita vt quod ex ipsis producitur sit aequale quartae parti quadrati minoris nominis, hoc est aequale 75. erit ex ijs, quae nos tradidimus ad 18 huius, maior pars 15, & minor 5. dico ℞ 15 plus ℞ 5 esse latus quadratum eius spacij 20 plus ℞ 300. Quoniam enim recta linea, quae ex binis nominibus cōstat, videlicet ℞ 15 plus ℞ 5, diuiditur in duas partes, erit quadratum totius aequale quadratis partiū vnà cum rectangulo, quod bis dictis partibus continetur. itaque quadratum ℞ 15 est 15; & quadratum ℞ 5 est 5: rectangulum autem, quod continetur ℞ 15 & ℞ 5 est ℞ 75, & eius duplum est ℞ 300. quae omnia si componantur facient 20 plus ℞ 300, et idem erit quadratū, quod fit ex recta linea ℞ 15 plus ℞ 5. ergo ℞ 15 plus ℞ 5 est latus quadratum, vel radix huius spacij binomialis 20 plus ℞ 300. Eodem modo & aliorum spaciorum binomialium radices inueniemus. quod facere oportebat.

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO LVI.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus secunda, recta linea spacium potens irrationalis est, quæ ex binis medijs prima appellatur.

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineam, quæ spacium AC potest, ex binis medijs primam esse. Quoniam enim AD est ex binis nominibus secunda, diuidatur in nomina ad punctum E, ita vt AE sit maius nomen. ergo AE ED rationales sunt potētia solum cōmensurabiles: & AE plus potest quàm ED quadrato rectę lineę sibi longitudine cōmensurabilis: & minus nomen ED commensurabile est ipsi AB longitudine. secetur ED bifariam in F: & quadrato ipsius EF æquale parallelogrammum ad rectam lineam AE applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AGE. commensurabilis igitur est AG ipsi GE lōgitudine. & per puncta G E F ipsis AB DC parallelę ducantur GH EK FL. parallelogrammo antē AH ęquale quadratum SN constituatur, & parallelogrammo GK ęquale quadratum NP: & ponatur ita, vt MN sit in directum ipsi

2. diffi secundarum.

18. huius.

ipsi NX. ergo & RN ipsi NO in directum erit; &
In antecedẽti lemmate. compleatur SP quadratum. manifestum iam est ex
ijs, quæ demõstrata sunt, parallelogrammum MR
medium esse proportionale quadratorum SN N
Ex demonstratis in antecedente. P: & parallelogrammo EL ęquale. & pręterea re-
ctã lineam MX posse spacium AC. ostendendum
igitur est ipsam MX ex binis medijs primam es-
37. huius. se. Quoniam enim incommensurabilis est AE ipsi
ED longitudine, cõmensurabilis aũt ED ipsi AB;
14. huius. erit AE ipsi AB longitudine incommensurabilis.
Et quoniam AG commensurabilis est longitudi-
16. huius. ne ipsi GE, erit AE vtrique ipsarũ AG GE lõgitu-
6. diffi. dine cõmẽsurabilis. atque est AE rationalis. ratio-
nalis igitur & vtraque AG GE. Quòd cũ AE sit
incommensurabilis quidem ipsi AB lõgitudine,
commensurabilis autẽ vtrique ipsarum AG GE,
14. huius. erunt AG GE ipsi AB longitudine incommensu-
rabiles. quare BA, AG, GE rationales sunt
22. huius. potentia solum commensurabiles. medium igi-
tur est vtrumque parallelogrammorum AH G
K. & ob id vtrumque quadratorum SN NP est
medium. ergo rectæ lineę MN NX medię sunt.
rursus quoniam commensurabilis est AG ipsi GE longitudine, erit parallelogram-
mum AH parallelogrammo GK commensurabile, hoc est quadratum SN ipsi NP,
hoc est quadratum ex MN quadrato ex NX. ergo MN NX potentia commensurabi
les sunt. & quoniam incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine: & AE quidem
Ex demonstratis ad 14 huius. est commensurabilis ipsi AG; ED vero ipsi EF: erit AG ipsi EF longitudine incom-
mensurabilis. quare & parallelogrammum AH incommensurabile parallelogram-
mo EL, hoc est SN ipsi MR, hoc est ON ipsi NR, hoc est MN ipsi NX incommensura
bilis est longitudine. ostensæ autem sunt MN NX & mediæ, & potentia commensu-
rabiles. ergo MN NX medię sunt, potentia solum commensurabiles. Dico & rationa
le continere. Quoniam enim DE ponitur commẽsurabilis vtrique ipsarum AB EF.
12. huius. erit FE ipsi EK longitudine commensurabilis: atque est rationalis vtraque ipsarum,
20 huius. rationale igitur est & parallelogrammum EL, hoc est MR. estq; MR, quod MN NX
continetur. si autem duę mediæ potentia solum commensurabiles componantur,
38. huius. quę rationale contineant; tota irrationalis est, quæ ex binis medijs prima appella-
tur. ergo MX ex binis medijs est prima, quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

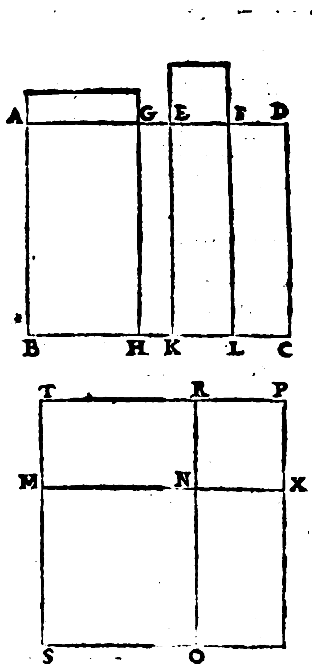
Sit AB 6, AD ℞ 12 plus 3. erit EF vel FD 1 $\frac{1}{2}$: & si ad AE applicetur parallelogrammũ aequale quadrato ipsius EF, deficiens figura quadrata; erit AG ℞ 6 $\frac{3}{4}$ GE ℞ $\frac{3}{4}$. parallelogrammum igitur AH est ℞ 243, GK ℞ 27, & EL 9: & totum AC parallelogrammum ℞ 432 plus 18. vt autem inueniatur eius radix, diuidemus ℞ 432 in duas partes, ita vt quod ex ipsis producitur sit aequale quartae parti quadrati 18, hoc est aequale 81. erit ex iam dictis maior pars ℞ 108 plus ℞ 27: quae duae radices si inter se componantur facient ℞ 243. minor autem pars erit ℞ 108 minus ℞ 27. & detracta ℞ 27 à ℞ 108 relinquitur ℞ 27. maior igitur pars est ℞ 243, & minor ℞ 27. quare spacij binomialis ℞ 432 plus 18 radix erit ℞℞ 243 plus ℞℞ 27.

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO LVII.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus tertia, recta linea spacium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis medijs secunda.

Spacium

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB,& ex binis nominibus tertia AD. diuidatur in nomina ad punctum E, quorum maius sit AE. Dico rectam lineam, quę potest spacium AC irrationalem esse, quę ex binis medijs secũda appellatur. construantur enim eadem,quæ supra. & quoniam AD ex binis nominibus tertia est, erunt AE ED rationales potentia solum commensurabiles,& AE plus poterit, quàm ED quadrato rectę lineæ sibi commensurabilis longitudine:neutraq; ipsarum AE,ED ipsi AB longitudine erit commensurabilis. similiter ostẽdemus MX eam esse,quæ spacium AC potest,& MN NX ex binis esse medijs. itaque ostendendum est & secundam esse. Quoniam enim DE incommensurabilis est longitudine ipsi AB,hoc est ipsi EK;atque est DE commensurabilis EF: erit EF ipsi EK longitudine incommensurabilis. & sunt rationales. ergo FE EK rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id EL, hoc est MR medium est, quod MN NX continetur. quare MX ex binis medijs est secunda.



diffi.3 secundarum.

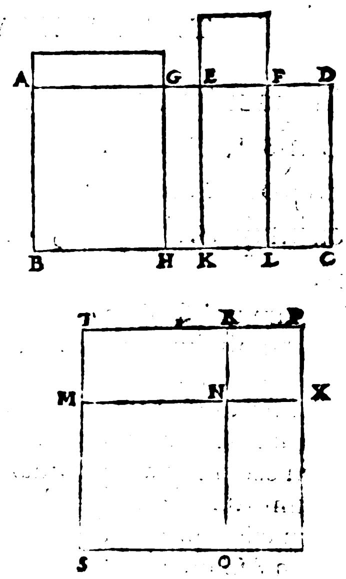
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB 6, AD ℞ 18 plus ℞ 10. erit EF ℞ 2 $\frac{1}{2}$: & si ad AE applicetur parallelogrammũ AGE aequale quadrato ipsius EF, deficiens figura quadrata, erit AG ℞ 12 $\frac{1}{2}$ GE $\frac{1}{2}$. quare parallelogrammum AH est ℞ 450, GK ℞ 18, & EL ℞ 90: & totum parallelogrammum AC est 648 plus ℞ 360. Diuidatur ℞ 648 in duas partes, ita vt quod ipsis continetur sit aequale quartae parti quadrati ℞ 360, hoc est 90. erit maior pars ℞ 450, & minor ℞ 18. spacij igitur binomialis ℞ 648 plus ℞ 360 radix est ℞℞ 450 plus ℞℞ 18.

THEOREMA XL. PROPOSITIO LVIII.

Si spacium contineatur rationali,& ex binis nominibus quarta, recta linea spacium potens irrationalis est, quæ vocatur maior.

Spacium enim AC contineatur rationali AB & ex binis nominibus quarta AD, diuisa in nomina ad punctum E,quorum AE sit maius. Dico rectam lineam,quæ spacium AC potest, irrationalem esse, quæ maior appellatur. Quoniam enim AD ex binis nominibus est quarta, erunt AE ED rationales potentia solum commensurabiles:& AE plus poterit,quàm ED quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & AE ipsi AB commensurabilis erit longitudine. diuidatur DE bifariam in F: & quadrato ipsius EF æquale parallelogrammum ad AE applicetur,deficiens figura quadrata, quod sit AGE. erit igitur AG ipsi GE longitudine incommensurabilis

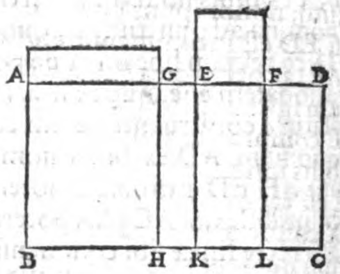


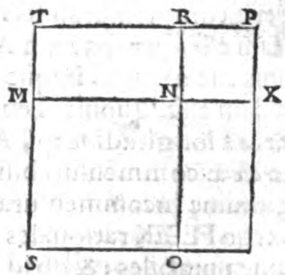
diffi.4. secundarum.

19.huius.

Ss surabilis

surabilis. Ducatur ipsi AB parallelę GH EK FL. & eadem fiat, quę supra. constat igitur MX posse spacium AC. itaque ostendendum est MX irrationalem esse, quæ vocatur maior. Quoniã enim AG ipsi GE incommensurabilis est lõgitudine, erit & AH parallelogrammum ipsi GK incommẽsurabile, hoc est SN ipsi NP. ergo MN NX potentia incommensurabiles sunt. & quoniam AE ipsi AB longitudine est commensurabilis, parallelogrammum AK rationale est. atque est æquale quadratis ipsarum MN NX. ergo compositũ ex quadratis MN NX est rationale. quòd cum DE sit incommensurabilis longitudine ipsi AB, hoc est ipsi EK; sit autem commensurabilis ipsi EF: erit EF ipsi EK incommensurabilis longitudine. quare KE EF rationales sunt potentia solũ





10 : huius. commensurabiles: & ob id medium est parallelogrammum EL, hoc est MR, & MN NX continetur: estq; compositum ex quadratis ipsarum MN NX rationale: & MN ipsi NX potentia incommensurabilis. si autem duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium; tota irrationalis erit. voce-

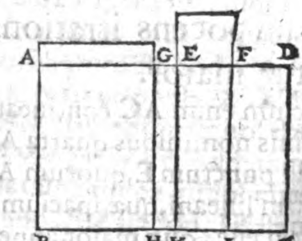
40. huius. tur autem maior. ergo MX irrationalis est, quæ maior appellatur, & potest spacium A C. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

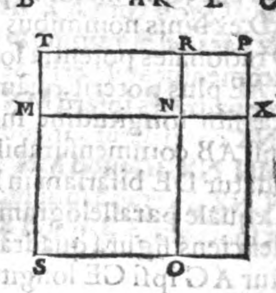
Sit AB 6, AD 6 plus R 24. *erit EF* R 6. *si autem ad AE applicetur parallelogrammum AG E aequale quadrato ipsius EF, et deficiẽs figura quadrata; erit AG 3 plus* R 3, *& GE 3 minus* R 3. *ergo AH parallelogrammũ est 18 plus* R 108, *GK 18 minus* R 108, *& EL vel FC* R 216, *totumq́, parallelogrammum AC 36 plus* R 864. *itaque si diuidamus 36 in duas partes, ita vt productum ex ipsis sit equale 216, erit maior pars 18 plus* R 108, *& minor 18 minus* R 108. *quare spacij binomialis 36 plus* R 864 *radix est* R V. 18 *plus* R 108 *plus* R V. 18 *minus* R 108.

THEOREMA XLI. PROPOSITIO LIX.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quinta, quæ spacium potest recta linea irrationalis est, vocaturq́; rationale, & medium potens.



Spacium.n. AC cõtineatur rationali AB, & AD ex binis nominibus quinta, quę diuidatur in nomina ad pũctũ E, ita vt maius nomẽ sit AE. Dico rectam lineã, quę põt spaciũ AC, irrationalẽ esse, quę vocatur rationale, ac mediũ potens. construãtur enim eadem, quæ supra. manifestũ est MX posse spacium AC. itaque ostẽdere oportet MX irrationalem esse, quæ rationale, ac medium potest.



19. huius. Qm̃ enim AG ipsi GE incommensurabilis est longitudine, & parallelogrammum A H est incom-

mensurabile

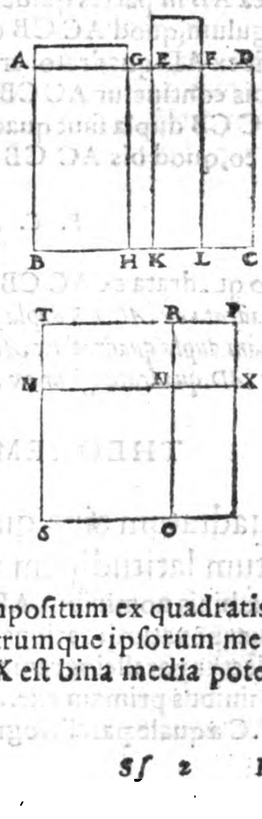
mensurabile parallelogrammo HE, hoc est quadratũ ex MN quadrato ex NX. ergo MN NX potentia incõmensurabiles sunt. Quòd cũ AD sit ex binis nominibus quinta, sitq; minor ipsius portio ED; erit ED ipsi AB cõmẽsurabilis longitudine. sed AE ipsi ED est incommensurabilis. ergo & AB incommensurabilis est longitudine ipsi AE; ac propterea BA AE rationales sunt potentia solum commensurabiles. medium igitur est AK, hoc est compositum ex quadratis ipsarum MN NX. & quoniam DE commensurabilis est longitudine ipsi AB, hoc est ipsi EK; estq; DE commensurabilis ipsi EF: erit & FE ipsi EK commensurabilis. rationalis autem est EK. ergo & FE est rationalis, & parallelogrammum EL rationale, hoc est MR, hoc est quod MN NX continetur. quare MN NX potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium: quod autem ipsis continetur, rationale. ergo MX potens est rationale, ac medium, & potest spacium AC. quod demõstrare oportebat. Diffi. 5. secundarum. 22. huius. 12. huius. 20. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB 6, AD R *24 plus 4, erit EF 2, applicetur ad AE parallelogrammum AGE aequale quadrato ipsius EF, deficiẽs figura quadrata; erit AG* R *6 plus* R *2, GE* R *6 minus* R *2; parallelogrammumq; AH* R *216 plus* R *72; GK* R *216 minus* R *72; EL 12: & totum AC parallelogrammum* R *864 plus 24. si igitur diuidamus* R *864 in duas partes, vt id, quod ex ipsis producitur, sit equale 144, erit maior pars* R *216 plus* R *72, & minor* R *216 minus* R *72. quare spacij binomialis* R *864 plus 24 radix est* R *V.* R *216 plus* R *72 plus* R *V.* R *216 minus* R *72.*

THEOREMA XLII. PROPOSITIO LX.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus sexta, quæ spacium potest recta linea irrationalis est: vocaturq; bina media potens.



Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD; quæ diuidatur in nomina ad punctum E, ita vt AE sit maius nomen. Dico rectam lineam, quæ potest spacium AC, irrationalem esse, quæ vocatur bina media potens. construantur enim eadem, quę supra, manifestũ est MX posse spacium AC: & MN ipsi NX potentia incommensurabilem esse. Et quoniam EA ipsi AB incommensurabilis est longitudine, erunt EA AB rationales potentia solum commensurabiles. medium igitur est AK, hoc est compositum ex quadratis ipsarũ MN NX. Rursus quoniam incõmensurabilis est ED ipsi AB longitudine, erit & FE ipsi EK longitudine incommensurabilis. ergo & FE EK rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea medium est EL, hoc est MR, hoc est quod MN NX continetur. Quòd cum AE sit incommensurabilis ipsi EF, & parallelogrammum AK parallelogrammo EL incõmensurabile erit. Sed AK quidem est cõpositũ ex quadratis ipsarũ MN NX: EL vero est quod MN, NX continetur. incommensurabile igitur est compositum ex quadratis ipsarum MN NX ei, quod MN NX continetur. atque est vtrumque ipsorum medium; & MN NX potentia sunt incommensurabiles. ergo MX est bina media potens, & potest spacium AC. quod demonstrare oportebat. 23. huius. A B C D

F. C. COMMENTARIVS.

A Rursus quoniam incommensurabilis est ED ipsi ab longitudine, erit & FE ipsi EK longitudine incommensurabilis] *Quoniam enim ED ipsi AB incommensurabilis est longitudine; atque est FE commensurabilis ED; erit ex 13 huius etiam FE ipsi AB, hoc est ipsi EK longitudine incommensurabilis.*

B Quòd cum AE sit incommensurabilis ipsi EF] *Ex 13 huius. est enim AE ipsi ED incommensurabilis, & EF commensurabilis ipsi ED.*

C Et MN NX potentia sunt incommensurabiles] *Nam cum AG sit incommensurabilis ipsi GE longitudine, erit AH parallelogrammum parallelogrammo HE, hoc est quadratũ ex MN quadrato ex NX incommensurabile. ergo MN NX potentia incommensurabiles sunt.*

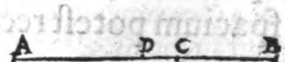
C Ergo MX est bina media potens] *Ex 42 huius.*

D *Sit AB 5, AD* R 10 *plus* R 8. *erit EF* R 2. *si igitur ad AE applicetur parallelogrammum AGE, aequale quadrato ipsius EF, quod deficiat figura quadrata, erit AG* R $2\frac{1}{2}$ *plus* R $\frac{1}{2}$, *GE* R $2\frac{1}{2}$ *minus* R $\frac{1}{2}$ *& parallelogrammum AH* R $62\frac{1}{2}$ *plus* R $12\frac{1}{2}$, *GK* R $62\frac{1}{2}$ *minus* R $12\frac{1}{2}$, *et EL* R 50: *totumq́ AC parallelogrammum* R 250 *plus* R 200. *Diuidatur* R 250 *in duas partes, ita vt quod ex ipsis producitur sit aequale* 50; *erit maior pars* R $62\frac{1}{2}$ *plus* R $12\frac{1}{2}$, *& minor* R $62\frac{1}{2}$ *minus* R $12\frac{1}{2}$. *Eius igitur spacij binomialis* R 250 *plus* R 200 *radix est V.* R $62\frac{1}{2}$ *plus* R $12\frac{1}{2}$ *plus* R $62\frac{1}{2}$ *minus* R $12\frac{1}{2}$.

LEMMA.

Si recta linea in partes inaequales secetur, ipsarum partium quadrata maiora sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur.

Sit recta linea AB, & secetur in puncto C, ita vt AC sit maior, quàm CB. Dico quadrata ex AC CB maiora esse rectangulo, quod bis AC CB continetur. secetur enim AB bifariam in D. & quoniam recta linea AB in partes quidem ęquales secatur ad D; in partes vero inęquales ad C;



5.secundi. rectangulum, quod AC CB continetur vnà cum quadrato ipsius CD est æquale ei, quod fit ex AD quadrato. ergo rectãgulũ ACB quadrato ex AD est minus. quod igitur bis continetur AC CB minus est quàm duplum quadrati ex AD. sed quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC. ergo quadrata ex AC CB maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

* Ergo quadrata ex AC CB maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur] *Quoniam enim quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC, erunt quadrata ex AC CB maiora, quàm dupla quadrati ex AD. sed quod bis continetur AC CB minus est, quàm duplum quadrati ex AD. quadrata igitur ex AC CB multo maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur.*

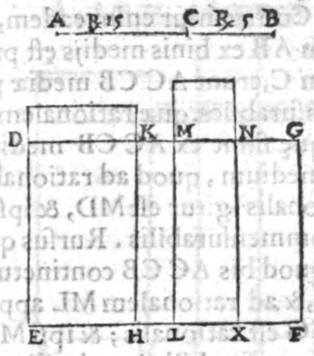
THEOREMA XLIII. PROPOSITIO. LXI.

Quadratum eius, quæ est ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus AB, diuisa in nomina ad punctum C, ita vt AC sit maius nomen: exponaturq; rationalis DE; & quadrato rectæ lineæ AB æquale ad ipsam DE applicetur parallelogrammum DEFG, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus primam esse. Applicetur enim ad rationalem DE quadrato quidem ipsius AC æquale parallelogrammum DH: quadrato autem ipsius BC æquale KL.

reliquum

reliquum igitur, quod bis AC CB continetur est æquale parallelogrammo MF. secetur MG bifariã in N: & alterutri ipsarum ML GF parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum MX NF est æquale ei, quod semel AC CB continetur. Et quoniam ex binis nominibus est AB, diuisa in nomina ad punctum C, erunt AC CB rationales potentia solum commensurabiles. ergo quadrata ex AC CB rationalia sunt, & commensurabilia inter se se: & ob id compositum ex quadratis ipsarum AC CB commensurabile est earumdem AC CB quadratis. rationale igitur est compositũ ex quadratis AC CB, atque est æquale parallelogrammo DL. ergo & DL est rationale, & ad rationalem DE applicatum est. rationalis igitur est DM, & ipsi DE commensurabilis longitudine. Rursus quoniam AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles, medium est, quod bis AC CB continetur, hoc est MF, & ad rationalem ML applicatum est. rationalis igitur est MG, & ipsi ML hoc est ipsi ED longitudine incommensurabilis. est autem & MD rationalis, & ipsi DE commensurabilis longitudine. ergo DM ipsi MG longitudine est incommensurabilis. suntq; rationales. ergo DM MG rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DG est ex binis nominibus. ostendendum est & primam esse. Quoniam enim quadratorum ex AC CB medium proportionale est, quod AC CB continetur; erit etiam parallelogrammorum DH KL medium proportionale MX. est igitur vt DH ad MX, ita MX ad KL, hoc est vt recta linea DK ad MN, ita MN ad MK. ergo rectangulum DKM quadrato ex MN est æquale. Et quoniam quadratum ex AC commẽsurabile est quadrato ex CB, erit & parallelogrammum DH parallelogrammo KL commensurabile. ergo & DK ipsi KM longitudine est commensurabilis. quòd cum quadrata ex AC CB maiora sint eo, quod bis AC CB continetur; erit & parallelogrammum DL maius parallelogrammo MF: ideoq; recta linea DM ipsa MG est maior. atque est rectangulum DKM æquale quadrato ex MN, hoc est quartæ parti quadrati ex MG: & DK ipsi KM longitudiue est commensurabilis. si autem sint duæ rectæ lineę inæquales, & quartæ parti quadrati minoris ęquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes cõmensurabiles ipsam diuidat, maior plus poterit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. suntq; rationales DM MG, & DM, quæ est maius nomen expositę rationali DE longitudine est commensurabilis. ergo DG est ex binis nominibus prima. quod demonstrare oportebat.



4. secundi
37. huius.
12. huius.
16. huius.
6. diffi.
21. huius.
23. huius.
13. huius.
Ex lemmate ad 55. huius.
1. sexti.
17. sexti.
1. sexti.
10. huius.
Ex antecedentium.
1. sexti.
14. quinti.
19. huius.
1. diffi. secũdarum.

F. C. COMMENTARIVS.

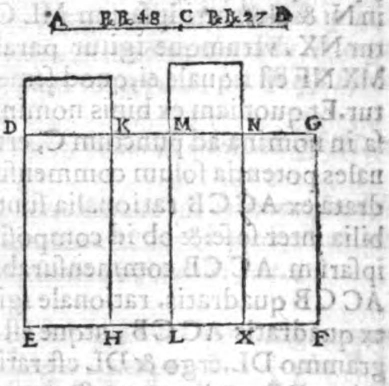
Sit AB R 15 plus R 5, & DE 5. erit DH 15 KL 5, & MX R 75 & NF R 75. quare si ad DE applicetur DH latitudinem faciet DK 3: & si applicetur KL faciet KM 1. Quòd si ad eandẽ applicetur MX videlicet R 75 faciet latitudinẽ MN R 3 ex 2 theoremate eorum, quae ad 20 huius conscripsimus. et similitrr NG erit R 3. ergo tota DG est 4 plus R 12, quae est ex binis nominibus prima.

THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO LXII.

Quadratum eius, quę est ex binis medijs prima ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

Sit ex binis medijs prima AB, diuisa in medias ad pũctum C, quarum AC sit maior: exponaturq; rationalis DE; & ad ipsam applicetur parallelogrammum æquale quadrato

quadrato ipsius AB,quod sit DF,latitudinem fa
ciẽs DG.Dico DG ex binis nominibus secundã
esse.Cõstruantur enim eadem,quę supra. & quo
niam AB ex binis medijs est prima,diuisa ad pũ
38.huius. ctum C,erunt AC CB mediæ potentia solum cõ
mensurabiles,quæ rationalem continent. quare
& quę fiunt ex AC CB media sunt; ideoq; DL
est medium , quod ad rationalem applicatũ est.
23.huius. rationalis igitur est MD, & ipsi DE longitudine
incommensurabilis . Rursus quoniam rationale
est quod bis AC CB continetur,erit & MF ratio
21.huius. nale,& ad rationalem ML applicatum est . ergo
& MG est rationalis ; & ipsi ML, hoc est ipsi DE
commensurabilis longitudine. incommensura-
13.huius. bilis igitur est DM ipsi MG,& sunt rationales.quare DM MG rationales sunt potẽ-
37. huius. tia solum commensurabiles;ac propterea DG est ex binis nominibus . ostendẽdum
Ex lem. ad 61.huius. est & secundam esse. Quoniam enim quadrata ex AC CB maiora sunt eo,quod bis
AC CB continetur,erit & DL parallelogrammum parallelogrammo MF maius. er
1.sexti go & recta linea DM maior est ipsa MG . Quòd cum quadratum ex AC quadrato
14. quinta. ex CB sit commensurabile,& DH parallelogrammum parallelogrammo KL com-
mensurabile erit.quare & DK commensurabilis ipsi KM:atque est quod DK KM cõ
19. huius. tinetur quadrato ipsius MN æquale.ergo DM plus potest, quàm MG quadrato re-
ctæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.estq; MG commensurabilis longitudi-
2.diffi.secũdarum. ne ipsi DE.quare DG ex binis nominibus est secunda.



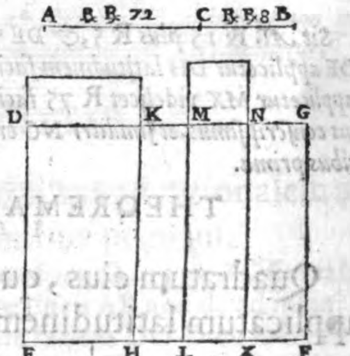
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB RR 48 *plus* RR 27,*et DE 4;erit DH* R 48,*KL* R 27,*MX, et NF 6. ergo si ad DE applicetur DH,faciet DK* R 3 *ex 2 theoremate iam dicto,et ead em ratione si ad eandem applicetur KL,erit KM* R $1\frac{11}{16}$ *et si applicetur MX vel NF,erit MN,vel NG* $1\frac{1}{2}$ *et quoniam DK KM hoc est* R 3,R $1\frac{11}{16}$ *longitudine cõmensurabiles sunt,si inter se componantur, erit ex tertio theoremate eorum,quae nos ad 20 huius apposuimus,DM* R $9\frac{3}{16}$ *ergo tota DG est* R $9\frac{3}{16}$ *plus 3 videlicet ex binus nominibus secunda.*

THEOREMA XLV. PROPOSITIO. LXIII.

Quadratum eius , quę est ex binis medijs secunda ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

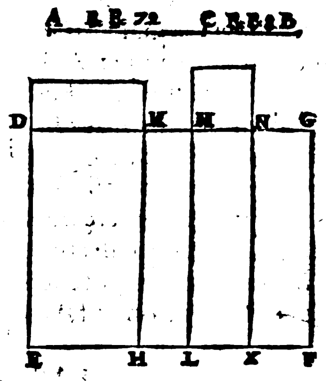
Sit ex binis medijs secunda AB,diuisa in medias
ad C,ita vt AC sit maior portio . rationalis autem
sit DE:& ad ipsam DE quadrato ex AB æquale pa
rallelogrammum DF applicetur , latitudinem fa-
ciens DG.D ico DG ex binis nominibus tertiam es
se.Construantur enim eadem , quę supra . & quo-
niã AB est ex binis medijs secũda,diuisa ad punctũ
39.huius. C,erunt AC CB mediæ potentia solum commen-
A surabiles,quæ medium contineant.ergo & compo
situm ex ipsarum AC CB quadratis medium est,
& ipsi DL æquale.medium igitur est DL , & ad ra-
23 . huius. tionalem DE applicatur . ergo rationalis est MD,
& ipsi DE longitudine incommensurabilis.Eadem
ratione, & MG est rationalis , & incommensurabi-
lis ipsi ML,hoc est ipsi DE. vtraque igitur ipsarum



DM

DM MG rationalis est, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. & quoniam incommensurabilis est AC ipsi CB longitudine; vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad rectangulum ACB: erit & quadratum ex AC rectangulo ACB incommensurabile. ergo & compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur; hoc est DL incõmensurabile ipsi MF. et ob id recta linea DM ipsi MG est incommensurabilis: suntq; rationales. ergo DG est ex binis nominibus. ostendendũ est et tertiã esse. similiter enim concludemus DM ipsa MG maiorem esse, et DK ipsi KM commensurabilem. atque est rectangulum DKM quadrato ipsius MN æquale. ergo DM plus potest, quàm MG, quadrato rectę lineæ sibi incommensurabilis longitudine; et neutra ipsarum DM MG est longitudine commensurabilis ipsi DE. quare DG est ex binis nominibus tertia.

1. sexti, vel ex lemm. ad 23. huius.
B
1. sexti. & 10. huius.
57. huius.
19. huius.
3. diffi. secundarum.



F. C. COMMENTARIVS.

Ergo et compositum ex ipsarum AC CB quadratis medium est.] *Ex duobus enim medijs commensurabilibus, si inter se componantur, vnum fit medium, vt in 45 huius diximus.* A

Ergo et compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur.] *Nam cum quadrata ex AC CB commensurabilia sint, si inter se componantur, erit compositum commensurabile quadrato ex AC per 16 huius. quod autem bis continetur AC CB rectãgulo ACB est incõmẽsurabile, vt pote eius duplum. ergo ex ijs, quae nos ad 14 huius demonstrauimus, compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur.* B

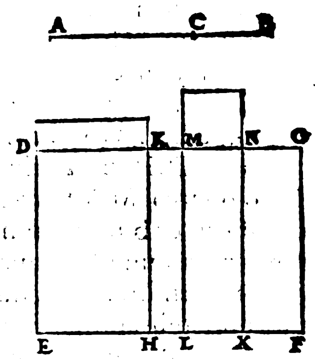
Sit AB RR 72 *plus* RR 8, *et DE* 4. *erit DH* R 72, *KL* R 8, *MX, vel NF* R 24. *quare si ad DE applicetur DH, latitudinem faciet DK* R $4\frac{1}{2}$. *si vero applicetur KL faciet KM* R $\frac{1}{2}$. *et si MX, vel NF faciet MN, vel NG* R $1\frac{1}{2}$. *At si DK KM componantur, hoc est* R $4\frac{1}{2}$, *&* R $\frac{1}{2}$ *fiet DM* R 8. *tota igitur DG est* ℞ 8 *plus* ℞ 6, *quae est ex binis nominibus tertia.*

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO LXIIII.

Quadratum maioris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit maior AB, diuisa in puncto C, ita vt AC maior sit quã CB. rationalis autem quędam sit DE: & quadrato ex AB æquale ad ipsam DE applicetur parallelogrammum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus quartã esse. Construantur enim eadem, quæ supra. Et quoniam maior est AB, diuisa in C, erunt AC CB potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium. Itaque quoniam rationale est compositum ex quadratis ipsarum AC CB, erit & parallelogrammum DL rationale. ergo & rationalis est recta linea DM, ipsiq; DC longitudine commensurabilis. Rursus quoniam medium est quod bis AC CB continetur, hoc est MF, & ad rationalẽ ML est applicatum; erit et MG rationalis, & ipsi DE incommensurabilis longitudine. ergo & DM ipsi MG longitudine incommensurabilis est; ac propterea DM MG

40. huius.
21. huius.
23. huius.



rationales

37. huius. rationales sunt potentia solum commensurabiles. quare ex duobus nominibus est DG. ostendendum est & quartam esse. similiter enim superioribus cócludemus DM maiorem esse, quàm MG: et rectãgulum DKM quadrato ex MN æquale. Quoniam igitur quadratum ex AC incõmensurabile est quadrato ex CB, erit et DH parallelogrammum incõmensurabile parallelogrãmo KL. et ob id recta linea DK ipsi KM incõmensurabilis. si aũt sint duæ rectæ lineę inæquales, & quartæ parti quadrati minoris ęquale parallelogrãmũ ad maiorẽ applicetur, deficiens figura quadrata, quod in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior plus poterit, quàm minor quadrato rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis. ergo DM plus potest, quàm MG, quadrato rectæ lineę sibi incommensurabilis longitudine. suntq; DM MG rationales potentia solum commensurabiles: atque est DM commensurabilis expositæ rationali DE. quare DG est ex binis nominibus quarta.

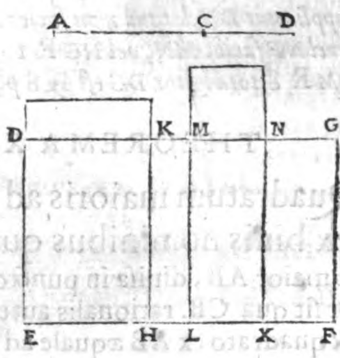
1. sexti & 10. huius. 19 huius. 4. diffi. secundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ℞ V. 10 plus ℞ 37 $\frac{1}{2}$ plus ℞ V. 10 minus ℞ 37 $\frac{1}{2}$: et DE sit 5. erit DH 10 plus ℞ 37 $\frac{1}{2}$: KL 10 minus ℞ 37 $\frac{1}{2}$: MX, vel NF ℞ 62 $\frac{1}{2}$. itaque si ad DE applicetur DH latitudinem faciẽs DK, erit DK 2 plus ℞ 1 $\frac{1}{2}$: si vero applicetur KL faciens KM, erit ea 2 minus ℞ 1 $\frac{1}{2}$: & si applicetur MX, vel NF, erit MN, vel NG ℞ 2 $\frac{1}{2}$. Quòd si componantur DK KM, hoc est 2 plus ℞ 1 $\frac{1}{2}$, & 2 minus ℞ 1 $\frac{1}{2}$, fiet DM 4. ergo tota DG est 4 plus ℞ 10. videlicet ex binis nominibus quarta.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO. LXV.

Quadratum eius, quæ rationale, ac medium potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.



Sit rationale, ac medium potens AB, diuisa in rectas lineas ad punctum C, ita vt AC sit maior. exponaturq; rationalis DE, & quadrato ipsius AB æquale parallelogrammum DF ad ipsã DE applicetur, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus quintam esse. Construãtur enim eadem, quæ supra. Et quoniam rationale, ac medium potens est AB, diuisa ad C punctum, erunt AC CB potentia incommensurabiles, quę faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis continetur rationale. quoniam igitur medium est compositum ex ipsarum AC CB quadratis, erit & parallelogrãmum DL medium: ideoq; recta linea DM rationalis est, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rationale est, quod bis AC CB continetur, hoc est parallelogrammum MF; erit MG rationalis, & ipsi DE longitudine commensurabilis. incommensurabilis igitur est DM ipsi MG. quare DM MG rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DG est ex binis nominibus. Dico & quintam esse. similiter enim demõstrabitur, rectangulum DKM quadrato ex MN esse ęquale; & DK ipsi KM longitudine esse incommensurabilem. quare DM plus potest, quàm MG quadrato rectæ lineę sibi incommensurabilis longitudine: suntq; DM MG rationales, potẽtia solum commensurabiles; & minor MG commensurabilis est ipsi DE lõgitudine. ergo DG est ex binis nominibus quinta.

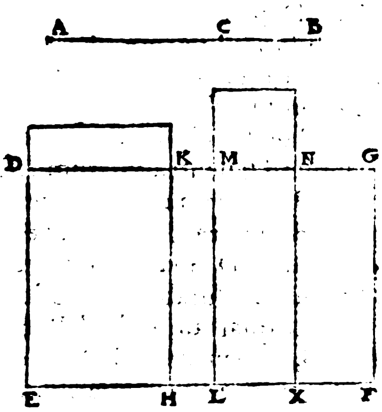
41. huius. 23. huius. 21. huius. 13. huius. 5. diffi secundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit ab R V.R 125 plus 5, plus R V R 125 minus 5; & DE sit 5. erit parallelogrammũ DH R 125 plus 5, KL R 125 minus 5; MX vel NF 10: & si ad DE applicetur parallelogrammum DH latitudinem faciens DK, erit DK R 5 plus 1. si vero applicetur KL latitudinẽ faciens KM, erit KM R 5 minus 1. & si applicetur MX uel NF, erit MN, vel N G 2. quòd si componantur DK KM videlicet R 5 plus 1, R 5 minus 1, fiet DM R 20. tota igitur DG est R 20 plus 4. nimirum ex binis nominibus quinta.

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO LXVI.

Quadratum eius, quæ bina media potest, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.



Sit bina media potens A B, diuisa ad punctum C: rationalis autem sit D E: & ad ipsam DE quadrato ex AB æquale parallelogrammum DF applicetur, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus sextam esse. Construantur enim eadem quę supra. Et quoniam bina media potens est AB, diuisa ad C, erũt AC CB potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis medium: & quod ipsis continetur medium; & adhuc incommẽsurabile composito ex quadratis ipsarum. ergo ex iam demonstratis medium est vtrumque parallelogrammorum DL MF: & ad rationalem DE applicata sunt. rationalis igitur est & vtraque DM MG, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. & quoniam compositum ex ipsarum AC CB quadratis incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur; erit & DL parallelogrammum parallelogrammo MF incommensurabile: & idcirco DM incommensurabilis MG. quare DM MG rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ex binis nominibus est DG. Dico & sextam esse. similiter enim prædictis rursus ostendemus rectãgulum DKM quadrato ex M N æquale, & DK ipsi KM longitudine incommensurabilem esse. ergo DM plus potest, quàm MG quadrato rectæ lineę sibi incommensurabilis longitudine: & neutra ipsarum DM MG longitudine commensurabilis est expositę rationali DE. quare DG ex binis nominibus est sexta.

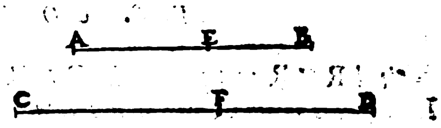
41. huius. — 23. huius. — 19. huius. — 6. diffi. secũdarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R V.R 252 plus R 72, plus R V.R 252 minus R 72: & DE sit 6. erit DH R 252 plus R 72: KL R 252 minus R 72: MX, vel NF R 180. applicetur ad DE parallelogrammũ DH latitudinem faciens D K. erit D K R 7 plus R 2. Rursus applicetur K L faciens latitudinem KM. erit KM R 7 minus R 2. denique applicetur MX, vel NF, erit MN, vel NG R 5 ergo tota DG est R 28 plus R 20 ex binis nominibus sexta.

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO LXVII.

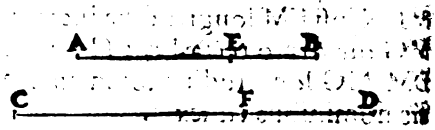
Ei, quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.



Sit ex binis nominibus AB, & ipsi AB longitudine commensurabilis sit CD. Dico CD ex binis nominibus esse, & ordine eandem ipsi AB. quoniam enim ex binis nominibus est AB, diuidatur in nomina ad punctum E, & sit AE maius nomen. ergo AE EB rationales sunt potentia solum commensurabiles.
13.sexti. fiat vt AB ad CD, ita AE ad CF: & reliqua igitur EB
19.quinti. ad reliquam FD est, ut AB ad CD. commensurabilis autem est AB ipsi CD longitudine.
10.huius. ergo & AE ipsi CF, & EB ipsi FD longitudine est commensurabilis. suntq; rationales AE EB.
8.diffi. rationales igitur sunt & CF FD. & quoniam est vt AE ad CF, ita EB ad FD, erit permutando ut AE ad EB, ita CF ad FD: sunt autem AE EB potentia solum commensurabiles.
10.huius. ergo & CF FD potentia solum cõmensurabiles erunt. & sunt rationales, ex binis igitur nominibus est CD. Dico & ipsi AB ordine eandẽ esse. uel enim AE plus potest, quàm EB quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensurabilis. si quidem commensurabilis, & CF plus
15.huius. poterit, quàm FD quadrato rectę lineæ sibi commensurabilis longitudine. Quòd si AE
12.huius. sit commensurabilis expositæ rationali, & CF eidem commensurabilis erit. & ob id vtraque ipsarum AB CD ex binis nominibus est prima; hoc est ordine eadem. Si vero EB sit commensurabilis expositę rationali, & FD eidem erit commẽsurabilis. ob eamq; caussam CD ipsi AB ordine eadem est; vtraque enim est ex binis nominibus secunda. quòd si neutra ipsarum AE EB sit expositę rationali commensurabilis, & neutra CF FD eidem commensurabilis erit; & est vtraque tertia. At si AE plus pos
15.huius. sit, quàm EB quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & CF plus poterit, quàm FD quadrato rectæ lineę sibi longitudine incommensurabilis: & si AE sit commensurabilis expositæ rationali, & CF eidem commensurabilis erit, & est vtraque quarta. quòd si EB, & ipsa FD, & est vtraque quinta. si vero neutra ipsarũ AE EB, & neutra CF FD expositę rationali erit cõmensurabilis, & est vtraque sexta. ergo ei, quę est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, & ordine eadem.

THEOREMA L. PROPOSITIO. LXVIII.

Ei, quę est ex binis medijs longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis medijs est, atque ordine eadem.



Sit ex binis medijs AB, & ipsi AB commensurabilis longitudine sit CD. Dico CD ex binis medijs esse, & ipsi AB ordine eandẽ. quoniam enim AB ex binis medijs est,
38.huius. diuisa in medias ad punctum E, erunt AE EB mediæ potentia solum commensurabiles.
12.sexti. Itaque fiat vt AB ad CD, ita AE ad CF. ergo & reliqua EB ad reliquam FD est vt AB ad CD.
19.quinti commẽsurabilis autem est AB ipsi CD longitudine.
10.huius. quare & AE ipsi CF longitudine commensurabilis erit, & EB ipsi FD. suntq; mediæ AE EB.
24.huius. mediæ igitur & CF FD. Et quoniã est vt AE ad EB, ita CF ad FD, & sunt AE EB commensurabiles potentia solum; erunt & CF FD potentia solum commensurabiles. ostensę autem sunt & mediæ. ergo CD est ex binis medijs. Dico & ipsi AB ordine eandem esse. Quoniam enim est vt AE ad EB, ita CF ad FD, erit & vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratũ ex CF ad rectangulum CFD. quare permutando vt quadratum ex AE ad quadratum ex CF, ita rectangulum AEB ad CFD rectangulum. commensurabile autem est quadratum ex AE quadrato ex CF. ergo & rectangulum AEB rectangulo CFD est commensurabile. si igitur rationale est rectangulum AEB, & rectangulum CFD rationale erit: atque est ex binis medijs prima. si vero medium est rectangulum

AEB

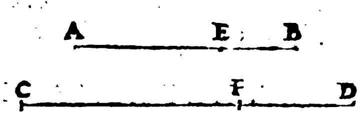
AEB, & ipsum CFD erit medium: & est vtraque ex binis medijs secunda. ergo CD ipsi AB ordine eadem est. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam enim est vt AE ad EB, sic CF ad FD, erit & ut quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD] *Nam cum sit ut AE ad EB, ita CF ad FD; ut autem AE ad EB, ita quadratum ex AE ad AEB rectangulum ex 1 sexti, vel ex lemmate ante 23 huius: erit ut quadratum ex AE ad AEB rectangulum, ita CF ad FD. sed vt CF ad FD, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. vt igitur quadratum ex AE ad AEB rectangulum, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD.* * 11. quinti.

THEOREMA LI. PROPOSITIO LXIX.

Maiori commensurabilis, & ipsa maior est.



Sit maior AB: & ipsi AB commensurabilis sit CD. Dico CD maiorem esse. diuidatur AB in E. ergo AE EB potentia sunt incommensurabiles, quę faciunt compositũ quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem ipsis cõtinetur, medium. & fiant eadem, quæ supra. quoniam igitur est vt AB ad CD, ita AE ad CF, & EB ad FD; erit vt AE ad CF, ita EB ad FD. commensurabilis autẽ est AB ipsi CD. ergo & vtraque ipsarum AE EB vtrique CF FD est commensurabilis. & quoniam est vt AE ad CF, ita EB ad FD: permutandoq; vt AE ad EB, ita CF ad FD: & componendo vt AB ad BE, ita CD ad DF. vt igitur quadratum ex AB ad quadratũ ex BE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF. similiter demonstrabimus & vt quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita esse quadratum ex CD ad quadratum ex CF. ergo & vt quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex CD ad quadrata ex CF FD: permutando igitur ut quadratum ex AB ad quadratum ex CD, ita quadrata ex AE EB ad quadrata ex CF FD. commensurabile autẽ est quadratum ex AB quadrato ex CD. ergo & quadrata ex AE EB quadratis ex CF FD sunt commensurabilia. atque est compositum ex quadratis ipsarum AE EB rationale. ergo & rationale erit compositum ex quadratis CF FD. similiter aũt & quod bis continetur AE EB commensurabile est ei, quod bis CF FD continetur. atque est medium, quod bis continetur AE EB. medium igitur & quod bis CF FD continetur. ergo CF FD potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis rationale: quod autem ipsis cõtinetur medium. tota igitur CD irrationalis est, quæ vocatur maior. ergo maiori commensurabilis & ipsa maior est. quod demonstrare oportebat.

40. huius; A; B; C; D; E; F

F. C. COMMENTARIVS.

A Vt igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF] *Ex 22 sexti libri.*

B Similiter demonstrabimus & vt quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita esse quadratum ex CD ad quadratum ex CF]

Quoniam enim est vt AB ad BE, ita CD ad DF, erit per conuersionẽ rationis vt BA ad AE, ita DC ad CF. ergo ut quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex CF. 22. sexti.

C Ergo & quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratũ ex CD ad quadrata ex CF FD] *Est enim vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare vt quadratum ex AE ad quadratum ex EB, ita quadratum ex CF ad quadratum ex FD: & componendo vt quadrata ex AE EB ad quadratum ex EB, ita quadrata ex CF FD ad quadratum ex FD: conuertendoq; vt quadratum ex EB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex FD ad quadrata ex CF FD. erat autẽ* *ut quadratum ex AB ad quadratum ex BE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF. ergo ex aequali ut quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex CD ad quadrata ex CF FD.*

D Similiter autem & quod bis continetur AE EB commensurabile est ei, quod bis CF FD continetur] *Nam ex 4 secundi quadratum ex AB est aequale quadratis ex AE EB unà cum eo, quod bis continetur AE EB: & eadem ratione quadratum ex CD est aequale quadratis ex CF FD unà cum eo, quod bis CF FD continetur. Cum igitur sit ut totum ad totum, ita ablatū ad ablatū, uidelicet ut quadratum ex AB ad quadratū ex CD, ita quadrata ex AE EB ad quadrata ex CF FD; erit & reliquū ad reliquū, ut totum ad totū; hoc est quod bis continetur AE EB ad id, quod bis CF FD continetur, ut quadratum ex AB ad quadratum ex CD. sed quadratum ex AB commensurabile est quadrato ex CD. ergo ex 10 huius & quod bis continetur AE EB commensurabile est ei, quod bis CF FD continetur.*

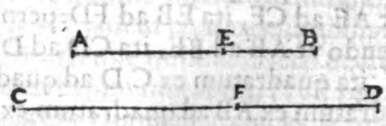
E Medium igitur & quod bis CF FD continetur.] *Ex corollario 24 huius. quare & medium est, quod semel continetur CF FD.*

F Ergo CF FD potentia sunt incommensurabiles] *Vt enim AE ad EB, ita est CF ad FD. sed AE est potentia incommensurabilis ipsi EB. ergo & CF ipsi FD potētia incommensurabilis erit. sunt igitur CF FD potentia incommensurabiles.*

10. huius.

THEOREMA LII. PROPOSITIO. LXX.

Rationale, ac medium potenti commensurabilis, & ipsa rationale, ac medium potens est.

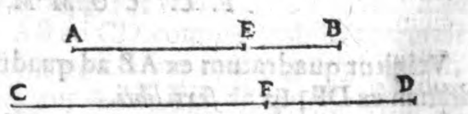


Sit rationale, ac medium potens AB: & ipsi AB commensurabilis sit CD. ostendendum est & CD rationale, ac medium potētem esse. diuidatur AB in rectas lineas ad punctum E. ergo AE EB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium: quod autem ipsis continetur rationale. & eadem, quæ prius construantur. Similiter demonstrabimus CF FD potentia esse incommensurabiles: & compositum ex quadratis ipsarum AE EB commensurabile esse composito ex quadratis CF FD. Quod autē continetur AE EB cōmēsurabile est ei, quod CF FD continetur. ergo & compositum ex quadratis ipsarum CF FD est medium. Quod autem continetur CF FD rationale. rationale igitur, ac medium potens est CD. quod ostendere oportebat.

40. huius.

THEOREMA LIII. PROPOSITIO. LXXI.

Bina media potenti commensurabilis, & ipsa bina media potens est.



Sit bina media potens AB, & ipsi AB commēsurabilis CD. ostendendū est CD bina media potentem esse. Quoniam enim bina media potens est AB, diuidatur in rectas lineas ad punctum E. quare AE EB potentia sunt incommensurabiles, quæ faciunt cōpositum ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis continetur medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum. & construantur eadem, quę supra. similiter demonstrabimus CF FD potentia incommensurabiles esse: & compositum ex quadratis ipsarum AE EB commēsurabile composito ex quadratis CF FD. quod autem AE EB continetur commeusurabile est ei, quod continetur CF FD. quare & compositum ex quadratis ipsarum CF FD medium est: itemq; medium quod CF FD continetur; & adhuc incommensurabile composito ex quadratis CF FD. ergo bina media potens est CD. quod ostendendum fuit.

41. huius.

THEO-

THEOREMA LIIII. PROPOSITIO. LXXII.

Si rationale,& medium componantur, quattuor irrationales fiunt, vel ea,quę ex binis nominibus, vel quę ex binis medijs prima,vel maior,vel rationale ac medium potens.

Sit rationale quidem ſpacium AB, medium autem CD. Dico eam, quę poteſt ſpacium AD, vel eſſe ex binis nominibus, vel ex binis medijs primam, vel maiorem, vel rationale, ac medium potentem. etenim AB vel maius eſt, quã CD, vel minus. ſit primum maius, exponaturq; rationalis EF: & ad ipſam applicetur parallelogrammũ EG ipſi AB æquale, quod latitudinem faciat EH: ipſi vero CD ęquale ad EF, hoc eſt ad HG applicetur HI latitudinem faciens HK. & quoniam rationale eſt AB, & ipſi eſt ęquale EG, erit & EG rationale; & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens EH. ergo EH eſt rationalis, & ipſi EF longitudine commenſurabilis. Rurſus quoniam medium eſt CD, & ipſi eſt ęquale HI; erit & HI medium; & ad rationalem EF, hoc eſt HG applicatum eſt, latitudinem faciens HK. quare HK eſt rationalis, & incommenſurabilis ipſi EF longitudine. quòd cum medium ſit CD, rationale autem AB; erit AB ipſi CD incommẽſurabile. ergo & EG incõmenſurabile eſt ipſi HI. vt autem EG ad HI, ita eſt recta linea EH ad HK. ergo EH ipſi HK longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt vtręq; rationales. quare EH HK rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id ex binis nominibns eſt EK, diuiſa ad pũctum H. & quoniam maius eſt AB, quàm CD, æquale autem AB ipſi EG, & CD ipſi HI; erit & EG, quàm HI maius. ergo & EH maior eſt quàm HK. vel igitur EH plus poteſt, quàm HK quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. poſsit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabiis longitudine, & ſit maior HE expoſitę rationali EF commenſurabilis. ergo EK ex binis nominibus eſt prima, atque eſt EF rationalis. Si autem ſpacium cõtineatur rationali, & ex binis nominibus prima, recta linea ſpacium potens ex binis nominibus eſt. ergo quæ poteſt ſpacium EI eſt ex binis nominibus. quare & ea quæ poteſt ſpacium AD. Sed EH plus poſsit, quàm HK, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & ſit maior EH expoſitę rationali EF commenſurabilis longitudine. ergo EK ex binis nominibus eſt quarta, & eſt EF rationalis. ſi autem ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quarta, recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ maior appellatur. potens igitur ſpacium EI maior eſt. ergo & potẽs ſpacium AD maior. ſit deinde ſpacium AB minus, quàm CD. erit & EG quàm HI minus; & ob id recta linea EH minor, quàm recta HK. vel igitur KH plus poteſt, quàm HE quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. poſsit primum quadrato rectæ lineæ commenſurabilis longitudine, & ſit minor EH commenſurabils expoſitæ rationali EF longitudine. ergo EK ex binis nominibus eſt ſecunda: rationalis autem EF. quod ſi ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus ſecunda, recta linea ſpacium potens eſt ex binis medijs

21. huius.

23. huius.

1. sexti.

10. huius.

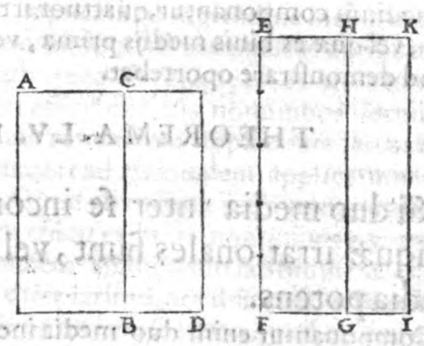
1. Diffi. ſecũdarum.

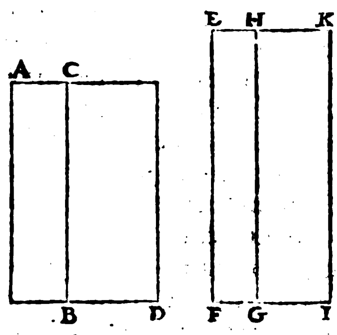
55. huius.

4. diffi.

58. huius.

56. huius.



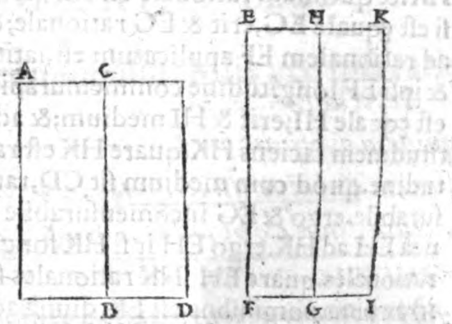


primam:

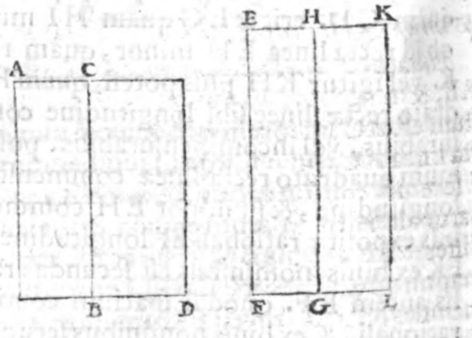
prima . potens igitur ſpacium EI prima eſt ex binis medijs.ergo & potẽs ſpaciũ A D.Sed KH plus poſsit,quàm HE quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis;ſitq; minor EH expoſitæ rationali EF commenſurabilis longitudine.quare EK ex binis nominibus eſt quinta;atque eſt rationalis EF. ſi autem ſpacium con-
59.huius. tineatur rationali,& ex binis nominibus quinta, quæ ſpacium poteſt recta linea rationale ac medium potẽs eſt.quæ igitur poteſt ſpacium EI rationale & medium potens eſt;ideoq; rationale & mediũ potẽs eſt quæ põt ſpaciũ AD.Si igitur rationale, & medium componantur,quattuor irrationales fiunt, vel ea quæ ex binis nominibus , vel quæ ex binis medijs prima , vel maior , vel rationale , ac medium potens. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA LV. PROPOSITIO LXXIII.

Si duo media inter ſe incommenſurabilia componantur duæ reliquæ irrationales fiunt , vel ex binis medijs ſecunda , vel bina media potens.



Componantur enim duo media incõmenſurabilia inter ſe AB CD. Dico rectam lineam , quæ ſpaciũ AD poteſt vel ex binis medijs ſecundam eſſe , vel bina media potentem . ſpacium enim AB vel maius eſt , quàm CD , vel minus.ſit primum maius; exponaturq; rationalis EF: & ad EF ſpacio quidem AB æquale applicetur EG,latitudinem faciens EH.ipſi vero CD æquale applicetur HI, latitudinem faciens HK. & quoniam medium eſt vtrumq; ipſorũ AB CD,erit & vtrũq; EG HI medium,& ad rationalem EF ap plicata ſunt, quæ latitudinem faciunt E
23.huius. H HK.ergo vtraque EH HK rationalis eſt,& ipſi EF longitudine incommenſurabilis.quòd cum AB incõmenſurabile ſit ipſi CD; ſitq; AB quidem æquale EG; CD
1.ſexti. vero ipſi HI:erit & EG ipſi HI incõmẽſurabile.ſed vt EG ad HI , ita eſt EH ad HK.
10.huius. incommenſurabilis igitur eſt EH ipſi HK lõgitudine:ideoq; EH HK rationales ſũt
37.huius. potentia ſolum commenſurabiles. quare ex binis nominibus eſt EK.Itaque vel EH plus poteſt,quàm HK quadrato rectę lineę ſibi commenſurabilis longitudine , vel incommenſurabilis.poſsit primum quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine ; & neutra ipſarum EH HK longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali EF.ergo EK ex binis nominibus eſt tertia , & eſt FE rationalis. ſi autem ſpacium contineatur rationali , & ex binis
57. huius. nominibus tertia,recta linea ſpaciũ potens eſt ex binis medijs ſecũda.ergo quę poteſt ſpacium EI,hoc eſt AD eſt ex binis medijs ſecunda. ſed EH plus poſsit quàm HK quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine ; & vtraque ipſarum EH HK longitudine incõmenſurabilis eſt expoſitę rationali EF. quare EK ſexta eſt ex binis nominibus. At ſi ſpacium contineatur rationali , &
60.huius. ex binis nominibus ſexta , quæ ſpacium poteſt recta linea eſt bina media potẽs. ergo quę poteſt ſpacium AD bina me-



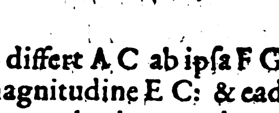
dia

dia potens est. Similiter demonstrabimus & si AB sit minus, quàm CD, rectam lineam, quæ spacium potest AD, vel ex binis medijs secundam esse, vel rationale, ac medium potentem. si igitur duo media inter se incommensurabilia componantur reliquæ duæ irrationales fiunt, vel ex binis medijs secunda, vel bina media potens. quod demonstrandum fuit.

Quæ ex binis nominibus & quæ post ipsam sunt, irrationales neq; mediæ, neque inter se eædem sunt. quadratum enim, quod fit à media, ad rationalem applicatum
latitudinem efficit rationalem, et ei ad quam applicatur, longitudine incom mensu 23. huius.
rabilem. quòd autem fit ab ea, quæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum 61. huius.
latitudinem efficit ex binis nominibus primam. quod ab ea, quę est ex binis medijs 62. huius.
prima ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus secundā.
Quod ab ea, quæ est ex binis medijs secunda ad rationalem applicatum latitudinē 63. huius.
efficit ex binis nominibus tertiam. Quod à maiori ad rationalem applicatum lati- 64. huius.
tudinem efficit ex binis nominibus quartam. Quòd ab ea, quæ rationale, ac mediū 65 huius.
potest ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus quintam.
Quod ab ea, quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem efficit 66. huius.
ex binis nominibus sextam. Quoniam igitur dictę latitudines differunt et à prima & inter se se: à prima quidem, quòd rationalis sit; inter se se vero, quod ordine non sint eædem, constat & ipsas irrationales inter se differentes esse.

SCHOLIVM.

Septem sunt senarij, de quibus hactenus dictum est. eorum primus quidem ostendit ortum linearum irrationalium: secundus autem diuisionem, nempe quòd ad vnum dumtaxat punctum diuiduntur. tertius earum, quæ ex binis nominibus inuentionem, videlicet primę, secundę, tertiæ, quartæ, quintæ, & sextę. deinceps sequitur quartus senarius, ostendens quomodo hæ lineæ inter se differant. namque vsus ijs, quæ ex binis nominibus, ostendit differentiam sex irrationalium. Quintum, & sextum exposuit, ostendens in quinto quidem applicationes quadratorum, quę ex irrationalibus, videlicet quales irrationales faciant, latitudines applicatorū spaciorū. In sexto aūt quomodo irrationalibus commensurabiles eiusdem speciei sint. Rursus in septimo manifeste ostendit differentiam ipsarum. Apparet autem & in his irrationalibus arithmetica analogia: & quæ media sumitur proportionalis inter portiones cuiusque lineę irrationalis iuxta arithmeticam analogiam, & ipsa eiusdem speciei cū ijs, inter quarū portiones media interijcitur. itaq primum arithmeticam medietatem in his esse, sic apparet.



Ponatur enim exempli gratia ex binis nominibus AB, & in nomina ad punctum C diuidatur. manifestum est AC maiorem esse, quàm CB. auferatur à recta linea AC ipsi BC æqualis AD, & CD bifariam in E secetur. constat igitur AE ipsi EB æqualem esse. ponatur alterutri ipsarum ęqualis FG, manifestum est quo differt AC ab ipsa FG, eo
differre EB ab ipsa BC; etenim AC ab ipsa FG differt magnitudine EC: & eadem magnitudine differt FG ab ipsa BC, quod est arithmeticæ analogię proprium. cō-
mensurabilis autem est FG ipsi AB; est enim eius dimidię æqualis. ergo FG ex bi- 67. huius.
nis nominibus est. similiter ostendetur & in alijs.

PRIN-

PRINCIPIVM SENARIORVM PER APHÆRESIM HOC EST Per detractionem.

THEOREMA LVI. PROPOSITIO LXXIIII.

Si à rationali rationalis auferatur potentia solum commensurabilis existẽs toti, reliqua irrationalis est. vocetur autem apotome.

A rationali enim AB rationalis auferatur BC, potentia solum cõmensurabilis existens toti. Dico reliquã AC irrationalem esse, quæ vocatur apotome. Quoniã enim incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine; atq; est vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad id
A quod continetur AB BC: erit quadratũ ex AB incommensurabile ei, quod AB BC continetur. sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt quadrata ex AB BC: ei vero, quod continetur AB BC, commensurabile est quod bis AB BC contine-
B tur. quadrata igitur ex AB BC ei, quod bis continetur AB BC sunt incommensu-
C rabilia. ergo reliquo, nempe quadrato ex AC incommensurabilia sunt quadrata ex
D AB BC; quoniam quadrata ex AB BC æqualia sunt ei, quod bis AB BC contine-
E tur vnà cum quadrato ex AC. rationalia autem sunt quadrata ex AB BC. ergo recta linea AC est irrationalis. vocetur autem apotome.

F. C. COMMENTARIVS.

A Atque est vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad id, quod continetur AB BC] *Ex 1. sexti, vel ex lemmate, quod 23 huius inseruit.*

B Quadrata igitur ex AB BC ei, quod bis continetur AB BC sunt incommensurabilia] *Ex demonstratis à nobis ad 14 huius.*

C Ergo reliquo, nempe quadrato ex AC iucommensurabilia sunt quadrata ex AB BC] *Ex demonstratis ad 17 huius.*

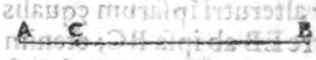
D Quoniam quadrata ex AB BC æqualia sunt ei, quod bis AB BC cõtinetur, vnà cum quadrato ex AC] *Ex septima 2 libri.*

E Ergo recta linea AC est irrationalis] *Quoniam enim quadrata ex AB BC incommensurabilia sunt quadrato ex AC, & sunt quadrata ex AB BC rationalia, sequitur quadratum ex AC irrationale esse, ideoque ex 11 diffinitione rectam lineam AC esse irrationalem.*

Sit recta linea AB 2, BC ℞ 3. erit AC 2 minus ℞ 3. respondet autem tota linea AB maiori nomini eius, quae est ex binis nomibus, de qua in 37 huius agitur; & BC respondet minori. atque est AC reliqua portio maioris nominis, nempe minori nomine ex eo detracto.

THEOREMA LVII. PROPOSITIO LXXV.

Si à media media auferatur potentia solum commensurabilis existens toti, quæ cum tota rationale contineat; reliqua irrationalis est. vocetur autem mediæ apotome prima.



A media enim AB auferatur media BC, potentia solum commensurabilis existens ipsi AB, & cum ea rationale faciens, videlicet quod AB BC continetur. Dico reliquam AC irrationalẽ esse. vocetur autem mediæ apotome prima. Quoniam enim AB BC mediæ sunt,
A erunt & quæ ex AB BC quadrata media. rationale autem est quod bis continetur

AB BC. quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur. ergo & reliquo, videlicet quadrato ex AC incõmensurabile est id, quod bis AB BC continetur, quoniam si tota magnitudo vni componentium sit incommensurabilis, & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt. Irrationalis igitur est AC. voceturq; mediæ apotome prima. B C D

F. C. COMMENTARIVS.

Rationale autem est, quod bis continetur AB BC] *Ponitur enim rationale, quod semel AB BC continetur.* A

Ergo & reliquo, videlicet quadrato ex AC incommensurabile est id, quod bis AB BC continetur] *Namque ex 7 secundi quadrata ex AB BC sunt aequalia ei, quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato, quod fit ex AC.* B

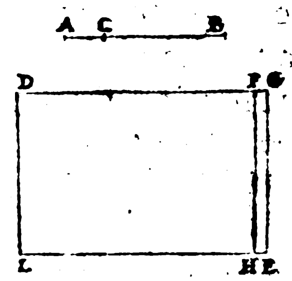
Quoniam si tota magnitudo vni componentium sit incommensurabilis] *Ex 17 huius.* C

Irrationalis igitur est AC] *Nam cum id, quod bis AB BC continetur sit rationale, & incõmensurabile quadrato ex AC, erit quadratum ex AC irrationale: idcircoq; recta linea AC irrationalis ex 11. diffinitione.* D

Sit recta linea AB ℞℞ 54, BC ℞℞ 24. erit AC ℞℞ 54 minus ℞℞ 24. respondet autem tota linea AB maiori nomini eius, quae est ex binis medijs prima, de qua in 38 huius, & BC minori, est igitur AC reliqua portio maioris nominis, minori ex eo detracto.

THEOREMA LVIII. PROPOSITIO. LXXVI.

Si à media media auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti, quæ cum tota medium contineat; & reliqua irrationalis est. vocetur autem mediæ apotome secunda.



A media enim AB auferatur media BC potẽtia solum commensurabilis existens toti AB, & cum ea medium continens, videlicet quod continetur AB BC. Dico reliquam AC irrationalem esse. vocetur autem mediæ apotome secunda. exponatur enim rationalis DI: & quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum DE ad ipsam DI applicetur, latitudinem faciens DG: ei vero quod bis AB BC continetur æquale parallelogrammum DH ad eandem DI applicetur, latitudinem faciens DF. reliquum igitur FE est æquale quadrato ex AC. & quoniam media sunt, quæ ex AB BC quadrata; erit & parallelogrammum DE medium. & ad rationalem DI applicatum est, latitudinem faciens DG. ergo DG est rationalis, & ipsi DI longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam medium est quod AB BC continetur, erit & quod bis continetur AB BC medium: atque est æquale parallelogrammo DH. ergo & DH est medium, & ad rationalem DI applicatum est latitudinem faciens DF. rationalis igitur est DF, & ipsi DI longitudine incommensurabilis. & quoniam AB BC potentia solum cõmensurabiles sunt, erit AB ipsi BC incommensurabilis longitudine. ergo quadratum ex AB incommensurabile est ei, quod AB BC continetur. sed quadrato quidẽ ex AB commensurabilia sunt quæ ex AB BC quadrata; ei vero, quod AB BC continetur commensurabile est id, quod bis continetur AB BC. quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur. parallelogrammum autem DE est æquale quadratis ex AB BC; & parallelogrammum DH æquale est ei, quod bis continetur AB BC. ergo DE ipsi DH est incommensurabile. sed vt DE A B C D E Coroll. 24. huius. F

Vu ad DH

1. sexti. ad DH, ita recta linea GD ad DF. incommensurabilis igitur est GD ipsi DF longi-
10. huius. tudine. & sunt vtraque rationales. quare GD DF rationales sunt, potentia solum cō
G mensurabiles. ergo FG apotome est; & DI est rationalis. quod autem rationali, & ir
H rationali continetur rectangulum irrationale est, & ipsum potens est irrationalis.
K sed recta linea AC potest FE parallelogrammum. ergo AC est irrationalis. vocetur autem mediæ apotome secunda.

F. C. COMMENTARIVS.

A Reliquum igitur FE est æquale quadrato ex AC] *Ex 7 secundi libri.*

B Ergo DG est irrationalis, & ipsi DI longitudine incommensurabilis] *Ex 23 huius.*

C Erit & quod bis continetur AB BC medium] *Ex corolario 24 huius.*

D Ergo quadratum ex AB incommensurabile est ei, quod AB BC continetur] *Est enim vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad rectangulum ABC. & cum AB ipsi BC longitudine sit incommensurabilis, erit & quadratum ex AB incommensurabile ei, quod AB BC continetur; ex 10 huius.* (Lemma. ad 23. huius.)

E Sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt quæ ex AB BC quadrata] *Nam rectae lineae AB BC potentia commensurabiles ponuntur.*

F Quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur] *Ex demonstratis ad 17 huius.*

G Ergo FG apotome est] *Ex 74 huius.*

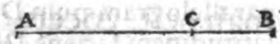
H Quod autem rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale est] *Ex scholio ad 39 huius apposito, quare sequitur parallelogrammum FE irrationale esse.*

K Ergo AC est irrationalis] *Ex 11 diffinitione.*

Sit AB ℞℞ 18, *BC* ℞℞ 8. *erit AC* ℞℞ 18 *minus* ℞℞ 8. *respondet autem ipsa AB maiori nomini eius, quae est ex binis medijs secunda; & BC respondet minori. de qua in 39 huius.*

THEOREMA LIX. PROPOSITIO LXXVII.

Si à recta linea recta linea auferatur, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium; reliqua irrationalis est. vocetur autem minor.



A recta linea AB auferatur recta BC potentia incommensurabilis existens toti, faciésq; cum tota AB compositum quidem ex ipsarū AB CB quadratis rationale; quod autem bis AB BC continetur medium. Dico reliquam AC irrationalem esse, quę vocatur minor. Quoniam enim cō positum quidem ex ipsarum AB BC quadratis rationale est: quod autem bis AB BC continerur medium, erunt AB BC quadrata incommensurabilia ei, quod bis
A continetur AB BC. ergo per conuersionem rationis quadrata ex AB BC quadra-
B to ex AC sunt incommensurabilia. sed quadrata ex AB BC rationalia sunt. irratio
C nale igitur est quadratum ex AC; ideoq; recta linea AC est irrationalis. vocetur autem minor.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo per conuersionem rationis quadrata ex AB BC quadrato ex AC sunt incommensurabilia] *Ex demonstratis ad 17 huius.*

B Irrationale igitur est quadratum ex AC] *Ex 10 diffinitione.*

C Ideoq; recta linea AC est irrationalis] *Ex vndecima diffinitione.*

Sit AB ℞ *V.* 32 *plus* ℞ 704, *BC* ℞ *V.* 32 *minus* ℞ 704. *erit AC* ℞ *V.* 32 *plus* ℞ 704 *minus* ℞ *V.* 32 *minus* ℞ 704. *respondet autem AB maiori nomini eius, quae dicitur maior, & BC respondit minori nomini eiusdem; de qua in 40 huius.*

THEO-

THEOREMA LX. PROPOSITIO. LXXVIII.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis bis continetur rationale; reliqua irrationalis est; voceturque cum rationali medium totum efficiens.

A recta enim linea AB recta linea BC auferatur, potentia incommensurabilis existens toti AB, faciensq; compositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis medium; quod autem bis AB BC continetur, rationale. Dico reliquam AC irrationalem esse: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

Quoniam enim compositum ex ipsarum AB BC quadratis medium est: quod autem bis continetur AB BC rationale; erunt ex AB BC quadrata incommensurabilia ei, quod bis AB BC continetur. & reliquum igitur quadratum ex AC incommensurabile est ei, quod bis continetur AB BC. atque est quod bis continetur AB BC rationale. ergo quadratum ex AC irrationale est: & ob id recta linea AC irrationalis. vocetur aût cû rationali medium totum efficiës. 17 huius 10. diff.

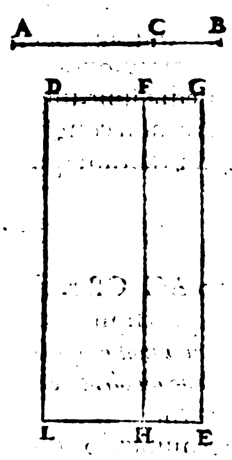
F. C. COMMENTARIUS.

Sit AB ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 4 $\frac{1}{2}$: BC ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 4 $\frac{1}{2}$, erit AC ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 4 $\frac{1}{2}$ minus ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ .minus ℞ 4 $\frac{1}{2}$, respondetq; AB maiori nomini eius, quae vocatur rationale, ac medium potens, & BC respondet minori. de qua in 41 huius.

THEOREMA LXI. PROPOSITIO. LXXIX.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti: & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis bis cõtinetur medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum; reliqua irrationalis est. vocetur autem cum medio medium totum efficiës.

A recta enim linea AB, recta linea BC auferatur, potẽtia incommensurabilis existens toti AB, faciensq; cõpositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis mediû; quod autem bis AB BC continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum. Dico reliquam AC irrationalem esse. vocetur autem cum medio medium totum efficiens. exponatur enim rationalis DI: & quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum DE ad ipsam DI applicetur, latitudinem faciens DG. ei vero, quod bis continetur AB, BC æquale auferatur DH, latitudinem faciens DF. ergo reliquum FE est æquale quadrato ex AC. & ob id recta linea AC ipsum FE potest. itaque quoniam compositum ex ipsarum AB BC quadratis medium est, & parallelogrammo DE æquale, erit ipsum DE medium:



& ad rationalẽ DI applicatû est, latitudinẽ faciẽs DG. quare DG est rationalis, & ipsi DI longitudine incõmensurabilis. Rursus qm̃ id quod bis AB BC cõtinetur mediû est, & æquale parallelogrãmo DH, erit DH mediû, & ad rationalẽ DI applicatû 23. huius.

25.huius: eſt, latitudinem faciens DF. ergo DF eſt rationalis, ipſiq; DI incõmenſurabilis longitudine. Quòd cum quadrata ex A B BC incommenſurabilia ſint ei, quod bis AB
1.ſexti. BC continetur, & parallelogrãmum D E ipſi D H eſt incommenſurabile. vt autem
10.huius. DE ad DH, ita eſt recta linea DG ad ipſam DF. incõmenſurabilis igitur eſt DG ipſi DF, & ſunt vtreque rationales. ergo GD DF rationales ſunt, potentia ſolum cõmenſurabiles.
A apotome igitur eſt FG: & FH eſt rationalis. quod autem rationali, & apo-
B toma continetur rectangulum irrationale eſt, ipſumq; potens eſt irrationalis. ſed A
C C poteſt parallelogrammum FE. ergo AC irrationalis eſt. vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

F. C. COMMENTARIVS.

A Apotome igitur eſt F G] *Ex 74 huius.*

B Quod autem rationali, & apotoma continetur rectangulum irrationale eſt] *Etenim in ſcholio ad 39 huius appoſito demonſtratur, quod rationali, & irrationali continetur irrationale eſſe.*

C Ipſumq; potens eſt irrationalis] *Ex 11 diffinitione.*

Sit AB ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ plus 3, BC ℞ V. ℞ 13 minus 3. erit AC ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ plus 3 minus ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ minus 3. & reſpondet AB maior i nomini eius, quae uocatur bina media potens; & BC reſpondet minori, de qua in 42 huius.

THEOREMA LXII. PROPOSITIO LXXX.

Apotomæ vna tantum congruit recta linea potentia ſolum cõmenſurabilis exiſtens toti.

A Sit apotome A B: congruens autem ipſi ſit BC. ergo AC CB rationales ſunt potẽtia ſolum commenſurabiles. Dico ipſi AB alteram non congruere rationalem, quæ potentia ſolum ſit comenſurabilis toti. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. ergo AD DB rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & quoniam quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt id, quod bis continetur AD DB, eo & quadrata ex AC
B CB excedunt quod bis AC CB continetur; vtraque enim excedunt eodem quadra-
C to, quod fit ex AB. & permutando quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedet id, quod bis AC
D CB continetur. ſed quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali; etenim vtraque rectarum linearum rationalis eſt. quod igitur bis continetur AD
E DB excedit id, quod bis AC CB continetur rationali. quod fieri non poteſt; vtraq;
F enim media ſunt. medium autem medium non ſuperat rationali. ergo rectæ lineæ AB altera non congruit rationalis, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti. vna igitur tantum ipſi congruit.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo AC CB rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles] *Ex 74 huius.*

B Vtraque enim excedunt eodem quadrato, quod fit ex AB] *Quadrata enim ex AD DB aequalia ſunt ei, quod bis AD DB continetur vnà cum quadrato ex AB, ex 7 ſecundi; & eadem ratione quadrata ex AC CB ſunt aequalia ei, quod bis continetur AC CB vnà cum quadrato ex AB.*

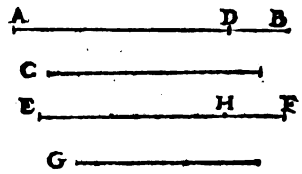
C Et permutando quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB] *Hoc ſequenti lemmate demonſtrabimus.*

LEMMA

LEMMA.

Sint quattuor magnitudines AB C EF G; & AB excedat ipsam C eodem excessu, quo EF excedit G. Dico & permutando AB eodem excessu excedere ipsam EF, vel excedi ab ea, quo C excedit G, vel ab ea exceditur.

Sit enim DB excessus, quo AB excedit C: & HF excessus quo EF excedit G. erunt DB HF aequales; itemq; aequales inter se AD C; & EH G. ergo AD excedit EH, vel ab ea exceditur eodem excessu, quo C ipsam G. & additis vtrinque aequalibus DB HF, excedet AB ipsam EF, vel ab ea excedetur eodem excessu, quo AD ipsam EH, hoc est quo C ipsam G. atque illud est, quod demonstrare oportebat.



Sed quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali] *Rationale enim non superat rationale, nisi rationali. quod nos ad 27 huius demonstrauimus.* D

Vtraque enim media sunt] *Nam quod rationalibus potentia solū commensurabilibus continetur rectangulum irrationale est, quod medium appellatur, ex 22 huius. mediū igitur est id, quod continetur AD DB: & ideo medium quod bis continetur AD DB, vt pote eius duplum ex corollario 24 huius. eadem ratione & medium est, quod bis AC CB continetur.* E

Medium autem medium non superat rationali] *Ex 27 huius.* F

THEOREMA LXIII. PROPOSITIO. LXXXI.

Mediæ apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota rationale continens.

Sit enim media apotome prima AB, & ipsi AB cōgruat BC. ergo AC CB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quę rationale continent. Dico ipsi AB alteram non congrue re mediam, quæ potentia solum sit commensurabilis toti, & cum tota medium contineat. si enim fieri potest, congruat BD. ergo AD DB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent, quod AD DB continetur. & quoniam quo excessu quadrata ex AD DB excedunt id, quod bis continetur AD DB, eodē & quadrata ex AC CB excedunt quod bis AC CB continetur; eodem enim rursus excedunt quadrato ex AB; & permutando quo excessu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur. sed quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur rationali: vtraque enim rationalia sunt. ergo & quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali. quod fieri nō potest; vtraque enim sunt media. medium autem medium non superat rationali: quare mediæ apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea media, quę potentia solum toti sit commēsurabilis, & cum tota rationale contineat.

75 huius.

7. secundi.

Ex antecedē ti lemmate.

Ex demonstratis ad 17. huius.

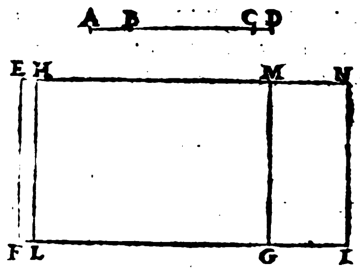
27. huius.

THEOREMA LXIIII. PROPOSITIO LXXXII.

Medię apotomæ secundę vna tantum congruit recta linea, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota medium continens.

Sit mediæ apotome secunda AB, & ipsi AB congruat BC. ergo AC CB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, mediumq; continentes ACB. Dico ipsi AB alteram 76. huius.

alteram non congruere mediam quæ potentia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. quare AD DB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium ADB continent: & exponatur rationalis EF: quadratiſq; ex AC CB æquale parallelogrammum EG ad ipſam EF applicetur, latitudinem faciens EM, & ei, quod bis continetur AC CB æquale auferatur parallelogrammum HG, latitudinem faciens HM. reliquum igitur EL eſt ęquale ei, quod fit ex AB quadrato. ergo AB ipſum EL poteſt. Rurſus quadratis ex AD DB æquale parallelogrammum EI ad ipſam EF applicetur, latitudinem faciens EN. eſt autem & EL ęquale quadrato ex AB. reliquum igitur HI eſt æquale ei, quod bis AD DB continetur. & quoniã medię ſunt AC CB, erunt & quadrata ex AC CB media, ſuntq; æqualia parallelogrammo EG. quare EG eſt medium, & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens EM. ergo EM eſt rationalis, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis. rurſus quoniam mediũ eſt quod continetur AC CB, & quod bis AC CB continetur medium erit. atque eſt ęquale parallelogrammo HG. ergo & HG eſt medium, & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens HM. rationalis igitur eſt HM, & ipſi EF incommenſurabilis longitudine. & quoniam AC CB potentia ſolum ſunt commenſurabiles, erit AC incommenſurabilis ipſi CB longitudine. vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad id, quod continetur AC CB. incommenſurabile igitur eſt & quadratum ex AC ei, quod AC CB continetur. ſed quadrato quidem ex AC commenſurabilia ſunt quadrata ex AC CB; ei vero, quod continetur AC CB commenſurabile eſt, quod bis AC CB continetur. ergo quadrata ex AC CB incommẽſurabilia ſunt ei, quod bis AC CB continetur. atque eſt quadratis ex AC CB æquale parallelogrammum EG; ei vero, quod bis AC CB continetur æquale ipſum HG. ergo EG ipſi GH eſt incommenſurabile. ſed vt EG ad GH, ita eſt recta linea EM ad ipſam MH. quare EM ipſi MH eſt incommenſurabilis longitudine: & ſunt vtræque rationales. ergo EM MH rationales ſunt, potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea apotome eſt EH; & ipſi congruens HM. ſimiliter demonſtrabimus & HN ipſi congruere. apotomæ igitur alia, atque alia congruit recta linea, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti. quod fieri non poteſt. ergo medię apotomę ſecundæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat.



Margin notes: 23. huius. — 23. huius. — Ex lemm. ad 23. huius. — Ex demonſtratis in 14. huius. — 1. ſexti. — 10. huius. — 74. huius. — Ex 80. huius

THEOREMA LXV. PROPOSITIO LXXXIII.

Minori vna tantum congruit recta linea, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod aũt bis ipſis continetur mediũ.

77. huius. Sit minor AB, & ipſi AB congruat BC. ergo AC CB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale: quod autem bis ipſis continetur medium. Dico ipſi AB alteram non congruere rectam lineam, quę eadem faciat. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. ergo AD DB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes cõpoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale: quod autem bis ipſis continetur medium. & quoniam quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem

Ex lemmate ad 80. huius

CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur; quadrata autem ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali; vtraque enim rationalia sunt: & quod bis continetur AD DB id, quod bis AC CB continetur, rationali excedet. quod fieri non potest. etenim vtraque sunt media. ergo minori vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cũ tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod vero bis ipsis continetur medium. 27 huius.

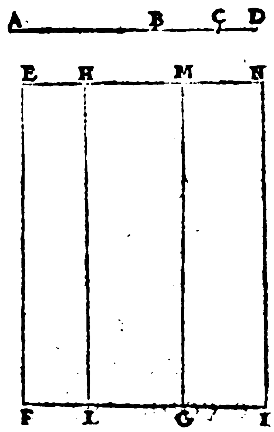
THEOREMA LXVI. PROPOSITIO LXXXIIII.

Ei, quæ cũ rationali mediũ totũ facit, vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale.

Sit cum rationali medium totum faciens AB, congruens autem ipsi BC. ergo AC CB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum AC CB quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale. Dico ipsi AB alterã non congruere eadem facientem. si enim fieri potest, congruat. BD. ergo AD DB potẽtia sunt incõmensurabiles, facientes cõpositum quidem ex ipsarũ AD DB quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale. Quoniam igitur quo excessu, quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur: quod autem bis continetur AD DB excedit id quod bis AC CB continetur rationali; etenim vtraque rationalia sunt: & quadrata ex AD DB rationali excedẽt quadrata ex AC CB. quod fieri non potest, cum vtraque sint media. non igitur ipsi AB altera congruit, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis cõtinetur rationale. quare ei, quæ cum rationali medium totum facit, vna tantum congruet recta linea. 78 huius.

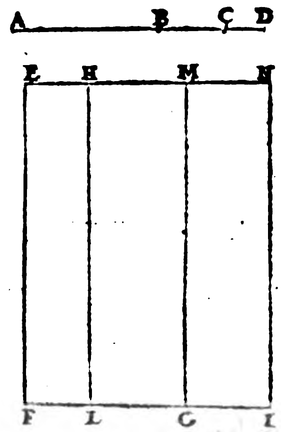
THEOREMA LXVII. PROPOSITIO. LXXXV.

Ei, quę cum medio medium totum facit, vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis ipsis continetur, medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.



Sit cum medio medium totum faciens AB, ipsi vero congruens BC. ergo AC CB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur medium, & adhuc incõmensurabile composito ex quadratis ipsarum. Dico ipsi AB alteram non congruere potentia incommensurabilem toti, & cum tota facientem ea, quæ proposita sunt. si enim fieri potest, congruat BD, ita vt AD DB potentia incommensu- 79 huius.

rabiles



rabiles sint, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem ipsis continetur medium, & incomensurabile composito ex quadratis ipsarum. & exponatur rationalis EF; & quadratis ipsarum AC CB æquale parallelogrammum EG ad ipsam EF applicetur, latitudinē facens EM: ei vero, quod bis continetur AC CB ęquale parallelogrammum auferatur HG, latitudinem faciens HM. reliquum igitur quadratum ex AB est æquale parallelogrammo EL. ergō AB ipsum EL pōt. rursus quadratis ex AD DB ęquale parallelogrammum EI ad ipsam EF applicetur, latitudinem faciens EN. est autem & quadratum ex AB æquale parallelogrammo EL. ergo reliquum, quod bis AD DB continetur ipsi HI est quale. & quoniam compositum ex quadratis AC CB medium est, & æquale parallelogrāmo EG, erit & EG medium, quod ad rationalem **EF applicatum est, latitudinem**
23. huius. faciens EM. quare EM est rationalis, & ipsi EF longitudine incommēsurabilis. Rursus quoniam quod bis AC CB continetur est medium, & æquale ipsi HG, erit & HG medium, & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens HM. rationalis igitur est HM, & ipsi EF incommensurabilis longitudine. quòd cum quadrata ex AC CB incommensurabilia sint ei, quod bis AC CB continetur, erit & EC in-
10. huius. commensurabile ipsi GH; ideoq; recta linea EM rectæ MH longitudine est incommensurabilis. & sunt vtræque rationales. cum igitur EM MH rationales sint, potē-
74. huius. tia solum commensurabiles, recta linea EH apotome est, & ipsi congruens HM. similiter demonstrabimus EH rursus apotomen esse, ipsiq; congruentem HN. ergo apotomæ alia, atque alia congruit rationalis, potentia solum commensurabilis exi-
80. huius. stens toti. quod fieri non posse ostensum est. non igitur ipsi AB altera congruet recta linea. quare vna tantum congruet, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.

DIFFINITIONES TERTIAE.

1 Exposita rationali, & apotoma, si quidē tota plus possit, quàm congruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; sitq; tota expositæ rationali longitudine commensurabilis: vocetur apotome prima.

2 Si vero congruens sit longitudine commensurabilis expositæ rationali, & tota plus possit, quàm congruens quadrato rectę lineæ sibi cōmensurabilis longitudine; vocetur apotome secunda.

3 Quòd si neutra sit longitudine commensurabilis expositę rationali, & tota plus possit, quàm congruens quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine; dicatur apotome tertia.

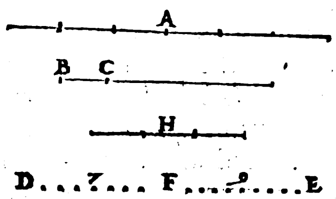
4 Rursus si tota plus possit, quàm congruens quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, si quidem tota sit longitudine commensurabilis expositæ rationali; vocetur apotome quarta.

Si vero congruens expositę rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur apotome quinta. 5

Quòd si neutra, dicatur apotome sexta. 6

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIO LXXXVI.

Inuenire primam apotomen.



Exponatur rationalis A; & ipsi A longitudine commensurabilis sit BG. ergo & BG est rationalis. & exponantur duo quadrati numeri DE EF, quorum excessus DF nō sit quadratus. neque igitur ED ad DF proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & fiat vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC. commēsurabile igitur est quadratum ex BG quadrato ex GC; rationale autē est quadratū ex BC. ergo & quadratum ex GC est rationale; ideoq; recta linea GC rationalis est. & quoniam ED ad DF proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine; & sunt vtræque rationales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ob id BC apotome est. Dico & primam esse. sit enim quadratum ex H id, quo quadratū ex BG plus potest, quàm quadratum ex GC. & quoniam est vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC; erit per conuersionem rationis vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex H. sed DE ad EF proportionem habet, quā quadratus numerus ad quadratum numerum; vterque enim quadratus est. ergo & quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est BG ipsi H lōgitudine. & BG plus potest, quàm GC quadrato ex H. ergo BG plus poterit, quàm GC quadrato rectæ lineę sibi longitudine commensurabilis. atque est tota BG expositę rationali A commensurabilis lōgitudine. ergo BG apotome est prima. Inuēta igitur est prima apotome. quod facere oportebat.

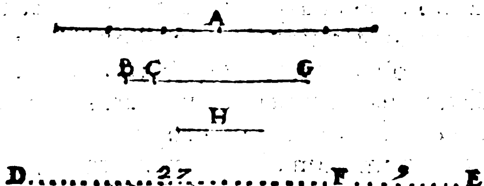
6. diffi. | Coroll. 1. lē. ad 30. huius | 9. huius. | 74. huius. | 9. huius. | 3. diffi. tertiarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, BG 4. numerus autem DE sit 16, EF 9. erit DF 7. si igitur fiat vt 16 ad 7, ita quadratum ex BG, videlicet 16 ad quadratum ex GC. erit quadratum ex GC 7, & recta linea GC ℞ 7. ergo BC est 4 minus ℞ 7, quae est apotome prima.

PROBLEMA XIX. PROPOSITIO LXXXVII.

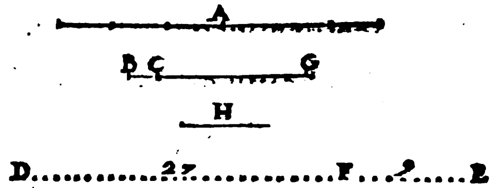
Inuenire secundam apotomen.



Exponatur rationalis A; & ipsi A longitudine commensurabilis sit CG. ergo CG est rationalis. & exponantur duo numeri quadrati DE EF, quorū excessus DF, nō sit quadratus fiatq; vt FD ad DE, ita quadratum ex CG ad quadratum ex GB. commensurabile igitur est quadratum ex CG quadrato ex GB. sed quadratum ex

6. Diffi. | Corol. 1. lemma ad 30. huius.

CG est rationale. ergo & rationale est quadratum ex GB; ac propterea ipsa GB est rationalis. & quoniam quadratum ex CG ad quadratum ex GB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum,



9. huius. erit CG ipsi GB incommensurabilis longitudine; & vtræque sunt rationales.

74. huius. ergo CG GB rationales sunt, potentia solum commensurabiles, & ob id BC est apotome. Dico & secundam esse. quo enim quadratum ex BG exeedit quadratum ex GC, sit ex H quadratum. Quoniam igitur est vt quadratum ex BG ad quadratum ex GC, ita DE numerus ad numerum DF, erit per conuersionem rationis, vt quadratum ex BG ad quadratum ex H, ita DE ad EF. atque est vterque ipsorum DE EF quadratus. quadratũ igitur ex BG ad quadratum ex H proportionem habet,

9. huius. quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoq; BG ipsi H longitudine est commensurabilis. & plus potest BG, quàm GC quadrato ex H. ergo BG plus potest, quàm GC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. atque est congruens CG expositæ rationali A commensurabilis longitudine. ergo BC apotome est secunda.

14. diff. inuenta igitur est secunda apotome BC. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, CG 3; numerus autem DE sit 36, & EF 9. erit DF 27. itaque fiat vt 27 ad 36, ita 9 ad alium, erit ad 12. ergo GB est ℞ 12, & BC ℞ 12 minus 3, quae est apotome secunda.

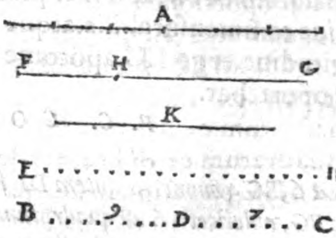
PROBLEMA XX. PROPOSITIO LXXXVIII.

Inuenire tertiam apotomen.

Exponatur rationalis A, & exponãtur tres numeri E BC CD non habentes inter se proportionem, quam numerus quadratus habet ad quadratum numerum; BC vero ad BD proportionem habeat, quam quadratus numerus

Corol. 6 huius. ad quadratum numerum: & fiat vt E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG: vt

6. huius. autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH. commẽsurabile igitur est quadratum ex A quadrato ex FG. atque est quadratum ex A rationale. ergo & rationale est quadratum ex FG; ac propterea recta linea FG est rationalis. & quoniam E ad BC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.



9. huius. in cõmensurabilis igitur est A ipsi FG longitudine. rursus qm̃ est vt BC ad CD, ita

6. huius. quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit quadratum ex FG quadrato ex GH commensurabile. rationale autẽ est quadratum ex FG. ergo & quadratũ ex GH est rationale, & ob id recta linea GH rationalis. quòd cum BC ad CD proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratũ ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam quadratus numerus ad

9. huius. quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine: & sunt vtræque rationales. ergo FG GH rationales sunt potentia solum commensu-

74. huius. rabiles; ac propterea apotome est FH. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt E

quidem

quidem ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG; vt autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit ex æquali vt E ad CD, ita quadratum ex A ad quadratum ex GH. sed E ad CD proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerũ. ergo A ipsi GH longitudine est incommensurabilis. neutra igitur ipsarum FG GH expositę rationali A commensurabilis est longitudine. quo autem quadratum ex FG plus potest, quàm quadratum ex GH, sit ex K quadratum. Quoniam igitur est vt BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit per conuersionem rationis vt CB ad BD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K. at CB ad BD proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est FG ipsi K longitudine: & plus potest FG, quàm GH quadrato ex K. ergo FG plus potest, quàm GH quadrato rectę lineę sibi commensurabilis longitudine. & neutra ipsarum FG GH longitudine commensurabilis est expositę rationali A: quare FH apotome est tertia. Inuenta igitur est tertia apotome FH. quod facere oportebat.

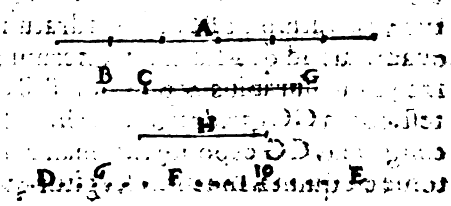
9. huius. 9. huius. 3. diffi.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, numerus E 18, BC 16, & CD 7, erit BD 9. fiat vt 18 ad 16, ita 36 ad alium, erit ad 32. ergo FG est ℞ 32. rursus fiat vt 16 ad 7, ita 32 ad alium. erit ad 14 quare GH est ℞ 14 & FH ℞ 32 minus ℞ 14, quae est apotome tertia.

PROBLEMA XXI. PROPOSITIO. LXXXIX.

Inuenire quartam apotomen.



Exponatur rationali A: & ipsi A longitudine commensurabilis sit BG. ergo BG est rationalis. exponantur præterea duo numeri DF FE, ita vt totus DE ad vtrumque ipsorum DF FE proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: & fiat vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC. commensurabile igitur est quadratum ex BG quadrato ex GC. est autem quadratum ex BG rationale. quare & rationale est quadratũ ex GC; ideoq; recta linea GC est rationalis. & quoniam DE ad EF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine, & sunt vtræque rationales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles. & ob id apotome est BC. Dico & quartam esse. Quo igitur plus potest BG, quàm GC, sit quadratum ex H. & quoniam est vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC; erit per conuersionem rationis vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex H. sed ED ad DF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi H longitudine: & plus potest BG, quàm GC quadrato ex H. ergo BG plus potest, quàm GC quadrato rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis. atque est tota BG commẽsurabilis expositę rationali A. ergo BC apotome est quarta. Inuenta igitur est quarta apotome BC. quod facere oportebat.

6. huius. 9. huius. 74. huius. 4. diffi. tertiarum.

Sit A 6, BG 4, numerus autem DF 6, & FE 10. itaq; si fiat vt 16 ad 10, ita 16 ad alium, erit GC ℞ 10 & BC 4 minus ℞ 10, quae est apotome quarta.

PROBLEMA XXII. PROPOSITIO XC.

Inuenire quintam apotomen.

Exponatur rationalis A, & ipsi A commensurabilis sit CG. ergo CG est rationalis. & exponantur duo numeri DF FE, ita vt DE ad vtrumque ipsorum DF FE proportionem rursus nō habeat, quā numerus quadratus ad quadratū numerum; fiatq; vt FE ad ED, ita quadratum ex CG ad quadratum ex GB. ergo quadratum ex CG commensurabile est quadrato ex GB. est autem quadratum ex CG rationale. ergo & rationale est quadratum ex GB: & idcirco recta linea GB est rationalis. & quoniam vt DE ad EF, ita est quadratum ex BG ad quadratum ex GC: & DE ad EF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine; & sunt vtræque rationales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles; & BC apotome est. Dico & quintam esse. Quo enim plus potest quadratum ex BG, quàm quadratum ex GC, sit quadratum ex H. Quoniam igitur quadratum ex BG ad quadratum ex GC est vt DE ad EF, erit per conuersionem rationis vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad id, quod fit ex H quadratū. sed ED ad DF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoq; recta linea BG ipsi H longitudine est incommensurabilis. & plus potest BG, quàm GC quadrato ex H. ergo BG plus potest, quàm GC quadrato rectæ lineę sibi incommensurabilis longitudine. atque est congruens CG expositę rationali A longitudine commensurabilis. quare BC apotome est quinta. Inuenta est igitur quinta apotome BC. quod facere oportebat.

6. huius.

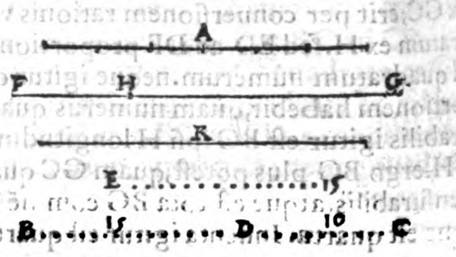
9. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, CG 3. numerus autem DF sit 25, FE 9: & fiat vt 9 ad 34, ita quadratum ex CG, quod est 9 ad alium, erit BG ℞ 34, & BC ℞ 34 minus 3, quę est apotome quinta.

PROBLEMA XXIII. PROPOSITIO. XCI.

Inuenire sextam apotomen.

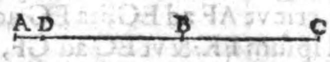


Exponatur rationalis A, & tres numeri E BC CD proportionem non habentes inter se, quā quadratus numerus ad quadratū numerū. & fiat vt E ad BC, ita quadratū ex A ad quadratū ex FG: ut aūt BC ad CD, ita quadratū ex FG ad quadratū ex GH. qm igitur est vt E ad BC ita, quadratū ex A ad quadratū ex FG; erit quadratum ex A quadrato ex FG commensurabile.

6. huius.

mensurabile. rationale autem est quadratum ex A. ergo & quadratum ex F G rationale erit; & ob id recta linea FG rationalis. & quoniam E ad BC proportionem nō habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommēsurabilis igitur est A ipsi FG longitudine. rursus quo- 9. huius.
niam est vt BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH, erit quadratum 6. huius.
ex FG commensurabile quadrato ex GH. est autem quadratum ex FG rationale. rationale igitur est & quadratum ex GH; & ipsa GH rationalis. quòd cū BC ad CD proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerū; neque quadratum ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo F G ipsi G H longitudine est incom- 9. huius.
mensurabilis: & sunt vtræque rationales. quare FG GH rationales sunt potentia solum commēsurabiles, & FH apotome est. Dico & sextam esse. Quoniam enim est 74. huius.
vt E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG; vt autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH: erit ex æquali vt E ad CD, ita quadratum ex A ad quadratum ex GH. sed E ad CD proportionem non habet, quā numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numetum. ergo A ipsi GH longitudine est incommensurabiiis: & neutra ipsarum FG GH expositæ rationali A commensurabilis est longitudine. quo igitur plus potest quadratum ex FG, quàm quadratum ex GH, sit quadratum ex K. & quoniam est vt BC ad CD, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H, erit per conuersionem rationis vt CB ad BD, ita quadratum ex F G ad quadratum ex K. at C B ad B D proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo incommensurabilis est FG ipsi K longitudi- 9 huius.
ne. & FG plus potest, quā GH quadrato ex K. plus igitur potest FG, quàm GH quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & neutra ipsarum FG GH est commensurabilis longitudine expositæ rationali A. ergo FH apotome est sexta. 6. tertiarum
Inuenta est igitur sexta apotome F H. sed & expeditius sex dictarum linearum in- diff.
uentionem ostendere licet.

Si enim oporteat inuenire primam apotomē, exponatur ex binis nominibus prima A C, cuius maius nomē sit AB. & ponatur B D ipsi BC æqualis. ergo AB BC, hoc est AB BD rationales sūt,



potentia solum commensurabiles: & AB plus potest, quàm BC, hoc est quàm B D quadrato rectę lineæ sibi longitudine commensurabilis: & AB est commensurabilis lōgitudine expositę rationali. apotome igitur prima est AD. similiter & reliquas apotomas inueniemus, eas, quæ ex binis nominibus eiusdem ordinis exponentes.

F. C. COMMENTARIVS.

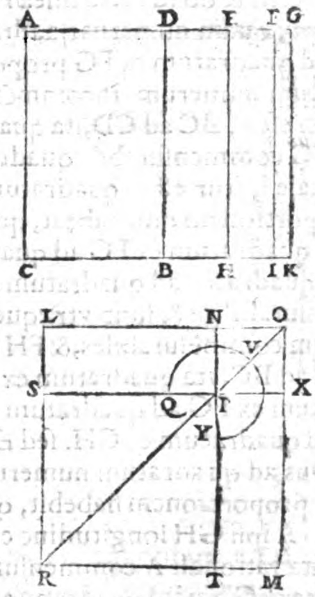
Sit A 6. numerus autem E sit 15, BC 25, & CD 10. fiat igitur ut 15 ad 25, ita 36 ad aliū, erit ad 60. Rursus fiat ut 25 ad 10, ita 60 ad alium, erit ad 24. ergo F G est R 60, & GH R 24. ac propterea FH est R 60 minus R 24, quę est apotome sexta.

THEOREMA LXVIII. PROPOSITIO XCII.

Si spacium cōtineatur rationali, & apotoma prima, recta linea spacium potens apotome est.

Continetur

Contineatur enim spacium AB rationali AC,& apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spacium AB apotomen esse. Quoniã enim AD prima apotome est, sit ipsi congruens

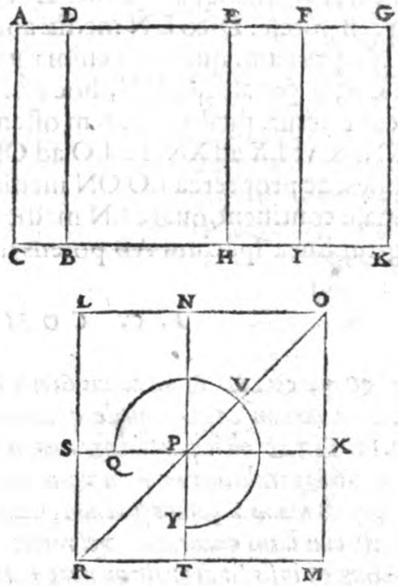


1.diffi.tertiarum. DG. ergo AG GD rationales sunt potentia solum commensurabiles, & tota AG longitudine commensurabilis est expositæ rationali AC. & præterea AG plus potest, quàm GD quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine. si igitur quartæ parti quadrati, quod fit ex DG, ęquale parallelogrammũ ad AG applicetur, de-
18.huius. ficiens figura quadrata, in partes longitudine cõmensurabiles ipsam diuidet. secetur DG bifariã in E,& quadrato ex EG æquale parallelogrammum ad ipsam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. commensurabilis igitur est AF ipsi FG longitudine: & per E F G puncta ipsi AC parallelæ ducantur EH FI GK. & qm̃ AF ipsi FG lõgitudine est commensurabi-
16.huius. lis, erit & tota AG vtrique ipsarum AF FG cõmensurabilis longitudine. sed AG commensurabilis est ipsi AC. vtraque igitur AF FG ipsi AC longitudine est commensurabilis. atque est AC rationalis. ergo & rationalis vtra-
20. huius. que AF FG; ac propterea vtrumque parallelogrammorum AI FK est rationale. &
16.huius. quoniam DE ipsi EG longitudine est commensurabilis, erit & DG vtrique DE EG commensurabilis longitudine: estq; rationalis DG,& ipsi AC longitudine incõ-
14.huius. mensurabilis. ergo & vtraque DE EG rationalis est,& incommensurabilis ipsi AC
22.huius. longitudine: & ob id vtrumque parallelogrammorum DH EK medium est. ponatur ipsi quidem AI parallelogrammo æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK æquale quadratum auferatur NX, communem ipsi angulum habens LO
26.sexti. M. ergo quadrata LM NX circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter OR,& figura describatur. itaque quoniam rectãgulum AFG est æquale quadrato ex
14.sexti. EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF: sed vt AF ad EG, ita est parallologrammum AI ad ipsum EK: & vt EG ad GF, ita parallelogrammum EK ad ipsum KF. parallelogrammorum igitur AI KF medium proportionale est EK. est autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN, vt superius ostensum est. parallelogrammumq; AI est æquale quadrato LM; & parallelogrammum KF quadrato NX æquale. ergo & parallelogrammum MN est æquale ipsi EK. sed parallelogrammum quidem EK est æquale parallelogrammo DH; parallelogrammum vero MN ipsi LX. parallelogrammum igitur DX est æquale gnomoni YVQ, quadrato NX. est autẽ & parallelogrãmũ AK quadratis LM NX ęquale. ergo & reliquũ AB est ęquale quadrato ST. at quadratũ ST est id, quod fit ex LN. quadratum igitur ex LN est æquale parallelogrammo AB; ideoq; recta linea LN ipsum AB potest. Dico LN apotomen esse. Quoniam enim rationale est vtrumque parallelogrammorum AI FK,& sunt ęqualia quadratis LM NX, erit & vtrumque LM NX rationale; hoc est vtrumque ipsorum, quæ fiunt ex LO ON; & vtraque igitur LO ON rationalis est. rursus Qm̃ medium est parallelogrammum DH, atque est æquale ipsi LX; erit & LX mediũ. cũ igitur LX quidẽ medium sit, NX vero rationale, incõmensurab ile est LX ipsi
10.huius. NX; vtq; LX ad XN, ita est recta linea LO ad ON. ergo LO ipsi ON longitudine est incommensurabilis. & sunt vtreque rationales. quare LO ON rationales sunt potẽ-
74.huius. tia solum commensurabiles. & idcirco apotome est LN; & spacium AB potest. quę igitur potest spacium AB est apotome. ergo si spacium contineatur rationali,& apotoma prima, recta linea spacium potens apotome est.

Sit AC 6, AD 7 minus R 13. erit DG R 13, & DE, uel EG R 3 $\frac{1}{4}$. quòd si ad rectam lineã AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ipsius EG, deficiensq; figura quadrata, erit ex demonstratis ad 18 huius AF 6 $\frac{1}{2}$ FG $\frac{1}{2}$. ergo parallelogrammum AI est 39, & FK 3, totumq; AK parallelogrammum 42. parallelogrammum vero DK est R 468, DH, uel EK R 117, EI R 117 minus 3, & FK 3. quare parallelogrammum AB est 42 minus R 468. Huiusmodi autem spacium iuniores etiam apotomen primam, vel residuum primum appellare consueuerunt, cuius latus quadratum, vel radicem inueniemus, quemadmodum ad 55. huius dictum est in spacijs binomialibus, preterquã quòd loco vocis plus, vtemur minus. Diuidatur enim 42 in duas partes; ita vt quod ex ipsis producitur, sit aequale quartę parti 468, hoc est 117. erit maior pars 39, minor 3: ideoq; R 39 minus R 3 erit latus quadratum, uel radix huius spacij residui 42 minus R 468.

THEOREMA LXIX. PROPOSITIO. XCIII.

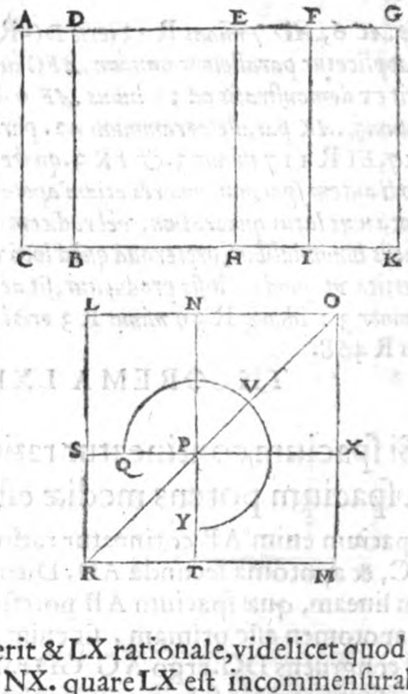
Si spacium contineatur rationali, & apotoma secunda, recta linea spacium potens mediæ est apotome prima.



Spacium enim AB cõtineatur rationali AC, & apotoma secunda AD. Dico rectam lineam, quæ spacium AB potest mediæ apotomen esse primam. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt potentia solum commensurabiles, & congruẽs DG commensurabilis est expositę rationali AC; totaq; AG plus potest, quàm GD quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. quoniam igitur AG plus potest, quàm GD quadrato rectę lineæ sibi longitudine commensurabilis, si quartæ parti quadrati ipsius GD æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commensurabiles ipsam diuidet. Itaque secetur DG bifariam in E: & quadrato ipsius EG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. ergo commensurabilis est AF ipsi FG longitudine; & per puncta EFG ipsi AC parallelæ ducantur EH FI GK. quoniam igitur AF ipsi FG lõgitudine est commensurabilis, erit AG vtrique ipsarum AF FG commensurabilis longitudine. rationalis autem est AG, & ipsi AC longitudine incommensurabilis. ergo & vtraque AF FG est rationalis, ipsiq; AC incommensurabilis longitudine; & ob id vtrumque parallelogrammorum AI FK medium est. Rursus quoniam DE commensurabilis est ipsi EG, erit & DG vtrique DE EG commẽsurabilis. sed DG commensurabilis est ipsi AC longitudine. ergo & vtraque DE EG rationalis est, & ipsi AC longitudine commensurabilis: ac propterea vtrumque parallelogrammorum DH EK est rationale. constituatur igitur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK ęquale quadratum auferatur NX, communem ipsi angulum habens LOM. ergo circa eandem diametrum sunt quadrata LM NX. sit ipsorum diameter OR, & figura describatur. Cum igitur parallelogramma AI FK media sint, & sibi ipsis commensurabilia, & æqualia quadratis ex LO ON, erunt & quadrata ex LO ON media. ergo rectæ lineę LO ON medię sũt, potentia solum commensurabiles. & quoniam rectangulum AFG est æquale quadrato

2. diffi. tertiarum.
18. huius
16. huius.
22 huius.
16. huius.
20. huius
26. sexti.

14.sexti. drato ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF: sed vt AF ad EG, ita est parallelogrã mum AC ad ipsum EK. vt autem EG ad GF, ita parallelogrammum EK ad KF: parallelogrammorum igitur AI FK mediũ proportionale est EK. est autẽ & quadratorum LM NX medium proportionale MN: et parallelogrammum AI quidẽ est ęquale quadrato LM; parallelogrãmum vero FK æquale quadrato NX. ergo MN ipsi EK est ęquale. sed DH est æquale EK, & LX ipsi MN. totum igitur DK gnomoni YVQ, & quadrato NX ęquale erit. itaq; quoniam totum AK ęquale est quadratis LM NX, quorum DK est æquale gnomoni YVQ, & quadrato NX; erit reliquum AB ęquale quadrato ST, hoc est ei, quod fit ex LN. quadratũ igitur ex LN est ęquale spacio AB; ideoq; recta linea LN spacium AB potest. Dico LN mediæ apotomen esse primam. quoniam enim rationale est EK, & ęquale ipsi MN, hoc est ipsi LX, erit & LX rationale, videlicet quod LO ON continetur. medium autem ostensum est NX. quare LX est incommensurabile ipsi XN: & vt LX ad XN, ita LO ad ON. ergo LO ON longitudine sunt incommensurabiles; ac propterea LO ON mediæ sunt commensurabiles potentia solum, quæ



75.huius rationale continent. quare LN medię apotome prima est, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens medię est apotome prima.

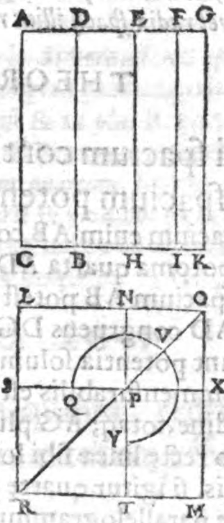
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 4, & AD ℞ 48 minus 6: erit DG 6. & DE, vel EG 3 & si ad AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ipsius EG, deficiensq; figura quadrata: erit AF ℞ 27, FG ℞ 3. & ob id parallelogrammum AI ℞ 432, FK ℞ 48, & totum AK parallelogrãmum ℞ 768; parallelogrammum vero DK 24, DH, vel EK 12, & EI 12 minus ℞ 48. ergo AB est ℞ 768 minus 24, quod spacium etiam apotomen secundam, vel residuum secundum vocat. Vt autem eius latus quadratum, vel radicem inueniamus, diuidetur ℞ 768 in duas partes, ita vt productum ex ipsis sit aequale quartae parti quadrati 24, hoc est aequale 144, erit maior pars ℞ 432, minor ℞ 48. quare ℞℞ 432 minus ℞℞ 48 est latus quadratum, seu radix eius spacij residui ℞ 768 minus 24.

THEOREMA LXX. PROPOSITIO XCIIII.

Si spacium cõtineatur rationali, & apotome tertia, recta linea spacium potens medię est apotome secunda.

Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma tertia AD. Dico rectã lineam, quæ potest spacium AB, mediæ esse apotomen secundam. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt, potẽtia solum commensurabiles, & neutra ipsarum AG GD longitudinę commensurabilis est expositæ rationali AC, totaq; AG plus potest, quàm congruens DG quadrato rectæ lineæ sibi commensurabiles longitudine. si igitur quartæ parti quadrati ipsius DG ęquale parallelogrãmum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commensurabiles ipsam diuidet. Itaque secetur DG bifariam in E, & quadrato ipsius EG æquale ad
18.huius. AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG: & per puncta EFG ipsi



ipsi AC parallelę ducantur EH FI GK. ergo AF FG commensurabiles sunt: atque ob id parallelogrammũ AI parallelogrammo FK est commensurabile. & quoniã AF FG commensurabiles sunt longitudine, erit & AG vtrique ipsarum AF FG longitudine commensurabilis. est autem rationalis AG, & ipsi AC incommensurabilis longitudine. & vtraque igitur AF FG rationalis est, & ipsi AC longitudine incommensurabilis; ac propterea vtrumque parallelogrammorum AI FK est medium. Rursus quoniam DE commensurabilis est ipsi EG longitudine, erit & DG vtrique DE EG cõmensurabilis. sed DG rationalis est, & ipsi AC incõmensurabilis longitudine. rationalis igitur est & vtraque DE EG, & ipsi AC lõgitudine incommensurabilis. ergo vtrumque parallelogrammorũ DH EK medium est. quòd cum AG GD potentia solum commẽsurabiles sint, AG ipsi GD longitudine erit incommẽsurabilis. sed AG commensurabilis est ipsi AF longitudine, & DG ipsi GE. est igitur AF ipsi EG longitudine incommensurabilis. vt autem AF ad EG, ita parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum. ergo incõmensurabilis est AI ipsi EK. constituatur ipsi quidem AI æquale quadratum LM; ipsi vero FK ęquale auferatur NX, angulum habens eundem, quem LM. ergo quadrata LM NX circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter OR, & figura describatur. Quoniam igitur rectangulum AEG est æquale quadrato ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF. vt autem AF ad EG, ita parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum; & vt EG ad GF, ita EK ad KF. ergo & vt AI ad EK, ita EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK medium proportionale est EK. est autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN; & parallelogrammum AI quidem æquale est quadrato LM; FK vero ipsi NX. ergo & EK est æquale MN. sed MN æquale est LX, & EK ipsi DH. totum igitur DK gnomoni YVQ, & quadrato NX est æquale. est autem & parallelogrammũ AK æquale quadratis LM NX. ergo reliquum AB est æquale ipsi ST, hoc est quadrato ex LN. & ob id recta linea LN ipsum AB spacium potest. Dico LN mediæ apotomen esse secundam. Quoniam enim media ostensa sunt parallelogramma AI FK, & sunt ęqualia quadrãtis ex LO ON, erit & vtrumque quadratorum ex LO ON medium; & idcirco vtraque LO ON media est. & quoniam commensurabile est AI ipsi FK, erit & quadratum ex LO quadrato ex ON commensurabile. Rursus quoniam ostensum est AI incommensurabile ipsi EK, & LM ipsi MN incommensurabile erit, hoc est quadratum ex LO rectangulo LON. quare & recta linea LO ipsi ON longitudine est incommensurabilis. sunt igitur LO ON mediæ commensurabiles potentia solum. Dico eas etiam medium continere. Quoniam enim medium demonstratum est EK, atque est rectãgulo LON æquale, erit & LON medium. ergo LO ON mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quę medium continent; ac propterea LN mediæ apotome secunda est, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens mediæ apotome est secunda.

16. huius.
22. huius.
16. huius.
22. huius.
Ex demonstratis ad 14 huius.
26. sexti.
14. sexti.
Lem. ad 23. huius.
76. huius.

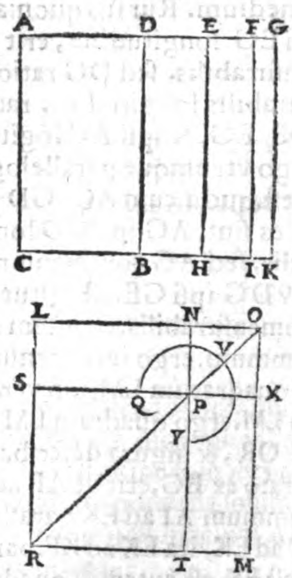
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, & AD R 27 *minus* R 15. *erit DG* R 15, *& DE, vel EG* R 3 $\frac{3}{4}$. *quòd si ad AG applicetur parallelogrammum aequale quadrato ex EG, deficiensq́; figura quadrata, quod sit AFG, erit AF* R 18 $\frac{3}{4}$, *FG* R $\frac{3}{4}$. *ideoq́; parallelogrammum AI est* R 675, *FK* R 27, *& totum AK parallelogrammum* R 972. *parallelogrammum autem DK* R 540, *EK* R 135, *& EI* R 135 *minus* R 27. *est igitur AB* R 972 *minus* R 540. *quod spacium est apotome tertia, vel tertium residuum. Itaque diuidatur* R 972 *in duas partes, ita vt quod ex ipsis producitur sit ęquale*

℞ 135. erit maior pars ℞ 675, & minor ℞ 27. ergo ℞℞ 675 minus ℞℞ 27 est latus quadratum, vel radix spacij illius residui ℞ 972 minus ℞ 540.

THEOREMA LXXI. PROPOSITIO XCV.

Si spacium contineatur rationali, & apotoma quarta, recta linea spacium potens minor est.



Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quę spacium AB potest, minorem esse. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt potentia solum commensurabiles, & AG commensurabilis est expositę rationali AC lõgitudine, totaq; AG plus potest, quàm GD, quadrato rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis. si igitur quartę parti quadrati ex DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommensurabiles ipsam diuidet. Itaque secetur DG bifariã in E, & quadrato ex EG æquale ad ipsam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. ergo AF ipsi FG longitudine est incommensurabilis. Ducantur per puncta EFG ipsis AC BD parallelæ EH FI GK. Quoniam igitur AG rationalis est, & ipsi AC longitudine commensurabilis, erit totum parallelogrammum AK rationale. Rursus quoniam incommensurabilis est DG ipsi AC longitudine, & sunt vtræque rationales, erit parallelogrammum DK medium. quòd cum AF ipsi FG longitudine sit incommensurabilis, erit & parallelogrammum AI incommensurabile parallelogrammo FK. constituatur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK ęquale quadratum NX auferatur, angulum habens eundem, quem LM, videlicet LOM. quadrata igitur LM NX circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter OR, & figura describatur. itaque quoniã rectangulum AFG est ęquale quadrato ex EG, vt AF ad EG, ita erit EG ad GF. sed vt AF quidem ad EG, ita est parallelogrammum AI ad ipsum EK: vt autem EG ad GF, ita EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK medium proportionale est EK. est autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN. atque est parallelogrammum AI æquale quadrato LM, & parallelogrammum FK æquale NX. ergo & EK æquale est MN. sed EK quidem est æquale parallelogrammo DH; MN vero ipsi LX. totum igitur DK parallelogrammum gnomoni YVQ, & quadrato NX est æquale. & quoniam totum AK æquale est quadratis LM NX, quorum DK est æquale gnomoni YVQ, & NX quadrato; erit reliquum AB æquale quadrato ST, hoc est quadrato ex LN. ergo LN spacium AB potest. Dico LN irrationalem esse, quę minor appellatur. Quoniam enim parallelogrammum AK rationale est, & æquale quadratis ipsorum LO ON, erit & compositum ex quadratis LO ON rationale. Rursus quoniam parallelogrammum DK medium est, atque est æquale ei, quod bis continetur LO ON erit & quod LO ON cõtinetur mediũ: ostensũ aũt est parallelogrãmũ AI incõmẽsurabile ipsi FK. ergo & quadratũ ex LO incõmensurabile est quadrato ex ON; ac propterea LO ON potentia sunt incommensurabiles, quę faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium. quare LN irrationalis est, quæ minor appellatur, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens minor est.

4. diffi. tertiarum. — 16. huius. — 20. huius. — 22. huius. — 26. sexti. — 24. sexti. — 77. huius.

F. C.

Sit AC 6. AD 7 minus R 14. erit DG R 14, & DE, vel EG R 3 $\frac{1}{2}$. Si vero ad AG applicetur parallelogrammum AFG æquale quadrato ipsius EG, deficiensq; figura quadrata, erit AF 3 $\frac{1}{2}$ plus R 8 $\frac{3}{4}$: FG 3 $\frac{1}{2}$ minus R 8 $\frac{3}{4}$, & parallelogrammum AI est R 21 plus R 315, FK 21 minus R 315, & totum AK 42. parallelogrammum vero DK est R 504, CK R 126. & AB 42 minus R 504. quod spacium est apotome quarta, vel residuum quartum. si igitur 42 diuidatur in duas partes, ita ut productum ex ipsis sit æquale quartae parti R 504, hoc est R 126, erit maior pars 21 plus R 126, & minor 21 minus R 126. ergo R V. 21 plus R 126 minus R V. minus R 126 est latus quadratum, seu radix spacij residui 42 minus R 504.

THEOREMA LXXII. PROPOSITIO XCVI.

Si spacium contineatur rationali, & apotoma quinta, recta linea spacium potens est, quæ cum rationali medium totum efficit.

Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma quinta AD. Dico rectã lineam, quæ spacium AB potest, esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt potentia solum cõmensurabiles; & congruens DG longitudine commensurabilis est expositę rationali AC; totaq; AG plus potest, quàm GD quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. si igitur quartæ parti quadrati ex DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommensurabiles ipsam diuidet. Itaque secetur DG bifariam in puncto E, & quadrato ex EG æquale ad ipsam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. ergo AF incommensurabilis est ipsi FG longitudine. Ducantur per puncta EFG ipsi AC parallelę EH FI GK. & quoniam AG incommensurabilis est ipsi AC lõgitudine, & sunt vtræque rationales; erit parallelogrammum AK medium. Rursus quoniam rationalis est DG, & ipsi AC longitudine commensurabilis; parallelogrammum DK rationale erit. Constituatur igitur parallelogrammo quidem AI ęquale quadratum LM; ipsi vero FK ęquale quadratum auferatur NX, angulum habens eundem, quem LM, videlicet LOM. ergo quadrata LM NX circa eandem sunt diametrum. sit diameter ipsorum OR, & figura describatur. Similiter ostẽdemus rectam lineam LN spacium AB posse. Dico LN esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit. Quoniam enim ostendimus parallelogrammum AK medium esse; atque est æquale quadratis ipsarum LO ON: erit & compositum ex quadratis LO ON medium. Rursus quoniam DK rationale est, & æquale ei, quod bis continetur LO ON; erit & quod bis LO ON continetur rationale. est autem AI incommensurabile ipsi FK. incommensurabile igitur est quadratum ex LO quadrato ex NO; ideoque LO ON potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsorum quadratis medium; quod autem ipsis bis continetur rationale. ergo reliqua LN irrationalis est, quæ vocatur cum rationali medium totum efficiens, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens est, quæ cum rationali medium totum efficit.

19. huius.

22. huius.

20. huius

26. huius

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, AD R 56 minus 4, erit DG 4, & DE, vel EG 2. quòd si ad AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ex C G, deficiensq́; figura quadrata, erit AF R 14 plus R 10; FG R 14 minus R 10. & parallelogrammum A I est R 504 plus R 360, F K R 504 minus R 360: totumq́; AK R 2016. At vero DK est 24, EK 12, & AB R 2016 minus 24. quod spacium est apotome quinta, vel residuum quintum. Diuidatur R 2016 in duas partes, ita vt productum ex ipsis sit aequale 144, erit maior pars R 504 plus R 360, & minor R 504 minus R 360. quare R V. R 504 plus R 360 minus R V. R 504 minus R 360 est latus quadratum dicti spacij residui R 2016 minus 24.

THEOREMA LXXIII. PROPOSITIO XCVII.

Si spacium contineatur rationali, & apotoma sexta, recta linea spacium potens est, quæ cum medio medium totum efficit.

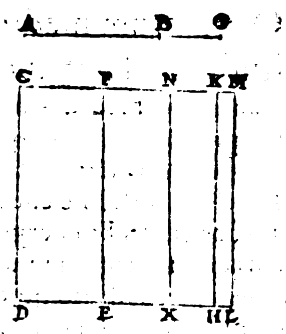
Spacium enim AB contineatur rationali A C, & apotoma sexta AD. Dico rectam lineam, quę spacium A B potest, esse eam, quæ cum medio medium totum efficit. sit enim ipsi AD congruens D G. ergo A G G D rationales
6 diffin. tertiarum. sunt potentia solum commensurabiles; & neutra ipsarum commensurabilis est expositę rationali A C longitudine. totaq́; AG plus potest, quàm congruens DG quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incõmensurabilis. si igitur quartæ parti quadrati ex DG ęquale ad rectam lineam AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommen-
19. huius. surabiles ipsam diuidet. Itaque secetur DG bifariam in E, & quadrato ex CG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. incommensurabilis igitur est AF ipsi FG longitudine. ut autem AF ad FG, ita est parallelogrammum AI ad ipsum FK. ergo AI ipsi FK est incommensurabile. & quoniam AG AC
10. huius. 22. huius rationales sunt potentia solum commensurabiles, erit parallelogrammum AK medium. sunt autem AC DG rationales, & incommensurabiles longitudine. medium igitur est & DK. quòd cum AG GD potentia solum commensurabiles sint, erit A G ipsi GD longitudine incommensurabilis. sed ut AG ad GD, ita est AK ad KD. incom-
10. huius. mensurabile igitur est AK ipsi KD. itaque constituatur parallelogrammo AI ęquale quadratum LM; parallelogrammo autem F K æquale auferatur quadratum N X,
14. sexti. angulum habens eundem, quem LM. ergo quadrata LM NX circa eãdem sunt diametrum. sit eorum diameter OR, & figura describatur. similiter vt supra, ostendemus rectam lineam LN spacium AB posse. Dico LN esse eam, quæ cum medio medium totum efficit. Quonã enim medium ostensum est A K, atque est æquale quadratis ipsarum LO ON, erit & compositum ex quadratis LO ON medium. Rursus quoniam medium ostensum est D K, & est ęquale ei, quod bis continetur LO ON; & quod bis LO ON continetur medium erit. Incommensurabile autem ostensum est A K ipsi K D. ergo & quadrata ex LO ON incommensurabilia sunt ei, quod bis LO ON continetur. & quoniam incommensurabile est AI ipsi FK, erit & quadratum ex LO quadrato ex ON incommensurabile. ergo LO ON potentia solum commensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium. quod autem ipsis bis continetur medium, & incommensurabile composito ex ipsa-
79. huius. rum quadratis. ergo LN irrationalis est, quæ vocatur, cum medio medium totum efficiens, & potest AB spacium. recta igitur linea spacium A B potens est, quæ cum medio medium totum efficit.

F. C.

Sit AC 6, AD R 32 *minus* R 20. *erit DG* R 20, *& DE vel EG* R 5. *si autem ad AG applicetur parallelogrammum AFG, aequale quadrato ex EG, & deficiens figura quadrata, erit AF* R 8 *plus* R 3, *FG* R 8 *minus* R 3: *& idcirco parallelogrammum AI* R 288 *plus* R 108, *FK* R 288 *minus* R 108, *& totum parallelogrammum AK* R 1152. *parallelogrammum vero DK est* R 720, *DH* R 18, *& AB* R 1152 *minus* R 720. *quod spacium est apotome sexta, vel sextũ residuum, & eius latus quadratum, vel radix inuenietur esse* R *V*. R 288 *plus* R 108 *minus* R *V*. 288 *minus* R 108.

THEOREMA LXXIIII. PROPOSITIO. XCVIII.

Quadratum apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.



Sit apotome AB, rationalis autem CD, & quadrato ex AB ęquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudinẽ faciens CF. Dico CF apotomen esse primam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB rationales sunt potentia solum cõmensurabiles: & quadrato quidẽ ex AG æquale ad ipsam CD applicetur CH: quadrato autem ex BG ęquale applicetur KL. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum parallelogrammum CE æquale est quadrato ex AB. ergo reliquum FL ei, quod bis AG GB continetur est æquale. secetur FM bifariam in N: & per N ipsi CD parallela ducatur NX: vtrumque igitur ipsorum FX LN est ęquale ei, quod AG GB continetur. & quoniam quadrata ex AG GB rationalia sunt, atque est quadratis ex AG GB ęquale parallelogrammum DM; erit ipsum DM rationale; & ad rationalẽ CD applicatum est, latitudinẽ faciens CM. ergo CM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis longitudine. Rursus quoniam medium est, quod bis continetur AG GB, estq; ei, quod bis AG GB continetur; æquale parallelogrammum LF; erit ipsum LF medium: & applicatum est ad rationalem CD, latitudinem faciens FM. quare FM est rationalis, ipsiq; CD longitudine incommensurabilis. & sunt quadrata quidem ex AG GB rationalia: quod autem bis continetur AG GB medium. quadrata igitur ex AG GB incommẽsurabilia sunt ei, quod bis AG GB continetur. sed quadratis ex AG GB ęquale est parallelogrammum CL. ei vero, quod bis continetur AG GB est ęquale FL. ergo CL ipsi LF est incommensurabile. vt autem CL ad LF, ita est recta linea CM ad MF. incommẽsurabilis igitur est CM ipsi MF longitudine; & sunt vtraque rationales. ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea CF est apotome. Dico & primam esse. Quoniam enim quadratorum ex AG GB medium proportionale est quod AG GB continetur; atque est quadrato quidem ex AG ęquale parallelogrãmum CH; ei vero, quod AG GB continetur æquale NL, & quadrato ex GB ęquale KF. erit ipsorum CH KL medium proportionale NL. vt igitur CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH ad NL, ita est recta linea CK ad ipsam NM. vt autem NL ad LK, ita recta linea NM ad MK. ergo vt CK ad NM, ita est NM ad MK. & ob id rectangulum CKM est æquale ei, quod fit ex MN quadrato, hoc est quartę parti quadrati ex FM. & quoniam quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex GB, erit & parallelogrammum CH parallelogrammo KL commensurabile. sed vt CH ad KL, ita est recta linea CK ad ipsam KM. commensurabilis igitur est CK ipsi KM. itaque cum duæ rectæ lineę inęquales sint CM MF, & quartę parti quadrati ex FM ęquale parallelogramum ad ipsam CM applicatum sit, deficiens figura quadrata, quod scilicet

74. huius.
7. secundi.
21. huius.
23. huius.
1. sexti.
74. huius.
Lem. ad 55. huius.
11. quinti.
17. sexti.

18. huius. scilicet CK KM continetur; sitq; CK commensurabilis ipsi KM: recta linea CM plus poterit, quam MF quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis. atque est 1. diffi. tertiarum. CM commensurabilis longitudine expositæ rationali CD. ergo CF est prima apotome. quadratum igitur apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

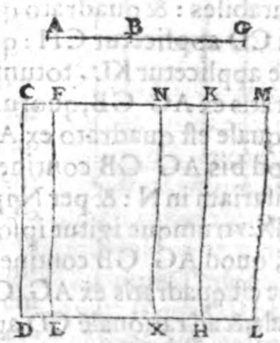
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ℞ 33 minus ℞ 3, BG ℞ 3. rationalis autem CD sit 6; & si ad ipsam CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, quod est 33, latitudinem faciens CK, erit CK 5 $\frac{1}{2}$. & si ad eandem applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod est 3, latitudinem faciens KM, erit KM $\frac{1}{2}$, & tota CM 6. Rursus si ad eandem CD applicetur parallelogrammum FX, quod est ℞ 99, latitudinem faciens FN, erit FN ℞ 2 $\frac{1}{4}$, & eadem ratione NM est ℞ 2 $\frac{3}{4}$, & tota FM ℞ 11. ergo CF est 6 minus ℞ 11, quę est apotome prima.

THEOREMA LXXV. PROPOSITIO. XCIX.

Quadratum medię apotomæ primę ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

74. huius. Sit apotome mediæ prima AB; rationalis autē CD: & quadrato ex AB æquale parallelogrammū CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomē esse secundam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB mediæ sunt 75. huius. potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent: & quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH ad CD applicetur, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB ęquale KL ad eandem applicetur, latitudinem faciens KM. totum igitur CL est ęquale quadratis ex AG GB medijs existētibus. quare & CL est medium; & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem



23. huius. faciens CM. rationalis igitur est CM, & ipsi CD longitudine incommensurabilis, itaque quoniam CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum quadratum ex AB ęquale est parallelogrammo CE; erit reliquum, quod bis continetur AG GB æquale 7 secundi. ipsi FL. est autem rationale, quod bis AG GB continetur. rationale igitur est & 21. huius. FL; & ad rationalem FE applicatum est, latitudinem faciens FM. quare FM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis longitudine. & quoniam quadrata quidem ex AG GB, hoc est parallelogrammum CL medium est; quod autem bis continetur 1. sexti. AG GB, videlicet FL est rationale: erit CL incommēsurabile ipsi LF. vt autem CL ad 10. huius. LF, ita recta linea CM ad MF. ergo CM ipsi MF longitudine est incōmensurabilis. & suntvtræque rationales. sunt igitur CM MF rationales potentia solum commensu 74. huius. rabiles. ideoq; CF apotome est. Dico & secundam esse. secetur enim FM bifariam in puncto N: & per N ipsi CD parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL est ęquale ei, quod continetur AG GB. & quoniam quadratorum Lem. ad 55. huius. ex AG GB medium proportionale est, quod AG GB continetur; estq; quadratū ex AG æquale parallelogrammo CH; quod autem continetur AG GB æquale parallelogrammo NL; & quadratum ex GB æquale ipsi KL: erit parallelogrammorū CH KL medium proportionale NL. est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. Sed vt CH ad NL, ita est recta linea CK ad ipsam NM; & vt NL ad LK, ita NM ad MK. ergo vt 11. quinti. 17. sexti. CK ad NM, ita est NM ad MK; ac propterea rectāgulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. & quoniam quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex GB, erit & CH parallelogrammum parallelogrammo KL commensurabile, hoc est recta linea CK commensurabilis ipsi KM. quod cum duæ

duę rectæ lineę inæquales sint CM MF; quartæ autem parti quadrati ex MF æquale parallelogrammum CKM ad maiorem CM applicatum sit, deficiens figura quadrata, & in partes commensurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus poterit, quàm MF quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: atque est congruens FM expositę rationali CD commensurabilis. quare CF est apotome secunda. quadratum igitur mediæ apotomę primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. 18. huius. 1. Diffi. tertiarum.

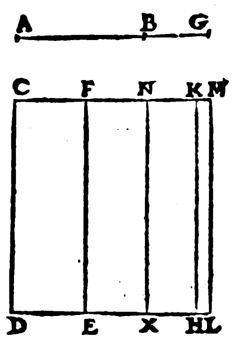
F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonstratis perspicuum fit, vt apotomę quadratū inueniamus, nos vti septima propositione 2 libri, non autem quarta, vt ad 34 huius dictum est.

Sit AB RR 972 *minus* RR 108, *BG* RR 108, *rationalis autem CD sit 6. & si ad ipsam CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, quod est* R 972, *latitudinem faciens CK; erit CK* R 27: *& si ad eadem applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod est* R 108 *latitudinem faciens KM; erit KM* R 3. *& tota CM* R 48. *Rursus si ad CD applicetur parallelogrammum FX aequale rectangulo AGB, quod est 18, latitudinem faciens FN; erit FN 3, itemq́; NM 3, & tota FM 6. ergo CF est* R 48 *minus 6, quae est apotome secunda.*

THEOREMA LXXVI. PROPOSITIO C.

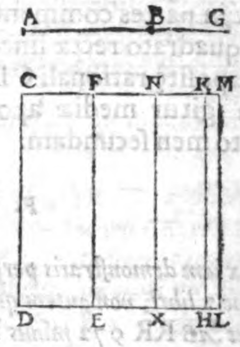
Quadratum mediæ secundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.



Sit medię apotome secunda AB; rationalis autem CD & quadrato ex AB ęquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciẽs CF. Dico CF apotomen esse tertiam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ medium continent: & quadrato quidem ex AG æquale ad CD applicetur CH, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB ęquale ad KH applicetur KL, latitudinem faciens KM. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB: & sunt quadrata ex AG GB media. ergo & CL est medium, & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM. ergo CM est rationalis, & ipsi CD incommensurabilis longitudinę. & quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE ęquale est quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei, quod bis continetur AG GB. secetur FM bifariam in N; & per N ipsi CD parallela ducatur NX. Vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL est æquale ei, quod AG GB continetur. est autem quod continetur AG GB medium. ergo & medium est FL, & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens FM. quare & FM est rationalis; & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam AG GB potentia solum commensurabiles sunt, erit AG ipsi GB incommensurabilis longitudine. ideoq; quadratum ex AG rectangulo AGB est incommensurabile. sed quadrato quidem ex AG commensurabilia sunt ex AG GB quadrata; rectangulo autem AGB commensurabile est quod bis AG GB continetur. ergo quadrata ex AG GB ei, quod bis AG GB continetur, sunt incommensurabilia. at quadratis ex AG GB æquale est parallelogrammum CL; ei vero, quod bis continetur AG GB est ęquale FL. incommensurabile igitur est CL ipsi LF. Vt autem CL ad LF, ita est recta linea CM ad MF. ergo CM ipsi MF incommensurabilis est longitudine; & sunt vtręque rationales. quare CM MF rationales sunt potentia solum commensurabilis. & ob id apotome est CF. Dico & tertiam esse. Quoniam enim quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex GB, erit

96. huius. 23. huius. 7. secundi. 23. huius. Lem. ad 23. huius. Ex demonstratis in 24 huius. 1. sexti. 10. huius. 74. huius.

erit parallelogrammum CH parallelogrammo KL commensurabile. ergo & recta linea CK est cõmensurabilis ip
Lem. ad 55. huius: si KM. & quoniam quadratorum ex AG GB mediũ proportionale est rectangulũ AGB; atque est quadrato quidem ex AG ęquale parallelogrammum CH; quadrato autem ex GB æquale KL, & rectangulo AGB æquale NL: erit parallelogrammorum CH KL medium proportionale NL. est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH
1. sexti. ad NL, ita est recta linea CK ad NM: vt autem NL ad LK,
11. quinti: ita NM ad MK. ergo & vt CK ad NM, ita NM ad MK; ac
17. sexti. propterea rectangulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. Quoniam igitur duæ rectę lineæ inæquales sunt CM MF; & quartæ parti quadrati ex FM æquale ad CM applicatum est, deficiens
18. huius: figura quadrata, quod in partes cõmensurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus poterit, quam MF quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis. & neutra
3. diffin. tertiarum. ipsarum CM MF longitudine commensurabilis est expositæ rationali CD. ergo CF tertia est apotome. quadratum igitur mediæ apotomæ secundę ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen tertiam.



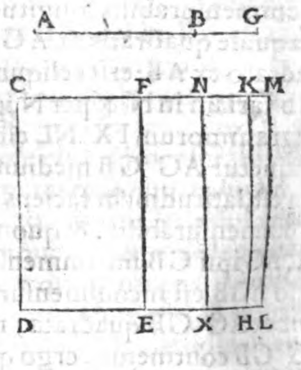
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB RR 882 *minus* RR 18, *BG* RR 18, *& rationalis CD sit 6. quòd si ad CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK, erit CK* R $24\frac{1}{2}$. *& si applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod latitudinem faciat KM, erit KM* R $\frac{1}{2}$; *& tota CM* R 32. *pręterea si ad eandem CD applicetur FX aequale rectangulo AGB, quod est* R 126, *latitudinem faciens FN, erit FN* R $3\frac{1}{2}$; *& tota FM* R 14. *ergo CF est* R 32 *minus* R 14, *quae est apotome tertia.*

THEOREMA LXXVII. PROPOSITIO CI.

Quadratum minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

Sit minor AB, rationalis autem CD: & quadrato ex AB æquale paralllelogrãmum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse quartam. sit enim ipsi AB congrués BG.
77. huius. ergo AG GB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum AG GB quadratis rationale; quod autem bis ipsis continetur medium: & quadrato ex AG æquale ad CD applicetur CH, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB æquale ad KH applicetur KL, latitudinẽ faciens KM. totum igitur CL quadratis ex AG GB est æquale. atque est compositum ex quadratis AG GB rationale. ergo & rationale est CL; & ad rationa
21. huius: lem CD applicatum est, latitudinem faciẽs CM. quare CM est rationalis, & ipsi CD longitudine commensurabilis. & quoniam totum
7. secundi. CL est ęquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB: erit reliquum FL ęquale ei, quod bis AG GB cõtinetur. Itaque secetur FM bifariam in N; & per N alterutri ipsarum CD ML parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL est ęquale ei, quod continetur AG GB. & quoniam quod bis continetur AG GB medium est, & æquale parallelogrammo LF. erit & LF medium.



dium.& ad rationalem FE applicatum est, latitudinem faciens FM.ergo FM est rationalis,& ipsi CD longitudine incommensurabilis.& quoniam compositũ ex quadratis ipsarum AG GB est rationale;quod autem bis AG GB continetur mediũ: erunt quadrata ex AG GB ei, quod bis continetur AG GB incommensurabilia. quadratis autem ex AG GB æquale est parallelogrammum CL;& ei quod bis AG GB continetur est ęquale FL.incommensurabile igitur est CL ipsi LF. sed vt CL ad LF,ita est CM ad MF.quare CM ipsi MF longitudine est incommensurabilis:& sunt vtræque rationales.ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles.& eam ob caussam apotome est CF.Dico & quartam esse. Quoniam enim AG GB potentia sunt incommensurabiles, erit quadratum ex AG incommensurabile quadrato ex GB. & quadrato quidem ex AG æquale est parallelogrammum CH; quadrato autem ex GB est æquale KL.incommensurabile igitur est CH ipsi KL.sed vt CH ad KL,ita est CK ad KM.ergo CK ipsi KM est incommensurabilis longitudine.& quoniam quadratorum ex AG GB medium proportionale est AGB rectangulum;atque est quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH;quadrato autem ex GB æquale KL; & rectangulo AGB ęquale NL: erit NL medium proportionale parallelogrammorum CH KL. est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH ad NL, ita CK ad MN;& vt NL ad LK, ita NM ad MK.ergo vt CK ad MN ita NM ad MK; ac propterea rectangulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc est quartę parti quadrati ex FM. Itaque quoniam duę rectæ lineæ inæquales sunt CM MF;& quartæ parti quadrati ex FM ęquale ad CM applicatum est, deficiens figura quadrata, quod est CKM,& in partes incommensurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus poterit, quàm MF quadrato rectę lineę sibi incommẽsurabilis longitudine.& est tota CM longitudine commensurabilis expositę rationali CD. ergo CF quarta est apotome. quadratum igitur minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

23.huius. 1.sexti. 10.huius. 74.huius. 1.sexti. 10.huius. Lem. ad 55. huius. 1.sexti. 11.quinti. 17.sexti. 19.huius. 4.Diffi. tertiarum.

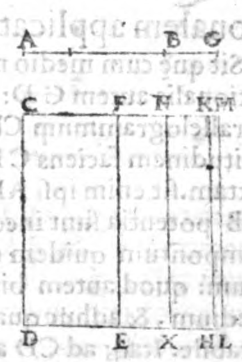
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ℞ V.21 plus ℞ 315, minus ℞ V.21 plus ℞ 315; BG ℞ V.21 minus ℞ 315: rationalis autem CD sit 6. & si ad CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK, erit CK $3\frac{1}{2}$ plus ℞ $8\frac{3}{4}$. & si applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod latitudinem faciat KM, erit KM $3\frac{1}{2}$ minus ℞ $8\frac{3}{4}$: & tota CM 7. Quòd si ad eandem CD applicetur FX aequale rectangulo AGB, videlicet ℞ 126, latitudinem faciens FN, erit FN ℞ $3\frac{1}{2}$; & tota FM R *14. est igitur CF 7 minus* R *14, quae est apotome quarta.*

THEOREMA LXXVIII. PROPOSITIO CII.

Quadratum eius, quę cum rationali mediũ totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

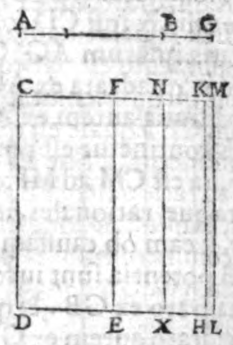
Sit quę cum rationali medium totum efficit AB; rationalis autem CD;& quadrato ex AB æquale ad CD applicetur parallelogrammum CE, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse quintam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB rectæ lineæ potentia sunt incõmensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex quadratis ipsarum medium, quod autem bis ipsis continetur rationale. & quadrato ex AG æquale parallelogrammũ CH ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB ęquale applicetur KL latitudinẽ faciens KM. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB. sed compositum ex quadratis ipsarum AG GB est medium. ergo & medium est parallelogrammum CL; & 78.huius.



 ad

23. huius ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM. quare CM est rationalis, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei, quod bis AG GB continetur.

7 secundi. Itaque secetur FM bifariam in puncto N, & ab ipso N alterutri ipsarum CD ML parallela ducatur NX. vtrumque igitur FX NL est æquale ei, quod AG GB continetur. & quoniam quod bis continetur AG GB rationale est, & æquale parallelogrammo FL; erit & FL rationale; & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens FM. ergo FM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis lõgitudine. est autem parallelogrammum CL medium, &



21. huius.

1. sexti: 10. huius. FL rationale. incommensurabile igitur est CL ipsi LF. & vt CL ad LF, ita CM ad MF. ergo CM ipsi MF longitudine est incommensurabilis. & sunt vtræque rationales.

74. huius. quare CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles; ob idque apotome est CF. Dico & quintam esse. similiter enim demonstrabimus rectangulum CKM esse æquale quadrato ex NM, hoc est quartę parti quadrati ex FM. quòd cum quadratum ex AG incommensurabile sit quadrato ex GB; sitq; quadratum ex AG parallelogrammo CH æquale; quadratum autem ex GB parallelogrammo KL: erit CH ipsi KL incommensurabile. sed vt CH ad KL, ita CK ad KM. ergo CK ipsi KM longitudine est incommensurabilis.

1. sexti: 10. huius: Quoniam igitur duę rectæ lineæ CM MF inæquales sunt: & quartæ parti quadrati ex FM æquale ad ipsam CM applicatum est, deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles ipsam diuidit; recta linea CM plus poterit, quàm MF quadrato rectę lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis,

19. huius. atque est congruens FM commensurabilis longitudine expositæ rationali CD. ergo CF quinta apotome est.

5. diffi. tertiarum. quadratum igitur eius, quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ℞ V. ℞ 288 plus ℞ 207 minus R *V. 288 minus ℞ 207. BG ℞ V. ℞ 288 minus ℞ 207: rationalis autem C D sit 6. quòd si ad C D applicetur parallelogrammum C H aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK; erit CK ℞ 8 plus ℞ 5 $\frac{3}{4}$. & si applicetur K L aequale quadrato ex GB, latitudinẽ faciens KM erit KM* R *8 minus* R *5 $\frac{3}{4}$, & tota CM* R *32. Rursus si ad eandem CD applicetur FX aequale rectangulo AGB, latitudinem faciens FN; erit FN 1 $\frac{1}{2}$. & tota FM 3. quare CF est* R *32 minus 3, quae est apotome quinta.*

THEOREMA LXXIX. PROPOSITIO CIII.

Quadratum eius, quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

Sit quę cum medio medium totum efficit AB; rationalis autem CD: & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse sextam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium: quod autem bis ipsis AG GB continetur medium, & adhuc quadratis ipsarum incommensurabile. Itaq; ad CD applicetur quadrato ex AG æquale parallelogrãmũ CH, latitudinem faciens

CK: quadrato aũt ex BG ęquale applicetur KL, latitudinem faciens KM. totũ igitur CL est ęquale quadratis ex AG GB: ac propterea CL est mediũ, & ad rationalẽ CD applicatum est, latitudinem faciens CM. ergo CM rationalis est, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. Quoniam igitur CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei, quod bis AG GB continetur. atque est quod bis cõtinetur AG GB medium. ergo & FL est medium, & ad rationalem FE applicatum est, latitudinem faciens FM. est igitur FM rationalis, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam quadrata ex AG GB incommensurabilia sunt ei, quod bis AG GB continetur; atque est quadratis quidem AG GB ęquale parallelogrammum CL; ei vero, quod bis continetur AG GB æquale FL: erit CL ipsi LF incommensurabile. sed vt CL ad LF, ita est CM ad MF. quare CM ipsi MF incommensurabilis est longitudine: & sunt vtręque rationales. ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles. & ob id CF est apotome. Dico & sextam esse. Quoniã enim FL est ęquale ei, quod bis continetur AG GB, secetur FM bifariã in puncto N; & per N ipsi CD parallela ducatur NX. vtrũq; igitur parallelogrammorum FX NL est æquale rectangulo AGB. & quoniam AG GB potentia sunt incommensurabiles; erit quadratum ex AG incommensurabile quadrato ex BG. sed quadrato quidem ex AG est æquale parallelogrammum CH; quadrato autem ex BG æquale KL. ergo CH ipsi KL est incommensurabile. vt autem CH ad KL, ita est CK ad KM. incommensurabilis igitur est CK ipsi KM. quòd cum quadratorum ex AG GB medium proportionale sit rectangulum AGB; sitq; quadrato ex AG æquale CH, & quadrato ex GB æquale KL; rectanguloq; AGB æquale NL: erit & parallelogrammorum CH KL medium proportionale NK. & eadem ratione CM plus poterit, quàm MF quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & neutra ipsarum est commensurabilis lõgitudine expositę rationali CD. ergo CF sexta est apotome. quadratum igitur eius, quę cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

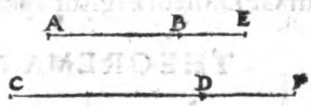
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R *V.* R *396 plus* R *288 minus* R *V.* R *396 minus* R *288; BG* R *V.* R *396 minus* R *288; & rationalis CD sit 6. si vero ad CD applicetur parallelogrammum CH, latitudinem faciens CK; erit CK* R *11 plus* R *8, & si applicetur KL aequale quadrato ex GB, latitudinem faciens KM; erit KM* R *11 minus* R *8, & tota CM* R *44. Rursus si ad CD applicetur FX ęquale rectangulo AGB, quod latitudinem faciat FN, erit ea* R *3, & tota FM* R *12. ergo CF est* R *44 minus* R *12, quae est apotome sexta.*

THEOREMA LXXX. PROPOSITIO CIIII.

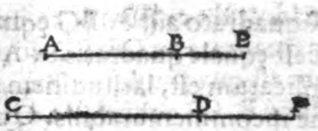
Recta linea apotomę longitudine cõmensurabilis, & ipsa apotome est, atque ordine eadem.

Sit apotome AB; et ipsi AB longitudine cõmensurabilis sit CD. Dico CD apotomen esse, atque ordine eandem, quæ AB. quoniam enim apotome est AB, sit ipsi congruens BE. ergo AE EB rationales sunt potentia solum commẽsurabiles. & fiat proportio BE ad DF eadem, quę est AB ad CD. quare vt vna ad vnam, ita erunt omnes ad omnes. est igitur vt AB ad CD, ita AE ad CF. commensurabilis autem est AB ipsi CD longitudine. ergo & AE ipsi CF longitudine commensurabilis erit, & BE ipsi DF. sunt autem AE EB rationales potentia solum cõmensurabiles. ergo & EF FD rationales erunt potentia solum commẽsurabiles: ac propterea CD apotome est. Dico & ordine eandem esse. Quoniam enim est vt AE ad CF, ita BE ad FD, erit permutãdo vt AE ad EB, ita CF ad FD. vel igitur AE plus



74. huius. 12. quinti. 10. huius. A B 74. huius.

potest, quàm EB quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: & siquidem commensusabilis, & CF plus poterit, quàm FD quadrato rectæ lineę sibi lõgitudine cõmensurabilis: & si quidem AE commensurabilis est longitudine expositę rationali; & CF expositæ rationali lõgitudine commensurabilis erit: si vero EB est cõmensurabilis, & DF cõmensurabilis erit: & si neutra ipsarũ AE EB cõmensurabilis est expositæ rationali longitudine, & neutra ipsarũ CF FD eidẽ longitudine erit cõmensurabilis. quòd si AE plus possit, quã EB quadrato rectę lineæ sibi incõmensurabilis longitudine; & CF plus poterit, quã FD quadrato rectę lineę sibi lõgitudine incõmensurabilis: & siquidem AE sit cõmensurabilis expositæ rationali lõgitudine, & CF eidẽ longitndine cõmensurabilis erit: si uero BE, & DF: & si neutra ipsarũ AE EB, & neutra ipsarũ CF FD erit expositæ rationali lõgitudine cõmẽsurabilis. ergo CD apotome est, & ordine eadẽ, quę AB.



F. C. COMMENTARIVS.

A Et BE ipsi DF.] *Quoniam enim est vt AE ad CF, ita AB ad CD, erit & reliqua BE ad DF, vt AE ad CF, hoc est ut AB ad CD. commensurabilis igitur est & BE ipsi DF longitudine.*

10. huius

B Ergo & CF FD rationales erunt potentia solum commensurabiles] *Nam cum sit ut AE ad CF, ita BE ad DF, erit permutãdo vt AE ad EB, ita CF ad FD: suntq́, AE EB rationales potentia solũ cõmensurabiles. ergo & CF FD rationales potentia solũ cõmensurabiles erũt.*

10. huius.

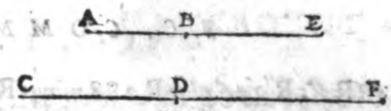
THEOREMA LXXXI. PROPOSITIO. CV.

Recta linea mediæ apotomæ commensurabilis, & ipsa mediæ apotome est, atque ordine eadem.

Sit mediæ apotome AB, & ipsi AB lõgitudine commensurabilis sit CD. Dico CD mediæ apotomen esse, & ordine eandem. Quoniam enim mediæ apotome est AB, sit BE ipsi AB congruens. ergo AE EB medię sunt potentia solum cõmensurabiles: & fiat vt AB ad CD, ita BE ad DF. sunt autem AE EB mediæ potentia solum commensurabiles. ergo & CF FD mediæ potẽtia solũ cõmẽsurabiles erũt; ac propterea mediæ apotome est CD. ostendendum est & ordine eandem esse, quę AB. Quoniam enim vt AE ad EB, ita CF ad FD; vt autem AE ad EB, ita quadratum ex AE ad rectangulum AEB; & vt CF ad FD, ita quadratum ex CF ad CFD rectangulum: erit & vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. sed quadratum ex AE cõmẽsurabile est quadrato ex CF. rectangulum igitur AEB rectangulo CFD est commensurabile. & si quidem rationale est rectangulum AEB, & rectangulum CFD rationale erit. si vero rectangulum AEB medium est, & medium erit rectangulum CFD. mediæ igitur apotome est CD, atque ordine eadem, quæ AB.

73.76. huius

Lem. ad 25. huius.



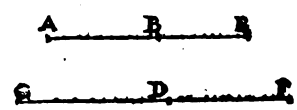
THEOREMA LXXXII. PROPOSITIO. CVI.

Recta linea minori commensurabilis, & ipsa minor est.

Sit minor AB, & ipsi AB commensurabilis sit CD. Dico & CD minorem esse. fiant enim eadem quæ prius. & quoniam AE EB potentia sunt incõmensurabiles, & CF FD potentia incõmẽsurabiles erũt. est aũt vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare & vt quadratũ ex AE ad quadratũ ex EB, ita quadratũ ex CF ad

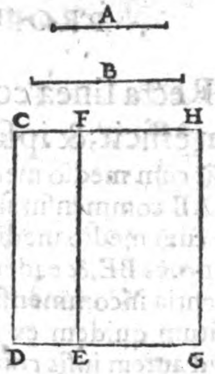
77. huius.

22. sexti.



quadratum

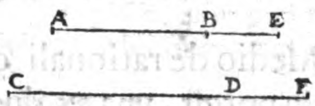
quadratum ex FD: & componendo, vt quadrata ex AE EB ad quadratum ex EB, ita quadrata ex CF FD ad quadratum ex FD; & permutando. commensurabile autem est quadratum ex BE quadrato ex DF. ergo & compositum ex quadratis ipsarum AE EB composito ex quadratis CF FD commensurabile erit. sed compositū ex quadratis AE EB est rationale. ergo & rationale erit compositum ex quadratis CF FD. Rursus quoniam est vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD, & permutando; commensurabile autem est quadratum ex AE quadrato ex CF: erit & rectangulum AEB rectangulo CFD commensurabile. sed rectangulum AEB medium est. medium igitur & rectangulum CFD. quare CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale: quod autem ipsis continetur medium. ergo CD est minor. 77. huius.



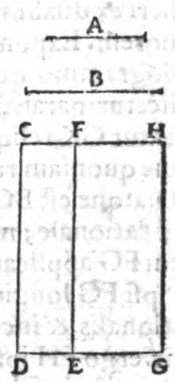
ALITER. Sit minor A, & ipsi A commensurabilis sit B. Dico B minorem esse. Exponatur enim CD rationalis: & quadrato ex A ęquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudine faciens CF. apotome igitur quarta est CF. 101. huius. quadrato autem ex B ęquale ad FE applicetur FG, latitudinem faciens FH. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato quidem ex A ęquale est parallelogrammum CE; quadrato autem ex B æquale FG. ergo CE commensurabile est ipsi FG. vt autem CE ad FG, ita CF ad FH. commēsurabilis igitur est CF ipsi FH longitudine. sed CF est apotome quarta. ergo & FH apotome quarta est; et spacium FG rationali, et apotoma quarta continetur. 104. huius. 95. huius. recta igitur linea spacium potens minor est. potest autem spacium FG ipsa B. ergo B est minor.

THEOREMA LXXXIII. PROPOSITIO CVII.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum rationali medium totum efficit, & ipsa cum rationali medium totum efficiens est.



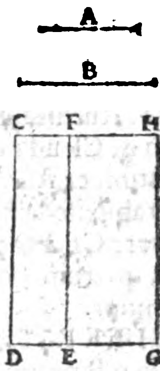
Sit cum rationali medium totum efficiens AB: et ipsi AB commensurabilis sit CD. Dico CD esse eam, quę cum rationali medium totum efficit. sit enim ipsi AB congruens BE. ergo AE EB potentia incommensurabiles sunt, facientes cōpositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem ipsis continetur rationale. 78. huius. et eadem construantur. similiter demonstrabitur, vt prius CF FD in eadem esse proportione, in qua AE EB: et compositum ex quadratis ipsarum AE EB commensurabile esse composito ex quadratis CF FD: rectangulum autem AEB rectangulo CFD commensurabile. quare et CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis CF FD, medium; quod autem ipsis continetur, rationale. ergo CD est quæ cum rationali medium totum efficit. 78. huius.



ALITER. Sit cum rationali medium totum efficiē A, et ipsi A commensurabilis B. Dico B esse eam, quę cū rationali medium totum efficit. Exponatur enim rationalis CD: et quadrato quidem ex A æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudinem faciens CF. ergo CF est apotome quinta: quadrato aūt ex B ęquale 102. huius.

FG ad

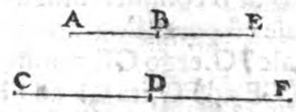
FG ad ipsam FE applicetur, latitudinem faciens FH. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato ex A æquale est parallelogrammum CE; quadrato autem ex B æquale FG. ergo CE est commebsurabile ipsi FG, ob idque recta linea CF ipsi FH longitudine est commensu-
104.huius. rabilis. apotome autem quinta est CF. ergo & FH est apotome quinta; estq; FE rationalis. si autem spacium conti-
96.huius. neatur rationali, & apotoma quinta, recta linea spacium potens est, quæ cum rationali medium totum efficit. sed ipsa B potest spacium FG. ergo B cum rationali medium totum efficiens est.



THEOREMA LXXXIIII. PROPOSITIO CVIII.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum medio medium totum efficit, & ipsa cum medio medium totum efficiens est.

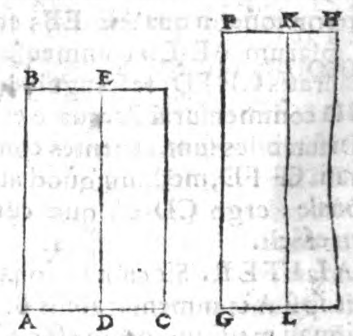
Sit cum medio medium totum efficiens AB: & ipsi AB commensurabilis sit CD. Dico CD esse eã, quę cum medio medium totum efficit. sit ipsi AB
79.huius. congruẽs BE, & eadem cõstruantur. ergo AE EB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium; quod autem ipsis continetur medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis. & sunt AE EB commensurabiles ipsis CF FD, vt ostensum est: & compositum ex quadratis AE EB commensurabile composito ex quadratis CF FD: rectangulumque AEB rectangulo CFD. ergo CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium; quod autem ip-
79.huius. sis continetur medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. ergo CD est quę cum medio medium totum efficit.



THEOREMA LXXXV. PROPOSITIO CIX.

Medio de rationali detracto, recta linea, quæ reliquum spacium potest, vna ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.

De rationali enim BC medium BD detrahatur. Dico eam, quæ reliquum spacium EC potest, vnam fieri ex duabus irrationalibus, vel apotomẽ vel minorem. Exponatur enim rationalis FG: & parallelogrammo quidem BC æquale GH ad FG applicetur; parallelogrammo autem BD æquale auferatur GK. reliquum igitur CE est æquale LH. Itaque quoniam rationale est BC, medium autem BD: atque est BC ęquale GH, & BD ipsi GK; erit GH rationale; medium autem GK, & ad ra-
22.huius. tionalem FG applicatum est. rationalis igitur est
23.huius. FH, & ipsi FG longitudine commensurabilis: FK vero rationalis, & incommensurabilis ipsi FG lõ-
23.huius. gitudine. ergo FH ipsi FK longitudine incommensurabilis est, & HF FK rationa-
74 huius. les sunt, potentia solum commensurabiles; ac propterea HK est apotome. ipsi vero congruens



congruens KF. vel igitur HF plus potest, quàm FK quadrato rectę lineę sibi commē
surabilis longitudine, vel incommensurabilis. posit primum quadrato rectæ lineæ
commensurabilis. atque est tota HF commensurabilis longitudine expositę ratio-
nali FG. ergo HK prima est apotome. recta autem linea, quæ potest spacium ratio- 1.tertiarum.
nali, & apotoma prima contentum est apotome. Ergo quæ potest LH hoc est CE diffin.
apotome est. quòd si HF plus posit, quàm FK quadrato rectę lineæ sibi incommen 92.huius.
surabilis longitudine; estq; tota HF expositæ rationali FG longitudine commensu-
rabilis; erit HK apotome quarta. & quę potest spacium rationali, & apotoma quar- 4 diffin.tertiarum.
ta contentum minor est. quæ igitur potest spacium LH, videlicet EC est minor. 95.huius.

THEOREMA LXXXVI. PROPOSITIO CX.

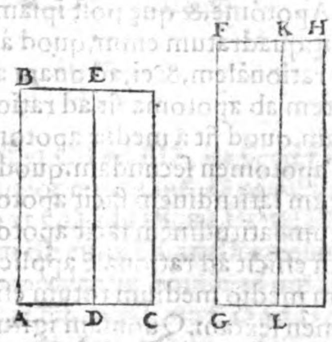
Rationali de medio detracto alię duę irrationales fiunt, vel me
dię apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

De medio enim BC rationale BD detra-
hatur. Dico rectā lineā, quæ reliquū spaciū
EC potest, vnā duarum irrationalium fieri
vel mediæ apotomen primam, vel eam, quę
cum rationali medium totum efficit. Expo-
natur enim rationalis FG, & ad ipsam simili
ter spacia applicentur; erit rationalis quidē
FH, & ipsi FG longitudine incommensurabi 23.huius
lis; rationalis autem FK, & incommensurabi- 21.huius.
lis ipsi FG longitudine. ergo HF FK rationa
les sunt potentia solum commensurabiles; ac
propterea apotome est HK, & ipsi congruēs 74.huius
KF. vel igitur HF plus potest, quàm FK qua-
drato rectæ lineæ sibi longitudine commen-
surabilis, vel incommensurabilis. & si quidē
commensurabilis; atque est congruens FK commensurabilis expositæ rationalis F
G longitudine: erit HK apotome secunda. est autem FG rationalis. ergo quæ potest
spacium LH, hoc est CE, mediæ est apotome prima. quòd si HF plus potest, quàm 2.diffi.tertiarum.
FK quadrato rectæ lineę sibi longitudine incommensurabilis; atque est congruens 93.huius.
FK commensurabilis expositę rationali FG longitudine: erit HK apotome quinta. 5.diffi.tertiarum.
recta igitur linea potens spacium EC est quæ cum rationali medium totum efficit. 99.huius.

THEOREMA LXXXVII. PROPOSITIO. CXI.

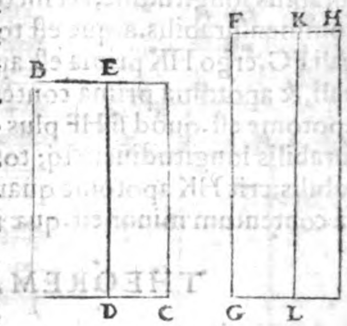
Medio de medio detracto, quod sit incommensurabile toti,
reliquę duæ irrationales fiunt, vel medię
apotome secunda, vel cum medio me-
dium totum efficiens.

Detrahatur enim, vt in propositis figuris de me-
dio BC medium BD, quod sit incommensurabile to
ti. Dico rectam lineam, quæ potest spacium CE, vnā
esse ex duabus irrationalibus, vel medię apotomen
secundam, vel eam, quæ cum medio medium totum
efficit. Quoniam enim medium est vtrumque ipsorū
BC BD, & BC incommensurabile est ipsi BD, hoc
est GH ipsi GK; erit HF ipsi FK incommensurabilis
longitudine. ergo HF FK rationales sunt potentia 23.huius.
solum commensurabiles; & ob id apotome est HK, & ipsi congruens KF. itaque vel 74.huius.
HF plus



HF plus potest, quàm FK quadrato rectæ lineę sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: & si quidem commensurabilis, & neutra ipsarum HF FK commensurabilis est expositæ rationali FG longitudine; erit HK apotome tertia. rationalis autem est KL: & rectangulum rationali, & apotoma tertia contetum irrationale est. ergo recta linea, quę ipsum potest, est irrationalis, & vocatur medię apotome secunda. si vero HF plus potest, quàm FK quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & neutra ipsarum HF FK longitudine commensurabilis est expositæ rationali FG; erit HK apotome sexta. at recta linea potens quod rationali, & apotoma sexta cõtinetur est quæ cum medio medium totum efficit. ergo quæ potest spacium LH, hoc est EC est cum medio medium totum efficiens.

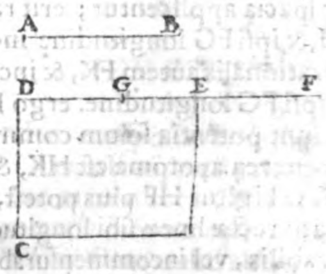
3. diffi. tertiarum.
94. huius.
6. diffi. tertiaum.
97. huius.



THEOREMA LXXXVIII. PROPOSITIO. CXII.

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus.

Sit apotome AB. Dico AB non esse eandem, quæ ex binis nominibus. sit enim, si fieri potest; exponaturque rationalis DC, & quadrato ex AB æquale rectangulum CE ad ipsam DC applicetur latitudinem faciens DE. Quoniam igitur apotome est AB, erit DE apotome prima. sit ipsis congruens EF. ergo DF FE rationales sunt potentia solum commẽsurabiles: & DF plus potest, quàm FE quadrato rectæ lineę sibi longitudine commẽsurabilis: atq; est DF cõmẽsurabilis expositę rationali CD lõgitudine. Rursus qm̃ ex binis nominibus est AB, erit DE ex binis nominibus prima. Diuidatur in nomina ad pũctũ G; sitq; DG maius nomẽ. ergo DG GE rationales sunt, potẽtia solũ cõmẽsurabiles: & DG plus põt, quã GE quadrato rectæ lineæ sibi cõmẽsurabilis lõgitudine: & maior DG longitudine commensurabilis est expositę rationali DC. quare DF ipsi DG longitudine est commensurabilis. & reliquę igitur FG commensurabilis erit. Itaq; quoniam DF commensurabilis est ipsi FG, atque est rationalis DF; erit & FG rationalis. Rursus quoniam DF commensurabilis est ipsi FG longitudine, atque est DF ipsi FE incommensurabilis longitudine; erit & FG ipsi FE longitudine incommensurabilis: & sunt rationales. ergo GF FE rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea apotome est EG. sed & rationalis. quod fieri non potest. ergo apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus.



98. huius.
1. diffi. tertiatum.
61. huius
37. huius.
61. huius
Ex demonstratis ad 17. huius.
74. huius.

Apotome, & quę post ipsam sunt irrationales, neque medię, neque inter se eædẽ sunt: quadratum enim, quod à media fit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit rationalem, & ei, ad quam applicatur, longitudine incommensurabilem. quod autem ab apotoma fit ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen primam. quod fit à mediæ apotoma prima ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. quod fit à mediæ apotoma secunda ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam. quod fit à minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam. quod ab ea, quæ cum rationali mediũ totũ efficit ad rationalẽ applicatũ latitudinẽ facit apotomẽ quintã. quod ab ea, quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam. Quoniam igitur dictę latitudines differunt tum à prima, tum inter se se, à prima quidem, quòd rationalis sit, inter se vero, quòd ordine non sint eædẽ; manifestum est & ipsa irrationales inter se differentes esse. & ostensum est apotomẽ

23. huius.
98. huius.
99. huius.
100. huius.
101. huius.
102. huius.
103. huius.

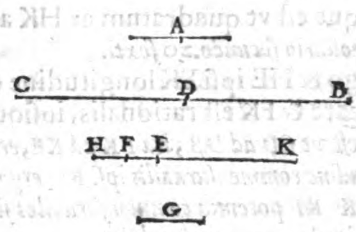
non esse eandem, quæ ex binis nominibus. quadrata autem apotomæ & earum quæ sunt post apotomen ad rationalem applicata latitudines faciunt apotomas eiusdē ordinis, cuius & illæ sunt, quarum quadrata applicantur. Similiter & quadrata eius, quæ est ex binis nominibus, & earum, quæ post ipsam sunt ad rationalem applicata latitudines faciunt eas, quæ ex binis nominibus eiusdem ordinis, cuius & illę sunt. ergo rectę lineæ, quæ sequuntur apotomen, & quæ sequuntur eam, quæ ex binis nominibus, inter se differunt, ita vt omnes sint numero tredecim, videlicet.

1 Media.
2 Quæ ex binis nominibus
3 Quę ex binis medijs prima
4 Quæ ex binis medijs secunda
5 Maior
6 Rationale ac medium potens
7 Bina media potens
8 Apotome
9 Mediæ apotome prima.
10 Mediæ apotome secunda.
11 Minor.
12 Cum rationali medium totum efficiens.
13 Cum medio medium totum efficiens.

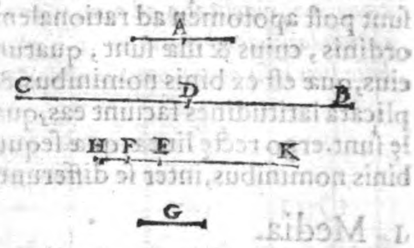
THEOREMA LXXXIX. PROPOSITIO. CXIII.

Quadratum rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

Sit rationalis A; ea, quę est ex binis nominibus BC, cuius maius nomen CD: & quadrato ex A æquale rectangulum sit quod BC EF continetur. Dico EF apotomen esse, cuius nomina commensurabilia sunt ipsis CD DB, & in eadem proportione, & adhuc EF eundem ordinem habere, quam habet BC. Sit enim rursus quadrato ex A æquale rectangulum, quod BD & G continetur. Itaque quoniam rectangulum contentum BC EF est ęquale ei, quod BD G continetur, erit vt CB ad BD, ita G ad EF: A



maior autem est CB, quàm BD. ergo & G quàm EF maior erit. sit ipsi G ęqualis EH. est igitur vt CB ad BD, ita HE ad EF. & diuidendo vt CD ad DB, ita HF ad FE, B fiat vt HF ad FE, ita FK ad KE. ergo & tota HK ad totam KF est vt FK ad KE. vt enim vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. sed vt FK ad KE, ita CD ad DB. & vt igitur HK ad KF, ita CD ad DB. C D commēsurabile aūt est quadratū ex CD quadrato ex DB. ergo & quadratū ex HK quadrato ex KF est commensurabile. atque est vt quadratum ex HK ad quadratum ex E F



KF, ita recta linea HK ad KE, quoniam tres rectæ lineæ HK KF KE deinceps proportionales sunt. commensurabilis igitur est HK ipsi
G KE longitudine. ergo & HE ipsi EK longitudine est commensurabilis. & quoniã quadratum ex A est æquale ei, quod HE BD continetur; rationale autem est quadratum ex A: erit & quod HE BD continetur rationale: & ad rationalem BD applicatum est.
21. huius rationalis igitur est HE, & ipsi BD longitudine commensurabilis; ideoq; & EK, quæ est incommensurabilis ipsi HE rationalis erit, & ipsi BD commensurabilis longitudine. Quoniam igitur est vt CD ad DB, ita FK ad KE; sunt autẽ CD DB potentia solum cõmensurabiles: & FK KE potentia solum commensurabiles erunt. rationalis autem est KE, & ipsi BD commensurabi-
H lis longitudine. quare & FK est rationalis, ipsiq; CD longitudine commensurabilis. sunt igitur FK KE rationales, & potentia solum commensurabiles: & idcirco EF apotome est. itaque vel CD plus potest, quàm DB quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. & si quidem commensurabilis,
15. huius. etiam FK plus poterit, quàm KE quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. & si CD commensurabilis est expositæ rationali longitudine, & FK eidem commensurabilis erit: si autem BD, & KE. & si neutra ipsarum CD DB, & neutra ipsarum FK KE. Quòd si CD plus potest, quàm DB quadrato rectæ lineę sibi incommensurabilis longitudine, & FK plus poterit, quàm KE quadrato rectæ lineæ sibi lõgitudine incommensurabilis. & si BD, & KE. at si neutra ipsarum CD DB, & neutra ipsarum FK KE. ergo EF apotome est, cuius nomina FK KE commensurabilia sunt nominibus CD DB eius, quę est ex binis nominibus, & in eadem proportione, & eundem habet ordinem, quem CB.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erit vt CB ad BD, ita G ad EF] *Ex 14 sexti.*

B Ergo & G, quàm EF maior erit] *Ex iis, quae à nobis demonstrata sunt ad 16 quinti.*

C Ergo & tota HK ad totam KF est vt FK ad KE] *Ex 12 quinti.*

D Commensurabile autem est quadratum ex CD quadrato ex DB] *Ex 37 huius, ponitur enim CB ea, quae ex binis nominibus.*

E Ergo et quadratum ex HK quadrato ex KF est commensurabile] *Ex 22 sexti, & decima huius.*

F Atque est vt quadratum ex HK ad quadratum ex KF, ita recta linea HK ad KE] *Ex corollario secundo 20 sexti.*

G Ergo & HE ipsi EK longitudine est commensurabilis] *Ex 16. huius.*

H Quare & FK est rationalis, ipsique CD longitudine commensurabilis] *Quoniam igitur est vt CD ad DB, ita FK ad KE, erit permutando vt KE ad DB, ita FK ad CD. sed KE est longitudine commensuraailis ipsi BD. ergo & FK ipsi CD commensurabilis erit longitudine. quòd cum FK KE potentia commensurabiles sint, sitq; rationalis KE, erit & FK rationalis, & ipsi CD longitudine commensurabilis.*

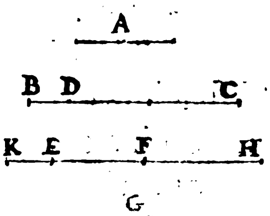
K Et idcirco EF apotome est] *Ex 74 huius.*

Sit A 2, CB R 12 plus 3, vt CD sit R 12, DB 3. & si quadratum ex A, quod est 4, applicetur ad DB latitudinẽ faciẽs G, erit G 1 $\frac{1}{3}$, cui ęqualis sit HE. fiat vt CB ad BD, ita HE, ad EF videlicet vt R 12 plus 3 ad 3, ita 1 $\frac{1}{3}$ ad aliũ. multiplicabimus igitur 3 per 1 $\frac{1}{3}$ producetur 4, & 4 diuidemus per R 12 plus 3, hoc est applicabimus 4 ad R 12 plus 3. quod quidẽ hoc modo fiet. multiplicetur R 12 plus 3 per apotomen ipsi respondentem, hoc est per R 12 minus 3. producitur 3. rursus multiplicetur 4 per eandem R 12 minus 3. producitur R 192 minus 12. quare ex 17 septimi 3 ad R 192 minus 12 proportionem habebit eandem, quam R 12 plus 3 ad 4. & ob id R 192 minus 12 ad 3 applicata latitudinem faciet eandem, quã 4, si applicetur ad R 12 plus 3. sed

3. sed ℞ 192 minus 12 applicata ad 3 latitudinem facit ℞ 21 $\frac{1}{3}$ minus 4. quadratum igitur rationalis 2, videlicet 4 ad eam, quae est ex binis nominibus secunda, hoc est ad ℞ 12 plus 3 applicatum latitudinem facit ℞ 21 $\frac{1}{3}$ minus 4, quae est secunda apotome, cuius nomina commensurabilia sunt ipsis nominibus CD DB, & in eadem proportione.

PROBLEMA XC. PROPOSITIO CXIIII.

Quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eam, quę ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, & in eadem proportione, & adhuc quæ ex binis nominibus fit eundem habet ordinem, quæ ipsa apotome.



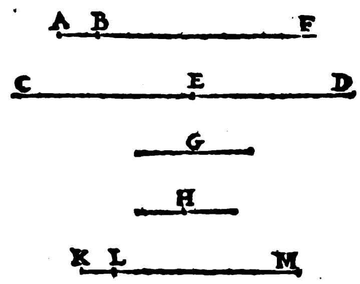
Sit rationalis quidem A, apotome autem B D: & quadrato ex A æquale sit quod BD KH continetur, ita vt quadratum rationalis A ad BD applicatum latitudinem faciat KH. Dico KH ex binis nominibus esse, cuius nomina commẽsurabilia sunt nominibus ipsius BD, & in eadem proportione: & K H eundem habere ordinem, quem habet B D. sit enim ipsi BD congruens DC. ergo BC CD rationales sunt potentia solum commensurabiles: & quadrato ex A ęquale sit, quod BC, & G continetur. rationale autem est 74. huius. quadratum ex A. ergo quod BC G continetur est rationale; & ad rationalem BC applicatum est. rationalis igitur est recta linea G, ipsiq; BC longitudine commensurabilis. 21. huius. itaque quoniam rectangulum contentum BC G est æquale ei, quod BD KH continetur, erit vt CB ad BD, ita KH ad G. maior autem est CB, quàm BD. ergo & KH, quàm G est maior. 14. sexti: ponatur ipsi G ęqualis KE. commẽsurabilis igitur est KE ipsi BC longitudine. & quoniam est vt CB ad BD, ita HK ad KE, erit per cõuersionem rationis vt BC ad CD, ita KH ad HE. Ex demonstratis ad 16. quinti. fiat ut KH ad HE, ita HF ad FE. & reliqua igitur KF ad FH est ut KH ad HE, hoc est vt BC ad CD. 19. quinti: sed BC CD potentia solum sunt commensurabiles. ergo & KF FH potentia solum cõmensurabiles erũt. & cum sit vt KH ad HE, ita KF ad FH: vt autem KH ad HE, ita HF ad FE, erit & ut 11. quinti. KF ad FH, ita HF ad FE. quare & vt prima ad tertiam, ita quadratum ex prima ad quadratum ex secunda. Corr. 2. 20. sexti. vt igitur KF ad FE, ita quadratum ex KF ad id, quod ex FH quadratum. commensurabile autem est quadratum ex K F quadrato ex F H; sunt enim KF FH potentia solum commensurabiles. ergo & KF ipsi FE commensurabilis est longitudine: ac propterea FK ipsi KE longitudine commensurabilis. sed KE rationalis est, & ipsi B C longitudine commensurabilis. ergo & K F rationalis erit, & commensurabilis ipsi BC longitudine. & quoniã est vt BC ad CD, ita KF ad FH, erit permutando vt BC ad KF, ita DC ad FH. commensurabilis autem est B C ipsi KF. quare & CD ipsi FH est commensurabilis: suntq; B C C D rationales potentia solum commensurabiles. ergo & KF FH rationales potentia solum commensurabiles erunt. ex binis igitur nominibus est KH. & si quidem BC plus potest, quàm CD quadrato rectę lineæ sibi lõgitudine commensurabilis, & KF plus poterit, quàm FH quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. & si BC longitudine commensurabilis est expositę rationali, & KF eidem commensurabilis erit. si vero CD est commensurabilis longitudine expositę rationali, erit & ipsa FH eidem commẽsurabilis; & si neutra ipsarum BC CD, & neutra ipsarum KF FH. at si BC plus potest, quàm CD quadrato rectę lineę sibi longitudine incommensurabilis, & KF plus poterit, quàm FH quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. & siquidem BC longitudine commensurabilis est expositę rationali, & KF eidem commensurabilis erit. si vero CD, & ipsa FH. quòd si neutra ipsarum BC CD, & neutra ipsarum KF FH. ex binis igitur nominibus est KH, cuius nomina KF FH commensurabilia sunt nominibus apotomæ BC CD; & in eadem proportione; & KH eundem tenet ordinem, quem ipsa BC.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 2, BD ℞ 18 minus R 10. *& multiplicetur* R 18 *minus* ℞ 10 *per eam, quę ex binis nominibus ipsi respondet, videlicet per* R 18 *plus* R 10 *producitur* 8, *rursus multiplicetur ipsius A rationalis quadratum, quod est 4 per eandem, producitur* R 288 *plus* ℞ 160. *habebit igitur 8 ad* ℞ 288 *plus* ℞ 160 *proportionem eandem, quam* ℞ 18 *minus* ℞ 10 *ad 4 ex 17 septimi. quare si* ℞ 288 *plus* R 160 *applicetur ad 8 latitudinem faciet* ℞ $4\frac{1}{2}$ *plus* ℞ $2\frac{1}{2}$, *& eandem latitudinem faciet 4, si ad* R 18 *minus* ℞ 10 *applicetur. quadratum igitur rationalis 4 applicatum ad tertiam apotomen, videlicet ad* ℞ 18 *minus* R 10 *latitudinem facit eam, quae est ex binis nominibus tertia, hoc est* ℞ $4\frac{1}{2}$ *plus* R $2\frac{1}{2}$ *cuius nomina commensurabilia sunt apotomae nominibus, & in eadem proportione.*

THEOREMA XCI. PROPOSITIO. CXV.

Si spacium cōtinetur apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sint nominibus apotomę, & in eadem proportione; recta linea spacium potens est rationalis.



Spacium enim contineatur AB CD, videlicet apotoma AB, & CD, quę sit ex binis nominibus, cuius maius nomen CE: & sint nomina eius, quæ ex binis nominibus CE ED commensurabilia nominibus apotomæ AF FB: & in eadē proportione; sitq; recta linea G potens spacium contentum AB CD. Dico ipsam G rationalem esse. exponatur enim rationalis H: & quadrato ex H æquale ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens KL. apotome igitur est KL, cuius nomina KM ML commensurabilia sint nominibus eius, quę est ex binis nominibus CE ED, & in aedem proportione. sed CE ED commensurabiles sunt ipsis AF FB, atque in eadem proportione. est igitur vt AF ad FB, ita KM ad ML. & permutando vt AF ad KM, ita FB ad LM. quare & reliqua AB ad reliquam KL est vt AF ad KM. commensurabilis autem est AF ipsi KM. ergo & AB ipsi KL est cōmensurabilis. estq; vt AB ad KL, ita rectangulum contentum CD AB ad id, quod continetur CD KL. commensurabile igitur est rectangulum contentum CD AB rectangulo, quod CD KL continetur. sed rectangulum contentum CD KL est ęquale quadrato ex H. ergo rectangulum, quod continetur CD AB quadrato ex H est commensurabile. rectangulum autem, quod continetur CD AB est æquale quadrato ex G. ergo quadratū ex G commensurabile est quadrato ex H. atque est quadratum ex H rationale. rationale igitur est quadratum ex G; & idcirco ipsa G est rationalis; & potest quod CD AB continetur. Si igitur spacium contineatur apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sint nominibus apotomæ, & in eadē proportione, recta linea spacium potens est rationalis.

113. huius.
19. quinti.
10. huius.
1. sexti.

COROLLARIVM.

Ex ijs manifesto constat fieri posse, vt spaciū rationale irrationalibus rectis lineis contineatur.

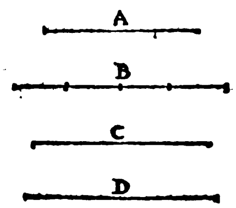
F. C.

Sit apotome AB R 21 $\frac{1}{3}$ *minus* 4. *ea vero, quae ex binis nominibus CD sit* 12 *plus* 3. *& multiplicetur* R 21 $\frac{1}{3}$ *minus* 4 *plus* R 12 *plus* 3. *fit* R 256, *quae est* 16 *minus* 12, *hoc est* 4, *quod est rationale, & eius radix* 2 *rationalis.*

THEOREMA XCII. PROPOSITIO. CXVI.

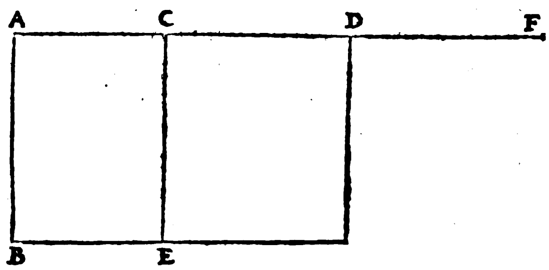
A media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

Sit media A. Dico ex ipsa A infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem esse. exponatur enim rationalis B. & rectangulo contento A B æquale sit quadratum ex C. irrationalis igitur est ipsa C nam quod rationali, & irrationali continetur irrationale est, & nulli earum, quę prius est eadem: non enim quadratum alicuius antecedentium ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rursus rectãgulo, quod BC continetur, æquale sit quadratum ex D. irrationale igitur est, quod fit ex D: & idcirco ipsa D est irrationalis, & nulli antecedentium eadem. neque enim quadratum alicuius earum, quæ prius sunt ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipsam C. Similiter & eodem ordine infinite protracto, manifestum est à media infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem esse.



In scholio ad 39. huius.

ALITER. Sit media AC. Dico ex ipsa AC infinitas irrationales fieri, & nullam alicui priorum eandẽ esse. ducatur ipsi AC ad rectos angulos AB: sitque AB rationalis, & BC cõpleatur. irrationale igitur est BC, & quæ ipsum potest est irrationalis. posſit autẽ ipsum recta linea CD. ergo CD irrationalis est, & nulli priorum eadem. non enim quadratum alicuius priorum ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rursus compleatur ED; erit ED irrationale; & recta linea ipsum potens irrationalis. posſit ipsum recta linea DF. ergo DF irrationalis est, & nulli priorum eadem. nullius enim priorum quadratum, si ad rationalem applicetur, latitudinem efficit ipsam CD. ergo à media infinitę irrationales fiunt, & nulla alicui priorum est eadem.



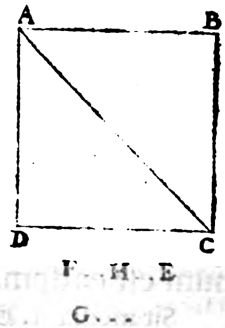
THEOREMA XCIII. PROPOSITIO CXVII.

Propositum sit nobis ostendere in quadratis figuris diametrũ lateri incommensurabilem esse longitudine.

Sit quadratum ABCD, cuius diameter AC. Dico AC ipsi AB longitudine incõmensurabilem esse. si enim fieri potest, sit commensurabilis. Dico ex hoc sequi eundem numerum parem esse, & imparem. itaque manifestum est quadratum ex AC duplum esse quadrati ex AB. & quoniam AC commensurabilis est ipsi AB, habebit AC ad AB proportionem eam, quam habet numerus ad numerũ. habeat, quam EF ad

A
B

EF ad G: sintq; EF G numeri minimi eorum, qui eandem habent proportionem. non igitur vnitas est EF. si enim est vnitas,& habet ad G proportionem eam, quam AC ad AB; estq; AC maior, quàm AB: & EF vnitas, quàm G numerus maior erit. quod est absurdum. ergo EF non est vnitas. qua-



C re numerus sit necesse est. & quoniam vt AC ad AB, ita est EF ad G, erit & vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum. duplum autem est quadratum ex CA quadrati ex AB. ergo & quadratus ex EF quadrati ex G est duplus: ac propterea quadratus ex EF par est, & ipse EF par. si enim esset

D impars,& qui fit ab ipso quadratus impar esset, quoniam si impares numeri quomodocumque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar; & totus impar erit. ergo EF est par. secetur bifariam in H.& quoniam numeri EF G minimi sunt eorum, qui eandem habent proportio

E nem, inter se primi sunt: & est EF par. impar igitur est G: si enim esset par, numeros EF G binarius metiretur; omnis enim par dimidiam partem habet. atqui primi inter se sunt. quod fieri non potest. non igitur G est impar. ergo par. & quoniam FE

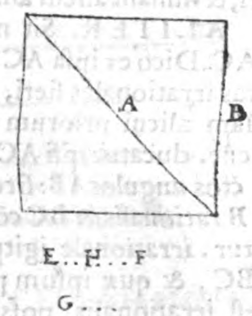
F duplus est ipsius EH, erit quadratus ex FE quadrati ex EH quadruplus. est autem

G quadratus ex EF duplus quadrati ex G. duplus igitur est quadratus ex G quadrati

H ex EH. ideoq; par est qui fit ex G quadratus. & ex iam dictis ipse G est par; sed & im

K par. quod fieri non potest. non igitur AC commensurabilis est ipsi AB longitudine. ergo est incommensurabilis.

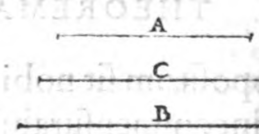
ALITER. Sed & aliter ostendendum est incommensurabile esse quadrati diametrum ipsius lateri. sit enim pro diametro quidem A, pro latere autem B. Dico A ipsi B lõgitudine incommensurabilem esse. si enim fieri potest, sit commensurabilis. & rursus fiat vt A ad B, ita EF numerus ad ipsum G: sintq; minimi eorum, qui eandem habent pro-



24. septimi. portionem. ergo EF G primi inter se sunt. Dico primum, G non esse vnitatem. si enim fieri potest, sit G vnitas. & quoniam est vt A ad B, ita EF ad G, erit & vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum: duplum autem est quadratum ex A quadrati ex B. ergo & quadratus ex EF quadrati ex G est duplus: atq; est G vnitas. binarius igitur est quadratus ex EF. quod fieri non potest. ergo G non est vnitas. numerus igitur. & quoniam est vt quadratũ ex A ad quadratum ex B, ita quadratus ex EF ad quadratum ex G. & conuertendo vt quadratum ex B ad quadratum ex A, ita quadratus ex G ad quadratum ex EF. sed quadratum ex B metitur quadratum ex A. ergo & qui fit ex G quadratus meti

L tur eum, qui fit ex EF; & propterea latus G ipsum EF latus metitur. metitur autem & se ipsum. ergo G numeros EF G metitur, primos inter se existentes. quod fieri minime potest. non igitur A ipsi B longitudine est commensurabilis. quare incommensurabilis sit necesse est.

Itaque inuentis longitudine incommensurabilibus rectis lineis, vt AB, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines ex duabus dimensionibus. nimirum superficies incommensurabiles inter se. si enim ipsarum AB mediam proportionalem



M sumamus rectam lineam C, erit vt A ad B, ita figura, quæ fit ex A ad eam, quæ ex C similem, & similiter descriptam, siue quadrata, si

N ue alia rectilinea similia, siue circuli, qui circa diametros AC describantur. quando quidem circuli inter se sunt, vt diametrorum quadrata. Inuenta igitur sunt spacia plana inter se incommensurabilia. ostensis autem his ostendemus etiam ex solidorum

rum contemplatione ipsa solida esse commensurabilia, & incommensurabilia inter se se. nam si in quadratis ex AB, vel in rectilineis, quæ ipsis æqualia sint solida æque alta constituamus, siue parallelepipeda, siue pyramides, siue prismata, erunt ea inter se, vti bases. & si quidem bases commensurabiles sint, erunt solida commensurabilia; si vero incommensurabiles, & ipsa incommensurabilia erunt. sed & duobus circulis existentibus AB, si in ipsis conos æque altos, siue Cylindros constituamus, erunt inter se, vti ipsorum bases, hoc est vt AB circuli, & si quidem circuli commensurabiles sint, commensurabiles erunt & coni inter se se, & Cylindri; si vero incommensurabiles, & coni, & Cylindri incommensurabiles erunt. ex quibus perspicuum est non solum in lineis, & superficiebus esse commensurabilitatem, & incommensurabilitatem, sed & in solidis figuris. O P

F. C. COMMENTARIVS.

Manifestum est quadratum ex AC duplum esse quadrati ex AB] *Ex 47 primi.* A

Habebit AC ad AB proportionem eam, quam numerus habet ad numerum] *Ex 5. huius.* B

Et quoniam vt AC ad AB, ita est EF ad G; erit & vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum] *Quoniam enim est vt AC ad AB, ita EF ad G, erit et vt proportio AC ad AB duplicata, ita proportio EF ad G duplicata. sed vt proportio quidem AC ad AB duplicata, ita est quadratum ex AC ad quadratum ex AB ex corollario secundo 20. sexti; vt autem proportio EF ad G duplicata, ita est quadratum ex EF ad quadratum, ex G ex 11 octaui. ergo ex 11 quinti vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita erit quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum.* C

Quoniam si impares numeri quomodocunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar, & totum impar erit] *Ex 23 noni. sequitur enim hoc ex 29 eiusdem.* D

Inter se primi sunt] *Ex 24 septimi.* E

Erit quadratus ex FE quadrati ex EH quadruplus] *Ex 11. octaui.* F

Duplus igitur est quadratus ex G quadrati ex EH] *Proportio enim quadrati ex FE ad quadratum ex EH, interiecto quadrato ex G, composita est ex proportione quadrati ex FE ad quadratum ex G, & proportione quadrati ex G ad quadratum ex EH. sed proportio quadrati ex FE ad quadratum ex EH est quadrupla: proportio autem quadrati ex FE ad quadratū ex G est dupla. ergo & proportio quadrati ex G ad quadratum ex EH dupla erit.* G

Ideoq; par est, qui fit ex G quadratus] *Quoniam enim quadratus ex G duplus est quadrati ex EH, partem habet dimidiam, quare par necessario erit.* H

Et ex iam dictis ipse G est par] *Si enim sit impar, & quadratus ex ipso impar est ex 29 noni. sed & par. quod fieri non potest.* K

Et propterea latus G ipsum EF latus metitur] *Ex 14 octaui,* L

Erit vt A ad B, ita figura, quę fit ex A ad eam, quæ ex C similem, & similiter descriptam] *Ex corollario secundo vigesimae sexti.* M

Quandoquidem circuli inter se sunt, vt diametrorum quadrata] *Ostenditur id in secunda propositione duodecimi libri. vnde colligi potest hac siue sint Euclidis, siue alterius alieno loco posita esse.* N

Nam si in quadratis ex AB, vel in rectilineis, quę ipsis æqualia sint, solida ęque alta constituamus, siue parallelepipeda, siue pyramides, siue prismata, erunt ea inter se vti bases] *Ex 32 vndecimi, & ex 5. & 6. duodecimi,* O

Sed & duobus circulis existētibus AB, si in ipsis conos æque altos, siue Cylindros constituamus, erunt inter se, vti ipsorum bases] *Ex 11. duodecimi.* P

DECIMI LIBRI FINIS.

SCHOLIVM.

Antiqui planorum cognitionem à scientia solidorum distinxerunt. etenim illam geometriam appellarunt, vt etiam Plato ostendit in politicis; hanc autem stereometriam. At vero Iuniores cum utriusque scientiæ communis sit cognitio, quæ circa magnitudines uersatur, etiam communi nomine geometriam dixerunt, eas uelut unam coniungentes. Et quemadmodum in planis alia quidem erant rectilinea, alia uero circularia, & alia mixta, ut helices, ita in solidis, alia constant ex planis rectilineis, alia ex sphæricis, alia ex mixtis, ut cylindrus & conus. Et sphærica quidem ad terminum & finem pertinent; rectilinea uero, uel quæ ex rectilineis sunt ad infinitum; mixta ad id, quod occultum est. & si aliquod est corpus, hoc & solidum est, non autem contra, ut in ijs, quæ dicta sunt: hæc enim imaginabilia sunt solida, non antitypa, hoc est dura, & resistentia.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER VNDECIMVS ET SOLIDORVM PRIMVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES

I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

II.

Solidi terminus est superficies.

III.

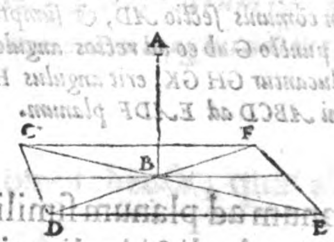
Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in subiecto sunt plano rectos angulos efficit.

SCHOLIVM.

Si posset planum in rectas lineas resolui, ita dixisset. Quando ad omnes rectas lineas, ex quibus planum constat, rectos facit angulos, tunc & ad ipsum recta erit. Sed quoniam planum etiam infinite rectis lineis sectum in ipsas non resoluitur, contentus fuit linearum infinitate pro toto plano. contingentes autem addit, ut non parallelæ sint.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB ad subiectum planum CDEF perpendicularis, siue recta, & à puncto B ducantur quotcumque rectae lineae in eodē plano BC BD BE BF. erūt anguli CBA DBA EBA FBA recti. Quòd si anguli CBA DBA EBA FBA recti sint, dicemus rectam lineam AB ad subiectum planum CDEF perpendicularem, siue rectam esse.

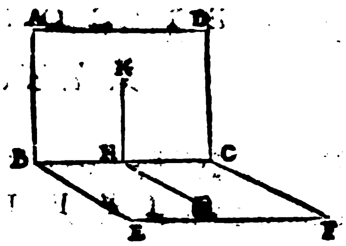


IIII.

Planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineę in vno plano, alteri plano ad rectos angulos fuerint.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit planum ABCD ad planum BEFC rectũ, sitq; eorũ cõis sectio BC, & in plano BEFC ducatur recta linea GH perpẽdicularis ad ipsã BC. erit recta linea GH ad planũ ABCD perpẽdicularis, siue recta. At si recta GH, vel planũ ABCD perpẽdicularis sit, siue recta, erit ea ad BC cõem duorũ planorũ sectionẽ perpẽdicularis. Et similiter cõtinget, si in alio plano ducatur KH perpẽdicularis ad ipsã BC. ponatur autẽ nũc cõem duorũ planorũ sectionẽ rectã lineã esse, quod in sequentibus demonstrabitur.

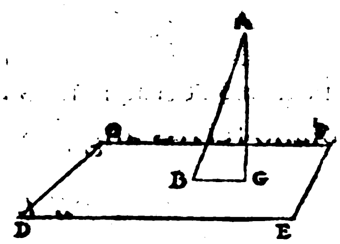


V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, quando à sublimi termino lineę ad planum perpendiculari acta, à puncto facto ad terminum lineæ, qui est in plano, recta linea ducta fuerit, angulus acutus, qui ducta linea & stante continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB inclinata ad subiectum planũ CDEF: atque à puncto sublimi A ad idem planum perpendicularis ducatur AG, & BG iungatur. erit angulus ABG acutus, rectae lineae AB ad planum CDEF inclinatio.

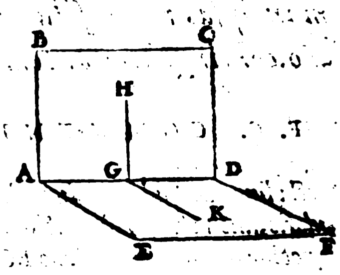


VI.

Plani ad planum inclinatio est angulus acutus rectis lineis cõtentus, quę ad rectos angulos communi planorum sectioni ad vnum ipsius punctum in vtroque planorum ducuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

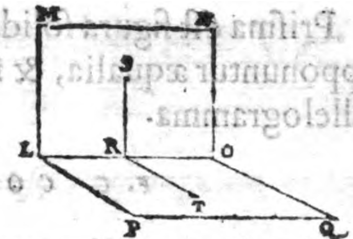
Sint duo plana inter se inclinata ABCD EADF, quorum cõmunis sectio AD, & sumpto in ipsa AD quouis puncto G ab eo ad rectos angulos in vtroque plano ducantur GH GK; erit angulus HGK inclinatio plani ABCD ad EADF planum.



VII.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, & alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

Sint duo plana inter se inclinata ABCD EADF, de quibus proxime dictum est: sintq; alia duo plana inclinata LMNO PLOQ, quorum inclinatio angulus SRT: & sint anguli HGK SRT aequales. dicetur planum ABCD ad planum EADF similiter inclinatum, atque planum LMNO ad planum PLOQ.



VIII.

Plana parallela sunt, quę inter se non conueniunt.

IX.

Similes solidæ figurę sunt, quę similibus planis multitudine æqualibus continetur.

X.

Aequales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus est, plurium, quàm duarum linearum, quæ se se contingant, & non in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. vel solidus angulus est, qui pluribus, quàm duobus planis angulis comprehenditur, non existentibus in eodem plano, & ad vnum punctum constitutis.

SCHOLIUM.

Euclides quidem in inclinatione angulum vult esse: Stoici vero dicunt inclinationem esse angulum. sed recte Euclides. omnis enim angulus magnitudinum inclinatio est ad vnum punctum. hæc autem diffinitio imperfecta est. angulus enim quartę partis sphæræ pluribus quidem, quàm duabus superficiebus comprehenditur, sed non planis: & dimidius conus ad verticem angulum solidum non efficit. nam si is est angulus: & coni uertex angulus erit. quare & ex duabus superficiebus & ex vna solidus angulus constabit. quod quidem verum est. melius igitur erit solidum angulum diffinire, inclinationem magnitudinis, vel magnitudinum ad vnum punctum. ἐν τῇ κλίσει. σῶμα. σῶμα.

XII.

Pyramis est figura solida planis comprehensa, quæ ab vno plano ad vnum punctum constituitur.

XIII.

Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum duo, quæ opponuntur æqualia, & similia & parallela sunt; reliqua vero parallelogramma.

F. C. COMMENTARIVS.

Prismata dicuntur non solum, quae bases habent triangulares, vt opinatur Campanus, qui ea corpora seratilia appellat, sed quęcunque plana, quae opponuntur, siue triangula, siue quadrilatera, siue pentagona, siue plurilatera, & aequalia, & similia habent, reliqua vero parallelogrāma. quod ex ijs, quae tum in hoc libro, tum in sequenti traduntur, manifestissime apparet. Alia autem prismata Campanus improprie columnas lateratas vocat, quemadmodum & conos, pyramides rotundas, & Cylindros columnas rotundas.

XIIII.

Sphęra est figura comprehensa, quando circa manentem diametrum semicirculus conuersus restituatur rursus in eundem locum, à quo moueri cœpit.

XV.

Axis sphæræ est recta linea manens, circa quam semicirculus conuertitur.

XVI.

Centrum sphæræ est idem, quod & semicirculi centrum.

XVII.

Diameter spęrę est recta linea quędam per centrum ducta, & ex vtraque parte à superficie sphærę terminata.

XVIII.

Conus est comprehensa figura, quando orthogonij trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum sunt, triangulum conuertatur, quoad rursus in eundem restituatur locum, à quo moueri cœpit. & si quidem manens recta linea ęqualis fuerit reliquo lateri, quod circa rectū angulū cōuertitur, conus orthogonius erit; si vero minor, ambligonius; & si maior, oxigonius.

XIX.

Axis coni est recta linea manens, circa quam triangulum conuertitur.

Basis

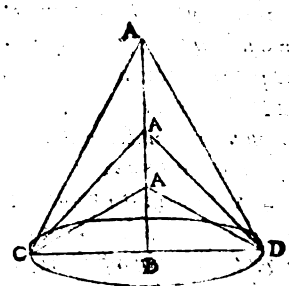
XX.

Basis vero circulus à conuersa recta linea descriptus.

SCHOLIVM.

Ostendendum quomodo conus orthogonius sit, vel angulum rectum ad verticem habeat.

Exponatur triangulum orthogonium ABC rectũ habens ABC angulum; & rectam lineam BC rectę AB æqualem. Dico ad punctum A rectum angulum constitui. producatur enim CB vsque ad D: ponaturq; BD ipsi CB æqualis, & AD iungatur. Itaque quoniam AB est æqualis BC, erit & angulus BCA angulo BAC ęqualis, & vterque ipsorũ dimidius recti, quòd rectus ponatur ABC: Eadem ratione & BAD est recti dimidius. totus igitur DAC angulus rectus est; & idcirco conus circa ABC descriptus est orthogonius; nimirũ recta linea AB manente: & circumducta AC quoad in eũdem locum restituatur, à quo moueri cœpit. circumductis igitur AC & CB, manente autem AB necesse est in conuersione rectam lineam AC congruere rectæ AD, cum CB ipsi BD sit æqualis: & circulus à puncto C descriptus basis erit coni, qui à triangulo ABC constituitur, & eius circuli diameter erit basis trianguli ADC, rectum habentis DAC angulum. Quòd si conus à vertice A ad basim vsque bifariam diuidatur, portionum superficies non aliud erunt, nisi triangulum ADC, quod est orthogonium. quare & coni uertex orthogonius erit. si vero angulus BAC sit maior dimidio recti, erit ob eandem caussam angulus quoque DAB dimidio recti maior, & DAC maior recto, videlicet obtusus; & conus ambligonius erit, vel ad verticem angulum obtusum habebit. si denique BC sit minor, quàm AB, erit angulus BAC minor dimidio recti. ergo ex ijs, quæ ostensa sunt, DAC angulus recto minor, hoc est acutus, & conus oxygonius erit.



F. C. COMMENTARIVS.

Euclides conos, & cylindros dumtaxat rectos diffiniuit, vel potius eorum ortum tradidit, nobis vero omnium vniuerse ex Apollonio, Serenoq; ortum explicare visum est.

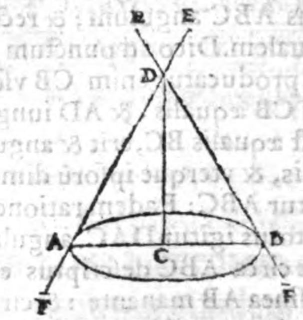
EX APOLLONIO.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur, & manente puncto cõuertatur circa circuli circũferentiã, quousque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri; superficiem à recta linea descriptam, constantemq; ue ex duabus superficiebus ad verticem inter se aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit in infinitum producta, voco Conicam superficiem, Verticem ipsius manens punctum, Axem rectam lineam, quæ per punctũ, et centrum circuli ducitur: Conum autem voco figuram contentam circulo

&

& conica superficie, quę inter verticem, & circuli circumferentiam interijcitur. Verticem coni punctum, quod et superficiei conicę vertex est. Axem rectam lineam, quę à vertice ad circuli centrum perducitur. Basim circulum ipsum.

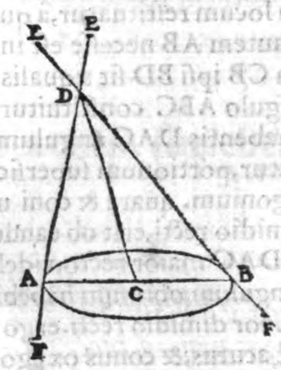
Conorũ rectos quidẽ voco, qui axes habẽt ad rectos angulos ipsis basibus. Scalenos vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habẽt.



Quem locum explicans Eutocius ita scribit.

Sit circulus A B, cuius centrum C: & punctum aliquod sublime D: iunctaque D B in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E F. Si igitur recta linea D B feratur eo vsque in circuli A B circumferentia, quousque punctum B rursus in eum locum restituatur, à quo cœpit moueri: describet superficiem quandam, quę quidem constat ex duabus superficiebus, ad D punctum se se tangentibus. eam voco conicam superficiem; quę & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipsã describens in infinitum producitur. verticem superficiei dicit, punctum D: axem, rectam D C. conum vero appellat figuram cõtentam circulo A B, & ea superficie, quam D B sola describit: coni verticem punctum D: axẽ D C: & basim, A B circulum. At si D C ad circulum, fuerit perpendicularis, rectum vocat conum; sin minus, scalenum.

Describetur autem conus scalenus, quando à centro circuli linea erigatur, quae non sit perpendicularis ad circuli planum: à puncto vero lineae, quod est in sublimi ad circuli circumferentiam recta linea ducatur: & manente puncto circa ipsam conuertatur: comprehensa etenim figura conus erit scalenus. constat igitur lineam circumductam in conuersione quandoque maiorem; quandoque minoram, & quandoque aequalem fieri, ad aliud atque aliud circuli punctum.



XXI.

Cylindrus est comprehensa figura, quando orthogonij parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum sunt, parallelogrammum conuertatur, quousque rursus restituatur in eundem locum, à quo moueri cœpit.

XXII.

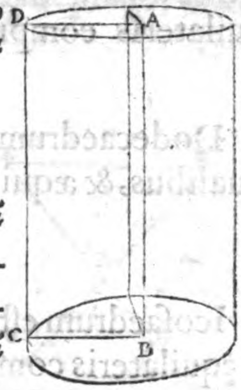
Axis Cylindri est manens recta linea, circa quam parallelogrammum conuertitur.

XXIII.

Basis autem, circuli, qui à duobus è regione lateribus conuersis descibuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit parallelogrammum rectangulum ABCD, & latere AB manẽte intelligatur latus CD conuerti, quousq; ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri. erit itã descripta figura, cuius axis est AB recta linea manens, & basis circuli ipsi à punctis CD circa contra BA descripti.



EX SERENO.

Si duorum circulorum æqualium, & parallelorũ diametri semper inter se se parallelæ, & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & unà circumferatur recta linea diametrorũ terminos ex eadem parte coniuugens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo mouer icœpit: superficies, quę à circumlata recta linea describitur, Cylindrila superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, recta linea describente in infinitum producta. Cylindrus, figura, quæ circulis parallelis, & Cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur. Cylindri basis circuli ipsi. Axis recta linea, quæ per circulorum centra ducitur. latus autem Cylindri linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius Cylindri, bases utrasque contingit: quam & circumlatam describere superficiem Cylindri antea diximus. Cylindrorum recti quidem dicuntur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus. Scaleni autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

XXIIII.

Similes coni, & Cylindri sunt, quorum, & axes, & basium diametri eandem inter se proportionem habent.

F. C. COMMENTARIVS.

Similes conos & Cylindros omnes tum rectos, tum scalenos hoc modo diffiniemus.

Similes coni, & Cylindri sunt, quando per axes ductis planis ad rectos angulos basibus, communes sectiones eorum & basium cum axibus æquales angulos continentes, eandem inter se, quam axes, proportionem habent.

XXV.

Cubus est figura solida, sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida quattuor triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

Octaedrum

XXVII.

Octaedrum est figura solida octo triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida, quæ duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & ęquiangulis continetur.

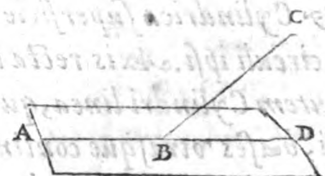
XXIX.

Icosaedrum est figura solida, quę viginti triangulis æqualibus, & ęquilateris comprehenditur.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quędam vero in sublimi.

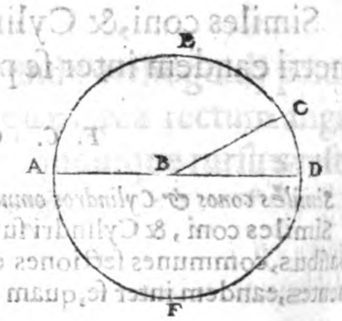
Si enim fieri potest rectæ lineę AB pars quidem AB sit in subiecto plano, pars vero BC in sublimi. erit vtique recta linea quædam ipsi AB in directum continuata in subiecto plano. sitq; BD. duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD communis portio est AB, quod fieri non potest; recta enim linea cum recta linea non conuenit in pluribus punctis, quàm vno. alioqui rectæ lineę sibi ipsis congruēt. non igitur rectæ lineæ pars quædam est in subiecto plano, quędam vero in sublimi.



A margin: A (at "sitq; BD. duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD"); B (at "alioqui rectæ lineę sibi ipsis congruēt").

SCHOLIVM.

A Duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD cōmunis portio est AB, quod fieri non potest.] *Duabus enim rectis lineis non est communis portio. si enim fieri potest, sit duabus rectis lineis ABC ABD communis portio AB; & sumatur in recta linea ABC centrum quidem B, interuallum vero BA, & circulus AEF describatur. Quoniam igitur punctum B centrum est circuli AEF, & per B ducta est quędam recta linea ABC, erit AEF circuli diameter ABC. diameter autem circulum bifariam secat. ergo AEC semicirculus est. Rursus quoniam B centrum est AEF circuli, & per B recta linea quędam ducta est ABD, erit ABD circuli AEF diameter. ostēsa autem est & ABC diameter eiusdem circuli, & semicirculi eiusdem circuli sunt aequales inter se. ergo AEC semicirculus semicirculo AED est aequalis, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur duabus rectis lineis communis portio est, sed differens; ac propterea neque fieri potest, vt terminatae rectae lineae alia recta linea in directum continuata sit ex ijs, quae ante ostensa sunt; quoniam duabus rectis lineis communis portio non est recta linea.*

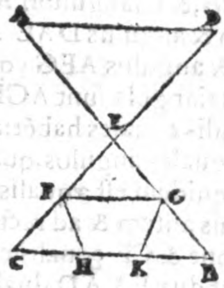


B Alioqui rectę lineę sibi ipsis congruent.] *Manifestum est congruentibus rectis lineis, & earum fines inter se congruere. si autem hoc, duae rectae lineę eosdem fines habentes spacium cōtinebunt. quod fieri non potest.*

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si duę rectæ lineæ se inuicem secent, in vno sunt plano, & omne triangulum in vno plano consistit.

Duę enim rectæ lineę AB CD se inuicem in puncto E secent. Dico ipsas AB CD in vno esse plano, & omne triangulum in vno plano consistere. Sumantur enim in ipsis EB EC quæuis puncta FG; iunganturq; CB FG, & FH GK ducantur. Dico primum EBC triangulum consistere in vno plano. Si enim trianguli EBC pars quidem FHC, vel GBK in subiecto plano est, reliqua vero in alio plano; erit & vnius linearum EB EC pars in subiecto plano, & pars in alio. Quòd si triãguli ECB pars FG BC sit in subiecto plano, reliqua vero in alio, vtrarũq; rectarum linearum EC EB quędam pars erit in subiecto plano, quędam vero in alio. quod absurdũ esse ostendimus. Triangulum igitur EBC in vno est plano. in quo autem plano est BCE triangulum, in hoc est vtraque ipsarum EC EB: in quo autem vtraque ipsarum EC EB, in hoc & AB CD. ergo rectę lineę AB CD in vno sunt plano, & omne triangulum in vno plano consistit.



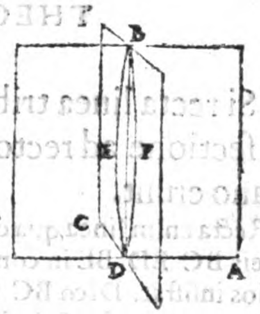
S C H O L I V M.

Propositum est ostendere rectas lineas, quę se mutuo secant in vno plano esse. quoniam autem hoc per triangulum ostenditur, illud apposuit, & omne triangulum in vno plano consistit.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si duo plana se inuicem secent, cõmunis ipsorum sectio recta linea erit.

Duo enim plana AB BC se inuicem secent, communis autem ipsorum sectio sit DB linea. Dico lineam DB rectam esse. si enim non ita sit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB; in plano autem BC recta linea DFB. erunt vtique duarum rectarũ linearum DEB DFB ijdem termini, & ipsę spacium cõtinebunt, quod est absurdum. non igitur DEB DFB rectæ lineæ sunt. Similiter ostendemus neque aliam quãpiam, quæ à puncto D ad B ducitur rectam esse, pręter ipsam DB, communem scilicet planorum AB BC sectionem. si igitur duo plana se inuicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit.

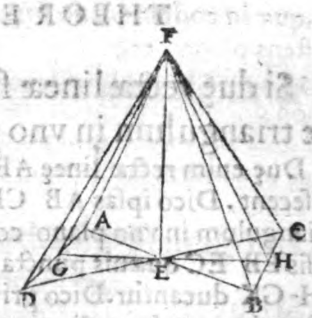


THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea duabus rectis lineis se inuicem secantibus in cõmuni sectione ad rectos angulos insistat, etiã ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta enim linea quædam EF duabus rectis lineis AB CD se inuicem secantibus in E puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat. Dico EF etiam plano per AB CD ducto ad rectos angulos esse. sumantur enim rectæ lineæ AE EB CE ED inter se æquales: perq; E ducatur recta linea GEH vtcumque, & iungantur AD CB; deinde à quouis puncto F ducantur FA FG FD FC FH FB. Et quoniam duæ rectę lineæ AE ED duabus rectis lineis CE EB ęquales sunt, & angulos æquales continent, erit AD basis basi CB ęqualis, & triangulum AED triangulo CEB æquale. ergo & angulus DAE æqualis est angulo EBC. est aũt & angulus AEG ęqualis angulo BEH. Duo igitur triangula sunt AGE BEH duos angulos duobus angulis ęquales habẽtia, alterũ alteri, & vnũ latus AE vni lateri EB ęquale. quod est ad ęquales angulos. quare & reliqua latera reliquis lateribus ęqualia habebũt, ergo GE quidem est æqualis EH; AG vero ipsi BH. Quòd cum AE sit æqualis EB, communis autem & ad rectos angulos FE; erit basis AF basi FB æqualis. Eadem quoq; ratione & CF ęqualis erit FD. Pręterea quoniam AD est æqualis CB, & AF ipsi FB; erunt duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera alteri; & ostẽsa est basis DF ęqualis basi FC. angulus igitur FAD angulo FBC est æqualis. Rursus ostensa est AG æqualis BH. sed & AF ipsi FB est æqualis. duæ igitur FA AG duabus FB BH æquales sunt, & angulus FAG æqualis est angulo FBH, vt demonstratum fuit. basis igitur GF basi FH est æqualis. Rursus quoniam GE ostensa est æqualis EH, communis autem FE; erunt duæ GE EF ęquales duabus HE EF; & basis HF est æqualis basi FG. angulus igitur GEF angulo HEF est æqualis, & idcirco rectus est vterque angulorum GEF HEF. ergo FE ad GH vtcumque per E ductam rectos efficit angulos. Similiter ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in subiecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autẽ ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas ipsam contingentes, & in eodem existentes plano rectos efficit angulos. quare FE subiecto plano ad rectos angulos insistit. at subiectum planum est quod per AB CD rectas lineas ducitur. ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis se inuicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

4. primi. 16. primi. 4. primi. 8. primi. 4. primi. 3. diffi.

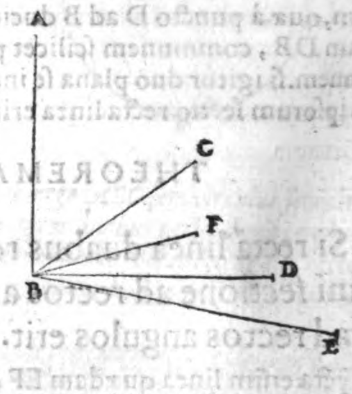


THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea tribus rectis lineis se se tangentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineę in vno plano erunt.

Recta enim linea quædam AB tribus rectis lineis BC BD BE in contactu B ad rectos angulos insistat. Dico BC BD BE in vno plano esse. non enim, sed si fieri potest, sint BD BE quidẽ in subiecto plano, BC vero in sublimi, & planum per AB BC producatur. cõmunẽ vtique sectionem in subiecto plano faciet rectam lineam. faciat BF. in vno igitur sunt plano per AB BC ducto tres rectę lineæ AB BC BF. & quoniam AB vtrique ipsarum BD BE ad rectos angulos insistit, & ducto per ipsas DB BE plano ad rectos angulos erit. planum autem DB BE est subiectum planum. ergo AB ad subiectum planum recta est. quare & ad omnes rectas lineas ipsam contingentes.

3. huius. Ex antecedente. 3. diffi.



tes,quæ in eodem plano sunt,rectos faciet angulo; sed ipsam tangit BF in subiecto existens plano. ergo angulus ABF rectus est. ponitur autem & ABC angulus rectus.ęqualis igitur est angulus ABF angulo ABC,& in eodem sunt plano; quod fieri non potest.recta igitur linea BC non est in plano sublimi. quare tres rectæ lineæ BC BD BE in vno sunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis se se tangẽtibus in cõmuni sectione ad rectos angulos insistat,tres illæ rectæ lineæ in vno plano erunt.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duę rectæ lineę eidem plano ad rectos angulos fuerint, illę inter se se parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD subiecto plano sint ad rectos angulos. Dico AB ipsi CD parallelam esse. occurrant enim subiecto plano in punctis BD,iungaturq; BD recta linea,cui ad rectos angulos in subiecto plano ducatur DE, & posita DE ipsi AB ęquali,iũgantur BE AE AD.Qm̃ igitur AB recta est ad subiectum planum, & ad omnes rectas lineas,quę ipsam cõtingunt,& in subiecto sunt plano, rectos angulos efficiet.contingit autem AB vtraque ipsarum BD BE existens in subiecto plano. ergo vterque angulorum ABD ABE rectus est. Eadem ratione rectus etiam est vterq; ipsorum CDB CDE.& quoniam AB ęqualis est ipsi DE,cõmunis autem BD, erunt duæ AB BD duabus ED DB æquales,& rectos angulos continent.basis igitur AD basi BE est æqualis. rursus quoniam AB est æqualis DE, & AD ipsi BE,duę AB BE duabus ED DA æquales sunt,& basis ipsarum AE communis. ergo angulus ABE angulo EDA est ęqualis.sed ABE rectus est.rectus igitur & EDA; & idcirco ED ad DA est perpendicularis, sed & perpendicularis est ad vtramque ipsarum BD DC.quare ED tribus rectis lineis BD DA DC in contactu ad rectos insistit angulos.tres igitur rectæ lineę BD DA DC in vno sunt plano. in quo autem sunt BD DA,in hoc & AB:omne enim triangulum in vno est plano. ergo AB BD DC in vno plano sint necesse est,atque est vterque angulorum ABD BDC rectus.parallela igitur est AB ipsi CD. quare si duæ rectæ lineæ eidẽ plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se se parallelæ erunt.

Diff. 3.

4.primi.

8.primi.

Ex antecedente.

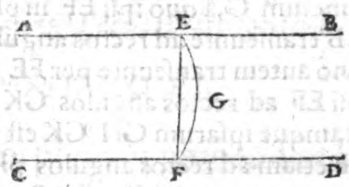
2.huius.

28.primi.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si duę rectæ lineę parallelæ sint,sumantur autem in vtraque ipsarum quælibet puncta; quę dicta puncta coniungit recta linea in eodem erit plano,in quo & parallelę.

Sint duæ rectę lineæ parellelæ AB CD, & in vtraque ipsarum sumantur quælibet puncta EF. Dico rectam lineam quæ puncta E F cõiungit,in eodem plano esse,in quo sunt parallelę.non enim,sed si fieri potest,sit in sublimi,vt EGF, & per EGF planũ ducatur, quod in subiecto plano sectionem faciet, rectam lineam.faciat vt EF.ergo duæ rectæ lineæ EGF EF spacium continebunt,quod fieri non potest. non igitur quæ à puncto E ad F ducitur recta linea in sublimi est plano, quare erit in eo,quod per AB CD parallelas transit.si igitur duæ rectæ lineæ parallelę sint, & reliqua, quæ sequuntur.quod oportebat demonstrare.



3.huius.

10.com. no. primi libri.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

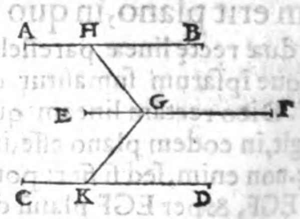
Si duę rectę lineæ parallelę sint, altera autem ipsarum plano alicui sit ad rectos angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint duę rectę lineæ parallelę AB CD, & altera ipsarum AB subiecto plano sit ad rectos angulos. Dico & reliquam CD eidem plano ad rectos angulos esse. occurrāt enim AB CD subiecto plano in punctis BD, & BD iungatur. ergo A B CD BD in vno sunt plano. Ducatur ipsi BD ad rectos angulos in subiecto plano DE: & ponatur DE ipsi AB æqualis: iunganturq; BE AE AD. Et quoniam AB perpendicularis est ad subiectum planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, suntq; in subiecto plano, perpendicularis erit. rectus igitur est vterque angulorum ABD ABE. Quòd cū in parallelas rectas lineas AB CD incidat BD, erūt anguli ABD CDB duobus rectis ęquales. rectus autem est ABD. ergo & CDB est rectus; ac propterea CD perpendicularis est ad BD. Et quoniam AB est ęqualis DE, communis autem BD, duæ AB BD duabus ED DB æquales sunt; & angulus ABD est æqualis angulo EDB, rectus enim vterq; est. basis igitur AD basi BE est ęqualis. Rursus quoniam AB æqualis est DE, & BE ipsi AD; erunt duę AB BE duabus ED DA æquales, altera alteri; & basis earum communis AE. quare angulus ABE est æqualis angulo EDA. rectus autem est ABE. ergo & EDA est rectus, & ED ad DA perpendicularis. sed & perpendicularis est ad BD. ergo ED ēt ad planum per BD DA perpendicularis erit, & ad omnes rectas lineas, quę in eodem existentes plano ipsā contingunt, rectos faciet angulos. At in plano per BA AD est DC, quoniam in plano per BD DA sunt AB BD: in quo autem sunt AB BD in eodem est ipsa DC. quare ED ipsi DC est ad rectos angulos; ideoq; CD ad rectos angulos est ipsi DE. sed & CD ipsi DB. ergo CD duabus rectis lineis DE DB se mutuo secantibus in cōmuni sectione D ad rectos angulos insistit; ac propterea plano per DE DB est ad rectos angulos. planum autem per DE DB est subiectum planum. ergo CD subiecto plano ad rectos angulos erit.

Ex antecedente. — 3. diffi. — 29. primi. — 4. primi. — 8. primi. — 4. huius, 3. diffi. — 2. huius. — 4. huius.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Quæ eidem rectę lineę sunt parallelę, non existentes in eodem, in quo ipsa, plano; etiam inter se parallelæ erunt.



Sit enim vtraque ipsarum AB CD parallela ipsi EF, non existentes in eodem, in quo ipsa, plano. Dico AB ipsi CD parallelā esse. sumatur in EF quodu is punctum G, à quo ipsi EF in plano quidem per EF AB transeunte ad rectos angulos ducatur GH; in plano autem transeunte per FE CD rursus ducatur ipsi EF ad rectos angulos GK. Et quoniam EF ad vtramque ipsarum GH GK est perpendicularis, erit EF etiam ad rectos angulos plano per GH GK transeunte. atque est EF ipsi AB parallela. ergo & AB plano per HGK ad rectos angulos est. adem ratione & CD plano per HGK est ad rectos angulos. vtraq; igitur ipsarum AB CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autem duę rectæ lineę eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ erunt inter se se. ergo AB ipsi CD est parallela.

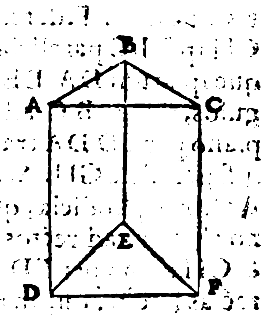
4. huius. — Ex antecedente. — 6. huius.

THEO

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si duæ rectæ lineæ ſe ſe contingentes duabus rectis lineis ſe ſe contingentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ enim rectę lineæ ſe ſe contingentes AB BC duabus rectis lineis DE EF ſe ſe contingentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano. Dico angulum ABC angulo DEF ęqualem eſſe. Aſſumantur enim BA BC ED EF inter ſe æquales: & iungantur AD CF BE AC DF. Quoniam igitur BA ipſi ED æqualis eſt & parallela, erit & AD æqualis & parallela ipſi BE. Eadē ratione & CF ipſi BE ęqualis & parallela erit. 33.primi. Vtraque igitur ipſarum AD CF ipſi BE ęqualis eſt & parallela. Quę autem eidem rectę lineę ſunt parallelę, nō exiſtentes in eodem, in quo ipſa plano; & inter ſe parallelę erūt. Ex antecedente. ergo AD parallela eſt ipſi CF, & æqualis. atque ipſas coniungunt AC DF. & AC igitur ipſi DF æqualis eſt & parallela. 33.primi. & quoniā duæ rectę lineę AB BC duabus DE EF æquales ſunt, & baſis AC eſt æqualis baſi DF; erit angulus ABC angulo DEF ęqualis. 8.primi. ſi igitur duæ rectæ lineæ ſe ſe contingentes duabus rectis lineis ſe ſe contingētibus ſint parallelę, non autem in eodem plano; ęquales angulos continebunt. quod oportebat demonſtrare.

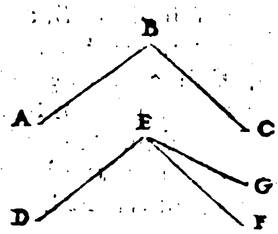


SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si fuerint duo anguli æquales, contenti rectis lineis in eodem plano non exiſtentibus, & earum vna parallela ſit vni continentium ęqualem angulum; & reliqua reliquæ parallela erit.

F. C. COMMENTARIVS.

Sint duo anguli aequales ABC DEF: & rectae lineae AB BC angulum ABC continentes nō ſint in eodem plano, in quo DEF. ſit autem DE parallela ipſi AB. Dico & EF ipſi BC parallelam eſſe. Si enim nō eſt EF parallela ipſi BC, erit alia ipſi parallela, ſit EG. Itaque quoniam duae rectae lineae ſeſe contingentes AB BC duabus rectis lineis ſeſe cōtingentibus DE EG ſunt parallelae, nō autem in eodem plano; aequales angulos continebunt. ergo angulus DEG angulo ABC eſt aequalis. Sed et angulus DEF ponitur aequalis angulo ABC. angulus igitur DEF angulo DEG aequalis erit, minor maiori, quod fieri non poteſt. non igitur EG parallela eſt ipſi BC. ſimiliter oſtendemus neque aliam vllam eidem BC parallelam eſſe pręter ipſam EF. ergo EF ipſi BC eſt parallela, quod demonſtrare oportebat.

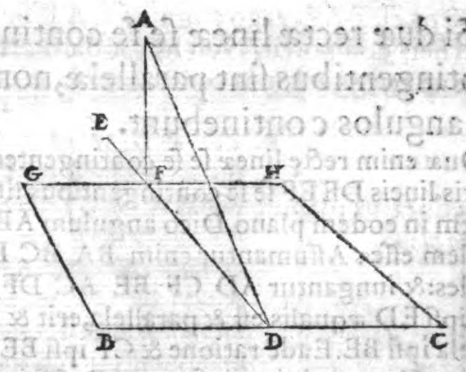


PROBLEMA I. PROPOSITIO XI.

A dato puncto ſublimi ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem pūctum ſublime A, datum autem ſubiectum planum, oportet à puncto A ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineā ducere. In ſubiecto enim plano ducatur quędam recta linea vt cumq; BC, & à puncto A ad B,

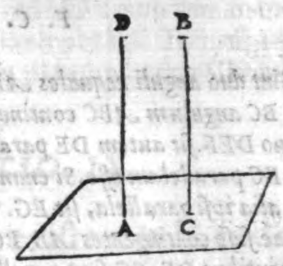
C per



C perpendicularis agatur A D. Si
quidem igitur AD perpẽdicularis sit
etiam ad subiectum planum; factum
iam erit, quod proponebatur: sin mi
11.primi. nus, ducatur à puncto D ipsi B C in
12 primi. subiecto plano ad rectos angulos D
E: & à pũcto A ad DE perpendicula-
ris ducatur AF. deniq; per F ducatur
GH ipsi BC parallela. Et qm̃ BC vtri
que ipsarum DA DE est ad rectos an
4.huius. gulos, erit & B C ad rectos angulos
plano per ED DA transeunti, atq; est
ipsi parallela GH. Si aũt sint duæ re-
ctæ lineę parallelæ, quarum vna pla-
8 huius. no alicui sit ad rectos angulos; & reliqua eidẽ plano ad rectos angulos erit. quare
3.diffi. & GH plano per ED DA transeunti ad rectos angulos est: ac propterea ad omnes
rectas lineas, quę in eodem plano existentes ipsam contingunt, est perpendicula-
ris. contingit aũt ipsam AF existẽs in plano per ED DA. ergo G H perpendicula-
ris est ad F A. & ob id F A est perpẽdicularis ad GH: est autem AF & ad DE perpẽ
dicularis. ergo AF perpendicularis est ad vtrãq; ipsarum HG DE. si autem recta li-
nea duabus rectis lineis sese contingentibus in cõmuni sectione ad rectos angulos
4.huius. insistat, etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos erit. quare FA plano per E
D GH ducto est ad rectos angulos. planum autem per ED GH est subiectum pla-
num. ergo AF ad subiectum planum est perpẽdicularis. A' dato igitur puncto sub
limi A ad subiectum planum perpendicularis recta linea ducta est AF. quod facere
oportebat.

PROBLEMA II. PROPOSITIO. XII.

Dato plano à puncto, quod in ipso datum, est ad rectos angulos rectam lineam constituere.



Sit datum quidem planum subiectum, punctum autẽ,
quod in ipso sit A. oportet à puncto A subiecto plano ad
rectos angulos rectã lineam constituere. Intelligatur ali-
Ex antecedente. quod punctũ sublime B, à quo ad subiectũ planum aga-
tur perpendicularis B C; & per A ipsi BC parallela duca
tur AD. Qm̃ igitur duę rectæ lineæ parallelæ sunt A D
CB, vna autem ipsarum B C subiecto plano est ad rectos
8 huius. angulos; & reliqua AD subiecto plano ad rectos angulos
erit. Dato igitur plano à puncto, quod in ipso est datum
ad rectos angulos recta linea constituta est. quod facere
oportebat.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

Dato plano à pũcto, quod in ipso est, duæ rectę lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte.

Si enim fieri potest, dato plano à puncto
quod in ipso est A, duæ rectę lineę AB AC
ad rectos angulos constituantur ex eadem
3.huius: parte: & ducatur planũ per BA AC, quod
A faciet sectionem per A in subiecto plano re
ctam lineam. faciat DAE. ergo rectæ lineæ
AB AC DAE in vno sunt plano. Et quo-
niam CA subiecto plano ad rectos angulos
3.diffi. est, & ad omnes rectas lineas, quę in subie-

cto plano

cto plano existentes ipsam contingant, recto s faciet angulos. contingit autem ipsam D AE, quę est in subiecto plano. angulus igitur CAE rectus est. Eadem ratione & rectus est BAE. ergo angulus C A E ipsi B A E est æqualis, & in vno sunt plano, quod fieri non potest. Non igitur dato plano à puncto, quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ex eadẽ parte. quod demonstrare oportebat. B

F. C. COMMENTARIVS.

Et ducatur planum per B A A C] *Sunt enim ex secunda huius rectae lineae BA AC in vno plano.* A

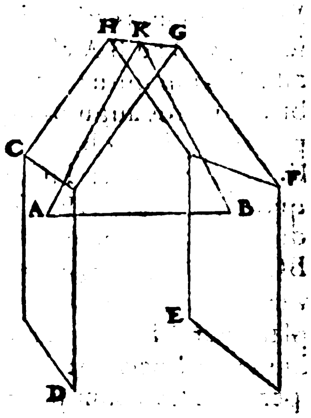
SCHOLIVM.

Quod fieri non potest] *Essent enim & parallelae, eidem plano ad rectos angulos existentes; & inter se conuenirent. quod est absurdum, parallelae autem essent ex sexta huius.* B

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Ad quæ plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta enim linea quædam AB ad vtrumque ipsorum planorum CD EF sit perpendicularis. Dico ea plana parallela esse. si enim non ita sit, producta conuenient inter se, conueniãt; & cõem sectionẽ faciãt rectã lineã GH; & in ipsa GH sumpto quouis pũcto K, iungantur AK BK. Qm igitur AB perpẽdicularis est ad EF planũ, erit & perpẽdicularis ad ipsã BK rectã lineã in plano EF producto existẽtẽ. quare angulus A B K rectus est. Eadẽ ratione & BAK est rectus: ideoque trianguli ABK duo anguli ABK BAK duobus rectis sunt æquales, quod fieri non potest. non igitur plana C D E F producta inter se conuenient. quare CD EF parallela sint necesse est. Ad quę igitur plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. quod demonstrare oportebat.

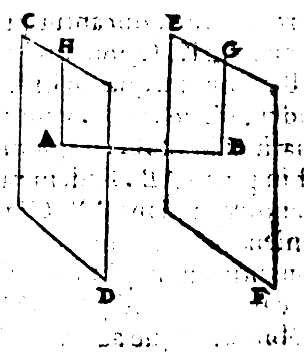


SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si duo plana parallela fuerint, recta linea, quæ ad vnum ipsorum est perpendicularis, etiam ad reliquum perpendicularis erit.

F. C. COMMENTARIVS.

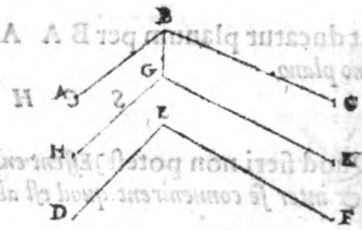
Sint duo plana parallela CD EF, & recta quędam linea AB ad planum CD sit perpendicularis. Dico AB etiam ad planum EF perpendicularem esse. Si enim non est perpendicularis, ducatur in plano EF recta linea BG ad eas partes in quibus angulum facit recto minorem: & per AB BG aliud planum ducatur, cuius & plani CD communis sectio sit recta linea AH. Et quoniam angulus ABG est acutus, productis planis conuenient tandem inter sese rectae lineae BG AH. quare & ipsa plana conuenient. atqui parallela ponuntur. quod fieri non potest. non igitur AB ad planum EF non est perpendicularis. ergo perpendicularis sit necesse est. quod demonstrandum proposuimus.



THEO-

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipſas tranſeunt plana parallela erunt.



Duæ enim rectæ lineę ſeſe tangẽtes AB BG duabus rectis lineis ſeſe tangẽtibus DE EF parallelæ ſint, & non in eodem plano. Dico plana quæ per AB BC DE EF tranſeunt, ſi producantur, inter ſe non conuenire. Ducatur enim à puncto B ad planum, quod per DE EF tranſit perpendicularis BG, quę plano in puncto G occurrat; & per G ducatur ipſi quidem ED parallela GH; ipſi vero EF parallela GK. Itaque quoniam BG perpendicularis eſt ad planum per DE EF; & ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, & in eodem ſunt plano, rectos faciet angulos. contingit autem ipſam vtraque earum GH GK, quę eſt in eodem plano. rectus igitur eſt vterque angulorum BGH BGK. Et quoniam BA parallela eſt ipſi GH, anguli GBA BGH duobus rectis ſunt ęquales. rectus autem eſt BGH. ergo et GBA rectus erit; ideoq; GB ad BA eſt perpendicularis. Eadem ratione & GB eſt perpendicularis ad BC. cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA BC ſe inuicem ſecantibus ad rectos angulos inſiſtat, erit BG etiam ad planum per AB BC ductum perpendicularis. & ob eandem cauſſam BG eſt perpendicularis ad planum per HG GK. ſed planum per HG GK eſt illud, quod per DE EF tranſit. quare BG ad planũ quod tranſit per DE EF eſt perpendicularis. oſtenſa autem eſt BG etiam perpendicularis ad planũ per AB BC: atq; eſt ad planũ per DE EF perpẽdicularis. ergo BG perpẽdicularis eſt ad vtrũq; planorũ, quæ per AB BC DE EF trãſeũt. Ad quæ vero plana eadẽ recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt. parallelũ igitur eſt planũ per AB BC plano per DE EF. Quare ſi duæ rectæ lineæ ſe ſe tangentes duabus rectis lineis ſe ſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano, & quæ per ipſas tranſeunt plana parallela erunt. quod demonſtrare oportebat.

3. diff.

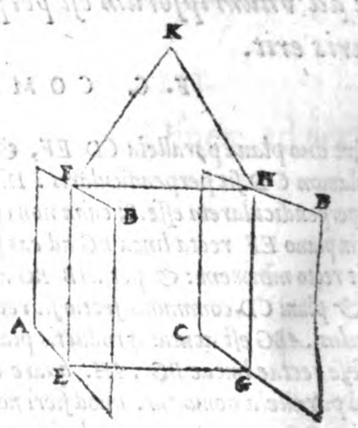
29. primi.

4. huius.

Ex antecedente.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVI.

Si duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones parallelę erunt.



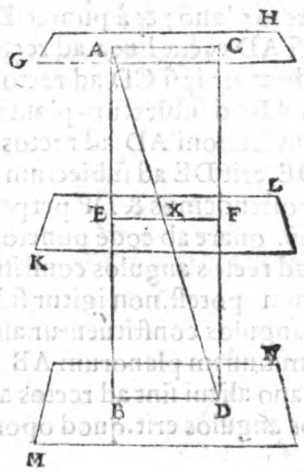
Duo enim plana parallela AB CD à plano aliquo EFGH ſecentur: communes autem ipſorũ ſectiones ſint EF GH. Dico EF ipſi GH parallelam eſſe. ſi enim non eſt parallela, productæ EF GH inter ſe conuenient, vel ad partes FH, vel ad partes EG. producantur prius, vt ad FH; & conueniant in K. Quoniam igitur EFK eſt in plano AB, & omnia quæ in EFK ſumuntur puncta in eodem plano erunt. vnum autem punctorum, quæ ſunt in EFK, eſt ipſum K punctum. ergo K eſt in plano AB. Eadem ratione & K eſt in CD plano. ergo plana AB CD producta inter ſe cõuenient. non conueniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF GH rectę lineę productę conuenient ad partes FH. ſimiliter demonſtrabimus neque ad partes EG conuenire, ſi pro-

ducantur

ducantur. quæ autem neutra ex parte conueniunt parallelę sunt. ergo EF ipsi GH est parallela. si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XVII.

Si duæ rectę lineę à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur.



Duæ enim rectæ lineę AB CD à parallelis planis GH KL MN secentur in punctis A E B C F D. Dico vt AE recta linea ad ipsam EB, ita esse CF ad FD. Iungantur enim AC BD AD: & occurat AD plano KL in puncto X: & EX XF iungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL MN à plano EBDX secantur, communes ipsorum sectiones EX BD parallelę sunt. Eadem ratione quoniam duo plana parallela GH KL à plano AEFC secantur, communes ipsorũ sectiones AC FX sunt parallelæ. Et quoniã vni laterum trianguli ABD, videlicet ipsi BD parallela ducta est EX, vt AE ad EB, ita erit AX ad XD. Rursus quoniam vni laterum trianguli ADC, nempe ipsi AC parallela ducta est XF, erit vt AX ad XD, ita CF ad FD. ostensum autem est & vt AX ad XD, ita esse AE ad EB. & vt igitur AE ad EB, ita est CF ad FD. Quare si duę rectę lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

2. sexti.

11. quinti.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta enim linea quædam AB subiecto plano sit ad rectos angulos. Dico & omnia plana, quæ per ipsam AB transeunt, subiecto plano ad rectos angulos esse. producatur enim per AB planum DE, sitq; plani DE, & subiecti plani communis sectio CE: & sumatur in CE quod vis punctum F; à quo ipsi CE ad rectos angulos in DE plano ducatur FG. Quoniam igitur AB ad subiectũ planum est perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quę ipsam contingunt, & in eodem sunt plano perpendicularis erit. quare & ad CE est perpendicularis. angulus igitur ABF rectus est. sed & GFB est rectus. ergo AB parallela est ipsi FG. est autem AB subiecto plano ad rectos angulos. & FG igitur eidẽ plano ad rectos angulos erit. At planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductę rectæ lineæ in vno planorum reliquo plano ad rectos angulos sint: & communi planorum sectioni CE in vno plano DE ad rectos angulos ducta FG, ostensa est subiecto plano ad rectos esse angulos. ergo planum DE rectũ est ad subiectum planum. similiter demonstrabuntur, & omnia quę per AB trãseũt plana subiecto plano recta esse. si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

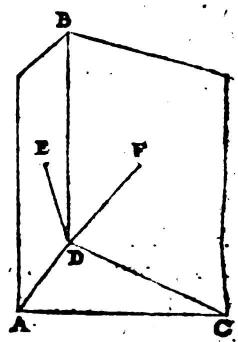
3. diff.

8. huius.

4. diff.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Si duo plana se inuicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.



Duo enim plana se inuicem secantia AB BC subiecto plano sint ad rectos angulos: communis autem ipsorum sectio sit BD. Dico BD subiecto plano ad rectos angulos esse. Non enim, sed si fieri potest; non sit BD ad rectos angulos subiecto plano; & à puncto D ducatur in plano quidem AB, ipsi AD rectæ lineæ ad rectos angulos DE: in plano autē BC ducatur ipsi CD ad rectos angulos DF. Et quoniam planum AB ad subiectum planum rectum est, & communi ipsorum sectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta est DE, erit DE ad subiectum planum perpendicularis. simi liter ostendemus & DF perpendicularem esse ad subiectum planū. quare ab eodē puncto D subiecto plano duę rectæ li neę ad rectos angulos constitutę sunt ex eadem parte, quod fieri non potest. non igitur subiecto plano à puncto D ad rectos angulos constituentur aliæ rectæ lineæ, pręter ipsam DB, communem planorum AB BC sectionem. Ergo si duo plana se inuicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidē plano ad rectos angulos erit. quod oportebat demonstrare.

13.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex proxime demonstratis apparet conuersum antecedentis theorematis, nempe hoc.

Si omnia, quæ per aliquam rectam lineam plana producuntur, cuipiam plano ad rectos fuerint angulos, & recta linea eidem plano ad rectos angulos erit.

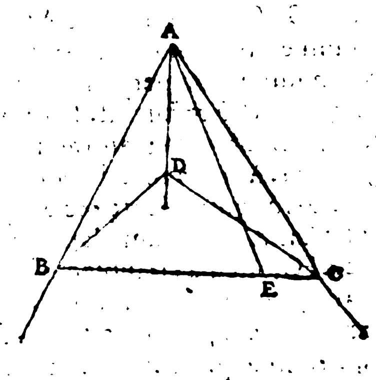
Fit enim recta linea dictorum planorum communis sectio. quare cum ea plana plano cuipiam ad rectos angulos esse ponantur, & recta linea quae ipsorum communis sectio est eidem plano ad rectos angulos erit.

Conuersum vero pręsentis theorematis apparet ex antecedente, quod huiusmodi est.

Quorum planorum se se mutuo secantium communis sectio alicui plano ad rectos fuerit angulos, & secantia plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Communis enim planorum sectio est recta linea, per quam dicta plana transeunt. quod cum recta linea plano cuipiam ad rectos fuerit angulos, & ipsa plana eidem ad rectos angulos erunt.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XX.



Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo maiores sunt, quomodocumq; sumpti.

Solidus enim angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. Dico angulorum BAC CAD DAB duos quoslibet reliquo maiores esse, quomodocumque sumptos. si enim BAC CAD DAB anguli inter se ęquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo maiores esse, quomodocumque sumptos. Sin

minus

minus, sit maior BAC. & ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa A constituatur angulo DAB in plano per BA AC transeũte, æqualis angulus BAE; ponaturq; ipsi AD æqualis AE; & per E ducta BEC secet rectas lineas AB AC in punctis BC & DB DC iungantur. Itaque quoniam DA est æqualis AE, communis autem AB, duę DA AB duabus BA AE æquales sunt: & angulus DAB æqualis est angulo BAE. basis igitur DB basi BE est æqualis. Et quoniam duę DB DC ipsa BC maiores sunt, quarum DB æqualis ostensa est ipsi BE; erit reliqua DC quàm reliqua EC maior. Quòd cum DA sit ęqualis AE, communis autem AC & basis DC maior, basi EC; erit angulus DAC angulo EAC maior. ostensus autem est & DAB angulus æqualis ipsi BAE. quare DAB DAC anguli angulo BAC maiores sunt. similiter demonstrabimus, & si duo quilibet alij sumantur, eos reliquo esse maiores. si igitur solidus angulus tribus angulis planis cõtineatur, duo quilibet reliquo maiores sunt, quomodocumque sumpti. quod demonstrare oportebat.

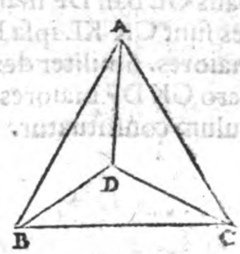
32. primi.

4. primi.

2. primi.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Omnis solidus angulus minoribus, quàm quattuor rectis angulis planis continetur.

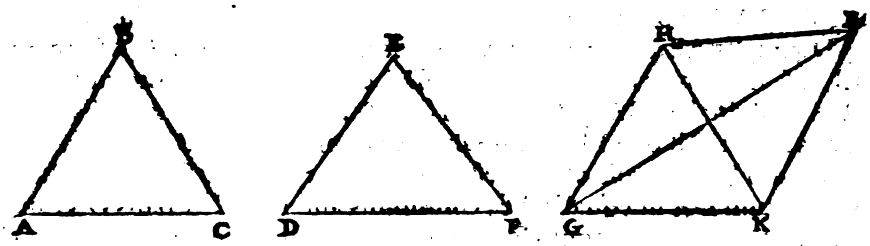


Sit solidus angulus ad A planis angulis BAC CAD DAB cõtẽtus. Dico angulos BAC CAD DAB quattuor rectis esse minores. sumatur enim in vnaquaq; ipsarũ AB AC AD quęuis pũcta B C D, & BC CD DB iũgãtur. Quoniam igitur solidus angulus ad B tribus angulis planis cõtinetur CBA ABD CBD, duo quilibet reliquo maiores sunt. anguli igitur CBA ABD angulo CBD sunt maiores. Eadem ratione & anguli quidẽ BCA ACD maiores sunt angulo BCD; anguli vero CDA ADB maiores angulo CDB. quare sex anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB tribus angulis CBD BCD CDB sunt maiores. sed tres anguli CBD BDC DCB sunt ęquales duobus rectis. Sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB duobus rectis maiores sunt. Quòd cũ singulorũ triãgulorum ABC ACD ADB tres anguli sint ęquales duobus rectis, erunt triũ triangulorum nouem anguli CBA ACD BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD ęquales sex rectis. quorũ sex anguli ABC BCA ACD CDA ADB DBA duobus rectis sunt maiores. reliqui igitur BAC CAD DAB tres anguli, qui solidum continent angulum quattuor rectis minores erunt. Quare omnis solidus angulus minoribus, quàm quattuor rectis angulis planis continetur. quod oportebat demonstrare.

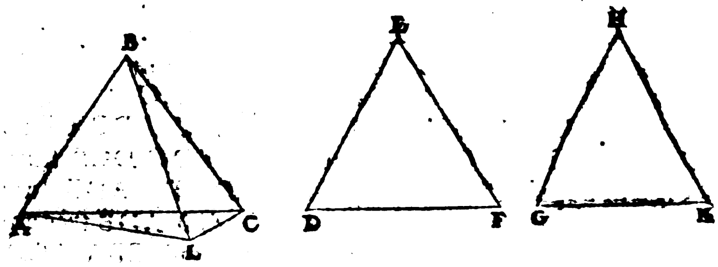
THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint maiores, quomodocumque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales fieri poteſt, vt ex ijs, quæ rectas æquales coniungunt triangulum constituatur.

Sint tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint maiores, quomodocumque sumpti, videlicet anguli quidem ABC DEF maiores angulo GHK; anguli vero DEF GHK maiores angulo ABC: & prærerea anguli GHK ABC angulo DEF: maiores sintq; æquales rectæ lineę AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK iungãtur. Dico fieri posse, vt ex ęqualibus ipsis AC DF GK triangulũ cõstituatur; hoc est ipsarũ AC DF GK duas quaslibet reliqua esse maiores, quomodocumq; sumptas. si quidẽ igitur anguli ABC DEF GHK inter se æquales sint; manifestũ



est & æqualibus factis AC DF GK ex æqualibus ipsis triangulum constitui posse. sin minus, sint inæquales, & ad rectam lineam HK, atque ad punctum in ipsa H, an
23.primi. gulo ABC equalis angulus constituatur KHL, & ponatur vni ipsarum AB BC DE EF GH HK æqualis HL; & GL KL iungantur. Itaque quoniam duę AB BC dua-
4.primi. bus KH HL æquales sunt, & angulus ad B angulo KHL æqualis, erit basis AC ęqualis basi KL. Et quoniam anguli ABC GHK angulo DEF sunt maiores; æqualis autē est angulus ABC angulo KHL; erit GHL angulo DEF maior. Quod cum duæ GH HL duabus DE EF æquales sint, & angulus GHL angulo, qui ad E maior, basis GL basi DF maior erit. Sed GK KL ipsa GL sunt maiores. multo igitur maio
24.primi. res sunt GK KL ipsa DF. est autem KL æqualis AC. ergo AC GK reliqua DF sunt
20.primi. maiores. similiter demonstrabimus, & ipsas quidem AC DF maiores esse GK, ipsas uero GK DF maiores AC. fieri igitur potest vt ex æqualibus ipsis AC DF GK triāgulum constituatur.



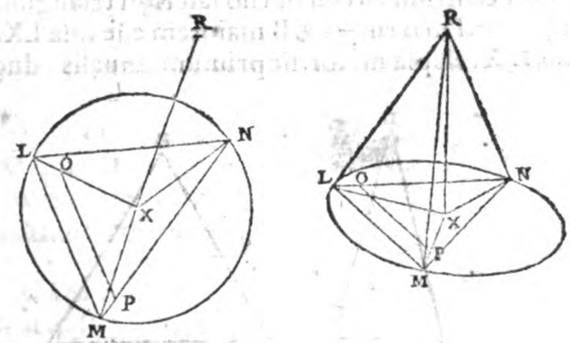
ALITER. Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquō sint maiores, quomodocumque sumpti: cōtineant autem ipsos æquales rectæ lineę AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK iungantur. Dico fieri posse, vt ex ęqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur: hoc est rursus duas reliqua maiores esse, quomodocumque sumptas. si igitur rursus anguli ad B E H sint æquales, & AC DF GK æquales erunt, & duę reliqua maiores. sin minus, sint inæquales an-
24.primi. guli ad B E H, & maior qui est ad B vtroque ipsorum qui ad E H. maior igitur ęst & recta linea AC vtraque ipsarum DF GK. & manifestum est ipsam AC vnā cū altera ipsarum DF GK reliqua esse maiorem. Dico & DF GK ipsa AC maiores es-
23.primi. se. constituatur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea B, angulo GHK æqualis angulus ABL, & vni ipsarum AB BC DE EF GH HK ponatur æqualis BL, & AL LC iungantur. Quoniam igitur duę AB BL duabus GH HK æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis AL basi GK æqualis. & quoniam anguli ad E H angulo ABC maiores sunt, quorum angulus GHK est æqualis ipsi ABL; erit reliquus qui ad E angulo LBC maior. Quod cum duę LB BC duabus DE EF
24.primi. æquales sint, altera alteri; & angulus DEF angulo LBC maior; basis DF basi LC maior erit. ostensā est autem GK ęqualis AL. ergo DF GK ipsis AL LC sunt maiores. sed AL LC maiores sunt ipsa AC. multo igitur DF GK ipsa AC maiores erūt. quare rectarum linearum AC DF GK duę reliqua maiores sunt, quomodocumque sumptę; ac propterea fieri potest, vt ex ęqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur. quod oportebat demonstrare.

PRO-

PROBLEMA III. PROPOSITIO. XXIII.

Ex tribus angulis planis; quorum duo reliquo sint maiores, quomodocumque sumpti, solidum angulum constituere. oportet autem tres angulos quattuor rectis esse minores.

Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK; quorum duo reliquo sint maiores, quomodocumq; sumpti. sintq; tres anguli quattuor rectis minores. oportet ex æqualibus ipsis ABC DEF GHK solidum angulum constituere. abscindatur æquales AB BC DE EF GH HK; & AC DF GK iungatur. fieri igitur põt, vt ex æqualibus ipsis AC DF GK constituatur triangulum. Itaque constituatur LMN, ita vt AC quidem sit æqualis LM, DF vero ipsi MN: & prterea GK ipsi LN: & circa LMN triangulum circulus LMN describatur: sumaturq; ipsius cẽtrum X; quod vel erit intra triangulũ LMN, vel in vno eius latere, vel extra. Sit primũ intra: sitq; X: & LX MX NX iungãtur. Dico AB maiorem esse ipsa LX. Si enim non ita sit, vel AB erit ęqualis LX, vel ea minor. Sit primum æqualis. Quoniam igitur AB est ęqualis LX, atque est AB ipsi BC æqualis; erit LX ęqualis BC; est autem LX æqualis XM. duæ igitur AB BC duabus LX XM æquales sunt: altera alteri; & AC basis basi LM ęqualis ponitur. quare angulus ABC angulo LXM est ęqualis. Eadem ratione & angulus quidẽ DEF est æqualis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL. Tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL ęquales sunt. Sed tres LXM MXN NXL quattuor rectis sunt æquales. ergo & tres ABC DEF GHK æquales erunt quattuor rectis. atqui ponuntur quattuor rectis minores, quod est absurdum. non igitur AB ipsi LX est æqualis. Dico præterea neque AB minorem esse ipsa LX. si enim fieri potest, sit minor; & ponatur ipsi quidem AB ęqualis XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP iungatur. Quoniam igitur AB est æqualis BC, & XO ipsi XP ęqualis erit. ergo & reliqua OL reliquę PM est æqualis; ac propterea LM parallela est ipsi OP; & LMX triangulum triangulo OPX æquiangulum. est igitur vt XL ad LM, ita XO ad OP; & permutando vt LX ad XO, ita LM ad OP. maior autem est LX, quàm XO. ergo & LM quàm OP est maior. Sed LM posita est æqualis AC. & AC igitur quàm OP maior erit. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus OX XP ęquales sunt, & basis AC maior basi OP; erit angulus ABC angulo OXP maior. Similiter demonstrabimus & DEF angulum maiorẽ esse angulo MXN, & angulum GHK angulo NXL. Tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN

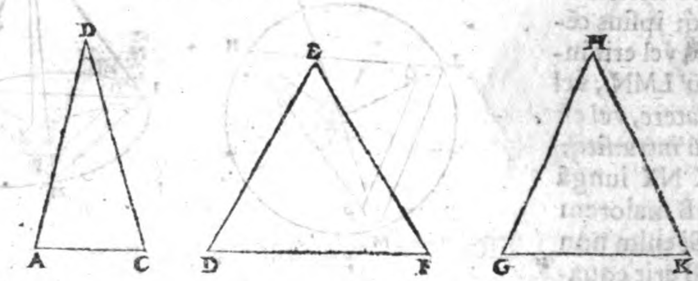


Ex antecedente.
22. primi.
5. quarti.
8. primi.
Corol. 15. primi.
2. sexti.
4. sexti.
25 primi.

MXN NXL sunt maiores. At anguli ABC DEF GHK quattuor rectis minores ponuntur. multo igitur anguli LXM MXN NXL minores erunt quattuor rectis. Sed & ęquales. quod est absurdum. non igitur AB minor est, quàm LX. ostensum autē est neque esse æqualem. ergo maior sit necesse est. constituatur à puncto X circuli LMN plano ad rectos angulos XR, & excessui, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, ponatur ęquale quadratum quod fit ex RX, & RL RM RN iungantur. Quoniam igitur RX perpendicularis est ad planum LMN circuli, & ad vnamquamque ipsarum LX MX NX erit perpendicularis. Et quoniam LX est æqualis XM, communis autem & ad rectos angulos XR, erit basis LR æqualis basi RM. Eadem ratione & RN vtrique ipsarum RL RM est ęqualis. Tres igitur rectæ lineę RL RM RN inter se æquales sunt. Et quoniam quadratum XR ponitur ęquale excessui, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB quadratis ex LX XR æquale. quadratis autem ex LX XR ęquale est quadratū ex RL; rectus enim angulus est LXR. ergo quadratum ex AB quadrato ex RL æquale erit; ideoq; AB ipsi RL est ęqualis. sed ipsi quidem AB æqualis est vnaquæque ipsarum BC DE EF GH HK; ipsi vero RL æqualis vtraque ipsarum RM RN. vnaquæque igitur ipsarum AB BC DE EF GH HK vnicuique ipsarum RL RM RN est æqualis. Quòd cum duæ LR RM duabus AB BC ęquales sint, & basis LM ponatur æqualis basi AC; erit angulus LRM æqualis angulo ABC. Eadem ratione & angulus quidem MRN angulo DEF, angulus autem LRN angulo GHK est æqualis. ex tribus igitur angulis planis LRM MRN LRN, qui ęquales sunt tribus datis ABC DEF GHK solidus angulus constitutus est ad R, qui angulis LRM MRN LRN cōtinetur.

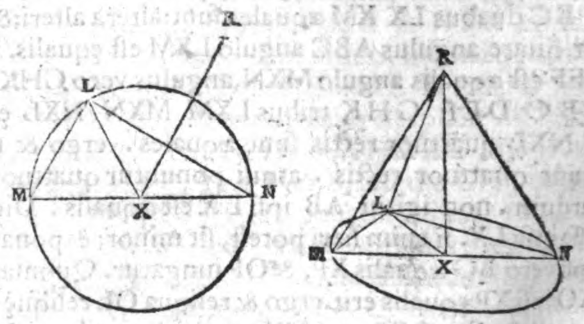
Coro. 15. primi. — 12. huius. — 3. diffi. — 4. primi. — 47. primi. — 8. primi. — Ex antecedente. — 22. primi.

Sed sit centrum circuli in vnò laterum trianguli, videlicet in MN, quod sit X, & XL iungatur. Dico rursus AB maiorem esse ipsa LX. Si enim non ita sit, vel AB est æqualis LX, vel ipsa minor. sit primum æqualis. duę igitur AB BC, hoc est DE EF



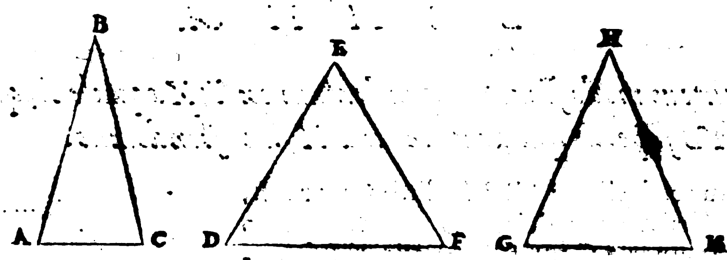
duabus MX XL, hoc est ipsi MN æquales sunt. sed MN ponitur ęqualis DF. ergo DE EF ipsi DF sunt ęquales. quod fieri non potest. non igitur AB est æqualis LX. similiter neq; minor. multo enim magis id quod fieri non potest, sequeretur. ergo AB ipsa LX maior est. & similiter si excessui quo quadratū ex AB superat quadratū ex LX ęquale ponatur, vt quadratum ex RX, & ipsa RX circuli plano ad rectos angulos constituatur, fiet problema.

20. primi.

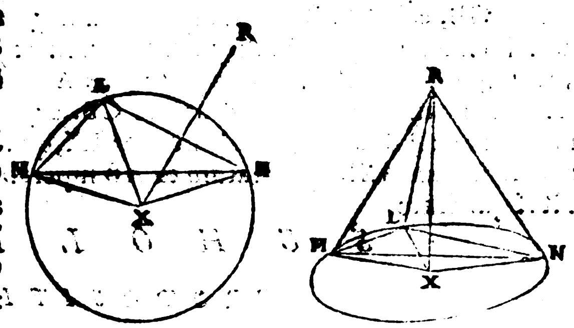


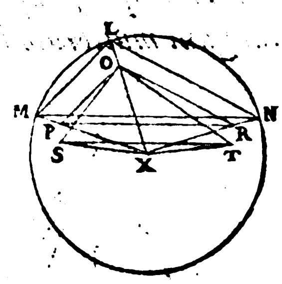
Sed sit centrum circuli extra triangulum LMN, quod sit X, & LX MX NX iūgantur. Dico & sic AB ipsa LX maiorem esse. si enim non ita sit, vel æqualis est, uel minor. sit primum æqualis. ergo duæ AB BC duabus MX XL ęquales sunt, altera alteri; & basis AC est æqualis basi ML. angulus igitur ABC æqualis est angulo MXL. Eadem

8. primi

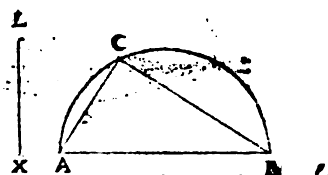


dem ratione & GHK angulus ipsi LXN est æqualis; ac propterea totus MXN æqualis duobus ABC GHK. sed & anguli ABC GHK angulo DEF maiores sunt. & angulus igitur MXN ipso DEF est maior. Et quoniam duæ DE EF duabus MX XN æquales sunt, & basis DF æqualis basi MN, erit MXN angulus angulo DEF æqualis. ostensus autem est maior, quod est absurdum. non igitur AB est æqualis LX. deinceps vero ostendemus neque minorem esse. quare maior necessario erit. & si rursus circuli plano ad rectos angulos constituamus XR, & ipsã æquale ponamus lateri quadrati eius, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, problema constituetur. Itaque dico neque minorem esse AB ipsa LX. si enim fieri potest, sit minor; & ipsi quidem AB æqualis ponatur XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP iungatur. Quoniam igitur AB ipsi BC est æqualis, erit ex XO æqualis XP. ergo & reliqua OL reliquæ PM æqualis. parallela igitur est LM ipsi PO, & triangulum LMX triangulo PXO æquiangulum. quare vt XL ad LM, ita XO ad OP: & permutando vt LX ad XO, ita LM ad OP. maior autem est LX quàm XO. ergo LM quàm OP est maior. sed LM est æqualis AC. & AC igitur quàm OP maior erit. Itaque quoniam duæ AB BC duabus OX XP sunt æquales, altera alteri; & basis AC maior est basi OP; erit angulus ABC angulo OXP maior. similiter & si XR sumatur æqualis vtrique ipsarum XO XP, & iungatur OR, ostendemus angulum GHK angulo OXR maiorem. constituatur ad rectam lineam LX, & ad punctum in ipsa X angulo quidem ABC æqualis angulus LXS, angulo autem GHK æqualis LXT, & ponatur vtraque XS XT ipsi OX æqualis; iunganturque OS OT ST. Et quoniam duæ AB BC duabus OX XS æquales sunt, & angulus ABC æqualis angulo OXS, erit basis AC, hoc est LM basi OS æqualis. Eadem ratione & LN est æqualis ipsi OT. Quod cum duæ ML LN duabus OS ST sint æquales, & angulus MLN maior angulo SOT; erit et basis MN basi ST maior. sed MN est æqualis DF. ergo et DF quàm ST maior erit. Quoniam igitur duæ DE EF duabus SX XT æquales sunt, et basis DF maior basi ST; erit angulus DEF angulo SXT maior. æqualis autẽ est angulus SXT angulis ABC GHK. ergo DEF angulus angulis ABC GHK maior est. sed et minor, quod fieri non potest.





2. sexti
4. sexti



25. primi

4 primi.

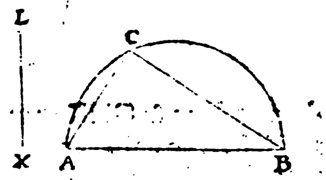
24. primi.

25. primi.

LEMMA

LEMMA.

Quo autem modo sumatur quadratum ex RX æquale ei, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, ita ostendemus.



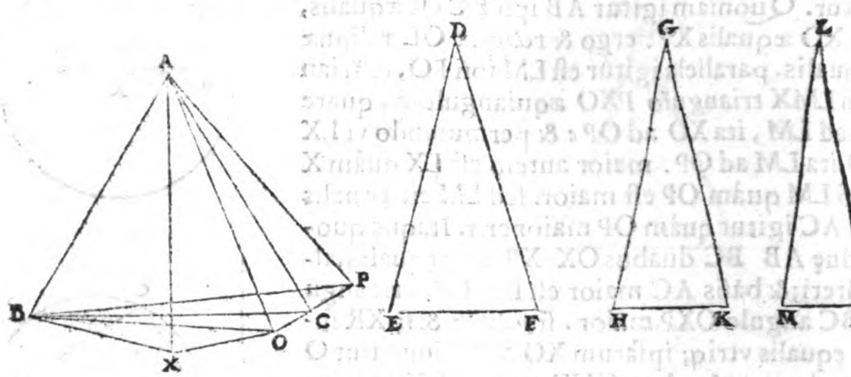
Exponãtur rectę lineæ AB LX, sitq; maior AB, & in ipsa describatur semicirculus A C B; in quo aptetur recta linea AC ipsi LX æqualis, & BC iungatur. Itaque quoniam in semicirculo ABC angulus est AGB, erit A C B rectus. quadratum igitur quod sit ex AB ęquale est, & quadrato quod ex A C, & ei, quod ex C B. ergo quadratum ex A B superat quadratum ex AC, quadrato ex CB. æqualis autem est AC ipsi LX. quadratum igitur ex AB superat quadratum ex LX, quadrato ex C B. Quare si ipsi C B æqualem sumamus XR, quadratum ex AB superabit quadratum ex LX, eo quod fit ex R X quadrato.

31. tertii. 47. primi.

SCHOLIUM.

PROPOSITIO I.

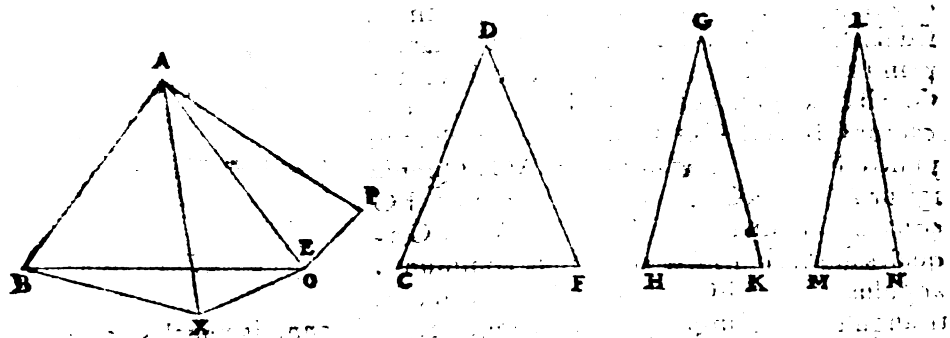
Si fuerint quotlibet anguli plani, quorũ vno reliqui sint maiores quomodocumque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineę æquales. Dico & rectarum linearum angulos subtendentium, vna reliquas maiores esse quomodocũque sumptas: hoc est fieri posse, vt ex ijs, quæ rectas lineas coniungunt multorum laterum figura constituatur.



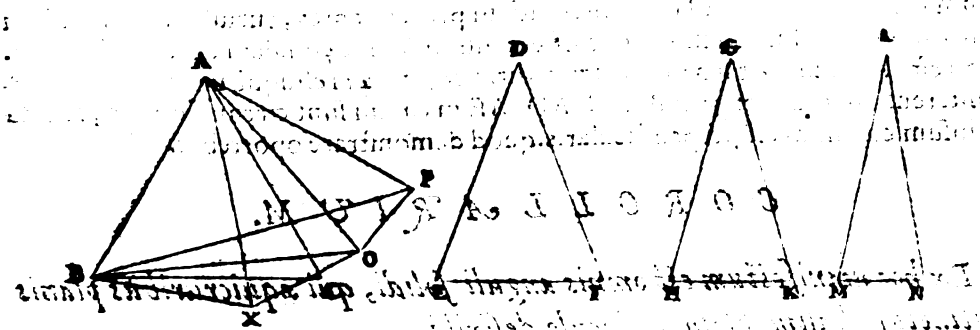
Vt si dati fuerint quattuor anguli ad puncta A D G L, quorum tres reliquo sint maiores quomodocumq; sumpti: æquales autem sint rectæ lineæ BA AC ED DF HG GK ML LN: & iungantur BC EF HK MN. Dico ipsarum BC EF HK MN tres reliqua maiores esse, quomodocumque sumptas. si enim æquales sint anguli ad puncta A D G L, & latera BC EF HK MN ęqualia erunt, & manifestum est tres vna reliqua esse maiores, quomodocumque accipiatur. si vero inęquales sint, sit maior qui ad A. basis igitur BC singulis ipsarum EF HK MN maior est. quare BC cũ vna earum reliquis quibuslibet est maior: & cum duabus reliqua multo maior erit. Dico etiam EF HK MN ipsa BC maiores esse. Quoniam enim angulus ad A maior est singulis ipsorum D G L, constituatur ad BA rectam lineam, & ad pũctum in ipsa A angulo, qui ad D æqualis angulus BAX, & ad rectam lineam AX, & ad pũctũ in ipsa A angulo, qui ad G æquali cõstituto angulo XAO, vel AO cadet intra lineã AC, vel in ipsam, vel extra ipsam. Cadat primũ intra, & ad rectam lineam OA, & ad

24. primi. 23. primi.

& ad punctum in ipsa A angulo qui ad L ęqualis fiat angulus OAP. cadet AP extra lineam AC, propterea quòd tres anguli D G L reliquo sunt maiores. & ipsis AB AC ęquales ponantur AX AO AP: iungaturq; BX XO BO OP BP. Quoniam igitur duę BA AP duabus BA AC sunt æquales, angulus aũt BAP maior est angulo BAC; erit & BP basis basi AC maior. Sed ipsa BP maiores sunt BO OP. quare BO OP ipsa BC sunt multo maiores. suntq; BX XO maiores, quàm BO. ergo BX XO OP mul- 24. primi.



to maiores sunt ipsa BC. atque est BX quidem ęqualis ipsi EF, quoniam & angulus BAX æqualis est angulo EDF; XO vero est ęqualis HK, & OP ipsi MN. quare EF HK MN ipsa BC multo maiores erunt. Sed recta linea, quæ cum AX continet angulum æqualem angulo G cadat in ipsam AC, vt in secunda figura: & BX XC CP iungantur. Itaque quoniam BX XC ipsa BC maiores sunt, & sunt BX XC CP æquales ipsis EF HK MN; erunt EF HK MN ipsa BC multo maiores. Denique recta linea AO, quæ cum AX continet angulum angulo G æqualem, cadat extra AC, vt in tertia figura: ponaturq; æqualis ipsi AP: & iungantur BP BO OP BX XO. Quoniam 4. primi



igitur duæ BA AP duabus BA AC æquales sunt, angulus autem BAP maior est angulo BAC; erit BP quàm BC maior. Rursus quoniam BO OP maiores sunt quã BP, & BX XO maiores quàm BO; erunt BX XO OP quàm BP multo maiores. Sed BP est maior BC. quare BX XO OP multo maiores sunt ipsa BC: sũtq; BX XO OP ipsis EF HK MN æquales. ergo EF HK MN ipsa BC multo maiores sunt. Et quoniam tres reliqua maiores sunt, quomodocumque sumptæ, fieri potest, vt ex ipsis quadrilaterum ipsam constituatur. 24. primi.

PROPOSITIO II.

Si in aliquod planũ à quodam sublimi puncto æquales rectę lineę cadant, in circuli erunt circumferentia, & quæ à dicto puncto ad centrum circuli ducitur ad circulum perpendicularis erit.

A puncto enim A in subiectum planum æquales rectæ lineę cadãt AB AC AD AE ad puncta B C D E. Dico ea puncta in circuli circumferentia esse. Iungantur enim in subiecto plano BC CD DE EB, & circa BCD triãgulum circulus describatur BCDF. ergo puncta BCD in circuli circumferentia sunt. Dico etiam ipsum E in circumferẽtia esse. non enim, sed si fieri potest, vel extra vel intra cadat. & primum cadat extra, & sumpto circuli centro G, ab eo ad puncta B C D E rectę lineæ ducantur GB GC GD GE, vt GE circulum in puncto F secet, & iungantur AE AG. Quoniã igitur AB ipsi AC est æqualis, est autem & BG ęqualis CG: duæ AB BG duabus AC CG æquales sunt. & basis AG est vtrique communis. angulus igitur ABG angulo ACG est æqualis, triangulumq; triangulo, & reliqui anguli reliquis angulis æquales. ergo angulus AGB æqualis est angulo AGC. Eadem ratione & angulus AGC angulo AGD æqualis erit. Quòd cum AG ad plures quàm duas rectas lineas in eodem existentes plano rectos angulos efficiat, ad planum quod per ipsas ducitur perpendicularis erit. quare ad circulum ipsum. Itaque quoniam GD ipsi GF est æqualis, communis autem & ad rectos angulos GA; erit basis AD basi AF ęqualis. ergo & vnaqueque ipsarum AB AC AE æqualis est ipsi AF. Et quoniam angulus AFE maior est recto AGF, quòd exterior sit, erit angulus AEF recto minor. trianguli igitur AEF angulus qui est ad F maior est angulo qui ad E. quare & latus AE maius est latere AF. sed & ostensum est æquale. quod est absurdum. non igitur punctum E extra circuli circumferentiam cadit. similiter ostendemus neque cadere intra. ducentes enim ad ipsum rectam lineam, & ad circumferentiam protendentes, rursusq; ab A ad dictũ punctum rectam lineam iungentes, ostẽdemus ipsam & ęqualem esse, & minorem. quod est absurdum. At si neque extra cadit, neq; intra; relinquitur vt in ipsam circumferentiam cadat. ergo AB AC AD AE in circuli sunt circumferentia, & AG ad ipsum circulum est perpendicularis. quod demonstrare oportebat.

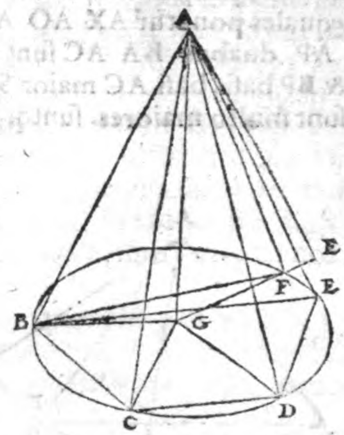
8. primi.

4. huius.

4. primi.

16. primi.

19. primi.



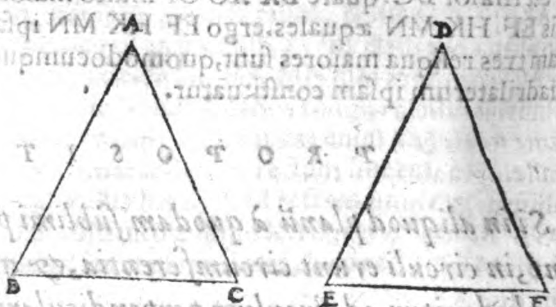
COROLLARIUM.

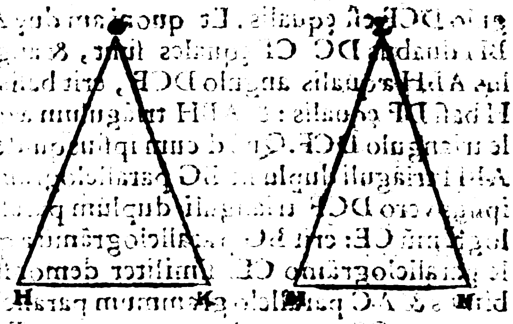
Ex hoc manifestum est omnis anguli solidi, qui æquicruribus planis continetur, basim ipsam in circulo describi.

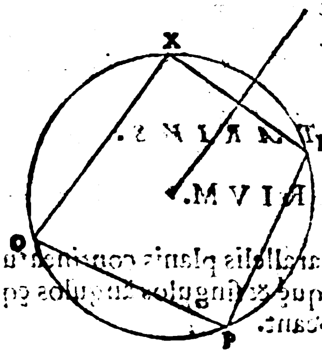
PROPOSITIO XXIII.

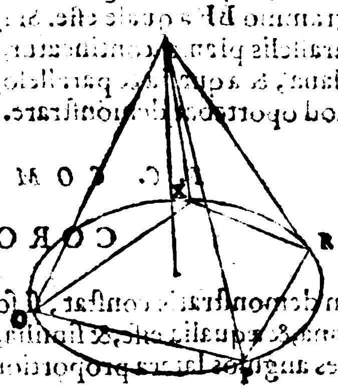
Ex planis quotlibet datis angulis, quorum vno reliqui sint maiores quomodocũq; sumpti, solidũ angulũ cõstituere. oportet aũt datos angulos quattuor rectis esse minores.

Sint dicti anguli BAC EDF HGK MLN. oportet ex angulis qui sunt ad puncta A D G L solidum angulum constituere. sumantur æquales rectæ lineæ



lin eæ, quę ipsos angulos continent, & iungantur BC EF HK MN. æquicruria igitur sunt triangula, quæ vno quouis angulo reliquos maiores habent, quomodocumque sumptos. ergo BC EF HK MN quadrilaterum efficiẽt. fiat & sit X O P R. Et quoniã oportet ex æquicruribus triangulis BAC EDF HGK MLN solidum angulum constituere: omnis autem solidi  Ex corol. 22 antecedenti.



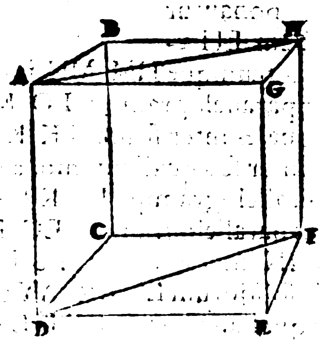


anguli, qui æquicruribus triangulis continetur basim circumscribit circulus; & anguli solidi contenti triangulis BAC EDF HGK MLN, basim circulus circumscribet. dicti vero anguli basis constat ex basibus ipsorum triangulorum, videlicet XO PR. ergo quadrilaterum XOPR circulus circũscribit. Et deinceps eadem construentes ijs, quę dicta sunt in angulo solido pro basi triangulum habente, propositum efficiemus.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIIII.

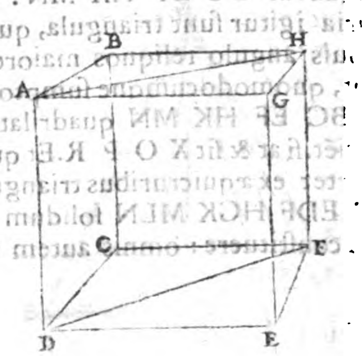
Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia & parallelogramma erunt.

Solidum enim CDGH parallelis planis AC GF AH DF FB AE contineatur. Dico opposita eius plana, & æqualia & parallelogramma esse. Quoniam enim duo plana parallela BG CE, à plano AC secantur, communes ipsorum sectiones parallelæ sunt. ergo AB ipsi CD est parallela. Rursus quoniã duo plana parallela BF AE secantur à plano AC, communes ipsorum sectiones parallelæ sunt. parallela igitur est AD ipsi BC: ostẽsa autem est & AB parallela CD. ergo AC parallelogrammum erit. similiter demonstrabimus, & vnumquodque ipsorum DF FG GB BF AE parallelogrammum esse. Iũgantur AH DF. Et quoniam parallela est AB quidem ipsi DC, BH vero ipsi CF, erunt duę AB BC se se tangentes duabus DC CF se se tangentibus parallelæ, & non in eodem plano. quare ęquales angulos continebunt. angulus igitur ABH an- 16. huius. 10. huius.



gulo DCF est ęqualis. Et quoniam duę AB BH duabus DC CF ęquales sunt, & angulus ABH æqualis angulo DCF, erit basis AH basi DF ęqualis: & ABH triãgulum æquale triangulo DCF. Quòd cum ipsius quidem ABH triãguli duplũ sit BG parallelogrãmũ; ipsius vero DCF trianguli duplum parallelogrãmũ CE: erit BG parallelogrãmũ æquale parallelogrãmo CE. similiter demonstrabimus & AC parallelo grammum parallelogrammo GF, & parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale esse. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia & parallelogramma sunt, quod oportebat demonstrare.

34. primi. 4. primi. 41. primi.



F. C. COMMENTARIVS.

COROLLARIVM.

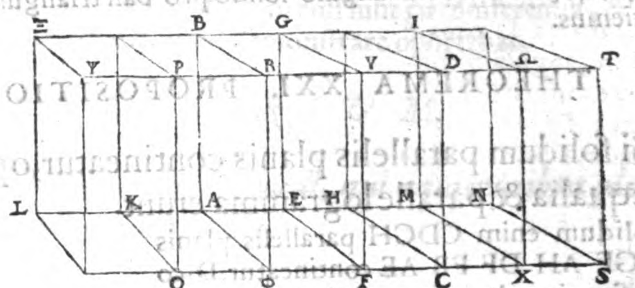
Ex iam demonstratis constat, si solidum parallelis planis contineatur opposita ipsius plana, & æqualia esse, & similia, quippe quę & singulos angulos ęquales, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

1. diffi. sexti.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXV.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit vt basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidũ enim parallelepipedum ABCD plano YE secetur, oppositis planis RA DH parallelo. Dico vt AEFΦ basis ad basim EHCF, ita esse ABFY solidum ad solidũ EGCD. producatur enim AH ex vtraq; parte, & ponantur ipsi quidem EH æquales quotcumque HM MN; ipsi uero AE æquales quotcumque AK KL, & compleantur parallelogramma LO KΦ HX MS, & solida LP KR DM MT. Quoniã igitur æquales inter se sunt LK KA AE rectæ lineæ; erunt & parallelogramma LO KΦ AF inter se æqualia: itemq; æqualia inter se parallelogramma KX KB AG, & adhuc parallelogramma LΨ KP AR inter se æqualia; opposita enim sunt. Eadem ratione & parallelogramma EC HX MS ęqualia inter se; itemq; parallelogrãma HG HI IN inter se æqualia: & insuper parallelogramma DH MΩ NT. tria igitur plana solidorum LP KR AY tribus planis æqualia sunt. sed tria tribus oppositis sunt æqualia. ergo tria solida LP KR AY inter se æqualia erunt. Eadem ratione & tria solida ED DM MT sunt æqualia inter se. quotuplex igitur est basis LF ipsius AF basis, totuplex est & LY solidum solidi AY. Et eadem ratione quotuplex est NF basis ipsius basis HF, totuplex est & solidum NY ipsius HY solidi: & si basis LF est



1. sexti. Ex antecedente.

est æqualis basi NF, & solidum LY solido NY æquale erit. & si basis LF superat NF basim, & LY solidum solidum NY superabit, & si minor, minus. quattuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus AF FH, & duobus solidis AY YH sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem AF, & AY solidi, videlicet basis LF, & solidum LY: basis vero HF, & HY solidi, nempe basis NF & solidum NY. & demõstratum est si basis LF superat basim NF, & LY solidum solidum NY superare, & si æqualis æquale, & si minor minus. est igitur vt AF basis ad basim FH, ita AY solidũ ad solidum YH. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis planis parallelo; erit vt basis ad basim, ita solidũ ad solidũ. quod oportebat demonstrare.

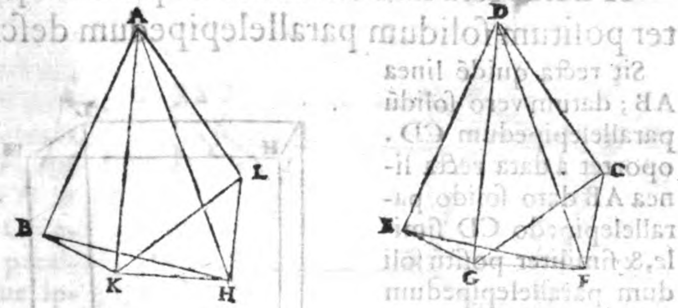
F. C. COMMENTARIVS.

Quod si solidum parallelepipedum secetur plano basibus parallelo; erit solidum ad solidum, vt altitudo ad altitudinem.

Hoc enim nos demonstrauimus in libro de centro grauitatis solidorum propositione XVIII.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XXVI.

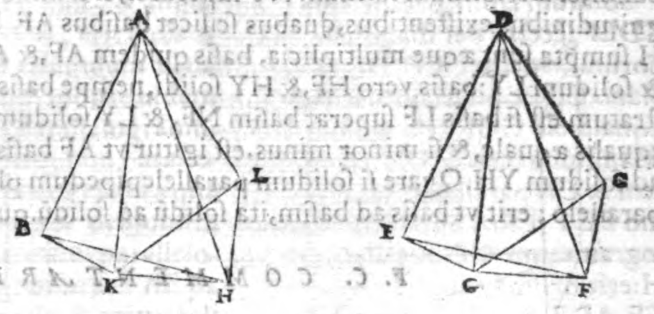
Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem solidum angulum constituere.



Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipsa pũctum A, & datus solidus angulus ad D, qui EDC EDF FDC angulis planis cõtineatur. oportet ad datam rectam lineã AB, & ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D æqualẽ solidum angulum constituere. sumatur enim in linea DF quod vis punctum F, à quo ad planum per ED DC transiens ducatur perpendicularis FG, & plano in puncto G occurrat; iungaturq; DG, & ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem EDC æqualis angulus constituatur BAL; angulo autem EDG constituatur æqualis BAK. deinde ipsi DG ponatur æqualis AK, & à puncto K plano per BAL ad rectos angulos erigatur KH; ponaturq; ipsi GF æqualis KH, & HA iungatur. Dico angulum solidum ad A, qui angulis BAL BAH HAL continetur, æqualem esse solido angulo ad D angulis EDC EDF FDC contẽto. sumantur enim æquales rectæ lineæ AB DE, & iungantur HB KB FE GE. Quoniam igitur FG perpendicularis est ad subiectũ planum; & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, suntq; in subiecto plano rectos faciet angulos. Vterque igitur angulorũ FGA FGD FGE rectus est. Eadẽ ratione, & vterq; ipsorum HKA HKB est rectus. Et quoniam duæ KA AB duabus GD DE æquales sunt altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis BK basi EG æqualis. est autem & KH æqualis GF, atque angulos rectos continent. æqualis igitur et HB ipsi FE. Rursus quoniam duæ AK KH duabus DG GF æquales sunt, et rectos continent angulos; erit basis AH basi DF æqualis: estq; AB æqualis DE. duæ igitur HA AB duabus FD DE sunt æquales; et basis HB est æqualis basi FE. ergo angulus BAH angulo EDF æqualis erit. Eadem ratione et angulus HAL angulo FDC est æqualis, quandoquidem si assumamus æquales AL DC, et iungamus KL HL GC FC, quoniam totus BAL est æqualis

Marginal notes: 11. huius. 23. primi. 11. huius. 3. diff. 4. primi. 4. primi. 8. primi.

æqualis toti EDC, quorum BAK ipsi EDG ponatur æqualis; erit reliquus KAL æqualis reliquo GDC. Et quoniã duæ KA AL duabus GD DC æquales sunt, et angulos æquales continent; basis KL basi GC æqualis erit. est autem et KH æqualis GF. duæ igitur LK KH duabus DC GF sunt æquales; angulosq; rectos continent. ergo basis HL æqualis est basi FC. Rursus quoniam duæ HA AL duabus FD DC æquales sunt, & basis HL æqualis basi FC; erit angulus HAL æqualis angulo FDC. atque est angulus BAL angulo EDC æqualis. Ad datam igitur rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualis angulus solidus constitutus est. quod facere oportebat.



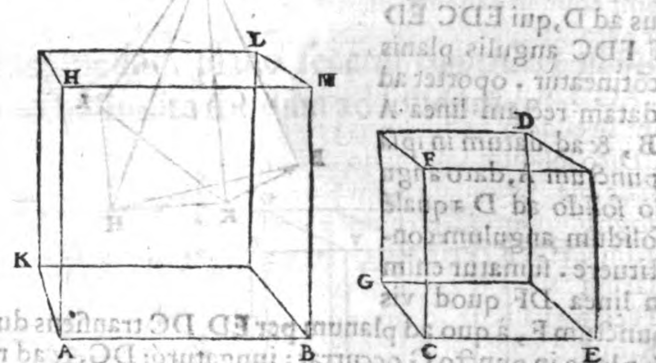
4. primi.

8 primi.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXVII.

A data recta linea dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Sit recta quidẽ linea AB; datum vero solidũ parallelepipedum CD. oportet à data recta linea AB dato solido parallelepipedo CD simile, & similiter positũ solidum parallelepipedum describere. constituatur enim ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad C æqualis angulus, qui angulis BAH HAK KAB contineatur, ita vt angulus quidem BAH æqualis sit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus KAH angulo GCF, & fiat vt EC ad CG, ita BA ad AK; vt autem GC ad CF, ita KA ad AH. ergo ex æquali vt EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH, & AL solidum. Quoniam igitur est vt EC ad CG, ita BA ad AK, & circa æquales angulos ECG BAK latera sunt proportionalia; erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE simile. Eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est parallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogrãma solidi AL tribus parallelogrãmis solidi CD similia sunt. sed tria tribus oppositis sunt æqualia, & similia: Ergo totũ AL solidum toti solido CD simile erit. A data igitur recta linea AB dato solido parallelepipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelepipedum AL descriptum est. quod facere oportebat.



Ex antecedente.

12. sexti.

1. diffi. sexti.

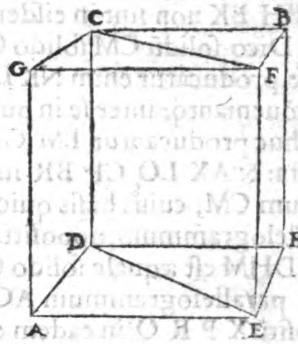
24. huius.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVIII.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum

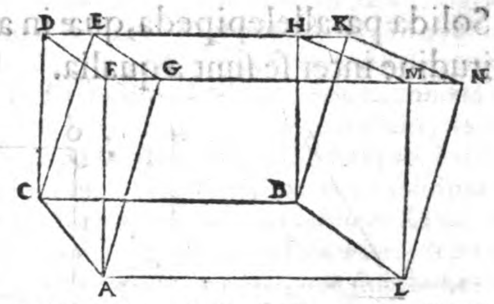
positorum planorum ab ipso plano bifariam secabitur.

Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales oppositorũ planorum, videlicet CF DE. Dico solidum AB à plano CDEF bifariam secari. Quoniam enim æquale est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; est autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale, oppositum enim est, & parallelogrammum GE æquale parallelogrammo CH: erit prisma contentum duobus triangulis CGF ADE, & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CFB DEH, & tribus parallelogrammis CH BE CE; etenim ęqualibus planis, & numero & magnitudine continentur. ergo totum AB solidum à plano CDEF bifariã secatur. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXIX.

Solida parallelepipeda, quę in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.



Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum stãtes AF AG LM LN CD CE BH BK sint in eisdem rectis lineis FN DK. Dico solidum CM solido CN ęquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est vtrumque ipsorum CH CK; erit CB vtrique ipsarum DH EK æqualis, ergo & DH est æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE ęqualis est reliquæ HK. quare & DEC triangulum est ęquale triangulo HKB. parallelogrammum autẽ DG est æquale parallelogrammo HN. Eadem ratione & AFG triangulum ęquale est triangulo LMN. est autem parallelogrammum CF parallelogrammo BM, & parallelogrammũ CG parallelogrammo BN æquale: opposita enim sunt. ergo & prisma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur solidum, cuius basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi GEHM. ergo totum CM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo CN est ęquale. solida igitur parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. quod demonstrare oportebat.

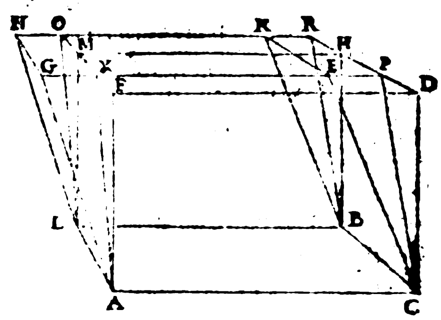
34. primi.
1. sexti.
24. huius.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXX.

Solida parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint

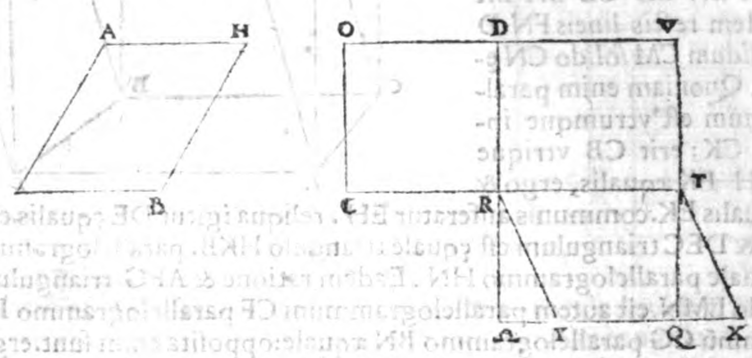
Sint in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN, & eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH BK non sint in eisdem rectis lineis. Dico solidũ CM solido CN ęquale esse. producãtur enim NK DH & GE FM, coueniantq; inter se in punctis RX: & adhuc producantur FM GE ad O P puncta: & AX LO CP BR iungantur. solidum CM, cuius basis quidẽ ACBL parallelogrammum, oppositum autem ipsi FDHM est æquale solido CO, cuius basis parallelogrammum ACBL, & ei oppositũ X P R O; in eadem enim sunt basi ACBL, & ipsorum stantes AF AX LM LO CD CP BH BR sunt in eisdem rectis lineis FO DR. Sed solidum CO, cuius basis quidem parallelogrãmum ACBL, oppositum autem ipsi XPRO est æquale solido CN, cuius basis ACBL parallelogrãmum, & ipsi oppositum GE KN. etenim in eadem sunt basi ACBL, & eorum stantes AG AX CE CP LN LO BK BR sunt in eisdem rectis lineis GP NR. quare & CM solidum solido CN æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in eadẽ sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdẽ rectis lineis, inter se sunt ęqualia. quod demonstrare oportebat.



Ex antecedente.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXXI.

Solida parallelepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus, & eadẽ altitudine inter se sunt æqualia.

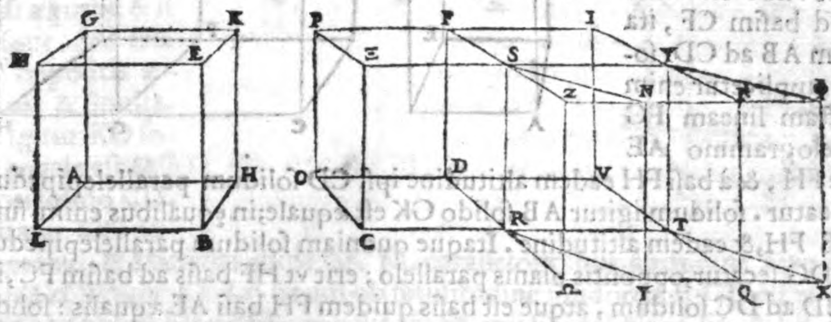


Sint in æqualibus basibus AB CD solida parallelepipeda AE CF, & eadẽ altitudine. Dico solidum AE solido CF æquale esse. sint autem primum stantes HK BE AG LM OP DF CΞ RS ad rectos angulos basibus AB CD: angulus autem ALB angulo CRD sit inæqualis, & producatur ipsi CR in directum RT: constituaturq; ad rectam lineam RT, & ad punctum in ipsa R, angulo ALB æqualis angulus RTY: & ponatur ipsi quidem AL æqualis RT, ipsi vero LB æqualis RY, & ad punctum Y ipsi RT parallela ducatur XY, compleaturq; basis RX, & ⲧY solidum. quoniam igitur duæ TR RY duabus AL LB æquales sunt, & angulos continent æquales; erit parallelogrammum RX ęquale & simile parallelogrammo HL. Et quoniam rursus AL est æqualis RT, & LM ipsi RS, angulosq; ęquales continẽt, parallelogrammum Rⲧ parallelogrammo AM æquale & simile erit. Eadem ratione LE parallelogrammum ipsi SY ęquale est & simile. tria igitur parallelogrãma solidi AE tribus parallelogrammis solidi ⲧY æqualia & similia sunt. Sed & tria tribus

23.primi.

1.diffi. sexti.

bus opposita & æqualia sunt & similia. totum igitur AE solidum parallelepipedũ toti solido parallelepipedo Ψ Y est ęquale. producantur DR XY, coueniantq; inter sẽ in pũcto Ω, & per T ipsi DΩ parallela ducatur TQ, & producãtur TQ OD, & cõ ueniant in V, compleanturq; solida ΩΨ RI. solidum igitur Φ Ω cuius basis est RΨ parallelogrammum, oppositum autem ipsi ΩΓ est æquale solido Ψ Y, cuius basis est RΨ parallelogrammum, & oppositum ipsi ΥΦ, in eadem enim sunt basi RΨ, & eadem altitudine, & eorum stantes RΩ RY TQ TX SZ SN ΦΓ ΨΦ in eisdẽ sunt rectis lineis Ω X Z Φ. Sed solidum Ψ Υ æquale est solido AE. ergo & ΨΩ solido AE est 24. huius. 29. huius.

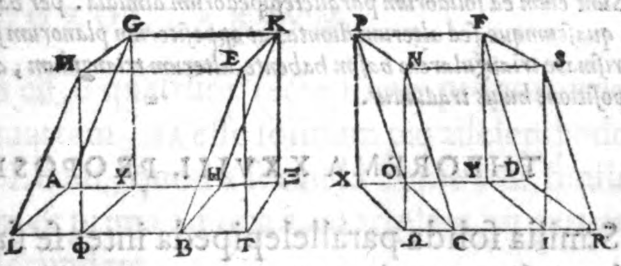


æquale. præterea quoniam parallelogrammum RYXT est ęquale parallelogrammo ΩT, etenim in eadem est basi RT, & in eisdem parallelis RT ΩX. Sed parallelogrammum RYXT parallelogrammo CD est ęquale, quoniam & ipsi AB; parallelogrammumq; ΩT æquale parallelogrammo CD: aliud autem parallelogrammum DT. est igitur vt CD basis ad basim DT, ita ΩT ad ipsam DT. Et quoniam solidum parallelepipedum CI plano RF secatur planis oppositis parallelo; erit vt CD basis ad basim DT, ita solidum CF ad RI solidum. Eadem ratione quoniam solidum parallelepipedum ΩI secatur plano RΨ oppositis planis parallelo, vt ΩT basis ad basim CD, ita erit solidum ΩΨ ad RI solidum. sed vt CD basis ad basim DT, ita basis ΩT ad ipsam TD. Vt igitur solidum CF ad RI solidum, ita solidum ΩΨ ad solidum RI. Quòd cum vtrumque solidorum CF ΩΨ ad solidum RI eandem habeat proportionem, solidum CF solido ΩΨ est æquale. solidum autem ΩΨ ostensum est æquale solido AE. ergo & AE ipsi CF ęquale erit. sed non sint stantes AG HK BE LM CN OP DF RS ad rectos angulos ipsis AB CD basibus. Dico rursus solidum AE ęquale esse solido CF. Ducãtur à punctis K E G M P F N S ad subiectum planum perpendiculares KΞ ET GY MΦ PX FΨ NΩ SI, & plano in punctis Ξ T Y Φ X Ψ Ω I occurrãt, & iungantur Ξ T YΦ XY TΦ XΨ XΩ ΩΨ I. æquale igitur est KΦ solidum solido PI; in æqualibus enim sunt basibus KM PS, & eadem altitudine; quorum stantes ad rectos angulos sunt basibus. sed KΦ solidum solido AE est æquale: solidum vero PI æquale solido CF. si quidem in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis. ergo & solidum AE solido CF æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quę in æqualibus sunt basibus, & eadem altitudine, inter se sunt ęqualia. quod demonstrare oportebat.

25. huius.

9. quinti.

11. huius.

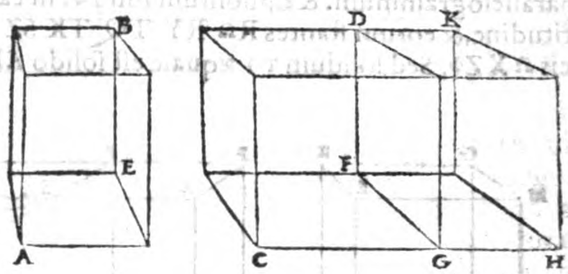


Ex proxima demõstratis.

30. huius.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO. XXXII.

Solida parallelepipeda, quę eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases.



Sint solida parallelepipeda AB CD, quæ eadem altitudinem habeant. Dico inter se esse vt bases. hoc est vt AE basis ad basim CF, ita solidum AB ad CD solidum. applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE ęquale FH, & à basi FH eadem altitudine ipsi CD solidum parallelepipedum GK compleatur. solidum igitur AB solido GK est æquale; in ęqualibus enim sunt basibus AE FH, & eadem altitudine. Itaque quoniam solidum parallelepipedum CK plano DG secatur, oppositis planis parallelo; erit vt HF basis ad basim FC, ita solidum HD ad DC solidum, atque est basis quidem FH basi AE æqualis: solidum vero GK æquale solido AB. est igitur & vt AE basis ad basim CF, ita solidum AB ad solidum CD. Quare solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente

25. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Constat etiam solida parallelepipeda in eadem basi, vel in ęqualibus basibus constituta eam inter se proportionem habere, quam altitudines.

Quod nos demonstrauimus in libro de centro grauitatis solidorum, propositione XIX.

COROLLARIVM.

Ex his igitur & iam demonstratis sequitur prismata triãgulares bases habentia, quę vel in eisdem, vel æqualibus basibus constituũtur, & eadem altitudine inter se æqualia esse. Et insuper quæ eandem habent altitudinem inter se esse, vt bases. Et quę vel in eisdem vel æqualibus basibus constituuntur, inter se esse, vt altitudines.

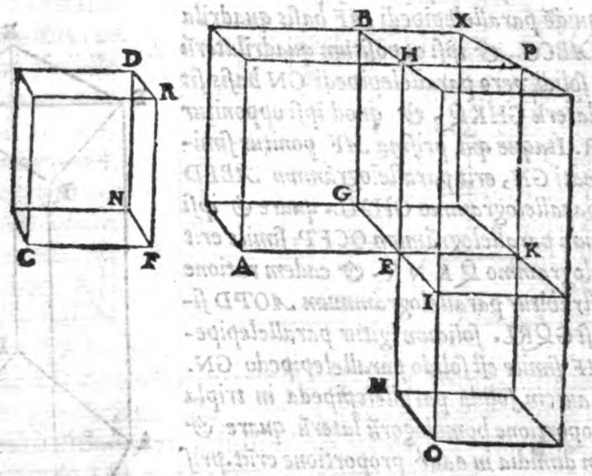
28. huius.

Sunt enim ea solidorum parallelepipedorum dimidia. per bases autem prismatis intelligimus non quascumque, sed alterum dumtaxat oppositorum planorum similium & parallelorum, vt nũc in prismate triangularem basim habente, alterum triangulum, alioquin obstarent, quae in vltima propositione huius traduntur.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXIII.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in tripla proportione homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda AB CD; latus autem AE homologum sit lateri CF. Dico solidum AB ad CD solidum triplam proportionem habere eius, quã habet AE ad CF. producantur enim EK EL EM in directum ipsis AE GE HE: & ipsi quidem CF æqualis ponatur EK, ipsi vero FN ęqualis EL; & adhuc ipsi FR ęqualis EM, & KL parallelogrammum, & KO solidum compleatur. Quoniam igitur duę KE EL duabus CF FN æquales sunt; sed & angulus KEL angulo CFN est ęqualis; quod & angulus AEG ipsi CFN ob similitudinem solidorum AB CD: erit & KL parallelogrammum simile parallelogrammo CN. Eadem ratione & parallelogrammum



mum KM æquale est & simile parallelogrammo CR, & adhuc parallelogrammum OE ipsi DF parallelogrammo. tria igitur parallelegrammma solidi KO tribus parallelogrammis CD solidi æqualia & similia sunt. Sed tria tribus oppositis æqualia sút & similia. totum igitur KO solidum æquale est & simile toti solido CD. compleatur GK parallelogrãmũ; & à basibus quidẽ GK KL parallelogrãmis, altitudine vero eadẽ ipsi AB solida cõpleátur AX LP. Et qm̃ ob similitudinẽ solidorũ AB CD est vt AE ad CF, ita EG ad FN, & EH ad FR; æqualis aũt FC ipsi EK, & FN ipsi EL, & FR ipsi EM: erit vt AE ad EK, ita GE ad EL, & HE ad EM. sed vt AE quidẽ ad EK, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK: vt autem GE ad EL, ita GK ad KL: & vt HE ad EM, ita PE ad KM. & vt igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK ad KL, & PE ad KM. sed vt AG quidem ad GK, ita AB solidum ad solidũ EX: vt autem GK ad KL, ita solidum XE ad PL solidum: & vt PE ad KM, ita PL solidum ad solidum KO. & vt igitur solidum AB ad solidum EX, ita EX ad PL, & PL ad KO. si autem quattuor sint magnitudines deinceps proportionales prima ad quartam triplam proportionem habet eius, quàm ad secundam. ergo & AB solidum ad solidum KO triplam habet proportionem eius, quam AB ad EX. sed vt AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; & AE recta linea ad ipsam EK. quare & AB solidum ad solidum KO triplam proportionem habebit eius, quã AE habet ad EK. æquale autem est solidum KO solido CD, & recta linea EK rectæ CF est æqualis. ergo & AB solidum ad solidum CD triplam habet proportionẽ eius, quam latus ipsius homologum AE habet ad CF homologum latus. quod demonstrare oportebat.

24 huius.
1. sexti.
Ex antecedente.
11. quinti.
11. diffi. quinti.
Ex antecedente.
1. sexti.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, vt prima ad quartam, ita esse solidum parallelepipedum, quod fit à prima ad solidum, quod à secunda simile, & similiter descriptum; quoniam & prima ad quartam triplam proportionẽ habet eius, quam ad secundam.

F. C. COMMENTARIVS.

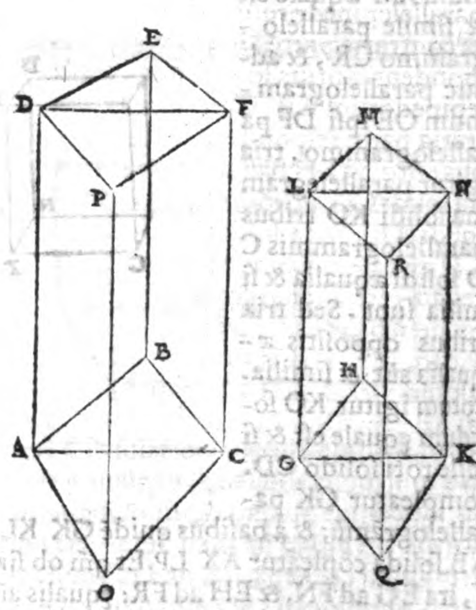
Ex proxime demonstratis, sequitur prismata similia, quę triangulares bases habent in tripla esse proportione homologorum laterum.

Sint similia prismata triangulares bases habentia, & similiter posita AF GN, & prismatis quidem AF basis sit triangulum ABC, & quod ipsi opponitur DEF: prismatis uero GN basis sit triangulum GHK, & ipsi oppositum LMN. Sit autem latus AB homologum lateri GH. Dico prisma AF ad prisma GN triplam habere proportionem eius, quam habet AB ad GH. Com-

 pleantur

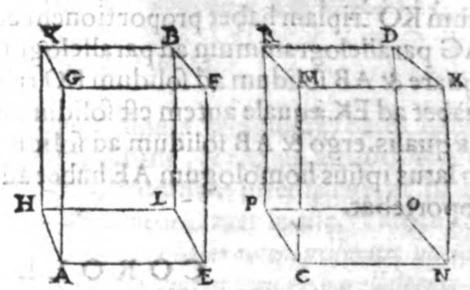
pleantur enim solida parallelepipeda, & sit solidi quidē parallelepipedi AF basis quadrilaterum ABCO, & ipsi oppositum quadrilaterū DEFP solidi vero parallelepipedi GN basis sit quadrilaterū GHKQ, & quod ipsi opponitur LMNR. Itaque qm̄ prisma AF ponitur simile prismati GN, erit parallelogrām̄m ABED simile parallelogrammo GHML. quare & ipsi oppositum parallelogrāmum OCFP simile erit parallelogrammo QKNR. & eadem ratione demonstrabitur parallelogrammum AOPD simile ipsi GQRL. solidum igitur parallelepipedum AF simile est solido parallelepipedo GN. similia autem solida parallelepipeda in tripla sunt proportione homologorū laterū. quare & ipsorum dimidia in eadē proportione erūt. prisma igitur AF ad prisma GN triplā proportionē habebit eius, quam habet AB ad GH. quod oportebat demonstrare.

9.diff. huius
24. huius.



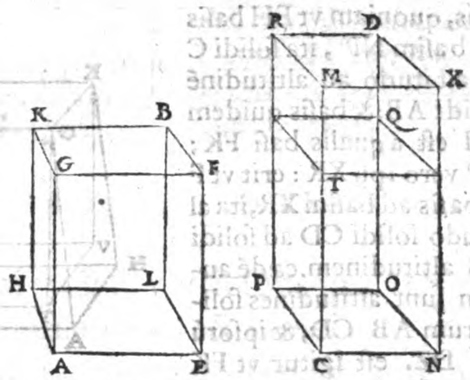
THEOREMA XXIX.
PROPOSITIO XXXIIII.

Aequalium solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent: & quorum solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt æqualia.

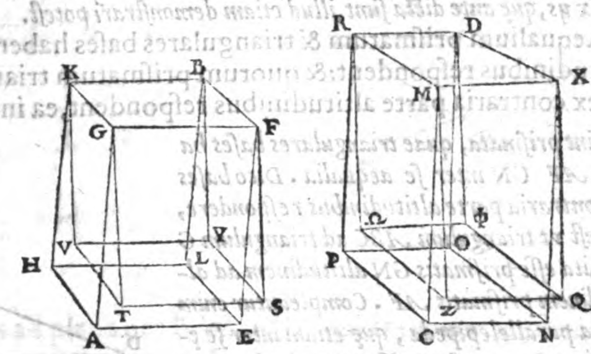


Sint æqualia solida parallelepipeda AB CD. Dico ipsorum bases ex contraria parte altitudinibus respōdere: hoc est vt EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Sint enim primū stantes AG EF LB HK CM NX OD PR ad rectos angulos basibus ips[o]rū. Dico ut EH basis ad basim NP, ita esse CM ad AG. Si igitur basis EH basi NP sit ęqualis, est autem & AB solidum æquale solido CD; erit & CM æqualis ipsi AG. si enim basibus EH NP æqualibus existentibus non sint AG CM altitudines ęquales, neque AB solidum solido CD æquale erit. ponitur autem æquale. non igitur inæqualis est altitudo CM altitudini AG. ergo æqualis sit necesse est; ac propterea vt EH basis ad basim NP, ita erit CM ad AG. ex quibus constat solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex contraria parte altitudinibus responde re. At vero non sit basis EH æqualis basi NP. Sed EH sit maior. est autem & AB solidum solido CD æquale. ergo maior est CM ipsa AG; alioqui rursus sequeretur solida AB CD æqualia non esse, quæ ponuntur ęqualia. Itaque ponatur CT æqualis ipsi AG: & à basi quidem NP, altitudine autem CT solidum parallelepipedum VC compleatur. Quoniam igitur solidum AB solido CD est æquale, aliud autem aliquod est VC, & æqualia ad idem eandem habēt proportionem; erit vt AB solidum ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. sed vt AB solidum ad solidum CV, ita basis EH ad NP basim ęquealta enim sunt AB CV solida. Vt autem solidum CD ad ipsum CV, ita MP basis ad basim PT, & MC ad CT. & vt igitur basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. est autem CT æqualis AG. ergo & vt EH basis ad basim NP, ita

7. quinti.
32. huius.
25 huius.
1. sexti.



NP, ita MC ad AG. quare solidorum parallelepipedorum AG CD bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex contraria parte respondeant altitudinibus: sitq; vt EH basis ad basim MP, ita solidi CD altitudo ad altitudinẽ solidi AB. Dico solidum AB solido CD æquale esse. Sint enim rursus stãtes ad rectos angulos basibus. & si quidem basis EH sit æqualis basi NP, estq; vt EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem: erit solidi CD altitudo altitudini solidi AB æqualis. solida autem parallelepipida, quæ sunt in æqualibus basibus, & eadem altitudine inter se æqualia sunt. ergo solidum AB solido CD est ęquale. sed nõ sit EH basis æqualis basi NP, & sit EH maior. maior igitur est & solidi CD altitudo altitudine solidi AB, hoc est CM ipsa AG. ponatur ipsi AG æqualis rursus CT, & similiter solidum CV compleatur. Itaque quoniam est vt EH basis ad basim NP, ita MC ad ipsam AC; æqualis autem est AG ipsi CT: erit vt basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. sed vt basis EH ad NP basim, ita AB solidum ad solidum CV; æquealta enim sunt solida AB CA. vt autem MC ad CT, ita & MP basis ad basim PT, & solidum CD ad CV solidum & vt igitur solidum AB ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. Quòd cum vtrumque solidorum AB CD ad ipsum CV eandẽ proportionẽ habeat; erit AB solidũ solido CD æquale. quod demonstrare oportebat. 30. huius.



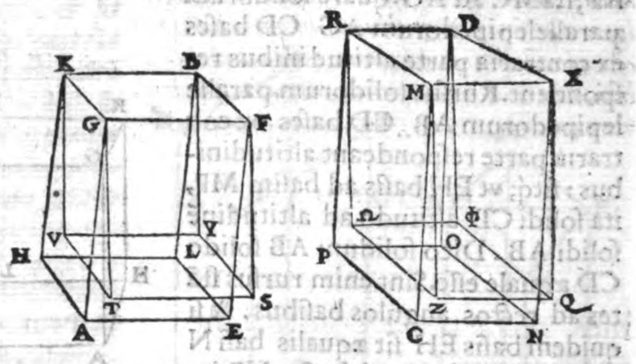
Non sint autem stãtes FE BL GA KH XN DO MC RP ad rectos angulos basibus ipsorum: & à punctis F G B K X M D R ad plana basium EH NP ducantur perpẽdiculares, quę planis in punctis S T Y V Q Z Ω Φ occurant & cõpleantur solida FVXΩ. Dico & sic ęqualibus existentibus solidis AB CD, bases ex contraria parte altitudinibus respondere, & vt EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Quouiam enim solidum AB solido CD est ęquale; solido autem AB ęquale est solidum BT; in eadem namq; sunt basi FK, & eadem altitudine; quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: & solidum DC est ęquale solido DZ, quòd in eadem sint basi XR, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis; erit & solidum BT solido DZ ęquale. ęqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos; bases altitudinibus ex contraria parte respondent. est igitur vt FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. atque est basis quidem FK basi EH æqualis, basis vero XR æqualis basi NP. quare vt EH basis ad basim NP, ita est altitudo solidi DZ ad solidi BT altitudinem. ęędem autem sunt altitudines solidorum DZ BT, itemq; solidorum DC BA. est igitur vt EH basis ad basim NP, ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi AB: ergo solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex cõtraria parte respõdeant altitudinibus: sitq; vt EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. Dico solidum AB solido CD ęquale esse. Iisdem namque constru-

31. huius.

Ex ante demonstratis.

ctis,

ctis, quoniam vt EH basis ad basim NP, ita solidi C D altitudo ad altitudinẽ solidi AB; & basis quidem EH est æqualis basi FK; NP vero ipsi XR: erit vt F K basis ad basim XR, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. eædẽ autem sunt altitudines solidorum AB CD, & ipsorũ BT DZ. est igitur vt FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. quare solidorũ BT DZ parallelepipedorũ bases ex contraria parte respondent altitudinibus; quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, & bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt æqualia. ergo BT solidum solido DZ est æquale. sed solidũ quidem BT ęquale est solido BA, etenim in eadem sunt basi FK, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: solidum vero DZ est æquale solido D C, si quidem in eadem sunt basi XR, & eadem altitudiue, & non in eisdem rectis lineis. ergo & solidũ AB solido CD est æquale. quod demonstrare oportebat.

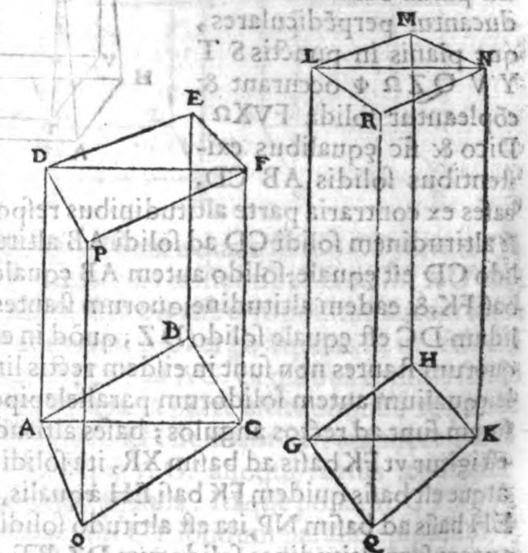


F. C. COMMMENTARIVS.

Ex ijs, quę ante dicta sunt, illud etiam demonstrari potest.

Aequalium prismatum & triangulares bases habentium bases ex cõtraria parte altitudinibus respondent: & quorum prismatum triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt ęqualia.

Sint prismata, quae triangulares bases habent AF GN inter se aequalia. Dico bases ex contraria parte altitudinibus respondere, hoc est vt triangulum ABC ad triangulum GHK, ita esse prismatis GN altitudinem ad altitudinem prismatis AF. Compleantur enim solida parallelepipeda, quę etiam inter se ęqualia erũt, cum sint prismatum dupla: ęqualium autem solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent. ergo vt solidi parallelepipedi AF basis ad basim solidi parallelepipedi GN, hoc est vt quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, ita est solidi parallelepipedi GN altitudo ad altitudinem. solidi parallelepipedi AF. sed vt quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, ita triangulum ABC ad triangulum GHK. Vt igitur triangulum ABC ad triangulum GHK, ita altitudo solidi parallelepipedi GN ad altitudinẽ solidi parallelepipedi AF, hoc est ita prismatis GN altitudo ad altitudinẽ prismatis AF. Rursus prismatum AF GN bases ex cõtraria parte respondeant altitudinibus, hoc est vt triangulũ ABC ad triangulũ GHK, ita sit prismatis GN altitudo ad altitudinem prismatis AF. Dico prismata AF GN inter se aequalia esse. compleantur enim rursus solida parallelepipeda, erit quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, vt triangulum ABC 15.quinti.

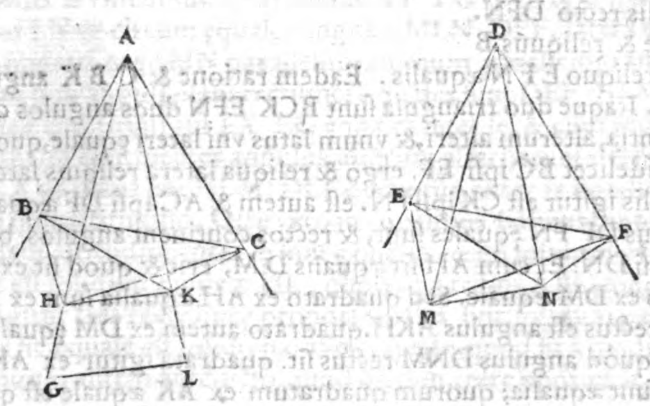


ad

ad triangulum GHK. quare vt solidi parallelepipedi AF basis ad basim solidi parallelepipedi GN, ita erit prismatis GN altitudo ad altitudinẽ prismatis AF, hoc est, ita solidi parallelepipedi GN altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedi AF. quorum autem solidorum parallelepipedorum bases ex cõtraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt ęqualia. ergo et ęqualia erunt eorum dimidia. prisma igitur AF prismati GN est ęquale. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXXVI.

Si sint duo anguli plani æquales, & in verticibus ipsorum sublimes rectæ lineæ constituantur, quæ cum rectis lineis à principio positis angulos contineant ęquales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quęuis puncta, atque ab ipsis ad plana in quibus sunt anguli primi perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos iungantur rectæ lineę: cum sublimibus ęquales angulos continebunt.

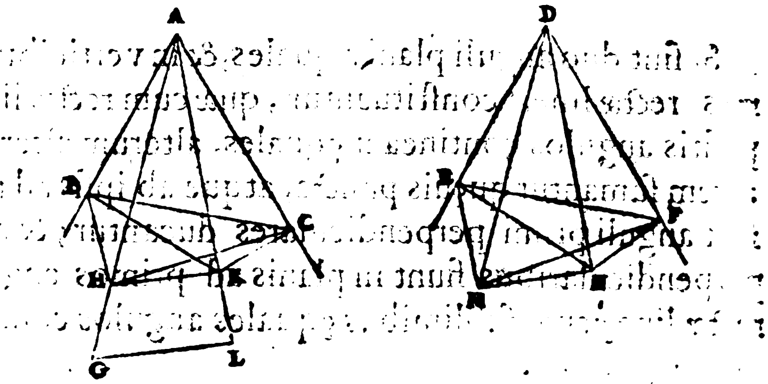


Sint duo anguli rectilinei æquales BAC EDF: & à punctis AD sublimes rectæ lineæ AG DM constituantur, quę cum rectis lineis à principio positis æquales angulos contineãt, alterum alteri: angulum quidem MDE æqualem angulo GAB, angulum vero MDF angulo GAC æqualem: & sumantur in ipsis AG DM quæuis puncta G M, à quibus ad plana per BAC EDF ducantur perpendiculares GL MN, occurrentes planis in punctis L N; & LA ND iungantur. Dico angulum GAL angulo MDN ęqualem esse. ponatur ipsi DM ęqualis AH, & per H ipsi GL parallela ducatur HK. est autem GL perpendicularis ad planum per BAC. ergo & HK ad planum per BAC perpendicularis erit. Ducantur à punctis K N ad rectas lineas AB AC DF DE perpendiculares KC NF KB NE, & HC CB MF FE iungantur. Quoniam igitur quadratum ex HA æquale est quadratis ex HK KA; quadrato autem ex HA æqualia sunt ex KC CA quadrata; erit quadratum ex HA quadratis ex HK KC CA æquale. quadratis autem ex HK KC ęquale est quadratum ex HC. quadratum igitur ex HA quadratis ex HC CA ęquale erit: & idcirco angulus HCA est rectus. Eadem ratione & angulus DFM rectus est. ergo angulus ACH ipsi DFM est æqualis. est autem & HAC angulus ęqualis angulo MDF. duo igitur triangula sunt MDF HAC duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & vnum latus vni lateri æquale, quod vni ęqualium angulorum subtenditur; uidelicet HA ipsi DM. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri. quare AC est ęqualis DF. Similiter demonstrabimus & AB ipsi DE æquale esse. iungantur HB ME. Et quoniam quadratum ex AH est æquale quadratis ex AK KH; quadrato autem ex AK æqualia sunt quadrata ex AB BK: erunt quadrata ex AB BK KH quadrato ex AH æqualia. Sed qua-

8.huius.
47.primi.
47.primi.
48.primi.
26.primi.

dratis

dratis ex BK KH æquale est ex BH quadratum; rectus enim angulus est HKB, propterea quòd & HK perpendicularis est ad subiectum planum. quadratũ igitur ex
48.primi. AH æquale est quadratis ex AB BH. quare angulus ABH rectus est. Eadem ratione & angulus DEM est rectus. est autem & BAH angulus æqualis angulo EDM, ita
26.primi. enim ponitur: atque est AH ęqualis DM. ergo & AB ipsi DE est æqualis. Quoniam igitur AC quidem est æqualis DF, AB vero ipsi DE; erunt duæ CA AB duabus FD DE æquales. Sed & angulus BAC angulo FDE
4.primi. est æqualis. basis igitur BC basi EF, & triangulum triangulo, & reliqui anguli reliquis ęquales sũt: ergo angulus ACB angulo DFE. est autem & rectus ACK ęqualis recto DFN. quare & reliquus BCK reliquo EFN æqualis. Eadem ratione & CBK angulus est æqualis angulo FEN. Itaque duo triangula sunt BCK EFN duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & vnum latus vni lateri ęquale, quod est ad æquales angu-



26.primi. los, videlicet BC ipsi EF. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebũt. æqualis igitur est CK ipsi FN. est autem & AC ipsi DF æqualis. quare duæ AC CK
4.primi. duabus DF FN ęquales sunt, & rectos continent angulos. basis igitur AK est æqualis basi DN. Et cum AH sit æqualis DM, erit & quod fit ex AH quadratum quadrato ex DM æquale. Sed quadrato ex AH æqualia sunt ex AK KH quadrata; etenim
47.primi. rectus est angulus AKH. quadrato autem ex DM ęqualia sunt quadrata ex DN NM, quòd angulus DNM rectus sit. quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN NM sunt æqualia; quorum quadratum ex AK æquale est quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM est æquale: & ideo recta linea HK ipsi MN æqualis. quòd cum duæ HA AK duabus MD DN ęquales sint, altera
8.primi. alteri, & basis HK basi NM ostensa sit ęqualis; angulus HAK angulo MDN æqualis erit. quod oportebat demonstrare.

COROLLARIVM.

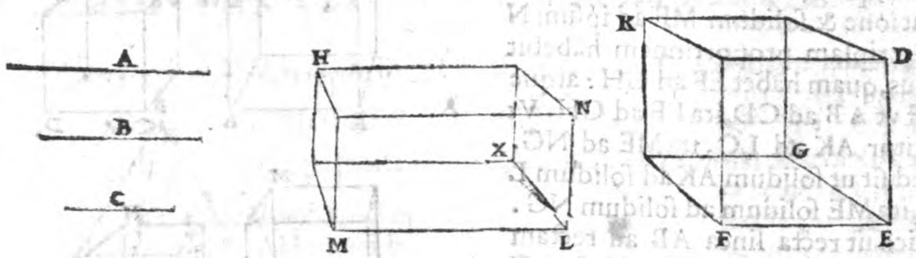
Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectæ lineæ æquales, quę cum rectis lineis à principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri; perpendiculares, quę ab ipsis ad plana in quibus sunt primi anguli ducantur, inter se ęquales esse.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXVI.

Si tres rectę lineę proportionales sint, solidum parallelepipedũ, quod à tribus fit ęquale est solido parallelepipedo, quod fit à media, ęquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C, sitq; vt A ad B, ita B ad C. Dico solidum, quod fit ex ipsis ABC æquale esse solido, quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E contentus tribus an

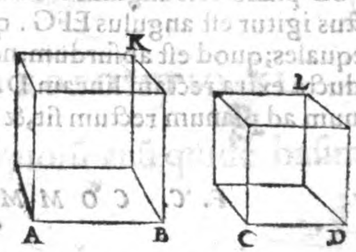


gulis planis DEG GEF FED; & ipsi quidem B ponatur æqualis vnaquæque ipsarum DE GE EF, & solidum parallelepipedum EK compleatur: ipsi vero A ponatur ęqualis LM; & ad rectam lineam LM, & ad punctum in ipsa L constituatur angulo solido ad E æqualis angulus contentus NLX XLM MLN, & ponatur ipsi quidē B æqualis LX, ipsi vero C æqualis LN. Quoniam igitur est vt A ad B, ita B ad C, æqualis autem est A ipsi LM, & B vnicuique ipsarum LX EF EG ED, & C ipsi LN; erit vt LM ad EF, ita DE ad LN: & circum ęquales angulos MLN DEF, latera ex cōtraria parte sibi ipsis respondent. ergo MN parallelogrammum parallelogrammo DF est æquale. Et quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt DEF NLM, & in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur LX EG ęquales inter se, & cum rectis lines à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendiculares, quæ à punctis G X ad plana per NLM DEF ducuntur, inter se æquales. ergo solida LH EK eadem sunt altitudine. Quæ vero in ęqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, & eadem altitudine inter se sunt æqualia. ergo solidum HL æquale est solido EK: atque est solidum quidem HL, quod fit à tribus ABC, solidum vero EK quod fit ex B. Si igitur tres rectę lineę proportionales sint, solidum parallelepipedum, quod à tribus fit æquale est solido parallelepipedo, quod fit à media, æquilatero quidem, ęquiangulo autem antedicto. quod demonstrare oportebat.

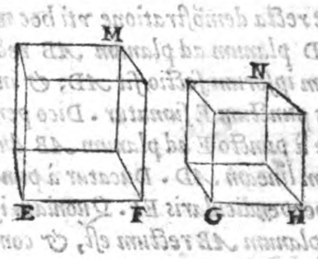
26. huius. 14. sexti. Ex antecedenti. 31. huius.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO. XXXVII.

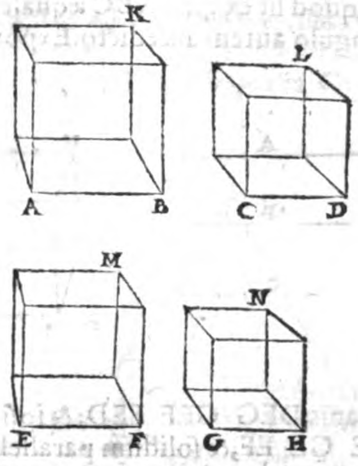
Si quattuor rectę lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiūt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quę ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta ꝓportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



Sint quattuor rectę lineę proportionales AB CD EF GH, sitque vt AB ad CD, ita EF GH, & describātur ab ipsis AB CD EF GH similia & similiter posita solida parallelepipeda KA LC ME NG. Dico vt KA ad LC, ita esse ME ad NG. Quo-



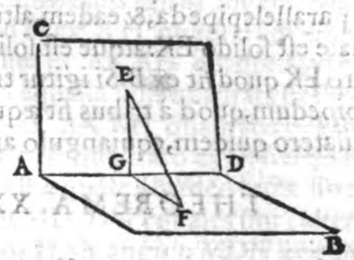
33.huius. niam enim solidum parallelepipedum KA simile est ipsi LC, habebit KA ad LC triplam proportionem eius, quam AB habet ad CD. Eadẽ ratione & solidum ME ad ipsum NG triplam proportionem habebit eius, quam habet EF ad GH: atque est vt AB ad CD, ita EF ad GH. Vt igitur AK ad LC, ita ME ad NG. Sed sit ut solidum AK ad solidum LC, ita ME solidum ad solidum NG. Dico ut recta linea AB ad rectam CD, ita esse rectam EF ad ipsam GH. Quoniam enim rursus AK ad LC triplam proportionem habet eius, quam AB habet ad CD; habet autem & ME ad NG triplam proportionem eius, quam EF ad GH; atque ut AK ad LC, ita ME ad NG: erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales sint & reliqua. quod oportebat demonstrare.



THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXVIII.

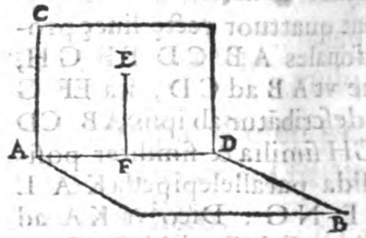
Si planum ad planum rectum sit, & ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in vno plano ad alterum planum perpendicularis ducatur, ea in communem planorum sectionem cadet.

Planum enim CD ad planum AB rectum sit; cõis aũt eorum sectio sit AD; & in ipso CD plano quod uis punctum E sumatur. Dico perpendicularem, quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipsam AD. Non enim, sed si fieri potest, cadat extra, ut EF; & plano AB in puncto F occurrat: à puncto autem F ad DA in plano AB perpendicularis ducatur FG, quæ quidem & plano CD ad rectos angulos erit; & EG iũgatur. qm̃ igitur FG plano CD est ad rectos angulos; contingit autem ipsam recta linea EG, quæ est in eodem CD plano: erit angulus FGE rectus. sed & EF plano AB ad rectos angulos est. rectus igitur est angulus EFG. quare trianguli EFG duo anguli duobus rectis sunt æquales; quod est absurdum. non igitur à puncto E ad AB planum perpen- 17. primi. dicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad planum rectum sit, & reliqua. quod oportebat demonstrare.



F. C. COMMENTARIVS.

Possumus et recta demõstratione vti hoc modo. Sit rursus CD planum ad planum AB rectum: communis autem ipsorum sectio sit AD; & in plano CD quod vis punctum E sumatur. Dico perpendicularem, quę à puncto E ad planum AB ducitur cadere in rectam lineam AD. Ducatur à puncto E ad ipsam AD perpendicularis EF. Quoniam igitur planum CD ad planum AB rectum est, & commu-

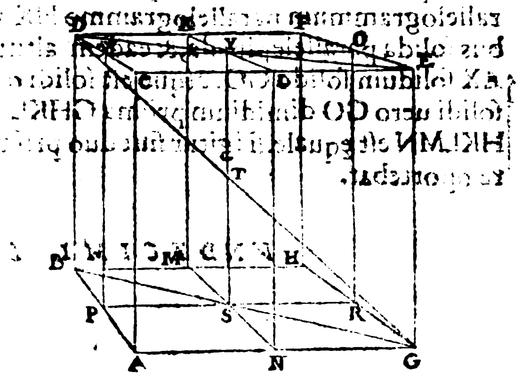


ni planorum

ni planorum sectioni ad rectos angulos in vno plano CD ducta est EF; erit EF reliquo plano AB ad rectos angulos. Quare à puncto E ad AB perpendicularis ducta in communem planorum sectionem AD cadit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XXXIX.

Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secentur bifariam, per sectiones vero plana ducantur, cõis planorum sectio, & solidi parallelepipedi diameter sese bifariam secabunt.

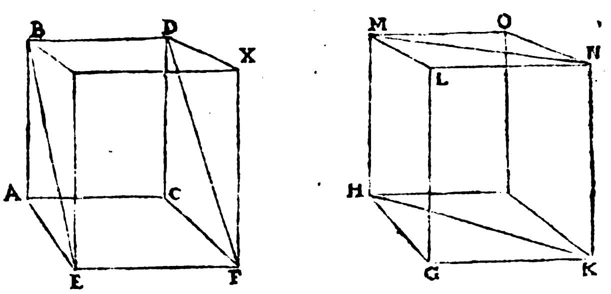


In solido enim parallelepipedo AF oppositorum planorum CF AH latera bifariã secentur in punctis KLMNXPOR. & per sectiones plana ducantur KN, XR communis autem planorum sectio YS, & solidi parallelepipedi diameter sit DG. Dico YS DG se se bifariam secare, hoc est YT quidem ipsi TS DT vero ipsi TG æqualem esse. Iungantur enim DY YE BS SG. Quoniam igitur DX parallela est ipsi OE, alterni anguli DXY YOE inter se ęquales sunt. Et quoniam DX quidem est æqualis OE XY vero ipsi YO, & angulos ęquales continent; erit basis DY ęqualis basi YE, & triangulum DXY triangulo YOE, & reliqui anguli reliquis angulis æquales. angulus igitur XYD est æqualis angulo OYE, & ob id recta linea est DYE. Eadem ratione & BSG recta est. atque est BS ęqualis SG. Et quoniã CA ipsi DB ęqualis est & parallela, sed CA est æqualis & parallela ipsi EG; erit & DB ipsi EG æqualis & parallela & ipsas coniungũt rectę lineæ DE GB. parallela igitur est DE ipsi BG. & sumpta sunt in vtraque ipsarum quæuis puncta DYGS, & iunctæ sunt DG YS. ergo DG YS in vno sunt plano. Quod cum DE sit parallela BG, erit & EDT angulus angulo BGT æqualis, alterni enim sunt. est autem & DTY angulus æqualis ipsi GTS. duo igitur sunt triangula DTY GTS duos angulos duobus angulis ęquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni ęqualium angulorum subtenditur, uidelicet DY ipsi GS: dimidia enim sunt ipsorum DE BG. ergo & reliquos augulos reliquis angulis æquales habebunt. quare DT quidem est æqualis TG, YT uero ipsi TS. Si igitur in solido parallelepipedo, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

29. primi. 4. primi. 14. primi. 9. huius. 33. primi. 7. huius. 29. primi. 15. primi. 26. primi.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO. XL.

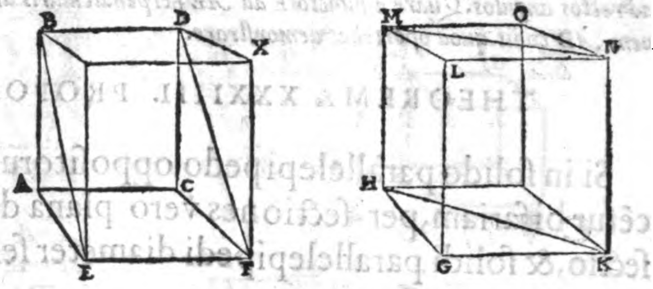
Si sint duo prismata æquealta, quorũ vnũ quidẽ basim habeat parallelogrãmũ, alterum vero triangulũ, & parallelogrammũ duplum sit trianguli; ea inter se ęqualia erunt.



Sint prismata æquealta ABCDEF GHKLMN, &

 unum

unum quidem basim habeat parallelogrammum AF, alterum uero GHK triangulum, & duplum sit AF parallelogrammũ triãguli GHK. Dico prisma ABCDEF prismati GHKLMN æquale esse. compleãtur enim AX GO solida. Et quoniam parallelogrãmum AF trianguli GHK



est duplum; est autem & HK parallelogrammum duplum triãguli GHK; erit AF parallelogrammum parallelogrammo HK æquale. Quæ uero in æqualibus sunt basibus solida parallelepipeda, & eadem altitudine inter se æqualia sunt. æquale igitur AX solidum solido GO. atque est solidi quidem AX dimidium ABCDEF prisma, solidi uero GO dimidium prisma GHKLMN. ergo ABCDEF prisma prismati GHKLMN est æquale. si igitur sint duo prismata æquealta, & reliqua, quod demonstrare oportebat.

31. huius.

VNDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER DVODECIMVS ET SOLIDORVM SECVNDVS.

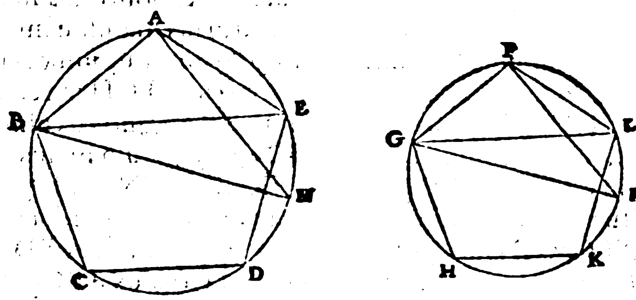
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SIMILIA polygona, quæ in circulis describuntur, inter se sunt, vt diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCDE FGHKL, & in ipsis similia polygona ABCDE FGHKL; diametri autem circulorum sint BM GN. Dico vt quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita esse ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. Iungantur enim BE AM GL FN. Et quoniam polygonum ABCDE simile est polygono FGHKL; & BAE angulus angulo GFL est æqualis: atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL. duo igitur triangula sunt BAE GFL vnum angulum vni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL: circa æquales autẽ angulos latera proportionalia. quare triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum est; ac propterea angulus AEB æqualis est angulo FLG. Sed angulus quidem AEB angulo AMB est æqualis; in eadem enim circumferentia consistũt. angulus autem FLG æqualis est angulo FNG. 21. tertii.

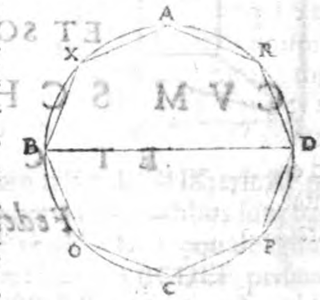


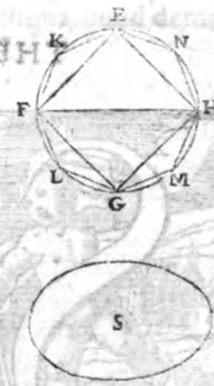
ergo & AMB angulus est æqualis angulo FNG. est autem & rectus angulus BAM æqualis recto GFN. quare & reliquus reliquo æqualis. æquiangulum igitur est triãgulum AMB triangulo FGN. ergo vt BM ad GN ita BA ad GF. Sed proportionis quidem BM ad GN dupla est proportio quadrati ex BM ad quadratũ ex GN; proportionis vero BA ad GF dupla est proportio ABCDE polygoni ad polygonum FGHKL. & vt igitur quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita polygonum ABCDE ad FGHKL polygonum. Quare similia polygona, quæ in circulis describuntur, inter se sunt, vt diametrorum quadrata. 31. tertii.

THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Circuli inter se sunt vt diametrorum quadrata.





Sint circuli ABCD EFGH : diametri autem ipsorũ sint BD FH. Dico vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita esse circulum ABCD ad EFGH circulum. Si enim non ita est; erit vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spacium aliquod minus circulo EFGH, vel ad maius. Sit primum ad minus quod sit S: & in circulo EFGH describatur quadratum EFGH. Itaque descriptum in circulo quadratum maius est dimidio circuli EFGH; quoniam si per puncta EFGH contingentes circulum ducamus, erit descripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EFGH. descripto autem circa circulum quadrato minor est circulus. ergo quadratum EFGH maius est dimidio circuli EFGH. secentur bifariam circumferentiæ EF FG GH HE in punctis KLMN: & EK KF FL LG GM MH HN NE iungantur. Vnum quodque igitur triangulorum EKF FLG GMH HNE maius est dimidio portionis circuli in qua consistit, quoniam si per pũcta KLMN contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quę sunt in rectis lineis EF FG GH HE cõpleamus; erit vnumquodque triãgulorum EKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipsum est: sed portio minor est parallelogrammo. quare vnumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE maius est dimidio portionis circuli, in qua consistit. reliquas igitur circumferentias bifariam secantes, & iungentes rectas lineas: atque hoc semper facientes relinquemus tandẽ quasdã circuli portiones, quę minores erũt excessu, quo circulus EFGH ipsum S spacium superat. etenim ostensum est in primo theoremate decimi libri, duabus magnitudinibus inæqualibus expositis si à maiori auferatur maiusquã dimidium, & ab eo, quod relinquitur, rursus maiusquàm dimidium, & hoc semper fiat; reliqui tandem magnitudinem aliquam, quę minori magnitudine exposita sit minor. Itaque relictæ sint portiones circuli EFGH in rectis lineis EK KF FL LG GM MH HN NE, quæ maiores sint excessu, quo circulus EFGH ipsum S spacium superat. ergo reliquum EKFLGMHN polygonum maius erit spacio S. Describatur etiam in circulo ABCD polygono EKFLGMHN simile polygonum AXBOCPDR. est igitur vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. sed & vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad spacium S. ergo & vt circulus ABCD ad spacium S, ita polygonum AXBOCPDE ad EKFLGMHN polygonum; & permutando vt circulus ABCD ad polygonum, quod in ipso est, ita spacium S ad polygonum EKFLGMHN. maior autem est circulus ABCD eo, qu d in ipso est polygono. quare & spacium S maius est polygono EKFLGMHN. sed & minus, quod fieri non potest. Non igitur est vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad spacium aliquod minus circulo EFGH. similiter ostendemus neque esse vt quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulum EFGH ad aliquod spacium minus circulo ABCD. Dico igitur neque esse vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulum ABCD ad aliquod spacium maius circulo EFGH. si enim fieri potest, sit ad maius spaciũ S. erit igitur conuertendo ut quadratum ex FH ad quadratum est BD, ita spacium S ad ABCD circulum. sed vt spacium S ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad aliquod spacium minus circulo ABCD, vt demonstrabitur. ergo & vt quadratum

A

B

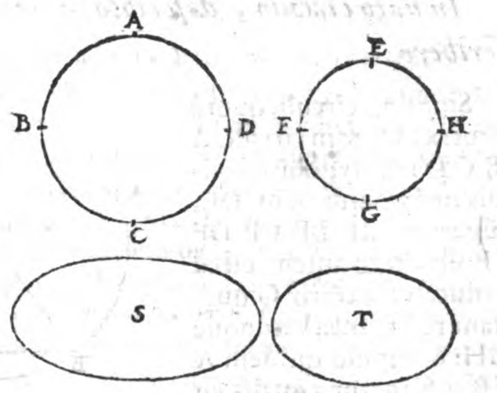
C

Ex antecedenti.

11. quinti.

ex

ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod ſpacium minus circulo ABCD, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Nõ igitur vt quadratum ex BD ad quadratũ ex FH, ita eſt circulus ABCD ad ſpacium aliquod maius EFGH circulo. oſtenſum autem eſt neque ad minus. quare vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum EFGH. Circuli igitur inter ſe ſunt, vt diametrorum quadrata. quod oſtendere oportebat.



LEMMA

Itaque dico ſi ſpacium S ſit maius circulo EFGH, eſſe vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita circulum EFGH ad ſpacium aliquod circulo ABCD minus.

Fiat enim, vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita EFGH circulus ad ſpacium T. Dico ſpacium T circulo ABCD minus eſſe. Quoniam enim eſt vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita EFGH circulus ad ſpacium T; erit permutando vt ſpacium S ad circulum EFGH, ita ABCD circulus ad ſpacium T. maius autem eſt ſpacium S circulo EFGH. ergo & ABCD circulus ſpacio T eſt maior; ac propterea vt ſpaciũ S ad circulum ABCD, ita eſt EFGH circulus ad ſpacium aliquod circulo ABCD minus.

F. C. COMMENTARIVS.

Erit deſcripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EFGH] A

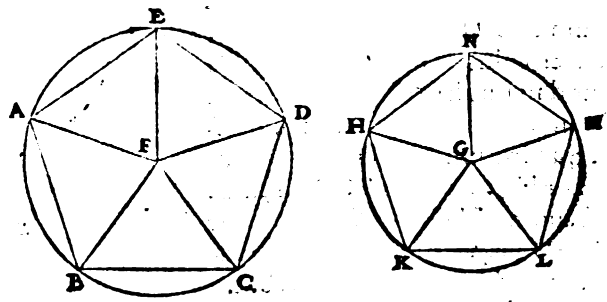
Deſcribatur circa circulum EFGH quadratum TVZY, nempe ductis per EFGH puncta rectis lineis, quae circulum contingant, vt ex 9. quarti libri apparet. erit TV ipſius TE dupla. Iungantur enim EG FH ſe ſe in puncto Q ſecantes, quae circuli diametri erunt: atque erit Q circuli cẽtrum. angulus igitur QEV eſt rectus. 18.tertij.
ſed & rectus EQH; ſi quidẽ duae FQ QE aequales ſunt duabus HQ QE; & baſis EF aequalis baſi EH. ergo angulus FQE 8.primi.
angulo HQE eſt aequalis: & ob id vterque rectus. ex quibus ſequitur 28.primi.
rectam lineam TEV ipſi FQH parallelam eſſe. & eadem ratione oſtendentur TFY, VHZ parallelae ipſi EQG: & inter ſe ſe. parallelogramma igitur ſunt FV VG FE EH. Quòd cum FQ ſit aequalis QH, erit ẽt TE ipſi EV aequalis: ideoq́, TV eſt dupla ipſius TE. ſimiliter demonſtrabi 34.primi.
mus & TY ipſius TF duplam. cumq́, TY TV aequales ſint, erunt & earum dimidiae FT TE aequales. Et quoniam TV dupla eſt ipſius TE, quadratum ex TV quadrati ex TE quadruplũ erit. ſi Col.20.sexti.
miles enim rectilineae figurę in dupla ſunt proportione homologorũ laterũ. ſed quadratũ ex EF
eſt aequale quadratis ex FT TE, quae quidem ſunt dupla quadrati ex TE. ergo quadratum ex 47.primi.
EF, hoc eſt quadratum EFGH quadrati TVZY dimidium erit. quod oportebat demonſtrare. B

Erit vnumquodque triangulorum CKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt] *Ex 41 primi.*

SCHOLIVM.

Deſcribatur etiam in circulo ABCD polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR, C

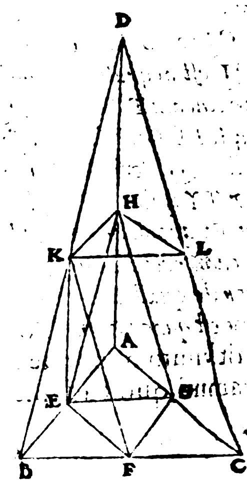
In dato circulo, descripto in circulo polygono simile polygonum describere.



Sint duo circuli, quorũ centra FG, & in circulo A B C D E polygonũ quoduis describatur ABCDE, iũgãturq́; AF BF CF DF EF: in altero autem circulo ducatur à cẽtro G quędam recta linea vtcunque GH: & angulo quidem A FB cõstituatur æqualis an- (23.primi.) gulus HGK; angulo autem BFC angulus KGL, & angulo CFD angulus LGM, denique angulo DFE æqualis angulus MGN cõstituatur. ergo reliquus AFE reliquo HGN est æqualis. & iungantur HK KL LM MN NH. est autem vt A F ad F B, ita HG ad GK; similia enim sunt AFB LGK triangula, quod ostensum est in theore- (4.sexti.) mate sexto sexti libri elementorum. Vt igitur semidiameter circuli ad circuli semidiametrum, ita BA ad HK. similiter ostendemus & vnamquamque ipsarũ BC CD DE EA ad vnamquamque KL, LM MN NH eandem habere proportionem. & sũt æquales anguli polygonorum, quoniam & triangulorum anguli æquales sunt. polygona igitur ABCDE HKLMN singulos angulos singulis angulis æquales habẽt: (1.diffi. tertii) & circa æquales angulos latera proportionalia. ergo polygonũ ABCDE simile est polygono HKLMN. In dato igitur circulo HKLMN polygono ABCDE simile polygonum descriptum est. quod facere oportebat.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Omnis pyramis triangularem habens basim diuiditur in duas pyramides, æquales & similes inter se, quæ triangulares bases habent, similesq́; toti; & in duo prismata ęqualia, quæ quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt maiora.



Sit pyramis, cuius basis quidem ABC triangulum; vertex autem punctum D. Dico pyramidem ABCD diuidi in duas pyramides æquales & similes inter se, triangularesq́; bases habentes, & similes toti, & in duo prismata æqualia; & duo prismata dimidio totius pyramidis esse maiora. secentur enim AB BC CA AD DB DC bifariam in punctis E F G H K L, & EH EG GH HK KL LH EK KF FG iungantur. Quoniam igitur AE quidem est ęqualis EB, AH vero ipsi HD; erit EH ipsi DB parallela. Ea- (2.sexti.) dem ratione & HK est parallela ipsi AB. parallelogrammum igitur est HEBK. quare HK est æqualis EB. Sed E B (34.primi.) ipsi A E est æqualis. ergo & A E ipsi H K æqualis erit. est autẽ & AH æqualis HD. duę igitur AE AH duabus KH H D æquales sunt, altera alteri, & angulus E A H æqualis (29.primi.) angulo KHD. basis igitur E H basi K D est ęqualis. quare (4.primi.) triangulum AEH æquale est & simile triangulo HKD. Eadem ratione & triangulum AHG triangulo HLD ęquale est & simile. Et quoniam duæ rectæ lineæ se se tangentes EH HG duabus rectis lineis sese tangentibus KD DL parallelæ sunt, non autem in eodẽ plano, æquales angulos continebunt. ergo angulus EHG est æqualis angulo (10.undecimi) KDL.

KDL. Rursus quoniam duæ rectæ lineæ EH HG duabus KD DL æquales sunt, altera alteri, & angulus EHG est æqualis angulo KDL; erit basis EG basi KL æqualis: 4. primi.
æquale igitur est & simile triangulum EHG triangulo KDL. Eadem ratione & AEG triangulum est æquale & simile triangulo HKL. quare pyramis, cuius basis quidē est AEG triangulum, vertex autem punctum H æqualis & similis est pyramidi, cuius basis est triangulum HKL & vertex D punctum. Et quoniam vni laterum trianguli ADB, videlicet ipsi AB parallela ducta est HK; erit triãgulũ ADB triãgulo DHK æquiãgulũ, & latera habēt proportionalia. Simile igitur est ADB triãgulũ triãgulo DHK: & eadē ratione triangulũ quidē DBC simile est triangulo DKL; triangulũ vero ADC triangulo DHL. quòd cum duæ rectæ lineæ se se tangentes BA AC duabus rectis lineis se se tangentibus KH HL parallelæ sint, non existentes in eodem plano, æquales angulos continebunt. angulus igitur BAC angulo KHL est æqualis: atque est ut BA ad AC, ita KH ad HL. ergo ABC triangulum simile est triangulo HKL; ideoq; pyramis, cuius basis quidem triangulum ABC, uertex autem pũctum D similis est pyramidi, cuius basis triangulum HKL, & uertex pũctum D. sed pyramis cuius basis quidem HKL triangulum, uertex autem punctum D, ostensa est similis pyramidi, cuius basis triangulum AEG, & uertex H punctum. Quare & pyramis cuius basis triangulum ABC & uertex punctum D similis est pyramidi, cuius basis AEG triangulum, & uertex punctum H. Vtraque igitur ipsarum AEGH HKLD pyramidum similis est toti pyramidi ABCD. Et quoniam BF est æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum duplum triãguli GFC. & quoniam duo prismata æquealta sunt, quorum vnum quidem basim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, estq; parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea prismata inter se æqualia. ergo prisma contentum duobus triangulis BKF EHG, & tribus parallelogrãmis EBFG EBKH KHFG est æquale prismati, quod duobus triangulis GFC HKL, & tribus parallelogrammis KFCL LCGH HKFG continetur. & manifestum est vtrumque ipsorum prismatum, & cuius basis est EBGF parallelogrammum, opposita autem ipsi HK recta linea: & cuius basis est GFC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH, maius esse vtraque pyramidum, quarum bases quidem AEG HKL triangula, uertices autem puncta H D; quoniam si iungamus EF EH rectas lineas, prisma quidem, cuius basis est EBFG parallelogrammum, & opposita ipsi recta linea HK maius est pyramide, cuius basis EBF triangulum, uertex autem punctum K. sed pyramis, cuius basis triangulum EBF, & uertex K punctũ est æqualis pyramidi, cuius basis AEG triangulum, & uertex punctum H; æqualibus enim & similibus planis continentur. quare & prisma, cuius basis parallelogrammum EBFG, opposita autē ipsi recta linea HK maius est pyramide, cuius basis AEG triangulum, & uertex punctum H. prisma vero cuius basis parallelogrammum EBFG & opposita ipsi recta linea HK est æquale prismati, cuius basis GFC triangulum, & ipsi oppositum triangulum HKL: & pyramis cuius basis triangulum AEG, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi, cuius basis HKL triangulum & uertex pũctũ D. ergo duo prismata de quibus dictũ est, sunt maiora duabus dictis pyramidibus quorũ bases triãgula AEG HKL, uertices autem H D puncta. tota igitur pyramis cuius basis ABC triangulum, uertex autem punctum D, diuisa est in duas pyramides æquales, & similes inter se, & similes toti: & in duo prismata æqualia: suntq; duo prismata dimidio totius pyramidis maiora. quod ostendere oportebat.

Margin: 10. undecimi. — A — B — C — 10 diff. undecimi.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam BF est æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum duplum trianguli GFC] *Iuncta enim EF quoniam BF est aequalis FC, & EG parallela ipsi BC, erit triangulum BEF aequales triãgulo FGC. sed parallelogrammum EBFC duplum est trianguli BEF. ergo & ipsius FGC trianguli duplum erit.* 28 primi. 4. primi.

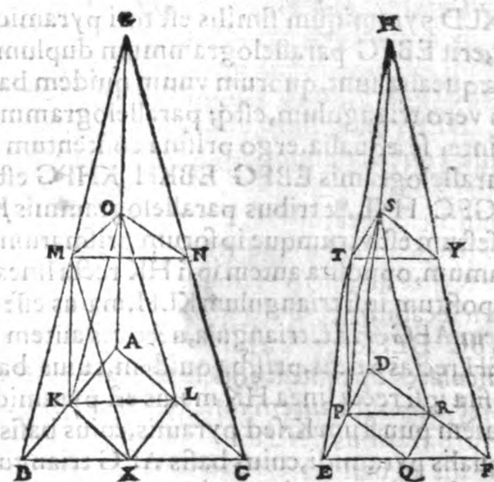
B Erunt in prismata inter se æqualia] *Ex vlt. vndecimi libri.*

C Prisma quidē cuius basis est EBFG parallelogrāmū. & opposita ipsi recta linea H K, maius est pyramide, cuius basis EBF triangulum, vertex autem pūctum K] *Velut totum est sua parte maius; est enim pyramis ipsius prismatis pars quędam. sed inferius ex iis, quae in 7. huius demonstrantur, apparebit tertiam partē esse, cum sit tertia pars prismatis, cuius basis GFC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si sint duę pyramides æquealtæ, quæ triangulares bases habeant, diuidatur autem vtraque ipsarum, & in duas pyramides ęquales inter se, similesq; toti, & in duo prismata æqualia, & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuidatur, atque hoc semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad basim alterius, ita & in vna pyramide prismata omnia ad prismata omnia in altera pyramidem, altitudine æqualia.

Sint duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares bases habeāt ABC DEF, uertices autem sint pūcta GH, & diuidatur vtraque ipsarum in duas pyramides æquales inter se, similesq; toti, & in duo prismata ęqualia, & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuisa intelligatur: atq; hoc sēper fiat. Dico vt ABC basis ad basim DEF ita esse prismata oīa, quę sunt in pyramide ABC ad prismata omnia, quæ in pyramide DEF multitudine ęqualia. Quoniam enim BX quidem est æqualis XC,



3.sexti. AL vero ęqualis LC; erit XL ipsi AB parallela, & triangulum ABC triangulo LXC simile. Eadem ratione & triangulum DEF simile est triangulo RQF. Et quoniam BC quidem est dupla CX; EF vero dupla ipsius FQ, vt BC ad CX, ita erit EF ad FQ. & descripta sunt ab ipsis BC CX similia & similiter posita rectilinea ABC LXC; ab ipsis vero EF FQ similia & similiter posita rectilinea DEF RQF.
22.sexti. est igitur ut BAC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum; & permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. sed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita prisma cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma cu-
11.quinti. ius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. & ut igitur ABC triangulum ad triangulum DEF, ita prisma, cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma, cuius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. Et quoniam duo prismata, quæ in pyramide ABCG inter se ęqualia sunt, sed & quæ in pyramide DEFH prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma, cuius basis parallelogrammum KLXB, opposita uero ipsi recta linea MO ad prisma cuius basis LXC triangulum, & oppositum ipsi OMN, ita prisma cuius basis parallelogrammum EPRQ & opposita ipsi recta liuea ST ad prisma cuius basis RQF triangulum, oppositum uero ipsi STY. quare cōponēdo vt prismata KBXLMO LXCMNO ad prisma LXCMNO, ita prismata PEQRST RQFSTY ad prisma RQFSTY. & permutando ut prismata KBXLOMN LXCOMN ad prismata PEQRST RQFSTY, ita prisma LXCMNO

MNO ad prisma RQFSTY. Vt autem prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY, ita ostensa est basis LXC ad RQF basim, & ABC basis ad basim DEF. ergo & ut triangulum ABC ad triagulum DEF, ita quę in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide DEFH. similiter autē & si factas pyramides diuidamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis ABC ad DEF basim. & ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quę in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata, quę in pyramide STYH; & quattuor ad quattuor. eadem autem ostendentur & in factis prismatibus ex diuisione pyramidum AKLO, & DPRS & omnium simpliciter multitudine æqualium.

LEMMA.

At vero ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita esse prisma, cuius basis triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma, cuius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY, hoc modo ostendemus.

In eadē enim figura intelligatur ab ipsis G H punctis perpendiculares ductæ ad ABC DEF triangulorū plana, quę inter se ęquales erunt; propterea quod pyramides ipsæ ęquealtę ponuntur. Et quoniam duę rectæ lineæ GC, & perpendicularis à puncto G ducta secantur à parallelis planis ABC OMN, in easdem proportiones secabuntur. & secatur GC bifariam à plano OMN in puncto N. ergo & à puncto G ducta perpendicularis ad ABC planum bifariam secabitur à plano OMN. Eadē ratione & quæ à puncto H ducitur perpendicularis ad DEF planum à plano STY bifariam secabitur. & sunt æquales perpendiculares, quę ab ipsis GH ducuntur ad plana ABC DEF. ergo & æquales quę à triangulis OMN STY ad ipsa ABC DEF perpendiculares ducuntur. ęquealta igitur sunt prismata, quorum bases triangula LXC RQF. opposita autem ipsis OMN STY. quare & solida parallelepipeda, quæ à dictis prismatibus describuntur ęquealta, inter se sunt ut bases, & eorū dimidia ut LXC basis ad basim RQF, ita inter se dicta prismata erūt. quod demonstrare oportebat. 17. undecimi. 25. quinti.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita prisma cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma cuius basis RQF triangulum & oppositum ipsi STY] *Hoc et cōstare pōt ex corollario, quod nos ad 32 undecimi conscripsimus.*

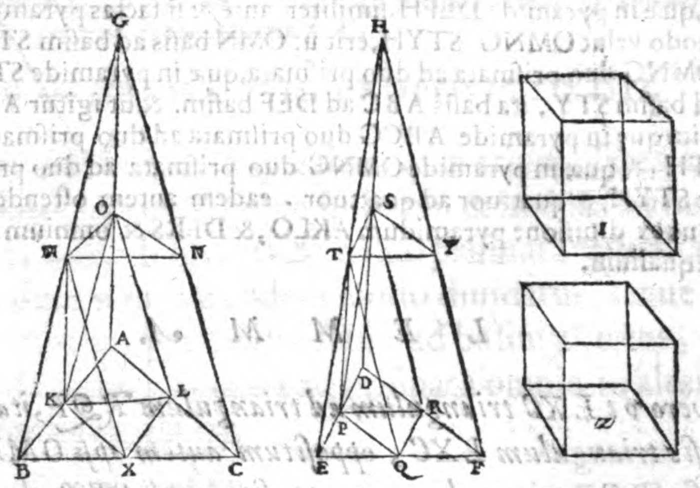
THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Pyramides, quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint enim eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triāgula ABC DEF, uertices autem puncta G H. Dico ut ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis, uel ad solidum minus pyramide DEFH, uel ad maius. Sit primum ad solidum minus, sitq; Z. & diuidatur pyramis DEFH in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia. sunt igitur duo prismata dimidio totius pyramidis maiora. & rursus pyramides ex diuisione factæ similiter diuidantur, atque hoc semper fiat, quo ad sumantur quædam pyramides à pyramide DEFH,

mul

de DEFH, quæ sint minores excessu, quo pyramis DEFH solidum Z superat. Itaque sumantur, & sint exempli. caussa pyramides DPRS STYH. erunt igitur reliqua in



pyramide DEFH prismata solido Z maiora. Diuidatur etiam ABCG pyramis in totidem partes similiter pyramidi DEFH. ergo vt ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG prismata ad prismata quæ in pyramide DEFH; sed vt ABC basis ad basim DEF, ita pyramis ABCG ad solidum Z. & ut igitur ABCG pyramis ad solidum Z, ita quæ in pyramide ABCG prismata ad prismata, quæ in pyramide DEFH: & permutando ut ABCG pyramis ad prismata, quæ in ipsa sunt, ita solidum Z ad prismata, quę in pyramide DEFH. maior autem est pyramis ABCG prismatibus, quæ in ipsa sunt. ergo & solidum Z prismatibus, quæ sunt in pyramide DEFH est maius. sed & minus, quod fieri non potest. Non igitur vt ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad solidum aliquod minus pyramide DEFH. similiter ostendemus neque ut DEF basis ad basim ABC, ita esse pyramidem DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus. Dico igitur neque esse vt ABC basis ad basim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod solidũ maius pyramide DEFH. si enim fieri potest, sit ad maius, uidelicet ad solidum I. erit igitur conuertendo vt DEF basis ad basim ABC, ita solidum I ad ABCG pyramidem. Vt autem solidum I ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad solidum aliquod minus pyramide ABCG, vt proxime ostensum fuit. & ut igitur DEF basis ad basim ABC, ita pyramis DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus. quod est absurdum. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est ABCG pyramis ad solidum aliquod maius pyramide DEFH. ostensum autem est, neque ad minus. quare vt ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur, quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent inter se sunt vt bases. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedenti.

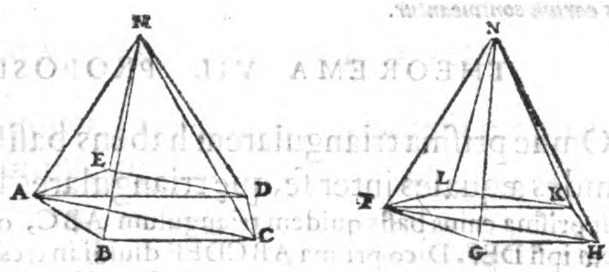
THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Pyramides, quæ eadem sunt altitudine, & multiangulas bases habent, inter se sunt, vt bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quæ multiangulas bases habeant ABCDE FGHKL: uertices autem MN puncta. Dico vt ABCDE basis ad basim FGHKL, ita esse ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLM. Diuidatur enim basis quidem ABCDE in triangula ABC ACD ADE; basis uero FGHKL diuidatur in triangula FGH FHK FKL. et in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æquealtę ac pyramides, quę à principio. Quoniam igitur est ut triangulum ABC ad triangulum

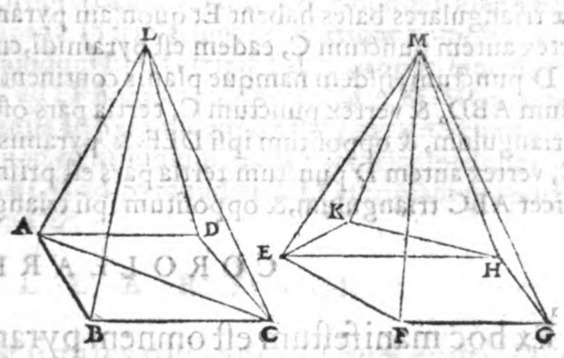
lum ACD, ita ABCM pyramis ad pyramidẽ ACDM: & componendo ut ABCD trapeziũ ad triangulum ACD, ita ABCDM pyramis ad pyramidẽ ACDM. sed & ut ACD triangulum ad triangulum ADE, ita pyramis ACDM ad ADEM pyramidem. ergo ex ęquali ut ABCD basis ad basim ADE, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ADEM: & rursus componendo ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM. Eadem ratione & ut FGHKL basis ad basim FKL, ita & FGHKLN pyramis ad FKLN pyramidem. & quoniam duæ pyramides sunt ADEM FKLN, quæ triangulares bases habent & eadem sunt altitudine; erit ut ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramides ad pyramidem FKLN. Quòd cũ sit ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidẽ ADEM, ut aũt ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidẽ FKLN: erit ex ęquali ut basis ABCDE ad FKL basim, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FKLN. sed et ut FKL basis ad basim FGHKL, ita erat et FKLN pyramis ad pyramidem FGHKLN. quare rursus ex ęquali ut ABCDE basis ad basim FGHKL, ita est ABCDEM pyramis ad pyramidẽ FGHKLN. Pyramides igitur, quæ eadem sunt altitudine, et multiangulas bases habent inter se sunt, ut bases. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.



F. C. COMMENTARIVS.

Idem etiam demonstrabitur, si bases inęqualibus numero lateribus contineantur. Sint enim pyramides aequealtae ABCDL EFGHKM, sitq; pyramidis ABCDL basis quadrilaterum ABCD, & vertex L; pyramidis vero EFGHKM basis sit pentagonum EEGHK, & vertex L. Dico vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita esse ABCDL pyramidem ad pyramidem EFGHKM. Iungantur AC EG EH. erit quadrilaterum ABCD diuisum in duo triangula ABC ACD, & pentagonum diuisum in tria triangula EFG EGH EHK. Itaque intelligantur ab vnoquoque triangulo pyramides aequealtę primis pyramidibus. Et quoniam est ut triangulum ABC ad triangulum ACD, ita pyramis ABCL ad pyramidem ACDL; erit componendo vt quadrilaterum ABCD ad triangulum ACD, ita pyramis ABCDL ad pyramidem ACDL. Eadem ratione demonstrabimus in altera pyramide ut quadrilaterum EFGH ad triangulum EGH, ita esse pyramidem EFGHM ad pyramidem EGHM: vt autem triangulum EGH ad triangulum EHK, ita est pyramis EGHM ad pyramidem EHKM. quare ex ęquali vt quadrilaterum EFGH ad triangulum EHK, itn est pyramis EFGHM ad piramidem EHKM: & rursus componendo vt pentagonum EFGHK ad triangulum EHK, ita tota pyramis EFGHKM ad pyramidem EHKM: conuertendoq; vt triangulum EHK ad pentagonum EFGHK, ita pyramis EHKM ad totam pyramidem EFGHKM. Sed vt triangulom ACD ad triangnlum EHK, ita est pyramis ACDL ad pyramidem EHKM. erat autem ut quadrilaterum ABCD ad trianguliũ ACD ita pyramis ABCDL ad pyramidem ACDL. Quare rursus ex ęquali vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita erit pyramis ABCDL



Ex antecedenre.

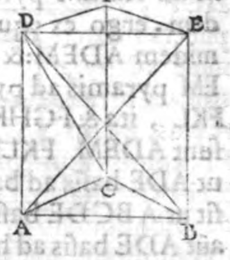
Ex autecedenti.

BCDL ad pyramidem EFGH KM. Et eodem modo in alijs demonstrabitur, quotcumque lateribus bases earum contineantur.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. VII.

Omne prisma triangularem habens basim diuiditur in tres pyramides æquales inter se, quę triangulares bases habent.

Sit prisma cuius basis quidem triangulum ABC, oppositũ autem ipsi DEF. Dico prisma ABCDEF diuidi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases. Iungantur enim BD EC CD. Et quoniam parallelogrammum est A



34 primi. BED, cuius diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD ęquale. ergo pyramis cuius basis triangulum ABD, vertex

5. huius. autem punctum C æqualis est pyramidi, cuius basis EDB triangulum & vertex punctum C. Sed pyramis cuius basis EDB triangulum & vertex punctum C, eadem est pyramidi, cuius basis triangulum EBC, & vertex D punctum, ijsdem enim planis continentur. Ergo & pyramis cuius basis triangulũ ABD, vertex autem punctũ C æqualis est pyramidi, cuius basis EBC triangulum, & vertex pũctum D. Rursus quoniam FCBE parallelogrammum est, cuius diameter CE, triangulum ECF triangulo CBE est ęquale. ergo & pyramis, cuius basis BEC triangulum, vertex autem punctum D æqualis est pyramidi, cuius basis triãgulum ECF, & vertex punctum D. Sed pyramis, cuius basis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D ostensa est æqualis pyramidi, cuius basis triãgulum ABD, & vertex C punctum. quare & pyramis cuius basis triangulum CEF, & vertex punctum D, æqualis est pyramidi cuius basis triangulum ABD, & vertex C punctum. Prisma igitur ABCDEF diuiditur in tres pyramides inter se ęquales, quæ triangulares bases habent. Et quoniam pyramis, cuius basis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem est pyramidi, cuius basis triangulum CAB, & vertex D punctum, ijsdem namque planis continentur: pyramis aũt, cuius basis triangulum ABD, & vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis, cuius basis ABC triangulum, & oppositum ipsi DEF. & pyramis igitur, cuius basis triangulum ABC, vertex autem D punctum tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum, & oppositum ipsi triangulum DEF.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, & altitudinem æqualẽ; quoniam etiam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppositam ipsi eandẽ, diuiditur in prismata, quę triangulares bases habent, & quę ipsis opponuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc corollario, & antecedentibus sequitur prismata omnia, quę eadem sunt altitudine inter se esse, vt bases: sunt enim ea pyramidum eiusdẽ altitudinis tripla.

Sed & hęc uera sunt, quę nos demonstrauimus in libro de centro grauitatis solidorum propositione. XX. & XXI.

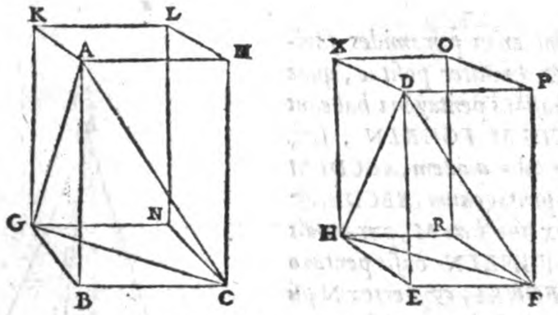
Prismata omnia, & pyramides, quę in eisdem, vel ęqualibus basibus constituuntur eam inter se proportionem habent, quam altitudines.

Et

Et insuper prismata omnia & pyramides inter se proportionem habent compositam ex proportione basium & proportione altitudinum.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Similes pyramides, quę triangulares bases habent in tripla sűt proportione homologorum laterum.



Sint similes, & similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertices autem GH puncta. Dico ABCG pyramidē ad pyramidem DEFH triplam proportionem habere eius, quam BC habet ad EF. compleãtur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis ABCG similis est pyramidi DEFH, erit angulus ABC angulo DEF æqualis, angulusq́; GBC ęqualis angulo HEF, & angulus ABG angulo DEH. atque est vt AB ad DE, ita BC ad EF, & BG ad EH. Quoniam igitur est vt AB ad DE, ita BC ad EF, & circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. Eadem ratione & parallelogrammum BN simile est parallelogrammo ER, & parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrãmo. Tria igitur parallelogramma BM KB BN, tribus EP EX ER sunt similia. Sed tria quidem MB BK BN tribus oppositis ęqualia, & similia sunt, tria vero EP EX ER tribus oppositis ęqualia, & similia. quare solida BGML EHPO similibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea simile est BGML solidum solido EHPO. Similia autem solida parallelepipeda in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo solidum BGML ad solidum EHPO triplã habet proportionem eius, quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed vt BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma quod est dimidium solidi parallelepipedi, sit pyramidis triplum. quare & pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplam proportionem habebit eius, quam BC habet ad EF.

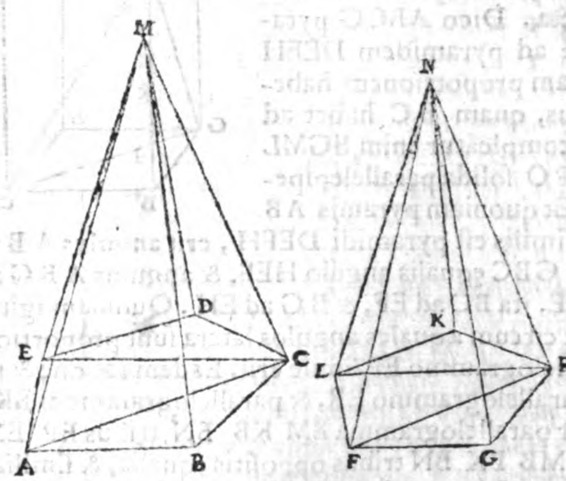
9. diffi. Vndecimi.
1. diffi. sexti.
24. Vndecimi.

COROLLARIVM.

Ex hoc perspicuum est, & similes pyramides, quæ multiangulas bases habent inter se esse in tripla proportione homologorum laterum. ipsis enim diuisis in pyramides triangulares bases habētes, quoniam & similia polygona, quæ sunt in basibus in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis; erit vt vna pyramis in altera pyramide triangularem habens basim ad pyramidem in altera triangularem basim habentem, ita & omnes pyramides in pyramide altera triãgulares habentes bases ad omnes in altera triangulares bases habentes; hoc est ita pyramis ipsa multiangulam habens basim ad pyramidem, quæ multiangulam basim habet. Sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem

ramidem, quæ triangularem basim habet est in tripla proportione homologorum laterum. & pyramis igitur multiangulam habẽs basim ad pyramidem similem basim habentem, triplam proportionem habebit eius, quam latus homologam habet ad homologum latus.

F. C. COMMENTARIVS.



Sint enim pyramides similes & similiter positae, quae pro basibus pentagona habeant ABCDEM FGHKLN, sitq; pyramidis quidem ABCDEM basis pentagonum ABCDE, & uertex punctum M, pyramidis vero FGHKLN basis pentagonum FGHKL, & vertex N punctum, & sit latus AB homologum lateri FG. Dico pyramidẽ ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplam proportionem habere eius, quam habet AB ad FG. Iungantur enim AC CE FH HL. & quoniam poly-
20.sexti. *gona similia in similia triangula diuiduntur, numeroq; aequalia, & homologa totis; erit triangulum ABC simile triangulo F*
9.diff. und. *GH, triangulumq; ACE triangulo FHL simile, & triangulum CDE triangulo HKL. est autem ob pyramidum similitudinem triangulum AMB simile triangulo FNG. quare vt MA ad AB, ita NF ad FG, vt autem BA ad AC, ita GF ad FH ex aequali igitur vt MA ad AC, ita LF ad FH. non aliter demonstrabitur vt MC ad CA, ita NH ad HF. ergo triangulum MAC simile est triangulo NFH. est autem & triangulum MBC simle triangulo NGH ob similitudinem pyramidum. pyramis igitur, cuius basis triangulum ABC & vertex M punctum, similis est pyramidi, cuius basis triangulum FGH, & vertex punctum N: quippe quod similibus triangulis contineantur. Eadem ratione demonstrabitur pyramis ACEM similis pyramidi FHLN, & pyramis CDEM pyramidi HKLN. sed pyramis quidem ABCM ad pyramidem FGHN triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad FG, & pyramis ACEM ad pyramidem FHLN triplam proportionem habet eius, quam AE habet ad FL, hoc est quam AB habet ad FG, est enim vt BA ad AE, ita GF ad FL, & permutãdo vt BA ad GF, ita AE ad FL. pyramis autem CDEM ad pyramidem HKLN triplam proportionem habet eius, quam CD ad HK, hoc est quam AB ad FG. Quoniã enim vt AB ad BC, ita est FG ad GH, vt autem BC ad CD, ita GH ad HK; erit ex aequali vt AB ad CD, ita FG ad HK, & permutando vt AB ad FG, ita CD ad HK. Vt igitur vna antecedentium ad vnam consequentium, hoc est pyramis ABCM ad pyramidem FGHN, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, hoc est ita tota pyramis ABCDEM ad totam pyramidem FGHKLN. ergo & pyramis ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplam habebit proportionem eius, quam habet AB ad FG. quod demonstrare oportebat.*

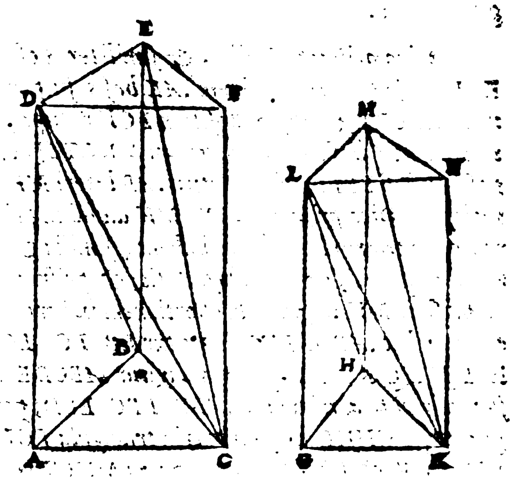
COROLLARIVM.

Ex his colligitur pyramides similes, quæ multiangulas bases habent diuidi in pyramides triangulares bases habentes similes, & numero æquales & homologas totis.

Sed quod Euclides demonstrauit in pyramidibus similibus, nos etiam in similibus prismatibus demonstrare aggrediemur. & quamquam in antecedente libro à nobis demonstratum sit prismata similia, quae triangulares bases habent in tripla esse proportione homologorum laterum, tamen hoc loco placuit illud etiam aliter demonstrare in hunc modum.

THEOREMA I.

Prismata similia, quae triangulares bases habẽt in pyramides similes, numeroq; equales diuiduntur, & prisma ad prisma triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.



Sint prismata similia, & similiter posita AE GM & prismatis quidem AE basis sit triãgulum ABC, & quod ipsi opponitur triangulum DEF: prismatis vero GM basis sit GHK triangulum & oppositum ipsi LMN: sitq; latus AB lateri GH homologum. Dico prismata AE GM diuidi in pyramides similes, numeroq; aequales, & prisma AE ad prisma GM triplã habere proportionem eius, quam habet AB ad GH. Iungantur enim BD EC CD HL MK KL. erit ex iam demonstratis prisma AE diuisum in tres pyramides ęquales inter se, & prisma GM similiter diuisum in totidem pyramides aequales, quae pyramidibus prismatis AE similes erunt. Quoniam enim ob prismatum similitudinem parallelogrammum ABED simile est parallelogrammo GHML, erit vt DA ad AB, ita LG ad GH: atque est angulus DAB ęqualis angulo LGH. triangulum igitur DAB triangulo LHG est simile. Eadem ratione & triangulum DEB triangulo LMH, & alia triangula, quae sunt parallelogrammorum dimidia alijs triangulis, quibus respondent similia demonstrabuntur. Et quoniam vt DC ad CA, ita est LK ad KG; vt autem AC ad CB, ita GK ad KH: erit ex aequali ut DC ad CB, ita LK ad LH. Et similiter demonstrabitur vt DE ad BC, ita esse LH ad HK. quare triangulum DBC simile est triangulo LHK. Quòd cum triangulum DAB simile sit triangulo LGH, triangnlumq; DBC simile triangulo LHK, & triangulum DAC ipsi LGK; erit pyramis, cuius basis triangulum ABC, vertex autem D punctum similis pyramidi, cuius basis triangulum GHK, & uertex punctum L. Eandem ob caussam erit pyramis cuius basis triangulum EBC, & vertex D punctum, similis pyramidi cuius basis MHK triangulum, uertex autem punctum L, & adhuc pyramis, cuius basis triangulum ECF, & uertex punctum D similis pyramidi, cuius basis triangulum MKN, & uertex L punctum. Quoniam igitur pyramis ABCD similis est pyramidi GHKL, similes autem pyramides sunt in tripla proportione homologorum laterum; habebit pyramis ABCD ad pyramidem GHKL triplam proportionem eius, quam habet AB ad GH. Pyramis autem EBCD ad pyramidem MHKL triplam habet proportionem eius, quam BC habet ad HK, hoc est quam AB habet ad GH; est enim vt AB ad BC, ita GH ad HK: & permutando vt AB ad GH, ita BC ad HK. & similiter pyramis ECFD ad pyramidem MKNL proportionem habet triplam eius, quam EF habet ad MN, hoc est EC ad HK, hoc est AB ad GH. Vt igitur vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Quare vt pyramis ABCD ad pyramidem GHKL, ita totum prisma AE ad totum prisma GM. sed pyramis ABCD ad pyramidem GHKL triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad GH. Ergo & prisma AE ad prisma GM triplam proportionem habebit eius, quam AB ad GH.

9. diff. undecimi.

6. sexti.

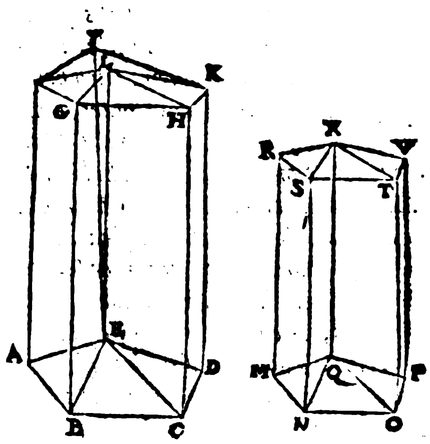
9. diff. undecimi.

12. quinti.

ALITER. Quoniã igitur pyramis ABCD similis est pyramidi GHKL; similes autem pyramides sunt in tripla proportione homologorum laterum: habebit pyramis ABCD ad pyramidẽ GHKL triplam proportionẽ eius, quam AB habet ad GH. sed vt pyramis ABCD ad pyramidem GHKL, ita prisma AE ad prisma GM, sunt enim prismata pyramidum tripla. ergo & prisma AE ad prisma GM triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad GH. Prismata igitur similia, quae triangulares bases habent, diuiduntur in pyramides similes, numeroq; aequales, & prisma ad prisma triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA 11.

Prismata similia, quę multiangulas habent bases in similia prismata triangulares bases habentia diuiduntur, numeroq; aequalia, & homologa totis: & prisma ad prisma triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.



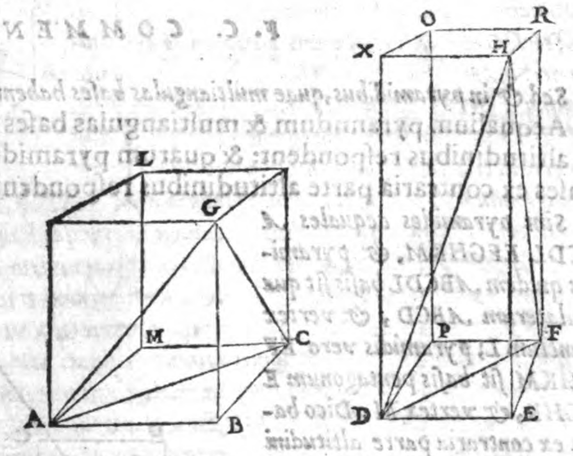
Sint duo prismata similia, & similiter posita AK MV, & prismatis quidem AK basis sit pentagonum ABCDE, & ipsi oppositum FGHKL; prismatis uero MV basis sit pentagonum MNOPQ, & oppositum ipsi RSTVX: sitq; latus AB lateri MN homologum. Dico prismata AK MV diuidi in prismata, quae triangulares bases habent, similia & numero aequalia, & homologa totis; & prisma AK ad prisma MV triplam proportionem habere eius, quam habet AB ad MN. Iūgantur EB EC LG LH QN QO XS XT. pētagonū igitur ABCDE diuisum erit in tria triangula ABE EBC ECD; pentagonumq; FGHKL diuisum in tria triangula FGL LGH LHK: & similiter pentagonum MNOPQ diuisum erit in tria triangula MNQ QNO QOP: & pentagonum RSTVX in totidem triangula RSX XST XTV. Intelligatur vnumquodque prismatū AK MV diuisū in tria prismata triangulares bases habentia ductis planis per LG GB, perq; LH HC, & per XS SN, & per XT TO. (20. sexti.) *Quoniam igitur similia polygona in similia triangula diuiduntur, numeroq; aequalia, & homologa totis; erunt triangula ABE FGL similia triangulis MNQ RSX, & triangula EBC LGH triangulis QNO XST, triangulaq; ECD LHK ipsis QOP XTV similia. Et qm̄ prisma AK ponitur simile prismati MV,* (9. diffi. undecimi.) *parallelogrāmū ABGF simile erit parallelogrāmo MNSR, & parallelogrāmū AELF simile ipsi MQXR.* (1. diffi. sexti.) *quare vt LE ad EA, ita XQ ad QM: vt aūt AE ad EB, ita MQ ad QN. ex ęquali igitur ut LE ad EB, ita XQ ad QN; ideoq; vt BG ad GL, ita NS ad SX, angulus autem LEB est aequalis angulo XQN ob similitudinē prismatum. si enim similibus existentibus prismatibus AK MV, angulus LEB non est aequalis angulo XQN, alter eorum maior erit. sit maior XQN, & ad rectam lineam BE, & ad punctum in ipsa E angulo NQX constituatur aequalis angulus BEY, vt recta linea EY terminetur à plano pentagoni FGHKB in puncto Y; & iungantur FY YK. erit pentagonum FGHKY simile pentagono RSTVX. sed & pentagonum FGHKL ponitur eidem simile. pentagonum igitur FGHKL simile est pentagono FGHKY. quare angulus FLK aequalis est angulo FYK. sed & maior. quod fieri nō potest. Non igitur similibus existentibus prismatibus angulus LEB inęqualis est angulo XQN. quare necessario est aequalis;* (34. primi.) *& ob id angulus EBG aequalis est angulo QNS. ergo & qui ipsis opponuntur LGB GLE angulis XSN SXQ sunt aequales. parallelogrammum igitur BELG simile est parallelogrammo NQXS. Eadem ratione demonstrabitur parallelogrammum LECH simile parallelogrammo XQOT. ergo prisma AL, cuius basis triangulum ABE, & ipsi oppositum FGL simile est prismati MX, cuius basis triangulum MNQ, & oppositum ipsi RSX; similibus enim planis continentur. est autem ob prismatum similitudinem, & parallelogrammum BCHG simile parallelogrammo NOTS, & parallelogrammum EDKL simile ipsi QPVX. ergo & prisma BH, cuius basis triangulum EBC, & ipsi oppositum LGH est simile prismati NT, cuius basis triangulum QNO, & ipsi oppositum XST, & denique prisma CL cuius basis triangulum ECD, & oppositum ipsi LSK, simile est prismati QX, cuius basis triangulum QOP, & quod ipsi opponitur XTV. similia autem*

prismata

prismata, quae triangulares bases habent sunt in tripla proportione homologorum laterum, quod nos & ad 34. propositionem antecedentis libri, & proxime aliter demonstrauimus. prisma igitur AL ad prisma MX triplam proportionem habet eius, quam habet AB ad MN, & prisma BH ad prisma NT triplam habet proportionem eius, quam BC habet ad NO, hoc est AB ad MN. prisma autem CL ad prisma OX triplam proportionem habet eius, quàm habet CD ad OP, hoc est AB ad MN ut supra demonstrauimus. homolgoa enim latera omnia inter se eandem habent proportionem. Quare vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedētia ad omnia cōsequentia. Vt igitur prisma AL ad prisma MX, ita omnia prismata ad omnia prismata, hoc est totum prisma AK ad totum prisma MV. prisma autem AL ad prisma MX triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad MN. ergo & prisma AK ad prisma MV triplam proportionem habebit eius, quam AB ad MN. Similia igitur prismata, quae multiangulas habent bases in similia prismata triangulares bases habentia diuiduntur, numeroq; aequalia, & homologa totis; & prismo ad prisma triplam proportionem habet eius, quam habet latus homologum ad homologum latus. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

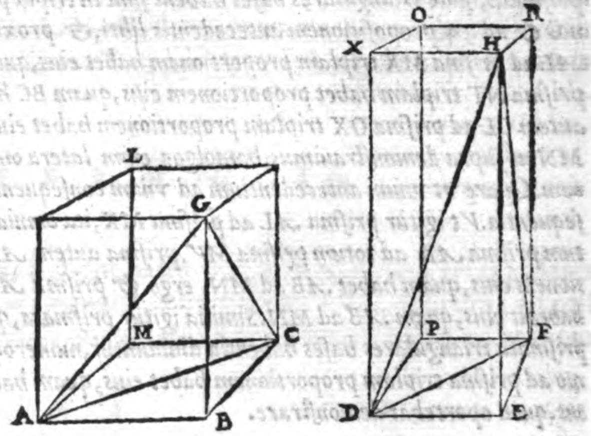
Aequalium pyramidum, & triangulares bases habentium bases ex contraria parte altitudinibus respondent: & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illæ sunt ęquales.



Sint enim pyramides ęquales, quæ triangulares bases habeant ABC DEF, vertices vero G H puncta. Dico pyramidum ABCG DEFH bases ex contraria parte altitudinibus respondere, & vt ABC basis ad basim DEF, ita esse pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG. Cōpleantur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis ABCG est ęqualis pyramidi DEFH, atque est pyramidis quidem ABCG sextuplum BGML solidum, pyramidis vero DEFH sextuplum solidum EHPO; erit solidum BGML solido EHPO æquale. ęqualium autem solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent. est igitur ut BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi altitudo ad altitudinem solidi BGML. Sed ut BM basis ad basim EP, ita ABC triangulum ad triangulum DEF. ergo & vt ABC triangulum ad triangulum DEF, ita solidi EHPO altitudo ad altitudinem solidi BGML. Sed solidi quidem EHPO altitudo eadem est altitudini pyramidis DEFH; solidi vero BGML altitudo eadem est altitudini pyramidis ABCG. est igitur vt ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. quare pyramidum ABCG DEFH bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Sed pyramidum ABCG DEFH bases ex contraria parte respondeant altitudinibus, sitq; vt ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH æqualem esse. ijsdem enim constructis, quoniam vt ABC basis ad basim DEF, ita est DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramimidis ABCG; vt autem ABC basis ad basim DEF, ita BM parallelogrāmū ad parallelogrāmū EP: erit & vt parallelogrāmū BM ad EP parallelogrāmū, ita pyramidis DEFG altitudo ad altitudinē pyramidis

15. quinti. 34. undecimi. 15. quinti. 11. quinti. 15. quinti.

midis ABCG. Sed pyramidis quidẽ DEFH altitudo eadẽ est altitudini solidi parallelepipedi EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem est altitudini solidi parallelepipedi BGML. est igitur vt BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem solidi parallepipedi BGML. Quorum autem solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea sunt æqualia. solidum igitur parallelepipedum BGML æquale est solido parallelepipedo EHPO atque est solidi quidem BGML sexta pars pyramis ABCG; solidi vero EHPO itidem sexta pars pyramis DEFH. ergo pyramis ABCG pyramidi DEFK est ęqualis. Aequalium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent, & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases ex contraria parte altitudinibus respondent illæ sunt æquales. quod oportebat demonstrare.

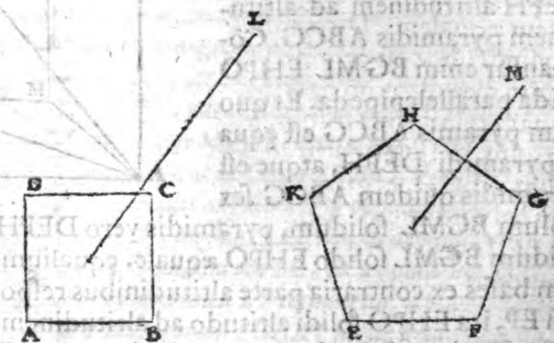


F. C. COMMENTARIVS.

Sed & in pyramidibus, quae multiangulas bases habent idem demonstrabitur hoc modo.

Aequalium pyramidum & multiangulas bases habentium, bases ex cõtraria parte altitudinibus respondent: & quarum pyramidum multiangulas bases habentiũ bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illæ sunt æquales.

Sint pyramides aequales ABCDL EFGHKM, & pyramidis quidem ABCDL basis sit quadrilaterum ABCD, & vertex punctum L; pyramidis vero EFGHKM sit basis pentagonum EFGHK, & vertex M. Dico bases ex contraria parte altitudinibus respondere: hoc est quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita esse vt pyramidis EFGHKM altitudo ad altitudinẽ pyramidis ABCDL. Fiat enim ex xxv. sexti triangulum in quo N aequale quadrilatero ABCD: & rursus fiat aliud triangulum in quo O aequale pentagono EFGHK, et à triangulo N erigatur pyramis ęquealta pyramidi ABCDL: à triangulo autem O erigatur alia pyramis aequealta pyramidi EFGHKM. erit igitur pyramis N aequalis pyramidi ABCDL: sunt enim in basibus aequalibus, & ęqualem habent altitu-



6. huius.

dinem: & simili ratione pyramis O aequalis erit pyramidi EFGHKM. ergo pyramis N pyrami di O est aequalis. aequalium autem pyramidum, & triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Vt igitur triangulum N ad triangulum O, ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N. Sed vt triangulum N ad O triangulum, ita quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, vtrumque enim vtrique est aequale. ergo vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N; hoc est altitudo pyramidis EFGHKM ad pyramidis ABCDL altitudinem. Sed iisdem stantibus sit ut quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita pyramis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDL. Dico pyramidem ABCDL pyramidi EFGHKM aequalem esse. est enim ut quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita triangulum N ad O triangulum. quare vt triangulum N ad triangulum O, ita pyramidis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDL, hoc est ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N. quarum autem pyramidum triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illae sunt aequales. aequalis igitur est pyramis N pyramidi O; ac propterea pyramis ABCDL pyramidi EFGHKM est aequalis. Aequalium igitur pyramidum & multiangulas bases habentium, & reliqua. quod demonstrare oportebat.

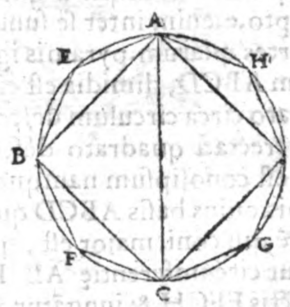
COROLLARIVM.

Ex prædictis colligitur prismatum omnium æqualium bases ex contraria parte altitudinibus respondere: & quorum prismatum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea esse æqualia; prismata enim in eisdem basibus constituta, & eadem altitudine sunt pyramidum tripla.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet & altitudinem æqualem.

Habeat enim conus eandem basim, quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, & altitudinem æqualem. Dico conum tertiam partem esse cylindri, hoc est cylindrum coni triplum esse. Si enim cylindrus nõ sit triplus coni, vel maior erit, quàm triplus, uel minor. Sit primũ maior quàm triplus; & describatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD maius est, quàm dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur prisma æquealtũ cylindro, quod quidem prisma maius erit, quàm cylindri dimidium; quoniam si circa circulum ABCD quadratum describatur, erit inscriptum quadratum dimidium circumscripti: & sunt ab eisdem basibus erecta solida parallelepipeda æquealta, nimirum prismata ipsa. quare prismata inter se sunt vt bases, & prisma igitur erectum à quadrato ABCD dimidium est prismatis erecti à quadrato quod circa circulũ ABCD describitur, atq; est cylindrus minor prismate erecto à quadrato quod describitur circa circulũ ABCD. prisma igitur erectũ à quadrato ABCD æquealtũ cylindro dimidio cylindri est maius. secentur circũferentiæ AB BC CD DA bifariã in punctis EFGH; & AE EB BF FC CG GD DH HA iungantur. Vnũquodq; igitur triangulorũ AEB BFC CGD DHA maius est dimidio portionis circuli ABCD, in qua cõsistit, vt superius demonstratũ est. erigantur ab vnoquoq; triangulorũ AEB BFC CGD DHA prismata æquealta cylindro. ergo & vnumquodque erectorum prismatum maius est dimidio portionis cylindri quæ ad ipsum est, quoniam si per puncta EFGH parallelę ipsis AB BC CD DA ducãtur, & compleãtur in ipsis AB BC CD DA parallelogramma: à quibus solida parallele- **Ex corol. 7. huius.**



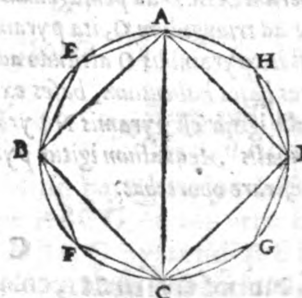
parallelepipeda æquealta cylindro erigantur: erunt vniuscuiusque erectorum dimidia prismata ea, quæ sunt in triãgulis AEB BFC CGD DHA. & sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. ergo & prismata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA maiora sunt dimidio portionum cylindri, qui ad ipsa sunt. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes prismata ęquealta cylindro, & hoc semper

Ex 1. decimi.

facientes quoad tandem relinquantur quædam portiones cylindri, quæ sint minores excessu; quo cylindrus ipsius coni triplum superat. reliquantur iam & sint AE EB BF FC CG GD DH HA. reliquum igitur prisma, cuius basis quidem polygonũ AEBFCGDH, altitudo autem eadem, quę

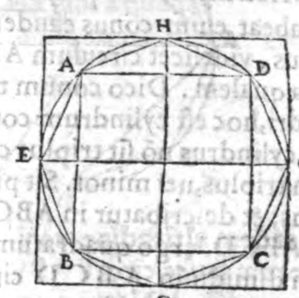
Ex corol. 7. huius.

cylindri, maius est, quàm triplum coni. Sed prisma cuius basis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem, quæ cylindri triplum est pyramidis, cuius basis polygonum AEBFCGDH, uertex autem idem, qui coni. & pyramis igitur, cuius basis polygonum AEBFCGDH, uertex autem idẽ qui coni, maior est cono, qui basim habet ABCD circulum. Sed & minor; ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. Non igitur cylindrus maior erit, quàm triplus coni. Dico insuper neq; cylindrum minorem esse, quàm triplum coni, si enim fieri potest, sit cylindrus minor, quàm triplus coni. erit conuertendo conus maior, quàm tertia pars cylindri. Describatur in ABCD circulo quadratum ABCD, ergo quadratum ABCD maius est quã dimidiũ ABCD circuli; & à quadrato ABCD erigatur pyramis, uerticẽ habẽs eundẽ quẽ conus. pyramis igitur erecta maior est quàm coni dimidium: quoniam, vt ante demonstrauimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum ABCD dimidium eius, quod circa circulum descriptum est: & si à quadratis erigantur solida parallelepipeda æquealta cono, quæ & prismata appellantur, erit quod à quadrato ABCD erigitur dimidium eius, quod erectum est à quadrato circa circulum



5. quinti.

descripto, etenim inter se sunt vt bases. quare & tertiæ partes ipsarum. pyramis igitur, cuius basis quadratum ABCD, dimidia est eius pyramidis, quæ à quadrato circa circulum descripto erigitur. Sed pyramis erecta à quadrato descripto circa circulum, maior est cono, ipsum namque comprehendit. ergo pyramis cuius basis ABCD quadratnm, vertex autem idẽ qui coni, maior est, quàm coni dimidium. secentur circumferentię AB BC CD DA bifariã in punctis EFGH. & iungãtur AE EB BF FC CG GD DH HA. & vnum quodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA maius est, quàm dimidium portionis circuli ABCD, in qua consistit. erigantur ab vnoquoque triangulorum AEB BFC CGD DHA pyramides verticem habentes eundem, quem conus. ergo & vnaquæque pyramidum eodem modo erectarum, maior est, quàm dimidium coni portionis, quæ est ad ipsam. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes pyramidem uerticem habentem eundem, quem conus, & hoc semper facientes, relinquemus tandẽ quasdam coni portiones, quę maiores erunt excessu, quo conus tertiam cylindri partem superat. Relinquantur & sint, quę in ipsis AE EB BF FC CG DH HA. reliqua igitur pyramis cuius basis polygonum AEBFCGH, & uertex idem qui coni, maior est, quàm tertia cylindri pars. sed pyramis cuius basis polygonum AEBFCDH, uertex autem idem qui coni, tertia pars est prismatis, cuius basis polygonũ AEBFCDH, altitudo autem eadem quę cylindri. prisma igitur, cuius basis AEBFCGH polygonum, & altitudo eadem, quę cylindri, maius est cylindro, cuius basis



est

est circulus ABCD. sed & minus, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. Non igitur cylindrus minor est, quàm triplus coni. ostensum autem est neque maiorem esse, quàm triplum. ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus est tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eãdẽ, quam ipse basim habentis, & altitudinem æqualem. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

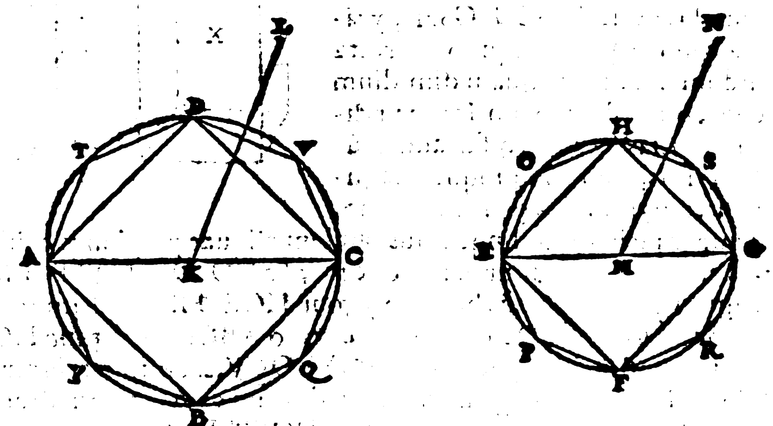
Eodem modo illud etiam demonstrabitur in conis & cylindris scalenis.

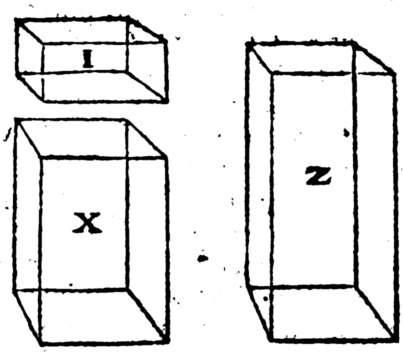
COROLLARIVM.

Ex quibus constat omnem conum siue rectum, siue scalenum tertiam partem esse cylindri siue recti siue scaleni, qui eandem basim habet, & æqualem altitudinem.

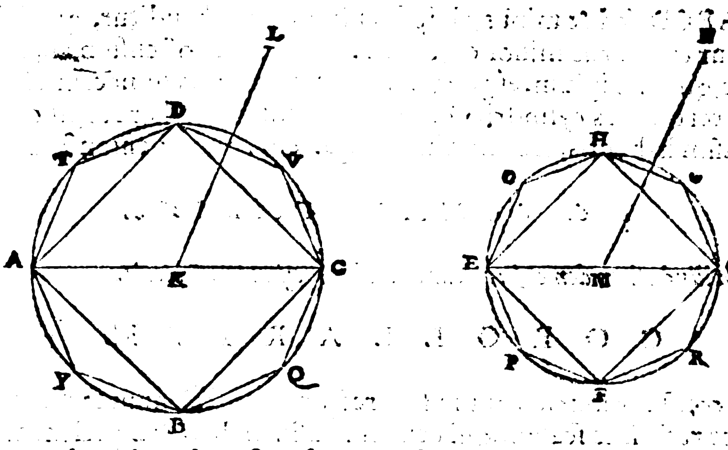
THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

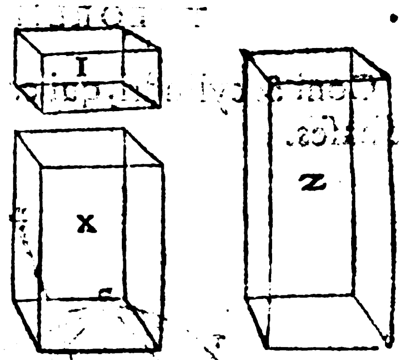
Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases.





Sint eadem altitudine coni, & cylindri, quorum bases circuli ABCD EFGH axes autem KL MN, & diametri basiũ AC EG. Dico vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita esse conum AL ad EN conum. si enim non ita sit; erit vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidũ minus cono EN, vel ad maius. sit primũ ad minus, quod sit X, & quo minus est solidum X cono EN, ei æquale sit I solidum. conus igitur EN, ipsis solidis X I est æqualis. Describatur in EFGH circulo quadratũ EFGH. ergo quadratum maius est, quàm dimidium circuli. erigatur à quadrato EFGH pyramis æquealta cono. pyramis igitur erecta maior est, quàm coni dimidium; nam si circa circulum quadratum describamus, & ab ipso erigamus pyramidem æquealtam cono; erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptæ dimidia; etenim inter se sunt vt bases: conus autem circumscripta pyramide est minor. ergo pyramis, cuius basis quadratum EFGH, uertex autem





autem idem qui coni, maior est quàm coni dimidium. secentur circumferentiæ EF FG GH HE bifariam in punctis OPRS; & OE EP PF FR RG GS SH iungantur. Vnumquodque igitur triangulorum HOE EPF FRG GSH maius est, quàm dimidiū portionis circuli, in qua consistit. erigatur ab vnoquoque triangulorum HOE EPF FEG GSH pyramis æquealta cono. ergo & vnaquæque erectarum pyramidum maior est, quàm dimidium portionis coni, quæ est ad ipsam. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam; & iūgentes rectas lineas, & ab vnoquoque triāgulorum erigentes pyramides ęquealtas cono, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ solido I minores erunt. relinquantur & sint quę in ipsis HO OE EP PF FR RG GS SH. reliqua igitur pyramis, cuius basis polygonū HOEPFRGS, altitudo autē eadē, quę coni, maior est solido X. Describatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS simile & similiter positum polygonum DTAYBQCV, & ab ipso erigatur pyramis æquealta cono AL. Quoniam igitur est vt quadratum ex AC ad quadratum ex EG

1. huius. ita DTAYBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS; vt autem quadratum

2. huius. ex AC ad quadratū ex EG, ita ABCD circulus ad circulum EFGH: erit vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS. sed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X solidum: & vt polygonū DTAYBQCV ad polygonū HOEPFRGS, ita pyramis cuius basis DTAYBQCV polygonū, uertex autem punctum L ad pyramidem, cuius basis polygonum HOEPFRGS, & uertex punctum N. Vt igitur conus AL ad X solidum, ita pyramis cuius basis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L ad pyramidem, cuius basis polygonum HOEPFRGS, & uertex N punctum. quare permutando vt conus AL ad pyramidem, quæ in ipso est, ita solidum X ad pyramidē, quę in cono EN. conus autem AL maior est pyramide, quæ in ipso. maius igitur est solidum X pyramide, quæ in cono EN. sed & minus, quod fieri non potest. Non igitur vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est AL conus ad solidum aliquod minus cono EN. Similiter demonstrabitur neque vt EFGH circulus ad circulum ABCD, ita esse conum EN ad aliquod solidum minus cono AL. Dico præterea neque esse vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod solidum maius cono EN. Si enim fieri potest, sit ad solidum maius, quod sit Z. ergo conuertendo vt EFGH circulus ad circulum ABCD, ita erit solidum Z ad AL conum. sed ut solidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL. & ut igitur EFGH circulus ad circulū ABCD, ita conus EN ad aliquod solidum minus

minus

minus cono AL,quod fieri non posse ostensum est. Non igitur vt ABCD circulus ad circulum EFGH,ita conus AL ad aliquod solidum maius cono EN ostensum autem est neque esse ad minus.ergo vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum.sed vt conus ad conum, ita est cylindrus ad cylindrum, est enim vterque utriusque triplus.& ut igitur ABCD circulus ad circulum EFGH,ita in ipsis cylindri æquealti conis. ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinẽ inter se sunt ut bases.quod demonstrare oportebat.

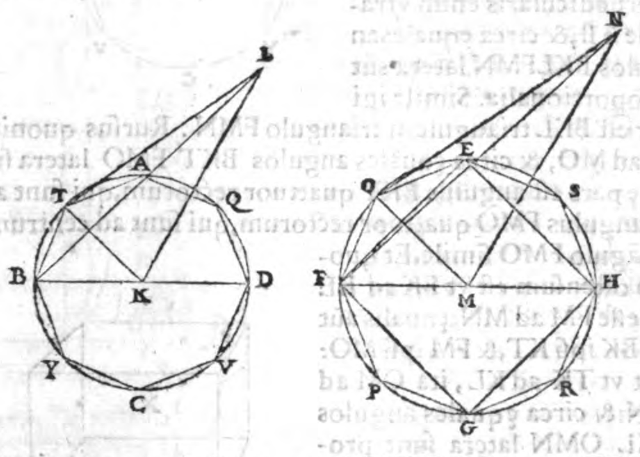
15.quinti.
Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.

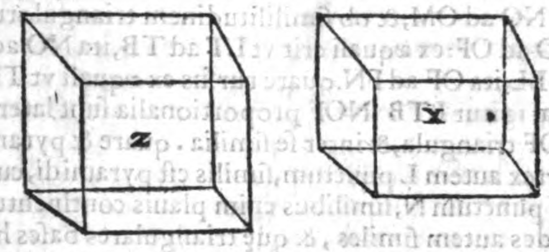
Et hoc in conis & cylindris scalenis similiter demonstrabitur.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

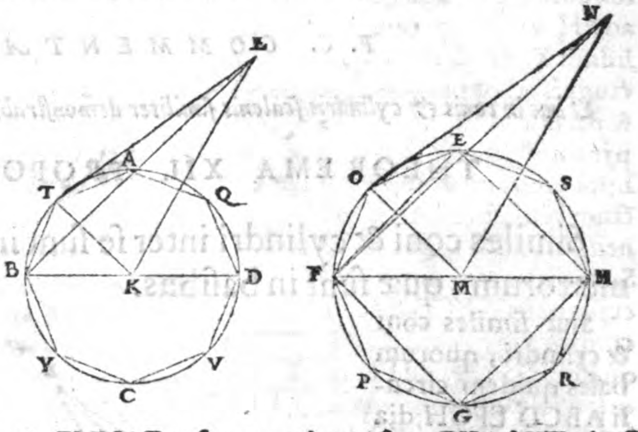
Similes coni & cylindri inter se sunt in tripla proportione diamertorum, quæ sunt in basibus.

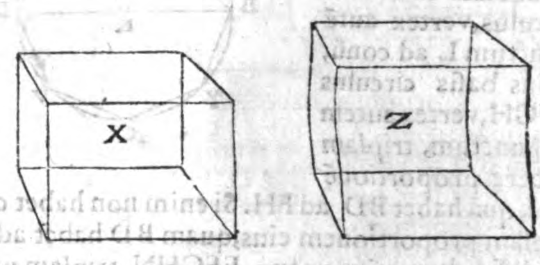


Sint similes coni & cylindri, quorum bases quidem circuli ABCD EFGH;diametri vero basium BD FH: & axes conorum,vel cylindorum HK MN. Dico conũ cuius basis ABCD circulus,vertex autẽ punctum L ad conũ, cuius basis circulus EFGH,vertex autem N punctum, triplam habere proportionẽ eius, quã habet BD ad FH. Si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplam proportionem eius,quam BD habet ad FH, habebit ABCDL conus ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplam proportionem,uel ad maius. habeat primum ad minus,quod sit X; & describatur in EFGH circulo quadratum EFGH. quadratum igitur EFGH maius est,quàm dimidium EFGH circuli.& erigatur à quadrato EFGH pyramis æquealta cono.ergo erecta pyramis maior est, quàm coni dimidia. Itaque secẽtur EF FG GH HE circumferentiæ bifariam in punctis OPRS & iungatur EO OF FP PG GR RH HS SE. Vnumquodque igitur triangulorũ EOF FPG GRH HSE maius est quàm dimidium portionis circuli EFGH, in qua consistit. & erigatur ab vnoquoque triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem uerticẽ habẽs, quem conus.ergo & vnaquæque erectarum pyramidum maior est quàm dimidia portionis coni,quæ est ad ipsam.secantes igitur reliquas circumferentias bifariam,iũgentesq; rectas lineas,& ab vnoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem,quem conus; atque hoc semper facientes tãdem relinquemus quasdam coni portiones,quę minores erũt excessu,quo conus EFGHN ipsum X solidum superat. Relinquãtur & sint quę in ipsis EO OF FP PG GR RH HS SE.



HS SE. Reliqua igitur pyramis, cuius basis quidem polygonum EOFPGRHS, uertex autem N punctum, maior est solido X. Describatur etiam in circulo ABCD polygono EOFPGRHS simile, & similiter positum polygonum ATBYCVDQ: à quo erigatur pyramis eundem verticem habens, quem conus; & triangulorum continentium pyramidem, cuius basis quidem est polygonum ATBYCVDQ, vertex autem punctum L, vnũ sit LBT; triangulorũ vero continentiũ pyramidem, cuius basis EOFPGRHS polygonũ, & vertex punctũ N, vnum sit NFO, & iũgãtur KT MO. Qm̃ igitur conus ABCD similis est cono EFGH, erit vt BD ad FH, ita KL axis ad axẽ MN. vt aũt BD ad FH, ita BK ad FM. ergo & ut BK ad FM, ita KL ad MN, & permutando vt BK ad KL, ita FM ad MN. perpẽdicularis enim vtraque est, & circa ęquales angulos BKL FMN latera sũt proportionalia. Simile igitur est BKL triangulum triangulo FMN. Rursus quoniam est vt BK ad KT, ita FM ad MO, & circa ęquales angulos BKT FMO latera sunt proportionalia; etenim quę pars est angulus BKT quattuor rectorum, qui sunt ad K centrũ, eadem est pars & angulus FMO quattuor rectorum, qui sunt ad centrum M: erit triangulum BKT triãgulo FMO simile. Et quoniã ostensum est vt BK ad KL ita esse FM ad MN; ęqualis aũt est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit vt TK ad KL, ita OM ad MN: & circa ęquales angulos TKL OMN latera sunt proportionalia; recta enim sunt. triangulum igitur LKT simile est triangulo NMO. Quòd cum ob similitudinem triangulorum BKL FMN, sit vt LB ad BK, ita NF ad FM; ob similitudinem uero triangulorum BKT FMO, vt KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali vt LB ad BT, ita NF ad FO. Rursus cum ob similitudinem triangulorum LTK NOM, sit vt LT ad TK, ita NO ad OM; & ob simililitudinem triangulorum KBT OMF, vt KT ad TB, ita MO ad OF: ex æquali erit vt LT ad TB, ita NO ad OF. ostensum autem est & vt TB ad BL, ita OF ad FN. quare rursus ex æquali vt TL ad LB, ita ON ad NF. triangulorum igitur LTB NOF proportionalia sunt latera, ideoque æquiangula sunt LTB NOF triangula, & inter se similia. quare & pyramis, cuius basis triangulum BKT, uertex autem L punctum, similis est pyramidi, cuius basis FMO triangulum, & uertex punctum N; similibus enim planis continentur, & multitudine æqualibus. pyramides autem similes, & quę triangulares bases habent in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplam habet proportionem eius, quam BK habet ad FM. Similiter à punctis quidem AQDVCY ad K, à punctis vero ESHRGP ad M ducentes rectas lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eosdẽ habentes, quos coni, ostendemus & vnãquamque pyramidũ eiusdẽ ordinis ad vnaquãq; alterius ordinis triplã proportionẽ habere eius, quã hẽt BK latus homologũ ad homologũ latus FM, hoc est quã BD ad FH. Sed vt vnũ antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia





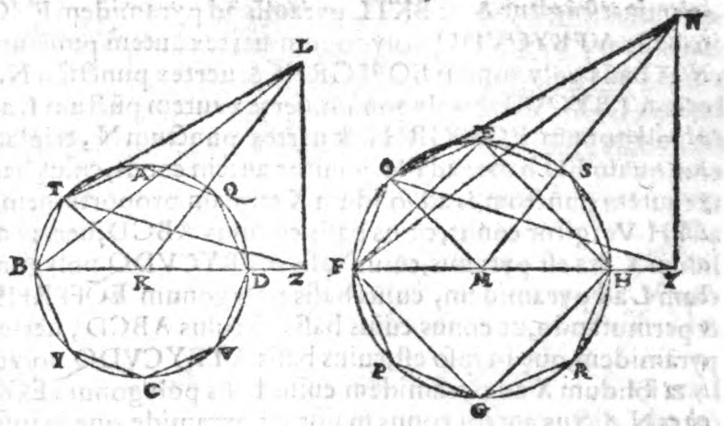
quentia. est igitur & vt BKTL pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis, cuiusbasis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L ad totam pyramidẽ cuius basis polygonum EOFPGRHS & uertex punctum N. quare & pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem pũctum L ad pyramidem cuius basis polygonum EOFPGRHS & uertex punctum N, triplam proportionem habet eius, quam BD habet ad FH. ponitur autem conus, cuius basis circulus ABCD uertex autem punctum L ad solidum X triplam proportionem habere eius, q uam BD ad FH. Vt igitur conus, cuius basis circulus ABCD, uertex autem punctum L ad solidum X, ita est pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L ad pyramidem, cuius basis polygonum EOFPRHS & uertex punctum N, & permutando, ut conus cuius basis circulus ABCD, uertex autem punctum L ad pyramidem, quę in ipso est, cuius basis ATBYCVDQ polygonũ, uertex aũt punctũ L; ita solidum X ad pyramidem cuius basis polygonum EOFPGRHS, & uertex punctum N. dictus autem conus maior est pyramide, quę in ipso; etenim eam comprehendit. maius igitur est & solidum X pyramide, cuius basis polygonum EOFPGRHS, uertex autem punctum N. sed & minus, quod fieri non potest. non igitur conus, cuius basis ABCD circulus, & uertex punctum L ad aliquod solidum minus cono, cuius basis circulus EFGH & uertex N punctum, triplam proportionẽ habet eius quam BD habet ad FH. similiter demonstrabimus neque conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL triplam proportionem habere eius, quam habet FH ad BD. Itaque dico neque ABCDL conum ad solidum maius cono EFGH N triplam habere proportionem eius, quam BD habet ad FH. si enim fieri potest habeat ad aliquod solidum maius, quod sit Z. conuertendo igitur solidum Z ad conum ABCDL triplam proportionem habet eius, quam FH ad BD: ut autem solidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod solidum minus cono ABCDL. ergo & conus EFGHN ad solidum aliquod minus cono ABCDL triplã proportionem habebit eius, quam FH habet ad BD, quod fieri non posse demonstratum est. non igitur ABCDL conus ad solidum aliquod maius cono EFGHN triplam proportionem habet eius, quam BD ad FH. ostensum autem est neque ad minus. quare conus ABCDL ad EFGHN conum triplam proportionem habet eius, quam BD ad FH. Vt autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum. cylindrus 15. quinti. enim in eadem existẽs basi, in qua conus, & ipsi aequealtus coni triplus est. cum ostẽ 10. huius. sum sit omnem conum tertiam partem esse cylindri, eandem quam ipse basim habẽtis, & aequalem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplam proportionẽ habebit eius, quam BD habet ad FH. similes igitur coni, & cylindri inter se sunt in tripla proportione diametrorũ, quae sunt in basibus. quod demonstrare oportebat.

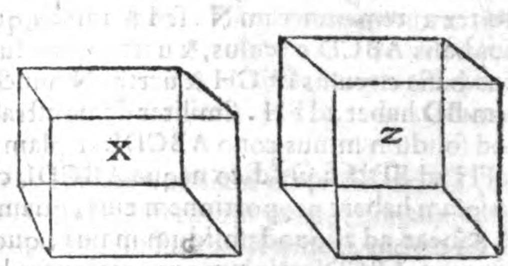
F. C. COMMENTARIVS.

Precedens demonstratio in conis & cylindris tantum recti; congruit, quam nos uniuerse ad omnes tam rectos quam scalenos accõmodabimus hoc pacto.

Similes coni & cylindri omnes interse in tripla sunt proportionem diametrorũ, quę sunt in basibus.

Sint similes coni & cylindri, quorum bases quidem circuli ABCD EFGH, et axes KL MN: & per axes ducantur plana ad rectos angulos basibus, quae bases secent, sintq́; eorum planorum & basium communes sectiones BD FH, quae circulorũ diametri erunt. Dico conum cuius basis ABCD circulus, et vertex punctum L ad conum cuius basis circulus EFGH, vertex autem N punctum triplam proportionem habere eius, quam habet BD ad FH. si enim non ita sit, habebit conus ABCDL ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplam proportionem eius, quam BD habet ad FH, vel ad maius. Habeat primum ad solidum minus, quod sit X, & describatur in EFGH circulo quadratum EFGH. erit igitur quadratum EFGH maius, quàm dimidium EFGH circuli. Erigatur à quadrato EFGH pyramis aequealta cono, quae maior erit, quàm coni dimidia, & secentur EF FG GH HE circumferentiae bifariam in punctis OPRS, iunganturq́; EO OF FP PG GR RH HS SE. Vnumquodque igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE maius est, quàm dimidiũ portionis circuli EFGH, in qua cõsistit: & erigatur ab unoquoque triangulorũ EOF FPG GRH HSE pyramis eundem, quem conus vertirem habens. ergo et vnaquęque erectarũ pyramidũ maior est, quã dimidia coni portionis, q ae est ad ipsam. secãtes igitur reliquas circũferentias bifariam, iungẽtesq; rectas lineas, & ab vnoquoq; triangulorum erigẽtes pyramides, eundem habentes verticem, quem conus: atque hoc semper facientes tandem relinquemus quasdã coni portiones, quę minores erunt excessu, quo conus EFGHN ipsum X solidum superat. relinquantur, & sint quae in ipsis EO OF FP PG GR RH HS SR. reliqua igitur pyramis, cuius basis polygonum EOFPGRHS, vertex autem pũctum N solido X est maior.



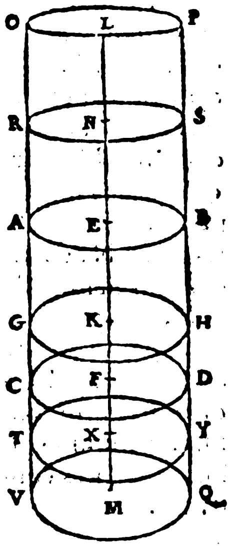


Describatur etiam in circulo ABCD ipsi EOFPGRHS polygono simile & similiter positum polygonum ATBYCVDQ. atque ab eo erigatur pyramis eundum, quem conus verticem habens: & triangulorum quidem continentium pyramidem, cuius basis polygonum ATBYCVDQ; & vertex punctum L, vnum aliquod sit LBT: triangulorũ vero continentium pyramidem, cuius basis EOFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, vnum sit NFO: & KT MO iungantur. Quoniã igitur conus ABCD similis est cono EFGH, erit ex diffinitione conorum similium, quã nos in principio antecedentis libri attulimus, vt diameter BD ad diametrum FH, ita axis KL ad MN axẽ: vt autem BD ad FH, ita BK ad FM. ergo & vt BK ad FM, ita KL ad MN; & permutando vt BK ad KL, ita FM ad MN. atque est angulus BKL aequalis angulo FMN ex eadem diffinitione conorum similium. cum igitur circa aequales angulos BKL FMN latera sint proportionalia; erit BKL triangulum simile triangulo FMN. Et quoniam vt BK ad KT, ita est FM ad MO; angulus autem BKT est aequalis angulo FMO: etenim quę pars est angulus BHT quattuor rectorũ, qui sunt ad centrum K, eadem est pars angulus FMO quattuor rectorum, qui sunt ad M centrum. rursus erunt circa aequales angulos BKT FMO latera proportionalia. triangulum igitur BKT triangulo FMO est simile. Itaque quoniam ostensum est vt BK ad KL, ita FM ad MN; aequalis autem est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit vt TK ad KL, ita OM ad MN. & sunt in conis rectis anguli TKL OMN inter se aequales, quòd recti sint. ergo in ipsis cum circa aequales angulos TKL OMN latera sint proportionalia; erit triangulum LKT simile triangulo NMO. At in conis scalenis hoc modo demonstrabitur. Ducantur à verticibus eorum LN ad rectos angulos planis basium rectae lineae LΦ Nϒ, quae cadent in communes planorum & basium sectiones BD FH ex 38. antecedentis libri. & iungantur TΦ Oϒ. Cum igitur ex diffinitione conorum similium angulus LKΦ sit ęqualis angulo NMϒ, & anguli LΦK NϒM utrique recti: erit & reliquus KLΦ reliquo MNϒ aequalis, & triangulum LΦK simile triangulo NϒM. rursus cum angulus BKT sit ęqualis angulo FMO; & reliquus ex duobus rectis TKΦ aequalis erit reliquo OMϒ. est autem ob similitudinem triangulorum LΦK NϒM, ut ΦK ad KL, ita ϒM ad MN, & ob similitudinem triangulorũ BKL FMN, ut LK ad KB, hoc est ad KT ipsi aequalem, ita NM ad MF, hoc est ad MO. ergo ex aequali vt ΦK ad KT, ita ϒM ad MO. & cum circa aequales angulos TKΦ OMϒ latera sint proportionalia, erit & triangulum KTΦ triangulo MOϒ simile. ergo vt LΦ ad ΦK, ita Nϒ ad ϒM: & vt ΦK ad ΦT, ita ϒM ad MO. quare ex aequali vt LΦ ad ΦT, ita Nϒ ad ϒO. & sunt anguli LΦT NϒO inter

inter se aequales, quòd vtrique recti ex diffinitione rectae lineae, quae ad planum recta est cum igitur circa aequales angulos LΦT NϒO latera sint proportionalia, sequitur triãgula quoq; LTΦ NOϒ inter se similia esse. ideoq; vt LT ad TΦ, ita NO ad Oϒ: & vt TΦ ad TK, ita Oϒ ad OM. ex aequali igitur vt LT ad TK, ita est NO ad OM. demonstratum autem est vt LK ad KT, ita esse NM ad MO. quare conuertendo vt TK ad KL, ita OM ad MN. rursus igitur ex aequali vt TL ad LK, ita est ON ad NM. quòd cum triangula LKT NMO latera habeant proportionalia, aequiangula sunt, & ob inter se similia. Itaq; quoniam ob similitudinem triangulorum BKL FMN est vt LB ad BK. ita NF ad FM, & ob similitudinem triangulorum BKT FMO, vt KB ad BT, ita MF ad FO, erit ex aequali vt LB ad BT, ita NF ad FO: & conuertendo vt TB ad BL, ita OF ad FN. Rursus quoniam ob similitudinem triangulorum LKT NMO, vt LT ad TK, ita est NO ad OM, & ob similitudinem triangulorum KBT MFO, vt KT ad TB, ita MO ad OF; ex aequali erit vt LT ad TB, ita NO ad OF. ostensum autem est & vt TB ad BL, ita OF ad FN. rursus igitur ex aequali vt TL ad LB, ita erit ON ad NF. quare triangulorum LTB NOF latera sunt proportionalia, ob eamq; caussam & aequiangula & inter se similia erunt. pyramis igitur, cuius basis triangulum BKT, vertex autem punctum L similis est pyramidi, cuius basis triangulum FMO, & vertex N punctum, similibus enim planis continentur & numero aequalibus. pyramides autem similes in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplam habet proportionem eius, quam BK habet ad FM. Reliqua similiter vt in antecedente demonstrabimus. 6.sexti.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

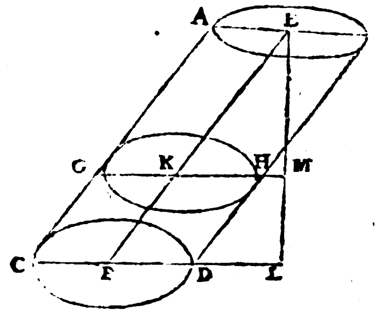


Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB CD parallelo, & occurat axi EF in K puncto. Dico vt BG cylindrus ad cylindrum GD, ita esse EK axem ad axem KF. producatur enim EF axis ex vtraque parte ad puncta LM: & ipsi quidẽ EK axi exponantur æquales quotcumq; EN NL; ipsi vero FK ęquales quotcumque FX XM: & per puncta LNXM ducantur plana ipsis AB CD parallela; atque in planis per LNXM circa centra LNXM intelligantur circuli OP RS TY VQ ęquales ipsis AB CD; & cylindri PR RB DT TQ intelligãtur. Quoniam igitur axes LN NE EK inter se sunt ęquales, erunt cylindri PR RB BG inter se vt bases: bases autem æquales sunt. ergo & cylindri PR RB BG sunt æquales. Quòd cum axes LN NE EK inter se æquales sint, itẽq; cylindri PR RB BG inter se æquales; sitq; ipsorum LN NE EK multitudo æqualis multitudini ipsorum PR RB BG: quotuplex est axis KL ipsius EK axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GB. Eadem ratione & quotuplex est MK axis ipsius axis KF, totuplex est & QG cylindrus cylindri GD. & si quidem axis LK sit ęqualis axi KM, erit & PG cylindrus cylindro GQ æqualis. Si autem axis LK maior sit axe KM, & cylindrus PG maior erit cylindro GQ, & si minor minor. quattuor igitur existentibus magnitudinibus, uidelicet axibus EK KF, & cylindris BG GD sumpta sunt æquemultiplicia, axis quidem EK & BG cylindri, nẽpe axis KL, & cylindrus PG; axis uero KF, & cylindri GD ęquemultiplicia, axis scilicet KM, & GQ cylindrus, & demonstratum est si LK axis superat axem KM & PG cylindrum superare cylindrum GQ, & si æqualis æqualis, & si minor minor. est igitur axis EK ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. quod demonstrare oportebat. 11.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Illud etiam contingit in cylindro scaleno; quod eadem ratione demonstrabitur.

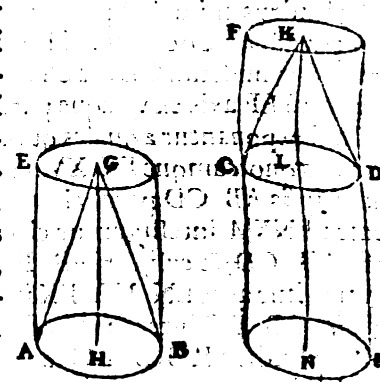
Ex quibus constat si quilibet cylindrus secetur plano basibus parallelo, ut cylindrus ad cylindrum, ita esse altitudinem cylindri ad cylindri altitudinem.



In cylindris enim rectis illud perspicuum est, cum eorum altitudines ab axibus determinentur. in scalenis vero facile apparebit ducta recta linea EL a puncto E ad basis planum perpendiculari, quae plano per GH ducto in M occurrat. Quoniam enim duę rectę lineę EF EL secantur à planis parallellis, in easdem proportiones secabuntur. 17. undecimi *quare vt EK ad KF, ita erit EM ad ML; ac propterea ut BG cylindrus ad cylindrum GD, ita cylindri BG altitudo FM ad ML altitudinem cylindri GD, quod propositum fuerat demonstrandum.*

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XIIII.

In æqualibus basibus existentes coni, & cylindri inter se sunt vt altitudines.



Sint enim in æqualibus basibus AB CD cylindri EB FD. Dico vt EB cylindrus ad cylindrum FD, ita esse GH axem ad axem KL. * producatur enim KL axis ad punctum N; ponaturq; ipsi GH axi ęqualis LN; & circa axem LN intelligatur cylindrus CM. Quoniam igitur cylindri EB CM eandem habent altitudinem, inter se sunt vt bases: bases autem sunt æquales. ergo & cylindri EB CM inter se æquales erunt. 11. huius. Et quoniam cylindrus FM plano secatur CD, oppositis planis parallelo, erit ut CM cylindrus ad cylindrum FD, ita axis LN ad KL axem. Ex antecedente. æqualis autem est cylindrus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. est igitur vt EB cylindrus ad cylindrũ FD, ita axis GH ad KL axem: vt autem EB cylindrus ad cylindrum FD, ita ABG conus ad conũ CDK; 15. quinti. 10. huius. cylindri enim sunt conorum tripli. ergo & vt GH axis ad axem KL, ita est ABG conus ad conum CDK, & cylindrus EB ad FD cylindrum. In basibus igitur æqualibus existentes coni & cylindri inter se sunt, ut altitudines. quod oportebat demonstrare.

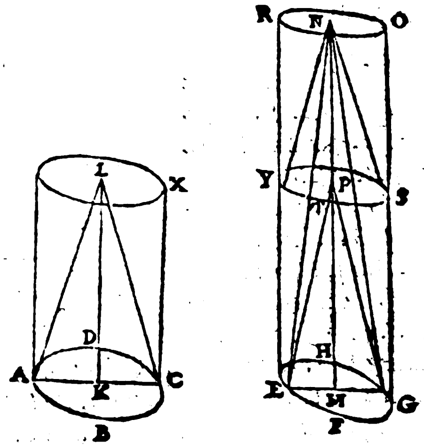
F. C. COMMENTARIVS.

* Dico vt EB cylindrus ad cylindrum FD, ita esse GH axem ad axem KL.] *Hoc est ita esse altitudinem GH ad KL altitudinem. in rectis enim conis, de quibus Euclides loquitur, altitudo ipsa axis est, siue ab axe determinatur; in scalenis uero non item. sed tamen nihilominus demonstrabitur conos & cylindros in aequalibus basibus constitutos inter se esse vt axes, & ob id, vt eorum altitudines ex ijs, quae nos proxime diximus.*

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Aequalium conorum, & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus

altitudinibus respondent, & quorum conorum & cylindrorũ bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illi inter se sunt æquales.



Sint æquales coni & cylindri, quorum bases quidem ABCD EFGH circuli, & diametri ipsorum AC EG; axes autem KL MN; qui quidem & conorum vel cylindrorum sunt altitudines. & compleantur cylindri AX EO. Dico cylindrorum AX EO bases ex contraria parte altitudinibus respondere, hoc est vt ABCD basis ad basim EFGH, ita esse altitudinẽ MN ad altitudinem KL. altitudo enim KL vel æqualis est altitudini MN, vel non ęqualis. Sit primum ęqualis: atque est AX cylindrus æqualis cylindro EO. qui autem eandem habent altitudinem coni, & cylindri inter se sunt vt bases. ęqualis igitur est basis ABCD basi EFGH, ac proptcrea ex contraria parte sibi ipsis respondent. estq; vt basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. Non sit autem altitudo KL altitudini MN æqualis, sed maior sit MN, & auferatur ab ipsa MN altitudini LK æqualis PM, & per P secetur EO cylindrus plano TYS oppositis planis circulorum EFGH RO parallelo, intelligaturq; cylindrus ES, cuius basis quidem, EFGH circulus, altitudo autem PM. Quoniam igitur AX cylindrus ęqualis est cylindro EO, alius autem aliquis est cylindrus ES; erit vt AX cylindrus ad cylindrũ ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrũ. Sed ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita basis ABCD ad EFGH basim; cylindri enim AX ES eandem habent altitudinem. vt autem cylindrus EO ad ES cylindrũ, ita MN altitudo ad altitudinẽ MP. nam cylindrus EO secatur plano TYS oppositis planis parallelo. est igitur vt ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. æqualis autẽ est MP altitudo altitudini KL. quare vt basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. ęqualium igitur cylindrorum AX EO bases ex contraria parte altitudinibus respondent.

11. huius. 1. huius. 13. huius.

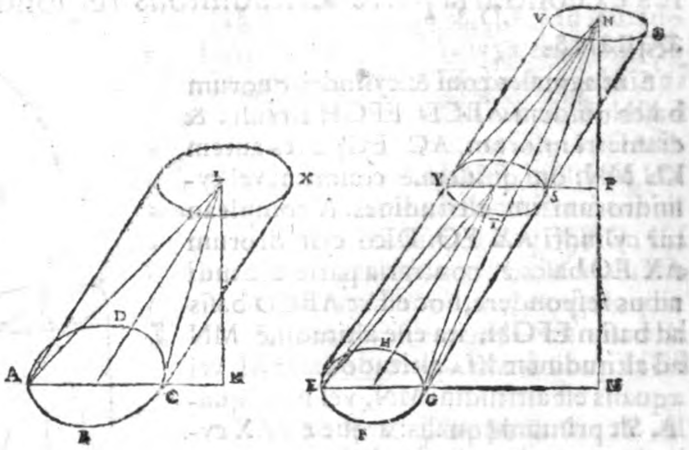
Sed cylindrorũ AX EO bases ex contraria parte respondeant altitudinibus: sitq; ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinẽ. Dico AX cylindrũ cylindro EO ęqualẽ esse. iisdẽ enim cõstructis quoniã vt ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; altitudo autem KL ęqualis est altitudini MP: erit vt ABCD basis ad basim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem MP. Sed vt ABCD basis ad basim EFGH, ita AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem. ut autem MN altitudo ad altitudinem MP, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. est igitur vt AX cylindrus ad cylindrũ ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO est æqualis. similiter autem & in conis. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc in conis, & cylindris rectis tantum Euclides demonstrauit. Sed & in omnibus demonstrabitur hoc modo.

Sint aequales coni, & cylindri siue recti siue scaleni, quorum bases circuli ABCD EFGH: altitudines autem LK NM; & compleantur AX EO cylindri. Dico cylindrorum AX EO bases ex contraria parte altitudinibus respondere; hoc est vt ABCD basis ad basim EFGH, ita esse altitudinem NM ad LK altitudinem. Nam vel altitudines LK NM sunt aequales vel inaequales; si aequales, cum aequales sint cylindri, erunt & bases aequales inter se: cylindri enim & coni qui

eandem



eandem habēt altitudinē, inter se sunt vt bases. quare bases ex contraria parte altitudinibus respōdēt. Si vero altitudines nō sint aequales, Sit maior NM altitudo; à qua auferatur PM aequalis altitudini LK, & per P ducatur planum cylindrum secans, oppositis planis parallelum TYS, intelligaturq́ cylindrus ES, cuius basis circulus EFGH; & altitudo PM. Itaque quoniam cylindrus AX est aequalis cylndro EO, & alius cylindrus est ES; erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. Sed vt AX cylindrus ad cylindrum ES, ita basis ABCD ad EFGH basim, cum eandem habeant altitudinem. Vt autem cylindrus EO ad ES cylindrum, ita NM altitudo ad altitudinem MP; cylindrus enim EO secatur plano TYS oppositis planis parallelo. quare vt cylindrus RS ad cylindrum SE, ita est NP altitudo ad altitudinem PM: & componendo vt cylindrus EO ad ES cylindrum, ita NM altitudo ad altitudinem MP. Vt igitur basis ABCD ad EFGH basim, ita NM altitudo ad altitudinem MP. aequalis autem est altitudo MP altitudini LK. ergo ut ABCD basis ad basim EFGH, ita est altitudo NM ad LK altitudinem.

11.huius. 13.huius.

Sed cylindrorum AX EO bases ex contraria parte altitudinibus respondeant, sitq́, vt ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo NM ad LK altitudinem. Dico cylindrum AX cylindro EO aequalem esse. ijsdem enim constructis quoniam vt ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo NM ad LK altitudinem, altitudo autem LK est aequalis ipsi PM altitudini; erit vt ABCD basis ad basim EFCH, ita NM altitudo ad altitudinem MP. Sed vt ABCD basis ad basim EFGH, ita cylindrus AX ad ES cylindrum, quòd eandem altitudinem habeat: & ut NM altitudo ad altitudinem MP, ita EO cylindrus ad cylindrum ES. Vt igitur cylindrus AX ad ES cylindrum, ita cylindrus EO ad cylindrum ES. quare AX cylindrus cylindro EO est aequalis. similiter autem & in conis. Aequalium igitur conorum, & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, & quorum conorum, & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illi inter se sunt aequales. quod demonstrare oportebat.

11.huius.

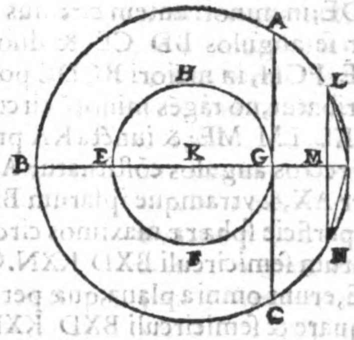
Sed & illud uerum est, quod nos demonstrauimus in commentarijs in librum Archimedis de conoidibus, & sphęroidibus ad propositionem XI.

Cylindri omnes, et coni inter se proportionem habent compositam ex proportione basium & ex proportione altitudinum.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. XVI.

Duobus circulis circa idem centrum existētibus in maiori polygonum æqualium, & numero parium laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli ABCD EFGH circa idem centrum K. oportet in maiori circulo ABCD polygonum æqualium, & numero parium laterum describere, non tangens minorem circulum EFGH. Ducatur enim per K centrum recta linea BD: atque à puncto G ipsi BD ad rectos angulos ducatur AG: & ad C producatur. ergo AC circulum EFGH tangit. Itaque circumferentiam BAD bifariam secantes, & eius dimidium rursus bifariam, & hoc semper facientes tandem relinquemus circumferentiam



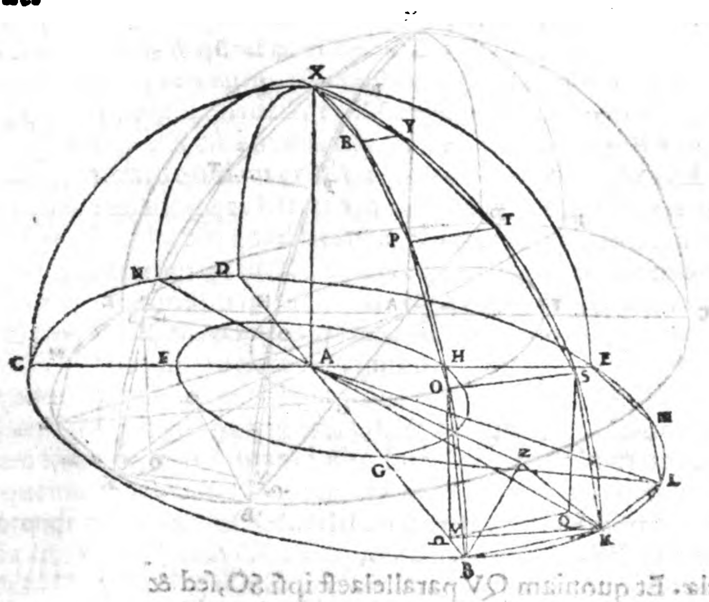
circumferentiam minorem ipsa AB. Relinquatur, sitq; LD,& à puncto L ad BD perpendicularis agatur LM, & ad N producatur, iunganturq; LD DN LN. ergo LD ipsi DN est æqualis. Et quoniam LN parallela est AC, & AC tangit circulum EFGH; ipsa LN circulum EFGH non tanget, & multo minus tangent circulum EFGH rectæ lineæ LD DN. Quòd si ipsi LD ęquales deinceps circulo ABCD aptabimus, describetur in eo polygonũ æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circulum EFGH. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ergo LD ipsi DN est æqualis] *Recta enim linea BD per centrum ducta rectam lineam quandam LN, non ductam per centrum ad rectos angulos secat, quare & bifariam ipsam secabit. atque erit LM aequalis MN. cum igitur duae LM MD duabus NM MD aequales sint & angulos aequales contineant, nempe rectos: erit basis LD basi LN aequalis.* 3. tertii 4. primi

PROBLEMA II. PRPOSITIO XVII.

Duabus sphæris circa idem centrum existentibus in maiori solidum polyhedrum describere, quod minoris sphæræ superficiem non tangat.



Intelligantur duæ sphæræ circa idem centrum A. oportet in maiori sphæra describere solidum polyhedrum minoris sphærę superficiem non tangens. secentur sphæræ plano aliquo per centrum ducto. erunt sectiones circuli, quoniam diametro manēte,& semicirculo circumducto. sphæra facta est. ergo in quacumque positione semicirculum intelligamus, quod per ipsum producitur planũ in superficie sphęre circulum efficiet,& constat circulum maximum esse, cum diame-

16. tertii

ter sphæræ, quæ & semicirculi, & circuli diameter est, maior sit omnibus rectis lineis, quæ in circulo vel sphæra ducũtur. sit igitur in maiori quidem sphęra circulus BCDE; in minori autem circulus FGH: & ducantur ipsorum duæ dimetri ad rectos inter se angulos BD CE: & duobus circulis circa idem centrum existentibus B CDE FGH, in maiori BCDE polygonum æqualium & parium numero laterum

Ex antecedente. describatur, nõ tãgẽs minorẽ circulũ FGH; cuius latera sint in BE circuli quadrãte BK KL LM ME: & iuncta KA producatur ad N: & à puncto A plano circuli BCD E ad rectos angulos cõstituatur AX; quæ superficiei sphærę in puncto X occurrat: & per AX, & vtramque ipsarum BD KN plana ducantur, quæ ex iam dictis efficiẽt in superficie sphæræ maximos circulos. Itaque efficiant, & sint in diametris BD K N eorum semicirculi BXD KXN. Quoniam igitur XA recta est ad planum circuli B

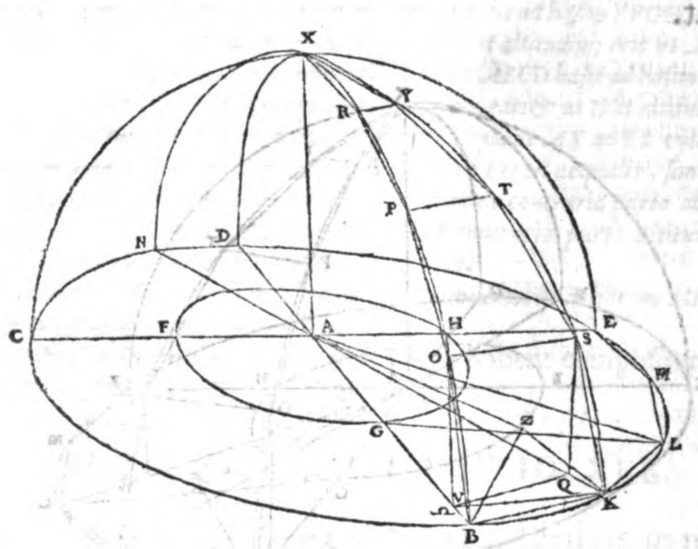
18. undecimi CDE, erunt omnia plana, quæ per ipsam XA transeunt ad planum circuli BCDE recta. quare & semicirculi BXD KXN recti sunt ad idem planum. Et quoniam semicirculi; BED BXD KXN æquales sunt, in ęqualibus enim cõsistũt BD KN diametris; erũt & eorũ quadrantes BE BX KX inter se æquales. quot igitur latera polygoni sunt in quadrante BE, tot erunt & in quadrantibus BX KX æqualia ipsis BK KL LM ME. Describantur & sint BO OP PR RX KS ST TY YX: iunganturq; SO

38. undecimi. TP YR, & ab ipsis OS ad planum circuli BCDE perpendiculares ducantur. cadẽt hæ in communes planorum sectiones BD KN, quoniam & plana semicirculorum BXD KXN ad planum circuli BCDE recta sunt. Itaque cadant, sintque OVSQ: & V Q iungatur. Cum igitur in æqualibus semicirculis BXD KXN æquales circumferẽ

B tiæ sumptę sint BO KS, & ductę perpendiculares OV SQ: erit OV quidem ipsi SQ æqualis, BV vero ęqualis KQ. est autem & tota BA æqualis toti KA. ergo & reliqua

2. sexti. VA reliquæ QA est ęqualis. Vt igitur BV ad VA, ita KQ ad QA, ideoq; VQ ipsi BK parallela est. Quòd cum vtraque ipsarum OV SQ recta sit ad circuli BCDE planũ,

6. undecimi. 33. primi. erit OV ipsi SQ parallela. ostensa autem est & ipsi ęqualis. ergo QV SO æquales



sunt & parallelæ. Et quoniam QV parallela est ipsi SO, sed & parallela ipsi KB; erit & SO ipsi KB parallela: & ipsas coniun

9. undecimi. C gunt BO KS. ergo & KBOS quadrilaterũ est in uno plano: nã si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, & in vtraque ipsarum quæuis pũcta sumantur, quæ dicta puncta coniungit recta linea in eodem est plano, in quo parallelę. Et eadem ratione vtraque ipsorum quadrilaterorum SOPT TPRY in vno sunt plano. est autem in vno plano & triangulum YRX. Si igitur à pũ

2. undecimi. ctis OSPTRY ad A ductas rectas lineas intelligamus, constituetur quædam figura solida

solida polyhedra inter circumferentias BX KX, ex pyramidibus composita, quarũ bases quidem KBOS SOPT TPRY quadrilatera, & triangulum YRX; vertex autẽ punctum A. quòd si in vno quoque laterum KL LM ME, quemadmodum in KB eadem construamus,& in reliquis tribus quadrãtibus,& in reliquo hemisphęrio constituetur figura quædam polyhedra in sphęra descripta, & composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera iam dicta,& YRX triãgulum;& quæ eiusdem ordinis sunt; vertex autem A punctum. Dico dictam figuram polyhedram non tãgere superficiem minoris sphæræ, in qua est circulus FGH. Ducatur à puncto A ad planum quadrilateri KBSO perpendicularis AZ, cui in puncto Z occurrat,& BZ ZK iungantur. Itaque quoniam AZ recta est ad quadrilateri KBSO planum, et ad omnes rectas lineas, quę ipsam contingunt, & in eodem sunt plano rectos angulos faciet. ergo AZ ad utramque ipsarum BZ ZK est perpendicularis. et quoniam AB est æqualis AK, erit et quadratum ex AB quadrato ex AK ęquale, et sunt quadrato quidem ex AB æqualia quadrata ex AZ ZB; etenim angulus ad Z rectus est: quadrato autem ex AK ęqualia ex AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis ex AZ ZK æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex AZ. reliquum igitur quod ex BZ reliquo quod ex ZK est ęquale; ideoq; recta linea BZ rectę ZK æqualis. Similiter ostendemus,& quæ à puncto Z ad OS ducuntur vtrique ipsarum BZ ZK ęquales esse. circulus igitur centro Z & interuallo vna ipsarum ZB ZK descriptus, etiam per puncta OS trãsibit, atque erit in circulo KBOS quadrilaterum. Et quoniã KB maior est, quàm QV, æqualis autem QV ipsi SO; erit & KB, quàm SO maior. Sed KB est æqualis vtrique ipsarũ KS BO. ergo vtraque KS BO, quàm SO est maior. cum igitur in circulo quadrilaterum sit KBOS,& ęquales sint KB BO KS,& minor OS; sitq; ex centro circuli BZ: erit quadratum ex KB maius, quàm duplum quadrati ex BZ. Ducatur à puncto K ad BV perpendicularis KΩ. Et quoniam BD minor est, quã dupla ipsius DΩ; atq; est vt BD ad DΩ, ita rectãgulũ cõtẽtũ DB BΩ ad rectangulum, quod DΩ ΩB cõtinetur, nempe descripto ex BΩ quadrato,& completo parallelogrãmo in ipso ΩD, quare & rectãgulũ cõtẽtũ DB BΩ minus est, quã duplum eius, quod DΩ ΩB continetur: & iuncta KD, quod DB BΩ continetur est æquale quadrato ex KB; & quod continetur DΩ ΩB æquale quadrato ex KΩ. quadratum igitur ex KB minus est, quàm duplum quadrati ex KΩ. sed quadratum ex KB maius est, quàm duplum quadrati ex BZ. ergo quadratum ex KΩ quadrato ex BZ est maius. Et quoniam BA est æqualis AK, erit quadratum ex BA quadrato ex AK æquale.& sunt quadrato quidem ex BA æqualia quadrata ex BZ ZA; quadrato autem ex AK æqualia quadrata ex KΩ ΩA, quadrata igitur ex BZ ZA quadratis ex KΩ ΩA sunt æqualia; quorum quadratum ex KΩ maius est quadrato ex BZ. ergo reliquum ex ΩA quadratum quadrato ex ZA est minus; ac propterea recta linea AZ maior, quàm recta AΩ. multo igitur maior est AZ, quàm AG: atque est AZ quidem ad vnam polyhedri basim, AG vero ad superficiem minoris sphęræ. quare polyhedrum minoris sphæræ superficiem non tangit.

3 diff. undecimi.

47. primi.

D

E

F

G

H

K

Ostendendum autem aliter & expeditius, maiorem esse AZ, quàm AG. Ducatur à puncto G ipsi AG ad rectos angulos GL, & AL iungatur. Itaque circumferentiã EB bifariam secantes,& dimidiam ipsius bifariam, atque hoc semper facientes tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem circumferentia circuli BCD, quæ subtenditur æquali ipsi GL. relinquatur, sitq; circumferentia KB. minor igitur est recta linea KB, quàm GL. Et quoniã in circulo est BKSO quadrilaterum,& sunt æquales OB BK KS,& minor OS; erit angulus BZK obtusus: ideoq; BK maior, quàm BZ. sed GL quàm BK est maior. multo igitur maior est GL, quàm BZ,& quadratum ex GL quadrato ex BZ maius.& cum æqualis sit AL ipsi AB, erit & quadratum ex AL quadrato ex AB æquale. sed quadrato quidem ex AL æqualia sunt quadrata ex AG GL; quadrato autem ex AB æqualia quadrata ex BZ ZA. quadrata igitur ex AG GL quadratis ex BZ ZA æqualia sunt; quorum quadratum ex BZ minus est quadrato ex GL. ergo reliquum ex ZA quadratum maius est quadrato ex AG:& ob id recta linea ZA, quã recta AG est maior. Duabus igitur sphæris circa idẽ

A

B

centrum existentibus, in maiori solidum polyhedrum. descriptum est, minoris sphæræ superficiem non tangens. quod facere oportebat.

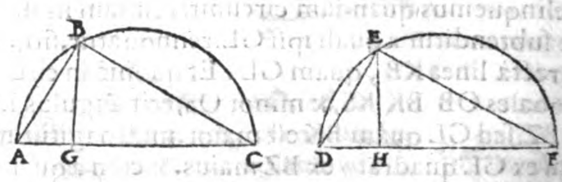
COROLLARIVM.

Quod si etiam in altera sphæra, solido polyhedro descripto in sphæra ABCDE simile solidũ polyhedrum describatur, habebit solidũ polyhedrum in sphæra BCDE ad solidum polyhedrum in altera sphæra triplam proportionem eius, quam diameter sphæræ BCDE habet ad alterius sphęrę diametrũ. diuisis enim solidis in pyramides numero ęquales, & eiusdem ordinis; erunt pyramides similes. similes autem pyramides inter se in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis, cuius basis est KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A ad pyramidem in altera sphæra eiusdem ordinis triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est, quam habet AB ex centro sphęrę circa centrum A existentis ad eam, quę est ex centro alterius sphęræ. Similiter & vnaquæque pyramis earum, quæ sunt in sphæra circa centrum A ad vnamquamque pyramidem eiusdem ordinis, quę sunt in altera sphæra, triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad eam, quę est ex cẽtro alterius sphærę. Et vt vnũ antecedentium ad vnũ consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. quare totum solidum polyhedrum, quod est in sphæra circa centrum A ad totum solidum polyhedrum, quod in altera sphæra triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad eam, quæ est ex centro alterius sphęrę, hoc est quam habet BD diameter ad alterius sphærę diametrum.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erunt sectiones circuli.] *Hoc vniuerse à Theodosio demonstratur in prima propositione sphericorum, nempe quomodocumque plano sphęra secetur, semper sectiones fieri circulos.*

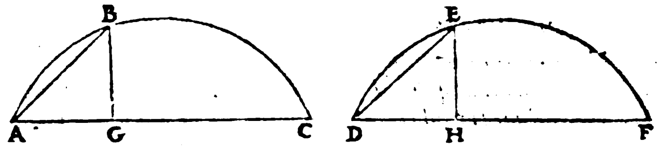
B Erit OV quidem ipsi SQ æqualis. BV vero ęqualis KQ]. *Sint enim duo semicirculi aequales ABC DEF, sumanturq; aequales circumferentiae AB DE: & à punctis B E perpendiculares ducantur BG EH. Dico BG ipsi EH, & AG ipsi DH aequalem esse. Quoniam enim circumferentia AB est aequalis circumferentiae DE, quae sunt aequalium circulorum, erunt rectae lineae AB DE inter se aequales. & eadem ratione aequales BC EF. ergo & vt AB ad BC, ita DE ad EF: atque est angulus ABC in semicirculo rectus aequalis recto DEF. cum igitur circa aequales angulos latera sint proportionalia*



29. xiij.

lia, erit triangulum ABC simile triangulo DEF. sed triangulum ABG est simile triangulo ABC, 6.sexti.
ergo & ipsi DEF. triangulum autem DEH est simile triangulo DEF. triangulum igitur ABG triã 8.sexti.
gulo DEH est simile. ergo vt AB ad BG, ita DE ad EH, & permutando vt AB ad DE, ita BG ad 9.sexti.
EH. aequalis autem est AB ipsi DE. ergo & BG ipsi EH est aequalis. & eodem modo demonstra 14.quinti.
bitur AG aequalis ipsi DH, quod demonstrare oportebat. sed & illud vniuerse in omnibus portio
nibus demonstratur sequenti lemmate.

Sint ęquales portiones ęqualiũ circulorũ ABC DEF; sumanturq́; circumferẽtię ęquales AB DE: & à pũctis BE ad AC DF perpendiculares ducantur BG EH. Dico BG quidem ipsi EH ęqualem esse; AG vero ipsi DH.



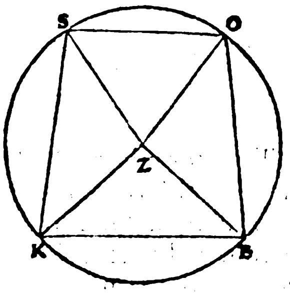
Iungantur AB DE. & quoniam aequales sunt circumferentiae AB DE, erunt & reliquae B 27.tertij.
C EF inter se aequales. ergo & aequales anguli, qui in ipsis consistunt. quare angulus BAC est
aequalis angulo EDF. sed & recti sunt anguli, qui ad G H. duo igitur triãgula sunt ABG DEH,
quae duos angulos duobus angulis aequales habent, alterum alteri, & vnum latus BA vni lateri
DE aequale, quod vni aequalium angulorum subtenditur. ergo omnia omnibus sunt aequalia. ae- 26.primi.
qualis igitur est AG ipsi DH, & BG ipsi EH. quod demonstrare oportebat.

Nam si duę rectę lineę parallelę sint, & in vtraque ipsarum quęuis puncta sumã C
tur, quę dicta puncta coniungit in eodem est plano in quo parallelę] Ex VII.
vndecimi.

Et quoniam KB maior est, quam QV] Est enim triangulum AQV triangulo AKB simi- D
le, cum angulus ad A sit vtrique communis, angulusq́; AQV angulo AKB; & angulus AVQ an 29.primi.
gulo ABK aequalis. vt igitur AK ad KB, ita AQ ad QV, & permutando vt AK ad AQ, ita K 4.sexti.
B ad QV. est autem AK maior, quàm AQ. ergo & KB, quàm QV maior erit.

Erit quadratum ex KB maius, quàm duplum quadrati ex BZ.] Nam cum rectae li- E
neae KB BO KS aequales sint, & minor ipsis OS; erunt circumferentiae, quas auferunt KB BO
KS inter se aequales, & reliqua circumferentia OS maior. quare & anguli KZS KZB BZO ę-
quales, & maiores angulo OZS. sunt autem quattuor anguli quattuor rectis aequales. ergo OZS
est minor recto, videlicet acutus; & vnusquisque reliquorum trium obtusus; ac propterea quadra
tum quod fit ex KB maius est duobus quadratis, quae ex KZ ZB, hoc est maius, quàm duplũ qua-
drati, quod ex BZ. sunt enim KZ ZB inter se aequales, vt demonstratum est. sed & hoc sequenti
lemmate planius demonstratur.

Sit in circulo quadrilaterum KBOS, cuius tria latera SK KB BO, inter se sint ęqualia: sitq́; BO maior, quàm OS; & sumpto circuli centro Z, iungatur BZ. Dico quadratum ex KB quadrati ex BZ maius esse, quàm duplum.

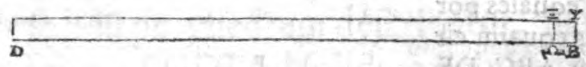


Iungantur enim OZ SZ KZ. Quoniam igitur BZ est aequalis ZS, & communis ZO; erunt duae BZ ZO duabus SZ ZO aequales, altera alteri, & basis BO basi OS maior. angulus igitur BZO angulo OZS est maior. & quoniam angulus OZB vnicuique ipsorum BZK KZS est ęqualis; in aequalibus namque circumferentijs consistunt OB BK KS; quòd rectae lineę ęquales sint: erit & vterque angulorum BZK KZS maior angulo OZS. sed quat- Coroll.15.primi.
tuor anguli OZS SZK KZB BZO quattuor rectis sunt aequales; etenim circa vnum punctum
Z consistunt. vnusquisque igitur angulorum OZB BZK KZS est obtusus. ideoq́; obtusiangulum est
triangulum BZO. At in obtusiangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit,
quadratum maius est quadratis, quae à lateribus obtusum angulum continentibus fiunt. ergo quad
ratum, quod ex BK maius est quadratis, quae ex KZ ZB. sed quadrata ex KZ ZB dupla sunt qua-
drati

drati ex BZ; aequalis enim est KZ ipsi ZB. quadratū igitur ex KB, maius est, quàm duplum quadrati ex BZ. quod oportebat demonstrare.

F Et quoniam BD minor est quàm dupla ipsius DΩ] *Perpendicularis enim à puncto K ducta ad BD, cadit inter G & B, quod circulum FGH non tangit, vt ex antecedente constat: & cum BD dupla sit ipsius DA, erit ipsius DΩ minor, quàm dupla.*

G Atque est vt BD ad DΩ, ita rectangulum contentum DB BΩ ad rectāgulum quod DΩ ΩB continetur.] *Describatur ex ΩB quadratum quod sit ΩBϒΞ, & compleatur DΞ parallelogrammum. erit ut BD ad DΩ, ita rectangulum Dϒ ad rectangulum DΞ. ex prima sexti, hoc est ita rectangulum, quod continetur DB BΩ ad rectangulum contentum DΩ ΩB.*



H Et iuncta KD, quod DB BΩ continetur est ęquale quadrato KB.] *Est enim angulus in semicirculo DKB rectus, & ab eo ad basim perpendicularis ducitur KΩ. quare ex corollario octauę sexti libri KB est proportionalis media inter DB BΩ: & KΩ media inter DΩ ΩB: & ob id quadratum quidem ex KB ęquale est rectangulo contento DB BΩ; quadratum uero ex KΩ ęquale ei, quod DΩ ΩB continetur.*

K Multo igitur maior est AZ quàm AG] *Quoniam enim polygonum BKLME in maiori circulo BCDE descriptum est, non tangens minorem circulum FGH, perpendicularis à puncto K ducta ad BD, videlicet KΩ circumferentiam eius non tanget ex ijs, quae in antecedente demonstrata sunt. quare AΩ maior erit, quàm AG; & idcirco AZ longe maior, quàm quae à centro minoris sphęrae ad eius superficiem pertinet.*

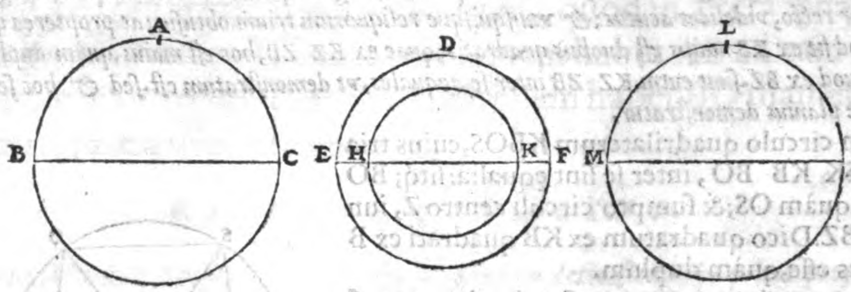
L Et quoniam in circulo est BKSO quadrilaterum] *Intelligatur enim descriptum quadrilaterum BKSO, vt in antecedentibus.*

M Et sunt æquales OB BK KS, & minor OS] *Hęc proxime demonstrata sunt.*

N Et cum æqualis sit AL ipsi AB.] *Sunt enim à centro ad circumferentiam maioris circuli BCDE.*

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Sphæræ inter se in tripla sunt proportione suarum diametrorū.



Intelligantur sphæræ ABC DEF; quarum diametri BC EF. Dico ABC sphærā ad sphęram DEF triplam proportionem habere eius, quā habet BC ad EF. Si enim non ita est, sphęra ABC ad sphæram minorem ipsa DEF, vel ad maiorem triplam proportionem habebit eius, quam habet BG ad EF. Habeat primo ad minorem, videlicet ad GHK. & intelligatur sphæra DEF circa idem centrū, circa quod est sphæra GHK; describaturq; in maiori sphæra DEF solidum polyhedrum non tangēs minorem sphæram GHK in superficie; & in sphæra ABC describatur solidum polyhedrum simile ei, quod in sphęra DEF descriptum est. solidum igitur polyhedrum, quod in sphęra ABC ad solidum polyhedrum, quod in sphęra DEF triplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. habet autem ABC sphæra ad sphæram GHK triplam proportionem eius, quam BC ad EF. ergo vt ABC sphęra ad sphęram GHK.

Ex antecedente.

Ex corol antecedente.

HK, ita solidum polyhedrum in sphera ABC ad solidum polyhedrum in sphæra DEF; & permutando, vt ABC sphera ad solidum polyhedrum, quod in ipsa est, ita GHK sphæra ad solidum polyhedrum, quod in sphæra DEF. maior autem est sphæra ABC solido polyhedro, quod est in ipsa. ergo & GHK sphæræ polyhedro, quod in sphęra DEF est maior. sed & minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. non igitur ABC sphæra ad sphæram minorem ipsa DEF triplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. similiter ostendemus neque DEF sphærā ad sphæram minorem ipsa ABC triplam habere proportionem eius, quam habet EF ad BC. Dico insuper sphæram ABC neque ad maiorem sphæram ipsa DEF triplam proportionem habere eius, quā BC ad EF. Si enim fieri potest, habeat ad maiorem LMN. conuertendo igitur sphęra LMN ad ABC sphæram triplam proportionē habet eius, quam diameter EF ad BC diametrum. Vt autem sphæra LMN ad ABC spheram, ita sphæra DEF ad sphæram quandam minorem ipsa ABC, vt ante demonstratum fuit; quoniam sphæra LMN maior est ipsa DEF. ergo & DEF sphæra ad spheram minorem ipsa ABC triplam proportionem habet eius, quam EF ad BC, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ABC sphæra ad spheram maiorē ipsa DEF triplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. ostensum autem est neque ad minorem. ergo ABC sphæra ad spheram DEF triplam proportionem habebit eius, quam BC ad EF. quod demonstrare oportebat.

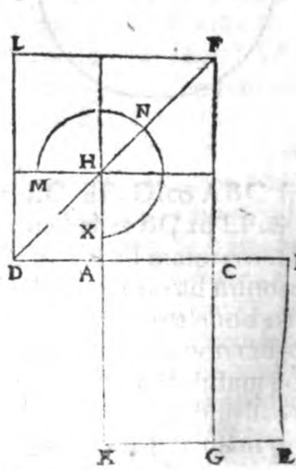
DVODECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER TERTIVSDECIMVS ET SOLIDORVM TERTIVS.
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.
Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, maior portio assumens dimidiã totius, quintuplum potest eius, quod à dimidia fit, quadrati.

A Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in puncto C; & sit AC maior portio: producaturq; in directum ipsi CA recta linea AD; & ponatur AD ipsius AB dimidia. Dico quadratum ex CD
B quadrati ex DA quintuplum esse. describantur ex AB DC quadrata AE DF, & in DF describatur figura, & FC ad G producatur. Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C, erit quod AB BC continetur æquale quadrato ex AC. atque est rectãgulum quidem CE quod continetur AB BC: quadratum vero ex AC est FH. ergo rectangulum CE quadrato FH est æquale. & quoniam BA dupla est ipsius AD; ęqualis autem BA ipsi AK; & DA ipsi AH: erit & KA ipsius AH dupla. ut autem KA
Bard. ad AH, ita est rectangulum KC ad ipsum CH. duplum igitur est KC rectangulum rectanguli CH:
C & sunt rectangula LH HC ipsius CH dupla. ergo rectangulum KC rectãgulis LH HC est ęquale. ostensum autem autem est & rectangulum CE æquale quadrato FH. totum igitur AE quadratũ est æquale gnomoni MNX. Rursus quoniam BA
D dupla est ipsius AD, erit quadratum ex BA quadrati ex ad quadruplum, hoc est quadratum AE quadrati DH. ęquale autem est quadratum AE gnomoni MNX. ergo & MNX gnomon quadruplus est quadrati DH. & ob id totum DF ipsius DH est quintuplum. atque est DF quidem quadratum ex CD, DH vero quadratum ex DA. quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplũ erit. ergo si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, maior portio assumens totius dimidiam quintuplum potest eius, quòd à dimidia fit quadrati. quod demonstrare oportebat.



SCHOLIVM.

SCHOLIUM.

Resolutio est sumptio quæsiti tãquam concessi per ea, quæ consequuntur in aliquod uerum concessum.

Compositio est sumptio concessi per ea, quę consequuntur in quæsiti conclusionem, seu deprehensionem.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea quædam A B extrema, ac media ratione secetur in C, sitq́ue maior portio A C, & ponatur A D ipsius A B dimidiæ ęqualis. Dico quadratum ex CD quadrati ex D A quintuplũ esse. Quoniam enim quintuplum est quadratum ex CD quadrati ex DA; quadrato autem ex CD æqualia sunt quadrata ex C A AD vnà cum eo, quod bis C A AD continetur: erunt quadrata ex C A AD vnà cum eo, quod bis CA AD continetur, quadrati ex AD quintupla. ergo diuidendo quadratum ex CA vnà cum eo, quod bis continetur CA AD quadruplum est quadrati ex AD. Sed ei quidem, quod bis C A AD continetur æquale est rectangulum BAC. est enim BA ipsius AD dupla. quadrato autem ex A C est ęquale rectangulum ABC; namque A B extrema, ac media ratione secta est in C. rectangulum igitur BAC vnà cum rectangulo ABC quadruplum est quadrati ex AD. sed rectangulum B A C vnà cum rectangulo ABC est id, quod fit ex AB quadratum. ergo quadratum ex BA quadruplum est quadrati ex AD. quod quidem ita se habet. est enim BA ipsius AD dupla.

4. secundi.

2. secundi. Cor. 20. sexti

Compositio.

Quoniam igitur quadruplum est quadratum ex BA quadrati ex AD; quadratũ autem ex AB est rectangulum BAC: vnà cum rectangulo ABC: erit rectangulum B AC vnà cum rectangulo ABC quadrati ex AD quadruplum. sed rectangulum quidem BAC est æquale ei, quod bis DA AC continentur; rectangulum autem ABC est æquale quadrato ex AC. ergo quadratum ex AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC quadruplum est quadrati ex DA; & ob id quadrata ex DA AC vnà cũ eo, quod bis DA AC continetur quintuplum est quadrati ex DA. sed quadrata ex DA AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC est id, quod fit ex DC quadratum. quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in pũcto C] *Quomodo hoc fiat, docuit in vndecima propositione secundi libri, & in 30 sexti.* A

Describantur ex AB DC quadrata AE DF, & in DF describatur figura] *Sit ex AB quadratum AKEB, & ex DC quadratum DLFC; & iuncta DF, ducatur per A recta linea AH parallela alterutri ipsarum DL CF, quae diametrum DF in puncto H secet. rursus per H ducatur recta linea alterutri ipsarum LF DC parallela.* B

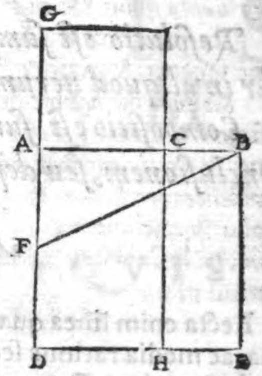
Et sunt rectangula LH HC ipsius HC dupla] *Supplementa enim LH HC inter se sunt aequalia ex 43 primi libri.* C

Erit quadratum ex BA quadrati ex AD quadruplum] *Ex 20 sexti.* D

Quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit] *Possumus etiam aliter, & fortasse expeditius idem demonstrare in hunc modum.* E

Sit recta linea AC, quae extrema, ac media ratione secetur in C, & ex AB fiat quadratũ ADEB; sectaq; AD bifariã in F, & iuncta FB, producatur FA in G, ita vt FG ipsi FB sit aequalis, erit AG aequalis AC ex demõstratis ĩ vndecima secũdi libri. quare FG cõstat ex maiori portione, et ex dimidia totius AB. Dico quadratũ ex FG quintuplũ esse quadrati ex FA. Quoniam enim AB dupla est ipsius AF, erit quadratũ ex AB quadrati ex AF quadruplũ. sed quadratum ex FB est aequale quadratis ipsarum FA AB, ex 47 primi. quadratũ igitur ex FB, hoc est quadratum ex FG quadrati ex FA quintuplũ erit. quod oportebat demonstrare. sed & alia nonnulla demonstranda sunt, quae ad hanc sectioaem attinent.

20. sexti.



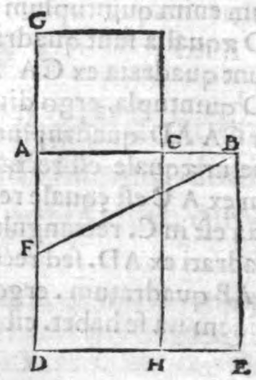
PROPOSITIO I.

Data recta linea extrema, ac media ratione secta, & vtraque ipsius portio data erit.

Sit data recta linea AB 10, quae extrema, ac media ratione secetur in C. Dico ipsas AC CB datas esse. Construantur enim eadem, quę supra. & quoniam AB est 10, erit eius dimidia AF 5, cuius quadratũ est 25: quadratũ aũt ipsius AB est 100. ergo quadratũ ex FB est 125, & ipsa FB, hoc est FG ℞ 125. sed FA est 5. erit igitur AG, hoc est AC ℞ 125 minus. Quòd cũ 5. sit vt BA ad AC, ita AC ad CB, rectangulum contentum AB BC, videlicet rectangulum CE aequale erit quadrato ex AC. quadratum autem ex AC, hoc est quadratum ℞ 125 minus 5 est 150 minus ℞ 12500. si igitur ad CH applicetur 150 minus ℞ 12500 latitudinem faciẽs CB, erit CB 15 minus ℞ 125. ergo AC CB datae sunt, vt oportebat.

4. secundi.

17. sexti.



Ex quibus manifestum est si recta linea rationalis, expositæ rationali longitudine commẽsurabilis extrema ac media ratione secta fuerit, maiorem eius portionẽ apotomen esse quintam, & minorem esse apotomen primam.

Est enim quadratum ex AB quadrati ex AF quadruplum. ergo quadratum ex FB ad quadratum ex BA proportionem habet, quam 5 ad 4. & quoniam quadratum ex FB ad quadratum ex BA proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; erit FB ipsi BA longitudine incommensurabilis; ac propterea FB plus potest, quàm FA quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine. est autem AF, quae ipsi AG congruit, expositae rationali longitudine commensurabilis. quare AC est apotome quinta. At vero CB esse apotomen primam, manifesto constat; quadratum enim apotomes ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam ex 98 decimi libri.

9. decimi.

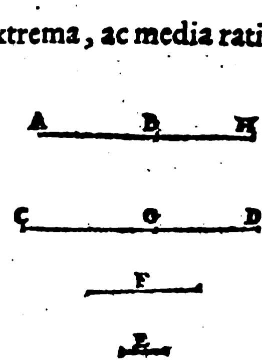
5. diffi. tertiarum.

PROPOSITIO II.

Data maiori portione, totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione secta sit, inuenire.

Sit maior portio AB, & exponantur rectae lineae CD E, ita vt CD sit ipsius E quintupla: inter CD vero, & E media proportionalis sit F: & ex CD abscindatur DG ipsi F aequalis; fiatq; vt CG ad GD, ita AB ad BH. erit igitur componendo vt CD ad DG hoc est ad F, ita AH ad HB. et quoniam tres rectae lineae CD F E deinceps proportionales sunt, erit vt CD ad E, ita quadratum ex CD ad quadratum ex F. est autem CD quintupla ipsius E. quadratũ igitur ex CD quintuplum est quadrati ex F. ergo quadratum ex AH quadrati ex HB est quintuplũ. estq; AB maior portio

Cor. 20. sexti



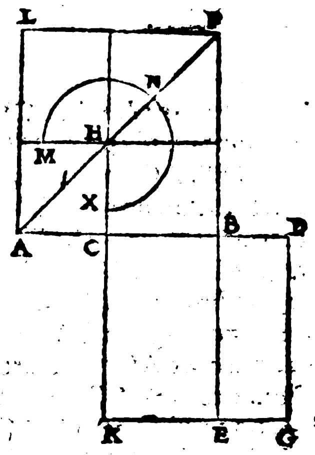
ior portio rectae lineae, quae extrema, ac media ratione secatur. quare BH est totius dimidia, & dupla ipsius BH est tota recta linea, quam nobis inueniendam proposuimus.

Itaque constat, Data maiori portione rectæ lineæ, quæ extrema, ac media ratione secetur, & maiorem portionem, & totam lineam datam esse.

Sit enim maior portio AB 4, siq; CD 5, & E 1. erit F, hoc est GD ℞ 5, & CG 5 minus ℞ 5. fiat vt 5 minus ℞ 5 ad ℞ 5, ita 4 ad aliam. multiplicabimus igitur primum ℞ 5 per 4, producetur ℞ 80. deinde multiplicabimus 5 minus ℞ 5 per eam, quae ex binis nominibus ipsi respondet, videlicet per 5 plus ℞ 5, producetur 20. & per eandem multiplicabimus ℞ 80 fiet ℞ 2000 plus ℞ 400. quare si ad 20 applicabimus ℞ 2000 plus ℞ 400, latitudinem faciet ℞ 5 plus 1, cuius duplum est ℞ 20 plus 2. tota igitur recta linea est ℞ 20 plus 2, & minor portio ℞ 20 minus 2.

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si recta linea partis ipsius quintuplum possit, dupla dictæ partis extrema, ac media ratione secta, maior portio reliqua pars est eius, quæ à principio rectæ lineæ.



Recta enim linea AB partis ipsius AC quintuplum possit: & ipsius AC dupla sit CD. Dico si CD extrema, ac media ratione secetur, CB maiorem esse portionem. Describantur enim ex vtraque ipsarum AB CD quadrata AF CG: & in AF figura descripta, producatur FB in E. Quoniam igitur quadratum AF quintuplum est ipsius AH, erit MNX gnomō ipsius AH quadruplus. & quoniam DC dupla est CA, quadratum ex DC quadrati ex CA quadruplum est, videlicet quadratum CG quadruplum quadrati AH. ostensus est autem MNX gnomon quadruplus ipsius AH quadrati, ergo gnomon MNX quadrato CG est æqualis. Rursus quoniam DC dupla est CA, æqualis autem est DC ipsi CK, & AC ipsi CH; erit KC ipsius CH dupla. parallelogrammum igitur KB duplum est parallelogrammi BH. & sunt parallelogramma LH HB ipsius HB dupla. ergo KB æquale est ipsis LH HB. sed & totus MNX gnomō toti CG est æqualis. & reliquum igitur HF æquale est reliquo BG. atque est BG quidem quod CD DB cōtinetur; etenim CD est æqualis DG: ipsum vero HF est quadratum ipsius BC. ergo quod continetur CD DB quadrato ex CB est æquale. vt igitur DC ad CB, ita est CB ad BD, maior autem est DC, quàm CB. ergo & CB quàm BD est maior. Itaque recta linea CD extrema, ac media ratione secta, maior portio est CB. si igitur recta linea partis ipsius quintuplum possit, dupla dictæ partis extrema, ac media ratione secta, maior portio reliqua pars est eius, quæ à principio rectæ lineæ, quod demonstrare oportebat.

At vero duplam ipsius AC maiorem esse, quàm CB, sic demonstrabitur.

Si enim nō, sit, si fieri potest, BC ipsius CA dupla. quadratum igitur ex BC quadruplum est quadrati ex CA; & ob id vtrumque quadratorum, quæ fiunt ex BC CA quadrati ex CA quintuplum est. sed & quadratum ex BA quadrati ex AC quintuplum ponitur. ergo quadratum ex BA æquale est quadratis ex BC CA. quod fieri non potest. non igitur BC dupla est ipsius CA. similiter demonstrabimus neque minorem BC ipsius CA duplam esse. multo enim maius absurdum sequetur. ergo ipsius AC dupla maior est quàm BC. quod demonstrandum fuit.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea quædam CD partis ipsius DA quintuplũ posſit,& ipsius DA dupla ponatur AB.Dico AB extrema, ac media ratione ſectam eſſe in puncto C,& maiorem portionem eſſe AC, quæ quidem eſt reliqua pars eius,quę à principio rectæ lineę.Quoniam enim AB extrema,ac media ratione ſecta eſt in C,& AC eſt maior portio ; erit rectangulum ABC quadrato ex AC ęquale.eſt autem & rectangulum BAC ęquale ei, quod bis DA AC continetur. etenim BA ipsius AD eſt dupla.ergo rectangulum ABC vnà cum rectangulo BAC,quod quidem eſt ipsius AB quadratũ,æquale eſt ei,quod bis DA AC continetur
1.secundi. 10. sexti.
vnà cum quadrato ex AC . quadratum autem ex AB quadruplum eſt quadrati ex AD.ergo quod bis DA AC continetur vnà quadrato ex AC quadruplum eſt eius, quod fit ex AD quadrati.ergo & quadrata ex DA AC vnà cum eo, quod bis conti-
A 4. ſecundi.
netur DA AC;hoc eſt quadratũ ex CD,quintupla ſunt quadrati ex AD. quod quidem ita ſe habet.

Compoſitio.

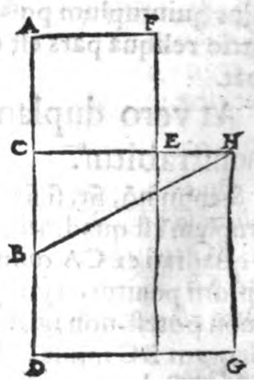
Qm̃ igitur quadratũ ex CD quintuplũ eſt quadrati ex DA; quadrato aũt ex CD ęqualia ſunt quadrata ex DA AC vnà cũ eo,quod bis DA AC cõtinetur; erũt quadrata ex DA, AC vnà cũ eo,quod bis cõtinetur DA AC quintupla ipsius quadrati ex DA.& diuidendo quod bis DA AC cõtinetur vnà cũ quadrato ex AC quadrupla sũt quadrati ex AD.eſt aũt &quadratũ ex AB quadrati ex AD quadruplũ.ergo quod bis cõtinetur DA AC,quod eſt rectãgulũ BAC vnà cũ quadrato ex AC eſt ę-
2.secundi.
quale quadrato ex AB.ſed quadratũ ex AB eſt rectãgulũ ABC unà cũ rectãgulo BAC.rectãgulũ igitur BAC vnà cũ rectãgulo ABC eſt æquale rectangulo BAC vnà cũ quadrato ex AC. & ablato communi rectangulo BAC , erit reliquũ rectangulũ
14.sexti.
ABC quadrato ex AC æquale.eſt igitur vt BA ad AC,ita AC ad CB. maior autem eſt BA, quam AC.ergo & AC quam CB eſt maior.quare AB extrema, ac media ratione ſecta eſt in C,& AC eſt maior portio.quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Recta enim linea AB partis ipsius AC quintuplum poſsit] *Hoc eſt quadratum rectę lineę AB quintuplum ſit quadrati partis ipsius AC.*

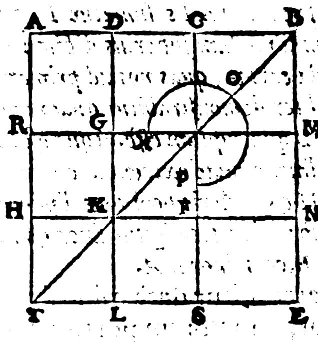
B Maior autem eſt DC,quam CB] *Hoc eſt dupla ipsius AC maior eſt, quam BC, illud uero ipſe mox demonſtrabit.ſed & aliter idẽ demõſtrari poteſt hoc pacto.*

Recta enim linea AB partis ipsius BC quintuplum poſsit, & producatur AB ad D,ita vt DC ipsius CB ſit dupla . Dico ſi CD extrema,ac media ratione ſecetur,maiorem eius portionem eſſe AC . fiat enim ex AC CD quadrata ACEF CDGH, & BH iungatur.itaq; quoniam DC,hoc eſt HC dupla eſt ipsius CB , erit quadratum ex HC quadrati ex CB quadruplum.ſed quadratum ex BH eſt aequale duobus quadratis,quae fiunt ex HC CB.quadratum igitur ex BH quintuplum eſt quadrati ex CB ; ideoq; BH ipſi BA eſt aequalis.ergo ex ijs,quae demonſtrata ſunt in vndecima ſecundi libri recta linea CH extrema,ac media ratione ſecatus in E, & CE eſt maior portio. eſt autem CH ipſi CD aequalis , & CE aequalis ipſi CA.ſi igitur recta linea partis ipsius quintuplum poſsit, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.



THEO-

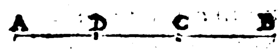
Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, portio minor assumens dimidiam maioris portionis quintuplũ potest eius quod à dimidia maioris portionis fit, quadrati.



Recta enim linea quædã AB extrema, ac media ratione secetur in C; sitq; AC maior portio, & secetur bifariam in D. Dico quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplũ esse. Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. Quoniãm igitur AC dupla est CD, erit quadratum ex AC quadrati ex CD quadruplum, hoc est quadratum RS quadrati FG. & quoniã rectangulum, quod AB BC continetur est ęquale quadrato ex AC; atque est rectangulum quidem contẽtũ AB BC ipsum CE; quadratum vero ex AC est RS: erit rectangulum CE quadrato RS ęquale. quadruplum autem est quadratũ RS quadrati FG. ergo & CE rectangulum quadrati FG quadruplum est. rursus quoniam AD ęqualis est DC, erit & HK ipsi KF æqualis, ideoq; quadratum GF est ęquale quadrato HL. ęqualis igitur est GK ipsi KL, hoc est MN ipsi NE. ergo & parallelogrammum MF parallelogrammo FE est æquale. sed MF est æquale CG. quare & CG ipsi FE æquale erit. commune apponatur CN. gnomon igitur XOP est æqualis parallelogrammo CE. ostensum autem est CE quadruplum GF quadrati, & gnomon igitur XOP ipsius GF est quadruplus. & ob id quadratum DN quintuplũ est ipsius GF. est autem quadratum quidem DN, quod fit ex DB; GF vero, quod ex DC. quadratum igitur ex BD quadrati ex DC est quintuplum. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis resolutio.



Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in C: & sit AC maior portio, cuius dimidia CD. Dico quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplum esse. Quoniam enim quadratum ex BD quintuplum est quadrati ex DC; quadratum autem ex BD est quod continetur AB BC vna cum quadrato ex DC. ergo quod AB BC continetur vnà cum quadrato ex DC quintuplũ est quadrati ex DC: & diuidendo quod AB BC continetur quadrati ex DC quadruplum est. Ei vero, quod continetur AB BC est ęquale quadratum ex AC; etenim AB extrema, ac media ratione secta est in C. ergo quadratum ex AC quadrati ex CD quadruplum est. quod quidem ita se habet est enim AC ipsius CD dupla. 6 secundi.

Compositio.

Quoniam dupla est AC ipsius CD, erit quadratũ ex AC quadrati ex CD quadruplum. sed quadratum ex AC est æquale ei, quod AB BC continetur. quod igitur AB BC continetur quadruplum est quadrati ex CD: & componendo quod continetur AB BC vnà cum quadrato ex CD, quod quidem est quadratum ex BD, quintuplum est quadrati, quod fit ex DC. atque hoc est, quod demonstrare oportebat.

Ex iam dictis & alia constare possumus.

Data minori portione totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione secta sit, inuenire.

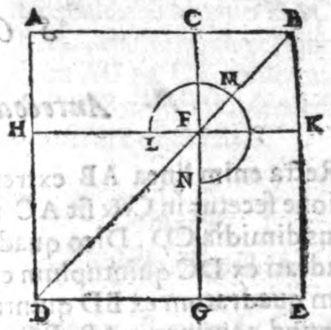
Sit minor portio AB: & exponantur rectae lineae CD E; sitq; CD ipsius E quintupla: & inter CD E media proportionalis sumatur F, & alia construantur, quemadmodum superius dictum est in propositione secunda earum, quas nos ad primam huius apposuimus. similiter demonstrabitur quadratum ex AH quadrati ex HB quintuplum esse. atque est AB minor portio rectas lineae, quae extrema, ac media ratione secatur. ergo BH est maioris portionis dimidia, & eius dupla BK portio maior. tota igitur linea est AK, cuius maior portio KB, & minor BA.

Patet igitur data minori portione rectæ lineę, quæ extrema ac media ratione secatur, & maiorem portionem & totam lineam datam esse.

Sit enim minor portio AB 4, & sit CD 5, & E 1. similiter, vt supra eodem in loco, demonstrabimus, maiorem portionem esse R 20 plus 2 quare tota recta linea erit 6 plus R 20.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, totius & minoris portionis vtraq; quadrata tripla sunt quadrati eius, quod à maiori fit portione.



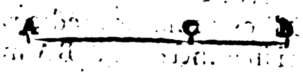
Sit recta linea AB, quę extrema, ac media ratione secetur in C, & sit AC maior portio. Dico quadrata ex AB BC quadrati ex AC tripla esse. Describatur enim ex AB quadratū ADEB, & figura compleatur. itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secta est in C, & maior portio est AC; erit rectangulum contentū AB BC quadrato ex AC æquale. atque est rectangulum quidem AK, quod AB BC continetur: quadratum vero HG est quod fit ex A. C. ęquale igitur est AK ipsi HG. & quoniam rectangulum AF est æquale FE, commune apponatur CK, erit totum AK toti CE æquale. ergo rectāgula CE AK ipsius AK sunt dupla. sed rectāgula AK CE sunt gnomon LMN, & quadratum CK. gnomon igitur LMN, & quadratum CK dupla sunt ipsius AK. rectangulum autem AK ostensum est æquale quadrato HG. ergo gnomon LMN, & quadratum CK ipsius HG sunt dupla; ac propterea gnomon LMN, & quadrata CK HG tripla sunt quadrati HG. & gnomon quidem LMN, & quadrata CK HG sunt totum AE quadratum, & quadratum CK, quę quidem sunt quadrata ex AB BC. quadratum autem GH est quod fit ex AC. quadrata igitur ex AB BC quadrati ex AC sunt tripla. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in C, & sit AC maior portio

portio. Dico quadrata ex AB BC tripla esse quadrati ex AC. Quoniam enim quadrata ex AB BC tripla sunt quadrati ex AC, suntque quadrata ex AB BC ęqualia rectãgulo, quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC: erit rectangulum, quod bis continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC triplum quadrati ex AC: & diuidendo quod bis cõtinetur AB BC duplũ quadrati ex AC. ergo quod semel AB BC continetur quadrato ex AC est æquale. quod quidem ita se habet. recta enim linea AB extrema, ac media ratione secta est in puncto C.



sexti.

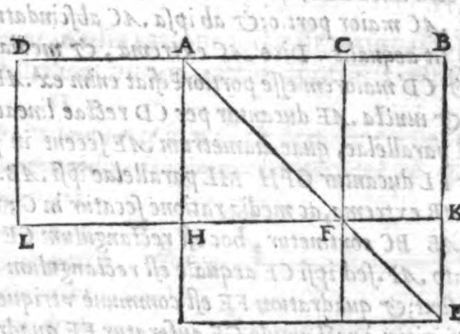
A

Compositio.

Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secta est in C, atque est AC maior portio; erit rectangulum, quod AB BC continetur quadrato ex AC ęquale. ergo quod bis continetur AB BC duplum est quadrati ex AC: & cõponendo quod bis continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC triplum est quadrati ex AC. sed quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC est æquale quadratis, quæ ex AB BC fiunt. quadrata igitur ex AB BC quadrati ex AC sunt tripla.

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, adijciaturque ipsi æqualis maiori portioni; erit tota linea extrema, ac media ratione secta, & maior portio erit ea, quæ à principio posita est recta linea.



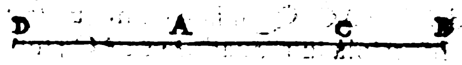
Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in C, & sit AC portio maior: ponaturq; ipsi CA æqualis AD. Dico rectam lineam DB extrema, ac media ratione secari in puncto A: & maiorem portionem esse AB, quę à principio posita est. Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. Quoniam igitur AB extrema, ac media ratione secta est in C, erit rectangulum quod continetur AB BC quadrato ex AC æquale. & rectangulum quidem quod continetur AB BC est CE: quadratum vero ex AC est CH. ergo EC ipsi CH est ęquale. sed CE est ęquale EH, & CH ipsi HD. quare & DH ipsi HE æquale erit. cõmune apponatur HB. totum igitur DK toti AE est æquale. atque est DK quidem, quod BD DA continnetur; est enim AD æqualis DL: quadratũ aũt AE est quod fit ex AB. ergo quod BD DA cõtinetur est ęquale quadrato ex AB, & ob id vt DB ad BA, ita est BA ad AD. sed BD est maior, quam BA. maior igitur est BA quàm AD. ergo DB extrema, ac media ratione secta est in A, & AB est maior portio. quod demonstrare oportebat. 14. sexti.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta .n. linea AB extrema, ac media ratione secetur in C: & sit maior portio AC: pona-

C: ponaturq; AD ipsi AC æqualis. Dico DB extrema ac media ratione secari in puncto A: & BA maiorem esse portionem. Quoniã enim



A DB extrema, ac media ratione secta est in A, & maior portio est AB; erit vt DB ad BA, ita BA ad AD. æqualis autem est DA ipsi AC. vt igitur DB ad BA, ita BA ad AC: & per conuersionem rationis vt BD ad DA, ita AB ad BC. quare diuidendo ut BA ad AD, ita AC ad CB. æqualis autem est DA ipsi AC. est igitur vt BA ad AC, ita AC ad CB. quod quidem ita se habet, etenim AB extrema, ac media ratione secatur in C puncto.

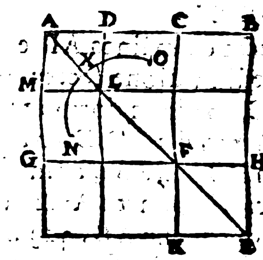
Compositio.

Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C, erit vt BA ad AC ita AC ad CB. æqualis autem est CA ipsi AD, ergo ut BA ad AD, ita AC ad CB: cõponendoque vt BD ad DA, ita AB ad BC; & per conuersionem rationis vt DB ad BA, ita BA ad AC. atque est CA æqualis AD. est igitur vt DB ad BA, ita BA ad AD. quare DB extrema, ac media ratione secatur in pũcto A, & BA est portio maior.

FED. COMMENTARIVS.

Sed non inutile uisum est hoc loco demonstrare theorema aliud quo utitur Pappus in quinto libro, quamquam eius demonstrationem nullam afferat.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, abscindaturque à maiori portione linea, quę minori sit equalis; erit etiam ea extrema, ac media ratione secta, & maior portio erit quæ abscissa est recta linea



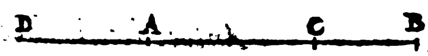
Sit recta linea AB, quae extrema, ac media rõne secetur in C, sitq; AC maior portio: & ab ipsa AC abscindatur CD, quae ipsi CB sit aequalis. Dico AC extrema, & media rõne secari in D: & CD maiorem esse portionẽ. fiat enim ex AB quadratũ AE: & iuncta AE ducantur per CD rectae lineae CFK DL ipsi BE parallelae, quae diametrum AE secent in punctis FL: & per FL ducantur GFH ML parallelae ipsi AB. Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C; rectangulũ, quod AB BC continetur, hoc est rectangulum CE est aequale quadrato AF. sed ipsi CE aequale est rectangulum GE; etenim supplementa CH GK inter se aequalia sunt; & quadratum FE est commune vtrique. ergo rectangulum GE quadrato AF est aequale. si igitur à rectangulo GE auferatur FE quadratum; & à quadrato AF auferatur quadratum LF, quod quidem est aequale quadrato FE, cum DE CB sint aequales, reliquum GK rectangulum, hoc est rectangulum MF, hoc est ipsum DF gnomoni NXO aequale erit, à quibus sublato communi LC, erit reliquum DG rectangulum aequale quadrato LF. at rectangulum quidem DG est quod CA AD continetur: quadratum vero LF est quod fit ex DC. vt igitur AC ad CD, ita CD ad DA. sed AC maior est, quàm CD. ergo & CD quàm DA maior erit. recta igitur linea AC, extrema, ac media rõne secta est in D, & maior eius portio est CD. quod demõstrare oportebat.

14. sexti.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Si recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit, vtraque portio irrationalis est, quæ apotome appellatur.

Sit recta linea rationalis AB; & secetur extrema, ac media ratione ĩ C, sitque AC maior portio. Dico vtramque portionem AC CB irrationalẽ



esse,

esse, quæ apotome appellatur. producatur enim BA in D, & sit ipsius BA dimidia AD. Itaque quoniam recta linea AB extrema, ac media ratione secatur in C, & maiori portioni CA adijcitur AD, quę est ipsius AB dimidia; erit quadratum ex CD quadrati ex DA quintuplum. ex 1. huius quadratum igitur ex CD ad quadratum ex DA proportionem habet, quam numerus ad numerum; ideoq; quadratum ex CD commensurabile est quadrato ex DA. 6. decimi rationale autem est quadratum ex DA; etenim DA est rationalis, cum sit ipsius AB rationalis dimidia. ergo & quadratum ex CD est rationale; 6. dif. decimi ac propterea ipsa CD rationalis. & quoniam quadratum ex CD ad quadratum ex DA proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, recta linea CD ipsi DA incommensurabilis est longitudine. 9. decimi quare CD DA rationales sunt potentia solum commensurabiles; & idcirco AC apotome est. 74. decimi Rursus quoniam AB extrema, ac media ratione secta est, & maior portio est AC; erit ABC rectangulum æquale quadrato ex AC. quod igitur fit ex apotoma AC ad rationalem AB applicatum latitudinem facit BC. sed quadratum apotomes ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam. 98. decimi ergo BC est apotome prima. ostensa est autem & AC apotome. si igitur recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit, vtraque portio irrationalis est, quæ apotome appellatur. atque illud est, quod demonstrare oportebat.

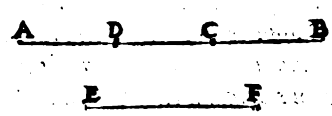
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc nos supra etiam aliter demonstrauimus. sed & alia ab his non abhorrentia demonstrare aggrediemur, quae eiusmodi sunt.

PROPOSITIO I.

Si maior portio rectæ lineæ extrema, ac media ratione sectæ sit rationalis, expositę rationali longitudine commensurabilis, erit minor portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus quinta.

Sit recta linea AB, quae extrema, ac media ratione secetur in C, & sit maior portio AC rationalis, expositae rationali longitudine commensurabilis. Dico minorem portionē CB esse apotomen quintam, & totam ex binis nominibus quintam.



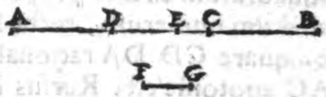
Diuidatur enim AC bifariam in D. & quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C, & minori portioni BC adijcitur CD, quae est dimidia portionis maioris; quadratum ex BD quintuplum est quadrati ex DC; 3. huius *ac propterea ad ipsum proportionem habebit, quam numerus ad numerum, atque ipsi commensurabile erit.* 6. decimi *rationale autem est quadratum ex DC, quòd ipsa AC rationalis ponitur. ergo & quadratum ex BD est rationale, & ipsa BD rationalis.* 6. dif. decimi *cum igitur quadratum ex BD ad quadratum ex DC proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, recta linea BD ipsi DC incommensurabilis erit longitudine.* 9. decimi *quare BD DC rationales sunt potentia solum commensurabiles: ideoque CB apotome est. Dico & quintam esse. sit enim quadratum ex EF, quo quadratum ex BD superat quadratum ex DC. habebit quadratum ex BD ad quadratum ex EF proportionem eam, quam 5 ad 4. & cum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, recta linea BD ipsi EF longitudine est incommensurabilis.* 9. decimi *quare BD plus potest, quàm DC quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine. atque est DC longitudine commensurabilis expositae rationali AC. ergo CB est apotome quinta.* 5. dif. tertiarum. *rursus quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C; & AC est maior portio, erit rectangulum ABC aequale quadrato ex AC. quadratū igitur ex AC ad CB applicatum latitudinem faciet AB. sed quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eā, quę ex binis nominibus; & eundem ordinem habet, quem ipsa apotome ex 114 decimi. ergo AB ex binis nominibus est quinta. si igitur maior portio rectae lineae extrema, ac media ratione sectae sit rationalis, expositae rationali longitudine commen-*

mensurabilis, erit maior portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus quinta. quod demonstrare oportebat.

PROPOSITIO II.

Si minor portio rectæ lineæ extrema ac media ratione sectę sit rationalis, expositaq; rationali longitudine commensurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima.

Sit recta linea AB, quę extrema, ac media ratione secetur in C, & sit minor portio CB rationalis, expositęq; rationali longitudine commensurabilis. Dico maiorem portionē AC esse ex binis nominibus quintam; & totam AB ex binis nominibus primam. secetur enim AC bifariam in D. Eadem ratione, qua supra, demonstrabitur quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplum esse. itaque secetur DC in E, ita ut DE ad EC eandem proportionem habeat, quam BD ad DC. erit quadratum ex DE quadrati ex EC quintuplum, & ipsi commen-

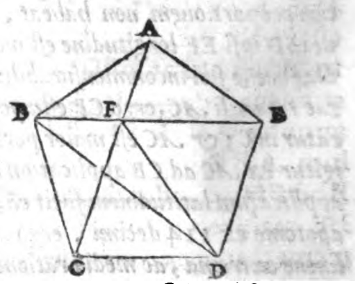


19.quinti *surabile. & quoniam est vt tota BD ad totam DC, ita pars DE ad partem EC, erit & reliqua BE ad reliquam ED, vt BD ad DC, hoc est ut DE ad EC. ergo cum tres rectae lineae proportio-*
Cor.20.sexti *nales sint BE ED EC; erit BE ad EC, vt quadratum ex BE ad quadratum ex ED. sed quadratum ex BE quintuplum est quadrati ex ED: est enim BE ad ED, ut BD ad DC. quare BE ipsius*
6.dif.decimi *EC quintupla est; & idcirco BC est quadrupla ipsius CE; estq; BC rationalis. ergo & rationalis CE, & ipsi CB longitudine commensurabilis. & quoniam quadratum ex DE commensurabile est*
9.dif.decimi *quadrato ex EC, atque est quadratum ex EC rationale; erit etiam rationale quadratū ex DE, ipsaq; DE rationalis. quòd cum quadratum ex DE ad quadratū ex EC proportionem non habeat,*
9.decimi *quam quadratus numerus ad quadratum numerum; erit DE ipsi EC incōmensurabilis longitudine.*
37.decimi *sunt igitur DE EC rationales, & inter se potentia solum commensurabiles; & ob id DC ex binis nominibus est, cuius maius nomen DE. Dico & quintam esse. sit enim quadratum ex FG, quo*
9.decimi *quadratum ex DE superat quadratum ex EC. habebit quadratum ex DE adquadratum ex FG proportionem eam, quam habet 5 ad 4. ergo FG ipsi DE longitudine est incommensurabilis. itaque quoniam DE plus potest quàm EC quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine; estq; EC expositae rationali CB longitudine cōmensurabilis: erit DC ex bis nominibus quinta. est autem AC ipsius CD dupla. ergo & AE est quinta ex binis nominibus. recta enim linea commensurabilis ei, quae est ex binis nominibus, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem ex 67 decimi libri. Et cum quadratum ex AC sit aequale rectangulo ABC, si ad rationalem BC applicetur, latitudinem faciet ipsam AB. ergo AB ex binis nominibus est prima. quadratum namque eius, quae ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudiuem facit ex binis nominibus primam ex 98 decimi. si igitur minor portio rectae lineae extrema, ac media ratione sectae sit rationalis, expositae rationali longitudine commensurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima. quod demonstrare oportebat.*

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si pentagoni ęquilateri tres anguli siue continuati, siue non cōtinuati fuerint ęquales, ęquiangulum erit pentagonum.

Pentagoni enim ęquilateri ABCDE tres anguli primum cōtinuati, qui ad puncta ABC ęquales inter se sint. Dico pētagonum ABCDE æquiāgulum esse. Iungantur enim AC BE FD. & quoniam duę CB BA duabus BA AE æquales sunt, altera alteri, & angulus CBA est ęqualis angulo BAE,



4.primi erit basis AC æqualis basi BE, & triangulum ABC triangulo ABE æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera

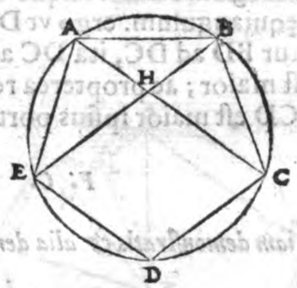
subtendnntur.

subtenduntur. angulus quidem BCA angulo BEA, angulus vero ABE angulo CAB. quare & latus AF est ęquale lateri BF. ostensa autem est & tota AC toti BE æqualis. ergo & reliqua FC est ęqualis reliquæ FE. atque est CD æqualis DE. duę igitur FC CD duabus FE ED æquales sunt, & basis ipsorum est communis FD. quare angulus FCD angulo FED est ęqualis. ostensus autem est & angulus BCA æqualis angulo AEB. totus igitur BCD ęqualis est toti AED. sed angulus BCD positus est æqualis angulis, qui sunt ad puncta AB. ergo & AED angulus angulis, qui sunt ad AB æqualis erit. similiter demonstrabimus & angulum CDE angulis, qui sunt ad AB esse æqualem. ęquiangulum igitur est ABCDE pentagonum. sed non sint anguli continuati sibi ipsis æquales, sed qui sunt ad puncta ACD. Dico & sic æquiangulum esse ABCDE pentagonum. Iungatur enim BD. & quoniam duæ BA AE duabus BC CD æquales sunt, & angulos equales continent; erit basis BE ęqualis basi BD, & ABE triangulum triãgulo BCD, & reliqui anguli reliquis angulis ęquales, quibus æqualia latera subtenduntur. æqualis igitur est angulus AEB angulo CDB. est autem & BED angulus angulo BDE æqualis, quoniam & latus BE est æquale lateri BD. totus igitur angulus AED toti CDE est æqualis. Sed angulus CDE angulis, qui sunt ad puncta AC æqualis ponitur. ergo & AED angulus angulis, qui sunt ad AC est æqualis. Eadem ratione & angulus ABC ęqualis est angulis, qui sunt ad ACD puncta. æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum. quod demonstrare oportebat.

8.primi

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos continuatos angulos subtendant rectæ lineæ, extrema, ac media ratione se mutuo secant, & maiores ipsarum portiones pentagoni lateri sunt æquales.



Pentagoni enim æquilateri, & æquianguli ABCDE duos continuatos angulos, qui sunt ad puncta AB subtendant rectę lineæ AC BE, quæ sese in puncto H secent. Dico vtramque ipsarũ extrema, ac media ratione secari in puncto H: & maiores earũ portiones pentagoni lateri æquales esse. describatur enim circa ABCDE pentagonũ circulus ABCDE. & quoniã duæ rectæ lineæ EA AB duabus AB BC ęquales sunt, & angulos æquales continent; erit basis BE basi AC æqualis, & ABE triangulum ęquale triangulo ABC, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. æqualis igitur est BAC angulus angulo ABE. ergo AHE angulus anguli BAH est duplus; etenim extra triãgulum est ABH. est autem & angulus EAC duplus anguli BAC, quòd & circumferentia EDC circumferentiæ CB est dupla. ergo HAE angulus æqualis est angulo AHE; & ob id recta linea HE est æqualis ipsi EA, hoc est ipsi AB. et quoniam BA est æqualis AE, erit & angulus ABE angulo AEB ęqualis. sed angulus ABE ostensus est ęqualis angulo BAH. ergo & BEA angulus æqualis est angulo BAH. & communis duobus triangulis, videlicet triangulo ABE, & triangulo ABH est angulus ABE. reliquus igitur BAE reliquo AHB est æqualis. ergo triangulum ABE æquiangulum est triangulo ABH; ideocque vt EB ad BA, ita est AB ad BH: ęqualis autem est BA ipsi EH. vt igitur BE ad EH, ita EH ad HB. Sed BE maior est quàm EH. ergo & EH quàm HB est maior. recta igitur linea BE extrema, ac media ratione secta est in H, & maior portio HE pentagoni lateri est

4.primi

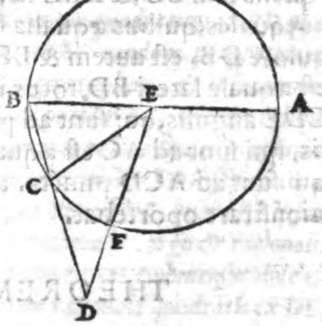
32.primi
33 sexti.

6.primi
21.tertii

æqualis. Similiter demonstrabimus & A C extrema, ac media ratione secari in H, & maiorem eius portionem C H pentagoni lateri æqualem esse. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Si hexagoni & decagoni latera in circulo descripta componantur, erit tota recta linea extrema, ac media ratione secta, & maior ipsius portio erit hexagoni latus.



Sit circulus ABC, & descriptis in dicto circulo figuris, sit decagoni quidem latus BC, hexagoni vero CD, & in directum sibi ipsis constituantur. Dico totam rectam lineam BD extrema, ac media ratione secari in C, & maiorem eius portionem esse CD. Sumatur enim centrum circuli, quod sit E; iunganturq; EB EC ED, & BE ad A producatur. quoniã igitur decagoni æquilateri latus est BC, erit ACB circumferentia circumferentiæ BC quintupla; & ob id circumferentia AC quadrupla est circumferentiæ CB. vt autem circumferentia A C ad ipsam C B, ita A E C angulus ad angulum CEB. angulus igitur AEC anguli CEB quadruplus est. & quoniã EBC angulus est æqualis angulo E CB, erit angulus AEC. anguli ECB duplus. est autem recta linea EC æqualis ipsi C D; vtraque enim est æqualis lateri hexagoni, quòd in circulo A B C describitur. quare & angulus C E D æqualis est angulo CDE. est igitur angulus ECB anguli EDC duplus. sed & angulus AEC duplus ostẽsus est anguli ECB. angulus igitur AEC anguli EDC est quadruplus. ostensus autem est & angulus AEC quadruplus anguli BEC. ergo EDC angulus angulo BEC æqualis erit. atque est angulus E B D communis duobus triangulis BEC BED. & reliquus igitur BED reliquo ECB est æqualis. ideoq; triangulum E B D triangulo EBC æquiangulum. ergo vt DB ad BE, ita EB ad BC. æqualis autẽ est EB ipsi CD. vt igitur BD ad DC, ita DC ad CB. atq; est BD maior quàm DC. ergo & DC quã CB est maior; ac propterea recta linea B D extrema, ac media ratione secta est in C, & CD est maior ipsius portio. quod demonstrare oportebat.

Vlt. sexti.

5. primi.
32. primi.

5. primi.
32. primi.

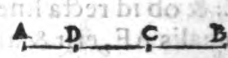
32. primi.
4. sexti.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonstratis & alia demonstrare licet, nempe hæc.

PROPOSITIO I.

Si latus hexagoni extrema, ac media ratione secetur, erit maior eius portio decagoni latus.



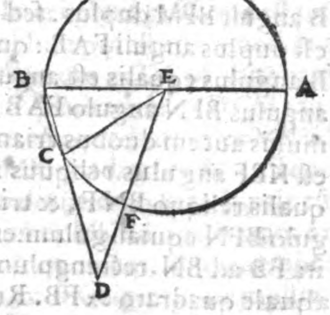
Ex antecedente.

Sit recta linea AB, quæ secetur in C, ita vt AC sit hexagoni latus, & C B latus decagoni in eodem circulo descripti. ergo AB extrema, ac media ratione secatur in C: atque est AC maior portio. abscindatur ab AC linea CD ipsi CB æqualis. erit AC quoq; extrema, ac media ratione secta in D: atque erit CD portio maior ex ijs, quæ à nobis demonstrata sunt ad quintam huius. est autem A C hexagoni latus, & CD latus decagoni. si igitur hexagoni latus extrema, ac media ratione secetur, erit maior eius portio decagoni latus. quod demonstrare oportebat.

PRO-

PROPOSITIO II.

Si in circulo rationalem diametrum habente decagonum æquilaterum deſcribatur, erit decagoni latus apotome quinta.



Maneant enim eadem, quae ſupra; & ſit diameter AB rationalis. Dico decagoni latus BC eſſe apotomen quintam. Quoniam enim diameter AB eſt rationalis, erit quoque eius dimidia EC, hoc eſt CD rationalis. atq; eſt DC maior portio rectae lineae DB extrema, ac media ratione ſectae; & CB minor portio eiuſdem. Quando autem maior portio rectę lineę, quae extrema, ac media ratione ſecatur ſit rationalis, minor portio eſt apotome quinta. quod à nobis ſupra demonſtratum fuit. ergo latus decagoni BC eſt apotome quinta. quod oportebat demonſtrare. ad 6.huius Propo.1.

PROPOSITIO. III.

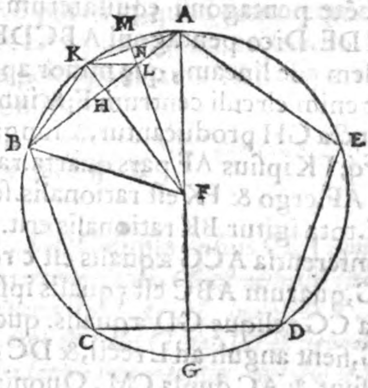
Si latus decagoni ęquilateri in circulo deſcripti, ſit rationale, erit circuli diameter ex binis nominibus quinta.

Iiſdem enim manentibus ſit latus decagoni BC rationale. Dico diametrum AB eſſe ex binis nominibus, quintam. Quoniam enim BC, videlicet minor portio rectae lineae extrema, ac media ratione ſectae eſt rationalis, erit maior portio CD ex binis nominibus quinta. quod etiam à nobis demonſtratum eſt: ipſius autem CD dupla eſt AB; & quae longitudine commenſurabilis eſt ei, quae ex binis nominibus, & ipſa ex binis nominibus eſt, atque ordine eadem ex 67 decimi libri. ergo et AB ex binis nominibus eſt quinta. quod demonſtrare oportebat. ad 6.huius. Propo. a.

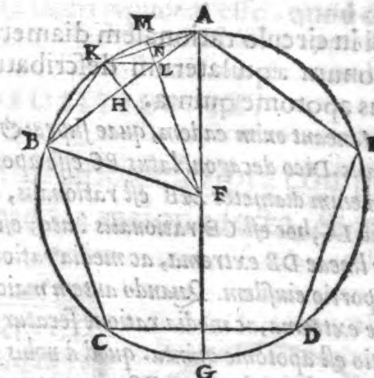
THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, latus pentagoni poteſt, & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum.

Sit circulus ABCDE, & in ipſo pentagonum ęquilaterum ABCDE deſcribatur. Dico pentagoni ABCDE latus poſſe latus, & hexagoni, & decagoni in eodem circulo deſcriptorum. Sumatur enim centrum circuli F, iunctaq; AF ad G producatur, & iūgatur FB; deinde à puncto F ad AB perpendicularis agatur FH, & ad K producatur; iunganturque AK KB. & rurſus à pūcto F ad AK perpendicularis agatur FB, & producatur ad M, & KN iungatur. Quoniam igitur circumferentia ABCG eſt æqualis circumferētiæ AEDG, quarum ABC æqualis eſt ipſi AED, erit reliqua CG reliquæ GD æqualis.



Sed CD eſt pentagoni. ergo CG decagoni erit. quòd cum AF ſit æqualis FB & FH perpendicularis, erit & angulus AFK æqualis angulo KFB. quare & circūferētia AK circūferētiæ KB eſt æqualis. dupla igitur eſt circūferētia AB circūferētię BK; & ob id recta linea AK eſt decagoni latus. Eadē rōne & AK eſt dupla KM. & quoniā circumferentia AB dupla eſt circumferentię BK, ęqualis autem CD circumferentia circumferentiæ AB, erit circumferentia CD circumferentiæ BK dupla. eſtque DC dupla ipſius CG. ergo CG eſt æqualis BK, ſed BK ipſius KM eſt dupla, quoniam & AK 8.primi. 26.tertij.



AK. & CG igitur ipsius KM dupla erit. est autem & CB circumferentia circumferentię B K dupla: etenim CB est ęqualis BA. ergo & tota GB dupla est ipsius BM, & angulus GF B anguli BFM duplus. sed & angulus GFB est duplus anguli FAB: quandoquidem FA B angulus ęqualis est angulo ABF. ergo & angulus BFN angulo FAB est ęqualis. communis autem duobus triangulis ABF BFN est KBF angulus. reliquus igitur AFB est ęqualis reliquo BNF, & triãgulum ABF triãgulo BFN ęquiangulum. ergo vt AB ad BF, ita FB ad BN. rectangulum igitur ABN est æquale quadrato ex FB. Rursus quoniam A L est æqualis LK, communis autem, & ad rectos angulos LN; erit basis KN æqualis basi NA. ergo & angulus LKN angulo LAN est ęqualis. sed angulus LAN est æqualis angulo KBN. & angulus igitur LKN est æqualis angulo KBN. angulus autem NAK est communis duobus triangulis AKB, & AKN. ergo reliquus AKB reliquo K N A est æqualis; & triangulum KAB triangulo KNA æquiangulum. vt igitur BA ad AK, ita KA ad AN; ac propterea rectãgulum BAN est ęquale quadrato ex AK. ostẽsum est aũt & rectãgulũ ABN quadrato ex BF æquale. r & igulũ igitur ABN vnà cum rectangulo BAN, quod est quadratum ex AB est æquale quadraro ex BF vnà cum quadrato ex AK. atque est AB quidem pentagoni latus, BF vero latus hexagoni, & AK decagoni. ergo pentagoni latus potest & latus hexagoni & decagoni in eodem circulo descriptorum. quod demonstrare oportebat.

Vltime sexti 32 primi, uel ex 20 tertij.
4. sexti.
17. sexti.
4. primi.
5. primi.
4 sexti.
17. sexti.
2. secundi.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Si in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum describatur, pentagoni latus est linea irrationalis, quę minor appellatur.

In circulo enim ABCDE rationalẽ diametrũ habẽte pentagonũ ęquilaterum describatur A BCDE. Dico pentagoni ABCDE latus irrationalem esse lineam, quę minor appellatur. sumatur enim circuli centrum F; & iunctæ AF BF ad puncta GH producantur, & iungatur AC; ponaturq; FK ipsius AF pars quarta. rationalis autem est AF. ergo & FK est rationalis. sed & rationalis BF. tota igitur BK rationalis erit. & quoniam circumferentia ACG æqualis est circumferentiæ A DG, quarum ABC est ęqualis ipsi AED; erit reliqua CG reliquę GD æqualis. quòd si iungamus AG, fient anguli ad L recti, & DC dupla ipsius CL. Eadem ratione & anguli ad M recti sunt, & AC dupla CM. Quoniam igitur angulus ALC est æqualis angulo AMF, communis autem duobus triangulis ALC, & AMF est angulus LAC; reliquus AC L reliquo MFA æqualis erit; ideoq; triangulum ACL triangulo AMF æquiangulũ. ergo ut LC ad CA, ita MF ad FA; & antecedentium dupla. quare vt dupla ipsius L C ad CA, ita ipsius MF dupla ad FA. sed vt ipsius MF dupla ad FA, ita est MF ad dimidiã ipsius FA. & vt igitur dupla ipsius LC ad CA, ita MF ad ipsius FA dimidiã: & consequentium dimidia. quare ut dupla LC ad dimidiam ipsius CA, ita MF ad quartam partem ipsius FA. atque est ipsius quidem LC dupla CD; ipsius vero CA

6. diffi. decimi.
A
4. sexti.
B

dimidia

dimidia CM; & ipsius FA quarta pars FK. est igitur vt DC ad CM, ita MF ad FK: &
componendo vt vtraque DCM ad CM, ita MK ad KF. ergo ut quadratum, quod fit C
ex vtraque DCM ad quadratum ex CM, ita quadratum ex MK ad id, quod fit ex KF
quadratum. & quoniam recta linea, quæ duo pentagoni latera subtendit, vt AC ex-
trema, ac media ratione secta, maior portio est æqualis lateri pentagoni, hoc est ipsi D
DC; & maior portio assumens dimidium totius quintuplum potest eius, quod fit à E
totius dimidia; atq; est totius AC dimidia CM: erit quadratum ex DCM tanquam
ex vna linea, quintuplum eius, quod fit ex CM. vt autem quadratum ex DCM tan-
quam ex vna linea ad quadratum ex CM, ita ostendimus esse quadratum ex MK ad
quadratum ex KF. quintuplum igitur est quadratum ex MK quadrati ex KF: estque
quadratũ ex KF rationale; quippe cum diameter rationalis sit. ergo & rationale est F
quadratum ex MK; & ipsa MK rationalis. quadratum enim ex MK ad quadratum ex G
KF proportionem habet, quam numerus ad numerum. & quoniam BF quadrupla
est ipsius FK, erit BK ipsius KF quintupla, & quadratum ex BK vigintiquintuplum H
quadrati ex KF. quadratum autem ex MK quintuplum est quadrati ex KF. ergo qua K
dratum ex BK quadrati ex KM est quintuplum; ac propterea ad illud proportionẽ
non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabi- L
lis igitur est BK ipsi KM longitudine. atque est vtraque ipsarum rationalis. ergo BK
KM rationales sunt potentia solum commensurabiles. si autem à rationali rationa- M
lis auferatur potentia solum commensurabilis existens toti, reliqua irrationalis est,
quę apotome appellatur. quare MB est apotome, & ipsi congruẽs MK. Dico & quar
tam esse. quo enim quadratum ex BK superat quadratum ex KM, illi sit æquale qua-
dratum ex N. ergo BK plus potest, quàm KM quadrato ex N. & quoniam commen- N
surabilis est KF ipsi FB, & componendo KB commensurabilis ipsi BF; sed & BF cõ- O P
mensurabilis ipsi BH longitudine, erit & KB ipsi BH commensurabilis. quòd cum Q
quadratum ex BK quintuplum sit quadrati ex KM, habebit quadratum ex BK ad
quadratum ex KM proportionem eam, quam habet quinque ad vnum. Ergo per cõ
uersionem rationis quadratum ex BK ad quadratum ex N proportionem habet,
quam quinque ad quattuor, & non eam, quam quadratus numerus ad quadratum
numerum. incommensurabilis igitur est BK ipsi N: idcircoq; BK plus potest, quàm 9. undecimi
KN quadrato rectę lineæ sibi incommensurabilis. itaque quoniam tota BK plus po-
test, quàm congruens MK, quadrato rectę lineæ sibi incommensurabilis, & tota BK
commensurabilis est expositæ rationali BH, erit MB apotome quarta. quod autem R S
rationali, & apotome quarta continetur rectangulum irrationale est, & ipsum po-
tens est irrationalis, quæ minor appellatur. sed AB potest id, quod continetur HB T
BM, propterea quòd iuncta AH triangulum ABH est ęquiangulum triangulo AB
M: atque est vt HB ad BA, ita AB ad BM. ergo AB pentagoni latus est linea irratio
nalis, quę minor appellatur. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd si iungamus AG, fient anguli ad L recti, & DC dupla ipsius CL] *Iunctis* A
enim AC ALG, si etiam intelligatur iuncta AD, quoniam circumferentia CG est aequalis circum- 27. tertij.
ferentiae GD, erit angulus CAG aequalis angulo GAD. duae igitur CA AL duabus DA AL 4. primi.
aequales sunt, & angulus CAL est aequalis angulo DAL. ergo & basis CL basi LD est aequalis,
& reliqui anguli reliquis angulis aequales, quibus aequalia latera subtenduntur. angulus igitur Diffi. 10. pri
ALC est aequalis angulo ALD. & ob id vterque rectus est. & cum CL sit ęqualis LD, erit DC ip- mi.
sius CL dupla.

Et antecedentium dupla] *Quoniam enim est vt LC ad CA ita MF ad FA, vt autem du-* B
pla ipsius LC ad LC, ita dupla ipsius MF ad MF; erit ex aequali vt dupla ipsius LC ad CA, ita du
pla ipsius MF ad FA.

Ergo vt quadratum, quod fit ex vtraque DCM ad quadratum ex CM] *Ex 22.* C
sexti libri.

Maior portio est æqualis lateri pentagoni, hoc est ipsi DC] *Ex 8. huius.* D

E

totius

E Et maior portio assumens dimidiam totius quintuplum potest eius, quod fit à totius dimidia] *Ex 1. huius.*

F Ergo & rationale est quadratum ex MK] *Rationali enim commensurabile, & ipsum rationale est ex nona diffinitione decimi libri.*

G Et ipsa MK rationalis] *Ex 8. diffinitione eiusdem libri.*

H Et quadratum ex BK vigintiquintuplum quadrati ex KF] *Ex 20 sexti libri. est enim 25 ad 5, vt 5 ad 1. quare 25 ad 1 proportionem duplam habet eius, quam 5 habet ad 1. ex 10 diffinitione quinti libri.*

K Ergo quadratum ex BK quadtati ex KM est quintuplum] *Nam cum quadratum ex BK ad quadratum ex KF sit vt 25 ad 1, quadratum vero ex MK ad idem quadratum ex KF sit vt 5 ad. 1; erit quadratum ex BK ad quadratum ex MK, vt 25 ad 5, hoc est vt 5 ad 1.*

L Incommensurabilis igitur est BK ipsi KM longitudine] *Ex nona decimi libri.*

M Si autem à rationali rationalis auferatur potentia solum commensurabilis existens toti, reliqua irrationalis est, quę apotome appellatur] *Ex 74 decimi libri.*

N Et quoniam commensurabilis est KF ipsi FB] *Intellige commensurabilis longitudine, quemadmodum & inferius; posita est enim KF quarta pars ipsius FA, hoc est ipsius FB.*

O Et componendo KB commensurabilis ipsi BF] *Ex 16 decimi.*

P Sed & BF commensurabilis ipsi BH longitudine] *Est enim BF ipsius BH dimidia.*

Q Erit & BK ipsi BH commensurabilis] *Ex 12 decimi.*

R Erit MB apotome quarta] *Ex quarta tertiarum diffinitionum.*

S Quod autem rationali, & apotoma quarta continetur rectangulum irralione est & ipsum potens est irrationalis, quæ minor appellatur] *Ex 95 decimi.*

T Sed AB potest id, quod continetur HB BM] *Ex corollario 8 sexti, & 17 eiusdem.*

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur, trianguli latus potentia triplum est eius, quę ex circuli centro.

Sit circulus ABC, & in ipso triangulum æquilaterum describatur ABC. Dico trianguli ABC latus potentia triplũ esse eius, quę est ex circuli ABC cẽtro. sumatur enim circuli cẽtrum D, & iuncta AD producatur ad E, & BE iũgatur. Itaque quoniam æquilaterum est ABC triangulum, erit BEC circumferentia tertia pars circumferentiæ circuli ABC. ergo circumferentia BE est sexta pars circuli circumferentiæ; ideoq; recta linea BE est latus hexagoni, & æqualis ipsi DE, quę est ex circuli centro. & quoniam AE est dupla ipsius ED, erit quadratũ ex AE quadrati ex ED, hoc est quadrati ex EB quadruplũ. quadratũ autem ex AE est æquale quadratis ex AB BE. ergo quadrata ex AB BE quadrupla sunt quadrati ex BE: & diuidendo quadratum ex AB quadrati ex BE triplum: atque est BE ęqualis ED. quadratum igitur ex AB triplum est quadrati ex DE. ergo trianguli latus est potentia triplum eius, quæ ex circuli centro. quod demonstrare oportebat.

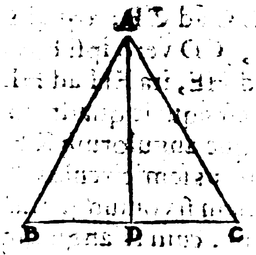
Corol. 15. quarti.
20. sexti.
47 primi.

F. C. COMMENTARIVS.

Constat etiam latus trianguli æquilateri ad rectam lineam, quæ ab angulo ad basim perdendicularis ducitur, eam potentia proportionem habere, quam habet 4 ad 3.

Sit enim triangulum aequilaterum ABC, cuius basis BC bifariam secetur in D, & AD iungatur. erit AD ad ipsam AC perpendicularis; sunt enim duo latera AD DB duobus lateribus AD

DC aequalia, & basis AB est aequalis basi AC: angulus igitur ADB est aequalis angulo ADC. & ideo vterque ipsorum rectus, & AD ad BC est perpendicularis. Dico quadratum ex BA ad quadratum ex AD proportionem habere eandem, quam 4 ad 3. Quoniam enim AB dupla est ipsius BD, erit quadratum ex AB quadrati ex BD quadruplum: atque est quadratum ex AB aequale quadratis ex AD DB. quadratum igitur ex BA ad quadratum ex AD eam proportionem habet, quã 4 ad 3. quod oportebat demonstrare.

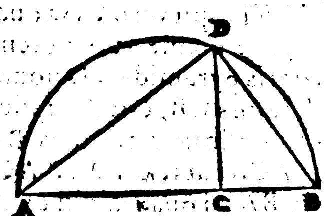


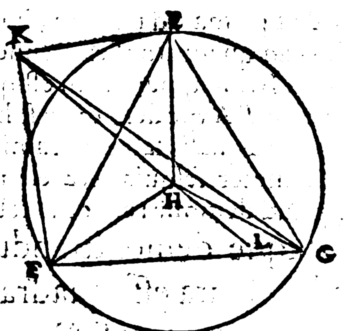
10. sexti.
47. primi.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. XIII.

Pyramidem constituere, & sphęrę comprehendere data, ac demonstrare sphærę diametrum potentia sesquialteram esse lateris ipsius pyramidis.

Exponatur enim datæ sphærę diameter AB, & secetur in C, ita vt AC ipsius CB sit dupla: describaturque in AB semicirculus ADB, & à puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD, & DA iungatur. exponatur preterea circulus EFG ęqualem habens eam, quæ ex centro ipsi DC, in quo describatur triangulnm ęquilaterum EFG: sumaturque centrum circuli H, & iungantur EH HF HG: atque à puncto H ipsi plano circuli EFG ad rectos angulos erigatur HK, ita vt HK ipsi AC sit ęqualis, & KE KF KG iungantur. Quoniam igitur HK recta est ad planum circuli EFG, & ad omnes rectas lineas, quæ in eodem circuli plano existentes ipsam contingunt, rectos angulos faciet. contingit autem ipsam vnaquæque linearum HE HF HG. ergo HK ad vnamquamque ipsarum HE HF HG est perpendicularis. & quoniam AC quidem est æqualis HK, CD vero ipsi HE, & rectos angulos continent; erit basis DA æqualis basi KE. Eadem ratione & vtraque KF KG ipsi DA est ęqualis. tres igitur KE KF KG inter se æquales sunt. quòd cum AC sit dupla CB, erit AB ipsius BC tripla: vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC, vt deinceps demonstrabitur. triplum igitur est quadratum ex AD quadrati ex DC. est autem & quadratum ex FE quadrati ex EH triplum. atque est DC æqualis EH. ergo & AD ipsi EF est ęqualis. sed AD ostensa est æqualis vnicuique ipsarum KE KF KG. & vnaquęque igitur ipsarum EF FG GE vnicuique KE KF KG est ęqualis. & ob id ęquilatera sunt quattuor triangula EFG KEF KFG KGE. pyramis igitur cõstituta est ex quattuor triangulis æqualibus & æquilateris, cuius basis quidem est triangulum EFG, uertex autem K pũctum. Itaq; oportet ipsam & sphæra data comprehẽdere, & ostẽdere sphęræ diametrum potentia sesquialterã esse lateris pyramidis. producatur enim recta linea HL in directum ipsi HK; ponaturque HL



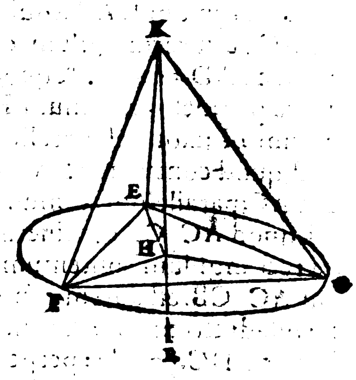


3 diffinit. undecimi.

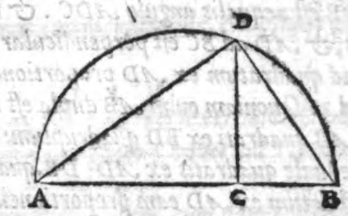
4. primi.

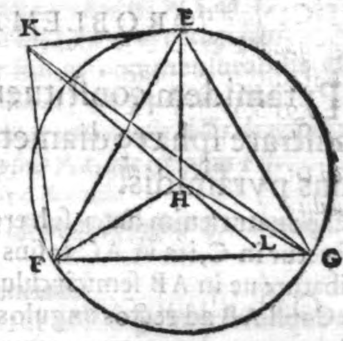
A

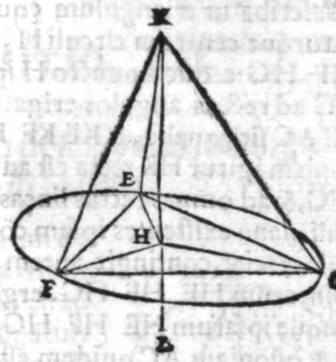
B
C



ipsi BC æqualis. & quoniam est vt AC ad CD, ita DC ad CB; æqualis autem AC quidem ipsi KH, CD vero ipsi HE, & CB ipsi KL: erit vt K
17.sexti. H ad HE, ita EH ad HL. rectangulum igitur K HL est æquale quadrato ex EH. atque est rectus vterque angulorum KHE EHL. ergo in KL descrip tus semicirculus & per punctum E transibit. nam si coniungamus EL, angulus LEK fiet
8. sexti. rectus, cum triangulum ELK æquiangulum sit vnicuiq; triangul orum ELH EKH. si igitur manente KL semicirculus cõuersus in eundem rursus locum restituatur, à quo cœpit moueri, etiã per puncta FG transibit, iunctis FL LG; & rectis similiter factis ad puncta FG angulis: atque erit pyramis comprehensa data sphæra; etenim KL sphæræ diameter est æqualis diametro datæ sphæræ AB, quoniam ipsi quidem AC ponitur æqualis KH; ipsi vero CB æqualis HL. Dico igitur sphæræ diametrum potentia sesquialteram esse lateris pyramidis. Quoniam enim AC dupla est ipsius CB, erit AB ipsius BC tripla. ergo per conuersionem rationis BA sesquialtera est ipsius AC. vt autem BA ad AC, ita est quadratum ex BA ad quadratum ex AD, quoniam iuncta BD, est vt BA ad AD, ita DA ad AC ob
Cor. 8 sexti. similitudinem triangulorum DAB DAC, &
Cor. 20. sexti. quòd vt prima ad tertiam, ita quadratum ex prima ad quadratum ex secunda. ergo quadratum ex BA sesquialterum est quadrati ex AD. atque est BA quidem datæ sphæræ diameter, AD vero æqualis lateri pyramidis. sphæræ igitur diameter sesquialtera est lateris pyramidis. quod demonstrare oportebat.

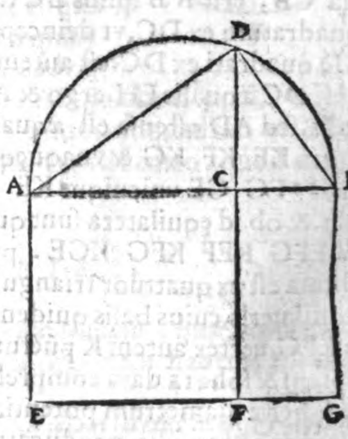






Itaque demonstrandum est vt AB ad BC, ita esse quadratum ex AD ad quadratum ex DC.

Exponatur enim semicirculi figura; iungaturq; DB: & ex AC describatur quadratum EC, & parallelogrammum FB compleatur. Quoniã
Cor. 8. sexti. igitur est vt BA ad AD, ita DA ad AC, propte-
17. sexti. rea quòd triãgulum DAB æquiangulum est triã-
1. sexti. gulo DAC; erit rectangulum contentum BAC quadrato ex AD æquale. & quoniam est vt AB ad BC, ita parallelogrammum EB ad parallelogrammum BF; atque est parallelogrammũ quidem EB, quod continetur BA AC, est enim EA æqualis AC; parallelogrammum uero BF æquale est ei, quod AC CB continetur: erit ut AB ad BC, ita rectangulum contentum BA AC ad cõtentum AC CB. est autem contentum BA AC
17. sexti. æquale quadrato ex AD: & contentum AC CB
Cor. 8. sexti quadrato ex DC. æquale: perpendicularis enim DC media est proportionalis inter basis portio-



nes AC CB, cum angulus ADB sit rectus. ex quibus sequitur vt AB ad BC, ita esse quadratum ex AD ad quadratum ex DC. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC] *Quod deinceps demonstrabitur, videlicet ad finem huius, sed in scholio aliter demonstratur, hoc modo.* A

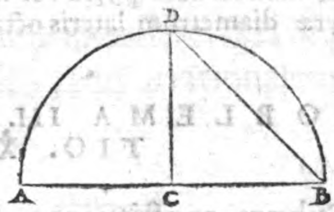
Quoniam enim est ut BA ad AC, ita quadratum ex DA ad quadratum ex AC, erit per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC] *Nam tres rectae lineae BA AD AC deinceps proportionales sunt ex corollario 8. sexti, & quadratum ex AD superat quadratum ex AC, quadrato ex DC, ex 47 primi.*

Est autem & quadratum ex FE quadrati ex EH triplum] *ex antecedente.* B

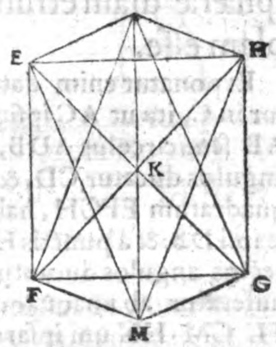
Ergo & DA ipsi EF est ęqualis] *Qm̃ enim quadratum ex AD triplũ est quadrati ex DC, et quadratũ DC ex FE triplum quadrati ex EH; estq́, quadratũ ex DC ęquale quadrato ex EH, quod DC ipsi EH sit aequalis: erit quadraũ ex AD ęquale quadrato ex EF: ideoq́, AD ipsi EF ęqualis.* C

PROBLEMA II. PROPOSITIO. XIIII.

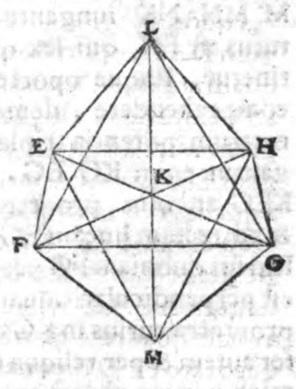
Octaedrum constituere, & sphærã comprehendere, qua & pyramidem: demonstrareq́; sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris octaedri.



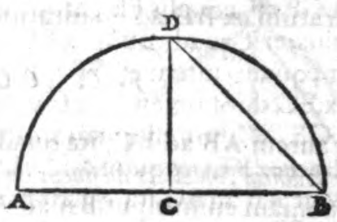
Exponatur datæ sphæræ diameter AB: & in C bifariam secetur; describaturq́; in AB semicirculus ADB; & à puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD: & DB iungatur. exponatur prętera quadratum EFGH habens vnumquodque latus æquale ipsi BD: & iunctis HF EG, erigatur à puncto K ipsi EF GH quadrati plano ad rectos angulos KL; producaturq́; ad alteras partes plani, vt KM: & auferatur ab vtraque rectarum linearum KL KM vni ipsarum KE KF KG KH æqualis vtraque KL XM: & iungantur LE LF LG LH ME MF MG MH. qm̃ igitur KE est æqualis KH, atq; est rectus angulus EKH; erit quadratũ ex HE quadrati ex EK duplum: Rursus quoniam LK est æqualis KE, & rectus LKE angulus; erit quadratum ex EL duplum quadrati ex EK. ostẽsum est autem & quadratum ex HE quadrati ex EK duplum. ergo quadratum ex LE æquale est quadrato ex EH, & LE ipsi EH ęqualis. Eadẽ ratione & LH est ęqualis HE. æquilaterũ igitur est LEH triangulum. similiter ostendemus & vnumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases sunt latera quadrati EFGH, vertices autem LM puncta, æquilaterum esse. octaedrum igitur constitutum est, quod octo triangulis æquilateris continetur. itaq; oportet ipsum & data sphæra comprehendere: demonstrareq́; sphęrę diametrum potentia duplam esse lateris octahedri. quoniam enim tres rectę lineæ LK KM KE inter se æquales sunt, semicirculus in LM descriptus, & per punctum E transibit. & ob eandem caussam si manente LM conuersus semicirculus in eundem locum restituatur, à quo cœpit



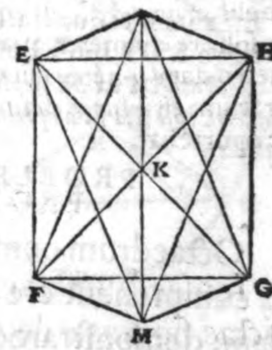
47. primi



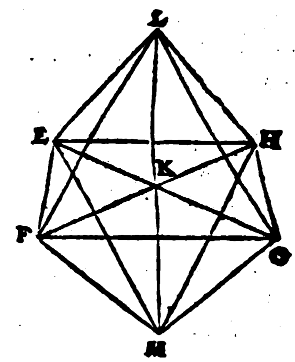
moueri, transibit etiam per puncta FGH: atque erit octaedrum sphæra comprehensum. Dico etiam comprehensum esse data sphæra. quoniam enim LK est æqualis KM, communis autem KE, & angulos æquales cōtinent; erit basis LE basi EM æqualis. & quoniam rectus est LEM angulus, in semicirculo



47.primi. enim, erit quadratum ex LM quadrati ex LE duplum. rursus quoniam AC est æqualis CB,
Cor. 8.& 20 sexti. erit AB dupla ipsius BC. vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD. duplum igitur est quadratum ex AB quadrati ex BD. ostensum est autem & quadratum ex LM quadrati ex LE duplum. atque est quadratum ex BD æquale quadrato ex LE; posita est enim EH ipsi DB æqualis. ergo quadratum ex AB est æquale quadrato ex LM; ac propterea ipsa AB est æqualis LM. est autem AB diameter datæ sphæræ. quare LM est æqualis datæ sphæræ diametro. octaedrum igitur comprehensum est data sphæra: & simul demonstratum est sphæræ diametrum lateris octaedri potentia duplam esse.

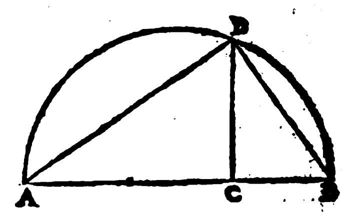


PROBLEMA III. PROPOSITIO. XV.



Cubum constituere, & sphæra comprehendere, qua & priores, demonstrareque sphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam esse.

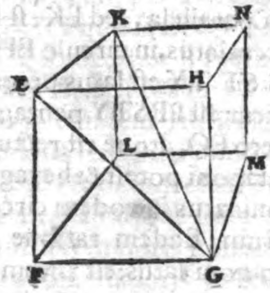
Exponatur enim datæ sphæræ diameter AB: & secetur in C, ita ut AC ipsius CB sit dupla: describaturq; in AB semicirculus ADB, & à puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD, & DB iūgatur. deinde exponatur quadratum EFGH, habens unumquodque latus æquale ipsi DB: & à punctis EFGH quadrati EFGH plano ad rectos angulos ducantur EK FL GM HN, & auferatur ab unaquaque rectarum linearum EK FL GM HN uni ipsarum EF FG GH HE æqualis unaquæque EK FL GM HN: & KL LM MN NK iungantur. cubus igitur constitutus est FN, qui sex quadratis æqualibus continetur. Itaque oportet ipsum & sphæra data comprehendere, demonstrareque sphæræ diametrum potentia triplam esse lateris cubi. Iun-



3.diff. undecimi. gantur enim KG EG. & quoniam rectus est KEG angulus, propterea quòd & KE perpēdicularis sit ad EG planū uidelicet, & ad rectam lineam EG: semicirculus in KG descriptus & per pūctum E transibit.
4.Vndecimi Rursus quoniam FG perpēdicularis ad utramque ipsarum FL FE, & ad FK planum est perpendicularis. quare si iungamus FK ipsa FG & ad FK perpendicularis erit; ac propterea rursus in KG descriptus semicirculus transibit & per punctum F. similiter autem & per reliqua cubi puncta transibit. si igitur manente KG conuersus semicirculus in eūdem rursus locum restituatur, à quo cœpit moueri, erit cubus sphæ-

ra

ra comprehensus. Dico & data sphæra. Quoniam enim GF est æqualis FE, atque est rectus qui ad F angulus; erit quadratum ex EG quadrati ex EF duplum. ęqualis autem est EF ipsi EK. quadratum igitur ex EG duplum est quadrati ex EK. ergo quadrata ex GE EK, hoc est quadratum ex GK triplum est quadrati ex KE. & quoniam AB est ipsius BC tripla: & ut AB ad BC, ita quadratū ex AB ad quadratum ex BD; erit quadratum ex AB quadrati ex BD triplum. ostensum est autem & quadratum ex GK triplum quadrati ex KE: & posita est KE ipsi BD ęqualis. ergo & KG est ęqualis AB. atque est AB datæ sphærę diameter. quare & KG æqualis erit diametro datæ sphęræ. cubus igitur data sphæra est comprehensus. & simul demonstratum est sphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam esse. quod demonstrare oportebat.



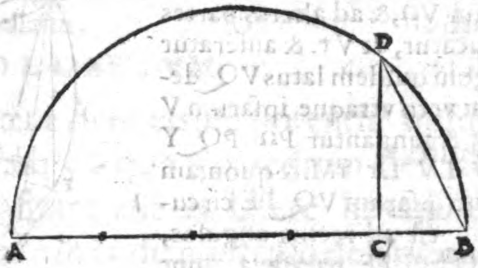
47 prima.

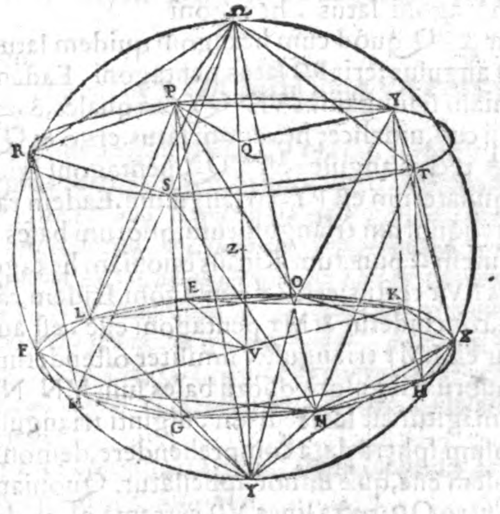
Coroll. 20 sexti.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XVI.

Icosaedrum constituere & sphæra comprehendere, qua & prędictas figuras; demonstrareque icosaedri latus irrationalem esse lineam, quę minor appellatur.

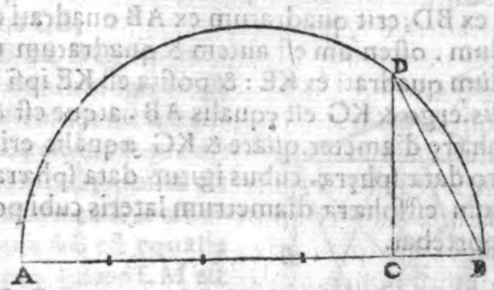
Exponatur datę sphærę diameter AB; seceturque in C, ita ut AC ipsius DB sit quadrupla: & in AB descripto semicirculo ADB, ducatur à puncto C ipsi AB ad rectos angulos recta linea CD. & DB iungatur. deinde exponatur circulus EFGHK, cuius ea, quæ ea centro sit ęqualis ipsi DB: describaturq; in circulo EFGHK pentagonum ęquilaterū & æquiangulum EFGHK: & circumferentiæ EF FG GH HK KE bifariam secentur in LMNXO punctis; & iungantur EL LF FM MG GN NH HX XK KO OE: & similiter LM MN NX XO OL. æquilaterum igitur est LMNXO pentagonum; & recta linea EO est decagoni latus. deinde à punctis EFGHK ipsi plano circuli ad rectos angulos erigantur EP FR GS HT KY æquales existentes ei, quæ ex centro circuli EFGHK, & iungātur PR RS ST TY YP PL LR RM MS SN NT TX XY YO OP. Quoniam igitur utraque ipsarum EP KY eidem plano est ad rectos angulos, erit EP ipsi KY



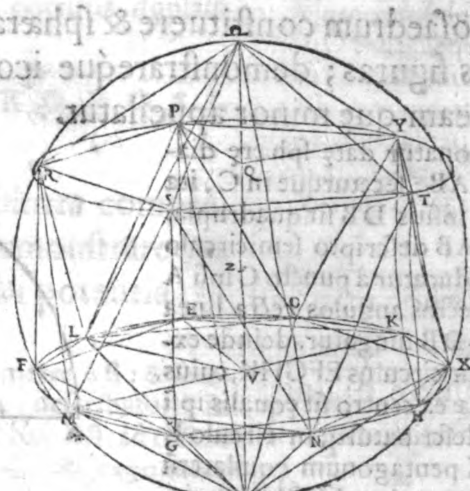


parallela; atque est ipsi æqualis. quę autem æquales, & parallelas ad easdem partes
33. primi. coniungunt rectæ linræ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt. ergo PY ipsi EK & ęqualis est, & parallela. sed EK est latus pentagoni æquilateri. ergo & PY est pentagoni æquilateri latus, in circulo EFGHK descripti. Eadem ratione & unaquæque ipsarū PR RS ST TY est latus pentagoni ęquilateri in eodem circulo descripti. æquilaterum igitur est PRSTY pentagonum. & quoniam hexagoni quidem latus est PE, decagoni uero EO, atque est rectus PEO angulus; erit PO latus pentagoni. etenim latus pentagoni potest & hexagoni, & decagoni latus in eodem circulo descriptorum. Eadem ratione & OY est pentagoni latus; est autem & PY latus pentagoni. ergo æquilaterum est triangulum POY. & ob eandem caussam vnumquodque triangulorum PLR RMS SNT TXY est æquilaterum. & quoniam pentagoni ostensa est vtraque ipsarum PL PO, atque est LO pentagoni; erit PLO æquilaterum triangulum. Eadem ratione & vnumquodq; triā gulorum LRM MSN NTX XYO ęquilaterum est.

B



Sumatur cētrum circuli EFGHK, quod sit punctum V; & à puncto V ipsi circuli plano ad rectos angulos erigatur VΩ, & ad alteras partes producatur, vt Vϒ: & auferatur hexagoni quidem latus VQ decagoni vero vtraque ipsarum Vϒ QΩ, & iungantur PΩ PQ YΩ EV LV Lϒ ϒM. & quoniam vtraque ipsarum VQ PE circuli plano est ad rectos angulos,
6 undecimi erit VQ ipsi PE parallela. sunt autem & ęquales. ergo EV PQ & ęquales sūt, & parallelæ: estq; EV hexagoni latus. hexagoni igitur & PQ. quod cum hexagoni quidem latus sit PQ, decagoni vero QΩ, & rectus



10. huius. PQΩ angulus; erit PΩ latus pentagoni. Eadem ratione & YΩ pentagoni est latus; quoniam si iungamus VK QY & æquales, & ex opposito erunt, atque est VK ex centro circuli, uidelicet hexagoni latus. ergo & QY est latus hexagoni. decagoni autē QΩ, & rectus angulus est YQΩ. pentagoni igitur est YΩ: estque PY pentagoni. quare æquilaterum est PYΩ triangulum. Eadem ratione & æquilaterum est vnumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases sunt PR RS ST TY rectæ lineę, uertex autem Ω punctum. Rursus quoniam hexagoni est VL, decagoni vero Vϒ, & angulus LVϒ rectus; erit Lϒ pentagoni. Eadem ratione si iungamus MV, quæ est hexagoni, concludetur & Mϒ pentagoni esse. est autem & LM pentagoni. æquilaterum igitur est LMϒ triangulū. similiter ostendetur & ęquilaterum esse unumquodque reliquorū triāgulorū quorū bases sunt MN NX XO OL, uertex aūt ϒ punctū. cōstitutum igitur est icosaedrum, uiginti triangulis æquilateris contentum. Itaq; oportet ipsum sphęra data comprehendere, demonstrareque icosaedri latus lineam irrationalem esse, quæ minor appellatur. Quoniam enim hexagoni latus est VQ, decagoni vero QΩ; recta linea VΩ extrema, ac media ratione secta est in Q, & VQ est maior portio. est igitur ut ΩV ad VQ, ita VQ ad QΩ. atque est VQ ipsi VL æqualis, &

C

QΩ

QΩ ipsi V✝. quare ut ΩV ad VL, ita LV ad V✝. & sunt anguli ΩVL LV✝ recti. si igitur iungamus rectam lineam LΩ, erit ✝LΩ rectus angulus, ob similitudinem triangulorum ✝LΩ VLΩ. ergo semicirculus in ✝Ω descriptus etiam per L transibit. Eadem ratione quoniam est ut ΩV ad VQ, ita VQ ad QΩ; & æqualis est ΩV quidem ipsi ✝Q. VQ uero ipsi QP: erit vt ✝Q ad QP, ita PQ ad QΩ: ideoque si rursus iungamus P✝, erit angulus, qui ad P rectus. semicirculus igitur descriptus in ✝Ω transibit & per P. Quòd si manente ✝Ω conuersus semicirculus in eundem rursus locum restituatur, à quo cœpit moueri, etiam per P, & per reliqua icosaedri puncta transibit: atque erit icosaedrum sphæra comprehensum. Dico & data. secetur enim VQ bifariam in Z & quoniam recta linea VΩ extrema, ac media ratione secta est in Q, & ΩQ est minor ipsius portio, ipsa ΩQ assumens dimidiam maioris portionis, videlicet QZ quintuplum poterit quadrati eius, quod à dimidia maioris portionis describitur. quadratum igitur ex ΩZ quadrati ex ZQ quintuplum est. & ipsius quidē ZΩ dupla est Ω✝; ipsius vero AQ dupla QV. ergo quadratum ea Ω✝ quintuplum est quadrati ex VQ. & quoniam AC quadrupla est ipsius CB, erit AB ipsius BC quintupla. ut autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quaratum ex BD. quadratum igitur ex AB quadrati ex BD est quintuplum. ostensum autem est & quadratum ex Ω✝ quintuplum quadrati ex VQ; atque est DB ęqualis VQ: vtraque enim ipsarum est æqualis ei quæ ex centro circuli EFGHK. quare & AB est ęqualis ✝Ω, estq; AB datę sphęræ diameter. & ✝Ω igitur erit diameter datę sphęrę. ergo icosaedrum est data sphæra comprehensum. Dico icosaedri latus irrationlem esse lineam, quæ minor appellatur. Quoniā enim rationalis est sphærę diameter, atque est potētia quintupla eius, quæ ex centro EFGHK circuli; erit & quæ ex centro circuli EFGHK rationalis. quare & diameter ipsius rōnalis erit. si aūt in circulo rationalē diametrū habente pentagonū æquilaterū describatur, erit latus pētagoni linea irrationalis, quæ minor appellatur. sed pentagoni EFGHK latus est icosaedri. ergo icosaedri latus est linea irrationalis, quę minor appellatur.

6. sexti.

E F G H K L

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est sphæræ diametrum potentia quintuplā esse eius, quæ ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur: & sphærę diametrum compositam esse ex latere hexagoni, & duobus decagoni lateribus, quę in eodem circulo describuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quoniam igitur utraq; ipsarum EP KY eidem plano est ad angulos rectos, erit EP ipsi KY parallela.] *Ex 6 vndecimi.*

B Erit PO latus pentagoni] *Ex 10 huius.*

C Quoniam enim hexagoni est VQ, decagoni uero QΩ, recta linea VΩ extrema, ac media ratione secta est in Q] *Ex 9 huius.*

D Quare ut ΩV ad VL, ita LV ad V✝: & suut anguli ΩVL LV✝ recti. si igitur iungamus rectam lineam LΩ, erit ✝LΩ angulus rectus ob similitudinem triangulorum ✝LΩ VLΩ] *Quoniam enim est vt ΩV ad VL, ita LV ad V✝, erit vt ΩV ad V✝, videlicet vt prima ad tertiam, ita quadratmn primae ΩV ad quadratum VL secundae: componendoq; vt Ω✝ ad ✝V, ita quadrata ex ΩV VL, hoc est quadratum ex ΩL ad quadratum ex LV: & per conuersionem rationis vt ✝Ω ad ΩV, ita quadratum ex LΩ ad quadratum ex ΩV. quare LΩ est media proportionalis inter ✝Ω ΩV, quod deinceps demonstrabimus. vt igitur ✝Ω ad ΩL, ita LΩ ad ΩV. atque est angulus LΩ✝ vtrique communis. ergo triangulum ✝ΩL simile est triangulo LΩV, & angulus LVΩ rectus est aequalis angulo ✝LΩ. angulus igitur ✝LΩ rectus erit. At vero LΩ inter ✝Ω ΩV mediam esse proportionalem ex his apparebit.*

Si sint tres rectæ lineæ, sitq; vt prima ad tertiam, ita quadratum secundæ ad quadratum tertiæ, erunt dictæ lineæ deinceps proportionales.

Sint tres rectae lineae A B C; sitq; vt A ad C, ita quadratum ex B ad quadratum ex C. Dico

ABC

ABC deinceps proportionales esse. Sumatur enim inter AC media proportionalis D, erit vt A ad C, ita quadratũ ex A ad quadratum ex D, hoc est quadratum ex D ad quadratum ex C. sed vt A ad C, ita positum est quadratum ex B ad quadratum ex C. ergo quadratum ex D aequale est quadrato ex B; ac propterea D ipsi B est aequalis. tres igitur rectae lineae ABC deinceps proportionales sunt. sed licet expeditius demonstrare angulum ϒLΩ rectum, esse hoc modo. Quoniã enim est vt ΩV ad VL, ita LV ad Vϒ; suntq; anguli ΩVL LVϒ recti, erit triangulum ΩVL triangulo LVϒ simile, & angulus LΩV ęqualis angulo VLϒ. sunt autem anguli VLΩ LΩV equales vni recto, cum rectus sit LVΩ: ergo & anguli ΩLV VLϒ vni recto sunt aequales: & ob id angulus ϒLΩ est rectus. quod opo rtebat demonstrare.

E Ipsa ΩQ assumens dimidiam maioris portionis videlicet QZ quintuplum poterit quadrati eius, quod à dimidia maioris portionis describitur] *Ex 3. huius.*

F Ergo quadratum ex Ωϒ quintuplum est quadrati ex VQ] *Ex 15. quinti.*

G Vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD] *Ex corollario 20 sexti. est enim vt AB ad BD, ita DB ad BC ex 8. eiusdem.*

H Erit & quæ ex centro circuli EFGHK rationalis. quare & diameter ipsius rationalis erit] *Quoniam enim sphęrę diameter est potentia quintupla eius, quae ex centro circuli, habebit quadratum diametri sphęrę ad quadratum eius, quae ex centro circuli proportionem eam, quã numerus habet ad numerum: & idcirco ipsi commensurabile erit. rationale autem est quadratum diametri sphęrę, cum ipsa sit rationalis. ergo & quadratum eius, quae ex centro circuli, est rationale: idcoq; ea, quae ex centro circuli, & eius diameter rationalis erit; nam quae rationali commensurabilis est, & ipsa est rationalis.*

6. decimi.
6. diffi. dec.

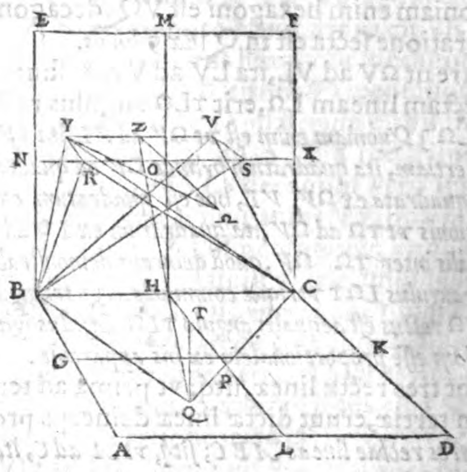
K Si autem in circulo rationalem diametrum habente pentagonum ęquilaterum describatur, erit latus pentagoni linea irrationalis, quæ minor appellatur] *Ex 11. huius.*

L Sed pentagoni EFGHK latus est icosaedri] *Illud vero ex ia dictis manifestissime cõstat.*

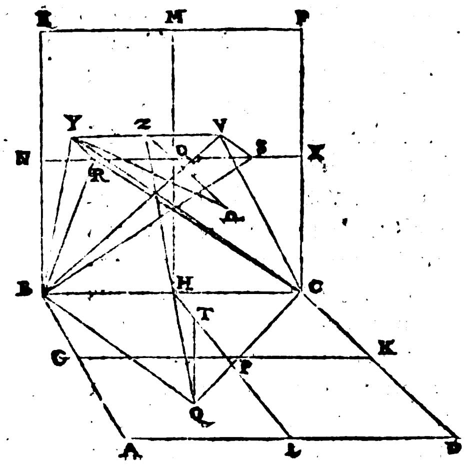
PROBLEMA VI. PROPOSITIO XVII.

Dodecahedrum constituere, & sphæra comprehendere, qua & prędictas figuras; demonstrare que dodecahedri latus esse irrationalem lineam, quæ apotome appellatur.

Exponãtur prędicti cubi duo plana ad rectos angulos inter se se AB CD CBEF; & secetur vnumquodq; ipsorum laterum AB BC CD DA EF EB FC bifariam in punctis GH KLMNX, & GK HL MH NX iungantur. deinde secentur rectæ lineæ NO OX HP extrema, ac media ratione in RST punctis: sintque ipsorũ maiores portiones RO OS TP: & à punctis RST ad rectos angulos cubi planis erigantur RY SV TQ ad exteriores partes cubi, quæ ipsis RO OS TP ęquales ponantur; iunganturq; YB BQ QC CV VY. Dico pẽtagonum YBQCV æquilaterũ esse, &



fe, & in uno plano, & praeterea ęquiā gulum. Iungantur enim RB SB VB. & quoniam recta linea NO extrema, ac media ratione secta est in R, & OR est maior ipsius portio, erunt quadrata ex ON NR tripla quadrati ex OR. ęqualis autem est ON ipsi NB, & OR ipsi RY. quadrata igitur ex BN NR quadrati ex RY sunt tripla. sed quadratis ex BN NR ęquale est quadratum ex BR. ergo quadratum ex BR triplum est quadrati ex RY: ac propterea quadrata ex BR RY quadrati ex RY sunt quadrupla. quadratis aūt ex BR RY aequale est quadratū ex BY. ergo quadratū ex BY quadruplū est quadrati ex YR. & ob id BY est dupla ipsius YR. atq; est VY ipsius YR dupla, qm̄ & RS est du-

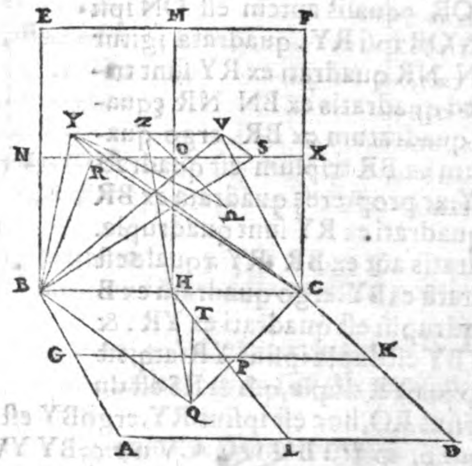


pla ipsius RO, hoc est ipsius RY. ergo BY est ęqualis YV. similiter demōstrabitur & unaquaeq; ipsarū BQ QC CV utriq; BY YV aequalis. ęquilaterū igitur est BYVCQ pentagonū. Dico & in vno esse plano. ducatur.n. à puncto O ipsa OZ utriq; ipsarū RY SV parallela ad exteriores cubi partes: & iungantur ZH HQ. Dico ZHQ rectā lineam esse. nā cum HP extrema, ac media ratione secetur in T, & PT sit maior ipsius portio, erit ut HP ad PT, ita PT ad TH. ęqualis autem est HP quidem ipsi HO, PT vero utrique ipsarum TQ OZ. est igitur vt HO ad OZ, ita QT ad TH. atque est HO parallela ipsi TQ; utraque enim ipsarum plano BD est ad rectos angulos: TH uero est parallela OZ, quòd vtraque ipsarum sit ad rectos angulos plano BF. si autē duo triangula componantur ad unum angulum, ut ZOH, HTQ, quae duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera etiam sint parallela, reliqua ipsorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. ergo ZH est in directum ipsi HQ. omnis autem recta linea est in uno plano. In uno igitur plano est YBQCV pentagonum. Dico & aequiangulum. Quoniam enim recta linea NO extrema, ac media ratione secta est in R, & OR est maior portio, erit vt utraque NO OR ad ON, ita NO ad OR. aequalis autem est RO ipsi OS. quare ut SN ad NO, ita NO ad OS: & ob id NS extrema, ac media ratione secta est in O; & maior portio est NO. quadrata igitur ex NS SO quadrati ex ON sunt tripla. ęqualis autem est ON ipsi NB, & OS ipsi SV. ergo quadrata ex NS SV tripla sunt quadrati ex NB; ac propterea quadrata ex NS SV NB quadrati ex NB sunt quadrupla. sed quadratis ex SN NB est aequale quadratum ex BS. quadrata igitur ex BS SV, hoc est quadratum ex VB, quòd angulus VSB sit rectus, quadruplum est quadrati ex NB: ideoq; ipsa VB ipsius BN est dupla. est autem & BC dupla BN. ergo VB est ęqualis BC. & quoniam duae BY YV duabus BQ QC ęquales sunt. & basis VB aequalis basi BC, erit angulus BYV angulo BQC ęqualis. similiter ostendemus & YVC angulum ęqualem angulo BQC. tres igitur anguli BQC BYV YVC inter se aequales sunt. si autem pentagoni aequilateri tres anguli sint aequales, pentagonum ęquiangulum erit. ęquiangulum igitur est pentagonum BYVCQ. ostensum est autem & ęquilaterum. ergo pentagonum BYVCQ ęquilaterum est, & aequiangulum. atque est in uno cubi latere BC. si igitur in unoquoque duodecim cubi laterum eadem construamus, figura solida constituetur duodecim pentagonis aequilateris, & aequiangulis contenta. Itaque oportet ipsum & data sphaera comprehendere; demonstrareque dodecahedri latus esse irrationalem lineam, quae apotome appellatur: producatur enim ZO, & sit ZΩ. occurrit igitur ZΩ diametro cubi, & bifariam se mutuo secant. hoc enim ostensum est in penultimo theoremate undecimi libri. secent in Ω. ergo Ω est centrum

Ppp sphaera

A
47. primi
C
10. xiii.
B
C
32. sexti
D
E
47. primi
10. xiij
8. primi
F
A
B
C
G

sphæræ, quæ cubum comprehendit, & OΩ dimidium lateris cubi. iungatur YΩ. & quoniam recta libea NS extrema, ac media ratione secta est in O, & NO est ipsius portio maior, erũt quadrata ex NS SO, tripla eius quod fit ex NO. ęqualis aũt est NS ipsi ZΩ, quoniam & NO ipsi OΩ est æqualis, & ZO ipsi OS. sed & OS est æqualis Z
A Y, quoniã & RO. quadrata igitur ex ΩZ ZY tripla sunt quadrati, quod fit ex NO. sed quadratis ex ΩZ ZY æquale est quadratum ex YΩ. ergo quadratum ex YΩ triplum est quadrati ex NO. est autem quę ex cẽtro sphæræ cubũ cõprehendentis poten-
G tia tripla dimidij lateris cubi. prius enim ostensum est cubum constituere, & sphæra comprehendere, demõstrareq; sphęrę diametrum potentia triplam esse lateris cubi. si autem tota totius, & dimidia dimidiæ. atque est NO dimidia lateris cubi. ergo YΩ est æqualis ei, quæ ex centro sphæræ cubum comprehendentis: estque Ω centrum sphæræ comprehendentis cubum. quare punctum Y est ad sphęrę superficiem. similiter demonstrabimus & unumquemque reliquorum angulorum dodecaedri esse ad superficiẽ sphæræ. dodecaedrum igitur est data sphęra comprehensum. Dico dodecaedri la-



E tus irrationalem esse lineam, quæ apotome appellatur. Quoniam enim recta linea NO extrema, ac media ratione secta, maior portio est RO; erit tota NX extrema, ac
C media ratione secta, maior portio RS. nam cum sit ut NO ad OR, ita OR ad RN: &
x.quinti. earum duplæ: partes enim eodem modo multiplici um eandem habent proportionem, erit vt NX ad RS, ita RS ad vtramque NR SX. maior autem est NX, quàm RS. ergo & RS est maior, quàm vtraque NR SX. est igitur NX extrema, ac media ratione secta; & RS est ipsius maior portio. æqualis autem est RS ipsi YV. ergo NX extre-
D ma, ac media ratione secta, maior portio est YV. & quoniam rationalis est sphæræ
H diameter, atque est potentia tripla lateris cubi; erit NX rationalis, quę est cubi latus.
K si autem recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit, vtraque portio irrationalis est, quæ apotome appellatur. ergo YV, quæ est latus dodecaedri, irra-
E tionalis est, quæ apotome appellatur.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est latere cubi extrema, ac media ratione secto maiorem portionem esse dodecaedri latus.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erunt quadrata ex ON NR tripla quadrati ex OR] *Ex 4. huius.*

B Atque est HO parallela ipsi TQ: vtraque enim ipsarum plano BD est ad rectos angulos] *Ex 6. vndecimi.*

C Reliqua ipsorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt] *Ex 32 sexti.*

D Quoniam enim recta linea NO extrema, ac media ratione secta est in R, & OR est maior portio, erit vt vtraque NO OR ad ON, ita NO ad OR] *Ex 5. huius. si enim recta linea extrema, ac media ratione secetur, adijciaturq; ipsi aequalis maiori portioni, erit tota extrema, ac media ratione secta, & maior portio erit ea, quae à principio recta linea. quare vt vtraque*

que NO OR, hoc est ut tota NO unà cum maiori portione OR ad totam NO, ita est NO ad OR; sit enim tota NO maior portio, & OR minor.

Quadrata igitur ex NS SO quadrati ex ON sunt tripla] *Ex 4. huius.* E

Si autem pentagoni ęquilateri tres anguli sint æquales pentagonum æquiangulum erit[*Ex 7. huius.* F

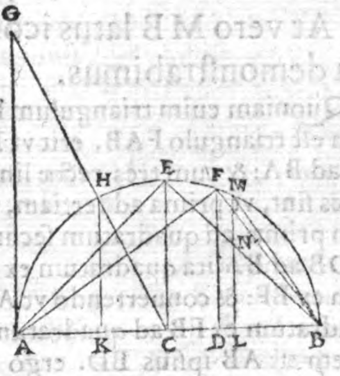
Prius enim ostensum est cubum constituere, & sphæra comprehendere] *In quinta decima huius.* G

Erit NX rationalis, quę est cubi latus] *Nam cum sphęrae diameter sit potentia tripla lateris cubi, habebit ad ipsum proportionem, quam numerus habet ad numerum, & ipsi commensurabile erit. quae autem rationali sunt commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia solum, rationales sunt, per sextam diffinitionem decimi libri.* H

Si autem recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit, vtraque portio irrationalis est, quæ apotome appellatur] *Ex 6. huius.* K

PROBLEMA VII. PROPOSITIO. XVIII.

Latera quinque figurarum exponere, & inter se comparare.



Exponatur datæ sphęrę diameter A B, & secetur in C quidem, ita vt AC sit æqualis CB; in D vero ita, vt A D ipsius D B sit dupla: describaturq; in AB semicirculus AEB: & à punctis CD ipsi AD ad rectos angulos ducatur CE DF: & A F FB EB iungantur. Itaq; quoniam A D dupla est ipsius DB, erit AB ipsius BD tripla: & per cõuersionem rationis B A sesquialtera ipsius A D. vt autem B A ad A D, ita quadratum ex B A ad quadratum ex A F. est enim triangulum A F B triangulo AFD æquiangulum. ergo quadratum ex B A sesquialterum est quadrati ex AF. est autem & sphærę diameter potentia sesquialtera lateris pyramidis; estque A B sphæræ diameter. ergo A F pyramidis lateri est æqualis. Rursus quoniam AD dupla est DB, erit AB ipsius BD tripla. Sed ut AB ad BD, ita quadratum ex A B ad quadratum ex FB. quadratum igitur ex AB triplum est quadrati ex BF. est autem & sphæræ diameter potentia tripla lateris cubi: atque est AB sphæræ diameter. ergo BF est cubi latus. & quoniam AC est ęqualis CB, erit AB ipsius BC dupla. ut autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BE. quadratum igitur ex AB quadrati ex BE est duplum. atque est sphęræ diameter potentia dupla lateris octaedri: & AB est diameter datę sphæræ. quare BE est octaedri latus. ducatur à puncto A ipsi AB ad rectos angulos AG: ponaturq; AG ęqualis AB: & iuncta GC à puncto H ad AB perpendicularis ducatur HK. quoniam igitur AG dupla est ipsius AC; etenim GA est æqualis AB; ut autem GA ad AC, ita HK ad KC: erit HK ipsius KC dupla. ergo quadratum ex HK quadruplum est quadrati ex KC. quadrata igitur ex HK KC, quod est quadratum ex HC quintuplum est quadrati ex KC. æqualis autem est HC ipsi CB. ergo quadratum ex BC quintuplum est quadrati ex CK. & quoniam AB est dupla ipsius BC, quarum AD dupla est DB; erit reliqua BD dupla ipsius DC: ideoque BC ipsius CD est tripla. nonuplum igitur est quadratum ex BC quadrati ex CD. sed quadratum ex BC quadrati ex CK est quintuplum. ergo quadratum ex KC maius est quadrato ex CD. & KC ipsa CD maior. ponatur ipsi KC æqualis CL; & à puncto L ipsi AB ad rectos angulos ducatur LM, & MB iungatur. & quoniam quadratum ex BC quintuplum est quadrati ex KC; atque est ipsius quidem CB dupla BA; ipsius uero CK dupla KL: erit quadratum ex AB quadrati

8 sexti.

13. huius.

15. huius.

14. huius.

4. sexti.

20. sexti.

19 quinti.

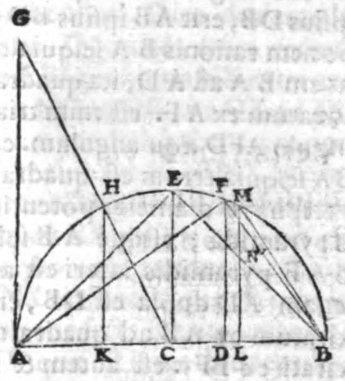
20. sexti.

15. quinti.

Corol. 16. huius. drati ex KL quintuplum. sed & sphęrę diameter potentia quintupla est eius, quæ ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur. atque est AB diameter sphæræ. ergo
Corol. 16. huius. KL est hexagoni latus dicti circuli. Præterea quoniam sphærę diameter composita est ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni in dicto circulo descriptorũ; atque est AB quidem diameter sphæræ, KL vero hexagoni latus, & AK est ęqualis LB: erit vtraque ipsarum AK LB latus decagoni descripti in eodem circulo, à quo
14. tertij. icosaedrum describitur. & quoniam decagoni est LB, hexagoni vero ML; est enim æqualis ipsi KL, quòd & ipsi HK; namque æqualiter à centro distant; & est vtraque
10. huius. HK KL dupla ipsius HC: erit MB latus pentagoni. quod autem pentagoni idẽ est,
16. huius. & icosaedri. ergo MB est icosaedri latus. & quoniam FB est latus cubi, secetur extre
Ex corol. antecedentis. ma, ac media ratione in N, & BN sit maior portio; erit NB dodecaedri latus. quòd cum sphæræ diameter ostensa sit ipsius quidem AF lateris pyramidis potentia sesquialtera; ipsius vero BE octaedri potẽtia dupla, & ipsius FB cubi potentia tripla, quarum partium sphæræ diameter potentia est sex, earum pyramidis quidem latus erit quattuor; octaedri vero trium, & cubi duarũ. ergo latus pyramidis octaedri quidem lateris potentia est sesquitertium, cubi vero potentia duplum: & octaedri latus lateris cubi potentia est sesquialterum. latera igitur trium figurarum iam dicta, videlicet pyramidis, octaedri, & cubi inter se sunt in proportionibus rationalibus: reliqua vero duo, dico autem icosaedri, & dodecaedri, neque inter se, neque ad iam dicta sunt in rationalibus proportionibus, nempe minor, & apotome.

At vero MB latus icosaedri maius esse dodecaedri latere BN, ita demonstrabimus.

8. sexti. Quoniam enim triangulum FDB ęquiangulum est triangulo FAB, erit vt DB ad BF, ita FB ad BA: & cum tres rectæ lineæ proportionales sint, vt prima ad tertiam, ita erit quadra-
Cor. 20. sexti. tum primæ ad quadratum secundę. est igitur vt DB ad BA, ita quadratum ex DB ad quadratum ex BF: & conuertendo vt AB ad BD, ita quadratum ex FB ad quadratum ex BD. tripla autem est AB ipsius BD. ergo quadratum ex
20. sexti. FB quadrati ex BD est triplum. atque est quadratum ex AD quadruplum quadrati ex DB; est.n. AD ipsius DB dupla. ergo quadratũ ex AD maius est quadrato ex FB; propterea quòd AD quàm FB est maior. multo igitur maior est



9. huius. AL quàm FB. & ipsa quidem AL extrema, ac media ratione secta, maior portio est LK, quoniam KL est hexagoni latus, & KA decagoni. ipsa uero FB extrema, ac media ratione secta, maior portio est BN. maior igitur est KL quàm BN, est autem KL
19. primi ipsi LM æqualis. ergo LM quàm BN est maior. sed BM est maior quàm ML. ergo MB, quę est latus icosaedri maior erit ipsa BN, dodecaedri latere.

ALITER. Quoniam enim AD dupla est DB, erit AB ipsius BD tripla. ut au-
Cor. 20. sex. tem AB ad BD, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF, propterea quod trian-
8. sexti. gulum FAB triangulo FBD ęquiangulum est. triplum igitur est quadratum ex AB quadrati ex BF. Ostensum est autem quadratum ex AB quadrati ex KL quintuplũ. ergo quinque quadrata ex KL tribus quadratis ex BF sunt æqualia. sed tria ex FB maiora sunt quàm sex eorum, quæ fiunt ex BN. & quinque igitur ex KL, quàm sex eorum, quæ ex BN sunt maiora. ergo & unum ex KL maius est vno ex BN; ac propterea KL quàm BN maior: æqualis autem KL ipsi LM. maior igitur est LM, quam BN; multo igitur MB quàm BN est maior. quod demonstrare oportebat.

Tria vero, ex FB maiora esse, quàm sex earum, quæ ex BN, hoc modo ostendemus.

Quoniam enim maior est BN quàm NF, erit rectangulum, quod continetur FB BN maius contento BF FN. quod igitur continetur FB BN vnà cum contento BF FN maius est, quàm duplum eius, quod BF FN continetur. sed quod quidem continetur FB BN vnà cum contento BF FN est quadratum ex FB. contentum autem BF FN est æquale quadrato ex BN; etenim FB extrema, ac media ratione secta est in N, & quod extremis continetur est æquale ei, quod fit à media. quadratum igitur ex FB maius est, quàm duplum quadrati ex BN. quare vnum ex FB duobus ex BN est maius; & idcirco tria, quæ ex FB maiora sunt, quàm sex eorum, quæ fiunt ex BN. quod demonstrare oportebat.

2. secundi.

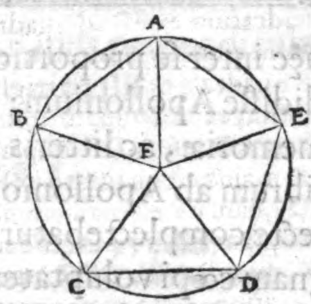
17. sexti.

Dico præter iam dictas quinque figuras non constitui aliam figuram, quæ æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

Ex duobus enim triangulis, vel ex alijs duobus planis non constituetur angulus solidus. ex tribus autem triangulis cõstituitur angulus pyramidis, ex quattuor octaedri, ex quinque icosaedri: at ex sex triangulis æquilateris, & æquiãgulis ad vnum punctum constitutis, non est angulus solidus. cum enim trianguli æquilateri angulus sit duæ tertiæ recti, erunt sex quattor rectis æquales. quod fieri non potest. omnis enim solidus angulus minoribus, quàm quattuor rectis continetur. Eadem ratione neque ex pluribus, quàm sex angulis planis constituitur solidus angulus. itaque quadratis tribus angulus cubi continetur. ut autem quattuor contineatur fieri non potest; essent enim rursus quattuor recti. pentagonis autẽ æquilateris, & æquiãgulis, tribus quidem continetur angulus dodecaedri, sed vt quattuor contineatur fieri non potest. nam cum pentagoni æquilateri angulus constet ex recto, & quinta recti parte, erunt quattuor anguli quattuor rectis maiores. quod fieri non potest. neque uero alijs polygonis figuris constituetur angulus solidus propter absurda, quæ consequuntur. non igitur præter iam dictas figuras alia figura solida constituitur æquilateris, & æquiangulis contenta. quod oportebat demonstrare.

21 undecimi

Verum enim vero pentagoni æquilateri, & æquianguli angulũ constare ex recto, & recti quinta parte, hoc modo ostendemus.



Sit enim pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & circa ipsum circulus ABCDE describatur: sumaturque ipsius centrum, quod sit F; & iungantur FA FB FC FD FE, quæ pẽtagoni ABCDE angulos bifariam secabunt. & quoniam quinque anguli, qui ad F quattuor rectis æquales sunt, & inter se sũt æquales, erit unus ipsorum, ut AFB unius recti, dempta quinta recti parte. ergo reliqui FAB ABF sunt unius recti, & quintæ partis. æqualis aũt est angulus FBA angulo FBC. & totus igitur ABC pentagoni angulus constat ex recto, & quinta recti parte. quod oportebat demonstrare.

TERTIIDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER QVARTVSDECIMVS ET SOLIDORVM QVARTVS.

vt quidam arbitrantur.

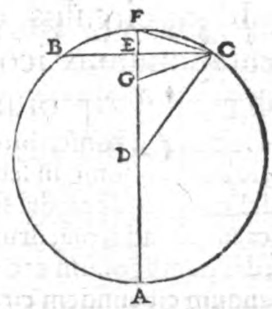
VT VERO ALII HYPSICLIS ALEXANDRINI DE QVINQVE CORPORIBVS LIBER PRIMVS.

Cum Commentarijs Federici Commandini Vrbinatis.

BASILIDES tyrius, Protarche, cum alexandriam venisset, patri que nostro ob mathematicarum disciplinarum societatem commendatus fuisset, ipso peregrinationis tempore, cum eo diu, multumque uersatus est. & aliquando expendentes id quod ab Apollonio scriptum est de dodecaedri, & icosaedri in eadem sphæra descriptorum comparatione, quam scilicet hęc inter se proportionem habeant, arbitrati sunt ea non recte tradidisse Apollonium; quæ à se emendata, ut pater meus dicebat, memoriæ, ac litteris prodiderunt. Ego vero postea incidi in aliũ librum ab Apollonio editum, qui propositę rei demonstrationem recte complectebatur; atque ex eius problematis indagatione magnam cœpi voluptatem. Illud quidem, quod ab Apollonio editũ est, quilibet facile perspicere potest, cũ in omnium manibus versetur. quod autem nos postea summo, quantum conijci licet, studio lucubrasse videmur, id litteris mandatum tibi dedicandũ censuimus, vtpote qui ob excellentem in omnibus disciplinis mathematicis, & præsertim in geometria cognitionem prudenter iudices ea, quę dicturi sumus: ob eam uero, quę tibi cum patre meo fuit consuetudinem, & ob beneuolentiam, qua nos complecteris, tractationem ipsam libenter audias. sed iam tempus est ut procœmio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Quæ à centro circuli alicuius ad pentagoni latus in eodem circulo deſcripti, perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque & hexagoni lateris, & decagoni, quæ in eodem circulo deſcribuntur.



Sit circulus ABC,& in eo deſcribatur pentagoni æqui lateri latus BC; ſumaturque circuli centrum D:& ad BC ducta DE perpendiculari, producatur in directum ipſi DE recta linea EF. Dico DE dimidiam eſſe vtriuſque & hexagoni lateris, & decagoni in eodem circulo deſcriptorum. Iungantur enim DC CF: ponaturque EG ipſi EF ęqualis:& à puncto G ad C ducatur GC. Quoniam igitur circumferentia totius circuli quintupla eſt circumferentię BFC:atque eſt totius quidem circuli circumferentię dimidia ACF,ipſius vero BFC dimidia FC,erit & circumferentia ACF quintupla circumferentiæ FC. ideoq́; circumferentia AC ipſius CF eſt quadrupla. vt autem AC ad CF,ita eſt ADC angulus ad angulum CDF,angulus igitur ADC quadruplus eſt anguli CDF.duplus autem eſt angulus ADC anguli EFC. ergo & angulus EFC anguli GDC eſt duplus.eſt autem & EFC angulus æqualis angulo EGC.duplus igitur eſt angulus EGC anguli GDC:& idcirco DG ipſi GC eſt ęqualis. ſed GC ęqualis eſt CF. ergo & DG ipſi CF. eſt autem & GE æqualis EF. æqualis igitur eſt DE utrique EF FC. communis apponatur DE. vtraque igitur DF FC ipſius DE eſt dupla: atque eſt DF quidem hexagoni lateri æqualis; FC vero æqualis lateri decagoni. ergo DE eſt dimidia & lateris hexagoni, & decagoni in eodem circulo deſcriptorum.

A
B
C
D
E

Itaque manifeſtum eſt ex theorematibus tertij decimi libri eã, quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur,dimidiam eſſe eius,quæ ex centro circuli. F

F. C. COMMENTARIVS.

Erit & circumferentia ACF quintupla circumferentiæ FC] *Ex 15 quinti.* A

Vt autem AC ad CF,ita eſt ADC angulus ad angulum CDF] *Ex ultima ſexti.* B

Duplus autem eſt angulus ADC anguli EFC] *Ex 20 tertij.* C

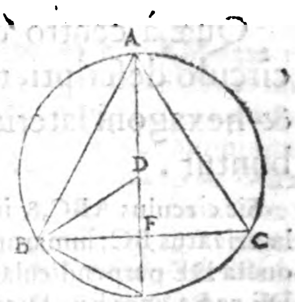
Eſt autem & EFC angulus ęqualis angulo EGC] *Poſita enim eſt FE aequalis EG & EC eſt vtrique communis: anguliq́; ad E recti.baſis igitur FC eſt aequalis baſi CG, & triangulum triangulo aequale; & reliqui anguli reliquis angulis aequales, quibus aequalia latera ſubtenduntur ex 4.primi.* D

Et idcirco DG ipſi GC eſt æqualis] *Nam cum angulus EGC exterior ſit aequalis duobus interioribus, & oppoſitis GDC GCD,ſitq́; duplus ipſius GDC;erit angulus GCD aequalis angulo GDC: & ob id latus DG lateri GC aequale.* E 32.primi. 6.primi.

Itaque manifeſtum eſt ex theorematibus tertijdecimi libri eam,quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam eſſe eius, quæ ex centro circuli. F

Sit circulus ABC, & in ipſo deſcribatur triangulum aequilaterum ABC;ſumptoq́; circuli centro D,ab eo ad BC agatur perpendicularis DF, & ad E producatur. Dico DF dimidiam eſſe ipſius DE. iungantur enim DB BE. & quoniam BE eſt latus hexagoni,quod ex 12 tertij decimi libri apparet: & ideo aequalis ei,quae ex centro: erunt DB BE inter ſe aequales, & ipſarum quadra-

47. primi *ta aequalia. sed quadratum quidem ex DB est aequale quadratis ex EF FD. quadratum vero ex BE aequale quadratis ex BF FE. ergo quadrata ex BF FD quadratis ex BF FE sunt aequalia; & dempto communi quadrato ex BF, erit quadratum ex DF aequale quadrato ex FE: ac propterea recta linea DF ipsi FE est ęqualis, & DF ipsius DE dimidia. quod demonstrare oportebat.*



THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

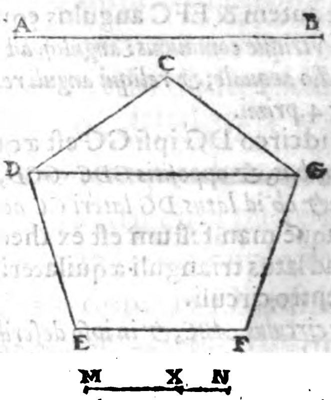
Idem circulus comprehendit dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadē sphæra descriptorum.

Hoc autem conscribitur ab Aristero in libro de quinque figurarum comparatione; & ab Apollonio in secunda editione comparationis dodecaedri cum icosaedro, videlicet vt dodecaedri superficies est ad superficiem icosaedri, ita esse & ipsum dodecaedrum ad icosaedrum, quòd perpendicularis ducta à centro sphæræ ad dodecaedri pentagonum eadem sit, quæ ad icosaedri triangulum ducitur. Itaque demōstrandum est eundem circulum comprehendere, & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum, hoc præmisso.

Si in circulo pentagonum ęquilaterum describatur, quod fit ex latere pentagoni, & ex recta linea, quæ duobus pentagoni lateribus subtenditur, quintuplum erit eius, quod fit ab ea, quę ex circuli centro.

Sit ABC circulus, & in eo pentagoni latus AC: sumaturque circuli centrum D, & ad AC perpendicularis ducta DF in puncta BE producatur, & iungatur AB. Dico quadrata ex BA AC quadrati ex DE quintupla esse. iuncta enim AE est decagoni latus. & quoniā BE dupla est ipsius ED;
47 primi erit quadratum ex BE quadrati ex ED quadruplum. quadrato autem ex BE æqualia sunt quadrata ex BA AE. ergo quadrata ex BA AE quadrupla sunt quadrati ex ED: & ob id quadrata ex BA AE & ED sunt quintupla quadrati ex ED. sed quadrata ex DE EA æqualia sunt quadrato
A ex AC. quadrata igitur ex BA AC quadrati ex ED sunt quintupla.

Hoc demonstrato, demonstrandum est eundem circulum comprehendere & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum.



Exponatur sphæræ diameter AB, & in ipsa sphęra describatur dodecaedrum, & icosaedrū: sitque unum quidem dodecaedri pentagonum CDEFG: icosaedri uero triangulum KLH. Dico eundem circulum comprehendere pentagonum CDEFG, & KLH triangulum. Iungatur D
B G. ergo DG est cubi latus. & exponatur recta linea quædam MN, ita ut quadratum ex AB quadrati ex MN sit quintuplum. est autem & sphæ-

ræ diameter potentia quintupla eius, quæ est ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur. secetur MN extrema, ac media ratione in X: & sit MX portio maior. ergo MX est decagoni latus. & quoniam quadratum ex AB quintuplum est quadrati ex MN, & triplũ quadrati ex DG; erunt tria quadrata ex DG quadratis quinque ex MN ęqualia. ut autem tria quadrata ex DG ad quadrata quinque ex MN, ita tria quadrata ex CG ad quinque quadrata ex MX. tria igitur quadrata ex CG quinque quadratis ex MX sunt æqualia. quinque autẽ quadrata ex KL æqualia sũt quinq; quadratis ex MN, & quinque quadratis ex MX. ergo quinq; quadrata ex KL tribus quadratis ex DG, & tribus quadratis ex GC sunt æqualia. sed tria quadrata ex DG, & tria quadrata ex GC ęqualia sunt quindecim quadratis eius, quæ ex centro circuli descripti circa pentagonum CDEFG. antea enim demõstratum est quadrata ex DG GC quintupla esse quadrati eius, quæ est ex centro circuli circa pentagonum CDEFG descripti. quinque autem quadrata ex KL sunt æqualia quindecim quadratis eius, quę est ex centro circuli descripti circa triangulũ KLH. etenim demonstratum est quadratum ex KL triplum esse quadrati eius, quæ est ex centro circuli circa triangulum KLH descripti. quindecim igitur quadrata eius, quę est ex centro circuli quindecin quadratis eius, quæ est ex centro circuli sunt ęqualia; ac propterea diameter diametro est æqualis. ergo idem circulus comprehendit & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed quadrata ex DE EA æqualia sunt quadrato ex AC] *Ex decima tertij decimi.* **A**

Ergo DG est cubi latus] *Secta enim DG extrema DG extrema, ac media ratione, maior portio erit aequalis lateri pentagoni CD ex 8 tertijdecim. si aũt latus cubi extrema, ac media rõne secetur, maior portio erit dodecaedri latus, ex corollario 17 tertijdecimi. sed CD ponitur latus dodecaedri. ergo DG est cubi latus. nam si duę rectę lineę extrema, ac media ratione secentur, erit tota ad totam, vt portio maior ad maiorem portionem. quod ad finem huius libri demonstrabitur.* **B**

Secetur MN extrema, ac media ratione in X, & sit MX portio maior. ergo MX est decagoni latus] *Ex ante dictis sequitur MN esse eam, quae ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur, hoc est hexagoni latus. si autem hexagoni latus extrema, ac media ratione secetur, erit maior portio latus decagoni. quod nos supra ad nouam tertij decimi demonstrauimus.* **C**

Et triplum quadrati ex DG] *Ex 15 tertij decimi libri.* **D**

Vt autem tria quadrata ex DG ad quadrata quinque ex MN, ita tria quadrata ex CG ad quinque quadrata ex MX] *Est enim CG maior portio ipsius DG extrema, ac media ratione sectae. & similiter MX maior portio ipsius MN: & vt tota DG ad totam MN, ita est ipsius DG maior portio ad maiorem portionem ipsius MN. quod deinceps demonstrabitur.* **E**

Quinque autem quadrata ex KL ęqualia sunt & quinq; quadratis ex MN, & quinque quadratis ex MX] *Ex 10 tertij decimi. est enim KL latus pentagoni descripti in circulo, à quo icosaedrum describitur, & cuius ea, quae ex centro est MN.* **F**

Antea enim demonstratum est] *Videlicet proxime ad principium huius theorematis.* **G**

Etenim demonstratum est quadratum ex KL triplum esse quadrati eius, quę ex centro circuli] *In duodecima tertij decimi libri.* **H**

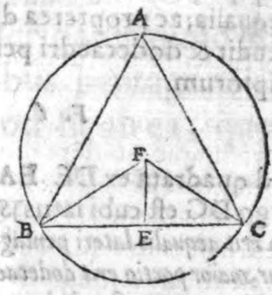
THEOREMA III. PROPOSITIO. III.

Si fuerit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, & circa ipsum circulus; à centro autem ad vnum latus perpendicularis ducta fuerit: quod tricies vno latere, & perpendiculari continetur superficiei dodecaedri est æquale.

Sit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum AB CDE, & circa ipsum circulus: sumatur autem centrum F, & ab F ad CD perpendicularis ducatur FG. Dico quod tricies CD FG continetur duodecim pentagonis ABCDE æquale esse. Iūgātur enim CF FD. & quoniam quod CD FG continetur duplum est trianguli FCD, erit quod quinquies continetur CD FG decem triangulis ęquale. decem autem triangula duo pentagona sunt, & eorum sextupla æqualia. ergo quod tricies CD FG continetur est æquale duodecim pentagonis. sed duodecim pẽtagona sunt dodecaedri superficies. ergo quod tricies cõtinetur CD FG superficiei dodecaedri æquale erit.

Similiter demonstrabimus, si fuerit triangulum æquilaterum, vt ABC, & circa ipsum circulus, cuius centrum D, & ab eo perpendicularis DE, quod tricies BC DE continetur superficiei icosaedri æquale esse.

Quoniam enim rursus quod BC DE continetur duplum est trianguli DBC, erunt duo triangula ęqualia ei, quod cõtinetnr BC DE, & eorum tripla. sex igitur triangula DBC æqualia sunt tribus, quæ BC DE continentur. at sex triangula vt DBC sunt æqualia duobus ABC triangulis. & eorum decupla. ergo quod tricies BC DE continetur est æquale viginti triangulis ABC, hoc est icosaedri superficiei. erit igitur vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur.



COROLLARIVM.

Ex hoc perspicuum est vt dodecaedri superficies ad superficiẽ icosaedri, ita esse quod continetur latere pentagoni, & recta linea, quæ à centro circuli circa pentagonum descripti, in ipsum latus perpendicularis ducitur, ad id, quod continetur latere icosaedri, & perpendiculari, quæ à centro circuli circa triangulum descripti in ipsum latus ducta fuerit, nimirum dodecaedro, & icosaedro in eadem sphæra descriptis.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam quod CD FG continetur duplum est trianguli FCD] *Ex 41 primi, ex quo sequitur duo triangula FCD ęqualia esse ei, quod CD FG continetur.*

B Decem autem triangula duo pentagona sunt] *Vnumquodque enim pentagonum quinque eiusmodi triangula continet.*

C At sex triangula vt DBC sunt ęqualia duobus ABC triangulis] *Nam triangulum ABC ex tribus triangulis DBC constat.*

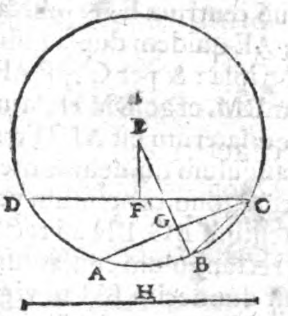
D Erit igitur ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur] *Quoniam enim quod tricies cõtinetur CD FG est aequale superficiei dodecaedri; & quod tricies continetur BC DE ęquale superficiei icosaedri,*

saedri, erit vt superficies dodecaedri ad id, quod tricies continetur CD FG, ita superficies icosaedri ad id, quod tricies continetur BC DE: & permutando vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita quod tricies continetur CD FG ad id, quod tricies BC DE continetur. sed vt quod tricies continetur CD FG ad id, quod tricies BC DE continetur, ita quod semel continetur CD FG ad id, quod semel BC DE continetur ex 15 quinti. vt igitur dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

Hoc probato demonstrandum erit, vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse latus cubi ad icosaedri latus.

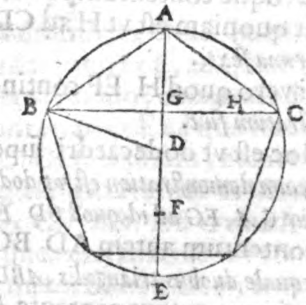
Exponatur circulus ABC comprehendens & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum: & in ipso describatur trianguli quidem ęquilateri latus CD: pentagoni vero AC: sumptoq; circuli centro E, ab eo ad DC CA perpendiculares ducantur EF EG, & producatur in directum ipsi EG recta linea GB: iungaturq; BC, & exponatur cubi latus H. Dico ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse H ad ipsam CD. quoniam enim vtraque simul EB BC extrema, ac media ratione secta, maior portio est EB, & est vtriusque quidem dimidia EG, ipsius vero BE dimidia EF: erit & ipsius EG extrema, ac media ratione sectæ maior portio EF. est autem & ipsius H extrema, ac media ratione sectę maior portio CA, vt in dodecaedro ostensum fuit. ut igitur H ad CA, ita est GE ad EF; ideòque contentum H FE est ęquale ei, quod CA EG continetur. & quoniam est vt H ad CD, ita quod cōtinetur H EF ad contentum CD EF; ei uero, quod H EF continetur est ęquale cōtentum CA EG: erit vt H ad CD, ita contentum CA EG ad id, quod CD EF continetur, hoc est vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita H ad CD.



Aliter demonstrare ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse latus cubi ad icosaedri latus, hoc pręmisso.

Sit circulus ABC, & in eo describantur ęquilateri pentagoni latera AB AC: & iungatur BC; sumatur autem circuli centrum D, & iuncta AD producatur ad E: ponaturq; ipsius AD dimidia DF, & GC ipsius CH tripla. Dico quod AF BH continetur pentagono ęquale esse.

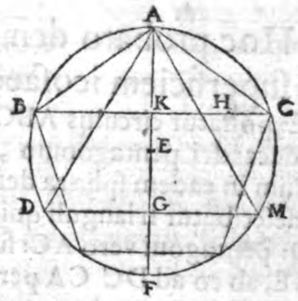
Iungatur enim BD. & quoniam AD dupla est ipsius DF, erit FA ipsius AD sesquialtera. rursus quoniam GC tripla est ipsius CH, erit GH ipsius HC dupla. sesquialtera igitur est CG ipsius GH. quare vt FA ad AD, ita CG ad GH. ideoq; contentū AF GH est æquale ei, quod AD CG cōtinetur: sed CG est æqualis GB. ergo contentum AD BG est æquale ei, quod AF GH continetur. contentum autem AD BG est duo triangula, ut ABD. quod igitur AF GH continetur & duo triangula ABD. ergo quinque rectangula contenta AF GH decem sunt triangula. decem autem triangula duo pentagona sunt. quinque igitur rectangula



 conten-

contenta AF GH duobus pentagonis sunt æqualia. & quoniam GH est dupla HC, erit contentum AF GH duplum eius, quod AF HC continetur. ergo duo rectangula contenta AF HC sunt æqualia vni, quod continetur AF GH, & eorum quintupla. decem igitur rectangula contenta AF HC sunt æqualia quinque, quę AF GH continentur, hoc est duobus pentagonis. ergo quinque contenta AF HC vni pentagono sunt æqualia.
N quinque autem contenta AF HC sunt æqualia ei, quod continetur AF BH, quoniam BH quintupla est ipsius HC, & communis altitudo est AF. quod igitur AF BH continetur uni pentagono est ęquale.

Hoc demonstrato nunc exponatur circulus cõprehendens & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphęra descriptorum; & in circulo ABC describantur æquilateri pentagoni latera BA AC: & iungatur BC. sumatur prænterea circuli centrum E, & iuncta AE ad F producatur: sitq; AE quidem dupla ipsius EG; KC vero ipsius CH tripla: & per G ipsi AF ad rectos angulos du-
O catur DM. ergo DM est latus trianguli æquilateri;
P & æquilaterum est ADM triangulum. & quoniam
Q rectangulum quidem contentum AG BH est ęquale pentagono, contentum vero AGD æquale triangulo ADM; erit vt rectangulum
R contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita pentagonum ad triangulum. vt au-
S tem rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita BH ad DG. & vt igitur duodecim BH ad viginti DG, ita duodecim pentagona ad viginti triangu-
T la, hoc est dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri. & duodecim quidẽ BH sunt decem BC: etenim BH quintupla est ipsius HC; & BC ipsius CH sextupla: ideoq; duodecim BH sunt æquales decem BC: viginti autem DG sunt decem DM;
V dupla enim est DM ipsius DG. vt igitur decem BC ad decem DM, hoc est vt BC
X ad DM, ita dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri. atque est BC quidem cubi latus, DM vero latus icosaedri. & vt igitur dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita BC ad DM, hoc est cubi latus ad latus icosaedri.



F. C. COMMENTARIVS.

A Quoniam enim vtraque simul EB BC extrema, ac media ratione secta maior portio est EB] *Ex nona tertijdecimi.*

B Et est vtriusque dimidia EG] *Ex prima huius.*

C Ipsius vero BE dimidia EF] *Ex ijs, quae nos demonstrauimus ad finem primae huius.*

D Erit & ipsius EF extrema, ac media ratione sectæ maior portio EF] *Ex 15 quinti.*

E Est autem & ipsius H extrema, ac media ratione sectæ maior portio CA, vt in dodecaedro ostensum fuit] *In 17 tertijdecimi.*

F Vt igitur H ad CA, ita est GE ad EF.] *Hoc autem ita esse ad finem huius libri demonstrabitur.*

G Ideoque contentum H FE est ęquale ei, quod CA EG continetur] *Ex 16 sexti.*

H Et quoniam est vt H ad CD, ita quod continetur H EF ad contentum CD EF] *Ex prima sexti.*

K Ei vero quod H EF continetur est æquale contentum CA EG] *Quod proxime demonstratum fuit.*

L Hoc est vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita H ad CD] *Superius enim demonstratum est vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse quod continetur CA EG ad id, quod CD EF continetur.*

M Contentum autem AD BG est duo triangula vt ABD] *Hoc est contentum AD BG est aequale duobus triangulis ABD. est enim trianguli ABD duplum ex 41 primi libri.*

N Quinque autem contenta AF HC sunt ęqualia ei, quod continetur AF BH, quoniam BH est quintupla ipsius HC: & communis altitudo est AF] *Ex prima sexti.*

Ergo

Ergo DM est latus trianguli æquilateri] *Perpendicularis enim ducta à centro circuli ad trianguli aequilateri latus est dimidia eius, quae ex circuli centro, ut nos demonstrabimus ad finem primae huius.* O

Et quoniam rectangulum quidem contentum AG BH est æquale pentagono] *Ex ijs, quae proxime demonstrauit.* P

Contentum vero AGD æquale triangulo ADM] *Ex demonstratis in 42 primi.* Q

Vt autem rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita BH ad DG] *Parallelogramma enim, quae eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases, ex prima sexti.* R

Et vt igitur duodecim BH ad uiginti DG, ita duodecim pentagona ad uiginti triangula] *Sequitur enim ex antedictis vt BH ad DG, ita esse pentagonum ad triangulum.* S

Et duodecim quidem BH sunt decem BC, etenim BH quintupla est ipsius HC, & BC ipsius CH sextupla] *Quoniam enim BH est quintupla ipsius HC, & BC est eiusdem HC sextupla, habebit HB ad BC peoportionem eam, quam habet quinque ad sex. sed quinque multiplicans duodecim producit 60, & sex multiplicans decem producit similiter 60. ergo duodecim BH sunt aequales decem BC.* T

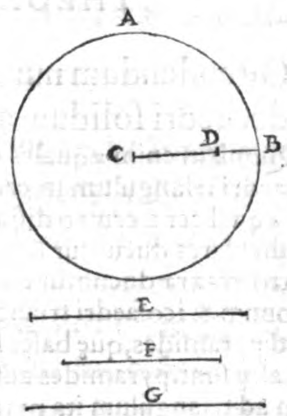
Hoc est vt BC ad DM] *Ex 15 quinti.* V

Atque est BC quidem cubi latus] *Hoc à nobis superius demonstratũ est in secundã huius.* X

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Ostendendum est & qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, quam proportionem habet potens quadratum totius & quadratum maioris portionis ad eam, quę potest quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icosaedri.

Sit circulus AB comprehendens & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum in eadẽ sphæra descriptorum: sumaturque circuli centrum C; & & ab eo producatur recta linea vtcumque CB: & secetur extrema, ac media ratione in D, ita vt CD sit maior portio. quare CD est latus decagoni in eodẽ circulo descripti. exponatur icosaedri latus E, dodecaedri F, & cubi G. ergo E est trianguli æquilateri latus, F pentagoni in eodem circulo descripti: atque est F ipsius G maior portio. & quoniam E est æqualis lateri trianguli ęquilateri: trianguli autem ęquilateri latus est potentia triplum ipsius BC. ergo quadratum ex E quadrati ex BC est triplum: suntq; quadrata ex CB BD quadrati ex CD tripla, & permutãdo. vt igitur quadratum ex E ad quadrata ex CB BD, ita quadratum ex BC ad quadratum ex CD. sed vt quadratum ex BC ad quadratum ex CD, ita est quadratum ex G ad quadratum ex F; est enim F maior portio ipsius G. & ut igitur quadratum ex E, ad quadrata ex CB BD, ita quadratum ex G ad quadratum ex F: & permutando; conuertendoque. ergo vt quadratum ex G ad quadratum ex E, ita quadratum ex F ad quadrata ex CB BD. quadrato autem ex F ęqualia sunt quæ ex BC CD quadrata; etenim latus pentagoni potest & hexagoni, & decagoni latus. ut igitur quadratum ex G ad quadratum ex E, ita quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD. sed vt quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, quadratum totius, & maioris portionis ad quadratum totius, & minoris portionis. & ut igitur quadratum ex G ad quadratum ex E, ita qualibet recta linea extrema



A B C D E F

extrema, ac media ratione secta quadratum totius & maioris portionis ad quadratum totius, & minoris portionis. atque est G quidem cubi latus, E vero icosaedri. si igitur recta linea extrema, ac media ratione secetur, erit vt potens totam & maiorē portionem ad eam, quæ potest totam & minorem portionem, ita cubi latus ad latus icosaestri, in eadem sphæra descriptorum.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quare CD est latus decagoni] *Si enim latus hexagoni extrema, ac media ratione secetur maior portio est decagoni latus, in eodem circulo descripti, vt nos supra demonstrauimus ad nonam tertijdecimi.*

B Atque est F ipsius G maior portio] *Ex corollario 17 tertijdecimi, nimirum ipsa G extrema, ac media ratione secta.*

C Trianguli autem æquilateri latus est potentia triplum ipsius BC] *Ex duodecima tertijdecimi.*

D Suntque quadrata ex CB BD quadrati ex CD tripla] *Ex 4. tertijdecimi.*

E Etenim latus pētagoni pōt & hexagoni & decagoni latus] *Ex decima tertijdecimi.*

F Sed vt quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta quadratum totius, & maioris portionis ad quadratū totius & minoris portionis] *Grꝗcus codex corruptus est qui sic hēt* ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ η πρὸς τὸ ἀπὸ ε, οὕτω τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γδβ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ βγδ πρὸς τὰ ἀπὸ γδβ, οὕτως εὐθείας ἧς δήποτ᾽ οὖν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. corrige ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ η πρὸς τὸ ἀπὸ ε, οὕτω τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γβ βδ. ὡς δὲ τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γβ βδ, οὕτως εὐθείας ἧς δηποτεοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. & ita corrige paulo post. etenim hæ uoces ἡ δυναμένη. & τὴν δυναμένην hoc loco superuacaneæ sunt.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Ostendendum nunc est vt latus cubi ad icosaedri latus, ita esse dodecaedri solidum ad solidum icosaedri.

e huius. Quoniam enim æquales circuli comprehendunt & dodecaedri pentagonum, & A icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum; in sphæris autem ęquales circuli æqualiter à centro distant. nam quę à centro sphæræ ad plana circulorum per- B pendiculares ducuntur & æquales sunt, & in centra circulorum cadunt. ergo quæ à centro sphæræ ducuntur ad centrum circuli comprehendentis & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum æquales sunt, videlicet perpendiculares ipsæ: & ob id pyramides, quę bases habent dodecaedri pentagona, & icosaedri triangula ę- C que altę sunt. pyramides autem æque altæ inter se sunt vti bases. vt igitur pentagonum ad triangulum ita pyramis, cuius basis est dodecaedri pentagonum, & vertex centrum sphęræ ad pyramidem, cuius basis est icosaedri triangulum, vertex autem sphæræ centrum. ergo & vt duodecim pentagona ad uiginti triangula, ita duodecim pyramides pentagonales bases habentes ad viginti pyramides, quæ triangulares habent bases. sed duodecim pentagona sunt dodecaedri superficies, & uiginti triangula superficies icosaedri. est igitur vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita duodecim pyramides pentagonales bases habentes ad viginti pyramides, quę triangulares bases habent. & duodecim pyramides pentagonales bases habentes sunt dodecaedri solidum: uiginti autem pyramides, quę triangulares habēt bases sunt solidum icosaedri. quare & vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita solidum dodecaedri ad icosaedri solidum. ut autem dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita ostensum est esse latus cubi ad icosaedri latus & vt

igitur

igitur latus cubi ad icosaedri latus, ita dodecaedri solidum ad solidum icosaedri.

F. C. COMMENTARIVS.

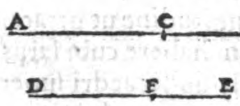
In sphæris autem æquales circuli æqualiter à centro distant] *Ex 6. propositione primi libri sphæricorum Theodosii.* A

Et in centra circulorum cadunt] *Ex 2 corollario primae eiusdẽ libri sphæricorũ Theodosii.* B

Pyramides autem æque altæ sunt inter se, vti bases] *Ex quinta & sexta duodecimi.* C

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

At vero duas rectas lineas si extrema, ac media ratione sectæ fuerint, in subiecta esse anologia, ita demonstrabimus.



Secetur enim AB extrema, ac media ratione in C, cuius maior portio sit AC: & similiter DE extrema, ac media ratione secetur in F, vt DF sit portio maior. Dico ut tota AB ad maiorem portionem AC, ita esse totam DE ad DF maiorem portionem. Quoniam enim rectangulum quidem ABC est æquale quadrato ex AC; rectangulum vero DEF æquale quadrato ex DF: erit vt rectangulum ABC ad quadratum ex AC, ita rectangulum DEF ad quadratum ex DF; & ut rectãgulum, quod quater cõtinetur AB BC ad quadratum ex AC, ita quod quater continetur DE EF ad quadratũ ex DF: componendoque vt quod quater cõtinetur AB BC vnà cum quadrato ex AC ad quadratum ex AC, ita quod quater continetur DE EF vnà cũ quadrato ex DF ad quadratum ex DF. ergo & vt quadratum ex vtraque AB BC ad quadratum ex AC, ita quadratum ex vtraque DE EF ad quadratum ex DF: & longitudine vt vtraque AB BC ad AC, ita vtraque DE EF ad DF: & componendo vt vtraque AB BC vnà cum AC ad AC, hoc est duę AB ad AC, ita utraque DE EF vnà cum DF ad DF, hoc est duę DE ad DF. & antecedẽtium dimidia, videlicet vt AB ad AC, ita DE ad DF.

(Margin letters A and B stand beside the lines "continetur DE EF vnà cũ quadrato..." and "ad quadratum ex DF: & longitudine...".)

COROLLARIVM.

Itaque hoc demonstrato videlicet qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, quam proportionem habet potens quadratum totius, & maioris portionis ad eam, quæ potest quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus C
ad latus icosaedri. atque hoc demonstrato vt latus cubi ad icosaedri latus, ita esse dodecaedri superficiem ad superficiem ico- D
saedri in eadem sphæra descriptorum. & insuper hoc cognito vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse dodecae- E
drum ad ipsum icosaedrum, propterea quòd idem circulus comprehendit, & dodecaedri pentagonum, & icosahedri triangulũ: constat, si in ipsa sphęra describatur & dodecaedrum, & icosaedrum, eandem inter se proportionem habere, quam si recta linea extrema, ac media ratione secetur, habet potens quadratum totius & maioris portionis ad eam, quæ potest quadratum totius, ac minoris portionis.

Quoniam

Quoniam enim est vt dodecaedrum ad icosaedrum, ita dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, hoc est latus cubi ad icosaedri latus. vt autem latus cubi ad icosaedri latus, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, potens quadratum totius & maioris portionis ad eam, quæ potest quadratum totius & minoris portionis. ergo vt dodecaedrum ad icosaedrum, quæ in eadem sphæra describuntur, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, potens quadratum totius, & maioris portionis ad eã, quę potest quadratũ totius & minoris portionis.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo & ut quadratum ex utraq; AB BC ad quadratum ex AC, ita quadratum ex utraque DE EF ad quadratũ ex DF] *Ex 8 secundi, est enim quod quater continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC aequale quadrato ex AB BC tamquam ex vna linea. & similiter quod quater continetur DE EF vnà cũ quadrato ex DF aequale quadrato ex DE EF tamquam ex vna linea.*

B Et longitudine ut utraque AB BC ad AC, ita utraque DE EF ad DF] *Ex 22 sexti.*

C Eãdem habere cubi latus ad latus icosaedri] *Ex 5 huius.*

D Ita esse dodecaedri superficiem ad superficiem icosaedri in eadem sphæra descriptorum] *Ex quarta huius.*

E Ita esse dodecaedrum ad ipsum icosaedrum] *Ex 6 huius.*

QVARTIDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER QVINTVSDECIMVS ET SOLIDORVM QVINTVS.

vt quidam arbitrantur.

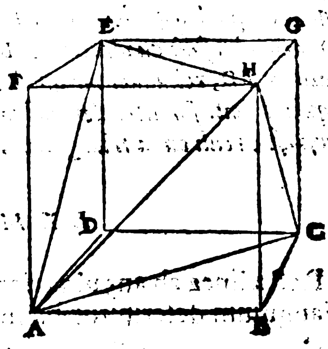
VT AVTEM ALII HYPSICLIS ALEXANDRINI DE QVINQVE CORPORIBVS LIBER SECVNDVS.

Cum Scholijs antiquis, & Commentarijs Federici Commandini Vrbinatis.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. I.

IN dato cubo pyramidem describere.

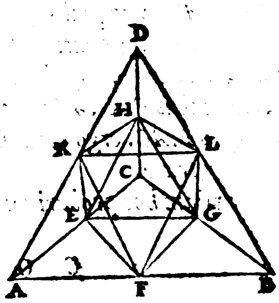
Sit datus cubus ABCDEFGH, in quo oporteat pyramidem describere. Iungantur AC AE CE AH EH HC. itaque perspicuum est triangula AEC AHE AHC CHE æquilatera esse, quadratorum enim diametri sunt latera. pyramis igitur est AECH, & descripta est in dato cubo.



PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

In data pyramide octaedrum describere.

Sit data pyramis ABCD, cuius latera secentur bifariã in pũctis EFGHKL, & HK HL EF FG iungantur, & reliquæ. quoniam igitur AB dupla est vtriusque HK FG, erit HK ipsi GF æqualis, & parallela. Similiter & HG æqualis, & parallela ipsi FK. æquilaterum igitur est HKFG. Dico & rectangulum esse. si enim ab ipsa KL perpendiculares ducantur ad plana EFBG FCEG EFHG HKFG similiter demonstrabimus quæ in quadrato HKFG æquilatera esse.



F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam igitur AB dupla est vtriusque HK GF, erit HK ipsi GF æqualis & parallela] *Est enim HK ipsi AB parallela; namque ut DH ad HA, ita est DK ad KB. & eadem ra* A 2.sexti.

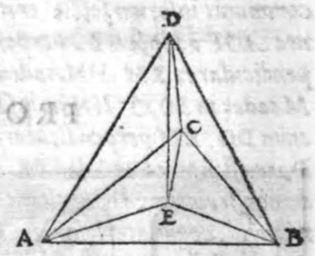
 tiune

9.vndecimi. tione demonstrabitur GF parallela ipsi AB. quae autem uni, & eidem sunt parallelę, & inter se parallelae sunt. ergo HK ipsi GF est parallela. triangula autem D A B D H K aequiangula sunt.
29.primi. namque angulus quidem DHK est aequalis angulo DAB; angulus vero DKH aequalis ipsi DBA,
4.sexti. & BAD vtrique communis. vt igitur AD ad DH, ita AB ad HK. estq́; AD dupla ipsius DH.
9.quinti. ergo & AB ipsius HK est dupla. & eadem ratione erit AB dupla ipsius GF. quare HK ipsi GF
33.primi. est aequalis, atque est parallela, vt demonstratum fuit. quae autem aequales & parallelas coniungunt & ipsae aequales sunt, & parallelae. aequalis igitur & parallela est HG ipsi KF. suntq́; HK KF inter se aequales, cum aequalium sint dimidiae. ergo HKFG aequilaterum est.

Dico & rectangulum esse. Vt hoc facile demonstretur duo lemmata pręmittenda sunt.

LEMMA PRIMVM.

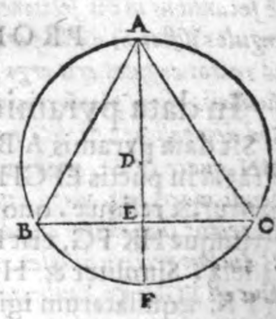
Si à vertice pyramidis ad basim perpendicularis ducatur, cadet ea in centrum circuli, qui circa basis triangulum describitur.



Sit pyramis ABCD, cuius basis triangulum ABC, & vertex D punctum: ducaturq́; à puncto D ad basim perdendicularis DE. Dico E centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. Iungantur enim AE BE CE. & quoniam DE perpendicularis est ad planum trianguli ABC, & ad omnes rectas lineas, quae ipsam contingunt, quęq́; in eodem sunt plano rectos angulos faciet. recti igitur anguli sunt DEA DEB DEC; ac propterea quadratum ex 47.primi *AD est aequale quadratis ex AE ED. & quadratum ex BD aequale quadratis ex BE ED. sunt autem quadrata ex AD DB aequalia, quòd aequales sint AD DB. ergo quadrata ex AE ED aequalia sunt quadratis ex BE ED. & dempto cõmuni quadrato ex ED, relinquentur quadrata ex AE EB inter se aequalia. ideoq́; rectae lineae AE EB aequales sunt. similiter demonstrabimus CE aequalem esse ipsis AE EB. quare punctum E centrum est circuli circa triangulum ABC descripti. quod demonstrare oportebat.* (9.tertij.)

LEMMA SECVNDVM.

Recta linea ab angulo trianguli æquilateri ducta per centrum circuli, qui circa triangulum describitur, basim bifariam secat.



Sit triãgulum aequilaterum ABC, & circa ipsum circulus ABC, cuius centrum D: & ducta AD secet basim in puncto E. Dico BE ipsi EC aequalem esse: producatur enim AE vsque ad circuli circumferentiam in F. quoniam igitur AF per centrum transit, circuli erit diameter: ideoq́; circumferentia ABF circumferentiae ACF est aequalis. circumferentia autem AB aequalis est circumferentiae AC, quòd 28.tertij. *recta linea AB sit aequalis ipsi AC. ergo & reliqua circumferentia* 27.tertij. *BF reliquae circumferentiae FC, & angulus BAE angulo EAC aequalis erit. itaque triãguli ABE duo latera BA AE aequalia sunt duobus lateribus CA AE trianguli AEC; & angulus BAE aequalis est angulo EAC. ergo & basis BE basi EC est aequalis. quod opor-* 4.primi. *tebat demonstrare.*

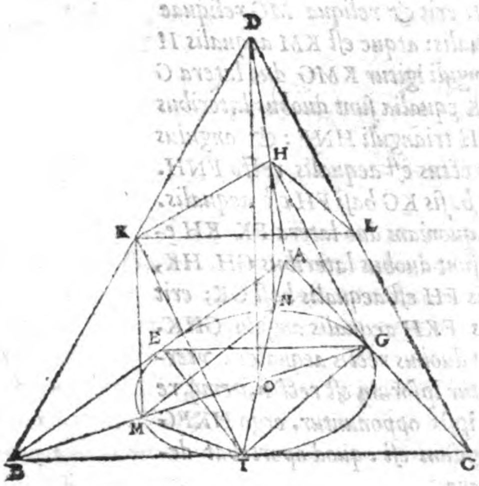
Potest etiam hoc probari ex tertia sexti libri, cum BA sit ęqualis ipsi AC.

COROLLARIVM.

Ex quibus, & ex tertia tertij constat rectam lineam ab angulo trianguli æquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum describitur, ad basim perpendicularem esse.

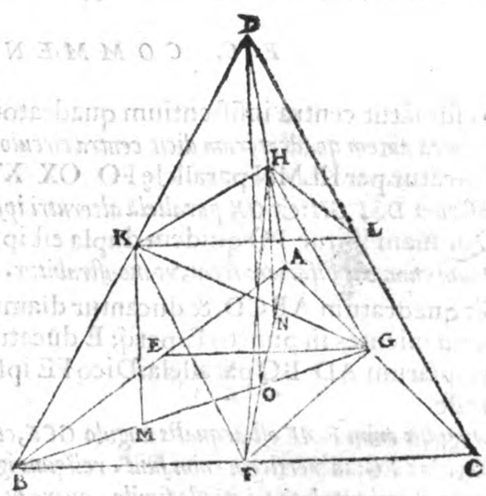
His demonstratis ducatur à vertice pyramidis ABCD ad basis planũ perpendicularis, quae sit DO. erit O centrum circuli circa triangulum ABC descripti, ex primo lemmate eorum, quae nos premisimus. Itaque per latus pyramidis BD, et per DO ducatur planum pyramidem secans. erit illud rectum ad planum basis ABC, atque erit eius, & trianguli ABC communis sectio BO, quae vlterius protracta cadet in G ex secũdo lemmate premissorum; & erit ad ipsam AC perpendicularis. 18. undecimi *Eadem ratione si per latus pyramidis AD, & per DO intelligatur ductum aliud planum, ad basim rectum erit it, & communis ipsorum sectio erit recta linea AOF ad ipsam BC perpendicularis. ducantur à punctis KH ad planum trianguli ABC perpendiculares KM HN. cadent hae in communes planorum sectiones ex 38 vndecimi, hoc est KM cadet in BO, & HN in ipsam AO: & BO AO in punctis MN bifariam diuidentur. Quoniam enim DO KM perpendiculares sunt ad idem planum inter se parallelę erunt. quare vt BK ad KD, ita est BM ad MO. sed BK est aequalis KD. ergo & BM ipsi MO aequalis erit. Eadem ratione demonstrabitur AN aequalis NO. & quoniam perpendicularis à circuli centro ducta ad latus trianguli aequilateri dimidia est eius, quae ex centro circuli, vt ad ptimam quar tidecimi libri demonstrauimus; erit OF dimidia ipsius OA, & OG dimidia ipsius OB. & cum FO OG sint aequales, quoniã et ipsae AO OB quę ex circuli cẽtro; omnes AN NO OF BM MO OG inter se ęquales erunt. centro igitur O, & interuallo vna ipsarum FO OG circulus descriptus etiam per puncta MN transibit. deseribatur, & NM MF iungantur. quòd cum triangula BDO BKM sint aequiangula, propterea quòd linea KM parallela est ipsi DO; erit vt DB ad BK, ita DO ad KM: estq; DB dupla ipsius BK. ergo & DO ipsius KM dupla erit. & ita demonstrabitur DO dupla ipsius HN. quare KM HN inter se aequales sunt. & sunt parallelae, quippe quòd ad idem planum sint perpendicnlares. quae autem aequales, & parallelas coniungunt, & ipsae aequales, & parallelae sunt. aequalis igitur est & parallela MN ipsi KH. sed FG demonstrata est aequalis, & parallela eidem KH. ergo MN FG aequales sunt, & parallelae. angulus autem NMK est rectus: & similiter rectus NMF, quòd in semicirculo. quare cũ NM duabus rectis lineis KM MF se inuicẽ secantibus in cõi sectione ad rectos angulos ĩsistat, ẽt ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit. ergo NM perpẽdicularis est ad planũ trianguli KMF. Sed demonstrata est FG parallela ipsi MN. quare & FG ad idem planũ perpendicularis erit. ideoq; angulus GFK est rectus. sunt autem anguli GFK FGH duobus rectis aequales. ergo & rectus est FGH: & similiter recti, qui ipsis opponũtur. ex quibus sequitur HKFG & aequilaterum esse, & rectangulum. quod oportebat demonstrare.*

6. undecimi
2. sexti
4. sexti
9. quinti
6. undecimi
33. primi

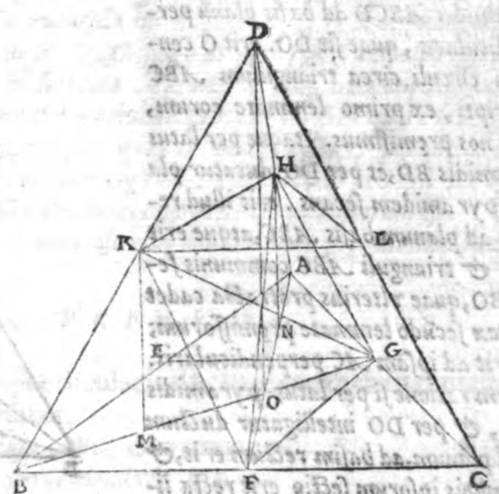


4. undecimi
8. undecimi
29. primi
34. primi

ALITER. Ductis KM HN perpendicularibus, ut in antecedẽti figura, iungantur HF KG. & quoniam perpendicularis BG est aequalis ipsi AF; est enim AB ad vtramq; ipsarũ, vt 4 ad 3, quod nos demonstrauimus ad 12



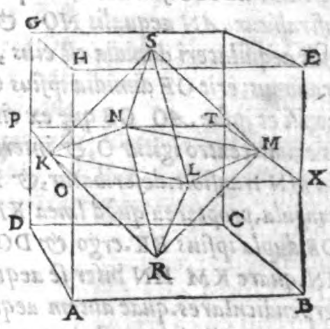
tertijdecimi libri. sed & BM est equalis AN: erit & reliqua MG reliquae NF equalis: atque est KM aequalis HN. trianguli igitur KMG duo latera GM MK equalia sunt duobus lateribus FN NH trianguli HNF: & angulus GMK rectus est aequalis recto FNH. ergo et basis KG basi FH est aequalis. rursus. quoniam duo latera FK KH equalia sunt duobus lateribus GH HK, & basis FH est aequalis basi GK; erit angulus FKH aequalis angulo GHK. & sunt duobus rectis aequales. vterque igitur ipsorum est rectus, itemq; recti, qui ipsis opponuntur. ergo HKFG rectangulum est. quod oportebat demonstrare.



PROBLEMA III. PROPOSITIO. III.

In dato cubo octaedrum describere.

A Sit datus cubus ABCDEFGH: & sumantur centra insistentium quadratorum KLMN. Dico
B KLMN quadratum esse. ducantur per KLMN
C parallelæ PO OX XT TP. Quoniam igitur PO quidem dupla est ipsius OK, XO autem du-
D pla ipsius OL, suntque æquales PO OX; erunt
E & KO OL inter se æquales. quadratum igitur ex KL duplum est quadrati ex OL. eadem ratione & quadratum ex ML duplum est quadrati
F ex LX. ergo quadratum ex KL quadrato ex LM est æquale. æquilaterum igitur est KLMN, & cõstat rectangulum esse. sumantur duo quadrata
H BD EG; ipsorũque centra R S, & iungantur RK RL RM RN SK SL SM SN.
K perspicuum est triangula, quæ octaedrum efficiunt æquilatera esse. quod eadem ratione demonstrabimus.



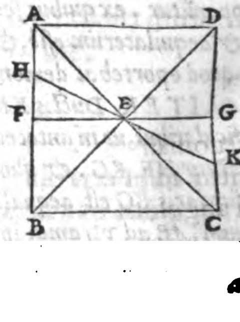
F. C. COMMENTARIVS.

A Et sumãtur centra insistentium quadratorum] *videlicet quadratorum CA AE EC CG; centra autem quadratorum dicit centra circulorum, qui circa quadrata describuntur.*

B Ducãtur per KLMN parallelę PO OX XT TP] *Hoc est ducatur PO parallela alterutri ipsarum DA GH: & OX parallela alterutri ipsarum AB HE, & sic in alijs.*

C Quoniam igitur PO quidem dupla est ipsius OK, XO autem dupla ipsius OL] *Centrum enim eas bifariam secat, vt monstrabitur.*

Sit quadratum ABCD, & ducantur diametri AC BD conuenientes in puncto E: perq; E ducatur FG alterutri ipsarum AD BC parallela. Dico FE ipsi EG ęqualem esse.



29. primi *Angulus enim FAE est aequalis angulo GCE, et angulus A*
15. primi. *EF angulo CEG: ad verticem enim sunt. reliquus igitur reliquo aequalis, & triangulum triangulo simile. quare ut AE ad EF, ita est CE, ad EG: & permutando ut AE ad EC, ita FE ad EG.*

atque

atque est AE aequalis EC, quòd AE sit circuli diameter, & E centrum eiusdem. ergo FE ipsi EG aequalis erit. centrum autem non solum ipsam FG bifariam secat, sed & alias omnes, quae in quadrato per ipsum ducuntur. quod eodem modo demonstrabimus.

Suntq; æquales PO OX] *Est enim PO aequalis DA, & OX aequalis AB ex 34 primi.* D
quare PO ad OX est vt DA ad AB: & sunt DA AB inter se aequales. ergo & PO OX aequales erunt.

Quadratum igitur ex KL duplum est quadrati ex OL] *Est enim quadratum ex KL ęquale quadratis ex KO OL ex 47 primi.* E

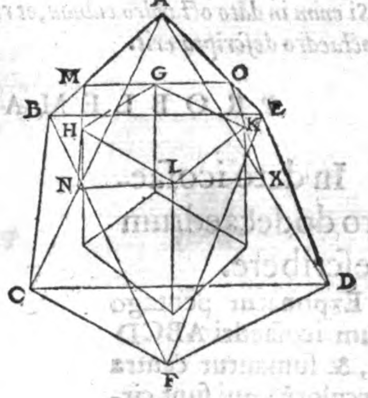
Ergo quadratum ex KL quadrato ex LM est ęquale] *Ex quo sequitur & rectam lineā* F
KL ipsi LM aequalem esse. sed & aliter demonstrare possumus. Quoniam enim duo latera KO OL sunt aequalia duobus lateribus LX XM, & angulus ad O rectus est aequalis recto ad X; erit & basis KL basi LM aequalis ex 4 primi. et eodem modo demonstrabitur LM aequalis MN, et OK aequalis KN. quare omnes inter se aequales sint necesse est.

Et constat rectangulum esse] *Quoniam enim KO est aequalis OL, & angulus KOL est re-* G
ctus, erit angulus KLO recti dimidius; & ob eandem caussam angulus MLX est dimidius recti. reliquus igitur KLM rectus est. sunt enim tres anguli duobus rectis aequales. Eadem ratione & vnusquisque aliorum angulorum LMN MNK NKL rectus demonstrabitur.

Perspicuum est triangula, quæ octaedrum efficiunt æquilatera esse. quod eadem H
ratione demonstrabimus] *Iisdem enim argumentis probabimus KSMR NSLR aequilatera esse, & latera eorum ipsis KLMN aequalia.*

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

In dato octaedro cubum describere.



Sumantur centra circulorum, quæ sunt circa triangula ABE ABC ACD ADE, quæ sint G HKL, & GH GK LK LH iungantur. Dico GHKL quadratum esse. ducantur per GHKL ipsis EB BC CD DE parallelæ OM MN NX XO. quoniam igitur æquilaterum est ABC triangu- A
lum, recta linea, quæ à pūcto A ducitur ad H cētrum circuli circa triangulum ABC descripti bifariam secat trianguli angulum, qui est ad A. ęqualis igitur est MH ipsi HN. Eadem ratione & MG est æqualis GO. quoniam autem MN est B
ęqualis MO, & MO ipsi OX; erit & HM ęqualis MG, & GO ipsi OK; suntq; anguli HMG GOK C
recti. ergo HG ipsi GK est ęqualis. Eadem ratio D E
ne & reliquæ æquales erunt. cum igitur parallelogrammum sit GHKL in uno erit plano. & cū F
vterque angulorum MGH OGK sit dimidius recti, reliquus HGK rectus erit. similiter & reliqui. quadratum igitur est GHKL. possumus autem à principio sumentes centra GHKL, ducentesq; parallelas MN NX XO OM iungere GH HL LK KG, & dicere GHKL quadratum esse. quòd si sumentes reliquorum triangulorum centra, ipsa iungamus, ostendentur & reliqua quadrata esse, habebimusq; in dato octaedro descriptum cubum. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam igitur æquilaterum est ABC triangulum, recta linea, quæ à puncto A A
ducitur ad H centrum circuli circa triangulum ABC descripti bifariam secat trianguli angulum, qui est ad A. ęqualis igitur est MH ipsi HN] *Superius enim demonstratū est rectam lineam ab angulo trianguli ęquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum*

describitur

describitur basim bifariam secare. sequitur etiam hoc ex demonstratis in decima primi libri. quod si per centrum H ducatur MN ipsi BC parallela, demonstrabitur eadem ratione MH aequalem esse ipsi HN, cum MA ipsi AN sit aequalis, fiunt enim triangula BAC MAN inter se similia.

B Quoniam autem NM est æqualis MO, & MO ipsi OX, erit & HM æqualis MG, & GO ipsi OK] *Cum enim rectae lineae NM MO parallelae sint ipsis CB BE, erit triangulum AMN triangulo ABC simile, & triangulum AMO simile triangulo ABE. vt igitur CB ad BA, ita est NM ad MA. & vt AB ad BE, ita AM ad MO. quare ex aequali vt CB ad BE, ita NM ad MO. sed CB est aequalis ipsi BE; ponitur enim BCDE quadratum. ergo & MN ipsi MO est ęqualis. & eadem ratione MO ipsi OX aequalis demonstrabitur. est autem HM dimidia ipsius MN, & MG dimidia ipsius MO. quare sequitur HM ipsi MG aequalem esse, & ita GO ęqualem ipsi OK.*

C Suntq; anguli HMG GOK recti] *Quoniam enim rectae lineae NM MO parallelae sint ipsis CB BE, atque est angulus CBE rectus; & NMO angulus rectus erit, ex 10 vndecimi.*

D Ergo HG ipsi GK est æqualis[*Ex 4 primi.*

E Cum igitur parallelogrammum sit GHKL in vno erit plano] **Omne enim parallelogrammum est in vno plano.**

Sit parallelogrammum ABCD, & iungantur AC BD, quae se se in puncto E secent. erit triangulum ABC in vno plano ex 2 undecimi. itemq; in vno plano. triangulum ACD. sed et triangulum BCD est in vno plano. quare triangulum DEC, hoc est totum triangulum ACD est in eodem plano, in quo triangulum BEC, hoc est ipsum ABC. totum igitur parallelogramum ABCD in uno plano erit. quod oportebat demonstrare.

F Et cum vterque angulorum MGH OGK sit dimidius recti, reliquus HGK rectus erit] *Sunt enim triangula HMG GOK aequicruria, et anguli ad M, et O recti; ut demonstratum iam est.*

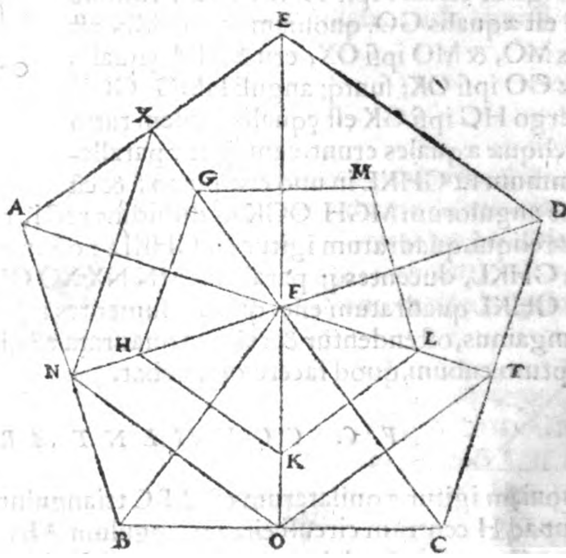
Ex iam demonstratis apparet quomodo in dato octaedro pyramis describatur. *Si enim in dato octaedro cubum, et rursus in cubo pyramidem describamus, et pyramis in dato octaedro descripta erit.*

A

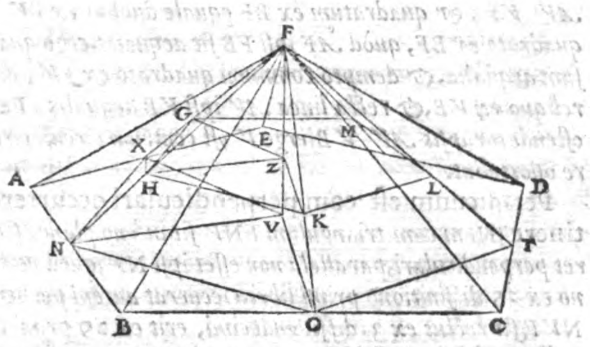
PROBLEMA V. PROPOSITIO V.

In dato icosaedro dodecaedrum describere.

A Exponatur pentagonum icosaedri ABCDE, & sumantur centra circulorū, qui sunt circa triãgula AFE AFB BFC CFD DFE, uidelicet GHKLM, iunganturq; GH HK KL LM MG. & rursus iũctæ FG FH FK producãtur ad pũcta XNO, quæ
B rectas lineas EA AB BC in XNO pũctis bifa
C riam secabũt: atq; erit vt XN ad NO, ita GH
D ad HK. ęqualis igitur est & HN ipsi KO. similiter autem & reli-



qua



qua pentagoni GHKLM latera æqualia ostendentur. Dico & æquiangulum esse. Quoniam enim duæ XN NO parallelæ duabus GH HK æquales angulos continent, & reliqua manifesta sunt. E Intelligatur à puncto F ad planum pẽtagoni ABCDE ducta perpẽdicularis, quæ cadet in centrũ circuli circa pẽtagonũ descripti. F si igitur à pũcto N ad punctum, in quod dicta perpendicularis cadit, rectam lineã ducamus, H & per H ducamus ipsi parallelam, perspicuum est eam perpendiculari occurrere, & cum ipsa rectum angulum continere. G Rursus si à punctis XO ad cẽtrum circuli circa pentagonum descripti rectas lineas iungamus, & à puncto, in quo linea per H ducta perpendiculari occurit ad G K rectas lineas ducamus, manifestũ H est ipsas cum eadem perpendiculari rectos angulos continere. K Ex quo perspicue cõstat pentagonum GHKLM in vno esse plano.

F. C. COMMENTARIVS.

A Exponatur pentagonum icosaedri ABCDE] *Hoc est pentagonum descriptum in circulo, à quo icosaedrum ortum habet, vt in 16 tertijdecimi.*

B Quę rectas lineas EA AB BC in X N O punctis bifariam secabunt] *Ex ijs, quae nos in antecedente demonstrauimus.*

C Atque erit vt XN ad NO, ita GH ad HK] *Quoniam enim triangula AFE AFB BFC aequilatera sunt, & aequalia; erunt perpendiculares, quae ab angulo F ad basim ducuntur, videlicet FX FN FO inter se aequales. latus enim trianguli aequilateri ad perpendicularem, quae ab angulo ad basim ducitur, eam proportionem habet, quam 4 ad 3, vt nos demonstrauimus ad 12 tertijdecimi. Rursus quoniam GHK sunt centra circulorum, qui circa triangula describuntur, erũt & ipsae, quae ex centris FG FH FK aequales. ergo & reliquae aequales sunt, nempe GX HN KO. sunt autem aequales EA AB BC: & earum dimidiae EX XA AN NB BO OC. cũ igitur duo latera trianguli ANX, videlicet XA AN aequalia sint duobus lateribus NB BO trianguli BON; & anguli ad AB sint aequales, ponitur enim pentagonum ABCDE aequilaterum, & aequiangulum: erit & basis XN basi NO aequalis. sed vt FG ad GX, ita est FH ad HN: est enim vtraque vtriusque dupla, vt ad primam quartidecimi demonstratum est. ergo GH parallela est ipsi XN. & eadem ratione HK ipsi NO est parallela. triangulum igitur FGH simile est triangnlo FXN, & triangulum FHK simile ipsi FNO: ideoq; vt NX ad HG, ita est NF ad FH. vt autem NF ad FH, ita NO ad HK. quare vt NX ad HG, ita NO ad HK: & permutando vt XN ad NO, ita GH ad HK. sunt autem aequales XN NO. ergo & GH HK aequales sint necesse est.*

D Aequalis igitur est & HN ipsi KO] *Vide ne potius legendum sit aequalis igitur est & GH ipsi HK propter ea, quae sequuntur.*

E Quoniam enim duæ XN NO parallelæ duabus GH HK æquales angulos continent: & reliqua manifesta sunt] *Nam cum duae XN NO se se contingentes duabus GH HK se se contingentibus sint parallelae, non autem in eodem plano; aequales angulos continebunt.* 10. undecimi *ergo angulus GHK est aequalis angulo XNO. & similiter bifariam secta CD in T, & iuncta OT, erit angulus HKL aequalis angulo NOT. sed anguli XNO NOT sunt aequales, ut monstrabitur. ergo & GHK HKL anguli aequales erunt. & similiter reliqui. Quoniam enim triangula AXN BON CTO aequicruria sunt similia, & aequalia, erũt anguli AXN ANX BNO BON COT inter se ęquales. ergo reliquus ex duobus rectis XNO est aeqnalis reliquo NOT itemq; reliqui aequales ostendentur.*

F Quæ cadet in centrum circuli circa pentagonũ descripti] *Cadat enim in punctum V;*

&

3.dif.undecimi. *& inte lligatur iunctae AV BV CV. Quoniã igitur FV perpendicularis est ad planũ pentagoni, erunt anguli AVF BVF CVF recti; & ob id quadratum ex AF aequale duobus quadratis ex AV VF: & quadratum ex BF ęquale duobus ex BV VF. sed quadratum ex AF est aequale*
47.primi. *quadrato ex BF, quòd AF ipsi FB sit aequalis. ergo quadrata ex AV VF quadratis ex BV VF sunt aequalia, & dempto communi quadrato ex FV, erit reliquum quadratum ex AV aequale reliquo ex VB, & recta linea AV ipsi VB aequalis. Eadem ratione & recta linea CV aequalis*
9.tertij. *ostendetur ipsis AV VB. ergo V est centrum circuli circa pentagonum descripti. quod demonstrare oportebat.*

G Perspicuum est eam perpendiculari occurrere, & cum ipsa rectum angulum con
2.undecimi. tinere] *Nam cum triangulum FNV sit in vno plano, si recta linea à puncto H ducta non occureret perpendiculari, parallela non esset ipsi NV, quod non ponitur. sunt enim parallelę in eodem plano ex 35 diffinitione primi libri. Occurrat autem perpendiculari in puncto Z. cum igitur angulus NVF sit rectus ex 3. diffi. vndecimi, erit ex 29 primi & HZF rectus.*

H Manifestum est ipsas cum eadem perpendiculari rectos angulos continere] *Quo-*
2.sexti. *niam n. HZ est parallela ipsi NV; erit ut FZ ad ZV, ita FH ad HN. sed vt FH ad HN, ita FG ad*
11.quinti. *GX. vt igitur FZ ad ZV, ita FG ad GX. quare GZ est parallela ipsi XV; angulusq́; GZF est rectus, nempe ipsi recto XVF aequalis. & eadem ratione angulus KZF rectus erit: iunctisq́; LZ MZ similiter demonstrabitur angulos LZF MZF esse rectos.*

K Ex quo perspicue constat pentagonum GHKLM in vno esse plano] *Ex quinta undecimi. nã recta linea FZ tribus rectis lineis se se tangentibus ZG ZH ZK ad rectos angulos insistit. Si igitur reliquis icosaedri angulis eodem modo pentagona subtendemus in dato icosaedro dodecaedrum descriptum erit.*

De quinque figurarum lateribus, & angulis.

Oportet autem scire, si quis interroget nos, quot latera icosaedrum habeat, ita respondendum esse. Patet icosaedrum contineri viginti triangulis, & vnumquodque triangulum ex tribus rectis lineis constare. multiplicabimus igitur viginti triangula per numerum laterum trianguli. fient sexaginta; cuius dimidium triginta. similiter autem & in dodecaedro. quoniam enim duodecim pentagona dodecaedrum continent, & vnumquodque pentagonum habet quinque rectas lineas, multiplicabimus decies quinque, & erunt sexaginta, cuius rursus dimidium triginta. dimidium autem idcirco accipimus, quòd singula latera siue sit triangulum, siue pẽtagonum, siue quadratum, vt in cubo, bis sumuntur. Eadem via, & ratione vtentes & in cubo, & in pyramide, & in octaedro latera inueniemus. si vero singularum quinque figurarum anguli inueniendi sint, rursus eadem facientes partiemur per numerum planorum, quæ vnum solidi angulum continent; vt quoniam incosaedri angulum continent quinque triangula, partiemur per quinque. erunt duodecim anguli in icosaedro. quoniam autem tria pentagona dodecaedri continent angulum, partiemnr per tria, & habebimus angulos viginti in dodecaedro. similiter in reliquis figuris anguli inuenientur.

De inclinatione planorum, quæ singulas quinque figuras continent.

Quęsitum est quo modo in vnaquaque solidarum quinque figurarum quolibet plano dato eorum, quæ ipsam continent, inclinatio inueniatur. Inuentio autem, vt narrauit Isidorus magnus præceptor noster, hoc modo se habet. In cubo quidem plana, quæ ipsum continent, ad rectos inter se angulos inclinari manifestum est. In pyramide vero exposito vno triangulo centris quidem terminis vnius lateris, interuallo autem recta linea, quę à vertice trianguli ad basim perpendicularis ducitur, circumferentiæ descriptæ se mutuo secent; & à sectione ad centra iunctę rectæ lineæ continebunt inclinationem planorum, quę pyramidem comprehendunt. At in octaedro à latere trianguli descripto quadrato, & centris quidem terminis diametri, interuallo autem similiter perpendiculari, quæ à uertice trianguli ad basim ducitur; describantur circumferentiæ; & rursus rectæ lineę à communi sectione ad centra iunctæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis eius, quam inquirimus. In icosaedro autem à latere trianguli descripto pentagono, iungatur recta linea, quę duobus lateribus subtenditur: & centris quidē terminis eius, interualloq; perpendiculari ipsius trianguli descriptis circumferentijs rectæ lineę à communi sectione ad centra iunctę continebunt similiter angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum ipsius icosaedri. Denique in dodecaedro exposito vno pentagono, & iuncta similiter recta linea, quę duobus lateribus subtenditur, centris quidem terminis ipsius, interuallo autem perpendiculari, quæ à bipartita sectione ad latus pētagoni ipsi parallelum ducitur; describantur circumferentiæ; & à puncto, in quo conueniunt ad centra similiter iunctæ rectæ lineę continebunt reliquum ex duobus rectis, inclinationis planorum dodecaedri.

Cubi planorum inclinatio.

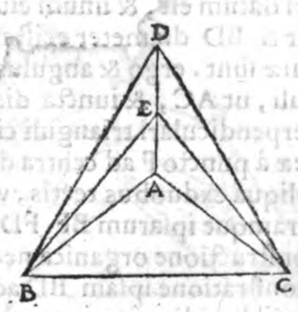
Pyramidis.

Octaedri planorum inclinatio.

Icosaedri planorum inclinatio.

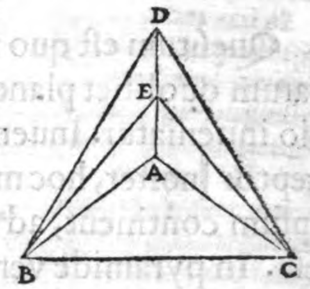
Dodecaedri planorum inclinatio.

Hunc quidem vir ille clarissimus de prędictis sermonem habuit, cum demonstratio eorum sibi manifesta videretur. sed vt contemplatio demonstratiua perspicue appareat, sermonem in vnoquoque explicabo, & primum in pyramide.

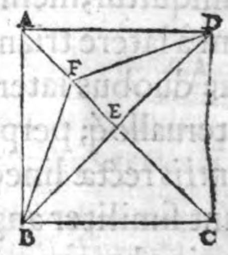


A

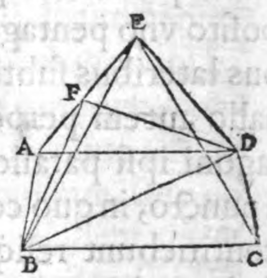
Intelligatur pyramis quattuor triangulis æquilateris contenta ABCD, cuius basis ABC, & vertex D punctum. secto autem latere AD bifariam in E, iungantur BE EC. Et quoniam æquilatera sunt ADB ADC triangula, & bifariam secta est AD, erunt BE EC ad ipsam AD perpendiculares. Dico angulum BEC acutum esse.



Quoniam enim AC dupla est ipsius AE, erit quadratum ex AC quadrati ex AE quadruplum. Sed quadratum ex AC æquale est quadratis ex AE EC, quorum
47.primi.
B quadratum ex AC ad quadratũ ex CE proportionem
C habet, quam 4 ad 3: atque est CE ipsi EB æqualis. quadratum igitur ex BC minus est quadratis ex BE EC; ideoque angulus BEC est acutus. quòd cum duorum planorum ABD ADC communis sectio sit AD, & communi sectioni ad rectos angulos occurrant in vtroque planorum rectę lineæ BE EC, quæ acutum angulum continent. erit angulus BEC planorum inclina-
D tio, atque est data; datur enim BC latus existens trian-
E guli, & utraque ipsarum BE EC est perpendicularis trianguli æquilateri. centris igitur BC, hoc est terminis vnius lateris, & interuallo trianguli perpendiculari descriptę circumferentiæ se inuicem secent in puncto E: & ab eo ad BC iunctæ rectæ lineæ planorum inclinationem continebunt. hoc autem est, quod dicebatur. atque illud (centris quidem BC, interuallo autem trianguli perpendiculari descripti circuli se mutuo secent,) manifestum est. vtraque enim BE EC maior est, quàm dimidia ipsius BC: & centris BC, & interuallo ipsius BC dimidia descripti circuli se se tangunt. si autem minor sit, neque se tangunt, neque secant: quòd si maior omnino secant; & ita de pyramide sermo & manifestus, & demonstrationibus congruens apparet.

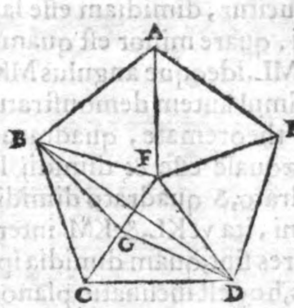


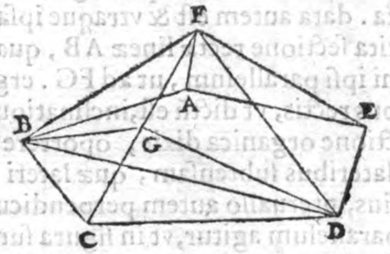
Intelligatur rursus in quadrato ABCD pyramis verticem habens punctum E, & continentia ipsam præter basim triangula æquilatera. erit autem ABCDE pyramis dimidia octaedri. secetur latus vnius trianguli AE bifariam in F: & BF FD iungantur. sunt igitur BF FD & æquales inter se, & ad ipsam AE perpendiculares. Dico angulum BFD obtusum esse. iungatur enim BD; & quoniam quadratum est AC, cuius diameter BD, erit quadratum ex BD quadrari ex DA duplum. quadratum autem ex DA ad quadratum ex DF proportionem habet, vt proxime dictum est, quam 4 ad 3. ergo & quadratum ex BD ad quadratum ex DF proportiouem ha-
F bebit, quam 8 ad 3. est autem DF æqualis FB. quadratum igitur ex BD maius est quadratis ex BF FD, ac propterea angulus BFD est obtusus. & quoniam duorum planorum ABE ADE se inuicem secantium communis sectio est AE, & ipsi ad rectos angulos in vtroque plano du-
G ctæ sunt BF FD, angulum obtusum continentes; erit angulus BFD reliquus ex duobus rectis, inclinationis planorum ABE ADE. si igitur angulus BFD datus sit, & dicta inclinatio dabitur. Itaque quoniam triangulũ octae-
H dri datum est, & unum eius latus est AD, à quo quadratum AC describitur; datur & BD diameter existens quadrati. sed & BF FD trianguli perpendiculares datæ sunt. ergo & angulus BFE dabitur. descripto igitur quadrato à latere trianguli, ut AC, & iuncta diametro BD, si centris quidem BD; interuallo autem perpendiculari trianguli circulos describamus, se mutuo secabunt in F: & rectę lineæ à puncto F ad centra ductæ continebunt inclinationem BFD, quæ quidem est reliqua ex duobus rectis, vt dictum est, inclinationis planorum. & hoc loco patet vtramque ipsarum BF FD maiorem esse, quàm ipsius BD dimidiam. ideoque in constructione organica necesse est circulos se mutuo secare. constat etiam ex demonstratione ipsam BD ad DF potentia proportionem habere. quam habet 8 ad 3, & dimidiæ eius potentia esse quadruplam. ergo utraque ipsarum BF FD ma-

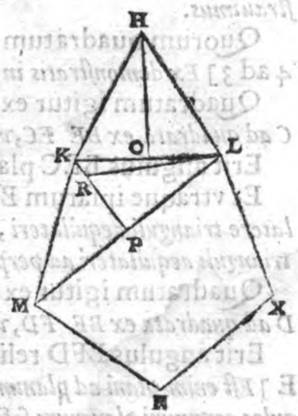


ior est quàm dimidia ipsius BD. & hęc quidem de octaedro dicta sint.

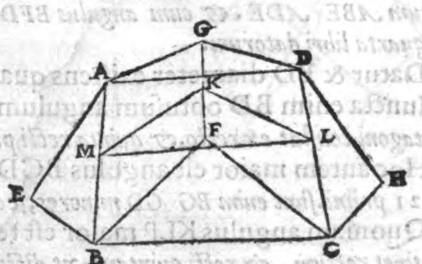
In icosaedro autem intelligatur pentagonum ęquilaterum ABCDE, & in hoc pyramis uerticē habens punctum F, ita vt continentia ipsam triangula sint ęquilatera. erit ABCDE pyramis figuræ icosaedri pars. secetur latus unius trianguli FC bifariam in G, & BG GD iungantur. erunt utique & æquales, & ad ipsam FC perpendiculares. Dico angulum BGD obtusum esse, quod per se se manifesto constat. Iuncta enim BD obtusum angulum BCD pentagoni subtēdit: hoc autem maior est angulus BGD: nam BG GD ipsis BC CD sunt minores. similiter ijs, quę proxime dicta sunt, patet angulum BGD esse eum, qui relinquitur ex duobus rectis inclinationis BFC CFD triangulorum. hoc autem dato, dabitur & planorum icosaedri inclinatio. à latere enim trianguli icosaedri descripto pentagono, & recta linea, quæ duobus pentagoni lateribus subtenditur, vt in figura est BD data: & similiter datis BG GC perpendicularibus triangulorum, dabitur & BGD angulus. nam si centris quidem terminis ipsius BD, quę duobus pentagoni lateribus subtenditur, interuallo autem perpendiculari trianguli circuli describantur, se inuicem secabunt, vt in G: & rectæ lineę à puncto G ad centra BD ductæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum. & hoc loco ex figura manifestum est vtramque BG GD maiorem esse, quàm dimidiam ipsius BD. quamquam ita esse ex constructione organica demonstrari potest. intelligatur enim seorsum triangulum ęquilaterum HKL, & ab ipsa KL pentagonum describatur KMNXL: iunctaque ML ducatur HO perpendicularis trianguli HKL. Dico HO maiorem esse dimidia ipsius ML, quæ inclinationē planorum subtendit. ducta enim à puncto K ad ML perpendiculari KP, quoniā angulus KLP maior est tertia parte recti, hoc est maior angulo KHO; constituatur angulo KHO æqualis angulus PLR. ergo PL est perpendicularis æquilateri trianguli, cuius latus est RL; ac propterea quadratum ex RL ad quadratum ex LP proportionem habet, quam 4 ad 3. sed maior est KL quàm LR. ergo quadratum ex KL ad quadratū ex LP maiorem habet proportionem, quam 4 ad 3. habet autem & ad quadratum ex HO proportionem eam, quam 4 ad 3. ergo KL ad LP maiorem proportionem habet, quā ad HO. maior igitur est HO quàm LP.

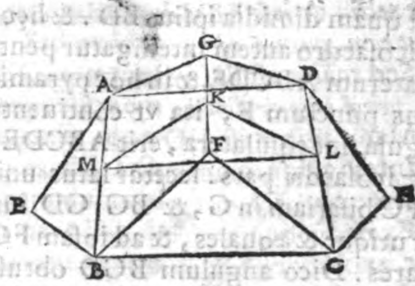






In dodecaedro autem hoc modo. intelligatur unum cubi quadratum, à quo dodecaedrum describitur ABCD, & duo plana dodecaedri AEBFG GDHCF. Dico & sic datam esse duorum pētagonorum inclinationem. secetur FG bifariam in K; & à puncto K ipsi FG ad rectos angulos ducantur in vtroque planorum KL KM: & ML iungatur. Itaque primum dico angulum MKL obtusum esse. ostensum enim est in tertiodecimo libro elementorum, & in constitutione do-





decaedri, rectam lineam, quæ à puncto K ad quadratum ABCD perpendicularis ducitur, dimidiam esse lateris pentagoni. quare minor est quàm dimidia ipsius ML. ideoque angulus MKL est obtusus. simul autem demonstratum est in eodem theoremate, quadratum quidẽ ex KL æquale esse & dimidij lateris cubi quadrato, & quadrato dimidij lateris pẽtagoni, ita vt KL, & KM inter se æquales maiores sint, quàm dimidia ipsius ML. angulo igitur MKL dato reliquus ex duobus rectis, hoc est inclinatio planorum data erit. Itaque quoniam latus quadrati ABCD duobus lateribus pentagoni subtenditur, & datũ est pentagonum; erit & ML data. data autem est & vtraque ipsarum MK KL; perpendiculares enim sunt à bipartita sectione rectæ lineæ AB, quæ duobus lateribus subtenditur ad latus pentagoni ipsi paralleinm, ut ad FG. ergo angulus LKM datus est, nempe reliquus ex duobus rectis, vt dictũ est, inclinationis eius, quã inquirimus. pulchre igitur in constructione organica dixit, oportere dato pentagono iungere rectam lineam duobus lateribus subtensam, quæ lateri cubi est æqualis: & centris quidem terminis ipsius, interuallo autem perpendiculari, quę à bipartita sectione ad latus pentagoni parallelum agitur, vt in figura sunt KL KM, describere circumferentias, atque à pũcto, in quo conueniunt ad centra rectas lineas ducere, quę continent angulum reliquum ex duobus rectis, inclinationis planorum. at uero perpendicularem KM maiorem esse dimidia ipsius ML iam dictum est, vt in elemẽtis simul est demonstratũ.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam ęquilatera sunt ADB ADC triangula, & bifariam secta est AD, erũt BE EC ad ipsam AD perpendiculares] *Ex ijs, quae nos ad 12 tertijdecimi libri demonstrauimus.*

B Quorum quadratum ex AC ad quadratum ex CE proportionem habet, quam 4 ad 3] *Ex demonstratis in eodem loco.*

C Quadratum igitur ex BC minus est quadratis ex BE EC] *Est enim quadratum ex BC ad quadrata ex BE EC, vt 4 ad 6.*

D Erit angulus BEC planorum inclinatio] *Ex 6. diffinitione vndecimi libri.*

E Et vtraque ipsarum BE EC est perpendicularis trianguli ęquilateri] *Dato autem latere trianguli aequilateri, & perpendicularis dabitur ex secunda libri datorum. est enim latus trianguli aequilateri ad perpendicularem, vt 4 ad 3.*

F Quadratum igitur ex BD maius est quadratis ex BF FD] *Est enim quadratum ex BD ad quadrata ex BF FD, vt 8 ad 6.*

G Erit angulus BFD reliquus ex duobus rectis inclinationis planorum ABE ADE] *Est enim plani ad planum inclinatio acutus angulus rectis lineis contentus, quae ad rectos angulos communi planorum sectioni ad vnum ipsius punctum in vtroque planorum ducuntur. quare dempto BFD angulo obtuso ex duobus rectis relinquetur acutus angulus, qui est inclinationis planorum ABE ADE. & cum angulus BFD datus sit, & inclinatio planorum detur necesse est ex quarta libri datorum.*

H Datur & BD diameter existens quadrati] *Ex 26 libri datorum.*

K Iuncta enim BD obtusum angulum BCD pentagoni subtendit] *Angulus namque pentagoni constat ex recto, & quinta recti parte.*

L Hoc autem maior est angulus BGD, nam BG GD ipsis BC CD sunt minores] *Ex 21 primi. sunt enim BG GD minores, sed maiorem angulum continent.*

M Quoniam angulus KLP maior est tertia parte recti] *Angulus enim pentagoni MKL continet rectum, & recti quintam, vt dictum est. ergo anguli KML KLM sunt quattuor quin*

tae

tae recti, & ipse KLM duae quintae. duae autem quintae ad tertiam recti proportionem habent eam, quam 6 ad 5.

Sed maior est KL quàm LR] *Iuncta enim MR, erunt duae MK KL maiores MR RL ex 21 primi. ergo & dimidia KL quàm dimidia LR maior erit.* N

Maior igitur est HO quàm LP] *Ex 10 quinti.* O

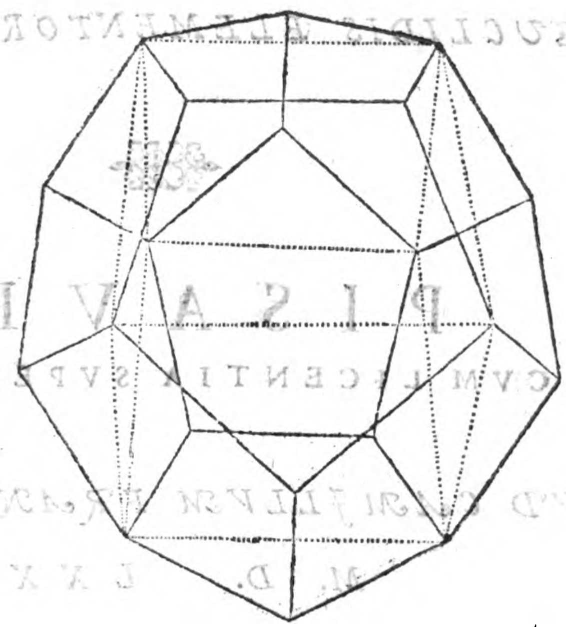
Intelligatur unum cubi quadratum, à quo dodecaedrum describitur] *Ad constitutionem enim dodecaedri vtitur ipsius cubi quadratis, vt in 17 tertijdecimi apparet.* P

Ex ijs aūt quæ proxime tradita sunt, & ex demonstratis in 17 tertjdecimi libri cōstat, quomodo in dato dodecaedro cubus describatur.

Quoniam enim in dodecaedri constitutione cubi planis vtimur, & ad singula eius latera singula pentagona dodecaedri describimus, si in dodecaedro iam facto apposite ducamus rectas lineas, quae duobus cuiusque pentagoni lateribus subtendantur, cubus ipse constitutus erit, vt in sequenti figura apparere potest.

Ex quibus iam perspicuum est quomodo in dato dodecaedro tum pyramis ipsa, tum octaedrum describatur.

Nam si in dodecaedro cubum, & rursus in cubo pyramidem vel octaedrum describamus, & pyramis, & octaedrum in dato dodecaedro descripta sint necesse est.



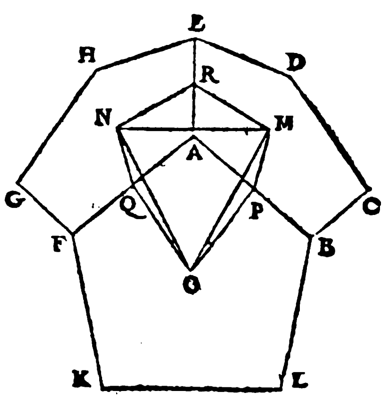
In dato icosaedro cubum describere.

Primum in icosahedro dodecaedrum describemus, vt in 5 huius dictum est; deinde in dodecaedro cubum, & ita cubus in dato icosaedro descriptus erit.

In dato icosaedro pyramidem describere.

Si enim describamus ex antecedenti in icosaedro cubum, & in cubo pyramidem ex prima huius, erit pyramis quoque in icosaedro descripta.

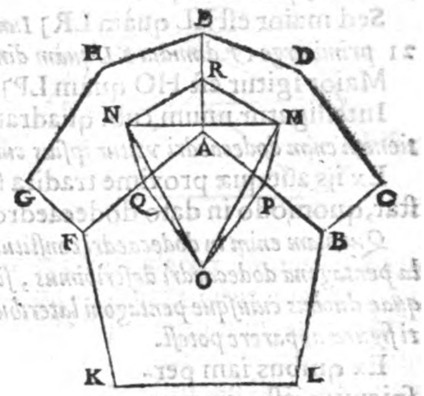
In dato dodecaedro icosaedrum describere.



Exponatur dodecaedri angulus aliquis A, contentus tribus pentagonis ABCDE AFGHE, AFKLB: sumanturq; centra circulorum, qui circa pentagona describuntur MNO, & ab ipsis ad latera pentagonorum perpendiculares ducantur MP OP NQ OQ MR NR: & MN NO OM iungantur. erunt ex iam demonstratis MPO OQN NRM anguli inclinationis planorum ipsius dodecaedri, & idcirco inter se aequales:

itemq; aequales perpendiculares ipsae. quare trianguli MOP duo latera MP PO aequalia sunt duobus lateribus MR RN trianguli MNR: & angulus MPO est aequalis angulo MRN. basis igitur OM est aequalis basi MN. & ita demonstrabitur basis ON ipsi NM aequalis. ex quibus constat triangulum MNO aequiangulum esse. ergo si reliquis dodecaedri angulis triangula aequilatera eodem modo subtendantur, descriptum erit icosaedrum. sunt enim omnes anguli ipsius dodecaedri numero viginti, quot sunt icosaedri triangula. In dato igitur dodecaedro icosaedrum descriptum est. quod facere oportebat.

4. primi.



EVCLIDIS ELEMENTORVM FINIS.

PISAVRI.

CVM LICENTIA SVPERIORVM.

APVD CAMILLVM FRANCISCHINVM.

M. D. LXXII.